# Vorstellungen zur linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und -ergebnisse von Studierenden

Astrid Fischer

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Pädagogik
dem Fachbereich der Mathematik der Universität Dortmund
vorgelegt im Dezember 2005

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Anstoß zu dieser Arbeit gab die Beobachtung, dass viele Studierende an den Herausforderungen einer Einführungsvorlesung zur linearen Algebra scheitern. Bemerkenswerterweise wurde die lineare Algebra im Gegensatz zur Analysis bis in die 90er Jahre des vergangenen Jahrhunderts kaum in der didaktischen Forschung berücksichtigt. Seitdem wurde vorwiegend in Frankreich und Nordamerika eine Anzahl von mathematikdidaktischen Arbeiten veröffentlicht, die auf die Anforderungen eingehen, welche die Theorie der modernen linearen Algebra an Lernende stellt. So gibt es mittlerweile eine Reihe von Untersuchungen, die die Erfolge und Misserfolge Studierender beim Lernen zentraler Begriffe und im Umgang mit verschiedenen Darstellungsformen aufzeigen. Die Literatur ist sich einig darüber, dass sich die lineare Algebra durch eine Vielzahl an Begriffen, Zusammenhängen und Darstellungsformen auszeichnet, die zudem häufig hohen Abstraktionsgrad besitzen. Insbesondere Jean-Luc Dorier (2000) zeigt in einer epistemologischen Analyse dieser Theorie, dass die dort anzutreffende Formalisierung ein unverzichtbares Wesensmerkmal ist. Die Literaturvorschläge zur Begegnung mit dem Problem, dass viele Studierende diese Theorie nicht verstehen, gehen in zwei entgegengesetzte Richtungen: Während die Einen resignieren und dafür eintreten, abstrakte Konzepte aus einer Anfängerveranstaltung weitgehend auszusparen, versuchen Andere, Wege zu finden, auf denen diese Konzepte den Studierenden nahegebracht werden können.

Der Kern der vorliegenden Arbeit ist eine Pilotstudie über Vorstellungen von Lernenden. Sie fragt nach Ideen und Strategien der Erfassung, Repräsentation und Nutzung von mathematischem Wissen, wenn dieses hohen Abstraktionsgehalt hat, in formalisierter Darstellung dargeboten und in komplexe Strukturen eingebunden ist. Das Interesse dieser Untersuchung liegt nicht in erster Linie in einer bewertenden Beschreibung, die studentische Äußerungen an den Normen der Mathematik misst, sondern in einer genuinen Suche nach den eigenen Konzepten der Probandinnen und Probanden. Diese Konzepte werden daraufhin analysiert, inwieweit sie tragfähig, ausbaufähig und gegebenenfalls korrigierbar sind. Dies gibt Hinweise darauf, welches Potential Lernende besitzen und welcher Art Lernhilfen sein müssten. Zudem werden Vermutungen über Vorstellungen und Vorgehensweisen einzelner Studierender als Anhaltspunkte für eine vertiefte didaktisch orientierte Sachanalyse einzelner Begriffe und Themen der linearen Algebra genutzt. Konkreter geht die Arbeit den Fragen nach:

- Welche Vorstellungen bilden sich Studierende zu einzelnen Begriffen der linearen Algebra? Welche grundsätzlichen, gemeinsamen Bauartmerkmale haben die Vorstellungen einer oder eines Studierenden zu verschiedenen Begriffen?

- Welche Strategien verwenden Studierende, um mathematische Informationen aufzunehmen und zu verarbeiten? Welche kognitiven Werkzeuge setzen sie ein, welche vermeiden sie? Wie gehen sie insbesondere mit Anforderungen um, die die Grenzen ihres Abstraktionsvermögens übersteigen?

- Welche Kernideen beinhalten einzelne zentrale Begriffe der linearen Algebra? Welche Verständnishürden sind mit diesen Wesensmerkmalen verbunden?

Lerntheoretische Basis dieser Arbeit ist ein kognitiver Konstruktivismus, der die Überzeugung hegt, dass mathematische Strukturen in gewissem Maße durch äußere Repäsentationen vermittelt werden können, dass sie aber nicht im Sinne eines Abbildens direkt übertragen werden können, sondern von Lernenden in eigenen inneren Repräsentationen (re)konstruiert werden müssen, wenn sie fruchtbar eingesetzt werden sollen. Die Denkstiltheorie von Schwank (2003) unterscheidet zwei Arten des Denkens, welche als prädikatives und als funktionales Denken bezeichnet werden und verschiedene Strategien des Wahrnehmens und des Konstruierens von Vorstellungen mit sich bringen. Gemäß dieser Theorie besitzt jeder Mensch zu einem der beiden Denkstile eine besondere Neigung, welche unterschiedlich stark ausgeprägt sein kann. Diese Neigung setzt einen Schwerpunkt, ohne dabei Strategien des anderen Stils ganz auszuschließen. Eine Hypothese, die sich aus dieser Theorie ergibt, ist, dass sich die fertigen Vorstellungen zu mathematischen Begriffen mitunter erheblich unterscheiden werden, weil die Strategien, mit denen sie konstruiert werden, sehr verschieden sind. Diese Vermutung war Anlass, die Probanden der Pilotstudie so auszuwählen, dass beide Präferenzen vertreten sind. Theoretischen Hintergrund zu den Ideen von Abstraktion und Formalisierung liefern vor allem die Darstellungen von Übergängen von Prozessen zu neuen, abstrakten Objekten durch Dubinsky (1991) und durch Sfard (1991), und die Theorien von Steinbring (2000) und von Dörfler (2003) zu Einsatz und Bedeutung von Zeichen beim Lernen von Mathematik. Diese Grundlagen werden im ersten Kapitel “Theoretische Konzepte zum Lernen von Mathematik” ausgeführt.

Das zweite Kapitel gibt eine didaktisch motivierte Sachanalyse der linearen Algebra, in der die Grundlinien der Theorie mit ihren besonderen epistemologischen Hürden nachgezeichnet werden. Es geht auf die Entwicklungsgeschichte der linearen Algebra, ihre Bedeutung für die heutige Mathematik und die allgemeinen Schwierigkeiten, die diese Theorie Studierenden bereitet, ein. Sodann werden die Begriffe “Vektorraum”, “lineare Abbildung”, “Dualraum” und “Faktorstrukturen” im Einzelnen entfaltet. Sie werden insbesondere im Hinblick auf abstrakte Konstruktionen analysiert. Aus den Wesensmerkmalen dieser Begriffe werden mit Hilfe didaktischer Überlegungen ‘Grundvorstellungen’[1] abgeleitet. Damit sind grundsätzliche Ideen und Zusammenhänge bezeichnet, die für ein umfassendes Verständnis eines mathematischen Begriffs erforderlich oder zumindest hilfreich sind, und die Bestandteile der individuellen Vorstellungen Lernender werden sollten.

Das dritte Kapitel präsentiert die Pilotstudie, in der drei Studierende in ihrem ersten Universitätsjahr in mehreren ausführlichen Einzelinterviewgesprächen zu Wort kommen. Die Studie beobachtet sie in Situationen, die dem Niveau ihrer Vorlesung zur linearen Algebra entsprechen; es wird nicht - ebensowenig wie in der Vorlesung - ein einzelnes Merkmal von Anforderungen herausgelöst um seine Wirkung auf die

[1] Siehe Vom Hofe (1995)

Studierenden isoliert zu betrachten. Thematisch stehen die im vorangegangenen Kapitel näher betrachteten Begriffe im Vordergrund. Die Untersuchung weist Vorstellungen und Strategien bei den drei Interviewten nach, die weit auseinander liegen, die verschiedentliche Fehlvorstellungen beinhalten, die aber bei jeder bzw. jedem der Drei für sich genommen auf sinnvolles Lernen hinweisen. Bei der Studentin mit einer Präferenz für funktionales Denken werden Vorstellungen festgestellt, die sich deutlich von denen der beiden anderen, eher prädikativ Denkenden, unterscheiden. Aber auch diese beiden zeigen von einander verschiedene, persönliche Schwerpunkte und Strategien. Es gibt bei jedem der Drei Hinweise auf individuelle Bauprinzipien von internen Repräsentationen, die über verschiedene Inhalte hinweg wiederkehren. Die Ergebnisse der Pilotstudie geben Einblicke in individuelle kognitive Vorgänge und widerlegen Annahmen, dass Zuhörende im Wesentlichen das verinnerlichen, was ein Dozent oder eine Dozentin darstellt. Ein positiver Nachweis, welche Vorstellungen und Vorgehensweisen für Studierende typisch sind, kann aufgrund der geringen Probandenzahl jedoch nicht geführt werden.

Im vierten Kapitel wird eine zweite empirische Untersuchung vorgestellt. Sie wurde im Anschluss an eine kurze Lehrsequenz zum Thema "Mengen von Restklassen" durchgeführt. In der Gestaltung der Lernumgebung wie auch der empirischen Untersuchung werden Hypothesen aufgegriffen und weitergeführt, die aus der ersten Untersuchung erwachsen. Diese zweite Studie wertet schriftliche Äußerungen von 39 Studierenden in einem ebenfalls qualitativen Analyseverfahren aus. Das Hauptergebnis dieser Studie ist eine Klassifikation der Aufsätze nach drei Abstraktionsstufen. Zudem können auch hier bei einzelnen Aufsätzen individuelle Strategien des Umgangs mit den Abstraktionshürden der Thematik aufgezeigt werden.

Das fünfte Kapitel gibt einen Überblick über den Verlauf und die Ergebnisse des Forschungsprojekts. Es schließt mit einigen Vorschlägen zu einer veränderten Schwerpunktsetzung in der Lehre, welche den Beobachtungen einer großen Vielfalt von individuellen Lernwegen Rechnung trägt.

Ich möchte an dieser Stelle denjenigen, die zum Gelingen dieses Dissertationsprojekts beigetragen haben, meinen herzlichen Dank aussprechen. Er gilt zunächst Prof. Dr. Rudolf Scharlau, der mir trotz seiner eigenen Forschungsschwerpunkte in der reinen Mathematik diese Arbeit durch das ungewöhnliche Angebot, an seinem Lehrstuhl ein mathematikdidaktisches Projekt durchzuführen, ermöglicht hat. Prof. Dr. Lisa Hefendehl möchte ich für ihr geduldiges, aufmerksames Zuhören, ihre anschließenden wertvollen Impulse für mein weiteres Vorgehen und ihr sorgfältiges Lesen meines Manuskripts danken. Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn danke ich für seine Hilfestellungen in meiner Einarbeitungszeit und für seine großzügige Bereitschaft, mich eigene Wege gehen zu lassen. Prof. Dr. Inge Schwank schließlich bin ich dankbar, dass sie sich mehrfach Zeit genommen hat, meine Fragen zur Einordnung meiner Beobachtungen hinsichtlich Präferenzen für prädikatives oder funktionales Denken zu beantworten.

Die wichtigste Unterstützung jedoch habe ich durch Jesus Christus erfahren, der mir in verschiedenen Sackgassen Wege eröffnet und mich bei vielfachen Schwierigkeiten ermutigt hat nicht aufzugeben. Ihm gilt mein besonderer Dank.

# Kapitel 1

# Theoretische Konzepte zum Lernen von Mathematik

## 1.1 Kognitiver Konstruktivismus

Dieser Arbeit liegt die Lerntheorie des kognitiven Konstruktivismus zugrunde, welche Merkmale des Konstruktivismus und des Kognitivismus mit einander verbindet.[1] In ihrer Reinform stellen diese beiden Theorien unvereinbare Gegensätze dar:

Der radikale Konstruktivismus leugnet sowohl jede Art objektiven Wissens wie auch die Möglichkeit, dass Wissen von einer Person auf die andere übertragen wird. Er geht davon aus, dass ein Mensch Wissen immer subjektiv konstruiert. Die Konstruktion neuen Wissens wird angeregt durch Erfahrungen mit der Umwelt, welche durch bereits vorhandenes Wissen nicht befriedigend erklärt oder behandelt werden können. Die Anregungen der Umwelt können die Art des Aufbaus neuen Wissens nicht eindeutig steuern, sondern stoßen lediglich einen Prozess an, dessen Verlauf vorrangig durch die kognitiven Strukturen des Lernenden bestimmt wird. Eine Konsequenz dieser Theorie für die Lehre ist, dass sie das Ziel verfolgen sollte, das Lernen zu lehren. Sie konzentriert sich darauf, gezielte Anregungen zu geben, welche den Lernenden bewegen, sein vorhandenes subjektives Wissen auszubauen oder neu zu konstruieren. Dazu müssen diese Anstöße gut auf das bereits generierte Wissen abgestimmt werden. Irrtümer und systematische Fehler des Lernenden sind Anzeichen für Zwischenstadien in einem Lernprozess, welche noch weiter entwickelt werden müssen.

Der Kognitivismus dagegen nimmt an, dass Wissen objektiv vorliegt und dieses Wissen anderen prinzipiell vermittelt werden kann. Er geht nämlich davon aus, dass dargebotenes Wissen vom Lernenden in ähnlicher Weise rezipiert wird, wie äußere Reize über die Sinnesorgane aufgenommen und vom Gehirn verarbeitet und gespeichert werden. Der Kognitivismus unterscheidet nach verschiedenen Wissensformen, von denen hier das deklarative und das prozedurale Wissen genannt werden sollen. Das deklarative Wissen umfasst Begriffe und Zusammenhänge. Diese werden vom Gehirn in Strukturen von Netzwerken oder Schemata gespeichert. Das operative oder prozedurale Wissen besteht aus Strategien zum Umgang mit vorhandenem Wissen und zur Integration neuer Wahrnehmungen. Diese Prozesse führen zu neuem

[1] Für eine ausführliche Darstellung des kognitiven Konstruktivismus siehe z.B. Sjuts (1999).

Wissen. Die kognitive Struktur ist die Organisation und das Zusammenspiel des gesamten intern verfügbaren Wissens. Durch die Integration neuen Wissens erfährt sie eine Veränderung. Zugleich ist ihre Beschaffenheit wesentlich dafür verantwortlich, welches neue Wissen aufgenommen werden kann und wie dieses geschieht.

Neben der kognitiven Struktur spielen insbesondere auch Affekte eine wichtige Rolle beim Lernen. So spricht Bauersfeld (1983) nicht von kognitiven Einheiten, sondern von 'subjektiven Erfahrungsbereichen', die er als die Gesamtheit von Erfahrungen, welche ein Individuum mit einem Begriff oder Thema verbindet, definiert. Zu diesen Erfahrungen gehören auch Emotionen. Bauersfeld erklärt Lernen als die Konstruktion neuer subjektiver Erfahrungsbereiche durch die Verknüpfung bislang unverbundener Erfahrungsbereiche. Es kann jedoch geschehen, dass alte, dominierende Erfahrungsbereiche die Aufnahme und mentale Konstruktion neuen Wissens blockieren, wenn dieses Wissen nicht mit den vorhandenen Erfahrungsbereichen vereinbart werden kann. Tall (2004) bezeichnet das alte, in kognitiven Strukturen gut verankerte Wissen als 'met-befores' und gibt Beispiele dafür, dass diese die kognitive Integration neuer Erfahrungen, welche ihnen zu widersprechen scheinen, behindern oder gar verhindern und als epistemologische Hindernisse wirken können. Fischbein (1987)[2] spricht von intuitiven Modellen als interne Repräsentationen äußerer Sachverhalte und unterscheidet zwischen expliziten, d.h. bewusst gebildeten, intuitiven Modellen und impliziten, unbewusst vorhandenen, intuitiven Modellen, welche er als 'tacit models' bezeichnet. Er erklärt, dass gute intuitive Modelle entscheidender Motor jeden produktiven Denken sind, da sie besser als das Original, das sie repräsentieren, an das menschliche Denken angepasst sind. Er hält ein Kennenlernen der eigenen 'tacit models' und einen bewussten, kontrollierenden Umgang mit Konflikten zwischen diesen 'tacit models' und äußeren Darstellungen für wichtig.[3]

Der kognitive Konstruktivismus vereinbart wesentliche Elemente der beiden Theorien. Er geht davon aus, dass ein Individuum Wahrgenommenes aufnimmt, indem es dieses Wissen nicht passiv abbildet, sondern aktiv gemäß seinen vorhandenen kognitiven Strukturen und mit ihrer Hilfe konstruiert. So ist Lernen zum Teil Entdecken, zum Teil Erfinden. Zur Unterscheidung von Repräsentationen von Wissen, die durch die Sinne zur Kenntnis genommen werden können, und subjektiv konstruierten Repräsentationen dieses Wissens zur internen Speicherung sollen in dieser Arbeit die Begriffe 'Darstellungen' für die äußeren und 'Vorstellungen' für die inneren Repäsentationen verwendet werden. Interne und externe Repräsentationen des Begriffs 'Vektorraum' können sich z.B. darin unterscheiden, dass drei Personen sich auf eine axiomatische Darstellung dieses Begriffs einigen, dass aber der Eine mit diesem Begriff die Vorstellung von $n$-Tupeln verbindet, während der Zweite ihn durch eine geometrische Vorstellung von Pfeilen ersetzt und der Dritte an die durch die Axiomatik vorgegebenen Regeln denkt. Die Vorstellung, die eine Person von einem Begriff hat, kann mit einer Darstellung des Begriffs quasi identisch sein, aber sie muss es nicht. In Vorstellungen können viele implizite Ideen, welche nicht direkt zum Ausdruck gebracht werden, mitschwingen oder auch Priorität haben. Vorstellungen können daher auch nur näherungsweise und nicht mit der gleichen Präzision wie Darstellungen sichtbar gemacht werden. Vorstellungen sollen im Gegensatz zu den 'subjektiven Erfahrungsbereichen', von denen Bauersfeld (1983) spricht, nur die

[2] S. 122.

[3] S. 205.

kognitiven Aspekte beinhalten, welche eine Person mit einem Sachverhalt verbindet.

### Kognitive Werkzeuge

In Bezug auf Verfahren und Methoden in der Mathematik gibt es eine Reihe von Beschreibungen grundlegender Vorgehensweisen, die sich auf die Ebene von beobachtbaren Verhaltensweisen beziehen, und die Lernenden als Heuristiken vermittelt werden können.[4] Für die interne Verarbeitung und Repräsentation von Wissen braucht ein Lernender ebenfalls Werkzeuge, mit deren Hilfe er aus intuitiven Ideen und Ahnungen tragfähiges Wissen aufbauen kann. Eine Auswahl solcher kognitiver Grundtechniken, die für die Mathematik wichtig sind, ist: Abstrahieren, Analogisieren, Argumentieren, Begriffsbilden, Formalisieren, Klassifizieren, Konstruieren neuer Objekte, Koordinieren, Ordnen, Präzisieren, Sichtwechel vollziehen, Spezialisieren, Transferieren, Umkehren, Verallgemeinern. Man findet in der Literatur Listen von unterschiedlichen Kombinationen solcher Tätigkeiten, die von verschiedenen Autoren jeweils als Beschreibung von mentalen Vorgängen oder als Bezeichnungen von Handlungen auf der Darstellungsebene verwendet werden.[5] Diese Ebenen sollen hier durch die Bezeichnungen 'kognitive Werkzeuge' für interne Vorgänge und 'mathematische Werkzeuge' für extern beobachtbare Handlungen unterschieden werden. Ebenso wie für die Ähnlichkeit und Verschiedenheit von Vorstellungen und Darstellungen gilt, dass kognitive und mathematische Werkzeuge in enger Beziehung stehen können: Kognitive Vorgänge können sich in entsprechenden äußeren Verhaltensweisen zeigen; sie können auch umgekehrt durch Tätigkeiten auf der Darstellungsebene angeregt werden. Dennoch sind interne und externe Vorgänge nicht automatisch identisch. Ähnlichkeiten zwischen kognitiven und mathematischen Werkzeugen sollen hier an zwei Beispielen aufgezeigt werden:

- Eine Erscheinungsform des mathematischen Transferierens ist der Einsatz einer strukturerhaltenden Abbildung, welche Strukturen zweier Mengen identifiziert. Mit ihrer Hilfe können bestimmte Beziehungen von Elementen der ersten Menge, die z.B. in Form eines mathematischen Satzes beschrieben werden, auf ihre Bilder übertragen werden, so dass die Schlussfolgerung möglich ist, dass dieser Satz in entsprechender Weise für die Bilder gilt.
  Transferieren als kognitives Werkzeug kann eine Art des Identifizierens von bestimmten (kognitiven) Objekten oder von Strukturen sein. Dieses Identifizieren kann sich auf intuitiv erfasste Eigenschaften beziehen und kann mehr oder weniger vollständig, präzise und bewusst ablaufen.

- Das Konstruieren neuer Objekte als mathematisches Werkzeug kann mittels eines formalen Zeichens geschehen, welchem Eigenschaften und Gesetze zugeordnet werden, die den mathematischen Umgang mit den neuen Zeichen regeln.
  Das Konstruieren neuer Objekte als kognitives Werkzeug beinhaltet die gedankliche Akzeptanz dieser Objekte und ist ein Vorgang mit hohem Anspruch.

[4]Z.B. beschäftigt sich Polya (1967) ausführlich mit Fragen von Heuristiken zum Lösen mathematischer Aufgaben.

[5]Siehe z.B. E. Wittmann (1981); Dubinsky (1991); Sjuts (1999).

Er kann durch das mathematische Konstruieren unterstützt werden, wird durch dieses aber nicht vollständig ersetzt.[6]

### Prädikatives und funktionales Denken

Die interne Verarbeitung von Wissen kann auf individuell sehr verschiedene Weisen erfolgen. Schwank (2003) weist in empirischen Untersuchungen mit Schülern der Sekundarstufe I individuelle Präferenzen für einen von zwei Denkstilen nach. Diese wurden in unterschiedlichen inhaltlichen Kontexten festgestellt und erwiesen sich als stabil. Zudem konnte nachgewiesen werden, dass die Präferenzen für die beiden Denkstile mit unterschiedlichen Augenbewegungen und Aktivitäten von Gehirnregionen korrelieren. Entscheidende Voraussetzung für die Beobachtung der Präferenzen war ein hohes Anspruchsniveau in den gestellten Aufgaben, das die Probanden zu intensivem eigenständigem Denken veranlasste. Die beiden Denkstile sind zwei grundlegend verschiedene Vorgehensweisen zur Wahrnehmung von Strukturen. Sie beeinflussen die Art der internen Repräsentation des Wahrgenommenen. Diese kognitive Struktur wirkt sich ihrerseits auf die Wahrnehmung neuer Informationen aus. Auf diese Weise wird eine vorhandene Präferenz für einen Denkstil mit der Zeit verstärkt.[7] Schwank (2003) bezeichnet die beiden Denkstile als 'prädikatives' und 'funktionales' Denken und führt aus:

Menschen mit einer Präferenz für prädikatives Denken untersuchen vorrangig charakteristische Eigenschaften von Objekten und stellen Beziehungen her. Sie finden Strukturen über diese statischen Merkmale. Ihre Aufmerksamkeit gilt in erster Linie Gleichbleibendem und Gemeinsamkeiten. Prädikatives Denken verwendet häufig Wörter zur Darstellung von Ordnung und Systematik.

Menschen mit einer Präferenz für funktionales Denken sind auf die Organisation von Handlungsfolgen und die Analyse von Wirkungsweisen ausgerichtet. Sie erfassen Strukturen über Prozesse, die mit diesen Strukturen oder auf ihnen ablaufen. Sie richten ihre Aufmerksamkeit bevorzugt auf Unterschiede und Veränderungen und suchen nach Handlungsabläufen, welche diese Merkmale in einander überführen. Das funktionale Denken hat durch die Konstruktion von Entstehungsgeschichten einen besonderen Bezug zur Zeit. Es ist schwierig, Gedankengänge dieser Art durch statische Momentaufnahmen zu vermitteln.

In dieser Arbeit werden die Bezeichnungen 'prädikatives' und 'funktionales' Denken in diesem Sinn verwendet.

In der mathematikdidaktischen Literatur gibt es eine Reihe von Denkstiltheorien, die auf der Beobachtung von zwei oder drei verschiedenen Formen von Denkschwerpunkten beruhen. Hierzu gehört z.B. im deutschsprachigen Raum Borromeo Ferri (2003), die Merkmale visuellen, analytischen und konzeptuellen Denkens bei Jugendlichen beschreibt. Die 12 von ihr beobachteten Jugendlichen zeigten zumeist Mischformen dieser drei Arten zu denken. Burton (1999) untersuchte 70 Mathematiker und Mathematikerinnen nach der Art ihrer Denkstile mit dem Ziel, die

[6] Z.B. Harel/Kaput (1991) sprechen über den Einsatz von formalen Zeichen und ihren Manipulationen als Mittel zum gedanklichen Erfassen neuartiger Objekte. Sfard (2000) erläutert, dass der Schritt von einem rein syntaktischen Umgang mit mathematischen Zeichen auf der Ebene äußerer Repräsentationen zu einer Interpretation dieser Zeichen als Symbole, die für etwas stehen, sehr groß ist.

[7] Cohors-Fresenborg/Schwank 1996.

zwei Denkstile nachzuweisen, die zuvor von Hadarmard als visuelles und als analytisches Denken bezeichnet worden waren. Burton findet in dieser Studie noch einen dritten Denkstil, welchen er “conceptual” nennt. Sie stellt fest, dass die Mehrheit der Interviewten zwei dieser drei Denkstile verwendete, drei Probanden sogar alle drei Denkstile. Sie definiert die drei Denkstile wie folgt: Visuelles Denken ist ein Denken in Bildern, häufig dynamisch, analytisches Denken ist symbolisches oder formalistisches Denken und begriffliches Denken ist ein Denken in Ideen und nach Klassifizierungen.

Sierpinska (2000) beobachtet bei Studierenden der linearen Algebra zwei Formen des Denkens, die sie als ‘praktisches’ und ‘theoretisches’ Denken bezeichnet, und für die sie eine Reihe von Merkmalen herausarbeitet. Sie setzt sie dann in Beziehung zu drei historischen Darstellungsformen und zugehörigen Denk- und Argumentationsweisen, die in der linearen Algebra eine wichtige Rolle spielen. Diese drei Denkweisen nennt sie ‘synthetisch-geometrisch’, ‘analytisch-arithmetisch’ und ‘analytisch-strukturell’. Sie existieren nebeneinander und zwischen ihnen wird beständig übersetzt. Ihre Analyse dieser drei Darstellungsformen und ein Vergleich mit den Merkmalen des praktischen und des theoretischen Denkens ergibt, dass die synthetisch-geometrische Form dem praktischen Denken und die beiden analytischen Denkformen dem theoretischen Denken zuzuordnen sind. Allerdings findet sie in ihren empirischen Untersuchungen bei Studierenden vielfach Argumentationen, die nicht eine dieser drei historischen Ansätze verwenden, sondern entweder ganz anderer Art sind oder mehrere Ansätze mit einander vermischen.

Eine Besonderheit der von Schwank identifizierten Denkstile sind Beobachtungen, die darauf hinweisen, dass die Präferenz eines Menschen für einen dieser beiden Denkstile über eine große Breite von inhaltlichen Zusammenhängen und vermutlich auch über einen großen Abschnitt der Entwicklungszeit vom Kind zum Erwachsenen hinweg stabil sind. Daher kann sie wahrscheinlich als ein Persönlichkeitsmerkmal gewertet werden. Da der Denkstil eines Menschen seine Wahrnehmung von mathematischen Zusammenhängen prägt, ist für meine Frage nach Vorstellungen von Studierenden zur linearen Algebra insbesondere von Interesse, wie jeweils eine Studierende oder ein Studierender mit einer deutlichen funktionalen bzw. prädikativen Prägung Konzepte der linearen Algebra intern repräsentiert.

## 1.2 Abstraktion und Formalisierung

In der Auseinandersetzung mit den Schwierigkeiten, die das Lernen von Mathematik an der Hochschule stellt, sprechen die Autoren des Sammelwerks Tall (1991) insbesondere die Komplexität der mathematischen Strukturen und Begriffe und die daraus resultierende Notwendigkeit von Abstraktion an. Dorier (2000) bezeichnet die Formalisierung in der linearen Algebra als das Haupthindernis für Lernende und Sierpinska (2000) führt die Probleme von Studierenden mit den grundlegenden Konzepten der linearen Algebra auf einen Mangel an theoretischem, auf Strukturen bezogenem Denken gegenüber praktischem, auf Nachahmen von Lösungsverfahren bezogenem Denken zurück.

Abstrahieren und das eng damit zusammenhängende Formalisieren sind oben als kognitive bzw. mathematische Werkzeuge bezeichnet worden, je nachdem, ob man sie auf interne oder externe Repräsentationen bezieht. Diese beiden Begriffe werden nun näher definiert.

### 1.2.1 Abstraktion

Die Begriffe 'Abstraktion' und 'Formalisierung' werden in der didaktischen Forschung in unterschiedlicher Weise verwendet. Freudenthal (1977)[8] versteht unter Formalisierung "die bewusste Beschäftigung mit der Sprache als exaktem Ausdrucksmittel", welche desto notwendiger wird, je abstrakter die beschriebenen Inhalte sind, und bezeichnet Inhalte als desto abstrakter, je weiter sie von der Anschaulichkeit entfernt liegen. Bauer (1978) unterscheidet in Anlehnung an Freudenthal zwischen intensionaler Abstraktion, welche gemeinsame Eigenschaften von Objekten einer Menge heraushebt und Besonderheiten vernachlässigt, und extensionaler Abstraktion, welche die Ausdehnung eines Begriffs erfasst, indem sie bestimmte Merkmale, in denen sich Objekte einer Menge unterscheiden, herausstellt. Ein Beispiel für die intensionale Abstraktion ist die Betrachtung einer Äquivalenzklasse anstelle ihrer einzelnen Objekte. Die Äquivalenzklasse fasst Objekte zusammen, die eine bestimmte Eigenschaft gemeinsam haben. Als Beispiel für eine extensionale Abstraktion nennt Bauer Mengen von Äquivalenzklassen. In ihnen interessieren nicht die Gemeinsamkeiten der Elemente einer Äquivalenzklasse, sondern die Eigenschaften, in denen sich die Elemente verschiedener Klassen unterscheiden. Die intensionale Abstraktion kommt im Wesentlichen dem Abstraktionsbegriff gleich, der entsprechend der ursprünglichen Wortbedeutung ein Herausziehen von bestimmten Eigenschaften von Objekten einer Menge meint. Es wird dann gedanklich ein prototypisches Objekt gebildet, welches durch diese Eigenschaften charakterisiert ist, ohne dass es dem ursprünglichen Objektbereich angehören muss.[9]

Eine Erweiterung dieser Definition finden wir bei Auseinandersetzungen mit Charakteristika höherer Mathematik. Dubinsky (1991) bezeichnet in Anlehnung an Piaget[10] die höchste Form von Abstraktion als 'reflective abstraction'. Diese versteht Abstraktion als Konstruktion von mentalen Objekten, Handlungen oder Strukturen, die dann wie andere mathematische Objekte Handlungen und Beschreibungen und weiteren Konstruktionen unterworfen werden. Harel/Kaput (1991) bezeichnen gedankliche Objekte dieser Art als 'conceptual entities' und beschreiben den dahinter stehenden Konstruktionsprozess als 'vertikales Wachstum' mathematischen Wissens, d.h. als ein Wechseln auf höhere Abstraktionsebenen. Dreyfus (1991) setzt den Akzent bei den inneren Repräsentationen. Er erklärt, dass 'abstrahieren' in erster Linie bedeutet, aus mathematischen Strukturen mentale Strukturen zu konstruieren. Harel (1990) benennt als Aufgaben solcher abstrakten Objekte die Entlastung des Arbeitsgedächtnisses, die Erleichterung von Verständnis und die Steuerung des Aufmerksamkeitsschwerpunktes beim Lösen von Aufgaben, und gibt eine Reihe von Beispielen.

[8] S. 36.

[9] Siehe Mittelstraß (1996a) unter dem Stichwort 'Abstraktion'.

[10] Beth/Piaget (1966), S. 189, geben folgende Definition von 'reflective abstraction':
"Reflective abstraction consists in deriving from a system of actions or operations at a lower level, certain characteristics whose reflection (in the quasi-physical sense of the term) upon actions or operations of a higher level it guarantees; for it is only possible to become conscious of the processes of an earlier construction through a reconstruction on a new plane."

Die Art der Konstruktionsprozesse, die verschiedene Autoren beschreiben, unterscheiden sich. Hier sollen insbesondere zwei Konstruktionsvorgänge näher beleuchtet werden, welche in ihrem Ergebnis sehr ähnlich sind, insofern sie oftmals alternativ als mentale Strategien zur Erfassung eines mathematischen Konzepts eingesetzt werden können. Beide fallen unter Piagets[11] Bezeichnung von 'encapsulation'. Diese meint den Übergang von einem Prozess zu einem mentalen Objekt, bei dem ein physischer oder mentaler Vorgang auf einer höheren gedanklichen Ebene durch Rekonstruktion oder Reorganisation besser verstanden wird. Die beiden Abstraktionsstrategien sind die Verdinglichung von Prozessen im Sinne Sfards ('reification') und die Verkapselung von Prozessen im Sinne Dubinskys ('encapsulation'). Die deutsche Bezeichnung 'Verkapselung' soll in dieser Arbeit nicht den allgemeineren Begriff von Piaget, sondern die spezielle Verwendung bei Dubinsky bezeichnen.

Dubinsky (1997) beschreibt den Vorgang eines Sichtwechsels, welcher eine mathematische Handlung als ein eigenständiges mathematisches Objekt begreift, in drei Schritten: Ein Lernender beginnt mit konkreten Handlungen an mathematischen Objekten als Reaktionen auf äußere Anlässe. Eine solche Handlung ('action') kann aus mehreren Schritten bestehen, von denen jeweils das Ergebnis eines Schrittes Anlass gibt, den nächsten zu vollziehen, ohne dass der gesamte Vorgang von Anfang an im Blickfeld des Handelnden ist. Wird ein solcher Vorgang mehrfach ausgeführt, so wird er zu einer Art Routine, welche Dubinsky als 'action scheme' bezeichnet. Als Beispiel nennt er ein eingeübtes Verfahren, wie man einen gegebenen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination von zwei ebenfalls gegebenen Vektoren $e, f \in \mathbb{R}^2$ darstellt, d.h. eine Gleichung $v = xe + yf$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ löst. Das Nachdenken über die Routine führt zu einer Verinnerlichung ('interiorization'), welche eine größere Kontrolle über den Handlungsverlauf eröffnet. Sie wird z.B. einen Überblick über Teile der Handlung oder über ihren Gesamtverlauf mit sich bringen. Im gegebenen Beispiel kann z.B. eine Lösungsformel des entstehenden linearen Gleichungssystems das Verfahren abkürzen. In diesem Stadium wird die Handlung als Prozess ('process') bezeichnet. Es zeichnet sich dadurch aus, dass der Lernende sich einen Prozess gedanklich vorstellen kann auch ohne ihn explizit ausführen zu können. Dies ermöglicht die Auseinandersetzung mit Fragestellungen, in denen theoretisch sehr viele mögliche Handlungen zu beachten sind, welche nicht alle einzeln durchgeführt werden können. Zum oben gegebenen Beispiel ist eine solche Frage, welche Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombinationen von $e$ und $f$ dargestellt werden können. Der dritte Schritt wird vorbereitet durch die Beschäftigung mit Handlungen, die auf einen Prozess angewendet werden können, wie z.B. die Umkehrung eines Prozesses oder die Verknüpfungen von Prozessen. Wenn der Lernende über diese Operationen nachdenkt und den Prozess als eine Gesamtheit wahrnimmt, dann hat er ihn verkapselt (Verkapselung als Übersetzung des englischen 'encapsulation') und zu einem Objekt gemacht. Dubinsky et al. (1994)[12] erklären:

> "When it is possible for a process to become transformed by some action, then we say that it has been *encapsulated* to become an *object*."

[11] Vgl. Beth/Piaget (1966), S. 247.
[12] S. 270. (Hervorhebungen durch die Autoren)

Dubinsky selbst führt das genannte Beispiel nicht soweit fort, dass er eine Verkapselung dieses oben beschriebenen Prozesses nennt. Stattdessen nennt er die Elemente des Dualraums eines Vektorraums als Verkapselung von Prozessen, welche einen Vektor in eine Zahl transformieren. Als Elemente des Dualraums treten sie als Objekte und nicht mehr vorrangig als Handlungen in Erscheinung, obwohl auch dieses Charakteristikum in vielen Überlegungen zum Dualraum wieder eine Rolle spielt. Interpretiert man den oben beschriebenen Prozess der Suche nach einer Darstellung jedes Vektors $v \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination von $e$ und $f$ als die Berechnung aller Linearkombinationen von $e$ und $f$ aus allen Kombinationen von Koeefizienten, so ist eine Darstellung dieses Zuordnens in seiner Gesamtheit die Abbildung

$$A: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & xe+yf \end{array}$$

Sie ist eine Verkapselung des Berechnungsprozesses. Auf diese Abbildung, die als lineare Abbildung mit Hilfe einer Matrix auch noch eine sehr einfache Darstellung erhalten kann, können vielfältige mathematische Handlungen angewendet werden.

Sfard (1991) beschreibt ebenfalls einen Vorgang, der von einer Handlung ausgehend ein neues Objekt konstruiert. Sie teilt ihn in drei Schritte ein: Wenn Prozesse auf mathematische Objekte angewendet werden, wird ein Lernender mit der Zeit diese Prozesse verinnerlichen (engl. 'interiorization'), so dass sie rein gedanklich ausgeführt, in Betracht gezogen und verglichen werden können. So können Handlungen des Wegnehmens als Zahlenoperationen 'Subtrahieren' verinnerlicht werden. Der zweite Schritt, die Verdichtung (engl. 'condensation'), reduziert einen solchen Prozess auf eine Input-Output-Beziehung, die die eigentlichen Handlungen nicht mehr berücksichtigt. Die Verdichtung erleichtert das Verknüpfen, das Vergleichen und das Verallgemeinern von Prozessen. Hierbei entsteht ein neues Objekt. Im genannten Beispiel ist eine Verdichtung eines Subtraktionsprozesses eine Beziehung wie 329-271=58 mit den Input-Zahlen 329 und 271 und der Output-Zahl 58. Eine Verallgemeinerung hebt die ursprüngliche, durch die Handlung auferlegte Beschränkung, dass der Subtrahend größer ist als der Minuend, auf. Wir erhalten dann Beziehungen wie 4 und 7 als Input und '4-7' als Output. 4-7=-3 ist ein neues Objekt, das als Hilfsgröße zur Beschreibung eines evtl. fiktiven Fehlbestandes Bedeutung besitzen kann. Der letzte Schritt ist die Verdinglichung (engl. 'reification'). Sie ist vollzogen, wenn dieses neue Objekt nicht länger unmittelbar mit dem Prozess, über den es gewonnen wurde, verbunden ist. Sfard definiert:[13]

> "Processes performed on already accepted abstract objects have been converted into compact wholes, or *reified* (from the Latin word *res* - a thing), to become a new kind of self-contained static constructs."

Dieser letzte Schritt ist im genannten Beispiel die Akzeptanz der negativen Zahlen als eigenständige mathematische Objekte, die nicht länger in Bezug auf einen Subtraktionsprozess gedacht werden müssen.

In Sfards Definition bleibt offen, in welcher Beziehung der Prozess zu dem neu geschaffenen Objekt steht. Sfard verwendet das Beschreibungsmittel der Verdinglichung zur Darstellung von Zahlbereichserweiterungen in der Geschichte der Mathematik durch die Schöpfung neuer mathematischer Objekte auf immer höheren

[13]Siehe Sfard (1991), S. 14. (Hervorhebungen durch die Autorin)

Abstraktionsebenen. Dabei wurden Rechenprozesse auf bereits anerkannte mathematische Objekte formal angewendet, obwohl die Ergebnisse nicht innerhalb des bekannten Zahlbereichs lagen. Die zunächst 'imaginären' Ergebnisse, wie z.B. $\sqrt{-1}$, erhielten irgendwann den Status von mathematischen Objekten. Ich vermute, dass Sfard den Ausdruck 'reification' im Sinne einer Verdinglichung nicht des Rechenprozesses als solchem, sondern seiner ursprünglich rein theoretischen Ergebnisse verwendet. Dies passt zu einer Definition von Linchevski/Sfard:[14]

> "Mathematical objects are an outcome of *reification* - of our mind's eye's ability to envision the result of processes as permanent entities in their own right."

Hier ist das neu geschaffene Objekt eindeutig als das Ergebnis von Prozessen beschrieben. Linchevski/Sfard (1994) nennen $-2$ und $\sqrt{-1}$ als Beispiele für Verdinglichungen. Sie beschreiben sie als Ergebnisse von Rechenverfahren, nämlich vom Subtrahieren der Zahl Zwei und vom Ziehen der Wurzel aus $-1$.

Eng verwandt mit dem Konzept der Verdinglichung ist Gray/Talls (1994) Begriff 'procept', den sie wie folgt definieren:[15]

> "An *elementary procept* is the amalgam of three components: a *process* which produces a mathematical *object*, and a *symbol* which is used to represent either process or object. [...]
> A *procept* consists of a collection of *elementary procepts which have the same object.*"

Wenn also ein mathematisches Symbol sowohl als Aufforderung zu einem Vorgang als auch als Ergebnis dieser Handlung verstanden werden kann, verwenden Gray/Tall (1994) das Kunstwort 'procept' zur Bezeichnung dieses Symbols zusammen mit diesen zwei Bedeutungen, die es repräsentiert. Bei dem Vorgang ist lediglich sein Ergebnis, nicht jedoch der Weg der tatsächlichen Ausführung wichtig. Der Ausdruck 'procept' setzt sich zusammen aus den englischen Worten 'process' und 'concept'. Er soll hier in Analogie dazu als 'Prozept' verdeutscht werden. Als erstes Beispiel nennen Gray/Tall (1994) das Symbol '4+5', welches sowohl einen Additionsprozess (in welcher Weise auch immer diese Addition ausgeführt wird) als auch sein Ergebnis, eine Summe, darstellt. Ein Beispiel aus weiter fortgeschrittener Mathematik, das sie geben, ist das Symbol '$lim_{x\to a} f(x)$', welches den Grenzwertprozess sowie den Wert der Grenze, also das Ergebnis des Prozesses, repräsentiert. Die Möglichkeit bei Prozepten zwischen beiden Bedeutungsarten hin und her zu wechseln, wird in der Mathematik vielfach genutzt. Mit dem Begriff 'Prozept' erfassen Gray/Tall (1994) die Dualität von einem Prozess und seiner Verdinglichung, nicht im Sinne von unterschiedlichen Darstellungen eines Prozesses, sondern als gemeinsame Darstellung für zwei verschiedenartige Phänomene. Je nachdem, was Gray/Tall unter dem Ausdruck 'concept of the function' verstehen, bildet das folgende Beispiel eine Ausnahme zu diesem Verständnis des Prozept-Begriffs:[16]

[14]Linchevski/Sfard (1994), S. 194. (Hervorhebungen durch die Autorinnen)
[15]Gray/Tall (1994), S. 121. (Hervorhebungen durch die Autoren)
[16]Gray/Tall (1994), S. 119.

> "The function $f(x) = x^2 - 3$ simultanously tells both how to calculate the value of the function for a particular value of $x$ and encapsulates the complete concept of the function for a general value of $x$."

Gemäß dieser Beschreibung gibt die Notation der Funktion einerseits die Vorschrift zur Berechnung des Funktionswertes eines bestimmten Wertes für $x$, andererseits steht sie für den Funktionsbegriff als Ganzes. Im zweiten Fall verstehen sie das durch das Symbol repräsentierte Objekt entweder als Resultat aller möglichen Prozesse, d.h. als die Gesamtheit der möglichen Resultate $x^2 - 3$ und damit als einen algebraischen Ausdruck in der Variable $x$, oder als Darstellung der Funktion, welche im Sinne einer Input-Output-Beziehung oder im Sinne einer Handlung aufgefasst werden kann. In Gray/Tall (2001) definieren sie den Begriff 'procept' etwas allgemeiner, indem sie die zugehörigen Objekte nicht auf Resultate der Prozesse beschränken. Allerdings machen sie auch hier deutlich, dass sie mit den Prozessen nicht das eigentliche Verfahren meinen, sondern nur an der Tatsache interessiert sind, dass von einem Ausgangspunkt zu einem Endpunkt gelangt wird:[17]

> "A *process* occurs when one or more procedures (having the same overall effect) are seen as a whole, without needing to refer to the individual steps, or even the different procedures. [...] When the symbols act freely as cues to switch between mental concepts to think about and processes to carry out operations, they are called *procepts*."

Die Idee des Prozepts ist eine wesentliche Erweiterung von Sfards Verdinglichung. Durch sie geschieht eine Schwerpunktverschiebung weg von der grundsätzlichen Konstruierbarkeit neuartiger Objekte auf dem Wege des Verdinglichens hin zu einem Werkzeug im alltäglichen Umgang mit Mathematik, welches den ständigen Wechsel von Prozess und Ergebnis in beiden Richtungen erlaubt.

Auch Dubinsky legt Wert auf die Dualtiät von Prozess und daraus gewonnenem abstrakten Objekt: Ein in seinem Sinn verkapselter Prozess kann aus der Verkapselung zurückgewonnen werden; dies bezeichnet Dubinsky (1997) als 'deencapsulation', zu deutsch 'Entkapselung'.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Dubinskys Verkapselung und Sfards Verdinglichung von Prozessen liegt in der Beziehung des neu konstruierten abstrakten Objekts zu dem Prozess, aus dem es entsteht. Bei der Verkapselung wird der Prozess selbst als mathematisches Objekt aufgefasst. Bei der Verdinglichung wird das (hypothetische) Ergebnis des Prozesses zu einem mathematischen Objekt. Das Beispiel einer Funktion soll den Unterschied im gedanklichen Vollzug und die Ähnlichkeit in der Wirkung der beiden Abstraktionsstrategien veranschaulichen:

Die Handlung, welche jeder reellen Zahl $x$ ihr Dreifaches $3x$ zuordnet, wird zu einem verkapselten Objekt in Form der Funktion

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3 \cdot x \end{array}$$

Diese Darstellung betont die Zuordnung, welche als Gesamtheit der Angaben des Definitionsbereichs, des Zielbereichs und der Zuordnungsvorschrift ein neues Objekt bildet. Sie ist eine Verkapselung des Zuordnungsprozesses. Eine Verdinglichung des

[17] Gray/Tall (2001), S. 67-68. (Hervorhebungen durch die Autoren)

Zurodnungsprozesses ist das Ergebnis dieser Handlung, nämlich die Beziehung von Input und Output. Sie kann dargestellt werden als Menge

$$\{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Menge ist eine alternative Beschreibung der Funktion $f$. Die Idee, welche dieser Darstellung zugrunde liegt, ist nicht mehr der Zuordnungsprozess, sondern besteht aus Beziehungen, in die bestimmte reelle Zahlen zu einander gestellt sind. Der Funktionsgraph von $f$ kann ebenfalls als Darstellung dieser statischen Beziehungen verstanden werden.

Ein anderes Beispiel, welches Dubinsky/McDonald (2001) erläutern, ist die Nebenklassenbildung in einer Gruppe. Sie erklären, dass es für die Gruppe $G = S_n$ für große $n$ und die Untergruppe $H$ der acht Bewegungen des Quadrats nur mit Mühe oder gar nicht möglich ist, die Linksnebenklasse einer Permutation $p$ aus Handlungen zu konstruieren, und dass sie besser als die Menge aller Produkte $ph$ mit $h \in H$ gedacht wird. Sie erklären weiter:

> "Thinking about forming this set is a process conception of coset."

Die folgende Beschreibung geben Dubinsky/McDonald anschließend zur Verkapselung:[18]

> "An object is constructed from a process when the individual becomes aware of the process as a totality and realizes that transformations can act on it."

Wendet man dies auf den zuvor beschriebenen Prozess an, so wird das neu erschaffene Objekt als Gesamtprozess verstanden, durch welchen die einzelnen Produkte $ph$ für alle $h \in H$ gebildet und in einer Menge zusammengefasst werden. Eine Verdinglichung dieses Prozesses ist schlicht sein Ergebnis, nämlich die Menge

$$\{ph \mid h \in H\}.$$

Auch in diesem Beispiel sind Verkapselung und Verdinglichung sehr unterschiedliche mentale Representationen desselben mathematischen Objekts.

Von verschiedenen Autoren werden die beiden Beschreibungen für die Gewinnung eines neuen Objekts aus einen Prozess als austauschbar oder nahe verwandt angesehen.[19] Obwohl ihre Verwendbarkeit zur mentalen Verarbeitung von mathematischen Konzepten oftmals gleichermaßen geeignet ist und der Unterschied manchen nur als sprachliche Feinheit erscheinen mag, sollen sie hier dennoch als zwei Konzepte behandelt werden. Ähnliche Unterscheidungen macht die deutsche Sprache zwischen verschiedenen Substantiven, welche von einem Verb abgeleitet werden: Bei einigen Verben gibt es mehrere Substantivformen, von denen manche eine Verkapselung und manche eine Verdinglichung eines Prozesses bezeichnen: Das Verb

[18]Dubinsky/McDonald (2001), S. 276.

[19]Gray/Tall (1994) fassen beide Konzepte unter die von Piaget verwendete Bezeichnung 'encapsulation'; Linchevski/Sfard (1994) bezeichnen beide Konzepte als ähnlich. Artigue (2001) weist ebenfalls auf große Ähnlichkeit der beiden Theorien hin, wobei sie jedoch unterschiedliche Schwerpunkte sieht.

'bauen' bezeichnet eine Handlung oder einen Prozess. Seine Substantivierung 'das Bauen' bezeichnet diesen Prozess und wird sprachlich als Substantiv, also im Sinne eines Objekts, verwendet. Es verkapselt somit den Prozess 'bauen' zu einem Objekt. Ebenso bezieht sich das Substantiv 'die Bauweise' auf den Bauprozess, wobei es einen bestimmten Aspekt dieses Prozesses hervorhebt. Das ebenfalls von 'bauen' abgeleitete Substantiv 'das Gebäude' hingegen unterscheidet sich maßgeblich von 'dem Bauen'. Es bezeichnet das Resultat eines Bauprozesses und ist somit eine Verdinglichung. Das Substantiv 'der Bau' schließlich kann je nach Zusammenhang für den Bauprozess oder auch für das Bauergebnis verwendet werden.

Zur Beschreibung von mentalen Vorgängen beim Erfassen abstrakter mathematischer Konzepte sind individuelle Strategien zu berücksichtigen. Insbesondere im Blick auf persönliche Präferenzen für funktionales oder prädikatives Denken erscheint es wichtig, zwischen den beiden Abstraktionsformen der Verkapselung und der Verdinglichung zu differenzieren. Denn bei der Verkapselung steht der Prozess im Mittelpunkt der Vorstellung; er wird in eine Form gefasst, die das Nachdenken über den Prozess erleichtert. Bei der Verdinglichung hingegen wird der Prozess nur als Zwischenschritt oder Hilfsmittel berücksichtigt, dann jedoch weitgehend in den Hintergrund gestellt und durch eine Beziehung oder ein Objekt von statischem Charakter ersetzt. Sie kommt somit dem prädikativen Denken entgegen, während die Verkapselung dem Interesse funktionalen Denkens zu entsprechen scheint.

Im Hinblick auf diese beiden Denkstile soll hier noch eine weitere Form von reflektiver Abstraktion angesprochen werden, nämlich die Strategie des Zusammenfassens mehrerer bereits bekannter Objekten zu einem neuen Gesamtobjekt, das über eine Funktion der Bezeichnung oder Ordnung der Objekte hinaus zu einem eigenständigen mathematischen Objekt wird. Die mentale Konstruktion dieses neuen Ojekts soll 'Vereinigung' genannt werden. Diese Bezeichnung soll eine solche Zusammenfassung auch dann erhalten, wenn das Gesamtobjekt mit einem mentalen Zwischenschritt des Verkapselns oder Verdinglichens gewonnen wird, solange das Ergebnis dann losgelöst von dem Prozess gedacht wird. Ein Beispiel für die Verwendung einer solchen Strategie ist die Konstruktion von Mengen von Nebenklassen: Für Menschen mit einer Präferenz für funktionales Denken ist möglicherweise die Darstellung von Dubinsky zur mentalen Verarbeitung der Nebenklassenbildung passend, da sie den Prozesscharakter betont. Für prädikatives Denken halte ich jedoch ein anderes Vorgehen für naheliegender: Für das Gruppenelement $p \in S_n$ wird bzgl. der Untergruppe $H$ die Linksnebenklasse gebildet, indem in einem ersten Schritt die gedachten Multiplikationen $p \cdot h$ für alle $h \in H$ zu den Produkten $ph$ verdinglicht werden. Anschließend werden diese Produkte zu einem Gesamtobjekt, nämlich die Menge dieser Produkte, zusammengefasst. Dies könnte man auch als Verdinglichung des Prozesses des Zusammenfassens beschreiben, aber mir scheint, dass dieser Prozess keine Rolle im gedanklichen Vollzug der Konstruktion spielt. Das endgültige Ergebnis dieser Abstraktion scheint mir in jedem Fall, also auch wenn zunächst das Zusammenfassen verkapselt wird, gedanklich von diesem Prozess losgelöst zu sein.

### 1.2.2 Formale Darstellungen

Freudenthal (1977)[20] bezeichnet das Formalisieren als ein Charakteristikum der modernen Mathematik: Mathematisches Arbeiten beinhaltet wesentlich das 'Mathematisieren', welches auf der untersten Stufe einen Wirklichkeitsbereich zum Gegenstand hat. Auf höheren Stufen ordnet der Mathematiker mathematische Objekte und Tätigkeiten. Dies geschieht zunächst lokal und schließlich auf der höchsten Stufe global, wo durch Axiomatisieren ein großer Wissensbestand mit exakten Ausdrucksmitteln geordnet dargestellt wird. Beim Axiomatisieren spielt formale Sprache in verschiedener Hinsicht eine zentrale Rolle:

1. begrifflich:
   Durch das Ordnen nicht nur eines mathematischen Gegenstandsbereichs sondern auch der mathematischen Tätigkeiten des Ordnens dieses Bereichs werden auf immer höheren Abstraktionsebenen mathematische Begriffe gebildet. Zur Definition von abstrakten Begriffen werden Eigenschaften anstelle von gegenständlichen Anschauungen deklariert. Diese Beschreibungsform erlaubt die gleichzeitige Betrachtung verschiedener Gegenstandsbereiche in der Mathematik.[21]

2. logisch:
   Aus den Eigenschaften, über die Begriffe definiert sind, werden über logische Schlussfolgerungen weitere Eigenschaften abgeleitet. Auf diese Weise erhält die mathematische Theorie einen deduktiven Aufbau mit überprüfbaren, gesicherten Ergebnissen.

3. operativ:
   Mit den durch formale Zeichen repräsentierten mathematischen Gegenständen kann nach formalen Regeln operiert werden. Dies ermöglicht einen schematischen, deutungsfreien Umgang mit ihnen. Dies kann z.B. zur Entwicklung von Rechenalgorithmen führen.[22]

Dorier (2000) spricht über den Zweck der Axiomatisierung der linearen Algebra. Er definiert den Begriff 'Formalisierung' nicht, gibt aber ein Beispiel für seine Verwendung: Er führt aus, dass Formalisierung ein zentrales Wesensmerkmal der modernen linearen Algebra ist, welches Voraussetzung dafür ist, dass die lineare Algebra Strukturen aus zahlreichen mathematischen Wurzeln und Anwendungsgebieten in einer einzigen Darstellung zu erfassen und darüber hinaus zu verallgemeinern vermag. Die Bezeichnung 'Formalisierung' beinhaltet hier zunächst den Aspekt formaler Darstellung von mathematischen Sachverhalten, wie sie z.B. in einer axiomatischen Definition des Vektorraums gegeben ist, und dem Aspekt formaler Manipulierbarkeit solcher Darstellungen. Er spricht damit nur das Ergebnis des begrifflichen

[20] Vgl. S. 35-51.

[21] Freudenthal (1977, S. 40f.) nennt die mathematische Gruppe als ein Beispiel: Sie fasst unter einen Begriff, was zunächst isoliert betrachtet wurde, wie Gruppen von geometrischen Abbildungen einerseits und die Permutationsgruppen andererseits.

[22] Freudenthal (1977, S. 48.) erklärt, dass die Erfindung von Algorithmen und Fortentwicklungen von Begriffen sich in der Mathematik gegenseitig anregen und fördern: Die Mechanisierung der Rechenverfahren schafft Grundlagen, auf die höhere Abstraktionsschritte aufgebaut werden können, und die Bildung von Begriffen auf höheren Abstraktionsniveaus gibt Anstösse für die Schöpfung von neuen Algorithmen.

Merkmals als Voraussetzung für das operative Merkmal einer Axiomatisierung an. Implizit geht er in seiner Verwendung des Begriffs 'Formalisierung' jedoch über diese äußeren Merkmale hinaus. So erklärt er z.B.:[23]

> "The question of using or not using an axiomatic approach was linked with the organisation of knowledge, not with the efficiency in problem solving. [...] To think of a function as a single object, and not as an infinite collection of values, is a profound change [...]. The axiomatic approach imposed itself as the best way to unify the whole set of linear problems in a formal setting."

Mit diesem Ausschnitt drückt Dorier eine Überzeugung aus, dass es in der Formalisierung der Darstellung von linearen Problemen nicht um das Vereinfachen oder Schematisieren von Rechenverfahren, also das rein formale Manipulieren von Zeichen, sondern um das Ordnen von Wissen ging. Zu diesem Ordnen gehören auch die strukturgebenden Begriffe der Theorie und abstrakte mathematische Konzepte wie die Idee, dass die einzelnen Bestandteile, die zu einer Abbildung oder dem Verfahren des Abbildens gehören, eine Einheit bilden, welche als eigenständiges Objekt gedacht wird.

Dorier/Sierpinska (2001) beschreiben den Effekt der axiomatischen Definition eines Vektorraums als eines Systems rein formaler Zeichen. Sie sagen dazu:[24]

> "This approach marked a new level in abstraction, the concept of vector space being an abstraction from the domain of already abstract objects like geometrical vectors [...]. It represents a shift of perspective, which induces a sophisticated change of level in mental operations. Indeed one can distinguish two stages in the construction of a unifying and generalizing concept (which correspond to two mental processes in learning):
>
> - recognition of similarities between objects, tools and methods brings the unifying and generalising concept into being;
> - marking the unifying and generalising concept explicit as an object induces a reorganisation of old competencies and elements of knowledge."

Sie sehen die Entstehung des neuen Begriffs 'Vektorraum' durch die Beobachtung von Gemeinsamkeiten verschiedener Phänomene, der die formale Darstellung des Konzepts erst folgt. Dies entspricht Freudenthals Vorgehen beim Ordnen, welches dem Formalisieren vorausgeht. Die Auswirkung der Darstellung ist, dass das Konzept den Rang eines eigenständigen Objekts erhält und eine neue Perspektive auf alte Erkenntnisse eröffnet.

Hefendehl-Hebeker (2003) nennt als Wesensmerkmale der Formalisierung, dass sie Wissen präzisiert und kommunizierbar macht und in besonderer Weise zur Bildung neuen Wissens beiträgt, indem zum Einen eine formale Darstellung regelgemäße Manipulationen auf rein formalen, bedeutungsfreien Zeichen zulässt, zum Anderen die Formen ihrerseits zu neuen Inhalten oder Objekten werden können.

[23]Dorier (2000), S. 60.

[24]Dorier/Sierpinska (2001), S. 257.

Hier werden der begriffliche und der operative Aspekt des Axiomatisierens betont.

Ein wichtiger Bestandteil formalisierter Darstellungen sind Zeichen. Eine Reihe von Autoren geht der Frage nach, welche Rolle Zeichen und Symbole beim Lernen und Forschen in der Mathematik spielen. Sie beschäftigen sich mit der Verwendung von formaler Sprache nicht in dem globalen Sinn des Axiomatisierens, sondern im Zusammenhang von lokalen Denkprozessen. Wir sehen uns an, wie sie die Ideen der Begriffsbildung diskutieren, bei der Zeichen entweder mit referentieller Bedeutung oder mit syntaktischer Bedeutung (die aus den Umgangsregeln abgeleitet wird) verstanden werden:

Harel/Kaput (1991) nennen Verwendungsformen von Symbolen, die nicht als Variablen sondern als Namen für bestimmte abstrakte Objekte auftreten. Sie erklären, dass mathematische Notation dazu dienen kann, 'conceptual entities', also abstrakte Objekte, mental zu konstruieren, indem eine permanente physische Bezeichnung anregt, ein Abstraktum auch mental als Objekt anzusehen. Dazu kann nicht nur die Tatsache helfen, dass das Ding einen Namen hat, sondern die Notation unterstützt auch die Möglichkeit der Manipulation, welche mental an dem Objekt auszuführen ist. Sie gehen anders als Dorier/Sierpinska von der Situation aus, in der Lehrende Zeichen verwenden, die Lernenden helfen sollen, bereits vorhandene Ideen zu verinnerlichen, statt von einer Situation, in der selbstentwickelte Ideen mit Hilfe von Zeichen manifestiert werden. Harel/Kaput nennen zudem die Möglichkeit, die Bedeutungsvielfalt ganzer Begriffe durch ein einziges mathematisches Symbol zu repräsentieren. Als Drittes führen sie aus, dass durch die Wahl einer bestimmten Notationsform bestimmte Wesensmerkmale oder ganze Strukturen von mathematischen Objekten hervorgehoben werden. Insgesamt betonen sie den Aspekt der gedanklichen Konstruktion von abstrakten Objekten. Allerdings kommt im letzten Punkt auch der operative Aspekt zum Tragen, denn die Auswahl eines Symbols aus verschiedenen Möglichkeiten wird insbesondere auch durch die jeweiligen Absichten des Operierens gelenkt.

Auch Steinbring (2005)[25] beschäftigt sich mit der Funktion von Zeichen beim Verstehen von mathematischen Begriffen. Er führt aus, dass mathematische Begriffe zumeist Relationen und nicht konkrete Objekte meinen. Diese Beziehungen werden durch Zeichen repräsentiert, welche oftmals die mathematischen Strukturen auch in ihrer äußeren Form aufgreifen.[26] Von Lernenden müssen diese Beziehungen nach Steinbring erschlossen werden, indem sie die Zeichen auf angebotene Deutungskontexte beziehen. Steinbring geht grundsätzlich davon aus, dass Zeichen nie losgelöst von Bedeutung gesehen werden, sondern immer auf Referenzkontexte bezogen werden.

Sfard (1991) und Gray/Tall (1994) setzen einen weiteren Akzent in der Verwendung von Zeichen als Hilfsmittel. Er baut auf das Wechselspiel von Zeichen mit verschiedenen Bedeutungen und mit rein operativem Charakter auf: Sfard und Gray/Tall beschreiben die Möglichkeit der Interpretationen bestimmter Zeichen sowohl als Beschreibung einer Handlung wie als Zeichen für das Ergebnis dieser Handlung, und erklären, wie es zur Konstruktion eines neuen mathematischen Objekts eingesetzt werden kann. Dieses Konzept ist im Abschnitt über Abstraktion näher

[25] Vgl. S. 14-32.

[26] In diesem Fall nennt Steinbring die Zeichen "Symbole".

beschrieben.

Sfard (2000) führt den Gedanken des rein operativen Umgangs mit Zeichen als Werkzeuge zur mentalen Konstruktion mathematischer Begriffe weiter. Sie setzt dabei einen deutlich anderen Schwerpunkt als Steinbring, indem sie von einer Umgangsform mit Zeichen ausgeht, die gänzlich ohne Bezüge zu Referenzkontexten erfolgt. Sie erläutert, wie ein anfänglich rein syntaktisches Operieren mit (neuen) mathematischen Zeichen einmünden kann in die gedankliche Akzeptanz und Gestaltung neuer, durch die Zeichen implizierter, abstrakter Objekte. Auf diese Weise konstruierte Bedeutung wird aus den syntaktischen Regeln und daraus folgende Beziehungen abgeleitet, nicht aus der Einbettung in andere Sinnkontexte.

Dörfler (2003) beschäftigt sich ebenfalls mit mathematischen Denkvorgängen, die frei von Referenzkontexten geschehen. Er steht auf dem Standpunkt, dass in der Mathematikgeschichte zahlreiche Episoden dieser Art zu finden sind. Er sieht diese Vorgehensweisen eingebettet in die Erfindung von Diagrammen. Das sind Zeichensysteme und Operationen, die auf diesen Zeichensystemen vorgenommen werden können, welche die jeweils interessierenden Strukturen eines mathematischen Sachverhaltes vollständig widerspiegeln. Mit diesen Diagrammen sind dann Schlussfolgerungen über die mathematischen Strukturen allein aufgrund der dort erlaubten Manipulationen möglich, ohne dass Bezug zu den ursprünglichen Bedeutungen der Bestandteile genommen werden muss. Die Zeichen werden in dem Fall nicht mit referentieller Bedeutung verwendet. Letzten Endes können dann die Ergebnisse zurücktransferiert und im urprünglichen Kontext gedeutet werden. Das Diagramm kann aber als Träger der mathematischen Strukturen auch selber als Objekt angesehen werden, das zum Mittelpunkt des mathematischen Forschungsinteresses wird.

Dörfler (2003) verwendet Matrizen für Beispiele diagrammatischen Denkens auf unterschiedlichen Niveaus: Matrizen können als Diagramme aufgefasst werden, denn sie tragen mathematische Struktur und erlauben zugehörige Operationen, die auf oder mit ihnen durchgeführt werden. Auf der ersten Ebene diagrammatischen Schließens können die Wirkungen etwa von der Multiplikation zweier Matrizen auf diese Diagramme beobachtet werden. Auf einer höheren Ebene können anstelle der rechteckigen Zahlenschemata Namen für die Matrizen eingesetzt werden und aus ihnen neue Diagramme, wie z.B. die Formel des Distributivgesetzes, erstellt werden. Möglichkeiten diagrammatischen Schließens auf dieser Ebene veranschaulicht Dörfler mit dem Satz von Cayley-Hamilton, der aussagt, dass eine Matrix Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms ist. Er führt diesen Beweis durch Anwendung formaler Eigenschaften von Matrizen ohne auf dahinterstehende Bedeutungen zurückzugreifen.

In der Geschichte der linearen Algebra finden wir auch im Umgang mit Determinanten von Matrizen ein Beispiel für den Einsatz diagrammatischen Denkens in der mathematischen Forschung: Schon früh wurden Determinanten von $2 \times 2$- oder $3 \times 3$-Matrizen als ein bestimmter Rechenausdruck eingeführt, der bei der Frage der Lösbarkeit von Gleichungssystemen eine Rolle spielte. Cramer gab 1750 eine allgemeine Regel zur Bildung solcher Rechenausdrücke für $n \times n$-Matrizen an.[27] Eine anschauliche Deutung der Determinante gelingt für die Dimensionen 2 und 3, nämlich die Deutung als Flächen- bzw. Volumeninhalt des von den Zeilenvektoren

[27] Vgl. Brieskorn (1983), S. 598f.

aufgespannten Parallelogramms bzw. Spats. Ein anderes Beispiel für die Verwendung der Determinante in rein formaler Weise ohne Zusammenhang zu einer inhaltlichen Bedeutung ist der Beweis des Determinantenmultiplikationssatzes, der Cauchy über formale Manipulation der Terme gelang, ohne dass er die Matrizenmultiplikation als Komposition linearer Transformationen interpretierte.[28]

Die folgende Tabelle gibt nochmals einen kurzen Überblick über die Rollen, in der Zeichen(systeme) gesehen werden:

| Autor(in) | Zeichen als |
|---|---|
| Harel/Kaput | - Referent für einen mathematischen Begriff oder Begriffsaspekt<br>- Name für ein abstraktes mathematisches Objekt |
| Steinbring | - Referent für einen mathematischen Begriff<br>(Die Vorstellung von dem Begriff<br>ist evtl. eingebettet in einen Referenzkontext) |
| Gray/Tall | - Hilfsmittel für Sichtwechsel<br>(Eine Zeichenkette stellt ein Objekt und ein Verfahren dar) |
| Sfard (2000) | - eigenes Objekt, das zu einem<br>- Zeichen als Referent für ein abstraktes Objekt wird |
| Dörfler | - mathematische Struktur<br>(dazu Zeichensystem mit zugehörigen Operationen nötig) |

## Abgrenzung der Begriffe Abstraktion und Formalisierung

In dieser Arbeit sollen die Begriffe ‘Abstraktion’ und ‘Formalisierung’ folgendermaßen unterschieden werden:

Mit ‘Formalisierung’ wird die Darstellung von Objekten, Regeln und Zusammenhängen in der Mathematik in wohldefinierter, d.h. eindeutig festgelegter und widerspruchsfreier formaler Zeichensprache bezeichnet, welche von spezifischen, über diese Darstellung hinaus gehenden Bedeutungen der Zeichen absehen kann, und Schlussfolgerungen rein innerhalb dieser Zeichendarstellung ermöglicht. Unter ‘Abstraktion’ wird das Ergebnis eines kognitiven Vorgangs verstanden, der neue mentale Objekte und Handlungen konstruiert. Im Gegensatz zur Formalisierung betont das Abstrahieren also die kognitiven Vorgänge gegenüber äußeren Handlungen und Repräsentationen und spricht damit auch die vielschichtige Bedeutungshaltigkeit von Begriffen und Symbolen an.

Im Prozess mathematischen Forschens dient das exakte Repräsentieren von Ideen unter anderem dazu, diese Ideen zu präzisieren und kommunizierbar zu machen. Oftmals werden dazu die zu beschreibenden Objekte oder Strukturen von einem neuen Standpunkt aus betrachtet und auf einer höheren Abstraktionsebene rekonstruiert. Durch die formale Darstellung dieser Ideen werden sie greifbar in dem Sinn, dass sie zu Objekten werden, die ihrerseits mathematischen Handlungen und Überlegungen

[28] Vgl. Scholz (1990), S. 351.

unterworfen werden können. Insofern sind Abstraktion und Formalisierung eng mit einander verwoben und können sich gegenseitig befruchten. Die Begriffe sollen hier unterschieden werden, weil ein abstraktes mentales Objekt frei von formalen Symbolen gedacht werden kann. Zugleich kann eine formale Darstellung auch frei von Bedeutung verwendet und manipuliert werden. Bei Lernenden, die nicht den Forschungsprozess durchlaufen, sondern sich mit fertiger formaler Zeichensprache aus einander setzen, kommt dies vielfach in unfruchtbarer Weise vor.

# Kapitel 2

# Eine Epistemologische Analyse

## 2.1 Wesensmerkmale der linearen Algebra

### 2.1.1 Historische Entwicklung

Erst im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts wurde die lineare Algebra ein eigenständiges Teilgebiet innerhalb der Mathematik. Sie hat Wurzeln in vielen sehr unterschiedlichen Forschungsfragen schon aus der Antike, insbesondere aber aus dem 19. Jahrhundert, und wurde entsprechend mit sehr unterschiedlichen Methoden entwickelt. Die Gemeinsamkeiten der verschiedenen Wurzeln bestanden in Linearitätseigenschaften der betrachteten Objekte. Obwohl bereits 1888 von Peano eine axiomatische Definition des Vektorraums und der linearen Abbildungen gegeben wurde[1], welche die einzelnen Zweige unter ein gemeinsames Dach zusammenfassen konnte, vergingen noch einige Jahrzehnte, bis die lineare Algebra als eine Theorie für sich betrachtet und behandelt wurde.

Die lineare Algebra ist ihrem Wesen nach eine Strukturtheorie. Sie erfasst Eigenschaften, die verschiedenen mathematischen Phänomenbereichen gemeinsam sind, in abstrakter, formaler Form, und stellt sie übersichtlich und verbindend dar.

Die Gegenstände der linearen Algebra sind Mengen mit linearen Strukturen, die als Vektorräume bezeichnet werden, und Abbildungen, welche lineare Strukturen erhalten. Je nach Fokus steht das eine oder das andere im Vordergrund und beide Schwerpunkte sind bereits in den historischen Anfängen verankert. In beiden Fällen ist das Ziel, die Gegenstände zu strukturieren und zu klassifizieren. Die linearen Räume werden hinsichtlich ihrer linearen Strukturen mit Hilfe von strukturerhaltenden Abbildungen geordnet, die linearen Abbildungen werden hinsichtlich der Fragen untersucht, welche Strukturen Mengen von linearen Abbildungen besitzen, wie man lineare Abbildungen, die ähnliche Wirkungen haben, mit Hilfe von Algorithmen in einander überführen kann, und welche Substrukturen von Vektorräumen von linearen Abbildungen verändert bzw. invariant gelassen werden.

