Arithmetische Fuchssche Gruppen der Signatur $(2; -)$

Peter Ackermann

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften

Dem Fachbereich Mathematik der Universität Dortmund vorgelegt
im Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ihr großes Interesse verdanken die Fuchsschen Gruppen vornehmlich der Tatsache, dass sie ein Bindeglied bilden zwischen verschiedenen Gebieten der Mathematik wie Gruppentheorie, Funktionentheorie, Geometrie und Topologie. Sie sind definiert als diskrete Untergruppen der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, welche wiederum isomorph ist zur Gruppe der auf der oberen Halbebene operierenden Möbiustransformationen. Versieht man die obere Halbebene mit der hyperbolischen Geometrie, so ist diese Gruppe gerade die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien. Den diskreten Untergruppen dieser Gruppe kann man Fundamentalbereiche zuordnen; die Bilder eines solchen Fundamentalbereiches bilden eine Überdeckung der oberen Halbebene. Bildet man den Quotienten der oberen Halbebene modulo einer Fuchsschen Gruppe, so erhält man eine Riemannsche Fläche, welche in Abhängigkeit von der Fuchsschen Gruppe Verzweigungspunkte, Spitzen und Ränder aufweisen kann. Man spricht dann von Orbifaltigkeiten. Umgekehrt lässt sich jede orientierbare Riemannsche Fläche außer Sphäre, Torus, Ebene und punktierter Ebene darstellen als Quotient der oberen Halbebene modulo einer Fuchsschen Gruppe. Zwei Orbifaltigkeiten sind vom gleichen Typ genau dann, wenn diese Fuchsschen Gruppen isomorph sind, und sie sind biholomorph genau dann, wenn die Fuchsschen Gruppen in $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ konjugiert sind. Umgekehrt lassen die geometrischen Eigenschaften Rückschlüsse auf die algebraischen Eigenschaften der Fuchsschen Gruppen zu: Indem man die zugehörigen Fundamentalbereiche betrachtet, kann man einfache Präsentierungen für Fuchssche Gruppen angeben. Weiterhin kann man aus ihren geometrischen Eigenschaften folgern, dass kokompakte Fuchssche Gruppen hyperbolisch sind und somit einen Dehn-Algorithmus für das Wort– und Konjugationsproblem besitzen (siehe [14]).

Speziell die in dieser Arbeit untersuchten Flächengruppen wurden schon früh als Fundamentalgruppen beim Studium der orientierbaren Flächen betrachtet. Es wurde gezeigt, dass Untergruppen solcher Gruppen entweder freie Gruppen oder selbst Fundamentalgruppen von Flächen sind. Diese Verbindung zur Topologie darf als eine der ersten Motivationen angesehen werden, Gruppen auf kombinatorische Weise zu untersuchen (vgl. [10], [26]).

Die Klasse der arithmetischen Fuchsschen Gruppen stellt eine Verbindung zu einem weiteren Gebiet der Mathematik her, der Zahlentheorie. Arithmetische Fuchssche Gruppen wurden schon von Fricke und Klein in [11] betrachtet. Dort wurden sie über ternäre quadratische Formen definiert. In allgemeinerer Form wurden arithmetische Untergruppen linearer algebraischer Gruppen von Borel und Harish-Chandra in [6] eingeführt, ihre Definition ist für den Spezialfall der Fuchsschen Gruppen äquivalent zur ersteren. Für eine ausführliche Behandlung der verschiedenen Definitionen siehe [38].

Für diverse Signaturen wurden schon arithmetische Fuchssche Gruppen bestimmt. Takeuchi hat in [45] alle arithmetischen Dreiecksgruppen und in [47] alle arithmetischen Fuchsschen Gruppen der Signatur $(1; e), 2 \leq e \leq \infty$, bestimmt. Maclachlan und Rosenberger klassifizieren in [23] und [24] alle arithmetischen Fuchsschen Gruppen der Signatur $(0; 2, 2, 2, q)$, q ungerade, die zugehörigen Spurtripel wurden in [2] berechnet. Damit sind alle zweielementig erzeugten arithmetischen Fuchsschen Gruppen bestimmt (vgl. [9]). Für Fuchssche Gruppen der Signatur $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$, die so genannten Vierecksgruppen, gibt es Teilresultate. Takeuchi hat in [48] und [49] diejenigen arithmetischen Vierecksgruppen bestimmt, die Untergruppen der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sind, Rosenberger, Nakanishi und Näätänen klassifizieren sämtliche nicht-kokompakte arithmetische Vierecksgruppen. Teilresultate für kokompakte arithmetische Vierecksgruppen finden sich in [42] und [43]. Baer bestimmt in [4] die kokompakten Vierecksgruppen mit höchstens einer geraden Periode. Die Berechnung dieser Gruppen gestaltet sich leichter, weil sie von Quaternionenalgebren abgeleitet sind.

Bei der Bestimmung all dieser arithmetischen Gruppen kamen hauptsächlich zwei verschiedene Strategien zum Zuge. In der einen wurden die arithmetischen Gruppen durch Untersuchung der in Frage kommenden assoziierten Quaternionenalgebren und deren Ordnungen bestimmt. In der anderen wurde Takeuchis Charakterisierung arithmetischer Fuchsscher Gruppen über Spuren aus [44] benutzt. Dazu wurden die $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklassen der Fuchsschen Gruppen dieser Signaturen mit Hilfe von Spurtupeln beschrieben und sodann systematisch diejenigen Spurtupel berechnet, die arithmetischen Gruppen entsprechen. Beide Strategien stoßen bei der Berechnung arithmetischer Fuchsscher Gruppen Γ der Signatur $(2; -)$ auf Probleme. Zum einen hat die für die Berechnung wichtige Untergruppe $\Gamma^{(2)}$, die von den Quadraten in Γ erzeugt wird, Signatur $(17; -)$ und mit 16 einen relativ großen Index in Γ. Das führt zum einen dazu, dass das Kovolumen dieser Gruppe recht groß ist und dadurch sehr viele Quaternionenalgebren als zu einer Fuchsschen Gruppe der Signatur $(2; -)$ assoziiert in Frage kommen. Zusätzlich impliziert dies für die erste Strategie, dass, wenn man berechnet hat, dass eine Fuchssche Gruppe der Signatur $(17; -)$ von einer bestimmten Quaternionenalgebra abgeleitet ist, man noch verifizieren muss, dass diese konkrete Untergruppe der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tatsächlich in einer Fuchsschen Gruppe der Signatur $(2; -)$ enthalten ist. Einerseits ist diese Rechnung auf Grund des großen Index recht aufwändig. Andererseits ist die Dimension des Teichmüllerraumes zur Signatur $(17; -)$ mit 96 sehr viel größer als 6, die Dimension des Teichmüllerraumes zur Signatur $(2; -)$, so dass zu erwarten ist, dass in vielen Fällen eine solche Gruppe nicht in einer Gruppe der Signatur $(2; -)$ enthalten ist. Dieses Problem kann man in einigen Fällen umgehen, indem man in der entsprechenden Kommensurabilitätsklasse diejenigen Gruppen betrachtet, die minimales Kovolumen haben (vgl. [7], [22]). Die Dimension des Teichmüllerraumes wirft auch ein Problem für die zweite Strategie auf. Zwar ist die Dimension für die Signatur $(2; -)$ im Verhältnis zu der zur Signatur $(17; -)$ klein, aber immer noch groß im Verhältnis zur Dimension der Teichmüllerräume zu den Signaturen, für die bisher arithmetische Fuchssche Gruppen bestimmt wurden. Für Dreiecksgruppen ist die Dimension 0, für die anderen betrachteten Signaturen ist sie 2. Durch die größere Dimension wird die Beschreibung der $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklassen durch Spurtupel schwieriger. Zwar gelingt es, zu den $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklassen Spurtupel in einer Art Normalform anzugeben, die bis auf eine Lebesgue-Nullmenge im Teichmüllerraum eindeutig ist. Es ist aber nicht ersichtlich, wie man diese „Normalformen“ benutzen kann, um wie bei den anderen betrachteten Signaturen systematisch alle arithmetischen Fuchsschen Gruppen der Signatur $(2; -)$ aufzulisten.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Kapitel 2 führt im ersten Abschnitt allgemein in die Theorie der Fuchsschen Gruppen ein, im zweiten wird das Konzept der arithmetischen Fuchsschen Gruppen vorgestellt.

Kapitel 3 beschäftigt sich dann mit den arithmetischen Fuchsschen Gruppen der Signatur $(2; -)$. Es werden zunächst Schranken an den Körpergrad und die Diskriminante der total reellen Zahlkörper berechnet, über denen die zu arithmetischen Fuchsschen Gruppen der Signatur $(2; -)$ assoziierten Quaternionenalgebren liegen können. Speziell wird der Fall betrachtet, dass die Gruppen von Quaternionenalgebren abgeleitet sind. In Abschnitt 3.1 werden die $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklassen Fuchsscher Gruppen der Signatur $(2; -)$ mittels Spurtupeln beschrieben. Statt Fuchssche Gruppen dieser Signatur direkt zu betrachten, wird ausgenutzt, dass deren $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklassen bijektiv denen Fuchsscher Gruppen der Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ entsprechen. Um den Teichmüllerraum über Spuren zu parametrisieren, werden Fundamentalbereiche für diese Gruppen betrachtet und aus diesen notwendige und hinreichende Bedingungen an Elemente $x_1, \ldots, x_5 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ dafür abgeleitet, dass diese eine Fuchssche Gruppe der Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ erzeugen. Sodann wird Maskits Konstruktion eines Fundamentalbereiches für die Teichmüller-Modulgruppe über minimale Standardketten aus [29] bzw. Griffiths Beschreibung dieses Fundamentalbereiches in [13] benutzt, um Normalformen für die den Teichmüllerraum beschreibenden Spurtupel zu erhalten, die wie bereits erwähnt allerdings nur außerhalb einer Lebesgue-Nullmenge des Teichmüllerraumes eindeutig sind. Aus der Beschreibung dieser Normalformen lässt sich direkt ein Algorithmus ableiten, der ein Spurtupel des parametrisierten Teichmüllerraumes in Normalform bringt.

Im Anschluss wird Takeuchis Beschreibung arithmetischer Fuchsscher Gruppen über Spuren in [44] bzw. die Umformulierung aus [16] benutzt, um die arithmetischen Fuchsschen Gruppen der Signatur $(2; -)$ über Spurtupel zu beschreiben, die mit der obigen Parametrisierung des Teichmüllerraumes korrespondieren. Wie oben bereits erwähnt, ist nicht klar, wie man diese Beschreibung benutzen kann, um alle arithmetischen Fuchsschen Gruppen der Signatur $(2; -)$ zu bestimmen.

In Abschnitt 3.2 wird am Beispiel der Signaturen $(1; 2)$, $(1; 3)$ und $(0; 3, 3, 3, 3)$ gezeigt, wie man den Algorithmus zur Bestimmung einer Normalform der Spurtupel des parametrisierten Teichmüllerraums benutzen kann, um arithmetische Fuchssche Gruppe der Signatur $(2; -)$ zu bestimmen, die Untergruppen bekannter arithmetischer Fuchsscher Gruppen sind.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. G. Rosenberger für die freundliche Betreuung und die interessanten Diskussionen bedanken.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Grundlegendes über Fuchssche Gruppen

Dieser Abschnitt gibt eine Einführung in die allgemeine Theorie der Fuchsschen Gruppen sowie Aspekte der hyperbolischen Geometrie der oberen Halbebene, soweit sie benötigt werden. Für Details in diesem Abschnitt sei auf [5], [19] und [28] verwiesen.

Wir beginnen mit der Definition Fuchsscher Gruppen:

Definition 2.1 *Der* $\mathbb{R}^4$ *trage die von der euklidischen Norm induzierte Topologie, die* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \mid \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1\}$ *trage als Teilraum des* $\mathbb{R}^4$ *die ererbte Topologie, und die* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm E\}$ *trage die Quotiententopologie. Eine* Fuchssche Gruppe *ist eine diskrete Untergruppe der* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. *Manchmal werden Fuchssche Gruppen auch als diskrete Untergruppen der* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *definiert, dies liefert aber keine wesentlichen Unterschiede.*

Ihr großes Interesse verdanken die Fuchsschen Gruppen vornehmlich ihrer Verbindung zur hyperbolischen Geometrie, wodurch sich zahlreiche Anwendungen ergeben. Deshalb wollen wir uns im Folgenden der hyperbolischen Geometrie der oberen Halbebene und ihrer Verbindung zu den Fuchsschen Gruppen zuwenden.

Sei $\mathcal{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x,\, y \in \mathbb{R};\, y > 0\}$ die obere komplexe Halbebene. Durch das Differential

$$ds = \frac{|dz|}{\mathrm{Im} z}$$

wird eine Metrik auf $\mathcal{H}$ definiert, die so genannte *hyperbolische Metrik*. Die Länge einer stückweise stetig differenzierbaren (kurz: C^1_{st}-) Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathcal{H}, \gamma(t) = x(t) + iy(t)$, ist gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\frac{d\gamma}{dt}|dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}}{y(t)}dt,$$

der *hyperbolische Abstand* $\rho(z_1, z_2)$ zwischen zwei Punkten $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ berechnet sich entsprechend durch

$$\rho(z_1, z_2) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist } C^1_{st}\text{-Kurve von } z_1 \text{ nach } z_2\}.$$

Im Folgenden sei $\mathcal{H}$ immer mit dieser Metrik versehen.

Bekanntermaßen operiert die $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ als so genannte Möbiustransformationen auf $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bzw. auf $\mathcal{H}$ vermöge $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$. Die Möbiustransformationen bilden eine Gruppe, welche isomorph zur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ist. Die Operation auf $\mathcal{H}$ kann man für ganz $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ erweitern, indem man für Matrizen positiver Determinante die Transformationen wie bisher definiert und für $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} < 0$ die Zuordnung $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ betrachtet. Die Menge dieser Transformationen bildet offenbar wieder eine Gruppe, welche isomorph zu $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}^*$ ist.

Im Folgenden werden wir oft keinen Unterschied machen zwischen Matrizen und den zugehörigen Transformationen.

Satz 2.2 *Die Gruppe der Isometrien auf $\mathcal{H}$ ist isomorph zur* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$, *die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien ist isomorph zur* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ *und hat Index 2 in ersterer Gruppe.*

Die Geodätischen in $\mathcal{H}$ sind die euklidischen Halbgeraden und Halbkreise jeweils orthogonal zur reellen Achse. Bekanntermaßen ist die hyperbolische Geometrie nicht euklidisch, da es zu jedem Punkt außerhalb einer gegebenen Geodätischen L unendlich viele Geodätische gibt, die diesen Punkt enthalten und L nicht schneiden. Offenbar gibt es aber zumindest zu je zwei verschiedenen Punkten z_1, z_2 eine eindeutige Geodätische, die diese miteinander verbindet. Das geodätische Segment wird mit $[z_1, z_2]$ bezeichnet.

Der hyperbolische Flächeninhalt $\mu(A)$ einer Teilmenge $A \subset \mathcal{H}$ ist gegeben durch

$$\mu(A) = \int\int_A \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Auch dieser ist natürlich invariant unter den Isometrien aus $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. Der Flächeninhalt hyperbolischer Polygone lässt sich über die Innenwinkel leicht berechnen, wobei wir unter einem hyperbolischen Polygon das Innere einer geschlossenen Jordan-Kurve $[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup \ldots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, z_1]$. verstehen.

Satz 2.3 *Der Flächeninhalt eines hyperbolischen n-Ecks A mit Innenwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ berechnet sich zu*

$$\mu(A) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Betrachten wir die Elemente der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ als Transformationen auf $\mathcal{H}$, so erhalten wir geometrische Charakterisierungen für Fuchssche Gruppen. Zunächst noch eine

Definition 2.4 *Eine Untergruppe* Γ *von* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *operiert* eigentlich diskontinuierlich *auf* $\mathcal{H}$*, falls für alle* $z \in \mathcal{H}$ *der* Γ*-Orbit von* z *lokal endlich ist, d. h. wenn für alle* $z \in \mathcal{H}$ *und alle kompakten Teilmengen* $K \subset \mathcal{H}$ *gilt, dass* $\gamma z \in K$ *für höchstens endlich viele* $\gamma \in \Gamma$.

Satz 2.5 *Sei* Γ *Untergruppe der* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$*. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Γ *ist Fuchssche Gruppe.*

(ii) Jedes Konjugat von Γ *in* $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ *ist Fuchssche Gruppe.*

(iii) Alle zyklischen Untergruppen von Γ *sind diskret.*

(iv) Ist $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* Γ *mit* $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \mathrm{id}$*, so gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass* $\gamma_n = \mathrm{id}$ *für alle* $n \geq N$.

(v) Γ *operiert eigentlich diskontinuierlich auf* $\mathcal{H}$.

(vi) Für alle $z \in \mathcal{H}$ *ist der* Γ*-Orbit diskret und der Stabilisator von* z *endlich.*

(vii) Für alle $z \in \mathcal{H}$ *ist der* Γ*-Orbit diskret.*

(viii) Für alle kompakten Teilmengen K *von* $\mathcal{H}$ *ist* $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$ *für höchstens endlich viele* $\gamma \in \Gamma$.

(ix) Für alle $z \in \mathcal{H}$ *existiert eine Umgebung* V *um* z *dergestalt, dass* $\gamma(V) \cap V \neq \emptyset$ *für höchstens endlich viele* $\gamma \in \Gamma$.

(x) Für alle $z \in \mathcal{H}$ *existiert eine Umgebung* V *um* z *dergestalt, dass* $\gamma(V) \cap V \neq \emptyset$ *schon impliziert, dass* $\gamma(z) = z$ *ist.*

Wir klassifizieren die Elemente der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ bezüglich ihrer *Spuren* bzw. Fixpunkte:

Definition 2.6 *Für* $T = \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *definiere die* Spur $\mathrm{tr}\,(T)$ *durch* $\mathrm{tr}\,(T) = |a+d|$. tr *ist wohldefiniert.* $T \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}), T \neq 1$, *heißt* elliptisch, *falls* $\mathrm{tr}\,(T) < 2$, parabolisch, *falls* $\mathrm{tr}\,(T) = 2$, *und* hyperbolisch, *falls* $\mathrm{tr}\,(T) > 2$.

Die Operation der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ lässt sich auf den Abschluss $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ von $\mathcal{H}$ in $\hat{\mathbb{C}}$ ausdehnen. Ist $T \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ hyperbolisch, so hat T genau zwei Fixpunkte in $\bar{\mathcal{H}}$, welche beide in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ liegen. Ist T parabolisch, so hat T genau einen Fixpunkt in $\bar{\mathcal{H}}$, welcher in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ liegt. Ist T elliptisch, so hat T ebenfalls genau einen Fixpunkt in $\bar{\mathcal{H}}$, dieser liegt im Inneren.

Da Konjugation mit Elementen aus $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ später noch eine wichtige Rolle spielen wird, seien hier einige elementare Beobachtungen zur Wirkung der Konjugation aufgeführt: Bildet man das Konjugat STS^{-1} eines Elementes $T \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ mit einem Element $S \in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$, so bleibt die Spur unverändert und die Fixpunkte von STS^{-1} (bzw. der Fixpunkt) sind die Bilder der Fixpunkte von T unter S. Die $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$-Konjugationsklasse eines Elementes aus $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ ist durch seine Spur eindeutig bestimmt.

Aufgrund der geometrischen Eigenschaften aus Satz 2.5 kann man für Fuchssche Gruppen so genannte *Fundamentalbereiche* betrachten:

Definition 2.7 *Sei Γ Fuchssche Gruppe. Ein* Fundamentalbereich *für Γ ist eine zusammenhängende, offene Teilmenge F von $\mathcal{H}$ mit den Eigenschaften*

(i) $F \cap \gamma(F) = \emptyset$ *für alle* $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{F}) = \mathcal{H}$, *wobei $\bar{F}$ der Abschluss von F in $\mathcal{H}$ sei.*

(iii) Der Rand von F in $\mathcal{H}$ hat hyperbolischen Flächeninhalt null.

Zu jedem $z \in \mathcal{H}$ liegt also ein Γ-äquivalenter Punkt in $\bar{F}$. Betrachtet man die Bilder von $\bar{F}$ unter Γ, so erhält man eine Pflasterung der hyperbolischen oberen Halbebene mit Fundamentalbereichen für Γ. Zwar ist der Fundamentalbereich einer Fuchsschen Gruppe nicht eindeutig bestimmt, es gilt aber zumindest:

Satz 2.8 *Seien Γ eine Fuchssche Gruppe, F und F' zwei Fundamentalbereiche für Γ und der hyperbolische Flächeninhalt $\mu(F)$ von F endlich. Dann gilt:*

(a) $\mu(F) = \mu(F')$.

(b) Ist Γ_1 Untergruppe von Γ, so existiert ein Fundamentalbereich F_1 für Γ_1. Dieser hat genau dann endlichen Flächeninhalt, wenn Γ_1 in Γ endlichen Index n hat, und in diesem Fall ist $\mu(F_1) = n\mu(F)$.

Ist der Flächeninhalt von F endlich, so heißt Γ kofinit.

Sei nun eine Fuchssche Gruppe Γ gegeben und $w_0 \in \mathcal{H}$ für kein $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ Fixpunkt (w_0 existiert wegen der Diskretheit von Γ). Dann ist

$$\begin{aligned} D_{w_0}(\Gamma) &:= \{z \in \mathcal{H} \mid \rho(z, w_0) < \rho(z, \gamma(w_0)) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma\} \\ &= \{z \in \mathcal{H} \mid \rho(z, w_0) < \rho(\gamma(z), w_0) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma\} \end{aligned}$$

ein Fundamentalbereich für Γ, der so genannte *Dirichlet-Bereich* von Γ mit Zentrum w_0. Er ist konvex und *lokal endlich*, d. h. jede kompakte Teilmenge K von $\mathcal{H}$ trifft höchstens endlich viele Γ-Translate von $\bar{F}$, was wiederum impliziert, dass $\bar{F}/\Gamma$ und $\mathcal{H}/\Gamma$ homöomorph sind. Der Dirichlet-Bereich wird in $\mathcal{H}$ berandet durch geodätische Segmente. Maximale solche Segmente nennen wir *Seiten*, die Punkte, die auf zwei Seiten liegen, nennen wir *Ecken*. Sie sind isoliert. Der Dirichlet-Bereich hat höchstens abzählbar viele Seiten und Ecken in $\mathcal{H}$. Zu jeder Seite s von D existiert ein $\gamma_s \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$, welches s auf eine Seite s' abbildet, und es ist $\gamma_{s'} = \gamma_s^{-1}$. Es kann dabei durchaus auftreten, dass $s = s'$ ist. In diesem Fall ist γ_s elliptisch und von Ordnung 2, s wird durch den Fixpunkt von γ_s halbiert, und die beiden Teilstücke werden durch γ_s vertauscht. Der Fixpunkt soll dann als Ecke und die beiden Teilstücke als Seiten angesehen werden. Liegt der Endpunkt einer Seite in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so wollen wir auch diesen als (reelle) Ecke ansehen.

Sei z_1 irgendeine Ecke von D, s_1 eine der beiden zugehörigen Seiten. Die Ecke $z_2 = g_{s_1}(z_1)$ liegt auf genau zwei Seiten, $g_{s_1}(s_1)$ und einer weiteren Seite s_2. Sei $z_3 = g_{s_2}(z_2)$. Diese Ecke liegt auf $g_{s_2}(s_2)$ und einer weiteren Seite s_3. Führe diesen Prozess so lange fort, bis für ein k gilt $z_{k+1} = z_1$. Dieser Fall tritt ein, da D lokal endlich ist und somit z_1 nur zu endlich vielen Ecken Γ-äquivalent ist. Das Tupel $(z_1, \ldots, z_k)$ heißt *Zyklus*, die Transformation $h = g_{s_k} \cdots g_{s_1}$ die zugehörige Zyklustransformation. Startet man mit einem anderen Punkt des Zyklus, so ist die zugehörige Zyklustransformation offenbar zyklisch konjugiert zu h oder h^{-1}.

Der folgende Satz fasst die Eigenschaften eines Dirichlet-Bereiches zusammen:

Satz 2.9 *Sei D ein Dirichlet-Bereich für eine Fuchssche Gruppe Γ. Dann gilt:*

(a) *Zu jeder Seite s von D existiert ein $\gamma_s \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ derart, dass s durch γ_s auf eine Seite s' abgebildet wird und gilt $\gamma_{s'} = \gamma_s^{-1}$. Γ wird von der Menge dieser γ_s erzeugt.*

(b) *Ist $C = (z_1, \ldots, z_k)$ Zyklus von D der Länge k, h die zugehörige Zyklustransformation und sind $\theta_1, \ldots, \theta_k$ die Innenwinkel in D an den Punkten $z_1, \ldots, z_k$, so ist* $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = \dfrac{2\pi}{\mathrm{ord}(h)}$.

(c) *Ist $z \in \mathcal{H}$ Fixpunkt eines elliptischen Elements aus Γ, so existiert ein $\gamma \in \Gamma$ derart, dass $\gamma(z)$ Ecke von D ist. Jedem elliptischen Zyklus von D entspricht umkehrbar eindeutig eine Konjugationsklasse der nicht-trivialen maximalen endlichen zyklischen Untergruppen von Γ. Die zu einer solchen Konjugationsklasse gehörige Gruppenordnung heiße* Periode *von Γ.*

d) *Eine reelle Ecke von D ist nie Fixpunkt eines hyperbolischen Elements aus Γ. Ist α Fixpunkt eines parabolischen Elements aus Γ, so existiert ein $\gamma \in \Gamma$ derart, dass $\gamma(\alpha)$ reelle Ecke von D ist. Jedem parabolischen Zyklus von D entspricht umkehrbar eindeutig eine Konjugationsklasse der maximalen parabolischen zyklischen Untergruppen von Γ.*

Ein Dirichlet-Bereich D hat genau dann endlichen hyperbolischen Flächeninhalt, wenn er nur endlich viele Seiten besitzt und der Rand von D in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nur endlich viele Punkte besitzt. Die Fuchssche Gruppe Γ heißt dann kofinit. Die Menge ihrer *Grenzwerte* ist gleich $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Fuchssche Gruppen mit dieser Eigenschaft heißen *von erster Art*, alle anderen *von zweiter Art*. Die Grenzwerte von Γ sind diejenigen Elemente $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, für die ein $z \in \mathcal{H}$ und eine Folge $\gamma_n \in \Gamma$ existiert mit $\gamma_n(z) \longrightarrow \alpha$. Somit sind die kofiniten Fuchsschen Gruppen genau die endlich erzeugten Fuchsschen Gruppen erster Art. Eine kofinite Fuchssche Gruppe ist *kokompakt*, d.h. $\mathcal{H}/\Gamma$ ist kompakt, genau dann, wenn D keine reellen Ecken hat, was gleichbedeutend damit ist, dass Γ keine parabolischen Elemente enthält.

Ist nun umgekehrt D ein hyperbolisches Polygon mit den Eigenschaften aus Satz 2.9, so ist D Fundamentalbereich einer Fuchsschen Gruppe. Genauer gilt Folgendes.

Satz 2.10 (Poincaré) *Sei D ein hyperbolisches Polygon mit endlich vielen Seiten in $\mathcal{H}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *Die Seiten von D werden durch Isometrien aus $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ paarweise aufeinander abgebildet, d. h. zu jeder Seite s von D gibt es eine (nicht notwendig von s verschiedene) Seite s' und ein $g_s \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ derart, dass $g_s(s) = s'$ und $g_{s'} = g_s^{-1}$.*

(ii) *$g_s(D) \cap D = \emptyset$ für alle Seiten s.*

(iii) *Für jeden Zyklus $\{z_1, \dots z_k\}$ von Ecken in $\mathcal{H}$ gilt für die Innenwinkel $\alpha(z_m)$ an diesen Ecken, dass $\sum_{m=1}^{k} \alpha(z_m) = 2\pi/t$ für eine positive ganze Zahl t.*

(iv) *An jeder Ecke in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist die Zyklustransformation parabolisch.*

Dann ist die von den Transformationen in (i) erzeugte Untergruppe G der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ Fuchssche Gruppe, und die Relationen, die man in (i) von den Transformationen der Ordnung 2 und aus (iii) für die Zyklustransformationen erhält, sind definierende Relationen für G.

In ähnlicher Form formuliert wurde dieser Satz von Poincaré in [36], letztlich lückenlos bewiesen wurde er von Maskit in [28].

Aus den Sätzen 2.9 und 2.10 zusammen mit Satz 2.3 folgt

Satz 2.11 *Sei Γ kofinite Fuchssche Gruppe und D ein Dirichlet-Bereich für Γ. Seien $m_1, m_2, \ldots, m_r$ die Perioden von Γ, wobei sie entsprechend ihrer Vielfachheit aufgezählt seien, s die Anzahl der Konjugationsklassen maximaler parabolischer zyklischer Untergruppen und g das Geschlecht von $\mathcal{H}/\Gamma$. Dann ist $(2g-2)+\sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{m_i})+s>0$, und der Flächeninhalt von $\mathcal{H}/\Gamma$ ist gegeben durch*

$$\mu(\mathcal{H}/\Gamma)=2\pi[(2g-2)+\sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{m_i})+s].$$

Γ ist genau dann kokompakt, wenn Γ keine parabolischen Elemente enthält. $(g; m_1, \ldots, m_r; s)$ heißt die Signatur *von Γ. Eine Präsentierung für Γ ist gegeben durch*

$$\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, x_1, \ldots, x_r, p_1, \ldots, p_s \mid \\ x_1^{m_1}=\ldots=x_r^{m_r}=[a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g]x_1\cdots x_r p_1\cdots p_s=\mathrm{id}\rangle,$$

wobei $[a_i,b_i]=a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}$ der Kommutator von a_i und b_i ist. Bei dieser Präsentierung stehen die a_i, b_i für hyperbolische, die x_i für elliptische und die p_i für parabolische Elemente.

Der folgende Satz von D. Singerman (siehe [41]) gibt an, wann eine kofinite Fuchssche Gruppe eine Untergruppe mit gewissem Index hat. Er lässt sich noch verallgemeinern, das soll uns hier aber nicht interessieren.

Satz 2.12 *Sei Γ kofinite Fuchssche Gruppe mit Signatur $(g; m_1, \ldots m_r; s)$ und Präsentierung*

$$\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, x_1, \ldots, x_r, p_1, \ldots, p_s \mid \\ x_1^{m_1}=\ldots=x_r^{m_r}=[a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g]x_1\cdots x_r p_1\cdots p_s=\mathrm{id}\rangle.$$

Γ besitzt eine Untergruppe Γ_1 von Index N mit Signatur $(g'; n_{11}, \ldots, n_{1\rho_1}, \ldots, n_{r1}, \ldots, n_{r\rho_r}; s')$ genau dann, wenn gilt:

(1) $\mu(\mathcal{H}/\Gamma_1)/\mu(\mathcal{H}/\Gamma)=N$ und

(2) Es existiert ein Epimorphismus θ von Γ in eine transitive Untergruppe der Gruppe der Permutationen auf N Elementen derart, dass gilt:

(i) Für $i=1,\ldots,r$ hat $\theta(x_i)$ genau ρ_i Zyklen der Länge $\leq m_i$, und zwar mit Längen $m_i/n_{i1}, \ldots, m_i/n_{i\rho_i}$, und

(ii) wenn $\delta(p_k)$ die Anzahl der Zyklen von $\theta(p_k)$ ist, so ist $s'=\sum_{k=1}^{s}\delta(p_k)$.

2.2 Arithmetische Fuchssche Gruppen

In [6] betrachten Borel und Harish-Chandra arithmetische Untergruppen algebraischer Gruppen. Für den Spezialfall der Fuchsschen Gruppen lässt sich die in diesem Abschnitt folgende Definition arithmetischer Fuchsscher Gruppen über Quaternionenalgebren ableiten. Es gibt noch weitere äquivalente Definitionen, welche aber hier nicht Thema sein sollen. In [38] findet sich eine ausführliche Behandlung der verschiedenen Charakterisierungen. Für eine ausführliche Behandlung der arithmetischen Fuchsschen Gruppen wie auch der arithmetischen Kleinschen Gruppen sei auf [21] verwiesen.

Wir beginnen mit einigen Grundlagen zu Quaternionenalgebren, welche in [50] nachgelesen werden können.

Definition und Satz 2.13 *Sei K Körper mit Charakteristik ungleich 2. Eine Algebra A über K heißt* Quaternionenalgebra *über K, falls A zentrale, einfache Algebra der Dimension 4 über K ist. A besitzt dann eine Basis $1, i, j, k$ derart, dass*

$$i^2 = a,\ j^2 = b,\ k^2 = ij = -ji,$$

wobei $a, b \in K \setminus \{0\}$. Man schreibt $A = \left(\dfrac{a,b}{K}\right)$. Für $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij \in A$ heißt $\bar{\alpha} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 ij$ das Konjugat *von α, $n_A(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = a_0^2 - aa_1^2 - ba_2^2 + aba_3^2$ die* reduzierte Norm *von α und $\operatorname{tr}_A(\alpha) = \alpha + \bar{\alpha} = 2a_0$ die* reduzierte Spur *von α.*

Ist eine Quaternionenalgebra gleichzeitig ein Schiefkörper, so heißt sie auch Divisionsalgebra*.*

Offenbar ist die reduzierte Norm multiplikativ, und ein Element in A ist genau dann invertierbar, wenn seine reduzierte Norm ungleich 0 ist. Somit ist eine Quaternionenalgebra $A = \left(\dfrac{a,b}{K}\right)$ genau dann eine Divisionsalgebra, wenn die Gleichung $ax^2 + by^2 - z^2 = 0$ in K^3 nur die triviale Lösung besitzt. Es gilt folgender

Satz 2.14 *Sei $A = \left(\dfrac{a,b}{K}\right)$ Quaternionenalgebra über dem Körper K. Dann ist A entweder isomorph zur Algebra der 2×2-Matrizen über K, bezeichnet mit $\mathrm{M}(2, K)$, oder eine Divisionsalgebra. Speziell gilt:*

(a) Sei $p \neq 2$ Primzahl und $K = \mathbb{Q}_p$ der Körper der p-adischen Zahlen. Teilt p weder a noch b, so ist A isomorph zu $\mathrm{M}(2, K)$. Teilt p nicht a, aber b, so ist A Divisionsalgebra.

(b) *Sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist A genau dann Divisionsalgebra, wenn $a < 0$ und $b < 0$, und A ist isomorph zur Hamiltonschen Quaternionenalgebra* $\mathbb{H} = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$.

Bei der Entscheidung, ob eine gegebene Quaternionenalgebra Matrizen– oder Divisionsalgebra ist, hilft das Kalkül mit dem *Hilbertsymbol*:

Definition und Satz 2.15 *Sei K Körper mit Charakteristik ungleich* 2 *und sei $A = \left(\frac{a,b}{K}\right)$ Quaternionenalgebra über K. Das* Hilbertsymbol (a, b) *ist definiert durch*

$$(a,b) = \begin{cases} -1 & \text{falls } A \text{ Divisionsalgebra ist} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es hat die folgenden Eigenschaften:

1. $(a, b) = 1$ *genau dann, wenn* $ax^2 + by^2 - z^2 = 0$ *eine nichttriviale Lösung in* K^3 *besitzt.*
2. $(ax^2, by^2) = (a, b)$ *für alle* $x, y \in K^*$
3. $(a, b)(a, c) = (a, bc)$
4. $(a, b) = (b, a)$
5. *Ist $p \neq 2$ Primzahl und K der Körper der p-adischen Zahlen, so ist $(a, b) = 1$, falls p weder a noch b teilt, und $(a, p) = 1$ genau dann, wenn a ein Quadrat modulo p ist.*
6. *Ist $K = \mathbb{R}$, so ist $(a, b) = -1$ genau dann, wenn $a < 0$ und $b < 0$.*

Als Nächstes werden einige Begriffe aus der Bewertungstheorie von Körpern eingeführt, für eine ausführliche Betrachtung dieser Begriffe siehe etwa [33]. Sei k algebraischer Zahlkörper von Grad n. Zwei Bewertungen von k heißen *äquivalent*, wenn sie auf k die selbe Topologie erzeugen, die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen *Primstellen*. Eine Primstelle heißt *endlich*, wenn ihre Bewertungen nichtarchimedisch sind, sonst *unendlich*. Den endlichen Primstellen entsprechen umkehrbar eindeutig die Primideale von k, den unendlichen die Einbettungen von k in $\mathbb{R}$ bzw. die Paare komplex konjugierter Einbettungen von k in $\mathbb{C}$. Ist eine Einbettung reell, so möge auch die zugehörige Primstelle *reell* heißen, sonst *komplex*. Ein algebraischer Zahlkörper heißt *total reell*, falls alle seine unendlichen Bewertungen reell sind.

Definition 2.16 *Sei A Quaternionenalgebra über k, ν eine Primstelle von k und k_ν die Komplettierung von k bezüglich ν. A heißt* verzweigt an der Stelle ν, *falls $A \otimes_k k_\nu$ Divisionsalgebra ist, sonst* unverzweigt. *Die Menge der Verzweigungsstellen wird im Folgenden mit $D(A)$ bezeichnet.*

Mit Hilfe der Verzweigungsstellen lassen sich die Quaternionenalgebren hinsichtlich Isomorphie klassifizieren:

Satz 2.17 *a) Die Anzahl der Verzweigungsstellen einer Quaternionenalgebra über k ist endlich und gerade. Umgekehrt existiert zu jeder endlichen Menge von Primstellen von k mit gerader Kardinalität eine Quaternionenalgebra über k, die genau an diesen Stellen verzweigt ist.*

b) Zwei Quaternionenalgebren über k, die unverzweigt an der Stelle id *und verzweigt an allen anderen unendlichen Stellen sind, sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Menge von Verzweigungsstellen haben.*

c) Eine Quaternionenalgebra ist genau dann isomorph zur Matrizenalgebra, wenn sie an sämtlichen Stellen unverzweigt ist.

Im Folgenden werden ganze Elemente von Quaternionenalgebren betrachtet. Es gilt, dass in einer Quaternionenalgebra ein Element genau dann ganz ist, wenn seine reduzierte Norm und Spur ganz in k sind. Jedoch bildet die Menge der ganzen Elemente einer Quaternionenalgebra keinen Ring. Statt der Gesamtheit aller ganzen Elemente betrachtet man *Ordnungen*:

Definition und Satz 2.18 *Sei k algebraischer Zahlkörper von Grad n, R_k der Ring der ganzen Zahlen in k, A Quaternionenalgebra über k und $\mathcal{O}$ ein Unterring von A. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathcal{O}$ enthält die 1 und ist zugleich endlich erzeugter R_k-Modul mit $\mathcal{O} \otimes_{R_k} k \cong A$.

(ii) $\mathcal{O}$ enthält die 1 und ist freier $\mathbb{Z}$-Modul von Rang $4n$.

(iii) $\mathcal{O}$ enthält R_k, besteht aus ganzen Elementen, und es gilt $k{\cdot}\mathcal{O} := \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in k, m_i \in \mathcal{O}\} = A$.

Ein solcher Ring $\mathcal{O}$ heißt Ordnung *von A.*

Aus der dritten Charakterisierung folgt, dass jede Ordnung in einer maximalen Ordnung enthalten ist. Der Schnitt zweier maximaler Ordnungen heißt *Eichlerordnung*. Ist $\mathcal{O}$ eine Ordnung, so sei $\mathcal{O}^1 = \{x \in \mathcal{O} \mid \mathrm{nr}(x) = 1\}$. $\mathcal{O}^1$ ist eine Gruppe.

Sei nun k ein algebraischer Zahlkörper von Grad n mit $r_1 \geq 1$ reellen Stellen und r_2 komplexen Stellen, so dass $n = r_1 + 2r_2$. Sei $A = \left(\frac{a,b}{k}\right)$ eine Quaternionenalgebra über k, die an $s_1 \geq 1$ reellen Stellen unverzweigt ist. Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_{s_1}$ die den reellen unverzweigten Stellen entsprechenden Einbettungen von k in $\mathbb{R}$, $\sigma_{s_1+1}, \ldots, \sigma_{r_1}$

die den verzweigten reellen Stellen und $\sigma_{r_1+1}, \sigma'_{r_1+1}, \ldots, \sigma_{r_1+r_2}, \sigma'_{r_1+r_2}$ die den komplexen Stellen entsprechenden Einbettungen. Sei $A_i = \left(\frac{\sigma_i(a), \sigma_i(b)}{K}\right)$ mit $K = \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, r_1$ und $K = \mathbb{C}$ für $i = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2$. Dann ist

$$A_i \cong \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) & \text{für } i = 1, \ldots, s_1 \\ \mathbb{H} & \text{für } i = s_1 + 1, \ldots, r_1 \\ M_2(\mathbb{C}) & \text{für } i = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2 \end{cases}$$

und es existiert ein Isomorphismus $\rho : A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to \bigoplus_{i=1}^{r_1+r_2} A_i$.

Ist ρ_i die Komposition der natürlichen Einbettung $A \to A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ mit der Projektion auf den i-ten Faktor, so gilt (ggf. nach Umnummerierung) für $i = 1, \ldots, r_1$, dass $\mathrm{tr}(\rho_i(x)) = \sigma_i(\mathrm{tr}(x))$ und $\mathrm{nr}(\rho_i(x)) = \sigma_i(\mathrm{nr}(x))$ für alle $x \in A$ und $\rho_i|_k = \sigma_i$. Da $s_1 \geq 1$ vorausgesetzt ist, gilt: Ist $\mathcal{O}$ eine Ordnung in A, so ist $\rho_1(\mathcal{O}^1)$ Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Bezeichne mit $P\rho_1(\mathcal{O}^1)$ die Projektion von $\rho_1(\mathcal{O}^1)$ in die $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Es gilt

Satz und Definition 2.19 *(vgl. etwa [21]) Sei k Zahlkörper von Grad n mit mindestens einer reellen Primstelle ν, sei σ die zugehörige reelle Einbettung, sei A eine Quaternionenalgebra über k, die unverzweigt an der Stelle ν ist, sei $\mathcal{O}$ eine Ordnung in A, und sei ρ wie oben eine Einbettung von A in $M_2(\mathbb{R})$ mit $\rho|_k = \sigma$. Genau dann ist $P\rho(\mathcal{O}^1)$ eine Fuchssche Gruppe, wenn k total reell ist und A an allen reellen Stellen außer ν verzweigt ist. In diesem Fall hat $\Gamma(A, \mathcal{O}) := P\rho(\mathcal{O}^1)$ endliches Kovolumen. $\Gamma(A, \mathcal{O})$ ist durch A und $\mathcal{O}$ bis auf Konjugation in* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ *eindeutig bestimmt. Ist Γ Untergruppe einer solchen Gruppe $\Gamma(A, \mathcal{O})$, so heißt Γ* von der Quaternionenalgebra A abgeleitet*. Eine* arithmetische *Fuchssche Gruppe ist eine Gruppe, die kommensurabel mit einem $\Gamma(A, \mathcal{O})$ ist. Dabei heißen zwei Untergruppen G_1, G_2 einer Gruppe G* kommensurabel*, wenn ihr Schnitt endlichen Index sowohl in G_1 als auch in G_2 hat, und* kommensurabel im weiteren Sinne*, wenn G_1 und ein Konjugat von G_2 kommensurabel sind.*

Im Folgenden werden wir immer ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Quaternionenalgebra an der zu id gehörigen Stelle unverzweigt ist.

Gemäß obigem Satz sind arithmetische Fuchssche Gruppen endlich erzeugt und von erster Art. Weiter folgt: Ist Γ arithmetische Fuchssche Gruppe, so auch jedes Konjugat von Γ in $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$.

Als einfaches Beispiel betrachte die Quaternionenalgebra $A = M_2(\mathbb{Q})$ und die Ordnung $\mathcal{O} = M_2(\mathbb{Z})$. Dann ist $\Gamma(A, \mathcal{O}) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, und somit jede Fuchssche Gruppe, die im weiteren Sinne kommensurabel mit $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ ist, arithmetisch. Diese sind die einzigen nicht-kokompakten arithmetischen Fuchsschen Gruppen.

Ist Γ Fuchssche Gruppe, so sei $\Gamma^{(2)} = \langle \gamma^2 \mid \gamma \in \Gamma \rangle$, $k_2 = \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\,(\Gamma^{(2)}))$ und R_{k_2} der Ring der ganzen Zahlen in k_2. Zwischen Γ und $\Gamma^{(2)}$ besteht der folgende Zusammenhang.

Satz 2.20 *Eine Fuchssche Gruppe ist genau dann arithmetisch, wenn* $\Gamma^{(2)}$ *von einer Quaternionenalgebra abgeleitet ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn* k_2 *total reell ist, die Quaternionenalgebra* $A(\Gamma^{(2)})$ *an allen reellen Stellen bis auf* id *verzweigt ist und die Menge* $\mathcal{O}(\Gamma^{(2)})$ *eine Ordnung in* $A(\Gamma^{(2)})$ *ist. In diesem Fall ist die Quaternionenalgebra* A*, so dass* Γ *kommensurabel mit* $\Gamma(A, \mathcal{O})$ *ist, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und isomorph zu* $A(\Gamma^{(2)})$*, und die Ordnung* $\mathcal{O}$ *kann als* $\mathcal{O}(\Gamma^{(2)})$ *gewählt werden, wobei*

$$\begin{aligned} A(\Gamma^{(2)}) &= \{\sum_{i=1}^{d} a_i\gamma_i \mid a_i \in k_2, \gamma_i \in \Gamma^{(2)}\}, \\ \mathcal{O}(\Gamma^{(2)}) &= \{\sum_{i=1}^{d} r_i\gamma_i \mid r_i \in R_{k_2}, \gamma_i \in \Gamma^{(2)}\} \end{aligned}$$

$A(\Gamma^{(2)})$ *heißt die* zu Γ assoziierte Quaternionenalgebra*.*

Korollar 2.21 ([46]) *Zwei arithmetische Fuchssche Gruppen sind genau dann im weiteren Sinne kommensurabel, wenn die assoziierten Quaternionenalgebren isomorph sind.*

Will man entscheiden, ob eine gegebene Fuchssche Gruppe arithmetisch ist, ist also zu prüfen, ob k_2, $A(\Gamma^{(2)})$ und $\mathcal{O}(\Gamma^{(2)})$ den Bedingungen des obigen Satzes genügen. Dies lässt sich durch eine Betrachtung der Spuren erreichen:

Satz 2.22 *(vgl. [44], [23]) Sei* Γ *endlich erzeugte Fuchssche Gruppe erster Art.* Γ *ist genau dann arithmetische Fuchssche Gruppe, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) Der Körper $k_1 := \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\,(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma)$ *ist algebraischer Zahlkörper von endlichem Grad, und* $\mathrm{tr}\,(\Gamma)$ *ist im Ring der ganzen Zahlen von* k_1 *enthalten.*

(ii) Sei $k_2 = \mathbb{Q}((\mathrm{tr}\,(\gamma))^2 \mid \gamma \in \Gamma)$*. Ist* φ *eine Einbettung von* k_1 *in* $\mathbb{C}$ *derart, dass* $\varphi|_{k_2} \neq \mathrm{id}$*, so ist* $|\varphi(\mathrm{tr}\,\gamma)| < 2$ *für alle* $\gamma \in \Gamma$*.*

Die folgende Version dieses Satzes ist in einigen Fällen leichter zu verwenden (vgl. [16]):

Satz 2.23 *Sei* Γ *endlich erzeugte Fuchssche Gruppe erster Art,* $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma^{(2)}$ *mit* $\mathrm{tr}\,\gamma_0, \mathrm{tr}\,[\gamma_0, \gamma_1] \neq \pm 2$*.* Γ *ist genau dann arithmetische Fuchssche Gruppe, wenn gilt:*

(i) $\mathrm{tr}\,\gamma$ *ist ganzalgebraisch für alle* $\gamma \in \Gamma$*.*

(ii) $k_2 = \mathbb{Q}((\mathrm{tr}\,(\gamma))^2 \mid \gamma \in \Gamma)$ *ist total reeller Zahlkörper.*

(iii) $\sqrt{(\mathrm{tr}\,\gamma_0)^2 - 4} \notin k_2$

(iv) $\varphi((\mathrm{tr}\,\gamma_0)^2) < 4$ *und* $\varphi(\mathrm{tr}\,[\gamma_0, \gamma_1]) < 2$ *für alle Einbettungen* $\varphi : k_2 \to \mathbb{R}$ *mit* $\varphi \neq \mathrm{id}$.

Für die Berechnung des Körpers k_2 ist das folgende Lemma von Interesse (siehe [16]):

Lemma 2.24 *Sei* $\Gamma = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ *Fuchssche Gruppe,* $\mathrm{tr}\, g_i \neq 0$ *für* $i = 1, \ldots, n$, *sei* $\Gamma' = \langle g_1^2, \ldots, g_n^2 \rangle$. *Dann ist* $\mathbb{Q}((\mathrm{tr}\,(\gamma))^2 \mid \gamma \in \Gamma) = \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\,(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma')$.

An der Quaternionenalgebra A kann man einige Eigenschaften der Fuchsschen Gruppe $\Gamma(A, \mathcal{O})$ ablesen, wobei $\mathcal{O}$ eine maximale Ordnung in A sei:

Satz 2.25 (vgl. [7], [38], [40]) *Sei A Quaternionenalgebra über dem total reellen Zahlkörper k, welche verzweigt an der Stelle* id *und unverzweigt an allen anderen reellen Stellen ist, und* $\mathcal{O}$ *maximale Ordnung in A. Dann gilt*

$$\mu(\mathcal{H}/\Gamma(A, \mathcal{O})) = 4(2\pi)^{-2n+1} d_k^{3/2} \zeta_k(2) \prod_{\mathcal{P} \in D(A)} (N(\mathcal{P}) - 1).$$

Dabei ist d_k *die Diskriminante von k,* $\zeta_k(2)$ *der Wert der Dedekindschen Zetafunktion von k, definiert durch*

$$\zeta_k(2) = \prod_{\mathcal{P}\ \textit{Primideal}} (1 - (\frac{1}{N\mathcal{P}})^2)^{-1}$$

und $N(\mathcal{P})$ *die Absolutnorm des Primideals* $\mathcal{P}$.

Satz 2.26 ([39]) *Sei A Quaternionenalgebra über dem total reellen Zahlkörper k, die unverzweigt an der Stelle* id *und verzweigt an allen anderen reellen Stellen ist, und* $\mathcal{O}$ *eine maximale Ordnung in A. Es existiere ein Element* $\gamma \in \Gamma(A, \mathcal{O})$ *mit* $\mathrm{tr}\,(\gamma) = 2\cos(\pi/n), n \in \mathbb{N}$ *und es sei* $\{1, e^{i\pi/n}\}$ *eine Ganzheitsbasis von* $k(e^{i\pi/n})$ *über k. Dann ist die Anzahl* $l(n)$ *von Konjugationsklassen maximaler zyklischer Untergruppen von Grad n von* $\Gamma(A, \mathcal{O})$ *gegeben durch*

$$l(n) = \frac{h(k(e^{i\pi/n}))}{h(k)[R^*_{k(e^{i\pi/n})} : R^{*(2)}_{k(e^{i\pi/n})}]} \prod_{\mathcal{P} \in D(A)} (1 - \left(\frac{k(e^{i\pi/n})}{\mathcal{P}}\right)).$$

Dabei ist $h(\cdot)$ *die Klassenzahl des jeweiligen Körpers,* $R^*_{k(e^{i\pi/n})}$ *die Gruppe der ganzalgebraischen Einheiten von* $k(e^{i\pi/n})$,
$R^{*(2)}_{k(e^{i\pi/n})} = \{\alpha \in R^*_{k(e^{i\pi/n})} \mid N_{k(e^{i\pi/n})|k}(\alpha) \in R_k^{*2}\}$ *und*

$$\left(\frac{k(e^{i\pi/n})}{\mathcal{P}}\right) = \begin{cases} -1 & \textit{falls } \mathcal{P} \textit{ träge in } k(e^{i\pi/n}) \\ \ \ 0 & \textit{falls } \mathcal{P} \textit{ verzweigt in } k(e^{i\pi/n}) \\ \ \ 1 & \textit{falls } \mathcal{P} \textit{ zerlegt in } k(e^{i\pi/n}) \end{cases} .$$

Dabei heißt $\mathcal{P}$ träge, *wenn $(\mathcal{P})$ prim in $k(e^{i\pi/n})$,* verzweigt, *wenn $(\mathcal{P})$ Zweierpotenz eines Primideals von $k(e^{i\pi/n})$, und* zerlegt, *wenn $(\mathcal{P})$ Produkt von zwei verschiedenen Primidealen von $k(e^{i\pi/n})$ ist.*

Mit Hilfe der letzten beiden Sätze kann man die Signatur von $\Gamma(A, \mathcal{O})$ anhand der Arithmetik der Quaternionenalgebra A bestimmen. Dazu braucht man allerdings einige Informationen über den zugrunde liegenden Körper. Ist der Wert $\zeta_k(2)$ der Zetafunktion nicht bekannt, so kann man diesen folgendermaßen abschätzen (vgl. [24]).

Lemma 2.27 *Sei k algebraischer Zahlkörper, p_0 Primzahl und M irgendeine endliche Menge von Primidealen von k. Dann gilt*

$$\prod_{\mathcal{P}\in M}(1-(\frac{1}{N(\mathcal{P})})^2)^{-1} \leq \zeta_k(2) \leq \prod_{p<p_0}(\prod_{\mathcal{P}|p}(1-(\frac{1}{N(\mathcal{P})})^2)^{-1})\exp([k:\mathbb{Q}](\frac{1}{p_0}+\frac{1}{3p_0^3}))$$

Die Primideale eines Körpers k kann man in vielen Fällen durch den folgenden Satz von Kummer bestimmen (siehe etwa [33]):

Satz 2.28 *Sei $k = \mathbb{Q}(\rho)$ algebraischer Zahlkörper, dabei ρ ganz, $m(X)$ das Minimalpolynom von ρ, R_k der Ring der ganzen Zahlen von k und $\mathcal{F} = \{\alpha \in R_k \mid \alpha R_k \subset \mathbb{Z}[\rho]\}$, der so genannte* Führer *von $\mathbb{Z}[\rho]$. Sei p Primzahl in $\mathbb{Z}$ derart, dass pR_k teilerfremd zu $\mathcal{F}$ ist, und sei $\bar{m}(X) = \bar{p}_1(x)^{e_1}\cdots\bar{p}_r^{e_r}$ die Zerlegung des Polynoms $\bar{m}(X) = m(X) \bmod p$ in irreduzible Faktoren $\bar{p}_i(X) = p_i(X) \bmod p$ über dem Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, dabei die $p_i(X) \in \mathbb{Z}[X]$ normiert. Dann ist für $i = 1,\ldots,r$ $\mathcal{P}_i = pR_k + p_i(\rho)R_k$ Primideal von R_k, und $pR_k = \mathcal{P}_1^{e_1}\cdots\mathcal{P}_r^{e_r}$ ist die Primfaktorzerlegung von pR_k in R_k. Die Normen der Primideale sind gegeben durch $N(\mathcal{P}_i) = p^{n_i}$, wobei n_i der Grad des Polynoms p_i sei.*

Aus Satz 2.25 kann man noch den folgenden Satz folgern (vgl. [24], [47]).

Satz 2.29 *Zu gegebener Signatur gibt es bis auf Konjugation in* $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ *nur endlich viele arithmetische Fuchssche Gruppen mit dieser Signatur.*

Kapitel 3

Arithmetische Fuchssche Gruppen der Signatur $(2; -)$

Unser Ziel ist es, die arithmetischen Fuchsschen Gruppen der Signatur $(2; -)$ zu bestimmen. Nach Satz 2.20 ist eine Fuchssche Gruppe genau dann arithmetisch, wenn die von den Quadraten dieser Gruppe erzeugte Untergruppe von einer Quaternionenalgebra abgeleitet ist. Deshalb bestimmen wir zunächst diese Untergruppe für Fuchssche Gruppen der Signatur $(2; -)$:

Satz 3.1 *Ist Γ Fuchssche Gruppe der Signatur $(2; -)$, so hat $\Gamma^{(2)} = \langle \gamma^2 \mid \gamma \in \Gamma \rangle$ Index 16 in Γ und Signatur $(17; -)$.*

Beweis. Sei $\Gamma = \langle a, b, c, d \mid [a, b][c, d] = 1 \rangle$. Man rechnet leicht nach, dass $\Gamma^{(2)}$ Normalteiler von Γ ist und $\Gamma/\Gamma^{(2)} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (vgl. etwa [47]). Da Γ von vier Elementen erzeugt wird, ist $r \leq 4$. Andererseits wird durch

$$f(a) = (1, 0, 0, 0),\ f(b) = (0, 1, 0, 0),\ f(c) = (0, 0, 1, 0),\ f(d) = (0, 0, 0, 1)$$

ein Epimorphismus $f : \Gamma \to \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ definiert mit $\Gamma^{(2)} \subseteq \operatorname{Kern} f$, woraus $r \geq 4$ folgt. Somit ist der Index von $\Gamma^{(2)}$ in Γ gleich $2^4 = 16$. $\Gamma^{(2)}$ ist eine endliche erzeugte Fuchssche Gruppe erster Art, die keine elliptischen und keine parabolischen Elemente enthält, $\Gamma^{(2)}$ hat also Signatur $(g; -)$ für ein $g \geq 2$. Nach Satz 2.8 und Satz 2.11 gilt

$$2\pi(2g - 2) = \mu(\mathcal{H}/\Gamma^{(2)}) = 16\mu(\mathcal{H}/\Gamma) = 16 \cdot 4\pi = 64\pi.$$

Es folgt $g = 17$. □

Das Folgende orientiert sich an dem Vorgehen in [47] und [24]. Sei $\Gamma^{(2)}$ wie oben. Da jede Ordnung einer Quaternionenalgebra in einer maximalen Ordnung enthalten ist, dürfen wir annehmen, dass $\Gamma^{(2)}$ Untergruppe einer Fuchsschen Gruppe $\Gamma(A, \mathcal{O})$ mit einer maximalen Ordnung $\mathcal{O}$ in A ist. Gemäß Satz 2.25 gilt

$$\mu(\mathcal{H}/\Gamma(A, \mathcal{O})) = 4(2\pi)^{-2n+1} d_k^{3/2} \zeta_k(2) \prod_{\mathcal{P} \in D(A)} (N(\mathcal{P}) - 1),$$

nach Satz 2.8 und Satz 2.11 ist somit

$$\mu(\mathcal{H}/\Gamma^{(2)}) = 64\pi \geq 4(2\pi)^{-2n+1} d_k^{3/2} \zeta_k(2) \prod_{\mathcal{P} \in D(A)} (N(\mathcal{P}) - 1).$$

Da $\zeta_k(2) \geq 1$ und $\prod_{\mathcal{P} \in D(A)} (N(\mathcal{P}) - 1) \geq 1$, erhält man daraus für d_k als obere Schranke $8^{2/3}((4\pi^2)^{2/3})^n$. Andererseits gibt Odlyzko in [34] verschiedene Werte für a und b an derart, dass $d_k > a^n \exp(-b)$. Es gilt somit

$$a^n \exp(-b) < d_k \leq 8^{2/3}((4\pi^2)^{2/3})^n. \tag{3.1}$$

Eines der Paare in Odlyzkos Liste ist $(a; b) = (31,202; 8,8001)$. Da $(4\pi^2)^{2/3} < 31,202$, wächst die untere Schranke für d_k schneller als die obere, wodurch man eine obere Schranke für den Körpergrad n erhält. Für diese a, b erhält man $a^n \exp(-b) > 8^{2/3}((4\pi^2)^{2/3})^n$ für $n \geq 11$, somit kommen für arithmetische Flächengruppen von Geschlecht 2 als zugrunde liegende total reelle algebraische Zahlkörper nur Körper vom Grad ≤ 10 in Frage. Für andere Paare (a, b) in der Liste erhält man keine bessere Abschätzung. Für $n = 2$ liefert Ungleichung 3.1, dass $d_k \leq (8 \cdot (4\pi^2)^n)^{2/3} < 538$. Allerdings kann man die Ungleichung für gerade n noch verschärfen. Gemäß Satz 2.17 ist die Anzahl an Verzweigungsstellen gerade. Da die zu arithmetischen Fuchsschen Gruppen assoziierten Quaternionenalgebren genau $n - 1$ unendliche Verzweigungsstelle haben, besitzen sie für gerade n mindestens eine endliche Verzweigungsstellen. Dadurch erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\zeta_k(2) \prod_{\mathcal{P} \in D(A)} (N\mathcal{P} - 1) = \prod_{\mathcal{P} \text{ Primideal}} (1 - (\frac{1}{N\mathcal{P}})^2)^{-1} \prod_{\mathcal{P} \in D(A)} (N\mathcal{P} - 1) \\
&> \prod_{\mathcal{P} \in D(A)} [(1 - (\frac{1}{N\mathcal{P}})^2)^{-1} (N\mathcal{P} - 1)] = \prod_{\mathcal{P} \in D(A)} \frac{(N\mathcal{P})^2}{N\mathcal{P} + 1} \\
&\geq \min\{\frac{(N\mathcal{P})^2}{N\mathcal{P} + 1} \mid \mathcal{P} \text{ ist Primideal in } R_k\} \geq \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

und somit $d_k < (6 \cdot (4\pi^2)^2)^{2/3} < 444$. Entsprechende Rechnungen für die Körpergrade $n = 1, \ldots, 10$ resultieren in folgendem

Satz 3.2 *Ist Γ arithmetische Fuchssche Gruppe der Signatur $(2; -)$, so gilt für den Grad n und die Diskriminante d_k des total reellen Zahlkörpers, über den die mit Γ assoziierte Quaternionenalgebra definiert ist:*
$n = 2$ *und* $d_k < 444$,
$n = 3$ *und* $d_k < 6235$,
$n = 4$ *und* $d_k < 59666$,
$n = 5$ *und* $d_k < 838030$,
$n = 6$ *und* $d_k < 8020593$,
$n = 7$ *und* $d_k < 112651963$,
$n = 8$ *und* $d_k < 1078167152$,
$n = 9$ *und* $d_k < 15143226271$ *oder*
$n = 10$ *und* $d_k < 144932487131$.

Mit Hilfe der Sätze 2.25 und 2.26 kann man nun in vielen Fällen für die verschiedenen in Frage kommenden Quaternionenalgebren A die Signaturen der Gruppen $\Gamma(A, \mathcal{O})$ berechnen. Mit Hilfe von Satz 2.12 kann man dann entscheiden, ob diese eine Gruppe der Signatur $(17; -)$ enthalten, d.h. ob eine Fuchssche Gruppe der Signatur $(17; -)$ existiert, die von dieser Quaternionenalgebra abgeleitet ist. Das ist aber noch nicht hinreichend dafür, dass eine arithmetische Fuchssche Gruppe der Signatur $(2; -)$ existiert, die kommensurabel mit diesem $\Gamma(A, \mathcal{O})$ ist. Zwar enthält jede Fuchssche Gruppe der Signatur $(2; -)$ eine Gruppe der Signatur $(17; -)$, aber nicht jede Gruppe der Signatur $(17; -)$ ist in einer der Signatur $(2; -)$ enthalten. In der Tat ist die Dimension des Teichmüllerraumes zur Signatur $(g; m_1, \ldots, m_r; s)$ gleich $6g + 2(r + s) - 6$, also ist die Dimension für die Signatur $(2; -)$ gleich 6, die für $(17; -)$ hingegen 96.

Um auf diesem Weg zu entscheiden, ob eine Gruppe $\Gamma(A, \mathcal{O})$ kommensurabel ist mit einer Fuchsschen Gruppe der Signatur $(2; -)$, müsste man also die Untergruppen von $\Gamma(A, \mathcal{O})$, die Signatur $(17; -)$ haben, konkret als Untergruppen der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ darstellen und sodann entscheiden, ob diese in einer Gruppe der Signatur $(2; -)$ enthalten sind. Der Index, mit dem diese Gruppen der Signatur $(17; -)$ in $\Gamma(A, \mathcal{O})$ liegen, kann dabei sehr groß sein. Ist beispielsweise die Quaternionenalgebra A über $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{7})$ nur an den beiden unendlichen Stellen ungleich id verzweigt und ist $\mathcal{O}$ maximale Ordnung in A, so hat $\Gamma(A, \mathcal{O})$ Signatur $(0; 2, 3, 7)$ (vgl. [45]) und enthält Gruppen der Signatur $(17; -)$ mit Index 1344 (allerdings auch schon direkt Gruppen der Signatur $(2; -)$ mit Index 84). Dies ist der größte Index, der auftreten kann, da Fuchssche Gruppen mit Signatur $(0; 2, 3, 7)$ diejenigen mit kleinstem Kovolumen sind (siehe etwa [19]). Für große Indizes kann die Berechnung von Untergruppen sehr aufwändig sein.