Das Wort ‘linear’ kommt vom lateinischen ‘linea recta’, welches mit ‘gerade Linie’ übersetzt wird. Der mathematische Begriff ‘lineare Gleichung’ bezeichnet eine

[1]Peano axiomatisierte mit dieser Definition die ‘Ausdehnungslehre’ von Grassmann, welche dieser bereits 1844 und in einer überarbeiteten Fassung nochmals 1862 veröffentlichte. Vgl. Scholz (1990).

Gleichung, in der die Unbekannten nur in ihrer ersten Potenz auftreten und nicht mit einander multipliziert werden. Die Lösungen einer solchen Gleichung in zwei Unbekannten bilden - als Koordinaten von Punkten der euklidischen Ebene verstanden - eine Gerade, bei drei Unbekannten bilden sie eine Ebene im Raum, d.h. ein Objekt, welches in jeder Richtung seiner Ausdehnung geradlinig verläuft.

Weitere geradlinige Phänomene in der Geometrie sind Bewegungen entlang gerader Linien, wie zentrische Streckungen, Parallelverschiebungen und Achsenspiegelungen. Letztere erzeugen alle Kongruenzabbildungen der Ebene durch Hintereinanderschaltung. Darüber hinaus gibt es weitere Abbildungen, welche jede gerade Linie wieder auf eine gerade Linie abbilden. Eine einfache Darstellung einer solchen Abbildung mit Hilfe von algebraischen Termen, welche den Koordinaten eines Punktes die Koordinaten seines Bildpunktes zuordnen, ist durch eine Matrix gegeben, wie sie auch in einem System von linearen Gleichungen vorkommt: Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \end{array} \quad \text{oder } Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

bestimmt die Punkte

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

einer Geraden im Raum. Zugleich ist

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & Ax \end{array}$$

eine geradenerhaltende Abbildung. Lässt man die dritte Spalte der Matrix weg, so erhält man eine lineares Gleichungssystem und eine zugehörige Abbildung vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$. Diese kann - je nach Nebenbedingungen - eine zentrische Streckung oder eine Achsenspiegelung beschreiben.

Die genannten linearen Strukturen - Punkte auf einer Geraden, Bewegungen entlang gerader Linien, geradenerhaltende Abbildungen einer Ebene in sich - sind abgeschlossen gegenüber bestimmten Operationen, die wir als Vektoraddition und als skalare Multiplikation bezeichnen: Addiert man zu den Koordinaten eines beliebigen Punktes auf einer gegebenen Geraden bestimmte, die Gerade charakterisierende Koordinaten, so erhält man wiederum die Koordinaten eines Punktes derselben Geraden. Einfacher stellt sich diese Beschreibung bei Geraden dar, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufen: Die koordinatenweise Addition zweier beliebiger Punkte der Geraden liefert einen Punkt dieser Geraden, ebenso die Vervielfachung der Koordinaten eines Punktes mit derselben Zahl. Für die Lösungen des linearen Gleichungssystems, das eine Gerade darstellt, gilt natürlich Entsprechendes. Der einfache Fall einer Ursprungsgeraden entspricht dabei einem homogenen Gleichungssytem. Für die oben genannten Abbildungen gilt, dass sie diese linearen Eigenschaften respektieren, sofern sie die Null auf sich selbst abbilden: sie bilden die Summe zweier Punkte auf einer Ursprungsgeraden auf die Summe ihrer Bilder ab und damit auf die Gerade, die durch die beiden Bilder festgelegt wird, und sie bilden das Vielfache eines Punktes auf das Vielfache seines Bildes ab.

Nun stellt man fest, dass alle Abbildungen eines euklidischen Raums in sich, die diesen beiden Bedingungen genügen, eine Menge $L$ bilden, welche wiederum selbst 'lineare' Strukturen besitzt: Wir definieren die Addition und die skalare Multiplikation auf dieser Menge von Abbildungen argumentweise als $(f+g)(v) := f(v)+g(v)$ und $(\lambda f)(v) := \lambda(f(v))$ für alle Abbildungen $f, g \in L$ und alle Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind alle Bilder dieser Verknüpfungen wieder Elemente von $L$.

In einem homogenen linearen Gleichungssystem finden wir diese 'linearen' Strukturen aber noch an anderer Stelle wieder: Die Summe von zwei Gleichungen und das skalare Vielfache einer Gleichung kann eine dieser Gleichungen in dem System ersetzen, ohne dass dabei die Lösungsmenge verändert wird. Dorier (2000) führt aus, dass Euler zwar die Beziehungen von Gleichungen beschrieben hat, von denen eine 'in den anderen enthalten' ist, dass er die Analogie zu linear abhängigen Lösungen jedoch nicht erwähnt. Damit weist Dorier nach, dass die Dualität der Problemstellungen und Strukturen der Lösungsmenge und der Menge der Gleichungen eines linearen Gleichungssystems keineswegs trivial ist.

Die beschriebenen Eigenschaften finden sich bei vielen mathematischen Objekten wieder und werden als lineare Strukturen bezeichnet. Eine formale Definition, die von der geometrischen Anschauung abstrahiert, ist die übliche Definition eines Vektorraums:[2]

> "Sei $K$ ein Körper. Eine Menge $V$ zusammen mit einer inneren Verknüpfung $\dot{+} : V \times V \longrightarrow V$, $(v,w) \longmapsto v \dot{+} w$, ('Addition' genannt) und einer äußeren Verknüpfung $\cdot : K \times V \longrightarrow V$, $(\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$, ('Multiplikation mit Skalaren' oder 'skalare Multiplikation' genannt) heißt $K$-Vektorraum, wenn folgendes gilt:
> V1 $V$ zusammen mit der Addition ist eine abelsche Gruppe.[...]
> V2 Die Multiplikation mit Skalaren muss in folgender Weise mit den anderen Verknüpfungen verträglich sein:
> $(\lambda+\mu)\cdot v = \lambda\cdot v \dot{+} \mu\cdot v$, $\lambda\cdot(v\dot{+}w) = \lambda\cdot v \dot{+} \lambda\cdot w$, $\lambda\cdot(\mu\cdot v) = (\lambda\mu)\cdot v$, $1\cdot v = v$,
> für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in V$."

Lineare Abbildungen sind Funktionen auf Vektorräumen, die die Vektorraumstruktur invariant lassen. Eine präzise Definition lautet:[3]

> "Eine Abbildung $F : V \longrightarrow W$ zwischen $K$-Vektorräumen $V$ und $W$ heißt 'linear' (genauer '$K$-linear' oder 'Homomorphismus von $K$-Vektorräumen'), wenn
> L1 $F(v+w) = F(v) + F(w)$,
> L2 $F(\lambda v) = \lambda F(v)$
> für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in K$."

Mengen mit Vektorraumstrukturen, die ohne direkten Bezug zu geraden Linien im geometrischen Anschauungsraum stehen, sind z.B. Polynomringe oder die Menge

[2] G.Fischer (2002), S.76 (mit kleiner Auslassung).
[3] G.Fischer (2002), S. 109.

der stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall. Mit Hilfe der Strukturtheorie lassen sich Erkenntnisse über den geometrischen Raum auf diese anderen Vektorräume übertragen.[4]

Einen Themenbereich der linearen Algebra, der auch unter dem Namen der analytischen Geometrie behandelt wird, bilden die quadratischen Formen. Eine quadratische Form ist eine Abbildung der Ebene oder eines höherdimensionalen Raums in den Grundkörper, deren Bilder in folgender Weise als algebraische Terme geschrieben werden können:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \end{array},$$

wobei alle $a_{ij}$ reelle Zahlen sind. Sowohl die Form der Darstellung (vom Grad zwei) als auch die damit beschriebenen geometrischen Konfigurationen (Kurven statt gerader Linien) widersprechen vordergründig dem Linearitätsgedanken.

Kegelschnitte und andere ebene oder räumliche Kurven wurden bereits in der griechischen Antike untersucht.[5] Sie sind Teil der klassischen euklidischen Geometrie, die auch in den vergangenen Jahrhunderten große Beachtung der Mathematiker fanden, lange bevor die Strukturtheorie der linearen Algebra ein zusammenhängendes Konzept war. Bei dem Versuch, eine möglichst einfache Darstellung für Kegelschnitte zu finden, bzw. eine Darstellung eines Kegelschnitts in eine andere zu überführen, entdeckte Euler bereits 1748, dass man jede quadratische Form $T(x) = \sum\limits_{i,j}^{3} A_{ij}x_ix_j$ mit Hilfe einer orthogonalen Substitution in Diagonalform bringen kann.[6] Diese Veränderung der Darstellung nennt man heute ‘Hauptachsentransformation’. Die orthogonale Substitution, die Euler verwendete, ist eine lineare Substitution, die noch zusätzliche Eigenschaften erfüllt. Euler klassifizierte die ebenen Kurven und die Flächen nach dem Grad der sie definierenden algebraischen Gleichungen, welcher unter Anwendung von Koordinatentransformationen wegen der Linearität dieser Transformationen invariant ist.[7] Dorier (2000) erklärt, dass die Algebraisierung der Geometrie zur Klassifizierung von Kurven Anlass war, sich in besonderer Weise mit Linearität zu beschäftigen, da sie an den Auswirkungen von Koordinatenwechseln interessiert war. Zwar sind die geometrischen Figuren, die die quadratischen Formen beschreiben, nicht linear, aber die Hilfsmittel, die angewendet werden, um sie zu klassifizieren, erweisen sich als lineare Abbildungen.

Den Zusammenhang zwischen linearer Algebra und quadratischen Formen stellt

[4] Eine Eigenschaft des geometrischen Raums, nämlich dass er mit endlich vielen Elementen erzeugt werden kann, schränkt allerdings die unmittelbare Übertragung von Erkenntnissen auf Funktionenräume erheblich ein. Viele Sätze, die in endlichdimensionalen Vektorräumen über die Konstruktion von geeigneten Basen bewiesen werden können, müssen für Funktionenräume etwas verändert werden, indem sie mit besonderen topologischen Voraussetzungen versehen werden. Die Beweise müssen dann mit ganz anderen Methoden neu geführt werden. Ein Beispiel ist die Behandlung von linearen Differentialgleichungen, welche Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen aus der linearn Algebra verwenden. (Vgl. Brieskorn 1983, S. 227-232).

[5] Brieskorn (1983), S. 103, 107.

[6] Vgl. Brieskorn (1985), S. 273.

[7] Bourbaki (1971), S. 76.

Felix Klein[8] in seinem Erlanger Programm auf etwas andere Weise her: Beginnend mit einer Menge, die eine bestimmte Struktur besitzt, und einer Gruppe von 'Bewegungen' auf diesem Raum, wird untersucht, welche Objekte oder Eigenschaften von Objekten unter Anwendung dieser Bewegungen invariant bleiben. Nun interessieren Mathematiker sich von Alters her nicht nur für die Strukturen, die heute unter den Begriff des Vektorraums gefasst werden, sondern für Strukturen, die der 'Euklidische Raum' besitzt. Dazu gehören neben den Vektorraumstrukturen Längen, Abstände und Winkelmaße. Hier fließen nun quadratische Formen mit in die Grundstruktur ein, denn Abstände werden nach dem Satz von Pythagoras bei einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit Hilfe von Quadraten berechnet. Die Verallgemeinerung dieses Prinzips der Längenberechnung führt in der algebraischen Darstellung zum Skalarprodukt, das mit Hilfe der Kosinusfunktion auch eine allgemeine Rechenanweisung zur Ermittlung von Winkeln liefert. Damit eignet es sich für abstrakte Definitionen von Abständen und Winkeln, welche für ihre eindeutige Bedeutungszuweisung nicht der geometrischen Anschauung bedürfen. Die Frage, welche linearen Abbildungen Winkel invariant lassen, führt zu den orthogonalen Transformationen. Sie bilden Kegelschnitte in einer Weise ab, die nur deren Lage, nicht aber deren Form oder Größe verändert. Das Skalarprodukt, dem entscheidende Bedeutung bei der Definition des Abstands- und des Winkelbegriffs zukommt, ist eine quadratische Form. Eine Verallgemeinerung des Begriffs des Euklidischen Raums geschieht dadurch, dass man eine auf einem Vektorraum gegebene quadratische Form zugrunde legt und durch sie eine Norm, i.e. einen Längenbegriff, definiert, aus dem wiederum Abstand und Winkelmaß abgeleitet werden.

Andere Forschungsfragen, über die man im 18. und 19. Jahrhundert auf lineare Strukturen stieß, führten zu linearen Differentialgleichungssystemen, etwa bei Euler in der Untersuchung der Planetenbahnen.[9] In der Theorie der Differential- und Integralgleichungen treten vor allem unendlich dimensionale lineare Räume auf. Diese waren abstrakt, weil für sie keine unmittelbare geometrische Veranschaulichung gefunden wurde. So wurde die Funktionalanalysis zu Beginn des 20. Jahrhunderts Motor für die Durchsetzung des axiomatischen Zugangs zu Vektorräumen.[10]

Eine andere historische Wurzel der linearen Algebra war die Betrachtung von der Wirksamkeit von Kräften, die in verschiedenen Richtungen auf einen Gegenstand ausgeübt werden. Die Parallelogrammregel wurde bereits von Newton formuliert. Gauß' Beschreibung der komplexen Zahlen mit Hilfe von gerichteten Strecken in der Ebene, für die er eine passende Addition und Multiplikation definierte, gab nicht nur eine anschauliche Darstellung der komplexen Zahlen, deren 'Existenz' bis dahin noch immer umstritten war, sondern sie half auch bei der Fortentwicklung einer Vektorraumvorstellung, die durch die Darstellung von Kräften mittels gerichteten Strecken angestoßen wurde.

Ebenfalls entscheidend für den Ausbau der linearen Algebra zu einer Strukturtheorie sind die Begriffe der Gruppe und des Körpers,[11] deren Entdeckung parallel und in Wechselwirkung mit der Entwicklung der linearen Algebra geschah: Der Körper als Grundmenge, in der die Skalare des Vektorraums liegen, wurde erst axio-

[8]Siehe Nachdruck Klein (1973), S. 462-464.
[9]Vgl. Scholz (1990), S. 354.
[10]G. Wittmann (2003), S. 43ff.
[11]Bourbaki (1971), S. 74.

matisch beschrieben, nachdem seine durch die Rechenregeln in den vier Grundrechenarten manifestierten Strukturen lange Zeit genutzt worden waren. Die Gruppe spielt nicht nur als Unterstruktur eines Körpers eine Rolle, sondern bildet die Struktur vieler Abbildungsmengen, insbesondere der Bewegungsgruppe $O(n)$, die aus den orthogonalen Abbildungen besteht, und große Bedeutung in der Untersuchung von linearen Strukturen des geometrischen Raums und von quadratischen Formen hatte.[12] Zwar spricht schon Galois von der 'Gruppe' aller Permutationen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, definiert den Begriff 'Gruppe' aber nicht präzise. Eine axiomatische Definition der 'Gruppe', die neben der abgeschlossenen Verknüpfung auch die Existenz von Inversen voraussetzte, wurde erst in den 1890er Jahren vorgenommen.[13] Das war Jahrzehnte nach der ausführlichen Darstellung der Bewegungsgruppe mit ihren Wirkungen als Transformationen von Koordinaten geometrischer Figuren und anderer Spezialfälle von Gruppen.

Diese verschiedenen historischen Ursprünge der linearen Algebra zeigen ein breites Spektrum von Phänomenen auf, welche in die Strukturtheorie eingeflossen sind. Insbesondere wird deutlich, dass sowohl Mengen mit linearen Strukturen als auch Abbildungen, welche lineare Strukturen invariant lassen, im Mittelpunkt des Interesses standen: Z.B. kann ein lineares Gleichungssystem als Matrizengleichung verstanden werden, und Matrizen wurden lange Zeit ohne Bezugnahme zu Vektorraumstrukturen behandelt: so fand Jordan 1870 die Jordan-Normalform ohne auf Vektoren einzugehen.[14] Zwei Beispiele der heutigen abstrakten Vorstellung von Gruppen waren Permutationen von Wurzeln algebraischer Gleichungen, die als Matrizen dargestellt wurden, und Bewegungsgruppen, also ebenfalls Abbildungen. Geraden und Ebenen, Körper und die Gaußsche Zahlenebene waren hingegen von Anfang an statische Strukturen.

Eine ganz andere Seite der linearen Algebra, die jedoch sowohl zu ihren Anfängen gehört, als auch mit ihrer Fortentwicklung bis heute untrennbar verbunden ist, ist das Anliegen, konkrete Rechnungen, etwa das Lösen eines linearen Gleichungssystems, auszuführen, bzw. Rechentechniken zu optimieren und zu verallgemeinern.[15] Dieses Anliegen gab häufig den Anstoß für strukturelle Entdeckungen.[16] Mit den Möglichkeiten, die Computer heute bieten, wird die Aufgabe der Theoriebildung nicht obsolet, sondern verschiebt sich hin zur Organisation von immer komplexer werdenden Rechnungen.[17]

### 2.1.2 Die Rolle der linearen Algebra in der Mathematik

Nicht nur die historischen Wurzeln der linearen Algebra sind sehr breit gestreut, auch ihr Einfluss auf die mathematische Forschung heute ist bedeutend. Strukturen, welche die lineare Algebra beschreibt, begegnet man in beinahe allen mathematischen Disziplinen, ja sie werden gezielt gesucht, weil Probleme bei erfolgreicher Rückführung auf lineare Probleme mit Hilfe der linearen Algebra vergleichsweise

[12] Vgl. Brieskorn (1985), S. 514f.
[13] Vgl. Gray (1990).
[14] Vgl. Scholz (1990), S. 356.
[15] Vgl. Bourbaki (1971), S. 74-75.
[16] Vgl. Brieskorn (1983), S. 92.
[17] Vgl. Tucker (1997).

leicht zu lösen sind. Ein Beispiel aus der Analysis ist die Ableitung einer Funktion: sie erweist sich als die beste lineare Approximation.

Aber die Bedeutung der linearen Algebra in der heutigen Mathematik beschränkt sich nicht auf die gut erforschte Struktur, sondern liegt auch in den Methoden, welche bei der Entwicklung der linearen Algebra angewendet wurden. Nach Bourbaki (1971) sind heute viele von ihnen Grundprinzipien mathematischen Denkens und Arbeitens. Dazu gehört - wie in der modernen Algebra überhaupt - das Isolieren der wesentlichen Eigenschaften aus einer Fülle von Begleiterscheinungen und die formale Darstellung der gewonnenen Wesensmerkmale eines Begriffs. Typisch ist auch das Wechselspiel zwischen der Untersuchung einer begrenzten Fragestellung und die Herstellung von Verbindungen dieses Problemkreises zu Fragen, die zwar inhaltlich sehr anders sein können, aber strukturell ähnlich sind. Dies könnte man noch um den Schritt erweitern, dass nicht einmal gleiche Strukturen vorliegen, aber ähnliche Methoden bei der Betrachtung anwendbar sind.[18] Diese Prinzipien in der Vorgehensweise werden ebenfalls - ähnlich wie oben bei der Darstellung eines Begriffs beschrieben - von Einzelfällen auf formale Eigenschaften reduziert, die ihre Übertragung auf andere Fragestellungen ermöglichen. Insgesamt bildet sich ein Arbeiten auf immer höheren Abstraktionsniveaus heraus, die Zusammenhänge und Möglichkeiten eröffnen, welche man aus der Perspektive eines Ausgangsbeispiels kaum erahnen konnte.

Als Beispiel sollen die Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ dienen, die Größen und Formen geometrischer Figuren invariant lassen. Eine formale Definition dieser Abbildungen beschränkt sich auf die Eigenschaft, dass Abstände erhalten bleiben. Eine solche Abbildung $f$ kann dargestellt werden mit Hilfe einer invertierbaren $3 \times 3$-Matrix $M$, deren Inverses gleich ihrem Transponierten ist, d.h. für die gilt: $M^{-1} = M^{tr}$, und eines Vektors $c \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & v & \longmapsto & Mv + c. \end{array}$$

Eine Darstellung ohne Verwendung von Matrizen beschreibt $f$ als Verknüpfung einer Translation $t$ und einer längenerhaltenden (i.e. ‘orthogonalen’) linearen Abbildung $g$, nämlich als $f = t \circ g$. Diese Überlegungen werden in verschiedenen Richtungen fortgesetzt, z.B.:

- Verallgemeinerung der Definition:
  Diese Definition kann auf andere Vektorräume erweitert werden. Dazu muss dort jedoch zunächst eine Struktur geschaffen werden, auf der man von Abständen sprechen kann. Dies geschieht mit Hilfe des Skalarprodukts. Auf Vektorräumen, die mit einem Skalarprodukt versehen sind, kann man eine Norm und damit auch Abstände und Winkel definieren. Dann sind die längenerhaltenden linearen Abbildungen diejenigen, für die gilt, dass das Skalarprodukt von je zwei Vektoren gleich dem Skalarprodukt ihrer Bilder ist.

- Klassifikation der orthogonalen Abbildungen:
  Im Falle eines endlich-dimensionalen reellen oder komplexen Vektorraums mit

[18] Ein Beispiel für solche Methoden ist die Verwendung von Abbildungen, welche danach ausgewählt werden, dass sie strukturelle Merkmale von Objekten der linearen Algebra invariant lassen, und welche dann als Werkzeuge zur Klassifizierung dieser Objekte eingesetzt werden.

> Skalarprodukt kann man die orthogonalen Endomorphismen mit Hilfe einfacher Darstellungsmatrizen beschreiben.

Dieses Beispiel zeigt Arbeitsweisen in der linearen Algebra. Zugleich verdeutlicht es eine Charakterisierung der linearen Algebra durch Wille (1981): Er sieht die Bedeutung der Theorie darin, dass sie "gute Beschreibungen" liefert.

Während Bourbaki (1971) die Anwendung oder Imitierung von Methoden der linearen Algebra in anderen mathematischen Disziplinen wiederfindet, zeigen Lengnink/Prediger (2000) Verbindungen zum Alltagsdenken auf: Sie gehen auf methodische Merkmale in der linearen Algebra ein, die Prinzipien des Alltagsdenkens in einer für die Mathematik spezifischen Weise weiterführen. Sie nennen eine Reihe von "Denkhandlungen" in der linearen Algebra, von denen sie das Erzeugen und das Aussondern als besonders charakteristisch hervorheben.

Die lineare Algebra ist komplexes Konglomerat von reichhaltigem Beispielmaterial, in dem ein ganzes Netz von vertikalen und horizontalen Verbindungen existiert. Harel (1997) erklärt, dass die lineare Algebra sich gegenüber der Analysis insbesondere durch eine Vielzahl von Äquivalenzaussagen, welche Zusammenhänge herstellen, und eine Reihe von z.T. sehr gehaltvollen Begriffen mit weit reichender Bedeutung auszeichnet. Ein Beispiel ist der Begriff der 'Basis': Er beinhaltet die fundamentale Idee der Konstruierbarkeit eines Vektorraums aus wenigen Elementarbausteinen, wobei die Konstruktion jedes Vektorraumelementes bei vorgegebener Basis eindeutig ist, nicht jedoch die Elementarbausteine als solche eindeutig sind. Diese Darstellbarkeit des gesamten Raumes mit Hilfe einiger ausgezeichneter Elemente führt zu einer Vereinfachung des Rechenaufwands. Sie schafft außerdem einen Überblick über die Objekte in der Kategorie der Vektorräume: für jede endliche Basislänge gibt es genau einen Prototypen. Und schließlich ermöglicht sie eine einfache Beschreibung einer linearen Abbildung, da deren Wirkung auf eine Basis sie bereits auf dem ganzen Vektorraum festlegt.

Die Vektorraumstruktur kann sehr kompliziert anmuten, wenn man nur auf die axiomatische Darstellung blickt. Sie wird jedoch übersichtlich für jemanden, der die Prinzipien verstanden hat, nach denen Vektoren in Unterstrukturen geordnet sind. Außerdem ist die Vektorraumstruktur ausbaufähig. Diese Möglichkeit spiegelt sich z.B. in den Namen 'topologische Vektorräume', 'Hilberträume' und 'Banachräume' wider, welche Funktionenräume sind, die jeweils zusätzlich zur Vektorraumstruktur eine Struktur besitzen, die den Approximationsprozessen der Analysis Rechnung trägt.[19]

Dorier (2000) zieht aus seiner epistemologischen Analyse der linearen Algebra den Schluss, dass die Zusammenfassung von bestimmten Fragestellungen und Erkenntnissen aus vielen inhaltlich verschiedenen Themenbereichen unter dem Dach einer einzigen Theorie ein hohes Maß an Formalisierung erfordert. Diese Formalisierung ist kein (entbehrlicher) Zusatz für einschlägig Interessierte, sondern ein Wesensmerkmal der linearen Algebra, das der Theorie ihre Stärke verleiht. Sie ermöglicht dem Geübten einen wirkungsvollen Transfer von Fragen, Ideen, Argumenten und Lösungen zwischen ganz unterschiedlichen Anwendungs- und Anschauungsbereichen. Die Formalisierung, die Dorier beschreibt, und deren Ergebnis die lineare Algebra in

[19]Brieskorn (1983), S. 232.

ihrer modernen Form ist, ist eine konzentrierte Darstellung von tiefgehenden mathematischen Begriffen und komplexen Zusammenhängen, welche auf vielfache und anspruchsvolle Abstraktionen zurückgeht. Diese Abstraktionen scheinen mir eine wesentliche Ursache für Schwierigkeiten mit den formalisierten Darstellungen zu sein.

### 2.1.3 Probleme von Studierenden mit der linearen Algebra

Charakteristikum der linearen Algebra ist nach dem oben Gesagten, dass sie eine streng formalisierte, abstrakte Theorie mit vielen Modellen ist. Ihre Beherrschung erfordert - wie Harel (1989) herausstellt - die Fähigkeit, mit abstrakten Strukturen umzugehen, und die Wertschätzung einer ökonomischen Darstellung von Begriffen und Systemen. Diese Fähigkeiten werden in Kursen zur linearen Algebra meist als implizite Voraussetzungen erwartet, werden aber von den Studierenden selten erfüllt. Dies wird in einer Reihe von Schwierigkeiten sichtbar, die als Facetten der erforderlichen Fähigkeiten erscheinen und in der Literatur vielfach beschrieben sind.

Die formalen Darstellungen in Definitionen, Sätzen und Beweisen stellen zum Einen Anforderungen logischer Art. Zum Zweiten repräsentieren sie Begriffe, die in inhaltlichen Vorstellungen - bezogen auf verschiedene mathematische Modelle - zu deuten sind. Indikatoren für geringes Begriffsverständnis sind syntaktische Fehler[20], aber auch mangelnde Transferfähigkeiten zwischen verschiedenen Darstellungsformen und Modellen der Theorie. Zum Dritten regen sie zur Auseinandersetzung mit formalen mathematischen Strukturen an, die auf einer höheren Ebene des Ordnens liegt.[21]

Als Probleme von Studierenden in logischer Hinsicht nennt Vinner (1997) die Unterscheidung zwischen relevanten und irrelevanten Bestandteilen eines Beweises, das Verständnis für den inneren Aufbau einer Argumentation und die Fähigkeit mit mathematischen Variablen zu argumentieren. G.Wittmann (2000) zeigt in einer Studie mit Schülern, dass insbesondere die Unterscheidung von Voraussetzung und Schlussfolgerung Schwierigkeiten bereitet.[22] Auch Sierpinska (2000) spricht Probleme mit der Logik mathematischer Kommunikation an. Sie differenziert zwischen Studierenden nach zwei verschiedenen Formen des Denkens, die sie in ihren empirischen Untersuchungen mit Studierenden beobachtet. Diese Formen bezeichnet sie als 'praktisches Denken' und als 'theoretisches Denken'. Das 'theoretische Denken' ist ein Denken, das an Begriffen, Strukturen und logischen Zusammenhängen orientiert ist und Notationssysteme in Frage stellt und zu verbessern sucht. Das 'praktische Denken' ist demgegenüber mit der Steuerung von Handlungen beschäftigt, ohne dass über dieses Tun als solches explizit nachgedacht oder gesprochen wird. Sier-

[20]Eine explizite Erwähnung finden wir bei Vinner (1997).

[21]Diese Ebene vermisst Hillel (2000) bei den meisten Studierenden. Auch Sierpinska (2000) spricht diese Ebene an: Sie beschreibt eine Kategorie des 'theoretischen Denkens', zu dem sie Interesse an Zusammenhängen und ordnenden Kriterien ebenso wie das Nachdenken über den Gebrauch von Notationen zählt. Sie findet dieses Denken nur bei wenigen Studierenden.

[22]Die Schüler und Schülerinnen hatten die Aufgabe, aus mehreren Beispielen von Vektorräumen eine Definition des Begriffs 'Vektorraum' zu entwickeln. Die axiomatische Formulierung der Axiome blieb sprachlich-logisch fehlerhaft, und der Wechsel der Sichtweise von einer Beschreibung beobachteter Eigenschaften bei Beispielen zu einer Forderung zu erfüllender Eigenschaften bei einer axiomatischen Definition wurde häufig nicht vollzogen.

pinska stellt es bei Studierenden an folgenden Verhaltensweisen fest: Ihr schriftlicher Sprachgebrauch ist einem Reden mit sich selbst ähnlich, in dem Begriffe unreflektiert und unpräzise gebraucht werden und erst aus dem Kontext zu erschliessen sind. Sie zeigen einen Mangel an Verständnis für grammatische Sprachstrukturen etwa in mathematischen Definitionen. Ihre Argumentationen vermischen Sätze und Definitionen mit Überzeugungen, die auf visuellen Eindrücken basieren. Ihre Vorstellungen von mathematischen Begriffen gründen eher auf Prototypen als auf Definitionen, und sie benötigen direkte Beschreibungen anstelle von axiomatischen Eigenschaften, um ein Objekt verstehen zu können. So genügt ihnen z.B. die Angabe der Bilder einer Basis nicht zur Festlegung einer linearen Abbildung. Dieses Denken, das der Logik mathematischer Texte grundlegend widerspricht, zeigen die meisten Teilnehmer ihrer Untersuchung.

Die inhaltlich-begriffliche Deutung von formalen Begriffsdefinitionen oder Aussagen über Begriffe ist ein großes Problem für Studierende. Zahlreiche Autoren in den MAA-Notes (1997)[23] sagen aus, dass die Lernenden zwar Prozeduren kopieren können, diese häufig aber nicht in Zusammenhänge allgemeiner Ideen einbetten und darum auch nicht auf ungewohnte Situationen übertragen können. Hier bleiben inhaltliche Vorstellungen und Konkretisierungen von formal repräsentierten Eigenschaften und formal durchgeführten Handlungsabläufen getrennt. Empirische Studien belegen diese Beobachtungen. Es werden im Folgenden zunächst einige Untersuchungen zum Wechsel zwischen der abstrakten Vektorraumstruktur und konkreten Modellen, anschließend Studien zum Wechsel von Repräsentationen innerhalb eines Vektorraummodells vorgestellt:

Sierpinska (2000) spricht von drei Perspektiven auf die lineare Algebra, die sie in der historischen Entwicklung der linearen Algebra sieht. Sie wurden nach einander entwickelt und bestehen bis heute neben einander. Sie setzt sie in Beziehung zu den beiden Formen des 'praktischen' und des 'theoretischen' Denkens: Die synthetisch-geometrische Sichtweise, die geometrische Objekte, wie z.B. eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, als Ganzes erfasst, passt zum praktischen Denken. Analytisch-arithmetische Darstellungen von geometrischen Objekten beschreiben die zugehörigen Punkte mit Hilfe von Koordinaten, und eine analytisch-strukturelle Beschreibung schließlich gründet auf axiomatischen Eigenschaften und daraus abgeleiteten allgemeinen Strukturen unter Verzicht auf die Koordinaten. Diese beiden analytischen Sichtweisen gehören zum theoretischen Denken. Zwischen dem synthetisch-geometrischen und dem analytisch-strukturellen Denken bestehen ebenfalls Gemeinsamkeiten: Beide sind unabhängig von einem Koordinatensystem, gründen auf Eigenschaften und betonen strukturelle Merkmale. Die Studierenden in Sierpinskas Untersuchung zeigen Schwierigkeiten, eine dieser Sichtweisen in reiner und konsequenter Form zu verwenden oder Sachverhalte von einer auf die andere zu übertragen. Häufig entwickeln sie eigene Sichtweisen, die manchmal zwischen den genannten anzusiedeln sind.

Instabile und nicht klar von einander abgegrenzte Vorstellungen beobachtet auch G. Wittmann (2003) in einer Untersuchung von Schülern und Schülerinnen in Deutschland in der Sekundarstufe II. Er berücksichtigt - nach Sierpinskas Begriffen - die synthetisch-geometrische und die analytisch-algebraische Auffassung. Er interessiert

[23] Carlson et al. (1997a).

sich für Sichtwechsel, die Elemente algebraischer Mengen geometrisch in Lagebeziehungen deuten, und für Sichtwechsel, die geometrische Objekte algebraisch als Mengen beschreiben. Die betreffenden geometrischen Objekte, zu denen Wittmann Schülervorstellungen untersucht, sind Punkte, Geraden, Ebenen. Er kommt ebenfalls zu dem Ergebnis, dass die Vorstellungen bei den einzelnen Interviewten oft nicht in Reinform vorkommen und nicht immer gleich sind, sondern häufig, oft kontextabhängig, wechseln. Er stellt zudem fest, dass die in dem vorherigen Unterricht angestrebte Vorstellung von geometrischen Objekten als Mengen einzelner Punkte anstelle von ganzheitlich-konkreten Objekten selten zu beobachten ist.

In einer weiteren Studie untersucht G. Wittmann (2000) Schülerkonzepte vom Vektorraumbegriff in einem Kurs, in dem mehrere Vektorraumbeispiele untersucht und ihre Gemeinsamkeiten herausgefiltert wurden, welche dann in einer axiomatischen Vektorraumdefinition mündeten. Hier fand also ein Wechsel von verschiedenen Modellen zu einer abstrakten Struktur hin statt. Es zeigt sich: In Funktionenräumen fällt es den Lernenden schwer, die Funktionen als Objekte aufzufassen, noch schwerer ist es, Mengen von Funktionen als neue Objekte zu begreifen. Den 'Vektorraum' akzeptieren sie als abstrakten Begriff, der sich auf verschiedenartige Mengen bezieht, welche bestimmte Eigenschaften erfüllen; den Begriff des Vektors behalten sie jedoch einer geometrischen Pfeilvorstellung vor.

Pavlopoulou[24] untersucht drei Repräsentationsformen für Vektoren, die sie den Studierenden zusammen mit strikten Codierungen vorgibt. Diese sind Pfeile als graphische, Spalten als tabellarische und Symbole als axiomatische Darstellung. Die Hauptschwierigkeiten der Studierenden sind der Transfer zwischen Registern und die Trennung von einem Vektor als Objekt und seiner geometrischen Darstellung als Pfeil. Pavlopoulous Untersuchungen beziehen sich ausschließlich auf isolierte Aufgaben zu diesen Registern und sind nicht in einen größeren inhaltlichen Zusammenhang eingebettet. Ein Versuch, die Studierenden in diesem speziellen Lernumfeld gezielt den Transfer zwischen diesen drei Registern zu lehren, war erfolgreich.

Zum inhaltlichen Verständnis, das Studierende zu einzelnen Begriffen aus der linearen Algebra entwickeln, äußern sich vor allem Dorier et al. (2000a) und Rogalski (2000) aufgrund empirischer Untersuchungen über Verständnis und Lösungsstrategien von Studierenden im ersten Universitätsjahr. Die gestellten Aufgaben fordern Transferleistungen sowohl zwischen verschiedenen Vektorraummodellen als auch den Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationen und Argumentationsebenen innerhalb eines Vektorraums. Die Studierenden ihrer Kurse verstehen den fundamentalen Begriff des Rangs und können ihn in verschiedenen Situationen zur Lösung von Problemen einsetzen. Die Bestimmung von Kern und Bild einer linearen Abbildung, die in Form einer Matrix gegeben ist, gelingt ebenfalls den meisten Studierenden.

Alves-Dias/Artigue (1995) und Dorier et al. (2000a) beobachten das Verhalten von Studierenden in Aufgaben, wo verschiedene Darstellungen von Unterstrukturen eines $\mathbb{R}^n$, nämlich Parameter- und Koordinatenformen von Untervektorräumen, auftreten. Sie betrachten also nicht einander entsprechende Phänomene in verschiedenen Vektorraummodellen, sondern zwei Darstellungsformen von Objekten innerhalb eines Modells. Beide Studien kommen zu dem Ergebnis, dass viele Studierende mit

[24]Siehe Artigue et al. (2000).

dem Wechsel zwischen diesen Darstellungen nicht sicher umgehen können.

Hillel (2000) betrachtet ebenfalls einen Repräsentationswechsel innerhalb eines Vektorraums, nämlich den Wechsel von Darstellungen von Vektoren bzgl. verschiedenen Basen. Diesen schätzt er im $\mathbb{R}^n$ als besonders schwierig ein, da hier ein $n$-Tupel zunächst als Element des Vektorraums verstanden wird und später als Darstellung eines Vektorraumelements bzgl. einer bestimmten Basis auftritt. So kann dasselbe $n$-Tupel bzgl. verschiedenen Basen verschiedene Vektoren repräsentieren. Eine Studie Hillels beschäftigt sich mit der Frage, wie Studierende mit Darstellungen von Vektoren und linearen Abbildungen bzgl. verschiedenen Basen umgehen. Die Bearbeitung der Aufgabe, das Bild eines bestimmten Vektors, das als $n$-Tupel bzgl. der Standardbasis gegeben ist, unter einer Abbildung zu ermitteln, deren Darstellungsmatrix bzgl. einer zweiten Basis gegeben ist, brechen viele Studierende zu früh ab: Sie bestimmen die Koordinaten des Vektors bzgl. der zweiten Basis und wenden die Matrix auf die neue Darstellung an. Das Ergebnis - ein $n$-Tupel - nennen sie als Endergebnis, statt von diesem Bildvektor noch seine Darstellung in der Standardbasis zu berechnen.

## 2.2 Zentrale Begriffe in der linearen Algebra

Die folgenden Abschnitte geben eine didaktisch orientierte Sachanalyse einiger zentraler Inhalte der linearen Algebra. Dabei sollen Merkmale dieser Inhalte herausgearbeitet werden, welche wesentliche Bestandteile von tragfähigen und umfassenden Vorstellungen sind. Vom Hofe (1996) bezeichnet solche Vorstellungen als ‘Grundvorstellungen’. Er erklärt:[25]

> “Grundvorstellungen beschreiben Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. Sie charakterisieren insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:
>
> - **Sinnkonstituierung** eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge,
> - Aufbau **psychologischer Repräsentationen** bzw. “Verinnerlichungen”, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
> - Fähigkeit zur **Anwendung** eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur.
>
> In diesem Sinne kann man Grundvorstellungen als die Basis für inhaltliches Denken betrachten. Ohne vermittelnde Grundvorstellungen stehen sich Zahlenrechnen und Anwendungszusammenhänge beziehungslos gegenüber.”

Diese Beschreibung bezieht sich auf Mathematiklernen in der Schule. Sie kann jedoch ohne Weiteres auf Hochschulmathematik übertragen werden, wenn man an-

[25] Hervorhebungen im Zitat durch den Autor

stelle von Zahlenrechnen das Umformen von formalen Ausdrücken setzt und unter 'Sachproblem' und 'Anwendungszusammenhängen' auch innermathematische Zusammenhänge versteht, auf die 'neue' mathematische Begriffe angewendet werden: Grundvorstellungen erfassen einen mathematischen Begriff auf einer mittleren Abstraktionsebene, die zwischen der Erfahrungs- und Vorstellungswelt Lernender und der formalen Begriffsdefinition der Mathematik liegt.[26]

Die folgende Sachanalyse wird neben inhaltlichen Merkmalen von Grundvorstellungen auf ihren Abstraktionsgehalt und auf kognitive Werkzeuge Bezug nehmen, welche für eine mentale Rekonstruktion der Begriffe hilfreich sind. An einigen Stellen wird auf Unterschiede in Zugängen für prädikatives und funktionales Denken eingegangen.

Aus Gründen der inhaltlichen Zugehörigkeit und der besseren Lesbarkeit wird diese Sachanalyse an die Darstellung der grundlegenden Ideen der linearen Algebra in ihrer Entstehung als mathematische Theorie und in ihrer Eigenschaft als Lerninhalt angeschlossen. Entwickelt worden ist sie in zwei Arbeitsgängen, von denen der erste vor und der zweite nach der Planung, Durchführung und Auswertung der Pilotstudie erfolgte, welche im Kapitel 3 vorgestellt wird. Insofern werden hier eine vorgreifende Analyse wichtiger Inhalte hinsichtlich ihrer möglichen Verarbeitung in Lernprozessen mit den Ergebnissen einer empirischen Analyse von tatsächlichen Verarbeitungen in Lernprozessen verbunden.[27]

### 2.2.1 Vektorraum

Ähnlich den Stufen des Ordnens bei Freudenthal (1977)[28] kann auch der Begriff des Vektorraums kann auf Stufen unterschiedlichen Ordnungsgrades erfasst werden. Ich möchte hier zwei Stufen unterscheiden:

1. Die erste Stufe ist gegeben durch die Details der Definition eines Vektorraums - sei es die formal-axiomatische Definition des allgemeinen Vektorraums oder ein konkretes Modell. Beschäftigungen von Lernenden auf dieser Stufe können erstes Ausprobieren von Möglichkeiten und Grenzen der Operationen und unmittelbare Schlussfolgerungen über 'lokale' Beziehungen zwischen Elementen des Raums sein.

2. Auf der zweiten Stufe liegen 'globale' Schlussfolgerungen aus der Definition, welche in Form von zusätzlichen klärenden Begriffen und Sätzen gefasst sind und ordnende Zusammenhänge beschreiben. Auch diese Stufe kann sowohl auf den allgemeinen Vektorraum wie auf ein einzelnes Modell bezogen sein.

[26]Vom Hofe (1996) führt auch aus, wie Grundvorstellungen als didaktische Hilfmittel dienen können: Aus Sicht des Lehrens sollten Grundvorstellungen aus dem mathematischen Begriff hergeleitet und in Sachverhalten aus der Erfahrungswelt der Lernenden, in denen sie sich widerspiegeln, präsentiert werden. Aus Sicht der Lernenden werden durch die Auseinandersetzung mit diesen Sachverhalten die Grundvorstellungen erschlossen und in die subjektiven Vorstellungen integriert.

[27]Beide Analyseprinzipien beeinflussten sich gegenseitig: Die theoretische Analyse floss ein in die Entwicklung von Aufgaben für die empirische Untersuchung; die empirische Analyse, welche sich nur auf geringe Probandenzahl bezog, ersetzte nicht die theoretische Analyse, sondern gab Anstöße für eine Modifikation und Ergänzung der theoretischen Überlegungen.

[28]Vgl. S. 116ff.

Auf dieser Stufe sind Lernende gefordert, eine Vorstellung von dem Gefüge zu entwickeln, in dem die Elemente eines Vektorraums eingebaut sind.

Auf der ersten Stufe der Beschaffenheit des Objekts 'Vektorraum' sind mindestens drei grundsätzlich unterschiedliche Grundvorstellungen sinnvoll, die unterschiedlich gut in verschiedenen konkreten Zugängen erkennbar sind. Diese Vorstellungen werden verschiedentlich in den Interviews der Pilotstudie sichtbar[29]:

1. Ein Vektorraum ist eine Menge von Elementen, deren Wesensart bestimmte Beziehungen zur Folge hat, welche durch Eigenschaften von zwei Verknüpfungen zum Ausdruck gebracht werden. Diese Vorstellung wird als 'Elementtypvorstellung', kurz $V_E$, bezeichnet.

   Beispiele für Elementtypvorstellungen sind:

   - Eine Menge von Pfeilklassen mit Operationen, die durch 'Aneinanderhängen' und Änderung von Länge und Orientierung beschrieben sind

   - Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit koordinatenweisen Verknüpfungen

2. Ein Vektorraum ist eine Menge von Elementen, die aus bestimmten Komponenten bestehen. Die Elemente werden komponentenweise addiert und mit Skalaren multipliziert. Diese 'Komponentenvorstellung' wird mit $V_K$ abgekürzt.

   Als Prototyp dieser Vorstellung eignet sich der $K^n$.

3. Ein Vektorraum ist ein Gebilde, das nach einem Konstruktionsprinzip erstellt wird, in dem Konstruktionsprozesse nach bestimmten Regeln auf Bausteine angewendet werden. Die Vektoren sind die Objekte, die unter diesen Vorgaben konstruiert werden können. Dieses Modell ist eine 'Baukastenvorstellung', $V_B$.

Während unter den ersten beiden Vorstellungen $V_E$ und $V_K$ die Beziehungen zwischen den Elementen im Mittelpunkt stehen, ist unter der Baukastenvorstellung die Art der Operationen, welche in dem Raum definiert sind, und die Variationen an Handlungsmöglichkeiten, welche die Vektorraumstruktur erlaubt, die Hauptsache. Somit kommen $V_E$ und $V_K$ dem prädikativen Denken entgegen, während $V_B$ gut zum funktionalen Denken passt.

Die Elementtypvorstellung betont einen Charakter des Vektorraums, in dem zunächst alle Elemente einander prinzipiell gleichgestellt sind. Eine Ausnahme bildet der Nullvektor, dem die Vektorraumaxiome besondere Eigenschaften zuschreiben. Dieser Auffassung liegt die Vorstellung nahe, dass die Wesensart der Vektoren das eigentliche Charakteristikum eines Vektorraums ist, indem sie bestimmte Beziehungen zur Folge hat, welche durch die Eigenschaften der zwei Verknüpfungen zum Ausdruck gebracht werden. $V_E$ unterscheidet sich von den beiden anderen Grundvorstellungen durch das entscheidende Detail, dass sie auch solche Charaktermerkmale von Elementen eines konkreten Vektorraums in den Vordergrund stellt, die zwar in dem besonderen Fall mit zu den charakteristischen Beziehungen in einem Vektorraum beitragen, die aber im Allgemeinen nicht anzutreffen sind. Mit anderen

[29] Siehe Kapitel 3.3 und 3.5. Diese drei Konzepte sind auch in A.Fischer (2003) dargestellt.

Worten haftet diese Vorstellung als allgemeine Vektorraumvorstellung stark an nebensächlichen Eigenschaften von Beispielen. Elementtypbeispiele von Vektorräumen spielten in der Geschichte der linearen Algebra eine große Rolle als Vorläufer des allgemeinen Vektorraumbegriffs. Einige wurden oben im Kapitel zur Geschichte der linearen Algebra beschrieben.

Die Komponentenvorstellung basiert auf einer Sichtweise der Vektoren, welche sich aus ihrer Untergliederung nach Komponenten als ihren Gemeinsamkeiten ergibt. Diese Vorstellung beinhaltet implizit die Idee einer kanonischen Basis, auf welche die festgelegten Komponenten bezogen sind. Ein Prototyp dieser Vorstellung ist der Raum der $n$-Tupel mit den komponentenweisen Verknüpfungen. In der historischen Entwicklung der linearen Algebra wurden $n$-Tupel z.B. zur algebraischen Beschreibung von Kurven verwendet. In diesem Zusammenhang wurde das jeweilige Bezugssystem jedoch geeignet ausgewählt, mit anderen Worten, es wurde keine bestimmte Basis ausgezeichnet. Erst da, wo die $n$-Tupel als gegeben vorausgesetzt werden, kann man von einer Komponentenvorstellung sprechen, die auf einer kanonischen Basis gründet.[30]

$V_B$ betont die Handlung des Konstruierens, nicht die Elemente, aus denen der Vektorraum besteht. Sie stellt eine dynamische Auffassung des Vektorraums dar. Eine Deformierung dieser Idee ist eine Vorstellung, welche die Menge der Vektoren nicht als fertiges, statisches Objekt, sondern als etwas Werdendes ansieht, in dem die 'meisten' Vektoren aus einigen vorgegebenen 'Grundvektoren' erst konstruiert werden und somit die Elemente entsprechend ihrer Konstruktionsgeschichte geordnet werden. Diese Vorstellung ist problematisch, weil sie den erzeugenden Vektoren eine Ausnahmestellung einräumt, die die axiomatische Definition ihnen nicht gibt. Dennoch gibt es Beispiele von wichtigen Problemstellungen, in denen dieses Werden eines Vektorraums zentral ist. In der Geschichte ist dies besonders deutlich bei der Konstruktion von Erweiterungskörpern: durch die Adjunktion einer Wurzel, i.e. eines neuen Objektes, das durch die Eigenschaft, eine bestimmte Gleichung zu erfüllen, definiert wird, wird ein Vektorraum über einem Körper $K$ 'geschaffen', indem alle Linearkombinationen dieser Wurzel und ihrer Potenzen mit Koeffizienten aus $K$ gebildet werden. Hier erhalten die Vektorraumelemente in der Tat ihre Existenz erst durch die Konstruktion aus einigen Bausteinen.

Dass diese drei Grundvorstellungen von der Beschaffenheit eines Vektorraums in vielen Überlegungen eine Rolle spielen können ohne besonders thematisiert zu werden, sollen die folgenden Darstellungen eines Untervektorraums $U$ des $\mathbb{R}^3$ zeigen, welche je nach Problemstellung oder persönlicher Vorliebe verwendet werden:

Je eine Elementtypdarstellung zur geometrischen Anschauung und zu Lösungen eines linearen Gleichungssystems liefern die folgenden Beschreibungen:

- $U$ ist die Ebene durch die Punkte $(1, 1, 1), (4, -1, 2), (3, -2, 1)$.
- $U$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0$.

[30]Hillel (2000) stellt heraus, dass Studierende bei einem Zugang zur linearen Algebra über die analytische Geometrie, also über die Beschreibung des geometrischen Raums mit Hilfe eines Koordinatensystems, eben dieses - üblicherweise rechtwinklige - Koordinatensystem als gegebenes Bezugssystem ansehen, und nur schwer von der Notwendigkeit zu überzeugen sind, dass die Achsen, d.h. die zugrunde liegenden Basiselemente, gewählt werden müssen.

Als Nächstes werden zwei Darstellungen gegeben, die die Komponenten der Elemente von $U$ beschreiben. Die erste betont $U$ als Teilraum des $\mathbb{R}^3$, indem sie sich auf die drei kanonischen Komponenten des $\mathbb{R}^3$ bezieht. Die zweite beschreibt $U$ als Vektorraum, dessen Komponenten auf die Basis von $U$ mit den zwei Basisvektoren $a = (1, 1, 1)$ und $b = (4, -1, 2)$ bezogen sind:

- $U = \{(r + 4s, r - s, r + 2s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
- $U = \{(r, s) \mid r, s \in \mathbb{R}\} = \{ra + sb \mid r, s \in \mathbb{R}\}$

Darstellungen, die die Elemente von $U$ als Objekte beschreiben, welche aus zwei 'Bausteinen' konstruiert werden, sind:

- $U$ ist die Ursprungsebene, die von den Vektoren $(1, 1, 1)$ und $(4, -1, 2)$ aufgespannt wird.
- $U = \{r(1, 1, 1) + s(4, -1, 2) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
- $U$ ist die Menge aller Linearkombinationen von $(1, 1, 1)$ und $(4, -1, 2)$.

Im Darstellungsteil von Lehrbüchern zur linearen Algebra[31] werden häufig Elementtypvorstellungen und die Komponentenvorstellung in Gestalt des $K^n$ betont.[32] Baer (1952) und Van der Waerden (1966) bilden unter den betrachteten eine Ausnahme: Sie stellen in ihren Einführungskapiteln keine Beispiele für Vektorräume dar. Baer erwähnt zudem auch nicht den $K^n$. Beutelspacher (1998) unterscheidet sich von anderen Autoren durch einige Feinheiten in seiner Darstellung, durch welche die Idee des Konstruierens angeregt wird. So definiert er z.B. die Begriffe der Linearkombination und des Erzeugnisses vor dem Begriff des Untervektorraums, den er durch das Beispiel des Erzeugnisses einer Menge von Vektoren motiviert. Auf diese Weise kann der Eindruck entstehen, dass Untervektorräume typischerweise 'von unten', d.h. aus einzelnen Vektoren, konstruiert werden.

Die kognitiven Anforderungen, die die drei Grundvorstellungen an Lernende stellen, sind unterschiedlich. Ein möglicher Zugang zum Verständnis des Vektorraumbegriffs besteht in der Betrachtung von verschiedenen Beispielen von Vektorräumen.[33] Er fordert von Lernenden, dass sie die Beschaffenheit der Elemente und die spezifischen Operationen begreifen. Das Erfassen dieser Beispiele, welches seinerseits mit großen Abstraktionsleistungen verbunden sein kann, wird hier zur Voraussetzung für die Beschäftigung mit den durch die Operationen gegebenen formalen Strukturen

[31] Berücksichtigt wurden: Artmann (1991), Baer (1952), Beutelspacher (1998), Brieskorn (1983), G.Fischer (2002), Greub (1967), Jänich (1979), Klingenberg (1984), Koecher (1985), Kowalsky/Michler (1995), Lorenz (1988), Van der Waerden (1966).

[32] Häufig angesprochene Elementtypdarstellungen sind neben dem $K^n$ vor allem Abbildungsmengen mit passenden Operationen. Als Spezialfall oder als gesondertes Beispiel werden mehrfach auch Zahlenfolgen oder Polynomräume angesprochen. Ebenfalls mehrfach genannt werden der geometrische Anschauungsraum (als Pfeil- oder Punktraum, beschrieben durch 3-Tupel) und Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen.

[33] Die Forschungsgruppe von Dorier (Vgl. Rogalsky (2000)) wählt einen Einstieg in die lineare Algebra über das Beispiel des geometrischen Anschauungsraums und das Beispiel der Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen und vermittelt dann die Idee des Verallgemeinerns und Verbindens verschiedener Inhalte mit Hilfe der Formalisierung durch Anwendungen von Sätzen über lineare Gleichungssysteme auf weitere Vektorraumbeispiele.

eines Vektorraums. Als Beispiel für einen solchen Zugang soll hier der geometrische Anschauungsraum dienen, wie er in Deutschland häufig in Schulen zur Einführung in die Vektorrechnung verwendet wird.[34] Es werden die Pfeile im geometrischen Raum betrachtet, wobei nur die Merkmale 'Länge', 'Richtung' und 'Orientierung' dieser Pfeile interessieren, nicht aber der Ort, an dem sie sich befinden. Mit anderen Worten: Ein Vektor wird als Äquivalenzklasse der Pfeile, die sich in den genannten Kriterien nicht unterscheiden, definiert. Dieses Modell ist insofern abstrakt, als es die Fähigkeit erfordert, eine Menge von (genau beschriebenen) Pfeilen als ein eigenständiges, abstraktes Objekt aufzufassen und zu behandeln. Es wird also der Abstraktionsschritt der Vereinigung[35] von Objekten vollzogen. Auf der anderen Seite sind diese neuen Objekte sehr konkret, weil man Repräsentanten der Äquivalenzklassen zeichnen kann. Eine Sonderbehandlung muss bei dieser Definition der Nullvektor erfahren, da er keine Richtung und keine Orientierung hat. Eine Variante der Pfeilklassendefinition ist die Bezeichnung von Parallelverschiebungen des Punktraums als Vektoren. Dies ist eine Verkapselung oder eine Verdinglichung[36], je nachdem, ob man die Handlungen des Verschiebens der einzelnen Punkte oder die Beziehung von Anfangs- und Endzustand der Handlungen als die mathematische Abbildung 'Translation' auffasst. In diesen beiden Modellen werden die Vektoraddition und die skalare Multiplikation geometrisch über ein 'Hintereinanderhängen' von repäsentierenden Pfeilen bzw. Verändern der Länge der repräsentierenden Pfeile definiert. Dies ist ein Beispiel, in dem der Charakter der Elemente des Vektorraums im Vordergrund steht und in dem hohe Anforderungen an das Abstraktionsvermögen gestellt werden. Ohne ein gutes Verständnis dieses Charakters sind die Operationen in diesem Raum nicht ausführbar.[37]

Die Betrachtung des $K^n$ als Menge der $n$-Tupel mit Komponenten in einem Körper $K$ und der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ist ein Beispiel für einen Vektorraum, in dem die Elemente nur als formale Diagramme auftreten, ohne dass sie eine tiefgründige Bedeutung haben oder haben müssen. Das Wesentliche an ihnen ist die äußere Gestalt, die bestimmte Operationen erlaubt. Dieser Vektorraum entspricht unmittelbar der Vorstellung $V_K$, aber er kann ebenso gut mit der Perspektive von $V_B$ betrachtet werden, welche die Operationen in den Vordergrund stellt, denn es ist offensichtlich, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Grundbausteine, aus denen man den ganzen Raum erzeugen kann, geeignet sind.

Die zahlreichen Beispiele für Vektorräume haben gemeinsam, dass sie die Axiome der Vektorraumdefinition erfüllen. Diese bedingen eine Struktur, die allen Vektorräumen gemeinsam ist, und die in den Sätzen über Vektorräume deutlicher zum

[34] Tietze et al. (2000), S. 9.
[35] Dieser Begriff wird in 1.2.1 eingeführt.
[36] Vgl. Abschnitt 1.2.1 "Abstraktion".
[37] Für eine ausführliche Darstellung alternativer Interpretationen von Vektoren in Schulbüchern, insbesondere von geometrischen Deutungen, siehe Tietze et al. (2000), S. 159ff.

Ausdruck kommt als in der ursprünglichen Definition. Für den Weg zur Entdeckung dieser globalen Ordnung und zur Entwicklung einer adäquaten individuellen Vorstellung möchte ich zwei Grundvorstellungen $V_1$ und $V_2$ nennen, die als prinzipielle Perspektiven auf einen Vektorraum angesehen werden können, und die als erste Ausrichtung in der Beschäftigung mit Vektorräumen geeignet sind: Einen endlichdimensionalen $K$-Vektorraum $V$ kann man folgendermaßen ansehen:

1. $V_1$: Leitgedanke ist $V \simeq K^n$, die Menge der $n$-Tupel mit Komponenten aus dem Körper $K$, d.h. $V$ ist 'im Wesentlichen' mit dem $K^n$ identisch.

2. $V_2$: Leitgedanke ist die Tatsache, dass $V$ eine algebraische Struktur ist, gegeben durch die Vektorraumaxiome.

Beide Perspektiven sind unverzichtbare Bestandteile von einer reichhaltigen Vorstellung des Vektorraumbegriffs: Die Grundvorstellung $V_1$ identifiziert den Vektorraum mit dem $K^n$ via einen nicht näher bestimmten Isomorphismus. Der $K^n$ ist das wichtigste Beispiel für einen Vektorraum und tritt hier als Prototyp auf. Er hat gegenüber einem allgemeinen Vektorraum den Vorzug, dass seine Elemente bekannt sind und jedes einzeln benannt werden kann, und dass das Rechnen in diesem Raum vertraut ist. Darüber hinaus hat der $K^n$ eine kanonische Basis, die in offensichtlich eindeutiger Weise den Vektorraum erzeugt. Dieser Ansatz liegt z.B. einem Zugang zur linearen Algebra über lineare Gleichungssysteme zugrunde, da bei diesen mit $n$-Tupeln operiert wird. Der Einstieg in die lineare Algebra, den die Forschergruppe LACSG[38] für die US-amerikanischen Colleges empfiehlt, ist die Behandlung von Matrizen als formale rechteckige Schemata mit bestimmten Rechenoperationen und die Klassifizierung von linearen Gleichungssystemen und ihren Lösungen. Sie entscheiden sich damit für einen 'Matrizenkurs', der nur den $\mathbb{R}^n$ als Vektorraum berücksichtigt. Auch das Unterrichtskonzept der Forschergruppe um Dorier in Lille baut die zentralen Themen wie lineare Unabhängigkeit, Rang und Untervektorräume auf die Betrachtung von linearen Gleichungssystemen auf. Auch in diesem Ansatz werden die Diagramme, die Matrizen bzw. lineare Gleichungssyteme bilden, zeitlich vor den abstrakten Strukturen behandelt. Hier werden jedoch auch andere Vektorräume als der $\mathbb{R}^n$ untersucht und die wichtigsten Sätze der linearen Algebra werden von Anfang an koordinatenfrei bewiesen, um den verallgemeinernden Charakter der Theorie der linearen Algebra zu unterstreichen.[39] Hillel (2000) führt aus, dass durch diesen Zugang, der zunächst einen relativ anschaulichen Einstieg bietet, ein epistemologisches Hindernis für ein späteres Denken in allgemeinen Strukturen aufgebaut werden kann. Dabei nennt er als Beispiele den Basiswechsel, dessen Notwendigkeit aus der Perspektive des $\mathbb{R}^n$ nur schwer einzusehen ist, und andere Objekte, die als Vektoren angesehen werden, wie Funktionen, Matrizen oder Polynome.

Die algebraisch-strukturelle Perspektive[40] $V_2$ gibt keinen Halt an konkreten Objekten. Eine echte Auseinandersetzung mit der axiomatischen Definition eines Vek-

[38]Abkürzung für: The Linear Algebra Curriculum Study Group. Zu einer Erklärung dieses Ansatzes siehe Carlson et al. (1997b).

[39]Vgl. Rogalski (2000).

[40]Dorier/Sierpinska (2001) empfehlen eine axiomatische Definition nicht als Verallgemeinerung allein der Eigenschaften des $K^n$ einzuführen, da sie den Sinn einer solchen Verallgemeinerung ohne praktischen Nutzen für Lernende nicht einsichtig finden. Sie befürworten stattdessen die Betonung eines Vektorraums als algebraische Struktur, in der Eigenschaften von Elementen im Hinblick auf

torraums zwingt die Lernenden keiner bestimmten Menge von Elementen des Vektorraums Vorrang vor anderen einzuräumen. Die einzige Ausnahme ist der Nullvektor, der seine Sonderstellung aber durch die Axiome erhält. In dieser Vorstellung ist keine Basis des Vektorraums vor einer anderen ausgezeichnet. Diese Vorstellung ist darüber hinaus unverzichtbar für den allgemeinen Vektorraumbegriff, der auch unendlichdimensionale Vektorräume einschließt. Dieser Zugang eignet sich für eine erste Erschließung des Raums aus der Vogelperspektive, die Aussagen über Untervektorräume und Quotientenräume trifft, ohne diese Strukturen aus einzelnen Vektoren und ihrem linearen Erzeugnis aufzubauen.[41]

Sowohl $V_1$ wie $V_2$ können mit spezifischen Beispielen für Vektorräume eingeführt oder nachträglich ergänzt werden, und so die Grundvorstellung $V_E$ unterstützen. Auch die Grundvorstellungen $V_K$ und $V_B$ können aus jeder dieser Perspektiven entwickelt werden, sind jedoch bei $V_2$ nicht naheliegend, sondern ergeben sich erst aus Überlegungen zu dem Beziehungsgeflecht der Elemente eines Vektorraums. Wesentliche Aspekte dieses Gefüges werden durch die folgenden Begriffe und Sätze vermittelt:

1. Die Begriffe 'Erzeugendensystem', 'lineare Abhängigkeit' und 'lineare Unabhängigkeit', 'Basis', Dimension.

2. Jede Menge von linear unabhängigen Vektoren kann man zu einer Basis von $V$ ergänzen.

3. Wenn $V \neq \{0\}$, kann man jedes Erzeugendensystem von $V$ auf eine Basis reduzieren.

4. Alle Basen von $V$ haben dieselbe Länge.

Die genannten Begriffe und die Aussagen, die die Sätze über sie machen, sind sehr gehaltvoll.[42] Zu ihrem Verständnis ist zunächst einmal eine Gewöhnung an die im Vektorraum erlaubten Operationen notwendig, die einen Einblick gibt, welche verschiedenartigen Beziehungen zwischen den Vektoren bestehen, oder, aus einer dynamischen Sicht, welche Möglichkeiten es gibt, von einigen gegebenen Vektoren ausgehend andere zu darzustellen. Dies ist im $K^n$ relativ anschaulich möglich, da jeder Vektor eine individuelle Darstellung in Form eines ihn eindeutig bezeichnenden $n$-Tupels, nicht nur in Form einer für beliebige Vektoren einsetzbaren Variablen, besitzt. Insbesondere ist hier leicht zu sehen, welche Vektoren aus einer Auswahl von den Standardbasisvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

diese Struktur angesprochen werden - z.B. die Eigenschaft das Inverse eines bestimmten Elements zu sein.

[41] Baer (1952), Brieskorn (1983) und Klingenberg (1984) gehen diesen Weg.

[42] Hier soll exemplarisch auf eine Variante zur Einführung dieser Begriffe eingegangen werden, die Schwierigkeiten aufzeigt, welche in den Konzepten begründet liegen. Artigue et al. (2000) diskutieren unterschiedliche Möglichkeiten, eine Vorlesung zur linearen Algebra mit Hilfe dieser Begriffe zu strukturieren.

konstruiert werden können. Etwas schwieriger ist es, an diesen anschaulichen Objekten, den $n$-Tupeln, die Frage der Möglichkeiten der Konstruktion eines Vektors aus anderen Vektoren (oder anders ausgedrückt: die Frage nach seinen Beziehungen zu anderen Vektoren) allgemein zu lösen, da konkrete Einträge in den $n$-Tupeln für das Ordnen auf dieser höheren Stufe eher ablenken als helfen. Eine solche Fragestellung kann durch Übertragung auf eine geometrische Anschauung zunächst im $\mathbb{R}^3$ gelöst werden. Sie kann auch durch das Vereinfachen von algebraischen Termen behandelt werden.

In dem allgemeinen Vektorraum ist die Frage schneller beantwortet: Aus beliebigen Vektoren $v_1, ..., v_k$ kann man alle diejenigen Vektoren konstruieren, die Linearkombinationen dieser ersten sind:

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \quad \text{für } \lambda_1, ..., \lambda_k \in K$$

Der Mangel an näheren Informationen über die ausgewählten Vektoren hat zur Folge, dass die Antwort von Anfang an sehr übersichtlich und allgemein auf einer höheren Stufe des Ordnens liegt, als bei dem konkreten Vektorraum des $K^n$. Allerdings stellt die Notwendigkeit der Akzeptanz dieser formalen Summe als Element des Vektorraums ein epistemologisches Hindernis dar. Schon die Benennung von $k$ unbekannten Vektoren mit den Namen $v_1, ..., v_k$ widerstrebt dem Bedürfnis, dass Namen für bestimmte Dinge stehen.[43] Lässt man sich darauf ein, dass die unbekannten Elemente des Vektorraums zur Unterscheidung mit indizierten Buchstaben bezeichnet werden, so ist die Summe nun eine Darstellung ganz anderer Art als die Namen der ersten $k$ Vektoren. Dennoch soll sie auch nur ein gewöhnliches Element des Vektorraums bezeichnen. Hier ist vom Deutenden eine Verdinglichung[44] zu vollziehen, die den Prozess der Ausführung der Operationen durch sein Ergebnis ersetzt. Sie erfordert einen Sichtwechsel weg von einer Tätigkeit hin zu einem statischen Objekt. Eine Hilfe, wie diese Situation veranschaulicht werden kann, ohne dass dadurch eine 'natürliche' Basis wie beim $K^n$ gegeben wird, ist eine inhaltliche Deutung der formalen Vektoren durch die oben beschriebenen Parallelverschiebungen des Raums. Ohne die Einführung eines Koordinatensystems ist außer der Nullverschiebung kein Element in irgendeiner Weise ausgezeichnet.

Die Begriffe 'Erzeugendensystem' und 'lineare Abhängigkeit' bauen unmittelbar auf die Erfahrung auf, dass manche Vektoren aus bestimmten vorgegebenen konstruiert werden können, und es ist nun leicht, eine passende Vorstellung über diese Begriffe zu bilden. Dabei führt allerdings das Konstruktionsprinzip zu der Idee, dass die lineare Abhängigkeit von Vektoren zwei Kategorien von Vektoren unterscheidet, nämlich solche, die erzeugt werden, und solche, aus denen erzeugt wird.[45] Die Tatsache, dass die Vektoren nicht eindeutig in diese beiden Kategorien eingeordnet werden können, darf nicht übersehen werden. Sie erfordert Flexibilität im Wechsel von Sichtweisen, welcher formal vollzogen werden kann, indem eine Gleichung, in der ein Vektor als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt wird, nach

[43] Hier werden die Variablen $v_1, ..., v_k$ gemäß dem Gegenstandsaspekt von Malle (1993, S. 44) verwendet.

[44] Siehe Abschnitt 1.2.1.

[45] Baer (1952) und Van der Waerden (1966) betonen den Zusammenhang des Erzeugens und der linearen Abhängigkeit, indem sie die heute unübliche Ausdrucksweise verwenden, dass ein Vektor 'linear abhängig von' einer Menge von Vektoren ist.

den verschiedenen auftretenden Vektoren aufgelöst wird. Dieser Sichtwechsel löst die zeitliche Reihenfolge auf, welche der Idee des 'Erzeugens' innewohnt. Hier wird eine Grenze der anschaulichen Bedeutung durch die Möglichkeiten diagrammatischer Manipulation aufgehoben. Die Aufnahme dieser die Grenzen der ursprünglichen Vorstellung überschreitenden Möglichkeiten in eine interne Repräsentation vom Begriff der linearen Abhängigkeit erfordert die Konstruktion einer abstrakten mentalen Struktur. Einige Autoren bezeichnen das lineare Erzeugnis einer Menge von Vektoren als ihre 'lineare Hülle', und implizieren damit eine statische, gegenseitige Beziehung, in der nicht einige Vektoren durch andere kreiert werden.[46]

Der Begriff der linearen Unabhängigkeit birgt diese Gefahr nicht, sondern bringt zum Ausdruck, dass für keinen Vektor aus einer Menge von linear unabhängigen Vektoren die Darstellung als Linearkombination der anderen möglich ist. Formal logisch ist dieser Begriff allerdings schwieriger zu erfassen, weil er eine Unmöglichkeit ausdrückt.[47] Im $K^n$ kann diese logische Schwierigkeit durch Beispiele erleichtert werden, an denen konkret erfahrbar wird, dass von gegebenen Vektoren keiner mit Hilfe der anderen dargestellt werden kann. Dennoch besteht die Notwendigkeit, diese Unmöglichkeit in einer Definition des Begriffs allgemein zu formulieren und das heißt, sie logisch zu erfassen. Im rein formalen Ansatz ist eine solche Veranschaulichung nicht möglich, sondern muss von Anfang an als Unmöglichkeitsaussage ausgedrückt werden.

Der Begriff der Basis schließlich ist insofern schwierig, als er auf den der linearen Unabhängigkeit aufbaut, stellt aber keine neue Hürde dar. Meines Erachtens ist er sogar leichter zu erfassen, weil seine Nützlichkeit zum Ordnen des Vektorraums offensichtlich ist. Die Vorstellung, dass eine Basis eine Menge von Vektoren ist, mit denen alle Vektoren des Vektorraums auf eindeutige Weise dargestellt werden können, vermeidet sogar die Unmöglichkeitsformulierung der Beschreibung der linearen Unabhängigkeit. Das Konzept der Basis erleichtert insbesondere beim axiomatischen Ansatz das mentale Repräsentieren des Vektorraums erheblich, denn er kann nun als das Erzeugnis einer Basis angesehen und damit strukturiert werden. Fasst jemand einen Vektorraum im Sinne von $V_B$ grundsätzlich als Konstruktionsprinzip auf, welches auf gegebene Grundstoffe anzuwenden ist, so gibt die axiomatische Vektorraumdefinition überhaupt erst im Zusammenhang mit dem Basiskonzept ein ganzheitliches Bild. Wird ein Vektorraum als Erzeugnis einer bestimmten Basis verstanden, so wird er quasi mit dem $K^n$ identifiziert: Wenn eine (geordnete) Basis $\mathcal{V} = (v_1, ..., v_n)$ des Vektorraums $V$ gegeben ist, so sind alle Vektoren eindeutig als Linearkombinationen dieser Basis darstellbar. Die Angabe der Koeffizienten in diesen Linearkombinationen als $n$-Tupel ist damit eine eindeutige Bezeichnung der Vektoren. Bei der Betrachtung des $K^n$ ohne einen Bezug zu einem allgemeinen Vektorraum ist der Nutzen des Konzepts einer Basis weniger offensichtlich, denn es gibt bereits eine natürliche 'Basis', die den Zweck der Beschreibung aller Vektoren zufriedenstellend, ja 'besser', nämlich offensichtlicher, erfüllt als andere Basen. Eine weitere Basis erscheint zunächst als etwas Künstliches, weil ihre Vektoren selbst

[46]So z.B. Lorenz (1988) und Klingenberg (1984). Jänich (1997) definiert die Begriffe 'Erzeugnis' und 'Erzeugendensystem' überhaupt nicht und verwendet an ihrer Stelle 'lineare Hülle' und 'Linearkombination'.

[47]Ein Merkmal dieser besonderen Aussage ist nach Dörfler (2002), dass sie sich nicht in Form eines Diagramms fassen lässt und somit dem diagrammatischen Schließen nicht zugänglich ist.

durch die Tupelschreibweise im Prinzip in der kanonischen Basis dargestellt sind. Erst bei der Betrachtung von Untervektorräumen, die nicht von Elementen der kanonischen Basis erzeugt werden, wird die Notwendigkeit deutlich, andere Basen zu verwenden.

Die Komplexität der Idee, dass es viele Basen gibt und diese somit austauschbar sind, zeigt sich insbesondere in konkreten Problemsituationen, wo ein Basiswechsel vorzunehmen ist, der neben dem Grundgedanken der verschiedenen Darstellungsformen die zusätzliche Anforderung stellt, das Prinzip der Darstellung bzgl. einer bestimmten Basis in einem Zusammenhang einer umfangreichen, formalen Notation nicht aus dem Blick zu verlieren. Hillel (2000) weist in einer empirischen Studie zum Wechsel einer Matrixdarstellung einer linearen Abbildung vom $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^3$ nach, dass viele Studierende den Darstellungswechsel zwar im Definitions- nicht aber im Bildraum vornehmen. Er vermutet den Grund darin, dass sie die Spalten ihrer Darstellungsmatrix als die Bilder ihrer Basis, statt als deren Darstellung auffassen.

Die aufgezählten Begriffe und ihre Eigenschaften, wie sie in den Sätzen zum Ausdruck kommen, regen die Bildung von Vorstellungen über das Gefüge an, in dem die Elemente eines Vektorraums geordnet sind.

Eine solche Idee, die nicht alle Eigenschaften berücksichtigt, die aber von einem einfachen Ordnungskriterium geprägt ist, ist sicherlich: Die Elemente von $V$ sind die eindeutigen Linearkombinationen einer geeignet ausgewählten Teilmenge ('Basis') von $V$. Diese Darstellung der Elemente von $V$ strukturiert den Raum. Die gewählte Basis ist wie ein Gerüst, das den übrigen Vektoren des Raums Halt gibt, oder wie Grundstoffe, aus denen die anderen Vektoren hergestellt werden. Diese Vorstellung macht jedoch nicht die Vielfalt der Struktur von $V$ sichtbar. Z.B. sind in diesem Rahmen Untervektorräume, die nicht von einer Teilmenge der gewählten Basis erzeugt werden, nur schwer denkbar.

Sehr viel schwerer zu erfassen ist die Idee, dass es viele Basen geben kann, dass jede Basis ein solches Gerüst darstellt, und dass diese Gerüste beliebig austauschbar sind. Diese Vorstellung beinhaltet ein stabiles Gefüge, dem ganz unterschiedliche Bausteine zugrunde liegen können, das aber immer nach demselben Prinzip geordnet ist. Unverrückbare Strukturmerkmale des Vektorraums wie seine Untervektorräume bleiben von der Wahl einer Basis unabhängig. Eine Basis ordnet den Vektorraum auf eine bestimmte Weise, dennoch ist die Struktur des Vektorraumes - die allein durch die Axiome gegeben ist - unabhängig von der Basis. Diese Kombination aus Vielfalt und Einheitlichkeit erscheint paradox. Ich sehe zwei Möglichkeiten für eine mentale Repräsentation dieser Ordnungsprinzipien:

- Die scheinbar widersprüchlichen Ideen des festen und des austausbaren Gerüstes werden neben einander stehen gelassen und bewusst als vereinbar registriert.

- Es findet eine Loslösung von reinen Alltagserfahrungen (wie der Gerüstidee) statt, und formale mathematische Strukturen werden als Bestandteile der internen Repräsentation aufgenommen. Eine solche Vorstellung liegt auf einer hohen Abstraktionsebene.

Die Vorstellung, dass eine bestimmte Basis den Vektorraum erzeugt, wird durch die $n$-Tupel-Darstellung der Elemente von $K^n$ unmittelbar angeregt, auch ohne dass die oben genannten Begriffe und Sätze bekannt sind. Es ist offensichtlich, dass die Elemente des $K^n$ Linearkombinationen aus den $n$ Elementen der kanonischen Basis sind, und dass diese Linearkombinationen eindeutig sind. Die Idee der Auswechselbarkeit dieser ordnenden Basis ist in einem Vektorraum mit einer auf natürliche Weise ausgezeichneten Basis schwer zu erfassen, weil sie die Gleichstellung aller Basen beinhaltet. Trotzdem wird diese Vorstellung auch in dem Beispiel des $K^n$ gebraucht, sobald man sich für Untervektorräume interessiert. Durch die Möglichkeit der Identifizierung eines allgemeinen endlichdimensionalen Vektorraums mit dem $K^n$ über die Wahl einer Basis besteht diese Schwierigkeit auch bei diesem allgemeinen Zugang. Eine Hilfe ist hier vielleicht ein Ansatz, wie er z.B. von Brieskorn (1983) gewählt wird, der Unterstrukturen in einem Vektorraum in einem ersten Zugang ohne Basen beschreibt. Als Hilfsmittel verwendet er Untervektorräume und lineare Abbildungen, die er auf Vektorräumen operieren lässt. Er konstruiert insbesondere eine Reihe von Untervektorräumen eines Vektorraums $V$, indem er Schnittmengen von Untervektorräumen bildet und Bilder und Urbilder von Untervektorräumen unter linearen Abbildungen betrachtet. Zudem betrachtet er Quotientenräume $V/W$, wobei $W$ der Kern einer linearen Abbildung zwischen den $K$-Vektorräumen $V$ und $V'$ ist, und setzt sie über den Homomorphiesatz in Beziehung zum Bild dieser linearen Abbildung.[48] Dieser Zugang liefert keine geschlossene Darstellung. Er gibt jedoch eine erste Perspektive auf Eigenschaften von Vektorräumen 'von oben', die nicht von einzelnen Vektoren ausgehend einen Aufbau des Vektorraums darstellt, sondern die einige Zusammenhänge und Unterstrukturen enthüllt, indem sie das Ganze zergliedert. Anschließend wechselt Brieskorn zwar die Perspektive und führt die oben erwähnten, für Vektorräume spezifischen Begriffe ein, jedoch werden Lernende als erste Vorstellung Modelle bilden, die nicht auf eine einzige Basis als Mittel zum Ordnen beschränkt ist.

Eine besondere Schwierigkeit beim Aufbau von Vorstellungen über das Gefüge[49], welches durch die formale Struktur impliziert wird, ist, dass dieses kein konkret bezeichnetes Objekt ist, und daher seine Existenz zunächst einmal ins Bewusstsein des Lernenden kommen muss. Vorstellungen vom Gefüge von Vektorraumelementen werden durch die Sätze, die aus den Definitionen abgeleitet werden, unterstützt, sind aber zumeist sicherlich 'tacit models' im Sinne Fischbeins[50], die mit den objektiven Eigenschaften von Vektorräumen abgeglichen werden sollten, damit sie produktiv einsetzbar sind. Meist werden sie jedoch nicht thematisiert - möglicherweise wegen der unbestimmten Bedeutung dieses Begriffs: Das Gefüge einer Menge gibt die Beziehungen wider, in denen die Elemente hinsichtlich der relevanten Verknüpfungen zu einander stehen. Das ist eine eher vage Definition der Vokabel 'Gefüge', die vieles offen lässt. Was ist relevant? In welcher Weise werden die Beziehungen repräsentiert? Worin besteht der Unterschied zwischen dem Gefüge und den definierenden Eigenschaften der Menge? Das Nachdenken und Sprechen über 'Strukturen' im umgangssprachlichen Sinn liegt auf Metaebenen: Es liegt einerseits zwischen exakter

[48]Vgl. Brieskorn 1983, S. 216-245.

[49]Die etwas ungebräuchliche Vokabel 'Gefüge' wird hier anstelle der umgangssprachlichen Bedeutung des Wortes 'Struktur' verwendet, welches in dieser Arbeit im rein mathematischen Sinn eingesetzt wird. Die Bezeichnung 'Gefüge' ist ebenso unscharf wie die umgangssprachliche Bedeutung von 'Struktur', hat aber keine fachspezifische Bedeutung.

[50]Vgl. Fischbein (1987), S.122 und 205.

objektiver Mathematik und eher vage formulierten, subjektiven Ideen. Andererseits gehört es in den Bereich der Metakognition, wo das eigene Denken und Handeln bewusst gesteuert wird.

### 2.2.2 Lineare Abbildung

Die Idee, neben einem mathematischen Objekt auch strukturerhaltende Transformationen zwischen diesem Objekt und einem strukturähnlichen Objekt zu betrachten und von diesen Handlungen Rückschlüsse auf das ursprüngliche Objekt zu ziehen, ist eine Grundidee mathematischen Arbeitens und entspricht dem intuitiven Vorgehen funktionalen Denkens. Lineare Abbildungen sind in doppelter Weise in der linearen Algebra von Interesse: Sie respektieren Vektorraumstrukturen und zugleich bilden bestimmte Mengen von linearen Abbildungen ihrerseits Vektorräume. In der Auseinandersetzung mit linearen Abbildungen ist aber sowohl funktionales als auch prädikatives Denken erforderlich: Eine lineare Abbildung ist ein funktionales Instrument, deren Wirkungsweise verstanden werden muss, will man sie gezielt als Werkzeug verwenden. Beim Einsatz einer linearen Abbildung zur Beschreibung der Strukturen von Definitions- oder Zielmenge kann der Fokus jedoch auf prädikative Aspekte gelenkt werden. Auch ist prädikatives Denken bei der Konstruktion von Vektorräumen von linearen Abbildungen hilfreich, wenn nicht sogar erforderlich.

Zum Begriff der linearen Abbildung gehören Grundvorstellungen, die sich auf folgende Merkmale beziehen:

1. Abbildung
2. Respektierung der Vektorraumstruktur durch Linearität
3. Element eines Vektorraums

Zu jeder der drei Eigenschaften gehören eigene Grundvorstellungen. Diese stehen nicht unverbunden nebeneinander, sondern bauen aufeinander auf und führen zu einer komplexen und abstrakten Struktur. Der Abbildungsbegriff ist grundlegend für den Begriff der linearen Abbildung. Das zweite Merkmal baut zusätzlich auf den Begriff des Vektorraums auf, welcher im vorangegangenen Abschnitt besprochen wurde. Der dritte Aspekt wird anhand des Beispiels des Dualraums in einem eigenen Abschnitt betrachtet werden. Aus einer formalen Sicht ist er nicht mehr als ein Beispiel zum Vektorraumbegriff. Die Auffassung von linearen Abbildungen als 'Vektoren' erfordert jedoch kognitiv einen schwierigen Sichtwechsel, der diese Objekte gleichzeitig als Vektoren und als Abbildungen, die auf Vektoren angewendet werden, erfasst.

Die beiden ersten Merkmale einer linearen Abbildung werden in diesem Abschnitt entfaltet. Ausgangspunkt ist das Anliegen, Transformationen zu betrachten, die lineare Strukturen respektieren. Dieses soll zunächst auf der Ebene von Vorstellungen im geometrischen Anschauungsraum erörtert werden. Die vektorraumspezifischen Strukturen des Anschauungsraums sind Geraden und Ebenen. Von einer Transformation, die diese Strukturen respektiert, ist also zu fordern, dass die Bilder von Geraden immer Geraden sind - oder dass alle Punkte, die auf einer Geraden liegen, Bildpunkte erhalten, die ebenfalls auf einer Geraden liegen. Die beiden Bedingungen sind nicht äquivalent: Die zweite erlaubt die Möglichkeit, dass die Dimension des Bildes kleiner ist als die seines Urbildes. Beides sind sinnvolle Forderungen. Die zweite, allgemeinere, führt zu den 'linearen Abbildungen', die erste zu den bijektiven linearen Abbildungen, die als Selbstabbildungen des Raums in sich mit dem Ausdruck 'Automorphismen' eine eigene Bezeichnung erhalten. Die Bedingung, dass Geraden auf Geraden abgebildet werden, impliziert die Eigenschaft, dass die Bilder von parallelen Geraden ebenfalls parallel sind. Strukturmerkmale des Anschauungsraums wie Längen und Winkel sind im Hinblick auf Vektorraumeigenschaften nicht relevant, und es ist nicht notwendig, dass sie erhalten bleiben. So kann die Wirkung einer linearen Abbildung im dreidimensionalen Raum sein, dass das Bild des Einheitswürfels ein Spat - oder ein entsprechendes Gebilde in kleineren Dimensionen - ist, der weder rechte Winkel besitzt noch gleichseitig ist.

Es gibt zahlreiche Beispiele von Abbildungen im geometrischen Anschauungsraum. Hinter manchen Abbildungen stehen einfache Vorstellungen von Handlungen oder von geometrischen Beziehungen, wie etwa eine Projektion, eine Drehung einer Ebene um einen Punkt oder die Spiegelung an einer Geraden. So verwandt sich diese beiden letzten Beispiele vom mathematischen Standpunkt aus sind, da z.B. eine Drehung mit Hilfe von zwei Spiegelungen gegeben werden kann, so verschieden sind die Vorstellungen, die die beiden Begriffe hervorrufen können: Eine Drehung eines Gegenstands verändert seine Lage; eine Spiegelung eines Gegenstands erzeugt scheinbar ein zweites Objekt, sein Spiegelbild, während sie den Gegenstand selbst nicht beeinträchtigt. Während zu der Drehung eher die funktionale Vorstellung passt, dass man an dem Gegenstand etwas tut, ruft die soeben gegebene Beschreibung einer Spiegelung eher die prädikative Vorstellung wach, dass zwischen bestimmten Punkten eine besondere Beziehung besteht. Stellt man sich die Spiegelung allerdings nicht wörtlich als das Aufstellen eines Spiegels vor, sondern veranschaulicht sie durch das Umklappen des Zeichenpapiers an der Spiegelgeraden, so verändert der Spiegelungsgegenstand tatsächlich seine Lage und die Spiegelung wird zu einer Manipulation des Gegenstands ähnlich wie eine Drehung. Diese Spiegelungsvorstellung würde gut zum funktionalen Denken passen.

Die oben gegebene Beschreibung von dem, was die gewünschten Transformationen im Anschauungsraum leisten sollen, kann auf allgemeine Vektorräume übertragen werden durch die Forderung, dass die linearen Abbildungen die Linearitätseigenschaften eines Vektorraums respektieren sollen. Diese Eigenschaften liegen allein in den durch die Vektorraumaxiome gegebenen Regeln für die beiden Operationen begründet. Eine allgemeine Definition des Begriffs 'lineare Abbildung' muss die Idee der Erhaltung der Linearität daher formalisieren, wobei die gegebenen formalen Vektorraumelemente und -operationen als Grundlage dienen. Eine Abbildung, die linear ist, muss gewährleisten, dass die Verknüpfung von zwei Objekten im Definitionsraum derjenigen der zugehörigen Bilder entspricht. Diese Bedingung wird durch zwei formale Gleichungen erfasst:

Definition: Eine Abbildung

$$f : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei $K$-Vektorräumen $V$ und $W$ heißt linear, wenn gilt: Für alle $\lambda \in K$ und alle $v, w \in V$ gilt:

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) \text{ und } f(v + w) = f(v) + f(w)$$

Diese formale Definition bietet gegenüber der inhaltlichen Beschreibung, dass die Strukturen erhalten werden, den Vorteil, dass sie ein operationalisiertes Überprüfungskriterium für eine gegebene Abbildung liefert, anhand dessen man entscheiden kann, ob sie linear ist.

Diese Vorteile beseitigen aber nicht ein grundsätzliches Problem, das mit der Formalisierung des Abbildens verbunden ist: Die oben genannten einfachen, alltäglichen Beispiele von linearen Abbildungen können als ein konkretes Handeln vorgestellt - und sogar ausgeführt - werden. Zur mentalen Erfassung der formalisierten Darstellungen kann man - spätestens wenn diese Abbildungen als Elemente eines Vektorraums verstanden werden - nicht bei dem Gedanken an das Handeln stehen bleiben, sondern muss den Gesamtprozess des Handelns einschließlich seiner durch Definitions- und Zielraum gegebenen Grenzen durch ein mentales Objekt ersetzen. Das kann z.B. durch Verkapselung oder Verdinglichung geschehen.[51] Eine besondere Herausforderung ist dies bei Abbildungen, die in einer Form wie oben charakterisiert sind. Denn Lernende begegnen zwar bereits in der Schule dem Konzept der 'Funktion' und auch verschiedenen Typen von Funktionen, aber ihre Darstellung ist dort anderer Art: Man gibt einen typischen Funktionsterm mit Parametern an, oder man beschreibt die Gemeinsamkeiten der Funktionsgraphen. So wird die Funktionenklasse der quadratischen Funktionen über den Funktionsterm $ax^2 + bx + c$ oder über den Graphentyp 'Parabel' charakterisiert. Der Begriff 'quadratische Funktion' erhält damit eine geschlossene Darstellung. Bei der Definition der linearen Abbildung fehlen sowohl ein Funktionsterm als auch ein Funktionsgraph. Stattdessen geben die beiden Gleichungen ein Verfahren an die Hand, mit dem man bei direkter Vorgabe der Bilder einer Auswahl von Vektoren auf die Bilder einiger weiterer Vektoren schließen kann. Die Tatsache, dass hier keine direkte Beziehung zwischen den Elementen der Definitionsmenge und ihren Bildern gegeben ist, ist insbesondere für Menschen mit einer Präferenz für prädikatives Denken ein Problem. Eine weitere Formalisierung begegnet diesem Hindernis: Eine passende Auswahl der Vektoren, deren Bilder explizit angegeben werden, nämlich als Vektoren einer Basis, führt dazu, dass über sie auf alle Bilder geschlossen werden kann. Aus dieser Beobachtung resultiert nun ein weiterer Formalisierungsschritt, in dem eine lineare Abbildung bzgl. einer gegebenen Basis in Form einer informationsdichten Matrix dargestellt wird. Mit dieser Repräsentation ist ein direktes Rechenverfahren zur Bestimmung der Bilder von Vektoren verbunden, welche in der betreffenden Basis dargestellt sind: Ist $A$ die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung bzgl. vorgegebenen Basen, so ist das

[51] Für eine ausführliche Darstellung der kognitiven Schwierigkeiten, die das Verkapseln mit sich bringt, siehe Dubinsky (1991); für eine Erörterung der Verdinglichung und ihrer kognitiven Anforderungen siehe z.B. Sfard (1991).

Bild eines allgemeinen Vektors $v$ der Vektor $Av$.

Die genannte Formalisierung der Idee strukturerhaltender Abbildungen führt zu zahlreichen weiteren Erkenntnissen über lineare Abbildungen und über Vektorräume. Eine erste bereits durch die Tätigkeit des Formalisierens initiierte Erkenntnis ist die Strukturierung eines Vektorraums mit Hilfe von Basen. Aber auf der Ebene der formalen Darstellungen gibt es noch eine Reihe weiterer Folgerungen, die ihrerseits in erweiterte Vorstellungen von Vektorraumstrukturen übertragen werden können.

Auf der formalen Ebene eröffnet die Möglichkeit der Darstellung einer linearen Abbildung mit Hilfe einer Basis eine Fülle von Zusammenhängen, die einen Transfer von Erkenntnissen zwischen verschiedenen Themen der linearen Algebra anbieten. So führen Überlegungen zur Klassifizierung von linearen Abbildungen mit Hilfe von Matrizen zu Fragen nach den Auswirkungen des Basiswechsels, da jede Matrixdarstellung einer Abbildung von der zu Grunde gelegten Basis abhängig ist. Damit stellt sich die Frage, welche Eigenschaften von Matrizen beim Wechsel einer Basis nicht verletzt werden. Zu diesen Eigenschaften gehört insbesondere der Rang einer Darstellungsmatrix, i.e. die Dimension des Bildraums der repräsentierten Abbildung, und ebenso die Dimension des Kerns dieser Abbildung. Hier fließen die Begriffe der Dimension und des Untervektorraums in die Untersuchung ein. Ein wichtiges Verfahren zur Bestimmung von Kern und Bild einer linearen Abbildung ist das Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems mit Hilfe eines Algorithmus, wie z.B. des Gaußalgorithmus. Ein solches Gleichungssystem kann neben einer linearen Abbildung noch andere innermathematische Bedeutungen repräsentieren. So kann z.B. die Anwendung des Gaußalgorithmus auf die Zeilen der Matrix Auskunft über die Abhängigkeitsbeziehungen der Spaltenvektoren der Matrix und über das lineare Erzeugnis der Zeilenvektoren geben. Kognitive Werkzeuge, die bei solchen Betrachtungen von linearen Abbildungen gebraucht werden, sind vor allem Formalisierung, Transfer und Sichtwechsel, die in vielfacher Hinsicht zugleich einzusetzen sind und viele Eigenschaften von Vektorräumen und linearen Abbildungen mit einander verbinden.

Eine besondere Art von linearen Abbildungen sind die oben bereits erwähnten Automorphismen, also die strukturerhaltenden Selbstabbildungen, eines Vektorraums. Sie sind diejenigen linearen Abbildungen, welche einen Basiswechsel beschreiben, denn sie bilden jede Basis des Vektorraums wiederum auf eine Basis ab: Wählt man eine Basis als Strukturierungshilfe eines Vektorraums aus und wendet einen Automorphismus auf den Vektorraum an, so kommt dies dem Wechsel des Bezugssystems gleich, der die erste Basis durch ihre Bilder ersetzt. Diese Wirkung eines Automorphismus ist mental als ein Sichtwechsel zu vollziehen, welcher erfordert, die Strukturierung der Vorstellung von dem Vektorraum neu vorzunehmen ohne dabei die Grundprinzipien des Aufbaus zu verändern. Wir betrachten ein Beispiel, in dem der Anschauungsraum mit Hilfe von Vektoren des $\mathbb{R}^3$ dargestellt wird. Die Koordinaten eines Punktes bezeichnen den Vektor, der die Translation des Ursprungs in den betreffenden Punkt beschreibt. $e_1, e_2, e_3$ bezeichnet dabei die Standardbasis im

$\mathbb{R}^3$. Die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rlll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & e_1 & \longmapsto & a_1 := 2e_1 \\ & e_2 & \longmapsto & a_2 := e_1 + e_2 \\ & e_3 & \longmapsto & a_3 := e_2 + e_3 \end{array}$$

ist ein Automorphismus, der den Einheitswürfel auf einen Spat abbildet, dessen Seiten den Richtungen und Längen der Vektoren $a_1, a_2, a_3$ entsprechen, nämlich auf den Spat mit den (bzgl. dem Standardkoordinatensystem gegebenen) Eckpunkten

$$(0\ 0\ 0), (2\ 0\ 0), (1\ 1\ 0), (0\ 1\ 1), (3\ 1\ 0), (1\ 2\ 1), (2\ 1\ 1), (3\ 2\ 1).$$

Dieser Spat entsteht quasi als eine Deformierung des Einheitswürfels. Er unterscheidet sich in mancher Hinsicht strukturell vom Einheitswürfel. Im Hinblick auf die in einem Vektorraum relevanten Strukturen sind beide jedoch austauschbar. Fasst man den Einheitswürfel als ursprüngliches Bezugssystem und den Bildspat als neues Bezugssystem auf, bzgl. dem alle Elemente des Vektorraums repräsentiert werden, so gilt, dass die Art und Weise, wie diese Repräsentation erfolgt, nach den gleichen Bauprinzipien erfolgt, nämlich durch eine Linearkombination aus der jeweiligen Basis. Der Raum $\mathbb{R}^3$ wird aber insofern umstrukturiert, als die Koordinatendarstellungen der einzelnen Punkte andere sind. So liegt die Ecke des Bildspats mit den Koordinaten (3 2 1) bzgl. der Standardbasis außerhalb des Einheitswürfels. Bzgl. der Basis $(a_1, a_2, a_3)$ hat sie die Koordinaten (1 1 1).

Wie im Abschnitt über den Vektorraumbegriff dargelegt, ist es nicht leicht, die Vielfalt der Strukturierungsmöglichkeiten bei dennoch gleichbleibender Struktur in eine interne Repräsentation aufzunehmen. Möglicherweise kann ein Automorphismus dazu helfen, dies zu vollziehen, denn er gibt eine Anleitung über welchen Weg man von der ersten zur zweiten Strukturierung gelangen kann. Für Menschen mit einer Präferenz für funktionales Denken ist ein Übergang von einer strukturierenden Basis zur anderen vermutlich von besonderem Interesse. Kognitiv ist dabei eine Umkehrung der Formalisierung zu leisten, welche die formale Beschreibung eines Vorgangs auf der Darstellungsebene in einen kognitiven Vorgang uminterpretiert.

Eine Verallgemeinerung der Automorphismen sind die Isomorphismen zwischen Vektorräumen. Sie identifizieren Strukturen zweier Vektorräume, welche in ihren Objekten sehr unterschiedlich sein können, indem sie eine ganz bestimmte Eins-zu-Eins-Beziehung zwischen den Elementen der beiden Räume herstellen. Damit berücksichtigen sie nicht nur die allgemeinen Vektorraumstrukturen sondern zusätzlich die Dimension des Definitionsraums. Sie ermöglichen die Übertragung aller Strukturfragen von einem $n-$dimensionalen Vektorraum in den $K^n$.

Das Beispiel der linearen Abbildungen zeigt, wie sich Vorstellung und Darstellung in der Entwicklung mathematischer Begriffe wechselseitig ergänzen und anregen können. Übergänge zwischen den beiden Repräsentationsformen sind Formalisierungen von mentalen Ideen und Deutungen von formalen Zeichensystemen. Die beiden verschiedenen Ebenen mit ihren sehr unterschiedlichen Vorgehensweisen und die Notwendigkeit des gegenseitigen Bezugs trägt wesentlich zu der Reichhaltigkeit, aber damit auch Komplexität und Schwierigkeit der Thematik bei.

Neben dem Bezug zwischen inneren und äußeren Repräsentationsebenen findet auch noch ein Wechselspiel im mentalen Aufbau von zwei grundlegenden Begriffen statt, die sich gegenseitig stützen: Die zentrale Eigenschaft von linearen Abbildungen, die ihr Wesen und ihre große Bedeutung als Werkzeuge ausmacht, ist die Tatsache, dass sie bestimmte, nämlich lineare, Strukturen erhalten bzw. übertragen. Um diese Vorstellung mental aufzubauen, ist es notwendig, nicht nur die formale Definition von Vektorräumen zu verstehen, sondern auch ein inneres Bild ihrer Strukturen zu haben, auf das die Vorstellung der Strukturübertragung angewendet werden kann. Daher gilt auch umgekehrt, dass die Beschäftigung mit dem Begriff der linearen Abbildung und der Versuch, eine Vorstellung für ihn aufzubauen, dazu herausfordert, sich Vektorraumstrukturen bewusst zu machen. Die Vorstellungen von Eigenschaften von Vektorräumen und linearen Abbildungen werden also in gegenseitiger Wechselwirkung entwickelt und vertieft.[52] Darüber hinaus gibt die Definition der linearen Abbildung aber auch noch an, in welcher Weise sie lineare Strukturen überträgt, und somit, welche Zusammenhänge grundsätzlich erhalten bleiben und welche etwa von der jeweiligen linearen Abbildung abhängig sind. Die Betrachtung von linearen Abbildungen hat ein ganzes Netz von Zusammenhängen und Wechselwirkungen zur Folge, welche Eigenschaften des Definitions- und des Zielraums und bestimmter Teilräume und Verbindungen zwischen ihnen sichtbar machen.

### 2.2.3 Dualraum

Der Dualraum $V^*$ eines $K-$Vektorraums $V$ ist der Vektorraum der linearen Abbildungen $V \longrightarrow K$. Der Begriff des Dualraums basiert auf zwei Grundvorstellungen: Zunächst ist der Dualraum $V^*$ eines Vektorraums $V$ die Menge der linearen Abbildungen von $V$ in seinen Körper. Nun ist der Körper $K$, in dem die Bilder der hier zu betrachtenden linearen Abbildungen liegen, als eindimensionaler Vektorraum ein besonders einfacher Spezialfall eines Vektorraums. Dies hat den Nachteil, dass die Strukturmerkmale von Vektorräumen auf ihn zwar zutreffen, dass sie aber nicht in prototypischer Form an ihm erkennbar sind. Das macht die linearen Abbildungen $V \longrightarrow K$ für einen Lernenden schwerer zu begreifen als lineare Abbildungen allgemeinen Typs, weil er sich hier weniger an Anschauungen oder äußerlich vertrauten symbolischen Darstellungsformen orientieren kann. Stattdessen muss er die allgemeinen Vektorraumstrukturen in einer Menge wiedererkennen, in der zugleich andere Strukturen eine wichtige Rolle spielen, denn $K$ tritt bei diesen linearen Abbildungen sowohl als Menge der Skalare wie als Menge von Vektoren auf.

Sodann ist der Dualraum ein Vektorraum. Wenn der Vektorraum $V$ endlichdimensional ist, ist sein Dualraum $V^*$ zu ihm isomorph und kann unter Umständen sogar mit ihm identifiziert werden, wenn es nämlich in $V$ eine kanonische Basis gibt. Andernfalls gibt es unter vielen Isomorphismen zwischen den beiden Räumen keinen ausgezeichneten, der die Art der Identifizierung kanonisch festlegt. Diese beiden Grundvorstellungen stellen nicht zwei gleichwertige, alternative Zugänge zum Begriff des Dualraums dar, sondern sind zwei Wesensmerkmale, von denen das zweite nach Erfassen des ersten entdeckt werden muss.

[52] Gemäß Steinbring (2000) kann man sagen, die Vorstellungen über die Begriffe des Vektorraums und der linearen Abbildung dienen abwechselnd als Referenzkontexte für einander.

Der Begriff des Dualraums ist aus zwei ihrerseits abstrakten und gehaltvollen und mit einander verwobenen Begriffen konstruiert und stellt eine hohe Abstraktionsstufe dar. Die nächste Anforderung an das Abstraktionsvermögen von Lernenden ist, diese beiden Eigenschaften mit einander zu verbinden, denn der Dualraum ist sowohl eine Menge von linearen Abbildungen als auch ein Vektorraum. Er muss einen Sichtwechsel vornehmen, der die ohnehin schon abstrakten Objekte 'lineare Abbildungen' aufgrund einer Formalisierung von beobachteten Eigenschaften als 'Vektoren' versteht: Diese Abbildungen können addiert und mit skalaren Vielfachen versehen werden, und mit diesen beiden Operationen bilden die Elemente des $V^*$ einen $K-$Vektorraum. Das bedeutet zunächst nur, dass diese Menge die formalen Bedingungen eines Vektorraums erfüllt. Die Folge ist, dass dieser Raum alle Eigenschaften eines Vektorraums besitzt und seine Elemente, die linearen Abbildungen, nun als 'Vektoren' und mit allen Möglichkeiten von Vektoren in Erscheinung treten. Diese Argumentation ist in ihren einzelnen Behauptungen leicht nachzuvollziehen, aber die Gesamtaussage, dass die linearen Abbildungen des Dualraums Vektoren sind, scheint ihrem spezifischen Charakter geradezu entgegen zu stehen: Sie bilden Vektoren (nämlich aus dem Vektorraum $V$) ab, unterscheiden sich von diesen also wesensmäßig. Diese Beobachtung ist zutreffend, denn es handelt sich bei diesem Vergleich um Vektoren, die Elemente ganz verschiedener Vektorräume sind. Schließlich ist aber noch ein anderer Sichtwechsel möglich, welcher die soeben getroffene Feststellung wieder in Frage stellt: Die beiden Vektorräume $V$ und $V^*$ sind isomorph zu einander, und falls $V = K^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, können die beiden Vektorräume über die kanonische Basis sogar mit einander identifiziert werden. Stellt man die Elemente des Dualraums als Matrizen bzgl. der kanonischen Basis dar, so sind es $n$-Tupel. Sie unterscheiden sich von den Elementen von $V$ allenfalls dadurch, dass diese als Spalten-, jene als Zeilenvektoren notiert werden.

Wenn der Dualraum ein Vektorraum ist, so liegt die Frage nach einer Basis nahe. Der Umgang mit einer Basis aus Abbildungen stellt eine besondere Anforderung an den Einsatz von kognitiven Werkzeugen, da er mehrere Abstraktionsebenen zu gleicher Zeit berücksichtigen und dennoch auseinander halten muss. Lineare Abbildungen $V \longrightarrow K$ werden üblicherweise definiert, indem ihre Bilder einer Basis von $V$ angegeben werden. Eine Basis der Menge dieser linearen Abbildungen ist von der gewählten Basis von $V$ jedoch grundverschieden.

Zum Thema des Dualraums gibt es insofern verschiedene Zugänge, als die Reihenfolge und die Art der Einführung der einzelnen Konzepte, auf die der Dualraumbegriff aufbaut, viele Möglichkeiten offen lassen. Sind diese bereitgestellt, so gibt es die oben beschriebene Möglichkeit eines Zugangs zum Dualraum, die entweder in ganz allgemeiner Form oder zunächst an einem konkreten Vektorraum erfolgen kann, z.B. am $\mathbb{R}^n$. Letzteres bietet die Möglichkeit, den Sichtwechsel von dem Charakter der linearen Abbildungen hin zu dem Charakter von Vektoren mit Hilfe von Matrizendarstellungen zu vollziehen. Betrachtet man diese Matrizen als reine Schreibfiguren mit bestimmten, den Lernenden bereits vertrauten Operationen, die mit ihnen durchgeführt werden dürfen, so erleichtert dies unter Umständen den Sichtwechsel, weil der Fokus vom Charakter der Objekte, für die die $1 \times n -$ Matrizen stehen, abgelenkt ist.

Eine anderer Zugang knüpft an Beobachtungen von linearen Gleichungssystemen und der Dualität der Menge der Gleichungen und der Menge der Lösungen an. Diese führt unmittelbar zu der Idee der Austauschbarkeit der Fragestellungen nach der Lösungsmenge eines gegebenen linearen Gleichungssystems und der Menge der linearen Gleichungen, die von einer gegebenen Lösungsmenge erfüllt sein müssen. In dieser Überlegung werden die Rollen der Lösungstupel und der Koeffiziententupel der linearen Gleichungen vertauscht. Dabei werden aus den ursprünglichen Koeffiziententupeln, die als Matrizen aufgefasst als lineare Abbildungen auftraten, nun die Lösungen eines linearen Gleichungssystems und aus den ursprünglichen Vektoren, nämlich den Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems, nun lineare Abbildungen. Konkret sieht das so aus: In einer linearen Gleichung

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$$

kann man die linke Seite als Anwendung einer linearen Abbildung vom $K^n$ nach $K$ mit Matrixdarstellung

$$a = (a_1, \ldots, a_n)$$

auf den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

verstehen. Die Rollen von $a$ und $x$ sind vertauschbar wegen der Gleichheit

$$ax = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = x_1a_1 + \ldots + x_na_n = x^{tr}a^{tr}$$

Jedes Paar $(a, x)$ aus einem Koeffizientenvektor $a$ der Gleichungen eines linearen Gleichungssystems und einem Basisvektor $x$ des Lösungsraums erfüllt diese Beziehung. Die Dualität von Gleichungen und Lösungen bedeutet, dass beide Kategorien mit denselben Begrifflichkeiten beschrieben werden können. Dazu gehören z.B. die lineare Unabhängigkeit, Erzeugende, die Dimension, die jeweils sowohl auf die Lösungsmenge wie auf die Gleichungen (repräsentiert durch die Zeilenvektoren einer Matrix) eines homgenen linearen Gleichungssystems angewendet werden können.[53] Eine Verallgemeinerung der Beobachtungen in diesem Dualitätsproblem führt zum Konzept des Dualraums, der nicht in den Diagrammen der linearen Gleichungen verhaftet ist, sondern das allgemeinere Konzept der linearen Abbildung verwendet, welches koordinatenfreie Aussagen ermöglicht.

### 2.2.4 Faktorstrukturen

Der Faktorraum eines Vektorraums $V$ ist ein weiteres Beispiel für die Konstruktion eines Vektorraums aus einem bereits gegebenen Vektorraum $V$: Es wird eine lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ gewählt, die nicht injektiv ist. Nun sollen Elemente von $V$, die dasselbe Bild haben, als 'im Wesentlichen' gleich betrachtet, sollen also mit einander identifiziert werden. Dazu wird die neue Menge $V/\mathrm{kern}\ \varphi$ geschaffen als eine Menge von Teilmengen von $V$, und zwar bilden jeweils alle Elemente von $V$ mit gleichem Bild unter $\varphi$ eine solche Teilmenge. Nun werden noch geeignete Verknüpfungen für diese neue Menge definiert, so dass sie ein Vektorraum wird und aus der

[53] Euler sprach z.B. bereits von der Abhängigkeit von Gleichungen, verwendete hier aber einen anderen Ausdruck als für die Abhängigkeit von Lösungen. Vgl. Dorier (2000), S. 6-11.

ursprünglichen linearen Abbildung $\varphi$ eine lineare Abbildung $\overline{\varphi} : V/\text{kern } \varphi \longrightarrow W$ definiert werden kann, welche 'im Wesentlichen' dasselbe tut wie $\varphi$. Die Ausführung dieser Strategie erfordert noch einige technische Details, die zu beachten sind, damit die Konstruktion funktioniert. Eine Variation des angeführten Beispiels ist bei gegebenen $K$-Vektorräumen $V, W$ mit $\dim V \geq \dim W$ die gezielte Konstruktion einer linearen Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$, so dass $W \cong V/\text{kern } \varphi$.

### Mengen von Restklasssen

Die Konstruktion eines Faktorraums beinhaltet eine Fülle von Abstraktionen hohen Schwierigkeitsgrades. Die Grundprinzipien sollen anhand einer einfacheren Faktorstruktur besprochen werden, welche Anfängern einen konkreten Zugang erlaubt, nämlich die Gruppe von Restklassen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für eine natürliche Zahl $n$.

Mengen von Restklassen sind nicht nur ein wegweisendes Beispiel für die Konstruktion von Faktorstrukturen gewesen, sondern spielen aus strukturtheoretischer Sicht in vieler Hinsicht eine große Rolle. Zusammen mit der Verknüpfung '+' sind sie zunächst Beispiele für endliche Gruppen einfacher Bauart, nämlich für zyklische Gruppen, und eignen sich daher zur Einführung in den Gruppenbegriff. In ihnen gelten manche Eigenschaften, die Lernenden von den reellen Zahlen her vertraut sind, andere Eigenschaften, die Lernenden selbstverständlich zu sein scheinen, gelten jedoch nicht. So gibt es z.B. keine lineare Ordnung in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Darüberhinaus sind Mengen von Restklassen $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Ringe, für Primzahlen $n$ sogar Körper.

Die Konstruktion von Mengen von Restklassen gibt in verschiedener Hinsicht ein Beispiel für Strategien in der Mathematik zum lokalen Ordnen: Zunächst ist es eine Strategie, Objekte zusammen zu fassen, die bezüglich bestimmten Fragen gleiche Eigenschaften haben. Im Falle von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist dies die Eigenschaft, beim Teilen durch die Zahl $n$ denselben Rest (zwischen 0 und $n-1$) zu lassen, welche weitere gemeinsame Eigenschaften zur Folge hat, etwa die Eigenschaft, dass der Rest, den die Summe aus zwei Zahlen beim Teilen durch $n$ lässt, invariant bzgl. der Wahl eines Summanden ist, solange sein Rest nicht verändert wird. Das gleichzeitige Betrachten der ganzen Zahlen, welche denselben Rest beim Teilen durch $n$ lassen, kann eine Vereinfachung der Gesamtsituation sein. Z.B. bedeutet es einen Übergang von einer unendlichen zu einer endlichen Menge. Dieses gleichzeitige Betrachten erfordert einen gedanklichen Abstraktionsschritt, in dem eine neue Sichtweise auf die ganzen Zahlen vorzunehmen ist und in dem neue Objekte zu konstruieren und zu akzeptieren sind. Eine weitere in der Mathematik weit verbreitete Strategie kann anhand der Restklassenbildung verstanden werden: Die aus $\mathbb{Z}$ konstruierten Mengen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 'erben' viele Eigenschaften von $\mathbb{Z}$. Indem geeignete Verknüpfungen auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definiert werden, kann erreicht werden, dass viele Eigenschaften dieser Verknüpfungen auf Eigenschaften der Verknüpfungen in $\mathbb{Z}$ zurückgeführt werden können. Die Addition, die in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definiert wird, ist für Lernende naheliegend und bedarf nicht der Rechtfertigung. Aber die Beobachtung, wie Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ übertragen werden, kann zu Einblicken in übergeordnete Strategien führen, etwa welche Art von neuen Objekten sinnvoll und nützlich zu konstruieren ist.

Zwei Grundvorstellungen von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, welche unterschiedliche Charakteristika dieser Gruppe betonen, sollen hier untersucht werden. Die erste Sichtweise erhält hier die Bezeichnung $R_1$. Sie stellt das Wesen der Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in den Vordergrund: Die Menge der Restklassen modulo $n$ ist eine Menge von Mengen. Sie begründet sich aus der Tatsache, dass die Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ neue Konstrukte sind, deren Wesen und Bedeutung aus den Elementen von $\mathbb{Z}$ abgeleitet werden. Die zweite Sichtweise - $R_2$ - fokusiert die Verknüpfung in der Menge $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ und ihre Eigenschaften, welche $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ zu einer Gruppe machen. Dieser Fokus wird erleichtert, wenn von allen für diese Eigenschaften unwesentlichen Charakteristika abgesehen wird, und die Menge als Menge von $n$ formalen Symbolen mit einer formalen Addition angesehen wird. Damit begibt man sich auf die Ebene der 'äußeren' Beziehungen eines Elements zu den anderen. Diese Perspektive ermöglicht die Entdeckung und Beschreibung von Gruppenstrukturen in dieser Menge, da ihre Betrachtungsweise der Ebene entspricht, auf der die Strukturen zu finden sind.

Zwei formale Beschreibungen, die je einer dieser beiden Grundvorstellungen Rechnung tragen, sind Folgende:

$R_1$**:** $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ ist eine Menge von Teilmengen von $\mathbb{Z}$, deren Addition auf $\mathbb{Z}$ zurückgeführt wird:

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{i+n\mathbb{Z} \mid i \in \mathbb{Z}\}$ und für $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt: $(i+n\mathbb{Z})+(j+n\mathbb{Z}) = (i+j)+n\mathbb{Z}$.

$R_2$**:** $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ ist eine Menge mit $n$ Elementen $A_1, ..., A_n$, deren Verknüpfung formal, z.B. über eine Verknüpfungstafel, definiert wird. Für $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ z.B.:

| $+$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
| $A_2$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_1$ |
| $A_3$ | $A_3$ | $A_1$ | $A_2$ |

Beide Grundvorstellungen bergen epistemologische Hindernisse, die der Lernende überwinden muss.

Versteht man $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ im Sinne von $R_1$ als Menge von Mengen, so braucht man die kognitiven Werkzeuge des Sichtwechsels und der Konstruktion neuer Objekte. Ein Sichtwechsel ist vorzunehmen, weil die Objekte, welche in $\mathbb{Z}$ die Eigenschaft haben, Teilmengen zu sein, in der neuen Menge Elemente sind. In den Augen des Betrachters 'ändert' sich ihr Charakter. Außerdem ändert sich aber auch ihre Rolle. Während diese Teilmengen in $\mathbb{Z}$ vom handelnden Mathematiker als Werkzeuge verwendet werden, um mit ihrer Hilfe die ganzen Zahlen zu ordnen, werden sie in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ zu eigenständigen Objekten, die ihrerseits beschrieben werden. Und nicht nur das, sie werden zu Objekten, die den ganzen Zahlen, aus denen sie konstruiert sind, gleichgestellt sind in dem Sinne, dass analoge Aktivitäten mit ihnen angestellt werden. Somit handelt man auf der höheren Abstraktionsebene der Restklassen als ob man sich auf der niedrigeren Ebene der ganzen Zahlen befände. In dem zweifachen Sinne des Charakters und der Aufgabe spielen die Restklassen in dem neuen Kontext eine neue Rolle. Sie 'widerspricht' dem in der Schulzeit nachdrücklich gelernten Wissen, dass Elemente und Teilmengen ganz verschiedene Dinge sind, und ist nicht nur zur Kenntnis zu nehmen, sondern sie wird zugleich mit einer Fülle von Beziehungen und Eigenschaften versehen: Die Mengen $i + n\mathbb{Z}$ werden wie Elemente behandelt, indem für sie eine formale Addition definiert wird, und nachgewiesen wird, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ die formalen Eigenschaften einer Gruppe erfüllt. Bleibt der

Schwerpunkt der Betrachtungsweise bei dem Mengencharakteristikum der Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, so wird die neue Operation sehr komplex und überfordert schnell die Vorstellungskraft, etwa wenn allgemeine Sätze über Gruppen auf das neue Objekt bezogen werden, oder wenn Homomorphismen auf dieser Gruppe definiert werden. Zur Verdeutlichung betrachten wir, was zu tun ist, wenn man nachweisen will, dass eine vorgegebene Abbildung $f$ :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Dabei stellen wir uns auf den Standpunkt, dass wir anstelle der $n$ Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ immer die Elemente von $i + n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ im Sinn haben, d.h., dass wir die Addition nur über Repäsentanten denken. Das Diagramm für die Abbildung wird also erweitert gedacht als

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{array}$$

und alle Aktivitäten in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ werden von $\mathbb{Z}$ aus gedeutet: Wir nehmen nun zwei beliebige Elemente $A, B$ von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Um zu zeigen, dass $f(A + B) = f(A) + f(B)$ ist, nehmen wir zwei Elemente $a \in A, b \in B$, bilden ihre Summe $a + b = c$ und stellen fest, dass $c$ in einer Menge $C \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ liegt. Des Weiteren betrachten wir die Bilder $X := f(A)$, $Y := f(B)$ und $Z := f(C)$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Aus $X$ und $Y$ wählen wir je ein Element $x \in X$ und $y \in Y$. Nun ist zu zeigen, dass $x + y \in Z$. Das Beispiel zeigt, dass eine solche Betrachtungsweise durchaus möglich ist, aber es verdeutlicht ebenso, dass sie Gedankengänge erfordert, welche um ein Vielfaches komplexer sind als die Beziehung $f(A + B) = f(A) + f(B)$.

Das Zusammenfassen von Elementen einer Menge in Äquivalenzklassen tritt in der Schule in verschiedenen Kontexten auf und erfordert kein hohes Abstraktionsniveau. Zwei Beispiele sollen das verdeutlichen: Zum einen werden in der siebten Klasse Äquivalenzklassen von kongruenten Dreiecken betrachtet. Sie scheinen keinerlei Schwierigkeiten zu bereiten. Im Gegensatz dazu werden Vektoren als Äquivalenzklassen von gleichgerichteten und gleich langen Pfeilen in der Oberstufe von vielen Schülern nicht verstanden. Ein entscheidender Unterschied ist Folgender: Die Schüler identifizieren zwei Dreiecke gleicher Form und Größe mit einander, da ihre Vorstellung von einem Dreieck nicht an dem Ort, also dem einzelnen gezeichneten Dreieck, hängt, sondern ein Ding ist, welches man in die Hand nehmen und irgendwo hinlegen kann. Sie empfinden den Begriff "kongruent" als eine Spitzfindigkeit des Mathematikers, welche viele nicht von ihrer Vorstellung von "gleich" zu unterscheiden wissen. Bei den Pfeilen ist es umgekehrt. Hier ist in der Vorstellung der Schüler das charakteristische Merkmal eines Pfeils der Ort, an dem er sich befindet, nämlich von wo nach wo er zeigt. (Das ist zutreffend bei einem Pfeil in einem Schaubild oder auch bei einem logischen Folgepfeil.) Diese Vorstellung erklärt die Schwierigkeit, bestimmte Pfeile mit einander zu identifizieren: Bereits vorhandene Vorstellungen müssen revidiert werden. Nach Bauersfeld (1983) stellt dies eine hohe Hürde dar. Ein anderer Grund für die Schwierigkeit, die Pfeile zu identifizieren, kann darin liegen, dass im Unterricht die Klassenbildung zu Mengen von Pfeilen thematisiert wird. Möglicherweise könnte das Problem der Klassenbildung vermieden werden, indem die Pfeile als bloße Notation für die entsprechende Translation eingeführt werden. Auch im Beispiel der Dreiecke ist es nur notwendig, die Identifizierung der Äquivalenzklassenelemente mental vorzunehmen ohne die Klassen selbst zu konstruieren. Der Ausdruck 'ein gleichseitiges Dreieck mit den Seitenlängen 1 cm' steht dabei stellvertretend für ein beliebiges Dreieck mit dieser Eigenschaft, er bezeichnet jedoch nicht die Menge dieser Dreiecke. Im Gegensatz zu diesen Beispielen aus der Schule zeigt das oben erläuterte Problem die Notwendigkeit, mit Restklassen als Objekten für sich umzugehen.

Die erwähnten mentalen Aktivitäten, die zum Verständnis der Restklassenmengen geleistet werden müssen, kann man nicht allein als Sichtwechsel klassifizieren. Die Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ selbst ist ein neues Objekt, das zuvor nie betrachtet worden ist. Ihre Elemente sind vordergründig keine neuen Objekte, denn sie sind Teilmengen von $\mathbb{Z}$, die nach einfachen Kriterien zusammengestellt sind: Das Betrachten des Restes, der beim Teilen durch eine natürliche Zahl $n$ bleibt, wird in Deutschland spätestens im fünften Schuljahr im Zusammenhang mit Teilbarkeitsregeln thematisiert. Dennoch stellen diese Elemente das eigentliche epistemologische Hindernis bei der Konstruktion der Menge von Restklassen dar. Das Ordnen der ganzen Zahlen nach Resten ist eine Abstraktion, die der intensionalen Abstraktion nach Bauer (1978) entspricht: Einige Objekte werden nur hinsichtlich bestimmter gemeinsamer Eigenschaften betrachtet, von ihren anderen Eigenschaften wird 'abstrahiert'. Das Bilden einer Menge von Restklassen ist eine extensionale Abstraktion, bei der nur noch die Unterschiede hinsichtlich des Restes beim Teilen durch $n$ berücksichtigt werden. Das Arbeiten mit einer solchen Menge erfordert einen weiteren Abstraktionsschritt, der auf die erste Abstraktion aufbaut: Die Teilmengen, deren Funktion das Ordnen der ganzen Zahlen nach dem gegebenen Abstraktionskriterium ist, werden nicht mehr als Ordnungshilfen, sondern als Objekte eigenen Rechts behandelt. In der Art seiner kognitiven Anforderungen kommt dieser Sichtwechsel der Konstruktion gänzlich neuartiger Objekte gleich.[54]

Die Grundvorstellung $R_2$, die $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ nicht als Menge von Mengen, sondern als Menge von $n$ Symbolen mit einer formalen Addition versteht, bringt Schwierigkeiten anderer Art mit sich. Zunächst kann hier die Tatsache, dass die formalen Symbole ohne Bedeutung sind, problematisch sein. Dies gilt sowohl für die Namen der Elemente als auch für das Additionszeichen. Die unbeantwortete Frage, ob solche Dinge, die mit rein formalen Symbolen bezeichnet werden, überhaupt 'existieren' bzw. die intuitive Verneinung dieser Frage stellt ein epistemologisches Hindernis dar. Nun könnte man anstelle von $A_1, ..., A_n$ die Symbole $\overline{0}, ..., \overline{(n-1)}$ verwenden und die Addition statt über eine Verknüpfungstafel über eine Rechenanweisung definieren. Dann sind die Symbole $\overline{0}, ..., \overline{(n-1)}$ zwar neuartig, jedoch nicht gänzlich ohne Bedeutung, da sie einen engen Zusammenhang zu den entsprechenden natürlichen Zahlen nahelegen, und das Symbol '+' hat zwar eine neue Bedeutung, diese steht aber im Zusammenhang zu dem vertrauten + für die ganzen Zahlen. An dieser Grundvorstellung ist jedoch entscheidend, dass die Zeichen $\overline{0}, ..., \overline{(n-1)}$ allein durch die Tatsache, dass sie als Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ angesehen werden, und durch

[54] Dubinsky et al. (1994) gehen insbesondere auf die Schwierigkeiten ein, Studierenden die Idee von Mengen als Objekte nahezubringen.

die Addition, die eigens für sie definiert wird, ihre Bedeutung zugewiesen bekommen. Nur insofern, als bei der Definition der Addition die zu einem Summanden gehörige natürliche Zahl eine Rolle spielt, besteht ein Zusammenhang des neuen Symbols mit dieser Zahl. Sie soll aber als neues Objekt eigenen Rechts betrachtet werden. Entsprechend ist die Struktur der Menge $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ allein aus den gegebenen Eigenschaften der Addition zu erschließen. Aus der Tatsache, dass die Addition von der Addition in $\mathbb{Z}$ abgeleitet wird, ergibt sich die ebenfalls epistemologisch begründete Schwierigkeit, vorhandene Bedeutung in den Symbolen zu ignorieren, jedenfalls soweit sie das Wesen des bezeichneten Objekts bzw. der Verknüpfung betreffen. Beide Schwierigkeiten, sowohl das Ignorieren von vorhandener Bedeutung, als auch das Fehlen von Bedeutung, gehören zur Abstraktion durch Formalisierung. Ebenfalls zur Formalisierung gehört die Beschreibung der Struktur der neuen Menge: Formale Symbole mit einer formalen Addition erfüllen die formalen Eigenschaften einer Gruppe.

Die Stärken dieses Modells liegen darin, dass es sich auf die Verknüpfung und deren Implikationen, die Gruppenstruktur, konzentriert, indem es von dem Charakter seiner Elemente absieht. In der Absolutheit der ersten Fassung, in der den Symbolen jegliche Bedeutung genommen wird, wird es für konkrete Fragestellungen über ganze Zahlen unbrauchbar. In der zweiten Fassung ist ein Transfer von Problemstellungen und Erkenntnissen zwischen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ leichter möglich. Dabei kann das neue Symbol $\bar{i}$ als der Rest $i$ verstanden werden, wobei die Regel eingeführt wird, dass alle ganze Zahlen jeweils mit ihrem Rest modulo $n$ identifiziert werden.

Dieses Modell ist im Bereich der Beschäftigung mit Mengen von Restklassen tragfähig und leicht handhabbar. Es hat seine Grenzen in der Übertragbarkeit auf allgemeinere algebraische Strukturen. In der Gruppentheorie spielen Faktorstrukturen eine große Rolle, von denen die Mengen von Restklassen Spezialfälle sind. In einer Gruppe $(G, \cdot)$ betrachtet man einen Normalteiler $N$ und dessen Nebenklassen $gN = \{gx \mid x \in N\}$, wobei $g \in G$. Die Menge der Nebenklassen $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ ist zusammen mit der von $G$ induzierten Verknüpfung $(gN)(hN) := (gh)N$ ebenfalls eine Gruppe. In diesem Zusammenhang ist es schwierig, die Vorstellung von 'Resten' zu übernehmen. In $\mathbb{Z}$ kann man für jede Restklasse einen Repräsentanten festlegen, indem man bei dem neutralen Element als Repräsentant des Normalteilers selbst beginnt und dann solange immer wieder die Zahl 1 addiert, bis man wieder in den Normalteiler gelangt. Die Zwischenergebnisse liefern für jede Restklasse einen Repräsentanten. Im Allgemeinen hat man bei einer Gruppe kein ausgezeichnetes Element, das die Rolle übernehmen kann, die die Zahl 1 bei dem angegebenen Verfahren für $\mathbb{Z}$ spielt. Wählt man ein beliebiges Element $g \in G, g \notin N$, so ist nicht sichergestellt, dass mit $N, gN, g^2N \ldots$ alle Nebenklassen erfasst werden. Es ist für einen konkreten Normalteiler $N$ natürlich möglich, dass man in jeder Nebenklasse von $N$ ein Element auswählt und als 'Rest' definiert. Dazu muss man alle Nebenklassen explizit kennen. Wenn man aber allgemein über Eigenschaften von Gruppen nachdenkt, ist das nicht möglich. Zwar kann man in jeder Nebenklasse ein Element namentlich als Rest definieren, aber man kann dann nicht bestimmen, welcher Rest zu der Nebenklasse $(gh)N$ gehört. Spätestens bei der Beschäftigung mit allgemein gruppentheoretischen Fragen muss also auch eine Vorstellung aufgebaut werden, die der ersten Grundvorstellung entspricht. Diese Überlegungen gelten insbesondere auch für die Faktorstrukturen von Vektorräumen.

Jede der beiden Grundvorstellungen bildet ein in sich stimmiges Modell für $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Der Transfer zwischen den beiden Ideen ist jedoch wichtig, wenn die Möglichkeiten, die in der Konstruktion der Gruppe liegen, ausgeschöpft werden sollen. So ist häufig ein Wechsel zwischen dem bedeutungshaltigen Ursprung und der rein formalen Darstellung fruchtbar, etwa bei der Übertragung von Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ auf $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ und umgekehrt. Diese Notwendigkeit des Transfers zwischen den sehr verschiedenen Grundvorstellungen stellt eine weitere Anforderung an die Abstraktionsfähigkeiten von Lernenden. Sie erfordert wiederum die Bereitschaft und Fähigkeit zum Wechseln der Perspektive, und zwar diesmal zum Sichtwechsel von einem komplizierten gedanklichen Konstrukt zu einem wesentlich anderen, aber ebenso abstrakten Modell.

Eine Verbindung der beiden genannten Grundvorstellungen $R_1$ und $R_2$ könnte durch Diagramme folgender Art hergestellt werden:

$$
(*) \qquad
\begin{array}{|r|r|r|r|}
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6 & 7 \\
8 & 9 & 10 & 11 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\underbrace{\hphantom{00}}_{\overline{0}}} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\hphantom{00}}_{\overline{1}}} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\hphantom{00}}_{\overline{2}}} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\hphantom{00}}_{\overline{3}}}
\end{array}
$$

Für jede natürliche Zahl größer als eins kann man ein entsprechendes Diagramm zeichnen. Es stellt gleichzeitig die Elemente von $\mathbb{Z}$ und die Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dar: Es kann einerseits als die Menge $\mathbb{Z}$ gelesen werden, wenn man nämlich die vertikalen Einteilungen ignoriert, andererseits als die Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, wenn man nicht die Zahlen sondern die Spalten des Diagramms hervorhebt. Insofern veranschaulicht es das Phänomen der Mengen in einer Menge, welches von der Grundvorstellung $R_1$ betont wird. Das Diagramm verdeutlicht aber ebenfalls den Zusammenhang der Additionen in $\mathbb{Z}$ und in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Das Addieren von Vielfachen von $n$ in $\mathbb{Z}$ führt offenbar immer in die Ausgangsspalte zurück, wobei das Vielfache die Anzahl der Zeilen angibt, um die man in der Zeile weiter vor (oder bei negativen Vielfachen zurück) schreitet. Die Reste, die über die Vielfachen von $n$ hinaus zu addieren sind, bewirken ein Voranschreiten in den Spalten, beim Zeilenumbruch zusätzlich in einer Zeile. Dieses Rechnen in $\mathbb{Z}$ anhand des Diagramms verdeutlicht, was beim Rechnen in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ geschieht: es interessieren nur die Spalten, und diese werden durch die Addition von Vielfachen von $n$ nicht verändert. Was bleibt, ist das Weiterzählen zur Addition des Restes. Dieses entspricht dann dem Weiterzählen in einer zyklischen Anordnung der Symbole $\overline{0}, ..., \overline{(n-1)}$. Damit hat man wie bei der Grundvorstellung $R_2$ den Fokus auf einem Additionsverfahren, das am Charakter der Objekte, die addiert werden, nicht interessiert ist. Zusätzlich wird an dem Diagramm deutlich, dass diese 'Reste' nicht ausgezeichnet werden müssen, sondern dass jede beliebige Zahl in einer Spalte als Vertreter verwendet werden kann.

Dieses Modell ist geeignet, beide Grundvorstellungen zu repräsentieren. Damit ist das Modell jedoch nicht ohne Weiteres geeignet, beide Grundvorstellungen bei einem Lernenden anzuregen. Wenn er eine Präferenz für eine der beiden Grundvorstellungen hat, oder aus irgend einem anderen Grund eine der beiden Vorstellungen zuerst aufbaut, so gibt das beschriebene Modell keinen Anlass, sich mit der anderen Vorstellung ebenfalls auseinander zu setzen. In Anbetracht der Tatsache, dass jede Grundvorstellung an sich bereits enorme Anforderungen an den Lernenden stellt, liegt es daher nahe, dass er in diesem Modell immer dieselbe Grundvorstellung erblickt.

Die beiden dargestellten Grundvorstellungen über eine Menge von Restklassen werden von Menschen verschiedener Denkstile vermutlich unterschiedlich verstanden.

Die erste Grundvorstellung konzentriert sich auf Eigenschaften der Elemente und geht im Detail auf die Beziehungen zwischen den Elementen der Menge $\mathbb{Z}$ und der Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein. Es entspricht einem Bedürfnis von Menschen mit einer Vorliebe für prädikatives Denken, die betrachteten Objekte zu analysieren und genau zu beschreiben.

Dem funktionalen Denken liegt eher die zweite Grundvorstellung, denn sie betont Regeln der Addition, also des Umgangs mit den Elementen. Das Ignorieren von schwer fassbaren Eigenschaften der Elemente, nämlich von der Tatsache, dass die Elemente Mengen sind, kommt dem Bedürfnis funktionalen Denkens, abstrakte Objekte zu vermeiden, entgegen. Die übersichtliche und relativ einfache Darstellung von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in einem Diagramm - sei es nun dem Diagramm einer Uhr oder dem zuletzt beschriebenen ähnlich - unterstützt den Fokus auf den Möglichkeiten zum Handeln in dieser neuen Menge.

In dem Modell (*), welches sich zur Darstellung beider Grundvorstellungen eignet, kann ein vorwiegend funktional denkender Mensch die Möglichkeiten der Manipulation in $\mathbb{Z}$ und die Abkürzung dieser Manipulationen durch das Berücksichtigen nur des 'Restes' sehen. Er wird schnell erfassen, dass man für das, was ihn vorrangig interessiert, nämlich das Agieren in dieser Menge, nur die Positionen der Elemente, in welcher Spalte sie sich befinden, braucht, und wird daher alle anderen Eigenschaften gern ignorieren. Die neue Menge $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ als Menge zu sehen, in der man sich nur für die Spalten, nicht für ihre Einträge, interessiert, kommt seiner Intuition entgegen. Er wird auch wenig Probleme damit haben, in diesem Vorgehen einen Sinn zu sehen, denn der praktische Nutzen für das Rechnen liegt auf der Hand, und dies ist das Kriterium, das ihn vorrangig interessiert. Dabei ist für ihn weniger entscheidend, wie die Elemente formal definiert werden, solange er genau weiß, wie er mit ihnen umgehen darf. Das Diagramm transferiert die Darstellung von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in einer formalen Definition als Menge von bestimmten Teilmengen von $\mathbb{Z}$ in eine Repräsentation, die einem funktional Denkenden erleichtert, ein eigene brauchbare Vorstellung zu entwickeln. Obwohl es also leicht möglich ist, mit diesem Diagramm zu arbeiten, ohne den Abstraktionsschritt zu vollziehen, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ eine Menge von Mengen ist, scheint mir das Diagramm diesen Gedanken vorzubereiten, denn immerhin führt es die Tatsache, dass die Elemente der neuen Menge Mengen sind, vor Augen, und trägt somit zur Gewöhnung an dieses Phänomen bei.

Ein Mensch mit einem eher prädikativen Denkstil kann in dieser Darstellung eine Hilfe sehen, wie er gleichzeitig den Element- und den Mengencharakter von $i + n\mathbb{Z}$ denken kann. Vielleicht ist es ihm erst, nachdem er diese Verbindung mental verarbeitet hat, möglich, die Menge $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ in ihren eigenen Strukturen zu betrachten. Sollte er in dem Bewusstsein, wesentliche Eigenschaften dieser neuen Objekte noch nicht verstanden zu haben, diese Eigenschaften ignorieren, so wäre dies sicherlich mit zusätzlichen inneren Sperren verbunden. Ein prädikativ Denkender wird diesen Eigenschaften sehr viel mehr Bedeutung beimessen als ein funktional Denkender, denn an Kategorien dieser Art orientiert er sich. Dennoch gilt auch für ihn, dass das Diagramm, welches ihm zunächst hilft, eine interne Repräsentation zu konstruieren, das seinem Denkstil entspricht, nicht automatisch die andere Grundvorstellung mit vermittelt. Es ist möglich, dass das Diagramm ihn durch die übersichtliche Präsentation darin bestärkt, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ immer in den gesamten Teilmengen von $\mathbb{Z}$ zu denken, und nicht den Fokus auf die $n$ Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zu legen. Andererseits gilt auch hier, dass das Diagramm durch Gewöhnung eine vorbereitende Wirkung für den gedanklichen Schritt hat, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entsprechend der zweiten Grundvorstellung zu sehen.

In der Gesamtkonstruktion einer Menge von Mengen scheint mir noch ein weiteres potentielles epistemologisches Hindernis zu liegen, das es schwer macht, diese neue Menge zu akzeptieren: Der Sinn für die Konstruktion dieses komplizierten Objekts ist nicht unmittelbar einsichtig. Das Argument, dass man so einfacher rechnen kann, wird dadurch aufgewogen, dass diese Vereinfachung durch eine erhebliche Erschwernis der gedanklichen Erfassung, wenn sie vollständig vollzogen werden soll, mehr als ausgeglichen wird. Zur Überwindung dieses Hindernisses kann möglicherweise ein lebensweltlicher Bezug, wie z.B. Wille (2002a) fordert, beitragen. Ein solcher Bezug kann verdeutlichen, dass diese ‘komplizierte’ Konstruktion einfache Parallelen in der Alltagswelt hat. Diese Parallelen können ihm helfen, einen Sinn in dem Prinzip des Zusammenfassens von Objekten zu neuen Objekten zu begreifen, ohne dass dabei von den Details dieser Konstruktion abgelenkt wird. Eine solche Parallele könnte Folgendes sein: In einer Schule werden alle Schüler in Klassen eingeteilt. Manches, was in der Schule geschieht, berücksichtigt die einzelnen Schüler, anderes nur die Klassen als Gruppen. So wird jeder Klasse für jede Unterrichtsstunde ein Raum zugeweisen, aber es wird nicht angeben, auf welchem Platz die einzelnen Schüler sitzen sollen. Es ist nicht notwendig, jeden einzelnen Schüler der Klassen zu kennen, um Schule zu verwalten. Sondern es ist sinnvoll, hier die Klassen als mentale Objekte zu denken.

# Kapitel 3

# Gesprächsinterviews

## 3.1 Methodologie

### 3.1.1 Die Grundkonzeption der Studie

#### Bisherige empirische Untersuchungen zur linearen Algebra

Sowohl in den Nordamerika als auch in Frankreich gibt es eine Reihe von empirischen Untersuchungen zur linearen Algebra mit Studierenden am College oder an der Universität. Ihre inhaltlichen Ergebnisse sind im Abschnitt 2.1.3 bereits wiedergegeben und sie werden hier nur kurz in ihren Untersuchungsfragen und -methoden vorgestellt. Dorier et al. (2000a) und Rogalski (2000) führten empirische Untersuchungen über Verständnis und Lösungsstrategien von Studierenden in Frankreich im ersten Universitätsjahr. Die analysierten Daten bestehen aus studentischen Äußerungen in schriftlichen Tests und Examina, die während des Kurses gegeben wurden. Die Untersuchungen wurden in Kursen durchgeführt, in denen sie insbesondere das Reflektieren des Vorgehens auf einer Metaebene einbezogen. Die Prüfungsaufgaben lassen verschiedene Lösungsstrategien zu und die Forscher interessieren sich neben den Erfolgen beim Lösen der Aufgaben vorrangig für die Konzeption der Lösungswege der Studierenden. Dabei ist ihnen insbesondere wichtig, ob sie sich an den strukturellen Merkmalen der gegebenen Objekte orientieren. Die beiden Artikel kommentieren Schwierigkeiten, welche einige der Prüfungsaufgaben und Lösungswege beinhalten und erwähnen manchmal mögliche Ursachen für Misserfolge in Form von Kategorien wie Logik oder Form der Darstellung. Die Untersuchungsergebnisse gehen nicht auf individuelle Vorstellungen der Studierenden zu den betrachteten Begriffen ein. Hierzu liefert das schriftliche Datenmaterial keine Hinweise.[1] Tonbandaufnahmen von drei Diskussionsgruppen zu einer Problemstellung über Untervektorräume geben mehr Einblicke in das Denken der Studierenden. Hierzu wurden von den Autoren der Artikel metakognitive Steuerungsmechanismen und mathematische Schwierigkeiten, die in Zusammenhang mit Logik und Mengenlehre stehen, aufgezeigt. Sierpinska et al. (1999) konstruieren eine Lernumgebung mit einem Computerprogramm und beobachten drei Paare von Studierenden beim Lösen von Ar-

[1] Wie Dorier et al. (2000a) erklären, geben die schriftlichen Arbeiten keine Begründungen für getroffene Entscheidungen. Daher wären Vermutungen über interne Gedankengänge wohl zumeist Spekulation.

beitsaufträgen im Zusammenhang mit Linearkombinationen, die sie jeweils mit dem Computer und mit dem Bleistift bearbeiten sollen. Diese Studie zeigt Vorstellungen auf, welche die Probanden sich zu dem Begriff 'Linearkombination' bilden. Auch Maracci (2003), der Einzelinterviews mit fünf Studierenden zu einer Aufgabe über Linearkombinationen und Untervektorräume durchführt, schließt auf Vorstellungen, die den Lösungsversuchen zugrunde liegen. Sie beruhen auf Vereinfachungen der Voraussetzungen. Pavlopoulou und in nachfolgenden Untersuchungen auch Alves-Dias[2] betrachten das Umgehen Studierender mit drei verschiedenen Darstellungsformen. Pavlopoulou verwendete eine graphische (Pfeile), eine tabellarische (Zahlenspalten) und eine symbolische (Eigenschaften nur durch Axiome gegeben) Notationsform und führte sie jeweils mit zugehörigen Operationsregeln ein. Nach Einüben des Konvertierens einer Darstellung in die anderen mit Studierenden stellt Pavlopoulou fest, dass die Studierenden in einer sehr eng begrenzten und gezielt auf das Lernumfeld ausgerichteten Untersuchung erfolgreich zwischen den drei Darstellungsformen transferieren können. Alves-Dias weitet diese Untersuchung aus und zeigt anhand von Aufgaben zum Wechsel zwischen Darstellungen von Untervektorräumen, die sich in Darstellungen tabellarischer oder symbolischer Form, aber auch in Parameter- und Koordinatenformen unterscheiden, dass die Anforderungen, die die lineare Algebra an kognitive Flexibilität stellt, sehr viel komplexer sind, als die Anforderungen in Pavlopoulous Untersuchungen. Einen anderen Ansatz zeigt Behaj[3] in seinen Untersuchungen. Er ist an der Art und Weise interessiert, wie Personen ihr Wissen zur linearen Algebra als Ganzes strukturieren, und untersucht dies mit der Fragestellung, welche Strukturierung Dozierende und Studierende höherer Semester für eine Vorlesung zur linearen Algebra als sinnvoll erachten. Nnadozie/Sierpinska (2001) versuchen eine quantitative Analyse des theoretischen Denkens[4] von 14 Studierenden, die einen Kurs zur linearen Algebra mit gutem Erfolg abgeschlossen hatten. Dazu entwickelten sie Aufgaben und kodifizierten die vermuteten Merkmale theoretischen Denkens und ihre spezifischen Verhaltensausprägungen in Lösungsprozessen zu den gewählten Aufgaben.[5] Anschließend wurden mit den 14 Studierenden Einzelinterviews über die Aufgaben geführt. Mit Hilfe von interpretativen Methoden wurde entschieden, welche der kodifizierten Merkmale den einzelnen Interviews zuzuordnen sind. Das Ergebnis dieser qualitativen Analyse bestand somit in Merkmalszuordnungen für 14 Personen. Eine quantitative Auswertung dieser Daten zählt die auftretenden Merkmale theoretischen oder nicht-theoretischen Denkens im gesamten Interview bzw. bei den einzelnen Aufgaben. Hieraus werden Schlüsse gezogen, welche der Merkmale theoretischen Denkens für erfolgreiches Bestehen des Kurses relevant sind. Diese Schlussfolgerungen hängen jedoch von der Auswahl der quantitativen Analysemethode ab. Zudem unterliegt die Studie natürlich der subjektiven

[2]Vgl. die Zusammenfassung in Artigue et al. (2000).

[3]Vgl. Artigue et al. (2000).

[4]Zur Erklärung des Begriffs siehe den Abschnitt 2.1.3 "Probleme von Studierenden mit der linearen Algebra".