Einfacher wird es, wenn man diejenigen Fuchsschen Gruppen der Signatur $(2; -)$ bestimmt, die von einer Quaternionenalgebra abgeleitet sind. Die Menge der Signaturen, deren Fuchssche Gruppen eine Gruppe der Signatur $(2; -)$ enthalten, ist recht überschaubar und lässt sich mit Hilfe von Satz 2.12 bestimmen:

Satz 3.3 *(vgl. ([1]). Eine Fuchssche Gruppe enthält genau dann eine Fuchssche Gruppe der Signatur $(2; -)$ mit endlichem Index $N \geq 2$, wenn sie eine der folgenden Signaturen hat:*

$(0; 2, 2, 2, 3)$	$N = 12$	$(0; 2, 3, 7)$	84	$(0; 3, 3, 5)$	15
$(0; 2, 2, 2, 4)$	8	$(0; 2, 3, 8)$	48	$(0; 2, 4, 12)$	12
$(0; 2, 2, 2, 6)$	6	$(0; 2, 4, 5)$	40	$(0; 2, 6, 6)$	12
$(0; 2, 2, 3, 3)$	6	$(0; 2, 3, 9)$	36	$(0; 3, 3, 6)$	12
$(0; 2, 2, 4, 4)$	4	$(0; 2, 3, 10)$	30	$(0; 3, 4, 4)$	12
$(0; 3, 3, 3, 3)$	3	$(0; 2, 3, 12)$	24	$(0; 2, 5, 10)$	10
$(0; 2, 2, 2, 2, 2)$	4	$(0; 2, 4, 6)$	24	$(0; 3, 3, 9)$	9
$(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2	$(0; 3, 3, 4)$	24	$(0; 2, 8, 8)$	8
$(1; 2)$	4	$(0; 2, 5, 5)$	20	$(0; 4, 4, 4)$	8
$(1; 3)$	3	$(0; 2, 3, 18)$	18	$(0; 3, 6, 6)$	6
$(1; 2, 2)$	2	$(0; 2, 4, 8)$	16	$(0; 5, 5, 5)$	5

Da das Kovolumen Fuchsscher Gruppen der Signatur $(2;-)$ relativ klein ist, folgt aus Satz 2.25, dass als assoziierte Quaternionenalgebren nur solche in Frage kommen, die über total reellen Zahlkörpern mit relativ kleiner Diskriminante definiert sind und die nur wenige endliche Verzweigungsstellen haben, welche außerdem kleine Normen besitzen. Ist $\Gamma(A, \mathcal{O})$ eine Fuchssche Gruppe mit einer der obigen Signaturen, so weiß man zunächst nur, dass eine Gruppe der Signatur $(2;-)$ existiert, die von A abgeleitet ist, auf die Anzahl von $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$-Konjugationsklassen kann man zunächst nicht unmittelbar schließen. Dies gelingt in einigen Fällen, indem man die maximalen Ordnungen und die Eichler-Ordnungen in A betrachtet (vgl. [7], [24], [22]).

Alternativ kann man $\Gamma(A, \mathcal{O})$ als konkrete Untergruppe der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ darstellen, dort alle ihre Untergruppen der Signatur $(2;-)$ berechnen und diese auf eine Normalform bringen, anhand derer man in vielen Fällen entscheiden kann, ob zwei solche Gruppen $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$-konjugiert sind (siehe nächster Abschnitt).

Für diverse Quaternionenalgebren sind für maximale Ordnungen $\mathcal{O}$ die Signaturen der $\Gamma(A, \mathcal{O})$ bekannt. Johansson hat in [18] eine Liste derjenigen Quaternionenalgebren A über total reellen Zahlkörpern von Grad ≤ 2 erstellt, so dass $\mathcal{H}/\Gamma(A, \mathcal{O})$ Geschlecht ≤ 2 hat. Weitere Ergebnisse sind aus der Berechnung arithmetischer Fuchsscher Gruppen der Signaturen $(0;p,q,r)$, $(1;p)$, $(0;p,q,r,s)$ in [45], [46], [47], [24], [25], [4] bekannt.

Satz 3.4 *Die folgende Tabelle gibt Quaternionenalgebren an, von denen Fuchssche Gruppen der Signatur* $(2;-)$ *abgeleitet sind. Die Liste ist für* $n \leq 2$ *vollständig.*

n	d_k	$D(A)$	$\Gamma(A,\mathcal{O})$
1	1	$(2)(3)$	$(0;2,2,3,3)$
		$(2)(5)$	$(0;3,3,3,3)$
		$(2)(13)$	$(2;-)$
2	5	(2)	$(0;2,5,5)$
		$\mathcal{P}_5$	$(0;3,3,5)$
		$\mathcal{P}_{11}$	$(0;2,2,3,3)$
		$\mathcal{P}_{31}$	$(1;2,2)$
		$\mathcal{P}_{61}$	$(2;-)$
	8	$\mathcal{P}_2$	$(0;3,3,4)$
		(3)	$(1;3)$
		(5)	$(2;-)$
	12	$\mathcal{P}_2$	$(0;3,3,6)$
		$\mathcal{P}_3$	$(0;2,2,2,6)$
		$\mathcal{P}_{13}$	$(2;-)$
	13	(2)	$(1;2)$
		$\mathcal{P}_3$	$(0;2,2,3,3)$
		$\mathcal{P}_{13}$	$(2;-)$
	17	$\mathcal{P}_2$	$(0;2,2,3,3)$
	21	(2)	$(1;2,2)$
	24	$\mathcal{P}_3$	$(0;2,2,2,2,2,2)$
	28	$\mathcal{P}_2$	$(0;3,3,3,3)$

n	d_k	$D(A)$	$\Gamma(A,\mathcal{O})$
3	49	(1)	$(0;2,3,7)$
	81	(1)	$(0;2,3,9)$
	148	(1)	$(0;2,2,2,3)$
		$\mathcal{P}_2\mathcal{P}_5$	$(0;3,3,3,3)$
	169	(1)	$(0;2,2,2,3)$
	229	(1)	$(0;2,2,3,3)$
	257	(1)	$(0;2,2,3,3)$
	316	$\mathcal{P}_2\mathcal{P}_2'$	$(0;3,3,3,3)$
4	725	$\mathcal{P}_{11}$	$(0;2,2,3,3)$
		$\mathcal{P}_{11}'$	$(0;2,2,3,3)$
	1957	$\mathcal{P}_3$	$(0;2,2,3,3)$
	2000	$\mathcal{P}_5$	$(0;3,3,3,3)$
	2777	$\mathcal{P}_2$	$(0;2,2,3,3)$
	4352	$\mathcal{P}_2$	$(0;3,3,3,3)$
5	24217	(1)	$(0;3,3,3,3)$
	36497	(1)	$(0;2,2,3,3)$
	38569	(1)	$(0;2,2,3,3)$

Zu den Berechnungen zu Satz 3.2 analoge Berechnungen zeigen den folgenden

Satz 3.5 *Ist Γ von einer Quaternionenalgebra A abgeleitete Fuchssche Gruppe mit Signatur $(2;-)$, so gilt für den Grad n und die Diskriminante d_k des total reellen Zahlkörpers, über den A definiert ist, dass $n \leq 2$ und d_k in Satz 3.4 auftaucht oder*
$n = 3$ und $d_k < 982$,
$n = 4$ und $d_k < 9397$,
$n = 5$ und $d_k < 131982$,
$n = 6$ und $d_k < 1263165$ oder
$n = 7$ und $d_k < 17741573$.

Für einige dieser Körper können mehrere Quaternionenalgebren in Frage kommen, von denen eine Fuchssche Gruppe der Signatur $(2;-)$ abgeleitet ist. Zum Beispiel hat nach Satz 3.4 für $d_k = 49$ und $D(A) = (1)$ die Gruppe $\Gamma(A, \mathcal{O})$ Signatur $(0; 2, 3, 7)$ für maximale Ordnungen $\mathcal{O}$. Mit Satz 2.28 kann man die Primideale in R_k berechnen und sieht, dass die kleinsten auftretenden Normen $N(\mathcal{P}_7) = 7$ und $N(\mathcal{P}_2) = 8$ sind (vgl. [4]). Für $D(\tilde{A}) = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_7$ hat nach Satz 2.25 $\Gamma(\tilde{A}, \mathcal{O})$ Kovolumen

$$\mu(\mathcal{H}/\Gamma(\tilde{A}, \mathcal{O})) = 4(2\pi)^{-5} \cdot 49^{3/2}\zeta_k(2) \cdot 6 \cdot 7 = 42\mu(\mathcal{H}/\Gamma(A, \mathcal{O})) = 2\pi$$

Ist $(g; e_1, \ldots, e_r; s)$ die Signatur von $\Gamma(\tilde{A}, \mathcal{O})$, so gilt also nach Satz 2.11, dass $2g - 2 + \sum_{i=1}^{r}(1 - (1/e_i)) + s = 1$. Zunächst ist $s = 0$, da $\Gamma(\tilde{A}, \mathcal{O})$ kokompakt ist. Weiter kommen für die e_i nur $2, 3$ oder 7 in Frage, da k_2 die Spuren der Elemente in $\Gamma(\tilde{A}, \mathcal{O})$ und somit die Zahlen $2\cos\frac{\pi}{e_i}$ enthalten muss. Weiter ist $g \leq 1$. Ist $g = 1$, so folgt $r = 2$, $e_1 = e_2 = 2$. Ist $g = 0$, so ist $r = 6$ und $e_i = 2$ für $i = 1, \ldots, 6$. Somit kommen als Signatur von $\Gamma(\tilde{A}, \mathcal{O})$ $(1; 2, 2)$ und $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ in Frage, in beiden Fällen würde $\Gamma(\tilde{A}, \mathcal{O})$ eine Fuchssche Gruppe der Signatur $(2;-)$ enthalten.

Selbst für den Fall, dass man für all diese Körper und die in Frage kommenden Quaternionenalgebren alle Gruppen $\Gamma(A, \mathcal{O})$ bestimmt hat, muss man zur Klassifizierung der von Quaternionenalgebren abgeleiteten Fuchsschen Gruppen der Signatur $(2;-)$ noch die Anzahl der $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklassen der entsprechenden Gruppen bestimmen.

Wir wenden uns im folgenden Abschnitt der Beschreibung dieser Konjugationsklassen durch Spurtupel zu, was den Vorteil hat, dass man Takeuchis Charakterisierung arithmetischer Fuchsscher Gruppen über Spuren benutzen kann.

3.1 Beschreibung der $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$-Konjugationsklassen der Flächengruppen von Geschlecht 2 über Spuren

Der *Teichmüllerraum* zur Signatur $(g; e_1, \ldots, e_n; s)$ kann identifiziert werden mit der Menge aller $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$-Konjugationsklassen kanonischer Erzeugendensysteme Fuchsscher Gruppen mit eben dieser Signatur. Da die Spur unter Konjugation in $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ invariant ist und die $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$-Konjugationsklassen eines kanonischen Erzeugendensystems durch die Spuren gewisser Produkte dieser Erzeugenden eindeutig festgelegt ist (siehe unten), können wir den Teichmüllerraum mit Hilfe von Spurgleichungen parametrisieren. Um diese Spurgleichungen aufstellen zu können, benötigen wir zunächst ein Lemma, welches aussagt, wie man mit Spuren rechnet:

Lemma 3.6 *Seien $A, B, C \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.*

a) *Ist $T = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ elliptisch mit $a + d = 2\cos\theta$ und $\operatorname{sign} b = \operatorname{sign}\sin\theta$, so dreht T in seinem Fixpunkt Geodätische um den Winkel 2θ entgegen dem Uhrzeigersinn.*

b) *Ist $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ elliptisch, so lässt Konjugation in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ das Vorzeichen von b unverändert.*

c) *Es gelte $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$, $A \neq \pm B$. Dann ist AB hyperbolisch, und die Fixpunkte von A und B liegen auf der Achse von AB. Genau dann ist $\operatorname{tr} AB < -2$, wenn die rechten oberen Einträge von A und B das gleiche Vorzeichen besitzen.*

d) *Seien $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} C = 0$, A, B und C paarweise verschieden mit Fixpunkten a, b, c, und die rechten oberen Einträge von A, B und C seien jeweils positiv. Genau dann ist $\operatorname{tr} ABC > 0$, wenn der im Uhrzeigersinn gerichtete Winkel von $[a,b]$ nach $[a,c]$ kleiner π ist, mit anderen Worten, wenn c links von $\overrightarrow{ab}$ liegt, wobei wir mit $\overrightarrow{ab}$ die Geodätische* von a nach b *bezeichnen.*

e) *Es gilt $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - \operatorname{tr} AB^{-1}$.*

f) *Ist G Untergruppe der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, welche von $\{g_1, \ldots, g_n\}$ erzeugt wird, so gilt*

$$\operatorname{tr}(G) \subset \mathbb{Z}[\operatorname{tr}(g_{i_1} \cdots g_{i_s}) | 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n]$$

g) *Ist $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$, so ist $|\operatorname{tr} AB|$ ein Maß für den hyperbolischen Abstand zwischen den Fixpunkten von A und B.*

Beweis. Zu a): vgl. [20], Lemma 2.1.

Zu b): Ist $\operatorname{tr} T \neq 0$, so folgt die Behauptung unmittelbar aus Teil a), da jedes Konjugat von T in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ eine Drehung um den selben Winkel nur mit ggf. anderem Fixpunkt ist und Konjugation in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ die Spur unverändert lässt. Sei nun $\operatorname{tr} T = 0, T = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, sei $S = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Dann ist der rechte obere Eintrag von STS^{-1} gleich $(1/b)((eb-fa)^2+f^2)$. □

Zu c): Sei α die Geodätische, die die Fixpunkte von A und B verbindet. Da A und B gemäß Teil a) Geodätische in ihren Fixpunkten um den Winkel π drehen, sind die Endpunkte von α in $\mathbb{R}\cup\infty$ Fixpunkte von AB. Somit ist AB hyperbolisch, und α ist die Achse von AB. Seien nun

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} c & d \\ -\frac{1+c^2}{d} & -c \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\operatorname{tr} AB = ac - \frac{b(1+c^2)}{d} - \frac{d(1+a^2)}{b} + ac = \frac{-(ad-bc)^2 - b^2 - d^2}{bd} < 0$$

genau dann, wenn $bd > 0$.

Zu d): Da die $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ durch orientierungserhaltende Isometrien auf der oberen Halbebene operiert, wird durch simultane Konjugation in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ die Lage der Fixpunkte von A, B und C zueinander nicht verändert. Da Konjugation in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ außerdem die Spur und nach Teil b) auch das Vorzeichen des rechten oberen Eintrags nicht verändert, dürfen wir annehmen, dass

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \text{ mit } \rho > 1, b > 0.$$

Dann ist $\operatorname{tr} ABC = a(\rho - (1/\rho)) > 0$ genau dann, wenn $a > 0$. Wie man leicht nachrechnet, ist dies äquivalent dazu, dass der Fixpunkt von C negativen Realteil hat, also links von der imaginären Achse liegt, welche die Geodätische ist, die den Fixpunkt i von A und ρi von B miteinander verbindet, und die Behauptung folgt.

Zu e): vgl. etwa [8].

Zu f): Ein Beweis der etwas schwächeren Behauptung $\operatorname{tr}(G) \subset \mathbb{Z}[\operatorname{tr}(g_{i_1}\cdots g_{i_s}) | i_1,\ldots,i_s$ paarweise verschieden$]$ ist zum Beispiel in [8] zu finden, die Methoden dort lassen sich auf die Behauptung hier übertragen. Der Beweis wird hier trotzdem angegeben, da die entsprechenden Rechnungen noch später Anwendung finden. Bei den folgenden Umformungen in den Spurgleichungen wird die Identität aus Teil c) benutzt sowie die Tatsache, dass die Spur einer Matrix invariant ist unter Konjugation in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. T bezeichne $\mathbb{Z}[\operatorname{tr}(g_{i_1}\cdots g_{i_s}) | 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n]$. Sei $g \in G, g = g_{i_1}^{m_1}\cdots g_{i_r}^{m_r}$ dabei die $g_{i_j} \in \{g_1,\ldots g_n\}$. Zu zeigen ist, dass $\operatorname{tr} g \in T$. Wir zeigen dies zunächst für einen Spezialfall und zeigen anschließend, dass man den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall zurückführen kann.

Fall 1: $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$. Zeige die Behauptung mittels Induktion über $\nu = \sum_{j=1}^r K_j$, wobei K_j definiert ist als $-m_j$, falls $m_j \leq 0$, und $m_j - 1$, falls $m_j > 0$. Ist $\nu = 0$, so sind alle m_j gleich 0 oder 1, und es ist nichts zu zeigen. Sei nun $K_k \neq 0$. Ist $m_k < 0$, so ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} g &= \operatorname{tr} g_{i_{k+1}}^{m_{k+1}} \cdots g_{i_r}^{m_r} g_{i_1}^{m_1} \cdots g_{i_k}^{m_k} \\
&= \operatorname{tr} g_{i_{k+1}}^{m_{k+1}} \cdots g_{i_r}^{m_r} g_{i_1}^{m_1} \cdots g_{i_k}^{m_k+1} \operatorname{tr} g_{i_k}^{-1} - \operatorname{tr} g_{i_{k+1}}^{m_{k+1}} \cdots g_{i_r}^{m_r} g_{i_1}^{m_1} \cdots g_{i_k}^{m_k+2} \\
&= \operatorname{tr} g_{i_1}^{m_1} \cdots g_{i_k}^{m_k+1} \cdots g_{i_r}^{m_r} \operatorname{tr} g_{i_k} - \operatorname{tr} g_{i_1}^{m_1} \cdots g_{i_k}^{m_k+2} \cdots g_{i_r}^{m_r}
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\operatorname{tr} g \in T$. Den Fall $m_k > 1$ behandelt man ähnlich.

Fall 2: $i_1, \ldots, i_r$ paarweise verschieden, aber nicht notwendig in der richtigen Reihenfolge. Benutze zunächst Induktion über r. Für $r = 1$ ist offenbar $\operatorname{tr} g \in T$. Sei nun $r > 1$ und angenommen, die Behauptung gilt für $r - 1$. Die Indizes $j_1, \ldots, j_r$ mögen die $i_1, \ldots, i_r$ in der richtigen Reihenfolge bezeichnen, d.h. es gelte $\{j_1, \ldots, j_r\} = \{i_1, \ldots, i_r\}$ und $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Nach Konjugation in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ können wir annehmen, dass $i_1 = j_1$. Gilt $i_m = j_m$ für alle $m \in \{1, \ldots, r\}$, so sei $k = r$, sonst sei k die kleinste Zahl, für die $i_k \neq j_k$, d.h. die erste „falsch besetzte Stelle“ in g (dann ist $k < r$). Zeige, dass $\operatorname{tr} g \in T$, durch Induktion über $l = r - k$. Ist $l = 0$, so folgt die Behauptung aus dem ersten Teil. Sei nun $l = r - k > 0$, d.h. $i_m = j_m$ für $m < k$ und $i_k \neq j_k$, und die Behauptung gelte für $l - 1$. Sei $j_k = i_t$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} g &= \operatorname{tr} g_{i_{t+1}}^{m_{t+1}} \cdots g_{i_r}^{m_r} g_{i_1}^{m_1} \cdots g_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} g_{i_k}^{m_k} \cdots g_{i_t}^{m_t} \\
&= \operatorname{tr} g_{i_{t+1}}^{m_{t+1}} \cdots g_{i_r}^{m_r} g_{j_1}^{m_1} \cdots g_{j_{k-1}}^{m_{k-1}} \operatorname{tr} g_{i_k}^{m_k} \cdots g_{i_{t-1}}^{m_{t-1}} g_{j_k}^{m_t} \\
&\quad -\operatorname{tr} g_{i_{t+1}}^{m_{t+1}} \cdots g_{i_r}^{m_r} g_{j_1}^{m_1} \cdots g_{j_{k-1}}^{m_{k-1}} g_{j_k}^{-m_t} g_{i_{t-1}}^{-m_{t-1}} \cdots g_{i_k}^{-m_k} \\
&= \underbrace{\operatorname{tr} g_{j_1}^{m_1} \cdots g_{j_{k-1}}^{m_{k-1}} g_{i_{t+1}}^{m_{t+1}} \cdots g_{i_r}^{m_r}}_{a} \underbrace{\operatorname{tr} g_{i_k}^{m_k} \cdots g_{i_t}^{m_t}}_{b} \\
&\quad - \underbrace{\operatorname{tr} g_{j_1}^{m_1} \cdots g_{j_{k-1}}^{m_{k-1}} g_{j_k}^{-m_t} g_{i_{t-1}}^{-m_{t-1}} \cdots g_{i_k}^{-m_k} g_{i_{t+1}}^{m_{t+1}} \cdots g_{i_r}^{m_r}}_{c}
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun für a und b aus der Induktionsvoraussetzung für r, für c aus der Induktionsvoraussetzung für l.

Fall 3: Sei nun $g = g_{i_1}^{m_1} \cdots g_{i_r}^{m_r}$, die $i_1, \ldots, i_r$ nicht paarweise verschieden. Nach Konjugation in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ können wir annehmen, dass $i_r = i_s$ für ein $s < r$. Dann gilt

$$\operatorname{tr} g = \operatorname{tr} g_{i_1}^{m_1} \cdots g_{i_s}^{m_s} \operatorname{tr} g_{i_{s+1}}^{m_{s+1}} \cdots g_{i_r}^{m_r} - \operatorname{tr} g_{i_1}^{m_1} \cdots g_{i_s}^{m_s - m_r} g_{i_{r-1}}^{-m_{r-1}} \cdots g_{i_{s+1}}^{-m_{s+1}}.$$

Gegebenenfalls durch wiederholtes Anwenden des obigen Rechenschrittes können wir also Fall 3 auf Fall 2 zurückführen.

zu g): Nach Konjugation in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ und ggf. Multiplikation mit -1 dürfen wir annehmen, dass $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -1/\rho & 0 \end{pmatrix}$ mit $\rho \geq 1$ ist. Der Fixpunkt von A ist i, der von B ist ρi, der hyperbolische Abstand der Fixpunkte ist $\ln \rho$. Weiter ist $|\mathrm{tr}\, AB| = \rho + 1/\rho$, also $\rho = (1/2)(|\mathrm{tr}\, AB| + \sqrt{(\mathrm{tr}\, AB)^2 - 4})$, und somit der hyperbolische Abstand der Fixpunkte gleich $\ln((1/2)(|\mathrm{tr}\, AB| + \sqrt{(\mathrm{tr}\, AB)^2 - 4}))$. Diese Funktion ist offenbar streng monoton steigend in $|\mathrm{tr}\, AB|$. $\square$

Will man die definierende Relation $[a, b][c, d] = \mathrm{id}$ einer Fuchsschen Gruppe mit Signatur $(2; -)$ und kanonischem Erzeugendensystem (a, b, c, d) in eine Spurgleichung umwandeln, so stößt man auf zwei Probleme. Zum einen ist der Ausdruck für $\mathrm{tr}\,([a, b][c, d])$, den man erhält, wenn man wie in Lemma 3.6 f) vorgeht, sehr kompliziert. Zum anderen genügt es nicht, die Gleichung $\mathrm{tr}\,([a, b][c, d]) = \pm 2$ anzusetzen, da dies nicht ausschließt, dass $[a, b][c, d]$ parabolisch ist. Vielmehr benötigt man noch weitere komplizierte Spurgleichungen. Der folgende Satz besagt, dass man stattdessen Gruppen der Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ betrachten kann. An dieser Stelle sei bemerkt, dass Helling in [15] auf ähnliche Weise den Teichmüllerraum bestimmt.

Satz 3.7 *(vgl. etwa [15], [31]). Jede Fuchssche Gruppe der Signatur* $(2; -)$ *ist in genau einer Fuchsschen Gruppe der Signatur* $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ *enthalten. Umgekehrt besitzt jede Fuchssche Gruppe der Signatur* $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ *genau eine Fuchssche Gruppe der Signatur* $(2; -)$ *als Untergruppe, und zwar mit Index 2.*

Ist $\Gamma = \langle x_1, x_2, \ldots, x_6 \mid x_1^2 = \ldots = x_6^2 = x_1 \cdots x_6 = 1 \rangle$, so kann man als Erzeugende der Untergruppe $\Gamma_1 = \langle a, b, c, d \mid [a, b][c, d] = 1 \rangle$ die Elemente $a = x_1 x_2$, $b = x_3 x_1$, $c = x_4 x_5$ und $d = x_6 x_4$ wählen, wie man leicht nachrechnet.

Korollar 3.8 *a) Es gibt eine Bijektion zwischen dem Teichmüllerraum zur Signatur* $(2; -)$ *und dem zur Signatur* $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

b) Es gibt eine Bijektion zwischen den $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$*-Konjugationsklassen Fuchsscher Gruppen mit Signatur* $(2; -)$ *und den* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$*-Konjugationsklassen Fuchsscher Gruppen mit Signatur* $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

Wir werden somit den Teichmüllerraum zur Signatur $(2; -)$ über die Spuren in Fuchsschen Gruppen der Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ parametrisieren. Als erste Gleichungen erhalten wir $\mathrm{tr}\, x_i = 0$ für $i = 1, \ldots, 5$ und $\mathrm{tr}\, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 0$. Im Allgemeinen erzeugen jedoch $x_1, \ldots, x_5 \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, die diesen Gleichungen genügen, nicht notwendig eine Fuchssche Gruppe der Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. Um herauszufinden, welche zusätzlichen Bedingungen gelten müssen, werden wir einen Fundamentalbereich konstruieren und den Satz von Poincaré 2.10 benutzen. Dazu benötigen wir zunächst einige Lemmata und Sätze.

Lemma 3.9 *Seien* $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *mit positiven rechten oberen Einträgen, seien* $z_1, \ldots, z_n$ *die Fixpunkte der zugehörigen Transformationen der oberen Halbebene. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

1. $[z_1, z_2] \cup \ldots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, z_1]$ *ist Rand eines konvexen n-Gons.*

2. *Für jede dieser Seiten $[z_i, z_j]$ liegen alle übrigen Ecken links von $\overrightarrow{z_i z_j}$ oder für jede dieser Seiten liegen alle übrigen Ecken rechts von $\overrightarrow{z_i z_j}$.*

3. *Die Spuren $\operatorname{tr} x_i x_{i+1} x_k$ für $i = 1, \ldots, n-1, k \neq i, i+1$ und $\operatorname{tr} x_n x_1 x_k$ für $k \neq 1, n$ sind entweder alle positiv oder alle negativ.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 3.6 und der Tatsache, dass ein konvexes n-Gon Schnitt der von den Verlängerungen der Seiten begrenzten und „richtig liegenden“ n Halbebenen ist. □

Unser Ziel ist es, die $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklassen Fuchsscher Gruppen mit Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ über die Spuren der Gruppenelemente zu charakterisieren. Nach Lemma 3.6 kann man die Spuren sämtlicher Gruppenelemente anhand der Spuren einiger weniger Gruppenelmente bestimmen. Offenbar hängt die Art und Weise, wie dies geschieht, von der Wahl der kanonischen Erzeugenden $x_1, \ldots, x_6$ einer solchen Gruppe ab. Deshalb ist die Automorphismengruppe der Fuchsschen Gruppen obiger Signatur von Interesse.

Satz 3.10 *(vgl. [15]). Sei $\Gamma = \langle x_1, x_2, \ldots, x_6 \mid x_1^2 = \ldots = x_6^2 = x_1 \cdots x_6 = 1 \rangle$. Bezeichne $[g_1, \ldots, g_6]$ den Automorphismus, der definiert ist durch $x_1 \mapsto g_1, \ldots, x_6 \mapsto g_6$. Die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut} \Gamma$ von Γ wird erzeugt von den inneren Automorphismen sowie $[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1]$, $[x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1]$ und $[x_1 x_2 x_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6]$.*

Satz 3.11 *Sei Γ Fuchssche Gruppe der Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $\Gamma = \langle x_1, \ldots, x_6 \mid x_1^2 = \cdots = x_6^2 = x_1 \cdots x_6 = 1 \rangle$, $x_i \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ Repräsentanten mit positiven rechten oberen Einträgen. Dann besitzen alle $\operatorname{tr} x_i x_j x_k$ mit $1 \leq i < j < k \leq 6$ das selbe Vorzeichen. Weiter gilt in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, dass $x_1 x_2 \cdots x_6 = +1$.*

Beweis. Gemäß [11], S. 299 ff, gibt es einen Fundamentalbereich D für Γ, welcher ein konvexes, einfach zusammenhängendes Sechseck ist mit genau einem zufälligen Eckenzyklus. Beginnend mit einer beliebigen Seite und entgegen dem Uhrzeigersinn zählend seien $y_1, \ldots, y_6$ die Transformationen vom Grad 2, die die Seiten auf sich selbst abbilden, $z_1, \ldots, z_6$ die zugehörigen Fixpunkte. Dann ist $(y_1, \ldots, y_6)$ ein kanonisches Erzeugendensystem von Γ. Da auch $z_1, \ldots, z_6$ (in dieser Reihenfolge) die Ecken eines konvexen Sechsecks bilden, gilt gemäß Lemma 3.9 die Behauptung für dieses Erzeugendensystem.

Ein beliebiges normales Erzeugendensystem $(x_1, \ldots, x_6)$ von Γ entsteht aus $(y_1, \ldots, y_6)$ durch Anwenden eines Automorphismus. Betrachte also die Wirkung der Automorphismen aus Satz 3.10, die die Gruppe der Automorphismen von Γ erzeugen: Simultane Konjugation des Erzeugendensystems verschiebt und dreht

D nur auf der oberen Halbebene und ändert nichts an obiger Eigenschaft des Erzeugendensystems. Anwenden des Automorphismus $[x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1]$ liefert lediglich eine zyklische Vertauschung der x_i und ändert ebenfalls nichts an dieser Eigenschaft. Anwenden des Automorphismus $[x_1x_2x_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6]$ entspricht einer Elementartransformation in [11] und ändert als solche nichts an der Konvexität von D, das neue Erzeugendensystem entspricht der Reihenfolge der Seiten, und die Behauptung gilt nach wie vor. Der Automorphismus $[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1]$ führt dazu, dass sich das Vorzeichen aller $\operatorname{tr} x_ix_jx_k$ ändert.

Aus der Präsentierung für Γ folgt, dass $x_1 \cdots x_6 = \pm 1$, es gilt also $x_1x_2x_3 = \pm x_6x_5x_4$. Aus der Vorzeichenbedingung für die Spuren folgt, dass $\operatorname{tr} x_6x_5x_4 = -\operatorname{tr} x_4x_5x_6 = -\operatorname{tr} x_1x_2x_3$, also hat man $x_1x_2x_3 = -x_6x_5x_4$, und somit $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = +1$. $\square$

Es sei bemerkt, dass man in obigem Satz erreichen kann, dass die $\operatorname{tr} x_ix_jx_k$ mit $1 \leq i < j < k \leq 6$ alle positiv sind. Denn liegt der Fixpunkt z_3 von x_3 rechts von $\overrightarrow{z_1z_2}$, so spiegele man den zugehörigen Fundamentalbereich an der Geodätischen durch z_1 und z_2, was einer Konjugation der Gruppe mit einem Element aus $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ entspricht. Setzen wir also im Folgenden voraus, dass $\operatorname{tr} x_1x_2x_3 > 0$, so stellt dies keine wirkliche Einschränkung dar. Wir nennen ein solches Erzeugendensystem $(x_1, \ldots, x_6) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^6$ mit positiven rechten oberen Einträgen und $\operatorname{tr} x_1x_2x_3 > 0$ ein *Standarderzeugendensystem.*

Aus Satz 3.11 kann man das folgende Korollar folgern:

Korollar 3.12 *Sei Γ Fuchssche Gruppe der Signatur* $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $\Gamma = \langle x_1, x_2, \ldots, x_6 \mid x_1^2 = \ldots = x_6^2 = x_1 \cdots x_6 = 1\rangle$, $z_1, \ldots, z_6$ *die zu* $x_1, \ldots, x_6$ *gehörenden Fixpunkte. Dann ist* $[z_3, x_4(z_3)] \cup [x_4(z_3), x_5x_4(z_3)] \cup [x_5x_4(z_3), x_1x_2(z_3)] \cup [x_1x_2(z_3), x_2(z_3)] \cup [x_2(z_3), z_3]$ *Rand eines konvexen Fünfecks D. Dieses ist ein Fundamentalbereich für Γ.*

Beweis. Betrachte wie oben die Repräsentanten der x_i in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit positivem rechten oberen Eintrag. Nach Satz 3.11 sind die Spuren $\operatorname{tr} x_ix_jx_k$ für $1 \leq i < j < k \leq 6$ entweder alle positiv oder alle negativ. Seien sie o.B.d.A alle positiv. Wir zeigen, dass die Eigenschaft (3) aus Lemma 3.9 erfüllt ist. Die Transformationen der Ordnung 2, die die Ecken festhalten, bzw. die zugehörigen Matrizen aus $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit positven rechten oberen Einträgen, sind $y_1 = x_3$, $y_2 = x_4x_3x_4^{-1} = -x_4x_3x_4$, $y_3 = x_5x_4x_3x_4x_5$, $y_4 = x_1x_2x_3x_2x_1$, $y_5 = -x_2x_3x_2$.

1) Betrachte zuächst $\overrightarrow{z_3x_4}(z_3)$. Da $\overrightarrow{z_3x_4}(z_3) = \overrightarrow{z_3z_4}$, sind die Vorzeichen von $-\operatorname{tr} y_1y_2y_k$ und $\operatorname{tr} x_3x_4y_k$ gleich. Es gilt

a) $\operatorname{tr} x_3x_4x_5x_4x_3x_4x_5 = \operatorname{tr} x_3x_4x_5 \ \operatorname{tr} x_4x_3x_4x_5 - \operatorname{tr} x_3x_4x_5x_5^{-1}x_4^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1} = -\operatorname{tr} x_3x_4x_5 \ \operatorname{tr}(x_4x_3x_4^{-1})x_5 > 0$, da $\operatorname{tr} x_3x_4x_5 > 0$ nach Voraussetzung und $\operatorname{tr}(x_4x_3x_4^{-1})x_5 < 0$ nach Lemma 3.6.

b) $\operatorname{tr} x_3x_4x_1x_2x_3x_2x_1 = \operatorname{tr} x_2x_1x_3 \operatorname{tr} x_4x_1x_2x_3 + \operatorname{tr} x_2x_1x_2x_1x_4 = -\operatorname{tr} x_1x_2x_3 \operatorname{tr} x_5x_6 - \operatorname{tr} x_1x_2x_4 \operatorname{tr} x_1x_2 > 0$.

c) $-\operatorname{tr} x_3x_4x_2x_3x_2 = -\operatorname{tr} x_2x_3 \operatorname{tr} x_4x_2x_3 > 0$.

2) Betrachte nun $x_2(\overrightarrow{z_3})z_3 = \overrightarrow{z_2z_3}$:

a) $-\operatorname{tr} x_2x_3x_4x_3x_4 = -\operatorname{tr} x_2x_3x_4 \operatorname{tr} x_3x_4 > 0$.

b) $\operatorname{tr} x_2x_3x_5x_4x_3x_4x_5 = \operatorname{tr} x_4x_5x_2x_3 \operatorname{tr} x_5x_4x_3 - \operatorname{tr} x_4x_5x_2x_4x_5 = -\operatorname{tr} x_1x_6 \operatorname{tr} x_3x_4x_5 - \operatorname{tr} x_4x_5 \operatorname{tr} x_2x_4x_5 > 0$.

c) $\operatorname{tr} x_2x_3x_1x_2x_3x_2x_1 = \operatorname{tr} x_2x_1x_2x_3 \operatorname{tr} x_1x_2x_3 = -\operatorname{tr} (x_2x_1x_2^{-1})x_3 \operatorname{tr} x_1x_2x_3 > 0$.

3) Betrachte $x_4(z_3)\overrightarrow{x_5}x_4(z_3) = x_4(\overrightarrow{z_3})z_5$:

a) $-\operatorname{tr} x_4x_3x_4x_5x_1x_2x_3x_2x_1 = -\operatorname{tr} x_3x_2x_1x_4 \operatorname{tr} x_3x_4x_5x_1x_2 - \operatorname{tr} x_3x_2x_1x_4x_2x_1x_5x_4x_3 = \operatorname{tr} x_5x_6 \operatorname{tr} x_6 + \operatorname{tr} x_2x_1x_4x_2x_1x_5x_4 = \operatorname{tr} x_2x_1x_4 \operatorname{tr} x_2x_1x_5x_4 - \operatorname{tr} x_2x_1x_5x_1x_2 = -\operatorname{tr} x_1x_2x_4 \operatorname{tr} x_5x_4x_3x_4x_5x_6 - \operatorname{tr} x_5 = -\operatorname{tr} x_1x_2x_4 \operatorname{tr} ((x_5x_4)x_3(x_5x_4)^{-1})x_6 > 0$

b) $\operatorname{tr} x_4x_3x_4x_5x_2x_3x_2 = \operatorname{tr} x_2x_4x_3 \operatorname{tr} x_4x_5x_2x_3 + \operatorname{tr} x_2x_4x_2x_5x_4 = -\operatorname{tr} x_2x_3x_4 \operatorname{tr} x_1x_6 + \operatorname{tr} x_5x_4x_2 \operatorname{tr} x_4x_2 > 0$

c) Dass z_3 links von $x_4(z_3)\overrightarrow{x_5}x_4(z_3)$ liegt, wurde bereits in 1 a) gezeigt.

4) Betrachte $x_1x_2(\overrightarrow{z_3})x_2(z_3) = z_1\overrightarrow{x_2}(z_3)$:

a) Dass z_3 links von $x_1x_2(\overrightarrow{z_3})x_2(z_3)$ liegt, folgt aus 1 c).

b) $\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_2x_4x_3x_4 = \operatorname{tr} x_4x_1x_2x_3 \operatorname{tr} x_2x_4x_3 - \operatorname{tr} x_4x_1x_2x_4x_2 = -\operatorname{tr} x_5x_6 \operatorname{tr} x_2x_3x_4 - \operatorname{tr} x_2x_4 \operatorname{tr} x_1x_2x_4 > 0$

c) $-\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_2x_5x_4x_3x_4x_5 = -\operatorname{tr} x_3x_4x_5x_1x_2 \operatorname{tr} x_3x_2x_5x_4 + \operatorname{tr} x_3x_4x_5x_1x_2x_4x_5x_2x_3 = \operatorname{tr} x_6 \operatorname{tr} x_1x_6 - \operatorname{tr} x_4x_5x_1x_2x_4x_5x_2 = -\operatorname{tr} x_4x_5x_1x_2 \operatorname{tr} x_4x_5x_2 + \operatorname{tr} x_4x_5x_1x_5x_4 = -\operatorname{tr} x_3x_2x_1x_6x_1x_2 \operatorname{tr} x_4x_5x_2 + \operatorname{tr} x_1 = -\operatorname{tr} x_3((x_2x_1)x_6(x_2x_1)^{-1}) \operatorname{tr} x_4x_5x_2 > 0$

5) Betrachte $x_5x_4(\overrightarrow{z_3})x_1x_2(z_3) = z_6x_1\overrightarrow{x_2}(z_3)$:

a) Dass $x_2(z_3)$ links von $x_5x_4(\overrightarrow{z_3})x_1x_2(z_3)$ liegt, folgt aus 4).

b) $\operatorname{tr} x_6x_1x_2x_3x_2x_1x_3 = \operatorname{tr} x_6x_1x_2x_3 \operatorname{tr} x_2x_1x_3 - \operatorname{tr} x_6x_1x_2x_1x_2 = -\operatorname{tr} x_4x_5 \operatorname{tr} x_1x_2x_3 - \operatorname{tr} x_6x_1x_2 \operatorname{tr} x_1x_2 = -\operatorname{tr} x_4x_5 \operatorname{tr} x_1x_2x_3 - \operatorname{tr} x_3x_4x_5 \operatorname{tr} x_1x_2 > 0$.

c) Dass $x_4(z_3)$ links von $x_5x_4(\overrightarrow{z_3})x_1x_2(z_3)$ liegt, folgt aus 3 a).

Insgesamt haben wir gezeigt, dass die angegebenen Seiten tatsächlich den Rand eines konvexen Fünfecks bilden. Um zu zeigen, dass dieses Fünfeck Fundamentalbereich für Γ ist, zeigen wir, dass es die Voraussetzungen des Satzes von Poincaré 2.10 erfüllt: Jede Seite wird durch ein x_i auf sich selbst abgebildet. Da die Bilder unter den x_i durch Drehung um den Winkel π entstehen, ist $x_i(D) \cap D = \emptyset$ für $i = 1, \dots, 6$. Die Zyklen der Fixpunkte der x_i mit $i = 1, 2, 4, 5, 6$ bestehen nur aus einem Punkt, die zugehörigen Innenwinkel sind π. Da $x_3 = -x_2 x_1 x_6 x_5 x_4$ eine Transformation von Grad 2 darstellt, ist die Summe der Innenwinkel im Zyklus von z_3 gleich $(2k+1)\pi$ für ein $k \geq 0$. Da nach der Gauß-Bonnet-Formel 2.3 die Summe der Innenwinkel kleiner als 3π ist, folgt $k = 0$, die Summe ist also gleich π. Insgesamt haben wir gezeigt, dass das Fünfeck die Voraussetzungen des Satzes von Poincaré erfüllt, also ist es ein Fundamentalbereich für Γ. □

Mit Hilfe von Satz 3.11 können wir nun den folgenden Satz beweisen:

Satz 3.13 *Sei* $\Gamma = \langle x_1, x_2, \dots, x_6 \mid x_1^2 = \dots = x_6^2 = x_1 \cdots x_6 = 1 \rangle$ *Fuchssche Gruppe der Signatur* $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $(x_1, \dots, x_6) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^6$ *ein Standarderzeugendensystem. Dann ist* $\operatorname{tr} x_i x_j < -2$ *für* $1 \leq i < j \leq 5$. *Ist* $(y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{23}, y_{24}, y_{25})$ *ein 7-Tupel mit* $y_{ij} > 2$ *für alle* i, j *derart, dass eine Fuchssche Gruppe der obigen Gestalt existiert mit* $y_{ij} = -\operatorname{tr} x_i x_j$ *für* $i = 1, 2,\ j \neq i$, *so gibt es genau eine* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$*-Konjugationsklasse solcher Fuchsscher Gruppen.*

Beweis. Nach Lemma 3.6 c) gilt $\operatorname{tr} x_i x_j < -2$ für $i \neq j$. Nach Konjugation von Γ in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ können wir annehmen, dass

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix},$$
$$x_4 = \begin{pmatrix} c & d \\ -\frac{1+c^2}{d} & -c \end{pmatrix},\ x_5 = \begin{pmatrix} e & f \\ -\frac{1+e^2}{f} & -e \end{pmatrix} \text{ mit } \rho > 1.$$

Nach Lemma 3.6 b) gilt $b, d, f > 0$. Da $\operatorname{tr} x_1 x_2 x_3$, $\operatorname{tr} x_1 x_2 x_4$, $\operatorname{tr} x_1 x_2 x_5 > 0$ und die Fixpunkte von x_1 und x_2 auf der imaginären Achse liegen, haben nach Lemma 3.6 d) die Fixpunkte von x_3, x_4 und x_5 negativen Realteil, was gleichbedeutend damit ist, dass $a, c, e > 0$.

Es ist $\operatorname{tr} x_1 x_2 = -\rho - (1/\rho)$, und da $\rho > 1$ ist, ist ρ durch $\operatorname{tr} x_1 x_2$ eindeutig bestimmt,

$$\rho = \frac{1}{2}(y_{12} + \sqrt{y_{12}^2 - 4}).$$

Weiter gilt

$$\operatorname{tr} x_1 x_3 = -\frac{1+a^2}{b} - b,\ \operatorname{tr} x_2 x_3 = -\rho \frac{1+a^2}{b} - \frac{b}{\rho}.$$

Addition des $(-\rho)$-fachen der ersten zur zweiten Gleichung zeigt, dass b durch $\operatorname{tr} x_1 x_3$ und $\operatorname{tr} x_2 x_3$ eindeutig bestimmt ist,

$$b = \frac{\operatorname{tr} x_2 x_3 - \rho \operatorname{tr} x_1 x_3}{\rho - (1/\rho)}.$$

a ist durch diese Gleichungen offenbar nur bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmt, ist aber nach Voraussetzung positiv:

$$a = \sqrt{\frac{y_{12}y_{23}y_{13} - y_{12}^2 - y_{23}^2 - y_{13}^2 + 4}{y_{12}^2 - 4}}$$

Für c, d, e und f erhält man entsprechende Gleichungen, indem man die y_{ij} in den beiden Gleichungen für a und b entsprechend ersetzt. Insgesamt haben wir gezeigt, dass die $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$-Konjugationsklasse von Γ durch y_1 bis y_7 eindeutig bestimmt ist. □

Da Konjugation in der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ die Spur einer Matrix nicht verändert, sind die Spuren der Gruppenelemente von Γ wie oben offenbar durch das 7-Tupel $(y_{12},\dots,y_{25})$ bereits festgelegt. Es sollte also möglich sein, die Spur eines jeden Elementes, gegeben als Wort in den $x_1,\dots,x_5$, mit Hilfe der $y_{12},\dots,y_{25}$ zu berechnen. Nach Lemma 3.6 d) genügt es, Rechenregeln für die Spuren aller x_ix_j, $x_ix_jx_k$ und $x_ix_jx_kx_l$ anzugeben, wobei die Indizes jeweils verschieden in aufsteigender Reihenfolge sind. Die Rechenregeln liefern die beiden folgenden Lemmata.

Lemma 3.14 *Seien $x_1,\dots,x_5 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit $\operatorname{tr} x_i = 0$ für $i = 1,\dots,5$, für $i < j$ sei $y_{ij} = -\operatorname{tr} x_ix_j$. Dann gilt*

a) $(\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2 = -y_{12}^2 - y_{23}^2 - y_{13}^2 + y_{12}y_{23}y_{13} + 4$

b) $(\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4)^2 = y_{12}^2 + y_{13}^2 + y_{14}^2 + y_{23}^2 + y_{24}^2 + y_{34}^2 - y_{12}y_{23}y_{13} - y_{12}y_{24}y_{14} - y_{13}y_{34}y_{14} - y_{23}y_{34}y_{24} + y_{12}y_{23}y_{34}y_{14} - 4$

c) $(\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4x_5)^2 =$
$$-y_{12}^2 - y_{13}^2 - y_{14}^2 - y_{15}^2 - y_{23}^2 - y_{24}^2 - y_{25}^2 - y_{34}^2 - y_{35}^2 - y_{45}^2 +$$
$$y_{12}y_{23}y_{13} + y_{12}y_{24}y_{14} + y_{12}y_{25}y_{15} + y_{13}y_{34}y_{14} + y_{13}y_{35}y_{15} + y_{14}y_{45}y_{15} +$$
$$y_{23}y_{34}y_{24} + y_{23}y_{35}y_{25} + y_{24}y_{45}y_{25} + y_{34}y_{45}y_{35} -$$
$$y_{12}y_{23}y_{34}y_{14} - y_{12}y_{23}y_{35}y_{15} - y_{12}y_{24}y_{45}y_{15} - y_{13}y_{34}y_{45}y_{15} - y_{23}y_{34}y_{45}y_{25} +$$
$$y_{12}y_{23}y_{34}y_{45}y_{15} + 8$$

d) $2\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4 = y_{12}y_{34} - y_{13}y_{24} + y_{14}y_{23}$

e) $2\operatorname{tr} x_1x_2x_3 \operatorname{tr} x_1x_4x_5 = y_{14}y_{25}y_{13} + y_{34}y_{15}y_{12} - y_{13}y_{24}y_{15} - y_{14}y_{12}y_{35} + 2y_{24}y_{35} - 2y_{25}y_{34}$

Beweis. Benutzt wird Lemma 3.6 c) und d). Zunächst sei bemerkt, dass man aus diesem Lemma sofort unter den geltenden Voraussetzungen die folgenden Identitäten ableitet:

$$\operatorname{tr} x_3x_2x_1 = -\operatorname{tr} x_1x_2x_3,$$

$$\operatorname{tr} x_4x_3x_2x_1 = \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4.$$

a) Diese Gleichung kann man aus e) ableiten oder direkt nachrechnen:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2 &= \operatorname{tr}(x_1x_2x_3)^2 + 2\\
&= \operatorname{tr}(x_1x_2)\operatorname{tr}(x_3x_1x_2x_3) - \operatorname{tr}(x_1x_2x_3x_2x_1x_3) + 2\\
&= -(\operatorname{tr} x_1x_2)^2 - \operatorname{tr} x_3x_1 \operatorname{tr}(x_2x_3x_2x_1) - \operatorname{tr}(x_3x_2x_3x_2) + 2\\
&= -(\operatorname{tr} x_1x_2)^2 - \operatorname{tr} x_1x_3 (\operatorname{tr} x_1x_2 \operatorname{tr} x_3x_2 + \operatorname{tr} x_1x_3) - \operatorname{tr}(x_2x_3)^2 + 2\\
&= -(\operatorname{tr} x_1x_2)^2 - (\operatorname{tr} x_1x_3)^2 - (\operatorname{tr} x_2x_3)^2 - \operatorname{tr} x_1x_2 \operatorname{tr} x_2x_3 \operatorname{tr} x_1x_3 + 4
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
(\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4)^2 &= \operatorname{tr}(x_1x_2x_3x_4)^2 + 2\\
&= \operatorname{tr} x_1x_2x_3\operatorname{tr} x_4x_1x_2x_3x_4 + \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4x_3x_2x_1x_4 + 2\\
&= -(\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2 + \operatorname{tr} x_2x_1x_4x_1x_2x_3\operatorname{tr} x_4x_3 + \operatorname{tr} x_2x_1x_4x_1x_2x_4 + 2\\
&= -(\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2 + (\operatorname{tr} x_2x_3x_2x_1\operatorname{tr} x_4x_1 + \operatorname{tr} x_2x_3x_2x_4)\operatorname{tr} x_3x_4 +\\
&\quad \operatorname{tr} x_2x_1x_4\operatorname{tr} x_1x_2x_4 - \operatorname{tr} x_2x_1x_2x_1 + 2\\
&= -(\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2 + ((\operatorname{tr} x_1x_2\operatorname{tr} x_3x_2 + \operatorname{tr} x_1x_3)\operatorname{tr} x_1x_4 + \operatorname{tr} x_4x_2\operatorname{tr} x_3x_2 +\\
&\quad \operatorname{tr} x_4x_3)\operatorname{tr} x_3x_4 - (\operatorname{tr} x_1x_2x_4)^2 - (\operatorname{tr} x_1x_2)^2 + 4\\
&\overset{\text{a)}}{=} y_{12}^2 + y_{23}^2 + y_{13}^2 - y_{12}y_{23}y_{13} - 4 + y_{12}y_{23}y_{34}y_{14} - y_{13}y_{34}y_{14} - y_{23}y_{34}y_{24} +\\
&\quad y_{34}^2 + y_{12}^2 + y_{24}^2 + y_{14}^2 - y_{12}y_{24}y_{14} - 4 - y_{12}^2 + 4
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
(\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4x_5)^2 &= \operatorname{tr}(x_1x_2x_3x_4x_5)^2 + 2\\
&= \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4\operatorname{tr} x_5x_1x_2x_3x_4x_5 -\\
&\quad \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4x_5x_4x_3x_2x_1x_5 + 2\\
&= -(\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4)^2 - \operatorname{tr} x_3x_2x_1x_5x_1x_2x_3x_4\operatorname{tr} x_5x_4 - \operatorname{tr} x_3x_2x_1x_5x_1x_2x_3x_5 + 2\\
&= -(\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4)^2 - (\operatorname{tr} x_2x_1x_5x_1x_2x_3\operatorname{tr} x_4x_3 + \operatorname{tr} x_2x_1x_5x_1x_2x_4)\operatorname{tr} x_5x_4 -\\
&\quad \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_5\operatorname{tr} x_3x_2x_1x_5 - \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1x_2x_3\\
&= -(\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4)^2 - ((\operatorname{tr} x_2x_3x_2x_1\operatorname{tr} x_5x_1 + \operatorname{tr} x_2x_3x_2x_5)\operatorname{tr} x_3x_4 +\\
&\quad \operatorname{tr} x_2x_4x_2x_1\operatorname{tr} x_5x_1 + \operatorname{tr} x_2x_4x_2x_5)\operatorname{tr} x_4x_5 - (\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_5)^2 -\\
&\quad (\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2 + 4\\
&= -(\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4)^2 - (((\operatorname{tr} x_1x_2\operatorname{tr} x_3x_2 + \operatorname{tr} x_1x_3)\operatorname{tr} x_1x_5 + \operatorname{tr} x_5x_2\operatorname{tr} x_3x_2 +\\
&\quad \operatorname{tr} x_5x_3)\operatorname{tr} x_3x_4 + (\operatorname{tr} x_1x_2\operatorname{tr} x_4x_2 + \operatorname{tr} x_1x_4)\operatorname{tr} x_1x_5 + \operatorname{tr} x_5x_2\operatorname{tr} x_4x_2 +\\
&\quad \operatorname{tr} x_5x_4)\operatorname{tr} x_4x_5 - (\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_5)^2 - (\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2 + 4\\
&\overset{\text{a),b)}}{=} -y_{12}^2 - y_{13}^2 - y_{14}^2 - y_{23}^2 - y_{24}^2 - y_{34}^2 + y_{12}y_{23}y_{13} + y_{12}y_{24}y_{14} + y_{13}y_{34}y_{14} +\\
&\quad y_{23}y_{34}y_{24} - y_{12}y_{23}y_{34}y_{14} + 4 + y_{12}y_{23}y_{34}y_{45}y_{15} - y_{13}y_{34}y_{45}y_{15} -\\
&\quad y_{23}y_{34}y_{45}y_{25} + y_{34}y_{45}y_{35} - y_{12}y_{24}y_{45}y_{15} + y_{14}y_{45}y_{15} + y_{24}y_{45}y_{25} - y_{45}^2 -\\
&\quad y_{12}^2 - y_{13}^2 - y_{15}^2 - y_{23}^2 - y_{25}^2 - y_{35}^2 + y_{12}y_{23}y_{13} + y_{12}y_{25}y_{15} + y_{13}y_{35}y_{15} +\\
&\quad y_{23}y_{35}y_{25} - y_{12}y_{23}y_{35}y_{15} + 4 + y_{12}^2 + y_{23}^2 + y_{13}^2 - y_{12}y_{23}y_{13} - 4 + 4
\end{aligned}
$$

d), e) vgl. [15] □

Lemma 3.15 *Seien $x_1, \dots, x_5 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit $\operatorname{tr} x_i = 0$ für $i = 1, \dots, 5$, die rechten oberen Einträge der x_i seien jeweils positiv und es gelte $\operatorname{tr} x_ix_jx_k > 0$ für alle i, j, k mit $1 \le i < j < k \le 5$. Für $i < j$ sei $y_{ij} = -\operatorname{tr} x_ix_j$. Weiter sei $\rho = \frac{1}{2}(y_{12} + \sqrt{y_{12}^2 - 4})$. Dann lassen sich y_{34}, y_{35}, y_{45} mit Hilfe der übrigen y_{ij}*

folgendermaßen berechnen:

$$y_{34} = -2\frac{\sqrt{(\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2\,(\operatorname{tr} x_1x_2x_4)^2}}{y_{12}^2-4} + \frac{(\rho y_{13}-y_{23})(1+\frac{(\operatorname{tr} x_1x_2x_4)^2}{y_{12}^2-4})}{\rho y_{14}-y_{24}} + \frac{(\rho y_{14}-y_{24})(1+\frac{(\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2}{y_{12}^2-4})}{\rho y_{13}-y_{23}}$$

$$y_{35} = -2\frac{\sqrt{(\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2\,(\operatorname{tr} x_1x_2x_5)^2}}{y_{12}^2-4} + \frac{(\rho y_{13}-y_{23})(1+\frac{(\operatorname{tr} x_1x_2x_5)^2}{y_{12}^2-4})}{\rho y_{15}-y_{25}} + \frac{(\rho y_{15}-y_{25})(1+\frac{(\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2}{y_{12}^2-4})}{\rho y_{13}-y_{23}}$$

$$y_{45} = -2\frac{\sqrt{(\operatorname{tr} x_1x_2x_4)^2\,(\operatorname{tr} x_1x_2x_5)^2}}{y_{12}^2-4} + \frac{(\rho y_{14}-y_{24})(1+\frac{(\operatorname{tr} x_1x_2x_5)^2}{y_{12}^2-4})}{\rho y_{15}-y_{25}} + \frac{(\rho y_{15}-y_{25})(1+\frac{(\operatorname{tr} x_1x_2x_4)^2}{y_{12}^2-4})}{\rho y_{14}-y_{24}}$$

Zur Berechnung der $(\operatorname{tr} x_ix_jx_k)^2$ *benutze man Lemma 3.14.*

Beweis. Zeige die Formel für y_{34}, die Formeln für y_{35} und y_{45} erhält man durch Umbenennung der x_i. Wie im Beweis von Satz 3.13 dürfen wir o.B.d.A annehmen, dass

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} c & d \\ -\frac{1+c^2}{d} & -c \end{pmatrix}$$

mit $\rho > 1$ und $a, b, c, d > 0$. Durch Multiplikation von x_3 und x_4 erhält man

$$\operatorname{tr} x_3x_4 = 2ac - \frac{b(1+c^2)}{d} - \frac{d(1+a^2)}{b}.$$

Die Gleichungen für die Spuren von x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3 und x_2x_4 liefern fünf Gleichungen für die fünf Unbekannten a, b, c, d und ρ. Unter Berücksichtigung der Bedingungen an die Vorzeichen erhält man daraus (vgl. Beweis von Satz 3.13)

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{2}(y_{12} + \sqrt{y_{12}^2-4}) \\
a &= \sqrt{\frac{y_{12}y_{23}y_{13} - y_{12}^2 - y_{23}^2 - y_{13}^2 + 4}{y_{12}^2-4}} \\
b &= \frac{\rho y_{13} - y_{23}}{\sqrt{y_{12}^2-4}} \\
c &= \sqrt{\frac{y_{12}y_{24}y_{14} - y_{12}^2 - y_{24}^2 - y_{14}^2 + 4}{y_{12}^2-4}} \\
d &= \frac{\rho y_{14} - y_{24}}{\sqrt{y_{12}^2-4}}
\end{aligned}$$

Einsetzen dieser Gleichungen in die Gleichung für $\operatorname{tr} x_3 x_4$ liefert die Behauptung. $\square$

Bisher haben wir, ausgehend von einem Standarderzeugendensystem für eine Fuchssche Gruppe Γ mit Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, einige Eigenschaften dieser Erzeugenden gezeigt und aus diesen notwendige Bedingungen für die Spuren einiger Produkte dieser Erzeugenden abgeleitet. Wir werden nun sehen, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind:

Satz 3.16 *Sei $(y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{23}, y_{24}, y_{25}) \in \mathbb{R}^7$, seien y_{34}, y_{35}, y_{45} wie in Lemma 3.15. Genau dann existiert eine Fuchssche Gruppe mit Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ und Standarderzeugendensystem $(x_1, \ldots, x_6) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^6$ derart, dass $\operatorname{tr} x_i x_j = -y_{ij}$ für $i = 1, 2, j = 2, \ldots, 5, i < j$, wenn gilt*

(1) $y_{ij} > 2$ *für* $i = 1, 2,\ j = 2, \ldots, 5,\ i < j$

(2) $$\begin{aligned} &y_{12}^2 + y_{13}^2 + y_{14}^2 + y_{15}^2 + y_{23}^2 + y_{24}^2 + y_{25}^2 + y_{34}^2 + y_{35}^2 + y_{45}^2 \\ &-y_{12}y_{23}y_{13} - y_{12}y_{24}y_{14} - y_{12}y_{25}y_{15} - y_{13}y_{34}y_{14} - y_{13}y_{35}y_{15} - y_{14}y_{45}y_{15} - \\ &y_{23}y_{34}y_{24} - y_{23}y_{35}y_{25} - y_{24}y_{45}y_{25} - y_{34}y_{45}y_{35} \\ &+y_{12}y_{23}y_{34}y_{14} + y_{12}y_{23}y_{35}y_{15} + y_{12}y_{24}y_{45}y_{15} + y_{13}y_{34}y_{45}y_{15} + y_{23}y_{34}y_{45}y_{25} \\ &-y_{12}y_{23}y_{34}y_{45}y_{15} = 8 \end{aligned}$$

(3) $y_{13}y_{24} - y_{12}y_{34} - y_{14}y_{23} > 4$

(4) *a)* $y_{12}y_{13}y_{14} + y_{12}y_{14}y_{23} - y_{12}^2 y_{34} - 2y_{13}y_{14} - 2y_{23}y_{24} + 4y_{34} > 0$
b) $y_{12}y_{23}y_{24} + y_{13}y_{23}y_{24} - y_{23}^2 y_{14} - 2y_{12}y_{24} - 2y_{13}y_{34} + 4y_{14} > 0$
c) $y_{24}y_{34}y_{45} + y_{25}y_{34}y_{45} - y_{45}^2 y_{23} - 2y_{24}y_{34} - 2y_{25}y_{35} + 4y_{23} > 0$
d) $y_{24}y_{34}y_{45} + y_{23}y_{24}y_{45} - y_{24}^2 y_{35} - 2y_{34}y_{45} - 2y_{23}y_{25} + 4y_{35} < 0$

In diesem Fall ist die $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklasse der Fuchsschen Gruppe durch $(y_{12}, \ldots, y_{25})$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Angenommen, es existiert eine solche Fuchssche Gruppe Γ mit einem solchen Standarderzeugendensystem. Da $x_1, \ldots, x_5$ positive rechte obere Einträge haben, gilt nach Lemma 3.6 a), dass $\operatorname{tr} x_i x_j < -2$ für $i \neq j$, also gilt Bedingung (1). Da $x_6 = \pm(x_1 \cdots x_5)$, hat $(x_1 \cdots x_5)$ Spur 0, mit Lemma 3.14 c) folgt Bedingung (2). Nach Satz 3.11 gilt $x_1 \cdots x_6 = +1$, somit ist $\operatorname{tr} x_1 x_2 x_3 x_4 = \operatorname{tr} x_5 x_6 < -2$, und Lemma 3.14 d) zeigt Ungleichung (3).

Nach Satz 3.11 haben $\operatorname{tr} x_1x_2x_3$, $\operatorname{tr} x_1x_2x_4$, $\operatorname{tr} x_2x_3x_4$, $\operatorname{tr} x_2x_4x_5$, $\operatorname{tr} x_3x_4x_5$ alle das selbe Vorzeichen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{tr} x_1x_2x_3 \ \operatorname{tr} x_1x_2x_4 > 0$, $\operatorname{tr} x_2x_3x_1 \ \operatorname{tr} x_2x_3x_4 > 0$, $\operatorname{tr} x_4x_5x_2 \ \operatorname{tr} x_4x_5x_3 > 0$ und $\operatorname{tr} x_4x_2x_3 \ \operatorname{tr} x_4x_2x_5 < 0$. Anwenden von Lemma 3.14 e) liefert Bedingung (4).

Zeige nun, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind. Wähle

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}, \; x_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix},$$
$$x_4 = \begin{pmatrix} c & d \\ -\frac{1+c^2}{d} & -c \end{pmatrix}, \; x_5 = \begin{pmatrix} e & f \\ -\frac{1+e^2}{f} & -e \end{pmatrix}$$

mit ρ, a, b, c, d, e, f wie in Satz 3.13. Dann ist $\operatorname{tr} x_i x_j = -y_{ij} < -2$ für alle $i = 1, 2$, $j = 2, \ldots, 5$, $i \neq j$. Nach Lemma 3.14 c) impliziert Bedingung (2), dass $x_6 := -x_1 \cdots x_5$ Spur 0 hat. Wegen (3) gilt nach Lemma 3.14, dass $\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_4 = \operatorname{tr} x_5x_6 < -2$, also hat x_6 positiven rechten oberen Eintrag. Wie oben zeigt Bedingung (4), dass $\operatorname{tr} x_1x_2x_3$, $\operatorname{tr} x_1x_2x_4$, $\operatorname{tr} x_2x_4x_5$, $\operatorname{tr} x_3x_4x_5$ alle das selbe Vorzeichen besitzen. Wie man aber im Beweis von Korollar 3.12 sieht, ist dies bereits hinreichend dafür, dass das Fünfeck mit den Ecken $z_3, x_4(z_3), x_5x_4(z_3), x_1x_2(z_3), x_2(z_3)$ (in dieser Reihenfolge) ein Fundamentalbereich für die Fuchssche Gruppe $\Gamma = \langle x_1, x_2, \ldots, x_6 \mid x_1^2 = \ldots = x_6^2 = x_1 \cdots x_6 = 1 \rangle$ ist. $\square$

Wir haben nun den Teichmüllerraum zur Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ mit Hilfe von Spuren parametrisiert. Sei $\mathcal{T}$ die Menge aller Spurtupel in $\mathbb{R}^7$, die den Bedingungen in Satz 3.16 genügen. Die Darstellung einer $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklasse mittels eines Spurtupels in $\mathcal{T}$ ist nicht eindeutig, da jeder Automorphismus einer Fuchsschen Gruppe Γ ein normales Erzeugendensystem ε auf ein Erzeugendensystem ε' abbildet, welches im Allgemeinen zu einem anderen Spurtupel in $\mathcal{T}$ führt. Es gilt offenbar

Satz 3.17 *Sei Γ Fuchssche Gruppe mit Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. Sei $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)/\mathrm{Inn}(\Gamma)$, die so genannte* Teichmüller-Modulgruppe, *wobei $\mathrm{Inn}(\Gamma)$ die Gruppe der inneren Automorphismen von Γ sei. G operiert auf $\mathcal{T}$ vermöge*

$$f(-\operatorname{tr} x_1x_2, \ldots, -\operatorname{tr} x_2x_5) \mapsto (-\operatorname{tr} f(x_1)f(x_2), \ldots, -\operatorname{tr} f(x_2)f(x_5)).$$

Die $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklassen Fuchsscher Gruppen mit Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ entsprechen bijektiv $\mathcal{T}/G$.

In [29] konstruiert Maskit einen Fundamentalbereich für die Teichmüller-Modulgruppe einer geschlossenen Fläche von Geschlecht $g \geq 2$, beschrieben durch eine Menge von $2g$ nicht-trennenden Geodätischen, welche gewissen Minimalitätsbedingungen hinsichtlich ihrer Länge genügen. Speziell für Geschlecht 2 beschreibt er eine solche Menge mit Hilfe von 45 Ungleichungen. Griffiths verbessert in [13] die Zahl benötigter Ungleichungen auf 27. Dazu betrachtet er Abstände zwischen Weierstrass-Punkten. Man kann seine Resultate in Ungleichungen für Spuren übersetzen, was im Folgenden geschieht. Die folgenden Beweise bedienen sich der Ideen in eben dieser Arbeit. Sie werden hier aus mehreren Gründen angedeutet: Zum einen dienen sie der Klarheit, wie die Ergebnisse von Griffiths tatsächlich für Spurungleichungen zu übersetzen sind. Zum anderen werden einige Beweise einfacher und klarer, wenn man algebraische Formulierungen heranzieht.