[5]Ein Beispiel zur Kodifizierung ist folgendes: Ein Merkmal, das dem theoretischen Denken zugeschrieben wird, ist, dass es 'analytisch' ist; ein Teilaspekt dieses Merkmals ist: Theoretisches Denken berücksichtigt Regeln der Logik für Schlussfolgerungen und Negieren von Aussagen. Ein Verhaltensmerkmal, das diesen Teilaspekt impliziert, gehört zum Lösungsverhalten zu einer der Interviewaufgaben: Hier erfordert eine unpräzise Aufgabenstellung die eigenständige Verwendung und die Negierung von Verbindungsvokablen wie 'und', 'oder' und 'wenn...dann'.

Interpretation der einzelnen Interviews. Als Konsequenz aus dieser Studie stellen die Autoren generell in Frage, ob quantitative Untersuchungen zum Lernen höherer Mathematik sinnvoll sind.

Im deutschsprachigen Raum gibt es noch keine empirischen Untersuchungen zum Lernen der linearen Algebra auf Hochschulebene. Im Bereich der Sekundarstufenmathematik analysiert und kategorisiert G. Wittmann[6] Vorstellungen von Schülern und Schülerinnen zur analytischen Geometrie. Die Untersuchungen wurden mit Hilfe von Interviews geführt und qualitativ ausgewertet.

Die Untersuchung von G. Wittmann stellt inhaltliche Vorstellungen, die in seinen Interviews sichtbar werden, dar, und zeigt epistemologische Hindernisse im Bereich der anschaulich-geometrischen Beschäftigung mit linearer Algebra. Er geht entsprechend der Ansiedlung seiner Untersuchungen im Sekundarstufenbereich nicht auf strukturierende Begriffe oder Werkzeuge wie 'Basis' oder 'lineare Abbildung' ein. Die meisten anderen Studien gehen Fragen nach, wieweit Lernende einzelne Begriffe, Argumentationen, Prozesse oder Herangehensweisen, die in der linearen Algebra eine Rolle spielen, verstehen und bewusst oder intuitiv produktiv nutzen können. Manche Studien konzentrieren sich auf einen eng umgrenzten Sachverhalt, andere betrachten studentisches Verhalten in größeren inhaltlichen Zusammenhängen. Dabei werden die Äußerungen der Studierenden zumeist daran gemessen, ob sie richtig sind. Eine Ausnahme bildet Sierpinska (2000), die vorrangig daran interessiert ist, welche Art von Argumenten von den Studierenden verwendet wird.

### Das Konzept dieser Studie

Mein eigenes Forschungsinteresse bezieht sich auf die eigentlichen Vorstellungen, die Studierende sich zu einzelnen grundlegenden Inhalten oder Themenkomplexen der linearen Algebra bilden, und auf ihre individuellen Strategien zur Aneignung der Inhalte und zur Bewältigung der vielfachen Verständnishürden. Im Unterschied zu den in der amerikanischen und französichen Literatur dargestellten Studien zur linearen Algebra soll hier nicht ein quasi fertiges Produkt an gegebenen Maßstäben gemessen werden. Stattdessen sollen die unfertigen Vorstellungen und Vorgehensweisen mit der ihnen inne wohnenden Logik herausgefiltert werden, so dass die Frage erörtert werden kann, wie sie erweitert und korrigiert werden können um tragfähige Grundlage für das weitere Lernen zu sein. Es werden also in Bezug auf die lineare Algebra für einzelne Studierende individuelle epistemologische Bedingungen untersucht.

Die Ergebnisse der oben gegebenen Sachanalyse der linearen Algebra betonen den hohen Grad und die Vielschichtigkeit der Abstraktion in der linearen Algebra, welche in einer stark formalisierten Darstellung komprimiert wird. Dabei kehren einige Formen der Abstraktion und Techniken des Formalisierens in den verschiedenen inhaltlichen Zusammenhängen wieder. Daraus ergibt sich neben der Frage nach inhaltlichen Vorstellungen als zweite Forschungsfrage, welche Formen der Abstraktion die Studierenden mental vollziehen oder nicht vollziehen, ob dies unabhängig vom jeweiligen Inhalt geschieht, und welche mentalen Strategien der Verarbeitung oder Vermeidung dieser Abstraktionsformen sie anwenden. Hiermit verbunden ist die Frage, welche Struktur innere Repräsentationen besitzen, die die Probanden von

[6] In G. Wittmann (2000) und G. Wittmann (2003).

abstrakten Begriffen aufgebaut haben, und in welcher Weise die Konstruktion der Vorstellungen vorgenommen wird.

Diese Fragen können natürlich nicht vollständig beantwortet werden, da sie zum Einen sehr umfassend sind und es zum Anderen nicht möglich ist, kognitive Vorgänge direkt zu beobachten. Das Forschungsprojekt hat das Ziel, äußere Verhaltensweisen zu provozieren und zu analysieren, welche indirekte Hinweise auf Denkvorgänge vermitteln. Für das Untersuchungsdesign folgt die Vorgabe, dass die Studie sehr offen angelegt sein muss, so dass sie für Äußerungen und Ideen der Probanden möglichst große Spielräume zulässt. Zugleich muss sie sich an den Grenzen der Leistungsfähigkeiten der Probanden bewegen, so dass diese sich auf das unsichere Terrain ihrer noch nicht gefestigten Vorstellungen begeben. Außerdem muss sie mehrere Themen ansprechen.

Die Forschungsfragen legen eine qualitative empirische Untersuchung nahe. Wie Beck/Meier (1993) erläutern, dienen quantitative Verfahren meist dazu, eine bereits entwickelte Theorie empirisch zu überprüfen, während qualitative Verfahren besonders geeignet sind, wenn Hypothesen erst durch empirische Erkenntnisse gewonnen werden sollen. Letzteres ist hier der Fall. Die Untersuchung soll nach individuellen Strategien zur Verarbeitung und Repräsentation von abstrakten Begriffen und Zusammenhängen suchen und dabei auch für unvermutete Vorgehensweisen offen sein. Dies gilt zum Einen für einzelne Komponenten von Lernstrategien wie z.B. die in der Literatur aufgezählten kognitiven Werkzeuge oder heuristischen Vorgehensweisen wie auch für Strategien, die für prädikatives bzw. funktionales Denken typisch sind, zum Anderen aber auch für das Zusammenspiel der einzelnen Komponenten in einem Gesamtlernverhalten, mit dem Studierende die komplexe Welt der in einer Vorlesung präsentierten linearen Algebra zu erfassen versuchen. Die Untersuchung individueller Lernvorgänge und -ergebnisse in einem komplexen Zusammenhang wie dem beschriebenen erfordert eine intensive Beschäftigung mit den einzelnen Probanden in Fallstudien. Hierzu eignen sich Gesprächsinterviews, welche keinen standardisierten Regeln zum Vorgehen unterworfen werden, und welche eher das Entwickeln von Ideen und das Erschließen neuer Lösungswege als das Überprüfen von vorhandenem Wissen und Können betonen. Das ist insbesondere möglich, weil sie nicht durch das Anliegen beschränkt sind, einen Ist-Zustand festzustellen, der einer Messung der bis zum Zeitpunkt des Interviews erreichten Leistungsfähigkeit gleichkommt: Weder die Vorlesung noch die Interviewten sollen mit dieser Studie beurteilt werden. Stattdessen sollten die Vorstellungen der Studierenden in Aktion, d.h. in Anwendung auf Problemsituationen, in Konfrontation mit (neuen) kognitiven Konflikten und in Fortentwicklung beobachtet werden. Der große Aufwand in der Erhebung und Analyse der Daten bedingt, dass die Untersuchung sich nur auf eine sehr kleine Stichprobe von Probanden beziehen kann.

Die Erkenntnisse über Vorstellungen und Lernvorgänge von wenigen Studierenden, die eine solche Studie liefern kann, können nicht ohne Weiteres als 'typisch' auf andere Studierende verallgemeinert werden. Sie können jedoch den Horizont von Lehrenden und von Forschenden über die Möglichkeiten und die Komplexität studentischen Lernens erweitern. Somit dient die Beschäftigung mit wenigen Einzelfällen als Pilotstudie zur Sondierung und zur Generierung von Hypothesen, welche den Weg für eine umfangreichere, stärker standardisierte Studie bereiten können, in der gezieltere und möglichst trennscharfe Aufgaben für eine größere Probandenzahl gestellt werden können.

### Rahmenbedingungen

Die Untersuchung wurde im Wintersemester 02/03 begonnen und bestand aus mehreren Interviewgesprächen, die einzeln mit Hörern und Hörerinnen der in diesem Semester gehaltenen Vorlesung 'Lineare Algebra und Analytische Geometrie I' geführt wurden. Die Veranstaltung bestand aus einer wöchentlich vierstündigen Vorlesung und zweistündigen Übungen, in denen auf die Vorlesung bezogene Aufgaben besprochen wurden, die die Studierenden zuvor schriftlich zu Hause zu bearbeiten hatten. Die Vorlesung richtete sich an Studierende in den Studienfächern Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Lehramt für Sekundarstufe II mit Fach Mathematik. Zwei der Übungsgruppen, an denen nur Lehramtsstudierende teilnahmen, wurden von mir betreut.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick der Vorlesungsthemen:

| | Woche | Inhalte |
|---|---|---|
| algebraischer Vorspann | 1-5 | Beweisverfahren, Grundbegriffe der Logik und Mengenlehre; Gruppen, Ringe, Körper, Polynome |
| Grundlagen der Vektorraum-theorie | 6 | Axiomatische Definition des Vektorraums und Beispiele; Untervektorraum, Erzeugnis, Homomorphismus |
| | 7 | Lineare Gleichungssysteme: Lösungsverfahren und Struktur der Lösungsmenge |
| | 8 | Erzeugendensystem, lin.(Un)abhängigkeit, Basis, Dimension |
| | 9-11 | lineare Abbildungen und Matrizen mit Dimensionssätzen |
| | 11-13 | Matrizenrechnung mit Rangsätzen, Basiswechsel und Ähnlichkeit und Äquivalenz von Matrizen |
| | 13-15 | Determinanten |
| | 15-16 | Dualraum |
| | 16 | Exakte Sequenzen |

Zum Präsentationsstil ist zu sagen, dass Definitionen, Sätze und Beweise den Hauptteil der Vorlesung bildeten und in knappen Darstellungen gegeben wurden, in denen formale Korrektheit im Vordergrund stand. Dazwischen, insbesondere nach Definitionen, wurden zahlreiche Beispiele genannt, die z.T. anschaulich waren, z.T. aus abstrakten Strukturen bestanden. Hin und wieder wurden Leitideen oder -fragen für die folgenden Vorlesungsstunden formuliert. Insgesamt wurde eine Fülle von neuen Begriffen eingeführt, von denen der größere Teil in Übungsaufgaben aufgegriffen wurde. Viele der Übungsaufgaben fragten nach Beweisen. Manchmal erforderte dies eigene Ideen, denen die inhaltliche Auseinandersetzung mit neuen Begriffen voraus ging, manchmal genügte ein formales Anwenden von Eigenschaften auf Symbole. Einige Übungsaufgaben verlangten die Anwendung von Algorithmen. In den Übungen wurden Lösungen der Aufgaben vorgerechnet und Fragen zu Aufgaben und zur

Vorlesung diskutiert.

Die Entscheidung für Themen der Interviewgespräche fiel auf: 'Mengen von Restklassen', 'Die Beschreibung von Vektorräumen mit Hilfe von Basen' und 'Der Dualraum als abstrakter Vektorraum'.

Das erste Thema gehört nicht zum eigentlichen Kanon einer Vorlesung zur linearen Algebra, wurde aber in der beschriebenen Vorlesung behandelt. Es vereinbart mehrere Vorzüge für die Untersuchung: Es wurde bereits in den ersten Vorlesungswochen behandelt und setzte keine inhaltlichen Spezialkenntnisse voraus, die über den Unterrichtstoff einer fünften Klasse hinausgingen. Außerdem vereinigen Gruppen von Restklassen mehrere abstrakte Konzepte, die z.T. in kurzer Folge aufeinander aufbauend gelehrt wurden und von den Studierenden verarbeitet werden mussten. Dazu gehört die axiomatische Gruppendefinition; dazu gehört zudem die Konstruktion dieser Gruppen, welche auf mehreren Ebenen abläuft, nämlich auf der Ebene des Ordnens von ganzen Zahlen nach Resten, der Ebene des Umgehens mit Restklassen als Objekten, die addiert werden, und der Ebene des Beschreibens einer Gruppenstruktur auf der Menge von Restklassen. Diese Thematik ist hinreichend komplex und anspruchsvoll, um die Studierenden an die Grenzen ihres Abstraktionsvermögens zu führen, und kann zugleich auf einfachen Niveaus behandelt werden. Sie ist geeignet, den Umgang der Studierenden mit Abstraktion zu untersuchen.

Das zweite Thema spricht den zentralen Begriff des Vektorraums an und ist daher für die inhaltliche Erfassung der linearen Algebra wichtig. Die Beschreibung durch Basen bewegt sich auf der Ebene der Strukturierung des Vektorraums. Die Idee der eindeutigen Konstruierbarkeit ist ein neues abstraktes Konzept, das zu der axiomatischen Definition hinzutritt.

Das dritte Thema betrifft einen Vektorraum, welcher in seiner Konstruktion mehrere Abstraktionsschritte erfordert. In dieser Hinsicht ist das Thema mit dem ersten vergleichbar. Es führt außerdem die Frage nach Vektorraumvorstellungen in verschiedenen Hinsichten weiter: Zum Ersten sind die Elemente des Dualraums Abbildungen, die Vektorraumstrukturen respektieren. Zum Zweiten ist der Dualraum zugleich abstrakt und dennoch in seiner Struktur unmittelbar auf einen anderen Vektorraum bezogen.

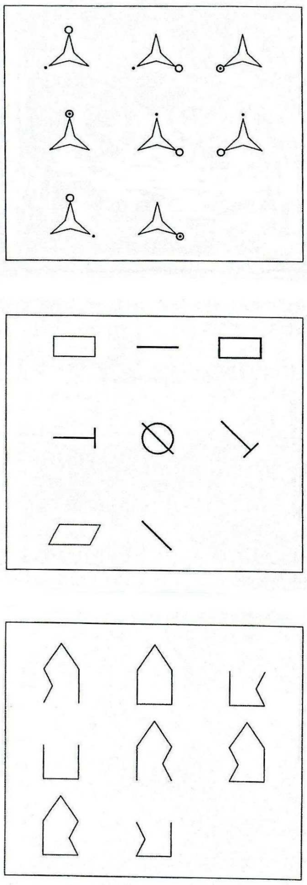
### Auswahl der Probanden P. Sendig, A. Beck, K. Rolle

Als Pilotstudie soll diese Untersuchung epistemologische Merkmale der linearen Algebra aufdecken, die bei der mentalen Rekonstruktion verschiedener Inhalte und Begriffe der Theorie durch einzelne Studierende eine Rolle spielen. Die Studie beschränkt sich auf wenige Einzelfälle, soll aber ein - unter diesen Umständen - möglichst großes Spektrum an individuellen Vorstellungen und Vorgehensweisen einfangen. So ist es wünschenswert, dass die an der Untersuchung teilnehmenden Studierenden eine heterogene Gruppe bilden. Die Denkstiltheorie von Schwank gab ein Kriterium für die Auswahl der Probanden: Sie beinhaltet die Hypothese, dass Menschen mit Präferenzen für verschiedene Denkstile Wissen unterschiedlich aufnehmen und verarbeiten, und dass ihre mentalen Repräsentationen dieses Wissens unterschiedlich organisiert sind. Dies legt die Vermutung nahe, dass sowohl ihre Vorstellungen zu manchen mathematischen Inhalten als auch ihre Strategien in der Auseinandersetzung mit diesen Inhalten grundverschieden sind. Eine Konsequenz aus den unterschiedlichen Sichtweisen von funktionalem und prädikativem Denken ist somit, dass die epistemologischen Bedingungen von Wissen in der linearen Algebra für Menschen mit unterschiedlichen Präferenzen in wesentlichen Aspekten verschieden sein können. Diese Bedingungen werden insbesondere im Hinblick auf die Perspektiven eines geeigneten Ausbaus vorläufiger Vorstellungen Konsequenzen haben. Die Erörterung dieser Fragen soll in Bezug auf die einzelnen interviewten Personen geschehen. Es ist nicht Ziel der Untersuchung, die Möglichkeiten und Grenzen, Stärken und Schwächen der beiden Denkstile auszuloten. Sowohl aufgrund der geringen Probandenzahl und als auch aufgrund der Komplexität der zu betrachtenden Inhalte ist das nicht möglich.

Zur Auswahl der Probanden wurde ein kleiner schriftlicher Vortest in Anlehnung an Testverfahren von Schwank in den von mir betreuten Übungsgruppen durchgeführt. Es waren drei Aufgaben. In jeder sollten die Studierenden acht Bilder, die in einer $3 \times 3$-Matrix gegeben waren, durch ein neuntes ergänzen. Dazu sollten sie eine Erklärung schreiben, warum sie dieses Bild für passend halten. Die drei Aufgaben werden bei Schwank (1999)[7] zusammen mit Antworten, die für funktionales bzw. prädikatives Denken typisch sind, erläutert. Sie sind in der Abbildung 3.1 gezeigt.

[7] S. 89-91.

Abbildung 3.1:



Antworten auf diese drei Aufgaben können gute Hinweise auf eine Denkstilpräferenz geben, falls die Aufgaben für die jeweilige Testperson ein angemessenes, und das heißt insbesondere hinreichend hohes Anspruchsniveau haben. Die erste der drei Aufgaben ist mit beiden Präferenzen gut lösbar. Die zweite Aufgabe ist so konzipiert, dass sie funktionales Denken deutlich begünstigt, während die dritte Aufgabe für prädikative Strukturierungen zugänglicher ist. Die Begünstigung eines der beiden Denkstile in der zweiten und dritten Aufgabe kann dazu führen, dass eine Testperson Argumente in dem ihr weniger liegenden Denkstil heranzieht. Die erste Aufgabe ist die Leichteste der drei. Hier besteht am Ehesten die Möglichkeit, dass einer Testperson unmittelbar sowohl eine prädikative wie auch eine funktionale Lösung einfällt. Die Unterschiedlichkeit der Aufgabenschwerpunkte vergrößert die Chance, dass eine klare Diagnose gestellt werden kann. Schwank (1999) gibt folgende Erklärungen für denkstiltypische Lösungsansätze zu diesen drei Aufgaben:

**Erste Aufgabe:** Eine prädikative Lösung strukturiert die Aufgabe: Jede Figur besteht aus einer Art Dreieck, einem Kreis und einem Punkt. Das Dreieck ist jedesmal gleich. In jeder Zeile ist der Punkt am gleichen Platz, in jeder Spalte ist der Kreis am gleichen Platz.

Eine funktionale Lösung erfindet einen Prozess, der die letzte Figur in einer Zeile oder einer Spalte konstruiert: In jeder Zeile bewegt sich der Kreis, in jeder Spalte der Punkt um das Objekt in der Mitte. Beide Prozesse führen zu demselben Ergebnis für die fehlende Figur.

**Zweite Aufgabe:** Die Aufgabe ist besonders für eine funktionale Analyse geeignet. Die Grundidee ist: Die Figuren in der mittleren Zeile und der mittleren Spalte symbolisieren Operatoren. Dies kann z.B. so gedeutet werden: Der Operator in der ersten Zeile macht die Linien der ersten Figur dieser Zeile dick. Der Operator in der ersten Spalte transformiert die erste Figur dieser Spalte in ein Parallelogramm. Der Operator in der zweiten Zeile dreht die erste Figur der Zeile. Die Verkettung dieser Operatoren hat zur Folge, dass in der letzten Zeile die erste Figur gedreht werden muss und dicke Linien erhalten muss.

**Dritte Aufgabe:** Diese Aufgabe kann am Besten mit Hilfe einer prädikativen Strukturanalyse gelöst werden. Z.B.: Es gibt drei Typen von Figuren, nämlich geschlossene, oben offene und unten offene, und von jedem Typ gibt es die Varianten gerade Wände, rechts geknickte Wand und links geknickte Wand. Dabei fehlt die oben offene Figur mit geraden Wänden.

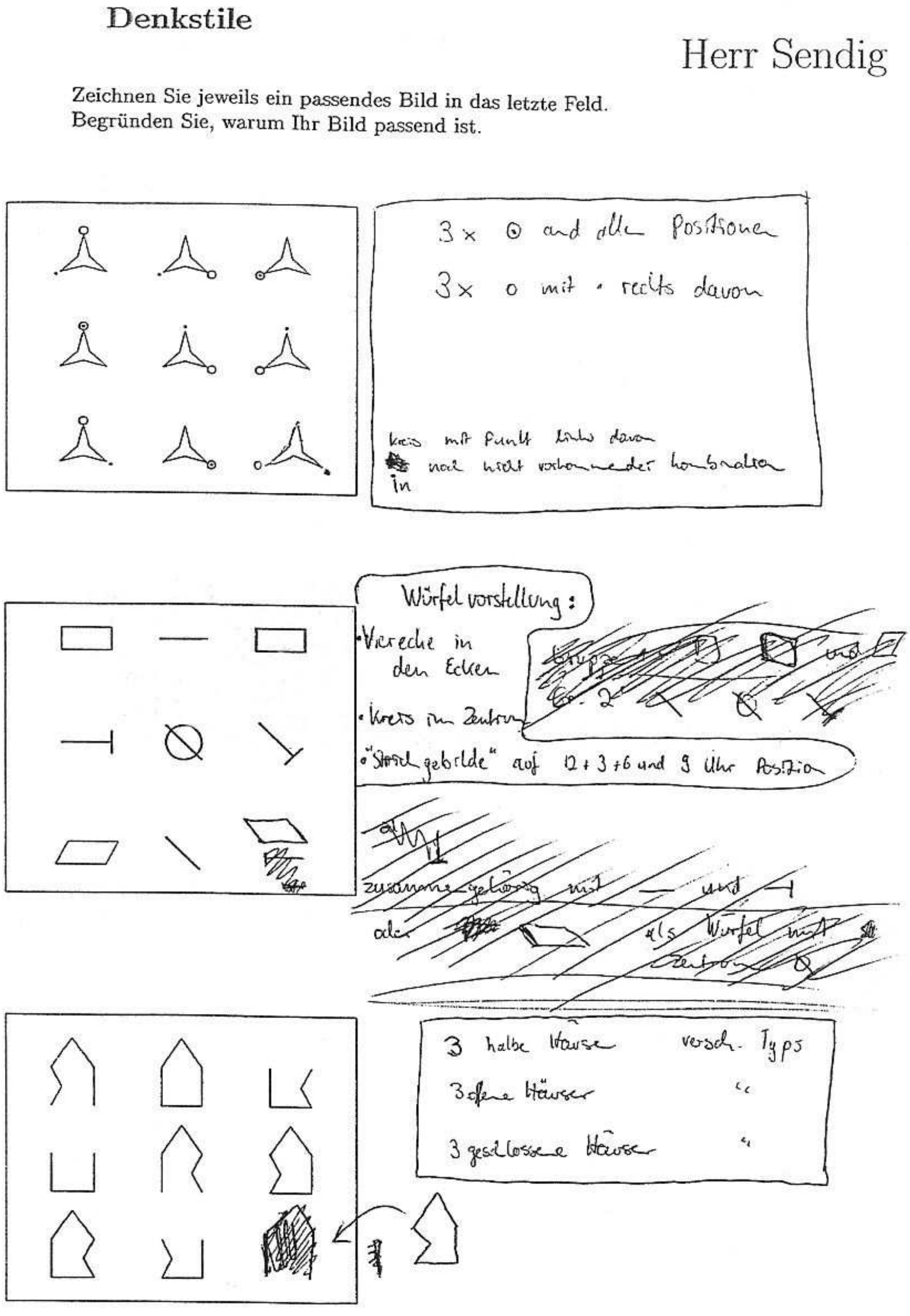
Zur Teilnahme an den Interviewgesprächen wurden schließlich zwei Studentinnen (hier mit geänderten Namen K. Rolle und A. Beck) und ein Student (P. Sendig) in ihrem ersten Studienjahr für die Interviewgespräche ausgewählt. Zu Beginn des ersten Semesters waren sie 19 bzw. 20 Jahre alt. Sie waren diejenigen aus den beiden Übungsgruppen, die sich freiwillig zur Teilnahme an der Forschungsstudie bereit fanden. Im Denkstiltest (siehe Abbildungen 3.2, 3.3 und 3.4) zeigte Frau Rolle eine Präferenz für funktionales und Herr Sendig eine Präferenz für prädikatives Denken. Aus Frau Becks Test ist keine klare Präferenz erkennbar:

Herr Sendig (siehe Abb. 3.2) fasst in allen drei Aufgaben die gegebenen Bilder zu Gruppen zusammen, für die er Gemeinsamkeiten benennt. Dies sind Strukturierungen, die zum prädikativen Denken passen. Er spricht keine Bewegungsabläufe oder Veränderungen an.

Frau Rolle (siehe Abb. 3.3) beschreibt in der ersten Aufgabe einen Bewegungsablauf, der sich in allen drei Spalten vollzieht. Sie erwähnt dabei die gleichbleibenden Bestandteile der Bilder nicht. In der zweiten Aufgabe betrachtet sie die dritte Reihe als Kombination der ersten beiden. Dazu beschreibt sie, was in den jeweiligen Reihen in der Richtung, die sie mit einem Pfeil kennzeichnet, verändert wird: In der ersten werden die Striche fett, in der zweiten ändert sich eine Richtung. Sie schließt, dass in der dritten beides geschehen soll. Die Antworten zu den ersten beiden Aufgaben sind funktional. In der dritten Aufgabe, für die nach Schwanks Beschreibung nur schwer eine funktionale Lösung gefunden werden kann, deutet Frau Rolle ebenfalls mit Hilfe eines Pfeils eine Richtung an, in der sie die Bilder betrachtet, gibt dann aber eine prädikative Lösung mit Hilfe von Gemeinsamkeiten einzelner Figuren.

Frau Beck (siehe Abb. 3.4) beschreibt bei der ersten Aufgabe sowohl Veränderungen wie Gleichbleibendes in jeder Reihe. Dabei benennt sie bei den Veränderungen jedoch keinen Handlungsablauf, der einen Übergang von einem Bild zum Nächsten erklärt. Ihre Antwort ist weder rein prädikativ noch rein funktional. In der zweiten Aufgabe beobachtet sie Veränderungen, jedoch nur als allgemeinen Eindruck. Ein Handlungsablauf, der zur gesamten Aufgabe passt, wird nicht deutlich. Die dritte Aufgabe löst sie mit prädikativen Argumenten.

Abbildung 3.2:



**Denkstile**

Herr Sendig

Zeichnen Sie jeweils ein passendes Bild in das letzte Feld.
Begründen Sie, warum Ihr Bild passend ist.

3× ⊙ and alle Positionen

3× o mit · rechts davon

Kreis mit Punkt links davon
noch nicht vorkommender Kombination
in

Würfel vorstellung:

·Vierecke in den Ecken

·Kreis im Zentrum

·"Stock gebilde" auf 12 + 3 + 6 und 9 Uhr Position

3 halbe Häuser versch. Typs

3 offene Häuser "

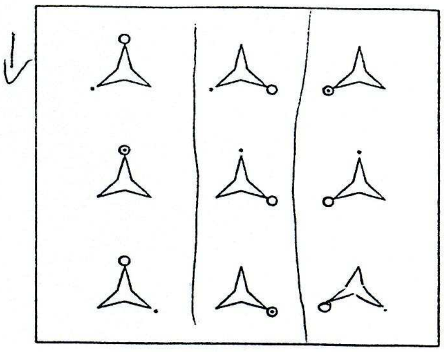
3 geschlossene Häuser "

Abbildung 3.3:

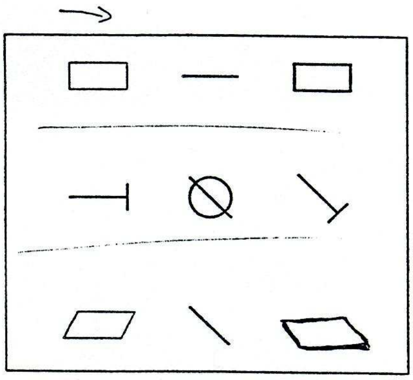
**Denkstile**

Frau Rolle

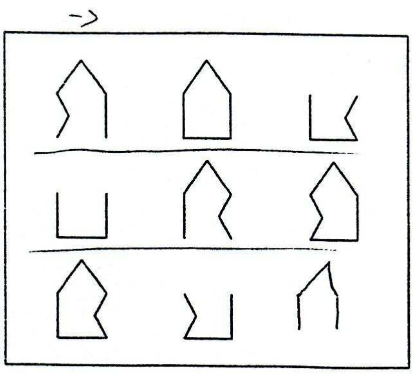
Zeichnen Sie jeweils ein passendes Bild in das letzte Feld.
Begründen Sie, warum Ihr Bild passend ist.



Wenn man die Sterne betrachtet in 3 Spalten, erkennt man das sich der kl. Punkt entweder mit dem Uhrzeigersinn dreht oder dagegen.



Betrachten wir die 3 Reihen stellen wir fest das sich aus der 1 + 2 die 3. kombinieren lässt.
Bei 1. fett
2. Richtung
3. Richtung + fett



in jeder Reihe haben wir 1. eine Öffnung nach oben 1 eine nach unten
2. sind immer zwei Seitenteile geknickt eines nach links + eines nach rechts
3. in jeder Reihe gibt es 2 Dächer.

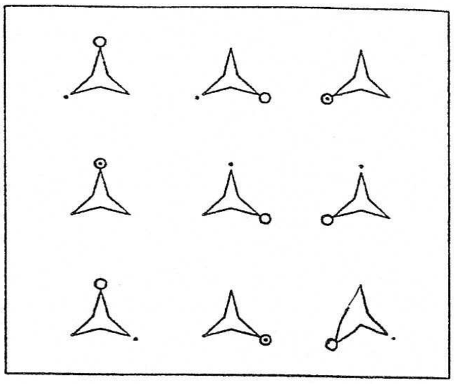
~~d~~

Abbildung 3.4:

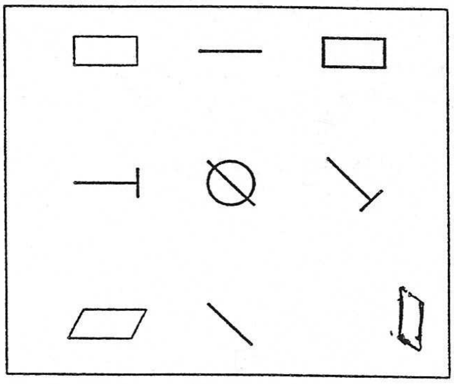
**Denkstile**

Frau Beck

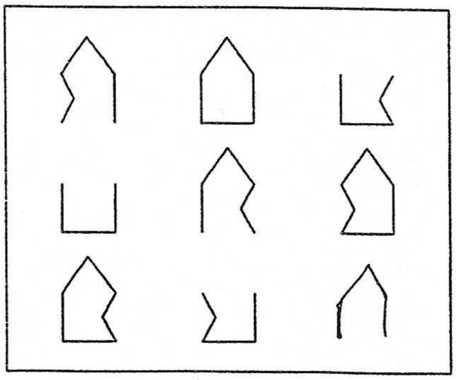
Zeichnen Sie jeweils ein passendes Bild in das letzte Feld.
Begründen Sie, warum Ihr Bild passend ist.



Der kleine Punkt ist immer bei zwei Figuren pro Reihe an der selben Stelle wie ⊙. Nur der Kringel o wechselt die Position.



Die Figuren ähneln sich der Reihe nach und es wirkt, als würden sie sich aufrichten.



In jeder Reihe gibt es je eine Figur mit den Wänden >, < und | + eine senkrechte Linie. Weiter sind je zwei Figuren unten geschlossen und jeweils zwei haben ein „Dach“.

Zu den ersten beiden Interviewthemen wurden Frau Beck, Frau Rolle und Herr Sendig befragt. Das Interviewgespräch zum Dualraum wurde nur mit Frau Beck und Herrn Sendig geführt, weil Frau Rolle deutlich machte, dass sie nicht mehr teilnehmen wollte. Sie erklärte mir im Januar 03, dass sie es aufgegeben hätte, sich mit den Vorlesungsinhalten auseinanderzusetzen.

**Das Auswertungsverfahren**

Die Interviewgespräche wurden an der Tafel geführt, wo Gelegenheit war, Aufgaben und Überlegungen zu notieren. Eine Videokamera, die sich im Rücken der beiden Gesprächspartner befand, nahm auf, was an der Tafel vor sich ging, d.h. schriftliche Notizen und viele Gesten, die etwas an der Tafel zeigten, außerdem die gesprochenen Worte. Die Studierenden wurden ermutigt, selbst an die Tafel zu schreiben. Frau Rolle und Frau Beck machten davon reichlich Gebrauch, Herr Sendig lehnte es jedoch ab. Er ist fast nie auf den Videos zu sehen.

Von den Gesprächen wurden mit einigen Auslassungen, die inhaltsfremde Störungen betreffen, Transkripte angefertigt, die die verbalen Äußerungen, die Darstellung des sich entwickelnden Tafelbildes und die Gesten, welche auf die Tafel zeigen, enthalten. Auf die Kommentierung von Besonderheiten im Tonfall wurde meistens verzichtet. Folgende Abkürzungen und Notationen werden in den Transkripten verwendet:

- Die Zeilen des Transkripts sind durchnummeriert.
- Für jeden Beteiligten wird ein eigenes Kürzel verwendet: I für die Interviewerin, B für Frau Beck, R für Frau Rolle und S für Herrn Sendig.
- Jeder Wortbeitrag beginnt mit einer neuen Zeile.
- Bemerkungen sind in runde Klammern gesetzt. Dazu gehören Pausen, deren ungefähre Länge in Sekunden angegeben ist. Unverständliche Aussagen oder Wörter werden durch ‘(?)’ gekennzeichnet.
- Ein besonders betontes Wort ist unterstrichen.
- Notationen an der Tafel sind durch Sterne ‘*’ zu Beginn und am Ende gekennzeichnet. Wenn jemand etwas notiert und zugleich vorliest, was er schreibt, ist diese Äußerung nur in der schriftlichen Form angegeben.
- Die meisten Teile des Tafelanschriebs werden im Transkript mit kleinen lateinischen Buchstaben in runden Klammern benannt, und mit denselben Zeichen wird darauf Bezug genommen, wenn später jemand auf den Tafelanschrieb zeigt. Es kommt oft vor, dass ein Tafelanschrieb ergänzt oder verändert wird. In dem Fall wird seine Bezeichnung in seiner neuen Version meist mit einem Index versehen, und zwar in folgender Reihenfolge: (a), (a’) (a”), (a”’), (a°), (a°°), (a°°°).
- Die Äußerung ‘hm’ deutet leichte Zustimmung an; wenn der Tonfall Zustimmung betont oder wenn er auf Zweifel deutet, wird dies in Klammern vermerkt.

- Wenn die Äußerung ‘eh’ oder ‘ehm’ sich auf eine Bemerkung des Gegenübers bezieht, bedeutet sie, dass der oder die Sprecher(in) nicht ganz einverstanden ist. Andernfalls deutet sie meist nur eine Überlegung an. An Stellen, wo diese Beschreibung nicht zutrifft, ist dies in einem Kommentar erläutert.

Ein kurzer Transkriptausschnitt aus dem Vektorrauminterview mit Herrn Sendig gibt ein Beispiel für die meisten der genannten Merkmale:

S: Ja. Und dann würde in der ersten Koordinate die Menge rot stehen, also wieviel davon.
I: Hm. Also irgendwelche Koordinaten, und da steht, also, wir schreiben hier irgendwelche Zahlen rein
(b) * $(1, 2, 7, 4)$ *
und das (zeigt in (b) auf die erste Koordinate) ist die Menge an rot. Genau, also das könnten die Vektoren sein. Und was könnten die, was könnte dann linear abhängig, linear unabhängig, Basis, was könnte das bedeuten?
S: (12 Sek) Ja, linear abhängig könnte heißen, dass ich halt aus zwei an sich unterschiedlichen Einträgen trotzdem die gleiche Farbe herauskriege. Also z.B. jetzt zwei vier vierzehn und acht. (I ergänzt (b) zu:)
(b’) * $\begin{matrix} (1, & 2, & 7, & 4) \\ (2, & 4, & 14, & 8) \end{matrix}$ *
S: Wenn ich das Doppelte nehme, ist das dann die gleiche Farbe. Obwohl ich glaube nicht, dass das das ganze Problem darstellt, find ich.
I: Ja, warum?

Die vollständigen Transkripte sind im Anhang dieser Arbeit zu finden. Zu jedem der drei Restklasseninterviews und der zwei Dualrauminterviews gibt es ein Transkript; die Vektorrauminterviews sind alle in zwei thematische Teile untergliedert, und zu jedem Teil gibt es ein eigenes Transkript.

Die Deutung der Inverviewtranskripte orientiert sich an der Schlussweise der ‘Abduktion’. Dieser Begriff stammt von dem Philosophen Ch. S. Pierce. Er bezeichnet die Abduktion, die Induktion und die Deduktion als drei Arten der logischen Schlussfolgerung, die unterschiedlichen Zwecken dienen: Die Induktion und die Deduktion sind verschiedene Formen des Gültigkeitsnachweises von Hypothesen, die weitere Tatbestände als Begründung heranziehen. Die Abduktion hingegen ist eine Form logischen Schließens, die Hypothesen erzeugt. Dabei nimmt sie nicht Bezug auf Argumente oder Beobachtungen, um die Hypothesen zu begründen, sondern bleibt innerhalb eines Rahmens des Selbstverständlichen, Plausiblen.[8] Beck/Jungwirth (1999) übertragen dies auf die Interpretation von Transkripten:[9]

> “Die Abduktion besteht nun darin, eine neue allgemeine Regel zu konstruieren, mit der sich ein unerwartetes Ereignis oder ungeklärte Aspekte eines ansonsten bekannten Phänomens erklären lassen. Man versucht, probeweise neue Regeln zu formulieren, unter deren Gültigkeit das überraschende Ereignis plausibel wird.”

[8]Vgl. Wille (2002b).
[9]Beck/Jungwirth (1999), S. 246.

Dazu geben die beiden Autoren ein Beispiel von Pierce wieder: Kepler machte Beobachtungen, die in Widerspruch zum kopernikanischen Weltbild standen. Er ließ die bis dahin akzeptierte These der Kreisbahnen fallen und bildete eine Hilfshypothese von ellipsoiden Planetenbahnen. Mit anderen Worten: Er überlegte sich eine Eigenschaft, aus der die gewonnenen Daten folgen würden, falls die Eigenschaft zuträfe.

Die vorliegende Pilotstudie, die nicht auf Hypothesen aus vorausgegangenen Studien über Vorstellungen und Strategien zur Rekonstruktion von Darstellungen der linearen Algebra aufbauen kann, ist explorativ ausgelegt: in der Interpretation der erhobenen Daten sollen Hypothesen generiert werden. Dafür eignet sich die Schlussweise der Abduktion, die im Sinne der Definition von Beck/Jungwirth (1999) angewendet wird: Es wurden Hypothesen bezüglich der zugrunde liegenden Vorstellungen, Überzeugungen oder Handlungsprinzipien gesucht, zu denen die Äußerungen passen und aus denen heraus sie sich erklären lassen. Solche Hypothesen wurden sequentiell aufgestellt. Diejenigen, sie sich zu späteren Äußerungen als widersprüchlich herausstellten, wurden wieder verworfen. Die meisten Transkripte wurden von mir selbst zweimal in zeitlich deutlich getrennten Durchgängen ausgewertet, einige wenige wurden zusätzlich in einer Forschergruppe an der Universität Duisburg/Essen analysiert.

Die Interpretation der Interviewgespräche berücksichtigt drei Bedeutungskategorien, die die Semantik bei sprachlichen Ausdrücken, aber auch allgemein bei Zeichen, sieht. Die Bedeutung eines Zeichen kann sein:[10]

1. das Zeichen selbst (seine äußere Gestalt),
2. ein Objekt, für das das Zeichen stellvertretend verwendet wird,
3. ein Referenzobjekt, auf das die äußere Gestalt des Zeichens Hinweise gibt.

Die dritte Verwendungsform gibt einem Zeichen eine doppelte Bedeutung, in der die beiden ersten Bedeutungstypen verbunden sind. Ein Beispiel ist:

> Der sprachliche Ausdruck “Dies ist ein Baum.” kann sprachbezogen als eine sinnvolle Aussage verstanden werden. Dies ist ein Verstehen im Sinne der ersten Bedeutung. Zugleich verweist der Ausdruck im Sinne der dritten Bedeutung auf eine bestimmte Pflanze. Die grammatische Struktur des Ausdrucks kennzeichnet dies. (Um zu schließen, welcher Baum genau gemeint ist, fehlen dem Leser weitere Informationen.)

Steinbring[11] hat ein Instrument zur Beschreibung und Analyse von Verstehensprozessen im Mathematikunterricht entwickelt, das diesem Zusammenspiel von Zeichen und Bedeutungen Rechnung trägt. Es dient der Interpretation von Interaktionsprozessen, in denen Zeichen in ständig wechselnden Bedeutungen verwendet werden:

[10]Vgl. Mittelstraß (1996), Lexikon für Philosophie und Wisenschaftstheorie, Bd 3, unter dem Stichwort ‘Semantik’. Unter dem Stichwort ‘Semiotik’ sind Varianten der Beschreibung dieser Kategorien und des Zusammenwirkens der verschiedenen Bedeutungen gegeben.

[11]Vgl. Steinbring (1993).

Das epistemologische Dreieck:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{Gegenstand/ Referenzkontext} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr, shift left] & & \text{Zeichen/ Symbol} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, shift left] \\
& \text{Begriff} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

Eine Schwierigkeit am Verstehen eines mathematischen Begriffs besteht darin, dass er zumeist nicht ein Ding an sich, sondern eine Beziehung ist. Er kann daher nicht auf direkte Weise dargestellt werden, sondern muss durch die Lernenden erschlossen werden.[12] Die mentale Konstruktion des Begriffs geschieht in der Auseinandersetzung mit gegebenen (oder selbst erfundenen) Zeichen und mit Gegenständen oder Kontexten, auf die die Zeichen verweisen. Das epistemologische Dreieck ist ein Werkzeug, mit dem ein Beobachter den Verstehensprozess beschreiben kann:

Der Begriff steht im unteren Eckpunkt des Dreiecks. Das Zeichen oder Symbol[13] bezeichnet den Begriff oder einen Aspekt des Begriffs, und wird interpretiert, indem es auf einen Gegenstand oder zumindest einen bestimmten Kontext bezogen wird. Dieser Gegenstand oder Referenzkontext kann ebenso wie das Zeichen eine mathematische Darstellungsform sein, ist dem Lernenden aber relativ vertrauter als das Zeichen, so dass er herangezogen werden kann, um das Zeichen zu deuten. Dabei wird es im Laufe eines Verstehensprozesses zunehmend darum gehen, anstelle des Bezugs einzelner Merkmale des Referenzkontextes und des Zeichens die Strukturen des Referenzkontextes mit denen der Zeichendarstellungen in Beziehung zu setzen und als Wesensmerkmal des Begriffs zu erkennen.[14] Im Fortgang der Erschließung eines mathematischen Begriffs können Zeichen und Referenzkontexte häufig gewechselt, ja sogar ihre Rollen vertauscht werden.

Während eines Interaktionsprozesses zwischen Lernenden (und Lehrenden) ist ein zu erschließender mathematischer Begriff unter Umständen noch gar nicht thematisiert und mit einem Namen versehen. Dennoch genügen die beiden Eckpunkte 'Zeichen/Symbol' und 'Gegenstand/Referenzkontext' des Dreiecks allein nicht zur Beschreibung des Lernens. Steinbring (2005)[15] erläutert, dass ein unabhängig von diesen beiden Eckpunkten existierender 'Begriff' mit einfließt: Das Zeichen/Symbol selbst ist nicht der eigentliche Begriff. Ebensowenig ist der Begriff mit dem Referenzkontext identisch, denn der abstrakte Begriff ist noch nicht vom Lernenden konstruiert, kann also (noch) nicht als Referenzobjekt verwendet werden. Das Zeichen braucht aber eine Referenz, um überhaupt mit Bedeutung versehen zu werden. Hierzu - quasi als vorläufiger Ersatz für den noch nicht konstruierten Begriff - dient der 'Referenzkontext'. Hier wird die Beziehung oder Struktur, die den Begriff ausmacht, in eingebetteter Form dargestellt.

Einen anderen Ansatz zur Beschreibung der Entstehung mathematischen Wissens verwendet Dörfler.[16] Er beobachtet die Verwendung von Zeichen in der ersten

[12]Vgl. Steinbring (2005), S. 19f.

[13]Steinbring (2005) verwendet 'Zeichen' im Sinne der zweiten oben genannten Bedeutung als etwas, das für etwas steht. Er spricht von einem 'Symbol', wenn die Gestalt eines Zeichens zusätzlich eine Beziehungsstruktur kennzeichnet.

[14]Vgl. Maier/Steinbring (1998).

[15]S. 28ff.

[16]Vgl. z.B. Dörfler (2003).

oben genannten Bedeutung, in der Zeichen selbst als mathematische Objekte behandelt werden, ohne dabei für den Benutzer referentielle Bedeutung zu haben. Dörfler betrachtet Zeichen, die in ihrer Gestalt - zusammen mit zugehörigen regelhaften Operationen - mathematische Strukturen widerspiegeln. Solche Zeichen nennt er 'Diagramme', das Erfinden geeigneter Diagramme und das geschickte Operieren mit und auf ihnen bezeichnet er als 'diagrammatisches Denken'.[17]

Die Interpretation der Interviewgespräche ist offen für Verwendungsmöglichkeiten von Zeichen in allen drei in der Semiotik beschriebenen Bedeutungen. Das heißt insbesondere, dass sie sowohl referentiellen wie auch nicht referentiellen Gebrauch von Zeichen als Möglichkeit berücksichtigt. Das Ergebnis der ersten Interpretation eines Transkripts besteht aus den gewonnenen, mit dem gesamten Transkript in Einklang stehenden Deutungshypothesen zu den einzelnen Äußerungen der Interviewten. Dieses Ergebnis wird in einer (oder mehreren alternativen) Hypothese über Vorstellungen der interviewten Person und über ihre Strategien zur Erfassung und Repräsentation von Wissen zusammengefasst. Als Hilfsmittel zum Herausarbeiten und Kommunizieren dieser impliziten Strategien wird an manchen Stellen die Idee des diagrammatischen Denkens, an manchen Stellen das epistemologische Dreieck verwendet. Dieses Analyseinstrument wird jedoch in abgewandelter Form genutzt: Zum Einen wird es in einem anderen Zusammenhang eingesetzt, als dem von Steinbring vorgesehenen, denn die Interviews sind kein Unterricht, in dem vorrangig in der sozialen Interaktion neues Wissen konstruiert wird[18]. Dennoch findet dort zeitweilig Lernen in sozialer Interaktion statt, und sie sind insofern mit Unterricht vergleichbar. Zum Zweiten dient das epistemolgische Dreieck in dieser Arbeit der Beschreibung der Wechselwirkung von Begriffen, Zeichen und zugehörigen Referenzkontexten, auf die die jeweils interviewte Person Hinweise gibt, nicht der Beschreibung des Interaktionsprozesses mit der Interviewerin, denn der Schwerpunkt des Untersuchungsinteresses liegt bei der interviewten Person.

In der Zusammenfassung nach dem ersten Interpretationsdurchgang, in der die vermuteten Strategien und Repräsentationen des oder der Interviewten zusammengestellt werden, wird neben inhaltlichen Themen besonderes Augenmerk auf die mentalen Konstruktionen von abstrakten Konzepten gelegt. Weitere Merkmale, auf die in den Schlussfolgerungen eingegangen wird, sind der Einsatz von kognitiven Werkzeugen, Zusammenhänge zwischen dem Vorgehen der oder des Studierenden und einer Präferenz für prädikatives oder funktionales Denken, und der Umgang mit zu Tage tretenden Widersprüchen.

Im letzten Schritt werden die Ergebnisse aus den acht Interviewdeutungen miteinander im Hinblick auf die gezeigten inhaltlichen Vorstellungen und strategischen Verhaltensweisen verglichen.[19]

[17]Beispiele für diagrammatisches Denken in der Geschichte der Mathematik werden im Abschnitt 1.2.2 über formale Darstellungen gegeben.

[18]Steinbring bezieht in Maier/Steinbring (1998) sein Analyseanliegen speziell auf Unterrichtssituationen eines 'gemeinsam erarbeitenden Gesprächs'.

[19]Einige Ergebnisse der Analysen zu den Vektorrauminterviews sind bereits in A.Fischer (2003) veröffentlicht. Sie werden in dieser Arbeit jedoch nochmals vorgestellt.

### Die Kombination von Übungsleiterin, Interviewerin und Forscherin in einer Person

Eine Besonderheit des hier vorgestellten Forschungsdesigns ist die Mehrfachrolle, die ich selbst spiele. Eine solche Kombination birgt die Gefahr von absichtlichen oder unabsichtlichen Einflussnahmen auf die zu erhebenden Daten in mehrfacher Hinsicht:

- Das Interesse der Lehrenden kann - stärker als bei einem Fremdinterviewer - davon geleitet sein, ihre Lernenden in einem positiven Licht erscheinen zu lassen, so dass im Interviewgespräch 'Hilfen' gegeben werden, die den Studierenden Dinge in den Mund legen, welche nicht ihren eigenen Gedanken entspringen. Eine Einflussnahme mit solchen Effekten findet zweifellos an der einen oder anderen Stelle statt und muss in der Analyse der Daten auf ihren Ursprung zurückgeführt werden.

  In diesem besonderen Forschungsprojekt, wo das Anliegen der Interviewerin eine Suche nach Ideen zur linearen Algebra, die den eigenen Horizont erweitern, ist, spielt diese Einflussnahme eine geringere Rolle als bei einem Projekt, welches die Leistung der Studierenden evaluieren möchte.

- Die Kombination von Forscherin und Interviewerin ist in ähnlicher Weise problematisch: Hier besteht die Gefahr, dass bei der Transkriptanalyse Deutungen vorgenommen werden, welche 'blinde Flecken' aufweisen, weil sie von Voreingenommenheit geprägt sind.

  Ich habe versucht, einem solchen Verhalten bewusst entgegenzutreten, kann es aber nicht vollständig ausschließen. Eine Hilfe waren einige gemeinsame Analysen mit einer Forschergruppe in Duisburg-Essen und die zweifache Analyse der Daten, welche in zwei zeitlich weit auseinander liegenden Durchgängen geschah. Der erste Interpretationsvorgang wurde wenige Monate nach den Interviewgesprächen vorgenommen, der zweite hatte einen Abstand von ein bis anderthalb Jahren von den Interviewgesprächen. Dieser eröffnete einige Perspektiven, die im ersten noch nicht auftraten.

So problematisch der gewählte Ansatz der Kombination von drei Rollen in einer Person aufgrund seiner Subjektivität ist, so gibt er andererseits auch einmalige Möglichkeiten, die insbesondere für eine explorative Studie, die keine bestimmten erwarteten Verhaltensweisen oder Kenntnisse nachzuweisen versucht, von großem Wert sind: Die Verbindung von Übungsleiterin und Forscherin erlaubte eine Konzeption der Interviewgespräche, welche die Ziele und Inhalte von Vorlesung und Übung ohne Wissenslücken berücksichtigen konnte. Wesentliches Merkmal der Gespräche war ein Anspruchsniveau, das sich an der Grenze der Fähigkeiten der Interviewten bewegte. Um ein solches zu treffen, waren genaue Kenntnisse des Lehr-Lern-Vorgangs nötig. Dies betrifft nicht nur die Planung der Interviewgespräche, sondern insbesondere auch die Durchführung, da hier große Spielräume offen standen. Die Frage, welche Hilfen und Anregungen gegeben werden sollten, musste spontan und im Hinblick auf die Ziele des Forschungsvorhabens geschehen. Hierbei spielte unter Anderem auch das persönliche Vertrauensverhältnis zwischen der Interviewerin und den Interviewten eine entscheidende Rolle, um die Interviewten zu Aussagen aus dem intuitiven, unfertigen Bereich ihrer Vorstellungen zu bewegen. Die Studierenden nahmen mich als Übungsleiterin nicht in der Rolle einer notengebenden Lehrerin sondern in der Rolle einer Beraterin wahr, die sie beim Lernen unterstützt.

### 3.1.2 Leitfäden für die Interviewgespräche

Für die Interviewgespräche wurden Leitfäden entwickelt, welche jeweils ein oder zwei Problemsituationen vorgaben, um die sich das gesamte Gespräch rankte, und innerhalb derer einige wenige, aufeinander aufbauende Fragen und Impulse im Voraus geplant wurden. Die Fragen wurden so offen formuliert, dass die Probanden einen längeren Gedankengang entwickeln mussten und vielfältige Möglichkeiten für ihre Antworten und ihre Vorgehensweisen hatten. Der Verlauf des Gesprächs zu einer Problemsituation durfte auch von dem geplanten Verlauf abweichen, denn er sollte sich nach dem Verhalten der Probanden richten. Sie bekamen vor den Interviews keine Gelegenheit, sich mit den Aufgaben zu beschäftigen, so dass sie unmittelbar im Gespräch mit der Interviewerin Lösungswege suchen mussten, damit auch Fehlversuche und Ideen, die bei längerem Nachdenken verworfen wurden, in der Studie festgehalten werden könnten. Beim Entwurf der Interviewleitfäden war ein zentrales Problem, wie die impliziten Vorstellungen der Studierenden und ihre Strategien der Informationsverarbeitung zum Vorschein kommen können. Diese sind ihnen selbst vermutlich oftmals gar nicht bewusst sind und können daher nicht explizit erfragt werden. Die Gespräche begannen mit Fragestellungen, die den Probanden helfen sollten, sich in das Interviewthema einzufinden, und nahmen dann im Schwierigkeitsgrad zu. Um die Studierenden zu Äußerungen und Verhaltensweisen herauszufordern, die Einblicke in ihre Vorstellungen von mathematischen Begriffen und in ihre Denkvorgänge geben, wurden die Aufgaben so konzipiert, dass die Probanden sie nicht mit kopierten Lösungsstrategien bearbeite konnten, sondern eigene Konzepte und Vorgehensweisen entwickeln mussten. Die Aufgaben betrafen somit Begriffe, die den Studierenden aus der Vorlesung bekannt waren, verlangten aber, dass die Probanden diese in neuen Zusammenhängen oder aus einem neuen Blickwinkel betrachten und behandeln mussten. Sie sollten sich in den Interviews an der Grenze zwischen vertrautem Gebiet und Neuland bewegen. Im Blick auf die in der Literatur[20] vielfach beklagten Verhaltensweisen, die aus einem Mangel an echtem Verständnis resultieren, sollten diese Aufgaben insbesondere verhindern, dass die Studierenden sich erfolgreich formaler Notationen und Handlungsvorgänge bedienten, ohne sie zu verstehen. Insgesamt hatten die Gespräche damit ein hohes Anspruchsniveau, auf dem die Studierenden insbesondere auch in kognitive Konflikte geführt werden sollten. Der Zweck dieser Konstruktion bestand nicht darin, Schwächen aufzudecken, oder Maßstäbe aufzuzeigen, an denen ihre Leistung zu messen ist! Sondern die Gespräche sollten Strategien im Umgang mit kognitiven Konflikten offenlegen. Zudem sollten diese Konflikte Gelegenheiten eröffnen, Merkmale der internen Modelle zu beobachten, welche in Situationen reibungslosen Einsatzes dieser Modelle verdeckt bleiben würden.

Eine andere Strategie, Merkmale der Vorstellungen von Studierenden zu finden, ohne direkt danach zu fragen, kopierte eine in der Mathematik häufig eingesetz-

[20] Vgl. den Abschnitt 2.1.3 zu Problemen von Studierenden mit der linearen Algebra.

te Methode zur Entdeckung und Darstellung von Strukturen: Die Betrachtung von strukturerhaltenden Abbildungen auf einer Menge, die mit Strukturen versehen ist, gibt oft Einblicke in innere Zusammenhänge dieser Menge. Entsprechend erhoffte ich vom Umgang der Interviewten mit strukturerhaltenden Abbildungen Einblicke in ihre inneren Repräsentationen von Strukturen. Zentrale Fragen in den ersten beiden Interviews forderten, dass die Studierenden sich mit Homomorphismen auf den betrachteten Gruppen bzw. Vektorräumen auseinander setzten. Im Dualrauminterview wurde auf eine entsprechende Aufgabenkonstruktion verzichtet, weil hier lineare Abbildungen bereits als Elemente der betrachteten Menge auftraten. Dies veranlasste eine gleichzeitige Auseinandersetzung mit den Strukturen von zwei Vektorräumen auf impliziten Weg, ohne dass eine Abbildung, die diesen Transfer beschreibt, thematisiert werden musste.

Das Gesprächskonzept hat zur Folge, dass die Interviewten nicht nur ihre Kenntnisse zeigen können, sondern dass sie während der Gespräche vielfach Gelegenheit haben, hinzuzulernen. Dies geschieht weniger durch neue Informationen, die sie im Gespräch erhalten, als vielmehr dadurch, dass sie in manchen Aufgaben gefordert sind, ihr Wissen neu zu organisieren und mental Zusammenhänge zwischen bislang unverbunden repräsentiertem Wissen herzustellen. Dies ist im Sinne der Untersuchung, da sie nicht den Erfolg einer Lehrveranstaltung messen möchte, sondern an Möglichkeiten und Vorgehensweisen des Verstehens und Repräsentierens komplexer mathematischer Strukturen und abstrakter Begriffe durch die Studierenden interessiert ist.

Die Leitfäden zu den drei verschiedenen Themen, an denen sich die einzelnen Interviewgespräche orientierten, werden im Folgenden vorgestellt. Der tatsächliche Ablauf der Gespräche unterscheidet sich von den Leitfäden. Er kann anhand der Transkripte im Anhang der Arbeit nachvollzogen werden.

Die Gespräche zu den Restklassen waren eingebunden in ein umfangreicheres Interview, dessen erster Teil die Abbildungen von der Menge $M = \{1, 2\}$ in sich zum Thema hatte. Der Leitfaden bezieht sich nur auf den zweiten Teil, welcher Restklassen zum Thema hatte. Transkripte wurden ebenfalls nur für diesen Teil angefertigt und analysiert. Der Leitfaden zu den Gesprächen zum Vektorraum gibt einen Überblick über den gesamten geplanten Interviewverlauf. Diese Gespräche wurden vollständig transkribiert. Aufgrund des insgesamt großen Umfangs dieser Interviewgespräche wurde der Teil 1b) in den späteren Interviewanalysen jedoch ausgelassen. Zu den Dualrauminterviews ist aus demselben Grund ein zweiter, im Leitfaden nicht mehr auftretender, Teil der Interviewgespräche in den Transkripten und Analysen nicht berücksichtigt worden.

**Das Restklasseninterview**

Der Leitfaden:

An der Tafel wird die Menge $N$ notiert:

$$N := \{\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$$

a)
Woher kennst du diese Menge?
b)
Die Elemente von $N$ werden benannt:
$A = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, B = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, C = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$
Was ist $A + B$ ? Was ist $B + C$ ?
c)
$H := Hom(N, N) = \{\varphi : N \to N \mid \varphi \text{ ist Gruppenhomomorphismus}\}$.
Gib die einzelnen Elemente von $H$ an; begründe die Homomorphismuseigenschaft bei einer der Abbildungen.

Einordnung des Leitfadens in den Zusammenhang der Lehrveranstaltung

Die Restklasseninterviews fanden im November 02 in der sechsten und siebten Vorlesungswoche, ca. drei Wochen nach Beendigung des Themas 'Gruppen' in der Vorlesung statt. Diese begann mit einer axiomatischen Definition des Begriffs 'Gruppe'. Sie stellte außerdem dar: Einfache Folgerungen aus den Gruppeneigenschaften, die Darstellungsform einer Gruppentafel für die Verknüpfung in einer endlichen Gruppe, die Begriffe 'Untergruppe' und 'Gruppenhomomorphismus' und einige ihrer Eigenschaften, außerdem einige Beispiele, insbesondere die symmetrischen Gruppen $(S_n, \circ)$ und die Gruppen von Restklassen $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, jeweils für $n \in \mathbb{N}$. In der Woche vor den Interviewgesprächen zu Restklassen wurden in der Vorlesung die Körper $(\mathbb{F}_p, +, \cdot) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ für $p$ Primzahl eingeführt. Die Restklassen modulo $n$ für positive ganze Zahlen $n$ wurden formal als die Mengen $M_r = r + n\mathbb{Z}$, mit $r \in \{1, ..., n-1\}$ eingeführt. Die Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ wurde definiert als Menge der Restklassen $\{M_0, ..., M_{n-1}\}$. Ferner wurde erwähnt: Für eine ganze Zahl $a$, die beim Teilen durch $n$ den Rest $r$ lässt, schreibt man $a \equiv r \pmod n$ und es gilt: $a - r$ ist durch $n$ teilbar und $a + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z}$. Außerdem heißt jedes Element der Restklasse $r + n\mathbb{Z}$ Repäsentant der Restklasse. Etwas später wurde die Notation $\overline{a} = a + n\mathbb{Z}$ verwendet, die vor allem in den Übungen favorisiert wurde. Die Addition auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ wurde folgendermaßen definiert: Für $r, s \in \{0, ..., n-1\}$ sei $t$ der Rest bei der Division von $r + s$ durch $n$, also

$$t = \begin{cases} r+s & \text{falls } 0 \leq r+s \leq n-1 \\ r+s-n & \text{falls } n \leq r+s \leq 2n-2 \end{cases},$$

und es sei $M_r + M_s = M_t$. Mit den Darstellungen $\overline{r} + \overline{s}$ wurde die Addition analog durch Berechnen des Restes von $r + s$ ausgeführt.

Aufgaben aus den Übungen, die mit Restklassen in Beziehung stehen und vor den Interviewgesprächen besprochen wurden, waren:

Blatt 3, Aufgabe 4:
a) Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie, dass die Menge der Restklassen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\backslash\{0+n\mathbb{Z}\}$ durch die Definition $(a+n\mathbb{Z})\cdot(b+n\mathbb{Z}) = ab+n\mathbb{Z}$ zu einem kommutativen Monoid wird.
b) Sei nun $n = p$ eine Primzahl. Beweisen Sie, dass es für jede Zahl $q \in \mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$ ein $r \geq 0$ gibt mit $q^r \equiv 1(\text{mod } p)$.
Tipp: Betrachten Sie $q(\text{mod } p), q^2(\text{mod } p), q^3(\text{mod } p)$, u.s.w.
c) Folgern Sie aus b), dass $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\backslash\{0+p\mathbb{Z}\},\cdot)$ eine Gruppe ist.

Blatt 4, Aufgabe 3
a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, a \longmapsto a + n\mathbb{Z}$ einen Ringhomomorphismus definiert.
b) Für welche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_+$ gibt es einen von der Nullabbildung verschiedenen Ringhomomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?
Tipp: Untersuchen Sie zuerst die Fälle $m = 2n$ und $m = n + 1$.

In den Übungen, in denen die Aufgabe 3 von Blatt 4 besprochen wurde, wurden eine Reihe von Möglichkeiten für Homomorphismen ausprobiert, indem jeweils die Wirkung der Vorgabe eines Bildes von $\overline{1} = 1 + n\mathbb{Z}$ untersucht wurde. Dieses Verfahren konnte im Restklasseninterview von den Interviewten zur Bestimmung von $\text{Hom}(N, N)$ übernommen werden. Die Menge der Homomorphismen einer gegebenen Gruppe hatten die Studierenden vor dem Interview noch nicht kennen gelernt. Neu war für sie ebenfalls die Darstellungsform von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ im Interview.

Aspekte möglicher Gesprächsverläufe

Der Gesprächseinstieg beginnt mit einer Notation für $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, die den Studierenden nicht geläufig ist. Sie betont den Mengencharakter der Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Die anschließende Bezeichnung dieser Elemente mit den Buchstaben $A, B, C$ verstärkt diesen Eindruck womöglich noch. Die Frage nach einer Summe wie $A+B$ oder $B+C$ kann durch die Deutung von $A = \overline{0}, B = \overline{1}, C = \overline{2}$ oder $A = 3\mathbb{Z}, B = 3\mathbb{Z} + 1, C = 3\mathbb{Z} + 2$ mit Hilfe der in den Übungen vielfach angewandten Regeln zur Addition von Restklassen beantwortet werden. Es ist aber auch denkbar, dass die Betonung des Mengencharakters von der Interviewerin gewählten Darstellungen diese Identifizierung behindert und zu einer Auseinandersetzung mit der Frage führt, wie es überhaupt möglich ist, dass Mengen wie Zahlen addiert werden.

Der Teil c) fragt nach den Homomorphismen[21] $N \longrightarrow N$. Es gibt drei solche Abbildungen, nämlich:

$$\alpha : \begin{array}{l} N \longrightarrow N \\ A \longmapsto A \\ B \longmapsto B \\ C \longmapsto C \end{array} \qquad \beta : \begin{array}{l} N \longrightarrow N \\ A \longmapsto A \\ B \longmapsto C \\ C \longmapsto B \end{array} \qquad \gamma : \begin{array}{l} N \longrightarrow N \\ A \longmapsto A \\ B \longmapsto A \\ C \longmapsto A \end{array}$$

Zur Beantwortung dieser Aufgabe ist es hilfreich, die Elemente von $N = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ in

[21] Der für diese Situation angemessene spezielle Ausdruck ‘Epimorphismus’ ist den Studierenden nicht geläufig.

ihrer Rolle als Gruppenelemente zu sehen. Wenn man erkennt, dass $A$ das neutrale Element ist, so kann man den - mehrfach in Übungen angewandten - Satz benutzten, dass das neutrale Element auf sich selbst abzubilden ist. Ebenso kann verwendet werden, dass die identische Abbildung von einer Gruppe in sich selbst immer ein Homomorphismus ist. Es bleiben zwei weitere Möglichkeiten für das Bild von $B$, aus denen jeweils das Bild von $C$ unter einem Homomorphismus wegen $B + B = C$ als Summe des Bildes von B mit sich selbst erschlossen werden kann.

Auf die vollständige Auflistung aller Homomorphismen soll bei der Diskussion der Aufgabe kein Wert gelegt werden. Es geht nicht um das Abhaken erfüllter Aufgaben. Von Interesse für die Untersuchung ist hier nur der Umgang mit einem Homomorphismus, nämlich das Vorgehen bei der Konstruktion eines solchen und bei der Untersuchug, ob eine Abbildung ein Homomorphismus ist. So ist nun z.B. zu untersuchen, ob $\beta$ ein Homomorphismus ist. Im Gespräch sollen nicht alle neun Additionen überprüft, sondern nur eine allgemeine Überlegung angestellt werden, was zu tun ist, um dann ein Beispiel herauszugreifen. Da ist z.B. zu tun:

$$\beta(B+C) = \beta(A) = A \;\text{ und }\; \beta(B) + \beta(C) = C + B = A,$$
$$\text{also }\; \beta(B+C) = \beta(B) + \beta(C)$$

In diesem Beispiel werden $B$ und $C$ in drei Zusammenhängen als Objekte behandelt: Sie sind Elemente von $N$, sie sind Summanden und auf sie wird die Abbildung $\beta$ angewendet. Somit erfordert dieses Beispiel die Sichtweise, dass die Mengen $B$ und $C$ Objektcharakter haben. Zudem wird die in Aufgabenteil b) zu erklärende Addition in Teil c) angewendet. Sowohl der Charakter der Restklassen als auch ihre Addition spielen in dieser Aufgabe eine wesentliche Rolle, ohne dass der Fokus der Studierenden darauf liegt.

Die Epimorphismen als strukturerhaltende Abbildungen offenbaren Struktureigenschaften der mathematischen Gruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$.[22] Ebenso kann der Umgang der Studierenden mit diesen Abbildungen Eigenschaften ihrer internen Repräsentationen der Gruppe sichtbar machen. Dies ist direkt auf der Ebene der Definition möglich, wo der Umgang mit den Elementen der Gruppe und mit ihrer Addition erfolgt, es ist aber auch auf der Ebene der Strukturen möglich, falls diese von den Studierenden überhaupt in den Blick genommen werden. Ein Beispiel ist die oben vorgeschlagene Argumentation mit der Rolle des neutralen Elements in der Gruppe und beim Abbilden. Die Homomorphismen selbst sind in den Zielen, die mit dem Interview verfolgt werden, nur Nebenthema. Die zentrale Forschungsfrage beschäftigt sich mit der Konstruktion von internen Repräsentationen der Gruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$, ihrer Elemente und ihrer Addition.

[22] Hierzu gehört z.B. die Tatsache, dass die Gruppe keine echte Untergruppe besitzt.

### Das Vektorrauminterview

Der Leitfaden:

**1)**
Eine Farbmischmaschine soll programmiert werden. Der Mischbehälter hat 4 Zuflüsse, deren Öffnungsdauer durch einen Computer geregelt wird. Die Zuflüsse speisen den Mischbehälter mit den Farben rot, gelb, grün und blau:

```
| rot  |  | gelb |  | grün  |  | blau  |
-------   -------   --------   --------
       \      |         |      /
      |________________________|
```

a)
- Wie kann man einen Vektorraum als mathematisches Modell für diese Maschine verwenden?
- Was heißt hier linear abhängig, linear unabhängig, Erzeugendensystem, Basis?
- Ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? (oder eine entsprechende Frage, die zur Modellierung der oder des Interviewten passt)

b)
Die Firma möchte eine neue Farbe produzieren, von der sie weiß, dass sie sich aus drei Teilen eines bestimmten Orange $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, einem Teil Türkis $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und vier Teilen Braun $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ zusammensetzt.

- Was muss der Computer rechnen, um die Maschine zu instruieren?
- Was bedeutet die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?
- Was bedeutet es in dem mathematischen Modell, wenn in die Zuflussbehälter statt Rot, Gelb und Grün die Farben Orange, Türkis und Braun gegeben werden?

**2)**
(Bemerkung zur Notation: $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ bezeichnet die Menge der Polynome in $x$ vom Grad kleiner oder gleich 1 mit reellen Koeffiezienten.)

$f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung mit

$$f(x+1) = (1,0) \quad \text{und} \quad f(2x) = (0,4).$$

a)
Gibt es eine lineare Abbildung mit diesen Eigenschaften? Wenn ja, gibt es mehr als eine?
b)
Nachdem geklärt ist, dass $f$ eine wohldefinierte lineare Abbildung ist: Wie kann man $f$ mit einem rechteckigen Zahlenschema (Matrix) angeben? Welche zusätzlichen Erklärungen sind dazu nötig?
c)
Wenn bei b) die Antwort $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ gegeben wurde: Wie sieht die Matrixdarstellung bzgl. der Basis $\{1, x\}$ aus?
Wenn bei b) die Antwort $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben wurde: Eine andere Möglichkeit für eine Matrixdarstellung ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$! Erkläre!

Einordnung des Leitfadens in den Zusammenhang der Lehrveranstaltung

Die Interviews zur Strukturierung eines Vektorraums mit Hilfe einer Basis fanden im Januar 03 in der 13. und 14. Vorlesungswoche statt. Zu diesem Zeitpunkt waren in der Vorlesung und in den Übungen verschiedene Vektorräume, Sätze über Basen und lineare Abbildungen und ihre Darstellung durch Matrizen bzgl. gegebenen Basen vorgekommen. Noch nicht diskutiert waren die Auswirkungen eines Basiswechsels auf die Matrixdarstellung. Polynomräume waren definiert worden als Mengen von formalen Summen über einem Körper $R$ mit Symbol $x$:

$$R[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid n \geq 0 \text{ und } a_0, \ldots, a_n \in R\},$$

mit koeffizientenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Die Beschränkung des Grades der Polynome durch $n$ führt zum Polynomraum $R[x]_{\leq n}$.

Drei Übungsaufgaben wurden zu Polynomräumen gestellt:

Blatt 7, Aufgabe 2
a) Beschreiben Sie den kleinsten $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{Q}[x]$, der die Polynome $f = 3x^2 + 1, g = -5x^2 - 5$ und $h = x^2 - 2$ enthält.
b) Zeigen Sie, dass
$\varphi : \{ax^2 + bx^3 \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \longrightarrow \mathbb{Q}[x], ax^2 + bx^3 \longmapsto (a + 2b)(x + 1)$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung darstellt. Beschreiben Sie Kern($\varphi$) und Bild($\varphi$).
c) Finden Sie eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $\psi : \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ mit $\psi(1) = (4, 0, 0)$ und $\psi(x) = (0, 2, 0)$ und $\psi(x^2) = (0, 6, 1)$. Zeigen Sie, dass $\psi$ eindeutig bestimmt ist und einen Isomorphismus von Vektorräumen darstellt.

Blatt 9, Aufgabe 2
Drei Polynome $f, g, h \in \mathbb{F}_5[x]\backslash\{0\}$ haben paarweise verschiedene Grade. Sind dann die Polynome $3f + g, 2g + 3h$ und $f + 2h$ $\mathbb{F}_5$-linear unabhängig?

Blatt 10, Aufgabe 6
a) Zeigen Sie, dass der Ableitungshomomorphismus
$\delta_n : \mathbb{Q}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{Q}[x]_{\leq n-1}$ für $n \geq 1$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.
b) Bestimmen Sie die Matrix von $\delta_n$ bzgl. der Basen $B_n = \{1, x, ...x^n\}$ und $B_{n-1} = \{1, x, ...x^{n-1}\}$.
c) Finden Sie eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $\iota_{n-1} : \mathbb{Q}[x]_{\leq n-1} \longrightarrow \mathbb{Q}[x]_{\leq n}$ mit $\delta_n \circ \iota_{n-1} = id$.
d) Berechnen Sie die Matrix von $\iota_{n-1}$ bzgl. der Basen $B_{n-1}$ und $B_n$.

Die zweite Aufgabe im Interviewgespräch nimmt Teile der hier genannten Übungsaufgaben auf. So ist die Überprüfung, ob die gegebenen Eigenschaften der Abbildung vom Raum der Polynome vom Grad kleiner als zwei in den $\mathbb{R}^2$ von einer linearen Abbildung zu erfüllen sind, der Übungsaufgabe 2c) von Blatt 7 zum Nachweis einer linearen Abbildung ähnlich. Der Unterschied besteht darin, dass die Abbildung in der Übungsaufgabe auf der 'kanonischen' Basis des Polynomraums definiert ist. Die weiterführende Aufgabe, eine Matrixdarstellung anzugeben, kommt ebenfalls in einer Übungsaufgabe, nämlich auf Blatt 10 vor. Allerdings ist im Interview die Unterscheidung von verschiedenen Darstellungsmatrizen thematisiert.

Übungsaufgaben, die der Modellierung der Farbmaschine ähnlich sind, waren nicht aufgetreten.

Aspekte möglicher Gesprächsverläufe

Der erste Interviewteil dreht sich um eine Modellierungsaufgabe. Ein kompletter Modellierungszyklus durchläuft nach Blum/Niss (1991) mehrere Stationen: Eine Problemsituation in einer Realsituation wird analysiert; aus ihr wird zunächst ein Realmodell gebildet, welches die gegebenen Informationen beschränkt und idealisiert; dieses Realmodell wird dann in die Welt der mathematischen Strukturen übertragen und dort mit einem mathematischen Modell beschrieben; das entsprechende mathematische Problem wird gelöst; die Lösung(en) werden in die reale Welt zurückübertragen und dort an der Realsituation evaluiert. Von diesem Zyklus ist in dem ersten Interviewauftrag nur der Teil angesprochen, welcher ein gegebenes

Realmodell in ein mathematisches Modell übertragen soll, wobei das mathematische Modell bereits vorgegeben ist: es soll ein Vektorraum sein. Im Vordergrund der Aufgabe stehen nicht die Realsituation und der eigentliche Modellierungsprozess, sondern die mathematischen Konzepte, welche die Interviewten im Umgang mit der vorgezeichneten Modellierung einbringen. Daher wird hier im Weiteren nur auf solche Aspekte der realen Situation eingegangen, welche in unmittelbarem Zusammenhang mit Vektorraumstrukturen stehen, nämlich die Fragen:

- Welche Merkmale der Maschinenkonstellation entsprechen den Vektoren?
- Welche Merkmale der Maschinenkonstellation entsprechen den Operationen im Vektorraum?
- Kann eine der vier Grundfarben in den kleinen Behältern mit Hilfe der anderen gemischt werden?

Zwei mögliche Antworten auf die ersten beiden Fragen sollen hier vorgestellt werden:

1. Die Farben als Endprodukte im Mischbehälter, also in ihren spezifischen Farbtöne und Quantitäten, sollen Vektoren eines Vektorraums entsprechen, nämlich des $\mathbb{R}^4$. Die vier Farben in den Zuflussbehältern in einem bestimmten vorgegebenen Volumenmaß werden entsprechend der Reihenfolge der Behälter den Vektoren der Standardbasis zugeordnet.

   Das Mischen von Farben entspricht der im $\mathbb{R}^4$ geltenden Addition, das Vervielfachen der Menge einer Farbe der skalaren Multiplikation.

   Keine Farbe entspricht dem Nullvektor.

   Der 'Raum' der Farben entspricht hier einer Teilmenge des $\mathbb{R}^4$, denn es können mit der Maschine nur nicht-negative Quantitäten der Grundfarben gemischt werden.

2. Die Computeranweisungen zur Regulierung der Zuflüsse der vier Grundfarben, gegeben als 4-Tupel, sollen Vektoren im $\mathbb{R}^4$ entsprechen. Diese Anweisungen sollen die Anzahl der Minuten bezeichnen, die jedes Zuflussrohr geöffnet wird, wobei die i-te Koordinate sich auf den i-ten Behälter bezieht. Jeder Standardbasisvektor repräsentiert somit die Anweisung, welche eine bestimmte der vier Grundfarben in einer bestimmten Menge 'produziert'.

   Das Hintereinanderausführen von Computeranweisungen entspricht dem Addieren von Vektoren, das proportionale Verlängern aller Öffnungszeiten eines Produktionsprozesses entspricht dem skalaren Multiplizieren.

   Das 4-Tupel, welches vier Nullen enthält, ist die Anweisung, welche alle Zuflussrohre geschlossen hält. Es entspricht dem Nullvektor.

   Die Computeranweisungen bilden eine Teilmenge des $\mathbb{R}^4$, da sie keine negativen Koeffizienten enthalten können.

In beiden Modellierungen kann man die lineare Abhängigkeit von zwei verschiedenen Vektoren im $\mathbb{R}^4$ deuten als die Produktion von derselben Farbe in unterschiedlichen Quantitäten. Die lineare Abhängigkeit von mehreren Vektoren kann im ersten Modell beschrieben werden als die Möglichkeit, dass eine der ihnen entsprechenden Farben aus den anderen gemischt werden kann. In der zweiten Modellierung ist eine unmittelbare Vorstellung der linearen Abhängigkeit von mehreren Vektoren schwierig. Möglich ist eine Deutung über einen Bezug zur ersten Modellierung, und natürlich auch eine Übertragung über formale Eigenschaften der 4-Tupel ohne inhaltliche Deutung. Die lineare Unabhängigkeit kann entsprechend gedeutet werden als Unmöglichkeit, eine gegebene Farbe oder Computeranweisung aus den übrigen zu erzeugen. Die formal übliche Definition für lineare Unabhängigkeit von Vektoren besagt, dass sie den Nullvektor allein durch eine triviale Linearkombination erzeugen können. Diese Definition ist für die Farbmaschine ungeeignet, da auch aus abhängigen Farben oder Instruktionen - ausgenommen in Kombination mit der Null - die 'Null' nur trivial erzeugt werden kann.

Wenn man nicht von einer linearen Abhängigkeit von Vektoren im $\mathbb{R}^4$ ausgeht, die man auf die Maschine überträgt, sondern Abhängigkeiten der Farben betrachtet, so gelangt man zu dem oben angesprochenen Problem, dass eine der vier Grundfarben ein Mischverhältnis aus den anderen darstellen kann. Die gegebenen Farben legen diesen Gedanken nahe, da jedes Grün eine Mischung aus reinem Gelb und Blau ist. Der Leitfaden spricht dieses Problem mit der Frage an, ob $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt. Unter der Vorgabe, dass das gegebene Grün eine Mischung aus gleichen Teilen gelb und blau ist, gibt es bei der ersten, nicht aber bei der zweiten Modellierung ein Problem. Bei der zweiten Modellierung unterscheiden sich die Computeranweisungen zur Öffnung der Zuflussrohre ebenso wie die 4-Tupel im $\mathbb{R}^4$. Dass die produzierte Farbe die Gleiche ist, ist hier unerheblich. Gemäß der ersten Modellierung entsprechen jedoch beide 4-Tupel demselben Objekt. Die Gleichheit gilt, wenn die Tupel als Namen für Farben verstanden werden, aber sie gilt nicht im Vektorraum $\mathbb{R}^4$. Diese Situation ist geeignet, einen kognitiven Konflikt auszulösen. Eine Antwort auf den Widerspruch ist, dass dieselbe Darstellungsform, nämlich 4-Tupel, im $\mathbb{R}^4$ auf ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, im Farbenraum jedoch auf ein abhängiges Erzeugendensystem bezogen ist. Hier wird eine dreidimensionale Struktur mit Hilfe einer vierdimensionalen beschrieben, was nicht eins-zu-eins möglich ist. Verwendet man die 4-Tupel nicht als Namen für die Farben, sondern hält die beiden 'Räume' sauber auseinander, so kann man den Transfer mit Hilfe einer Abbildung beschreiben: Sei $A := \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{R}^4$.

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & \text{Farbenraum} \\ & (a_1, a_2, a_3, a_4) & \longmapsto & \text{Mischung aus } a_1 \text{ Anteilen rot,} \\ & & & a_2 \text{ Anteilen gelb, } a_3 \text{ Anteilen grün,} \\ & & & a_4 \text{ Anteilen blau} \end{array}$$

Falls die vier Grundfarben unabhängig sind, ist $f$ injektiv, andernfalls nicht.

Der Teil b) dieser Aufgabe geht auf ein Rechenproblem für den Computer der Maschine ein. Um die Comupteranweisungen für die Maschine zu bestimmen, ist

$$3(1\ 1\ 0\ 0) + 1(0\ 1\ 1\ 0) + 4(2\ 2\ 1\ 1) = (11\ 12\ 5\ 4)$$

zu berechnen, oder mit Hilfe der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Das Austauschen der Grundfarben in den kleinen Behältern entspricht im mathematischen Modell dem Wechseln des Erzeugendensystems. Während die Komponenten von (11 12 5 4) die Farbanteile oder Einzelinstruktionen für das neue Produkt bezüglich den ursprünglichen Grundfarben angeben, nennen die Komponenten von (3 1 4) die Farbanteile bzw. Einzelinstruktionen bzgl. den Farben orange, türkis und braun. Auch hier tritt wiederum das Problem auf, dass die neue Farbe in der einen Darstellung mit Hilfe von 4-Tupeln, in der anderen Darstellung mit Hilfe von 3-Tupeln gekennzeichnet wird. Das könnte man dadurch lösen, dass die zweite Darstellung durch eine vierte Komponente mit Eintrag 0 ergänzt wird, welche sich auf den vierten kleinen Behälter bezieht, in dem die Farbe blau nicht ausgewechselt wurde, aber auch nicht gebraucht wird. Dieser Teil der Aufgabe wird in den Analysen der Interviews aufgrund der Gesamtlänge nicht berücksichtigt.

Der erste Interviewteil legt einen Schwerpunkt auf das inhaltliche Deuten von zentralen Begriffen der Vektorraumtheorie. Der Anfang vermeidet jegliche formale Darstellung in den Vorgaben. Durch die Modellierungssituation ist den Interviewten selbst der Gebrauch von formalen Darstellungen nur möglich, wenn sie ihnen explizit Bedeutung zuordnen. Somit besteht die Notwendigkeit, eigene Formalisierungen vorzunehmen oder ganz auf formale Notationen zu verzichten. Die Realsituation ist zudem so gelagert, dass eine unmittelbare und vollständige Entsprechung von Strukturen eines Vektorraums und Bestandteilen der Realsituation nicht möglich ist. Die Aufgabe gibt auf diese Weise vielfache Anregungen, Grenzen der Übertragbarkeit und damit Eigenschaften eines Vektorraums auf informeller Ebene zu diskutieren.

Der zweite Teil des Interviewgesprächs behandelt eine lineare Abbildung, die von einem zweidimensionalen Polynomraum über den reellen Zahlen in den $\mathbb{R}^2$ abbildet. Sie ist von Anfang an durch formalisierte Darstellungen geprägt, welche eine ganz andere Art von Schwierigkeit darstellen als der erste Interviewteil.

Zur Lösung von Aufgabenteil 2a) kann am Anfang die Überlegung stehen, ob $x+1$ und $2x$ eine Basis des Polynomraums bilden. Diese Frage kann beantwortet werden, indem nachgewiesen wird, dass ein allgemeines Polynom $ax+b$ auf eindeutige Weise als Linearkombination $\lambda(x+1)+\mu(2x)$ dargestellt werden kann. Die Lösung der Gleichung

$$ax+b=\lambda(x+1)+\mu(2x)$$

kann mit wenigen Schritten gefunden werden: Man erhält

$$ax+b=(\lambda+2\mu)x+\lambda$$

und damit

$$\lambda=b \quad \text{und} \quad \mu=\frac{1}{2}(a-b)$$

Dann kann auf einen Satz aus der Vorlesung verwiesen werden, dass eine lineare Abbildung definiert werden kann, indem einer Basis beliebige Bilder zugeordnet werden, wobei die Abbildung auf dem übrigen Raum in eindeutiger Weise linear fortgesetzt wird. Eine alternative Argumentation, dass $\{x+1, 2x\}$ Basis ist, kann man über die Dimension des Polynomraums und die lineare Unabhängigkeit von $x+1$ und $2x$ begründen. Beide Argumente können ohne Rechnung geführt werden: Eine offensichtliche Basis des Polynomraums ist $\{1, x\}$, also ist die Dimension zwei. $2x$ und $x+1$ sind offensichtlich keine Vielfachen von einander.

Der Begriff der Basis kann auch gänzlich vermieden werden, indem die oben gegebene Darstellung eines allgemeinen Polynoms gefunden und dann mit Hilfe der Eigenschaften einer linearen Abbildung das einzig mögliche Bild eines solchen Polynoms unter einer linearen Abbildung mit den vorgegebenen Bedingungen bestimmt wird. Anschließend ist noch notwendig zu begründen, dass die damit definierte Abbildung linear ist.

Dieser Aufgabenteil setzt die Fähigkeit voraus, die verwendeten formalen Darstellungen von Abbildungen, vom Polynomraum und seinen Elementen und vom $\mathbb{R}^2$ und seinen Elementen zu deuten und mit ihnen umzugehen. Darüber hinaus nimmt der eine der vorgestellten Lösungswege den Basisbegriff als Strukturierungswerkzeug zu Hilfe, bei dem ein Wechselspiel zwischen formalen Repräsentationen und begrifflichen Konzepten erfolgt. Der letzte Lösungsweg vermeidet den Begriff der Basis, braucht aber stattdessen eine aufwändige Argumentation, welche auf den formalen Linearitätseigenschaften einer linearen Abbildung aufbaut. Diese werden in zweifacher Weise verwendet: zunächst werden sie an bestimmten Stellen vorausgesetzt um eine (die einzige) in Frage kommende Abbildung zu konstruieren, danach wird nachgewiesen, dass sie bei der konstruierten Abbildung nicht nur stellenweise, sondern für beliebige Summen und Vielfache von Polynomen gelten.

Der Aufgabenteil b) verlangt eine Wiedergabe der Erklärung aus der Vorlesung, was die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung ist. Die Antwort beinhaltet zum Ersten die Voraussetzung, auf welche Basen im Definitions- und im Zielraum der Abbildung sich die Darstellung bezieht. Zum Zweiten notiert sie die Bilder der gewählten Basis des Polynomraums in den Spalten der Matrix, und zwar bezüglich der im Zielraum gewählten Basis. Da es sich hierbei um den $\mathbb{R}^2$ handelt, ist die Standardbasis vielleicht selbstverständlich, in der ja auch bereits die Bilder in der Aufgabenstellung angegeben sind. Für die Wahl im Polynomraum liegen zwei Basen nahe, nämlich $\{x+1, 2x\}$ und $\{1, x\}$. Zum Dritten gehört zur Antwort von b) noch eine Erklärung, wie mit Hilfe dieser Matrix das Bild eines Vektors berechnet wird. Wird bei b) die erste der genannten Polynomraumbasen der Matrixdarstellung zugrunde gelegt, fragt die Aufgabe 2c) nach der Matrixdarstelung für die zweite. Wird diese ausgewählt, gibt 2c) die Darstellung für die Basis $\{x+1, 2x\}$ an. Da die Bilder dieser beiden Polynome in der anfänglichen Angabe für $f$ genannt sind, kann man sie in der Matrix wiederfinden ohne rechnen zu müssen. Diese Aufgabe kann vordergründig rein formal leicht gelöst werden, da sie die Anwendung desselben Schemas auf eine andere Basis erfordert, welches schon bei Teil b) angewendet wurde. Die Studierenden werden hier auf der Bedeutungsebene mit den Auswirkungen eines Basiswechsels auf die Darstellungsmatrix konfrontiert. Die Bedeutungszuordnung ist unvermeidbar, da ohne Zusammenhang zu ihrer Bezugsbasis die beiden Matrizen keine Informationen geben. Eine stillschweigende Voraussetzung, dass man eine Bezugsgröße nicht erwägen muss, weil sie eben irgendwie da ist, ist hier offenbar nicht möglich, da sie zu zwei verschiedenen Abbildungen führen würde. Somit sind die Studierenden in dieser Aufgabe gezwungen, Formalisierungen explizit vorzunehmen. Wie Hillel (2000) aufzeigt, birgt ein Basiswechsel für Darstellungsmatrizen große Schwierigkeiten, welche er allerdings vor allem beim Basiswechsel im $\mathbb{R}^n$ als Zielraum beobachtet. Das ist hier nicht der Fall. In Anbetracht der Tatsache, dass das Thema des Zusammenhangs zwischen einer Matrix und der zugrunde liegenden Matrix für die Studierenden noch ganz neu ist und insbesondere das Wechseln einer Basis noch nicht thematisiert worden ist, ist der hier gegebene Anstoß wahrscheinlich ausreichend, um kognitive Neuordnungen anzuregen. Je nach Gesprächsverlauf sind noch verschiedene Vertiefungen dieser Problematik möglich, so etwa Überlegungen, wie ein bestimmtes Polynom durch die beiden Matrizen abgebildet wird.

Äußerlich betrachtet steht eine lineare Abbildung im Vordergrund dieses zweiten Interviewteils. Der Schwerpunkt des Forschungsinteresses bei diesem Interview liegt aber auch in diesem Teil bei den Vektorraumvorstellungen der Studierenden. Die Idee hinter der Aufgabenstruktur ist: Indem der Vektorraum nicht als Thema in den Mittelpunkt gestellt wird, sondern die Interviewten sich auf ein anderes Thema konzentrieren, bei dem sie nebenbei mit Vektorräumen umgehen, werden möglicherweise implizite Vorstellungen sichtbar, die ausdrücklich gelerntem Wissen widersprechen, die aber im Sinne von 'tacit models'[23] entscheidenden Einfluss im Denken haben. Als ein solches vordergründiges Thema eignet sich die lineare Abbildung, welche durch die Eigenschaft der Strukturerhaltung in besonderer Weise mit dem Vektorraumbegriff verknüpft ist. Insbesondere der Wechsel des Bezugssystems für die Darstellungsmatrix im Aufgabenteil 2c) fordert eine Umstrukturierung des Vektorraums der Polynome und gibt somit nicht nur Einsichten in Vorstellungen von linearen Abbildungen, sondern kann möglicherweise auch Einblicke in Strukturen mentaler Repräsentationen der Vektorraumstruktur gewähren.

### Das Dualrauminterview

Der Leitfaden:

Sei

$$V = \mathbb{R}^3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$$

und

$$V^* = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist lineare Abbildung}\}.$$

a)
Gib ein Element von $V^*$ explizit an.
Warum ist dieses Beispiel eine lineare Abbildung?
b)
Warum ist $V^*$ ein Vektorraum?
Gib eine Basis von $V^*$ an.

[23] Vgl. Fischbein (1987).

Einordnung des Leitfadens in den Zusammenhang der Lehrveranstaltung

Die Dualrauminterviews fanden im Juni 03 statt. Sie bezogen sich auf einen Vorlesungsinhalt von Februar 03, der nicht durch Übungen vertieft wurde. Zwar wurden einige Übungsaufgaben zu diesem Thema gestellt, aber diese waren in der Woche zu lösen, an deren Ende die Abschlussklausur des Kurses stattfand. Sie waren nicht klausurrelevant und wurden auch nicht mehr in den Übungen besprochen. So war damit zu rechnen, dass die Studierenden nicht viel Erinnerung an den Dualraum haben würden. Die Gespräche wurden daher so konzipiert, dass sie keine Kenntnisse des Dualraums voraussetzten, die über die Begriffe des Vektorraums und der linearen Abbildung hinausgingen.[24] In der Vorlesung war der Spezialfall des Dualraums des $\mathbb{R}^n$ überhaupt nicht zur Sprache gekommen. In der Vorlesung 'Lineare Algebra und analytische Geometrie II', an der die beiden Interviewten teilgenommen hatten, war mit dem Endomorphismenraum eines Vektorraums ein Vektorraum aus linearen Abbildungen thematisiert worden. Zudem waren Bilinearformen und speziell Skalarprodukte zu der Zeit dieser Interviews Thema der Vorlesung. Insbesondere eine Aufgabe auf einem Übungsblatt, dessen Bearbeitung kurz vor den beiden Interviewgesprächen abzugeben war, geht von einer ähnlichen Situation aus wie die Interviewgespräche, verlangt aber andere Aktivitäten. Der erste Teil lautet:

> 2. Semester, Blatt 6, Aufgabe 3
> Die Vektoren $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in K^3\backslash\{0\}$ definieren die Linearformen $\varphi, \psi : K^3 \longrightarrow K$ gemäß $\varphi((c_1, c_2, c_3)) := a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)$ und $\psi := ((c_1, c_2, c_3)) := b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)$. a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : K^3 \times K^3 \longrightarrow K$ mit $\phi(v, w) := \varphi(v) \cdot \psi(w)$.

Aspekte möglicher Gesprächsverläufe

Der Aufgabenteil a) der Dualrauminterviews dient dazu, dass die Studierenden sich in die Situation einfinden und die formale Difinition von $V^*$ aufschlüsseln, indem sie ein exemplarisches Element suchen. Falls hier die Nullabbildung genannt wird, soll nach einem zweiten Element gefragt werden. Sinnvolle Antworten auf diese erste Frage können eine lineare Abbildung

1. durch Angabe des Bildes eines allgemeinen Vektors
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
definieren,

2. durch Angabe der Bilder einer Basis definieren,

3. durch Angabe einer Matrixdarstellung bzgl. einer bestimmten Basis definieren.

[24] Die Aufgabe konnte gelöst werden, ohne zu wissen, was die Vokabel 'Dualraum' bedeutet, dass eine Vektorraum zu seinem Dualraum isomorph ist, oder in welcher kanonischen Weise aus einer Basis eines Vektorraums eine Basis seines Dualraums konstruiert werden kann.

Die beiden letzten Antworttypen sind Darstellungsformen, mit deren Hilfe man sich einen Überblick über alle linearen Abbildungen $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ verschaffen kann. An ihnen ist auch die Frage des Nachweises der Linearität leicht zu beantworten, indem darauf hingewiesen wird, dass aus einer Basis jeder Vektor auf eindeutige Weise linear kombiniert werden kann und sich daraus die Abbildung eindeutig linear fortsetzen lässt. Als Antwort wird hier nur dann ein formaler Nachweis erwartet, wenn kein inhaltliches Argument gegeben wird.

Der Teil b) spricht die Struktur von $V^*$ an. Hier ist es notwendig, nicht nur eine, sondern alle linearen Abbildungen $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ in den Blick zu nehmen. Die Frage nach den Vektorraumeigenschaften soll keine vollständige, formale Begründung fordern, sondern der oder dem Interviewten ins Bewusstsein bringen, dass lineare Abbildungen addiert und mit Skalaren multipliziert werden können, und dass das Ergebnis eine lineare Abbildung ist.

Die Frage nach einer Basis von $V^*$ kann je nach Vorstellung von einer linearen Abbildung unterschiedlich beantwortet werden. Entspricht die Vorstellung der oben angeführten Matrixdarstellung, so ist die Idee, dass der Dualraum ein Vektorraum ist, vergleichsweise leicht zu erfassen, da die Notation der Matrizen in Tupelform den Sichtwechsel von Abbildungen zu Vektoren unterstützt. Steht eine Vorstellung gemäß einer Darstellung durch die Definition der Bilder einer gegebenen Basis im Vordergrund, so ist dieser Sichtwechsel schwer zu vollziehen, da die Darstellung das Abbilden betont. In diesem Fall ist auch eine Idee, wie eine beliebige Abbildung aus $V^*$ mit Hilfe weniger gegebener Abbildungen dargestellt werden kann, nur mit großen Aufwand zu konstruieren.

Diese Aufgabe soll die Beobachtung der Studierenden im Umgang mit einer in mehrfacher Hinsicht abstrakten mathematischen Konstruktion ermöglichen. Die vorgegebene Notation betont die Sichtweise, dass die Elemente des Dualraums Abbildungen sind, gegenüber der Sichtweise sie als Vektoren aufzufassen. Im Erfahrungsbereich der Studierenden liegen mindestens zwei grundverschiedene Strategien zur Erleichterung des Sichtwechsels, deren Anwendung auf dem hohen Abstraktionsniveau des Raumes anspruchsvoll ist: Die eine Strategie ist die Konzentration auf die Tatsache, dass $V^*$ die Vektorraumaxiome erfüllt, und auf die daraus folgenden Struktureigenschaften. Die andere Strategie ist die Verwendung von 3-Tupeln als Darstellungsmatrizen zur Beschreibung der Abbildungen. Beide Strategien beinhalten einen Wechsel von bedeutungshaltigem Charakter der Objekte zu Eigenschaften, die in einer Formalisierung im Vordergrund stehen.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Länge der geführten Interviews und der transkribierten Ausschnitte:

| | Restklassen | Vektorraum | Dualraum |
|---|---|---|---|
| Sendig | | | |
| Datum | 27.11.02 | 22.1.03 | 17.6.03 |
| Interviewdauer | 80 Min. | 45 Min. | 60 Min. |
| transkribierte Zeit | 17 Min. | 45 Min. | 29 Min. |
| Beck | | | |
| Datum | 21.11.02 | 21.1.03 | 12.6.03 |
| Interviewdauer | 92 Min. | 77 Min. | 45 Min. |
| transkribierte Zeit | 11 Min. | 77 Min. | 14 Min. |
| Rolle | | | |
| Datum | 26.11.02 | 29.1.03 | |
| Interviewdauer | 46 Min. | 57 Min. | |
| transkribierte Zeit | 11 Min. | 57 Min. | |

## 3.2 Analyse der Restklasseninterviews

### 3.2.1 Feinanalyse zu den Restklasseninterviews

Der Kommentar zum Leitfaden der Restklasseninterviews nennt die ursprünglichen Intentionen und Erwartungen, die mit der Konzeption des Leitfadens verbunden sind. Zum leichteren Verständnis der nun folgenden Transkriptanalysen wird hier eine zweite Sachanalyse als didaktische Feinanalyse des Themas vorweggenommen, in die Erfahrungen mit den Interviewanalysen einfließen.

Vier Darstellungen von Restklassen, die in den Interviews auftreten, werden hier exemplarisch für die Restklasse Eins von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gegenübergestellt und charakterisiert:

**(1)** Das Zeichen '$\overline{1}$' suggeriert die Idee einer speziellen Art von Zahl. Es hebt das Element Eins aus der Restklasse hervor, alle anderen Elemente der Restklasse treten nicht in Erscheinung. Die Inskription selbst weckt keine Assoziationen mit einer Menge.

**(2)** Das Zeichen[25] '$1 + 3\mathbb{Z}$' beinhaltet neben dem Zahlzeichen '1' auch ein Zeichen für eine Menge, nämlich '$\mathbb{Z}$' bzw. '$3\mathbb{Z}$'. Die Zeichenkombination lenkt auf ebenfalls die Zahl Eins eine besondere Aufmerksamkeit, aber sie kann zugleich als Aufforderung verstanden werden, aus dieser Zahl weitere zu erzeugen. Dazu ist jedoch eine gewisse Vertrautheit mit dieser aus der Schulzeit nicht geläufigen Darstellungsform erforderlich. Ist sie nicht gegeben, so wird dieses Zeichen wohl eher die Vorstellung einer Mischform oder eines Doppelcharakters von Zahl und Menge anregen.

**(3)** Das Zeichen '$\{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$' hebt durch die Mengenklammern und durch die Darstellung eines allgemeinen Elements den Mengencharakter noch stärker hervor. Die Sonderrolle der Zahl Eins tritt weiter zurück. Sie dient in der Parameterdarstellung nur noch zur Generierung von Zahlen. Das Zeichen lenkt die Aufmerksamkeit auf die Elemente der Menge, so dass die Menge selbst

[25] Unter dem Begriff 'Zeichen' werden hier auch längere Terme verstanden, in denen Kombinationen von mehreren Einzelzeichen auftreten.

im Hintergrund steht: sie dient dazu, einige ganze Zahlen einer bestimmten 'Bauart' in einer Unterabteilung zusammenzufassen.

**(4)** Das Zeichen '$B$' ist ein bloßer Name für ein Objekt, das mit keinen an der äußeren Form des Zeichens sichtbaren referentiellen Strukturen auf den Charakter dieses Objekts verweist. In seiner Definition als Name für die Menge '$\{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$' betont dieses Zeichen den Charakter der Menge als mathematischem Objekt. Hier wird weder die Eins noch eine andere Zahl im Zeichen selbst sichtbar. Die Elemente der Menge treten gegenüber der Menge in den Hintergrund.

Ein solches Objekt spielt gemäß den bisherigen Erfahrungen der Studierenden eine bestimmte Rolle: Es dient dem abkürzenden Verweis auf eine Menge von Zahlen oder anderen mathematischen Objekten im Rahmen von mathematischen Handlungen mit diesen wie z.B. Ordnen, Beschreiben von Eigenschaften oder Definieren von Verknüpfungen. Dabei kann der Abstraktionsgrad verschieden sein, je nachdem, ob $B$ wie hier eine wohlbestimmte oder eine variable Menge von Objekten beschreibt.

In dieser Liste von Zeichen für die Restklasse Eins in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tritt von **(1)** bis **(4)** die Identifizierung mit der Zahl Eins immer weiter zurück. Zugleich ändert sich der Fokus vom Wesensmerkmal einer Restklasse als speziellem Zahlobjekt über eine Menge als Ordnungsinstrument hin zu einer Menge als abstraktem Objekt. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Perspektiven auf Restklassen, die diese vier Zeichen anregen:

| Zeichen | $\overline{1}$ | $1+3\mathbb{Z}$ | $\{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|
| suggeriert Charakter: | spezielles Zahlobjekt | Verknüpfung aus Zahl und Menge | Menge zur Beschreibung bestimmter Zahlen | Menge als abstraktes Objekt (von unterschiedlichem Abstraktionsgrad) |

In den Übungen zur Vorlesung, die vor den Interviews stattfanden, wurden Aufgaben besprochen, die denen in den Interviewgesprächen ähnlich waren, die jedoch den Fokus auf eine andere Notation, nämlich **(1)**, legten: Diese Darstellungsform unterstützt eine Sichtweise auf das Restklassengebilde $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als eines speziellen endlichen Zahlensystems, nämlich das System der Reste, in dem spezielle Rechenregeln gelten.

In den Interviewgesprächen wird durch Einführung einer neuen Darstellungsform, nämlich **(3)** und **(4)**, der Mengencharakter von Restklassen besonders betont. Sie stellen an die Studierenden die Anforderung, ihre bisher ausgebildeten Vorstellungen zum Thema Restklassen auf diesen Mengenaspekt zu beziehen.

Mögliche Reaktionen auf die Frage nach der Addition dieser Mengen sind:

**(a)** Rückführung auf eine Notation aus der Veranstaltung, nämlich **(1)** oder **(2)**.

**(b)** Arbeiten mit ausgewählten Repräsentanten unter Verwendung des Wissens, dass das Ergebnis repräsentantenunabhängig ist.

**(c)** Ganz in der gegebenen Situation arbeiten.

- Dies kann durch Addition der allgemeinen Elemente der Restklassen geschehen.

- Wenn die Eigenschaft, dass es sich um Restklassen handelt, gänzlich ignoriert wird, und nur die angegebenen Mengen betrachtet werden, so stellt sich das Problem, wie denn überhaupt die Summe von zwei Mengen definiert werden kann. Denkbar ist neben der mathematisch üblichen Definition

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\},$$

die den Studierenden in der Veranstaltung noch nicht explizit begegnet war, z.B. auch eine (nicht den Konventionen entsprechende) Vorstellung einer Vereinigungsmenge $A \cup B$.

Die Addition tritt in den Interviewgesprächen zudem im Rahmen eines Homomorphietests auf. Hier sind Schwierigkeiten auf unterschiedlichen Ebenen angesprochen:

- Was heißt es, Restklassen abzubilden?

  Welche Rolle spielt dabei das Verhältnis Menge - Repräsentant? Wird die Menge abgebildet? Wird der kanonische Repräsentant abgebildet? Wird der allgemeine Repräsentant abgebildet? Wird irgendein Repräsentant abgebildet?[26]

- Was heißt es, die Verträglichkeit einer Abbildung mit der Addition zu testen?

  Dieser Aspekt bezieht sich rein auf die Homomorphismuseigenschaft. Die Verbindung mit der spezifischen Addition in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ wird im nächsten Punkt genannt.

- Beim Test der Homomorphismuseigenschaft wird die Addition eingesetzt, ohne explizit Thema zu sein. Die Vorstellungen und Vorgehensweisen müssen sich hier in einem komplexeren Zusammenhang in einem pragmatischen Sinn als Hilfsmittel bewähren. Zwei Schwierigkeiten, die sich in den Interviews zeigen, sind:

  - Was wird addiert, wenn Zahlen nicht in Erscheinung treten?

  - Wie wird addiert, wenn die Symbole für Restklassen in ungewohnter Anordnung auftreten?

### 3.2.2 Deutung des Restklasseninterviews mit P. Sendig

Das Restklassengespräch mit Herrn Sendig ist der zweite Teil einer längeren Unterhaltung. Im ersten Teil wurden alle Abbildungen der Menge $\{1, 2\}$ in sich gesucht. Sie wurden mit Hilfe von Pfeilschemata der Art

$$\begin{array}{ccc} \{1,2\} & \longrightarrow & \{1,2\} \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 2 \end{array}$$

[26] Die Addition, die von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ vererbt wird, ist mit jeder Repräsentantenwahl verträglich. Ein Epimorphismus, der auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ definiert wird, kann jedoch nicht kanonisch auf Repräsentanten erweitert, d.h. auf die ganzen Zahlen übertragen, werden. Hier können also neuartige Probleme auftreten.

angegeben. Das anschließende Gespräch über Restklassen bezieht sich auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Es gliedert sich in zwei Sinnabschnitte: Im ersten Abschnitt wird die in der Vorlesung definierte Addition auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ diskutiert. Diese Erörterung wird durch Fragen von Herrn Sendig ergänzt, die sich auf den Zweck der Darstellung einer Verknüpfung in Form von einer Gruppentafel beziehen.[27] Im zweiten Abschnitt werden die Epimorphismen auf $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ gesucht. Vorschläge werden mit Hilfe eines Pfeilschemas, das das Bild jedes Elements unmittelbar angibt, notiert. Eine der vorgeschlagenen Abbildungen wird dann auf Homomorphie getestet.

Die Interviewerin fordert Herrn Sendig während des Gespächs auf, an der Tafel zu schreiben, aber er lehnt dies ab. Daher macht sie selbst kurze Notizen zu manchem, was Herr Sendig sagt.[28]

### Addition

Transkriptausschnitt: (RK, Sendig) 1-18

I: Dann gucken wir uns doch jetzt noch mal Restklassen an. Hast du die verstanden?
S: Ich glaub ja.
I: Mittlerweile haben wir auch schon viel darüber gesprochen, ne? Erstmal schreiben wir das ein bißchen anders, und zwar
* $N = \{\{3k|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+1|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+2|k \in \mathbb{Z}\}\}$ *
(liest beim Schreiben vor). Kennst du, die Menge, ne?
S: Ja, also das Erste ist Restklasse Null, dann Restklasse Eins, dann Restklasse Zwei bzgl. $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$.
I: Genau. (ergänzt:)
* $= \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *
Die haben wir sonst immer $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$ genannt. Wie addiert man zwei Mengen? So allgemein kann man das eigentlich nicht sagen, ne? Aber wir haben eine Addition definiert.
S: Ja, wir hatten gesagt, dass wir einfach, ehm, Haben wir das für die ganzen Mengen gesagt? Ich dachte nur für jeweils Elemente aus der Menge.
I: Ja, nämlich?
S: Dass ich die Elemente addiere und dann gucke, in welcher Restklasse ich dann wieder lande.

Die Interviewerin spricht die Tatsache an, dass Restklassen hier in einer für Herrn Sendig ungewohnten Weise notiert werden.[29] Herr Sendig erkennt die Mengen in $N$ ohne Schwierigkeiten als die Restklassen modulo drei und benennt sie als 'Restklasse Null', 'Restklasse Eins' und 'Restklasse Zwei'. Da er nicht an der Tafel schreibt, bleibt offen, ob er mit diesen Namen einen bestimmten Zeichentyp verbindet. Er achtet genau auf die Formulierung der Interviewerin in ihrer Frage, wie solche Mengen addiert werden. Er stellt explizit fest, dass er eine Addition nicht für 'ganze Mengen', sondern nur für 'jeweils Elemente aus der Menge' erinnert. Das bedeutet,

[27] Dieser Teil wird in der folgenden Transkriptanalyse nicht angesprochen, kann aber im Anhang unter A.1 gelesen werden.

[28] Diese Darstellungen von Herrn Sendigs Äußerungen durch die Interviewerin beinhalten natürlich immer eine Interpretation und teilweise auch eine Ergänzung des Gesagten, die in der Analyse des Interviews zu berücksichtigen ist.

[29] Im Abschnitt 3.2.1 sind Wirkungen der unterschiedlichen Darstellungen diskutiert.

dass aus seiner Sicht nicht Mengen, sondern bestimmte ganze Zahlen addiert werden. Der Singular ‘Menge’ kann bedeuten, dass er nur an die Addition von ganzen Zahlen denkt, welche in einer gemeinsamen Restklasse liegen. Die Aussage kann aber auch bedeuten: Anstelle der Addition von zwei Mengen werden jeweils - nämlich für jede der beiden Mengen - Elemente dieser Mengen (als eine Art Repräsentanten) addiert. Dafür genügt zwar ein Element aus jeder dieser Mengen, aber möglicherweise denkt Herr Sendig an Situationen, wo solche Rechnungen für verschiedene Repräsentanten verglichen werden.[30]

Seine Beschreibung dieser Addition in den Zeilen 17-18 gibt ein Verfahren in zwei Schritten: Im ersten Schritt werden Elemente addiert. Er sagt hier nicht, wessen Elemente es sind. Wie oben ist auch hier denkbar, dass er zwei Elemente meint, von denen jedes in einer der drei Restklassen liegt, oder dass er sich die Summanden spezieller vorstellt, etwa beide in derselben Restklasse (oder auch beide in verschiedenen Restklassen). Im zweiten Schritt wird zur Kenntnis genommen, in welcher Restklasse die Summe liegt. Eine Addition in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist also eine Addition von Elementen von Restklassen mit einer Einordnung des Ergebnisses in eine Restklasse.

Es besteht die Möglichkeit, dass Herr Sendig die Beschreibung, die er gibt, nur als Nennung der aus seiner Sicht wichtigsten Schritte des Verfahrens meint und sie nicht als vollständige Darstellung ansieht. So bleibt letztlich offen, wie genau seine Vorstellungen sind.

Die Interviewerin erklärt nun, dass in der Tat die Elemente von $N$, also Mengen, addiert werden sollen, und eine solche Summe ein Element von $N$ sein muss.

Transkriptausschnitt: (RK, Sendig) 27-31

I: Also ist die Frage: Was, ja, wie machen wir das? Diese Menge plus diese Menge
(zeigt auf die ersten beiden Elemente von N). Was soll das sein?
S: Wie soll ich das. Wie das jetzt aufgeschrieben wird, weiß ich jetzt nicht so genau.
Also heißt das drei k plus drei k plus eins, oder? Wie benennen wir die Elemente,
die da drin sind?

Die Interviewerin betont mit ihrer Frage, dass die Summe von zwei Mengen gesucht ist. Zunächst stellt sie die Frage wieder mit einem ‘Wie’, dann formuliert sie sie um als Frage nach dem Ergebnis. Herr Sendig beginnt mit der abgebrochenen Frage “Wie soll ich das”. Sie deutet auf eine Unsicherheit im Vorgehen hin. Diese kann sich auf das Verfahren zur Bestimmung des Ergebnisses, aber auch auf das Darstellen seines Ergebnisses beziehen. Da er zuvor ein prinzipielles Verfahren beschrieben hat, ist die zweite Deutung wahrscheinlicher, und diese wird durch seine eigene Erklärung bestätigt. Die Darstellung der Summe bereitet ihm ‘jetzt’, also vielleicht bezogen auf die spezielle, von der Interviewerin gewählte Darstellung der Restklassen, ein Problem.

Herr Sendig versucht nun - formuliert als Frage - die Antwort

“$3k + 3k + 1$”.

[30] Dies geschah mehrfach in den Übungen, entweder zur Illustration oder zum Nachweis, dass die Wahl der jeweiligen Repräsentanten unerheblich ist.

Er sagt nicht, was dieser Ausdruck darstellen soll. Der Term ist die Summe aus zwei Repräsentanten, welche in den Notationen $\{3k|k \in \mathbb{Z}\}$ und $\{3k + 1|k \in \mathbb{Z}\}$ der beiden zu addierenden Restklassen explizit auftreten. Es ist keine geeignete Darstellung für ein allgemeines Element der Ergebnisrestklasse, und offenbar erkennt Herr Sendig sie an dieser Darstellung nicht. Es fehlt der Umformungsschritt

$$3k + 3k + 1 = 3(2k) + 1$$

der es als Element der Restklasse von eins kenntlich macht. Die Wahl der Repräsentanten 0 und 1 als Summanden hätte die Rechnung noch erheblich vereinfacht. Herrn Sendigs Wahl gibt Sinn, wenn es ein Versuch ist, alle möglichen Summanden darzustellen. Allerdings übersieht er dabei, dass die beiden '$k$' als Parameter unterschieden werden müssten. Eine allgemeine Beschreibung aller hier möglichen Additionen von Elementen lautet:

$$3k + 3h + 1$$

und kann durch Ausklammern als Element der Restklasse von eins identifiziert werden. Mit der Frage,

> "Wie benennen wir die Elemente, die da drin sind?"

kann wohl kaum gemeint sein: "Wie benennen wir die Restklassen, die in $N$ sind?", da Herr Sendig für sie schon anfangs die Namen 'Restklasse Null', 'Restklasse Eins' und 'Restklasse Zwei' verwendet. Es handelt sich bei den Elementen also um ganze Zahlen, nämlich die durch den genannten Term beschriebenen. Die Aussage kann in gegensätzlichen Richtungen gedeutet werden:

- Herr Sendig akzeptiert, dass das Ergebnis der Addition eine Restklasse ist. Er hat aber Schwierigkeiten, diese Menge zu bezeichnen, und versucht das, indem er ihre Elemente benennt.

  Dagegen spricht, dass er nicht versucht, diese Restklasse mit einem der drei von ihm selbst genannten Namen zu bezeichnen. Es ist jedoch möglich, dass er die erforderliche Umformung nicht spontan erkennt. Es ist auch möglich, dass er zwar die Restklasse Eins meint, sie jedoch in einer Weise darstellen möchte, aus der zu erkennen ist, dass sie als Summe aus den beiden erstgenannten Mengen von $N$ entsteht.[31]

- Herr Sendig betrachtet alle Zahlen, die bei den zugehörigen Rechnungen herauskommen können, als die eigentlich interessanten Objekte. Er weiß, dass sie alle in derselben Restklasse liegen, auf die er mit 'da drin' hinweist. Er versucht darum eine Darstellung anzugeben, welche alle Elemente aufzeigt, nicht eine Darstellung der Restklasse selbst.

  Dafür spricht die Form $3k + 3k + 1$, die (mit einem Fehler) alle möglichen Zahlensummen beschreibt.

[31] Sfard (1991) nennt den Perspektivenwechsel von einem Konstruktionsprozess zum Ergebnis dieses Prozesses, welches von seiner Entstehungsgeschichte losgelöst als eigenständiges Objekt aufgefasst wird, eine Verdinglichung. Die hier vorgeschlagene Deutung von Herrn Sendigs Äußerung bedeutet, dass er im Prozess der Verdinglichung des Addierens von Restklassen die Summe als Ergebnis in den Blick nimmt, sie jedoch (noch) nicht losgelöst von ihrem Entstehungsprozess sieht.

- Die ersten beiden Deutungen unterstellen, dass Herr Sendig mit dem Term entweder im Sinn hat bestimmte Zahlen zu beschreiben oder auf eine Menge zu verweisen. Eine dritte Möglichkeit ist, dass er an ein Objekt denkt, das beide Wesensmerkmale vereint, dass er von diesem Objekt aber noch keine klare Vorstellung besitzt. Die Verwendung des Terms '$3k+3k+1$' kann ein Versuch sein, diese 'Mischform' zu repräsentieren, welche einerseits den Charakter einer Restklasse als Menge besitzt, und mit der andererseits umgegangen wird wie mit Zahlen.[32]

**Homomorphismus**

Die Interviewerin bittet Herrn Sendig, alle Homomorphismen, die von $N$ nach $N$ abbilden, anzugeben. Er vergewissert sich zunächst, ob es Homomorphismen bzgl. plus sein sollen. Dann sagt er:

Transkriptausschnitt: (RK, Sendig) 117-120

S: Mir ist noch nicht ganz klar, was wir jetzt genau suchen. Also Homomorphismus heißt doch, dass es bzgl. dieser Verknüpfung egal ist, ob ich in, eh, erst verknüpfe und dann das Ganze abbilde, oder ob ich erst abbilde und dann die gleiche Verknüpfung auf der anderen Menge halt nehme.

Diese Beschreibung gibt die Idee des Homomorphismus in einer ganz allgemeinen Situation wieder, die noch nicht konkret auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ bezogen ist. Sie geht nicht auf formale Details ein. Dabei lässt Herr Sendig allerdings in seiner Aussage die Objekte weg, so dass nicht mit Sicherheit zu sagen ist, an welche Objekte er denkt. Eine Präzisierung seiner Aussage kann wie folgt aussehen:

[32] Das Zeichen $3k+3k+1$ dient in diesem Fall zur Generierung von Bedeutung. Sfard (2000) erläutert, dass in der Geschichte der Mathematik verschiedentlich die Einführung neuer Zeichen und ihr syntaktischer Gebrauch der mentalen Konstruktion von abstrakten Objekten, welche später mit diesen Symbolen bezeichnet wurden, vorausging. Diese Vorgehensweise sieht sie als ein allgemeines Prinzip mathematischen Lernens:
"In this chapter, I am trying to promote the idea that the introduction of a new structural signifier, and thus the creation of a new discursive focus, can be seen as an act of conception of a new mathematitical object." (S. 49)

| Herr Sendigs Aussage | Deutung |
|---|---|
| Homomorphismus heißt, | Bei einem Homomorphismus |
| es ist egal | führen folgende beiden Wege |
| | zu demselben Ergebnis: |
| | |
| | Erster Weg: |
| - ich verknüpfe | Ich addiere |
| erst | zwei Elemente der Definitionsmenge |
| - ich bilde das Ganze ab | und bilde (die Summanden und) |
| | die Summe ab. |
| | |
| | Zweiter Weg: |
| - ich bilde ab | Ich bilde zwei Elemente |
| | der Definitionsmenge ab |
| - ich nehme die gleiche Verknüpfung | und addiere |
| auf der anderen Menge | die beiden Bilder |

Transkriptausschnitt: (RK, Sendig) 121-128

I: Genau. Mach das doch so ähnlich wie eben mit den Abbildungen.[33] Du musst, wie viele, also du hast eine Abbildung
$* \; N \longrightarrow N \; *$
die diese zusätzliche Eigenschaft dann erfüllen muss.
S: D.h. wir können jetzt eigentlich null, eins, zwei hinschreiben.[34]
I: $* \begin{array}{ll} N \longrightarrow & N \\ \overline{0} \longmapsto & \\ \overline{1} \longmapsto & \\ \overline{2} \longmapsto & \end{array} *$
Ja, jetzt guckst du, was du für Möglichkeiten für das Bild hast.
S: Also die Identität ist dann ja, ist auch ein Homomorphismus, ja?

Herr Sendig schlägt vor, ‘null’, ‘eins’, ‘zwei’ zu notieren. Die Interviewerin deutet dies, indem sie die drei den Restklassen entsprechenden Zeichen als Zahlen mit Querstrichen zusammen mit Zuordnungspfeilen für Elemente aufschreibt. Es ist nicht klar, ob dies Herrn Sendigs Intention entspricht, aber zumindest protestiert er nicht. Seinen ersten Vorschlag gibt er mit einem Namen, die Identität, anstelle einer Angabe der einzelnen Bilder an. Die Interviewerin notiert die drei zur Identität gehörenden Bilder und fragt nach weiteren Möglichkeiten. Die Interviewerin notiert seinen Vorschlag in einer weiteren Spalte:

[33] Im ersten nicht transkribierten Teil des Gesprächs waren alle Abbildungen auf einer zweielementigen Menge in sich zusammengestellt worden, indem für jede Abbildung die Bilder der beiden Elemente notiert wurden.

[34] Dies entspricht dem Vorgehen im ersten Teil des Interviews, wo zunächst die beiden Elemente der Definitionsmenge notiert wurden.

$$\text{(b)} * \begin{array}{cccc} N & \longrightarrow & N & \\ \overline{0} & \longmapsto & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \longmapsto & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \longmapsto & \overline{2} & \overline{1} \end{array} *$$

Nun soll untersucht werden, ob die zweite Abbildung ein Homomorphismus ist:

Transkriptausschnitt: (RK, Sendig) 141-164

141 S: Ja, vor allem ist mir jetzt nicht klar, was das rechnerisch heißt, wenn ich jetzt
142 eins auf zwei abbilde und zwei auf eins, was da jetzt hinter steht.
143 I: Das ist jetzt nur eine Anweisung, wie ich abbilde.
144 S: Ja.
145 I: Das hat jetzt nichts mit dem Rechnen in N zu tun. Zunächst mal nicht. Nur wir
146 müssen überprüfen, ob <u>diese</u> Anweisung (zeigt in (b) auf die dritte Spalte) verträglich
147 ist mit den Verknüpfungen, die ja in diesem Fall sind ja die Verknüpfungen dieselben,
148 weil wir ja zweimal dieselbe Menge haben. D.h., was müssten wir z.B. überprüfen?
149 (3 Sek)
150 S: Wir müssen ja einfach mal. Können wir nicht einfach mal ein Element auswählen
151 oder zwei Elemente auswählen aus der Restklasse und dann die addieren und gucken,
152 ob das das Gleiche ist?
153 I: Probier doch mal.
154 S: Ja also in Eins sind meinetwegen jetzt vier und sieben drin. D.h. da müsste (4
155 Sek)
156 I: * $4, 7 \in \overline{1}$ *
157 S: Wenn man sagt, ich verknüpfe die beiden Elemente, also vier plus sieben
158 I: * 4+7 *
159 S: Dann wäre das, dann würde ich ja in Restklasse Zwei landen.
160 I: Ja. * $4 + 7 \in \overline{2}$ *
161 S: Jetzt soll aber das Ganze abgebildet werden auf Restklasse Zwei. Wenn wir jetzt
162 z.B.
163 I: Was wird auf Restklasse Zwei abgebildet? Die Zwei oder was?
164 S: Nein, nein.

Herrn Sendig fehlt ein Rechenverfahren zu der angegebenen Abbildung. Um die Rechnungen für den Homomorphietest durchzuführen, die sich aus seinen Ausführungen in den Zeilen 117-120 ergeben, wünscht er sich vielleicht einen allgemeinen Funktionsterm, mit welchem durch Einsetzen von eins das Ergebnis zwei und durch Einsetzen von zwei das Ergebnis eins herauskommt.

Die Interviewerin weist darauf hin, dass die gegebene Anweisung die Abbildung definiert, und es dazu keiner Rechnung bedarf, sondern eine Rechnung erst zur Durchführung des Homomorphietests notwendig wird. Herr Sendig möchte hierfür zwei konkrete Elemente wählen. Diese Elemente müssten korrekterweise in der Definitionsmenge der Abbildung, also in $N$, liegen. Herr Sendig sagt jedoch, er wählt Elemente aus 'der Restklasse'. Da es um drei Restklassen geht, ist der bestimmte Artikel wohl irrtümlich gewählt, oder er weist darauf hin, dass Herr Sendig eine bestimmte Restklasse im Kopf bereits ausgewählt hat, die er hier anspricht. Auch die Einzahl kann, muss aber nicht ein Irrtum sein.

Die Interviewerin ermutigt ihn, das vorgeschlagene Verfahren konkret durchzuführen. Herr Sendig wählt nun zwei Zahlen, die beide in $\overline{1}$ liegen, und kommentiert "in Eins". Er sagt nicht "in Restklasse Eins', dennoch notiert die Interviewerin $\overline{1}$. Herr Sendig akzeptiert diese Deutung seiner Worte, und ich vermute, dass sie seiner Intention entspricht. Denn die einzige andere sinnvolle Bedeutung des Wortes 'eins' kann die Zahl Eins sein, in der jedoch keine anderen Zahlen "drin" sind. Herr Sendig bildet nun die Summe der beiden Zahlen. Er stellt fest, dass sie in Restklasse Zwei liegt. Seine folgende Bemerkung wird von der Interviewerin falsch verstanden:

> "Jetzt soll aber das Ganze abgebildet werden auf Restklasse Zwei."

Die Interviewerin nimmt an, dass er mit 'das Ganze' die Summe meint und versteht darunter die Ergebnisrestklasse Zwei. Dies verneint er jedoch. Im Weiteren äußert er sich nicht, was er gemeint hat. Hier sind drei Vorschläge, was 'das Ganze' sein kann, das abgebildet werden soll:

1. Das Ganze ist die ganze Restklasse Eins, die sowohl 4 als auch 7 enthält.
2. Das Ganze ist die Summe, aber Herr Sendig meint mit der Summe nicht die Restklasse Zwei, sondern die Zahl 4+7=11.

   Degegen spricht, dass er sagt, das Ganze wird auf 'zwei' abgebildet: Weder die Restklasse Zwei noch die Zahl 11 wird auf 2 oder $\overline{2}$ abgebildet.
3. Das Ganze ist die Gesamtheit der Bestandteile der durchgeführten Rechnung 4+7=11.

Alle drei Deutungen legen einen Fokus auf die Elemente der Restklassen nahe, den Herr Sendig ja durch die Wahl von Zahlen anstelle von Restklassen auch einnimmt. Wenn Herr Sendig meint, dass nun die Zahl 11 und evtl. auch 4 und 7 abgebildet werden müssen, so ist dies in der Tat mit den gegebenen Informationen über die Abbildung nicht möglich. Für die erste Deutung spricht, dass Restklasse Eins laut Zuordnungsvorschrift tatsächlich auf Restklasse Zwei abgebildet wird. Dies findet er problematisch, wie er mit 'aber' andeutet. Sein Vorgehen zeigt, dass er den Elementen einer Restklasse oder Repräsentanten dieser Elemente eine entscheidende Rolle beimisst. Denn er addiert $4+7 \in \overline{2}$ statt $\overline{1}+\overline{1} = \overline{2}$. Zur Überprüfung der Homomorphismuseigenschaft an einem ersten Beispiel hat er mittlerweile eine Summe im Bereich der Definitionsmenge gebildet. Nun ist zu vergleichen, ob ihr Bild der Summe aus den Bildern der Summanden entspricht. Die nächste durchzuführende Rechnung ist also die Addition der Bilder. Dazu muss er die Bilder der Summanden haben. In seiner Rechnung sind die Summanden die Zahlen 4 und 7, nicht die Restklasse Eins und die Restklasse Eins. Für diese Zahlen sind keine Bilder gegeben. Er weiß nur, dass diese 'Bilder' in Restklasse Zwei liegen, hat hier aber keine bestimmten Zahlen, sodass er seine Rechnung nicht ausführen kann. Eine Lösung seines Problems wäre die Überlegung, dass beliebige Elemente von Restklasse Zwei als Summanden immer eine Summe in Restklasse Eins ergeben, und es daher nicht notwendig ist, für jede einzelne ganze Zahl ein Bild zu haben. Sie erfordert aber die Erkenntnis, dass (sowohl hinsichtlich der Abbildung wie auch hinsichtlich der Addition) die Restklassen und nicht Zahlen die Objekte sind, anhand derer die Homomorphismuseigenschaft zu zeigen ist. Diese Erkenntnis widerspricht offenbar Herrn Sendigs Ansatz.

Das Problem, dass Herr Sendig die Informationen der Abbildungsvorschrift für unzureichend hält, tritt erst auf, als er überprüfen soll, ob sie ein Homomorphismus ist. Vielleicht kann er sich durchaus vorstellen, dass durch eine Abbildung Mengen Bilder zugeordnet werden, kann aber diese Abbildung nur als Homomorphismus verstehen, wenn die Objekte auch verknüpft werden. Falls den anfänglichen Worten (Zeilen 150-151):

> "Können wir nicht einfach mal ein Element auswählen oder zwei Elemente auswählen aus der Restklasse"

die Bedeutung beizumessen ist, dass die Summanden aus derselben Restklasse sein müssen, erhält die erste Deutung noch eine besondere Nuance: Es wird nur eine einzige Restklasse im Definitionsbereich betrachtet, Herr Sendig wählt die Klasse von Eins. Hier ist zu addieren und dann das 'Ganze', also die Restklasse Eins mit der dort durchgeführten Rechnung, durch die Abbildung auf den Bildbereich zu übertragen und mit der zugehörigen Addition dort zu vergleichen. Es ist denkbar, dass Herr Sendig sich die Zuordnung als drei getrennte Zuordnungen vorstellt, welche jede für sich untersucht werden. Indem er die Restklasse $\overline{1}$ auswählt, beschränkt er sich auf eine Abbildung

$$\overline{1} \longrightarrow \overline{2}$$

Sein Problem ist, dass $\overline{1}$ bzgl. der Addition jedoch nicht abgeschlossen ist. Das Ganze, also die Restklasse Eins, soll auf Restklasse Zwei abgebildet werden, aber das geht nicht, weil das Ergebnis der Addition nicht in Restklasse Eins liegt und darum gar nicht mit abgebildet wird.

Aus allen Deutungsalternativen folgt, dass Herr Sendig nicht wirklich Restklassen, sondern alle ganzen Zahlen als die Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ansieht. Dies lässt seinen Einwand (Zeile 141-142), dass ihm Informationen über die Abbildung fehlen, in einem neuen Licht erscheinen. Die Vorstellung, dass zur Überprüfung der Homomorphismuseigenschaft die Bilder der einzelnen ganzen Zahlen bekannt sein müssen, legt es nahe, nach einer rechnerisch formulierbaren Abbildungsvorschrift zu fragen, die für alle Zahlen verwendbar ist. Die Darstellung der Abbildung mit

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & N \\ \overline{0} & \longmapsto & \overline{0} \\ \overline{1} & \longmapsto & \overline{2} \\ \overline{2} & \longmapsto & \overline{1} \end{array}$$

ist dann nur als Grobeinteilung zu verstehen; die jeweiligen konkreten Bilder fehlen. Herr Sendig selbst hat die Zuordnung nur diktiert, nicht selbst geschrieben. Er selbst hat jedoch zunächst festgelegt, dass 'null', 'eins' und 'zwei' notiert werden müssen, um die Abbildung anzugeben. Das bedeutet, dass er nicht nur die ganzen Zahlen als Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sieht, sondern die Einteilung in Restklassen auch für die Angabe eines Homomorphismus für relevant hält. Seine erste Vermutung, die Identität sei ein Homomorphismus, kann nicht nur so gedeutet werden, wie die Interviewerin sie notiert, als Abbildung auf einer dreielementigen Menge, sondern kann auch als Abbildung auf $\mathbb{Z}$ gemeint sein. Wenn jede ganze Zahl auf sich abgebildet wird, dann kann diese Abbildung auf jede der drei Restklassen eingeschränkt werden und ist dann dort ebenfalls die identische Abbildung. Eine vollständige Notation dieser

Zuordnung auf zwei Ebenen wäre wesentlich komplizierter, als die Notation der Interviewerin. Dies ist hier jedoch nicht notwendig, weil der Name dieser besonderen Abbildung die Zuordnung auf jeder Ebene festlegt: alles (jede Menge, jede Zahl) wird auf sich selbst abgebildet.

## Der Aufbau von Vorstellungen bei Herrn Sendig

### Bezug zwischen $N$ und anderen Darstellungsformen für Restklassen

Herr Sendig erkennt in der Zeichenkombination

$$N = \{\{3k|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+1|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+2|k \in \mathbb{Z}\}\}$$

die drei Restklassen modulo drei. Außer den Wortzeichen 'Restklasse Null', 'Restklasse Eins' und 'Restklasse Zwei' verwendet er keine weiteren Zeichen. Die Charakteristika, welche die von der Interviewerin gegebene Darstellung **(3)** betont, nämlich ein System von Mengen, mit deren Hilfe bestimmte Zahlen gekennzeichnet werden, passen jedoch zu Herrn Sendigs Vorgehen.[35]

### Additionsverfahren

Im Kontext von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ erinnert Herr Sendig eine Addition von ganzen Zahlen, welche in den Zusammenhang der Zugehörigkeit von Summanden und Summen zu einer Restklasse gestellt wird. Die Verfahrensschritte zur Addition in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sind:

1. Wähle: $a \in \overline{x}, b \in \overline{y}$
2. Berechne: $a + b$
3. Ordne ein: $a + b \in \overline{z}$

Dieses Verhalten entspricht der Beschreibung **(b)** in der oben gegebenen Feinanalyse. Bei einer konkreten Addition versucht Herr Sendig dann das Ergebnis mit Hilfe eines allgemeinen Elements auszudrücken. Dies passt zu der Beschreibung **(c)**. Im Vordergrund von Herrn Sendigs Addition stehen die Zahlen: Er betrachtet nicht Zahlen als Hilfsmittel zur Berechnung der Summen von Restklassen, sondern Restklassen als Hilfmittel zur Beschreibung der Summen von Zahlen. Restklassen dienen dem Ordnen von Zahlen und helfen Aussagen über Zahlen bestimmten Typs zu treffen.[36] Dieser Auffassung nach entspricht $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der Menge $\mathbb{Z}$, die mit einer Struktur versehen ist, nämlich mit der Einteilung ihrer Elemente in Unterabteilungen, welche durch die Klassen der Äquvalenzbeziehung 'kongruent modulo drei' festgelegt werden. In Analogie zu der Bezeichnung der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$, welche ebenfalls eine Struktur der Menge der ganzen Zahlen bezeichnet, soll diese Vorstellung hier mit dem Symbol $(\mathbb{Z}, \equiv_3)$ bezeichnet werden. Die Mengenklammern innerhalb der Menge $N$, welche bedeuten, dass nicht die ganzen Zahlen, sondern die Restklassen als Elemente von $N$ auftreten, ignoriert Herr Sendig zwar nicht, scheint sie aber auf unkonventionelle Weise zu deuten, nämlich als Unterteilungen der ganzen Zahlen. Eine Darstellung der Menge $N = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ als Mengenbild mit Unterteilungen [37] würde beide

[35] Dies gilt auch für die Diskussion über Homomorphismen, in der die Darstellungsform **(1)** dominiert.

[36] Aus seiner anfänglichen Erklärung der Addition kann diese Deutung nur als eine von mehreren gegeben werden. Erst aus seinem Additionsverhalten im Zusammenhang mit dem Homomorphismus können die anderen Interpretationen ausgeschlossen werden.

[37] Vgl. die Abbildung (*) in Abschnitt 2.2.4.

Deutungen zulassen: Sowohl die Teilmengen als auch die Elemente der Teilmengen könnten als Elemente der Gesamtmenge verstanden werden.

**Homomorphietest**

Sowohl die grundsätzliche Idee, dass ein Homomorphismus die Gruppenaddition respektiert, als auch das Verfahren zur Überprüfung dieser Eigenschaft sind Herrn Sendig geläufig. In der Durchführung dieses Tests bekommt er Schwierigkeiten mit seiner Vorstellung über die Elemente die Addition der Gruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$: Ein Homomorphismus auf dieser Gruppe muss nach Herrn Sendigs Verständnis (auch) den einzelnen ganzen Zahlen Bilder zuordnen. Er betrachtet die ganzen Zahlen als die Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, wobei Nebenbedingungen berücksichtigt werden können. Eine aus seiner Sicht vollständige Definition der Abbildung, die im Interview besprochen wird, könnte von der folgenden Art sein:

$$\begin{array}{rcccrcl} f: & N & \longrightarrow & N & & & \\ & \overline{0} & \longrightarrow & \overline{0}: & 3k & \longmapsto & 6k \\ & \overline{1} & \longrightarrow & \overline{2}: & 3k+1 & \longmapsto & 6k+2 \\ & \overline{2} & \longrightarrow & \overline{1}: & 3k+2 & \longmapsto & 6k+4 \end{array}$$

Diese hier vorgeschlagene Abbildung wäre sogar sowohl strukturerhaltend im Sinne der Struktur $(\mathbb{Z}, \equiv_3)$ als auch ein Homomorphismus auf $(\mathbb{Z}, +)$.

**Ein mögliches Restklassenmodell**

Es hat den Anschein, dass Herrn Sendigs innere Repräsentation von $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ erheblich komplexere Strukturen besitzt als die mathematische Repräsentation dieser Gruppe und zu einer Homomorphismusvorstellung führt, die wesentlich höhere Bedingungen fordert als die formale Homomorphismusdefinition:

| | Gruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ | vermutliche Merkmale von Herrn Sendigs Vorstellung |
|---|---|---|
| Elemente | drei:<br>$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ | unendlich viele:<br>die ganzen Zahlen |
| 1. Struktur | | Einteilung der Elemente in Restklassen |
| Addition | einfache Regel zur Bildung von neun Summen | Addition auf $\mathbb{Z}$ und Einteilung in Restklassen |
| 2. Struktur | - Gruppengesetze für Addition | - Gruppengesetze für Addition<br>- Die Addition respektiert die Restklasseneinteilung |
| Homomorphismus | respektiert Gruppenstruktur | respektiert beide Strukturen |

Herr Sendig geht so mit Restklassen um, als handele es sich um Mengen, welche Ordnungsmittel für Zahlen darstellen. Sie sind Objekte, aber sie erhalten nur ansatzweise den Rang abstrakter Objekte, welche mathematischen Handlungen unterworfen werden. Der einzige Hinweis auf eine solche Behandlung ist die Definition einer Abbildung, welche auf diese Objekte angewendet wird. Aber im Umgang mit dieser Abbildung fehlt Herrn Sendig dann doch das Herunterbrechen auf die einzelnen Elemente der Restklassen. Herr Sendig vollzieht hier somit keine Vereinigung[38] von Objekten.

#### Weitere Bemerkungen

An Herrn Sendigs Antworten ist auffällig, dass er selten Beispiele verwendet. Er tut das nur an einer Stelle, wo er merkt, dass sein Verständnis nicht zu den Angaben der Interviewerin passt, als ihm nämlich Informationen bei der Abbildung fehlen. Er beschreibt sein Wissen in großer Allgemeinheit mit Worten, ohne Beispiele zu verwenden. Dies betrifft die Addition von Restklassenelementen und die Homomorphismuseigenschaft. Ein solches Verhalten wird häufig bei Menschen mit einer Präferenz für prädikatives Denken beobachtet.

### 3.2.3 Deutung des Restklasseninterviews mit A. Beck

Das Gespräch mit Frau Beck über Restklassen schließt ebenfalls an ein Gespräch an, in dem die Abbildungen der Menge $M = \{1, 2\}$ in sich gesucht und mit Hilfe von Pfeilschemata der Art

$$\begin{array}{ccc} \{1,2\} & \longrightarrow & \{1,2\} \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 2 \end{array}$$

dargestellt wurden. Die darauf folgende Diskussion über Restklassen gliedert sich in zwei thematische Abschnitte: Zunächst wird die Frage erörtert, wie eine Addition in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ aussieht. Dieses Thema wird anhand von verschiedenen Repräsentationen zweier Restklassen behandelt. In einem zweiten Teil werden die Epimorphismen von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gesucht. Nach einer Aufzählung etlicher Abbildungen von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ folgt eine Überprüfung der Vorschläge.[39]

#### Addition

Die Interviewerin notiert das Mengensystem

$$N = \{\{3k|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+1|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+2|k \in \mathbb{Z}\}\}$$

und weist darauf hin, dass Frau Beck diese Menge in anderer Notation kennt. Frau Beck antwortet:

Transkriptausschnitt: (RK, Beck) 7-11

B: Also, wenn. Im Prinzip hat die (3 Sek). Die erste Gruppe hat also immer drei k, die zweite Gruppe immer drei k plus eins, also jeweils die Zahl, die darüber liegt, und

[38] Zur Definition des Begriffs ‘Vereinigung’ siehe Abschnitt 1.2.1.

[39] Nur die erste, die die ausführlichste Überprüfung ist, wird im Folgenden analysiert.

9 bei drei k plus zwei jeweils die Zahl, die <u>dar</u>über liegt. Also wirkt das so'n bißchen
10 ehm, wenn man das jetzt z.B. in Restklassen einteilen würde, hätte man dieses Null,
11 Eins und Zwei, bei der Restklasse von drei.

Die Bezeichnung 'Gruppe' wird hier wohl nicht als mathematischer Strukturbegriff gemeint sein, denn es ist keine Rede von einer Verknüpfung. Wahrscheinlicher ist die umgangssprachliche Bedeutung 'Abteilung', die den Fokus auf die Elemente der drei Mengen in $N$ legt. Diese sind mit $3k$, $3k+1$ und $3k+2$ notiert, wobei $k$ jeweils alle ganzen Zahlen durchläuft. Auf sie nimmt Frau Beck hier offenbar Bezug. Mit dem Ausdruck 'immer $3k$' will sie vielleicht darauf hinweisen, dass $k$ für verschiedene Zahlen steht. Sie meint vielleicht: In der ersten Gruppierung steht das Zeichen '$3k$', das immer ein Vielfaches von drei beschreibt. Frau Beck beschreibt dann jedoch nicht jede Menge für sich, indem sie sagt, welche Elemente dazugehören oder wie man von einem Element zum nächsten gelangt, sondern sie beschreibt eine Beziehung zwischen einem allgemeinen Element der ersten Menge und einem Element der zweiten und dann eine Beziehung zwischen diesem und einem Element der dritten Menge. Sie sieht diese Mengen also folgendermaßen:

$$\begin{array}{l} 3k+1+1 \\ 3k+1 \\ 3k \end{array}$$

Sie 'sieht' dann Eigenschaften, die jeweils die Elemente einer Menge gemeinsam haben, nämlich die Zahl, die zu $3k$ addiert wird.

Frau Beck fällt nun die Bezeichnung $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ für $N$ ein. Die Interviewerin bezeichnet dann die drei Mengen in $N$ mit $A, B$ bzw. $C$, in dieser Reihenfolge, und fragt, ob man zwei dieser Mengen addieren, z.B. $A$ plus $B$ bestimmen, kann.

Transkriptausschnitt: (RK, Beck) 18-33

18 B: Dann ist das die Restklasse von null und die Restklasse von eins. Und die beiden
19 zusammen addiert ist also. Ja. Sicher kann man die addieren. Also: Es kommt darauf
20 an, wenn man. Darf ich mal kurz?
21 I: Hm!
22 B: * 3,6,9 *
23 Die Null wahrscheinlich auch?
24 I: Ja, und minus drei auch.
25 B: (ergänzt zu:)
26 (a) * $\begin{array}{llll} 0, & 3, & 6, & 9 \\ 1, & 4, & 7, & 10 \end{array}$ *
27 Wenn ich die jetzt addiere, muss ich nur gucken, dass ehm, dass das wieder in der
28 gleichen Restklasse liegt, also, dass das nicht in C liegt. Wenn ich jetzt also drei
29 und vier addieren würde, bin ich bei sieben, bin ich da, (zeigt in (a) auf die zweite
30 Zeile), das würde theoretisch gehen. Also, was die Addition angeht: Null und eins
31 geht auch. Null und vier also mit null sowieso, weil das ja das neutrale Element ist.
32 Neun und eins. Das Problem ist nur, wenn ich jetzt hier vier und sieben zusammen
33 addiere, dann geht es nicht mehr, weil ich dann ja in die Restklasse C komme.