Zunächst formulieren wir das spurtechnische Analogon zu Maskits *minimalen Standardketten*:

Definition 3.18 *Ein Standarderzeugendensystem* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^6$ *einer Fuchsschen Gruppe* Γ *der Signatur* $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ *heißt* minimales Standarderzeugendensystem, *falls für* $m = 1, 3, 4$ *für jedes Standarderzeugendensystem* $(x_1, \ldots, x_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_6)$ *gilt* $-\mathrm{tr}\, x_m x_{m+1} \leq -\mathrm{tr}\, x_m x'_{m+1}$, *für jedes Standarderzeugendensystem* $(x_1, x_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)$ *gilt* $-\mathrm{tr}\, x_2 x_3 \leq -\mathrm{tr}\, x_2 x'_3$ *und jedes Standarderzeugendensystem* $(x_2, x_1, x'_6, x'_5, x'_4, x'_3)$ *gilt* $-\mathrm{tr}\, x_2 x_3 \leq -\mathrm{tr}\, x_1 x'_6$.

Für $m = 2$ muss man in der Definition zwei Fälle betrachten, denn: Sind x_1, x_2 gewählt, so kann man durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R}) \setminus \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ die Rollen von x_1 und x_2 vertauschen.

Satz 3.19 *(vgl. [30], [29].) Jede Fuchssche Gruppe der Signatur* $(2; -)$ *besitzt bis auf Konjugation in* $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ *nur endlich viele minimale Standarderzeugendensysteme. Die Menge der Spurtupel in* $\mathcal{T}$*, die mit Fuchsschen Gruppen korrespondieren, die mehr als ein minimales Standarderzeugendensystem haben, hat Lebesgue-Maß null.*

Das folgende Lemma impliziert Theorem 1.1 in [12]. Der Satz dort ist jedoch geometrisch formuliert, und es zeigt sich, dass der Beweis sehr viel einfacher wird, wenn man Spuren betrachtet.

Lemma 3.20 *Es seien* $x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *mit positiven rechten oberen Einträgen und* $\mathrm{tr}\, x_i = 0$. *Ist* $-\mathrm{tr}\, x_3 x_4 \leq -\mathrm{tr}\, x_3 x_6 x_5 x_4 x_5 x_6$ *und* $-\mathrm{tr}\, x_4 x_5 \leq -\mathrm{tr}\, x_4 x_6$, *so folgt* $\mathrm{tr}\, x_3 x_6 x_5 x_6 \geq -\mathrm{tr}\, x_3 x_6$.

Beweis. Gemäß den Voraussetzungen gilt

$$\begin{aligned} & -\mathrm{tr}\, x_3 x_4 \leq -\mathrm{tr}\, x_3 x_6 x_5 x_4 x_5 x_6 = -\mathrm{tr}\, x_6 x_3 x_6 x_5 \mathrm{tr}\, x_4 x_5 - \mathrm{tr}\, x_6 x_3 x_6 x_4 \\ = \; & -\mathrm{tr}\, x_4 x_5 \mathrm{tr}\, x_3 x_6 x_5 x_6 - \mathrm{tr}\, x_3 x_6 \mathrm{tr}\, x_4 x_6 - \mathrm{tr}\, x_3 x_4 \\ \leq \; & -\mathrm{tr}\, x_4 x_6 (\mathrm{tr}\, x_3 x_6 x_5 x_6 + \mathrm{tr}\, x_3 x_6) - \mathrm{tr}\, x_3 x_4 \end{aligned}$$

Dies impliziert $\mathrm{tr}\, x_3 x_6 x_5 x_6 \geq -\mathrm{tr}\, x_3 x_6$. □

Wir kommen nun zu Griffiths Beschreibung minimaler Standardketten, formuliert mit Hilfe von Spuren.

Satz 3.21 *Ein Standarderzeugendensystem* $(x_1,\ldots,x_6)$ *einer Fuchsschen Gruppe* Γ *mit Signatur* $(0;2,2,2,2,2,2)$ *ist genau dann minimal, wenn es den folgenden Bedingungen genügt:*

(1) $y_{12} \leq y_{23},\ y_{34},\ y_{45},\ y_{56}$

(2) $y_{23} \leq y_{24},\ y_{25},\ y_{26},\ y_{23}y_{34}-y_{24},\ y_{23}y_{34}y_{45}-y_{23}y_{35}-y_{24}y_{45}+y_{25},\ y_{12}y_{16}-y_{26},\ y_{26}y_{56}-y_{25},\ y_{12}y_{15}-y_{25},\ y_{13},\ y_{14},\ y_{15},\ y_{16},\ y_{12}y_{23}-y_{13},\ y_{12}y_{23}y_{34}-y_{12}y_{24}-y_{13}y_{34}+y_{14},\ y_{16}y_{56}-y_{15}$

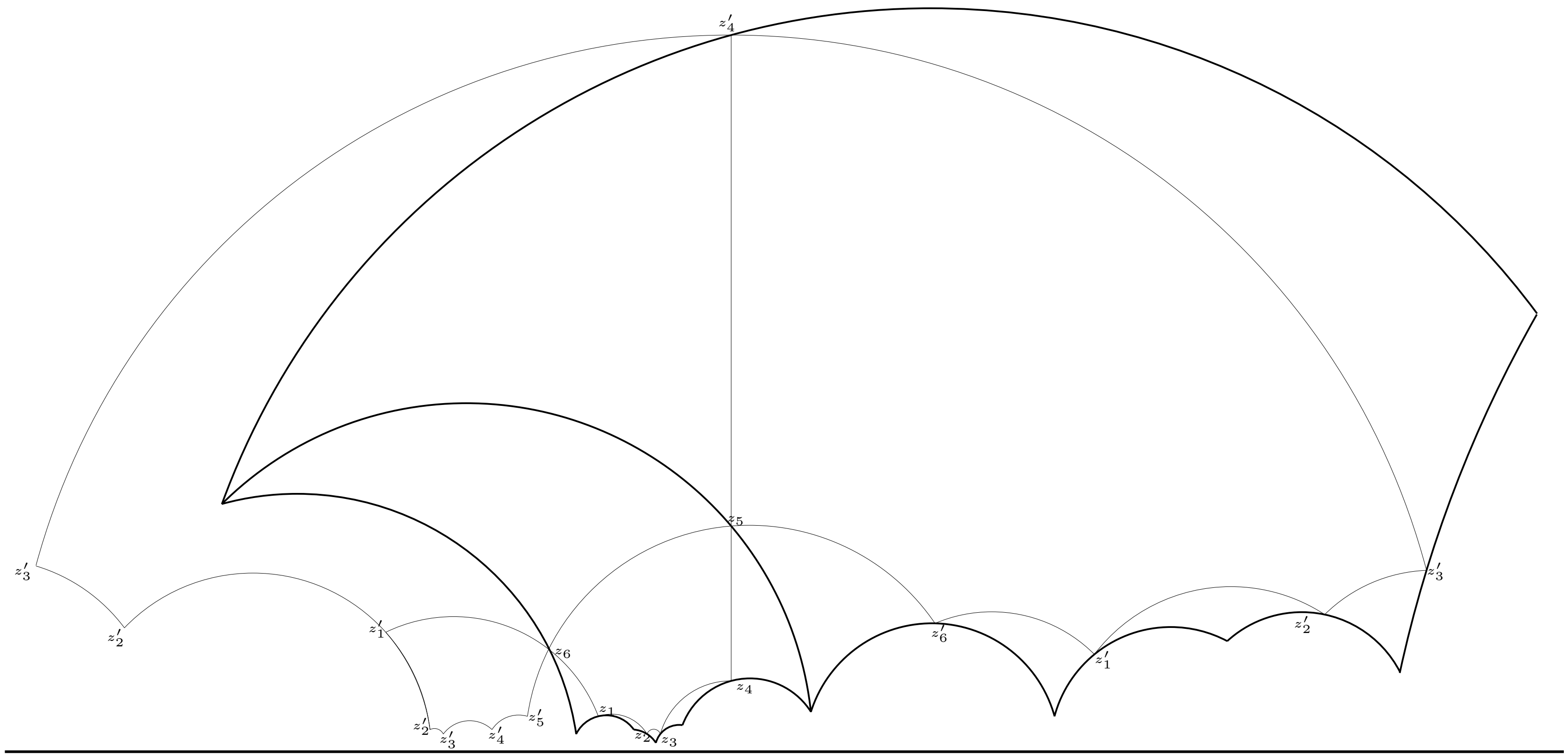
(3) $y_{34} \leq y_{35},\ y_{36},\ y_{34}y_{45}-y_{35},\ y_{34}y_{45}y_{56}-y_{35}y_{56}-y_{34}y_{46}+y_{36},\ y_{36}y_{56}y_{45}-y_{35}y_{45}-y_{36}y_{46}+y_{34},\ y_{46}y_{45}y_{34}y_{56}-y_{46}y_{35}y_{56}-y_{46}^2y_{34}-y_{45}^2y_{34}+y_{46}y_{36}+y_{45}y_{35}+y_{34}$

(4) $y_{45} \leq y_{46},\ y_{45}y_{56}-y_{46}$

Beweis. Zeige zunächst, dass obige Bedingungen hinreichend dafür sind, dass $(x_1,\ldots,x_6)$ ein minimales Standarderzeugendensystem ist.

Gemäß [11] besitzt Γ einen Fundamentalbereich D, der die Gestalt eines hyperbolischen Sechsecks hat, wobei die sechs Ecken einen zufälligen Eckenzyklus bilden und die Fixpunkte $z_1,\ldots,z_6$ von $x_1,\ldots,x_6$ in dieser Reihenfolge jeweils die Mittelpunkte der Seiten sind, siehe Abbildung 1. Betrachte in D das Sechseck $[z_1,z_2]\cup[z_2.z_3]\cup\cdots\cup[z_6,z_1]$. Da D Fundamentalbereich ist, bilden die zu D Γ-äquivalenten Sechsecke eine Pflasterung von $\mathcal{H}$, wobei jeder dieser Fundamentalbereiche wieder ein inneres Sechseck einschließt. Entsprechend erhält man eine Pflasterung von $\mathcal{H}$ durch Sechsecke mit Ecken, die Γ-äquivalent zu $z_1,\ldots,z_6$ sind. Wir nennen sie im Folgenden *kleine Sechsecke*. In jedem Fixpunkt z_i' treffen sich vier solcher kleinen Sechsecke, zwei davon sind in einem zu D Γ-äquivalenten Fundamentalbereich enthalten, zwei enthalten eine Ecke eines solchen Fundamentalbereiches. Erstere Sechsecke mögen *innere Sechsecke* heißen, letztere seien *äußere Sechsecke* genannt. Eine Seite eines kleinen Sechsecks zwischen zwei Punkten z_i' und z_{i+1}', die Γ-äquivalent zu z_i bzw. z_{i+1} sind, heiße im Folgenden i*–Seite*, wobei $6+1$ als 1 zu interpretieren sei. Wird im Folgenden von *Kreuzungspunkten* mit i–Seiten gesprochen, so seien damit Schnittpunkte mit inneren Punkten dieser Seiten gemeint.

Abbildung 1: Beispiel einer Überdeckung durch Fundamentalbereiche und kleine Sechsecke. Dicke Linien begrenzen Fundamentalbereiche, dünne Linien sind kleine Sechseckseiten.



Sei $(x_1, \ldots, x_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_6)$ ein weiteres Standarderzeugendensystem mit den selben ersten i Erzeugenden, z'_{i+1} der Fixpunkt von x'_{i+1}. Dann kann $[z_i, z'_{i+1}]$ keine j–Seite $[\tilde{z}_j, \tilde{z}_{j+1}]$ kreuzen für $j = 1, \ldots, i-1$. Denn einerseits ist $[z_i, z'_{i+1}]$ im zu $(x_1, \ldots, x_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_6)$ gehörenden Fundamentalbereich D' enthalten, andererseits ist $[\tilde{z}_j, \tilde{z}_{j+1}]$ in einem zu D' Γ-äquivalenten Fundamentalbereich enthalten. Außerdem kann x'_{i+1} kein Konjugat von $x_1, \ldots, x_i$ sein.

1. Zeige zunächst, dass $-\mathrm{tr}\, x_4 x_5$ minimal ist unter allen Erzeugendensystemen mit den selben vier ersten Erzeugenden. Sei dazu $(x_1, x_2, x_3, x_4, x'_5, x'_6)$ ein Standarderzeugendensystem. Der Automorphismus σ von Γ sei definiert durch $\sigma(x_i) = x_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$, $\sigma(x_5) = -x_5 x_6 x_5$ und $\sigma(x_6) = x_5$. Wie man nachrechnet, definiert dies in der Tat einen Automorphismus, und es gilt $\sigma^{-1}(x_i) = x_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$, $\sigma^{-1}(x_5) = x_6$ und $\sigma^{-1}(x_6) = -x_6 x_5 x_6$. Aus den Vorbemerkungen über die Kreuzung mit i–$(i+1)$–Seiten folgt, dass $x'_i = \sigma^n(x_i)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ und $i = 5, 6$. Zeige mittels Induktion nach n, dass für $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} -\mathrm{tr}\, x_4 \sigma^n(x_5) &\geq -\mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{n-1}(x_5), \\ -\mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{-n}(x_5) &\geq -\mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{-(n-1)}(x_5). \end{aligned}$$

Für $n = 1$ entspricht die Behauptung gerade den Bedingungen (4) des Satzes. Ist $n \geq 2$ und die Behauptung richtig für $n-1$, so gilt

$$\begin{aligned} & -\mathrm{tr}\, x_4 \sigma^n(x_5) = \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{n-1}(x_5 x_6 x_5) \\ = \;& \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{n-1}(x_5) \mathrm{tr}\, \sigma^{n-1}(x_6 x_5) + \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{n-1}(x_6) \\ = \;& \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{n-1}(x_5) \mathrm{tr}\, \sigma^{n-1}(x_5 x_6) + \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{n-2}(x_5) \\ \geq \;& \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{n-1}(x_5) \mathrm{tr}\, \sigma^{n-1}(x_5 x_6) + \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{n-1}(x_5) \\ = \;& -\mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{n-1}(x_5)(-\mathrm{tr}\, \sigma^{n-1}(x_5 x_6) - 1) \\ \geq \;& -\mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{n-1}(x_5) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & -\mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{-n}(x_5) = \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{-(n-2)}(x_6 x_5 x_6) \\ = \;& \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{-(n-2)}(x_6) \mathrm{tr}\, \sigma^{-(n-2)}(x_5 x_6) + \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{-(n-2)}(x_5) \\ \geq \;& \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{-(n-1)}(x_5) \mathrm{tr}\, \sigma^{-(n-2)}(x_5 x_6) + \mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{-(n-1)}(x_5) \\ = \;& -\mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{-(n-1)}(x_5)(-\mathrm{tr}\, \sigma^{-(n-2)}(x_5 x_6) - 1) \\ \geq \;& -\mathrm{tr}\, x_4 \sigma^{-(n-1)}(x_5) \end{aligned}$$

2. Zeige nun, dass $-\mathrm{tr}\, x_3 x_4$ minimal ist unter allen Standarderzeugendensystemen mit den selben ersten drei Erzeugenden. Sei dazu $(x_1, x_2, x_3, x'_4, x'_5, x'_6)$ ein Standarderzeugendensystem, sei z der Fixpunkt von x'_4.

2.1. Kreuzt $[z_3, z]$ keine kleine Sechseckseite, so ist z Ecke eines der vier kleinen Sechsecke mit Ecke z_3. Da sonst $\mathrm{tr}\, x_2 x_3 x'_4 < 0$ wäre, kann z nur Ecke des inneren Sechsecks in D sein oder des äußeren Sechsecks, das die zufällige Ecke rechts von $\overrightarrow{z_3 z_4}$ enthält. Somit gilt $x'_4 = x_5$, $x'_4 = x_6$, $x'_4 = -x_4 x_5 x_4$ oder $x'_4 = x_4 x_5 x_6 x_5 x_4$.

Also ist $-\operatorname{tr} x_3x_4' = y_{35}$ oder $-\operatorname{tr} x_3x_4' = y_{36}$ oder $-\operatorname{tr} x_3x_4' = y_{34}y_{45} - y_{35}$ oder $-\operatorname{tr} x_3x_4' = y_{34}y_{45}y_{56} - y_{35}y_{56} - y_{34}y_{46} + y_{36}$. Gemäß Eigenschaft (3) gilt also $y_{34} \leq -\operatorname{tr} x_3x_4'$.

2.2. Sei nun angenommen, $[z_3, z]$ kreuzt nur 5– und 6–Seiten. Dann kann nur höchstens eine 5– und eine 6–Seite gekreuzt werden, denn: Kreuzt das geodätische Segment $[z_3, z]$ von z_3 nach z zunächst eine 5–Seite, so kann das zugehörige kleine Sechseck nur durch die entsprechende 6–Seite wieder verlassen werden, wenn keine anderen Seiten zugelassen sind. Das folgende Sechseck könnte dann nur durch die entsprechende 5–Seite verlassen werden, diese ist aber die Verlängerung der ersten 5–Seite, d.h. $[z_3, z]$ würde eine Geodätische zwei Mal schneiden, was nicht möglich ist. Die gleiche Argumentation zeigt die Behauptung für den Fall, dass die erste Kreuzung von $[z_3, z]$ mit einer 6–Seite erfolgt. Als erste Kreuzungspunkte kommen nur die Seiten der selben kleinen Sechsecke wie in 2.1. in Frage.

Betrachte zunächst den Fall, dass als erstes eine Seite des inneren Sechsecks gekreuzt wird. Wird nur die 5–Seite gekreuzt, so ist x_4' Konjugat von x_4, $x_4' = -x_5x_4x_5$ (2.1). Wird nur die 6–Seite geschnitten, so kann x_4' Konjugat von x_4 oder x_5 sein, $x_4' = x_6x_5x_4x_5x_6$ (2.2) oder $x_4' = -x_6x_5x_6$ (2.3). Es kann nicht zuerst die 5–Seite und dann die 6–Seite gekreuzt werden, da $-x_6x_4x_6$ und $-x_6x_5x_6$ links von $\overrightarrow{z_3z_6}$ liegen. Wird zuerst die 6–Seite und dann die 5–Seite gekreuzt, so ist $x_4' = -x_6x_4x_6$ (2.4). Analog erhält man für den Fall, dass zuerst eine Seite des äußeren Sechsecks gekreuzt wird, $x_4' = x_4x_5x_4x_5x_4$ (2.5), $x_4' = x_4x_5x_6x_5x_4x_5x_6x_5x_4$ (2.6), $x_4' = -x_4x_5x_6x_5x_6x_5x_4$ (2.7) oder $x_4' = -x_4x_5x_6x_4x_6x_5x_4$ (2.8).

(2.1) : Es ist $-\operatorname{tr} - x_3x_5x_4x_5 = y_{35}y_{45} - y_{34} \overset{(3)}{\geq} y_{34}y_{45} - y_{34} = y_{34}(y_{45} - 1) \geq y_{34}$

(2.4) : $-\operatorname{tr} x_3x_6x_4x_6 = y_{36}y_{46} - y_{34} \overset{(3)}{\geq} y_{34}y_{46} - y_{34} \geq y_{34}$

(2.2) : $-\operatorname{tr} x_3x_6x_5x_4x_5x_6 = y_{36}y_{56}y_{45} - y_{35}y_{45} - y_{36}y_{46} + y_{34} \overset{(3)}{\geq} y_{34}$

(2.3) : x_3, x_4, x_5, x_6 erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 3.20, somit gilt $\operatorname{tr} x_3x_6x_5x_6 \geq y_{36} \overset{(3)}{\geq} y_{34}$.

(2.5) : $-\operatorname{tr} x_3x_4x_5x_4x_5x_4 = y_{45}\operatorname{tr} x_3x_4x_5x_4 - y_{34} \overset{(3)}{\geq} y_{34}y_{45} - y_{34} \geq y_{34}$

(2.6) : $-\operatorname{tr} x_3x_4x_5x_6x_5x_4x_5x_6x_5x_4 = -\operatorname{tr} x_3x_4x_5x_6x_5x_4\operatorname{tr} x_5x_6x_5x_4 + \operatorname{tr} x_3x_4 \overset{(3),(4)}{\geq} y_{34}y_{45} - y_{34} \geq y_{34}$

(2.8) : $\operatorname{tr} x_3x_4x_5x_6x_4x_6x_5x_4 = y_{46}y_{45}y_{34}y_{56} - y_{46}y_{35}y_{56} - y_{46}^2y_{34} - y_{45}^2y_{34} + y_{46}y_{36} + y_{45}y_{35} + y_{34} \overset{(3)}{\geq} y_{34}$

(2.7) : Es ist

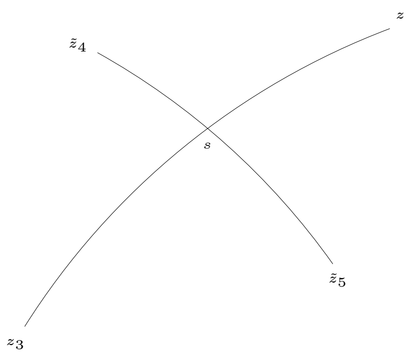
$$y_{34} \overset{(2.8)}{\leq} \operatorname{tr} x_3x_4x_5x_6x_4x_6x_5x_4 = -\operatorname{tr} x_3(x_4x_5x_6x_5x_4)(x_4x_5x_4)x_4(x_4x_5x_4)(x_4x_5x_6x_5x_4)$$

und $y_{45} = \operatorname{tr} x_4(x_4x_5x_4) \leq -\operatorname{tr} x_4(x_4x_5x_6x_5x_4) = \operatorname{tr} x_4x_5x_6x_5$, die Voraussetzungen von Lemma 3.20 sind also erfüllt für $x_3, x_4, -x_4x_5x_4$ und $x_4x_5x_6x_5x_4$, und es gilt

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr} x_3x_4x_5x_6x_5x_6x_5x_4 = -\operatorname{tr} x_3(x_4x_5x_6x_5x_4)(x_4x_5x_4)(x_4x_5x_6x_5x_4) \\ \geq \; & -\operatorname{tr} x_3(x_4x_5x_6x_5x_4) \overset{(3)}{\geq} y_{34} \end{aligned}$$

2.3. Betrachte nun den Fall, dass $[z_3, z]$ 4–Seiten, aber keine 3–Seiten kreuzt. Zeige die Behauptung durch Induktion nach der Anzahl der Kreuzungspunkte mit 4–Seiten.

Zunächst kreuze $[z_3, z]$ genau eine 4–Seite $[\tilde{z}_4, \tilde{z}_5]$ in einem Kreuzungspunkt s, wobei $\tilde{z}_4, \tilde{z}_5$ Fixpunkte von $\tilde{x_4}$ bzw. $\tilde{x_5}$ seien.



Sei zunächst angenommen, dass x_4' in Γ nicht konjugiert zu x_4 ist. Angenommen, $d(s, \tilde{z}_5) \geq d(s, z)$. Dann ist

$$d(\tilde{z}_4, z) < d(\tilde{z}_4, s) + d(s, z) \leq d(\tilde{z}_4, s) + d(s, \tilde{z}_5) = d(\tilde{z}_4, \tilde{z}_5) = d(z_4, z_5)$$

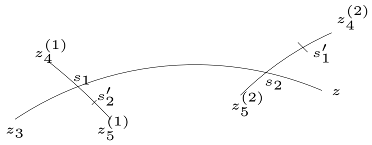
Das geodätische Segment $[\tilde{z}_4, z]$ hat keine Kreuzungspunkte mit 1–, 2–, 3– oder 4–Seiten. Denn die Verlängerung einer jeden solchen Seite würde $[\tilde{z}_4, s]$ oder $[s, z]$ kreuzen, beide Segmente haben aber keine Kreuzungspunkte mit 4-Seiten. Somit ist $[\tilde{z}_4, z]$ Γ-äquivalent zu einem Segment $[z_4, z_5']$, welches nicht durch eine 4-Seite gekreuzt wird, wobei z_5' Fixpunkt eines zu x_4' konjugierten Elementes x_5' ist, und wir erhalten ein Standarderzeugendensystem $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5', x_6')$ mit $-\operatorname{tr} x_4x_5' < y_{45}$, im Widerspruch zum in 1. Gezeigten.

Also ist $d(s, \tilde{z}_5) < d(s, z)$, und es gilt

$$d(z_3, \tilde{z}_5) < d(z_3, s) + d(s, \tilde{z}_5) \leq d(z_3, s) + d(s, z) = d(z_3, z)$$

Somit ist $-\operatorname{tr} x_3\tilde{x_5} < -\operatorname{tr} x_3x_4'$. Andererseits kreuzt $[z_3, \tilde{z}_5]$ keine 1–, 2–, 3– oder 4–Seite. Denn die Verlängerung einer jeden solchen Seite würde $[z_3, z]$ oder $[\tilde{z}_4, \tilde{z}_5]$ kreuzen, $[\tilde{z}_4, \tilde{z}_5]$ wird aber nicht gekreuzt. Somit haben wir bereits gezeigt, dass $y_{34} \leq -\operatorname{tr} x_3\tilde{x_5} < -\operatorname{tr} x_3x_4'$.

Betrachte nun den Fall, dass $[z_3, z]$ mindestens zwei Kreuzungspunkte mit 4–Seiten hat. Seien s_1, s_2 zwei solche Kreuzungspunkte mit Seiten $[z_4^{(1)}, z_5^{(1)}]$ bzw. $[z_4^{(2)}, z_5^{(2)}]$ derart, dass kein weiterer Kreuzungspunkt mit einer 4–Seite auf $[s_1, s_2]$ liegt und $d(z_3, s_1) < d(z_3, s_2)$. Weiter seien s_1', s_2' die zu s_1 bzw. s_2 Γ-äquivalenten Punkte auf $[z_4^{(2)}, z_5^{(2)}]$ bzw. $[z_4^{(1)}, z_5^{(1)}]$.



Angenommen, $d(s_1, s_2) \leq d(s_1, s_2')$. Ist $d(z_4^{(1)}, s_1) \leq d(z_4^{(2)}, s_2)$, so ist

$$\begin{aligned} d(z_4^{(1)}, z_5^{(2)}) \quad < \quad & d(z_4^{(1)}, s_1) + d(s_1, s_2) + d(s_2, z_5^{(2)}) \leq d(z_4^{(1)}, s_1) + d(s_1, s_2') \\ & + d(s_2', z_5^{(1)}) = d(z_4, z_5) \end{aligned}$$

Das geodätische Segment $[z_4^{(1)}, z_5^{(2)}]$ kreuzt keine 1–, 2–, 3– oder 4–Seite, da die Verlängerung einer sochen Seite auch $[z_4^{(1)}, z_5^{(1)}]$, $[z_4^{(2)}, z_5^{(2)}]$ oder $[s_1, s_2]$ kreuzen würde. Wie oben ist $[z_4^{(1)}, z_5^{(2)}]$ Γ-äquivalent zu einem $[z_4, z_5']$, und man erhält ein Standarderzeugendensystem $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5', x_6')$ mit $-\mathrm{tr}\, x_4 x_5' = -\mathrm{tr}\, x_4^{(1)} x_5^{(2)} < y_{45}$, im Widerspruch zu 1.. Ist $d(z_4^{(1)}, s_1) > d(z_4^{(2)}, s_2)$, so erhält man entsprechend $d(z_4^{(2)}, z_5^{(1)}) < d(z_4, z_5)$.

Wir haben also gezeigt, dass $d(s_1, s_2) > d(s_1, s_2')$. Sei $\tilde{z}$ das Bild von z unter der Transformation $\gamma \in \Gamma$, welche $[z_4^{(2)}, z_5^{(2)}]$ auf $[z_4^{(1)}, z_5^{(1)}]$ abbildet, $\tilde{x} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit positivem rechten oberen Eintrag habe $\tilde{z}$ als Fixpunkt. Es ist

$$d(z_3, \tilde{z}) < d(z_3, s_1) + d(s_1, s_2') + d(s_2', \tilde{z}) < d(z_3, s_1) + d(s_1, s_2) + d(s_2, z) = d(z_3, z).$$

Das geodätische Segment $[z_3, \tilde{z}]$ hat keinen Kreuzungspunkt mit einer 1–, 2– oder 3–Seite und weniger Kreuzungspunkte mit 4–Seiten als $[z_3, z]$, denn jeder Kreuzungspunkt von $[z_3, \tilde{z}]$ ungleich s_2' impliziert einen Kreuzungspunkt von $[s_2', \tilde{z}]$ bzw. $[s_2, z]$, $[s_1, s_2']$ oder $[z_3, s_1]$, $[s_1, s_2']$ kann aber als Teil von $[z_4^{(1)}, z_5^{(1)}]$ keine Kreuzungspunkte mit 4-Seiten haben. Nach Induktionsannahme gilt $y_{34} \leq -\mathrm{tr}\, x_3 \tilde{x}$ ($< -\mathrm{tr}\, x_3 x_4'$).

2.4. $[z_3, z]$ kreuze nun auch 3–Seiten. Wie oben erfolgt der Beweis durch Induktion nach der Anzahl der Kreuzungspunkte mit 3–Seiten.

Zunächst kreuze $[z_3, z]$ genau eine 3–Seite $[\tilde{z}_3, \tilde{z}_4]$, sei s der Kreuzungspunkt, $\tilde{z}_3, \tilde{z}_4$ seien wieder Fixpunkte von $\tilde{x}_3, \tilde{x}_4 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit $\mathrm{tr}\, x_i = 0$ und positiven rechten oberen Einträgen.

Wäre $-\mathrm{tr}\, x_3 x_4' < -\mathrm{tr}\, x_3 x_4$, so wäre $d(z_3, z) < d(\tilde{z}_3, \tilde{z}_4)$, somit $d(z_3, s) < d(\tilde{z}_3, s)$ oder $d(s, z) < d(s, \tilde{z}_4)$. Ist $d(z_3, s) < d(\tilde{z}_3, s)$, so ist

$$d(\tilde{z}_3, \tilde{z}_4) = d(\tilde{z}_3, s) + d(s, \tilde{z}_4) > d(z_3, s) + d(s, \tilde{z}_4) \geq d(z_3, \tilde{z}_4).$$

Wie oben zeigt man, dass $[z_3, \tilde{z}_4]$ keine 3–Seite kreuzt, somit liefert $d(z_3, \tilde{z}_4) < d(\tilde{z}_3, \tilde{z}_4)$ bzw. $-\operatorname{tr} x_3\tilde{x}_4 < -\operatorname{tr} \tilde{x}_3\tilde{x}_4 = -\operatorname{tr} x_3 x_4 = y_{34}$ einen Widerspruch zum bisher Gezeigten.

Ist $d(s, z) < d(s, \tilde{z}_4)$, so ist

$$d(\tilde{z}_3, \tilde{z}_4) > d(\tilde{z}_3, s) + d(s, z) \geq d(\tilde{z}_3, z),$$

$[\tilde{z}_3, z]$ kreuzt keine 3–Seite und ist deshalb Γ-äquivalent zu einem $[z_3, z_4']$ welches keinen Kreuzungspunkt mit einer 3–Seite hat und $d(z_3, z_4') = d(\tilde{z}_3, z) < d(\tilde{z}_3, \tilde{z}_4) = d(z_3, z_4)$ genügt, im Widerspruch zu oben.

$[z_3, z]$ kreuze nun mindestens zwei 3–Seiten. Seien s_1, s_2 zwei solche Kreuzungspunkte mit Seiten $[z_3^{(1)}, z_4^{(1)}]$ bzw. $[z_3^{(2)}, z_4^{(2)}]$ derart, dass kein weiterer Kreuzungspunkt mit einer 3–Seite auf $[s_1, s_2]$ liegt und $d(z_3, s_1) < d(z_3, s_2)$. Seien s_1', s_2' die zu s_1 bzw. s_2 Γ-äquivalente Punkte auf $[z_3^{(2)}, z_4^{(2)}]$ bzw. $[z_3^{(1)}, z_4^{(1)}]$. Der Beweis läuft analog zu dem Fall, dass $[z_3, z]$ keine 3–Seiten und mindestens zwei 4–Seiten kreuzt: Angenommen $d(s_1, s_2) \leq d(s_1, s_2')$. Ist $d(z_3^{(1)}, s_1) \leq d(z_3^{(2)}, s_2)$, so ist

$$d(z_3^{(1)}, z_4^{(2)}) < d(z_3^{(1)}, s_1) + d(s_1, s_2') + d(s_2', z_4^{(1)}) = d(z_3, z_4),$$

$[z_3^{(1)}, z_4^{(2)}]$ kreuzt keine 1– oder 2–Seiten und weniger 3–Seiten als $[z_3, z]$, im Widerspruch zur Induktionsannahme. Ist $d(z_3^{(1)}, s_1) > d(z_3^{(2)}, s_2)$, so ist $d(z_3^{(2)}, z_4^{(1)}) < d(z_3, z_4)$ mit dem gleichen Widerspruch.

Also ist $d(s_1, s_2) > d(s_1, s_2')$. Analog zum Fall, dass $[z_3, z]$ mehr als eine 4–Seite kreuzt, sei $\tilde{z}$ das Bild von z unter der Transformation $\gamma \in \Gamma$, welche $[z_4^{(2)}, z_5^{(2)}]$ auf $[z_4^{(1)}, z_5^{(1)}]$ abbildet, $\tilde{x} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit positivem rechten oberen Eintrag habe $\tilde{z}$ als Fixpunkt. Es ist

$$d(z_3, \tilde{z}) < d(z_3, s_1) + d(s_1, s_2') + d(s_2', \tilde{z}) < d(z_3, s_1) + d(s_1, s_2) + d(s_2, z) = d(z_3, z).$$

Das geodätische Segment $[z_3, \tilde{z}]$ hat keinen Kreuzungspunkt mit einer 1– oder 2–Seite und weniger Kreuzungspunkte mit 3–Seiten als $[z_3, z]$. Nach Induktionsannahme gilt $y_{34} \leq -\operatorname{tr} x_3\tilde{x}$ $(< -\operatorname{tr} x_3 x_4')$.

3. Um zu zeigen, dass $-\operatorname{tr} x_2 x_3$ minimal ist unter allen Standarderzeugendensystemen mit den selben ersten beiden Erzeugenden x_1, x_2 geht man wie in 2. vor: Sei $(x_1, x_2, x_3', x_4', x_5', x_6')$ ein Standarderzeugendensystem, sei z der Fixpunkt von x_3'. Man betrachtet zunächst den Fall, dass $[z_2, z]$ keine kleinen Sechseckseiten kreuzt, dann den Fall, dass $[z_2, z]$ nur 5– und 6–Seiten kreuzt, dann den Fall, dass $[z_2, z]$ 4– aber keine 3– und 2–Seiten kreuzt, usw.. Die Argumente sind dabei die gleichen wie unter 2. bzw. sind geometrischer Natur. Die gleichen Betrachtungen führt man für ein Standarderzeugendensystem der Form $(x_2, x_1, x_6', x_5', x_4', x_3')$ und ein geodätisches Segment $[z_1, z]$ durch (vgl. Definition 3.18).

Analog zeigt man die Minimalität von $-\operatorname{tr} x_1 x_2$. Für Details siehe [13].

Die Notwendigkeit der Bedingungen (1) bis (4) folgt aus der Tatsache, dass alle Zahlen in diesen Ungleichungen als Spuren $-\mathrm{tr}\, x_m x'_{m+1}$ von Standarderzeugendensystemen $(x_1, \ldots, x_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_6)$ auftauchen können. Diese Standarderzeugendensysteme sind konkret in Satz 3.24 angegeben. $\square$

Um zu Satz 3.16 analoge Bezeichnungen zu erhalten, kann man Satz 3.21 auch so umformulieren, dass keine y_{i6} auftauchen. Denn aus $x_6 = -x_1x_2x_3x_4x_5$ leiten sich die folgenden Gleichungen ab.

Lemma 3.22 *Sei* $(x_1, \ldots, x_6)$ *Standarderzeugendensystem einer Fuchsschen Gruppe der Signatur* $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $(y_{12}, \ldots, y_{56})$ *wie oben. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
y_{16} &= (1/2)(y_{24}y_{35} - y_{23}y_{45} - y_{25}y_{34}) \\
y_{26} &= (1/2)(y_{12}y_{24}y_{35} - y_{12}y_{34}y_{25} - y_{12}y_{23}y_{45} + y_{15}y_{34} + y_{13}y_{45} - y_{14}y_{35}) \\
y_{36} &= (1/2)(y_{13}y_{24}y_{35} + y_{15}y_{23}y_{34} - y_{14}y_{23}y_{35} - y_{13}y_{34}y_{25} + y_{14}y_{25} - y_{15}y_{24} - y_{12}y_{45}) \\
y_{46} &= (1/2)(y_{13}y_{24}y_{45} - y_{12}y_{34}y_{45} - y_{14}y_{23}y_{45} + y_{12}y_{35} + y_{15}y_{23} - y_{13}y_{25}) \\
y_{56} &= (1/2)(y_{13}y_{24} - y_{12}y_{34} - y_{14}y_{23})
\end{aligned}
$$

Beweis. Durch Nachrechnen mit Hilfe von Lemma 3.14, angewendet auf:
$y_{16} = \mathrm{tr}\, x_1x_1x_2x_3x_4x_5 = -\mathrm{tr}\, x_2x_3x_4x_5$
$y_{26} = \mathrm{tr}\, x_2x_1x_2x_3x_4x_5 = \mathrm{tr}\, x_3x_4x_5x_2 \mathrm{tr}\, x_1x_2 + \mathrm{tr}\, x_3x_4x_5x_1$
$y_{36} = \mathrm{tr}\, x_3x_1x_2x_3x_4x_5 = \mathrm{tr}\, x_4x_5x_3 \mathrm{tr}\, x_1x_2x_3 - \mathrm{tr}\, x_4x_5x_2x_1$
$y_{46} = \mathrm{tr}\, x_4x_1x_2x_3x_4x_5 = \mathrm{tr}\, x_1x_2x_3x_4 \mathrm{tr}\, x_5x_4 + \mathrm{tr}\, x_1x_2x_3x_5$
$y_{56} = \mathrm{tr}\, x_5x_1x_2x_3x_4x_5 = -\mathrm{tr}\, x_1x_2x_3x_4$ $\square$

Nach Satz 3.19 und Satz 3.21 lassen sich bis auf eine Lebesgue–Nullmenge alle $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklassen Fuchsscher Gruppen der Signatur $(2; -)$ bzw. $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ in eindeutiger Weise durch ein Tupel von Spuren beschreiben. Auch wenn diese Spurtupel i.a. nicht eindeutig sind, so gilt doch offenbar folgendes

Lemma 3.23 *Sind* $(x_1, \ldots, x_6)$ *und* $(x'_1, \ldots, x'_6)$ *zwei minimale Standarderzeugendensysteme Fuchsscher Gruppen der Signatur* $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ *und gilt* $\mathrm{tr}\, x_1x_2 \neq \mathrm{tr}\, x'_1x'_2$, *so sind* $\langle x_1, \ldots, x_6\rangle$ *und* $\langle x'_1, \ldots, x'_6\rangle$ *nicht* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$*-konjugiert.*

Ist eine $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklasse der Signatur $(2; -)$ bzw. $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ durch ein beliebiges Spurtupel $(y_{12}, \ldots, y_{56})$, welches den Bedingungen aus Satz 3.16 und Lemma 3.22 genügt, gegeben, so kann man dieses in ein Tupel wie in Satz 3.21 überführen.

Satz 3.24 *Die folgenden Anweisungen definieren einen Algorithmus, der ein Standarderzeugendensystem in ein minimales Standarderzeugendensystem überführt. Dabei mögen die y_{ij} jeweils den Spuren des aktuellen Erzeugendensystems entsprechen.*

1. *Sei $y_{i,i+1} = \min\{y_{12}, y_{23}, \ldots, y_{16}\}$. Ersetze $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i-1})$. Dabei seien Indizes größer 6 modulo 6 zu lesen und $1-1$ gleich 6.*

2. *Tritt einer der folgenden Fälle a) bis o) ein, so führe die dortige Anweisung aus und gehe anschließend zu Schritt 1.*

   a) *Ist $y_{23} > y_{24}$, so ersetze $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_1, x_2, x_4, -x_4x_3x_4, x_5, x_6)$.*

   b) *Ist $y_{23} > y_{25}$, so ersetze $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_1, x_2, x_5, -x_5x_3x_5, -x_5x_4x_5, x_6)$.*

   c) *Ist $y_{23} > y_{26}$, so ersetze $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_1, x_2, x_6, -x_6x_3x_6, -x_6x_4x_6, -x_6x_5x_6)$.*

   d) *Ist $y_{23} > y_{23}y_{34} - y_{24}$, so ersetze $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_1, x_2, -x_3x_4x_3, x_3, x_5, x_6)$.*

   e) *Ist $y_{23} > y_{23}y_{34}y_{45} - y_{23}y_{35} - y_{24}y_{45} + y_{25}$, so ersetze $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_1, x_2, x_3x_4x_5x_4x_3, x_3, x_4, x_6)$.*

   f) *Ist $y_{23} > y_{12}y_{16} - y_{26}$, so ersetze $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_1, x_2, x_2x_1x_6x_1x_2, x_3, x_4, x_5)$.*

   g) *Ist $y_{23} > y_{26}y_{56} - y_{25}$, so ersetze $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_1, x_2, -x_6x_5x_6, x_6x_5x_6x_3x_6x_5x_6, x_6x_5x_6x_4x_6x_5x_6, x_6x_5x_6x_5x_6)$.*

   h) *Ist $y_{23} > y_{12}y_{15} - y_{25}$, so ersetze $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_1, x_2, x_2x_1x_5x_1x_2, x_2x_1x_6x_1x_2, x_3, x_4)$.*

   i) *Ist $y_{23} > y_{13}$, so multipliziere die Zahlen auf der Hauptdiagonalen der x_i mit -1 und ersetze danach $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_2, x_1, x_3, -x_3x_6x_3, -x_3x_5x_3, -x_3x_4x_3)$.*

   j) *Ist $y_{23} > y_{14}$, so multipliziere die Zahlen auf der Hauptdiagonalen der x_i mit -1 und ersetze danach $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_2, x_1, x_4, -x_4x_6x_4, -x_4x_5x_4, x_3)$.*

   k) *Ist $y_{23} > y_{15}$, so multipliziere die Zahlen auf der Hauptdiagonalen der x_i mit -1 und ersetze danach $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_2, x_1, x_5, -x_5x_6x_5, x_4, x_3)$.*

   l) *Ist $y_{23} > y_{16}$, so multipliziere die Zahlen auf der Hauptdiagonalen der x_i mit -1 und ersetze danach $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_2, x_1, x_6, x_5, x_4, x_3)$.*

   m) *Ist $y_{23} > y_{12}y_{23} - y_{13}$, so multipliziere die Zahlen auf der Hauptdiagonalen der x_i mit -1 und ersetze danach $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_2, x_1, x_1x_2x_3x_2x_1, x_6, x_5, x_4)$.*

   n) *Ist $y_{23} > y_{12}y_{23}y_{34} - y_{12}y_{24} - y_{13}y_{34} + y_{14}$, so multipliziere die Zahlen auf der Hauptdiagonalen der x_i mit -1 und ersetze danach $(x_1, \ldots, x_6)$ durch $(x_2, x_1, -x_1x_2x_3x_4x_3x_2x_1, x_6, x_5, x_3)$.*

o) *Ist* $y_{23} > y_{16}y_{56} - y_{15}$, *so multipliziere die Zahlen auf der Hauptdiagonalen der* x_i *mit* -1 *und ersetze danach* $(x_1, \ldots, x_6)$ *durch* $(x_2, x_1, -x_6x_5x_6, x_6, x_4, x_3)$.

3. *Tritt einer der folgenden Fälle a) bis f) ein, so führe die dortige Anweisung aus und gehe anschließend zu Schritt 1.*

   a) *Ist* $y_{34} > y_{35}$, *so ersetze* $(x_1, \ldots, x_6)$ *durch* $(x_1, x_2, x_3, x_5, -x_5x_4x_5, x_6)$.

   b) *Ist* $y_{34} > y_{36}$, *so ersetze* $(x_1, \ldots, x_6)$ *durch* $(x_1, x_2, x_3, x_6, -x_6x_4x_6, -x_6x_5x_6)$.

   c) *Ist* $y_{34} > y_{34}y_{45} - y_{35}$, *so ersetze* $(x_1, \ldots, x_6)$ *durch* $(x_1, x_2, x_3, -x_4x_5x_4, x_4, x_6)$.

   d) *Ist* $y_{34} > y_{34}y_{45}y_{56} - y_{35}y_{56} - y_{34}y_{46} + y_{36}$, *so ersetze* $(x_1, \ldots, x_6)$ *durch* $(x_1, x_2, x_3, x_4x_5x_6x_5x_4, x_4, x_5)$.

   e) *Ist* $y_{34} > y_{36}y_{56}y_{45} - y_{35}y_{45} - y_{36}y_{46} + y_{34}$, *so ersetze* $(x_1, \ldots, x_6)$ *durch* $(x_1, x_2, x_3, x_6x_5x_4x_5x_6, -x_6x_5x_4x_5x_4x_5x_6, -x_6x_5x_4x_6x_4x_5x_6)$.

   f) *Ist* $y_{34} > y_{46}y_{45}y_{34}y_{56} - y_{46}y_{35}y_{56} - y_{46}^2y_{34} - y_{45}^2y_{34} + y_{46}y_{36} + y_{45}y_{35} + y_{34}$, *so ersetze* $(x_1, \ldots, x_6)$ *durch* $(x_1, x_2, x_3, -x_4x_5x_6x_4x_6x_5x_4, -x_4x_5x_4, -x_4x_6x_4)$.

4. *Tritt einer der beiden folgenden Fälle ein, so führe die dortige Anweisung aus und gehe anschließend zu Schritt 1.*

   a) *Ist* $y_{45} > y_{46}$, *so ersetze* $(x_1, \ldots, x_6)$ *durch* $(x_1, \ldots, x_4, x_6, -x_6x_5x_6)$.

   b) *Ist* $y_{45} > y_{45}y_{56} - y_{46}$, *so ersetze* $(x_1, \ldots, x_6)$ *durch* $(x_1, \ldots, x_4, -x_5x_6x_5, x_5)$.

5. *Gib das Standarderzeugendensystem* $(x_1, \ldots, x_6)$ *aus und stoppe.*

Beweis. Bricht der Algorithmus ab, so erfüllt das ausgegebene Standarderzeugendensystem die Voraussetzungen von Satz 3.21, denn die Ersetzungsschritte sorgen jeweils dafür, dass $y_{i,i+1}$ durch die andere Seite der Ungleichung ersetzt wird. Wird dabei in Schritt 2. wie etwa im Fall i) die Orientierung umgekehrt, so wird durch die Multiplikation der Hauptdiagonalen mit -1 (dies entspricht einer Konjugation mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ bzw. einer Spiegelung an der imaginären Achse) dafür gesorgt, dass das Erzeugendensystem wieder „richtig" orientiert ist, d.h. dass die Bedingungen an die $\operatorname{tr} x_ix_jx_k$ erfüllt sind.

Zu zeigen bleibt, dass der Algorithmus terminiert. Für $z, z' \in \mathcal{H}$ sei $d(z, z')$ der hyperbolische Abstand und $B(z, \varepsilon) = \{z' \in \mathcal{H} \mid d(z, z') < \varepsilon\}$, für $i = 1, \ldots, 6$ sei z_i der Fixpunkt von x_i. Da die Gruppe $\Gamma = \langle x_1, \ldots, x_6 \rangle$ diskret ist, folgt aus Satz 2.5, dass für $i = 1, \ldots, 6$ die Menge $B(z_i, d(z_1, z_2))$ nur endlich viele Punkte enthält, die Γ-äquivalent zu $z_{(i \bmod 6)+1}$ sind. Nach Lemma 3.6 g) ist das gleichbedeutend damit, dass nur für endlich viele Konjugate von $x_{(i \bmod 6)+1}$ gilt, dass $-\mathrm{tr}\, x_i x_{(i \bmod 6)+1} < -\mathrm{tr}\, x_1 x_2$. Da in den Schritten 2. bis 4. die Spur $\mathrm{tr}\, x_1 x_2$ nicht verändert wird und in Schritt 1. das Erzeugendensystem nur verändert wird, wenn dadurch $-\mathrm{tr}\, x_1 x_2$ verkleinert wird, tritt eine solche Veränderung in Schritt 1. nur endlich oft ein. Da die Schritte 3. und 4. die Spur $\mathrm{tr}\, x_2 x_3$ unverändert lassen und Schritt 2. $-\mathrm{tr}\, x_2 x_3$ verkleinert, kann $-\mathrm{tr}\, x_2 x_3$ nur in den endlich vielen Fällen größer werden, in denen sich das Erzeugendensystem in Schritt 1. ändert. Da $B(z_1, d(z_2, z_3))$ und $B(z_2, d(z_2, z_3))$ jeweils nur endlich viele Punkte enthalten, die Γ-äquivalent zu z_3, z_4, z_5 oder z_6 sind, wird in Schritt 2. das Erzeugendensystem nur endlich oft verändert. Genauso folgt, dass in den Schritten 3. und 4. das Erzeugendensystem nur endlich oft verändert wird, somit terminiert der Algorithmus. $\square$

Der Algorithmus wurde in der Programmiersprache Java implementiert (siehe Anhang). Dazu wurde er leicht abgewandelt, um die Laufzeit zu verbessern, im Prinzip läuft das Programm aber so wie in obigem Satz. Das Programm arbeitet mit Fließkommazahlen, deshalb können Vergleiche der Größe zweier Zahlen auf Grund von Rundungsfehlern kritisch sein. Für die Zwecke in dieser Arbeit stellt dies aber kein Problem dar, da wir mit speziellen ganzalgebraischen Zahlen rechnen (siehe Anhang).

Als nächstes charakterisieren wir die arithmetischen Fuchsschen Gruppen der Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ über ihre Spuren:

Satz 3.25 *Sei Γ Fuchssche Gruppe der Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $(x_1, \ldots, x_6)$ ein Standarderzeugendensystem und $(y_{12}, \ldots, y_{56})$ wie oben definiert. Dann ist Γ arithmetische Fuchssche Gruppe genau dann, wenn gilt*

(i) $y_{12}, \ldots, y_{56}, \frac{1}{2}(y_{12}y_{45} + y_{15}y_{24} - y_{14}y_{25}), \frac{1}{2}(y_{13}y_{46} + y_{16}y_{34} - y_{14}y_{36})$ *sind ganzalgebraische Zahlen.*

(ii) $k := \mathbb{Q}(y_{12}^2,\, y_{13}^2,\, y_{45}^2,\, y_{46}^2,\, y_{12}y_{23}y_{13},\, y_{45}y_{56}y_{46},\, y_{12}y_{45}(y_{15}y_{24} - y_{14}y_{25}),$
$y_{12}y_{46}(y_{34}y_{45} - y_{35}),\, y_{13}y_{45}(y_{12}y_{16} - y_{26}),\, y_{13}y_{46}(y_{34}y_{16} - y_{36}y_{14}),$
$y_{12}y_{13}y_{45}(y_{24}y_{35} - y_{25}y_{34}),\, y_{12}y_{13}y_{46}(y_{26}y_{34} - y_{24}y_{36}),\, y_{12}y_{45}y_{46}(y_{15}y_{26} - y_{25}y_{16}),$
$y_{13}y_{45}y_{46}(y_{35}y_{16} - y_{15}y_{36}),\, 2y_{14}(y_{12}y_{23}y_{13} - y_{12}^2 - y_{23}^2 - y_{13}^2 + 4) + y_{26}y_{35} - y_{25}y_{36})$
ist total reeller Zahlkörper.

(iii) $\sqrt{y_{12}^4 - 4y_{12}^2} \notin k$

(iv) Für alle Einbettungen $\varphi : k \to \mathbb{R}$, $\varphi \neq \mathrm{id}$, gilt $\varphi(y_{12}^2) < 4$ und $\varphi(y_{12}^2 + y_{23}^2 + y_{13}^2 - y_{12}y_{23}y_{13}) < 4$.

Ist Γ arithmetisch, so gilt für alle $\gamma \in \Gamma$, dass $\varphi((\mathrm{tr}\,\gamma)^2) < 4$ für $\varphi \neq \mathrm{id}$

Beweis. Die Gruppe Γ ist genau dann arithmetisch, wenn ihre Untergruppe $\Gamma' = \langle a, b, c, d \mid [a, b][c, d] = 1\rangle$ arithmetisch ist, wobei die assoziierten Quaternionenalgebren isomorph sind. Wähle die Erzeugenden von Γ' wie in Satz 3.7, also $a = x_1x_2$, $b = x_3x_1$, $c = x_4x_5$ und $d = x_6x_4$. Benutze Satz 2.23. Wenn

Γ arithmetisch ist, so besagt Bedingung (i) in Satz 2.23, dass die Spuren aller Elemente aus Γ ganzalgebraisch sind, insbesondere die angegebenen, wobei $\frac{1}{2}(y_{12}y_{45} + y_{15}y_{24} - y_{14}y_{25}) = \operatorname{tr} x_1x_2x_4x_5$ und $\frac{1}{2}(y_{13}y_{46} + y_{16}y_{34} - y_{14}y_{36}) = \operatorname{tr} x_3x_1x_6x_4$. Umgekehrt folgt aus Lemma 3.6 f), dass alle Spuren ganzalgebraisch sind, wenn dies für $\operatorname{tr} a, \ldots, \operatorname{tr} d, \operatorname{tr} ab, \ldots, \operatorname{tr} cd, \operatorname{tr} abc, \ldots, \operatorname{tr} bcd, \operatorname{tr} abcd$ gilt. Nun ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} a &= -y_{12},\ \operatorname{tr} b = -y_{13},\ \operatorname{tr} c = -y_{45},\ \operatorname{tr} d = -y_{46},\\
\operatorname{tr} ab &= \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1 = y_{23},\ \operatorname{tr} cd = y_{56},\\
\operatorname{tr} ac &= \operatorname{tr} x_1x_2x_4x_5 = \frac{1}{2}(y_{12}y_{45} + y_{15}y_{24} - y_{14}y_{25}),\\
\operatorname{tr} ad &= \operatorname{tr} x_1x_2x_6x_4 = \operatorname{tr} x_1x_2 \operatorname{tr} x_6x_4 - \operatorname{tr} x_1x_2x_4x_6 =\\
&\ y_{12}y_{46} + \operatorname{tr} x_5x_4x_3x_4 = y_{12}y_{46} + y_{34}y_{45} - y_{35},\\
\operatorname{tr} bc &= \operatorname{tr} x_3x_1x_4x_5 = \operatorname{tr} x_3x_1 \operatorname{tr} x_4x_5 - \operatorname{tr} x_1x_3x_4x_5 =\\
&\ y_{13}y_{45} + \operatorname{tr} x_1x_2x_1x_6 = y_{13}y_{45} + y_{12}y_{16} - y_{26},\\
\operatorname{tr} bd &= \operatorname{tr} x_3x_1x_6x_4 = \frac{1}{2}(y_{13}y_{46} + y_{16}y_{34} - y_{14}y_{36}),\\
\operatorname{tr} abc &= \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1x_4x_5 = -\operatorname{tr} x_6x_5x_4x_1x_4x_5 =\\
&\ -\operatorname{tr} x_6x_5 \operatorname{tr} x_4x_1x_4x_5 - \operatorname{tr} x_6x_4x_1x_4 = y_{56}y_{14}y_{45} - y_{56}y_{15} - y_{14}y_{46} + y_{16},\\
\operatorname{tr} abd &= \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1x_6x_4 = \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1 \operatorname{tr} x_6x_4 - \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1x_4x_6 =\\
&\ -y_{23}y_{46} - \operatorname{tr} x_5x_4x_1x_4 = -y_{23}y_{46} - y_{14}y_{45} + y_{15},\\
\operatorname{tr} acd &= \operatorname{tr} x_4x_5x_6x_4x_1x_2 = -\operatorname{tr} x_3x_2x_1x_4x_1x_2 = y_{12}y_{14}y_{23} - y_{23}y_{24} - y_{13}y_{14} + y_{34},\\
\operatorname{tr} bcd &= \operatorname{tr} x_4x_5x_6x_4x_3x_1 = \operatorname{tr} x_4x_5x_6x_4 \operatorname{tr} x_3x_1 - \operatorname{tr} x_4x_5x_6x_4x_1x_3 =\\
&\ -y_{13}y_{56} - y_{12}y_{14} + y_{24},\\
\operatorname{tr} abcd &= \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1x_4x_5x_6x_4 = -\operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1x_3x_2x_1x_4 =\\
&\ -\operatorname{tr} x_1x_4x_1x_2 \operatorname{tr} x_3x_1x_3x_2 - \operatorname{tr} x_1x_4x_1x_3x_1x_3 =\\
&\ -(y_{12}y_{14} - y_{24})(y_{13}y_{23} - y_{12}) - y_{13}^2y_{14} + y_{13}y_{34} - y_{14},
\end{aligned}$$

somit sind diese Spuren ganz, wenn (i) gilt

Nach Lemma 2.24 und Lemma 3.14 ist

$$k_2 := \mathbb{Q}((\operatorname{tr}(\gamma))^2 \mid \gamma \in \Gamma) = \mathbb{Q}(\operatorname{tr} a^2, \operatorname{tr} b^2, \operatorname{tr} c^2, \operatorname{tr} d^2, \operatorname{tr} a^2b^2, \ldots, \operatorname{tr} a^2b^2c^2d^2).$$

Zu zeigen ist $k_2 = k$. Die Spuren $\operatorname{tr} a^2, \operatorname{tr} b^2, \operatorname{tr} c^2, \operatorname{tr} d^2$ sind in k, weil $y_{12}^2, y_{13}^2, y_{45}^2, y_{46}^2 \in k$, genauso gilt $y_{12}^2, \ldots, y_{46}^2 \in k_2$. Es ist

$$\operatorname{tr} a^2b^2 = \operatorname{tr} a \operatorname{tr} b \operatorname{tr} ab - (\operatorname{tr} a)^2 - (\operatorname{tr} b)^2 + 2,$$

somit ist $\operatorname{tr} a^2b^2, \ldots, \operatorname{tr} c^2d^2 \in k$ gleichbedeutend damit, dass $\operatorname{tr} a \operatorname{tr} b \operatorname{tr} ab, \ldots, \operatorname{tr} c \operatorname{tr} d \operatorname{tr} cd \in k$, da bereits $\operatorname{tr} a^2, \operatorname{tr} b^2, \operatorname{tr} c^2, \operatorname{tr} d^2 \in k$. Entsprechend sieht man, dass $\operatorname{tr} a^2b^2c^2, \ldots, \operatorname{tr} a^2b^2c^2d^2 \in k$ genau dann, wenn $\operatorname{tr} a \operatorname{tr} b \operatorname{tr} c \operatorname{tr} abc, \ldots, \operatorname{tr} a \operatorname{tr} b \operatorname{tr} c \operatorname{tr} d \operatorname{tr} abcd \in k$. Es ist $\operatorname{tr} a \operatorname{tr} b \operatorname{tr} ab = y_{12}y_{13}y_{23}$, $\operatorname{tr} c \operatorname{tr} d \operatorname{tr} cd = y_{45}y_{46}y_{56}$. Aus der Gleichung für $\operatorname{tr} ac$ erkennt man, dass $\operatorname{tr} a \operatorname{tr} c \operatorname{tr} ac \in k$, da $y_{12}y_{45}(y_{15}y_{24} - y_{14}y_{25}), y_{12}^2, y_{45}^2 \in k$. Auf gleiche Art sieht man, dass $\operatorname{tr} a\ \operatorname{tr} d\ \operatorname{tr} ad$, $\operatorname{tr} b\ \operatorname{tr} c\ \operatorname{tr} bc$,

$\operatorname{tr} b\ \operatorname{tr} d\ \operatorname{tr} bd \in k$, da $y_{12}y_{46}(y_{34}y_{45} - y_{35})$, $y_{13}y_{45}(y_{12}y_{16} - y_{26})$, $y_{13}y_{46}(y_{16}y_{34} - y_{14}y_{36}) \in k$. Andererseits ist $\operatorname{tr} a \operatorname{tr} d \operatorname{tr} ad = (1/2)y_{12}y_{46}(y_{12}y_{46} + y_{14}y_{26} - y_{16}y_{24})$, somit ist automatisch auch schon $y_{12}y_{46}(y_{14}y_{26} - y_{16}y_{24}) \in k$, genauso ist $y_{13}y_{45}(y_{14}y_{35} - y_{15}y_{34}) \in k$. Umgekehrt folgt auch, dass

$$\begin{aligned} &y_{12}y_{23}y_{13},\ y_{45}y_{56}y_{46},\ y_{12}y_{45}(y_{15}y_{24} - y_{14}y_{25}),\ y_{12}y_{46}(y_{34}y_{45} - y_{35}),\\ &y_{13}y_{45}(y_{12}y_{16} - y_{26}),\ y_{13}y_{46}(y_{34}y_{16} - y_{36}y_{14}) \in k_2 \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.14 d) und e) ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} a \operatorname{tr} b \operatorname{tr} c \operatorname{tr} abc &= -y_{12}y_{13}y_{45} \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1x_4x_5\\ &= -y_{12}y_{13}y_{45}(\operatorname{tr} x_1x_2x_3 \operatorname{tr} x_1x_4x_5 - \operatorname{tr} x_2x_3x_5x_4)\\ &= -(1/2)y_{12}y_{13}y_{45}(y_{14}y_{25}y_{13} + y_{34}y_{15}y_{12} - y_{13}y_{24}y_{15} -\\ &\quad\ y_{14}y_{12}y_{35} + y_{24}y_{35} - y_{25}y_{34} - y_{23}y_{45})\\ &= -(1/2)(y_{12}^2y_{13}y_{45}(y_{15}y_{34} - y_{14}y_{35}) + y_{13}^2y_{12}y_{45}(y_{14}y_{25} - y_{24}y_{15}) -\\ &\quad\ y_{45}^2y_{12}y_{13}y_{23} + y_{12}y_{13}y_{45}(y_{24}y_{35} - y_{25}y_{34}) \in k \end{aligned}$$

Genauso sieht man, dass $\operatorname{tr} a \operatorname{tr} b \operatorname{tr} d \operatorname{tr} abd$, $\operatorname{tr} a \operatorname{tr} c \operatorname{tr} d \operatorname{tr} acd$, $\operatorname{tr} b \operatorname{tr} c \operatorname{tr} d \operatorname{tr} bcd \in k$ und umgekehrt, dass $y_{12}y_{13}y_{45}(y_{24}y_{35} - y_{25}y_{34})$, $y_{12}y_{13}y_{46}(y_{26}y_{34} - y_{24}y_{36})$, $y_{12}y_{45}y_{46}(y_{15}y_{26} - y_{25}y_{16})$, $y_{13}y_{45}y_{46}(y_{35}y_{16} - y_{15}y_{36}) \in k_2$.

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} abcd &= \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1x_4x_5x_6x_4 = \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1x_4 \operatorname{tr} x_5x_6x_4 - \operatorname{tr} x_1x_2x_3x_1x_6x_5\\ &= (\operatorname{tr} x_2x_3x_1 \operatorname{tr} x_4x_1 + \operatorname{tr} x_2x_3x_4)(-\operatorname{tr} x_1x_2x_3) - \operatorname{tr} x_2x_3x_1 \operatorname{tr} x_6x_5x_1 +\\ &\quad\ \operatorname{tr} x_2x_3x_5x_6\\ &= y_{14}(\operatorname{tr} x_1x_2x_3)^2 - \operatorname{tr} x_1x_2x_3 \operatorname{tr} x_2x_3x_4 + \operatorname{tr} x_1x_2x_3 \operatorname{tr} x_2x_3x_4 + \operatorname{tr} x_2x_3x_5x_6\\ &= y_{14}(-y_{12}^2 - y_{23}^2 - y_{13}^2 + y_{12}y_{23}y_{13} + 4) + (1/2)(y_{23}y_{56} + y_{26}y_{35} - y_{25}y_{36}) \end{aligned}$$

und somit $\operatorname{tr} a \operatorname{tr} b \operatorname{tr} c \operatorname{tr} d \operatorname{tr} abcd \in k$, weil $2y_{14}(y_{12}y_{23}y_{13} - y_{12}^2 - y_{23}^2 - y_{13}^2 + 4) + y_{26}y_{35} - y_{25}y_{36}$, $y_{12}y_{23}y_{13}$, $y_{45}y_{56}y_{46} \in k$. Umgekehrt gilt auch $2y_{14}(y_{12}y_{23}y_{13} - y_{12}^2 - y_{23}^2 - y_{13}^2 + 4) + y_{26}y_{35} - y_{25}y_{36} \in k_2$. Dies zeigt Bedingung (ii) in Satz 2.23.

Wählt man in Satz 2.23 γ_0 als $(x_1x_2)^2$ und γ_1 als $(x_3x_1)^2$, so erhält man durch Nachrechnen direkt Bedingungen (iii) und (iv). Die letzte Behauptung folgt direkt aus Satz 2.22. □

Korollar 3.26 *Sei k_2 total reeller Zahlkörper. Es gibt eine injektive Abbildung von der Menge der* $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$*-Konjugationsklassen arithmetischer Fuchsscher Gruppen der Signatur $(2;-)$ bzw. $(0;2,2,2,2,2,2)$ mit einer über k_2 definierten assoziierten Quaternionenalgebra in die Menge der Zahlentupel $(y_{12},\dots,y_{56})$, welche den Bedingungen aus Satz 3.16, Satz 3.21, Lemma 3.22 und Satz 3.25 genügen. Es gibt nur endlich viele solcher Zahlentupel.*

Beweis. Nach Satz 3.21 besitzt jede Fuchssche Gruppe der Signatur $(0;2,2,2,2,2,2)$ ein minimales Standarderzeugendensystem, die zugehörigen Spuren erfüllen die Bedingungen aus Satz 3.16, Satz 3.21 und Lemma 3.22. Zwei

Gruppen, die in $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ nicht konjugiert zueinander sind, liefern verschiedene Spurtupel. Nach obigem Satz 3.25 erfüllen arithmetische Fuchssche Gruppen dieser Signatur die Bedingungen dieses Satzes. Umgekehrt definiert jedes Spurtupel, das obigen Bedingungen genügt, eine $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$-Konjugationsklasse Fuchsscher Gruppen der Signatur $(2;-)$ bzw. $(0;2,2,2,2,2,2)$. Nach Satz 2.29 gibt es bis auf Konjugation in $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ nur endlich viele arithmetische Fuchssche Gruppen einer bestimmten Signatur. Nach Satz 3.19 gibt es auch nur endlich viele obiger Spurtupel. □

Da durch Satz 3.2 die Menge der zu untersuchenden Körper k_2 auf eine endliche Menge beschränkt wurde, kann man die arithmetischen Flächengruppen von Geschlecht 2 bestimmen, indem man die Spurtupel aus Korollar 3.26 auflistet, wobei allerdings der Fall eintreten kann, dass zwei solcher Spurtupel die selbe Konjugationsklasse beschreiben.