Frau Beck erkennt, dass $A$ für die Restklasse von null und $B$ für die Restklasse von eins steht. Sie notiert einige Elemente von jeder der beiden Restklassen und sucht dann, wie addiert wird. Dabei stellt sie eine Regel auf:

> "dass das wieder in der gleichen Restklasse liegt, also, dass das nicht in $C$ liegt."

Es ist offensichtlich, dass sie sich mit der Addition von Elementen dieser Mengen beschäftigt. Es ist möglich, dass sie diese als Zwischenschritt zur Addition der Mengen selbst betrachtet, aber sie gibt keine Hinweise darauf. Die Summen sollen in der Restklasse der Summanden liegen. Vielleicht rührt diese Vorstellung von der Bedingung, dass in einer mathematischen Gruppe die Verknüpfung die Bedingung erfüllen muss, dass das Ergebnis innerhalb der Gruppe liegt. Frau Beck merkt sofort, dass ihre Bedingung hier nicht erfüllbar ist, wenn die Summanden aus verschiedenen Restklassen kommen, und ändert sie ab zu der Regel, dass die Summe nicht in der dritten Restklasse liegen darf. Das ist gleichbedeutend damit, dass die Summe in der Vereinigungsmenge von $A$ und $B$ liegen muss. Dies kommt einer Vorstellung gleich, nach der die gesuchte Addition definiert ist auf

$$A \times B \quad \longrightarrow \quad A \cup B \qquad \text{oder} \qquad (A \cup B) \times (A \cup B) \quad \longrightarrow \quad A \cup B$$

Zunächst wählt sie Beispiele, wo jeweils ein Element aus $A$ und ein Element aus $B$ addiert werden, als letztes jedoch ein Beispiel, wo beide Summanden in $B$ liegen, das sie als Gegenbeispiel ansieht, weil diese Summe in $C$ liegt. Damit fällt nun die erste Alternative aus. Sie sucht also nach einer Addition auf der Vereinigungsmenge, die abgeschlossen ist.

Transkriptausschnitt: (RK, Beck) 34-37
I: Also was ist A plus B?
* A + B = *
Du hast dir das hier (zeigt auf (a)) mit Elementen überlegt.
B: Also A plus B ist zumindest nicht vollständig. Wenn ich das eh

Die Schlussfolgerung, dass $A + B$ 'zumindest nicht vollständig' ist, kann Verschiedenes bedeuten:

- Sie kann sich auf $A + B$ als Menge beziehen, denn man kann bei Mengen von Vollständigkeit sprechen. Nach ihren vorherigen Überlegungen fehlen einige Summen, z.B. 4+7. Ihre Aussage kann heißen: $A + B$ ist die Bildmenge der Additionsabbildung

$$\begin{array}{rccc} + : & (A \cup B) \times (A \cup B) & \longrightarrow & A \cup B \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} .$$

  Als solche ist sie Teilmenge von $A \cup B$, muss aber auch alle Summen $x + y$ von Elementen $x$ und $y$ aus $A \cup B$ enthalten. Das geht nicht: Es fehlt etwas in $A + B$.

- Es ist auch möglich, dass Frau Beck '$A+B$' als eine Aufforderung zum Addieren in einem Zahlbereich versteht, der durch die Mengen $A$ und $B$ in irgendeiner Weise festgelegt und begrenzt wird. Da manche Summen nicht innerhalb dieses Zahlbereichs liegen, ist die Addition nicht immer möglich. So kann die Aussage, dass $A+B$ nicht vollständig ist, bedeuten, dass diese Addition nicht vollständig definiert ist.

Beide Interpretationen bedeuten eine Sichtweise auf die Restklassen $A$ und $B$ als Mengen, welche Ordnungsfunktionen für ganze Zahlen wahrnehmen. Dies passt zu Frau Becks bisherigen Erfahrungen in der Vorlesung: Großbuchstaben als Namen von Mengen bezeichnten Objekte, die in ganz bestimmten Funktionen auftreten. Zumeist gaben sie - oft zusammen mit einer Verknüpfung - einen Rahmen für Zahlen oder andere mathematische Objekte vor, der dazu dient, diese Objekte zu beschreiben oder mit ihnen Handlungen durchzuführen.[40]

Auf eine Vorstellung, welche $A$ und $B$ als Objekte ansieht, auf die eine Addition analog zu der Addition von Zahlen angewendet wird, gibt es hier keine Hinweise. Sie ist auch nicht vereinbar mit der Bemerkung, $A+B$ sei nicht vollständig, ebenso wie eine Bemerkung, $2+3$ ist nicht vollständig, keinen Sinn ergibt.

Transkriptausschnitt: (RK, Beck) 38-53

I: Leichter wäre es, wenn ich das so geschrieben hätte, wie du es eben gesagt hast, ne? Mit A,B,C
B: Ja, mit null, eins und zwei
I: genau, dann ist es einfacher, ne?
(b) * $\overline{0}+\overline{1}=$ *
B: Ja, wenn ich null plus eins (zeigt auf (b)) habe, wenn ich also wirklich nur ein Element aus null und eins ehm (zeigt auf (a)) nehme, dann komme ich weiterhin immer in die Restklasse Eins (zeigt in (a) auf die zweite Zeile), weil das ja das neutrale Element (zeigt in (b) auf $\overline{0}$) ist. Wenn ich hier jetzt, wenn ich innerhalb von Eins addiere, dann geht's nicht.
I: Das könnte ich ja auch sagen: Was soll eins plus eins sein?
* $\overline{1}+\overline{1}=$ *
B: Ist, schätze ich mal, immer zwei.
I: * $\overline{1}+\overline{1}=\overline{2}$ *
Das hatten wir so definiert, ne?
B: Ja.

Die Interviewerin nimmt Frau Becks Bezeichnungen 'null, eins, zwei' auf, indem sie Zahlen mit Querstrichen schreibt. Dies ist eine Interpretation, die Frau Beck vielleicht gar nicht im Sinn hat, und die somit einen Hinweis der Interviewerin darstellt, in eine bestimmte Richtung zu denken. Die vertraute Notation $\overline{0}+\overline{1}$ veranlasst Frau Beck, die Bedingung fallen zu lassen, dass die Summanden beliebig aus der Vereinigungsmenge von $A$ und $B$ gewählt werden können. Sie beschreibt hier das Verfahren, wie man zu einem Ergebnis kommt und es ist nicht eindeutig zu sagen, ob das Ergebnis ein einziges Objekt ist, oder ob es viele Zahlen sind. Auf eine Objektvorstellung der Restklassen deutet die Klassifizierung von $\overline{0}$ als 'neutrales Element' hin. Als Element der Gruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$ hat $\overline{0}$ die Funktion des neuralen Elements. Allerdings macht Frau Becks Einwand, dass man bei der Rechnung eins plus eins nicht in dieselbe Restklasse gelangt, deutlich, dass ihr nicht so recht klar ist, worin

[40]Verknüpfungen für bestimmte mathematische Objekte wurden als innere Abbildungen einer Menge definiert.

die Addition auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ besteht. Bei der Frage nach $\overline{1}+\overline{1}$ verzichtet Frau Beck auch noch auf die Bedingung, dass die Summen nicht in einer anderen Restklasse liegen dürfen. Ein Grund könnte sein, dass sie nun - veranlasst durch die vertrauten Zeichen - ihre praktischen Rechenkenntnisse in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ anwendet, ohne den strukturtheoretischen Überbau zu berücksichtigen. Ihre Antwort 'immer zwei' zeigt, dass sie nach wie vor an viele Summen, und das heißt an die Addition von Elementen der Restklasse denkt, und nicht die Addition des Objekts $\overline{1}$ zu sich selbst im Sinn hat, welche ein einziges Ergebnis, nämlich die Restklasse $\overline{2}$ hat. Sie sagt auch nicht 'immer in Zwei', also das Ergebnis liegt immer in Restklasse Zwei, sondern es 'ist immer zwei'. Vielleicht meint sie damit soviel wie: 'Die Summe von zwei Elementen aus der Restklasse von eins ist immer kongruent zwei', also: $\overline{1}+\overline{1}=\overline{0}$ steht für

$$\begin{array}{rcccc} 1+1 & = & 2 & \equiv & 2 \\ 1+4 & = & 5 & \equiv & 2 \\ 10+7 & = & 17 & \equiv & 2 \\ \vdots & & & & \end{array}$$

**Homomorphismus**

Die Interviewerin fragt nach den Homomorphismen, die von $N$ nach $N$ abbilden, und es werden zunächst folgende Abbildungen gesammelt, die dann zu überprüfen sind:

$$\text{(c)} \qquad \begin{array}{l} \overline{0} \mapsto \;\; \overline{0},\;\; \overline{0},\;\; \overline{0},\;\; \overline{0} \\ \overline{1} \mapsto \;\; \overline{1},\;\; \overline{2},\;\; \overline{1},\;\; \overline{2} \\ \overline{2} \mapsto \;\; \overline{2},\;\; \overline{1},\;\; \overline{1},\;\; \overline{2} \end{array}$$

Frau Beck überprüft die erste der angegebenen Abbildungen:

Transkriptausschnitt: (RK, Beck) 121-130

B: Also wenn ich jetzt vorher gucken würde (zeigt in (c) auf die erste Spalte) null plus eins würde auf eins abgebildet werden. Also dann habe ich hier (zeigt in (c) auf die zweite Spalte) null plus eins auf eins. Das wird also auf jeden Fall schon mal gehen. Eins plus zwei wird auf null (zeigt in (c) auf die erste Spalte) abgebildet werden.
I: Ja.
B: Ehm. Ja. Das ist ja null (zeigt in (c) auf die erste Spalte) und wird auf null (zeigt in (c) auf die zweite Spalte) abgebildet. Das stimmt auch. Wenn ich hier eins plus zwei nehme, ist auch wieder null (zeigt in (c) auf die zweite Spalte). Und von daher müsste das rein theoretisch. Also ich mein man müsste das halt

Bei ihren ersten Summen ist nicht ganz klar, ob sie mit 'abbilden' das Addieren oder das Abbilden meint, welches sie auf die Homomorphismuseigenschaft hin untersucht. Da es sich sowohl bei der Addition von null als auch bei dem Homomorphismus um die identische Abbildung handelt, kann man dies auch an den erwähnten Werten nicht erkennen. Beim Beispiel 'eins plus zwei' ist es deutlicher: Sie bezeichnet das Addieren von $\overline{1}$ und $\overline{2}$ als 'Abbilden', was formal durchaus zulässig ist. Sie stellt fest, dass die Summe auf dasselbe abgebildet wird, was man erhält, wenn man $\overline{1}$ und $\overline{2}$

im Bildraum addiert. Sie zeigt hier, dass sie den Homomorphietest richtig ausführen kann. Hinsichtlich der Elemente von $N$ und ihrer Addition spricht sie nicht mehr von den einzelnen Restklassenelementen, sondern verwendet die Bezeichnungen ‘null’, ‘eins’ und ‘zwei’, die sie nach der Regel addiert, dass eins plus zwei null ist. Dies zeigt, dass sie unter diesen Namen nicht ganze Zahlen bzw. unter ihrer Addition nicht die auf $\mathbb{Z}$ definierte Addition versteht. Sie behandelt die Restklassen in dieser Aufgabe als Objekte, die sie addiert und abbildet, ohne dass sie in irgend einer Weise auf ihre einzelnen Bestandteile eingeht.

## Der Aufbau von Vorstellungen bei Frau Beck

### Bezug zwischen $N$ und anderen Darstellungsformen für Restklassen

Frau Beck erkennt ohne Schwierigkeiten, dass die Zeichen

$$\{3k|k \in \mathbb{Z}\},\ A \ \text{ und } \ \overline{0}$$

alle dieselbe Sache beschreiben, nämlich die Restklasse von null (modulo drei). Ein Referenzkontext für diese Zeichen, der möglicherweise durch die Darstellungen der Interviewerin angeregt wird, ist die Einteilung der ganzen Zahlen in drei Abteilungen, von denen eine die Restklasse von null ist. Frau Becks eigene Notation ‘$0, 3, 6, 9$’, mit der sie einige Elemente der Restklasse von null aufzählt, ohne dabei Mengenklammern zu verwenden, deutet auf eine Vorstellung, die die Elemente der Restklasse für die zentralen Objekte hält. In der Anfangsphase des Gesprächs stehen die Wesenszüge im Vordergrund, die die Darstellungsform **(3)**[41] betont. Im Umgang mit den Homomorphismen dominiert jedoch die Darstellungsform **(1)**, und es gibt keine Hinweise mehr auf Elemente der Restklassen.

### Additionsverfahren

Beim Addieren der Restklassen $A$ und $B$ entwirft Frau Beck eine Repräsentation, in der sie einige Elemente jeder Menge angibt, ohne dabei irgendein Kennzeichen für Mengen hinzuzufügen. Diese Elemente werden addiert, wobei die Mengen $A$ und $B$ Rahmenbedingungen vorgeben, welche Zahlen addiert werden und in welcher Menge die Ergebnisse liegen müssen. Die von Frau Beck genannten Rahmenbedingungen passen in einen Referenzkontext einer Menge mit zugehöriger Verknüpfung. Sie stimmen nicht mit der auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ üblichen Addition überein, welche aus der Addition von Repräsentanten abgeleitet wird, deren Summen nicht in dem von Frau Beck genannten Rahmen liegen. Die Restklassen erfüllen hier die Aufgabe von Ordnungsinstrumenten, werden jedoch trotz der Notation $A + B$ nicht selbst zu Summanden. Als Mengen stellen sie Objekte dar, aber nicht Objekte, die mathematischen Operationen unterworfen werden. Sie sind also nicht das Ergebnis einer Vereinigung[42]. Bei dieser ersten Reaktion auf die Frage nach einer Addition auf $N$ arbeitet Frau Beck unter den von der Interviewerin gegebenen Darstellungen **(3)** und **(4)** in der gegebenen Situation ohne Bezug zu der auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ definierten Addition. Dieses Vorgehen ist in 3.2.1 mit **(c)** bezeichnet worden.

[41] Zur näheren Erklärung siehe 3.2.1.

[42] Zur Definition dieses Begriffs siehe Abschnitt 1.2.1.

Mit der Darstellungsform **(1)** geht sie gemäß **(b)** vor: Die Notationen $\overline{0}+\overline{1}$ und $\overline{1}+\overline{1}$ veranlassen Frau Beck zu einer Einordnung der Restklassen in andere Zusammenhänge als die Notation $A+B$. Die Restklasse $\overline{0}$ bezeichnet sie nun als neutrales Element. Dies deutet auf ein Verständnis hin, welches die Menge nicht mehr ausschließlich in einer Ordnungsfunktion für ganze Zahlen sieht, sondern als vollwertiges Objekt mathematischer Betrachtung, das in mathematische Strukturen eingebunden ist, behandelt. Diesen Charakter deutet jedoch nur diese eine Bemerkung an. Die Veränderungen betreffen auch die vorgestellten Rahmenbedingungen, welche Zahlen addiert werden und welche Summen zugelassen werden. Referenzkontext wird nun der Umgang mit diesen Zeichen, der in der Veranstaltung präsentiert und geübt wurde. Er beinhaltete neben der Notation des Ergebnisses auch den Nachweis, dass die Addition über die Addition beliebiger Stellvertreter durchgeführt werden kann und bei jeder Wahl in dieselbe Restklasse führt. Die Unterscheidung zwischen Lösungsweg und Ergebnis nimmt Frau Beck nicht vor. Sie betrachtet das Ergebnis von $\overline{1}+\overline{1}$ nicht als Menge $\overline{2}$, sondern als viele Einzelsummen, welche alle unter dem Namen 'zwei' zusammengefasst werden können. Obwohl alle Ergebnisse dieselbe Bezeichnung erhalten, steht diese in Frau Becks Vorstellung nicht als ein einziges Objekt, sondern als Bezeichnung für verschiedene Zahlen, ähnlich wie eine Variable stellvertretend für verschiedene Zahlen stehen kann, die für sie eingesetzt werden können[43]. Für das Zeichen $\overline{1}$ wird entsprechend eine Zahl aus der Restklasse von eins eingesetzt. Allerdings trägt dieser Vergleich nicht vollständig, denn anders als bei einer Variablen im mathematischen Sinn ist die Wahl innerhalb dieser Restklasse ist für jedes auftretende $\overline{1}$ frei.

Die Vorstellung, dass das Zeichen $\overline{1}$ zugleich stellvertretend für verschiedene Zahlen aus der Restklasse von eins stehen kann, passt zum alltagsweltlichen Gebrauch von Oberbegriffen. Die Vokabel 'Hund' ist ein Oberbegriff. Sie kann sowohl für einen Pudel wie auch für einen Dackel verwendet werden. Die Feststellung:

> "Ein Hund beißt einen Hund."

schließt die Möglichkeit nicht aus, dass es sich um einen Dackel und einen Pudel handelt.

### Homomorphietest

Die Homomorphismuseigenschaft selbst deutet Frau Beck in allgemeiner Form an und zeigt, dass sie einen konkreten Nachweis eines Homomorphismus führen kann. Bei dieser Überprüfung spielt der Objektcharakter der Restklassen eine wichtige Rolle. Sie behandelt nun die drei von der Interviewerin vorgegebenen Elemente der Menge $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ als Objekte, welche Bilder zugeordnet bekommen und welche addiert werden. In diesem Kontext spricht sie nur von 'null', 'eins' und 'zwei', welche als Summanden und als Summen, als Urbilder und als Bilder des zu überprüfenden Homomorphismus auftreten. Sie erwähnt keine einzelnen Zahlen, die addiert oder zugeordnet werden. Es ist denkbar, dass Frau Beck diese Bezeichnungen als Namen für die drei Restklassen verwendet und hier diese drei Mengen als Objekte ansieht, auf die mathematische Handlungen angewendet werden. Es kann auch sein, dass

[43] Dies erinnert an den Einsetzungsaspekt einer Variablen bei Malle (1993). (Vgl. S. 44f.)

sie die Bezeichnungen stellvertretend für die Elemente der jeweiligen Restklassen meint, ohne das vollständig zu durchdenken. Vielleicht liegt ihre Vorstellung auch irgendwo zwischen den beiden genannten. Vielleicht hindert sie die Komplexität der Homomorphismusaufgabe, sich Restklassen als viele Zahlen zu denken, so dass sie sich auf die drei Namen konzentriert, ohne bislang bewusst den Schritt zu erfassen, dass diese Namen drei mathematische Objekte bezeichnen.[44]

**Ein mögliches Restklassenmodell**

Frau Beck's Verhalten in diesem Interviewgespräch impliziert noch nicht ausgereifte Vorstellungen zum Charakter der Restklassen und zur Addition von Restklassen. Auf den ersten Blick sieht es so aus, dass verschiedentliche Äußerungen auf Vorstellungen hinweisen, die nicht mit einander vereinbar sind: $\overline{0}$ bezeichnet einmal eines der Vielfachen von drei, einmal die Menge aller Vielfachen von drei. $A+B=\overline{0}+\overline{1}$ stellt einmal die Vereinigungsmenge zweier Restklassen, evtl. mit einer zugehörigen Addition, dar, ein anderes Mal die Elemente der Restklasse $\overline{1}$ und in einer wieder anderen Situation die Restklasse $\overline{1}$ selbst. Diese Widersprüche erscheinen in einem anderen Licht, wenn man sie als ein Bemühen um eine mentale Konstruktion der Vereinigung[45] von ganzen Zahlen zu Restklassen als abstrakten Objekten versteht: Frau Beck zeigt sowohl Anzeichen für die Vorstellung von Restklassen als reine Ordnungsobjekte für ganze Zahlen als auch Anzeichen für die Idee, dass Restklassen mathematische Objekte eigenen Rechts sind. Sie befindet sich auf der Schwelle zu einem Wechsel von Sichtweisen, der einen schwierigen Abstraktionsschritt ermöglicht.

Bemerkenswert ist, dass Frau Beck die Widersprüche in ihren Äußerungen (und möglicherweise auch ihren Vorstellungen) nicht anspricht. Es ist theoretisch möglich, dass sie diese recht offensichtlichen Widersprüche nicht bemerkt. Wahrscheinlicher scheint mir zu sein, dass ihr bewusst ist, dass ihre Vorstellung erst im Aufbau begriffen und noch unvollständig und fehlerhaft ist.

**Weitere Bemerkungen**

Frau Becks Vorgehen in diesem Interviewgespräch zeigt keine deutliche Ausprägung in einem Denkstil. Allerdings zeigt ihre anfängliche Annahme, $A+B$ beschreibe die Definitions- oder Zielmenge der Additionsabbildung, einen Interessensschwerpunkt bzgl. der Addition, welcher deutlich nicht bei dem eigentlichen Operieren liegt, sondern sich auf Beschreibungen von 'Orten' und somit Eigenschaften konzentriert. Auch fällt auf, dass Frau Beck nicht bemerkt, dass der Homomorphismus, den sie untersucht, die Abbildung ist, welche keine Wirkung hervorruft.

### 3.2.4 Deutung des Restklasseninterviews mit K. Rolle

Das Gespräch über Restklassen mit Frau Rolle schließt ebenfalls wie die anderen Restklassengespräche an Überlegungen an, welche Abbildungen von der Menge

[44] Wenn dies zutrifft, ist der Homomorphietest für Frau Beck ein Anlass, Zeichen in einer Weise zu verwenden, die eine bestimmte, von ihr noch nicht mental vollzogene Bedeutung dieser Zeichen impliziert. Das ist ein Beispiel für das Phänomen, dass Zeichen und ihre Bedeutung einander erschaffen. Vgl. Sfard (2000).

[45] Vgl. 1.2.1.

$\{1,2\}$ in sich es gibt. Das Restklassengespräch gliedert sich in zwei Teile. Der erste thematisiert die Addition von Restklassen. Dabei werden verschiedene Darstellungen hinsichtlich ihrer Zweckmäßigkeit für das Verknüpfen diskutiert. Im zweiten Teil werden die Epimorphismen auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gesucht. Ein Vorschlag wird dann auf Homomorphie hin untersucht.

### Addition

Transkriptausschnitt: (RK, Rolle) 6-14

6 I: Also nehmen wir eine Menge. Ich schreibe das mal, erstmal anders:
7 * $N = \{\{3k|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+1|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+2|k \in \mathbb{Z}\}\}$ *
8 (während des Schreibens:
9 . I: Also eine Menge (zeigt auf die ersten beiden Mengenklammern)
10 . R: in einer Menge. Das finde ich schon toll.
11 . I: Ja, ne?)
12 I: Was hat das mit Restklassen zu tun?
13 R: Also eigentlich würde ich eher das mit den Mengen in einer Menge. Das sind
14 eigentlich immer Restklassen. Das wär jetzt $\mathbb{Z}$ modulo k $\mathbb{Z}$?

Frau Rolle erklärt, dass Mengen, die in einer Menge liegen, 'eigentlich' immer Restklassen sind. Dies sind die einzigen Beispiele, die sie in der Vorlesung kennengelernt hat. Was sie mit $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ bezeichnet, bleibt offen. Sie könnte damit gezielt die Menge $N$ meinen, oder auch die Situation, dass man Restklassen betrachtet.

Nach etwas Herumraten, wie die genaue Bezeichnung der Menge $N$ lautet, setzt sich das Gespräch fort:

Transkriptausschnitt: (RK, Rolle) 23-35

23 I: * $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *
24 Wie addiert man denn zwei solche Mengen (zeigt auf die ersten beiden Elemente
25 von N)?
26 R: Wie also, wenn ich jetzt schreiben würde. Das wär ja für mich null quer, ja, eins
27 quer und zwei quer.
28 * $N = \{ \underset{\overline{0}}{\{3k|k \in \mathbb{Z}\}}, \underset{\overline{1}}{\{3k+1|k \in \mathbb{Z}\}}, \underset{\overline{2}}{\{3k+2|k \in \mathbb{Z}\}}\}$ *
29 Wenn ich die jetzt unter einander addiere? Ohne Homomorphismus, ja? Also ich
30 hätte jetzt
31 (a) * $\overline{0} + \overline{1} =$*
32 I: Ja.
33 R: O.k. Und wenn ich es anders schreiben würde, hätte ich, ehm, wäre das jetzt
34 einfacher, das so zu schreiben? Also jetzt wäre das ja eins quer. (Ergänzt (a) zu:
35 * $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$ *.) Und wenn ich das anders schreiben würde, hätte ich
36 * $3k + \mathbb{Z}$ *
37 einfach nur, oder? oder schreibe ich n $\mathbb{Z}$?
38 I: Hm. Da brauchst du k nicht, drei $\mathbb{Z}$. Nee, Moment, ja. Drei plus drei $\mathbb{Z}$
39 (gleichzeitig:
40 - I: oder null plus drei $\mathbb{Z}$.
41 - R: Nee, ich schreibe das anders: null plus drei $\mathbb{Z}$.)
42 R: So hatten wir das vorher auch.

I: Ja, so hatten wir das geschrieben.
R:
(b) * $0 + 3\mathbb{Z} + 1 + 3\mathbb{Z} = (0 + 1) + n\mathbb{Z} = 1 + 3\mathbb{Z} = \overline{1}$ *
(kommentiert beim Schreiben:) Also eins quer, kommt auf dasselbe raus.
I: (wirft bei 'n' ein:) n ist drei, ne? also drei $\mathbb{Z}$. (R korrigiert)
R: Jetzt weiß ich nur nicht: Was ist denn sinnvoller, das so (zeigt auf (a)) zu schreiben, weil das kann ich ja sofort sehen, oder so (zeigt auf (b))? Weil, zwischendurch haben wir das immer geändert.

Frau Rolle wählt zunächst für die drei Mengen in $N$ Zahlen mit Querstrichen als Namen, wobei sie nicht nur schriftlich, sondern auch mündlich den Querstrich, der die Mengenbezeichnung von einer Zahlbezeichnung unterscheidet, jeweils nennt.

Ihre Frage 'ohne Homomorphismus' hat sachlich nichts mit der Aufgabenstellung zu tun. Ich vermute, dass sie eine Addition in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit Aufgaben in Verbindung bringt, in denen Homomorphismen eine Rolle spielen. Es ist denkbar, dass dieses Stichwort bei Frau Rolle ein bestimmtes Schema aufruft, welches ihr bei ihrer Antwort hilft.

Sie notiert die Addition, nach der sie gefragt wurde, und dann auch das Ergebnis in der Notationsform von Zahlen mit Querstrichen. Mit solchen Symbolen bezeichnet sie die drei Elemente von $N$, welche sie zuvor als Mengen zur Kenntnis nimmt. Noch während sie mit dieser Notation beschäftigt ist, überlegt sie, ob eine andere Darstellungsform geschickter ist.

Die Notation $3k+\mathbb{Z}$, die Frau Rolle für eine der beiden Restklassen $\overline{0}$ und $\overline{1}$ wählt, ist falsch. Wenn man annimmt, dass $k$ entweder eine ganze Zahl sein soll oder die ganzen Zahlen durchlaufen soll, wie das in der Mengennotation der Interviewerin der Fall ist, dann bezeichnet $3k + \mathbb{Z}$ ein (oder alle) Vielfaches von drei, zu welchem die Menge $\mathbb{Z}$ addiert wird:

$$3k + \mathbb{Z} = \{3k + z \mid z \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

Frau Rolle scheint diese Zeichenkombination vage aus dem Gedächtnis zu erinnern ohne die Bedeutung der Bestandteile zu berücksichtigen. Ihre Frage, ob sie '$n\mathbb{Z}$' schreiben soll, deutet darauf hin, dass sie lediglich merkt, dass sie den Ausdruck falsch erinnert. Als die Interviewerin $3 + 3\mathbb{Z}$ erwähnt, scheint ihr wieder einzufallen, dass ihr die Darstellung $0+3\mathbb{Z}$ vertraut ist. Sie notiert dann die zuvor bereits durchgeführte Addition mit dieser Schreibform nochmals, wobei ihr Rechenweg durch einen Zwischenschritt sichtbar wird. Das Endergebnis notiert sie wiederum als eins mit Querstrich mit der Feststellung, dass beide Notationen - oder beide Rechenverfahren - zu demselben Ergebnis führen. Sie möchte dann wissen, welche Schreibweise sinnvoller ist. Offenbar fällt ihr selbst die erste Rechnung leichter, denn da kann sie das Ergebnis 'sofort sehen', wie sie sagt. Dies impliziert, dass sie in der anderen Darstellung das Ergebnis nicht ohne Zwischenschritt findet. Es stellt sich die Frage, warum sie bei einer so einfachen Rechnung einen Zwischenschritt braucht. Ich vermute den Grund darin, dass sie hier rein syntaktisch operiert ohne auf die Bedeutung der Zeichen $0 + 3\mathbb{Z}$ und $1 + 3\mathbb{Z}$ Bezug zu nehmen. Ein weiterer Hinweis darauf, dass die erste Darstellung ihren mentalen Repräsentationen eher entspricht, ist auch die Tatsachen, dass sie diese als erste und richtig einsetzt, während sie die zweite nicht ganz selbstständig notieren kann. Frau Rolles Frage verdeutlicht, dass für sie die Darstellungsform einer Sache wichtig ist.

Im nächsten Abschnitt stellt sie eine weitere Frage:

Transkriptausschnitt: (RK, Rolle) 61-69
R: Gibt es eigentlich, weil ich bin ja jetzt. Also jetzt denke ich im Moment ja noch nicht so abstrakt. Aber, weil das sind ja Mengen und das sind ja Mengen (zeigt auf $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$).
Wenn ich jetzt sagen würde, ich würde aus dieser Menge irgendwie, ja, drei nehmen und hieraus vier (zeigt auf $\overline{0}$ bzw. $\overline{1}$). Ich schreib das ja dann nicht mehr mit quer:
Ich hätte ja dann (ergänzt über (a) zu:)
$* \begin{array}{ccccc} 3 & + & 4 & = & 7 \\ \overline{0} & + & \overline{1} & = & \overline{1} \end{array} *$
Aber das ist ja dann nicht mehr quer, oder? Weil das sind ja jetzt die konkreten Elemente hieraus (zeigt auf die Mengen in N).

Frau Rolle betont hier, dass sie die Zahlen mit Querstrich als Bezeichnungen für Mengen ansieht, in denen Zahlen liegen. Es wird sehr deutlich, dass sie bewusst zwischen Mengen und Zahlen unterscheidet. Sie vergewissert sich, dass diese Unterscheidung notwendig ist.

Transkriptausschnitt: (RK, Rolle) 81-92
I: Gut, drei plus vier gleich sieben kann ich auch rechnen. Dann bewege ich mich in den ganzen Zahlen. Ist sozusagen eine ganz andere Rechnung.
R: Ja gibt es denn solche Aufgabenstellungen?
I: Also, ich kann ja, wenn ich solche Restklassen addiere, oder beim Multiplizieren, wenn ich nicht bei $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$ bin, sondern größeren Zahlen, zehn $\mathbb{Z}$, und ich multipliziere zwei, acht mal neun. Also * $8 \cdot 9$ *. Dann kann ich ja acht mal neun rechnen, dann bin ich bei 72, und sagen, das ist dasselbe wie 72 quer.
(c) * $\overline{8} \cdot \overline{9} = \overline{72} = \qquad\qquad mod(10)$ *
Dann kann ich gucken: 72 ist ? modulo 10?
R: plus drei.
I: Zwei. plus 70 ist 72. (ergänzt in (c) * $= \overline{2}$ *)
R: Ach so, das kann ich so vereinfacht schreiben?

Frau Rolle möchte sicherlich nicht wissen, ob es solche Aufgabenstellungen wie $3+4=7$ gibt. Vermutlich fragt sie eher, ob es Aufgaben gibt, zu deren Lösung Rechnungen mit Zahlen und Rechnungen mit Restklassen in einer Aufgabe mit einander verbunden werden. Die Interviewerin deutet die Frage in dieser Weise und schlägt eine Multiplikation von Restklassen vor, welche sehr mühsam zu lösen wäre, wenn man keinen Zwischenschritt in den ganzen Zahlen tun würde. Frau Rolle rechnet, dass 72 modulo 10 gleich drei ist, macht hier also einen Rechenfehler. Die Interviewerin korrigiert sie und ergänzt $\overline{72} = \overline{2}$. Frau Rolle ist von dieser Vereinfachung überrascht. Das kann bedeuten, dass sie überrascht ist, dass $\overline{72}$ und $\overline{2}$ dasselbe Objekt (dieselbe Menge) bezeichnen; es kann aber auch bedeuten, dass sie verblüfft ist, dass man durch diesen 'Notationstrick' das Rechenverfahren vereinfachen kann. Der Unterschied dieser beiden Interpretationen liegt in dem vermuteten Fokus von Frau Rolles Interesse.

**Homomorphismus**

Die Interviewerin fragt nun nach den Homomorphismen von $N$ nach $N$. Zuerst notiert Frau Rolle
(d) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
und die Abbildung, die jede Restklasse auf sich selbst abbildet. Sie äußert die Überzeugung, dass sie ein Homomorphismus ist. Dies wird nicht näher besprochen. Frau Rolles zweiter Vorschlag ist:

$$\text{(e)}\quad \begin{array}{ccc} \overline{0} & \longrightarrow & \overline{0} \\ \overline{1} & \longrightarrow & \overline{2} \\ \overline{2} & \longrightarrow & \overline{1} \end{array} \quad *$$

Transkriptausschnitt: (RK, Rolle) 145-151

R: Da hätte ich z.B. eins plus eins wär dann zwei das würd auf eins gehen. Und wenn ich hinten eins plus eins hätte ich zwei. Hä? Moment. Ich muss mir das aufschreiben.
(f) * $f(\overline{2}) = f(\overline{1}+\overline{1}) = f(\overline{1}) + f(\overline{1}) = \overline{2}+\overline{2}$ *
Dann hätte ich vier und das wäre zwei. Also stimmt es.
I: Vier ist eins, oder? in $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$? Drei ist wieder null und noch eins mehr ist eins.

Frau Rolle überprüft zunächst ein Beispiel, um sehen, ob die Abbildung ein Homomorphismus ist. Dazu wählt sie zwei Summanden, nämlich zweimal 'eins', für das sie danach $\overline{1}$ schreibt, und berechnet ihre Summe 'zwei', schriftlich dann $\overline{2}$. Das geht auf 'eins' bedeutet sicherlich, es wird auf $\overline{1}$ abgebildet. Nun wäre zu bestimmen, ob die Summe der Bilder von $\overline{1}$ und $\overline{1}$ im Bildraum mit dem ersten Ergebnis, $\overline{1}$, übereinstimmt. Frau Rolle rechnet jedoch anders weiter: Ich nehme an, dass sie mit 'hinten' den Bildbereich, der in ihrer Zuordnungsvorschrift rechts, also hinten, steht, meint. Sie berechnet in dieser Bildmenge die Summe von eins und eins korrekt als zwei. Sie verwendet also wieder die Urbilder statt ihre Bilder als Summanden. Sie stutzt bei ihrem Ergebnis, das nicht mit dem ersten Ergebnis übereinstimmt. Diese Rechnung führt Frau Rolle nur mündlich durch. Darum übersieht sie vielleicht einen Schritt. Sie beginnt nun erneut, diesmal schriftlich. '$f$' steht dabei offenbar für die Abbildung. In dieser Darstellung

$$f(\overline{2}) = f(\overline{1}+\overline{1}) = f(\overline{1}) + f(\overline{1}) = \overline{2}+\overline{2}$$

macht Frau Rolle einen logischen Fehler: Sie setzt voraus, was sie zeigen will, dass nämlich $f(\overline{1}+\overline{1}) = f(\overline{1}) + f(\overline{1})$. Möglicherweise denkt sie folgendermaßen: Wenn $f$ ein Homomorphismus ist, dann gilt diese Gleichungskette. Dies ist zu überprüfen.

Das erste und das dritte Gleichheitszeichen sind richtig. Sie bestimmt die richtigen Summanden im Bildbereich und korrigiert damit den Fehler in ihrer mündlichen Rechnung. Dann ergänzt sie mündlich, dass die Summe vier ist, und das bedeutet zwei. Dies ist ein Rechenfehler, denn in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist $\overline{4} = \overline{1}$. Ob sie sich nur verrechnet, oder ob eine falsche Rechenstrategie hinter ihrem Ergebnis steht, ist nicht erkennbar. Einen entsprechenden Fehler macht sie zuvor mit der Rechnung "72 (mod 10) ist 3." Sie macht dann noch einen zweiten Fehler, indem sie sagt, dass es 'stimmt'.

Vermutlich vergleicht sie nun die $\overline{2}$ von $f(\overline{2})$ ganz links in ihrer Gleichungskette mit der $\overline{2}$, die sie am rechten Ende berechnet hat. Sie übersieht dabei, dass sie $f(\overline{2}) = \overline{1}$ noch bestimmen muss, bevor sie vergleichen kann.

Die Interviewerin geht zunächst auf den Fehler beim Addieren ein und erklärt, warum $\overline{4} = \overline{1}$ ist. Frau Rolle antwortet mit einem anderen Argument, das sie zweimal wiederholt:

Transkriptausschnitt: (RK, Rolle) 152-163

152 R: Wieso, ich mache jetzt zwei plus zwei dann wäre ich bei null. (zeigt in (e) auf die
153 Zwei in der zweiten Spalte und zählt von da aus zwei weiter zur Eins darunter und
154 dann zur Null darüber). Und was habe ich gesagt? Eins, ne?
155 I: Wir sind in $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$. Da wäre ich bei vier (ergänzt $* = \overline{4}$ * am Ende der
156 Gleichungskette (f)) und vier ist dieselbe Restklasse wie eins. (R ergänzt $* = \overline{1}$ *)
157 Drei ist doch dieselbe wie null.
158 R: Ja, das ist mir klar.
159 I: Dann ist eins dieselbe wie vier: eins mehr.
160 $* \begin{array}{cc} \overline{0} & = \overline{3} \\ \overline{1} & = \overline{4} \end{array} *$
161 R: Ja aber, wenn ich doch jetzt hierbei bin (zeigt in (e) auf $\overline{2}$ in der zweiten Spalte),
162 wenn ich aber von zwei losgehe. Wenn ich plus zwei (zählt in der Spalte weiter nach
163 unten, dann ganz nach oben). So meine ich das.

Frau Rolle stimmt der Überlegung der Interviewerin, warum $\overline{4} = \overline{1}$ ist, beim zweiten Anlauf zu. Dieser Rechenweg entspricht ihrem eigenen ersten Ansatz, zwei plus zwei gleich vier als Zwischenschritt zu wählen. Aber sie selbst erklärt nun zweimal einen anderen Rechenweg, der sie zu einem dritten Ergebnis, nämlich $\overline{0}$ führt: In dem Diagramm

$$\begin{array}{c} \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \end{array}$$

welches die Elemente der Bildmenge enthält, addiert Frau Rolle, indem sie bei $\overline{2}$ beginnt und zwei weiterzählt, nämlich erst nach unten und dann von der untersten Position zur obersten, wie wenn die drei Zeichen in einem Kreis angeordnet wären.

Die Interviewerin gibt nun eine Zusammenfassung des gesamten Rechenvorgangs in Frau Rolles Gleichungskette und ergänzt dabei auch die fehlende $\overline{1}$ am linken Ende, so dass die Gleichungskette nun wie folgt aussieht:

$$\overline{1} = f(\overline{2}) = f(\overline{1} + \overline{1}) = f(\overline{1}) + f(\overline{1}) = \overline{2} + \overline{2} = \overline{4} = \overline{1}$$

Transkriptausschnitt: (RK, Rolle) 173-181

173 R: Ich habe jetzt immer gedacht: f von zwei was ich jetzt hier (zeigt in (e) auf die
174 erste Spalte) hätte, würde auf eins gehen. Eins plus eins ist klar. Jetzt kommt eben
175 der Homomorphismus (schreibt in (f) das zweite und dritte + als $\oplus$, so dass die
176 Zeile nun lautet:)
177 (f') * $\overline{1} = f(\overline{2}) = f(\overline{1} + \overline{1}) = f(\overline{1}) \oplus f(\overline{1}) = \overline{2} \oplus \overline{2} = \overline{4} = \overline{1}$ *
178 Ich habe mir gedacht, wenn ich jetzt zwei plus zwei (zeigt in (f') auf die beiden

letzten Zweien) wär vier quer. Das ist mir eigentlich noch klar. Ich habe mir nicht gedacht, dass ich jetzt hier vorne gucke (zeigt in (e) auf die erste Spalte). Sie gucken ja jetzt hier.

Frau Rolle geht nochmals die einzelnen Terme durch, wobei sie benennt, welche Schritte ihr klar sind. Dabei kennzeichnet sie nun die Addition in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ als Bildmenge mit einem anderen Symbol als die Addition in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ als Definitionsmenge. Diese Unterscheidung von Additionszeichen kennt sie aus der Vorlesung bei Verwendung verschiedener Gruppen in einer Aufgabe. Davon wurde insbesondere Gebrauch gemacht, wenn $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für eine natürliche Zahl $n$ innerhalb einer Aufgabe auftraten. Diese Unterscheidung kann an dieser Stelle zweierlei bedeuten:

- Frau Rolle kennzeichnet, welche Rolle die Elemente der Menge $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ hinsichtlich dem Homomorphismus jeweils einnehmen, ob sie sich in der Definitions- oder der Bildmenge befinden.
- Frau Rolle betrachtet die Additionen in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ als Definitions- und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ als Bildmenge als unterschiedlich. $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \oplus)$ versteht sie als zwei unterschiedliche Gruppen.

Frau Rolle sagt dann noch, dass sie nicht dachte, sie müsse 'vorne', also in der ersten Spalte gucken. Offenbar macht es einen Unterschied, ob sie in der linken Menge $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (bzw. in der linken Aufzählung ihrer Elemente) oder in der rechten Menge $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (bzw. der rechten Aufzählung ihrer Elemente) addiert.

Die Interviewerin zeigt auf die Menge $N$ und fragt, was $\overline{4}$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist, was Frau Rolle richtig beantwortet. Dann fragt Frau Rolle:

Transkriptausschnitt: (RK, Rolle) 185-193

R: Verstehen Sie, was ich meine?
I: Du rechnest von da (zeigt in (e) auf $\overline{2}$ in der zweiten Spalte) aus zwei weiter.
R: Ja, genau.
I: Und das stimmt nicht.
R: So habe ich das z.B. noch nicht gesehen.
I: Haben ja wieder $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$. Die Addition ist hier dieselbe wie hier (zeigt in (e) auf die beiden Spalten). Und zwar nach dem Namen der Elemente, nicht nach dem Platz, wo sie stehen.
R: Wenn ich dieses zwei plus zwei habe, gucke ich wieder vorne?

Frau Rolle stimmt der Interpretation ihrer Gedanken durch die Interviewerin zu: Sie orientiert sich beim Addieren an dem Platz, an dem die Summanden stehen. Indem sie in der rechten Spalte von $\overline{2}$ aus zwei weiterzählt, kommt sie zu einem anderen Ergebnis, als wenn sie in der linken Spalte von $\overline{2}$ aus zwei weiterzählt. Somit erhält sie zwei verschiedene Additionen in den beiden Mengen. Sie nimmt zur Kenntnis, dass ihr Vorgehen falsch ist, und schließt mit der Frage:

"Wenn ich dieses zwei plus zwei habe, gucke ich wieder vorne?"

Sie fragt also nach einem Rezept, wie sie beim Rechnen vorgehen kann. Zur Anwendung des Verfahrens des Weiterzählens (in einer ganz bestimmten Richtung) muss sie die Elemente in einer geeigneten Reihenfolge notieren, und dies ist in der linken Spalte gegeben. Die Idee, zum Addieren in der Bildmenge die Darstellung der Elemente in der Urbildmenge zu verwenden, scheint mir jedoch eine adäquate Vorstellung eines Homomorphismus zu gefährden. Dies hat für Frau Rolle aber anscheinend gegenüber ihrem Rechenverfahren untergeordnete Bedeutung.

## Der Aufbau von Vorstellungen von Frau Rolle

### Bezug zwischen $N$ und anderen Darstellungsformen für Restklassen

Der erste Bezug, den Frau Rolle zwischen $N$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ herstellt, ist der Mengencharakter der Elemente. Für die weiteren Aktivitäten wechselt sie zu den beiden wichtigsten Darstellungsformen der Veranstaltung, nämlich **(2)**[46], die Mischung aus Zahl und $3\mathbb{Z}$, und **(1)**, die Zahlen mit Querstrichen, wobei sie **(1)** bevorzugt. Entgegen der in 3.2.1 betonten Suggestion dieser Zeichenform als eine Art Zahlzeichen ist sie sich der Tatsache deutlich bewusst, dass diese Zeichen für Mengen stehen, und unterscheidet sorgfältig und explizit zwischen Zahlen und Zahlen mit Querstrichen.

### Additionsverfahren

Die beiden Zeichensysteme **(1)** und **(2)** sind bei Frau Rolle mit zwei verschiedenen Additionsverfahren verbunden. Über diese Verfahren führt sie die Addition in $N$ zurück auf die Addition in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Dies entspricht dem Verhalten **(a)**.

Das Additionsverfahren, das sie zu **(2)** anwendet, sieht so aus:

$$x + 3\mathbb{Z} + y + 3\mathbb{Z} = (x + y) + 3\mathbb{Z}$$

Ihr Umgang mit diesen Zeichen zeigt, dass sie darin wenig Bedeutung sieht, sondern syntaktischen Regeln den Vorrang gibt. Es gibt keine Hinweise darauf, dass ihr bewusst ist, dass sie anstelle der 0 und 1 auch andere Repräsentanten wählen könnte und zum selben Ergebnis käme.

Bei der Addition mit dem Zeichensystem **(1)** verfährt sie auf verschiedene Weisen:

- In ihrer ersten Rechnung, $\overline{0}+\overline{1}$, wird kein Verfahren sichtbar. Sie erklärt, dass sie das Ergebnis sofort sieht.
- In ihrer zweiten Rechnung, $\overline{2} + \overline{2}$, macht sie den Zwischenschritt 'vier' und kommt zu dem Ergebnis 'eins'. Hier ordnet sie die Vier in die falsche Restklasse ein.
- In ihrer dritten Rechnung, $\overline{2} + \overline{2}$, zählt sie an dem Schema der notierten Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, das sie sich zu einem Zyklus idealisiert vorzustellen scheint, von $\overline{2}$ aus zwei weiter. Hier kommt sie zu dem falschen Ergebnis $\overline{0}$, weil das Schema nicht zu ihrem Verfahren passt.

[46] Zur Erklärung der Bezeichnung siehe 3.2.1.

**Homomorphietest**

Beim Abbilden von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ in sich spielen für Frau Rolle nur die Restklassen als Ganze, notiert gemäß **(1)** als Zahlen mit Querstrichen, eine Rolle. Auf Elemente dieser Restklassen geht sie nicht ein. Beim Homomorphietest weiß sie, welche Rechnungen und Operationen auszuführen sind. Allerdings macht sie bei der Durchführung den logischen Fehler, die Eigenschaft vorauszusetzen, statt sie zu überprüfen.[47]

Bei der Überprüfung des Homomorphismus favorisiert Frau Rolle das oben zuletzt genannte Rechenverfahren, das Weiterzählen. Die jeweilige Anordnung, in der die Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ notiert sind, bestimmt hier das Ergebnis ihrer Addition. Als Frau Rolle diese Abhängigkeit bemerkt, ist sie nicht irritiert in ihrem Verfahren, sondern sie ist überrascht, dass die Interviewerin ihr erklärt, dass die Summen nicht je nach Anordnung verschieden sind. Dies zeigt, dass die Diagrammform von großer Bedeutung für Frau Rolles Vorstellung ist. Sie liefert sozusagen den Hintergrund für die Operationen, welche sie vornimmt.

Die Festlegung der Anordnung, welche dann in Frau Rolles Augen die neue Addition determiniert, geschieht in der Aufgabe nicht willkürlich, sondern wird 'anfangs', nämlich in der Definitionsmenge, auf 'kanonische Weise' angelegt, nämlich nach der Größe der Zahlen $0, 1, 2$. Würde man für $\overline{1}$ die Darstellung $\overline{4}$ wählen, so wäre diese Anordnung keineswegs natürlich, aber das zieht Frau Rolle nicht in Betracht. Die Anordnung in der Bildmenge ergibt sich aus der Wirkung des Homomorphismus. Auch hier scheint die Vorstellung, die Frau Rolle von einer Abbildung hat, von einem Diagramm bestimmt zu werden, denn das Notationsschema legt nahe, dass die Abbildung die Addition im Bildbereich determiniert. Aus dem Notationsschema der betrachteten Abbildung $f$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ \overline{0} & \longrightarrow & \overline{0} \\ \overline{1} & \longrightarrow & \overline{2} \\ \overline{2} & \longrightarrow & \overline{1} \end{array}$$

ergeben sich für Frau Rolle folgende Konsequenzen:

1. Die Notation für die Abbildung $f$ verändert die Reihenfolge der Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2. Damit verändert $f$ die Addition in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Frau Rolle markiert dies mit einem neuen Additionszeichen: $\oplus$.

3. Das bedeutet, dass $f$ nicht nur eine Wirkung auf die Elemente der Menge $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ausübt, sondern dass $f$ die Struktur von $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ zu $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \oplus)$ umwandelt.

[47] Die Interviewerin ist diesem Gedankengang nicht näher nachgegangen. Es ist möglich, dass dieser Fehler mehr die Notationsweise als den logischen Gedanken betraf. Bei einem auftretenden Widerspruch zwischen Anfang und Ende ihrer Gleichungskette hätte sich dies bemerkbar machen können, wenn sie daraus geschlossen hätte, dass an einer Stelle ihrer Gleichungskette - nämlich bei der Homomorphieeigenschaft - das Gleichheitszeichen falsch sein muss. Bei dem Widerspruch lag der Schwerpunkt des Gesprächs jedoch beim Fehler in ihrer Addition; der andere Aspekt wurde nicht thematisiert.

Frau Rolle verwendet hier Diagramme, nämlich ein Diagramm zur Darstellung einer Abbildung und zwei Unterdiagramme mit zugehörigen Operationen, nämlich die Anordnung der Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und das Additionsverfahren des 'Weiterzählens', um die Zusammenhänge der Gruppenstrukturen und der Abbildung zu erfassen. Dabei dienen die Diagramme nicht nur der Beschreibung der gegebenen Strukturen, sondern die Diagramme verselbstständigen sich, indem sie die Strukturen ihrerseits verändern. Konsequenzen aus den Diagrammen haben somit konstituierenden Charakter. In gewissem Sinn passt dies zum diagrammatischen Denken nach Dörfler (2003): Dort werden Diagramme als Strukturträger eingesetzt und aus ihnen werden z.T. weitreichende Schlussfolgerungen über diese Strukturen gezogen, ohne dass ein referentieller Rückbezug zu ursprünglichen Bedeutungen der Zeichen vorgenommen wird. Frau Rolles Verhalten widerspricht dem diagrammatischen Denken insofern, als sie Merkmale der Diagramme berücksichtigt, die den gegebenen mathematischen Strukturen nicht entsprechen, bzw. ihre Diagrammmerkmale und Operationen nicht den Wirkungen der mathematischen Handlungen entsprechend abstimmt. Bemerkenswert ist jedoch weniger dieser Fehler, als die Tatsache, dass sie die Veränderungen der ursprünglich gegebenen mathematischen Objekte, welche ihr Diagramm bewirkt, nicht als Anzeichen für einen Fehler im Diagramm erkennt: Die Veränderung der Gruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$, die als Bildmenge ursprünglich gegeben war, zu der Gruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \oplus)$, zu der das Diagramm sie umformt, nimmt sie zur Kenntnis, ohne darin ein Problem zu erblicken.

### Ein mögliches Restklassenmodell

Frau Rolle erfasst Restklassen als Mengen von ganzen Zahlen, die als eigenständige mathematische Objekte auftreten. Eine wichtige Rolle bei dieser Auffassung scheinen die Zeichen der Restklassen zu spielen, welche ihr ermöglichen, diagrammatisch auf Zeichensystemen zu operieren. Obwohl sie eine Zahl mit Querstrich als Zeichen für eine Menge ansieht, hat sie beim Vereinfachen von Restklassendarstellungen in Rechnungen jedoch Schwierigkeiten damit, dass verschiedene Repräsentanten einer Restklasse - als Zahl mit Querstrich geschrieben - dieselbe Menge bezeichnen. Dies kann ein Hinweis darauf sein, dass sie den Mengencharakter beim Operieren mit Restklassen ignoriert und sich ganz auf die Zeichen und Operationen konzentriert.

Auf welche Weise Frau Rolle Restklassen als abstrakte Objekte mental konstruiert, wird in dem Interviewgespräch nicht sichtbar.

### Weitere Bemerkungen

Frau Rolles Aufmerksamkeitsschwerpunkt in diesem Interviewgespräch liegt bei Zeichensorten, bei der Unterscheidung, für welchen Objekttyp welche Zeichentypen verwendet werden, und bei Verfahren, die auf diese Zeichen angewendet werden. Zu funktionalem Denken passt ein Schwerpunkt bei Verfahrensweisen, welche Veränderungen schaffen. Möglicherweise liegt Frau Rolles sorgfältige Unterscheidung der Zeichentypen mit ihrer Zuordnung zu Zahlen oder Restklassen vor allem darin begründet, dass für Zahlen und für Restklassen verschiedene Additionsregeln gelten.

# 3.3 Analyse der Vektorrauminterviews

## 3.3.1 Feinanalyse zu den Vektorrauminterviews

Die in dem Kommentar zum Leitfaden der Vektorrauminterviews[48] gegebenen Erläuterungen zu den Inhalten dieser Interviews sind aus der Perspektive der Konzipierung des Leitfadens geschrieben. Sie werden in diesem Abschnitt erweitert durch eine verfeinerte Sachanalyse, die wesentliche Impulse durch die Erfahrungen mit den durchgeführten und analysierten Interviews bekommt. Zur besseren Orientierung des Lesers wird diese Sachanalyse den Transkriptanalysen vorangestellt.

**Die Farbmaschine als Vektorraum** Die Vektorrauminterviews beschäftigen sich im ersten Teil mit der Modellierung einer 'Farbmaschine' durch einen Vektorraum. Zwei mögliche Modellierungen werden in 3.1.2 vorgestellt. Nun soll der Frage nicht auf formaler, sondern eher informeller Ebene von Grundvorstellungen nachgegangen werden, welche nach gemeinsamen Wesensmerkmalen der Maschine und eines Vektorraums fragen. Schlüssel zur Wahrnehmung der Maschine als 'Vektorraum' sind z.B.:

$M_K$ Die vier Farben in den Zuflussbehältern der Maschine sind die Komponenten, aus denen eine neu zu mischende Farbe besteht.
Bei dem Standardvektorraum treten Komponenten von Vektoren in Tupeln auf.

$M_B$ Die Produktionsverfahren verschiedener Farben unterscheiden sich durch ein Merkmal, nämlich die spezifischen Öffnungszeiten der einzelnen Zuflussbehälter. Ein Merkmal des Erzeugens findet sich in einem Vektorraum beim linearen Erzeugen von Vektoren aus einer Basis (oder allgemein einem Erzeugendensystem) des Vektorraums oder eines Untervektorraums. Die Wahl der jeweiligen Koeffizienten bestimmt, welcher Vektor erzeugt wird.

$M_E$ Bei der Maschine können verschiedene strukturelle Beziehungen beobachtet werden. z.B.:

- Manche Produkte unterscheiden sich in der Quantität, nicht aber in der Qualität. Sie stehen sich besonders nahe.
- Manche Farben lassen sich aus anderen Farben herstellen, aber die Umkehrung gilt nicht.
- Die Farben in den Zuflussbehältern sind auswechselbar.

Diese Eigenschaften sind nicht alle charakteristisch für einen Vektorraum. Bei der ersten muss entschieden werden: sollen alle Farben gleichen Typs als gleich angesehen werden? Die zweite Eigenschaft hängt mit einer Begrenzung der praktischen Durchführung zusammen und muss theoretisch erweitert werden: Wenn ein Vektor aus anderen erzeugt werden kann, so ist es möglich durch entsprechende Umstellung der Gleichung jeden der Beteiligten (d.h. ohne Koeffizient null) aus den jeweils anderen zu erzeugen. Die dritte Eigenschaft passt

[48] Siehe 3.1.2

als Wechsel eines Erzeugendensystems gut zu den Charakteristika eines Vektorraums.

Mit den genannten Sichtweisen auf die Maschine als Vektorraum korrespondieren Charakteristika eines Vektorraums, die in den Grundvorstellungen $V_K$, $V_B$ und $V_E$ auftreten[49].

Im zweiten Teil der Interviews wird eine Abbildung vom Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner als zwei in den $\mathbb{R}^2$ betrachtet. Die Frage nach den Wesensmerkmalen eines Vektorraums stellt sich hier nochmals, nämlich in der Form: 'Wie kann der Polynomraum als Vektorraum gedacht werden?' Der zweite mathematische Begriff, der in besonderer Weise thematisiert wird, ist die 'lineare Abbildung'. Bevor verschiedene Sichtweisen auf einen Polynomraum und auf eine lineare Abbildung vorgestellt werden, werden Implikationen der formalen Darstellungen, die in diesem Teil der Gespräche durch die Interviewerin angeregt oder direkt verwendet werden, diskutiert.
Zeichen für den Polynomraum und seine Elemente:

**(i)** $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ ist der Name des Raums der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 1, der in der Vorlesung verwendet wurde. Das Zeichen '$x$' ist erklärtermaßen als formales Zeichen ohne referentielle Bedeutung anzusehen. Es dient allein der formalen Notation der Elemente des Raums.

**(ii)** $x + 1$ und $2x$ treten im Interviewgespräch als Elemente des Polynomraums auf. Diese Zeichen können unterschiedliche Bedeutungen implizieren:

1. Sie sind Funktionsterme für Funktionen, die von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbilden. In dieser Bedeutung werden die Zeichen in der Schule zumeist verwendet. x ist hier eine Variable, die die reellen Zahlen durchläuft. Verstärkt wird die Assoziation mit Funktionen dadurch, dass die beiden Zeichen nicht isoliert stehen, sondern als Teile umfangreicherer Zeichenkombinationen auftreten, nämlich in $f(x+1)$ und $f(2x)$, wo explizit eine Funktion $f$ auf sie angewendet wird. Solche Zeichenkombinationen treten in der Schule z.B. bei der Verkettung von Funktionen auf. Die Bezeichnung 'Polynome' für die beiden Zeichen ist ebenfalls geeignet, diese Vorstellung zu verstärken, denn in der Schule werden Funktionsterme ganzrationaler Funktionen üblicherweise Polynome genannt.
2. Eine andere Deutung, die ebenfalls in der Schule häufig vorkommt und mit der ersten manchmal verbunden wird, sieht die Zeichen als algebraische Rechenterme, die nach bestimmten Gesetzen umgeformt werden dürfen. Die Variable steht hier für eine unbekannte, aber bestimmte reelle Zahl.[50]
3. Die beiden Zeichen können als Beispiele für Elemente des Polynomraums angesehen werden, deren allgemeine Zeichenstruktur $ax + b$, oder sogar

[49] Vgl. 2.2.1 Die Indizes deuten jeweils an, zu welcher Grundvorstellung eine Modellierung passt.

[50] Eine Verbindung der beiden Bedeutungen, $x$ als Funtkionsvariable und als Zeichen für eine bestimmte, unbekannte Zahl zu verstehen, tritt z.B. auf, wenn die Nullstellen der Funktion mit der Gleichung $y = x + 1$ gesucht werden.

gemäß der Vorlesung $ax^1 + bx^0$ ($a, b$ sind reele Zahlen) ist. Dabei sind gedanklich die Koeffizienten und die Potenzen 1 und 0 zu ergänzen. Zu dieser Sichtweise passt eine weiter gehende Vorstellung, die alle Vektoren des Raums als Linearkombination von $x$ und 1 versteht und somit durch die Auszeichnung dieser Basis eine Art Vorstrukturierung des Raums vornimmt, welche der Strukturierung des $\mathbb{R}^n$ durch die kanonische Basis entspricht.

4. Die beiden Zeichen können als Namen für Elemente des Polynomraums als Vektorraum verstanden werden, ohne dass in ihrer Gestalt eine Strukturierung dieses Raums gesehen wird. Das kann z.B. der Fall sein, wenn sie nicht in Verbindung mit der oben genannten allgemeinen Darstellung eines Polynoms gebracht werden.

5. Es ist möglich, dass in den beiden Zeichen ohne weitere Rechnung eine Basis des Polynomraums erkannt wird, und die Erwähnung dieser beiden Vektoren zu Beginn der Aufgabe anregt, den Raum gedanklich aufgrund dieser Basis zu strukturieren.

Zeichen für eine lineare Abbildung:

**(i)**
$$\begin{array}{lll} f: & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & f(x+1) & = (1,0) \\ & f(2x) & = (0,4) \end{array}$$

Diese Darstellung einer Abbildung spricht durch den Pfeil von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ nach $\mathbb{R}^2$ den Zuordnungscharakter an. In der Notation der Bilder von $x+1$ und $x$ tritt jedoch kein Pfeil auf, sondern Gleichheitszeichen. Möglicherweise regt sie eher an zu der Idee, dass die Zeichen '$x+1$' und '$(1,0)$' zu identifizieren sind.

**(ii)**
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f$ wird nicht von der Interviewerin vorgegeben, wird aber im Interview diskutiert. Sie bezieht sich auf die Basis $x+1, 2x$ des Polynomraums und die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

**(a)** Die Matrix kann zeilen- oder spaltenweise gelesen und als Information verstanden werden, welche Bilder den Elementen $x+1$ und $2x$ unter $f$ zugeordnet werden.

**(b)** Die Matrix kann als Werkzeug zur Ermittlung der Bilder der Linearkombinationen der Basis verstanden werden.

**(c)** Die Matrix kann als Abbildung gelesen werden, die nur eine andere Darstellungsform für $f$ ist und mit der linearen Abbildung $f$ identisch ist.

**(d)** Die Matrix kann als Darstellung nicht der Abbildung, sondern der Bilder verstanden werden, wobei sich dies nur auf die Bilder $(1,0)$ und $(0,4)$ oder auch auf ihr Erzeugnis in $\mathbb{R}^2$, also den gesamten Bildraum, beziehen kann. Im ersten Fall steht die Matrix für eine zweielementige Menge, im zweiten Fall steht sie für einen Vektorraum, nämlich den $\mathbb{R}^2$.

**Der Polynomraum als Vektorraum** Eine mentale Konstruktion des Polynomraums als Vektorraum kann z.B. auf folgende Überlegungen gründen:[51]

$P_A$ Natürlich kann man - anders als bei der Farbmaschine - unmittelbar die Vektorraumaxiome für den $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ nachweisen und ihn als formalen Vektorraum behandeln.

$P_{B_1}$ Der Polynomraum wird durch lineares Kombinieren erzeugt. Als Basis eignet sich $x$, 1. Diese Vorstellung passt zum Baukastenprinzip.

$P_{B_2}$ Anstelle der 'kanonischen' Erzeugenden $x$ und 1 kann man im Polynomraum die Erzeugenden $x + 1$ und $2x$ bevorzugen, die in der gestellten Aufgabe eine besondere Rolle spielen. Bei diesen ist jedoch nicht ganz so offensichtlich, ob sie den ganzen Raum erzeugen. Auch diese Strukturierung ist mit der Baukastenvorstllung gut vereinbar.

$P_{B_3}$ Der Polynomraum wird mit dem $\mathbb{R}^2$ identifiziert, indem die Vektoren einer Basis mit 2-Tupeln 'benannt' werden. Aus dieser Festlegung ergeben sich aufgrund der Prinzipien des linearen Erzeugens sowohl bei den Polynomen wie auch bei den 2-Tupeln die 'Tupel-Namen' für alle anderen Polynome.

$P_{K_1}$ Die Vektoren in $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ besitzen zwei Komponenten: Die eine ist gekennzeichnet mit '$x$', die andere tritt als Konstante ohne weiteres Merkmal auf.

$P_{K_2}$ Man kann den $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit dem $\mathbb{R}^2$ auf folgende Weise identifizieren: $x$ und $(1, 0)$ werden gleichgesetzt, ebenso 1 und $(0, 1)$. Das ist gleichbedeutend mit der Gleichsetzung von $ax+b$ und $(a, b)$ für alle reellen Zahlen $a$ und $b$. Dieses Vorgehen ist dem in $P_{B_3}$ in den Konsequenzen ähnlich, passt aber zu einer Orientierung an kanonischen Komponenten der Elemente der beiden Vektorräume.

$P_{K_3}$ Die Identifizierung unter Punkt $P_{K_2}$ kann auch mit Hilfe der Basis $x + 1, 2x$ geschehen. In diesem Fall haben wir auch eine Einteilung nach Komponenten, aber die Tatsache, dass diese Einteilung nicht aus dem spezifischen Charakter des Vektorraums vorgegeben ist, sondern aus vielen weiteren Möglichkeiten gewählt wurde, ist offensichtlich. Bei diesem Vorgehen wird - ebenso wie bei $P_{B_2}$ und $P_{B_3}$ - das Wissen verwendet, dass ein Vektorraum verschiedene Basen (bzw. Erzeugendensysteme) besitzt.

$P_E$ Man kann mit Termen in $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ in gewisser Hinsicht rechnen wie mit Zahlen: Man kann sie addieren und subtrahieren, und man kann sie mit reellen Zahlen multiplizieren. Man kann sie auch mit einander multiplizieren, erhält dann jedoch teilweise Polynome höheren Grades. Diese Verknüpfung passt nicht zu den Vektorraummerkmalen. Die beiden anderen Verknüpfungen liefern vielfältige Beziehungen der Abhängigkeit und Unabhängigkeit, in denen ein Element zu anderen stehen kann. Man kann Elemente mit Hilfe anderer erzeugen.

[51] Die Indizes an den Kennzeichnungen entsprechen den Indizes der drei in 2.2.1 beschriebenen Grundvorstellungen zum Vektorraumbegriff 'Komponentenvorstellung' ($V_K$), 'Baukastenvorstellung' ($V_B$) und 'Elementtypvorstelung' ($V_E$). Die Indizes deuten an, dass die genannte Sichtweise auf den Polynomraum mit der entsprechenden Grundvorstellung harmoniert.

$P_{(E)}$ Eine Schwierigkeit besonderer Art stellt die Verwendung des Buchstabens $x$ als formales Element eines Vektorraums. Denn $x$ tritt in der Schule zumeist als Variable für Zahlen auf. Eine Deutung von '$x$' in dieser Form betont Charakteristika, in denen die Vektorraumstrukturen nicht erkennbar sind.[52]

**Lineare Abbildung** Eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen setzt die Strukturen der beiden Räume in bestimmter Weise in Beziehung zu einander. Die lineare Abbildung, die im Interview betrachtet wird, ist ein Isomorphismus, durch dessen Vermittlung die beiden Räume mit einander identifiziert werden können. Dieser Isomorphismus stellt Schwierigkeiten in sehr unterschiedlicher Hinsicht:
Ebene der formalen Darstellung:

- Die formale Eigenschaft[53], die eine lineare Abbildung $f$ zwischen zwei Vektorräumen $V$ und $W$ charakterisiert, ist, dass für alle $x, y \in V$ und alls $\lambda, \mu$ im Skalarkörper gilt:

  $$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

  Diese Form der Definition stellt keine explizite Aufzählung der Objekte dar, die durch den Begriff der linearen Abbildung beschrieben werden. Stattdessen benennt sie nur eine charakterisierende Eigenschaft. Das gibt dem Studierenden nur einen indirekten Zugang zu den bezeichneten Objekten.[54]

  Dies formale Definition hat weitere Konsequenzen auf der formalen Ebene:

- Eine lineare Abbildung kann durch die Festlegung allein der Bilder einer Basis definiert werden. Eine weitere Formalisierung der Beschreibung einer linearen Abbildung ist die Angabe einer Darstellungsmatrix mit zugehörigen Bezugsbasen.

- Die Konstruktion einer linearen Abbildung aus den Angaben der Bilder von Basisvektoren geschieht durch Anwenden der Linearitätseigenschaft zur Berechnung der Bilder der Linearkombinationen dieser Basis. Ein Nachweis, dass (eine so konstruierte) Abbildung linear ist, erfordert ein Argument, warum die Linearitätseigenschaft der Abbildung auch für Summen und Vielfache anderer als der Basisvektoren gültig ist.

Ebene der Grundvorstellungen: Hier sollen zwei Grundprobleme angesprochen werden:

1. Was ist eine Abbildung zwischen Vektorräumen? Vorschläge für Ideen dazu sind:

[52] Die Kennzeichnung '$P_{(E)}$' soll darauf hinweisen, dass hier wie bei Elementtypvorstellungen der Aufmerksamkeitsschwerpunkt auf die spezifische Wesensart der Elemente des Raums gelegt wird. Im Unterschied zu den Elementtypvorstellungen gibt diese Sichtweise im genannten Fall jedoch keinen Zugang zum Vektorraum, sondern fokusiert andere Strukturen.

[53] Diese Eigenschaft ist vergleichbar mit der Definition eines Homomorphismus, die im Restklasseninterview zum Tragen kam.

[54] Eine in der Schule übliche Definition der quadratischen Funktionen etwa benennt diese direkt, indem sie alle möglichen Funktionsterme $ax^2 + bx + c$ aufzählt.

- Eine Abbildung ist eine Zuordnung, für die Definitions- und Zielraum und eine Zuordnungsvorschrift festgelegt sind.[55]

  Diese Vorstellung repräsentiert den mathematischen Begriff auf geeignete Weise. Problematisch kann allerdings die Bezeichnung 'Zuordnungsvorschrift' sein. Wenn darunter nur ein Rechenterm verstanden wird, in den alle Elemente der Definitionsmenge einsetzbar sind, dann werden z.B. Abbildungsdarstellungen nicht anerkannt, die die Bilder einer Basis angeben und linear fortzusetzen sind.

- Eine Abbildung ist eine Menge von Vektorpaaren, wobei jeweils der erste Vektor eines Paares im Definitionsraum und der zweite im Zielraum liegt. Jedes Element des Definitionsraums kommt in genau einem Paar vor.[56]

  Diese Vorstellung repräsentiert den mathematischen Abbildungsbegriff ebenfalls in adäquater Weise. Er ist nicht auf das Verfahren des Abbildens fixiert, sondern konzentriert sich auf das Ergebnis.

- Das Wort 'Abbildung' bezeichnet eine Tätigkeit des Abbildens.

  Diese Vorstellung erfasst eine Abbildung nicht als mathematisches Objekt, sondern assoziiert das grammatikalische Substantiv 'Abbildung' mit einem Handlungsverlauf. Hier wird zwar ein wesentliches Merkmal der mathematischen Abbildung angesprochen, aber es ist schwer möglich, eine so verstandene 'Abbildung' als abstraktes Objekt zu behandeln.

- Die Abbildung eines Vektors ist ein Vektor, die Abbildung eines Vektorraums ist eine Menge von Vektoren, nämlich die Menge der einzelnen Bilder. Hier wird das Wort 'Abbildung' nicht in der mathematischen, sondern in der umgangssprachlichen Bedeutung verstanden.

  Diese Vorstellung verkürzt den mathematischen Abbildungsbegriff, indem sie die Beziehung der Bildvektoren zu ihren Urbildern außer Acht lässt.[57]

2. Welche Strukturen respektiert/überträgt eine lineare Abbildung? Dazu gehört:

   - Was ist eigentlich Charakteristikum eines Vektorraums?
     Einige Antworten sind unter der Frage nach möglichen Vorstellungen zum Polynomraum gegeben. Sie differenzieren die drei in Abschnitt 2.2.1 beschriebenen Grundvorstellungen des Vektorraumbegriffs weiter aus.
   - Welche Vektorraummerkmale sind für eine lineare Abbildung relevant? z.B:
     ◦ Muss eine lineare Abbildung die Dimension eines Vektorraums respektieren? Im vorliegenden Fall trifft dies zu, aber es ist keine notwendige Bedingung.
     ◦ Muss eine lineare Abbildung 'die' (d.h. die eindeutig festgelegten) Komponenten des einen Raums auf 'die' (ebenfalls eindeutig festgelegten)

[55] Diese Vorstellung kann man mit dem Begriff der Verkapselung des Abbildungsprozesses beschreiben.

[56] Diese Vorstellung entspricht einer Verdinglichung des Abbildungsprozesses.

[57] Diese Vorstellung ist ebenfalls eine Form von Verdinglichung, nur wird anstelle des Prozesses des Herstellens von bestimmten Beziehungen, das beim Zuordnen im Vordergrund steht, das Konstruieren eines bestimmten Bildes (das sich aus vielen einzelnen 'Punkten' zusammensetzt), das beim 'Abbilden' im Sinne von Zeichnen im Vordergrund steht, verdinglicht.

Komponenten des anderen Raums abbilden, und so die Ordnungsgefüge respektieren, die den Räumen durch diese Komponenten gegeben werden?[58]
◦ Muss eine lineare Abbildung Linearkombinationen im Definitionsraum auf die entsprechenden Linearkombinationen im Zielraum abbilden? Was sind 'entsprechende' Linearkombinationen: Linearkombinationen der Bilder oder Linearkombinationen einer ausgezeichneten Basis? Muss das auch umgekehrt gelten (wenn man die Begriffe 'Definitinonsraum' und 'Zielraum' vertauscht)?[59]

- Charakterisiert die Darstellung einer linearen Abbildung ihrerseits den Definitions- und/oder den Bildraum durch Festlegung einer bestimmten Strukturierung, indem sie z.B. mit Hilfe einer bestimmten Basis definiert wird?[60]

**Orientierungspunkte und Strategien** Die folgenden Transkriptanalysen werden jeweils in einem zweiten Teil durch zusammenfassende Schlussfolgerungen ergänzt, welche zunächst auf die vermuteten inhaltlichen Vorstellungen eingehen. Diese nehmen insbesondere Bezug auf die in der Feinanalyse genannten Merkmale. Sodann wird darauf eingegangen, an welchen Merkmalen die Studierenden sich orientieren und welche Strategien sie in der Auseinandersetzung mit den Aufgaben und Inhalten der Gespräche anwenden. Grobe Interpretationsanhaltspunkte hierfür sind:

- Umgang mit Zeichen, z.B.:
  ◦ Werkzeug mit syntaktischen Möglichkeiten
  ◦ Werkzeug mit referentieller Bedeutung
  ◦ Ausdrucksmittel zur Vermittlung von eigenen Gedanken
  ◦ Hilfsmittel zur Entwicklung von Gedanken

- Vollzug von reflektiver Abstraktion wie Verkapselung, Verdinglichung und Vereinigung.[61] Diese Sichtwechsel auf Phänomene und Tätigkeiten kommen insbesondere an folgenden Stellen in den Gesprächen vor:

[58]Diese Frage passt vor allem zur Komponentenvorstellung vom Vektorraumbegriff.

[59]Die Vermutung, dass diese zweite Frage zu bejahen ist, ist wohl besonders bei einer Abbildungsvorstellung als Menge von Paarbeziehungen naheliegend, da hier die zeitliche Abfolge des Abbildungsprozesses keine Rolle spielt.

[60]Die Überlegung, dass der Bildraum mit Hilfe der der Abbildung strukturiert wird, passt z.B. zu einer Abbildungsvorstellung, in der das Bild mit der Abbildung identifiziert wird, denn sie stellt eine Deutung dar, welche Rolle der Definitionsraum hier spielen kann. Sie passt aber auch zu einer Abbildungsvorstellung, wo der Prozess des Abbildens im Vordergrund steht und die mathematische Struktur der Räume diesem Prozess untergeordnet wird.

Die Bejahung dieser Frage beinhaltet die Überzeugung, dass eine Abbildung verändernd auf die Identität des Definitions- oder Bildraums wirkt. Sie bedeutet zudem, dass die spezifisch gewählte Darstellung eines Objekts nicht nur die Perspektive des Betrachters sondern das Beziehungsgefüge dieses Objekts selbst verändert. Beim Restklasseninterview mit Frau Rolle zeigen sich Implikationen dieser Art bei der Betrachtung eines Homomorphismus.

[61]Zu den Begriffen siehe 1.2.1.

| | | |
|---|---|---|
| | Farbmaschine | |
| Produzieren einer Farbe | $\xrightarrow{\text{Verdinglichung}}$ | Farbe als Endprodukt |
| Erzeugen eines Vektors | $\longrightarrow$ | Vektor als Ergebnis |
| vier Grundfarben | $\xrightarrow{\text{Vereinigung}}$ | Farbe (als Mischung) |
| vier Koordinaten | $\longrightarrow$ | Objekt aus vier Koordinaten |
| Produzieren einer Farbe | $\xrightarrow{\text{Verkapselung}}$ | Produktionsprozess als Objekt |
| Erzeugen eines Vektors | $\longrightarrow$ | Erzeugungsprozess dargestellt als 4-Tupel-Computeranweisung |
| | Polynomraum | |
| Abbilden von Polynomen | $\xrightarrow{\text{Verdinglichung}}$ | Bild-Urbild-Paare als Ergebnis |
| Abbilden von Polynomen | $\xrightarrow{\text{Verdinglichung}}$ | Bilder als Ergebnis<br>Matrix: zwei Bilder oder Bildraum |
| Abbilden von Polynomen | $\xrightarrow{\text{Verkapselung}}$ | Abbildung als Objekt |

- Verhaltensweisen, die mit denkstiltypischen Präferenzen erklärt werden können:
  ◦ Bezugnahme auf Beziehungen oder statische Strukturen in Vektorräumen?
  ◦ Organisation von Handlungsabläufen in Vektorräumen zur Darstellung seiner Strukturen?
  ◦ (Intuitives) Erfassen der Wirkungsweise einer linearen Abbildung, einer Matrix, des linearen Kombinierens?
  ◦ (Intuitiver) Wechsel von einer dynamischen zu einer statischen Sichtweise der Farbmaschine?

### 3.3.2 Deutung des Vektorrauminterviews mit P. Sendig

Das Gespräch mit Herrn Sendig beginnt mit der Modellierung der Farbmaschine als Vektorraum. In diesem Zusammenhang werden die Begriffe der linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit und der Dimension erläutert. Anschließend werden Auswirkungen eines Wechsels des ‘Erzeugendensystems’ im Farbenraum erörtert.[62]

Im zweiten Gesprächsteil wird eine Abbildung von einem Polynomraum in den $\mathbb{R}^2$ diskutiert. Dieser Teil gliedert sich ebenfalls in zwei Abschnitte: Zunächst wird untersucht, ob die gegebene Definition zu einer linearen Abbildung passt. Nachdem das bejaht ist, werden zwei Darstellungsmatrizen der Abbildung, welche verschiedene Basen im Polynomraum zugrunde legen, mit der Abbildung und mit einander in Beziehung gesetzt.

[62] Dieser Abschnitt wird nicht analysiert. Das Transkript ist im Anhang B.1 zu finden.

**Farbmaschine**

Die Interviewerin erklärt die Aufgabe, dass eine Maschine

```
| rot |  | gelb |  | grün |  | blau |
     \       |         |       /
      |_________________________|
```

nach Computeranweisungen Farben mischen soll, und dies mathematisch durch einen Vektorraum modelliert werden soll. Sie fragt:

> "Inwiefern könnte man das als einen Vektorraum verstehen?"

Herr Sendig antwortet:

Transkriptausschnitt: 14-33

S: Kann man den Vektor jetzt nicht als einen Vektor mit vier Koordinaten darstellen?

I: Ja. Das wär sogar gut, weil der Computer ja irgendwas in Zahlen angeben muss.

S: Ja. Und dann würde in der ersten Koordinate die Menge rot stehen, also wie viel davon.

I: Hm. Also irgendwelche Koordinaten, und da steht, also, wir schreiben hier irgendwelche Zahlen rein

(b) * $(1, 2, 7, 4)$ *

und das (zeigt in (b) auf die erste Koordinate) ist die Menge an rot. Genau, also das könnten die Vektoren sein. Und was könnten die, was könnte dann linear abhängig, linear unabhängig, Basis, was könnte das bedeuten?

S: (12 Sek) Ja, linear abhängig könnte heißen, dass ich halt aus zwei an sich unterschiedlichen Einträgen trotzdem die gleiche Farbe herauskriege. Also z.B. jetzt zwei vier vierzehn und acht. (I ergänzt (b) zu:)

(b') * $\begin{matrix} (1, & 2, & 7, & 4) \\ (2, & 4, & 14, & 8) \end{matrix}$ *

Wenn ich das Doppelte nehme, ist das dann die gleiche Farbe. Obwohl ich glaube nicht, dass das das ganze Problem darstellt, find ich.

I: Ja, warum?

Also gleiche Farbe ist linear abhängig schon mal. Also die beiden (zeigt auf (b')) sind linear abhängig.

S: Aber es kann noch mehr lineare Abhängigkeiten geben, also zwischen den Einträgen.

I: Ja, wie z.B.? (7 Sek)

S: Das ist mir im Moment nicht ganz (5 Sek). Ja, dass ich z.B. die gleiche Farbe z.B. mit nur drei Farben vielleicht erzeugen kann?

I: Hm. (3 Sek) Also die Farbe, die wir jetzt hier (zeigt in (b') auf die erste Zeile) erzeugt haben, auch durch drei Einträge. Das könnte sein, ne, so was könnte vorkommen, wenn man sich die Farben da oben (zeigt auf (a)) anguckt?

S: Ja ich weiß jetzt nicht, ob das Absicht ist, halt, aber es ist, ich glaub, also eine von den vier Farben ist eigentlich überflüssig, an sich. Ich mein, ich glaub grün

Es ist kaum denkbar, dass Herr Sendig mit der Verwendung des bestimmten Artikels in Zeile 14 eine Überzeugung ausdrückt, dass es nur einen Vektor gibt. Eher vermute ich, dass er damit den Prototyp eines 'Vektors' in der Farbmaschinenwelt, die ja als Vektorraum aufgefasst werden soll, anspricht. Er beschreibt hier nicht, was die 'Vektoren' im Farbenraum sein sollen, sondern macht einen Vorschlag zu ihrer Darstellung, nämlich als 4-Tupel. Er selbst spricht nur von Koordinaten, was die Interviewerin als Zahlen interpretiert. Es ist nicht klar, ob dies sein Gedanke war, oder ob er sich etwa Farben in diesen Koordinaten vorstellt. Er geht jedenfalls darauf ein, indem er dann von 'der Menge rot' spricht, wiederum ohne nähere Angabe, wie diese zu notieren ist. Denkbar wäre eine Zahl, die sich auf eine fest vereinbarte Mengeneinheit bezieht, oder auch eine Zahl zusammen mit einer Volumen- oder Gewichtseinheit. Seine Erläuterung, dass in der ersten Koordinate die Menge an rot stehen soll, ist sicherlich entsprechend für die anderen Koordinaten fortzusetzen. Ein Vektor soll also ein Objekt, vielleicht eine Farbe oder die Produktionsanweisung für eine Farbe, sein, das durch vier Komponenten beschrieben wird, nämlich zu jeder der vier Grundfarben eine Mengenangabe. Mehr Informationen gibt Herr Sendig nicht zum 'Vektorraum': Er sagt nicht, welche Operationen in diesem Raum gelten sollen. Vielleicht betrachtet er diese Angabe als überflüssig, weil er die komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation von $n$-Tupeln im $\mathbb{R}^n$ als selbstverständlich voraussetzt. Er deutet diese Operationen aber auch nicht inhaltlich für die Maschine.

Die Interviewerin legt in den Zeilen 19-23 fest, dass die Koordinaten nur aus Zahlen bestehen. Herr Sendig nimmt dies im Weiteren auf. Er konzentriert sich nun auf die Frage, was 'linear abhängig' im Zusammenhang mit der Farbmaschine bedeuten kann. Sein erster Vorschlag (Zeile 25-30) deutet die lineare Abhängigkeit von zwei bestimmten, verschiedenen Vektoren in $\mathbb{R}^4$ für die Objekte, die sie darstellen: die Farbtöne, die herauskommen, sind gleich. Es wird hier deutlich, dass jedes 4-Tupel in Herrn Sendigs Vorstellung eindeutig mit einer produzierten Farbe in Zusammenhang steht. Möglich ist wiederum, dass er ein 4-Tupel als Produktionsanweisung oder auch als Beschreibung einer Farbe ansieht.

Der zweite Vorschlag (Zeile 34-43) spricht weitere Möglichkeiten von linearen Abhängigkeiten von 4-Tupeln an, und weist auf eine Deutung für die Maschine hin, die die erste Deutung erweitert: die Farbe, die durch $(1, 2, 7, 4)$ und ebenso durch $(2, 4, 14, 8)$ beschrieben ist, könnte noch auf ganz andere Weise erzeugt werden, nämlich aus nur drei von den Grundfarben in den Zuflussbehältern. Denn das Grün von den Grundfarben kann vielleicht aus den anderen gemischt werden.

Die Interviewerin bestätigt im Folgenden diese Möglichkeit und schlägt vor anzunehmen, dass das Grün eine Eins-zu-Eins-Mischung aus dem Gelb und dem Blau ist. Sie fragt nochmals nach einer linearen Abhängigkeit. Herr Sendig antwortet:

Transkriptausschnitt: (VR(1), Sendig) 50-52

S: (8 Sek) Ich hab das Bild doch noch nicht so ganz verstanden. Weil da würde ja eigentlich die eine Koordinate wegfallen. Da könnte man ja eigentlich aus was Vierdimensionalen was Dreidimensionales machen. (6 Sek)

Herr Sendig antwortet nicht auf die erneute Frage nach der linearen Abhängigkeit, sondern spricht ein Problem an, das ihn hindert, die neue Situation zu verstehen:

Die vier Koordinaten in der Notation der Vektoren konstituieren einen vierdimensionalen Vektorraum. Wenn Grün durch Gelb und Blau erzeugt werden kann, wird die Koordinate für Grün jedoch nicht gebraucht: sie ‘würde wegfallen’. Hier wird nun deutlich, dass Herr Sendig mit den 4-Tupeln Farben, also die Ergebnisse von Produktionsprozessen, und nicht Computerinstruktionen oder die Herstellungsprozesse als solche meint. Denn es können zwei verschiedene Tupel dasselbe Produkt bezeichnen, während die zugehörigen Anweisungen für das Herstellungsverfahren verschieden sind. Im zweiten Fall würde es hier also kein Problem geben: $(0,1,0,1)$ würde eine andere Anweisung bezeichnen als $(0,0,2,0)$, denn sie verlangen das Öffnen verschiedener Rohre. Vielleicht stellt Herr Sendig sich vor, dass man die Farben nun durch 3-Tupel darstellen würde; vielleicht sieht er auch die Möglichkeit, in den 4-Tupeln an die Stelle für grün immer null zu schreiben. Sein Problem ist nun, dass hier ein vierdimensionaler Raum zu einem dreidimensionalen Raum wird. Dies steht offenbar im Widerspruch zu seinen Vektorraumvorstellungen. Das Problem spricht die Unvereinbarkeit von zwei Strukturen - einer drei- und einer vierdimensionalen - an: Wenn eine Eins-zu-Eins-Beziehung zwischen dem Farbenraum und dem $\mathbb{R}^4$ hergestellt werden kann, so kann es nicht sein, dass das ebenso mit dem $\mathbb{R}^3$ möglich ist, denn diese beiden Räume sind nicht isomorph. Was Herr Sendig hier übersieht, ist die Tatsache, dass man den Farbenraum unter der Vorgabe, dass Grün aus Gelb und Blau erzeugt werden kann, zwar mit Hilfe des $\mathbb{R}^4$ beschreiben kann, dass diese Beschreibung aber keine Eins-zu-Eins-Beziehung herstellt. Anders formuliert: während das Erzeugendensystem, auf das die 4-Tupel gründen, linear unabhängig ist, bilden die vier Grundfarben ein abhängiges System.

### Polynomraum

Transkriptausschnitt: (VR(2), Sendig) 1-13

I: Wir gucken uns den Polynomraum an, ist ja auch ein Vektorraum. Nehmen wir jetzt nur ganz klein, kleiner gleich eins, und bilden ab in den R hoch zwei.
(a) * $f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *
Das $f$ soll eine lineare Abbildung werden und wir geben noch zwei Bedingungen vor:
(b) * $\begin{array}{rl} f(x+1) & = (1,0) \\ f(2x) & = (0,4) \end{array}$ *
Die Frage ist: Geht das? Kann das ne lineare Abbildung, gibt es eine lineare Abbildung, die diese Bedingung erfüllt, und gibt es mehrere oder ist sie eindeutig, wenn es sie gibt? (4 Sek)
S: Also ich hätte spontan gesagt, das geht nicht.
I: Warum nicht?
S: Weil, ehm, also für ne k-lineare Abbildung müsste ja gelten, dass, wenn ich links addiere, ich dann auch rechts addiere, also, in dem Sinne, ne?
I: Ja, ja.
S: Und ich hab ja (3 Sek) auf der rechten Seite in zwei verschiedenen Koordinaten ne Null und egal, ob ich jetzt die erste Koordinate als die $x$-Koordinate wähle und die zweite Koordinate als die $x$ hoch null, also die ganzen Zahlen
I: Die Konstante
S: die Konstante als null, egal wie rum ich das jetzt wähle, kann ich, eh (6 Sek), also geht es auf jeden Fall nicht auf, weil die erste hat ja beides, für $x$ und für die

Konstante und die zweite hat nur 'n $x$-Faktor, nur das $x$.
I: Probier doch mal ein Beispiel. Ich verstehe noch nicht ganz genau, was du meinst.
S: Also wir müssen doch jetzt, ehm (6 Sek), also dem, alles, was $x$ hat, eine Koordinate zuordnen und der Konstante eine Koordinate.

Herr Sendig hat spontan den Eindruck, dass es keine lineare Abbildung gibt, die die gegebenen Bedingungen erfüllt.

Zur Begründung deutet er zunächst (Zeile 11-12) seine Vorstellung von dem an, was eine lineare Abbildung ist.[63] Dabei spricht er davon, dass mit der Addition 'links' zugleich eine Addition 'rechts' erfolgt. Ich vermute, dass er mit 'links' und 'rechts' auf die Notation Bezug nimmt, wo links des Zuordnungspfeils der Definitionsraum und rechts der Zielraum steht. Er setzt diese beiden Additionen in Beziehung zu der Abbildung. Eine mögliche Deutung dieser Äußerung ist, dass die jeweiligen Summanden und Summen durch die Abbildung auf einander bezogen sind: Herr Sendig spricht nur vom Addieren, nicht aber von seinem Ergebnis, also wäre ein Bezug über die Abbildung zunächst nur: 'Wenn ich $a+b$ im Definitionsraum rechne, dann rechne ich auch $f(a)+f(b)$ im Zielraum.' Diese Aussage gibt keinen Sinn als Beschreibung einer Eigenschaft der Abbildung $f$. Berücksichtigt man die Ergebnisse der Summen, so erhält man die Aussage: 'Immer wenn $a+b=c$ im Definitionsraum gilt, so gilt auch $f(a)+f(b)=f(c)$ im Zielraum.' Dies ist eine korrekte Beschreibung der ersten Linearitätseigenschaft.[64] Die zweite Eigenschaft spricht Herr Sendig hier nicht an.

Im nächsten Abschnitt (Zeilen 14-23) begründet Herr Sendig, warum es keine lineare Abbildung mit den gegebenen Eigenschaften geben kann: Die beiden Koordinaten 'auf der rechten Seite', die eine Null haben, sind die zweite Koordinate im Bildtupel $(1,0)$ und die erste Koordinate im Bildtupel $(0,4)$. Neben den Ausdrücken 'erste' und 'zweite' 'Koordinate', die bei 2-Tupeln gebräuchlich sind, spricht Herr Sendig noch von der '$x$-Koordinate' und der '$x^0$-Koordinate', wobei er Letztere auch als ganze Zahlen bezeichnet. Diese beiden 'Koordinaten'-Typen beziehen sich sicherlich auf den Polynomraum, denn nur hier tritt $x$ auf. $x^0=1$ ist eine Festlegung aus der Vorlesung, wo statt $x+1$ eher die Notation $x+x^0$ gebräuchlich war. Die skalaren Vielfachen von 1 sind die reellen Zahlen, nicht nur die ganzen Zahlen, die Herr Sendig nennt. Herr Sendig diskutiert die Frage, ob es eine Möglichkeit gibt, die Bilder der noch nicht angesprochenen Polynome so zu definieren, dass die Abbildung $f$ linear ist. Er betrachtet die Polynome vom Grad kleiner als zwei, von denen $x+1$ und $2x$ an der Tafel notiert sind, mit den Kategorien von $x$- und $x^0$- 'Koordinate'. Das heißt, dass er diese Polynome mit der Brille einer Struktur ansieht, in der er zwei Komponenten unterscheidet, die zwar anders notiert sind als die Komponenten von 2-Tupeln, die aber strukturell dasselbe kennzeichnen. Durch den Ausdruck 'Koordinate', den er auf die Polynome überträgt, wird diese Analogie deutlich.

Er diskutiert nun (Zeilen 14-20) Möglichkeiten, für die Komponenten $x$ und $x^0$ der Polynome Koordinaten von 2-Tupeln unter Berücksichtigung der Abbildungsgleichungen zu wählen. Dabei soll eine der beiden Positionen in den 2-Tupeln die

[63]In Bezug auf eine Abbildung wurde in der Vorlesung anstelle von 'linear' der Ausdruck '$k$-linear' verwendet. Dabei bezeichnete $k$ immer den Skalarkörper der beiden Vektorräume, zwischen denen abgebildet wird. In diesem Fall ist also $k=\mathbb{R}$.

[64]Vgl. Herrn Sendigs allgemeine Beschreibung eines Homomorphismus im Restklasseninterview in (RK, Sendig), Zeilen 117-120. Auch hier spricht er vom Verknüpfen in beiden Mengen, nennt aber auch das Abbilden und die Tatsache, dass die Reihenfolge keine Rolle spielt.

$x$-Komponente und die andere die $x^0$-Komponente der Polynome repräsentieren. Und dies bezeichnet er als unmöglich,

> "weil die erste hat ja beides, für $x$ und für die Konstante und die zweite hat nur 'n $x$-Faktor, nur das $x$."

Ich vermute, dass mit 'erste' und 'zweite' wie oben die Koordinaten der 2-Tupel gemeint sind. Nun scheint er $(1, 0)$ mit der ersten Koordinate zu identifizieren, da hier nur die erste Koordinate durch Multiplikation mit Skalaren verändert werden kann, und erklärt die Tatsache, dass $x + 1$ auf $(1, 0)$ abgebildet wird, als eine Zuordnung von beiden Polynomkomponenten zur ersten Koordinate der Tupel. Entsprechend liest er den Zusammenhang von der $x$-Komponente zur zweiten Tupelkoordinate aus der zweiten Gleichung ab. Die Tatsache, dass die erste Koordinate der 2-Tupel mit beiden Polynomkomponenten und die zweite Koordinate der 2-Tupel nur mit der $x$-Komponente der Polynome verbunden ist, hält Herr Sendig für unvereinbar mit einer linearen Abbildung.

Herr Sendig erwägt hier die Alternativen, die für eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ nach $\mathbb{R}^2$ seiner Ansicht nach bestehen. Diese sind durch die Strukturierung des Polynomraums nach $x$- und $x^0$- Komponente und die Strukturierung des $\mathbb{R}^2$ nach erster und zweiter Koordinate begrenzt: Nach seiner Aussage im letzten Satz (Zeilen 22-23) muss es eine Eins-zu-Eins-Entsprechung zwischen den Komponenten des einen Raums und den Koordinaten des anderen geben. D.h. ein Polynom $ax + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ wird abgebildet auf ein Tupel $(c, d)$ mit $c, d \in \mathbb{R}$, wobei das Polynom $ax$ auf $(c, 0)$ und das Polynom $b$ auf $(0, d)$ abgebildet wird oder umgekehrt. Die Möglichkeiten $f(x) = (c_1, c_2)$ und $f(1) = (d_1, d_2)$ für beliebige $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ zieht Herr Sendig nicht in Betracht.

Im Folgenden werden in einer längeren Diskussion die beiden Alternativen, die Herr Sendig sieht, als Möglichkeiten ausgeschlossen. Die Interviewerin schlägt dann ein anderes Verfahren vor, in dem vorwärts Rückschlüsse aus den beiden gegebenen Gleichungen für die Bilder von $x$ und 1 gezogen werden unter der Vorgabe, dass die Abbildung linear sein soll. Dies führt zu den beiden Bedingungen

$$f(x) = (0, 2) \text{ und } f(1) = (1, -2).$$

Dies kommentiert Herr Sendig:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Sendig) 104-105

104 S: Wobei das ja nicht. Jetzt haben wir nicht mehr diese Eindeutigkeit, dass eine
105 Koordinaten, also ein Eintrag, genau das $x$ oder die Eins repräsentiert.

Diese Äußerung bestätigt nochmals die oben gegebene Interpretation.

Auf die Frage, ob $f$ mit den Bedingungen $f(1) = (1, -2)$ und $f(x) = (0, 2)$ eine lineare Abbildung sein kann, antwortet Herr Sendig:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Sendig) 114-122

114 S: Ich glaub, das wäre nicht mal eindeutig. Weiß ich nicht, behaupte ich mal. Müsste
115 man jetzt ein Beispiel finden.

I: Eindeutig heißt, es würde mindestens zwei Polynome geben, nein, es würde ein Polynom geben, das zwei verschiedene oder mehrere Bilder hat, wenn es nicht eindeutig wäre.
S: Ich hab jetzt andersrum gedacht: Zwei, die auf eins abgebildet werden.
I: Zwei verschiedene Polynome, die auf das gleiche, dasselbe 2-Tupel, abgebildet werden, wobei das nicht schlimm wäre, oder?
S: Doch, dann wär doch die, in dem Sinne keine Funktion mehr.

Herr Sendig vermutet, dass diese Zuordnung 'nicht einmal eindeutig' wäre, und durch die Nachfrage wird deutlich, dass er damit meint, dass verschiedene Polynome auf dasselbe Bild abgebildet werden. Eine solche Eigenschaft kann eine Funktion seiner Meinung nach nicht haben. Er macht hier zwei Fehler: Zum Einen hält er die gegebene Abbildung nicht für injektiv, zum Anderen verwechselt er die Abbildungseigenschaft mit der Eigenschaft, injektiv zu sein.

Den zweiten Fehler spricht die Interviewerin im Folgenden an und korrigiert ihn. Das Gespräch setzt sich danach fort:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Sendig) 131-136

S: Aber es ist nicht mehr injektiv, oder?
I: Ja.
S. und damit auch nicht mehr k-linear, oder?
I: Nee, das stimmt nicht. Z.B. wenn ich alles auf null abbilde, ist das ne lineare Abbildung. (4 Sek)
S: Hm (nachdenklich). Ja, ja, stimmt.

Herr Sendig äußert hier die Überzeugung, dass eine lineare Abbildung immer injektiv ist, d.h., dass jedes Bild ein einziges Urbild hat. Diese Bedeutung scheint Herr Sendig nach dem Gesprächsverlauf im Sinn zu haben. Um einen Zusammenhang zur Linearitätseigenschaft herzustellen, sehen wir zurück auf seine diesbezüglichen Äußerungen:

1. In Zeilen 11-12 erklärt er:
   "Für 'ne $k$-lineare Abbildung müsste ja gelten, dass, wenn ich links addiere, ich dann auch rechts addiere."

2. In Zeilen 14-23 geht er davon aus, dass eine bestimmte Basis des Definitionsraums auf eine bestimmte Basis des Zielraums abzubilden ist.

3. In Zeilen 77-80 und 93-101 zeigt er, dass er beide Linearitätseigenschaften richtig anwenden kann.[65]

Die erste Beschreibung ist unvollständig. Aus der Fähigkeit, die Eigenschaft anzuwenden, ist erkennbar, dass er nicht aus Unwissenheit die zweite Bedingung in seiner allgemeinen Beschreibung weglässt. Aber auch die erste Bedingung ist nur unzureichend erklärt. Die oben vorgenommene Deutung dieser Äußerung gibt wenig Hinweise auf den notwendigen Zusammenhang, den Herr Sendig zwischen Linearität und Injektivität sieht. Eine mögliche Erklärung ist folgende:

[65] Siehe im Anhang B.2 dieser Arbeit.

Herrn Sendigs Formulierung der Linearitätseigenschaft beschreibt eine Tatsache, was beim Addieren passiert. Es ist keine Aussage, dass auf eine bestimmte Handlung im Definitionsraum eine entsprechende Handlung im Bildraum folgt, sondern nach seiner Formulierung scheinen beide Handlungen parallel abzulaufen. Das lässt die Möglichkeit offen, dass es keine Reihenfolge gibt, bzw. dass sie nicht relevant ist, d.h., dass man ebenso gut von einer Addition im Bildbereich ausgehen kann und dazu eine eindeutige Addition im Definitionsbereich passt. Vielleicht identifiziert Herr Sendig Urbild und Bild mit einander, so dass die Addition von zwei Elementen im Definitionsbereich gleichzeitig eine Addition im Bildbereich ist, und zwar 'dieselbe' in dem Sinn, dass 'dasselbe' raus kommt, weil ja die Ergebnisse via die Abbildung identifiziert werden. Dabei ist das Verfahren des Addierens in den beiden Mengen natürlich verschieden. Diese Deutung passt gut zu Herrn Sendigs Annahme Basen müssten auf Basen abgebildet werden, und erklärt seinen späteren Einwand eine lineare Abbildung müsse injektiv sein. Denn die Vorstellung der Identifikation von einem Element mit seinem Bild ist schwierig, wenn verschiedene Elemente dasselbe Bild besitzen. Die Vorstellung der Identifikation kann natürlich alle Abbildungen betreffen, ist aber besonders bei linearen Abbildungen nahe liegend, wo die Abbildung nicht nur eine Beziehung zwischen Elementen der beiden Mengen herstellt, sondern eben auch Summen zu einander 'passen'. Die Forderung, dass Summen links Summen rechts entsprechen, ist nicht symmetrisch: Die Summe von zwei Elementen im Bildbereich muss nicht das Bild der Summe von zwei eindeutigen Elementen im Definitionsbereich sein. Diese Formulierung ist logisch viel schwieriger zu entschlüsseln und damit gedanklich schwerer zu erfassen, als die Überlegung, dass ein Element im Bildbereich nicht ein eindeutiges Urbild haben muss. Herr Sendig zeigt diesen Mangel an Differenzierung auch allgemein in Bezug auf den Abbildungsbegriff, wenn er eine Abbildung, die nicht injektiv ist, gar nicht für eine Abbildung hält.

Diese Interpretation wird durch eine weitere Nachfrage von Herrn Sendig nochmals unterstützt. Nach einer Erklärung der Interviewerin, dass beliebige Bilder für eine Basis gewählt werden können und dadurch eine lineare Abbildung eindeutig festgelegt wird, fragt er:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Sendig) 167-172

S: Also kann ich jetzt quasi auch drei Einträge da nehmen.
I: Drei hier (zeigt in (a) auf $\mathbb{R}^2$)? Wenn ich in den R hoch drei gehe?
S: Ja. Auch wenn ich nur Polynome mit zwei Einträgen zulasse?
I: Kein Problem, nur wird es dann nicht surjektiv. Dann erreiche ich hier (zeigt in (a) auf den Bildraum) nicht den ganzen Raum. (8 Sek)
S: Warum nicht?

Herr Sendig will wissen, ob es möglich ist, eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ nach $\mathbb{R}^3$ zu definieren. Er bringt in seiner Frage sogar noch präziser auf den Punkt, welche Merkmale ihm an den beiden Vektorräumen wesentlich sind: Es ist die Anzahl der 'Einträge', was im $\mathbb{R}^3$ eindeutig die Koordinaten bezeichnet. Aber auch im Polynomraum charakterisiert er den Raum durch die Anzahl der Einträge, womit er nach dem Vorangegangenen offenbar die frei wählbaren Koeffizienten vor den Basisvektoren meint. Er will letztlich wissen, ob es lineare Abbildungen von einem zwei- in einen dreidimensionalen Raum gibt. Offenbar hat ihn überhaupt erst die vorangegangene Ausführung der Interviewerin auf diese Möglichkeit gebracht. Seine Nachfrage, warum eine solche lineare Abbildung nicht surjektiv sein kann, kann zwei Gründe haben:

1. Er ist überrascht, dass eine lineare Abbildung nicht surjektiv sein muss, ähnlich wie es ihm zuvor neu war, dass sie nicht injektiv sein muss, und möchte nähere Erläuterungen haben.

2. Er unterscheidet noch immer nicht zwischen Bild- und Urbildraum einer Abbildung und zieht den Rückschluss: Wenn ein Bild zwei verschiedene Urbilder haben kann (d.h. die Abbildung nicht injektiv sein muss), dann kann auch ein Urbild zwei verschiedene Bilder haben. Das macht es möglich, den ganzen dreidimensionalen Raum zu erreichen.

Diese Episoden lassen vermuten, dass Herrn Sendigs ursprüngliche Vorstellung von einer linearen Abbildung eine bijektive Abbildung voraussetzte. Er scheint die Erklärungen der Interviewerin einzusehen. Wieweit er sein internes Modell von linearen Abbildungen daraufhin nachhaltig neu strukturiert, ist an diesem Ausschnitt nicht zu erkennen.

Nachdem geklärt ist, dass es genau eine lineare Abbildung $f$ mit den gegebenen Eigenschaften gibt, und außer den vorgegebenen Polynomen mit ihren Bildern auch die Bilder der Basis $\{1, x\}$ gefunden sind, folgt diese Diskussion:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Sendig) 189-204

I: Jetzt ist die Frage: Wie können wir diese Abbildung als rechteckiges Zahlenschema, also als Matrix darstellen und welche zusätzlichen Informationen müssen wir geben, wenn wir die als Matrix schreiben wollen?
S: Ich müsste die Basis mit angeben, vielleicht?
I: Ja, die muss ich mit angeben, genau. Was wäre also hier ne Matrix zu, ja, musst dir ne Basis aussuchen, und dann
S: Wenn ich die Basis nehme, die da gegeben ist, $x$ plus eins und zwei $x$,
I: * $\mathcal{A} = \{x + 1, 2x\}$ *
S: wäre die Matrix dann in Spalten eins null und null vier.
I: (d) * $M_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *
Genau. Und wie kann ich aus dieser Matrix meine Abbildung kriegen? (3 Sek) Also wenn ich wissen möchte, was das Bild von irgendeinem Polynom, von drei $x$ plus sieben, ist, was muss ich tun? (6 Sek)
S: Ja, da müsste ich gucken, wie drei $x$ plus sieben sich durch die Basis darstellen lässt, und müsste dann so oft, wie ich die einzelnen Faktoren halt benutze, das Bild benutzen.

Herr Sendig signalisiert zwar Unsicherheit in seiner Antwort, dass zu einer Matrixdarstellung die Basis angegeben werden muss, auf die diese Darstellung sich bezieht, aber er nennt dann zu der Basis, die er wählt, die passende Matrix. Diese Matrix diktiert er explizit durch Angabe der Spalten, welche die Bilder der Basis sind. Diese Bilder waren in den ursprünglichen definierenden Gleichungen als Zeilenvektoren notiert, müssen aber gemäß der Definition einer Darstellungsmatrix in der Vorlesung als Spalten auftreten. Im letzten Satz erklärt Herr Sendig zunächst, dass er zur Bestimmung des Bildes eines gegebenen Polynoms zuerst eine Darstellung dieses Polynoms bzgl. der zur Darstellungsmatrix gehörenden Basis finden muss. Er fährt fort (Zeilen 203-204)

> “und müsste dann so oft, wie ich die einzelnen Faktoren halt benutze, das Bild benutzen.”

Ich nehme an, dass er mit den ‘einzelnen Faktoren’ die Koeffizienten der beiden Basisvektoren in der gefundenen Basisdarstellung meint, und dass er bei dem Ausdruck ‘wie oft’ an ganzzahlige Vielfache der Eins denkt, im Grunde also die Größe dieser Faktoren meint, wobei er - zumindest sprachlich, vielleicht auch gedanklich - nicht berücksichtigt, dass diese Faktoren nicht ganze Zahlen sein müssen. ‘Das’ Bild wird dann mit derselben Vielfachheit verwendet. Ich nehme an, dass er das jeweilige Bild meint, und sagen will, dass eine Linearkombination der Bilder der Basisvektoren gebildet wird, welche dieselben Koeffizienten haben, die die Basisvektoren in der ursprünglichen Darstellung des Polynoms haben. Diese Beschreibung erklärt die Wirkung der Anwendung einer Matrix auf einen Spaltenvektor. Herr Sendig spricht diesen Zusammenhang an dieser Stelle nicht explizit an, aber später im Interview[66] führt er eine solche Matrixanwendung richtig durch.

Im nächsten Gesprächsabschnitt werden die Wirkungen zweier Darstellungsmatrizen von $f$ verglichen. Sie beziehen sich auf die Basen $\mathcal{A} = \{x+1, 2x\}$ und $\mathcal{B} = \{1, x\}$. Durch die Gleichung $2(x+1) - 4(2x) = -6x + 2$ wird ein Polynom bzgl. beiden Basen dargestellt und dann beide Matrizen angewendet, was zu den Gleichungen führt:

$$\text{bzgl. } \mathcal{A}: \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\text{bzgl. } \mathcal{B}: \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Zu dieser Darstellung fragt Herr Sendig:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Sendig) 265-284

S: Ist das Zufall, dass das gleiche rauskommt, oder?
I: Ist das Zufall oder nicht? (5 Sek)
S: Ich würd sagen, es ist kein Zufall. (3 Sek)
I: Also was bedeutet das hier, das zwei minus sechzehn? (zeigt auf das Ergebnis bei $M_{\mathcal{A}}$) (10 Sek)
S: zwei minus sechzehn?
I: Ich geb dem mal nen Namen hier, weil wir verschiedene Darstellungen haben. $v$ soll das Polynom heißen. Nehmen wir lieber $p$, für Polynom. (ergänzt (f’) zu:)
(f”) * $p = 2(x+1) - 4(2x) = -6x + 2$ *
(10 Sek) Wofür steht zwei minus sechzehn? Ist ja wie alle anderen Zahlen, die in irgendwelche Schemata eingeschrieben sind, steht das ja für etwas Bestimmtes.

[66] Vgl. Transkript (VR(2), Sendig), Zeilen 238-242 im Anhang B.2.

S: Zwei mal den ersten Eintrag, minus sechzehn mal den zweiten.
I: Was ist der erste Eintrag?
S: Das ist ne gute Frage. (3 Sek) $x$ plus eins, oder? Also die Basis, oder?
I: Ja, aber da müssen wir jetzt aufpassen. $f$ bildet von da nach da ab (zeigt in (a) von links nach rechts). (7 Sek)
S: D.h. zwei minus sechzehn wäre jetzt das Bild in R hoch zwei.
I: Genau.
S: Dann ist es kein Zufall, denn das Bild muss ja, egal welche Basis ich nehme, das gleiche sein.

Herrn Sendigs Frage, ob das Ergebnis der beiden Rechnungen zufällig übereinstimmt, ist eine Frage nach der Bedeutung dessen, was geschieht. Er vermutet einen Sachzusammenhang, den er jedoch zunächst nicht erkennt. Die Interviewerin fordert ihn auf, die Bedeutung der Zeichen zu entschlüsseln. Dabei gibt sie mit der Benennung der beiden Ausdrücke $2(x+1)-4(2x)$ und $-6x+2$ mit einem einzigen Zeichen eine Hilfe. Zunächst bleibt Herrn Sendigs Antwort innerhalb des Notationsschemas. Auf weitere Nachfrage bezieht er den ersten Eintrag des Ergebnisvektors in der Rechnung bzgl. der Basis $\mathcal{A}$ auf den ersten Vektor dieser Basis, $x+1$. Die halbe Zustimmung und der Hinweis der Interviewerin, die Räume, von wo nach wo $f$ abbildet, zu berücksichtigen, helfen Herrn Sendig, den Sachverhalt nun klar zu erkennen und die Begründung der Gleichheit der Ergebnisse auf den Punkt zu bringen: Der Vektor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -16 \end{pmatrix}$$

ist das Bild des Polynoms $p$, unabhängig von einer Basisdarstellung im Polynomraum. Das Bild wird lediglich auf zwei verschiedenen Wegen berechnet. Mit dieser Äußerung wechselt Herr Sendig plötzlich die Sichtweise. Statt in den Details der Rechnungen stecken zu bleiben, bekommt er eine Gesamtschau, die ihm die Zusammenhänge offenbar macht.

## Der Aufbau von Vorstellungen bei Herrn Sendig

**Zu den inhaltlichen Vorstellungen:**

Herrn Sendigs Modellierung der Farbmaschine konzentriert sich auf die Merkmale, die unter $M_K$ beschrieben sind.[67] Das einzige Merkmal, das er explizit anspricht, ist die ‘Anzahl der Komponenten’ eines Vektors: Er überträgt die vier Grundfarben als Komponenten der zu mischenden Farben, welche er mit Hilfe von Vektoren mit vier Koordinaten darstellen möchte. Zudem betont er bei einer späteren Überlegung die Tatsache, dass die Anzahl der Komponenten die Dimension des Raums charakterisiert, ohne zu berücksichtigen, dass dies nur im Falle von unabhängigen Grundfarben zutrifft.

Im Umgang mit dem Polynomraum liest Herr Sendig von Anfang an die Zeichen $x+1$ und $2x$ als Sonderfälle der allgemeinen Polynomdarstellung $ax+bx_0$ und spricht von der $x$- und der $x^0$-Koordinate. Diese Charakterisierung der Polynome passt zu $P_{K_1}$. In der Überlegung, ob $f$ eine lineare Abbildung sein kann, stellt er sich nicht die

[67] Vgl. 3.3.1.

Frage, ob die beiden Polynome ein Erzeugendensystem des Polynomraums bilden. Stattdessen argumentiert er mit den Möglichkeiten, wie die beiden Komponenten $x$ und $x^0$ der Polynome auf die Koordinaten der 2-Tupel in $\mathbb{R}^2$ bezogen werden können. Dieses Vorgehen ist oben mit $P_{K_2}$ beschrieben. Allerdings dient es ihm nicht zur Darstellung des Polynomraums, sondern der Möglichkeiten wie eine lineare Abbildung wirken kann.

Herrn Sendigs Ausführungen über lineare Abbildungen zeigen: Er kennt die formale Definition einer linearen Abbildung und kann sie einsetzen, um auf Bilder einzelner Polynome zu schließen. Eine Überprüfung, ob die definierte Abbildung linear ist, wird in dem Gespräch von Herrn Sendig nicht verlangt. Seine Vorstellung von einer linearen Abbildung beinhaltet jedoch Eigenschaften, die über die in der Definition festgelegten hinausgehen. Eine Folgerung aus diesen weitergehenden Eigenschaften ist, dass eine lineare Abbildung bijektiv sein muss. Im vorliegenden Fall zeigt er die Überzeugung, dass eine lineare Abbildung 'die' Komponenten der Vektoren im $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit 'den' Komponenten der Vektoren im $\mathbb{R}^2$ quasi identifizieren muss. Der einzige Spielraum, den er erlaubt, ist eine neue Skalierung und das Vertauschen von erster und zweiter Komponente. Zu seiner Darstellung der linearen Abbildung mit Hilfe einer Matrix gibt er eine zutreffende Erklärung über die Bedeutung der Spalten und das Verfahren, wie die Matrix als Werkzeug zur Ermittlung von Bildern eingesetzt wird.

Im nächsten Paragraphen werden mögliche Entwicklungslinien von Herrn Sendigs gedanklichen Konstruktionen in diesem Gespräch nachgezeichnet. Dabei werden einige der inhaltlichen Ideen stärker ausdifferenziert als das in dieser ersten Zusammenfassung geschehen ist.

**Zu den Strategien und Orientierungsmerkmalen im Interviewgespräch:**

Herr Sendig deutet die Farbmaschine mit Hilfe von 4-Tupeldarstellungen zunächst als den Vektorraum $\mathbb{R}^4$. Vermutlich dient ihm dieser generell als Referenzkontext für den Begriff 'Vektorraum'. Zwischen den beiden Welten der Farbmaschine und des $\mathbb{R}^4$ transferiert Herr Sendig im weiteren Verlauf des Gesprächs ständig. Dieser Transfer geschieht manchmal explizit, manchmal nur indirekt, indem er Gedanken zu dem einen Modell direkt in der Sprache des anderen ausdrückt. So stößt Herr Sendig sich daran, dass die 'Dimensionen' der beiden Räume nicht zusammen passen, nachdem festgelegt wurde, dass eine der Grundfarben aus den anderen erzeugbar sein soll. Die Tatsache, dass die Elemente eines Vektorraums in bestimmte 'Komponenten' gegliedert sind, und die Anzahl dieser Komponenten scheinen Herrn Sendigs Leitkriterien für die Identifizierung der Maschine mit einem Vektorraum zu sein. Das bedeutet, dass er sich an bestimmten statischen Strukturen orientiert.

Charakteristikum der Farbmaschine ist ein Herstellungsprozess. In seiner Modellierung der Maschine beschreibt Herr Sendig diesen Prozess, der aus mehreren Einzelhandlungen zusammengesetzt ist, durch ein Objekt: die produzierte Farbe. Er ersetzt diesen Prozess geradezu durch sein Ergebnis, ohne zwischen verschiedenen Wegen, wie dieses Ergebnis erreicht werden kann, zu unterscheiden. Diese mentale Identifizierung eines Prozesses mit seinem Ergebnis ist eine Verdinglichung.[68] In der

[68]Der Vollzug der Verdinglichung eines Rechenprozesses zu einem Objekt kann nach Sfard (1991)

Modellierung der Farbmaschine spricht Herr Sendig keinen Prozess an, sondern gibt nur Informationen über den Charakter der Vektoren. Die Frage der Funktionsweise der Maschine spielt nur eine untergeordnete Rolle, sie wird nicht thematisiert. Dies entspricht der Interessenslage prädikativen Denkens.

Herr Sendig beginnt seine Überlegungen im zweiten Teil des Interviews mit einer starken Orientierung an der diagrammatischen Darstellung der gegebenen Objekte. Zwischen den Diagrammen, die die formal-symbolischen Konstruktionen der Elemente des $\mathbb{R}^2$ als 2-Tupel und der Elemente des Polynomraums als $ax + bx^0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen, sieht er einen unmittelbaren Übergang, der beide mit einander identifiziert und seine weiteren Gedanken über lineare Abbildungen leitet: Diese formale Entsprechung beschreibt im Wesentlichen die Möglichkeiten, wie lineare Abbildungen zwischen den beiden Vektorräumen zuordnen können. Ursache für diese Idee sind möglicherweise genau die formalen Darstellungen der Elemente, welche bestimmte Summen in den beiden Vektorräumen auszeichnen, so dass die Schlussfolgerung nahe liegt, dass diese augenfälligen Summen einander durch eine lineare Abbildung zugeordnet werden müssen, denn eine lineare Abbildung ist nach Herrn Sendigs Worten dadurch charakterisiert, dass das Addieren im Definitions- und im Bildraum einander entspricht. Die Zeichenform der Vektorraumelemente hat hier offenbar einen großen Einfluss auf seine Schlussfolgerungen. Diese Zeichen spielen eine besondere Rolle: sie sind nicht nur Repräsentationen der Elemente, sondern bei den hier angesprochenen Vektorräumen sind die genannten Zeichen selbst die Elemente: Der Polynomraum ist in der Vorlesung als Menge der formalen Summen $ax^1 + bx^0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ definiert worden und der $\mathbb{R}^2$ ist als Menge der 2-Tupel, in Spalten- oder in Zeilenform, mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ eingeführt worden. Seine Überzeugung, wie eine lineare Abbildung aussieht, stützt Herr Sendig nicht allein auf die äußeren Analogien der Elemente dieser Vektorräume, sondern sie passt gut in seine konzeptionelle Vorstellung von einer linearen Abbildung, dass sie Summen eins-zu-eins überträgt, und dass sie bijektiv ist. Die Vorstellungen, die Herr Sendig sich auf verschiedenen Betrachtungsebenen über lineare Abbildungen zurecht zu legen scheint, sind auf einander abgestimmt. Das lässt darauf schließen, dass er ab und zu metakognitive Selbstkorrekturen vornimmt. Die Manipulierbarkeit der Diagramme nutzt Herr Sendig erst zu einem späteren Zeitpunkt, nachdem er von der Interviewerin beinahe darauf gestoßen wird: erst dann entdeckt oder verwendet er die Gleichung $1 = x + 1 - x$, die ihm das Bild von 1 liefert. Diese Manipulierbarkeit hat die Möglichkeit zur Folge, den Raum aus einer anderen als der 'kanonischen' Basis zu erzeugen, und stellt somit Herrn Sendigs Vorstellung von einem festen Grundgerüst für den Vektorraum in Frage. Er klammert diese Möglichkeiten, andere, gleichartige Diagramme zu erzeugen, geradezu aus, und selbst nachdem er sie vor Augen hat, ignoriert er zunächst ihre Implikationen, die seinen Vorstellungen widersprechen. Hier werden Grenzen seiner metakognitiven Kompetenzen sichtbar. Dabei wird außerdem deutlich, dass in Herrn Sendigs Vorstellung statische Terme und Strukturvorstellungen gegenüber Auswirkungen, die Manipulationen unter Berücksichtigung

eine sehr anspruchsvolle kognitive Leistung sein. Die Verdinglichung in dem vorliegenden Fall, die ebenfalls das Erstzen eines Prozesses durch sein Ergebnis bedeutet, ist jedoch meines Erachtens kognitiv nicht sehr anspruchsvoll. Denn das Ergebnis ist nicht wie in Sfards Beispielen ein neues abstraktes Objekt, sondern ein konkretes Objekt aus der alltäglichen Erfahrung.

der vorgegebenen Regeln haben, Priorität haben.

Bei der Anwendung von zwei Darstellungsmatrizen für die Abbildung $f$ auf Vektoren kann Herr Sendig mit diesen Diagrammen korrekt, den Konventionen entsprechend umgehen. Er ist jedoch vorrangig an der Deutung der Diagramme, also an ihrem inhaltlichen Bezug interessiert, wie seine Frage zeigt, ob es Zufall ist, dass die Ergebnisse, die die beiden Darstellungsmatrizen liefern, gleich sind. Er bleibt hier nicht auf dieser reinen Rechenebene stehen, sondern er versteht es, die Matrizen und ihre Wirkungsweise auf der konzeptionellen Ebene des Basis- und Abbildungsbegriffs zu interpretieren.

Im Folgenden wird ein Versuch präsentiert, den Gedankenprozess, wie Herr Sendig seine Vorstellungen aufbaut und verankert, mit Hilfe von epistemologischen Dreiecken zu beschreiben.[69] Es scheint so, dass Herr Sendig als Referenzkontext für einen Vektorraum den $\mathbb{R}^n$ und hier speziell für den Polynomraum $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ den $\mathbb{R}^2$ verwendet, und dass sein Referenzkontext für den Begriff 'Basis' die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ und das heißt hier die Basis $\{(1,0),(0,1)\}$ des $\mathbb{R}^2$ ist. Diese Symbole sind Herrn Sendig offenbar so vertraut, dass sie für ihn nicht zu deutende Symbole sondern Referenzkontext für abstraktere Begriffe sind. Möglicherweise deutet er auch diese Symbole mit Hilfe eines weiteren Referenzkontextes, etwa dem kartesischen Koordinatensystem und den Pfeilsymbolen in der Ebene, aber das kommt in dem Interview nicht zur Sprache. Falls es so ist, hat er den Zusammenhang so gut verinnerlicht und bewerkstelligt den Transfer so sicher, dass er auf diese geometrische Darstellung nicht explizit Bezug nehmen muss. Nicht klar ist, wie stark die Identifizierung zwischen dem Zeichen '$\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$', dem Begriff des Polynomraums oder allgemein eines Vektorraums und dem $\mathbb{R}^2$ als Referenzkontext ist. Ebenfalls unklar bleibt, wie Herrn Sendigs Referenzkontext für den Begriff der linearen Abbildung aussieht. Möglichkeiten, die anklingen, und in komplexer Weise zusammen zu wirken scheinen, sind folgende:

1. Eine lineare Abbildung identifiziert die Strukturen zwischen zwei Räumen. Referenzkontext ist dann die Vektorraumstruktur.

2. Eine lineare Abbildung versieht die Elemente des Definitionsraums mit Namen, die die Elemente des Bildraums sind; sie ist ein Isomorphismus. Referenzkontext für die Abbildung ist dann die Namensgebung.

3. Eine lineare Abbildung respektiert die Bildung von Summen und von skalaren Vielfachen im Definitionsraum. Referenzkontext können hier die Handlungen des Addierens und Multiplizierens sein.

4. Eine lineare Abbildung ist eine Abbildung zwischen $n$-Tupeln, darstellbar durch eine Matrix. Referenzkontext kann dann die Matrix und die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor sein.

[69] Steinbring (2005) setzt dieses Werkzeug unmittelbar zur Analyse der Gespräche ein. Das stellte sich hier als schwierig heraus, weil die Referenzkontexte häufig weder konkrete Objekte noch konkrete, gemeinsam geteilte Situationen sind, sondern indiviuelle Vorstellungen, welche sich in einem längeren Prozess der Auseinandersetzung mit Inhalten der linearen Algebra gebildet haben. Diese Vorstellungen haben keine unmittelbaren äußeren Repräsentationen und sind für die Analyse nur indirekt zugänglich.

Es ist denkbar, dass Herr Sendig die lineare Abbildung $f$ in der Aufgabenstellung als Mittel zur Identifizierung des Symbols '$\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$' des Polynomraums mit seinem Referenzkontext $\mathbb{R}^2$ versteht, und die Abbildung deshalb nicht für linear hält, weil sie nicht seiner Vorstellung entspricht, wie man die beiden Räume (sinnvoll) in Bezug zu einander setzen kann.

Offensichtlich liegt für Herrn Sendig dem Begriff der linearen Abbildung der Begriff des Vektorraums bzw. die Struktur eines Vektorraums zu Grunde. Die Aufgabe veranlasst Herrn Sendig dazu, seine Vorstellung von einer Vektorraumstruktur und der Rolle, die jede Basis beim Strukturieren spielen kann, zu erweitern. Im Verlaufe des Interviews gibt es Indizien für folgende Entwicklung:

1. Charakteristikum einer linearen Abbildung ist: Summen im Definitionsbereich entsprechen Summen im Bildbereich.

   Hier deutet Herr Sendig den Begriff 'lineare Abbildung' über den Referenzkontext des Rechnens im Vektorraum. Zugehörige Symbole sind Summen aus $x$ und 1 und ihren Vielfachen und Komponenten der 2-Tupel des $\mathbb{R}^2$.

2. Der $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ wird mit dem $\mathbb{R}^2$ durch Gleichsetzung von $\{x, 1\}$ mit $\{(1,0),(0,1)\}$ identifiziert.

   D.h. Herr Sendig deutet das Symbol '$\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$' mit dem Referenzkontext $\mathbb{R}^2$. Der allgemeine Begriff, der hier dargestellt wird, ist der Vektorraum.

3. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ muss diese Beziehung berücksichtigen, indem sie die Basen auf einander abbildet. Einzige erlaubte Variante ist, dass anstelle der Basisvektoren im $\mathbb{R}^2$ auch Vielfache dieser Basisvektoren verwendet werden dürfen.

   Dies ist wieder eine Deutung des Begriffs 'lineare Abbildung' als strukturerhaltende Abbildung. Sie geschieht nun auf dem Referenzkontext der Vektorraumstrukturen von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und $\mathbb{R}^2$, wie sie in 2. beschrieben sind.

4. Die von der Interviewerin angeregte Suche nach Folgen aus den angegebenen Bedingungen für $f$ mit Hilfe von schlichten Diagrammmanipulationen ergibt, dass $\{x+1, 2x\}$ die Rolle von $\{x, 1\}$ übernehmen kann.

   Hier gewinnt Herr Sendig Erkenntnisse innerhalb des Symbolbereichs.

5. Die Beziehungen zwischen $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und $\mathbb{R}^2$ sind variantenreicher als in 2. beschrieben.

   Dies ist eine Übertragung der neuen Erkenntnisse im Symbolbereich auf den Referenzkontext 'Vektorraumstrukturen' und damit auch auf den Begriff 'Vektorraum' des epistemologischen Dreiecks von Punkt 2.

6. Konsequenz der neuen Erkenntnisse über die Vektorraumstruktur ist eine erweiterte Vorstellungen über lineare Abbildungen.

   Die Erkenntnisse über den Referenzkontext von Punkt 3. werden auf den Begriff der 'linearen Abbildung' transferiert.

In dieser Beschreibung des Lernprozesses während des Interviews ist das diagrammatische Denken ein Teil des Prozesses der Zuweisung von neuer Bedeutung, der sich im Symbolbereich der epistemologischen Dreiecke abspielt. Herrn Sendigs Prioritäten zur Orientierung in seinen Denkprozessen liegen hier deutlich bei der Strukturierung seiner Erkenntnisse in vollständigen, widerspruchsfreien und umfassenden Gesamtzusammenhängen. Verbale Darstellungen von Sachverhalten wie die Beschreibung des Wesens einer linearen Abbildung als summenerhaltend sind für ihn bereits voll von Bedeutung. Er übersetzt formale Darstellungen meist in bedeutungshaltige Zusammenhänge, welche dann Referenzkontext seines weiteren Denkens und Handelns sind. Wo er das nicht tut, bleiben Erkenntnisse auf der rein formalen Darstellungsebene und ohne Relevanz für ihn. Den Aufbau von internen Modellen für mathematische Zusammenhänge scheint er bewusst zu steuern, da er sorgfältig darauf bedacht ist, keine Unstimmigkeiten einzubauen.

Eine Abbildung ist aus einem Prozess des Abbildens abgeleitet. Herr Sendig sieht sie als Mittel zur Übertragung der Strukturen eines Vektorraums in einen anderen, indem die Strukturträger - die Vektoren der beiden 'kanonischen' Basen - mit einander in Beziehung gesetzt werden. Herrn Sendigs Vorstellung einer linearen Abbildung ist eine Ansammlung von Zweierbeziehungen zwischen Elementen des Definitions- und Elementen des Bildraums. Die Rollen dieser beiden Elementtypen sind in dieser Zweierbeziehung gleich. Auch diese Repräsentation kann man als Ergebnis einer Verdinglichung bezeichnen: Der Prozess des Zuordnens wird ersetzt durch das Ergebnis, welches Bilder und Urbilder in Beziehung setzt. Dies geschieht auf der Ebene der Strukturen der beiden Vektorräume als Gesamtheit ebenso wie auf der Ebene ihrer Elemente, also der einzelnen Bilder und Urbilder. Herr Sendig verliert bei der Verdinglichung die Richtung der Zuordnung. Dieses Abbildungskonzept ignoriert den Vorgang des Abbildens weitgehend. Auch wenn Herr Sendig diesen Vorgang ausführen kann, um das Bild eines bestimmten Polynoms zu ermitteln, so scheint dieses Verfahren doch keine entsprechenden Spuren in seiner mentalen Rekonstruktion des Abbildungsbegriffs zu hinterlassen.

In seinem Umgang mit Matrizen zeigt er, dass er das zugehörige Verfahren des Zuordnens durchführen kann und dass er auch analysieren kann, was bei diesem Verfahren geschieht. Es ist möglich, dass er in diesem Zusammenhang die Abbildung $f$, die durch zwei verschiedene Matrizen repräsentiert wird, als verkapseltes Objekt begreift. Deutlich wird, dass er die Abbildung nicht mit Verfahren des Abbildens identifiziert.

Eine andere Form von Abstraktion vollzieht Herr Sendig in seinem Denken in Strukturen, durch die er Vektorräume charakterisiert sieht.

### 3.3.3 Deutung des Vektorrauminterviews mit A. Beck

Das Gespräch mit Frau Beck über Vektorräume beginnt mit einer Modellierungsaufgabe für eine Maschine, die Farben mischt. Die Situation ist mit Hilfe eines Vektorraums zu beschreiben. Anschließend sind die Begriffe 'lineare Abhängigkeit' und 'lineare Unabhängigkeit' und 'Erzeugendensystem' in der Konstellation der Maschine zu erläutern. Sodann werden Auswirkungen der zusätzlichen Vorgabe, dass eine der Grundfarben mit den anderen erzeugt werden kann, diskutiert. Schließlich wird ein Basiswechsel mit Hilfe der Maschine repräsentiert und diskutiert.[70]

Im zweiten Gespächsteil geht es um eine lineare Abbildung zwischen einem Polynomraum und dem $\mathbb{R}^2$. Es sind die Bilder von zwei Polynomen gegeben und es soll untersucht werden, ob hierdurch eine lineare Abbildung bereits definiert ist. Nachdem dies bejaht ist, erhält die Interviewte die Aufgabe eine Matrixdarstellung der Abbildung zu geben und zu erklären. Sie wird dann noch mit einer weiteren Matrixdarstellung bzgl. einer anderen Polynomraumbasis verglichen.

**Farbmaschine**

Die Interviewerin stellt eine computergesteuerte Maschine vor, mit der durch Mischen von vier gegebenen Farben rot, blau, grün und gelb andere Farben hergestellt werden, und zeichnet dazu (a)

```
| rot |  | blau |  | grün |  | gelb |
‾‾‾‾‾‾‾  ‾‾‾‾‾‾‾‾  ‾‾‾‾‾‾‾‾  ‾‾‾‾‾‾‾‾
      \      |        |     /
      |_____________________|
```

Sie stellt die Aufgabe, dies mit Hilfe eines Vektorraums darzustellen.

Transkriptausschnitt: (VR(1), Beck) 13-18

B: Was ich mir vorstellen könnte, dass man das da hätte als Vektor (zeigt in (a) auf die obere Zeile) ist ja egal, ob als Zeilen- oder als (3 Sek.) Spaltenvektor. Und dass man damit dann eben, na ja, ich sag mal, das ist quasi so ne Art Unterraum von dem, was man aus allen machen könnte. Und dass man quasi so ne Art, na ja, wie wir das bei den Körpern hatten, dass da so ne Art Ideal entsteht, dass also nur durch diesen Vektor alle, die durch diesen Vektor erzeugt werden, eben in dem Ideal liegen.

Frau Beck sieht in ihrer ersten Antwort die vier neben einander liegenden kleinen Farbtöpfe und nennt diese Kombination einen Zeilenvektor. Sie ergänzt sich, dass man ihn natürlich auch als Spaltenvektor nehmen kann. Es bleibt noch offen, in welcher Weise diese Farbtöpfe einen Vektor konstituieren. Wenn sie nur einen einzigen Vektor darin sieht, ist das Naheliegendste, dass in diesen Behältern jeweils eine ganz bestimmte Menge an Farbe vorhanden ist, und das Einfüllen dieser Menge in den großen Behälter zu einer bestimmten Farbe führt. Sieht sie aber in dieser Kombination alle Vektoren, so meint sie die einzelnen Farbmengen sicherlich variabel. In ihren weiteren Ausführungen über einen Unterraum und ein Ideal, das 'durch diesen Vektor' erzeugt wird, wird deutlich, dass sie in der Tat in der Zeichnung der vier Farbtöpfe nur einen einzigen Vektor sieht. Aus diesem Einen kann man eine Art Ideal erzeugen. Vielleicht meint sie hier die Vielfachen dieses einen Vektors, die einen eindimensionalen Untervektorraum bilden. Die Beschreibung:

> "Das ist quasi so ne Art Untervektorraum von dem, was man aus allen machen könnte"

[70] Diese letzte Diskussion wird nicht analysiert. Sie ist im Anhang unter **??** zu finden.

bezieht sich möglicherweise nicht auf den einen Vektor, den sie hier vor Augen hat, sondern auf das, was man aus ihm erzeugen kann. ‘Was man aus allen machen kann’ können alle Farben sein, die aus den Vorgegebenen erzeugt werden können.

Die Interviewerin notiert als Beispiel den Vektor
(b) (1 1 1 1)
Und fragt dann nach, was Frau Beck mit dem Ideal meint.

Transkriptausschnitt: (VR(1), Beck) 27-43
27 B: Na ja, dieses, dieses Verhältnis (zeigt auf (b)). Also alles, was zu dieser Farbe
28 gehört, ob ich jetzt die doppelte, wenn ich jetzt die doppelte Menge rot nehme,
29 nehme ich auch die doppelte Menge blau.
30 I: Ach so.
31 B: Dass man also, alle, die da drin sind, werden durch dieses Verhältnis, also diese
32 Farbe, die dann hier entsteht (zeigt in (a) auf den großen Behälter), ist durch dieses
33 Verhältnis entstanden, egal, welche Menge ich jetzt da nehme, weil das Verhältnis
34 bleibt ja immer gleich. Und veränder ich das Verhältnis, veränder ich die Farbe. Also
35 kann ich mit allen vier Farben quasi das komplette Farbenspektrum in diesem hier
36 (zeigt in (a) auf den großen Behälter) erzeugen.
37 I: D.h. was sind die Vektoren, so was (zeigt auf (b)) oder das, was weiß ich, $\lambda$-fache
38 (notiert in (b) $\lambda$ vor dem Zeilenvektor)?
39 B: Ja, ja, das $\lambda$-fache.
40 I: Dass wir also, sozusagen, die verschiedenen Farbtypen sollen die Vektoren sein?
41 B: Ja. Also dass man das so als $x$ eins, $x$ zwei, $x$ drei, $x$ vier (zeigt in (b) auf die
42 einzelnen Einträge im Zeilenvektor) dann hat man halt $x$ eins, $x$ zwei , $x$ drei, $x$ vier
43 (zeigt in (a) auf die vier kleinen Farbbehälter)

Bei dem Begriff ‘Ideal’ denkt Frau Beck an das lineare Erzeugnis eines 4-Tupels, und damit einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$, das sie in der Farbenwelt als alle Produkte bezeichnet, die zu ‘dieser Farbe’ gehören, und das heißt dieses Farbtyps sind. Die Produkte, die durch diese Vektoren beschrieben sind, sind durch ein gemeinsames Teilverhältnis der vier Grundfarben charakterisiert. Der gesamte Raum steht für die Menge der Farben, die aus den vier gegebenen gemischt werden können.

Es wird dann geklärt, was die Vektoren in dem Vektorraum sein sollen. Frau Beck entscheidet, dass es Ausdrücke der Form $\lambda(1, 1, 1, 1)$ sein sollen, also alle Vielfachen eines 4-Tupels. Diese stellen nämlich alle denselben Farbtyp dar. Die Produkte der Maschine, für die sich Frau Beck interessiert, sind nur die Art der Farben, nicht ihre Quantitäten. Somit wird der oben erwähnte Typ des ‘Untervektorraums’ zum eigentlichen typischen Element des Vektorraums. Frau Beck gibt keine Erklärung zu den Operationen ab, die in diesem Raum gelten sollen. Vermutlich setzt sie die komponentenweise Addition und skalare Multiplikation für 4-Tupel stillschweigend voraus. Sie deutet diese nicht im Farbenraum.

Nach Frau Becks Ausführungen ist der Vektorraum, der als Modell für die Farbmaschine verwendet wird, die Menge der eindimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$. An dieser Stelle erwähnt Frau Beck die Tatsache, dass es nur positive Vielfache der gegebenen Farben gibt, nicht. Möglicherweise ist ihr das Problem noch nicht aufgefallen. Es ist auch denkbar, dass sie bei den Vielfachen nur an positive Einträge denkt und die Menge

$$\{\{\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \lambda \in \mathbb{R}^+\} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^+\}$$

meint. In beiden Fällen ist die konstruierte Menge ein Gebilde von hohem Abstraktionsniveau: Es ist eine Menge von Mengen. In dem einfacheren ersten Fall ist es der projektive Raum $P(\mathbb{R}^4)$, wenn entsprechende Verknüpfungen definiert werden, in beiden Fällen ist es kein Vektorraum.

Auf die Frage der Interviewerin nach der Bedeutung der Begriffe linear abhängig, linear unabhängig und Erzeugendensystem antwortet Frau Beck:

Transkriptausschnitt: (VR(1), Beck) 58-77

B: Ja also wenn man das jetzt so mit mehreren Töpfen, sag ich mal, machen könnte, die da hinterher dabei rumkommen, man hat also diese Verhältnisse,

I: Was heißt 'mehreren Töpfen'? Das ganze Modell?

B: Ja, ja, mehrere Ergebnisse quasi. Andere Verhältnisse halt. Und wenn man mit zwei, also angenommen man hat drei dieser, eh, Systeme und man könnte mit Zweien davon das Dritte erzeugen, dann ist das Dritte

I: Noch zwei solche? (zeichnet noch zwei weitere Modelle wie (a):)

(a')

```
| rot |  | blau |  | grün |  | gelb |     ⊔  ⊔  ⊔  ⊔     ⊔  ⊔  ⊔  ⊔
    \       |         |       /           \  |  |  /       \  |  |  /
     |___________________________|          |_______|         |_______|
```

B: Und dann hat ja wieder die gleiche Form, und angenommen, andere Verhältnisse. Aber, wenn man angenommen, ja, durch diese beiden (zeigt in (a') auf die ersten beiden Modelle) angenommen durch zwei Anteile von dem und einen Anteil von dem diese Farbe (zeigt in (a') auf das dritte Modell) erzeugen kann, dann sind diese Vektoren, also diese Verhältnisse zu einander nicht linear unabhängig.

I: Hm. Gut.

B: Andersherum, es wird nur schwieriger durchs Abziehen. Also ich sag mal, dass das bei dem Modell da liegt, da kann man keine Farben rausziehen.

Frau Beck stellt sich jeden Farbtyp durch eine Zeichnung der Maschine repräsentiert vor. Sie wählt ein Beispiel von drei Farben, von denen die dritte durch ein bestimmtes Verhältnis aus der ersten und der zweiten erzeugt werden kann, und erklärt, dass die drei dann 'zueinander nicht linear unabhängig' sind. Diese Operation, die Farben in einem bestimmten Verhältnis zu mischen, ist nicht durchführbar, wenn man wie Frau Beck unter 'Farben' nur Farbtöne versteht. Sie meint hier also offenbar die Farbmengen, ohne sich dieses Bruchs in ihren Bedeutungszuordnungen bewusst zu sein. Bemerkenswert ist, dass sie den Begriff der linearen Abhängigkeit nicht einschränkt auf ein Beispiel mit den vier Grundfarben, aus denen durch die Maschine alle anderen Farben des Farbenraums erzeugt werden, sondern dass sie den Begriff auf die produzierten Farben bezieht. Eine Beziehung der linearen Abhängigkeit, wie sie sie beschreibt, gibt innerhalb der Problematik der Funktionsweise der Farbmaschine nicht viel Sinn, denn die produzierten Farben brauchen nicht in eine solche Abhängigkeitsbeziehung gesetzt zu werden. Hier interessieren eigentlich nur Abhängigkeitsbeziehungen einer Farbe von den Grundfarben oder der Grundfarben von einander. In einem mathematischen Vektorraum sieht das anders aus. Von diesem geht sie hier offenbar aus und erläutert die mathematischen Begriffe - wie aufgefordert - in Bezug auf die Farben. Mit ihrer letzten Bemerkung stellt sie klar, dass der Farbenraum nur begrenzt zur Veranschaulichung eines Vektorraums dienen kann, da die Operationen nicht vollständig ausgeführt werden können.

Zu den Begriffen 'linear unabhängig' und 'Basis' sagt Frau Beck:

Transkriptausschnitt: (VR(1), Beck) 83-84 und 90-92

83 B: Genau. Während wenn man keine Farbe davon jeweils erzeugen könnte durch
84 eins oder zwei, dann sind sie linear unabhängig.

90 B: Also ich sag mal, so ne Basis wäre angenommen, wenn man sich mal auf die
91 Farben bezieht, wäre rot, blau, gelb angenommen Basis, weil man grün ja durch
92 blau und gelb ohnehin erzeugen kann.

Für eine Basis wählt sie nun ein Beispiel aus den Grundfarben. Dabei schließt sie grün aus, weil es eine Mischung aus blau und gelb ist.

Nach einer Erklärung von Frau Beck, dass alle Farben ohne das Grün erzeugt werden können, fragt die Interviewerin, wie man grün darstellen kann, wenn es aus gleichen Teilen gelb und blau gemischt werden kann.

Transkriptausschnitt: (VR(1), Beck) 103-122

103 B: Dann wär null null eins null, bzw. null null, eh, null eins null eins.
104 I:
105 (c) * (0 0 1 0)   (0 1 0 1) *
106 Genau. Darf ich ein Gleich dazwischen schreiben?
107 B: Ja, in dem Fall schon. Also bzw. muss hier ein $\lambda$ vielleicht noch, aber geht, nicht
108 unbedingt.
109 I: Jetzt haben wir ja für $\lambda$ eins.
110 B: Bei dem geh ich jetzt davon aus, dass man blau und gelb in der gleichen Kon-
111 zentration nimmt.
112 I: Ah, dann wär das doppelt so viel, ne? Da machen wir ne Zwei davor. Oder wir
113 können ja auch hier ne Zwei reinschreiben. (ändert zu:)
114 (c') * (0 0 2 0) = (0 1 0 1) *
115 Ah, da haben wir ein Problem, ne? Wie ist das jetzt mit Basis?
116 B: Ja, ich mein, die Vektoren an sich sind ja jetzt nicht gleich, sondern nur (?)
117 praktisch von den Farben her betrachtet ist es jetzt nur gleich.