In [2], [3], [4], [23], [45] und [47] wurden ähnliche Normalformen benutzt, um auf diese Weise arithmetische Fuchssche Gruppen der Signaturen $(0;2,2,2,q)$, $(0;p,q,r)$ und $(1;p)$ systematisch zu bestimmen. Entscheidend dafür war in allen Fällen, dass man aus der Normalform jeweils numerische Grenzen für die Spuren ableiten konnte. Es ist nicht klar, ob und wie man solche numerischen Grenzen für obige „Normalformen" erhalten kann. Deshalb ist nicht klar, wie man auf diese Weise alle arithmetischen Fuchsschen Gruppen der Signaturen $(0;2,2,2,2,2,2)$ bzw. $(2;-)$ auflisten kann.

3.2 Arithmetische Fuchssche Gruppe der Signatur $(2;-)$ als Untergruppen anderer arithmetischer Fuchsscher Gruppen

Gemäß Definition 2.19 ist jede Untergruppe einer arithmetischen Fuchsschen Gruppe mit endlichem Index selbst arithmetisch. Nach Satz 3.3 kennen wir alle Fuchsschen Gruppen erster Art, die eine Gruppe der Signatur $(2;-)$ enthalten. Wir werden im Folgenden am Beispiel der Signaturen $(1;2)$, $(1;3)$ und $(0;3,3,3,3)$ zeigen, wie man mit Hilfe von Satz 3.24 die $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$-Konjugationsklassen arithmetischer Gruppen der Signatur $(2;-)$ bestimmt, die Untergruppen bekannter arithmetischer Gruppen sind.

Für Gruppen der Signaturen $(0;p,q,r,s)$, $(0;2,2,2,2,2)$, $(0;2,2,2,2,2,2)$, $(1;p)$ und $(1;2,2)$ hat Hulpke in [17] alle Untergruppen der Signatur $(2;-)$ berechnet (siehe Anhang). Für die Signaturen $(1;p)$ und einige der $(0;p,q,r,s)$ gibt es vollständige Listen der arithmetischen Fuchsschen Gruppen mit eben dieser Signatur. Mit Hilfe der Ergebnisse von Hulpke werden wir Erzeugende der zugehörigen Untergruppen der Signatur $(2;-)$ bestimmen und diese mit Hilfe des Algorithmus aus Satz 3.24 in ein minimales Erzeugendensystem transformieren.

Das genaue Vorgehen wird zu Beginn von Abschnitt 3.2.1 ausführlich erläutert, die übrigen Berechnungen laufen analog.

Hulpkes Liste gibt die Erzeugenden a, b, c, d der Untergruppe $\Gamma = \langle a, b, c, d \mid [a, b][c, d] = 1\rangle$ an. Wir haben bisher die PGL-Konjugationsklassen dieser Gruppen über die Spuren der Elemente der korrespondierenden Fuchsschen Gruppe der Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ angegeben. Das folgende Lemma gibt an, wie man diese umrechnet.

Lemma 3.27 *Sei* $\Gamma = \langle A, B, C, D \mid [A, B][C, D] = \mathrm{id}\rangle$. *Dann ist* Γ *Untergruppe einer Gruppe* $\langle x_1, \ldots, x_6 \mid x_i^2 = x_1 \cdots x_6 = \mathrm{id}\rangle$ *mit* $x_1x_2 = A$, $x_3x_1 = B$, $x_4x_5 = C$ *und* $x_6x_4 = D$, *und für* $y_{ij} = |\mathrm{tr}\, x_ix_j|$ *gilt*

$$\begin{aligned}
y_{12} &= |\mathrm{tr}\, A| \\
y_{13} &= |\mathrm{tr}\, B| \\
y_{14} &= |\mathrm{tr}\, A^{-1}B^{-1}CD| \\
y_{15} &= |\mathrm{tr}\, A^{-1}B^{-1}CDC| \\
y_{16} &= |\mathrm{tr}\, A^{-1}B^{-1}C| \\
y_{23} &= |\mathrm{tr}\, AB| \\
y_{24} &= |\mathrm{tr}\, A^{-2}B^{-1}CD| \\
y_{25} &= |\mathrm{tr}\, A^{-2}B^{-1}CDC| \\
y_{26} &= |\mathrm{tr}\, A^{-2}B^{-1}C| \\
y_{34} &= |\mathrm{tr}\, C^{-1}D^{-1}A| \\
y_{35} &= |\mathrm{tr}\, A^{-1}DC^2| \\
y_{36} &= |\mathrm{tr}\, BA^{-1}B^{-1}C| \\
y_{45} &= |\mathrm{tr}\, C| \\
y_{46} &= |\mathrm{tr}\, D| \\
y_{56} &= |\mathrm{tr}\, CD|
\end{aligned}$$

Beweis. Z.B. ist

$$\begin{aligned}
x_1x_5 &= x_1(x_1 \cdots x_6)x_5 = (x_1x_2)(x_2x_1)(x_2x_1)(x_1x_3)(x_4x_5)(x_6x_4)(x_4x_5) \\
&= A^{-1}B^{-1}CDC,
\end{aligned}$$

der Rest ergibt sich analog. □

3.2.1 Signatur $(1; 2)$

Eine Fuchssche Gruppe der Signatur $(1; p)$ hat eine Präsentierung $\Gamma = \langle a_1, b_1, x_1 \mid x_1^p = [a_1, b_1]x_1 = 1\rangle$. Die $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklasse einer solchen Gruppe ist durch $\operatorname{tr} a$, $\operatorname{tr} b$, $\operatorname{tr} ab$ eindeutig bestimmt. Ist $x = \operatorname{tr} a$, $y = \operatorname{tr} b$ und $z = \operatorname{tr} ab$, so kann man durch Wahl geeigneter Erzeugender erreichen, dass

$$2 < x \leq y \leq z \leq \frac{1}{2}xy \tag{3.2}$$

Zu gegebener Gruppe ist das Tripel (x, y, z) durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt (für all dies vgl. [9]). Takeuchi hat in [47] alle $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklassen arithmetischer Fuchsscher Gruppen der Signatur $(1; p)$, $2 \leq p \leq \infty$, durch Angabe der entsprechenden Spurtripel bestimmt, die (3.2) genügen. Zu gegebenem (x, y, z) erhält man die Erzeugenden a_1, b_1, x_1 folgendermaßen. Nach Konjugation in $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ dürfen wir annehmen, dass $a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -1/\rho & y \end{pmatrix}$ mit $\rho > 1$ (vgl. [37]). Aus $\operatorname{tr} a_1 b_1 = z = xy - \rho - 1/\rho$ erhält man ρ als eindeutige Lösung dieser Gleichung > 1. Man hat also a_1 und b_1 bestimmt und erhält x_1 durch $x_1 = [a, b]^{-1}$.

Diese Matrizen kann man nun in Hulpkes Liste der Untergruppen Γ' von Γ mit Signatur $(2; -)$ einsetzen und erhält dadurch die Erzeugenden a, b, c, d von $\Gamma' = \langle a, b, c, d \mid [a, b][c, d] = 1 \rangle$. Mit Hilfe von Lemma 3.27 kann man die $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Klasse von Γ' wiederum durch ein Spurtupel beschreiben. Diese Rechnungen wurden in dieser Arbeit mit Maple 9.5 durchgeführt bzw. wurden auch im Rahmen des Java-Programms zu Satz 3.24 implementiert und durchgeführt.

Alternativ kann man mit Hilfe von Lemma 3.14 diese Spurtupel auch ohne den Umweg über die konkrete Angabe von Matrizen bestimmen.

Das resultierende Spurtupel wurde mit Hilfe des Java-Programms, das den Algorithmus aus Satz 3.24 abarbeitet (siehe Anhang), in Spurtupel von minimalen Standarderzeugendensystemen überführt. Auch wenn diese Tupel bis auf eine Lebesgue-Nullmenge eindeutig sind, kann man sich nicht fast sicher sein, dass die untersuchten Fuchsschen Gruppen eine eindeutige Normalform besitzen. Denn die Auswahl erfolgt nicht zufällig. In der Tat ist der Zahlenraum, in dem die Spuren liegen können, für arithmetische Fuchssche Gruppen auf ganzalgebraische Zahlen in einem bestimmten Zahlkörper beschränkt. Tatsächlich trat bei den Berechnungen eine Gruppe auf, die mehrere nicht konjugierte minimale Standarderzeugendensysteme besitzt (siehe unten).

Die folgenden Listen geben jeweils die Quadrate $y_{12}^2, \ldots, y_{56}^2$ an, welche nach Satz 2.22 ganz im zugrunde liegenden Zahlkörper k_2 sind. Die Tupel sind dabei in der selben Reihenfolge wie in Hulpkes Liste angegeben. $D(A)$ ist das Produkt der endlichen Verzweigungsstellen der assoziierten Quaternionenalgebra.

Für $k = \mathbb{Q}$ erhält man

$(x^2,\, y^2,\, z^2)$	$(y_{12}^2,\, \ldots,\, y_{56}^2)$	$D(A)$
(5, 12, 15)	(5, 169, 1215, 1815, 245, 125, 972, 1587, 225, 15, 60, 20, 25, 27, 12)	(2)(3)
	(5, 125, 529, 135, 135, 100, 500, 147, 192, 20, 27, 192, 15, 240, 25)	
	(5, 125, 245, 605, 484, 100, 225, 729, 605, 9, 225, 245, 100, 125, 5)	
	(5, 169, 144, 605, 484, 125, 125, 729, 605, 9, 500, 529, 125, 144, 5)	
	(5, 169, 1215, 1815, 245, 125, 972, 1587, 225, 15, 60, 20, 25, 27, 12)	
	(9, 60, 240, 320, 125, 15, 135, 245, 125, 64, 192, 147, 12, 27, 9)	
	(9, 27, 147, 225, 100, 12, 192, 400, 225, 64, 192, 147, 12, 27, 9)	
	(12, 147, 192, 400, 27, 25, 64, 192, 25, 25, 147, 64, 12, 25, 27)	
	(9, 15, 135, 529, 144, 15, 375, 1764, 529, 64, 375, 135, 15, 15, 9)	
	(15, 100, 169, 60, 25, 15, 60, 49, 60, 25, 60, 169, 15, 100, 15)	
(6, 8, 12)	(6, 100, 300, 150, 108, 54, 200, 144, 128, 12, 54, 108, 32, 100, 8)	(2)(3)
	(6, 54, 108, 196, 108, 36, 128, 294, 200, 32, 150, 200, 12, 36, 12)	
	(6, 54, 150, 294, 196, 36, 144, 400, 294, 16, 144, 150, 36, 54, 6)	
	(6, 100, 64, 294, 196, 54, 54, 400, 294, 16, 486, 484, 54, 64, 6)	
	(6, 64, 108, 294, 108, 54, 128, 484, 200, 12, 150, 108, 32, 36, 8)	
	(8, 32, 300, 676, 108, 16, 294, 800, 150, 54, 200, 54, 12, 16, 12)	
	(8, 32, 128, 200, 100, 16, 144, 324, 200, 36, 144, 128, 16, 32, 8)	
	(8, 36, 200, 100, 36, 32, 324, 200, 128, 32, 36, 100, 8, 128, 36)	
	(12, 16, 100, 300, 64, 12, 300, 1156, 300, 64, 300, 100, 12, 16, 12)	
	(12, 36, 100, 108, 36, 12, 108, 196, 108, 36, 108, 100, 12, 36, 12)	
(7, 7, 9)	(7, 112, 175, 112, 81, 49, 100, 121, 112, 9, 100, 175, 49, 112, 7)	(2)(7)
	(7, 63, 289, 441, 121, 25, 175, 343, 112, 28, 112, 63, 16, 25, 9)	
	(7, 28, 175, 175, 144, 25, 256, 361, 343, 25, 81, 112, 25, 63, 7)	
	(7, 49, 441, 343, 144, 28, 343, 361, 175, 25, 63, 49, 28, 49, 7)	
	(7, 49, 121, 175, 100, 28, 112, 256, 175, 16, 112, 121, 28, 49, 7)	
	(7, 28, 100, 144, 121, 25, 175, 343, 343, 28, 112, 175, 16, 49, 9)	
	(7, 28, 175, 175, 144, 25, 256, 361, 343, 25, 81, 112, 25, 63, 7)	
	(7, 49, 441, 343, 144, 28, 343, 361, 175, 25, 63, 49, 28, 49, 7)	
	(9, 25, 49, 121, 144, 16, 121, 441, 625, 49, 289, 529, 16, 49, 9)	
	(9, 25, 196, 289, 49, 16, 289, 529, 121, 49, 121, 49, 9, 25, 16)	

Im Fall $(x^2, y^2, z^2) = (5, 12, 15)$ sind die erste und die fünfte Konjugationsklasse gleich, im Fall $(x^2, y^2, z^2) = (7, 7, 9)$ sind die vierte und achte bzw. die dritte und siebte gleich. Letztere berechnete minimale Standarderzeugendensysteme waren erst konjugiert, nachdem für die dritte Gruppe ein anderes Erzeugendensystem in das Programm eingegeben wurde.

Anhand der Daten zu $(x^2, y^2, z^2) = (5, 12, 15)$ bzw. $(6, 8, 12)$ erkennt man mit Lemma 3.23, dass die achte, neunte und zehnte Untergruppe jeweils Normalteiler in der sie enthaltenden Gruppe der Signatur $(1; 2)$ sind.

Für $k=\mathbb{Q}(\sqrt{5}),\ D(A)=\mathcal{P}_2$ und $(x^2,\,y^2,\,z^2)=(3+\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5})$:

$(3+1\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,383+171\sqrt{5},\,103+45\sqrt{5},\,63+27\sqrt{5},\,47+21\sqrt{5},\,294+130\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5},\,15+5\sqrt{5},\,35+15\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5})$

$(3+1\sqrt{5},\,47+21\sqrt{5},\,246+110\sqrt{5},\,63+27\sqrt{5},\,63+27\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,235+105\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,15+5\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5},\,123+55\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5})$

$(3+1\sqrt{5},\,47+21\sqrt{5},\,103+45\sqrt{5},\,235+105\sqrt{5},\,180+80\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,294+130\sqrt{5},\,235+105\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,103+45\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,47+21\sqrt{5},\,3+1\sqrt{5})$

$(3+1\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,56+24\sqrt{5},\,235+105\sqrt{5},\,180+80\sqrt{5},\,47+21\sqrt{5},\,47+21\sqrt{5},\,294+130\sqrt{5},\,235+105\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5},\,235+105\sqrt{5},\,246+110\sqrt{5},\,47+21\sqrt{5},\,56+24\sqrt{5},\,3+1\sqrt{5})$

$(3+1\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,383+171\sqrt{5},\,103+45\sqrt{5},\,63+27\sqrt{5},\,47+21\sqrt{5},\,294+130\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5},\,15+5\sqrt{5},\,35+15\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5})$

$(6+2\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,123+55\sqrt{5},\,63+27\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5},\,147+65\sqrt{5},\,103+45\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,47+21\sqrt{5},\,47+21\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5},\,35+15\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5})$

$(6+2\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,180+80\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5})$

$(6+2\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,324+144\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5})$

$(6+2\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5},\,63+27\sqrt{5},\,246+110\sqrt{5},\,56+24\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5},\,207+91\sqrt{5},\,984+440\sqrt{5},\,246+110\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,207+91\sqrt{5},\,63+27\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5})$

$(7+3\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,35+15\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5},\,35+15\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,35+15\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,35+15\sqrt{5},\,70+30\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5})$

Die erste und die fünfte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $D(A) = \mathcal{P}_2$ und $(x^2, y^2, z^2) = (\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}, \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}, 6 + 2\sqrt{5})$:

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 207+91\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 103+45\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 12+4\sqrt{5}, 103+45\sqrt{5}, 207+91\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 7+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 347+153\sqrt{5}, 492+220\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 267+119\sqrt{5}, 467+207\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 103+45\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 15+5\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 12+4\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 267+119\sqrt{5}, 140+60\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 347+153\sqrt{5}, 207+91\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 175+75\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 7+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 492+220\sqrt{5}, 267+119\sqrt{5}, 140+60\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 467+207\sqrt{5}, 347+153\sqrt{5}, 207+91\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 72+32\sqrt{5}, 7+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 72+32\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 103+45\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 103+45\sqrt{5}, 175+75\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 15+5\sqrt{5}, 103+45\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 72+32\sqrt{5}, 7+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 103+45\sqrt{5}, 140+60\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 267+119\sqrt{5}, 267+119\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 207+91\sqrt{5}, 15+5\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 12+4\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 207+91\sqrt{5}, 140+60\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 175+75\sqrt{5}, 347+153\sqrt{5}, 267+119\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 7+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 492+220\sqrt{5}, 267+119\sqrt{5}, 140+60\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 467+207\sqrt{5}, 347+153\sqrt{5}, 207+91\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 72+32\sqrt{5}, 7+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(12+4\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 207+91\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 15+5\sqrt{5}, 207+91\sqrt{5}, 467+207\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 72+32\sqrt{5}, 12+4\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 15+5\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(12+4\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 207+91\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 15+5\sqrt{5}, 207+91\sqrt{5}, 467+207\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 72+32\sqrt{5}, 12+4\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 15+5\sqrt{5})$

Die vierte und die achte bzw. die neunte und die zehnte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $D(A) = \mathcal{P}_2$ und $(x^2, y^2, z^2) = (\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}, \frac{9}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}, \frac{9}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5})$:

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 105+45\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 105+45\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 9+3\sqrt{5}, 105+45\sqrt{5}, 175+75\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 105+45\sqrt{5}, 9+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 235+105\sqrt{5}, 105+45\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 189+81\sqrt{5}, 423+189\sqrt{5}, 216+96\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 103+45\sqrt{5}, 84+36\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 9+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 383+171\sqrt{5}, 523+231\sqrt{5}, 188+84\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 235+105\sqrt{5}, 423+189\sqrt{5}, 175+75\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 103+45\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 7+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 383+171\sqrt{5}, 523+231\sqrt{5}, 188+84\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 235+105\sqrt{5}, 423+189\sqrt{5}, 175+75\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 103+45\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 7+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 175+75\sqrt{5}, 105+45\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 105+45\sqrt{5}, 188+84\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 9+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(9+3\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 175+75\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 105+45\sqrt{5}, 140+60\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 105+45\sqrt{5}, 175+75\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 9+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(9+3\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 188+84\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 467+207\sqrt{5}, 705+315\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 216+96\sqrt{5}, 423+189\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 9+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(9+3\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 467+207\sqrt{5}, 441+195\sqrt{5}, 140+60\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 309+135\sqrt{5}, 383+171\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 84+36\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 9+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(9+3\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 188+84\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 467+207\sqrt{5}, 705+315\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 216+96\sqrt{5}, 423+189\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 63+27\sqrt{5}, 9+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(9+3\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 141+63\sqrt{5}, 140+60\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 84+36\sqrt{5}, 383+171\sqrt{5}, 441+195\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 309+135\sqrt{5}, 467+207\sqrt{5}, 21+9\sqrt{5}, 47+21\sqrt{5}, 9+3\sqrt{5})$

Die dritte und die vierte bzw. die siebte und die neunte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ D(A) = \mathcal{P}_7$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2) = (3+\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 13+9\sqrt{2})$:

$(3+1\sqrt{2},\, 136+96\sqrt{2},\, 121+84\sqrt{2},\, 331+234\sqrt{2},\, 251+177\sqrt{2},\, 117+81\sqrt{2},\, 117+81\sqrt{2},\, 355+249\sqrt{2},\, 283+198\sqrt{2},\, 11+6\sqrt{2},\, 121+84\sqrt{2},\, 189+133\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 26+18\sqrt{2},\, 6+2\sqrt{2})$

$(3+1\sqrt{2},\, 121+84\sqrt{2},\, 1347+950\sqrt{2},\, 502+354\sqrt{2},\, 228+160\sqrt{2},\, 117+81\sqrt{2},\, 1350+954\sqrt{2},\, 531+374\sqrt{2},\, 251+177\sqrt{2},\, 11+6\sqrt{2},\, 13+9\sqrt{2},\, 17+12\sqrt{2},\, 13+9\sqrt{2},\, 43+30\sqrt{2},\, 6+2\sqrt{2})$

$(3+1\sqrt{2},\, 251+177\sqrt{2},\, 355+249\sqrt{2},\, 1099+777\sqrt{2},\, 996+704\sqrt{2},\, 228+160\sqrt{2},\, 331+234\sqrt{2},\, 1203+850\sqrt{2},\, 1099+777\sqrt{2},\, 3+2\sqrt{2},\, 331+234\sqrt{2},\, 355+249\sqrt{2},\, 228+160\sqrt{2},\, 251+177\sqrt{2},\, 3+1\sqrt{2})$

$(3+1\sqrt{2},\, 272+192\sqrt{2},\, 1099+777\sqrt{2},\, 996+704\sqrt{2},\, 251+177\sqrt{2},\, 1203+850\sqrt{2},\, 1099+777\sqrt{2},\, 3+2\sqrt{2},\, 251+177\sqrt{2},\, 272+192\sqrt{2},\, 251+177\sqrt{2},\, 283+198\sqrt{2},\, 3+1\sqrt{2})$

$(3+1\sqrt{2},\, 136+96\sqrt{2},\, 121+84\sqrt{2},\, 331+234\sqrt{2},\, 251+177\sqrt{2},\, 117+81\sqrt{2},\, 117+81\sqrt{2},\, 355+249\sqrt{2},\, 283+198\sqrt{2},\, 11+6\sqrt{2},\, 121+84\sqrt{2},\, 189+133\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 26+18\sqrt{2},\, 6+2\sqrt{2})$

$(3+2\sqrt{2},\, 26+18\sqrt{2},\, 150+106\sqrt{2},\, 378+266\sqrt{2},\, 251+177\sqrt{2},\, 13+9\sqrt{2},\, 117+81\sqrt{2},\, 355+249\sqrt{2},\, 251+177\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 136+96\sqrt{2},\, 121+84\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 17+12\sqrt{2},\, 3+2\sqrt{2})$

$(3+2\sqrt{2},\, 17+12\sqrt{2},\, 121+84\sqrt{2},\, 331+234\sqrt{2},\, 228+160\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 136+96\sqrt{2},\, 456+320\sqrt{2},\, 331+234\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 136+96\sqrt{2},\, 121+84\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 17+12\sqrt{2},\, 3+2\sqrt{2})$

$(9+4\sqrt{2},\, 43+30\sqrt{2},\, 297+208\sqrt{2},\, 219+154\sqrt{2},\, 17+12\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 121+84\sqrt{2},\, 136+96\sqrt{2},\, 17+12\sqrt{2},\, 11+6\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 11+6\sqrt{2},\, 11+6\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 11+6\sqrt{2})$

$(3+2\sqrt{2},\, 13+9\sqrt{2},\, 117+81\sqrt{2},\, 531+374\sqrt{2},\, 272+192\sqrt{2},\, 13+9\sqrt{2},\, 189+133\sqrt{2},\, 996+704\sqrt{2},\, 531+374\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 189+133\sqrt{2},\, 117+81\sqrt{2},\, 13+9\sqrt{2},\, 13+9\sqrt{2},\, 3+2\sqrt{2})$

$(9+4\sqrt{2},\, 26+18\sqrt{2},\, 13+9\sqrt{2},\, 13+9\sqrt{2},\, 26+18\sqrt{2},\, 13+9\sqrt{2},\, 26+18\sqrt{2},\, 75+53\sqrt{2},\, 251+177\sqrt{2},\, 11+6\sqrt{2},\, 81+56\sqrt{2},\, 456+320\sqrt{2},\, 11+6\sqrt{2},\, 81+56\sqrt{2},\, 11+6\sqrt{2})$

Keine konjugierten Gruppen zu erkennen.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $D(A) = \mathcal{P}'_7$ und $(x^2, y^2, z^2) = (3+2\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2})$:

$(3+2\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 69+47\sqrt{2}, 54+38\sqrt{2}, 43+30\sqrt{2}, 43+30\sqrt{2}, 54+38\sqrt{2}, 69+47\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2}, 54+38\sqrt{2}, 131+90\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 54+38\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2})$

$(3+2\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 157+111\sqrt{2}, 121+84\sqrt{2}, 54+38\sqrt{2}, 24+16\sqrt{2}, 182+126\sqrt{2}, 172+120\sqrt{2}, 91+63\sqrt{2}, 10+6\sqrt{2}, 24+16\sqrt{2}, 27+19\sqrt{2}, 10+6\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2})$

$(3+2\sqrt{2}, 43+30\sqrt{2}, 179+126\sqrt{2}, 283+198\sqrt{2}, 136+96\sqrt{2}, 24+16\sqrt{2}, 121+84\sqrt{2}, 249+176\sqrt{2}, 131+90\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2}, 57+40\sqrt{2}, 43+30\sqrt{2}, 24+16\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$

$(3+2\sqrt{2}, 43+30\sqrt{2}, 179+126\sqrt{2}, 283+198\sqrt{2}, 136+96\sqrt{2}, 24+16\sqrt{2}, 121+84\sqrt{2}, 249+176\sqrt{2}, 131+90\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2}, 57+40\sqrt{2}, 43+30\sqrt{2}, 24+16\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$

$(3+2\sqrt{2}, 43+30\sqrt{2}, 69+47\sqrt{2}, 131+90\sqrt{2}, 54+38\sqrt{2}, 24+16\sqrt{2}, 54+38\sqrt{2}, 136+96\sqrt{2}, 69+47\sqrt{2}, 10+6\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 69+47\sqrt{2}, 10+6\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2})$

$(5+3\sqrt{2}, 27+19\sqrt{2}, 91+63\sqrt{2}, 69+47\sqrt{2}, 48+32\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2}, 57+40\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 69+47\sqrt{2}, 24+16\sqrt{2}, 57+40\sqrt{2}, 91+63\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2}, 27+19\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2})$

$(5+3\sqrt{2}, 10+6\sqrt{2}, 91+63\sqrt{2}, 69+47\sqrt{2}, 48+32\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2}, 172+120\sqrt{2}, 179+126\sqrt{2}, 157+111\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 43+30\sqrt{2}, 54+38\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2}, 27+19\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2})$

$(5+3\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 48+32\sqrt{2}, 69+47\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 10+6\sqrt{2}, 69+47\sqrt{2}, 136+96\sqrt{2}, 54+38\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 54+38\sqrt{2}, 48+32\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 10+6\sqrt{2})$

$(5+3\sqrt{2}, 10+6\sqrt{2}, 91+63\sqrt{2}, 69+47\sqrt{2}, 48+32\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2}, 172+120\sqrt{2}, 179+126\sqrt{2}, 157+111\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 43+30\sqrt{2}, 54+38\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2}, 27+19\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2})$

$(5+3\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 136+96\sqrt{2}, 91+63\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 10+6\sqrt{2}, 91+63\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 27+19\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 27+19\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 10+6\sqrt{2})$

Die dritte und vierte bzw. siebte und neunte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ D(A) = \mathcal{P}_2$ und $(x^2,\ y^2,\ z^2) = (4+2\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2})$:

$(4+2\sqrt{2},\ 48+32\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 68+46\sqrt{2},\ 54+36\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 52+34\sqrt{2},\ 68+48\sqrt{2},\ 68+46\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2},\ 52+34\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 48+32\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2})$

$(4+2\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 54+36\sqrt{2},\ 68+48\sqrt{2},\ 54+36\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 68+46\sqrt{2},\ 116+82\sqrt{2},\ 116+82\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 68+46\sqrt{2},\ 116+82\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2},\ 24+16\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2})$

$(4+2\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 68+46\sqrt{2},\ 116+82\sqrt{2},\ 68+48\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 68+48\sqrt{2},\ 172+120\sqrt{2},\ 116+82\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 68+48\sqrt{2},\ 68+46\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2})$

$(4+2\sqrt{2},\ 48+32\sqrt{2},\ 24+16\sqrt{2},\ 116+82\sqrt{2},\ 68+48\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 172+120\sqrt{2},\ 116+82\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 292+206\sqrt{2},\ 272+192\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 24+16\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2})$

$(4+2\sqrt{2},\ 48+32\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 68+46\sqrt{2},\ 54+36\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 52+34\sqrt{2},\ 68+48\sqrt{2},\ 68+46\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2},\ 52+34\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 48+32\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2})$

$(4+2\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 198+140\sqrt{2},\ 272+192\sqrt{2},\ 54+36\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 180+126\sqrt{2},\ 292+206\sqrt{2},\ 68+46\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 52+34\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2})$

$(4+2\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 68+46\sqrt{2},\ 116+82\sqrt{2},\ 68+48\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 68+48\sqrt{2},\ 172+120\sqrt{2},\ 116+82\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 68+48\sqrt{2},\ 68+46\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2})$

$(4+2\sqrt{2},\ 24+16\sqrt{2},\ 272+192\sqrt{2},\ 116+82\sqrt{2},\ 68+48\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 292+206\sqrt{2},\ 172+120\sqrt{2},\ 116+82\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 24+16\sqrt{2},\ 20+14\sqrt{2},\ 48+32\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2})$

$(6+4\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 48+32\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 24+16\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 228+160\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 24+16\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 48+32\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2})$

$(6+4\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 48+32\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 24+16\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 228+160\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 24+16\sqrt{2},\ 86+60\sqrt{2},\ 48+32\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2},\ 12+8\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2})$

Die erste und fünfte bzw. dritte und siebte bzw. neunte und zehnte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $D(A) = \mathcal{P}_3$ und $(x^2, y^2, z^2) = (3 + \sqrt{3}, 8 + 4\sqrt{3}, 9 + 5\sqrt{3})$:

$(3+1\sqrt{3}, 104+60\sqrt{3}, 891+513\sqrt{3}, 532+306\sqrt{3}, 86+48\sqrt{3}, 81+45\sqrt{3}, 724+418\sqrt{3}, 459+265\sqrt{3}, 81+45\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}, 14+8\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 9+3\sqrt{3}, 27+15\sqrt{3}, 8+4\sqrt{3})$

$(3+1\sqrt{3}, 86+48\sqrt{3}, 297+171\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 86+48\sqrt{3}, 81+45\sqrt{3}, 316+182\sqrt{3}, 99+57\sqrt{3}, 123+71\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}, 14+8\sqrt{3}, 112+64\sqrt{3}, 9+3\sqrt{3}, 123+71\sqrt{3}, 14+8\sqrt{3})$

$(3+1\sqrt{3}, 99+57\sqrt{3}, 171+97\sqrt{3}, 459+265\sqrt{3}, 388+224\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 156+90\sqrt{3}, 532+306\sqrt{3}, 459+265\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}, 156+90\sqrt{3}, 171+97\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 99+57\sqrt{3}, 3+1\sqrt{3})$

$(3+1\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 112+64\sqrt{3}, 459+265\sqrt{3}, 388+224\sqrt{3}, 99+57\sqrt{3}, 99+57\sqrt{3}, 532+306\sqrt{3}, 459+265\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}, 297+171\sqrt{3}, 316+182\sqrt{3}, 99+57\sqrt{3}, 112+64\sqrt{3}, 3+1\sqrt{3})$

$(3+1\sqrt{3}, 104+60\sqrt{3}, 891+513\sqrt{3}, 532+306\sqrt{3}, 86+48\sqrt{3}, 81+45\sqrt{3}, 724+418\sqrt{3}, 459+265\sqrt{3}, 81+45\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}, 14+8\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 9+3\sqrt{3}, 27+15\sqrt{3}, 8+4\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 27+15\sqrt{3}, 123+71\sqrt{3}, 201+115\sqrt{3}, 99+57\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}, 81+45\sqrt{3}, 171+97\sqrt{3}, 99+57\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 104+60\sqrt{3}, 86+48\sqrt{3}, 8+4\sqrt{3}, 14+8\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 14+8\sqrt{3}, 86+48\sqrt{3}, 156+90\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 8+4\sqrt{3}, 104+60\sqrt{3}, 252+144\sqrt{3}, 156+90\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 104+60\sqrt{3}, 86+48\sqrt{3}, 8+4\sqrt{3}, 14+8\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(8+4\sqrt{3}, 86+48\sqrt{3}, 104+60\sqrt{3}, 252+144\sqrt{3}, 14+8\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 104+60\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 86+48\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 8+4\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 14+8\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}, 81+45\sqrt{3}, 316+182\sqrt{3}, 112+64\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}, 177+101\sqrt{3}, 832+480\sqrt{3}, 316+182\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 177+101\sqrt{3}, 81+45\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(9+5\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 27+15\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}, 27+15\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 27+15\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 27+15\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 9+5\sqrt{3})$

Die erste und fünfte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{3}),\ D(A) = \mathcal{P}_2$ und $(x^2, y^2, z^2) = (4+2\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$:

$(4+2\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 268+154\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 268+154\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 252+144\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 268+154\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 268+154\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 268+154\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 84+48\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 268+154\sqrt{3}, 16+8\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 208+120\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

Die zweite und die sechste bzw. die dritte, vierte und achte bzw. die siebte, neunte und zehnte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{13}),\ D(A) = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_3'$ und $(x^2,\ y^2,\ z^2) = (\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13},\ 16+4\sqrt{13},\ \frac{33}{2}+\frac{9}{2}\sqrt{13})$:

$\frac{1}{2}(5+1\sqrt{13},\ 332+92\sqrt{13},\ 305+83\sqrt{13},\ 1071+297\sqrt{13},\ 869+241\sqrt{13},\ 297+81\sqrt{13},\ 297+81\sqrt{13},\ 1133+313\sqrt{13},\ 947+261\sqrt{13},\ 19+5\sqrt{13},\ 305+83\sqrt{13},\ 429+117\sqrt{13},\ 32+8\sqrt{13},\ 57+15\sqrt{13},\ 11+1\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(5+1\sqrt{13},\ 305+83\sqrt{13},\ 3203+887\sqrt{13},\ 1475+409\sqrt{13},\ 808+224\sqrt{13},\ 297+81\sqrt{13},\ 3213+891\sqrt{13},\ 1547+429\sqrt{13},\ 869+241\sqrt{13},\ 19+5\sqrt{13},\ 33+9\sqrt{13},\ 41+11\sqrt{13},\ 33+9\sqrt{13},\ 83+23\sqrt{13},\ 11+1\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(5+1\sqrt{13},\ 869+241\sqrt{13},\ 1133+313\sqrt{13},\ 3725+1033\sqrt{13},\ 3464+960\sqrt{13},\ 808+224\sqrt{13},\ 1071+297\sqrt{13},\ 3991+1105\sqrt{13},\ 3725+1033\sqrt{13},\ 7+1\sqrt{13},\ 1071+297\sqrt{13},\ 1133+313\sqrt{13},\ 808+224\sqrt{13},\ 869+241\sqrt{13},\ 5+1\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(5+1\sqrt{13},\ 947+261\sqrt{13},\ 928+256\sqrt{13},\ 3725+1033\sqrt{13},\ 3464+960\sqrt{13},\ 869+241\sqrt{13},\ 869+241\sqrt{13},\ 3991+1105\sqrt{13},\ 3725+1033\sqrt{13},\ 7+1\sqrt{13},\ 1475+409\sqrt{13},\ 1547+429\sqrt{13},\ 869+241\sqrt{13},\ 928+256\sqrt{13},\ 5+1\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(5+1\sqrt{13},\ 332+92\sqrt{13},\ 305+83\sqrt{13},\ 1071+297\sqrt{13},\ 869+241\sqrt{13},\ 297+81\sqrt{13},\ 297+81\sqrt{13},\ 1133+313\sqrt{13},\ 947+261\sqrt{13},\ 19+5\sqrt{13},\ 305+83\sqrt{13},\ 429+117\sqrt{13},\ 32+8\sqrt{13},\ 57+15\sqrt{13},\ 11+1\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(7+1\sqrt{13},\ 57+15\sqrt{13},\ 357+99\sqrt{13},\ 1175+325\sqrt{13},\ 869+241\sqrt{13},\ 33+9\sqrt{13},\ 297+81\sqrt{13},\ 1133+313\sqrt{13},\ 869+241\sqrt{13},\ 44+12\sqrt{13},\ 332+92\sqrt{13},\ 305+83\sqrt{13},\ 32+8\sqrt{13},\ 41+11\sqrt{13},\ 7+1\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(7+1\sqrt{13},\ 41+11\sqrt{13},\ 305+83\sqrt{13},\ 1071+297\sqrt{13},\ 808+224\sqrt{13},\ 32+8\sqrt{13},\ 332+92\sqrt{13},\ 1372+380\sqrt{13},\ 1071+297\sqrt{13},\ 44+12\sqrt{13},\ 332+92\sqrt{13},\ 305+83\sqrt{13},\ 32+8\sqrt{13},\ 41+11\sqrt{13},\ 7+1\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(11+3\sqrt{13},\ 83+23\sqrt{13},\ 605+167\sqrt{13},\ 479+131\sqrt{13},\ 41+11\sqrt{13},\ 32+8\sqrt{13},\ 305+83\sqrt{13},\ 332+92\sqrt{13},\ 41+11\sqrt{13},\ 19+5\sqrt{13},\ 44+12\sqrt{13},\ 19+5\sqrt{13},\ 19+5\sqrt{13},\ 44+12\sqrt{13},\ 19+5\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(7+1\sqrt{13},\ 33+9\sqrt{13},\ 297+81\sqrt{13},\ 928+256\sqrt{13},\ 947+261\sqrt{13},\ 33+9\sqrt{13},\ 429+117\sqrt{13},\ 1547+429\sqrt{13},\ 1627+451\sqrt{13},\ 44+12\sqrt{13},\ 297+81\sqrt{13},\ 357+99\sqrt{13},\ 33+9\sqrt{13},\ 57+15\sqrt{13},\ 7+1\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(11+3\sqrt{13},\ 57+15\sqrt{13},\ 33+9\sqrt{13},\ 33+9\sqrt{13},\ 30+8\sqrt{13},\ 33+9\sqrt{13},\ 57+15\sqrt{13},\ 132+36\sqrt{13},\ 21+4\sqrt{13},\ 138+36\sqrt{13},\ 134+37\sqrt{13},\ 692+190\sqrt{13},\ 689+191\sqrt{13},\ 19+5\sqrt{13},\ 19+5\sqrt{13})$

Die erste und fünfte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$, $D(A) = \mathcal{P}_2$ und $(x^2, y^2, z^2) = (\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, \frac{11}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{13}, \frac{11}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{13})$:

$\frac{1}{2}(7 + 1\sqrt{13}, 176 + 48\sqrt{13}, 143 + 39\sqrt{13}, 119 + 33\sqrt{13}, 119 + 33\sqrt{13}, 119 + 33\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 176+48\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 383+105\sqrt{13}, 31 + 7\sqrt{13}, 119 + 33\sqrt{13}, 11 + 3\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(7 + 1\sqrt{13}, 83 + 21\sqrt{13}, 631 + 175\sqrt{13}, 275 + 75\sqrt{13}, 119 + 33\sqrt{13}, 76 + 20\sqrt{13}, 683 + 189\sqrt{13}, 343 + 95\sqrt{13}, 176 + 48\sqrt{13}, 19 + 5\sqrt{13}, 31 + 7\sqrt{13}, 44 + 12\sqrt{13}, 19 + 5\sqrt{13}, 83 + 21\sqrt{13}, 11 + 3\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(7 + 1\sqrt{13}, 119 + 33\sqrt{13}, 383 + 105\sqrt{13}, 683 + 189\sqrt{13}, 396 + 108\sqrt{13}, 76 + 20\sqrt{13}, 275+75\sqrt{13}, 631+175\sqrt{13}, 383+105\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 76 + 20\sqrt{13}, 83 + 21\sqrt{13}, 7 + 1\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(7 + 1\sqrt{13}, 119 + 33\sqrt{13}, 383 + 105\sqrt{13}, 683 + 189\sqrt{13}, 396 + 108\sqrt{13}, 76 + 20\sqrt{13}, 275+75\sqrt{13}, 631+175\sqrt{13}, 383+105\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 76 + 20\sqrt{13}, 83 + 21\sqrt{13}, 7 + 1\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(7 + 1\sqrt{13}, 119 + 33\sqrt{13}, 143 + 39\sqrt{13}, 383 + 105\sqrt{13}, 119 + 33\sqrt{13}, 76 + 20\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 396+108\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 19+5\sqrt{13}, 176+48\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 19 + 5\sqrt{13}, 31 + 7\sqrt{13}, 11 + 3\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(11 + 3\sqrt{13}, 44 + 12\sqrt{13}, 176 + 48\sqrt{13}, 143 + 39\sqrt{13}, 76 + 20\sqrt{13}, 11 + 3\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 176+48\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 76+20\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 176+48\sqrt{13}, 11 + 3\sqrt{13}, 44 + 12\sqrt{13}, 11 + 3\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(11+3\sqrt{13}, 19+5\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 83+21\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 275+75\sqrt{13}, 383+105\sqrt{13}, 343+95\sqrt{13}, 76+20\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 176+48\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 44 + 12\sqrt{13}, 11 + 3\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(11+3\sqrt{13}, 31+7\sqrt{13}, 76+20\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 31+7\sqrt{13}, 19+5\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 396+108\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 31+7\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 76+20\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 31 + 7\sqrt{13}, 19 + 5\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(11+3\sqrt{13}, 19+5\sqrt{13}, 176+48\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 76+20\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 343+95\sqrt{13}, 383+105\sqrt{13}, 275+75\sqrt{13}, 83+21\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 44 + 12\sqrt{13}, 11 + 3\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(11+3\sqrt{13}, 83+21\sqrt{13}, 275+75\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 31+7\sqrt{13}, 19+5\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 83 + 21\sqrt{13}, 44 + 12\sqrt{13}, 31 + 7\sqrt{13}, 44 + 12\sqrt{13}, 83 + 21\sqrt{13}, 11 + 3\sqrt{13}, 83 + 21\sqrt{13}, 19 + 5\sqrt{13})$

Die dritte und vierte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$, $D(A) = \mathcal{P}_2'$ und $(x^2, y^2, z^2) = (\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}, 10 + 2\sqrt{17}, \frac{21}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{17})$:

$\frac{1}{2}(5+1\sqrt{17}, 232+56\sqrt{17}, 2285+553\sqrt{17}, 1529+369\sqrt{17}, 199+47\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 1953+473\sqrt{17}, 1357+329\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 31+7\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 14+2\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 20+4\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(5+1\sqrt{17}, 199+47\sqrt{17}, 2375+575\sqrt{17}, 734+178\sqrt{17}, 264+64\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 2376+576\sqrt{17}, 781+189\sqrt{17}, 301+73\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 31+7\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 95+23\sqrt{17}, 14+2\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(5+1\sqrt{17}, 301+73\sqrt{17}, 469+113\sqrt{17}, 1357+329\sqrt{17}, 1192+288\sqrt{17}, 264+64\sqrt{17}, 433+105\sqrt{17}, 1529+369\sqrt{17}, 1357+329\sqrt{17}, 9+1\sqrt{17}, 433+105\sqrt{17}, 469+113\sqrt{17}, 264+64\sqrt{17}, 301+73\sqrt{17}, 5+1\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(5+1\sqrt{17}, 336+80\sqrt{17}, 1357+329\sqrt{17}, 1192+288\sqrt{17}, 301+73\sqrt{17}, 1529+369\sqrt{17}, 1357+329\sqrt{17}, 9+1\sqrt{17}, 301+73\sqrt{17}, 336+80\sqrt{17}, 301+73\sqrt{17}, 357+85\sqrt{17}, 5+1\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(5+1\sqrt{17}, 232+56\sqrt{17}, 199+47\sqrt{17}, 433+105\sqrt{17}, 301+73\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 469+113\sqrt{17}, 357+85\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 199+47\sqrt{17}, 357+85\sqrt{17}, 20+4\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 14+2\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(9+1\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 264+64\sqrt{17}, 522+126\sqrt{17}, 301+73\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 469+113\sqrt{17}, 301+73\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 232+56\sqrt{17}, 199+47\sqrt{17}, 20+4\sqrt{17}, 31+7\sqrt{17}, 9+1\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(9+1\sqrt{17}, 31+7\sqrt{17}, 199+47\sqrt{17}, 433+105\sqrt{17}, 264+64\sqrt{17}, 20+4\sqrt{17}, 232+56\sqrt{17}, 644+156\sqrt{17}, 433+105\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 232+56\sqrt{17}, 199+47\sqrt{17}, 20+4\sqrt{17}, 31+7\sqrt{17}, 9+1\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(20+4\sqrt{17}, 199+47\sqrt{17}, 232+56\sqrt{17}, 644+156\sqrt{17}, 31+7\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 232+56\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 199+47\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 20+4\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 31+7\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(9+1\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 781+189\sqrt{17}, 336+80\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 357+85\sqrt{17}, 1732+420\sqrt{17}, 781+189\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 357+85\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 9+1\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(20+3\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 353+85\sqrt{17}, 266+63\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 23+4\sqrt{17}, 246+59\sqrt{17}, 328+79\sqrt{17}, 49+10\sqrt{17}, 45+11\sqrt{17}, 24+4\sqrt{17,}21+5\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17})$

Keine Konjugation zu erkennen.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$, $D(A) = \mathcal{P}_2$ und $(x^2, y^2, z^2) = (\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}, 6 + 2\sqrt{17}, \frac{13}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{17})$:

$\frac{1}{2}(7 + 1\sqrt{17}, 117 + 27\sqrt{17}, 477 + 115\sqrt{17}, 175 + 41\sqrt{17}, 117 + 27\sqrt{17}, 71 + 17\sqrt{17}, 346 + 82\sqrt{17}, 161 + 39\sqrt{17}, 133 + 31\sqrt{17}, 13 + 3\sqrt{17}, 40 + 8\sqrt{17}, 84 + 20\sqrt{17}, 29 + 7\sqrt{17}, 117 + 27\sqrt{17}, 10 + 2\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(7 + 1\sqrt{17}, 71 + 17\sqrt{17}, 117 + 27\sqrt{17}, 264 + 64\sqrt{17}, 117 + 27\sqrt{17}, 52 + 12\sqrt{17}, 133+31\sqrt{17}, 367+89\sqrt{17}, 190+46\sqrt{17}, 29+7\sqrt{17}, 175+41\sqrt{17}, 190+46\sqrt{17}, 13 + 3\sqrt{17}, 33 + 7\sqrt{17}, 13 + 3\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(7 + 1\sqrt{17}, 71 + 17\sqrt{17}, 175 + 41\sqrt{17}, 367 + 89\sqrt{17}, 264 + 64\sqrt{17}, 52 + 12\sqrt{17}, 161+39\sqrt{17}, 477+115\sqrt{17}, 367+89\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 161+39\sqrt{17}, 175+41\sqrt{17}, 52 + 12\sqrt{17}, 71 + 17\sqrt{17}, 7 + 1\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(7 + 1\sqrt{17}, 117 + 27\sqrt{17}, 84 + 20\sqrt{17}, 367 + 89\sqrt{17}, 264 + 64\sqrt{17}, 71 + 17\sqrt{17}, 71+17\sqrt{17}, 477+115\sqrt{17}, 367+89\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 464+112\sqrt{17}, 477+115\sqrt{17}, 71 + 17\sqrt{17}, 84 + 20\sqrt{17}, 7 + 1\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(7 + 1\sqrt{17}, 84 + 20\sqrt{17}, 117 + 27\sqrt{17}, 367 + 89\sqrt{17}, 117 + 27\sqrt{17}, 71 + 17\sqrt{17}, 133+31\sqrt{17}, 548+132\sqrt{17}, 190+46\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 175+41\sqrt{17}, 117+27\sqrt{17}, 29 + 7\sqrt{17}, 33 + 7\sqrt{17}, 10 + 2\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(10+2\sqrt{17}, 29+7\sqrt{17}, 264+64\sqrt{17}, 117+27\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 284+68\sqrt{17}, 175+41\sqrt{17}, 190+46\sqrt{17}, 71+17\sqrt{17}, 71+17\sqrt{17}, 133+31\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 84 + 20\sqrt{17}, 13 + 3\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(10+2\sqrt{17}, 29+7\sqrt{17}, 133+31\sqrt{17}, 190+46\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 161+39\sqrt{17}, 336+80\sqrt{17}, 190+46\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 161+39\sqrt{17}, 133+31\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 29 + 7\sqrt{17}, 10 + 2\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(10+2\sqrt{17}, 33+7\sqrt{17}, 190+46\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 33+7\sqrt{17}, 29+7\sqrt{17}, 336+80\sqrt{17}, 190 + 46\sqrt{17}, 133 + 31\sqrt{17}, 29 + 7\sqrt{17}, 33 + 7\sqrt{17}, 84 + 20\sqrt{17}, 10 + 2\sqrt{17}, 133 + 31\sqrt{17}, 33 + 7\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(13+3\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 117+27\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 117+27\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 477+115\sqrt{17}, 477 + 115\sqrt{17}, 837 + 203\sqrt{17}, 84 + 20\sqrt{17}, 117 + 27\sqrt{17}, 264 + 64\sqrt{17}, 13 + 3\sqrt{17}, 84 + 20\sqrt{17}, 13 + 3\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(13+3\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 117+27\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 33+7\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 117 + 27\sqrt{17}, 84 + 20\sqrt{17}, 33 + 7\sqrt{17}, 84 + 20\sqrt{17}, 117 + 27\sqrt{17}, 13 + 3\sqrt{17}, 52 + 12\sqrt{17}, 13 + 3\sqrt{17})$

Keine Konjugation zu erkennen.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{21})$, $D(A) = \mathcal{P}_2$ und $(x^2, y^2, z^2) = (\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}, \frac{15}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{21}, \frac{17}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{21})$:

$\frac{1}{2}(5 + 1\sqrt{21}, 179 + 39\sqrt{21}, 1253 + 273\sqrt{21}, 995 + 217\sqrt{21}, 155 + 33\sqrt{21}, 152 + 32\sqrt{21}, 1127+245\sqrt{21}, 965+209\sqrt{21}, 161+35\sqrt{21}, 17+3\sqrt{21}, 35+7\sqrt{21}, 23+ 5\sqrt{21}, 17 + 3\sqrt{21}, 45 + 9\sqrt{21}, 15 + 3\sqrt{21})$

$\frac{1}{2}(5 + 1\sqrt{21}, 179 + 39\sqrt{21}, 761 + 165\sqrt{21}, 3515 + 767\sqrt{21}, 155 + 33\sqrt{21}, 152 + 32\sqrt{21}, 716+156\sqrt{21}, 3485+759\sqrt{21}, 161+35\sqrt{21}, 20+4\sqrt{21}, 155+33\sqrt{21}, 23+ 5\sqrt{21}, 17 + 3\sqrt{21}, 17 + 3\sqrt{21}, 35 + 7\sqrt{21})$

$\frac{1}{2}(5 + 1\sqrt{21}, 209 + 45\sqrt{21}, 293 + 63\sqrt{21}, 965 + 209\sqrt{21}, 716 + 156\sqrt{21}, 155 + 33\sqrt{21}, 239+51\sqrt{21}, 995+217\sqrt{21}, 761+165\sqrt{21}, 11+1\sqrt{21}, 368+80\sqrt{21}, 353+ 77\sqrt{21}, 155 + 33\sqrt{21}, 161 + 35\sqrt{21}, 5 + 1\sqrt{21})$

$\frac{1}{2}(5 + 1\sqrt{21}, 207 + 45\sqrt{21}, 527 + 115\sqrt{21}, 965 + 209\sqrt{21}, 716 + 156\sqrt{21}, 161 + 35\sqrt{21}, 440+96\sqrt{21}, 995+217\sqrt{21}, 761+165\sqrt{21}, 11+1\sqrt{21}, 209+45\sqrt{21}, 207+ 45\sqrt{21}, 161 + 35\sqrt{21}, 179 + 39\sqrt{21}, 5 + 1\sqrt{21})$

$\frac{1}{2}(5 + 1\sqrt{21}, 179 + 39\sqrt{21}, 368 + 80\sqrt{21}, 161 + 35\sqrt{21}, 155 + 33\sqrt{21}, 152 + 32\sqrt{21}, 353 + 77\sqrt{21}, 179 + 39\sqrt{21}, 209 + 45\sqrt{21}, 15 + 3\sqrt{21}, 45 + 9\sqrt{21}, 239 + 51\sqrt{21}, 17 + 3\sqrt{21}, 155 + 33\sqrt{21}, 20 + 4\sqrt{21})$

$\frac{1}{2}(11 + 1\sqrt{21}, 45 + 9\sqrt{21}, 209 + 45\sqrt{21}, 276 + 60\sqrt{21}, 161 + 35\sqrt{21}, 17 + 3\sqrt{21}, 161+35\sqrt{21}, 293+63\sqrt{21}, 209+45\sqrt{21}, 60+12\sqrt{21}, 179+39\sqrt{21}, 179+ 39\sqrt{21}, 15 + 3\sqrt{21}, 35 + 7\sqrt{21}, 11 + 1\sqrt{21})$

$\frac{1}{2}(11 + 1\sqrt{21}, 23 + 5\sqrt{21}, 155 + 33\sqrt{21}, 239 + 51\sqrt{21}, 155 + 33\sqrt{21}, 15 + 3\sqrt{21}, 239+51\sqrt{21}, 483+105\sqrt{21}, 368+80\sqrt{21}, 60+12\sqrt{21}, 179+39\sqrt{21}, 179+ 39\sqrt{21}, 15 + 3\sqrt{21}, 35 + 7\sqrt{21}, 11 + 1\sqrt{21})$

$\frac{1}{2}(15+3\sqrt{21}, 23+5\sqrt{21}, 60+12\sqrt{21}, 179+39\sqrt{21}, 23+5\sqrt{21}, 23+5\sqrt{21}, 179+ 39\sqrt{21}, 828+180\sqrt{21}, 155+33\sqrt{21}, 23+5\sqrt{21}, 155+33\sqrt{21}, 60+12\sqrt{21}, 15+ 3\sqrt{21}, 23 + 5\sqrt{21}, 23 + 5\sqrt{21})$

$\frac{1}{2}(11 + 1\sqrt{21}, 20 + 4\sqrt{21}, 152 + 32\sqrt{21}, 207 + 45\sqrt{21}, 179 + 39\sqrt{21}, 17 + 3\sqrt{21}, 293+63\sqrt{21}, 527+115\sqrt{21}, 527+115\sqrt{21}, 60+12\sqrt{21}, 161+35\sqrt{21}, 209+ 45\sqrt{21}, 17 + 3\sqrt{21}, 45 + 9\sqrt{21}, 11 + 1\sqrt{21})$

$\frac{1}{2}(17+3\sqrt{21}, 155+33\sqrt{21}, 296+64\sqrt{21}, 69+15\sqrt{21}, 23+5\sqrt{21}, 20+4\sqrt{21}, 69+ 15\sqrt{21}, 35 + 7\sqrt{21}, 45 + 9\sqrt{21}, 23 + 5\sqrt{21}, 45 + 9\sqrt{21}, 179 + 39\sqrt{21}, 17 + 3\sqrt{21}, 155 + 33\sqrt{21}, 20 + 4\sqrt{21})$

Keine Konjugation zu erkennen.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$, $D(A) = \mathcal{P}_2$ und $(x^2, y^2, z^2) = (3 + \sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6}, 6 + 2\sqrt{6})$:

$(3+1\sqrt{6}, 81+33\sqrt{6}, 77+30\sqrt{6}, 59+24\sqrt{6}, 60+24\sqrt{6}, 49+20\sqrt{6}, 57+23\sqrt{6}, 66+26\sqrt{6}, 81+33\sqrt{6}, 6+2\sqrt{6}, 57+23\sqrt{6}, 171+69\sqrt{6}, 15+6\sqrt{6}, 59+24\sqrt{6}, 5+2\sqrt{6})$

$(3+1\sqrt{6}, 33+13\sqrt{6}, 57+23\sqrt{6}, 160+64\sqrt{6}, 66+26\sqrt{6}, 33+12\sqrt{6}, 80+32\sqrt{6}, 267+109\sqrt{6}, 125+50\sqrt{6}, 11+4\sqrt{6}, 81+33\sqrt{6}, 77+30\sqrt{6}, 9+3\sqrt{6}, 15+6\sqrt{6}, 6+2\sqrt{6})$

$(3+1\sqrt{6}, 54+22\sqrt{6}, 81+33\sqrt{6}, 267+109\sqrt{6}, 160+64\sqrt{6}, 33+12\sqrt{6}, 60+24\sqrt{6}, 271+110\sqrt{6}, 171+69\sqrt{6}, 7+2\sqrt{6}, 135+54\sqrt{6}, 114+46\sqrt{6}, 33+12\sqrt{6}, 33+13\sqrt{6}, 3+1\sqrt{6})$

$(3+1\sqrt{6}, 49+20\sqrt{6}, 196+80\sqrt{6}, 267+109\sqrt{6}, 160+64\sqrt{6}, 33+13\sqrt{6}, 153+61\sqrt{6}, 271+110\sqrt{6}, 171+69\sqrt{6}, 7+2\sqrt{6}, 54+22\sqrt{6}, 49+20\sqrt{6}, 33+13\sqrt{6}, 40+16\sqrt{6}, 3+1\sqrt{6})$

$(3+1\sqrt{6}, 49+20\sqrt{6}, 66+26\sqrt{6}, 171+69\sqrt{6}, 57+23\sqrt{6}, 33+13\sqrt{6}, 59+24\sqrt{6}, 196+80\sqrt{6}, 77+30\sqrt{6}, 9+3\sqrt{6}, 81+33\sqrt{6}, 66+26\sqrt{6}, 11+4\sqrt{6}, 15+6\sqrt{6}, 5+2\sqrt{6})$

$(5+2\sqrt{6}, 11+4\sqrt{6}, 57+23\sqrt{6}, 162+66\sqrt{6}, 40+16\sqrt{6}, 7+2\sqrt{6}, 114+46\sqrt{6}, 417+169\sqrt{6}, 125+50\sqrt{6}, 33+13\sqrt{6}, 153+61\sqrt{6}, 59+24\sqrt{6}, 7+2\sqrt{6}, 9+3\sqrt{6}, 6+2\sqrt{6})$

$(5+2\sqrt{6}, 11+4\sqrt{6}, 80+32\sqrt{6}, 77+30\sqrt{6}, 40+16\sqrt{6}, 7+2\sqrt{6}, 135+54\sqrt{6}, 177+72\sqrt{6}, 125+50\sqrt{6}, 33+12\sqrt{6}, 60+24\sqrt{6}, 59+24\sqrt{6}, 7+2\sqrt{6}, 20+8\sqrt{6}, 5+2\sqrt{6})$

$(5+2\sqrt{6}, 15+6\sqrt{6}, 40+16\sqrt{6}, 77+30\sqrt{6}, 15+6\sqrt{6}, 11+4\sqrt{6}, 77+30\sqrt{6}, 196+80\sqrt{6}, 59+24\sqrt{6}, 15+6\sqrt{6}, 59+24\sqrt{6}, 40+16\sqrt{6}, 5+2\sqrt{6}, 15+6\sqrt{6}, 11+4\sqrt{6})$

$(6+2\sqrt{6}, 9+3\sqrt{6}, 99+39\sqrt{6}, 66+26\sqrt{6}, 40+16\sqrt{6}, 7+2\sqrt{6}, 217+88\sqrt{6}, 196+80\sqrt{6}, 162+66\sqrt{6}, 40+16\sqrt{6}, 49+20\sqrt{6}, 57+23\sqrt{6}, 7+2\sqrt{6}, 27+11\sqrt{6}, 6+2\sqrt{6})$

$(6+2\sqrt{6}, 33+12\sqrt{6}, 103+42\sqrt{6}, 57+23\sqrt{6}, 15+6\sqrt{6}, 9+3\sqrt{6}, 57+23\sqrt{6}, 49+20\sqrt{6}, 27+11\sqrt{6}, 15+6\sqrt{6}, 27+11\sqrt{6}, 40+16\sqrt{6}, 6+2\sqrt{6}, 33+12\sqrt{6}, 9+3\sqrt{6})$

Keine Konjugation zu erkennen.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{33})$, $D(A) = \mathcal{P}_2$ und $(x^2, y^2, z^2) = (\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33}, \frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}, 6+\sqrt{21})$:

$\frac{1}{2}(7 + 1\sqrt{33}, 98 + 16\sqrt{33}, 225 + 39\sqrt{33}, 142 + 24\sqrt{33}, 108 + 18\sqrt{33}, 46 + 8\sqrt{33}, 144+24\sqrt{33}, 138+24\sqrt{33}, 132+22\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33}, 76+12\sqrt{33}, 135+23\sqrt{33}, 36+6\sqrt{33}, 98+16\sqrt{33}, 9+1\sqrt{33})$

$\frac{1}{2}(7+1\sqrt{33}, 46+8\sqrt{33}, 108+18\sqrt{33}, 164+28\sqrt{33}, 108+18\sqrt{33}, 29+5\sqrt{33}, 132+22\sqrt{33}, 259+45\sqrt{33}, 213+37\sqrt{33}, 36+6\sqrt{33}, 142+24\sqrt{33}, 213+37\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33}, 41+7\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33})$

$\frac{1}{2}(7+1\sqrt{33}, 46+8\sqrt{33}, 142+24\sqrt{33}, 259+45\sqrt{33}, 164+28\sqrt{33}, 29+5\sqrt{33}, 138+24\sqrt{33}, 369+63\sqrt{33}, 259+45\sqrt{33}, 21+3\sqrt{33}, 138+24\sqrt{33}, 142+24\sqrt{33}, 29+5\sqrt{33}, 46+8\sqrt{33}, 7+1\sqrt{33})$

$\frac{1}{2}(7+1\sqrt{33}, 98+16\sqrt{33}, 57+9\sqrt{33}, 259+45\sqrt{33}, 164+28\sqrt{33}, 46+8\sqrt{33}, 46+8\sqrt{33}, 369+63\sqrt{33}, 259+45\sqrt{33}, 21+3\sqrt{33}, 523+91\sqrt{33}, 506+88\sqrt{33}, 46+8\sqrt{33}, 57+9\sqrt{33}, 7+1\sqrt{33})$

$\frac{1}{2}(7+1\sqrt{33}, 57+9\sqrt{33}, 108+18\sqrt{33}, 259+45\sqrt{33}, 108+18\sqrt{33}, 46+8\sqrt{33}, 132+22\sqrt{33}, 464+80\sqrt{33}, 213+37\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33}, 142+24\sqrt{33}, 108+18\sqrt{33}, 36+6\sqrt{33}, 41+7\sqrt{33}, 9+1\sqrt{33})$

$\frac{1}{2}(9 + 1\sqrt{33}, 36 + 6\sqrt{33}, 339 + 59\sqrt{33}, 602 + 104\sqrt{33}, 108 + 18\sqrt{33}, 21 + 3\sqrt{33}, 319+55\sqrt{33}, 675+117\sqrt{33}, 142+24\sqrt{33}, 46+8\sqrt{33}, 144+24\sqrt{33}, 46+8\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33}, 21+3\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33})$

$\frac{1}{2}(9+1\sqrt{33}, 36+6\sqrt{33}, 132+22\sqrt{33}, 213+37\sqrt{33}, 116+20\sqrt{33}, 21+3\sqrt{33}, 138+24\sqrt{33}, 329+57\sqrt{33}, 213+37\sqrt{33}, 29+5\sqrt{33}, 138+24\sqrt{33}, 132+22\sqrt{33}, 21+3\sqrt{33}, 36+6\sqrt{33}, 9+1\sqrt{33})$

$\frac{1}{2}(9 + 1\sqrt{33}, 41 + 7\sqrt{33}, 602 + 104\sqrt{33}, 213 + 37\sqrt{33}, 116 + 20\sqrt{33}, 36 + 6\sqrt{33}, 675+117\sqrt{33}, 329+57\sqrt{33}, 213+37\sqrt{33}, 29+5\sqrt{33}, 36+6\sqrt{33}, 41+7\sqrt{33}, 36+6\sqrt{33}, 98+16\sqrt{33}, 9+1\sqrt{33})$

$\frac{1}{2}(12+2\sqrt{33}, 21+3\sqrt{33}, 98+16\sqrt{33}, 225+39\sqrt{33}, 57+9\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33}, 225+39\sqrt{33}, 725+125\sqrt{33}, 225+39\sqrt{33}, 57+9\sqrt{33}, 225+39\sqrt{33}, 98+16\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33}, 21+3\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33})$

$\frac{1}{2}(12+2\sqrt{33}, 29+5\sqrt{33}, 98+16\sqrt{33}, 135+23\sqrt{33}, 41+7\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33}, 135+23\sqrt{33}, 293+51\sqrt{33}, 135+23\sqrt{33}, 41+7\sqrt{33}, 135+23\sqrt{33}, 98+16\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33}, 29+5\sqrt{33}, 12+2\sqrt{33})$

Keine Konjugation zu erkennen.

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 49$, definierendem Polynom $t^3 - t^2 - 2t + 1$, $\rho = 2\cos(\pi/7)$, $D(A) = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_7$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2) = (\rho + \rho^2,\, 1 - 2\rho + 3\rho^2,\, 1 - 2\rho + 3\rho^2)$:

$(0+1\rho+1\rho^2,\ -17+30\rho+35\rho^2,\ -108+157\rho+197\rho^2,\ -103+149\rho+186\rho^2,\ -17+24\rho+32\rho^2,\ -17+24\rho+32\rho^2,\ -103+149\rho+186\rho^2,\ -108+157\rho+197\rho^2,\ -17+30\rho+35\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2,\ -5+7\rho+10\rho^2,\ -3+5\rho+6\rho^2,\ 1+4\rho+4\rho^2,\ -5+7\rho+10\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2)$

$(0+1\rho+1\rho^2,\ -12+21\rho+25\rho^2,\ -137+198\rho+247\rho^2,\ -39+61\rho+74\rho^2,\ -17+24\rho+32\rho^2,\ -12+20\rho+24\rho^2,\ -141+208\rho+260\rho^2,\ -47+72\rho+88\rho^2,\ -21+35\rho+42\rho^2,\ -1+4\rho+4\rho^2,\ 1+4\rho+4\rho^2,\ -5+7\rho+10\rho^2,\ -1+4\rho+4\rho^2,\ -12+21\rho+25\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2)$

$(0+1\rho+1\rho^2,\ -20+29\rho+37\rho^2,\ -56+81\rho+101\rho^2,\ -108+157\rho+197\rho^2,\ -68+100\rho+124\rho^2,\ -12+20\rho+24\rho^2,\ -39+61\rho+74\rho^2,\ -103+149\rho+186\rho^2,\ -64+97\rho+121\rho^2,\ 1+1\rho+2\rho^2,\ -23+33\rho+42\rho^2,\ -20+29\rho+37\rho^2,\ -12+20\rho+24\rho^2,\ -12+21\rho+25\rho^2,\ 0+1\rho+1\rho^2)$

$(0+1\rho+1\rho^2,\ -20+29\rho+37\rho^2,\ -56+81\rho+101\rho^2,\ -108+157\rho+197\rho^2,\ -68+100\rho+124\rho^2,\ -12+20\rho+24\rho^2,\ -39+61\rho+74\rho^2,\ -103+149\rho+186\rho^2,\ -64+97\rho+121\rho^2,\ 1+1\rho+2\rho^2,\ -23+33\rho+42\rho^2,\ -20+29\rho+37\rho^2,\ -12+20\rho+24\rho^2,\ -12+21\rho+25\rho^2,\ 0+1\rho+1\rho^2)$

$(0+1\rho+1\rho^2,\ -20+29\rho+37\rho^2,\ -17+30\rho+35\rho^2,\ -64+97\rho+121\rho^2,\ -17+24\rho+32\rho^2,\ -12+20\rho+24\rho^2,\ -17+24\rho+32\rho^2,\ -68+100\rho+124\rho^2,\ -17+30\rho+35\rho^2,\ -1+4\rho+4\rho^2,\ -28+40\rho+52\rho^2,\ -17+30\rho+35\rho^2,\ -1+4\rho+4\rho^2,\ -3+5\rho+6\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2)$

$(1+1\rho+2\rho^2,\ -5+7\rho+10\rho^2,\ -21+35\rho+42\rho^2,\ -23+33\rho+42\rho^2,\ -12+20\rho+24\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2,\ -17+30\rho+35\rho^2,\ -28+40\rho+52\rho^2,\ -23+33\rho+42\rho^2,\ -8+12\rho+16\rho^2,\ -17+30\rho+35\rho^2,\ -21+35\rho+42\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2,\ -5+7\rho+10\rho^2,\ 1+1\rho+2\rho^2)$

$(1+1\rho+2\rho^2,\ -1+4\rho+4\rho^2,\ -17+24\rho+32\rho^2,\ -20+29\rho+37\rho^2,\ -12+21\rho+25\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2,\ -33+50\rho+63\rho^2,\ -56+81\rho+101\rho^2,\ -47+72\rho+88\rho^2,\ -8+12\rho+16\rho^2,\ -17+30\rho+35\rho^2,\ -21+35\rho+42\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2,\ -5+7\rho+10\rho^2,\ 1+1\rho+2\rho^2)$

$(-1+2\rho+3\rho^2,\ -3+5\rho+6\rho^2,\ -8+12\rho+16\rho^2,\ -17+30\rho+35\rho^2,\ -3+5\rho+6\rho^2,\ -1+4\rho+4\rho^2,\ -17+30\rho+35\rho^2,\ -68+100\rho+124\rho^2,\ -17+24\rho+32\rho^2,\ -3+5\rho+6\rho^2,\ -17+24\rho+32\rho^2,\ -8+12\rho+16\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2,\ -3+5\rho+6\rho^2,\ -1+4\rho+4\rho^2)$

$(1+1\rho+2\rho^2,\ -1+4\rho+4\rho^2,\ -17+24\rho+32\rho^2,\ -20+29\rho+37\rho^2,\ -12+21\rho+25\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2,\ -33+50\rho+63\rho^2,\ -56+81\rho+101\rho^2,\ -47+72\rho+88\rho^2,\ -8+12\rho+16\rho^2,\ -17+30\rho+35\rho^2,\ -21+35\rho+42\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2,\ -5+7\rho+10\rho^2,\ 1+1\rho+2\rho^2)$

$(-1+2\rho+3\rho^2,\ -12+21\rho+25\rho^2,\ -39+56\rho+72\rho^2,\ -12+19\rho+23\rho^2,\ -3+5\rho+6\rho^2,\ -1+4\rho+4\rho^2,\ -12+19\rho+23\rho^2,\ -7+10\rho+13\rho^2,\ -5+7\rho+10\rho^2,\ -3+5\rho+6\rho^2,\ -5+7\rho+10\rho^2,\ -12+21\rho+25\rho^2,\ -1+2\rho+3\rho^2,\ -12+21\rho+25\rho^2,\ -1+4\rho+4\rho^2)$

Die dritte und die vierte bzw. die siebte und die neunte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 81$, definierendem Polynom $t^3 - 3t - 1$, $\rho = 2\cos(\pi/9)$, $D(A) = (1)$ und $(x^2, y^2, z^2) = (1+\rho+\rho^2, 1+2\rho+\rho^2, 1+2\rho+\rho^2)$:

$(1+1\rho+1\rho^2, 8+28\rho+16\rho^2, 13+34\rho+17\rho^2, 7+25\rho+14\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 7+25\rho+14\rho^2, 13+34\rho+17\rho^2, 8+28\rho+16\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2, 7+25\rho+14\rho^2, 17+49\rho+25\rho^2, 3+9\rho+6\rho^2, 7+25\rho+14\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

$(1+1\rho+1\rho^2, 5+9\rho+5\rho^2, 13+46\rho+25\rho^2, 19+57\rho+30\rho^2, 7+25\rho+14\rho^2, 4+8\rho+4\rho^2, 19+57\rho+30\rho^2, 29+94\rho+49\rho^2, 17+49\rho+25\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 9+18\rho+9\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 5+9\rho+5\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

$(1+1\rho+1\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 25+89\rho+49\rho^2, 37+129\rho+69\rho^2, 16+52\rho+28\rho^2, 4+8\rho+4\rho^2, 19+57\rho+30\rho^2, 31+109\rho+58\rho^2, 17+49\rho+25\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 7+25\rho+14\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 4+8\rho+4\rho^2, 5+9\rho+5\rho^2, 1+1\rho+1\rho^2)$

$(1+1\rho+1\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 25+89\rho+49\rho^2, 37+129\rho+69\rho^2, 16+52\rho+28\rho^2, 4+8\rho+4\rho^2, 19+57\rho+30\rho^2, 31+109\rho+58\rho^2, 17+49\rho+25\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 7+25\rho+14\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 4+8\rho+4\rho^2, 5+9\rho+5\rho^2, 1+1\rho+1\rho^2)$

$(1+1\rho+1\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 13+34\rho+17\rho^2, 17+49\rho+25\rho^2, 7+25\rho+14\rho^2, 4+8\rho+4\rho^2, 7+25\rho+14\rho^2, 16+52\rho+28\rho^2, 13+34\rho+17\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 8+28\rho+16\rho^2, 13+34\rho+17\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 3+9\rho+6\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 17+49\rho+25\rho^2, 37+129\rho+69\rho^2, 13+34\rho+17\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 7+25\rho+14\rho^2, 29+94\rho+49\rho^2, 8+28\rho+16\rho^2, 4+8\rho+4\rho^2, 19+57\rho+30\rho^2, 7+25\rho+14\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 17+49\rho+25\rho^2, 37+129\rho+69\rho^2, 13+34\rho+17\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 29+94\rho+49\rho^2, 91+313\rho+166\rho^2, 25+89\rho+49\rho^2, 5+9\rho+5\rho^2, 13+46\rho+25\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2, 3+9\rho+6\rho^2, 37+129\rho+69\rho^2, 29+94\rho+49\rho^2, 8+28\rho+16\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 29+94\rho+49\rho^2, 25+89\rho+49\rho^2, 13+34\rho+17\rho^2, 5+9\rho+5\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 3+9\rho+6\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 5+9\rho+5\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 25+89\rho+49\rho^2, 13+34\rho+17\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 13+46\rho+25\rho^2, 91+313\rho+166\rho^2, 37+129\rho+69\rho^2, 5+9\rho+5\rho^2, 29+94\rho+49\rho^2, 17+49\rho+25\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2, 5+9\rho+5\rho^2, 3+9\rho+6\rho^2, 13+34\rho+17\rho^2, 8+28\rho+16\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 5+17\rho+9\rho^2, 25+89\rho+49\rho^2, 29+94\rho+49\rho^2, 5+9\rho+5\rho^2, 29+94\rho+49\rho^2, 37+129\rho+69\rho^2, 3+5\rho+2\rho^2, 3+9\rho+6\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

Die dritte und die vierte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 148$, definierendem Polynom $t^3 - t^2 - 3t + 1$, $\rho \approx 2,1701$, $D(A) = (1)$ und $(x^2, y^2, z^2) = (\rho + \rho^2, \rho + \rho^2, 1 + 2\rho + \rho^2)$:

$(0+1\rho+1\rho^2, -6+21\rho+17\rho^2, -12+33\rho+29\rho^2, -6+21\rho+17\rho^2, -4+18\rho+14\rho^2, -3+8\rho+7\rho^2, -4+18\rho+14\rho^2, -7+18\rho+17\rho^2, -6+21\rho+17\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2, -4+18\rho+14\rho^2, -12+33\rho+29\rho^2, -3+8\rho+7\rho^2, -6+21\rho+17\rho^2, 0+1\rho+1\rho^2)$

$(0+1\rho+1\rho^2, -2+9\rho+7\rho^2, -20+56\rho+48\rho^2, -32+82\rho+70\rho^2, -7+18\rho+17\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -16+41\rho+35\rho^2, -28+73\rho+63\rho^2, -6+21\rho+17\rho^2, -2+5\rho+5\rho^2, -4+17\rho+15\rho^2, -2+9\rho+7\rho^2, 0+2\rho+2\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

$(0+1\rho+1\rho^2, -2+9\rho+7\rho^2, -6+21\rho+17\rho^2, -16+49\rho+41\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -4+18\rho+14\rho^2, -23+60\rho+51\rho^2, -12+33\rho+29\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -12+32\rho+28\rho^2, -10+25\rho+23\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -2+5\rho+5\rho^2, 0+1\rho+1\rho^2)$

$(0+1\rho+1\rho^2, -3+8\rho+7\rho^2, -32+82\rho+70\rho^2, -16+49\rho+41\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, -2+5\rho+5\rho^2, -28+73\rho+63\rho^2, -23+60\rho+51\rho^2, -12+33\rho+29\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -2+9\rho+7\rho^2, -3+8\rho+7\rho^2, -2+5\rho+5\rho^2, -4+10\rho+10\rho^2, 0+1\rho+1\rho^2)$

$(0+1\rho+1\rho^2, -4+10\rho+10\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, -10+25\rho+23\rho^2, -4+18\rho+14\rho^2, -2+5\rho+5\rho^2, -4+17\rho+15\rho^2, -12+32\rho+28\rho^2, -10+25\rho+23\rho^2, 0+2\rho+2\rho^2, -4+17\rho+15\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, -2+5\rho+5\rho^2, -4+10\rho+10\rho^2, 0+1\rho+1\rho^2)$

$(0+1\rho+1\rho^2, -2+5\rho+5\rho^2, -4+18\rho+14\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, -7+18\rho+17\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -10+25\rho+23\rho^2, -16+49\rho+41\rho^2, -16+49\rho+41\rho^2, -2+5\rho+5\rho^2, -6+21\rho+17\rho^2, -12+33\rho+29\rho^2, 0+2\rho+2\rho^2, -3+8\rho+7\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

$(0+1\rho+1\rho^2, -2+5\rho+5\rho^2, -10+25\rho+23\rho^2, -12+33\rho+29\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -12+32\rho+28\rho^2, -23+60\rho+51\rho^2, -16+49\rho+41\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -4+18\rho+14\rho^2, -6+21\rho+17\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -2+9\rho+7\rho^2, 0+1\rho+1\rho^2)$

$(0+1\rho+1\rho^2, -3+8\rho+7\rho^2, -32+82\rho+70\rho^2, -16+49\rho+41\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, -2+5\rho+5\rho^2, -28+73\rho+63\rho^2, -23+60\rho+51\rho^2, -12+33\rho+29\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -2+9\rho+7\rho^2, -3+8\rho+7\rho^2, -2+5\rho+5\rho^2, -4+10\rho+10\rho^2, 0+1\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, -15+38\rho+33\rho^2, -3+8\rho+7\rho^2, 0+2\rho+2\rho^2, -15+38\rho+33\rho^2, -32+82\rho+70\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, -3+8\rho+7\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, -4+10\rho+10\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, 0+2\rho+2\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, -15+38\rho+33\rho^2, -3+8\rho+7\rho^2, 0+2\rho+2\rho^2, -15+38\rho+33\rho^2, -32+82\rho+70\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, -3+8\rho+7\rho^2, -8+24\rho+20\rho^2, -4+10\rho+10\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2, 1+4\rho+3\rho^2, 0+2\rho+2\rho^2)$

Die vierte und die achte bzw. die neunte und die zehnte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 148$, definierendem Polynom $t^3 - t^2 - 3t + 1$, $\rho \approx 0,3111$, $D(A) = (1)$ und $(x^2, y^2, z^2) = (4 + \rho - \rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 42 + 9\rho - 13\rho^2)$:

$(4 + 1\rho - 1\rho^2, 412 + 88\rho - 128\rho^2, 385 + 82\rho - 119\rho^2, 1829 + 392\rho - 569\rho^2, 1572 + 337\rho - 489\rho^2, 378 + 81\rho - 117\rho^2, 378 + 81\rho - 117\rho^2, 1908 + 409\rho - 593\rho^2, 1665 + 356\rho - 517\rho^2, 17 + 4\rho - 5\rho^2, 385 + 82\rho - 119\rho^2, 494 + 105\rho - 153\rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 62 + 13\rho - 19\rho^2, 6 + 1\rho - 1\rho^2)$

$(4 + 1\rho - 1\rho^2, 385 + 82\rho - 119\rho^2, 3892 + 834\rho - 1210\rho^2, 2318 + 497\rho - 721\rho^2, 1492 + 320\rho - 464\rho^2, 378 + 81\rho - 117\rho^2, 3906 + 837\rho - 1215\rho^2, 2409 + 516\rho - 749\rho^2, 1572 + 337\rho - 489\rho^2, 17 + 4\rho - 5\rho^2, 42 + 9\rho - 13\rho^2, 49 + 10\rho - 15\rho^2, 42 + 9\rho - 13\rho^2, 84 + 18\rho - 26\rho^2, 6 + 1\rho - 1\rho^2)$

$(4 + 1\rho - 1\rho^2, 1572 + 337\rho - 489\rho^2, 1908 + 409\rho - 593\rho^2, 6612 + 1417\rho - 2057\rho^2, 6276 + 1344\rho - 1952\rho^2, 1492 + 320\rho - 464\rho^2, 1829 + 392\rho - 569\rho^2, 6949 + 1488\rho - 2161\rho^2, 6612 + 1417\rho - 2057\rho^2, 5 + 0\rho - 1\rho^2, 1829 + 392\rho - 569\rho^2, 1908 + 409\rho - 593\rho^2, 1492 + 320\rho - 464\rho^2, 1572 + 337\rho - 489\rho^2, 4 + 1\rho - 1\rho^2)$

$(4 + 1\rho - 1\rho^2, 1665 + 356\rho - 517\rho^2, 1648 + 352\rho - 512\rho^2, 6612 + 1417\rho - 2057\rho^2, 6276 + 1344\rho - 1952\rho^2, 1572 + 337\rho - 489\rho^2, 1572 + 337\rho - 489\rho^2, 6949 + 1488\rho - 2161\rho^2, 6612 + 1417\rho - 2057\rho^2, 5 + 0\rho - 1\rho^2, 2318 + 497\rho - 721\rho^2, 2409 + 516\rho - 749\rho^2, 1572 + 337\rho - 489\rho^2, 1648 + 352\rho - 512\rho^2, 4 + 1\rho - 1\rho^2)$

$(4 + 1\rho - 1\rho^2, 412 + 88\rho - 128\rho^2, 385 + 82\rho - 119\rho^2, 1829 + 392\rho - 569\rho^2, 1572 + 337\rho - 489\rho^2, 378 + 81\rho - 117\rho^2, 378 + 81\rho - 117\rho^2, 1908 + 409\rho - 593\rho^2, 1665 + 356\rho - 517\rho^2, 17 + 4\rho - 5\rho^2, 385 + 82\rho - 119\rho^2, 494 + 105\rho - 153\rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 62 + 13\rho - 19\rho^2, 6 + 1\rho - 1\rho^2)$

$(5 + 0\rho - 1\rho^2, 62 + 13\rho - 19\rho^2, 434 + 93\rho - 135\rho^2, 1946 + 417\rho - 605\rho^2, 1572 + 337\rho - 489\rho^2, 42 + 9\rho - 13\rho^2, 378 + 81\rho - 117\rho^2, 1908 + 409\rho - 593\rho^2, 1572 + 337\rho - 489\rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 412 + 88\rho - 128\rho^2, 385 + 82\rho - 119\rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 49 + 10\rho - 15\rho^2, 5 + 0\rho - 1\rho^2)$

$(5 + 0\rho - 1\rho^2, 49 + 10\rho - 15\rho^2, 385 + 82\rho - 119\rho^2, 1829 + 392\rho - 569\rho^2, 1492 + 320\rho - 464\rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 412 + 88\rho - 128\rho^2, 2200 + 472\rho - 684\rho^2, 1829 + 392\rho - 569\rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 412 + 88\rho - 128\rho^2, 385 + 82\rho - 119\rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 49 + 10\rho - 15\rho^2, 5 + 0\rho - 1\rho^2)$

$(8 + 2\rho - 2\rho^2, 84 + 18\rho - 26\rho^2, 641 + 138\rho - 199\rho^2, 536 + 114\rho - 166\rho^2, 49 + 10\rho - 15\rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 385 + 82\rho - 119\rho^2, 412 + 88\rho - 128\rho^2, 49 + 10\rho - 15\rho^2, 17 + 4\rho - 5\rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 17 + 4\rho - 5\rho^2, 17 + 4\rho - 5\rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 17 + 4\rho - 5\rho^2)$

$(5 + 0\rho - 1\rho^2, 42 + 9\rho - 13\rho^2, 378 + 81\rho - 117\rho^2, 1648 + 352\rho - 512\rho^2, 1665 + 356\rho - 517\rho^2, 42 + 9\rho - 13\rho^2, 494 + 105\rho - 153\rho^2, 2409 + 516\rho - 749\rho^2, 2476 + 530\rho - 770\rho^2, 40 + 8\rho - 12\rho^2, 378 + 81\rho - 117\rho^2, 434 + 93\rho - 135\rho^2, 42 + 9\rho - 13\rho^2, 62 + 13\rho - 19\rho^2, 5 + 0\rho - 1\rho^2)$

$(8 + 2\rho - 2\rho^2, 120 + 25\rho - 37\rho^2, 62 + 13\rho - 19\rho^2, 42 + 9\rho - 13\rho^2, 42 + 9\rho - 13\rho^2, 42 + 9\rho - 13\rho^2, 42 + 9\rho - 13\rho^2, 62 + 13\rho - 19\rho^2, 120 + 25\rho - 37\rho^2, 17 + 4\rho - 5\rho^2, 124 + 26\rho - 38\rho^2, 597 + 128\rho - 185\rho^2, 17 + 4\rho - 5\rho^2, 124 + 26\rho - 38\rho^2, 17 + 4\rho - 5\rho^2)$

Die erste und die fünfte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 148$, definierendem Polynom $t^3 - t^2 - 3t + 1$, $\rho \approx -1,4182$, $D(A) = (1)$ und $(x^2, y^2, z^2) = (1-2\rho+\rho^2, 2-3\rho+\rho^2, 2-3\rho+\rho^2)$:

$(1-2\rho+1\rho^2, 16-46\rho+18\rho^2, 14-51\rho+21\rho^2, 14-39\rho+15\rho^2, 9-28\rho+11\rho^2, 9-28\rho+11\rho^2, 14-39\rho+15\rho^2, 14-51\rho+21\rho^2, 16-46\rho+18\rho^2, 2-3\rho+1\rho^2, 14-39\rho+15\rho^2, 25-82\rho+33\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 14-39\rho+15\rho^2, 2-3\rho+1\rho^2)$

$(1-2\rho+1\rho^2, 5-16\rho+7\rho^2, 24-87\rho+35\rho^2, 24-88\rho+36\rho^2, 14-39\rho+15\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 32-103\rho+41\rho^2, 37-136\rho+55\rho^2, 20-71\rho+29\rho^2, 2-7\rho+3\rho^2, 9-22\rho+9\rho^2, 8-23\rho+9\rho^2, 2-7\rho+3\rho^2, 5-16\rho+7\rho^2, 2-3\rho+1\rho^2)$

$(1-2\rho+1\rho^2, 9-28\rho+11\rho^2, 37-136\rho+55\rho^2, 57-202\rho+81\rho^2, 24-88\rho+36\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 24-88\rho+36\rho^2, 48-174\rho+70\rho^2, 25-82\rho+33\rho^2, 4-6\rho+2\rho^2, 12-40\rho+16\rho^2, 9-28\rho+11\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 5-16\rho+7\rho^2, 1-2\rho+1\rho^2)$

$(1-2\rho+1\rho^2, 9-28\rho+11\rho^2, 37-136\rho+55\rho^2, 57-202\rho+81\rho^2, 24-88\rho+36\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 24-88\rho+36\rho^2, 48-174\rho+70\rho^2, 25-82\rho+33\rho^2, 4-6\rho+2\rho^2, 12-40\rho+16\rho^2, 9-28\rho+11\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 5-16\rho+7\rho^2, 1-2\rho+1\rho^2)$

$(1-2\rho+1\rho^2, 9-28\rho+11\rho^2, 14-51\rho+21\rho^2, 25-82\rho+33\rho^2, 14-39\rho+15\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 14-39\rho+15\rho^2, 24-88\rho+36\rho^2, 14-51\rho+21\rho^2, 2-7\rho+3\rho^2, 16-46\rho+18\rho^2, 14-51\rho+21\rho^2, 2-7\rho+3\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 2-3\rho+1\rho^2)$

$(2-3\rho+1\rho^2, 8-23\rho+9\rho^2, 20-71\rho+29\rho^2, 14-51\rho+21\rho^2, 12-40\rho+16\rho^2, 4-6\rho+2\rho^2, 12-40\rho+16\rho^2, 16-46\rho+18\rho^2, 14-51\rho+21\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 12-40\rho+16\rho^2, 20-71\rho+29\rho^2, 4-6\rho+2\rho^2, 8-23\rho+9\rho^2, 2-3\rho+1\rho^2)$

$(2-3\rho+1\rho^2, 2-7\rho+3\rho^2, 20-71\rho+29\rho^2, 14-51\rho+21\rho^2, 12-40\rho+16\rho^2, 4-6\rho+2\rho^2, 37-136\rho+55\rho^2, 37-136\rho+55\rho^2, 38-131\rho+53\rho^2, 5-16\rho+7\rho^2, 9-28\rho+11\rho^2, 14-39\rho+15\rho^2, 4-6\rho+2\rho^2, 8-23\rho+9\rho^2, 2-3\rho+1\rho^2)$

$(2-3\rho+1\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 12-40\rho+16\rho^2, 14-51\rho+21\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 2-7\rho+3\rho^2, 14-51\rho+21\rho^2, 24-88\rho+36\rho^2, 14-39\rho+15\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 14-39\rho+15\rho^2, 12-40\rho+16\rho^2, 2-3\rho+1\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 2-7\rho+3\rho^2)$

$(2-3\rho+1\rho^2, 2-7\rho+3\rho^2, 20-71\rho+29\rho^2, 14-51\rho+21\rho^2, 12-40\rho+16\rho^2, 4-6\rho+2\rho^2, 37-136\rho+55\rho^2, 37-136\rho+55\rho^2, 38-131\rho+53\rho^2, 5-16\rho+7\rho^2, 9-28\rho+11\rho^2, 14-39\rho+15\rho^2, 4-6\rho+2\rho^2, 8-23\rho+9\rho^2, 2-3\rho+1\rho^2)$

$(2-3\rho+1\rho^2, 5-16\rho+7\rho^2, 33-108\rho+43\rho^2, 24-87\rho+35\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 2-7\rho+3\rho^2, 24-87\rho+35\rho^2, 24-88\rho+36\rho^2, 8-23\rho+9\rho^2, 4-14\rho+6\rho^2, 8-23\rho+9\rho^2, 5-16\rho+7\rho^2, 2-3\rho+1\rho^2, 5-16\rho+7\rho^2, 2-7\rho+3\rho^2)$

Die dritte und die vierte bzw. die siebte und die neunte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 229$, definierendem Polynom $t^3 - 4t - 1$, $\rho \approx 2,1149$, $D(A) = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_2'$ und $(x^2, y^2, z^2) = (2+\rho, 4+16\rho+8\rho^2, 4+17\rho+8\rho^2)$:

$(2 + 1\rho + 0\rho^2, 36 + 160\rho + 76\rho^2, 36 + 154\rho + 73\rho^2, 288 + 1288\rho + 609\rho^2, 266 + 1185\rho + 560\rho^2, 36 + 153\rho + 72\rho^2, 36 + 153\rho + 72\rho^2, 298 + 1321\rho + 624\rho^2, 276 + 1220\rho + 577\rho^2, 4 + 4\rho + 1\rho^2, 36 + 154\rho + 73\rho^2, 40 + 177\rho + 84\rho^2, 4 + 16\rho + 8\rho^2, 5 + 21\rho + 10\rho^2, 3 + 1\rho + 0\rho^2)$

$(2 + 1\rho + 0\rho^2, 36 + 154\rho + 73\rho^2, 334 + 1481\rho + 700\rho^2, 331 + 1473\rho + 696\rho^2, 260 + 1152\rho + 544\rho^2, 36 + 153\rho + 72\rho^2, 333 + 1485\rho + 702\rho^2, 340 + 1508\rho + 713\rho^2, 266 + 1185\rho + 560\rho^2, 4 + 4\rho + 1\rho^2, 4 + 17\rho + 8\rho^2, 4 + 18\rho + 9\rho^2, 4 + 17\rho + 8\rho^2, 6 + 25\rho + 12\rho^2, 3 + 1\rho + 0\rho^2)$

$(2 + 1\rho + 0\rho^2, 266 + 1185\rho + 560\rho^2, 298 + 1321\rho + 624\rho^2, 1090 + 4873\rho + 2304\rho^2, 1060 + 4736\rho + 2240\rho^2, 260 + 1152\rho + 544\rho^2, 288 + 1288\rho + 609\rho^2, 1120 + 5008\rho + 2369\rho^2, 1090 + 4873\rho + 2304\rho^2, 0 + 0\rho + 1\rho^2, 288 + 1288\rho + 609\rho^2, 298 + 1321\rho + 624\rho^2, 260 + 1152\rho + 544\rho^2, 266 + 1185\rho + 560\rho^2, 2 + 1\rho + 0\rho^2)$

$(2 + 1\rho + 0\rho^2, 276 + 1220\rho + 577\rho^2, 272 + 1216\rho + 576\rho^2, 1090 + 4873\rho + 2304\rho^2, 1060 + 4736\rho + 2240\rho^2, 266 + 1185\rho + 560\rho^2, 266 + 1185\rho + 560\rho^2, 1120 + 5008\rho + 2369\rho^2, 1090 + 4873\rho + 2304\rho^2, 0 + 0\rho + 1\rho^2, 331 + 1473\rho + 696\rho^2, 340 + 1508\rho + 713\rho^2, 266 + 1185\rho + 560\rho^2, 272 + 1216\rho + 576\rho^2, 2 + 1\rho + 0\rho^2)$

$(2 + 1\rho + 0\rho^2, 36 + 160\rho + 76\rho^2, 36 + 154\rho + 73\rho^2, 288 + 1288\rho + 609\rho^2, 266 + 1185\rho + 560\rho^2, 36 + 153\rho + 72\rho^2, 36 + 153\rho + 72\rho^2, 298 + 1321\rho + 624\rho^2, 276 + 1220\rho + 577\rho^2, 4 + 4\rho + 1\rho^2, 36 + 154\rho + 73\rho^2, 40 + 177\rho + 84\rho^2, 4 + 16\rho + 8\rho^2, 5 + 21\rho + 10\rho^2, 3 + 1\rho + 0\rho^2)$

$(0 + 0\rho + 1\rho^2, 5 + 21\rho + 10\rho^2, 37 + 165\rho + 78\rho^2, 299 + 1329\rho + 628\rho^2, 266 + 1185\rho + 560\rho^2, 4 + 17\rho + 8\rho^2, 36 + 153\rho + 72\rho^2, 298 + 1321\rho + 624\rho^2, 266 + 1185\rho + 560\rho^2, 4 + 8\rho + 4\rho^2, 36 + 160\rho + 76\rho^2, 36 + 154\rho + 73\rho^2, 4 + 16\rho + 8\rho^2, 4 + 18\rho + 9\rho^2, 0 + 0\rho + 1\rho^2)$

$(0 + 0\rho + 1\rho^2, 4 + 18\rho + 9\rho^2, 36 + 154\rho + 73\rho^2, 288 + 1288\rho + 609\rho^2, 258 + 1151\rho + 545\rho^2, 4 + 16\rho + 8\rho^2, 36 + 160\rho + 76\rho^2, 324 + 1432\rho + 676\rho^2, 4 + 8\rho + 4\rho^2, 36 + 160\rho + 76\rho^2, 36 + 154\rho + 73\rho^2, 4 + 16\rho + 8\rho^2, 4 + 18\rho + 9\rho^2, 0 + 0\rho + 1\rho^2)$

$(4 + 1\rho + 0\rho^2, 6 + 25\rho + 12\rho^2, 48 + 206\rho + 97\rho^2, 42 + 185\rho + 88\rho^2, 4 + 18\rho + 9\rho^2, 4 + 16\rho + 8\rho^2, 36 + 154\rho + 73\rho^2, 36 + 160\rho + 76\rho^2, 4 + 18\rho + 9\rho^2, 4 + 4\rho + 1\rho^2, 4 + 8\rho + 4\rho^2, 4 + 4\rho + 1\rho^2, 4 + 4\rho + 1\rho^2, 4 + 8\rho + 4\rho^2, 4 + 4\rho + 1\rho^2)$

$(0 + 0\rho + 1\rho^2, 4 + 17\rho + 8\rho^2, 36 + 153\rho + 72\rho^2, 272 + 1216\rho + 576\rho^2, 276 + 1220\rho + 577\rho^2, 4 + 17\rho + 8\rho^2, 40 + 177\rho + 84\rho^2, 340 + 1508\rho + 713\rho^2, 340 + 1521\rho + 720\rho^2, 4 + 8\rho + 4\rho^2, 36 + 153\rho + 72\rho^2, 37 + 165\rho + 78\rho^2, 4 + 17\rho + 8\rho^2, 5 + 21\rho + 10\rho^2, 0 + 0\rho + 1\rho^2)$

$(4 + 1\rho + 0\rho^2, 5 + 21\rho + 10\rho^2, 6 + 16\rho + 8\rho^2, 4 + 17\rho + 8\rho^2, 6 + 16\rho + 8\rho^2, 4 + 17\rho + 8\rho^2, 5 + 21\rho + 10\rho^2, 6 + 16\rho + 8\rho^2, 4 + 17\rho + 8\rho^2, 5 + 21\rho + 10\rho^2, 7 + 31\rho + 15\rho^2, 12 + 52\rho + 25\rho^2, 4 + 4\rho + 1\rho^2, 4 + 4\rho + 1\rho^2, 4 + 4\rho + 1\rho^2)$

Die erste und die fünfte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 229$, definierendem Polynom $t^3 - 4t - 1$, $\rho \approx -0,2541$, $D(A) = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_2'$ und $(x^2, y^2, z^2) = (5-\rho^2, 13+\rho-3\rho^2, 16+\rho-4\rho^2)$:

$(5+0\rho-1\rho^2, 188+12\rho-47\rho^2, 1461+94\rho-371\rho^2, 2137+138\rho-543\rho^2, 270+17\rho-68\rho^2, 142+9\rho-36\rho^2, 1184+76\rho-300\rho^2, 1875+121\rho-476\rho^2, 248+16\rho-63\rho^2, 16+1\rho-4\rho^2, 60+4\rho-15\rho^2, 19+1\rho-4\rho^2, 25+1\rho-6\rho^2, 28+2\rho-7\rho^2, 13+1\rho-3\rho^2)$

$(5+0\rho-1\rho^2, 142+9\rho-36\rho^2, 564+36\rho-143\rho^2, 144+9\rho-36\rho^2, 144+9\rho-36\rho^2, 115+7\rho-29\rho^2, 532+34\rho-135\rho^2, 156+10\rho-39\rho^2, 201+13\rho-51\rho^2, 19+1\rho-4\rho^2, 28+2\rho-7\rho^2, 201+13\rho-51\rho^2, 16+1\rho-4\rho^2, 248+16\rho-63\rho^2, 25+1\rho-6\rho^2)$

$(5+0\rho-1\rho^2, 142+9\rho-36\rho^2, 270+17\rho-68\rho^2, 681+44\rho-173\rho^2, 552+36\rho-140\rho^2, 115+7\rho-29\rho^2, 248+16\rho-63\rho^2, 813+53\rho-206\rho^2, 681+44\rho-173\rho^2, 9+1\rho-2\rho^2, 248+16\rho-63\rho^2, 270+17\rho-68\rho^2, 115+7\rho-29\rho^2, 142+9\rho-36\rho^2, 5+0\rho-1\rho^2)$

$(5+0\rho-1\rho^2, 188+12\rho-47\rho^2, 163+11\rho-41\rho^2, 681+44\rho-173\rho^2, 552+36\rho-140\rho^2, 142+9\rho-36\rho^2, 142+9\rho-36\rho^2, 813+53\rho-206\rho^2, 681+44\rho-173\rho^2, 9+1\rho-2\rho^2, 532+34\rho-135\rho^2, 564+36\rho-143\rho^2, 142+9\rho-36\rho^2, 163+11\rho-41\rho^2, 5+0\rho-1\rho^2)$

$(5+0\rho-1\rho^2, 188+12\rho-47\rho^2, 1461+94\rho-371\rho^2, 2137+138\rho-543\rho^2, 270+17\rho-68\rho^2, 142+9\rho-36\rho^2, 1184+76\rho-300\rho^2, 1875+121\rho-476\rho^2, 248+16\rho-63\rho^2, 16+1\rho-4\rho^2, 60+4\rho-15\rho^2, 19+1\rho-4\rho^2, 25+1\rho-6\rho^2, 28+2\rho-7\rho^2, 13+1\rho-3\rho^2)$

$(9+1\rho-2\rho^2, 60+4\rho-15\rho^2, 248+16\rho-63\rho^2, 344+22\rho-87\rho^2, 142+9\rho-36\rho^2, 16+1\rho-4\rho^2, 144+9\rho-36\rho^2, 270+17\rho-68\rho^2, 142+9\rho-36\rho^2, 64+4\rho-16\rho^2, 201+13\rho-51\rho^2, 156+10\rho-39\rho^2, 13+1\rho-3\rho^2, 28+2\rho-7\rho^2, 9+1\rho-2\rho^2)$

$(9+1\rho-2\rho^2, 28+2\rho-7\rho^2, 156+10\rho-39\rho^2, 248+16\rho-63\rho^2, 115+7\rho-29\rho^2, 13+1\rho-3\rho^2, 201+13\rho-51\rho^2, 431+27\rho-109\rho^2, 248+16\rho-63\rho^2, 64+4\rho-16\rho^2, 201+13\rho-51\rho^2, 156+10\rho-39\rho^2, 13+1\rho-3\rho^2, 28+2\rho-7\rho^2, 9+1\rho-2\rho^2)$

$(13+1\rho-3\rho^2, 156+10\rho-39\rho^2, 201+13\rho-51\rho^2, 431+27\rho-109\rho^2, 28+2\rho-7\rho^2, 25+1\rho-6\rho^2, 64+4\rho-16\rho^2, 201+13\rho-51\rho^2, 25+1\rho-6\rho^2, 25+1\rho-6\rho^2, 156+10\rho-39\rho^2, 64+4\rho-16\rho^2, 13+1\rho-3\rho^2, 25+1\rho-6\rho^2, 28+2\rho-7\rho^2)$

$(9+1\rho-2\rho^2, 16+1\rho-4\rho^2, 144+9\rho-36\rho^2, 564+36\rho-143\rho^2, 163+11\rho-41\rho^2, 16+1\rho-4\rho^2, 380+25\rho-96\rho^2, 1783+115\rho-453\rho^2, 564+36\rho-143\rho^2, 64+4\rho-16\rho^2, 380+25\rho-96\rho^2, 144+9\rho-36\rho^2, 16+1\rho-4\rho^2, 16+1\rho-4\rho^2, 9+1\rho-2\rho^2)$

$(16+1\rho-4\rho^2, 115+7\rho-29\rho^2, 188+12\rho-47\rho^2, 60+4\rho-15\rho^2, 25+1\rho-6\rho^2, 16+1\rho-4\rho^2, 60+4\rho-15\rho^2, 45+2\rho-11\rho^2, 60+4\rho-15\rho^2, 25+1\rho-6\rho^2, 60+4\rho-15\rho^2, 188+12\rho-47\rho^2, 16+1\rho-4\rho^2, 115+7\rho-29\rho^2, 16+1\rho-4\rho^2)$

Die erste und die fünfte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 229$, definierendem Polynom $t^3 - 4t - 1$, $\rho \approx -1,8608$, $D(A) = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_2'$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2) = (-2\rho+\rho^2,\, -2\rho+\rho^2,\, 1-2\rho+\rho^2)$:

$(0-2\rho+1\rho^2,\, -6-31\rho+16\rho^2,\, -12-46\rho+25\rho^2,\, -6-31\rho+16\rho^2,\, -3-19\rho+10\rho^2,\, -4-15\rho+8\rho^2,\, -5-29\rho+15\rho^2,\, -11-38\rho+21\rho^2,\, -6-31\rho+16\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2,\, -5-29\rho+15\rho^2,\, -12-46\rho+25\rho^2,\, -4-15\rho+8\rho^2,\, -6-31\rho+16\rho^2,\, 0-2\rho+1\rho^2)$

$(0-2\rho+1\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, -11-39\rho+21\rho^2,\, -23-83\rho+45\rho^2,\, -6-31\rho+16\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -15-63\rho+34\rho^2,\, -52-180\rho+97\rho^2,\, -20-76\rho+41\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -7-36\rho+19\rho^2,\, -5-23\rho+12\rho^2,\, -1-5\rho+3\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2)$

$(0-2\rho+1\rho^2,\, -3-19\rho+10\rho^2,\, -32-111\rho+60\rho^2,\, -56-194\rho+105\rho^2,\, -16-60\rho+32\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -17-59\rho+32\rho^2,\, -36-135\rho+72\rho^2,\, -12-46\rho+25\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, -11-39\rho+21\rho^2,\, -3-19\rho+10\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, 0-2\rho+1\rho^2)$

$(0-2\rho+1\rho^2,\, -4-15\rho+8\rho^2,\, -35-123\rho+66\rho^2,\, -32-122\rho+65\rho^2,\, -12-44\rho+24\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -23-83\rho+45\rho^2,\, -32-111\rho+60\rho^2,\, -12-46\rho+25\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, -5-23\rho+12\rho^2,\, -4-15\rho+8\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -3-11\rho+6\rho^2,\, 0-2\rho+1\rho^2)$

$(0-2\rho+1\rho^2,\, -3-11\rho+6\rho^2,\, -8-32\rho+17\rho^2,\, -17-59\rho+32\rho^2,\, -5-29\rho+15\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -7-36\rho+19\rho^2,\, -29-101\rho+55\rho^2,\, -17-59\rho+32\rho^2,\, -1-5\rho+3\rho^2,\, -7-36\rho+19\rho^2,\, -8-32\rho+17\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -3-11\rho+6\rho^2,\, 0-2\rho+1\rho^2)$

$(0-2\rho+1\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, -11-39\rho+21\rho^2,\, -23-83\rho+45\rho^2,\, -6-31\rho+16\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -15-63\rho+34\rho^2,\, -52-180\rho+97\rho^2,\, -20-76\rho+41\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -7-36\rho+19\rho^2,\, -5-23\rho+12\rho^2,\, -1-5\rho+3\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2)$

$(0-2\rho+1\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, -3-19\rho+10\rho^2,\, -12-46\rho+25\rho^2,\, -16-60\rho+32\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -11-39\rho+21\rho^2,\, -36-135\rho+72\rho^2,\, -56-194\rho+105\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, -17-59\rho+32\rho^2,\, -32-111\rho+60\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -3-19\rho+10\rho^2,\, 0-2\rho+1\rho^2)$

$(0-2\rho+1\rho^2,\, -4-15\rho+8\rho^2,\, -35-123\rho+66\rho^2,\, -32-122\rho+65\rho^2,\, -12-44\rho+24\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -23-83\rho+45\rho^2,\, -32-111\rho+60\rho^2,\, -12-46\rho+25\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, -5-23\rho+12\rho^2,\, -4-15\rho+8\rho^2,\, -2-7\rho+4\rho^2,\, -3-11\rho+6\rho^2,\, 0-2\rho+1\rho^2)$

$(1-2\rho+1\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, -4-15\rho+8\rho^2,\, -11-38\rho+21\rho^2,\, -12-44\rho+24\rho^2,\, -1-5\rho+3\rho^2,\, -8-32\rho+17\rho^2,\, -35-123\rho+66\rho^2,\, -47-166\rho+89\rho^2,\, -3-11\rho+6\rho^2,\, -20-76\rho+41\rho^2,\, -36-135\rho+72\rho^2,\, -1-5\rho+3\rho^2,\, -4-15\rho+8\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2)$

$(1-2\rho+1\rho^2,\, 0-7\rho+4\rho^2,\, -4-15\rho+8\rho^2,\, -11-38\rho+21\rho^2,\, -12-44\rho+24\rho^2,\, -1-5\rho+3\rho^2,\, -8-32\rho+17\rho^2,\, -35-123\rho+66\rho^2,\, -47-166\rho+89\rho^2,\, -3-11\rho+6\rho^2,\, -20-76\rho+41\rho^2,\, -36-135\rho+72\rho^2,\, -1-5\rho+3\rho^2,\, -4-15\rho+8\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2)$

Die zweite und die sechste bzw. die vierte und die achte bzw. die neunte und die zehnte Gruppe sind konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 725$, definierendem Polynom $t^4 - t^3 - 3t^2 + t + 1$, $\rho \approx -1,3557$, $D(A) = \mathcal{P}_2$ und $(x^2, y^2, z^2) = (\rho + 2\rho^2 - \rho^3, -1 - \rho + 5\rho^2 - 2\rho^3, -1 - \rho + 5\rho^2 - 2\rho^3)$:

$(0+1\rho+2\rho^2-1\rho^3, -17-5\rho+61\rho^2-26\rho^3, -120-35\rho+390\rho^2-165\rho^3, -118-31\rho+377\rho^2-160\rho^3, -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3, -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3, -118-31\rho+377\rho^2-160\rho^3, -120-35\rho+390\rho^2-165\rho^3, -17-5\rho+61\rho^2-26\rho^3, -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3, -4-1\rho+14\rho^2-6\rho^3, -2+1\rho+9\rho^2-4\rho^3, 0+2\rho+6\rho^2-3\rho^3, -4-1\rho+14\rho^2-6\rho^3, -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3)$

$(0+1\rho+2\rho^2-1\rho^3, -17-5\rho+61\rho^2-26\rho^3, -226-59\rho+725\rho^2-308\rho^3, -80-23\rho+266\rho^2-113\rho^3, -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3, -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3, -212-58\rho+686\rho^2-291\rho^3, -84-20\rho+272\rho^2-116\rho^3, -17-5\rho+61\rho^2-26\rho^3, -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3, -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3, -2+1\rho+9\rho^2-4\rho^3, 0+2\rho+6\rho^2-3\rho^3, -8-4\rho+29\rho^2-12\rho^3, -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3)$

$(0+1\rho+2\rho^2-1\rho^3, -24-7\rho+78\rho^2-33\rho^3, -56-15\rho+182\rho^2-77\rho^3, -120-35\rho+390\rho^2-165\rho^3, -84-20\rho+272\rho^2-116\rho^3, -16-4\rho+56\rho^2-24\rho^3, -42-11\rho+141\rho^2-60\rho^3, -118-31\rho+377\rho^2-160\rho^3, -80-23\rho+266\rho^2-113\rho^3, 2-3\rho+1\rho^2+0\rho^3, -26-7\rho+85\rho^2-36\rho^3, -24-7\rho+78\rho^2-33\rho^3, -16-4\rho+56\rho^2-24\rho^3, -16-3\rho+58\rho^2-25\rho^3, 0+1\rho+2\rho^2-1\rho^3)$

$(0+1\rho+2\rho^2-1\rho^3, -24-7\rho+78\rho^2-33\rho^3, -56-15\rho+182\rho^2-77\rho^3, -120-35\rho+390\rho^2-165\rho^3, -84-20\rho+272\rho^2-116\rho^3, -16-4\rho+56\rho^2-24\rho^3, -42-11\rho+141\rho^2-60\rho^3, -118-31\rho+377\rho^2-160\rho^3, -80-23\rho+266\rho^2-113\rho^3, 2-3\rho+1\rho^2+0\rho^3, -26-7\rho+85\rho^2-36\rho^3, -24-7\rho+78\rho^2-33\rho^3, -16-4\rho+56\rho^2-24\rho^3, -16-3\rho+58\rho^2-25\rho^3, 0+1\rho+2\rho^2-1\rho^3)$

$(0+1\rho+2\rho^2-1\rho^3, -17-5\rho+61\rho^2-26\rho^3, -84-20\rho+272\rho^2-116\rho^3, -212-58\rho+686\rho^2-291\rho^3, -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3, -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3, -80-23\rho+266\rho^2-113\rho^3, -226-59\rho+725\rho^2-308\rho^3, -17-5\rho+61\rho^2-26\rho^3, -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3, -8-4\rho+29\rho^2-12\rho^3, -2+1\rho+9\rho^2-4\rho^3, 0+2\rho+6\rho^2-3\rho^3, -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3, -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3)$

$(2-3\rho+1\rho^2+0\rho^3, -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3, -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3, -42-11\rho+141\rho^2-60\rho^3, -16-4\rho+56\rho^2-24\rho^3, -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3, -29-5\rho+97\rho^2-42\rho^3, -96-28\rho+312\rho^2-132\rho^3, -42-11\rho+141\rho^2-60\rho^3, -4-4\rho+20\rho^2-8\rho^3, -29-5\rho+97\rho^2-42\rho^3, -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3, -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3, -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3, 2-3\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

$(2-3\rho+1\rho^2+0\rho^3, -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3, -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3, -24-7\rho+78\rho^2-33\rho^3, -16-3\rho+58\rho^2-25\rho^3, -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3, -29-5\rho+97\rho^2-42\rho^3, -56-15\rho+182\rho^2-77\rho^3, -48-14\rho+158\rho^2-67\rho^3, -4-4\rho+20\rho^2-8\rho^3, -17-5\rho+61\rho^2-26\rho^3, -20-5\rho+70\rho^2-30\rho^3, -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3, -4-1\rho+14\rho^2-6\rho^3, 2-3\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

$(-1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3, -2+1\rho+9\rho^2-4\rho^3, -4-4\rho+20\rho^2-8\rho^3, -17-5\rho+61\rho^2-26\rho^3, -2+1\rho+9\rho^2-4\rho^3, -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3, -17-5\rho+61\rho^2-26\rho^3, -84-20\rho+272\rho^2-116\rho^3, -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3, -2+1\rho+9\rho^2-4\rho^3, -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3, -4-4\rho+20\rho^2-8\rho^3, -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3, -2+1\rho+9\rho^2-4\rho^3, -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3)$

$(2-3\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3,\ -17-5\rho+55\rho^2-23\rho^3,\ -24-7\rho+78\rho^2-33\rho^3,\ -16-3\rho+58\rho^2-25\rho^3,\ -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ -29-5\rho+97\rho^2-42\rho^3,\ -56-15\rho+182\rho^2-77\rho^3,\ -48-14\rho+158\rho^2-67\rho^3,\ -4-4\rho+20\rho^2-8\rho^3,\ -17-5\rho+61\rho^2-26\rho^3,\ -20-5\rho+70\rho^2-30\rho^3,\ -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ -4-1\rho+14\rho^2-6\rho^3,\ 2-3\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

$(-1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ -16-3\rho+58\rho^2-25\rho^3,\ -40-10\rho+130\rho^2-55\rho^3,\ -8-4\rho+29\rho^2-12\rho^3,\ -2+1\rho+9\rho^2-4\rho^3,\ -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3,\ -8-4\rho+29\rho^2-12\rho^3,\ -1-1\rho+12\rho^2-5\rho^3,\ -4-1\rho+14\rho^2-6\rho^3,\ -2+1\rho+9\rho^2-4\rho^3,\ -4-1\rho+14\rho^2-6\rho^3,\ -16-3\rho+58\rho^2-25\rho^3,\ -1-1\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ -16-3\rho+58\rho^2-25\rho^3,\ -1-1\rho+7\rho^2-3\rho^3)$

Die dritte und die vierte bzw. die siebte und die neunte Gruppe sind konjugiert.

Für $k=\mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k=725$, definierendem Polynom $t^4-t^3-3t^2+t+1$, $\rho\approx-0,4773$, $D(A)=\mathcal{P}_2$ und $(x^2,\ y^2,\ z^2)=(4-2\rho-2\rho^2+\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho^2+9\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho^2+9\rho^3)$:

$(4-2\rho-2\rho2+1\rho^3,\ 195-213\rho-137\rho2+93\rho^3,\ 183-201\rho-128\rho2+87\rho^3,\ 480-526\rho-338\rho2+229\rho^3,\ 492-537\rho-346\rho2+234\rho^3,\ 183-201\rho-128\rho2+87\rho^3,\ 195-213\rho-137\rho2+93\rho^3,\ 564-616\rho-396\rho2+268\rho^3,\ 603-657\rho-423\rho2+286\rho^3,\ 16-13\rho-10\rho2+6\rho^3,\ 183-201\rho-128\rho2+87\rho^3,\ 359-393\rho-252\rho2+171\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho2+9\rho^3,\ 50-55\rho-35\rho2+24\rho^3,\ 7-5\rho-3\rho2+2\rho^3)$

$(4-2\rho-2\rho2+1\rho^3,\ 208-227\rho-146\rho2+99\rho^3,\ 2264-2480\rho-1595\rho2+1080\rho^3,\ 1084-1184\rho-763\rho2+516\rho^3,\ 408-442\rho-286\rho2+193\rho^3,\ 183-201\rho-128\rho2+87\rho^3,\ 2070-2267\rho-1459\rho2+988\rho^3,\ 1039-1133\rho-731\rho2+494\rho^3,\ 404-440\rho-284\rho2+192\rho^3,\ 16-13\rho-10\rho2+6\rho^3,\ 23-25\rho-16\rho2+11\rho^3,\ 23-25\rho-16\rho2+11\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho2+9\rho^3,\ 50-55\rho-35\rho2+24\rho^3,\ 7-5\rho-3\rho2+2\rho^3)$

$(4-2\rho-2\rho2+1\rho^3,\ 480-526\rho-338\rho2+229\rho^3,\ 776-846\rho-546\rho2+369\rho^3,\ 2132-2334\rho-1502\rho2+1017\rho^3,\ 1772-1936\rho-1248\rho2+844\rho^3,\ 404-440\rho-284\rho2+192\rho^3,\ 668-729\rho-470\rho2+318\rho^3,\ 2108-2309\rho-1486\rho2+1006\rho^3,\ 1764-1930\rho-1242\rho2+841\rho^3,\ 4-5\rho-2\rho2+2\rho^3,\ 492-537\rho-346\rho2+234\rho^3,\ 480-526\rho-338\rho2+229\rho^3,\ 404-440\rho-284\rho2+192\rho^3,\ 408-442\rho-286\rho2+193\rho^3,\ 4-2\rho-2\rho2+1\rho^3)$

$(4-2\rho-2\rho2+1\rho^3,\ 480-526\rho-338\rho2+229\rho^3,\ 776-846\rho-546\rho2+369\rho^3,\ 2132-2334\rho-1502\rho2+1017\rho^3,\ 1772-1936\rho-1248\rho2+844\rho^3,\ 404-440\rho-284\rho2+192\rho^3,\ 668-729\rho-470\rho2+318\rho^3,\ 2108-2309\rho-1486\rho2+1006\rho^3,\ 1764-1930\rho-1242\rho2+841\rho^3,\ 4-5\rho-2\rho2+2\rho^3,\ 492-537\rho-346\rho2+234\rho^3,\ 480-526\rho-338\rho2+229\rho^3,\ 404-440\rho-284\rho2+192\rho^3,\ 408-442\rho-286\rho2+193\rho^3,\ 4-2\rho-2\rho2+1\rho^3)$

$(4-2\rho-2\rho 2+1\rho^3,\ 195-213\rho-137\rho 2+93\rho^3,\ 183-201\rho-128\rho 2+87\rho^3,\ 1039-1133\rho-731\rho 2+494\rho^3,\ 404-440\rho-284\rho 2+192\rho^3,\ 183-201\rho-128\rho 2+87\rho^3,\ 195-213\rho-137\rho 2+93\rho^3,\ 1196-1309\rho-842\rho 2+570\rho^3,\ 480-526\rho-338\rho 2+229\rho^3,\ 16-13\rho-10\rho 2+6\rho^3,\ 278-303\rho-195\rho 2+132\rho^3,\ 195-213\rho-137\rho 2+93\rho^3,\ 23-25\rho-16\rho 2+11\rho^3,\ 23-25\rho-16\rho 2+11\rho^3,\ 7-5\rho-3\rho 2+2\rho^3)$

$(4-5\rho-2\rho^2+2\rho^3,\ 23-25\rho-16\rho^2+11\rho^3,\ 183-201\rho-128\rho^2+87\rho^3,\ 668-729\rho-470\rho^2+318\rho^3,\ 404-440\rho-284\rho^2+192\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho^2+9\rho^3,\ 247-269\rho-173\rho^2+117\rho^3,\ 1056-1156\rho-744\rho^2+504\rho^3,\ 668-729\rho-470\rho^2+318\rho^3,\ 36-36\rho-24\rho^2+16\rho^3,\ 247-269\rho-173\rho^2+117\rho^3,\ 183-201\rho-128\rho^2+87\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho^2+9\rho^3,\ 23-25\rho-16\rho^2+11\rho^3,\ 4-5\rho-2\rho^2+2\rho^3)$

$(4-5\rho-2\rho 2+2\rho^3,\ 23-25\rho-16\rho 2+11\rho^3,\ 183-201\rho-128\rho 2+87\rho^3,\ 480-526\rho-338\rho 2+229\rho^3,\ 408-442\rho-286\rho 2+193\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho 2+9\rho^3,\ 247-269\rho-173\rho 2+117\rho^3,\ 776-846\rho-546\rho 2+369\rho^3,\ 691-757\rho-487\rho 2+330\rho^3,\ 36-36\rho-24\rho 2+16\rho^3,\ 195-213\rho-137\rho 2+93\rho^3,\ 208-227\rho-146\rho 2+99\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho 2+9\rho^3,\ 32-35\rho-22\rho 2+15\rho^3,\ 4-5\rho-2\rho 2+2\rho^3)$

$(12-8\rho-7\rho 2+4\rho^3,\ 84-92\rho-59\rho 2+40\rho^3,\ 576-631\rho-406\rho 2+275\rho^3,\ 420-460\rho-295\rho 2+200\rho^3,\ 32-35\rho-22\rho 2+15\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho 2+9\rho^3,\ 183-201\rho-128\rho 2+87\rho^3,\ 195-213\rho-137\rho 2+93\rho^3,\ 23-25\rho-16\rho 2+11\rho^3,\ 16-13\rho-10\rho 2+6\rho^3,\ 36-36\rho-24\rho 2+16\rho^3,\ 16-13\rho-10\rho 2+6\rho^3,\ 16-13\rho-10\rho 2+6\rho^3,\ 36-36\rho-24\rho 2+16\rho^3,\ 16-13\rho-10\rho 2+6\rho^3)$

$(4-5\rho-2\rho 2+2\rho^3,\ 23-25\rho-16\rho 2+11\rho^3,\ 183-201\rho-128\rho 2+87\rho^3,\ 480-526\rho-338\rho 2+229\rho^3,\ 408-442\rho-286\rho 2+193\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho 2+9\rho^3,\ 247-269\rho-173\rho 2+117\rho^3,\ 776-846\rho-546\rho 2+369\rho^3,\ 691-757\rho-487\rho 2+330\rho^3,\ 36-36\rho-24\rho 2+16\rho^3,\ 195-213\rho-137\rho 2+93\rho^3,\ 208-227\rho-146\rho 2+99\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho 2+9\rho^3,\ 32-35\rho-22\rho 2+15\rho^3,\ 4-5\rho-2\rho 2+2\rho^3)$

$(12-8\rho-7\rho^2+4\rho^3,\ 84-92\rho-59\rho^2+40\rho^3,\ 32-35\rho-22\rho^2+15\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho^2+9\rho^3,\ 23-25\rho-16\rho^2+11\rho^3,\ 19-21\rho-13\rho^2+9\rho^3,\ 23-25\rho-16\rho^2+11\rho^3,\ 50-55\rho-35\rho^2+24\rho^3,\ 147-161\rho-103\rho^2+70\rho^3,\ 16-13\rho-10\rho^2+6\rho^3,\ 120-128\rho-83\rho^2+56\rho^3,\ 664-723\rho-466\rho^2+315\rho^3,\ 16-13\rho-10\rho^2+6\rho^3,\ 120-128\rho-83\rho^2+56\rho^3,\ 16-13\rho-10\rho^2+6\rho^3)$

Die dritte und die vierte bzw. die siebte und die neunte Gruppe sind konjugiert.

Für $k=\mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k=1125$, definierendem Polynom $t^4-t^3-4t^2+4t+1$, $\rho\approx -1,9563$, $D(A)=\mathcal{P}_2$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2)=(-\rho+\rho^2,\, 1-2\rho+\rho^2,\, 1+\rho+\rho^2-\rho^3)$:

$(0-1\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ -1-13\rho+19\rho^2-6\rho^3,\ -3-10\rho+21\rho^2-8\rho^3,\ 0-10\rho+15\rho^2-5\rho^3,\ -1-5\rho+14\rho^2-6\rho^3,\ 0-8\rho+10\rho^2-3\rho^3,\ 0-8\rho+14\rho^2-5\rho^3,\ -3-11\rho+17\rho^2-5\rho^3,\ -1-13\rho+19\rho^2-6\rho^3,\ 1+1\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ 0-8\rho+14\rho^2-5\rho^3,\ -4-25\rho+37\rho^2-12\rho^3,\ -1-4\rho+5\rho^2-1\rho^3,\ 0-10\rho+15\rho^2-5\rho^3,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

$(0-1\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ -1-6\rho+11\rho^2-4\rho^3,\ -11-48\rho+79\rho^2-27\rho^3,\ -9-33\rho+54\rho^2-18\rho^3,\ -3-11\rho+17\rho^2-5\rho^3,\ 0+0\rho+6\rho^2-3\rho^3,\ -9-33\rho+54\rho^2-18\rho^3,\ -7-24\rho+43\rho^2-15\rho^3,\ 0-10\rho+15\rho^2-5\rho^3,\ 0-2\rho+3\rho^2-1\rho^3,\ 1-3\rho+6\rho^2-2\rho^3,\ 1-3\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ 0+0\rho+2\rho^2-1\rho^3,\ 0+0\rho+6\rho^2-3\rho^3,\ 1+1\rho+1\rho^2-1\rho^3)$

$(0-1\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ -1-6\rho+11\rho^2-4\rho^3,\ -1-13\rho+19\rho^2-6\rho^3,\ -8-33\rho+57\rho^2-20\rho^3,\ -4-16\rho+32\rho^2-12\rho^3,\ 0+0\rho+6\rho^2-3\rho^3,\ -1-5\rho+14\rho^2-6\rho^3,\ -9-36\rho+61\rho^2-21\rho^3,\ -4-25\rho+37\rho^2-12\rho^3,\ 3+0\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ -5-17\rho+31\rho^2-11\rho^3,\ -5-18\rho+27\rho^2-8\rho^3,\ 0+0\rho+6\rho^2-3\rho^3,\ -1-5\rho+7\rho^2-2\rho^3,\ 0-1\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

$(0-1\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ 0-8\rho+10\rho^2-3\rho^3,\ -9-33\rho+54\rho^2-18\rho^3,\ -8-33\rho+57\rho^2-20\rho^3,\ -4-16\rho+32\rho^2-12\rho^3,\ -1-5\rho+7\rho^2-2\rho^3,\ -7-24\rho+43\rho^2-15\rho^3,\ -9-36\rho+61\rho^2-21\rho^3,\ -4-25\rho+37\rho^2-12\rho^3,\ 3+0\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ -1-6\rho+11\rho^2-4\rho^3,\ 0-8\rho+10\rho^2-3\rho^3,\ -1-5\rho+7\rho^2-2\rho^3,\ -1-9\rho+10\rho^2-2\rho^3,\ 0-1\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

$(0-1\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ 0-8\rho+10\rho^2-3\rho^3,\ -3-11\rho+17\rho^2-5\rho^3,\ -4-25\rho+37\rho^2-12\rho^3,\ 0-8\rho+14\rho^2-5\rho^3,\ -1-5\rho+7\rho^2-2\rho^3,\ 0-10\rho+15\rho^2-5\rho^3,\ -8-28\rho+48\rho^2-16\rho^3,\ -3-10\rho+21\rho^2-8\rho^3,\ 0+0\rho+2\rho^2-1\rho^3,\ -1-13\rho+19\rho^2-6\rho^3,\ -3-11\rho+17\rho^2-5\rho^3,\ 0-2\rho+3\rho^2-1\rho^3,\ -1-4\rho+5\rho^2-1\rho^3,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

$(1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ 0-2\rho+3\rho^2-1\rho^3,\ 0-8\rho+14\rho^2-5\rho^3,\ -7-35\rho+53\rho^2-17\rho^3,\ 0-8\rho+12\rho^2-4\rho^3,\ 3+0\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ -5-18\rho+27\rho^2-8\rho^3,\ -21-73\rho+123\rho^2-42\rho^3,\ -3-18\rho+33\rho^2-12\rho^3,\ -1-5\rho+7\rho^2-2\rho^3,\ -7-24\rho+43\rho^2-15\rho^3,\ 0-10\rho+15\rho^2-5\rho^3,\ 3+0\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ 0+0\rho+2\rho^2-1\rho^3,\ 1+1\rho+1\rho^2-1\rho^3)$

$(1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ 0-2\rho+3\rho^2-1\rho^3,\ -3-15\rho+21\rho^2-6\rho^3,\ -3-10\rho+21\rho^2-8\rho^3,\ 0-8\rho+12\rho^2-4\rho^3,\ 3+0\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ -5-17\rho+31\rho^2-11\rho^3,\ -8-28\rho+46\rho^2-15\rho^3,\ -3-18\rho+33\rho^2-12\rho^3,\ 0+0\rho+6\rho^2-3\rho^3,\ -1-5\rho+14\rho^2-6\rho^3,\ 0-10\rho+15\rho^2-5\rho^3,\ 3+0\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ 1-3\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

$(1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ -1-4\rho+5\rho^2-1\rho^3,\ 0-8\rho+12\rho^2-4\rho^3,\ -3-10\rho+21\rho^2-8\rho^3,\ -1-4\rho+5\rho^2-1\rho^3,\ 0-2\rho+3\rho^2-1\rho^3,\ -3-10\rho+21\rho^2-8\rho^3,\ -8-28\rho+48\rho^2-16\rho^3,\ 0-10\rho+15\rho^2-5\rho^3,\ -1-4\rho+5\rho^2-1\rho^3,\ 0-10\rho+15\rho^2-5\rho^3,\ 0-8\rho+12\rho^2-4\rho^3,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ -1-4\rho+5\rho^2-1\rho^3,\ 0-2\rho+3\rho^2-1\rho^3)$

$(1+1\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ 0+0\rho+2\rho^2-1\rho^3,\ -4-14\rho+29\rho^2-11\rho^3,\ -3-11\rho+17\rho^2-5\rho^3,\ 0-8\rho+12\rho^2-4\rho^3,\ 3+0\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ -12-43\rho+71\rho^2-24\rho^3,\ -9-33\rho+54\rho^2-18\rho^3,\ -7-35\rho+53\rho^2-17\rho^3,\ -1-9\rho+10\rho^2-2\rho^3,\ 0-8\rho+10\rho^2-3\rho^3,\ 0-8\rho+14\rho^2-5\rho^3,\ 3+0\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ 0-6\rho+9\rho^2-3\rho^3,\ 1+1\rho+1\rho^2-1\rho^3)$

$(1+1\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ 0+0\rho+6\rho^2-3\rho^3,\ -1-17\rho+23\rho^2-7\rho^3,\ -3-11\rho+18\rho^2-6\rho^3,\ -1-4\rho+5\rho^2-1\rho^3,\ 0+0\rho+2\rho^2-1\rho^3,\ -3-11\rho+18\rho^2-6\rho^3,\ -3-15\rho+21\rho^2-6\rho^3,\ 0-6\rho+9\rho^2-3\rho^3,\ -1-4\rho+5\rho^2-1\rho^3,\ 0-6\rho+9\rho^2-3\rho^3,\ -1-9\rho+10\rho^2-2\rho^3,\ 1+1\rho+1\rho^2-1\rho^3,\ 0+0\rho+6\rho^2-3\rho^3,\ 0+0\rho+2\rho^2-1\rho^3)$

Keine Konjugation zu erkennen.

3.2.2 Signatur $(1;3)$

Das Vorgehen ist analog zu dem für Signatur $(1;2)$.

Anhand der Listen erkennt man mit Lemma 3.23, dass die dritte Gruppe Normalteiler ist.

Für $k = \mathbb{Q}$ erhält man

$(x^2,\, y^2,\, z^2)$	$(y_{12}^2,\, \ldots,\, y_{56}^2)$	$D(A)$
(5, 16, 20)	(5, 80, 324, 441, 196, 64, 320, 500, 245, 20, 80, 80, 16, 36, 9)	(3)(5)
	(5, 80, 324, 245, 245, 64, 320, 289, 324, 20, 64, 144, 20, 80, 9)	
	(16, 80, 36, 20, 36, 20, 36, 80, 324, 20, 144, 980, 20, 196, 20)	
(6, 10, 15)	(6, 60, 250, 256, 64, 40, 240, 294, 96, 24, 60, 60, 10, 40, 16)	(2)(5)
	(6, 60, 250, 96, 96, 40, 240, 121, 169, 24, 40, 160, 15, 135, 16)	
	(10, 60, 40, 54, 40, 24, 49, 135, 169, 24, 160, 384, 15, 64, 15)	
(7, 8, 14)	(7, 56, 242, 225, 36, 32, 224, 252, 63, 28, 56, 56, 8, 50, 25)	(2)(3)
	(7, 56, 242, 63, 63, 32, 224, 81, 144, 28, 32, 200, 14, 224, 25)	
	(8, 56, 50, 112, 50, 28, 64, 224, 144, 28, 200, 252, 14, 36, 14)	
(8, 8, 9)	(8, 36, 200, 100, 36, 32, 324, , 200, 128, 32, 36, 100, 8, 128, 36)	(2)(3)
	(8, 36, 32, 200, 128, 32, 81, 729, 529, 32, 512, 512, 25, 36, 9)	
	(8, 36, 32, 200, 128, 32, 81, 729, 529, 32, 512, 512, 25, 36, 9)	

Für $(x^2, y^2, z^2) = (8, 8, 9)$ sind die zweite und die dritte Gruppe konjugiert.

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5}),\ D(A) = \mathcal{P}_3$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2) = (3 + \sqrt{5},\, 7 + 3\sqrt{5},\, 9 + 4\sqrt{5})$:

$(3 + \sqrt{5},\, 36 + 16\sqrt{5},\, 147 + 65\sqrt{5},\, 180 + 80\sqrt{5},\, 70 + 30\sqrt{5},\, 28 + 12\sqrt{5},\, 144 + 64\sqrt{5},\, 207 + 91\sqrt{5},\, 90 + 40\sqrt{5},\, 12 + 4\sqrt{5},\, 36 + 16\sqrt{5},\, 36 + 16\sqrt{5},\, 7 + 3\sqrt{5},\, 18 + 8\sqrt{5},\, 6 + 2\sqrt{5})$

$(3 + \sqrt{5},\, 36 + 16\sqrt{5},\, 147 + 65\sqrt{5},\, 90 + 40\sqrt{5},\, 90 + 40\sqrt{5},\, 28 + 12\sqrt{5},\, 144 + 64\sqrt{5},\, 109 + 48\sqrt{5},\, 129 + 56\sqrt{5},\, 12 + 4\sqrt{5},\, 28 + 12\sqrt{5},\, 72 + 32\sqrt{5},\, 9 + 4\sqrt{5},\, 45 + 20\sqrt{5},\, 6 + 2\sqrt{5})$

$(7 + 3\sqrt{5},\, 36 + 16\sqrt{5},\, 18 + 8\sqrt{5},\, 15 + 5\sqrt{5},\, 18 + 8\sqrt{5},\, 12 + 4\sqrt{5},\, 21 + 8\sqrt{5},\, 45 + 20\sqrt{5},\, 129 + 56\sqrt{5},\, 12 + 4\sqrt{5},\, 72 + 32\sqrt{5},\, 360 + 160\sqrt{5},\, 9 + 4\sqrt{5},\, 70 + 30\sqrt{5},\, 9 + 4\sqrt{5})$

Für $k=\mathbb{Q}(\sqrt{5}),\ D(A)=\mathcal{P}_5$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2)=(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5},\, 5+2\sqrt{5},\, 5+2\sqrt{5})$:

$(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5},\, 20+8\sqrt{5},\, \frac{205}{2}+\frac{89}{2}\sqrt{5},\, 56+24\sqrt{5},\, 29+12\sqrt{5},\, 20+8\sqrt{5},\, \frac{325}{2}+\frac{145}{2}\sqrt{5},\, 109+48\sqrt{5},\, 81+36\sqrt{5},\, 14+6\sqrt{5},\, 10+8\sqrt{5},\, 50+22\sqrt{5},\, 5+2\sqrt{5},\, 50+22\sqrt{5},\, \frac{27}{2}+\frac{9}{2}\sqrt{5})$

$(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5},\, 20+8\sqrt{5},\, \frac{205}{2}+\frac{89}{2}\sqrt{5},\, \frac{423}{2}+\frac{189}{2}\sqrt{5},\, \frac{47}{2}+\frac{21}{2}\sqrt{5},\, 20+8\sqrt{5},\, \frac{325}{2}+\frac{145}{2}\sqrt{5},\, \frac{787}{2}+\frac{351}{2}\sqrt{5},\, 56+24\sqrt{5},\, 14+6\sqrt{5},\, 50+22\sqrt{5},\, 20+8\sqrt{5},\, 5+2\sqrt{5},\, \frac{25}{2}+\frac{11}{2}\sqrt{5},\, \frac{27}{2}+\frac{9}{2}\sqrt{5})$

$(5+2\sqrt{5},\, \frac{63}{2}+\frac{27}{2}\sqrt{5},\, \frac{325}{2}+\frac{145}{2}\sqrt{5},\, \frac{383}{2}+\frac{171}{2}\sqrt{5},\, ,\, 14+6\sqrt{5},\, \frac{25}{2}+\frac{11}{2}\sqrt{5},\, ,\, 109+48\sqrt{5},\, \frac{325}{2}+\frac{145}{2}\sqrt{5},\, ,\, 20+8\sqrt{5},\, \frac{25}{2}+\frac{11}{2}\sqrt{5},\, \frac{63}{2}+\frac{27}{2}\sqrt{5},\, 14+6\sqrt{5},\, 5+2\sqrt{5},\, 20+8\sqrt{5},\, 14+6\sqrt{5})$

Für $k=\mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ D(A)=\mathcal{P}_3$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2)=(3+2\sqrt{2},\, 6+4\sqrt{2},\, 6+4\sqrt{2})$:

$(3+2\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 114+80\sqrt{2},\, 81+56\sqrt{2},\, 48+32\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 162+112\sqrt{2},\, 136+96\sqrt{2},\, 99+70\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 48+32\sqrt{2},\, 6+4\sqrt{2},\, 34+24\sqrt{2},\, 9+4\sqrt{2})$

$(3+2\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 57+40\sqrt{2},\, 114+80\sqrt{2},\, 43+30\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 162+112\sqrt{2},\, 369+260\sqrt{2},\, 81+56\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 48+32\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 6+4\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 9+4\sqrt{2})$

$(6+4\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 34+24\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 24+16\sqrt{2},\, 114+80\sqrt{2},\, 228+160\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 136+96\sqrt{2},\, 396+280\sqrt{2},\, 12+8\sqrt{2},\, 48+32\sqrt{2},\, 6+4\sqrt{2})$

Für $k=\mathbb{Q}(\sqrt{3}),\ D(A)=\mathcal{P}_3$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2)=(4+2\sqrt{3},\, 4+2\sqrt{3},\, 7+4\sqrt{3})$:

$(4+2\sqrt{3},\, 28+16\sqrt{3},\, 124+70\sqrt{3},\, 112+64\sqrt{3},\, 16+8\sqrt{3},\, 16+8\sqrt{3},\, 112+64\sqrt{3},\, 124+70\sqrt{3},\, 28+16\sqrt{3},\, 16+8\sqrt{3},\, 28+16\sqrt{3},\, 28+16\sqrt{3},\, 4+2\sqrt{3},\, 28+16\sqrt{3},\, 16+8\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3},\, 28+16\sqrt{3},\, 28+16\sqrt{3},\, 76+42\sqrt{3},\, 28+16\sqrt{3},\, 16+8\sqrt{3},\, 37+20\sqrt{3},\, 139+80\sqrt{3},\, 73+40\sqrt{3},\, 16+8\sqrt{3},\, 112+64\sqrt{3},\, 112+64\sqrt{3},\, 7+4\sqrt{3},\, 16+8\sqrt{3},\, 7+4\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3},\, 28+16\sqrt{3},\, 28+16\sqrt{3},\, 76+42\sqrt{3},\, 28+16\sqrt{3},\, 16+8\sqrt{3},\, 37+20\sqrt{3},\, 139+80\sqrt{3},\, 73+40\sqrt{3},\, 16+8\sqrt{3},\, 112+64\sqrt{3},\, 112+64\sqrt{3},\, 7+4\sqrt{3},\, 16+8\sqrt{3},\, 7+4\sqrt{3})$

Die zweite und die dritte Gruppe sind konjugiert.

Für $k=\mathbb{Q}(\sqrt{13}),\ D(A)=\mathcal{P}_3'$ und $(x^2,\ y^2,\ z^2)=(4+\sqrt{13},\ 4+\sqrt{13},\ \frac{11}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{13})$:

$(4+\sqrt{13},\ 38+10\sqrt{13},\ \frac{305}{2}+\frac{83}{2}\sqrt{13},\ \frac{383}{2}+\frac{105}{2}\sqrt{13},\ 17+4\sqrt{13},\ 16+4\sqrt{13},\ 101+28\sqrt{13},\ \frac{305}{2}+\frac{83}{2}\sqrt{13},\ \frac{41}{2}+\frac{11}{2}\sqrt{13},\ 16+4\sqrt{13},\ 38+10\sqrt{13},\ 22+6\sqrt{13},\ 4+\sqrt{13},\ \frac{41}{2}+\frac{11}{2}\sqrt{13},\ 17+4\sqrt{13})$

$(4+\sqrt{13},\ 22+6\sqrt{13},\ \frac{41}{2}+\frac{11}{2}\sqrt{13},\ 82+22\sqrt{13},\ \frac{83}{2}+\frac{23}{2}\sqrt{13},\ 16+4\sqrt{13},\ 38+10\sqrt{13},\ 217+60\sqrt{13},\ \frac{275}{2}+\frac{75}{2}\sqrt{13},\ 16+4\sqrt{13},\ 166+46\sqrt{13},\ 166+46\sqrt{13},\ \frac{19}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{13},\ 17+4\sqrt{13},\ \frac{11}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{13})$

$(4+\sqrt{13},\ 22+6\sqrt{13},\ \frac{41}{2}+\frac{11}{2}\sqrt{13},\ 82+22\sqrt{13},\ \frac{83}{2}+\frac{23}{2}\sqrt{13},\ 16+4\sqrt{13},\ 38+10\sqrt{13},\ 217+60\sqrt{13},\ \frac{275}{2}+\frac{75}{2}\sqrt{13},\ 16+4\sqrt{13},\ 166+46\sqrt{13},\ 166+46\sqrt{13},\ \frac{19}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{13},\ 17+4\sqrt{13},\ \frac{11}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{13})$

Die zweite und die dritte Gruppe sind konjugiert

Für $k=\mathbb{Q}(\sqrt{13}),\ D(A)=\mathcal{P}_3$ und $(x^2,\ y^2,\ z^2)=(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13},\ 22+6\sqrt{13},\ \frac{47}{2}+\frac{13}{2}\sqrt{13})$:

$(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13},\ 94+26\sqrt{13},\ 377+104\sqrt{13},\ \frac{2299}{2}+\frac{637}{2}\sqrt{13},\ 868+240\sqrt{13},\ 88+24\sqrt{13},\ 376+104\sqrt{13},\ 1222+388\sqrt{13},\ \frac{1865}{2}+\frac{517}{2}\sqrt{13},\ 10+2\sqrt{13},\ 94+26\sqrt{13},\ 94+26\sqrt{13},\ 22+6\sqrt{13},\ 29+8\sqrt{13},\ \frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}$

$(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13},\ 94+26\sqrt{13},\ 377+104\sqrt{13},\ \frac{1865}{2}+\frac{517}{2}\sqrt{13},\ \frac{1865}{2}+\frac{517}{2}\sqrt{13},\ 88+24\sqrt{13},\ 376+104\sqrt{13},\ 997+276\sqrt{13},\ \frac{2023}{2}+\frac{559}{2}\sqrt{13},\ 10+2\sqrt{13},\ 88+24\sqrt{13},\ 116+32\sqrt{13},\ \frac{47}{2}+\frac{13}{2}\sqrt{13},\ 40+11\sqrt{13},\ \frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}$

$(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13},\ 94+26\sqrt{13},\ 377+104\sqrt{13},\ \frac{1865}{2}+\frac{517}{2}\sqrt{13},\ \frac{1865}{2}+\frac{517}{2}\sqrt{13},\ 88+24\sqrt{13},\ 376+104\sqrt{13},\ 997+276\sqrt{13},\ \frac{2023}{2}+\frac{559}{2}\sqrt{13},\ 10+2\sqrt{13},\ 88+24\sqrt{13},\ 116+32\sqrt{13},\ \frac{47}{2}+\frac{13}{2}\sqrt{13},\ 40+11\sqrt{13},\ \frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}$

Die zweite und die dritte Gruppe sind konjugiert.

Für $k=\mathbb{Q}(\sqrt{17}),\ D(A)=\mathcal{P}_2\mathcal{P}_2'\mathcal{P}_3$ und $(x^2,\ y^2,\ z^2)=(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17},\ 13+3\sqrt{17},\ \frac{29}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{17})$:

$(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17},\ 58+14\sqrt{17},\ 234+56\sqrt{17},\ \frac{897}{2}+\frac{217}{2}\sqrt{17},\ 274+66\sqrt{17},\ 52+12\sqrt{17},\ 232+56\sqrt{17},\ 493+119\sqrt{17},\ \frac{623}{2}+\frac{151}{2}\sqrt{17},\ 10+2\sqrt{17},\ 58+14\sqrt{17},\ 58+14\sqrt{17},\ 13+3\sqrt{17},\ 21+5\sqrt{17},\ \frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}$

$(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17},\ 58+14\sqrt{17},\ 234+56\sqrt{17},\ \frac{623}{2}+\frac{151}{2}\sqrt{17},\ \frac{623}{2}+\frac{151}{2}\sqrt{17},\ 52+12\sqrt{17},\ 232+56\sqrt{17},\ 349+84\sqrt{17},\ \frac{729}{2}+\frac{175}{2}\sqrt{17},\ 10+2\sqrt{17},\ 52+12\sqrt{17},\ 84+20\sqrt{17},\ \frac{29}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{17},\ \frac{71}{2}+\frac{17}{2}\sqrt{17},\ \frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}$

$(7+\sqrt{17},\ \frac{71}{2}+\frac{17}{2}\sqrt{17},\ 84+20\sqrt{17},\ 301+73\sqrt{17},\ \frac{29}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{17},\ 13+3\sqrt{17},\ 58+14\sqrt{17},\ 298+72\sqrt{17},\ 21+5\sqrt{17},\ 10+2\sqrt{17},\ \frac{161}{2}+\frac{39}{2}\sqrt{17},\ \frac{33}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{17},\ 10+2\sqrt{17},\ 10+2\sqrt{17},\ \frac{33}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{17})$

Für $k=\mathbb{Q}(\sqrt{21}),\ D(A)=\mathcal{P}_3$ und $(x^2,\,y^2,\,z^2)=(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21},\,10+2\sqrt{21},\,\frac{23}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{21})$:

$(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21},\,46+10\sqrt{21},\,187+40\sqrt{21},\,\frac{575}{2}+\frac{125}{2}\sqrt{21},\,148+32\sqrt{21},\,40+8\sqrt{21},\,184+40\sqrt{21},\,322+70\sqrt{21},\,\frac{353}{2}+\frac{77}{2}\sqrt{21},\,10+2\sqrt{21},\,46+10\sqrt{21},\,46+10\sqrt{21},\,10+2\sqrt{21},\,19+4\sqrt{21},\,\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21})$

$(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21},\,46+10\sqrt{21},\,187+40\sqrt{21},\,\frac{353}{2}+\frac{77}{2}\sqrt{21},\,\frac{353}{2}+\frac{77}{2}\sqrt{21},\,40+8\sqrt{21},\,184+40\sqrt{21},\,205+44\sqrt{21},\,\frac{443}{2}+\frac{95}{2}\sqrt{21},\,10+2\sqrt{21},\,40+8\sqrt{21},\,76+16\sqrt{21},\,\frac{23}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{21},\,37+8\sqrt{21},\,\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21})$

$(\frac{17}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{21},\,37+8\sqrt{21},\,76+16\sqrt{21},\,\frac{527}{2}+\frac{115}{2}\sqrt{21},\,\frac{23}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{21},\,10+2\sqrt{21},\,46+10\sqrt{21},\,259+56\sqrt{21},\,19+4\sqrt{21},\,10+2\sqrt{21},\,\frac{179}{2}+\frac{39}{2}\sqrt{21},\,\frac{35}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{21},\,10+2\sqrt{21},\,10+2\sqrt{21},\,\frac{35}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{21})$

Für $k=\mathbb{Q}(\sqrt{7}),\ D(A)=\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_3'$ und $(x^2,\,y^2,\,z^2)=(3+\sqrt{7},\,6+2\sqrt{7},\,8+3\sqrt{7})$:

$(3+\sqrt{7},\,32+12\sqrt{7},\,133+49\sqrt{7},\,144+54\sqrt{7},\,44+16\sqrt{7},\,24+8\sqrt{7},\,128+48\sqrt{7},\,166+62\sqrt{7},\,61+23\sqrt{7},\,12+4\sqrt{7},\,32+12\sqrt{7},\,32+12\sqrt{7},\,6+2\sqrt{7},\,19+7\sqrt{7},\,8+2\sqrt{7})$

$(3+\sqrt{7},\,32+12\sqrt{7},\,133+49\sqrt{7},\,61+23\sqrt{7},\,61+23\sqrt{7},\,24+8\sqrt{7},\,128+48\sqrt{7},\,77+28\sqrt{7},\,99+36\sqrt{7},\,12+4\sqrt{7},\,24+8\sqrt{7},\,76+28\sqrt{7},\,8+3\sqrt{7},\,56+21\sqrt{7},\,8+2\sqrt{7})$

$(6+2\sqrt{7},\,32+12\sqrt{7},\,19+7\sqrt{7},\,21+7\sqrt{7},\,19+7\sqrt{7},\,12+4\sqrt{7},\,23+8\sqrt{7},\,56+21\sqrt{7},\,99+36\sqrt{7},\,12+4\sqrt{7},\,76+28\sqrt{7},\,244+92\sqrt{7},\,8+3\sqrt{7},\,44+16\sqrt{7},\,8+3\sqrt{7})$

Für $k=\mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k=49$, definierendem Polynom t^3-t^2-2t+1, $\rho=2\cos(\pi/7),\ D(A)=(1)$ und $(x^2,\,y^2,\,z^2)=(\rho+\rho^2,\,-2+3\rho+4\rho^2,\,-2+3\rho+4\rho^2)$:

$(\rho+\rho^2,\,-12+20\rho+24\rho^2,\,-49+73\rho+91\rho^2,\,-92+136\rho+169\rho^2,\,-24+40\rho+49\rho^2,\,-8+12\rho+16\rho^2,\,-39+56\rho+72\rho^2,\,-80+121\rho+149\rho^2,\,-26+39\rho+48\rho^2,\,4\rho+4\rho^2,\,-12+20\rho+24\rho^2,\,-8+12\rho+16\rho^2,\,-2+3\rho+4\rho^2,\,-3+5\rho+6\rho^2,\,1+\rho+2\rho^2)$

$(\rho+\rho^2,\,-8+12\rho+16\rho^2,\,-39+56\rho+72\rho^2,\,-80+121\rho+149\rho^2,\,-26+39\rho+48\rho^2,\,-8+12\rho+16\rho^2,\,-47+72\rho+88\rho^2-117+169\rho+211\rho^2,\,-39+58\rho+73\rho^2,\,4\rho+4\rho^2,\,-12+20\rho+24\rho^2,\,-8+12\rho+16\rho^2,\,-2+3\rho+4\rho^2,\,-3+5\rho+6\rho^2,\,1+\rho+2\rho^2)$

$(-2+3\rho+4\rho^2,\,-8+12\rho+16\rho^2,\,-3+5\rho+6\rho^2,\,1+4\rho+4\rho^2,\,-7+10\rho+13\rho^2,\,4\rho+4\rho^2,\,-2+7\rho+8\rho^2,\,-17+25\rho+31\rho^2,\,-71+106\rho+133\rho^2,\,4\rho+4\rho^2,\,-28+40\rho+52\rho^2,\,-176+256\rho+320\rho^2,\,-3+5\rho+6\rho^2,\,-24+40\rho+49\rho^2,\,-2+3\rho+4\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 81$, definierendem Polynom $t^3 - 3t - 1$, $\rho = 2\cos(\pi/9)$, $D(A) = (1)$ und $(x^2,\ y^2,\ z^2) = (1{+}2\rho{+}\rho^2,\ 1{+}2\rho{+}\rho^2,\ 1{+}2\rho{+}\rho^2)$:

$(1 + 2\rho + 1\rho^2,\ 5 + 9\rho + 5\rho^2,\ 12 + 40\rho + 21\rho^2,\ 8 + 21\rho + 11\rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2,\ 2 + 7\rho + 4\rho^2,\ 19 + 57\rho + 30\rho^2,\ 12 + 40\rho + 21\rho^2,\ 8 + 28\rho + 16\rho^2,\ 2 + 7\rho + 4\rho^2,\ 5 + 9\rho + 5\rho^2,\ 8 + 28\rho + 16\rho^2,\ 1 + 2\rho + 1\rho^2,\ 8 + 28\rho + 16\rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2)$

$(1 + 2\rho + \rho^2,\ 8 + 21\rho + 11\rho^2,\ 25 + 89\rho + 49\rho^2,\ 40 + 141\rho + 75\rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2,\ 2 + 7\rho + 4\rho^2,\ 17 + 49\rho + 25\rho^2,\ 25 + 89\rho + 49\rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2,\ 2 + 7\rho + 4\rho^2,\ 8 + 21\rho + 11\rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2,\ 1 + 2\rho + \rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2)$

$(1 + 2\rho + \rho^2,\ 8 + 21\rho + 11\rho^2,\ 25 + 89\rho + 49\rho^2,\ 40 + 141\rho + 75\rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2,\ 2 + 7\rho + 4\rho^2,\ 17 + 49\rho + 25\rho^2,\ 25 + 89\rho + 49\rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2,\ 2 + 7\rho + 4\rho^2,\ 8 + 21\rho + 11\rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2,\ 1 + 2\rho + \rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2,\ 4 + 8\rho + 4\rho^2)$

Die zweite und dritte Gruppe sind konjugiert.

3.2.3 Signatur $(0; 3, 3, 3, 3)$

Eine Fuchssche Gruppe der Signatur $(0; 3, 3, 3, 3)$ hat eine Präsentierung

$$\Gamma = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1^3 = \cdots = x_4^3 = x_1 \cdots x_4 = 1 \rangle.$$

Die $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklasse einer solchen Gruppe ist durch $\operatorname{tr} x_1x_2$, $\operatorname{tr} x_1x_3$ und $\operatorname{tr} x_2x_3$ eindeutig bestimmt. Sei $x = -\operatorname{tr} x_1x_2$, $y = -\operatorname{tr} x_1x_3$ und $z = -\operatorname{tr} x_2x_3$. Wie im Fall der Signatur $(1; p)$ hat man eine Normalform für die Spurtripel, und zwar

$$2 < x \leq \frac{1}{2}(yz - 2),\ 2 < y \leq \frac{1}{2}(xz - 2),\ 2 < z \leq \frac{1}{2}(xy - 2)$$

Nach Konjugation in der $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ dürfen wir annehmen, dass

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -1/\rho & 1 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} s & t \\ \frac{-s-s^2-1}{t} & 1-s \end{pmatrix}$$

mit $\rho > 1$, $s > 0$ und $t > 0$. Ist (x, y, z) gegeben, so ist ρ die eindeutige Lösung von $x = \rho + (1/\rho) - 1 = x$, s und t sind die eindeutigen Lösungen > 0 von

$$\begin{aligned} y &= \frac{s^2 - s + t^2 - t + st + 1}{t} \\ z &= \rho\frac{s^2 - s + 1}{t} + \frac{t}{\rho} - 1 + s \end{aligned}$$

Einsetzen von x_1, x_2, x_3 in Hulpkes Liste liefert Erzeugende für die Untergruppen der Signatur $(2; -)$.

Alternativ kann man auch $x = -\operatorname{tr} x_2x_3$, $y = -\operatorname{tr} x_1x_3$ und $z = -\operatorname{tr} x_1x_2$ wählen. Wenn man hierfür die Erzeugenden für die Untergruppen der Signatur $(2; -)$ berechnet, zeigt sich, dass die Daten der ersten und dritten Gruppe vertauscht werden. Daraus und anhand der Listen erkennt man mit Lemma 3.23, dass alle drei Gruppen Normalteiler in der Gruppe der Signatur $(0;3,3,3,3)$ sind.

Für $k=\mathbb{Q}$ erhält man

$(x,\,y,\,z)$	$(y_{12}^2,\,\ldots,\,y_{56}^2)$	$D(A)$
(3, 6, 8)	(16, 16, 64, 36, 64, 16, 256, 256, 676, 36, 64, 256, 16, 144, 16)	(2)(3)
	(9, 64, 49, 49, 64, 49, 64, 169, 289, 9, 169, 484, 49, 169, 9)	
	(9, 81, 121, 81, 36, 36, 81, 121, 81, 9, 81, 121, 36, 81, 9)	
(4, 4, 7)	(16, 169, 841, 529, 49, 25, 169, 169, 25, 16, 49, 25, 25, 49, 16)	(2)(5)
	(16, 49, 25, 25, 49, 25, 49, 169, 529, 16, 169, 841, 25, 169, 16)	
	(16, 64, 100, 64, 16, 16, 64, 100, 64, 16, 64, 100, 16, 64, 16)	

Für $k=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $(x,\,y,\,z)=(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5},\,4+2\sqrt{5},\,\frac{9}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{5})$:

$\frac{1}{2}(15+5\sqrt{5},\,15+5\sqrt{5},\,103+45\sqrt{5},\,72+32\sqrt{5},\,103+45\sqrt{5},\,15+5\sqrt{5},\,423+189\sqrt{5},\,423+189\sqrt{5},\,787+351\sqrt{5},\,72+32\sqrt{5},\,103+45\sqrt{5},\,258+112\sqrt{5},\,15+5\sqrt{5},\,90+40\sqrt{5},\,15+5\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5},\,103+45\sqrt{5},\,90+40\sqrt{5},\,90+40\sqrt{5},\,103+45\sqrt{5},\,90+40\sqrt{5},\,103+45\sqrt{5},\,218+96\sqrt{5},\,288+128\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5},\,218+96\sqrt{5},\,467+207\sqrt{5},\,90+40\sqrt{5},\,218+96\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5},\,123+55\sqrt{5},\,175+75\sqrt{5},\,123+55\sqrt{5},\,72+32\sqrt{5},\,72+32\sqrt{5},\,123+55\sqrt{5},\,175+75\sqrt{5},\,123+55\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5},\,123+55\sqrt{5},\,175+75\sqrt{5},\,72+32\sqrt{5},\,123+55\sqrt{5},\,7+3\sqrt{5})$

Für $k=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $(x,\,y,\,z)=(1+\sqrt{5},\,3+\sqrt{5},\,3+2\sqrt{5})$:

$(9+4\sqrt{5},\,9+4\sqrt{5},\,29+12\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,29+12\sqrt{5},\,9+4\sqrt{5},\,109+48\sqrt{5},\,109+48\sqrt{5},\,349+156\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,29+12\sqrt{5},\,144+64\sqrt{5},\,9+4\sqrt{5},\,94+42\sqrt{5},\,9+4\sqrt{5})$

$(6+2\sqrt{5},\,29+12\sqrt{5},\,21+8\sqrt{5},\,21+8\sqrt{5},\,29+12\sqrt{5},\,21+8\sqrt{5},\,29+12\sqrt{5},\,81+36\sqrt{5},\,161+72\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5},\,81+36\sqrt{5},\,269+120\sqrt{5},\,21+8\sqrt{5},\,81+36\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5})$

$(6+2\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,56+24\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,56+24\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,56+24\sqrt{5},\,14+6\sqrt{5},\,36+16\sqrt{5},\,6+2\sqrt{5})$

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $(x, y, z) = (2+\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}, \frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5})$:

$\frac{1}{2}(18+8\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 235+105\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 235+105\sqrt{5}, 18+8\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 235+105\sqrt{5}, 18+8\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(18+8\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 235+105\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 235+105\sqrt{5}, 18+8\sqrt{5}, 28+12\sqrt{5}, 123+55\sqrt{5}, 27+9\sqrt{5}, 235+105\sqrt{5}, 18+8\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}(18+8\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 18+8\sqrt{5}, 18+8\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 18+8\sqrt{5}, 147+65\sqrt{5}, 112+48\sqrt{5}, 18+8\sqrt{5}, 35+15\sqrt{5}, 18+8\sqrt{5})$

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $(x, y, z) = (1+\sqrt{2}, 6+4\sqrt{2}, 6+5\sqrt{2})$:

$(6+4\sqrt{2}, 6+4\sqrt{2}, 86+60\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 86+60\sqrt{2}, 6+4\sqrt{2}, 358+252\sqrt{2}, 358+252\sqrt{2}, 544+384\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 86+60\sqrt{2}, 162+112\sqrt{2}, 6+4\sqrt{2}, 34+24\sqrt{2}, 6+4\sqrt{2})$

$(3+2\sqrt{2}, 86+60\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 86+60\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 86+60\sqrt{2}, 153+108\sqrt{2}, 179+126\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 153+108\sqrt{2}, 272+192\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 153+108\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$

$(3+2\sqrt{2}, 99+70\sqrt{2}, 131+90\sqrt{2}, 99+70\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 99+70\sqrt{2}, 131+90\sqrt{2}, 99+70\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 99+70\sqrt{2}, 131+90\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 99+70\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $(x, y, z) = (2+\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2})$:

$(11+6\sqrt{2}, 11+6\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 11+6\sqrt{2}, 99+70\sqrt{2}, 99+70\sqrt{2}, 369+260\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 162+112\sqrt{2}, 11+6\sqrt{2}, 114+80\sqrt{2}, 11+6\sqrt{2})$

$(6+4\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 27+18\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 179+126\sqrt{2}, 6+4\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 297+208\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 6+4\sqrt{2})$

$(6+4\sqrt{2}, 34+24\sqrt{2}, 54+36\sqrt{2}, 34+24\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 34+24\sqrt{2}, 54+36\sqrt{2}, 34+24\sqrt{2}, 6+4\sqrt{2}, 34+24\sqrt{2}, 54+36\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 34+24\sqrt{2}, 6+4\sqrt{2})$

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $(x, y, z) = (1 + 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$:

$(12+8\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 172+120\sqrt{2}, 1324+936\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 68+48\sqrt{2}, 716+504\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 172+120\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2})$

$(9+4\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 57+40\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 57+40\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 57+40\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2})$

$(9+4\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 57+40\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 57+40\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2}, 81+56\sqrt{2}, 57+40\sqrt{2}, 12+8\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}, 9+4\sqrt{2})$

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $(x, y, z) = (1 + \sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}, 4 + 3\sqrt{3})$:

$(7+4\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3}, 43+24\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 43+24\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3}, 175+100\sqrt{3}, 175+100\sqrt{3}, 361+208\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 43+24\sqrt{3}, 124+70\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 43+24\sqrt{3}, 37+20\sqrt{3}, 37+20\sqrt{3}, 43+24\sqrt{3}, 37+20\sqrt{3}, 43+24\sqrt{3}, 97+56\sqrt{3}, 139+80\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}, 97+56\sqrt{3}, 229+132\sqrt{3}, 37+20\sqrt{3}, 97+56\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

$(4+2\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 76+42\sqrt{3}, 28+16\sqrt{3}, 52+30\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ und $(x, y, z) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, 8 + 2\sqrt{13}, \frac{15}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{13})$:

$\frac{1}{2}(11+3\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 275+75\sqrt{13}, 232+64\sqrt{13}, 275+75\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 1139+315\sqrt{13}, 1139+315\sqrt{13}, 1547+429\sqrt{13}, 232+64\sqrt{13}, 275+75\sqrt{13}, 434+120\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 58+16\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(7+1\sqrt{13}, 275+75\sqrt{13}, 266+72\sqrt{13}, 266+72\sqrt{13}, 275+75\sqrt{13}, 266+72\sqrt{13}, 275+75\sqrt{13}, 434+120\sqrt{13}, 476+132\sqrt{13}, 7+1\sqrt{13}, 434+120\sqrt{13}, 683+189\sqrt{13}, 266+72\sqrt{13}, 434+120\sqrt{13}, 7+1\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(7+1\sqrt{13}, 307+85\sqrt{13}, 383+105\sqrt{13}, 307+85\sqrt{13}, 232+64\sqrt{13}, 232+64\sqrt{13}, 307+85\sqrt{13}, 383+105\sqrt{13}, 307+85\sqrt{13}, 7+1\sqrt{13}, 307+85\sqrt{13}, 383+105\sqrt{13}, 232+64\sqrt{13}, 307+85\sqrt{13}, 7+1\sqrt{13})$

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ und $(x, y, z) = (\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, 2 + \sqrt{13}, 2 + \sqrt{13})$:

$\frac{1}{2}(19+5\sqrt{13}, 19+5\sqrt{13}, 34+8\sqrt{13}, 34+8\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 19+5\sqrt{13}, 176+48\sqrt{13}, 343+95\sqrt{13}, 1711+473\sqrt{13}, 34+8\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 808+224\sqrt{13}, 19+5\sqrt{13}, 202+56\sqrt{13}, 19+5\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(11+3\sqrt{13}, 44+12\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 44+12\sqrt{13}, 34+8\sqrt{13}, 34+8\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 44+12\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 34+8\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13})$

$\frac{1}{2}(11+3\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 34+8\sqrt{13}, 34+8\sqrt{13}, 44+12\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 44+12\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13}, 143+39\sqrt{13}, 119+33\sqrt{13}, 34+8\sqrt{13}, 44+12\sqrt{13}, 11+3\sqrt{13})$

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$ und $(x, y, z) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}, 5 + \sqrt{17}, \frac{9}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{17})$:

$\frac{1}{2}(13+3\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 117+27\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 117+27\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 477+115\sqrt{17}, 477+115\sqrt{17}, 837+203\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 117+27\sqrt{17}, 264+64\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(9+1\sqrt{17}, 117+27\sqrt{17}, 106+24\sqrt{17}, 106+24\sqrt{17}, 117+27\sqrt{17}, 106+24\sqrt{17}, 117+27\sqrt{17}, 234+56\sqrt{17}, 298+72\sqrt{17}, 9+1\sqrt{17}, 234+56\sqrt{17}, 477+115\sqrt{17}, 106+24\sqrt{17}, 234+56\sqrt{17}, 9+1\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(9+1\sqrt{17}, 137+33\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 137+33\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 137+33\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 137+33\sqrt{17}, 9+1\sqrt{17}, 137+33\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 84+20\sqrt{17}, 137+33\sqrt{17}, 9+1\sqrt{17})$

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$ und $(x, y, z) = (\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}, \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}, 3 + \sqrt{17})$:

$\frac{1}{2}(21+5\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 189+45\sqrt{17}, 781+189\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 357+85\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 264+64\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(13+3\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 33+7\sqrt{17}, 33+7\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 33+7\sqrt{17}, 52+12\sqrt{17}, 161+39\sqrt{17}, 393+95\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 161+39\sqrt{17}, 644+156\sqrt{17}, 33+7\sqrt{17}, 161+39\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17})$

$\frac{1}{2}(13+3\sqrt{17}, 66+16\sqrt{17}, 106+24\sqrt{17}, 66+16\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 66+16\sqrt{17}, 106+24\sqrt{17}, 66+16\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17}, 66+16\sqrt{17}, 106+24\sqrt{17}, 21+5\sqrt{17}, 66+16\sqrt{17}, 13+3\sqrt{17})$

Für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ und $(x, y, z) = (1 + \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7})$:

$(11+4\sqrt{7}, 11+4\sqrt{7}, 16+6\sqrt{7}, 11+4\sqrt{7}, 44+16\sqrt{7}, 11+4\sqrt{7}, 77+28\sqrt{7}, 127+48\sqrt{7}, 743 + 280\sqrt{7}, 11 + 4\sqrt{7}, 44 + 16\sqrt{7}, 371 + 140\sqrt{7}, 11 + 4\sqrt{7}, 144 + 54\sqrt{7}, 11 + 4\sqrt{7})$

$(8+2\sqrt{7}, 16+6\sqrt{7}, 64+24\sqrt{7}, 16+6\sqrt{7}, 16+6\sqrt{7}, 16+6\sqrt{7}, 112+42\sqrt{7}, 64+24\sqrt{7}, 112+42\sqrt{7}, 8+2\sqrt{7}, 16+6\sqrt{7}, 64+24\sqrt{7}, 16+6\sqrt{7}, 112+42\sqrt{7}, 8+2\sqrt{7})$

$(8+2\sqrt{7}, 53+20\sqrt{7}, 53+20\sqrt{7}, 53+20\sqrt{7}, 11+4\sqrt{7}, 11+4\sqrt{7}, 23+8\sqrt{7}, 53+20\sqrt{7}, 23+8\sqrt{7}, 8+2\sqrt{7}, 53+20\sqrt{7}, 53+20\sqrt{7}, 11+4\sqrt{7}, 23+8\sqrt{7}, 8+2\sqrt{7})$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 49$, definierendem Polynom $t^3 - t^2 - 2t + 1$, $\rho = 2\cos(\pi/7)$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-2 + \rho + \rho^2, -1 + 2\rho + \rho^2, -1 + \rho + 2\rho^2)$:

$(-2+3\rho+4\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -7+10\rho+13\rho^2, -4+5\rho+9\rho^2, -6+15\rho+16\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -27+45\rho+54\rho^2, -36+52\rho+65\rho^2, -110+159\rho+200\rho^2, -4+5\rho+9\rho^2, -6+15\rho+16\rho^2, -44+64\rho+80\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -20+29\rho+37\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2)$

$(1+1\rho+2\rho^2, -6+15\rho+16\rho^2, -5+9\rho+11\rho^2, -5+9\rho+11\rho^2, -7+10\rho+13\rho^2, -5+9\rho+11\rho^2, -7+10\rho+13\rho^2, -20+29\rho+37\rho^2, -31+46\rho+57\rho^2, 1+1\rho+2\rho^2, -23+36\rho+44\rho^2, -66+95\rho+120\rho^2, -5+9\rho+11\rho^2, -20+29\rho+37\rho^2, 1+1\rho+2\rho^2)$

$(1+1\rho+2\rho^2, -11+17\rho+22\rho^2, -15+22\rho+29\rho^2, -11+17\rho+22\rho^2, -4+5\rho+9\rho^2, -4+5\rho+9\rho^2, -8+12\rho+17\rho^2, -15+22\rho+29\rho^2, -8+12\rho+17\rho^2, 1+1\rho+2\rho^2, -11+17\rho+22\rho^2, -15+22\rho+29\rho^2, -4+5\rho+9\rho^2, -8+12\rho+17\rho^2, 1+1\rho+2\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 49$, definierendem Polynom $t^3 - t^2 - 2t + 1$, $\rho = 2\cos(\pi/7)$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-2 + \rho + \rho^2, -2 + \rho + 2\rho^2, -2 + \rho + 2\rho^2)$:

$(-2+3\rho+4\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -4+8\rho+9\rho^2, -4+8\rho+9\rho^2, -15+22\rho+29\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -28+40\rho+52\rho^2, -47+72\rho+88\rho^2, -191+277\rho+346\rho^2, -4+8\rho+9\rho^2, -15+22\rho+29\rho^2, -80+121\rho+149\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -20+29\rho+37\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2)$

$(1+1\rho+2\rho^2, -7+10\rho+13\rho^2, -17+25\rho+31\rho^2, -7+10\rho+13\rho^2, -4+8\rho+9\rho^2, -4+8\rho+9\rho^2, -16+28\rho+33\rho^2, -17+25\rho+31\rho^2, -16+28\rho+33\rho^2, 1+1\rho+2\rho^2, -7+10\rho+13\rho^2, -17+25\rho+31\rho^2, -4+8\rho+9\rho^2, -16+28\rho+33\rho^2, 1+1\rho+2\rho^2)$

$(1+1\rho+2\rho^2, -16+28\rho+33\rho^2, -17+25\rho+31\rho^2, -16+28\rho+33\rho^2, -4+8\rho+9\rho^2, -4+8\rho+9\rho^2, -7+10\rho+13\rho^2, -17+25\rho+31\rho^2, -7+10\rho+13\rho^2, 1+1\rho+2\rho^2, -16+28\rho+33\rho^2, -17+25\rho+31\rho^2, -4+8\rho+9\rho^2, -7+10\rho+13\rho^2, 1+1\rho+2\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 49$, definierendem Polynom $t^3 - t^2 - 2t + 1$, $\rho = 2\cos(\pi/7)$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-1 + \rho + \rho^2, -1 + \rho + \rho^2, -1 + 2\rho + \rho^2)$:

$(-2+3\rho+4\rho^2, -16+28\rho+33\rho^2, -117+169\rho+211\rho^2, -46+67\rho+84\rho^2, -4+5\rho+9\rho^2, -3+5\rho+6\rho^2, -28+40\rho+52\rho^2, -16+28\rho+33\rho^2, -3+5\rho+6\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -4+5\rho+9\rho^2, -3+5\rho+6\rho^2, -3+5\rho+6\rho^2, -6+15\rho+16\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2)$

$(-2+3\rho+4\rho^2, -6+15\rho+16\rho^2, -3+5\rho+6\rho^2, -3+5\rho+6\rho^2, -4+5\rho+9\rho^2, -3+5\rho+6\rho^2, -4+5\rho+9\rho^2, -16+28\rho+33\rho^2, -46+67\rho+84\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -28+40\rho+52\rho^2, -117+169\rho+211\rho^2, -3+5\rho+6\rho^2, -16+28\rho+33\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2)$

$(-2+3\rho+4\rho^2, -11+17\rho+22\rho^2, -12+20\rho+24\rho^2, -11+17\rho+22\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -5+9\rho+11\rho^2, -12+20\rho+24\rho^2, -5+9\rho+11\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -11+17\rho+22\rho^2, -12+20\rho+24\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2, -5+9\rho+11\rho^2, -2+3\rho+4\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 49$, definierendem Polynom $t^3 - t^2 - 2t + 1$, $\rho = 2\cos(\pi/7)$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-1 + \rho^2, -2 + 4\rho + 4\rho^2, -4 + 4\rho + 5\rho^2)$:

$(-1 + 1\rho + 3\rho^2, -1 + 1\rho + 3\rho^2, -49 + 73\rho + 91\rho^2, -44 + 64\rho + 80\rho^2, -49 + 73\rho + 91\rho^2, -1 + 1\rho + 3\rho^2, -209 + 305\rho + 379\rho^2, -209 + 305\rho + 379\rho^2, -270 + 391\rho + 488\rho^2, -44 + 64\rho + 80\rho^2, -49 + 73\rho + 91\rho^2, -71 + 106\rho + 133\rho^2, -1 + 1\rho + 3\rho^2, -7 + 10\rho + 13\rho^2, -1 + 1\rho + 3\rho^2)$

$(0 + 1\rho + 1\rho^2, -49 + 73\rho + 91\rho^2, -47 + 72\rho + 88\rho^2, -47 + 72\rho + 88\rho^2, -49 + 73\rho + 91\rho^2, -47 + 72\rho + 88\rho^2, -49 + 73\rho + 91\rho^2, -75 + 108\rho + 136\rho^2, -80 + 116\rho + 145\rho^2, 0 + 1\rho + 1\rho^2, -75 + 108\rho + 136\rho^2, -110 + 159\rho + 200\rho^2, -47 + 72\rho + 88\rho^2, -75 + 108\rho + 136\rho^2, 0 + 1\rho + 1\rho^2)$

$(0 + 1\rho + 1\rho^2, -56 + 81\rho + 101\rho^2, -64 + 97\rho + 121\rho^2, -56 + 81\rho + 101\rho^2, -44 + 64\rho + 80\rho^2, -44 + 64\rho + 80\rho^2, -56 + 81\rho + 101\rho^2, -64 + 97\rho + 121\rho^2, -56 + 81\rho + 101\rho^2, 0 + 1\rho + 1\rho^2, -56 + 81\rho + 101\rho^2, -64 + 97\rho + 121\rho^2, -44 + 64\rho + 80\rho^2, -56 + 81\rho + 101\rho^2, 0 + 1\rho + 1\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 81$, definierendem Polynom $t^3 - 3t - 1$, $\rho = 2\cos(\pi/9)$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-1 + \rho + \rho^2, -1 + \rho + \rho^2, -1 + \rho + \rho^2)$:

$(3 + 5\rho + 2\rho^2, 2 + 7\rho + 4\rho^2, 8 + 28\rho + 16\rho^2, 2 + 7\rho + 4\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 17 + 49\rho + 25\rho^2, 8 + 28\rho + 16\rho^2, 17 + 49\rho + 25\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 2 + 7\rho + 4\rho^2, 8 + 28\rho + 16\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 17 + 49\rho + 25\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2)$

$(3 + 5\rho + 2\rho^2, 2 + 7\rho + 4\rho^2, 8 + 28\rho + 16\rho^2, 2 + 7\rho + 4\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 17 + 49\rho + 25\rho^2, 8 + 28\rho + 16\rho^2, 17 + 49\rho + 25\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 2 + 7\rho + 4\rho^2, 8 + 28\rho + 16\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 17 + 49\rho + 25\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2)$

$(3 + 5\rho + 2\rho^2, 17 + 49\rho + 25\rho^2, 8 + 28\rho + 16\rho^2, 17 + 49\rho + 25\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 2 + 7\rho + 4\rho^2, 8 + 28\rho + 16\rho^2, 2 + 7\rho + 4\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 17 + 49\rho + 25\rho^2, 8 + 28\rho + 16\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2, 2 + 7\rho + 4\rho^2, 3 + 5\rho + 2\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 148$, definierendem Polynom t^3+3t^2-t-1, $\rho \approx -3,2143$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-1-\rho, \rho^2, -2-\rho+2\rho^2)$:

$(0+0\rho+1\rho^2, 0+0\rho+1\rho^2, -12-8\rho+45\rho^2, -12-8\rho+40\rho^2, -12-8\rho+45\rho^2, 0+0\rho+1\rho^2, -56-40\rho+185\rho^2, -56-40\rho+185\rho^2, -71-50\rho+230\rho^2, -12-8\rho+40\rho^2, -12-8\rho+45\rho^2, -17-16\rho+61\rho^2, 0+0\rho+1\rho^2, -1+0\rho+5\rho^2, 0+0\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2, -12-8\rho+45\rho^2, -11-8\rho+44\rho^2, -11-8\rho+44\rho^2, -12-8\rho+45\rho^2, -11-8\rho+44\rho^2, -12-8\rho+45\rho^2, -19-12\rho+64\rho^2, -20-14\rho+67\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2, -19-12\rho+64\rho^2, -27-18\rho+90\rho^2, -11-8\rho+44\rho^2, -19-12\rho+64\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2, -15-10\rho+49\rho^2, -15-14\rho+57\rho^2, -15-10\rho+49\rho^2, -12-8\rho+40\rho^2, -12-8\rho+40\rho^2, -15-10\rho+49\rho^2, -15-14\rho+57\rho^2, -15-10\rho+49\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2, -15-10\rho+49\rho^2, -15-14\rho+57\rho^2, -12-8\rho+40\rho^2, -15-10\rho+49\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 148$, definierendem Polynom t^3+3t^2-t-1, $\rho \approx -3,2143$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-1+2\rho+\rho^2, -2\rho, -2+\rho^2)$:

$(1+2\rho+2\rho^2, 1+2\rho+2\rho^2, 1-2\rho+6\rho^2, 0+0\rho+4\rho^2, 1-2\rho+6\rho^2, 1+2\rho+2\rho^2, -7-6\rho+26\rho^2, -7-6\rho+26\rho^2, -19-12\rho+64\rho^2, 0+0\rho+4\rho^2, 1-2\rho+6\rho^2, -6-2\rho+24\rho^2, 1+2\rho+2\rho^2, -2-2\rho+12\rho^2, 1+2\rho+2\rho^2)$

$(2-2\rho+0\rho^2, 1-2\rho+6\rho^2, 1-4\rho+4\rho^2, 1-4\rho+4\rho^2, 1-2\rho+6\rho^2, 1-4\rho+4\rho^2, 1-2\rho+6\rho^2, -3-4\rho+16\rho^2, -7-6\rho+26\rho^2, 2-2\rho+0\rho^2, -3-4\rho+16\rho^2, -11-8\rho+44\rho^2, 1-4\rho+4\rho^2, -3-4\rho+16\rho^2, 2-2\rho+0\rho^2)$

$(2-2\rho+0\rho^2, -2-2\rho+8\rho^2, -2-2\rho+12\rho^2, -2-2\rho+8\rho^2, 0+0\rho+4\rho^2, 0+0\rho+4\rho^2, -2-2\rho+8\rho^2, -2-2\rho+12\rho^2, -2-2\rho+8\rho^2, 2-2\rho+0\rho^2, -2-2\rho+8\rho^2, -2-2\rho+12\rho^2, 0+0\rho+4\rho^2, -2-2\rho+8\rho^2, 2-2\rho+0\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 148$, definierendem Polynom t^3+3t^2-t-1, $\rho \approx -0,4608$ und $(x^2, y^2, z^2) = (1-3\rho-\rho^2, 18-20\rho-8\rho^2, 18-23\rho-9\rho^2)$:

$(7-8\rho-3\rho^2, 7-8\rho-3\rho^2, 495-576\rho-227\rho^2, 452-528\rho-208\rho^2, 495-576\rho-227\rho^2, 7-8\rho-3\rho^2, 2039-2384\rho-939\rho^2, 2039-2384\rho-939\rho^2, 2422-2834\rho-1116\rho^2, 452-528\rho-208\rho^2, 495-576\rho-227\rho^2, 641-750\rho-295\rho^2, 7-8\rho-3\rho^2, 33-38\rho-15\rho^2, 7-8\rho-3\rho^2)$

$(4-2\rho-1\rho^2, 495-576\rho-227\rho^2, 489-568\rho-224\rho^2, 489-568\rho-224\rho^2, 495-576\rho-227\rho^2, 489-568\rho-224\rho^2, 495-576\rho-227\rho^2, 661-772\rho-304\rho^2, 684-800\rho-315\rho^2, 4-2\rho-1\rho^2, 661-772\rho-304\rho^2, 878-1026\rho-404\rho^2, 489-568\rho-224\rho^2, 661-772\rho-304\rho^2, 4-2\rho-1\rho^2)$

$(4-2\rho-1\rho^2, 532-622\rho-245\rho^2, 612-714\rho-281\rho^2, 532-622\rho-245\rho^2, 452-528\rho-208\rho^2, 452-528\rho-208\rho^2, 532-622\rho-245\rho^2, 612-714\rho-281\rho^2, 532-622\rho-245\rho^2, 4-2\rho-1\rho^2, 532-622\rho-245\rho^2, 612-714\rho-281\rho^2, 452-528\rho-208\rho^2, 532-622\rho-245\rho^2, 4-2\rho-1\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 148$, definierendem Polynom t^3+3t^2-t-1, $\rho \approx -0,4608$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2) = (2-2\rho-\rho^2,\, 5-8\rho-3\rho^2,\, 5-8\rho-3\rho^2)$:

$(10-10\rho-4\rho^2,\, 10-10\rho-4\rho^2,\, 46-50\rho-20\rho^2,\, 46-50\rho-20\rho^2,\, 96-112\rho-44\rho^2,\, 10-10\rho-4\rho^2,\, 228-264\rho-104\rho^2,\, 330-386\rho-152\rho^2,\, 878-1026\rho-404\rho^2,\, 46-50\rho-20\rho^2,\, 96-112\rho-44\rho^2,\, 330-386\rho-152\rho^2,\, 10-10\rho-4\rho^2,\, 70-82\rho-32\rho^2,\, 10-10\rho-4\rho^2)$

$(5-6\rho-2\rho^2,\, 57-66\rho-26\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 57-66\rho-26\rho^2,\, 46-50\rho-20\rho^2,\, 46-50\rho-20\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 5-6\rho-2\rho^2,\, 57-66\rho-26\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 46-50\rho-20\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 5-6\rho-2\rho^2)$

$(5-6\rho-2\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 46-50\rho-20\rho^2,\, 46-50\rho-20\rho^2,\, 57-66\rho-26\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 57-66\rho-26\rho^2,\, 5-6\rho-2\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 113-132\rho-52\rho^2,\, 46-50\rho-20\rho^2,\, 57-66\rho-26\rho^2,\, 5-6\rho-2\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 148$, definierendem Polynom t^3+3t^2-t-1, $\rho \approx 0,6751$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2) = (3\rho+\rho^2,\, 4+8\rho+2\rho^2,\, 3+11\rho+3\rho^2)$:

$(4+10\rho+3\rho^2,\, 4+10\rho+3\rho^2,\, 48+114\rho+31\rho^2,\, 36+88\rho+24\rho^2,\, 48+114\rho+31\rho^2,\, 4+10\rho+3\rho^2,\, 196+482\rho+131\rho^2,\, 196+482\rho+131\rho^2,\, 317+786\rho+214\rho^2,\, 36+88\rho+24\rho^2,\, 48+114\rho+31\rho^2,\, 97+238\rho+65\rho^2,\, 4+10\rho+3\rho^2,\, 25+62\rho+17\rho^2,\, 4+10\rho+3\rho^2)$

$(3+4\rho+1\rho^2,\, 48+114\rho+31\rho^2,\, 45+104\rho+28\rho^2,\, 45+104\rho+28\rho^2,\, 48+114\rho+31\rho^2,\, 45+104\rho+28\rho^2,\, 48+114\rho+31\rho^2,\, 89+220\rho+60\rho^2,\, 108+268\rho+73\rho^2,\, 3+4\rho+1\rho^2,\, 89+220\rho+60\rho^2,\, 169+418\rho+114\rho^2,\, 45+104\rho+28\rho^2,\, 89+220\rho+60\rho^2,\, 3+4\rho+1\rho^2)$

$(3+4\rho+1\rho^2,\, 55+136\rho+37\rho^2,\, 75+180\rho+49\rho^2,\, 55+136\rho+37\rho^2,\, 36+88\rho+24\rho^2,\, 36+88\rho+24\rho^2,\, 55+136\rho+37\rho^2,\, 75+180\rho+49\rho^2,\, 55+136\rho+37\rho^2,\, 3+4\rho+1\rho^2,\, 55+136\rho+37\rho^2,\, 75+180\rho+49\rho^2,\, 36+88\rho+24\rho^2,\, 55+136\rho+37\rho^2,\, 3+4\rho+1\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 148$, definierendem Polynom t^3+3t^2-t-1, $\rho \approx 0,6751$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2) = (1+4\rho+\rho^2,\, 1+4\rho+\rho^2,\, 2+4\rho+\rho^2)$:

$(6+14\rho+4\rho^2,\, 45+104\rho+28\rho^2,\, 317+786\rho+214\rho^2,\, 89+220\rho+60\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 89+220\rho+60\rho^2,\, 45+104\rho+28\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 6+14\rho+4\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 37+82\rho+22\rho^2,\, 6+14\rho+4\rho^2)$

$(6+14\rho+4\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 45+104\rho+28\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 89+220\rho+60\rho^2,\, 45+104\rho+28\rho^2,\, 89+220\rho+60\rho^2,\, 6+14\rho+4\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 45+104\rho+28\rho^2,\, 9+22\rho+6\rho^2,\, 89+220\rho+60\rho^2,\, 6+14\rho+4\rho^2)$

$(6+14\rho+4\rho^2,\, 42+102\rho+28\rho^2,\, 36+88\rho+24\rho^2,\, 42+102\rho+28\rho^2,\, 6+14\rho+4\rho^2,\, 6+14\rho+4\rho^2,\, 14+30\rho+8\rho^2,\, 36+88\rho+24\rho^2,\, 14+30\rho+8\rho^2,\, 6+14\rho+4\rho^2,\, 42+102\rho+28\rho^2,\, 36+88\rho+24\rho^2,\, 6+14\rho+4\rho^2,\, 14+30\rho+8\rho^2,\, 6+14\rho+4\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 169$, definierendem Polynom t^3+t^2-4t+1, $\rho \approx -2,6511$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2) = (1-\rho,\, -2+\rho^2,\, -2+\rho^2)$:

$(4-4\rho+1\rho^2,\, 4-4\rho+1\rho^2,\, 5-5\rho+1\rho^2,\, 5-5\rho+1\rho^2,\, 6-17\rho+11\rho^2,\, 4-4\rho+1\rho^2,\, 8-20\rho+12\rho^2,\, 13-48\rho+28\rho^2,\, 73-318\rho+193\rho^2,\, 5-5\rho+1\rho^2,\, 6-17\rho+11\rho^2,\, 39-165\rho+100\rho^2,\, 4-4\rho+1\rho^2,\, 11-41\rho+24\rho^2,\, 4-4\rho+1\rho^2)$

$(1-2\rho+1\rho^2,\, 2-5\rho+3\rho^2,\, 4-15\rho+10\rho^2,\, 2-5\rho+3\rho^2,\, 5-5\rho+1\rho^2,\, 5-5\rho+1\rho^2,\, 5-21\rho+13\rho^2,\, 4-15\rho+10\rho^2,\, 5-21\rho+13\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2,\, 2-5\rho+3\rho^2,\, 4-15\rho+10\rho^2,\, 5-5\rho+1\rho^2,\, 5-21\rho+13\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2)$

$(1-2\rho+1\rho^2,\, 5-21\rho+13\rho^2,\, 4-15\rho+10\rho^2,\, 5-21\rho+13\rho^2,\, 5-5\rho+1\rho^2,\, 5-5\rho+1\rho^2,\, 2-5\rho+3\rho^2,\, 4-15\rho+10\rho^2,\, 2-5\rho+3\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2,\, 5-21\rho+13\rho^2,\, 4-15\rho+10\rho^2,\, 5-5\rho+1\rho^2,\, 2-5\rho+3\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 229$, definierendem Polynom t^3-4t+1, $\rho \approx -2,1149$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2) = (-\rho,\, 2-8\rho+4\rho^2,\, 1-9\rho+4\rho^2)$:

$(1-2\rho+1\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2,\, 73-322\rho+153\rho^2,\, 68-304\rho+144\rho^2,\, 73-322\rho+153\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2,\, 297-1322\rho+625\rho^2,\, 297-1322\rho+625\rho^2,\, 333-1485\rho+702\rho^2,\, 68-304\rho+144\rho^2,\, 73-322\rho+153\rho^2,\, 90-385\rho+181\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2,\, 2-9\rho+5\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2)$

$(0+0\rho+1\rho^2,\, 73-322\rho+153\rho^2,\, 73-320\rho+152\rho^2,\, 73-320\rho+152\rho^2,\, 73-322\rho+153\rho^2,\, 73-320\rho+152\rho^2,\, 73-322\rho+153\rho^2,\, 89-396\rho+188\rho^2,\, 91-403\rho+191\rho^2,\, 0+0\rho+1\rho^2,\, 89-396\rho+188\rho^2,\, 109-485\rho+230\rho^2,\, 73-320\rho+152\rho^2,\, 89-396\rho+188\rho^2,\, 0+0\rho+1\rho^2)$

$(0+0\rho+1\rho^2,\, 76-340\rho+161\rho^2,\, 88-376\rho+177\rho^2,\, 76-340\rho+161\rho^2,\, 68-304\rho+144\rho^2,\, 68-304\rho+144\rho^2,\, 76-340\rho+161\rho^2,\, 88-376\rho+177\rho^2,\, 76-340\rho+161\rho^2,\, 0+0\rho+1\rho^2,\, 76-340\rho+161\rho^2,\, 88-376\rho+177\rho^2,\, 68-304\rho+144\rho^2,\, 76-340\rho+161\rho^2,\, 0+0\rho+1\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 229$, definierendem Polynom t^3-4t+1, $\rho \approx -2,1149$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2) = (1-\rho,\, -1-\rho+\rho^2,\, -1-2\rho+\rho^2)$:

$(4-4\rho+1\rho^2,\, 4-4\rho+1\rho^2,\, 5-13\rho+6\rho^2,\, 3-7\rho+3\rho^2,\, 5-13\rho+6\rho^2,\, 4-4\rho+1\rho^2,\, 12-52\rho+25\rho^2,\, 12-52\rho+25\rho^2,\, 36-153\rho+72\rho^2,\, 3-7\rho+3\rho^2,\, 5-13\rho+6\rho^2,\, 17-60\rho+28\rho^2,\, 4-4\rho+1\rho^2,\, 10-37\rho+17\rho^2,\, 4-4\rho+1\rho^2)$

$(1-2\rho+1\rho^2,\, 5-13\rho+6\rho^2,\, 2-9\rho+5\rho^2,\, 2-9\rho+5\rho^2,\, 5-13\rho+6\rho^2,\, 2-9\rho+5\rho^2,\, 5-13\rho+6\rho^2,\, 10-37\rho+17\rho^2,\, 16-68\rho+32\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2,\, 10-37\rho+17\rho^2,\, 29-114\rho+53\rho^2,\, 2-9\rho+5\rho^2,\, 10-37\rho+17\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2)$

$(1-2\rho+1\rho^2,\, 4-17\rho+8\rho^2,\, 8-25\rho+12\rho^2,\, 4-17\rho+8\rho^2,\, 3-7\rho+3\rho^2,\, 3-7\rho+3\rho^2,\, 4-17\rho+8\rho^2,\, 8-25\rho+12\rho^2,\, 4-17\rho+8\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2,\, 4-17\rho+8\rho^2,\, 8-25\rho+12\rho^2,\, 3-7\rho+3\rho^2,\, 4-17\rho+8\rho^2,\, 1-2\rho+1\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 229$, definierendem Polynom $t^3 - 4t + 1$, $\rho \approx 0,2541$ und $(x^2, y^2, z^2) = (3 - \rho^2, 7 - \rho - 2\rho^2, 7 - 2\rho^2)$:

$(16-1\rho-4\rho^2, 16-1\rho-4\rho^2, 49-4\rho-12\rho^2, 45-2\rho-11\rho^2, 115-7\rho-29\rho^2, 16-1\rho-4\rho^2, 248-16\rho-63\rho^2, 380-25\rho-96\rho^2, 1260-81\rho-320\rho^2, 45-2\rho-11\rho^2, 115-7\rho-29\rho^2, 517-34\rho-131\rho^2, 16-1\rho-4\rho^2, 138-9\rho-35\rho^2, 16-1\rho-4\rho^2)$

$(9-1\rho-2\rho^2, 60-4\rho-15\rho^2, 144-9\rho-36\rho^2, 60-4\rho-15\rho^2, 49-4\rho-12\rho^2, 49-4\rho-12\rho^2, 163-11\rho-41\rho^2, 144-9\rho-36\rho^2, 163-11\rho-41\rho^2, 9-1\rho-2\rho^2, 60-4\rho-15\rho^2, 144-9\rho-36\rho^2, 49-4\rho-12\rho^2, 163-11\rho-41\rho^2, 9-1\rho-2\rho^2)$

$(9-1\rho-2\rho^2, 138-9\rho-35\rho^2, 138-9\rho-35\rho^2, 138-9\rho-35\rho^2, 45-2\rho-11\rho^2, 45-2\rho-11\rho^2, 64-4\rho-16\rho^2, 138-9\rho-35\rho^2, 64-4\rho-16\rho^2, 9-1\rho-2\rho^2, 138-9\rho-35\rho^2, 138-9\rho-35\rho^2, 45-2\rho-11\rho^2, 64-4\rho-16\rho^2, 9-1\rho-2\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 229$, definierendem Polynom $t^3 - 4t + 1$, $\rho \approx 1,8608$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-2 + \rho + \rho^2, -2 + 2\rho + \rho^2, -1 + 2\rho + \rho^2)$:

$(-1+5\rho+3\rho^2, -1+5\rho+3\rho^2, -3+11\rho+6\rho^2, 0+7\rho+4\rho^2, -6+23\rho+13\rho^2, -1+5\rho+3\rho^2, -15+52\rho+28\rho^2, -20+76\rho+41\rho^2, -96+335\rho+180\rho^2, 0+7\rho+4\rho^2, -6+23\rho+13\rho^2, -40+152\rho+81\rho^2, -1+5\rho+3\rho^2, -16+60\rho+32\rho^2, -1+5\rho+3\rho^2)$

$(2+3\rho+1\rho^2, -3+11\rho+6\rho^2, -11+38\rho+21\rho^2, -3+11\rho+6\rho^2, -3+11\rho+6\rho^2, -3+11\rho+6\rho^2, -16+60\rho+32\rho^2, -11+38\rho+21\rho^2, -16+60\rho+32\rho^2, 2+3\rho+1\rho^2, -3+11\rho+6\rho^2, -11+38\rho+21\rho^2, -3+11\rho+6\rho^2, -16+60\rho+32\rho^2, 2+3\rho+1\rho^2)$

$(2+3\rho+1\rho^2, -5+29\rho+15\rho^2, -8+32\rho+17\rho^2, -5+29\rho+15\rho^2, 0+7\rho+4\rho^2, 0+7\rho+4\rho^2, -4+15\rho+8\rho^2, -8+32\rho+17\rho^2, -4+15\rho+8\rho^2, 2+3\rho+1\rho^2, -5+29\rho+15\rho^2, -8+32\rho+17\rho^2, 0+7\rho+4\rho^2, -4+15\rho+8\rho^2, 2+3\rho+1\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 257$, definierendem Polynom $t^3 + 3t^2 - 2t - 1$, $\rho \approx -3,4909$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-1 - \rho, -2 + \rho^2, -1 + \rho^2)$:

$(0+0\rho+1\rho^2, 0+0\rho+1\rho^2, -2-5\rho+9\rho^2, 1-5\rho+7\rho^2, -3-5\rho+11\rho^2, 0+0\rho+1\rho^2, -11-20\rho+40\rho^2, -12-20\rho+44\rho^2, -19-40\rho+76\rho^2, 1-5\rho+7\rho^2, -3-5\rho+11\rho^2, -6-9\rho+25\rho^2, 0+0\rho+1\rho^2, -1-1\rho+6\rho^2, 0+0\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2, -2-5\rho+9\rho^2, -5-9\rho+18\rho^2, -2-5\rho+9\rho^2, -2-5\rho+9\rho^2, -2-5\rho+9\rho^2, -4-11\rho+20\rho^2, -5-9\rho+18\rho^2, -4-11\rho+20\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2, -2-5\rho+9\rho^2, -5-9\rho+18\rho^2, -2-5\rho+9\rho^2, -4-11\rho+20\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2, -2-5\rho+13\rho^2, -4-7\rho+16\rho^2, -2-5\rho+13\rho^2, 1-5\rho+7\rho^2, 1-5\rho+7\rho^2, -3-5\rho+11\rho^2, -4-7\rho+16\rho^2, -3-5\rho+11\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2, -2-5\rho+13\rho^2, -4-7\rho+16\rho^2, 1-5\rho+7\rho^2, -3-5\rho+11\rho^2, 1+2\rho+1\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 257$, definierendem Polynom $t^3 + 3t^2 - 2t - 1$, $\rho \approx -0,3434$ und $(x^2, y^2, z^2) = (2 - 3\rho - \rho^2, 5 - 5\rho - 2\rho^2, 6 - 5\rho - 2\rho^2)$:

$(12 - 11\rho - 4\rho^2, 12 - 11\rho - 4\rho^2, 44 - 40\rho - 15\rho^2, 33 - 30\rho - 11\rho^2, 70 - 61\rho - 23\rho^2, 12 - 11\rho - 4\rho^2, 201 - 180\rho - 68\rho^2, 251 - 229\rho - 86\rho^2, 720 - 656\rho - 247\rho^2, 33 - 30\rho - 11\rho^2, 70 - 61\rho - 23\rho^2, 280 - 255\rho - 96\rho^2, 12 - 11\rho - 4\rho^2, 102 - 93\rho - 35\rho^2, 12 - 11\rho - 4\rho^2)$

$(7 - 5\rho - 2\rho^2, 44 - 40\rho - 15\rho^2, 121 - 109\rho - 41\rho^2, 44 - 40\rho - 15\rho^2, 44 - 40\rho - 15\rho^2, 44 - 40\rho - 15\rho^2, 161 - 146\rho - 55\rho^2, 121 - 109\rho - 41\rho^2, 161 - 146\rho - 55\rho^2, 7 - 5\rho - 2\rho^2, 44 - 40\rho - 15\rho^2, 121 - 109\rho - 41\rho^2, 44 - 40\rho - 15\rho^2, 161 - 146\rho - 55\rho^2, 7 - 5\rho - 2\rho^2)$

$(7 - 5\rho - 2\rho^2, 85 - 77\rho - 29\rho^2, 102 - 93\rho - 35\rho^2, 85 - 77\rho - 29\rho^2, 33 - 30\rho - 11\rho^2, 33 - 30\rho - 11\rho^2, 57 - 50\rho - 19\rho^2, 102 - 93\rho - 35\rho^2, 57 - 50\rho - 19\rho^2, 7 - 5\rho - 2\rho^2, 85 - 77\rho - 29\rho^2, 102 - 93\rho - 35\rho^2, 33 - 30\rho - 11\rho^2, 57 - 50\rho - 19\rho^2, 7 - 5\rho - 2\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 257$, definierendem Polynom $t^3 + 3t^2 - 2t - 1$, $\rho \approx 0,8342$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-1 + 3\rho + \rho^2, 6 + 16\rho + 4\rho^2, 4 + 19\rho + 5\rho^2)$:

$(3 + 7\rho + 2\rho^2, 3 + 7\rho + 2\rho^2, 131 + 407\rho + 106\rho^2, 116 + 368\rho + 96\rho^2, 131 + 407\rho + 106\rho^2, 3 + 7\rho + 2\rho^2, 531 + 1695\rho + 442\rho^2, 531 + 1695\rho + 442\rho^2, 649 + 2074\rho + 541\rho^2, 116 + 368\rho + 96\rho^2, 131 + 407\rho + 106\rho^2, 174 + 555\rho + 145\rho^2, 3 + 7\rho + 2\rho^2, 14 + 35\rho + 9\rho^2, 3 + 7\rho + 2\rho^2)$

$(4 + 1\rho + 0\rho^2, 131 + 407\rho + 106\rho^2, 129 + 400\rho + 104\rho^2, 129 + 400\rho + 104\rho^2, 131 + 407\rho + 106\rho^2, 129 + 400\rho + 104\rho^2, 131 + 407\rho + 106\rho^2, 181 + 568\rho + 148\rho^2, 189 + 595\rho + 155\rho^2, 4 + 1\rho + 0\rho^2, 181 + 568\rho + 148\rho^2, 249 + 786\rho + 205\rho^2, 129 + 400\rho + 104\rho^2, 181 + 568\rho + 148\rho^2, 4 + 1\rho + 0\rho^2)$

$(4 + 1\rho + 0\rho^2, 140 + 445\rho + 116\rho^2, 164 + 521\rho + 136\rho^2, 140 + 445\rho + 116\rho^2, 116 + 368\rho + 96\rho^2, 116 + 368\rho + 96\rho^2, 140 + 445\rho + 116\rho^2, 164 + 521\rho + 136\rho^2, 140 + 445\rho + 116\rho^2, 4 + 1\rho + 0\rho^2, 140 + 445\rho + 116\rho^2, 164 + 521\rho + 136\rho^2, 116 + 368\rho + 96\rho^2, 140 + 445\rho + 116\rho^2, 4 + 1\rho + 0\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 257$, definierendem Polynom $t^3 + 3t^2 - 2t - 1$, $\rho \approx 0,8342$ und $(x^2, y^2, z^2) = (4\rho + \rho^2, 4\rho + \rho^2, 2 + 4\rho + \rho^2)$:

$(5 + 11\rho + 3\rho^2, 36 + 108\rho + 28\rho^2, 204 + 648\rho + 169\rho^2, 88 + 280\rho + 73\rho^2, 9 + 27\rho + 7\rho^2, 6 + 19\rho + 5\rho^2, 48 + 153\rho + 40\rho^2, 36 + 108\rho + 28\rho^2, 6 + 19\rho + 5\rho^2, 5 + 11\rho + 3\rho^2, 9 + 27\rho + 7\rho^2, 6 + 19\rho + 5\rho^2, 6 + 19\rho + 5\rho^2, 17 + 50\rho + 13\rho^2, 5 + 11\rho + 3\rho^2)$

$(5 + 11\rho + 3\rho^2, 17 + 50\rho + 13\rho^2, 6 + 19\rho + 5\rho^2, 6 + 19\rho + 5\rho^2, 9 + 27\rho + 7\rho^2, 6 + 19\rho + 5\rho^2, 9 + 27\rho + 7\rho^2, 36 + 108\rho + 28\rho^2, 88 + 280\rho + 73\rho^2, 5 + 11\rho + 3\rho^2, 48 + 153\rho + 40\rho^2, 204 + 648\rho + 169\rho^2, 6 + 19\rho + 5\rho^2, 36 + 108\rho + 28\rho^2, 5 + 11\rho + 3\rho^2)$

$(5 + 11\rho + 3\rho^2, 20 + 64\rho + 17\rho^2, 24 + 76\rho + 20\rho^2, 20 + 64\rho + 17\rho^2, 5 + 11\rho + 3\rho^2, 5 + 11\rho + 3\rho^2, 14 + 35\rho + 9\rho^2, 24 + 76\rho + 20\rho^2, 14 + 35\rho + 9\rho^2, 5 + 11\rho + 3\rho^2, 20 + 64\rho + 17\rho^2, 24 + 76\rho + 20\rho^2, 5 + 11\rho + 3\rho^2, 14 + 35\rho + 9\rho^2, 5 + 11\rho + 3\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 316$, definierendem Polynom t^3+t^2-4t-2, $\rho \approx -2,3429$ und $(x^2,\ y^2,\ z^2) = (-\rho,\ -2-2\rho+2\rho^2,\ -3-3\rho+2\rho^2)$:

$(1-2\rho+1\rho^2,\ 1-2\rho+1\rho^2,\ -23-38\rho+29\rho^2,\ -20-32\rho+24\rho^2,\ -23-38\rho+29\rho^2,\ 1-2\rho+1\rho^2,\ -103-162\rho+121\rho^2,\ -103-162\rho+121\rho^2,\ -145-230\rho+171\rho^2,\ -20-32\rho+24\rho^2,\ -23-38\rho+29\rho^2,\ -38-66\rho+48\rho^2,\ 1-2\rho+1\rho^2,\ -6-10\rho+8\rho^2,\ 1-2\rho+1\rho^2)$

$(0+0\rho+1\rho^2,\ -23-38\rho+29\rho^2,\ -23-36\rho+28\rho^2,\ -23-36\rho+28\rho^2,\ -23-38\rho+29\rho^2,\ -23-36\rho+28\rho^2,\ -23-38\rho+29\rho^2,\ -39-64\rho+48\rho^2,\ -45-72\rho+54\rho^2,\ 0+0\rho+1\rho^2,\ -39-64\rho+48\rho^2,\ -65-106\rho+79\rho^2,\ -23-36\rho+28\rho^2,\ -39-64\rho+48\rho^2,\ 0+0\rho+1\rho^2)$

$(0+0\rho+1\rho^2,\ -28-44\rho+33\rho^2,\ -32-56\rho+41\rho^2,\ -28-44\rho+33\rho^2,\ -20-32\rho+24\rho^2,\ -20-32\rho+24\rho^2,\ -28-44\rho+33\rho^2,\ -32-56\rho+41\rho^2,\ -28-44\rho+33\rho^2,\ 0+0\rho+1\rho^2,\ -28-44\rho+33\rho^2,\ -32-56\rho+41\rho^2,\ -20-32\rho+24\rho^2,\ -28-44\rho+33\rho^2,\ 0+0\rho+1\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 316$, definierendem Polynom t^3+t^2-4t-2, $\rho \approx -0,4707$ und $(x^2,\ y^2,\ z^2) = (4-\rho^2,\ 4-\rho-\rho^2,\ 7-\rho-2\rho^2)$:

$(18-2\rho-4\rho^2,\ 175-22\rho-41\rho^2,\ 975-122\rho-229\rho^2,\ 625-78\rho-147\rho^2,\ 49-6\rho-11\rho^2,\ 23-2\rho-5\rho^2,\ 175-22\rho-41\rho^2,\ 175-22\rho-41\rho^2,\ 23-2\rho-5\rho^2,\ 18-2\rho-4\rho^2,\ 49-6\rho-11\rho^2,\ 23-2\rho-5\rho^2,\ 23-2\rho-5\rho^2,\ 49-6\rho-11\rho^2,\ 18-2\rho-4\rho^2)$

$(14-2\rho-3\rho^2,\ 49-6\rho-11\rho^2,\ 27-4\rho-6\rho^2,\ 27-4\rho-6\rho^2,\ 49-6\rho-11\rho^2,\ 27-4\rho-6\rho^2,\ 49-6\rho-11\rho^2,\ 163-20\rho-38\rho^2,\ 451-56\rho-106\rho^2,\ 14-2\rho-3\rho^2,\ 163-20\rho-38\rho^2,\ 729-90\rho-171\rho^2,\ 27-4\rho-6\rho^2,\ 163-20\rho-38\rho^2,\ 14-2\rho-3\rho^2)$

$(14-2\rho-3\rho^2,\ 64-8\rho-15\rho^2,\ 100-12\rho-23\rho^2,\ 64-8\rho-15\rho^2,\ 18-2\rho-4\rho^2,\ 18-2\rho-4\rho^2,\ 64-8\rho-15\rho^2,\ 100-12\rho-23\rho^2,\ 64-8\rho-15\rho^2,\ 14-2\rho-3\rho^2,\ 64-8\rho-15\rho^2,\ 100-12\rho-23\rho^2,\ 18-2\rho-4\rho^2,\ 64-8\rho-15\rho^2,\ 14-2\rho-3\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 316$, definierendem Polynom t^3+t^2-4t-2, $\rho \approx 1,8136$ und $(x^2,\ y^2,\ z^2) = (1+\rho,\ 2\rho+\rho^2,\ 3\rho+\rho^2)$:

$(4+4\rho+1\rho^2,\ 4+4\rho+1\rho^2,\ 10+22\rho+8\rho^2,\ 6+14\rho+5\rho^2,\ 10+22\rho+8\rho^2,\ 4+4\rho+1\rho^2,\ 36+92\rho+33\rho^2,\ 36+92\rho+33\rho^2,\ 82+206\rho+73\rho^2,\ 6+14\rho+5\rho^2,\ 10+22\rho+8\rho^2,\ 32+72\rho+25\rho^2,\ 4+4\rho+1\rho^2,\ 14+34\rho+12\rho^2,\ 4+4\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2,\ 10+22\rho+8\rho^2,\ 7+18\rho+7\rho^2,\ 7+18\rho+7\rho^2,\ 10+22\rho+8\rho^2,\ 7+18\rho+7\rho^2,\ 10+22\rho+8\rho^2,\ 23+54\rho+19\rho^2,\ 33+82\rho+29\rho^2,\ 1+2\rho+1\rho^2,\ 23+54\rho+19\rho^2,\ 56+136\rho+48\rho^2,\ 7+18\rho+7\rho^2,\ 23+54\rho+19\rho^2,\ 1+2\rho+1\rho^2)$

$(1+2\rho+1\rho^2,\ 11+28\rho+10\rho^2,\ 19+40\rho+14\rho^2,\ 11+28\rho+10\rho^2,\ 6+14\rho+5\rho^2,\ 6+14\rho+5\rho^2,\ 11+28\rho+10\rho^2,\ 19+40\rho+14\rho^2,\ 11+28\rho+10\rho^2,\ 1+2\rho+1\rho^2,\ 11+28\rho+10\rho^2,\ 19+40\rho+14\rho^2,\ 6+14\rho+5\rho^2,\ 11+28\rho+10\rho^2,\ 1+2\rho+1\rho^2)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 725$, definierendem Polynom $t^4 + t^3 - 3t^2 - t + 1$, $\rho \approx -2,0953$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-\rho, -2 + 4\rho + 4\rho^2 - 4\rho^3, -3 + 3\rho + 4\rho^2 - 4\rho^3)$:

$(1 - 2\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, 1 - 2\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, -79 + 118\rho + 185\rho^2 - 168\rho^3, -76 + 112\rho + 176\rho^2 - 160\rho^3, -79 + 118\rho + 185\rho^2 - 168\rho^3, 1 - 2\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, -327 + 486\rho + 753\rho^2 - 688\rho^3, -327 + 486\rho + 753\rho^2 - 688\rho^3, -360 + 533\rho + 829\rho^2 - 757\rho^3, -76 + 112\rho + 176\rho^2 - 160\rho^3, -79 + 118\rho + 185\rho^2 - 168\rho^3, -89 + 137\rho + 212\rho^2 - 195\rho^3, 1 - 2\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, -1 + 1\rho + 4\rho^2 - 3\rho^3, 1 - 2\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3)$

$(0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3, -79+118\rho+185\rho^2-168\rho^3, -79+120\rho+184\rho^2-168\rho^3, -79+120\rho + 184\rho^2 - 168\rho^3, -79 + 118\rho + 185\rho^2 - 168\rho^3, -79 + 120\rho + 184\rho^2 - 168\rho^3, -79 + 118\rho + 185\rho^2 - 168\rho^3, -95 + 140\rho + 220\rho^2 - 200\rho^3, -96 + 143\rho + 222\rho^2-203\rho^3, 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3, -95+140\rho+220\rho^2-200\rho^3, -112+165\rho+261\rho^2-237\rho^3, -79+120\rho+184\rho^2-168\rho^3, -95+140\rho+220\rho^2-200\rho^3, 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

$(0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3, -84+124\rho+193\rho^2-176\rho^3, -88+136\rho+209\rho^2-192\rho^3, -84+124\rho + 193\rho^2 - 176\rho^3, -76 + 112\rho + 176\rho^2 - 160\rho^3, -76 + 112\rho + 176\rho^2 - 160\rho^3, -84 + 124\rho + 193\rho^2 - 176\rho^3, -88 + 136\rho + 209\rho^2 - 192\rho^3, -84 + 124\rho + 193\rho^2-176\rho^3, 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3, -84+124\rho+193\rho^2-176\rho^3, -88+136\rho+209\rho^2-192\rho^3, -76+112\rho+176\rho^2-160\rho^3, -84+124\rho+193\rho^2-176\rho^3, 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 725$, definierendem Polynom $t^4 + t^3 - 3t^2-t+1$, $\rho \approx -2,0953$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-2+\rho^2, -1+\rho^2-\rho^3, -1+\rho^2-\rho^3)$:

$(0 + 1\rho + 1\rho^2 - 1\rho^3, 0 + 1\rho + 1\rho^2 - 1\rho^3, -6 + 10\rho + 15\rho^2 - 13\rho^3, -6 + 10\rho + 15\rho^2 - 13\rho^3, -8 + 11\rho + 22\rho^2 - 19\rho^3, 0 + 1\rho + 1\rho^2 - 1\rho^3, -28 + 40\rho + 68\rho^2 - 60\rho^3, -34 + 55\rho + 81\rho^2 - 76\rho^3, -63 + 93\rho + 146\rho^2 - 132\rho^3, -6 + 10\rho + 15\rho^2 - 13\rho^3, -8+11\rho+22\rho^2-19\rho^3, -17+32\rho+44\rho^2-43\rho^3, 0+1\rho+1\rho^2-1\rho^3, -1 + 5\rho + 5\rho^2 - 6\rho^3, 0 + 1\rho + 1\rho^2 - 1\rho^3)$

$(3+1\rho-1\rho^2-1\rho^3, -7+10\rho+17\rho^2-15\rho^3, -11+17\rho+26\rho^2-24\rho^3, -7+10\rho+17\rho^2-15\rho^3, -6+10\rho+15\rho^2-13\rho^3, -6+10\rho+15\rho^2-13\rho^3, -9+17\rho+24\rho^2-23\rho^3, -11+17\rho+26\rho^2-24\rho^3, -9+17\rho+24\rho^2-23\rho^3, 3+1\rho-1\rho^2-1\rho^3, -7+10\rho+17\rho^2-15\rho^3, -11+17\rho+26\rho^2-24\rho^3, -6+10\rho+15\rho^2-13\rho^3, -9+17\rho+24\rho^2 - 23\rho^3, 3 + 1\rho - 1\rho^2 - 1\rho^3)$

$(3+1\rho-1\rho^2-1\rho^3, -9+17\rho+24\rho^2-23\rho^3, -11+17\rho+26\rho^2-24\rho^3, -9+17\rho+24\rho^2-23\rho^3, -6+10\rho+15\rho^2-13\rho^3, -6+10\rho+15\rho^2-13\rho^3, -7+10\rho+17\rho^2-15\rho^3, -11+17\rho+26\rho^2-24\rho^3, -7+10\rho+17\rho^2-15\rho^3, 3+1\rho-1\rho^2-1\rho^3, -9+17\rho+24\rho^2-23\rho^3, -11+17\rho+26\rho^2-24\rho^3, -6+10\rho+15\rho^2-13\rho^3, -7+10\rho+17\rho^2 - 15\rho^3, 3 + 1\rho - 1\rho^2 - 1\rho^3)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 725$, definierendem Polynom $t^4 + t^3 - 3t^2 - t + 1$, $\rho \approx -0,7376$ und $(x^2, y^2, z^2) = (1 - 4\rho + \rho^3, 1 - 6\rho + \rho^2 + 2\rho^3, 1 - 6\rho + \rho^2 + 2\rho^3)$:

$(8 - 19\rho + 2\rho^2 + 6\rho^3, 8 - 19\rho + 2\rho^2 + 6\rho^3, 12 - 23\rho + 1\rho^2 + 7\rho^3, 12 - 23\rho + 1\rho^2 + 7\rho^3, 49 - 115\rho + 10\rho^2 + 36\rho^3, 8 - 19\rho + 2\rho^2 + 6\rho^3, 60 - 140\rho + 12\rho^2 + 44\rho^3, 133 - 310\rho + 25\rho^2 + 97\rho^3, 820 - 1926\rho + 158\rho^2 + 603\rho^3, 12 - 23\rho + 1\rho^2 + 7\rho^3, 49 - 115\rho + 10\rho^2 + 36\rho^3, 415 - 975\rho + 80\rho^2 + 305\rho^3, 8 - 19\rho + 2\rho^2 + 6\rho^3, 102 - 241\rho + 21\rho^2 + 76\rho^3, 8 - 19\rho + 2\rho^2 + 6\rho^3)$

$(5 - 11\rho + 2\rho^2 + 4\rho^3, 15 - 35\rho + 3\rho^2 + 11\rho^3, 45 - 106\rho + 9\rho^2 + 33\rho^3, 15 - 35\rho + 3\rho^2 + 11\rho^3, 12 - 23\rho + 1\rho^2 + 7\rho^3, 12 - 23\rho + 1\rho^2 + 7\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 45 - 106\rho + 9\rho^2 + 33\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 5 - 11\rho + 2\rho^2 + 4\rho^3, 15 - 35\rho + 3\rho^2 + 11\rho^3, 45 - 106\rho + 9\rho^2 + 33\rho^3, 12 - 23\rho + 1\rho^2 + 7\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 5 - 11\rho + 2\rho^2 + 4\rho^3)$

$(5 - 11\rho + 2\rho^2 + 4\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 45 - 106\rho + 9\rho^2 + 33\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 12 - 23\rho + 1\rho^2 + 7\rho^3, 12 - 23\rho + 1\rho^2 + 7\rho^3, 15 - 35\rho + 3\rho^2 + 11\rho^3, 45 - 106\rho + 9\rho^2 + 33\rho^3, 15 - 35\rho + 3\rho^2 + 11\rho^3, 5 - 11\rho + 2\rho^2 + 4\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 45 - 106\rho + 9\rho^2 + 33\rho^3, 12 - 23\rho + 1\rho^2 + 7\rho^3, 15 - 35\rho + 3\rho^2 + 11\rho^3, 5 - 11\rho + 2\rho^2 + 4\rho^3)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 725$, definierendem Polynom $t^4 + t^3 - 3t^2 - t + 1$, $\rho \approx -0,7376$ und $(x^2, y^2, z^2) = (1 - 3\rho + \rho^3, 3 - 7\rho + 2\rho^3, 3 - 7\rho + 2\rho^3)$:

$(6 - 13\rho + 1\rho^2 + 4\rho^3, 6 - 13\rho + 1\rho^2 + 4\rho^3, 21 - 50\rho + 5\rho^2 + 16\rho^3, 21 - 50\rho + 5\rho^2 + 16\rho^3, 53 - 116\rho + 8\rho^2 + 36\rho^3, 6 - 13\rho + 1\rho^2 + 4\rho^3, 112 - 256\rho + 20\rho^2 + 80\rho^3, 168 - 396\rho + 33\rho^2 + 124\rho^3, 505 - 1187\rho + 98\rho^2 + 372\rho^3, 21 - 50\rho + 5\rho^2 + 16\rho^3, 53 - 116\rho + 8\rho^2 + 36\rho^3, 200 - 467\rho + 38\rho^2 + 146\rho^3, 6 - 13\rho + 1\rho^2 + 4\rho^3, 45 - 106\rho + 9\rho^2 + 33\rho^3, 6 - 13\rho + 1\rho^2 + 4\rho^3)$

$(3 - 7\rho + 1\rho^2 + 2\rho^3, 28 - 64\rho + 5\rho^2 + 20\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 28 - 64\rho + 5\rho^2 + 20\rho^3, 21 - 50\rho + 5\rho^2 + 16\rho^3, 21 - 50\rho + 5\rho^2 + 16\rho^3, 60 - 140\rho + 12\rho^2 + 44\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 60 - 140\rho + 12\rho^2 + 44\rho^3, 3 - 7\rho + 1\rho^2 + 2\rho^3, 28 - 64\rho + 5\rho^2 + 20\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 21 - 50\rho + 5\rho^2 + 16\rho^3, 60 - 140\rho + 12\rho^2 + 44\rho^3, 3 - 7\rho + 1\rho^2 + 2\rho^3)$

$(3 - 7\rho + 1\rho^2 + 2\rho^3, 60 - 140\rho + 12\rho^2 + 44\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 60 - 140\rho + 12\rho^2 + 44\rho^3, 21 - 50\rho + 5\rho^2 + 16\rho^3, 21 - 50\rho + 5\rho^2 + 16\rho^3, 28 - 64\rho + 5\rho^2 + 20\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 28 - 64\rho + 5\rho^2 + 20\rho^3, 3 - 7\rho + 1\rho^2 + 2\rho^3, 60 - 140\rho + 12\rho^2 + 44\rho^3, 60 - 135\rho + 10\rho^2 + 42\rho^3, 21 - 50\rho + 5\rho^2 + 16\rho^3, 28 - 64\rho + 5\rho^2 + 20\rho^3, 3 - 7\rho + 1\rho^2 + 2\rho^3)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 1957$, definierendem Polynom $t^4 - 4t^2 + t + 1$, $\rho \approx -2,0615$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-\rho, -2 + 8\rho^2 - 4\rho^3, -3 - \rho + 8\rho - 4\rho^3)$:

$(1 - 2\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, 1 - 2\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, -127 - 66\rho + 545\rho^2 - 264\rho^3, -124 - 64\rho + 528\rho^2 - 256\rho^3, -127 - 66\rho + 545\rho^2 - 264\rho^3, 1 - 2\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, -519 - 266\rho + 2209\rho^2 - 1072\rho^3, -519 - 266\rho + 2209\rho^2 - 1072\rho^3, -552 - 285\rho + 2350\rho^2 - 1140\rho^3, -124 - 64\rho + 528\rho^2 - 256\rho^3, -127 - 66\rho + 545\rho^2 - 264\rho^3, -137 - 73\rho + 597\rho^2 - 290\rho^3, 1 - 2\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, -1 - 1\rho + 5\rho^2 - 2\rho^3, 1 - 2\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3)$

$(0 + 0\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, -127 - 66\rho + 545\rho^2 - 264\rho^3, -127 - 64\rho + 544\rho^2 - 264\rho^3, -127 - 64\rho + 544\rho^2 - 264\rho^3, -127 - 66\rho + 545\rho^2 - 264\rho^3, -127 - 64\rho + 544\rho^2 - 264\rho^3, -127 - 66\rho + 545\rho^2 - 264\rho^3, -143 - 76\rho + 612\rho^2 - 296\rho^3, -144 - 75\rho + 615\rho^2 - 298\rho^3, 0 + 0\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, -143 - 76\rho + 612\rho^2 - 296\rho^3, -160 - 85\rho + 686\rho^2 - 332\rho^3, -127 - 64\rho + 544\rho^2 - 264\rho^3, -143 - 76\rho + 612\rho^2 - 296\rho^3, 0 + 0\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3)$

$(0 + 0\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, -132 - 68\rho + 561\rho^2 - 272\rho^3, -136 - 72\rho + 593\rho^2 - 288\rho^3, -132 - 68\rho + 561\rho^2 - 272\rho^3, -124 - 64\rho + 528\rho^2 - 256\rho^3, -124 - 64\rho + 528\rho^2 - 256\rho^3, -132 - 68\rho + 561\rho^2 - 272\rho^3, -136 - 72\rho + 593\rho^2 - 288\rho^3, -132 - 68\rho + 561\rho^2 - 272\rho^3, 0 + 0\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3, -132 - 68\rho + 561\rho^2 - 272\rho^3, -136 - 72\rho + 593\rho^2 - 288\rho^3, -124 - 64\rho + 528\rho^2 - 256\rho^3, -132 - 68\rho + 561\rho^2 - 272\rho^3, 0 + 0\rho + 1\rho^2 + 0\rho^3)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 1957$, definierendem Polynom $t^4 - 4t^2 + t + 1$, $\rho \approx -0,3963$ und $(x^2, y^2, z^2) = (1 - 4\rho + \rho^3, 6 - 11\rho - \rho^2 + 3\rho^3, 6 - 11\rho - \rho^2 + 3\rho^3)$:

$(8 - 12\rho - 1\rho^2 + 3\rho^3, 8 - 12\rho - 1\rho^2 + 3\rho^3, 65 - 97\rho - 10\rho^2 + 25\rho^3, 65 - 97\rho - 10\rho^2 + 25\rho^3, 113 - 172\rho - 17\rho^2 + 45\rho^3, 8 - 12\rho - 1\rho^2 + 3\rho^3, 312 - 476\rho - 48\rho^2 + 124\rho^3, 412 - 623\rho - 65\rho^2 + 162\rho^3, 866 - 1318\rho - 136\rho^2 + 343\rho^3, 65 - 97\rho - 10\rho^2 + 25\rho^3, 113 - 172\rho - 17\rho^2 + 45\rho^3, 297 - 446\rho - 47\rho^2 + 116\rho^3, 8 - 12\rho - 1\rho^2 + 3\rho^3, 51 - 77\rho - 8\rho^2 + 20\rho^3, 8 - 12\rho - 1\rho^2 + 3\rho^3)$

$(5 - 4\rho - 1\rho^2 + 1\rho^3, 78 - 119\rho - 12\rho^2 + 31\rho^3, 136 - 207\rho - 21\rho^2 + 54\rho^3, 78 - 119\rho - 12\rho^2 + 31\rho^3, 65 - 97\rho - 10\rho^2 + 25\rho^3, 65 - 97\rho - 10\rho^2 + 25\rho^3, 132 - 196\rho - 21\rho^2 + 51\rho^3, 136 - 207\rho - 21\rho^2 + 54\rho^3, 132 - 196\rho - 21\rho^2 + 51\rho^3, 5 - 4\rho - 1\rho^2 + 1\rho^3, 78 - 119\rho - 12\rho^2 + 31\rho^3, 136 - 207\rho - 21\rho^2 + 54\rho^3, 65 - 97\rho - 10\rho^2 + 25\rho^3, 132 - 196\rho - 21\rho^2 + 51\rho^3, 5 - 4\rho - 1\rho^2 + 1\rho^3)$

$(5 - 4\rho - 1\rho^2 + 1\rho^3, 132 - 196\rho - 21\rho^2 + 51\rho^3, 136 - 207\rho - 21\rho^2 + 54\rho^3, 132 - 196\rho - 21\rho^2 + 51\rho^3, 65 - 97\rho - 10\rho^2 + 25\rho^3, 65 - 97\rho - 10\rho^2 + 25\rho^3, 78 - 119\rho - 12\rho^2 + 31\rho^3, 136 - 207\rho - 21\rho^2 + 54\rho^3, 78 - 119\rho - 12\rho^2 + 31\rho^3, 5 - 4\rho - 1\rho^2 + 1\rho^3, 132 - 196\rho - 21\rho^2 + 51\rho^3, 136 - 207\rho - 21\rho^2 + 54\rho^3, 65 - 97\rho - 10\rho^2 + 25\rho^3, 78 - 119\rho - 12\rho^2 + 31\rho^3, 5 - 4\rho - 1\rho^2 + 1\rho^3)$

Für $k=\mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k=1957$, definierendem Polynom $t^4-4t^2+t+1,\ \rho\approx 0,6938$ und $(x^2,\,y^2,\,z^2)=(2+4\rho-\rho^2-\rho^3,\,1+7\rho-\rho^2-2\rho^3,\,1+7\rho-\rho^2-2\rho^3)$:

$(12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3,\ 12+25\rho-5\rho^2-7\rho^3,\ 60+140\rho-28\rho^2-40\rho^3,\ 12+25\rho-5\rho^2-7\rho^3,\ 12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3,\ 12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3,\ 135+320\rho-64\rho^2-91\rho^3,\ 60+140\rho-28\rho^2-40\rho^3,\ 135+320\rho-64\rho^2-91\rho^3,\ 12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3,\ 12+25\rho-5\rho^2-7\rho^3,\ 60+140\rho-28\rho^2-40\rho^3,\ 12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3,\ 135+320\rho-64\rho^2-91\rho^3,\ 12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3)$

$(7+17\rho-3\rho^2-5\rho^3,\ 15+35\rho-7\rho^2-10\rho^3,\ 51+124\rho-24\rho^2-35\rho^3,\ 15+35\rho-7\rho^2-10\rho^3,\ 12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3,\ 12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3,\ 75+183\rho-36\rho^2-52\rho^3,\ 51+124\rho-24\rho^2-35\rho^3,\ 75+183\rho-36\rho^2-52\rho^3,\ 7+17\rho-3\rho^2-5\rho^3,\ 15+35\rho-7\rho^2-10\rho^3,\ 51+124\rho-24\rho^2-35\rho^3,\ 12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3,\ 75+183\rho-36\rho^2-52\rho^3,\ 7+17\rho-3\rho^2-5\rho^3)$

$(7+17\rho-3\rho^2-5\rho^3,\ 75+183\rho-36\rho^2-52\rho^3,\ 51+124\rho-24\rho^2-35\rho^3,\ 75+183\rho-36\rho^2-52\rho^3,\ 12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3,\ 12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3,\ 15+35\rho-7\rho^2-10\rho^3,\ 51+124\rho-24\rho^2-35\rho^3,\ 15+35\rho-7\rho^2-10\rho^3,\ 7+17\rho-3\rho^2-5\rho^3,\ 75+183\rho-36\rho^2-52\rho^3,\ 51+124\rho-24\rho^2-35\rho^3,\ 12+21\rho-5\rho^2-6\rho^3,\ 15+35\rho-7\rho^2-10\rho^3,\ 7+17\rho-3\rho^2-5\rho^3)$

Für $k=\mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k=1957$, definierendem Polynom $t^4-4t^2+t+1,\ \rho\approx 1,7640$ und $(x^2,\,y^2,\,z^2)=(-1-2\rho+\rho^2+\rho^3,\,-1-2\rho+\rho^2+\rho^3,\,-1+2\rho+\rho^2)$:

$(0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3,\ -8-12\rho+27\rho^2+15\rho^3,\ -56-88\rho+177\rho^2+100\rho^3,\ -20-32\rho+64\rho^2+36\rho^3,\ 0-5\rho+6\rho^2+4\rho^3,\ -1-3\rho+5\rho^2+3\rho^3,\ -13-25\rho+45\rho^2+26\rho^3,\ -8-12\rho+27\rho^2+15\rho^3,\ -1-3\rho+5\rho^2+3\rho^3,\ 0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3,\ 0-5\rho+6\rho^2+4\rho^3,\ -1-3\rho+5\rho^2+3\rho^3,\ -1-3\rho+5\rho^2+3\rho^3,\ -5-8\rho+16\rho^2+9\rho^3,\ 0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3)$

$(0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3,\ -5-8\rho+16\rho^2+9\rho^3,\ -1-3\rho+5\rho^2+3\rho^3,\ -1-3\rho+5\rho^2+3\rho^3,\ 0-5\rho+6\rho^2+4\rho^3,\ -1-3\rho+5\rho^2+3\rho^3,\ 0-5\rho+6\rho^2+4\rho^3,\ -8-12\rho+27\rho^2+15\rho^3,\ -20-32\rho+64\rho^2+36\rho^3,\ 0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3,\ -13-25\rho+45\rho^2+26\rho^3,\ -56-88\rho+177\rho^2+100\rho^3,\ -1-3\rho+5\rho^2+3\rho^3,\ -8-12\rho+27\rho^2+15\rho^3,\ 0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3)$

$(0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3,\ -6-10\rho+20\rho^2+11\rho^3,\ -4-12\rho+20\rho^2+12\rho^3,\ -6-10\rho+20\rho^2+11\rho^3,\ 0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3,\ 0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3,\ -1-1\rho+8\rho^2+4\rho^3,\ -4-12\rho+20\rho^2+12\rho^3,\ -1-1\rho+8\rho^2+4\rho^3,\ 0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3,\ -6-10\rho+20\rho^2+11\rho^3,\ -4-12\rho+20\rho^2+12\rho^3,\ 0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3,\ -1-1\rho+8\rho^2+4\rho^3,\ 0+1\rho+3\rho^2+1\rho^3)$

Für $k=\mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k=2000$, definierendem Polynom $t^4-4t^3+t^2+6t+1$, $\rho\approx 1,7640$ und $(x^2,\,y^2,\,z^2)=(-3\rho+\rho^2,\,-2-3\rho+4\rho^2-\rho^3,\,-3-5\rho+5\rho^2-\rho^3)$:

$(0-12\rho+10\rho^2-2\rho^3,\ 0-12\rho+10\rho^2-2\rho^3,\ -1-24\rho+20\rho^2-4\rho^3,\ -1-14\rho+11\rho^2-2\rho^3,\ -8-42\rho+39\rho^2-8\rho^3,\ 0-12\rho+10\rho^2-2\rho^3,\ -20-106\rho+97\rho^2-20\rho^3,\ -29-142\rho+128\rho^2-26\rho^3,\ -137-670\rho+607\rho^2-124\rho^3,\ -1-14\rho+11\rho^2-2\rho^3,\ -8-42\rho+39\rho^2-8\rho^3,\ -63-314\rho+284\rho^2-58\rho^3,\ 0-12\rho+10\rho^2-2\rho^3,\ -32-160\rho+146\rho^2-30\rho^3,\ 0-12\rho+10\rho^2-2\rho^3)$

$(-1-6\rho+8\rho^2-2\rho^3,\ -8-42\rho+39\rho^2-8\rho^3,\ -4-20\rho+19\rho^2-4\rho^3,\ -4-20\rho+19\rho^2-4\rho^3,\ -1-24\rho+20\rho^2-4\rho^3,\ -4-20\rho+19\rho^2-4\rho^3,\ -1-24\rho+20\rho^2-4\rho^3,\ -18-90\rho+80\rho^2-16\rho^3,\ -35-174\rho+157\rho^2-32\rho^3,\ -1-6\rho+8\rho^2-2\rho^3,\ -21-118\rho+107\rho^2-22\rho^3,\ -81-402\rho+363\rho^2-74\rho^3,\ -4-20\rho+19\rho^2-4\rho^3,\ -18-90\rho+80\rho^2-16\rho^3,\ -1-6\rho+8\rho^2-2\rho^3)$

$(-1-6\rho+8\rho^2-2\rho^3,\ -11-54\rho+49\rho^2-10\rho^3,\ -12-66\rho+59\rho^2-12\rho^3,\ -11-54\rho+49\rho^2-10\rho^3,\ -1-14\rho+11\rho^2-2\rho^3,\ -1-14\rho+11\rho^2-2\rho^3,\ -6-34\rho+30\rho^2-6\rho^3,\ -12-66\rho+59\rho^2-12\rho^3,\ -6-34\rho+30\rho^2-6\rho^3,\ -1-6\rho+8\rho^2-2\rho^3,\ -11-54\rho+49\rho^2-10\rho^3,\ -12-66\rho+59\rho^2-12\rho^3,\ -1-14\rho+11\rho^2-2\rho^3,\ -6-34\rho+30\rho^2-6\rho^3,\ -1-6\rho+8\rho^2-2\rho^3)$

Für $k=\mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k=2777$, definierendem Polynom $t^4+2t^3-3t^2-5t+1$, $\rho\approx -2,2631$ und $(x^2,\,y^2,\,z^2)=(-2+\rho^2,\,-1+2\rho-\rho^3,\,-1+2\rho-\rho^3)$:

$(0+5\rho+1\rho^2-2\rho^3,\ 0+5\rho+1\rho^2-2\rho^3,\ -2+13\rho+2\rho^2-5\rho^3,\ -2+13\rho+2\rho^2-5\rho^3,\ -7+38\rho+5\rho^2-16\rho^3,\ 0+5\rho+1\rho^2-2\rho^3,\ -12+68\rho+8\rho^2-28\rho^3,\ -21+123\rho+13\rho^2-51\rho^3,\ -93+509\rho+56\rho^2-212\rho^3,\ -2+13\rho+2\rho^2-5\rho^3,\ -7+38\rho+5\rho^2-16\rho^3,\ -40+225\rho+25\rho^2-94\rho^3,\ 0+5\rho+1\rho^2-2\rho^3,\ -7+58\rho+5\rho^2-24\rho^3,\ 0+5\rho+1\rho^2-2\rho^3)$

$(3+5\rho-1\rho^2-2\rho^3,\ -3+17\rho+2\rho^2-7\rho^3,\ -7+40\rho+5\rho^2-17\rho^3,\ -3+17\rho+2\rho^2-7\rho^3,\ -2+13\rho+2\rho^2-5\rho^3,\ -2+13\rho+2\rho^2-5\rho^3,\ -8+48\rho+5\rho^2-20\rho^3,\ -7+40\rho+5\rho^2-17\rho^3,\ -8+48\rho+5\rho^2-20\rho^3,\ 3+5\rho-1\rho^2-2\rho^3,\ -3+17\rho+2\rho^2-7\rho^3,\ -7+40\rho+5\rho^2-17\rho^3,\ -2+13\rho+2\rho^2-5\rho^3,\ -8+48\rho+5\rho^2-20\rho^3,\ 3+5\rho-1\rho^2-2\rho^3)$

$(3+5\rho-1\rho^2-2\rho^3,\ -8+48\rho+5\rho^2-20\rho^3,\ -7+40\rho+5\rho^2-17\rho^3,\ -8+48\rho+5\rho^2-20\rho^3,\ -2+13\rho+2\rho^2-5\rho^3,\ -2+13\rho+2\rho^2-5\rho^3,\ -3+17\rho+2\rho^2-7\rho^3,\ -7+40\rho+5\rho^2-17\rho^3,\ -3+17\rho+2\rho^2-7\rho^3,\ 3+5\rho-1\rho^2-2\rho^3,\ -8+48\rho+5\rho^2-20\rho^3,\ -7+40\rho+5\rho^2-17\rho^3,\ -2+13\rho+2\rho^2-5\rho^3,\ -3+17\rho+2\rho^2-7\rho^3,\ 3+5\rho-1\rho^2-2\rho^3)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 2777$, definierendem Polynom $t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 5t + 1$, $\rho \approx -1,5157$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-1 - 3\rho + \rho^2 + \rho^3, 3 - 12\rho + \rho^2 + 3\rho^3, 1 - 15\rho + 2\rho^2 + 4\rho^3)$:

$(2 - 10\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3, 2 - 10\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3, 37 - 194\rho + 25\rho^2 + 52\rho^3, 29 - 160\rho + 21\rho^2 + 43\rho^3, 37 - 194\rho + 25\rho^2 + 52\rho^3, 2 - 10\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3, 146 - 818\rho + 106\rho^2 + 219\rho^3, 146 - 818\rho + 106\rho^2 + 219\rho^3, 209 - 1183\rho + 154\rho^2 + 317\rho^3, 29 - 160\rho + 21\rho^2 + 43\rho^3, 37 - 194\rho + 25\rho^2 + 52\rho^3, 60 - 339\rho + 45\rho^2 + 91\rho^3, 2 - 10\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3, 11 - 59\rho + 8\rho^2 + 16\rho^3, 2 - 10\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3)$

$(3 - 4\rho + 0\rho^2 + 1\rho^3, 37 - 194\rho + 25\rho^2 + 52\rho^3, 36 - 184\rho + 23\rho^2 + 49\rho^3, 36 - 184\rho + 23\rho^2 + 49\rho^3, 37 - 194\rho + 25\rho^2 + 52\rho^3, 36 - 184\rho + 23\rho^2 + 49\rho^3, 37 - 194\rho + 25\rho^2 + 52\rho^3, 60 - 332\rho + 43\rho^2 + 89\rho^3, 67 - 377\rho + 49\rho^2 + 101\rho^3, 3 - 4\rho + 0\rho^2 + 1\rho^3, 60 - 332\rho + 43\rho^2 + 89\rho^3, 100 - 559\rho + 73\rho^2 + 150\rho^3, 36 - 184\rho + 23\rho^2 + 49\rho^3, 60 - 332\rho + 43\rho^2 + 89\rho^3, 3 - 4\rho + 0\rho^2 + 1\rho^3)$

$(3 - 4\rho + 0\rho^2 + 1\rho^3, 40 - 224\rho + 29\rho^2 + 60\rho^3, 52 - 284\rho + 37\rho^2 + 76\rho^3, 40 - 224\rho + 29\rho^2 + 60\rho^3, 29 - 160\rho + 21\rho^2 + 43\rho^3, 29 - 160\rho + 21\rho^2 + 43\rho^3, 40 - 224\rho + 29\rho^2 + 60\rho^3, 52 - 284\rho + 37\rho^2 + 76\rho^3, 40 - 224\rho + 29\rho^2 + 60\rho^3, 3 - 4\rho + 0\rho^2 + 1\rho^3, 40 - 224\rho + 29\rho^2 + 60\rho^3, 52 - 284\rho + 37\rho^2 + 76\rho^3, 29 - 160\rho + 21\rho^2 + 43\rho^3, 40 - 224\rho + 29\rho^2 + 60\rho^3, 3 - 4\rho + 0\rho^2 + 1\rho^3)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 2777$, definierendem Polynom $t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 5t + 1$, $\rho \approx 0,1826$ und $(x^2, y^2, z^2) = (4 + 2\rho - 2\rho^2 - \rho^3, 4 + 3\rho - 2\rho^2 - \rho^3, 4 + 3\rho - 2\rho^2 - \rho^3)$:

$(19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3, 26+13\rho-10\rho^2-5\rho^3, 112+52\rho-44\rho^2-20\rho^3, 26+13\rho-10\rho^2-5\rho^3, 19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3, 19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3, 203+93\rho-80\rho^2-36\rho^3, 112+52\rho-44\rho^2-20\rho^3, 203+93\rho-80\rho^2-36\rho^3, 19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3, 26+13\rho-10\rho^2-5\rho^3, 112+52\rho-44\rho^2-20\rho^3, 19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3, 203+93\rho-80\rho^2-36\rho^3, 19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3)$

$(17+9\rho-6\rho^2-3\rho^3, 28+13\rho-11\rho^2-5\rho^3, 108+52\rho-43\rho^2-20\rho^3, 28+13\rho-11\rho^2-5\rho^3, 19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3, 19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3, 176+83\rho-70\rho^2-32\rho^3, 108+52\rho-43\rho^2-20\rho^3, 176+83\rho-70\rho^2-32\rho^3, 17+9\rho-6\rho^2-3\rho^3, 28+13\rho-11\rho^2-5\rho^3, 108+52\rho-43\rho^2-20\rho^3, 19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3, 176+83\rho-70\rho^2-32\rho^3, 17+9\rho-6\rho^2-3\rho^3)$

$(17+9\rho-6\rho^2-3\rho^3, 176+83\rho-70\rho^2-32\rho^3, 108+52\rho-43\rho^2-20\rho^3, 176+83\rho-70\rho^2-32\rho^3, 19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3, 19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3, 28+13\rho-11\rho^2-5\rho^3, 108+52\rho-43\rho^2-20\rho^3, 28+13\rho-11\rho^2-5\rho^3, 17+9\rho-6\rho^2-3\rho^3, 176+83\rho-70\rho^2-32\rho^3, 108+52\rho-43\rho^2-20\rho^3, 19+7\rho-7\rho^2-3\rho^3, 28+13\rho-11\rho^2-5\rho^3, 17+9\rho-6\rho^2-3\rho^3)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 2777$, definierendem Polynom $t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 5t + 1$, $\rho \approx 1,5962$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-2 + \rho + \rho^2, 4\rho + 6\rho^2 + 2\rho^3, -3 + 5\rho + 7\rho^2 + 2\rho^3)$:

$(0+3\rho+2\rho^2+0\rho^3,\ 0+3\rho+2\rho^2+0\rho^3,\ -32+155\rho+202\rho^2+56\rho^3,\ -32+144\rho+188\rho^2+52\rho^3,\ -32+155\rho+202\rho^2+56\rho^3,\ 0+3\rho+2\rho^2+0\rho^3,\ -144+635\rho+834\rho^2+232\rho^3,\ -144+635\rho+834\rho^2+232\rho^3,\ -168+736\rho+965\rho^2+268\rho^3,\ -32+144\rho+188\rho^2+52\rho^3,\ -32+155\rho+202\rho^2+56\rho^3,\ -44+193\rho+253\rho^2+70\rho^3,\ 0+3\rho+2\rho^2+0\rho^3,\ 0+9\rho+9\rho^2+2\rho^3,\ 0+3\rho+2\rho^2+0\rho^3)$

$(3+1\rho+0\rho^2+0\rho^3,\ -32+155\rho+202\rho^2+56\rho^3,\ -31+152\rho+200\rho^2+56\rho^3,\ -31+152\rho+200\rho^2+56\rho^3,\ -32+155\rho+202\rho^2+56\rho^3,\ -31+152\rho+200\rho^2+56\rho^3,\ -32+155\rho+202\rho^2+56\rho^3,\ -43+200\rho+260\rho^2+72\rho^3,\ -45+205\rho+267\rho^2+74\rho^3,\ 3+1\rho+0\rho^2+0\rho^3,\ -43+200\rho+260\rho^2+72\rho^3,\ -56+256\rho+333\rho^2+92\rho^3,\ -31+152\rho+200\rho^2+56\rho^3,\ -43+200\rho+260\rho^2+72\rho^3,\ 3+1\rho+0\rho^2+0\rho^3)$

$(3+1\rho+0\rho^2+0\rho^3,\ -37+165\rho+216\rho^2+60\rho^3,\ -41+185\rho+244\rho^2+68\rho^3,\ -37+165\rho+216\rho^2+60\rho^3,\ -32+144\rho+188\rho^2+52\rho^3,\ -32+144\rho+188\rho^2+52\rho^3,\ -37+165\rho+216\rho^2+60\rho^3,\ -41+185\rho+244\rho^2+68\rho^3,\ -37+165\rho+216\rho^2+60\rho^3,\ 3+1\rho+0\rho^2+0\rho^3,\ -37+165\rho+216\rho^2+60\rho^3,\ -41+185\rho+244\rho^2+68\rho^3,\ -32+144\rho+188\rho^2+52\rho^3,\ -37+165\rho+216\rho^2+60\rho^3,\ 3+1\rho+0\rho^2+0\rho^3)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 4352$, definierendem Polynom $t^4 - 8t^2 + 8t+1$, $\rho \approx -3,2227$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-\rho, -1-6\rho+2\rho^2+\rho^3, -1+5\rho-\rho^2-\rho^3)$:

$(1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ 2-4\rho+2\rho^2+0\rho^3,\ 1+8\rho-1\rho^2-2\rho^3,\ -1-10\rho+7\rho^2+0\rho^3,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ -1-8\rho+9\rho^2-2\rho^3,\ 0-12\rho+14\rho^2-4\rho^3,\ -5-38\rho+59\rho^2-20\rho^3,\ 1+8\rho-1\rho^2-2\rho^3,\ -1-10\rho+7\rho^2+0\rho^3,\ 0-24\rho+28\rho^2-8\rho^3,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ -1-8\rho+9\rho^2-2\rho^3,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

$(0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ 0-4\rho+3\rho^2+0\rho^3,\ 0-2\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ 0-4\rho+3\rho^2+0\rho^3,\ 2-4\rho+2\rho^2+0\rho^3,\ 2-4\rho+2\rho^2+0\rho^3,\ 0-6\rho+7\rho^2-2\rho^3,\ 0-2\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ 0-6\rho+7\rho^2-2\rho^3,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ 0-4\rho+3\rho^2+0\rho^3,\ 0-2\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ 2-4\rho+2\rho^2+0\rho^3,\ 0-6\rho+7\rho^2-2\rho^3,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

$(0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ 0-2\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ 3-2\rho+4\rho^2-2\rho^3,\ 0-2\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ 1+8\rho-1\rho^2-2\rho^3,\ 1+8\rho-1\rho^2-2\rho^3,\ 1+6\rho+0\rho^2-2\rho^3,\ 3-2\rho+4\rho^2-2\rho^3,\ 1+6\rho+0\rho^2-2\rho^3,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3,\ 0-2\rho+5\rho^2-2\rho^3,\ 3-2\rho+4\rho^2-2\rho^3,\ 1+8\rho-1\rho^2-2\rho^3,\ 1+6\rho+0\rho^2-2\rho^3,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 4352$, definierendem Polynom $t^4 - 8t^2 + 8t + 1$, $\rho \approx -0,1124$ und $(x^2, y^2, z^2) = (2-6\rho+\rho^2+\rho^3, 7-8\rho+\rho^3, 8-8\rho+\rho^3)$:

$(12-14\rho+1\rho^2+2\rho^3, 12-14\rho+1\rho^2+2\rho^3, 72-64\rho-1\rho^2+8\rho^3, 57-48\rho-1\rho^2+6\rho^3, 96-92\rho+1\rho^2+12\rho^3, 12-14\rho+1\rho^2+2\rho^3, 321-288\rho-4\rho^2+36\rho^3, 371-334\rho-4\rho^2+42\rho^3, 824-736\rho-11\rho^2+92\rho^3, 57-48\rho-1\rho^2+6\rho^3, 96-92\rho+1\rho^2+12\rho^3, 288-256\rho-4\rho^2+32\rho^3, 12-14\rho+1\rho^2+2\rho^3, 89-80\rho-1\rho^2+10\rho^3, 12-14\rho+1\rho^2+2\rho^3)$

$(7-2\rho-1\rho^2+0\rho^3, 72-64\rho-1\rho^2+8\rho^3, 167-156\rho+0\rho^2+20\rho^3, 72-64\rho-1\rho^2+8\rho^3, 72-64\rho-1\rho^2+8\rho^3, 72-64\rho-1\rho^2+8\rho^3, 205-178\rho-4\rho^2+22\rho^3, 167-156\rho+0\rho^2+20\rho^3, 205-178\rho-4\rho^2+22\rho^3, 7-2\rho-1\rho^2+0\rho^3, 72-64\rho-1\rho^2+8\rho^3, 167-156\rho+0\rho^2+20\rho^3, 72-64\rho-1\rho^2+8\rho^3, 205-178\rho-4\rho^2+22\rho^3, 7-2\rho-1\rho^2+0\rho^3)$

$(7-2\rho-1\rho^2+0\rho^3, 117-98\rho-3\rho^2+12\rho^3, 144-128\rho-2\rho^2+16\rho^3, 117-98\rho-3\rho^2+12\rho^3, 57-48\rho-1\rho^2+6\rho^3, 57-48\rho-1\rho^2+6\rho^3, 89-80\rho-1\rho^2+10\rho^3, 144-128\rho-2\rho^2+16\rho^3, 89-80\rho-1\rho^2+10\rho^3, 7-2\rho-1\rho^2+0\rho^3, 117-98\rho-3\rho^2+12\rho^3, 144-128\rho-2\rho^2+16\rho^3, 57-48\rho-1\rho^2+6\rho^3, 89-80\rho-1\rho^2+10\rho^3, 7-2\rho-1\rho^2+0\rho^3)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 24217$, definierendem Polynom $t^5 - 5t^3 - t^2 + 3t + 1$, $\rho \approx -1,9600$ und $(x^2, y^2, z^2) = (1 + 2\rho - 4\rho^2 - \rho^3 + \rho^4, 1 + 2\rho - 4\rho^2 - \rho^3 + \rho^4, -1 - 2\rho + \rho^2)$:

$(-2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4, 7+9\rho-13\rho^2-14\rho^3+8\rho^4, 18+45\rho-40\rho^2-71\rho^3+36\rho^4, 11+26\rho-24\rho^2-41\rho^3+21\rho^4, 1+4\rho+2\rho^2-4\rho^3+1\rho^4, 1+1\rho-1\rho^2-2\rho^3+1\rho^4, 4+11\rho-6\rho^2-15\rho^3+7\rho^4, 7+9\rho-13\rho^2-14\rho^3+8\rho^4, 1+1\rho-1\rho^2-2\rho^3+1\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4, 1+4\rho+2\rho^2-4\rho^3+1\rho^4, 1+1\rho-1\rho^2-2\rho^3+1\rho^4, 1+1\rho-1\rho^2-2\rho^3+1\rho^4, 6+4\rho-11\rho^2-5\rho^3+4\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4)$

$(-2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4, 6+4\rho-11\rho^2-5\rho^3+4\rho^4, 1+1\rho-1\rho^2-2\rho^3+1\rho^4, 1+1\rho-1\rho^2-2\rho^3+1\rho^4, 1+4\rho+2\rho^2-4\rho^3+1\rho^4, 1+1\rho-1\rho^2-2\rho^3+1\rho^4, 1+4\rho+2\rho^2-4\rho^3+1\rho^4, 7+9\rho-13\rho^2-14\rho^3+8\rho^4, 11+26\rho-24\rho^2-41\rho^3+21\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4, 4+11\rho-6\rho^2-15\rho^3+7\rho^4, 18+45\rho-40\rho^2-71\rho^3+36\rho^4, 1+1\rho-1\rho^2-2\rho^3+1\rho^4, 7+9\rho-13\rho^2-14\rho^3+8\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4)$

$(-2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4, 1+2\rho+1\rho^2-5\rho^3+2\rho^4, 4+4\rho-4\rho^2-8\rho^3+4\rho^4, 1+2\rho+1\rho^2-5\rho^3+2\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4, 0+0\rho+4\rho^2-4\rho^3+1\rho^4, 4+4\rho-4\rho^2-8\rho^3+4\rho^4, 0+0\rho+4\rho^2-4\rho^3+1\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4, 1+2\rho+1\rho^2-5\rho^3+2\rho^4, 4+4\rho-4\rho^2-8\rho^3+4\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4, 0+0\rho+4\rho^2-4\rho^3+1\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+0\rho^3-1\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 24217$, definierendem Polynom $t^5 - 5t^3 - t^2 + 3t + 1$, $\rho \approx -0,7228$ und $(x^2,\, y^2,\, z^2) = (-3 - 3\rho + 9\rho^2 + \rho^3 - 2\rho^4,\, -7 - 9\rho + 18\rho^2 + 3\rho^3 - 4\rho^4,\, -7 - 9\rho + 18\rho^2 + 3\rho^3 - 4\rho^4)$:

$(-10 - 15\rho + 36\rho^2 + 5\rho^3 - 8\rho^4,\, -10 - 15\rho + 36\rho^2 + 5\rho^3 - 8\rho^4,\, -27 - 47\rho + 94\rho^2 + 15\rho^3 - 21\rho^4,\, -27 - 47\rho + 94\rho^2 + 15\rho^3 - 21\rho^4,\, -82 - 132\rho + 269\rho^2 + 43\rho^3 - 60\rho^4,\, -10 - 15\rho + 36\rho^2 + 5\rho^3 - 8\rho^4,\, -160 - 260\rho + 520\rho^2 + 84\rho^3 - 116\rho^4,\, -263 - 427\rho + 855\rho^2 + 138\rho^3 - 191\rho^4,\, -920 - 1491\rho + 2986\rho^2 + 482\rho^3 - 667\rho^4,\, -27 - 47\rho + 94\rho^2 + 15\rho^3 - 21\rho^4,\, -82 - 132\rho + 269\rho^2 + 43\rho^3 - 60\rho^4,\, -384 - 621\rho + 1249\rho^2 + 201\rho^3 - 279\rho^4,\, -10 - 15\rho + 36\rho^2 + 5\rho^3 - 8\rho^4,\, -92 - 148\rho + 300\rho^2 + 48\rho^3 - 67\rho^4,\, -10 - 15\rho + 36\rho^2 + 5\rho^3 - 8\rho^4)$

$(-5 - 9\rho + 18\rho^2 + 3\rho^3 - 4\rho^4,\, -40 - 65\rho + 130\rho^2 + 21\rho^3 - 29\rho^4,\, -92 - 148\rho + 300\rho^2 + 48\rho^3 - 67\rho^4,\, -40 - 65\rho + 130\rho^2 + 21\rho^3 - 29\rho^4,\, -27 - 47\rho + 94\rho^2 + 15\rho^3 - 21\rho^4,\, -27 - 47\rho + 94\rho^2 + 15\rho^3 - 21\rho^4,\, -95 - 158\rho + 313\rho^2 + 51\rho^3 - 70\rho^4,\, -92 - 148\rho + 300\rho^2 + 48\rho^3 - 67\rho^4,\, -95 - 158\rho + 313\rho^2 + 51\rho^3 - 70\rho^4,\, -5 - 9\rho + 18\rho^2 + 3\rho^3 - 4\rho^4,\, -40 - 65\rho + 130\rho^2 + 21\rho^3 - 29\rho^4,\, -92 - 148\rho + 300\rho^2 + 48\rho^3 - 67\rho^4,\, -27 - 47\rho + 94\rho^2 + 15\rho^3 - 21\rho^4,\, -95 - 158\rho + 313\rho^2 + 51\rho^3 - 70\rho^4,\, -5 - 9\rho + 18\rho^2 + 3\rho^3 - 4\rho^4)$

$(-5 - 9\rho + 18\rho^2 + 3\rho^3 - 4\rho^4,\, -95 - 158\rho + 313\rho^2 + 51\rho^3 - 70\rho^4,\, -92 - 148\rho + 300\rho^2 + 48\rho^3 - 67\rho^4,\, -95 - 158\rho + 313\rho^2 + 51\rho^3 - 70\rho^4,\, -27 - 47\rho + 94\rho^2 + 15\rho^3 - 21\rho^4,\, -27 - 47\rho + 94\rho^2 + 15\rho^3 - 21\rho^4,\, -40 - 65\rho + 130\rho^2 + 21\rho^3 - 29\rho^4,\, -92 - 148\rho + 300\rho^2 + 48\rho^3 - 67\rho^4,\, -40 - 65\rho + 130\rho^2 + 21\rho^3 - 29\rho^4,\, -5 - 9\rho + 18\rho^2 + 3\rho^3 - 4\rho^4,\, -95 - 158\rho + 313\rho^2 + 51\rho^3 - 70\rho^4,\, -92 - 148\rho + 300\rho^2 + 48\rho^3 - 67\rho^4,\, -27 - 47\rho + 94\rho^2 + 15\rho^3 - 21\rho^4,\, -40 - 65\rho + 130\rho^2 + 21\rho^3 - 29\rho^4,\, -5 - 9\rho + 18\rho^2 + 3\rho^3 - 4\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 24217$, definierendem Polynom $t^5 - 5t^3 - t^2 + 3t + 1$, $\rho \approx -0,3697$ und $(x^2, y^2, z^2) = (6 + 2\rho - 14\rho^2 - \rho^3 + 3\rho^4, 8 + 2\rho - 15\rho^2 - \rho^3 + 3\rho^4, 8 + 2\rho - 15\rho^2 - \rho^3 + 3\rho^4)$:

$(30+9\rho-53\rho^2-4\rho^3+11\rho^4,\ 30+9\rho-53\rho^2-4\rho^3+11\rho^4,\ 43+13\rho-77\rho^2-6\rho^3+16\rho^4,\ 43+13\rho-77\rho^2-6\rho^3+16\rho^4,\ 183+51\rho-326\rho^2-24\rho^3+67\rho^4,\ 30+9\rho-53\rho^2-4\rho^3+11\rho^4,\ 240+68\rho-428\rho^2-32\rho^3+88\rho^4,\ 512+152\rho-919\rho^2-70\rho^3+189\rho^4,\ 2922+861\rho-5252\rho^2-399\rho^3+1080\rho^4,\ 43+13\rho-77\rho^2-6\rho^3+16\rho^4,\ 183+51\rho-326\rho^2-24\rho^3+67\rho^4,\ 1443+426\rho-2592\rho^2-197\rho^3+533\rho^4,\ 30+9\rho-53\rho^2-4\rho^3+11\rho^4,\ 359+107\rho-642\rho^2-49\rho^3+132\rho^4,\ 30+9\rho-53\rho^2-4\rho^3+11\rho^4)$

$(17+5\rho-25\rho^2-2\rho^3+5\rho^4,\ 60+17\rho-107\rho^2-8\rho^3+22\rho^4,\ 176+52\rho-316\rho^2-24\rho^3+65\rho^4,\ 60+17\rho-107\rho^2-8\rho^3+22\rho^4,\ 43+13\rho-77\rho^2-6\rho^3+16\rho^4,\ 43+13\rho-77\rho^2-6\rho^3+16\rho^4,\ 220+65\rho-394\rho^2-30\rho^3+81\rho^4,\ 176+52\rho-316\rho^2-24\rho^3+65\rho^4,\ 220+65\rho-394\rho^2-30\rho^3+81\rho^4,\ 17+5\rho-25\rho^2-2\rho^3+5\rho^4,\ 60+17\rho-107\rho^2-8\rho^3+22\rho^4,\ 176+52\rho-316\rho^2-24\rho^3+65\rho^4,\ 43+13\rho-77\rho^2-6\rho^3+16\rho^4,\ 220+65\rho-394\rho^2-30\rho^3+81\rho^4,\ 17+5\rho-25\rho^2-2\rho^3+5\rho^4)$

$(17+5\rho-25\rho^2-2\rho^3+5\rho^4,\ 220+65\rho-394\rho^2-30\rho^3+81\rho^4,\ 176+52\rho-316\rho^2-24\rho^3+65\rho^4,\ 220+65\rho-394\rho^2-30\rho^3+81\rho^4,\ 43+13\rho-77\rho^2-6\rho^3+16\rho^4,\ 43+13\rho-77\rho^2-6\rho^3+16\rho^4,\ 60+17\rho-107\rho^2-8\rho^3+22\rho^4,\ 176+52\rho-316\rho^2-24\rho^3+65\rho^4,\ 60+17\rho-107\rho^2-8\rho^3+22\rho^4,\ 17+5\rho-25\rho^2-2\rho^3+5\rho^4,\ 220+65\rho-394\rho^2-30\rho^3+81\rho^4,\ 176+52\rho-316\rho^2-24\rho^3+65\rho^4,\ 43+13\rho-77\rho^2-6\rho^3+16\rho^4,\ 60+17\rho-107\rho^2-8\rho^3+22\rho^4,\ 17+5\rho-25\rho^2-2\rho^3+5\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 24217$, definierendem Polynom $t^5 - 5t^3 - t^2 + 3t + 1$, $\rho \approx 0,8781$ und $(x^2, y^2, z^2) = (3 + 4\rho - 5\rho^2 - \rho^3 + \rho^4, -1 + 6\rho + 9\rho^2 - \rho^3 - 2\rho^4, -1 + 6\rho + 9\rho^2 - \rho^3 - 2\rho^4)$:

$(7 + 9\rho - 1\rho^2 - 2\rho^3 + 0\rho^4, 7 + 9\rho - 1\rho^2 - 2\rho^3 + 0\rho^4, 19 + 57\rho + 41\rho^2 - 11\rho^3 - 10\rho^4, 19 + 57\rho + 41\rho^2 - 11\rho^3 - 10\rho^4, 30 + 105\rho + 84\rho^2 - 20\rho^3 - 20\rho^4, 7 + 9\rho - 1\rho^2 - 2\rho^3 + 0\rho^4, 72 + 276\rho + 236\rho^2 - 52\rho^3 - 56\rho^4, 93 + 370\rho + 329\rho^2 - 69\rho^3 - 78\rho^4, 205 + 836\rho + 744\rho^2 - 156\rho^3 - 176\rho^4, 19 + 57\rho + 41\rho^2 - 11\rho^3 - 10\rho^4, 30 + 105\rho + 84\rho^2 - 20\rho^3 - 20\rho^4, 73 + 291\rho + 262\rho^2 - 54\rho^3 - 62\rho^4, 7 + 9\rho - 1\rho^2 - 2\rho^3 + 0\rho^4, 16 + 53\rho + 46\rho^2 - 10\rho^3 - 11\rho^4, 7 + 9\rho - 1\rho^2 - 2\rho^3 + 0\rho^4)$

$(0 + 1\rho + 9\rho^2 + 0\rho^3 - 2\rho^4, 18 + 69\rho + 59\rho^2 - 13\rho^3 - 14\rho^4, 31 + 124\rho + 110\rho^2 - 23\rho^3 - 26\rho^4, 18 + 69\rho + 59\rho^2 - 13\rho^3 - 14\rho^4, 19 + 57\rho + 41\rho^2 - 11\rho^3 - 10\rho^4, 19 + 57\rho + 41\rho^2 - 11\rho^3 - 10\rho^4, 29 + 119\rho + 110\rho^2 - 22\rho^3 - 26\rho^4, 31 + 124\rho + 110\rho^2 - 23\rho^3 - 26\rho^4, 29 + 119\rho + 110\rho^2 - 22\rho^3 - 26\rho^4, 0 + 1\rho + 9\rho^2 + 0\rho^3 - 2\rho^4, 18 + 69\rho + 59\rho^2 - 13\rho^3 - 14\rho^4, 31 + 124\rho + 110\rho^2 - 23\rho^3 - 26\rho^4, 19 + 57\rho + 41\rho^2 - 11\rho^3 - 10\rho^4, 29 + 119\rho + 110\rho^2 - 22\rho^3 - 26\rho^4, 0 + 1\rho + 9\rho^2 + 0\rho^3 - 2\rho^4)$

$(0 + 1\rho + 9\rho^2 + 0\rho^3 - 2\rho^4, 29 + 119\rho + 110\rho^2 - 22\rho^3 - 26\rho^4, 31 + 124\rho + 110\rho^2 - 23\rho^3 - 26\rho^4, 29 + 119\rho + 110\rho^2 - 22\rho^3 - 26\rho^4, 19 + 57\rho + 41\rho^2 - 11\rho^3 - 10\rho^4, 19 + 57\rho + 41\rho^2 - 11\rho^3 - 10\rho^4, 18 + 69\rho + 59\rho^2 - 13\rho^3 - 14\rho^4, 31 + 124\rho + 110\rho^2 - 23\rho^3 - 26\rho^4, 18 + 69\rho + 59\rho^2 - 13\rho^3 - 14\rho^4, 0 + 1\rho + 9\rho^2 + 0\rho^3 - 2\rho^4, 29 + 119\rho + 110\rho^2 - 22\rho^3 - 26\rho^4, 31 + 124\rho + 110\rho^2 - 23\rho^3 - 26\rho^4, 19 + 57\rho + 41\rho^2 - 11\rho^3 - 10\rho^4, 18 + 69\rho + 59\rho^2 - 13\rho^3 - 14\rho^4, 0 + 1\rho + 9\rho^2 + 0\rho^3 - 2\rho^4)$

Für $k=\mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k=24217$, definierendem Polynom $t^5-5t^3-t^2+3t+1,\ \rho\approx 2,1744$ und $(x^2,\,y^2,\,z^2)=(\rho,\,-3-3\rho+3\rho^2+2\rho^3,\,-3-3\rho+3\rho^2+2\rho^3)$:

$(1+2\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ 1+2\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ -3-22\rho-9\rho^2+34\rho^3+17\rho^4,\ -3-22\rho-9\rho^2+34\rho^3+17\rho^4,\ -11-33\rho+5\rho^2+43\rho^3+17\rho^4,\ 1+2\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ -32-112\rho-12\rho^2+152\rho^3+68\rho^4,\ -34-119\rho-20\rho^2+165\rho^3+76\rho^4,\ -41-155\rho-33\rho^2+214\rho^3+100\rho^4,\ -3-22\rho-9\rho^2+34\rho^3+17\rho^4,\ -11-33\rho+5\rho^2+43\rho^3+17\rho^4,\ -12-42\rho-6\rho^2+59\rho^3+27\rho^4,\ 1+2\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ 0+0\rho+1\rho^2+2\rho^3+1\rho^4,\ 1+2\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4)$

$(0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ -8-28\rho-3\rho^2+38\rho^3+17\rho^4,\ -11-36\rho-2\rho^2+48\rho^3+21\rho^4,\ -8-28\rho-3\rho^2+38\rho^3+17\rho^4,\ -3-22\rho-9\rho^2+34\rho^3+17\rho^4,\ -3-22\rho-9\rho^2+34\rho^3+17\rho^4,\ -8-33\rho-7\rho^2+45\rho^3+21\rho^4,\ -11-36\rho-2\rho^2+48\rho^3+21\rho^4,\ -8-33\rho-7\rho^2+45\rho^3+21\rho^4,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ -8-28\rho-3\rho^2+38\rho^3+17\rho^4,\ -11-36\rho-2\rho^2+48\rho^3+21\rho^4,\ -3-22\rho-9\rho^2+34\rho^3+17\rho^4,\ -8-33\rho-7\rho^2+45\rho^3+21\rho^4,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4)$

$(0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ -8-33\rho-7\rho^2+45\rho^3+21\rho^4,\ -11-36\rho-2\rho^2+48\rho^3+21\rho^4,\ -8-33\rho-7\rho^2+45\rho^3+21\rho^4,\ -3-22\rho-9\rho^2+34\rho^3+17\rho^4,\ -3-22\rho-9\rho^2+34\rho^3+17\rho^4,\ -8-28\rho-3\rho^2+38\rho^3+17\rho^4,\ -11-36\rho-2\rho^2+48\rho^3+21\rho^4,\ -8-28\rho-3\rho^2+38\rho^3+17\rho^4,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ -8-33\rho-7\rho^2+45\rho^3+21\rho^4,\ -11-36\rho-2\rho^2+48\rho^3+21\rho^4,\ -3-22\rho-9\rho^2+34\rho^3+17\rho^4,\ -8-28\rho-3\rho^2+38\rho^3+17\rho^4,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4)$

Für $k=\mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k=36497$, definierendem Polynom $t^5+t^4-5t^3-3t^2+2t+1,\ \rho\approx -2,4368$ und $(x^2,\,y^2,\,z^2)=(-\rho,\,-4\rho^2+\rho^4,\,-4\rho^2+\rho^4)$:

$(1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ 0+2\rho+5\rho^2-5\rho^3+1\rho^4,\ 0+2\rho+5\rho^2-5\rho^3+1\rho^4,\ 4+1\rho-9\rho^2-6\rho^3+5\rho^4,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ 4+8\rho-12\rho^2-20\rho^3+12\rho^4,\ 6+11\rho-20\rho^2-25\rho^3+16\rho^4,\ 17+22\rho-53\rho^2-46\rho^3+33\rho^4,\ 0+2\rho+5\rho^2-5\rho^3+1\rho^4,\ 4+1\rho-9\rho^2-6\rho^3+5\rho^4,\ 9+5\rho-24\rho^2-14\rho^3+12\rho^4,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ 0+0\rho+1\rho^2-2\rho^3+1\rho^4,\ 1-2\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4)$

$(0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ 1+2\rho-3\rho^2-5\rho^3+3\rho^4,\ 6+2\rho-16\rho^2-7\rho^3+7\rho^4,\ 1+2\rho-3\rho^2-5\rho^3+3\rho^4,\ 0+2\rho+5\rho^2-5\rho^3+1\rho^4,\ 0+2\rho+5\rho^2-5\rho^3+1\rho^4,\ 3+5\rho-7\rho^2-8\rho^3+5\rho^4,\ 6+2\rho-16\rho^2-7\rho^3+7\rho^4,\ 3+5\rho-7\rho^2-8\rho^3+5\rho^4,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ 1+2\rho-3\rho^2-5\rho^3+3\rho^4,\ 6+2\rho-16\rho^2-7\rho^3+7\rho^4,\ 0+2\rho+5\rho^2-5\rho^3+1\rho^4,\ 3+5\rho-7\rho^2-8\rho^3+5\rho^4,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4)$

$(0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ 3+5\rho-7\rho^2-8\rho^3+5\rho^4,\ 6+2\rho-16\rho^2-7\rho^3+7\rho^4,\ 3+5\rho-7\rho^2-8\rho^3+5\rho^4,\ 0+2\rho+5\rho^2-5\rho^3+1\rho^4,\ 0+2\rho+5\rho^2-5\rho^3+1\rho^4,\ 1+2\rho-3\rho^2-5\rho^3+3\rho^4,\ 6+2\rho-16\rho^2-7\rho^3+7\rho^4,\ 1+2\rho-3\rho^2-5\rho^3+3\rho^4,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4,\ 3+5\rho-7\rho^2-8\rho^3+5\rho^4,\ 6+2\rho-16\rho^2-7\rho^3+7\rho^4,\ 0+2\rho+5\rho^2-5\rho^3+1\rho^4,\ 1+2\rho-3\rho^2-5\rho^3+3\rho^4,\ 0+0\rho+1\rho^2+0\rho^3+0\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 36497$, definierendem Polynom $t^5 + t^4 - 5t^3 - 3t^2 + 2t + 1$, $\rho \approx -2,4368$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-2 + 2\rho + 5\rho^2 - \rho^3 - \rho^4, 2 - 8\rho^2 - 4\rho^3 + 4\rho^4, -1 + 2\rho - 3\rho^2 - 5\rho^3 + 3\rho^4)$:

$(2+3\rho+0\rho^2-1\rho^3+0\rho^4,\ 2+3\rho+0\rho^2-1\rho^3+0\rho^4,\ 218+339\rho-784\rho^2-745\rho^3+520\rho^4,\ 212+336\rho-768\rho^2-736\rho^3+512\rho^4,\ 218+339\rho-784\rho^2-745\rho^3+520\rho^4,\ 2+3\rho+0\rho^2-1\rho^3+0\rho^4,\ 858+1363\rho-3128\rho^2-3001\rho^3+2088\rho^4,\ 858+1363\rho-3128\rho^2-3001\rho^3+2088\rho^4,\ 881+1401\rho-3212\rho^2-3082\rho^3+2144\rho^4,\ 212+336\rho-768\rho^2-736\rho^3+512\rho^4,\ 218+339\rho-784\rho^2-745\rho^3+520\rho^4,\ 221+354\rho-800\rho^2-777\rho^3+538\rho^4,\ 2+3\rho+0\rho^2-1\rho^3+0\rho^4,\ 5+2\rho-8\rho^2-1\rho^3+2\rho^4,\ 2+3\rho+0\rho^2-1\rho^3+0\rho^4)$

$(5-1\rho-10\rho^2+1\rho^3+2\rho^4,\ 218+339\rho-784\rho^2-745\rho^3+520\rho^4,\ 217+336\rho-784\rho^2-744\rho^3+520\rho^4,\ 217+336\rho-784\rho^2-744\rho^3+520\rho^4,\ 218+339\rho-784\rho^2-745\rho^3+520\rho^4,\ 217+336\rho-784\rho^2-744\rho^3+520\rho^4,\ 218+339\rho-784\rho^2-745\rho^3+520\rho^4,\ 229+356\rho-828\rho^2-784\rho^3+548\rho^4,\ 228+356\rho-826\rho^2-785\rho^3+548\rho^4,\ 5-1\rho-10\rho^2+1\rho^3+2\rho^4,\ 229+356\rho-828\rho^2-784\rho^3+548\rho^4,\ 241+377\rho-868\rho^2-826\rho^3+576\rho^4,\ 217+336\rho-784\rho^2-744\rho^3+520\rho^4,\ 229+356\rho-828\rho^2-784\rho^3+548\rho^4,\ 5-1\rho-10\rho^2+1\rho^3+2\rho^4)$

$(5-1\rho-10\rho^2+1\rho^3+2\rho^4,\ 217+343\rho-790\rho^2-755\rho^3+526\rho^4,\ 217+343\rho-790\rho^2-755\rho^3+526\rho^4,\ 212+336\rho-768\rho^2-736\rho^3+512\rho^4,\ 212+336\rho-768\rho^2-736\rho^3+512\rho^4,\ 221+351\rho-802\rho^2-775\rho^3+538\rho^4,\ 217+343\rho-790\rho^2-755\rho^3+526\rho^4,\ 5-1\rho-10\rho^2+1\rho^3+2\rho^4,\ 217+343\rho-790\rho^2-755\rho^3+526\rho^4,\ 221+351\rho-802\rho^2-775\rho^3+538\rho^4,\ 212+336\rho-768\rho^2-736\rho^3+512\rho^4,\ 217+343\rho-790\rho^2-755\rho^3+526\rho^4,\ 5-1\rho-10\rho^2+1\rho^3+2\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 36497$, definierendem Polynom $t^5 + t^4 - 5t^3 - 3t^2 + 2t + 1$, $\rho \approx -0,7495$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-1 - 2\rho + 5\rho^2 - \rho^4, -7 - 3\rho + 21\rho^2 - \rho^3 - 4\rho^4, -7 - 4\rho + 21\rho^2 - \rho^3 - 4\rho^4)$:

$(-6-8\rho+31\rho^2-1\rho^3-6\rho^4,\ -6-8\rho+31\rho^2-1\rho^3-6\rho^4,\ -28-19\rho+119\rho^2-6\rho^3-23\rho^4,\ -20-17\rho+88\rho^2-4\rho^3-17\rho^4,\ -55-42\rho+223\rho^2-10\rho^3-43\rho^4,\ -6-8\rho+31\rho^2-1\rho^3-6\rho^4,\ -148-100\rho+581\rho^2-28\rho^3-112\rho^4,\ -203-139\rho+799\rho^2-38\rho^3-154\rho^4,\ -674-451\rho+2630\rho^2-127\rho^3-507\rho^4,\ -20-17\rho+88\rho^2-4\rho^3-17\rho^4,\ -55-42\rho+223\rho^2-10\rho^3-43\rho^4,\ -273-185\rho+1069\rho^2-51\rho^3-206\rho^4,\ -6-8\rho+31\rho^2-1\rho^3-6\rho^4,\ -91-63\rho+358\rho^2-17\rho^3-69\rho^4,\ -6-8\rho+31\rho^2-1\rho^3-6\rho^4)$

$(-5-4\rho+21\rho^2-1\rho^3-4\rho^4,\ -33-23\rho+130\rho^2-6\rho^3-25\rho^4,\ -91-63\rho+358\rho^2-17\rho^3-69\rho^4,\ -33-23\rho+130\rho^2-6\rho^3-25\rho^4,\ -28-19\rho+119\rho^2-6\rho^3-23\rho^4,\ -28-19\rho+119\rho^2-6\rho^3-23\rho^4,\ -121-80\rho+472\rho^2-23\rho^3-91\rho^4,\ -91-63\rho+358\rho^2-17\rho^3-69\rho^4,\ -121-80\rho+472\rho^2-23\rho^3-91\rho^4,\ -5-4\rho+21\rho^2-1\rho^3-4\rho^4,\ -33-23\rho+130\rho^2-6\rho^3-25\rho^4,\ -91-63\rho+358\rho^2-17\rho^3-69\rho^4,\ -28-19\rho+119\rho^2-6\rho^3-23\rho^4,\ -121-80\rho+472\rho^2-23\rho^3-91\rho^4,\ -5-4\rho+21\rho^2-1\rho^3-4\rho^4)$

$(-5-4\rho+21\rho^2-1\rho^3-4\rho^4,\ -72-48\rho+285\rho^2-14\rho^3-55\rho^4,\ -81-55\rho+317\rho^2-15\rho^3-61\rho^4,\ -72-48\rho+285\rho^2-14\rho^3-55\rho^4,\ -20-17\rho+88\rho^2-4\rho^3-17\rho^4,\ -20-17\rho+88\rho^2-4\rho^3-17\rho^4,\ -41-27\rho+161\rho^2-8\rho^3-31\rho^4,\ -81-55\rho+317\rho^2-15\rho^3-61\rho^4,\ -41-27\rho+161\rho^2-8\rho^3-31\rho^4,\ -5-4\rho+21\rho^2-1\rho^3-4\rho^4,\ -72-48\rho+285\rho^2-14\rho^3-55\rho^4,\ -81-55\rho+317\rho^2-15\rho^3-61\rho^4,\ -20-17\rho+88\rho^2-4\rho^3-17\rho^4,\ -41-27\rho+161\rho^2-8\rho^3-31\rho^4,\ -5-4\rho+21\rho^2-1\rho^3-4\rho^4)$

Für $k=\mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k=36497$, definierendem Polynom $t^5+t^4-5t^3-3t^2+2t+1$, $\rho\approx -0,4314$ und $(x^2,y^2,z^2)=(5-\rho-11\rho^2+\rho^3+2\rho^4,\ 8-2\rho-21\rho^2+2\rho^3+4\rho^4,\ 10-4\rho-26\rho^2+3\rho^3+5\rho^4)$:

$(27-7\rho-58\rho^2+6\rho^3+11\rho^4,\ 27-7\rho-58\rho^2+6\rho^3+11\rho^4,\ 65-19\rho-142\rho^2+15\rho^3+27\rho^4,\ 32-12\rho-68\rho^2+8\rho^3+13\rho^4,\ 86-27\rho-194\rho^2+21\rho^3+37\rho^4,\ 27-7\rho-58\rho^2+6\rho^3+11\rho^4,\ 265-85\rho-598\rho^2+65\rho^3+114\rho^4,\ 306-97\rho-692\rho^2+75\rho^3+132\rho^4,\ 1202-384\rho-2717\rho^2+295\rho^3+518\rho^4,\ 32-12\rho-68\rho^2+8\rho^3+13\rho^4,\ 86-27\rho-194\rho^2+21\rho^3+37\rho^4,\ 532-167\rho-1201\rho^2+130\rho^3+229\rho^4,\ 27-7\rho-58\rho^2+6\rho^3+11\rho^4,\ 306-97\rho-692\rho^2+75\rho^3+132\rho^4,\ 27-7\rho-58\rho^2+6\rho^3+11\rho^4)$

$(16-5\rho-36\rho^2+4\rho^3+7\rho^4,\ 86-27\rho-194\rho^2+21\rho^3+37\rho^4,\ 49-16\rho-110\rho^2+12\rho^3+21\rho^4,\ 49-16\rho-110\rho^2+12\rho^3+21\rho^4,\ 65-19\rho-142\rho^2+15\rho^3+27\rho^4,\ 49-16\rho-110\rho^2+12\rho^3+21\rho^4,\ 65-19\rho-142\rho^2+15\rho^3+27\rho^4,\ 209-66\rho-472\rho^2+51\rho^3+90\rho^4,\ 409-130\rho-923\rho^2+100\rho^3+176\rho^4,\ 16-5\rho-36\rho^2+4\rho^3+7\rho^4,\ 244-76\rho-546\rho^2+59\rho^3+104\rho^4,\ 813-258\rho-1836\rho^2+199\rho^3+350\rho^4,\ 49-16\rho-110\rho^2+12\rho^3+21\rho^4,\ 209-66\rho-472\rho^2+51\rho^3+90\rho^4,\ 16-5\rho-36\rho^2+4\rho^3+7\rho^4)$

$(16-5\rho-36\rho^2+4\rho^3+7\rho^4,\ 109-35\rho-246\rho^2+27\rho^3+47\rho^4,\ 150-45\rho-336\rho^2+36\rho^3+64\rho^4,\ 109-35\rho-246\rho^2+27\rho^3+47\rho^4,\ 32-12\rho-68\rho^2+8\rho^3+13\rho^4,\ 32-12\rho-68\rho^2+8\rho^3+13\rho^4,\ 86-27\rho-194\rho^2+21\rho^3+37\rho^4,\ 150-45\rho-336\rho^2+36\rho^3+64\rho^4,\ 86-27\rho-194\rho^2+21\rho^3+37\rho^4,\ 16-5\rho-36\rho^2+4\rho^3+7\rho^4,\ 109-35\rho-246\rho^2+27\rho^3+47\rho^4,\ 150-45\rho-336\rho^2+36\rho^3+64\rho^4,\ 32-12\rho-68\rho^2+8\rho^3+13\rho^4,\ 86-27\rho-194\rho^2+21\rho^3+37\rho^4,\ 16-5\rho-36\rho^2+4\rho^3+7\rho^4)$

Für $k=\mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k=36497$, definierendem Polynom $t^5+t^4-5t^3-3t^2+2t+1$, $\rho\approx 0,6426$ und $(x^2,y^2,z^2)=(2+4\rho-\rho^2-\rho^3,\ 2+5\rho-\rho^2-\rho^3,\ -1+5\rho+9\rho^2-2\rho^3-2\rho^4)$:

$(3+17\rho+22\rho^2-6\rho^3-5\rho^4,\ 34+121\rho+87\rho^2-36\rho^3-22\rho^4,\ 303+1075\rho+765\rho^2-319\rho^3-194\rho^4,\ 83+293\rho+209\rho^2-87\rho^3-53\rho^4,\ 9+22\rho+11\rho^2-6\rho^3-3\rho^4,\ 8+21\rho+11\rho^2-6\rho^3-3\rho^4,\ 76+264\rho+185\rho^2-78\rho^3-47\rho^4,\ 34+121\rho+87\rho^2-36\rho^3-22\rho^4,\ 8+21\rho+11\rho^2-6\rho^3-3\rho^4,\ 3+17\rho+22\rho^2-6\rho^3-5\rho^4,\ 9+22\rho+11\rho^2-6\rho^3-3\rho^4,\ 8+21\rho+11\rho^2-6\rho^3-3\rho^4,\ 8+21\rho+11\rho^2-6\rho^3-3\rho^4,\ 29+101\rho+71\rho^2-30\rho^3-18\rho^4,\ 3+17\rho+22\rho^2-6\rho^3-5\rho^4)$

$(3+13\rho+13\rho^2-4\rho^3-3\rho^4,\ 8+27\rho+20\rho^2-8\rho^3-5\rho^4,\ 30+107\rho+80\rho^2-32\rho^3-20\rho^4,\ 8+27\rho+20\rho^2-8\rho^3-5\rho^4,\ 9+22\rho+11\rho^2-6\rho^3-3\rho^4,\ 9+22\rho+11\rho^2-6\rho^3-3\rho^4,\ 52+180\rho+126\rho^2-53\rho^3-32\rho^4,\ 30+107\rho+80\rho^2-32\rho^3-20\rho^4,\ 52+180\rho+126\rho^2-53\rho^3-32\rho^4,\ 3+13\rho+13\rho^2-4\rho^3-3\rho^4,\ 8+27\rho+20\rho^2-8\rho^3-5\rho^4,\ 30+107\rho+80\rho^2-32\rho^3-20\rho^4,\ 9+22\rho+11\rho^2-6\rho^3-3\rho^4,\ 52+180\rho+126\rho^2-53\rho^3-32\rho^4,\ 3+13\rho+13\rho^2-4\rho^3-3\rho^4)$

$(3+13\rho+13\rho^2-4\rho^3-3\rho^4,\ 34+121\rho+87\rho^2-36\rho^3-22\rho^4,\ 32+96\rho+61\rho^2-28\rho^3-16\rho^4,\ 34+121\rho+87\rho^2-36\rho^3-22\rho^4,\ 3+17\rho+22\rho^2-6\rho^3-5\rho^4,\ 3+17\rho+22\rho^2-6\rho^3-5\rho^4,\ 8+32\rho+29\rho^2-10\rho^3-7\rho^4,\ 32+96\rho+61\rho^2-28\rho^3-16\rho^4,\ 8+32\rho+29\rho^2-10\rho^3-7\rho^4,\ 3+13\rho+13\rho^2-4\rho^3-3\rho^4,\ 34+121\rho+87\rho^2-36\rho^3-22\rho^4,\ 32+96\rho+61\rho^2-28\rho^3-16\rho^4,\ 3+17\rho+22\rho^2-6\rho^3-5\rho^4,\ 8+32\rho+29\rho^2-10\rho^3-7\rho^4,\ 3+13\rho+13\rho^2-4\rho^3-3\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 36497$, definierendem Polynom $t^5 + t^4 - 5t^3 - 3t^2 + 2t + 1$, $\rho \approx 1,9752$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-3 - \rho + 6\rho^2 - \rho^4, -\rho - 4\rho^2 + \rho^3 + \rho^4, -1 + 2\rho + 1\rho^2)$:

$(-2-2\rho+8\rho^2+1\rho^3-1\rho^4, -2-2\rho+8\rho^2+1\rho^3-1\rho^4, 1-4\rho+2\rho^2+4\rho^3+1\rho^4, -1+1\rho+9\rho^2+1\rho^3-1\rho^4, -2-3\rho+6\rho^2+5\rho^3+1\rho^4, -2-2\rho+8\rho^2+1\rho^3-1\rho^4, -4-7\rho+11\rho^2+15\rho^3+4\rho^4, 1-10\rho-3\rho^2+20\rho^3+8\rho^4, -11-26\rho+24\rho^2+67\rho^3+22\rho^4, -1+1\rho+9\rho^2+1\rho^3-1\rho^4, -2-3\rho+6\rho^2+5\rho^3+1\rho^4, -1-15\rho+2\rho^2+30\rho^3+11\rho^4, -2-2\rho+8\rho^2+1\rho^3-1\rho^4, -3-7\rho+8\rho^2+14\rho^3+4\rho^4, -2-2\rho+8\rho^2+1\rho^3-1\rho^4)$

$(3+0\rho-4\rho^2+1\rho^3+1\rho^4, -2-3\rho+6\rho^2+5\rho^3+1\rho^4, 0-1\rho+1\rho^2+3\rho^3+1\rho^4, 0-1\rho+1\rho^2+3\rho^3+1\rho^4, 1-4\rho+2\rho^2+4\rho^3+1\rho^4, 0-1\rho+1\rho^2+3\rho^3+1\rho^4, 1-4\rho+2\rho^2+4\rho^3+1\rho^4, 0-4\rho+2\rho^2+11\rho^3+4\rho^4, 1-10\rho-3\rho^2+20\rho^3+8\rho^4, 3+0\rho-4\rho^2+1\rho^3+1\rho^4, -3-7\rho+8\rho^2+14\rho^3+4\rho^4, -8-16\rho+21\rho^2+40\rho^3+12\rho^4, 0-1\rho+1\rho^2+3\rho^3+1\rho^4, 0-4\rho+2\rho^2+11\rho^3+4\rho^4, 3+0\rho-4\rho^2+1\rho^3+1\rho^4)$

$(3+0\rho-4\rho^2+1\rho^3+1\rho^4, 1-3\rho-2\rho^2+7\rho^3+3\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+8\rho^3+2\rho^4, 1-3\rho-2\rho^2+7\rho^3+3\rho^4, -1+1\rho+9\rho^2+1\rho^3-1\rho^4, -1+1\rho+9\rho^2+1\rho^3-1\rho^4, 0+0\rho+4\rho^2+4\rho^3+1\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+8\rho^3+2\rho^4, 0+0\rho+4\rho^2+4\rho^3+1\rho^4, 3+0\rho-4\rho^2+1\rho^3+1\rho^4, 1-3\rho-2\rho^2+7\rho^3+3\rho^4, -2-3\rho+7\rho^2+8\rho^3+2\rho^4, -1+1\rho+9\rho^2+1\rho^3-1\rho^4, 0+0\rho+4\rho^2+4\rho^3+1\rho^4, 3+0\rho-4\rho^2+1\rho^3+1\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 38569$, definierendem Polynom $t^5 + t^4 - 5t^3 - t^2 + 4t - 1$, $\rho \approx -2,5441$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-3 + 4\rho + 4\rho^2 - \rho^3 - 2\rho^4, -2 + \rho^2, 1 - 2\rho - 4\rho^2 + \rho^3 + \rho^4)$:

$(4+0\rho-4\rho^2+0\rho^3+1\rho^4, -2+7\rho+0\rho^2-5\rho^3+2\rho^4, -8+36\rho-20\rho^2-32\rho^3+20\rho^4, -3+13\rho-6\rho^2-12\rho^3+7\rho^4, -2+5\rho+6\rho^2-3\rho^3-1\rho^4, -2+6\rho+5\rho^2-3\rho^3-1\rho^4, -1+7\rho-3\rho^2-7\rho^3+4\rho^4, -2+7\rho+0\rho^2-5\rho^3+2\rho^4, -2+6\rho+5\rho^2-3\rho^3-1\rho^4, 4+0\rho-4\rho^2+0\rho^3+1\rho^4, -2+5\rho+6\rho^2-3\rho^3-1\rho^4, -2+6\rho+5\rho^2-3\rho^3-1\rho^4, -2+6\rho+5\rho^2-3\rho^3-1\rho^4, -1+5\rho+1\rho^2-3\rho^3+1\rho^4, 4+0\rho-4\rho^2+0\rho^3+1\rho^4)$

$(3-2\rho-3\rho^2+1\rho^3+1\rho^4, -1+5\rho+1\rho^2-3\rho^3+1\rho^4, 1+0\rho-2\rho^2+0\rho^3+1\rho^4, 1+0\rho-2\rho^2+0\rho^3+1\rho^4, -2+5\rho+6\rho^2-3\rho^3-1\rho^4, 1+0\rho-2\rho^2+0\rho^3+1\rho^4, -2+5\rho+6\rho^2-3\rho^3-1\rho^4, -1+5\rho-1\rho^2-4\rho^3+2\rho^4, -1+7\rho-3\rho^2-7\rho^3+4\rho^4, 3-2\rho-3\rho^2+1\rho^3+1\rho^4, 0+7\rho-4\rho^2-6\rho^3+4\rho^4, -3+25\rho-14\rho^2-21\rho^3+13\rho^4, 1+0\rho-2\rho^2+0\rho^3+1\rho^4, -1+5\rho-1\rho^2-4\rho^3+2\rho^4, 3-2\rho-3\rho^2+1\rho^3+1\rho^4)$

$(3-2\rho-3\rho^2+1\rho^3+1\rho^4, 4-1\rho-7\rho^2-1\rho^3+3\rho^4, 1+4\rho-3\rho^2-3\rho^3+2\rho^4, 4-1\rho-7\rho^2-1\rho^3+3\rho^4, 4+0\rho-4\rho^2+0\rho^3+1\rho^4, 4+0\rho-4\rho^2+0\rho^3+1\rho^4, 1+1\rho-2\rho^2-1\rho^3+1\rho^4, 1+4\rho-3\rho^2-3\rho^3+2\rho^4, 1+1\rho-2\rho^2-1\rho^3+1\rho^4, 3-2\rho-3\rho^2+1\rho^3+1\rho^4, 4-1\rho-7\rho^2-1\rho^3+3\rho^4, 1+4\rho-3\rho^2-3\rho^3+2\rho^4, 4+0\rho-4\rho^2+0\rho^3+1\rho^4, 1+1\rho-2\rho^2-1\rho^3+1\rho^4, 3-2\rho-3\rho^2+1\rho^3+1\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 38569$, definierendem Polynom $t^5 + t^4 - 5t^3 - t^2 + 4t - 1$, $\rho \approx -1,1101$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-1 + 4\rho^2 - \rho^3 - \rho^4, -4\rho + \rho^2 + \rho^3, 2 - 5\rho^2 + \rho^3)$:

$(1-3\rho+13\rho^2-2\rho^3-3\rho^4,\ 16-68\rho+73\rho^2+2\rho^3-15\rho^4,\ 90-441\rho+492\rho^2+10\rho^3-101\rho^4,\ 43-207\rho+229\rho^2+5\rho^3-47\rho^4,\ 3-15\rho+20\rho^2+0\rho^3-4\rho^4,\ 1-7\rho+14\rho^2-1\rho^3-3\rho^4,\ 18-87\rho+102\rho^2+1\rho^3-21\rho^4,\ 16-68\rho+73\rho^2+2\rho^3-15\rho^4,\ 1-7\rho+14\rho^2-1\rho^3-3\rho^4,\ 1-3\rho+13\rho^2-2\rho^3-3\rho^4,\ 3-15\rho+20\rho^2+0\rho^3-4\rho^4,\ 1-7\rho+14\rho^2-1\rho^3-3\rho^4,\ 1-7\rho+14\rho^2-1\rho^3-3\rho^4,\ 9-28\rho+29\rho^2+1\rho^3-6\rho^4,\ 1-3\rho+13\rho^2-2\rho^3-3\rho^4)$

$(2-7\rho+6\rho^2+1\rho^3-1\rho^4,\ 9-28\rho+29\rho^2+1\rho^3-6\rho^4,\ 2-11\rho+15\rho^2+0\rho^3-3\rho^4,\ 2-11\rho+15\rho^2+0\rho^3-3\rho^4,\ 3-15\rho+20\rho^2+0\rho^3-4\rho^4,\ 2-11\rho+15\rho^2+0\rho^3-3\rho^4,\ 3-15\rho+20\rho^2+0\rho^3-4\rho^4,\ 17-64\rho+64\rho^2+3\rho^3-13\rho^4,\ 29-142\rho+157\rho^2+4\rho^3-32\rho^4,\ 2-7\rho+6\rho^2+1\rho^3-1\rho^4,\ 17-83\rho+93\rho^2+2\rho^3-19\rho^4,\ 67-322\rho+352\rho^2+9\rho^3-72\rho^4,\ 2-11\rho+15\rho^2+0\rho^3-3\rho^4,\ 17-64\rho+64\rho^2+3\rho^3-13\rho^4,\ 2-7\rho+6\rho^2+1\rho^3-1\rho^4)$

$(2-7\rho+6\rho^2+1\rho^3-1\rho^4,\ 8-36\rho+39\rho^2+1\rho^3-8\rho^4,\ 9-44\rho+49\rho^2+1\rho^3-10\rho^4,\ 8-36\rho+39\rho^2+1\rho^3-8\rho^4,\ 1-3\rho+13\rho^2-2\rho^3-3\rho^4,\ 1-3\rho+13\rho^2-2\rho^3-3\rho^4,\ 8-25\rho+20\rho^2+2\rho^3-4\rho^4,\ 9-44\rho+49\rho^2+1\rho^3-10\rho^4,\ 8-25\rho+20\rho^2+2\rho^3-4\rho^4,\ 2-7\rho+6\rho^2+1\rho^3-1\rho^4,\ 8-36\rho+39\rho^2+1\rho^3-8\rho^4,\ 9-44\rho+49\rho^2+1\rho^3-10\rho^4,\ 1-3\rho+13\rho^2-2\rho^3-3\rho^4,\ 8-25\rho+20\rho^2+2\rho^3-4\rho^4,\ 2-7\rho+6\rho^2+1\rho^3-1\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 38569$, definierendem Polynom $t^5 + t^4 - 5t^3 - t^2 + 4t - 1$, $\rho \approx 0,3067$ und $(x^2, y^2, z^2) = (3 - \rho - 5\rho^2 + \rho^3 + \rho^4, 28 - 23\rho - 41\rho^2 + 12\rho^3 + 9\rho^4, 28 - 22\rho - 41\rho^2 + 12\rho^3 + 9\rho^4)$:

$(15 - 9\rho - 19\rho^2 + 5\rho^3 + 4\rho^4, 15 - 9\rho - 19\rho^2 + 5\rho^3 + 4\rho^4, 484 - 356\rho - 681\rho^2 + 193\rho^3 + 148\rho^4, 466 - 340\rho - 654\rho^2 + 185\rho^3 + 142\rho^4, 596 - 439\rho - 837\rho^2 + 238\rho^3 + 182\rho^4, 15 - 9\rho - 19\rho^2 + 5\rho^3 + 4\rho^4, 2128 - 1572\rho - 2999\rho^2 + 852\rho^3 + 652\rho^4, 2356 - 1739\rho - 3321\rho^2 + 943\rho^3 + 722\rho^4, 3369 - 2491\rho - 4751\rho^2 + 1350\rho^3 + 1033\rho^4, 466 - 340\rho - 654\rho^2 + 185\rho^3 + 142\rho^4, 596 - 439\rho - 837\rho^2 + 238\rho^3 + 182\rho^4, 969 - 716\rho - 1366\rho^2 + 388\rho^3 + 297\rho^4, 15 - 9\rho - 19\rho^2 + 5\rho^3 + 4\rho^4, 83 - 62\rho - 115\rho^2 + 33\rho^3 + 25\rho^4, 15 - 9\rho - 19\rho^2 + 5\rho^3 + 4\rho^4)$

$(8 - 7\rho - 9\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4, 523 - 386\rho - 736\rho^2 + 209\rho^3 + 160\rho^4, 744 - 549\rho - 1048\rho^2 + 298\rho^3 + 228\rho^4, 523 - 386\rho - 736\rho^2 + 209\rho^3 + 160\rho^4, 484 - 356\rho - 681\rho^2 + 193\rho^3 + 148\rho^4, 484 - 356\rho - 681\rho^2 + 193\rho^3 + 148\rho^4, 724 - 535\rho - 1021\rho^2 + 290\rho^3 + 222\rho^4, 744 - 549\rho - 1048\rho^2 + 298\rho^3 + 228\rho^4, 724 - 535\rho - 1021\rho^2 + 290\rho^3 + 222\rho^4, 8 - 7\rho - 9\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4, 523 - 386\rho - 736\rho^2 + 209\rho^3 + 160\rho^4, 744 - 549\rho - 1048\rho^2 + 298\rho^3 + 228\rho^4, 484 - 356\rho - 681\rho^2 + 193\rho^3 + 148\rho^4, 724 - 535\rho - 1021\rho^2 + 290\rho^3 + 222\rho^4, 8 - 7\rho - 9\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4)$

$(8 - 7\rho - 9\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4, 659 - 487\rho - 929\rho^2 + 264\rho^3 + 202\rho^4, 724 - 535\rho - 1021\rho^2 + 290\rho^3 + 222\rho^4, 659 - 487\rho - 929\rho^2 + 264\rho^3 + 202\rho^4, 466 - 340\rho - 654\rho^2 + 185\rho^3 + 142\rho^4, 466 - 340\rho - 654\rho^2 + 185\rho^3 + 142\rho^4, 541 - 400\rho - 763\rho^2 + 217\rho^3 + 166\rho^4, 724 - 535\rho - 1021\rho^2 + 290\rho^3 + 222\rho^4, 541 - 400\rho - 763\rho^2 + 217\rho^3 + 166\rho^4, 8 - 7\rho - 9\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4, 659 - 487\rho - 929\rho^2 + 264\rho^3 + 202\rho^4, 724 - 535\rho - 1021\rho^2 + 290\rho^3 + 222\rho^4, 466 - 340\rho - 654\rho^2 + 185\rho^3 + 142\rho^4, 541 - 400\rho - 763\rho^2 + 217\rho^3 + 166\rho^4, 8 - 7\rho - 9\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 38569$, definierendem Polynom $t^5 + t^4 - 5t^3 - t^2 + 4t - 1$, $\rho \approx 0,7015$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-4+6\rho+8\rho^2-3\rho^3-2\rho^4, -6+15\rho+15\rho^2-7\rho^3-4\rho^4, -6+16\rho+15\rho^2-7\rho^3-4\rho^4)$:

$(-8+21\rho+23\rho^2-10\rho^3-6\rho^4, -8+21\rho+23\rho^2-10\rho^3-6\rho^4, -55+141\rho+149\rho^2-66\rho^3-39\rho^4, -47+121\rho+126\rho^2-56\rho^3-33\rho^4, -76+204\rho+209\rho^2-94\rho^3-55\rho^4, -8+21\rho+23\rho^2-10\rho^3-6\rho^4, -248+648\rho+669\rho^2-300\rho^3-176\rho^4, -305+785\rho+815\rho^2-364\rho^3-214\rho^4, -659+1700\rho+1762\rho^2-788\rho^3-463\rho^4, -47+121\rho+126\rho^2-56\rho^3-33\rho^4, -76+204\rho+209\rho^2-94\rho^3-55\rho^4, -227+586\rho+609\rho^2-272\rho^3-160\rho^4, -8+21\rho+23\rho^2-10\rho^3-6\rho^4, -58+151\rho+156\rho^2-70\rho^3-41\rho^4, -8+21\rho+23\rho^2-10\rho^3-6\rho^4)$

$(-1+9\rho+7\rho^2-4\rho^3-2\rho^4, -58+151\rho+156\rho^2-70\rho^3-41\rho^4, -124+320\rho+332\rho^2-148\rho^3-87\rho^4, -58+151\rho+156\rho^2-70\rho^3-41\rho^4, -55+141\rho+149\rho^2-66\rho^3-39\rho^4, -55+141\rho+149\rho^2-66\rho^3-39\rho^4, -139+360\rho+373\rho^2-167\rho^3-98\rho^4, -124+320\rho+332\rho^2-148\rho^3-87\rho^4, -139+360\rho+373\rho^2-167\rho^3-98\rho^4, -1+9\rho+7\rho^2-4\rho^3-2\rho^4, -58+151\rho+156\rho^2-70\rho^3-41\rho^4, -124+320\rho+332\rho^2-148\rho^3-87\rho^4, -55+141\rho+149\rho^2-66\rho^3-39\rho^4, -139+360\rho+373\rho^2-167\rho^3-98\rho^4, -1+9\rho+7\rho^2-4\rho^3-2\rho^4)$

$(-1+9\rho+7\rho^2-4\rho^3-2\rho^4, -95+246\rho+255\rho^2-114\rho^3-67\rho^4, -112+288\rho+301\rho^2-134\rho^3-79\rho^4, -95+246\rho+255\rho^2-114\rho^3-67\rho^4, -47+121\rho+126\rho^2-56\rho^3-33\rho^4, -47+121\rho+126\rho^2-56\rho^3-33\rho^4, -66+173\rho+179\rho^2-80\rho^3-47\rho^4, -112+288\rho+301\rho^2-134\rho^3-79\rho^4, -66+173\rho+179\rho^2-80\rho^3-47\rho^4, -1+9\rho+7\rho^2-4\rho^3-2\rho^4, -95+246\rho+255\rho^2-114\rho^3-67\rho^4, -112+288\rho+301\rho^2-134\rho^3-79\rho^4, -47+121\rho+126\rho^2-56\rho^3-33\rho^4, -66+173\rho+179\rho^2-80\rho^3-47\rho^4, -1+9\rho+7\rho^2-4\rho^3-2\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 38569$, definierendem Polynom $t^5 + t^4 - 5t^3 - t^2 + 4t - 1$, $\rho \approx 1{,}6460$ und $(x^2, y^2, z^2) = (-3 + 2\rho + 5\rho^2 - \rho^3 - \rho^4, 6 - 16\rho - 8\rho^2 + 20\rho^3 + 8\rho^4, 2 - 14\rho - 3\rho^2 + 19\rho^3 + 7\rho^4)$:

$(1 - 1\rho + 2\rho^2 + 1\rho^3 + 0\rho^4,\ 1 - 1\rho + 2\rho^2 + 1\rho^3 + 0\rho^4,\ 481 - 1617\rho - 510\rho^2 + 2073\rho^3 + 784\rho^4,\ 468 - 1584\rho - 496\rho^2 + 2032\rho^3 + 768\rho^4,\ 481 - 1617\rho - 510\rho^2 + 2073\rho^3 + 784\rho^4,\ 1 - 1\rho + 2\rho^2 + 1\rho^3 + 0\rho^4,\ 1921 - 6513\rho - 2038\rho^2 + 8361\rho^3 + 3160\rho^4,\ 1921 - 6513\rho - 2038\rho^2 + 8361\rho^3 + 3160\rho^4,\ 1996 - 6769\rho - 2116\rho^2 + 8690\rho^3 + 3284\rho^4,\ 468 - 1584\rho - 496\rho^2 + 2032\rho^3 + 768\rho^4,\ 481 - 1617\rho - 510\rho^2 + 2073\rho^3 + 784\rho^4,\ 503 - 1706\rho - 528\rho^2 + 2193\rho^3 + 828\rho^4,\ 1 - 1\rho + 2\rho^2 + 1\rho^3 + 0\rho^4,\ 7 - 10\rho - 8\rho^2 + 9\rho^3 + 4\rho^4,\ 1 - 1\rho + 2\rho^2 + 1\rho^3 + 0\rho^4)$

$(6 - 5\rho - 8\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4,\ 481 - 1617\rho - 510\rho^2 + 2073\rho^3 + 784\rho^4,\ 481 - 1616\rho - 512\rho^2 + 2072\rho^3 + 784\rho^4,\ 481 - 1616\rho - 512\rho^2 + 2072\rho^3 + 784\rho^4,\ 481 - 1617\rho - 510\rho^2 + 2073\rho^3 + 784\rho^4,\ 481 - 1616\rho - 512\rho^2 + 2072\rho^3 + 784\rho^4,\ 481 - 1617\rho - 510\rho^2 + 2073\rho^3 + 784\rho^4,\ 517 - 1740\rho - 548\rho^2 + 2232\rho^3 + 844\rho^4,\ 518 - 1744\rho - 550\rho^2 + 2237\rho^3 + 846\rho^4,\ 6 - 5\rho - 8\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4,\ 517 - 1740\rho - 548\rho^2 + 2232\rho^3 + 844\rho^4,\ 556 - 1873\rho - 588\rho^2 + 2402\rho^3 + 908\rho^4,\ 481 - 1616\rho - 512\rho^2 + 2072\rho^3 + 784\rho^4,\ 517 - 1740\rho - 548\rho^2 + 2232\rho^3 + 844\rho^4,\ 6 - 5\rho - 8\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4)$

$(6 - 5\rho - 8\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4,\ 486 - 1645\rho - 516\rho^2 + 2111\rho^3 + 798\rho^4,\ 502 - 1701\rho - 528\rho^2 + 2187\rho^3 + 826\rho^4,\ 486 - 1645\rho - 516\rho^2 + 2111\rho^3 + 798\rho^4,\ 468 - 1584\rho - 496\rho^2 + 2032\rho^3 + 768\rho^4,\ 468 - 1584\rho - 496\rho^2 + 2032\rho^3 + 768\rho^4,\ 486 - 1645\rho - 516\rho^2 + 2111\rho^3 + 798\rho^4,\ 502 - 1701\rho - 528\rho^2 + 2187\rho^3 + 826\rho^4,\ 486 - 1645\rho - 516\rho^2 + 2111\rho^3 + 798\rho^4,\ 6 - 5\rho - 8\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4,\ 486 - 1645\rho - 516\rho^2 + 2111\rho^3 + 798\rho^4,\ 502 - 1701\rho - 528\rho^2 + 2187\rho^3 + 826\rho^4,\ 468 - 1584\rho - 496\rho^2 + 2032\rho^3 + 768\rho^4,\ 486 - 1645\rho - 516\rho^2 + 2111\rho^3 + 798\rho^4,\ 6 - 5\rho - 8\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4)$

Für $k = \mathbb{Q}(\rho)$ mit Diskriminante $d_k = 38569$, definierendem Polynom $t^5 + t^4 - 5t^3 - t^2 + 4t - 1$, $\rho \approx 1,6460$ und $(x^2, y^2, z^2) = (1 - 3\rho - 3\rho^2 + 2\rho^3 + \rho^4, 1 - 3\rho - 3\rho^2 + 2\rho^3 + \rho^4, -1 + 2\rho + \rho^2)$:

$(-1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4,\ 2-4\rho-2\rho^2+5\rho^3+2\rho^4,\ 8-18\rho-8\rho^2+23\rho^3+9\rho^4,\ 2-4\rho-2\rho^2+5\rho^3+2\rho^4,\ 1-4\rho+2\rho^2+4\rho^3+1\rho^4,\ 1-4\rho+2\rho^2+4\rho^3+1\rho^4,\ 11-35\rho-11\rho^2+45\rho^3+17\rho^4,\ 8-18\rho-8\rho^2+23\rho^3+9\rho^4,\ 11-35\rho-11\rho^2+45\rho^3+17\rho^4,\ -1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4,\ 2-4\rho-2\rho^2+5\rho^3+2\rho^4,\ 8-18\rho-8\rho^2+23\rho^3+9\rho^4,\ 1-4\rho+2\rho^2+4\rho^3+1\rho^4,\ 11-35\rho-11\rho^2+45\rho^3+17\rho^4,\ -1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4)$

$(-1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4,\ 2-4\rho-2\rho^2+5\rho^3+2\rho^4,\ 8-18\rho-8\rho^2+23\rho^3+9\rho^4,\ 2-4\rho-2\rho^2+5\rho^3+2\rho^4,\ 1-4\rho+2\rho^2+4\rho^3+1\rho^4,\ 1-4\rho+2\rho^2+4\rho^3+1\rho^4,\ 11-35\rho-11\rho^2+45\rho^3+17\rho^4,\ 8-18\rho-8\rho^2+23\rho^3+9\rho^4,\ 11-35\rho-11\rho^2+45\rho^3+17\rho^4,\ -1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4,\ 2-4\rho-2\rho^2+5\rho^3+2\rho^4,\ 8-18\rho-8\rho^2+23\rho^3+9\rho^4,\ 1-4\rho+2\rho^2+4\rho^3+1\rho^4,\ 11-35\rho-11\rho^2+45\rho^3+17\rho^4,\ -1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4)$

$(-1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4,\ 6-19\rho-5\rho^2+24\rho^3+9\rho^4,\ 8-16\rho-8\rho^2+20\rho^3+8\rho^4,\ 6-19\rho-5\rho^2+24\rho^3+9\rho^4,\ -1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4,\ -1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4,\ 0+0\rho+4\rho^2+4\rho^3+1\rho^4,\ 8-16\rho-8\rho^2+20\rho^3+8\rho^4,\ 0+0\rho+4\rho^2+4\rho^3+1\rho^4,\ -1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4,\ 6-19\rho-5\rho^2+24\rho^3+9\rho^4,\ 8-16\rho-8\rho^2+20\rho^3+8\rho^4,\ -1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4,\ 0+0\rho+4\rho^2+4\rho^3+1\rho^4,\ -1+2\rho+4\rho^2+1\rho^3+0\rho^4)$

Anhang A

Hulpkes Listen von Erzeugenden von Untergruppen der Signatur $(2; -)$

Alexander Hulpke hat für diverse Fuchssche Gruppen, die Untergruppen der Signatur $(2; -)$ enthalten, Erzeugende für diese Untergruppen berechnet. Die Listen für die Signaturen $(1; 2)$, $(1; 3)$ und $(0; 3, 3, 3, 3)$ werden hier angegeben als Tupel (a, b, c, d), wobei die Untergruppe der Signatur $(2; -)$ präsentiert sei durch $\Gamma' = \langle a, b, c, d \mid [a, b][c, d] = 1\rangle$.

Signatur $(1; 2)$**:** Eine Fuchssche Gruppe $\Gamma = \langle a_1, b_1, x_1 \mid x_1^2 = [a, b]x = 1\rangle$ der Signatur $(1; 2)$ hat zehn Untergruppen der Signatur $(2; -)$ mit Erzeugenden
1. $(a_1,\ a_1^{-1}b_1a_1^2b_1,\ a_1^{-1}x_1b_1^{-1},\ b_1x_1^{-1}b_1a_1^3b_1^{-1})$,
2. $(x_1a_1^{-1}b_1^{-1},\ b_1a_1x_1^{-1}b_1a_1^{-2}x_1^{-1},\ b_1a_1x_1^{-1}b_1^{-2},\ b_1^2a_1^{-1}b_1^{-2})$
3. $(b_1a_1b_1x_1^{-1},\ b_1a_1^2b_1^{-1}a_1^{-1},\ b_1a_1^2b_1^{-1}a_1^{-1}b_1a_1^{-2}b_1^{-1},\ b_1a_1^2b_1^2a_1^{-2}b_1^{-1})$
4. $(a_1,\ b_1a_1^{-2}b_1^{-1}x_1b_1^{-1}a_1b_1,\ b_1^2x_1^{-1},\ x_1b_1^{-1}a_1^{-2}b_1^{-1})$
5. $(b_1^{-1}a_1^{-1}b_1^{-1},\ x_1a_1b_1^{-1},\ x_1a_1^{-1}b_1,\ b_1^{-1}a_1^2b_1^{-1}a_1^{-1})$
6. $(a_1b_1x_1^{-1},\ x_1b_1^{-2}a_1x_1^{-1},\ b_1,\ b_1^{-1}x_1b_1^{-1}a_1)$
7. $(a_1^2,\ a_1^{-1}b_1a_1x_1^{-1}a_1b_1^2a_1^{-1},\ a_1^{-1}b_1a_1x_1^{-1},\ a_1b_1^2a_1b_1^{-1})$
8. $(a_1b_1a_1,\ a_1^{-1}b_1a_1^{-1},\ a_1^{-1}b_1a_1x_1^{-1},\ x_1a_1^{-1}b_1a_1b_1^{-1})$
9. $(a_1b_1x_1^{-1},\ x_1a_1^{-1}b_1a_1^{-1}b_1^{-1},\ x_1a_1^{-1}b_1a_1^{-2}b_1^{-1}a_1x_1^{-1},\ x_1a_1^{-1}b_1a_1b_1^{-2}a_1x_1^{-1})$
10. $(x_1a_1^{-1}b_1,\ b_1^{-2}x_1a_1^2b_1a_1^{-1},\ a_1^{-2}x_1^{-1},\ x_1a_1^2b_1^{-2})$

Signatur $(1; 3)$**:** Eine Fuchssche Gruppe $\Gamma = \langle a_1, b_1, x_1 \mid x_1^3 = [a, b]x = 1\rangle$ der Signatur $(1; 3)$ hat drei Untergruppen der Signatur $(2; -)$ mit Erzeugenden
1. $(x_1b_1^{-1},\ b_1x_1^{-1}a_1^{-1}x_1^{-1}a_1^{-1}b_1^{-1},\ b_1x_1^{-1}b_1^{-2},\ b_1^2a_1^{-1}b_1^{-2})$
2. $(b_1x_1a_1,\ b_1a_1^{-1}b_1a_1^{-1}b_1^{-1}x_1^{-1}a_1,\ b_1a_1^{-1}b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1^{-1},\ b_1a_1^{-1}x_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1^{-1})$
3. $(b_1^{-1}x_1a_1^2,\ a_1^{-1}x_1a_1x_1^{-1}b_1,\ a_1^{-1}x_1,\ a_1^3b_1^{-1})$

Signatur $(0; 3, 3, 3, 3)$**:** Eine Fuchssche Gruppe $\Gamma = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_i^3 = x_1 \cdots x_4 = 1\rangle$ der Signatur $(0; 3, 3, 3, 3)$ hat drei Untergruppen der Signatur $(2; -)$ mit Erzeugenden

1. $(x_3^{-1}x_1^{-2}x_2,\ x_2^{-1}x_1^2x_2^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1},\ x_2x_1^{-1},\ x_1x_2^{-2}x_1)$
2. $(x_1^{-1}x_2^{-1},\ x_2^{-1}x_3^{-2}x_1,\ x_2^{-1}x_1^{-1},\ x_1x_3^{-1})$
3. $(x_2x_3^{-1},\ x_3^{-1}x_1^{-2}x_2^{-1},\ x_3^{-1}x_1^{-1},\ x_1^{-1}x_3^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1})$

Anhang B

Computerprogramme

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Algorithmus aus Satz 3.24 in der Programmiersprache Java implementiert, die entsprechenden Computerprogramme sind dieser Arbeit auf CD beigefügt. Der Quellcode des Startprogramms steht in der Datei `Normalform.java` im Verzeichnis `test`. In dieser Datei sind die Quadrate der Spuren einzugeben, die die zu untersuchende Gruppe der Signatur $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ beschreiben, also $(y_{12}^2, \ldots, y_{56}^2)$ in der üblichen Bezeichnung. Ausgegeben werden die Spuren $(y_{12}, \ldots, y_{56})$ eines minimalen Standarderzeugendensystems dieser Gruppe. Da im Programm Fließkommazahlen miteinander verglichen werden, werden die Ungleichungen aus Satz 3.21 noch einmal überprüft. Speziell für die Berechnungen in Abschnitt 3.2.1 und 3.2.3 wurde dieses Programm dahingehend ergänzt, dass die Werte x, y und z, die die $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$-Konjugationsklasse der Gruppen der Signatur $(1; 2)$ bzw. $(0; 3, 3, 3, 3)$ beschreiben, sowie die Daten des der arithmetischen Gruppe zugrunde liegenden total reellen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\rho)$, dabei ρ ganz, eingegeben werden können. Ausgegeben werden das (ganzalgebraische) Zahlentupel $(y_{12}^2, \ldots, y_{56}^2)$, dargestellt als Kombination in ρ. Die zugehörigen Dateien heißen `Flaecheg1p2.java` bzw. `Flaeche3333.java`. Wurden die Daten eingegeben und die Dateien gespeichert, sind sie zu compilieren mittels
`javac test/Normalform.java` (bzw. `javac test/Flaecheg1p2.java` bzw. `javac test/Flaeche3333.java`). Der Start erfolgt dann mittels `java test.Normalform` (bzw. `java test.Flaecheg1p2` bzw. `java test.Flaeche3333`).

Bei der Berechnung der y_{ij}^2 wurde benutzt, dass sie Quadrate von Spuren von Elementen in einer arithmetischen Fuchsschen Gruppe sind und deshalb den Ungleichungen $0 < \varphi(y_{ij}^2) < 4$ genügen für alle Einbettungen $\varphi \neq \mathrm{id}$ von k_2 in $\mathbb{R}$.

Für die Berechnungen obiger Programme werden die Dateien im Verzeichnis `Algebra` benutzt.

Literaturverzeichnis

[1] Abu Osman, M.T. und G. Rosenberger: Embedding Property of Surface Groups, Bull. Malaysian Math. Soc. (2) **3** (1980): 21–27

[2] Ackermann, P.: *Zweielementig erzeugte arithmetische Fuchssche Gruppen*, Diplomarbeit, Universität Dortmund, 2000

[3] Ackermann, P., M. Näätänen und G. Rosenberger: The arithmetic Fuchsian groups with signature $(0; 2, 2, 2, q)$, in Cho, Jung Rae (ed.) et al., *Recent advances in group theory and low-dimensional topology.* Proceedings of the 2nd German-Korean workshop on algebra and topology, Pusan, Korea, August 14-26, 2000. Lemgo: Heldermann Verlag. Res. Expo. Math. 27, 1-9 (2003).

[4] Baer, C.: *Klassifikation arithmetischer Fuchsscher Gruppen der Signatur* $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$, Dissertation, Universität Dortmund, 2001

[5] Beardon, A: *The geometry of discrete groups*, Springer, New York 1983

[6] Borel, A. und Harish-Chandra: Arithmetic subgroups of algebraic groups, Annals of Mathematics **75** (1962): 485–535

[7] Borel, A.: Commensurability classes and volumes of hyperbolic 3-manifolds, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 4.8 (1981): 1–33

[8] Culler, M. und P.B. Shalen: Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds, Annals of Mathematics **117** (1983): 109–146

[9] Fine, B. und G. Rosenberger: Classification of all generating pairs of two generator Fuchsian groups. *Groups '93 Galway/St. Andrews* 1. London Mathematical Society Lecture Note Series 211. Cambridge University Press, 1995

[10] Fine, B. und G. Rosenberger: *Algebraic Generalizations of Discrete Groups. A Path to Combinatorial Group Theory Through One-Relator Products*, Marcel Dekker Series of Monographs **223**, 1999

[11] Fricke, R. und F. Klein: *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen I* 1897; Nachdruck, Teubner, 1965

[12] Griffiths, D.: Length inequalities for systems of geodesic loops on a surface of genus two: 1, Bulletin of the LMS **28** (1996), 505–508

[13] Griffiths, D.: At most 27 length inequalities define Maskit's fundamental domain for the modular group in genus 2, in: Rivin, Igor (ed.) et al., *The Epstein Birthday Schrift dedicated to David Epstein on the occasion of his 60th birthday.* Warwick: University of Warwick, Institute of Mathematics, Geom. Topol. Monogr. **1** (1998), 167–182

[14] Gromov, M.: Hyperbolic groups, Essays in group theory, Publ., Math. Sci. Res. Inst. **8** (1987), 75–263

[15] Helling, H.: Über den Raum der kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht 2, J. Reine Angew. Math. **268/269** (1974), 286–293

[16] Hilden, H.M., M.T. Lozano und J.M. Montesinos-Amilibia: A characterization of arithmetic subgroups of $SL(2,\mathbb{R})$ and $SL(2,\mathbb{C})$, Math. Nachr. **159** (1992), 245–270

[17] Hulpke, A.: Some subgroups of Fuchsian groups, unveröffentlicht

[18] Johansson, S.: Genera of arithmetic Fuchsian groups, Acta Arith. **86**, No.2 (1998), 171–191

[19] Katok, S.: *Fuchsian Groups.* Chiacago Lectures in Mathematics. Chicago, London: The University of Chicago Press, 1992

[20] Knapp, A.W.: Doubly generated Fuchsian groups, Michigan Mathematical Journal 15 (1968): 289–304

[21] Maclachlan, C. und A.W. Reid: *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **219**, Springer-Verlag, New York 2003

[22] Maclachlan, C.: Torsion in arithmetic Fuchsian groups, erscheint

[23] Maclachlan, C. und G. Rosenberger: Two-generator arithmetic Fuchsian groups, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **93** (1983): 383–391

[24] Maclachlan, C. und G. Rosenberger: Two-generator arithmetic Fuchsian groups. II, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **111** (1992): 7–24

[25] Maclachlan, C. und G. Rosenberger: Commensurability classes of two-generator Fuchsian groups. *Discrete groups and geometry.* London Mathematical Society Lecture Note 175, 1992

[26] Magnus, W.: Noneuclidean tesselations and their groups, Pure and applied mathematics, Acad. Press, New York 1974

[27] Maskit, B.: On Poincaré's theorem for fundamental polygons, Adv. Math. **7** (1971), 219–230

[28] Maskit, B.: *Kleinian Groups*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1987

[29] Maskit, B.: A Picture of Moduli Space, Invent. Math. **126** (1996), 341–390

[30] Maskit, B.: On the fundamental domain for the Teichmüller modular group, J. Anal. Math. **75** (1998), 155–172

[31] Nakanishi, T. und M. Näätänen: Parametrization of Teichmüller space by length parameters. Andreian Cazacu, Cabiria (ed.) et al., *Analysis and topology. A volume dedicated to the memory of S. Stoilow*. Singapore: World Scientific (1998), 541–560

[32] Nakanishi, T., M. Näätänen und G. Rosenberger: Arithmetic Fuchsian groups of signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$ with $2 \leq e_1 \leq e_2 \leq e_3, e_4 = \infty$, Cont. Math. **240** (1999): 269–277

[33] Neukirch, J.: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg 1992

[34] Odlyzko, A.: Unconditional bounds for discriminants. http://www.dtc.umn.edu/˜odlyzko/unpublished/discr.bound.table4, Stand März 2005

[35] Phost, M., P. Weiler und H. Zassenhaus: On effective computation of fundamental units. II. Mathematics of Computation **38** (1982): 293–329

[36] Poincaré, H. Sur la théorie des fonctions Fuchsiennes, Oeuvres, vol. **II**, 75–91, Gauthier-Villars, Paris, 1952

[37] Purzitsky, N. und G. Rosenberger: Two generator Fuchsian groups of genus one, Mathematische Zeitschrift **128** (1972): 245–251

[38] Reid, A.: *Arithmetic Fuchsian groups — a survey*, Dissertation Aberdeen, 1985

[39] Schneider, V.: Die elliptischen Fixpunkte zu Modulgruppen in Quaternionenschiefkörpern, Mathematische Annalen **217** (1975): 29–45

[40] Shimizu, H.: On zeta functions of quaternion algebras, Annals of Mathematics **81** (1965): 166–193

[41] Singerman, D.: Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups, Bulletin of the London Mathematical Society **2** (1970): 319–323

[42] Sunaga, J.: Some Arithmetic Fuchsian Groups with Signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$, Tokyo J. Math. **20** (1997), 435–451

[43] Sunaga, J.: Some Arithmetic Fuchsian Groups with Signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$ II, Saitama Math. J. **15** (1997), 15–46

[44] Takeuchi, K.: A characterization of arithmetic Fuchsian groups, Journal of the Mathematical Society Japan **27.4** (1975): 600–612

[45] Takeuchi, K.: Arithmetic triangle groups, Journal of the Mathematical Society of Japan **29.1** (1977): 91–106

[46] Takeuchi, K.: Commensurability classes of arithmetic triangle groups, Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo 1A.24 (1977): 201–212

[47] Takeuchi, K.: Arithmetic Fuchsian groups with signature (1; e), Journal of the Mathematical Society of Japan **35.3** (1983): 381–407

[48] Takeuchi, K.: Subgroups of the modular group with signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$, Saitama Math. J. **14** (1996), 55–78

[49] Takeuchi, K.: Correction to the paper "Subgroups of the modular group with signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$", Saitama Math. J. **15** (1997), 85–90

[50] Vigneras, M.-F.: *Arithmetique des Algèbre de Quaternions.* Lecture Notes in Mathematics 800. Berlin, Heidelberg: Springer, 1980