Frau Beck hat kein Problem damit, die beiden Darstellungen für Grün mit einem Gleichheitszeichen zu versehen, obwohl die beiden 4-Tupel offensichtlich verschieden sind. Ihre einzige Einschränkung ist die Überlegung, dass man Vielfache der Tupel nehmen sollte. Das ist im Blick auf ihre Deutung der Tupel, die jeweils das lineare Erzeugnis eines Tupels mit einer Farbe identifiziert, zu verstehen. Auf die Nachfrage der Interviewerin erläutert Frau Beck, dass diese Gleichheit bezogen auf den Farbenraum gilt, nicht jedoch für die 'Vektoren', womit sie vermutlich die 4-Tupel meint. Frau Beck trennt also zwischen zwei Sichtweisen auf die 4-Tupel. Der $\mathbb{R}^4$ oder besser gesagt der $P(\mathbb{R}^4)$ dient hier nicht als Modell des Farbenraums, sondern seine Elemente, die skalaren Vielfachen eines 4-Tupels, dienen als Bezeichnungen für Farben. Dies geschieht in Analogie zu der Konvention in der Mathematik, zwei Zeichenketten, die dieselbe Sache bezeichnen, mit 'gleich' zu bezeichnen, auch wenn die Notationen verschieden sind. Frau Beck verwendet hier die 4-Tupel nicht in der Bedeutung, die sie als Bezeichnung der Elemente des Vektorraums $\mathbb{R}^4$ besitzen.

### Polynomraum

Transkriptausschnitt: (VR(2), Beck) 1-17

I: Wir nehmen eine Abbildung vom Polynomraum in den $\mathbb{R}^2$.
...(I wischt die Tafel)
I: * $f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *
Das soll eine lineare Abbildung werden, und wir geben zwei Informationen vor,
(a) * $\begin{array}{rcl} f(x+1) & = & (1,0) \\ f(2x) & = & (0,4) \end{array}$ *
Ist das eindeutig, das $f$? Also lineare Abbildung mit den beiden Eigenschaften?
(12 Sek)
B: Also, ich verstehe den Zusammenhang nicht so genau. Also ich verstehe jetzt
nicht, warum jetzt hier die Eins steht und hier ne Vier und hier die Null (zeigt in
(a) auf die Zahlen in den Ergebnistupeln).
I: Ist einfach nur ne Vorgabe. Hab ich jetzt so gesagt. Also ne Bedingung gestellt,
das $f$ soll lineare Abbildung sein und
(4 Sek)
B: Ja, ja, da kann ich jetzt nicht rauslesen, was wäre $x$ plus zwei? Also die Abbildung
von $x$ plus zwei.
I: Aha! Kann ich das nicht rauslesen?
B: Also ich nicht. Jetzt, im Moment.

Auf die Frage der Interviewerin, ob eine lineare Abbildung mit den gegebenen Bedingungen eindeutig ist, antwortet Frau Beck zunächst, dass sie 'den Zusammenhang' nicht versteht: Es fehlt ihr eine nachvollziehbare Beziehung zwischen den Polynomen und ihren Bildern. Als die Interviewerin deutlich macht, dass kein weiterer Zusammenhang als der notierte besteht, erklärt Frau Beck ihr Problem an einem Beispiel: Sie kann aus den Angaben nicht schließen, was

> "die Abbildung von x+2'

ist. Im wörtlichen, mathematischen Sinn des Wortes 'Abbildung' verstanden ist diese Äußerung unsinnig, da die Bezeichnung 'Abbildung von einem Objekt' nicht verwendet wird. Im umgangssprachlichen Sinn ist die 'Abbildung von einem Objekt' eine Zeichnung oder allgemeiner ein Bild. Wenn Frau Beck die Bezeichnung 'Abbildung' im Sinne von 'Bild' versteht, wie in der Umgangssprache möglich, dann meint sie hier, dass sie das Bild, das $x+2$ durch $f$ zugeordnet wird, nicht erschließen kann.

Frau Beck versucht im Weiteren das Polynom $x+2$ 'als Kombination' aus $x+1$ und $2x$ darzustellen. Nach einigem Ausprobieren und der Anregung der Interviewerin den Ansatz

$$x + 2 = \lambda(2x) + \mu(x+1)$$

zu versuchen, gelingt dies mit der Darstellung

$$-\frac{1}{2}(2x) + 2(x+1).$$

Es folgt die Diskussion:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Beck) 87-98

I: Also, d.h.: Ist die eindeutig (zeigt auf (a))?
B: Wenn man das auf alles hinkriegt, theoretisch schon, wär ja dann kleiner gleich eins.
I: Das müsste man gucken, ob man alles darstellen kann, dies war ja nur ein Beispiel. Es gibt ne andere Begründung, die letztlich darauf rausläuft, wo wir das aber nicht einzeln untersuchen müssen. Ich behaupte, das geht, weil $x$ plus eins und zwei $x$ zusammen eine Basis bilden.
B: Ja.
I: Warum tun sie das?
B: Das müsste man jetzt beweisen. Und zwar müsste man rausgucken ( 7 Sek). Also wenn das ne Basis ist, ist es eindeutig, und wenn es eindeutig ist, dann ist es die Basis. Obwohl eigentlich, die Rückrichtung is ja dann gegeben, in dem Fall.

Frau Beck erklärt, dass die Abbildung $f$, auf die die Interviewerin bei ihrer ersten Frage deutet, eindeutig ist, falls man 'das auf alles hinkriegt'. Das bedeutet vermutlich, falls man das, was gerade mit $x + 2$ getan wurde, mit allen Elementen von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ tun kann, nämlich sie als Linearkombination der beiden genannten Poylnomen schreiben kann. Frau Beck vermutet, dass dies möglich ist, wegen 'kleiner gleich eins'. Ich nehme an, dass sie hiermit den Grad der Polynome im Definitionsraum anspricht, und dass sie den Eindruck hat, dass wegen dieser Einschränkung die Darstellbarkeit wohl gegeben ist.

Die Interviewerin geht nicht näher darauf ein, sondern bringt ein Argument anderer Art, indem sie behauptet, dass die Eigenschaft, dass $\{x + 1, 2x\}$ eine Basis ist, als Begründung ausreicht. Frau Beck stimmt zu. In ihrer Antwort ist bei vier Worten zu klären, worauf sie sich beziehen, nämlich 'beweisen', 'eindeutig', 'Basis' und 'Rückrichtung'.

Was ist zu **beweisen**?
Die Antwort

> "Also wenn das ne Basis ist, ist es eindeutig, und wenn es eindeutig ist, dann ist es die Basis."

gibt keinen Sinn, wenn sie sich auf die Frage der Interviewerin, warum $x+1$ und $2x$ eine Basis bilden, bezieht, denn sie beginnt ihre Antwort mit: 'Wenn sie eine Basis bilden'. Der zweite mögliche Bezug ist die vorherige Behauptung der Interviewerin: Die Eindeutigkeit der Definition von $f$ ergibt sich aus der Tatsache, dass $x + 1$ und $2x$ eine Basis bilden.

Was heißt **'eindeutig'**?

Der Bezug des Wortes 'eindeutig' bleibt offen:

- Frau Beck kann die Eindeutigkeit von $f$ meinen, dass jedes Polynom durch die Vorgaben bereits ein Bild zugeordnet bekommt, dass keine Wahlmöglichkeit mehr besteht.

  Dies ist gleichbedeutend mit der Darstellbarkeit jedes Polynoms durch $x + 1$ und $2x$, und damit mit der Eigenschaft, dass $x + 1, 2x$ ein Erzeugendensystem des Polynomraums bilden.

- Sie kann auch die Eindeutigkeit von $f$ im Sinne von widerspruchsfreien Bedingungen meinen.

  Dies ist gleichbedeutend mit der Darstellbarkeit jedes Polynoms durch $x + 1$ und $2x$ auf eindeutige Weise (oder auf gar keine Weise) und damit mit der linearen Unabhängigkeit von $x + 1$ und $2x$.

Zuvor (Zeile 88) antwortet Frau Beck auf die Frage, ob $f$ eindeutig ist, das ist der Fall, 'wenn man das alles hinkriegt', d.h. wenn man jedes Polynom durch $x + 1$ und $2x$ ausdrücken kann, wie es soeben mit dem Polynom $x + 2$ geschehen ist. Sie zeigt hier, dass ihr klar ist, dass $f$ durch die Bilder von $x + 1$ und $2x$ festgelegt ist, falls diese beiden Polynome den ganzen Polynomraum erzeugen. Diese Antwort ist nur dann richtig, wenn sie entweder mit 'eindeutig' nicht die widerspruchsfreie Defintion von $f$ einschließt, oder wenn sie den beiden Polynome ansieht, dass sie linear unabhängig sind. Da bislang weder die Frage, ob die beiden Polynome linear unabhängig sind, noch die Frage, ob ein Polynom auf verschiedene Weisen durch $x + 1$ und $2x$ dargestellt werden kann, angesprochen worden ist, ist zu vermuten, dass sie diese Möglichkeit noch nicht in Betracht gezogen hat. An dem zuvor behandelten Beispiel lag das Problem ja darin, überhaupt eine Darstellung zu finden. Daher versteht sie unter 'ist eindeutig' vermutlich nicht 'ist widerspruchsfrei', sondern 'die gegebene Abbildungsvorschrift kann mit Hilfe der Linearitätseigenschaft auf alle Polynome fortgesetzt werden'.

Welche **Rückrichtung** ist gegeben?
Unter welcher Voraussetzung? Meint sie, dass nur eine ihrer beiden Wenn-dann-Aussagen erforderlich ist und die andere daraus folgt? Die Einschränkung 'obwohl' zeigt an, dass sie ihre Aussage nicht als Erklärung für den Zusammenhang der beiden Aussagen '$x + 1$ und $2x$ bilden eine Basis', und '$f$ ist eindeutig' meint, sondern dass sie eine Behauptung aufstellt, deren Wahrheitsgehalt noch nachzuweisen ist. Unter den gegebenen Umständen hält sie die zweite Aussage für trivial.

1. Die erste Deutungsmöglichkeit ist:
   1. Die Aussage

   > "Wenn die Polynome $x + 1$ und $2x$ eine Basis bilden, dann ist die lineare Abbildung $f$ eindeutig durch die Angabe der Bilder der beiden Polynome definiert."

   ist zu beweisen.
   2. Die Rückrichtung, nämlich die Aussage

   > "Wenn die lineare Abbildung $f$ aufgrund der Bedingungen, die die Bilder der beiden Polynome $x + 1$ und $2x$ angeben, eindeutig ist, dann bilden die zwei Polynome eine Basis."

zu bewiesen ist trivial.

Die Beweise dieser beiden Aussagen erfordern dieselben Argumente $(a)$ und $(b)$ in verschiedenen Richtungen, nämlich

$$\begin{array}{lll} (a) & & x+1, 2x \text{ sind linear unabhängig} \\ & \Longleftrightarrow & f \text{ ordnet keinem Polynom mehrere Bilder zu} \\ (b) & & x+1, 2x \text{ ist ein Erzeugendensystem des Polynomraums} \\ & \Longleftrightarrow & f \text{ ordnet jedem Polynom (mind.) ein Bild zu} \end{array}$$

Die Rückrichtung '$\Leftarrow$' ist allenfalls dann leichter zu beweisen sein, wenn es für Frau Beck offensichtlich ist, dass $x+1$ und $2x$ linear unabhängig sind. In diesem Fall ist in der Rückrichtung nur noch zu begründen, dass $x+1$ und $2x$ alle Polynome erzeugen.

2. Eine zweite Deutungsmöglichkeit sieht so aus:
   Frau Becks Aufmerksamkeitsschwerpunkt bei dieser Aussage liegt an einer anderen Stelle: Im ersten Teil ihrer Äquivalenzaussage sagt sie 'eine' Basis, im zweiten Teil aber 'die' Basis. Ist das nur eine unsaubere Formulierung, oder hat sie die Vorstellung, dass ein Vektorraum unter Umständen nur eine Basis hat? Der bestimmte Artikel bei der zweiten Folgerung kann aussagen, dass es sich um diejenige Basis handelt, die der gegebenen Zuordnungsvorschrift der Abbildung zugrunde liegt, also die Basis, die hier gebraucht wird. Es kann sein, dass Frau Beck sich aus der Vorlesung gemerkt hat, dass man eine lineare Abbildung dadurch definiert, dass man die Bilder der Vektoren einer Basis angibt, und dass ihr eigentliches Anliegen ist, diese Basis zu finden. Somit ist folgende Bedeutung möglich:
   "Wenn $\{x+1, 2x\}$ eine Basis des Polynomraums ist, dann ist die Abbildung $f$ durch die Angaben in der Aufgabe eindeutig definiert. Und dann ist $\{x+1, 2x\}$ diejenige Basis, auf die die Definition der Abbildung $f$ bezogen ist. Die letzte Aussage ist unter diesen Umständen eine Selbstverständlichkeit."

Was versteht Frau Beck unter **'Basis'**?
Möglicherweise verwendet sie die Vokabel 'Basis' zunächst im mathematischen Sinn des Wortes, sodann aber auch in einem umgangssprachlichen Sinn als 'die' Grundlage für die Definition der linearen Abbildung. Es kann sogar sein, dass sie diese Basis als die Grundlage versteht, auf der die Abbildung selbst gründet.

Die Interviewerin meint, Frau Beck spricht mit den beiden 'Richtungen' zwei Bedingungen für eine Basis an. Die Interviewerin nennt ein Dimensionsargument und Frau Beck gibt die richtige Dimension des Polynomraums an. Die Interviewerin fasst zusammen, dass also die Anzahl der Vektoren schon mal passend ist.

Transkriptausschnitt: (VR(2), Beck) 105-106

B: Aber ob <u>das</u> die Basis ist, ist die Frage, also müssen sie linear unabhängig von einander sein.

Frau Becks Betonung des bestimmten Artikels scheint deutlich zu machen, dass sie nur eine einzige Basis im Polynomraum erwartet. Mit der zweiten oben gegebenen Interpretation gibt dies jedoch einen anderen Sinn. Dann meint sie nicht, dass es nur eine einzige Basis im Polynomraum gibt, sondern dass es nur eine einzige Basis gibt, auf die die Abbildung $f$ aufgebaut wird. Der zweite Teil des Satzes gibt wörtlich keinen Sinn, denn aus einer Frage kann man nichts folgern. Sie meint es also anders. Vielleicht denkt sie etwas wie:

> “Es gibt viele Erzeugendensysteme. Eines davon ist die gesuchte Basis des Polynomraums. Dasjenige, das diese Basis ist, muss linear unabhängig sein. Das müssen wir also noch sicherstellen.”

Sie spricht nun zum ersten Mal die Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit an. Dabei sagt sie nicht aus, dass es selbstverständlich ist, dass die beiden Polynome linear unabhängig sind, sondern sie drückt aus, dass die beiden Polynome linear unabhängig sein müssen, falls $\{x+1, 2x\}$ als die gesuchte Basis in Frage kommt. Damit ist klar, dass ihr diese Eigenschaft der beiden Polynome bislang nicht einsichtig ist. Dies schließt die erste oben gegebene Deutungsmöglichkeit aus. Dass Frau Beck diese Eigenschaft nun ins Spiel bringt, kann verschiedene Ursachen haben:

- Die Frage nach der Dimension kann diese Assoziation ausgelöst haben.
- Zunächst war über die Frage gesprochen worden, ob $\{x+1, 2x\}$ alle Polynome erzeugt, und ihre Beantwortung hatte sich als kompliziert erwiesen. Die Interviewerin hatte gesagt, man könne die Frage, ob $f$ eindeutig sei, auch einfacher beantworten. Also liegt es nahe, anstelle des Erzeugendensystems nun eine alternative Eigenschaft zu untersuchen, die leichter nachzuweisen ist. Das ist bei der linearen Unabhängigkeit der Fall, da hier nur zwei Polynome zu betrachten sind, nicht unendlich viele.

Die Interviewerin stimmt dem letzten Gedanken zu, dass es eine Frage der linearen Unabhängigkeit ist, und formuliert ihn um zu der Frage, ob das Eine Vielfaches des Anderen ist. Frau Beck verneint mit einer klaren Begründung.

Die Interviewerin fragt als Nächstes, wie man die lineare Abbildung $f$ mit Hilfe einer Matrix darstellen kann, und welche Informationen dazu gegeben werden müssen.

Transkriptausschnitt: (VR(2), Beck) 126-155

B: Zuordnung, das ist jetzt die Frage. (10 Sek) Naja, irgend was ergibt halt die Matrix eins null null vier.
I: Ja, kannst du ja schon mal hinschreiben, die Matrix.
B: * $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *
I: und dann überlegen, wie muss man die deuten?
B: Und die wird halt erzeugt durch Vielfache der beiden Vektoren (zeigt in (a) auf $f(x+1)$ und $f(2x)$).
I: Meinst du jetzt $f$ von ? Oder der
B: Nee, der Vektoren. $f$ ist natürlich die Abbildung, die da hin führt, quasi

(c) * $\xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *

I: Meinst du jetzt mit 'der Vektoren' $x$ plus eins und zwei $x$ oder eins null und null vier? Das war meine Frage.

B: Hm. Noch mal.

I: $x$ plus eins ist ein Vektor von diesem Vektorraum (zeigt auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$), $f$ von $x$ plus eins ist auch ein Vektor, von diesem hier (zeigt auf $\mathbb{R}^2$).

B: Das (zeigt in (c) auf die Matrix) ist ja $f$ von: das (zeigt in (c) auf die erste Zeile der Matrix) ist $f$ von $x$ plus eins und das (zeigt in (c) auf die zweite Zeile der Matrix) ist $f$ von zwei $x$.

I: Ach so meinst du das.

B: Also $f$ bildet ja diese (zeigt in (c) auf den freien Raum vor dem Pfeil) Vektoren. Ich weiß jetzt nicht, wie ich <u>die</u> (zeigt in (a) auf $x+1$ und $2x$) als Vektoren schreiben soll, also das als Matrix schreiben soll, es sei denn, ich muss das so machen

(c') * $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x{+}1 & 2x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *

wobei das (zeigt in (c') auf die erste Spalte der linken Matrix) jetzt $x$ plus eins ist, also die Anzahl von $x$ plus eins ist, und das (zeigt in (d) auf die zweite Spalte der linken Matrix) die Anzahl von zwei $x$.

I: Was meinst du mit 'die Anzahl'?

B: Na ja, ein $x$ plus eins wird abgebildet auf eins null und ein zwei $x$ wird abgebildet auf null vier (zeigt in (c') auf die Spalten der linken und die Zeilen der rechten Matrix).

Frau Beck nennt zunächst (Zeilen 126-129) eine Matrix zur Darstellung der Abbildung $f$ im Bewusstsein, dass sie noch herausfinden muss, was die Einträge bedeuten. Insbesondere ist ihr der innere Zusammenhang zur 'Zuordnung' noch nicht klar. Diesen Begriff führt sie selbst ein, er wird von der Interviewerin nicht erwähnt. Die Komponenten, die sie wählt, sind die vier Komponenten der beiden angegebenen Bildvektoren. Es ist anfangs nicht erkennbar, ob sie als Spalten- oder als Zeilenvektoren in ihrer Matrix auftreten.

Frau Beck erklärt, dass die Matrix von Vielfachen der Vektoren $f(x+1) = (1,0)$ und $f(2x) = (0,4)$ erzeugt wird. Diese beiden Tupel versteht sie als die Zeilen der Matrix (Zeilen 141-143). Merkwürdig ist der Gedanke des Erzeugens der Matrix. Wenn sie nur die beiden Zeilenvektoren als Erzeugende bezeichnen würde, könnte man dies verstehen als ein Konstituieren der Schreibform: Das viereckige Schema setzt sich aus den Koordinaten der beiden Vektoren zusammen. Zu dieser Interpretation passt aber nicht die Vorstellung, dass die Vielfachen der beiden Vektoren die Matrix erzeugen, denn diese Vielfachen treten in der Schreibform nicht in Erscheinung.

Die Darstellung (c) (Zeile 135) zeigt, dass die Matrix in Frau Becks Augen nicht die Zuordnung $f$ repräsentiert. Sondern während $f$ das Zuordnen bestimmt, steht die Matrix im Bildbereich. Sie steht entweder für ein oder mehrere einzelne Bilder oder sie stellt den Bildraum als Ganzen dar. Wenn die Matrix für den Bildraum steht, gibt die Beschreibung, dass die Vielfachen der Vektoren die Matrix erzeugen, folgenden Sinn: Wenn man alle Summen aus Vielfachen der Zeilenvektoren bildet, erhält man den gesamten Bildraum. Von Summen spricht Frau Beck zwar nicht, aber sie sagt auch nicht, dass die Vielfachen den Raum bilden, sondern dass sie ihn, i.e. die Matrix, 'erzeugen'. Damit kann die Summenbildung gemeint sein.

Frau Beck ergänzt (Zeile 148) in ihrer Darstellung des Geschehens den Bereich vor dem Zuordnungspfeil, in dem die Polynome aufzuführen sind. Sie möchte die Polynome $x+1$ und $2x$ als 'Vektoren' schreiben, und das bedeutet offenbar als Zeilen- oder Spaltenvektoren, damit sie sie ebenfalls in einer Matrix repräsentieren kann. Die Polynome selbst scheinen aus ihrer Sicht keine richtigen Vektoren zu sein. Sie entscheidet sich für die Einheitsmatrix, in der nun die erste Spalte für $x+1$ steht, die zweite für $2x$. Frau Becks Formulierung deutet eine noch engere Verbindung an, indem sie sagt, die erste Spalte 'ist' $x+1$. Sie verbessert ihre Beschreibung noch mit den Worten: 'die Anzahl von $x+1$'. Sie erklärt dazu, dass man das Bild von 'ein $(x+1)$' in der rechten Matrix als $(1,0)$ ablesen kann, entsprechend das Bild von 'ein $(2x)$' als $(0,4)$. Vermutlich will sie mit der 'Anzahl' ausdrücken, dass man auch die Bilder der Vielfachen ablesen kann. Sie erklärt nicht wie, aber es kann sein, dass sie selbstverständlich findet, dass man die entsprechenden Vielfachen der Bilder nimmt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie die Darstellung der Polynome $x+1$ und $2x$ durch die Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

verstanden werden kann:

1. Die Spaltenvektoren geben die Koeffizienten an, mit denen die beiden Polynome als Linearkombinationen aus der Basis $\{x+1, 2x\}$ erzeugt werden können.

2. Es gibt einen Isomorphismus zwischen dem Polynomraum und dem $\mathbb{R}^2$, der die Polynome $x+1$ und $2x$ auf die genannten Spaltenvektoren abbildet. In diesem Fall würde eine Darstellung der Abbildung $f$ in zwei Schritten erfolgen:

$$\begin{array}{rcccc} \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ x+1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Die beiden Spaltenvektoren sind die Notationen oder Namen, mit denen die beiden Polynome im Weiteren bezeichnet werden.

Die ersten beiden Bedeutungszuordnungen sind mathematische Beschreibungen des Identifizierungsvorgangs. Sie scheinen mir zu kompliziert zu sein als Hintergrund für Frau Becks schlichte Beschreibung, dass der erste Spaltenvektor das Polynom $x+1$ 'ist'.

Besonders hervorheben möchte ich folgende Aspekte von Frau Becks Darstellung von $f$:

1. Sie wählt für Tupeldarstellungen für die Basisvektoren $x+1$ und $2x$ die Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

anstelle der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

die durch die Diagramme der Polynome angeregt werden könnten. Die zweite Zuordnung würde durch eine Identifizierung der Basis $\{x, 1\}$ des Polynomraums mit der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$ induziert. Frau Becks Darstellung beruht dagegen auf einer Identifizierung der durch die Angaben für die Abbildung $f$ gewählten Basis $\{x+1, 2x\}$ mit der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$.

2. Sie verwendet Matrizen als Darstellungsformen für Vektorräume, nicht für lineare Abbildungen. Eine Matrix repräsentiert nach ihrem Verständnis den Vektorraum, der von ihren Zeilenvektoren erzeugt wird, oder den Vektorraum, der von ihren Spaltenvektoren erzeugt wird. Sie äußert sich nicht zu der Zweideutigkeit dieser Bedeutungszuordnung. In den beiden vorliegenden Fällen handelt es sich um Diagonalmatrizen, wo dieses Problem nicht auftritt. Es ist aber auch denkbar, dass Frau Beck die Notwendigkeit berücksichtigt, dass die Bedeutungszuordnung jeweils eines Kommentars bedarf, wie sie ihn in diesem Fall ja auch gibt.

Die Interviewerin fragt nun, wie man aus Frau Becks Darstellung der Abbildung $f$ das Bild eines anderen Polynoms berechnen kann. Frau Beck antwortet:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Beck) 167-182

B: Ja, ja, das ist ja nur das Beispiel (zeigt in (c') auf die linke Matrix). Wenn man hier (zeigt in (c') auf die Einsen in der linken Matrix) $\mu$ und $\lambda$ einsetzt, kriegt man also hier (zeigt in (c') auf die Eins in der rechten Matrix) $\mu$ und (zeigt in (c') auf die Vier in der zweiten Matrix) vier $\lambda$.

I: $\mu$ und $\lambda$. Also würden alle Ergebnisse, würden alle Bilder (zeigt in (c') auf die Zeilen der rechten Matrix)
* $(\mu, 0)$ * oder * $(0, \lambda)$ *
aussehen.

B: Nein, nein. Das wird schon, schon kombiniert. Weil, man kann

I: Nach welcher Vorschrift muss man denn dann rechnen?

B: Das ist ja genau das Problem jetzt. Man kombiniert (zeigt in (c') auf die linke Matrix) ja immer $x$ plus eins mit den zwei $x$. Die werden ja immer kombiniert. Also als Vektoren. Also dass man hier jetzt
(e) * $(x+1) \circ (2x)$ *
Das ist jetzt schlecht gemacht. Ich weiß nicht, wie ich das (zeigt in (c') auf die linke Matrix) schreiben

Hier geht Frau Beck zunächst auf das Vervielfachen der Basisvektoren ein, von dem sie zuvor bereits gesprochen hat. Ihr ist auch klar, dass noch eine weitere Operation notwendig ist, die sie als 'kombinieren' bezeichnet. Sie wählt als Zeichen $\circ$, das häufig die Hintereinanderschaltung von Abbildungen bezeichnet, das aber in der Vorlesung auch manchmal als Zeichen für eine Gruppenverknüpfung verwendet worden war, wenn mehrere nicht näher spezifizierte Gruppen zugleich betrachtet wurden. Sie erhielten dann unterschiedliche Verknüpfungszeichen. Somit drückt sie mit ihrer Zeichenwahl möglicherweise aus, dass sie die spezifische Gruppenverknüpfung braucht, welche im Vektorraum der Polynome verwendet wird. Ihr fällt nicht ein, dass diese Operation die Addition von Polynomen ist, die ja auch im Polynom $x+1$ als Verknüpfung der Polynome $x$ und 1 auftritt.

Die Interviewerin weist sie auf die Addition im Polynomraum hin, und nachdem ein allgemeines Polynom als $\mu(x+1)+\lambda(2x)$ notiert ist, fragt die Interviewerin nochmals, wie man das Bild findet. Frau Beck gibt zunächst das Bild $(\mu, 4\lambda)$ ohne einen Kommentar, wie sie es bestimmt, an. Auf die Nachfrage, wie sie dieses Bild mit Hilfe der Matrix berechnet, sagt und notiert sie:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Beck) 210-218

210 B: Das ist ja quasi

211 $* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 4\lambda \end{pmatrix} *$

212 (kommentiert das Produkt: Dadurch kriege ich jetzt ne Darstellung $\mu$ null, null $\lambda$)
213 und wenn ich das jetzt wieder addiere, dann kriege ich wieder $\mu$ $\lambda$. (Ergänzt die
214 letzte Gleichung zu:)

215 $* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \quad + \quad \underline{\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 4\lambda \end{pmatrix}} \quad *$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\mu \quad 4\lambda)$

216 Wenn ich das jetzt quasi sofort als eins vier schreibe, komme ich sofort auf die
217 Darstellung. (ergänzt zu:)

218 $* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \quad + \quad \underline{\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 4\lambda \end{pmatrix}} \quad *$
$(1 \quad 4) \qquad\qquad \longrightarrow \qquad (\mu \quad 4\lambda)$

Frau Beck entwickelt hier ein Verfahren, wie man anhand einer Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f$ die Bilder der Definitionsraumelemente errechnen kann. Leitende Ideen bei diesem Verfahren sind das Wissen, welches Ergebnis herauskommen muss, und das Grundprinzip des Erzeugens als ein zweistufiges Verfahren, in dem zunächst Vielfache gebildet und dann addiert werden. Sie versucht mit Erfolg, diese zwei Stufen des Erzeugens, das Vervielfachen und das Addieren, so durch eine Rechnung zu vollziehen, dass der - bereits bekannte - Bildvektor herauskommt. Bei diesen Überlegungen zeigt sie Verständnis des Grundprinzips linearen Kombinierens und seines Zusammenhangs zu linearen Abbildungen. Das konkrete Verfahren, das sie hier entwickelt, funktioniert für die gegebene Situation, weil die vorgegebenen Bilder ihrer zugrunde liegenden Basis Vielfache der Standardbasis sind und daher die Darstellungsmatrix eine Diagonalmatrix ist. Bei allgemeinen Matrizen bringen diese Rechnungen nicht die gewünschten Vielfachen. Ein Beispiel ist die Matrix dieser Abbildung bzgl. $\{1, x\}$ als Polynomraumbasis und der Standardbasis als Basis des $\mathbb{R}^2$. Gemäß Frau Becks Vorgehen erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und das Bild des Vektors $\mu \cdot 1 + \lambda \cdot x$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \quad + \underline{\begin{pmatrix} \mu & -2\lambda \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}}_{(\ \mu \qquad 0\ )} .$$

Das tatsächliche Bild ist jedoch:

$$\mu(1, -2) + \lambda(0, 2) = (\mu, -2\mu + 2\lambda).$$

Die Interviewerin erklärt Frau Beck jetzt, wie üblicherweise eine Matrixdarstellung aussieht und wie mit ihr die Bilder berechnet werden. Danach fragt sie nach einer Matrixdarstellung bzgl. der Basis $\{1, x\}$. Frau Beck berechnet zunächst die Bilder von 1 und $x$, die sie folgendermaßen notiert:

$$\begin{array}{rll} 1 = & (x+1) - \frac{1}{2}(2x) & \\ & (1, -\frac{1}{2}) & \longrightarrow (1, -2) \end{array}$$

und

$$\frac{1}{2}2x = (0, \frac{1}{2}) \longrightarrow (0, 2).$$

Dass diese zweite Darstellung $x$ und sein Bild beschreiben soll, wird aus den mündlichen Kommentaren deutlich. Frau Beck kommentiert nun:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Beck) 255-261

255 B: Also ist meine Basis quasi
256 * $\{(1, -2), (0, 2)\}$ *
257 I: Basis von was ist das jetzt?
258 B: Das ist die Basis von R hoch zwei.
259 I: Ja.
260 B: Und hier die Basis (zeigt auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) wäre
261 * $\{(1, -\frac{1}{2}), (0, 2)\}$ *

Hier bezeichnet Frau Beck die Bilder von 1 und $x$ als ‘die Basis von $\mathbb{R}^2$’. Diese beiden Bilder sind linear unabhängig und stellen somit eine Basis des zweidimensionalen Raums $\mathbb{R}^2$ dar, nicht jedoch ‘die’ Basis, als hätte der $\mathbb{R}^2$ nur eine einzige. Frau Beck leitet ihre erste Aussage mit ‘also’ ein.

- Vielleicht fasst sie in dieser kurzen Bemerkung die Gedanken zusammen: Dies sind die Vektoren, aus denen ich nun den Bildraum erzeuge; sie bilden eine Basis dieses Raums; der Bildraum ist gleich dem gesamten $\mathbb{R}^2$.

- Es ist auch möglich, dass sie denkt: Dies ist diejenige (einzige) Basis, die den $\mathbb{R}^2$ als Bildraum von $f$, dargestellt bzgl. 1 und $x$, erzeugt.

Die ‘neue’ Basis des Polynomraums stellt Frau Beck in Koordinaten dar, welche die Basisvektoren bzgl. der alten Basis des Polynomraums haben. Es ist bemerkenswert, dass sie die alte Basis, welche schwieriger als solche zu erkennen ist, nun als Grundlage zur Darstellung der einfacheren Basis verwendet. Auch hier verwendet

Frau Beck den bestimmten Artikel: Die genannte Basis ist 'die' Basis des Polynomraums, und drückt damit aus, es ist diejenige Basis, bzgl. der wir nun die Abbildung darstellen, oder es ist diejenige Basis, die nun zur Grundlage der Abbildung wird.

Die Interviewerin nimmt Frau Becks Erklärung so auf, dass sie nun nach der Matrixdarstellung von $f$ bzgl. den beiden von Frau Beck genannten Basen des Definitions- und Zielraums fragt. Nach einer Erinnerung, dass die Bilder in die Spalten der Matrix gehören, schreibt Frau Beck die Antwort:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Beck) 287-292

287 B: Ach so, ja. ja. Ist ja die Matrix von den Bildern, also (ergänzt:)

288 $* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} *$

289 I: Jetzt hast du es in der anderen Basis geschrieben. Was sind die Bilder? Das ist
290 die Basis eins null, null eins. Bzgl. der Basis eins null, null eins ist eins minus zwei
291 die Darstellung von dem Bild von eins.

292 B: Ja, das ist aber die Basis, die das R hoch zwei erzeugt, oder nicht?

Frau Beck schreibt die Bilder von 1 und $x$ in die Spalten der Matrix. Sie gibt diese Bilder bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ an. Das entspricht nicht der Vorgabe, die verlangte, die Bilder in Koordinaten bzgl. der Basis $\{(1,-2),(0,2)\}$ zu schreiben. Die korrekte Antwort ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Missverständnis von Frau Beck zeigt, dass sie in Zeile 255-258 $\{(1,-2),(0,2)\}$ nicht als Basis des $\mathbb{R}^2$ meint, bzgl. der die Elemente des $\mathbb{R}^2$ anzugeben sind, sondern dass sie $\{(1,-2),(0,2)\}$ als Basis des Bildraums meint: Die beiden Vektoren sind diejenigen, aus denen die Matrix besteht, i.e. aus denen der Bildraum konstruiert wird. Auf den Einwand der Interviewerin, dass sie die Basisvektoren nun bzgl. der Standardbasis geschrieben hat, reagiert Frau Beck mit Verwunderung:

"Ja, das ist aber die Basis, die das $\mathbb{R}^2$ erzeugt, oder nicht?"

Wiederum impliziert sie durch den Gebrauch des bestimmten Artikels, dass es nur eine einzige Basis mit dieser Eigenschaft gibt. Das widerspricht der Tatsache, dass sich das Gespräch um zwei verschiedene Basen dieses Raums dreht. Frau Beck muss also etwas Anderes meinen, das diese Basis auszeichnet: Sie dient an dieser Stelle dazu, die Elemente des Raums zu bezeichnen. In dieser Rolle verwendet Frau Beck die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ sogar zur Bezeichnung der Polynome (siehe Zeile 148), wobei sie bei diesen erklärend hinzufügt, in welcher Weise die Bezeichnungen zu verstehen sind, dass nämlich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $x+1$ und

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $2x$ steht. Frau Beck sieht also zwei Basen desselben Raums in unterschiedlichen Funktionen:

- $\{(1,-2),(0,2)\}$ ist 'die' Basis des $\mathbb{R}^2$ als Bildraum der Abbildung, wenn diese über die Bilder von 1 und $x$ definiert wird.
- $\{(1,0),(0,1)\}$ ist 'die' Basis des $\mathbb{R}^2$ als Namensgeber für die Elemente des Raums.

## Der Aufbau von Vorstellungen bei Frau Beck

**Zu den inhaltlichen Vorstellungen:**

In diesem ersten Abschnitt werden in einem kurzen Überblick vermutete Vorstellungen zu der Maschine und dem Polynomraum als Vektorräume und zur linearen Abbildung genannt. Im folgenden Abschnitt, der sich mit den Strukturierungshilfen und Konstruktionsstrategien beschäftigt, wird eine etwas differenziertere Sichtweise gezeigt.

In der Modellierung der Maschine zur Herstellung von Farben geht Frau Beck auf Eigenschaften der Realweltsituation ein, für die sie Analogien in der linearen Algebra sucht: So setzt sie sich mit der Tatsache aus einander, dass einige Farbprodukte sich nicht im Farbton unterscheiden. Hierzu fallen ihr die mathematischen Begriffe 'Ideal' und 'Untervektorraum' und 'aus einem Vektor erzeugt werden' ein. Sie versucht sodann, alle Produkte eines Farbtons mit einander zu identifizieren und als ein Objekt mit einem Tupel zu repräsentieren. Auch die lineare Abhängigkeit erklärt sie innerhalb der Farbenbeziehungen zusammen mit den dort gegebenen Grenzen. Ihr Vorgehen entspricht der Beschreibung $M_E$.[71]

Im Umgang mit dem Polynomraum deutet Frau Beck die Zeichen $x+1$ und $2x$ als Elemente eines Vektorraums, für die sie die Frage erörtert, ob sie andere Polynome erzeugen. Dies entspricht der Idee von $P_{B_2}$. Im weiteren Umgang mit dem Polynomraum nimmt sie die Anregung der Interviewerin auf, das Konzept 'Basis' zu verwenden, und entfaltet ausgeprägte und differentierte Strukturierungsformen von Vektorräumen mit Hilfe dieses Begriffs.[72] Ob eine Basis dabei aus ihrer Sicht eher eine Aufgabe wie in $P_{B_2}$ oder eine Aufgabe der Einteilung nach Komponenten wie in $P_{K_3}$ wahrnimmt, ist nicht zu entscheiden. Die Verwendung verschiedener Basen eines Vektorraums als Grundlage zur Konstruktion des Raums zeigt zumindest, dass ihrem Vektorraumbild nicht die Komponentenvorstellung $V_K$[73] im Sinne kanonischer Komponenten zugrunde liegt. Eine Identifizierung des Polynomraums mit dem $\mathbb{R}^2$ nimmt Frau Beck bei ihrer Darstellung der Abbildung $f$ mit Hilfe von Matrizen vor, indem sie die Polynome $x+1$ und $2x$ mit den 'Namen'

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

versieht. Dies entspricht $P_{B_3}$ oder $P_{K_3}$.

---

[71] Vgl. 3.3.1.

[72] Es ist möglich, dass diese Sichtweise in bereits vorhandenen Vorstellungen verankert ist, aber auch dass sie erst durch die Aufgabe im Interview angeregt wird. Vielleicht spielt auch beides ineinander, indem Frau Beck hier vage Ideen fortentwickelt.

[73] Siehe die Sachanalyse zum Vektorraumbegriff in 2.2.1.

Die formalen Bedingungen für eine lineare Abbildung sind Frau Beck bekannt, ebenso ein Verfahren, wie man sie nutzen kann, um auf das Bild eines Elements des Definitionsraums zu schließen, wenn die Bilder einer Basis des Raums gegeben sind. Auf der Ebene von Vorstellungen über (lineare) Abbildungen fällt auf:

- Frau Beck scheint das Bild einer Abbildung (manchmal) mit der Abbildung selbst zu identifizieren.

- Sie bringt den Bildraum einer linearen Abbildung in enge Verbindung mit der Wahl der Basis, mit deren Hilfe die Abbildung definiert wird: sie charakterisiert den Bildraum als Erzeugnis der Bilder dieser Basis, und unterscheidet ihn von einem auf andere Weise erzeugten Vektorraum, der dieselben Elemente besitzt (und daher mit dem ersten identisch ist).

- Eine Darstellungsmatrix einer Abbildung verwendet sie zur Beschreibung des Bildraums der Abbildung.

**Zu den Strategien und Orientierungsmerkmalen im Interviewgespräch:**
Frau Beck setzt sich mit der Maschine als Modell für einen Vektorraum intensiv aus einander. Sie orientiert sich dabei einerseits am $\mathbb{R}^n$ als Prototyp für einen Vektorraum, andererseits an der Idee, dass ein Vektorraum Unterstrukturen besitzt, die 'erzeugt' werden, und die sie zunächst mit der Vokabel 'Ideal' dann mit 'Untervektorraum' bezeichnet. Diese Vorstellung des Erzeugens wird sicherlich durch die Vorgabe der Maschine, welche aus vier Grundfarben andere Farben produzieren soll, begünstigt. Einerseits versucht Frau Beck sofort einen Spalten- oder Zeilenvektor zu konstruieren, andererseits spricht sie von dem Erzeugnis eines Vektors wie bei einem Ideal, verwendet also unmittelbar nach einander sehr verschiedene Vorstellungen als Referenzkontexte. Die Wahl der Übertragung, wie die Maschine als ein Vektorraum gedeutet werden kann, zeigt, dass Frau Beck dem Referenzkontext der Unterstrukturen des Vektorraums Vorrang gibt, denn die Elemente des Vektorraums stehen zwar im Zusammenhang mit Zahlentupeln, weichen von diesen jedoch ab. Die Idee des Erzeugens bezieht Frau Beck z.T. auf den gesamten Raum, z.T. auf seine Unterräume, die dann jedoch als Elemente, nicht als Teilmengen in Erscheinung treten. Diese Konstruktion ist also widersprüchlich.

In diesem ersten Gesprächsteil entwickelt Frau Beck ein in mehrfacher Hinsicht abstraktes Objekt zur Modellierung der Farbmaschine: Zunächst identifiziert sie den Produktionsprozess einer Farbe mit dem Produkt. Damit vollzieht sie eine Verdinglichung. Das ist allerdings in zweifacher Hinsicht kein kognitiv anspruchsvoller Vorgang: Erstens ist dieses Produkt ein konkretes Objekt aus der realen Welt; zweitens ersetzt Frau Beck den Produktionsprozess, ohne ihn wirklich zur Kenntnis zu nehmen. Dies wird deutlich an ihrer Vorstellung, dass man für der Herstellung jedes Farbtons eine eigene Maschine braucht. Die fertigen Farbprodukte im großen Mischbehälter unterzieht Frau Beck einem zweiten Abstraktionsvorgang, indem sie diejeinigen, die sich nur in der Quantität unterscheiden, identifiziert. Auf der Ebene der Farbenwelt ist diese Abstraktion wiederum nicht anspruchsvoll, da ihr 'abstraktes' Objekt eine alltagsweltliche Kategorie ist, die Farbe im Sinne von Farbton. Auf der Ebene der 4-Tupel ist der Abstraktionsschritt schwieriger, denn hier identifiziert sie 4-Tupel, deren Koordinaten dasselbe Mischverhältnis darstellen, d.h. die paarweise durch die Multiplikation mit einem Skalar in einander überführt werden können. Die Zusammenfassung solcher 4-Tupel zu einem einzigen mentalen Objekt ist eine Vereinigung von Objekten, welche dadurch noch erschwert wird, dass Frau Beck kein Zeichen hat, welches dieses Objekt von gewöhnlichen 4-Tupeln unterscheidet. Ein solches Zeichen ist die Darstellung eines 4-Tupels in projektiven Koordinaten $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, das ihr in ihrem Studium aber noch nicht begegnet ist. Eine weitere Abstraktion besteht darin, aus diesen mentalen Objekten eine Menge zu konstruieren. Sie fasst diese als Vektorraum auf, ohne jedoch wesentliche Details zu beachten. Dazu gehört das Problem, dass es keinen Nullvektor gibt, vor allem aber die Tatsache, dass sie keine skalare Multiplikation und keine Addition definiert. Die Sichtweise, einen Vektorraum als Menge zusammen mit zwei Verknüpfungen zu verstehen, ist ein Abstraktionsschritt, den sie nicht vollzieht.

In ihrem Zugang zu der Aufgabe sucht Frau Beck in kreativer Weise mathematische Begriffe und Strukturen, die Analogien zu der vorgegebenen Farbproduktion beinhalten und diese Farbenwelt beschreiben können. Weil diese mathematischen Beschreibungen nicht vollständig übertragbar sind, passt Frau Beck sie dadurch an, dass sie die formalen Begriffe und Zeichen mit etwas anderen Bedeutungen versieht als üblich. Ihre Vorgehensweise ist einer ersten Phase des mathematischen Forschens ähnlich. Sie gelangt nicht bis zu dem Punkt, wo sie ihre intuitiven, eher vagen Bedeutungszuweisungen klar auf einander abstimmt. So wechselt sie zwischen einem Tupel als Beschreibung der Qualität und als Beschreibung der Quantität einer Farbe, ohne die Inkonsistenz zu bemerken. Frau Becks Vorgehen ist inhaltlich begrifflich, als sie versucht, das Phänomen der Maschine auf mathematische Strukturen und Begriffe zu beziehen. Dabei bestimmen die Phänomene der Farbenwelt die Wahl ihres Referenzkontextes für einen Vektorraum und die Wahl der Bedeutungen der verwendeten Zeichen: Widersprüche zu den vertrauten Darstellungen in Zahlentupeln beeinträchtigen Frau Beck nicht, sondern diese Darstellungen haben die ihnen von Frau Beck neu zugeordneten Bedeutungen, nicht die im $\mathbb{R}^n$ üblichen. Dies ist bei der Aussage $(0\ 0\ 2\ 0) = (0\ 1\ 0\ 1)$ besonders auffälllig. Diese neuen Bedeutungen stehen Frau Beck nicht im Weg in ihrer Deutung der Begriffe 'linear abhängig' und 'Basis', da sie diese inhaltlich überträgt. In dieser Überlegung geht sie im Gegensatz zu ihren ersten Antworten von den Bedeutungen innerhalb eines mathematischen Vektorraums aus und transferiert sie in einem Umfang auf die Farbmaschine, der hier zwar möglich ist, aber nur als theoretische Überlegung Sinn gibt.

Im zweiten Teil des Interviews orientiert sich Frau Beck vielfach an Detailfragen, zu deren Lösung sie sich im Rahmen von Manipulationsmöglichkeiten von Zeichenkombinationen bewegt. So untersucht sie die Frage, ob $f$ eine lineare Abbildung sein kann, anhand eines Beispiels, das sie zunächst für ein Gegenbeispiel hält. Bei dem Versuch, das gewählte Polynom mit Hilfe der Polynome $x + 1$ und $2x$ darzustellen, stellt sie keine grundsätzlichen Überlegungen an, wie ein Ansatz aussehen müsste. Ein anderes Beispiel für das Denken in Details ohne Konzepte ist Frau Becks Rechnen mit Matrizen. Sie wendet hier diagrammatisches Denken an, auch wenn sie nicht ganz zum Ziel kommt: Sie erfindet eine Operationsregel, wie man mit Hilfe einer geeigneten Matrix die Bilder von Vektoren unter einer gegebenen linearen Abbildung bestimmen kann. Dabei berücksichtigt sie wesentliche Strukturmerkmale eines Vektorraums und einer linearen Abbildung, nämlich das Prinzip der Stufung des linearen Kombinierens in eine Vervielfachung und eine anschließende Addition und seine Respektierung durch durch die lineare Abbildung. Frau Beck wird hier von einem begrifflichen Verständnis geleitet. Auf der anderen Seite ignoriert sie in ihrer Diagrammmanipulation wesentliche Strukturmerkmale des Diagramms selbst, denn sie bindet die Bedeutung der Zeilen bzw. Spalten der Matrix nicht korrekt ein, ja, sie scheint diese gar nicht zu berücksichtigen. Sie validiert ihr 'Rezept' durch Vergleich der Rechenergebnisse beim Anwenden ihrer Matrixrechnung und beim Berechnen des Bildes ohne die Matrix. Auf der Ebene der Konzeption einer Matrix reflektiert sie ihr Vorgehen jedoch nicht und erkennt daher nicht, dass ihr Rezept zur Anwendung einer Matrix nur bei Matrizen bestimmten Typs, nämlich bei Matrizen in Diagonalform, zum richtigen Ergebnis führt.

Bei dem Bemühen den Begriff des Vektorraums für sich zu füllen und zu strukturieren zeigt Frau Beck ein ausgeprägtes Denken in Begriffen. Hier spielt vor allem die Basis eine große Rolle. Dies trifft trotz der Tatsache zu, dass sie die Bedeutung des Begriffs 'Basis' überstrapaziert und Unterscheidungen vornimmt, die in diesem Begriff nicht enthalten sind. Hier löst sie sich von der Ebene einzelner Details und sucht nach übergeordneten Prinzipien. Sie spricht nicht explizit über die Ordnung, die sie sich zurechtlegt, sondern diese wird an ihrer Wortwahl indirekt sichtbar. Das kann bedeuten, dass sie sich dieser eigenen Ordnung nicht oder nur vage bewusst ist. Sie überprüft ihre Vorstellungen nicht an den gegebenen Definitionen, so dass sie nicht bemerkt, dass sie die Darstellung einer Abbildung als Darstellung eines Vektorraums verwendet, und auch nicht bemerkt, dass ihre Sichtweisen, gleichzeitig mehrere Basen eines Vektorraums zu erkennen und dennoch eine dieser Basen als die einzige zu bezeichnen, sich widersprechen.

Die Thematisierung des Begriffs 'Basis' durch die Interviewerin bringt Frau Beck im Interview von der Detailebene eines Beispiels auf die begriffliche Ebene, auf der sie sich im weiteren Verlauf des Interviews mit einer Ausnahme, nämlich bei der Suche nach einer Anweisung zur Anwendung der Matrix, bewegt. Dieser Begriff der Basis scheint nun zu einem Referenzkontext für die anderen auftretenden Begriffe zu werden.

Frau Becks Vorstellung von dem Begriff 'Basis' ist nicht ganz schlüssig. Sie beinhaltet zu verschiedenen Zeiten:

- Eine Basis ist ein Erzeugendensystem eines Vektorraums.

  (Das Problem, dass nicht jedes Erzeugendensystem eine Basis ist, wird im Zusammenhang mit der linearen Abbildung nur am Rande angesprochen. Es wirkt sich in diesem Gespräch nicht aus, weil alle auftretenden Erzeugendensysteme linear unabhängig sind.)

- Das Erzeugen eines Vektors aus anderen geschieht durch ein 'Kombinieren' dieser anderen Vektoren, welches Frau Beck zunächst nicht konkretisieren kann.

- Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem eines Vektorraums.

- Eine Basis ist eine Grundlage, auf die eine Strukturierung eines Vektorraums zu einem bestimmten Zweck aufgebaut werden kann. In diesem Sinne wird eine Basis immer als Werkzeug eingesetzt.

Beispiele für Aufgaben von Basen, die im Interviewgespräch auftreten, sind:[74]

| Basis | Aufgabe | erzeugter VR |
|---|---|---|
| $x+1, 2x$ | dient der Def. von $f$ | $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ |
| $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | gibt den Polynomen 'Namen' | $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (gelesen als Spalten) |
| $1, x$ | dient zweiter Def. von $f$ | $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ |
| $(1, -\frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2})$ | dient zweiter Def. von $f$ (Notation für $1, x$ auf Grundlage der Basis $x+1, 2x$) | $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ |
| $(1,0), (0,1)$ | gibt den Vektoren des $\mathbb{R}^2$ 'Namen' | $\mathbb{R}^2$ |
| $(1,0), (0,4)$ | erzeugt Bildraum von $f$ bzgl. 1. Def. | $\mathbb{R}^2$ als Bildraum: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (gelesen als Zeilen) |
| $(1,-2), (0,2)$ | erzeugt Bildraum von $f$ bzgl. 2. Def. | $\mathbb{R}^2$ als Bildraum: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (gelesen als Zeilen) |

Obwohl Frau Beck erkennt, dass ein Vektorraum verschiedene Basen hat, sind die Funktionen, die diese Basen ausüben, in ihren Augen nicht oder nur begrenzt austauschbar. In Frau Becks Vorstellung scheint jede 'Basis' einen eigenen Vektorraum zu erzeugen. Dass die Vektorräume, die verschiedene Basen desselben Raums erzeugen, als Mengen identisch sind, ist ihr bewusst, aber sie 'benennt' diese Räume unterschiedlich, nämlich nach der jeweils erzeugenden Basis. Die Bezeichnungen dieser Räume charakterisieren die Tätigkeit, in deren Zusammenhang 'die' erzeugende Basis verwendet wird. Im Grunde strukturiert Frau Beck ihr mentales Bild von einem Vektorraum nach verschiedenen Sichtweisen auf den Raum oder Tätigkeiten in oder mit dem Raum. Diese werden jede durch eine Basis gekennzeichnet. Diese Basen scheinen ausschließlich als Werkzeug zur Lösung der jeweiligen Aufgabe eine Daseinsberechtigung und nur in diesem Zusammenhang Bedeutung zu haben. Dies

[74]In der vierten Zeile der ersten Spalte der nachfolgenden Tabelle ist diejenige Basis angegeben, die Frau Beck berechnet. Sie liest diese später falsch ab.

Die in der Tabelle zuletzt aufgeführte Matrix entspricht Frau Becks Angaben. Die tatsächlich erfolgte Notation in Spalten statt Zeilen erfolgte nur auf Aufforderung der Interviewerin hin.

wird deutlich an ihrem Einwand, dass 'die' Basis des $\mathbb{R}^2$ die Standardbasis ist, und die Bilder der Polynome 1 und $x$, welche eine Basis des Bildraums bilden, nicht als Basis des $\mathbb{R}^2$ in Frage kommen. Frau Beck berücksichtigt nicht, dass einer Basis unter anderem Blickwinkel eine andere Funktion zugeschrieben werden kann. Die Darstellung eines Vektorraums mit Hilfe einer erzeugenden Basis passt zu den Beschreibungen $P_B$, die das Erzeugen betonen. Andererseits passt die Differenzierung eines Vektorraums in verschiedene Räume nach zugrunde gelegter Basis zu einer statischen Sichtweise, in der festgelegte Komponententypen den Raum charakterisieren. Dies würde zu den Beschreibungen $P_{K_1}$ und $P_{K_3}$ passen.

Leitideen für den Begriff der linearen Abbildung sind bei Frau Beck zunächst die folgenden:

- Eine 'Abbildung' ist ein einzelnes Element oder die Gesamtmenge der Elemente des Zielraums einer Zuordnung, die beim Vorgang des Zuordnens verwendet werden. Den Begriff 'Abbildung' unterscheidet Frau Beck nicht vom Begriff 'Bild'.[75]

- Lineare Abbildungen respektieren die Verknüpfungen in den Vektorräumen, zwischen denen abgebildet wird. Die Idee des Verknüpfens ist sehr allgemein: Im Polynomraum bezieht sie sie nicht auf die Addition, im $\mathbb{R}^2$ wird dies nicht sichtbar.

Diese beiden Vorstellungen stehen nicht im Einklang mit einander, da sie von grundsätzlich verschiedenem Charakter von Abbildungen ausgehen: Im ersten Fall ist eine lineare Abbildung das Ergebnis einer Handlung, im zweiten ist sie das Handeln selbst. Eine Verbindung von beiden Ideen bringt Frau Becks Matrixvorstellung:

In ihrer Darstellung der linearen Abbildung $f$ mit Hilfe von Matrizen verwendet Frau Beck als Erstes die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

als Zeichen für die "Abbildung" als Bildbereich von $f$. Diese Darstellung mag von der Idee motiviert sein, dass das Bild von $f$ in einer Basis repräsentiert ist.

Frau Beck führt diesen Zusammenhang durch eine Verfeinerung der Notation aus. Nun wird die lineare Abbildung $f$ dargestellt mit der Zeichenkombination

$$\begin{array}{cc} {\scriptstyle x+1} & {\scriptstyle 2x} \end{array} \atop \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung impliziert die Identifizierung von zwei Vektorräumen über eine bestimmte Vorstrukturierung. Diese Strukturierungen sind die eigentlichen Informationsträger über die Abbildung $f$. Das Wesentliche an einer linearen Abbildung

[75] Diese Gleichsetzung von 'Abbildung' mit 'Bild' kommt einer Verdinglichung des Prozesses des Abbildens gleich. Diese verliert den Zusammenhang zum Urbild und ist daher keine adäquate Repräsentation der mathematischen Abbildung. Eine andere Form von Verdinglichung einer Funktion findet man bei Sfard (1991): Hier ist der letzte Schritt im reification-Prozess, die Funktion als Menge geordneter Paare anzusehen, d.h. hier wird der Prozess des Herstellens einer Verbindung zwischen Elementen zweier Mengen verdinglicht.

ist somit eine Darstellung eines Vektorraums, nämlich des Bildraums, in einer bestimmten Struktur, d.h. bzgl. einer bestimmten Basis. Der Definitionsraum erhält hier von Frau Beck keine besondere Strukturierung, denn sie verwendet die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ zwecks Bezeichnung einer bestimmten Basis des Polynomraums, die jedoch in der eigentlichen Darstellung nicht vorkommt. Hier sind die Wirkungsweisen von Handlungen ersetzt durch statische Strukturen. Zwar steht $f$ als Name für die Abbildung über dem Pfeil und bezeichnet somit eine Tätigkeit, aber der Informationsträger ist die zweite Matrix, welche das Bild von $f$ als Ergebnis des Zuordnens darstellt. Frau Beck verdinglicht somit den Abbildungsprozess auf zwei verschiedene Weisen, die sie in unscharfer Weise mit einander vereinbart: Sie ersetzt den Abbildungsvorgang durch sein Ergebnis, in einer vereinfachten Fassung durch sein Bild, in der ausführlicheren Version durch die Beziehung zwischen Urbild und Bild, die durch die Abbildung hergestellt wird.

Zum Begriff des Vektorraums werden von Frau Beck verschiedenen Konzepte angedeutet:

- Ein Vektorraum ist eine Menge von Elementen, die in bestimmten Beziehungen zu einander stehen.

  Dies zeigt sich in ihrer Suche nach einer Beziehung zwischen $x + 1$, $2x$ und $x + 2$.

- Die Menge der $n$-Tupel ist ein Vektorraum.

  Im ersten Modellierungsansatz für die Farbmaschine wählt Frau Beck 4-Tupel zur Darstellung ihrer 'Vektoren'.

- Ein Vektorraum ist eine Menge, deren Elemente durch Vervielfachung 'Untervektorräume' bilden.

  Dies ist die einzige Eigenschaft eines Vektorraums, die in der Interpretation von Farbtönen als Vektoren zur Geltung kommt.

- Ein Vektorraum ist eine Menge, in der es verschiedene Basen - Erzeugendensysteme - gibt. Es bleibt unklar, welche der beiden folgenden Vorstellungen vorherrschend ist:

  - Die Beschreibungen der Elemente eines Vektorraums mit Hilfe verschiedener Basen charakterisieren den Vektorraum in unterschiedlichen Rollen.
  - Die Beschreibungen der Elemente eines Vektorraums mit Hilfe verschiedener Basen charakterisieren verschiedene Vektorräume.

- Ein Vektorraum als Bildraum einer Abbildung ist charakterisiert als Erzeugnis der Bilder der Basis, welche zur Definition der Abbildung verwendet wird.

- Die Operationen in einem Vektorraum spielen eine untergeordnete Rolle, obwohl sie in unmittelbarem Zusammenhang zum Prinzip des Erzeugens stehen: Frau Beck äußert die vage Vorstellung, dass dieses durch Anwendung von Verknüpfungen geschieht, ohne dass sie diese näher bezeichnet.

> In ihrer Modellierung der Farbmaschine fehlt die Multiplikation mit Skalaren, da alle Vielfachen eines 4-Tupels als ein Objekt identifiziert werden. Das Mischen von Farben verwendet sie im Zusammenhang mit linearer Abhängigkeit implizit als Verknüpfung. Im Polynomraum stellt Frau Beck die Verknüpfung mit dem Zeichen '$\circ$' dar, weil sie nicht weiß, welche konkreten Verknüpfungen ihr dort zur Verfügung stehen.

Frau Beck baut Vorstellungen von Vektorräumen auf einer inhaltlichen und einer formalen Ebenen zugleich auf. Auf der Ebene von formalen Darstellungen zeigt sie nur sehr vage Kenntnis der grundlegenden Begriffe wie Linearkombination. Zugleich scheinen Frau Becks Vorstellungen vom Vektorraumbegriff in einem begrifflich-strukturierenden Zugang bedeutungshaltige, sinnvolle Bestandteile zu enthalten, die jedoch kein in sich stimmiges Bild abgeben. Dazu gehört die Idee von Unterstrukturen, welche durch Begriffe wie 'Untervektorraum', 'Ideal', 'Erzeugnis', 'linear (un)abhängig', 'Basis' gekennzeichnet werden. Dazu gehört auch eine allgemeine Ideen von Strukturen, die nicht in ein Gesamtkonzept eingebunden sind. Ein Beispiel hierfür ist die Idee der Existenz von Untervektorräumen, die jeder aus den Vielfachen eines Vektors bestehen, die sie im nächsten Moment als Elemente des Vektorraums behandelt. Ein anderes Beispiel ist die Tatsache, dass sie die zuletzt genannten Begriffe inhaltlich sinnvoll deutet, mit ihnen in konkreten Situationen jedoch nicht sinnvoll umgehen kann, weil sie die Operationen in einem Vektorraum nicht als wesentliche konstituierende Merkmale dieser Begriffe zur Kenntnis nimmt. Ein drittes Beispiel schließlich die Funktion von Basen. Frau Beck lässt nebeneinander die Aussagen stehen, dass ein Vektorraum verschiedene Basen besitzt und eine dieser Basen 'die' Basis des Vektorraums ist. Welche diese Position zugeschrieben bekommt, hängt von dem jeweiligen Blickwinkel auf den Vektorraum ab. Mit anderen Worten verwendet Frau Beck denselben Ausdruck in unterschiedlichen Strukturzusammenhängen mit unterschiedlichen Bedeutungen.

So ist Frau Becks Idee von der Struktur eines Vektorraums nicht darauf reduziert, dass ein Vektorraum durch eine Basis strukturiert wird. Sie erkennt, dass es weitere Basen und dass es vielfältige Sichtweisen auf den Vektorraum gibt, die sie mit den verschiedenen Basen verbindet. Allerdings geht sie in ihrem Bedürfnis, die Vielfalt der Vektorraumstruktur zu ordnen, einen Schritt zu weit mit dem Ergebnis, dass sie diese Vielfalt einschränkt: Sie sieht zwar verschiedene Basen und verschiedene Verwendungsmöglichkeiten von Basen für den Mathematiker, aber sie erkennt nicht oder ignoriert, dass jede Basis jede dieser Aufgaben wahrnehmen kann. Zudem führt ihre Ordnung dazu, dass sie ein unnötig kompliziertes Bild von einem Vektorraum bekommt, das ihre Transfermöglichkeiten von Erkenntnissen und Vorgehensweisen beschränkt.

Welche Strukturierung in Frau Becks Denken jeweils Vorrang bekommt, scheint von den Umständen abzuhängen. So modelliert sie die Farbmaschine nicht, indem sie von einer bestimmten Vektorraumvorstellung ausgeht und ihre Merkmale bei der Farbmaschine sucht, sondern indem sie von der Maschine ausgehend Strukturen findet, die sie in der Sprache von Vektorraummerkmalen darstellt. Dieses Vorgehen entspricht einer Elementtypvorstellung, da sie Strukturen der gegebenen Situation erfasst und erst anschließend in ihnen Vektorraumstrukturen wiederfindet.

Frau Beck übersetzt zwischen verschiedenen Kontexten und Betrachtungsebenen nur selten. Sie transferiert zwischen den formalen Darstellungen und deren Bedeutungen innerhalb des Farbmaschinenmodells und benennt hier die Grenzen der Übertragbarkeit sehr deutlich. Aber sie wechselt nicht von sich aus zwischen der Ebene der Betrachtung von Details in formalen Repräsentationen und der Ebene der Strukturen, welche durch das Basiskonzept angesprochen sind. Auf welcher Ebene sie jeweils denkt, scheint allein von äußeren Impulsen wie Aufgabenstellung oder Anregungen durch die Interviewerin abzuhängen. Nur mit Matrizen geht Frau Beck auf beiden Betrachtungsebenen um, allerdings z.T. ohne diese Beschreibungen oder Handlungen in Beziehung zu einander zu setzen.

Strategien zur Selbstüberprüfung setzt Frau Beck auf der Detailebene z.T. recht intensiv ein, bei begrifflichem Zugang zu einer Thematik zeigt sie dergleichen jedoch nicht.

Frau Beck zeigt in diesem Interviewgespräch starke Affinitäten zum prädikativen Denken, denn sie ersetzt weitgehend Handlungen durch deren Ergebnisse. Ein Einfluss dieses Denkens auf ihre interne Konstruktion von Repräsentationen ist insbesondere, dass sie die Operationen in einem Vektorraum in einem Maße vernachlässigt, dass sie das Bilden von Linearkombinationen nur mit der unpräzisen Bezeichnung 'Kombinieren' versieht, ohne zu wissen, in welcher Art und Weise dies geschieht. Zugleich bildet Frau Beck Vorstellungen über ein umfangreiches Beziehungsnetz zur Strukturierung eines Vektorraums mit Hilfe von Basen aus.

### 3.3.4 Deutung des Vektorrauminterviews mit K. Rolle

Das Gespräch mit Frau Rolle über Vektorräume gliedert sich in zwei Teile. Thema des ersten Teils ist eine Maschine zum Mischen von Farben, die mit Hilfe eines Vektorraums modelliert werden soll. Nach der ersten Diskussion, wie eine Übertragung der Maschine auf einen Vektorraum aussehen kann, werden die Begriffe 'linear abhängig' und 'linear unabhängig' für die Maschine und für den $\mathbb{R}^4$ erklärt. Die weitere Bedingung, dass die Grundfarben abhängig sein sollen, führt zu dem Problem, dass zwei verschiedene Spaltenvektoren als gleich bezeichnet werden. Anschließend gibt es eine Erörterung[76] von Fragen im Zusammenhang mit dem Austauschen der Grundfarben: Eine neue Farbe ist nur bekannt als bestimmte Farbmischung aus drei weiteren Farben, die ihrerseits in ihrem Mischverhältnis in den ursprünglichen Grundfarben gegeben sind. In diesem Gesprächsabschnitt wird mit Hilfe einer Matrix das Mischverhältnis der neuen Farbe in den ursprünglichen Grundfarben berechnet. Die zugehörige Anwendung der Matrix auf einen bestimmten Spaltenvektor wird als Darstellung der entsprechenden Linearkombination der Spaltenvektoren verstanden:

$$3\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

[76]Diese Diskussion wird nicht im Einzelnen analysiert. Sie kann aber im Transkript im Anhang nachgelesen werden.

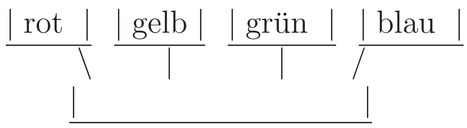
stellt dieselbe Rechnung dar wie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Thema des zweiten Teils des Interviewgesprächs ist eine lineare Abbildung zwischen einem Polynomraum und dem $\mathbb{R}^2$. Die Abbildung ist durch Angabe zweier Bilder gegeben. Als Erstes ist zu überlegen, ob sie dadurch ausreichend definiert ist. In einer längeren Auseinandersetzung wird zunächst die Frage diskutiert, was das '$x$' bedeutet und wie es überhaupt eine Abbildung zwischen so verschiedenen Objekten wie Termen und 2-Tupeln geben kann. Im nächsten Schritt wird diskutiert, auf welche weiteren Bilder die gegebenen Informationen Rückschlüsse zulassen, und wie diese Bilder konkret aussehen. Im Zusammenhang mit dieser Diskussion wird eine weitere lineare Abbildung konstruiert, die in den analysierten Transkriptausschnitten nicht vorkommt[77]. Nachdem die Abbildung auf den ganzen Polynomraum fortgesetzt worden ist, wird das logische Problem erörtert, was noch zu tun ist, um die Linearitätseigenschaften der Abbildung zu beweisen. Als letzte Aufgabe wird eine Darstellungsmatrix der Abbildung gegeben, deren Wirkungsweise die Studentin anhand eines Beispiels erklären soll.

### Farbmaschine

Zu Anfang des Gesprächs wird die Aufgabenstellung soweit geklärt, dass eine Farbmaschine (a)




Farben mischt, indem sie mit Hilfe der Öffnungszeiten der Verbindungsrohre die Mengen der zufließenden Farben computergesteuert regelt. Diese Situation soll mit Hilfe eines Vektorraums modelliert werden.

Transkriptausschnitt: (VR(1), Rolle) 26-46

26 R: Also theoretisch also ich nehm z.B. Vektor $x$, dann würde ich z.B. $r$ mal den
27 Inhalt von $r$ nehmen, also von rot
28 I: Ja.
29 R: plus $s$ mal gelb plus $t$ mal grün plus $y$ mal blau
30 (b) * $\vec{x} = r \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ *
31 R: Aber das würde ich eigentlich auch wieder nicht so sagen. Also das wäre für mich
32 jetzt das Simpelste, aber weil dann hätte ich kein also, von der Schule jetzt her, weil
33 man da (zeigt auf (b)) immer irgendwie einen ausdenken könnte, den hätte ich jetzt
34 im Augenblick nicht.

[77]Siehe B.6.

I: Hm.
R: Aber das ist das, was mich von der Schulmathematik her jetzt stört.
I: Ja. Vielleicht fangen wir mal noch ein bißchen einfacher an, einen Schritt weiter vorne, was sollen überhaupt die Vektoren sein in dem Vektorraum?
R: Was die Vektoren bed, also du meinst jetzt hier das hier (zeigt in (b) auf die Spaltenvektoren)
I: Also wir haben jetzt hier dieses Modell (zeigt auf (a)) und was in diesem Modell soll den Vektoren in dem Vektorraum entsprechen? (2 Sek) Wir haben hier diese Maschine
R: $x$ ist das Komplette (zeigt auf ganz (a)), was ich da raus haben möchte, und $r$ oder $s$ oder $y$ sind immer die Regulatoren, wie lange man was öffnet, damit z.B. rot oder gelb oder grün oder blau reinkommt.
I: Hm.
R: So stelle ich mir das jetzt vor.
I: Und ne Anweisung, die der Computer, die der geben würde, das wäre ja so, weiß ich, n Tupel von Zahlen.
R: Ja wir hätten ja jetzt z.B., $x$ wäre z.B. drei null eins null oder so was, (ergänzt (b) zu:)

$$* \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = r \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \phantom{0} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \phantom{0} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \phantom{0} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \phantom{0} \end{pmatrix} *$$

I: Ja, genau. So was würde der Computer angeben, drei null eins null?
R: Ja genau, das ist die komplette Farbe, die rauskommen soll, z.B.. Und dann hätten wir jetzt, z.B. rot ist dann null eins null eins oder sowas und gelb ist dann eins eins eins eins und grün ist null null (ergänzt (b) zu:)

$$\text{(b')} * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \phantom{0} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \phantom{0} \end{pmatrix} *$$

Ah, ich hätt es mir auch einfacher machen können, ne? (lacht) Ein bißchen doof vorgegangen.
I: Ja.
R: Wenn ich jetzt hier, ne, Basisvektoren genommen hätte.

Frau Rolles erster Ansatz (Zeilen 26-30) ist der Versuch, einen Vektor $\vec{x}$ als Summe aus vier angedeuteten Spaltenvektoren darzustellen, die jeweils mit einer Variable als Faktor versehen sind, die aber noch keine Komponenten besitzen. Der Buchstabe $r$ bezeichnet verschiedene Dinge. Zum Einen steht er für rot bzw. den Behälter, in dem sich die rote Farbe befindet, zum Anderen für eine Mengenangabe von rot, nämlich einen bestimmten Anteil der vorhandenen roten Farbe. Der Spaltenvektor, mit dem der Buchstabe $r$ multipliziert wird, steht für den Inhalt des ersten kleinen Farbtopfs. Entsprechendes gilt für die Buchstaben $s, t, y$ und die Farben gelb, grün und blau. Der Vektor $x$ bezeichnet dann sicherlich eine Farbe, welche sich aus rot, gelb, grün und blau zusammensetzt.

Frau Rolle ist selbst nicht recht zufrieden mit ihrer Antwort (Zeilen 31-36). Was sie damit meint, dass man in der Schule immer ‘einen ausdenken’ könnte, bleibt offen. Die Gleichung erinnert an eine Ebenengleichung, deren zwei Richtungsvektoren ebenso mit Skalaren versehen werden, wie die Vektoren auf der rechten Seite von Frau Rolles Gleichung. Um irgendeinen Punkt, dessen Ortsvektor $\vec{x}$ zu der Ebene zeigt, zu berechnen, muss man für die Skalare beliebige konkrete Werte einsetzen. Vielleicht denkt sie aber auch an das Aufstellen einer Ebenengleichung, wo man Richtungsvektoren auswählen kann. Ihr Problem ist hier vermutlich, dass sie noch nicht sieht, in welcher Weise ein Spaltenvektor mit dem Zufluß aus einem der kleinen Behälter in Beziehung gesetzt werden kann.

Die Frage der Interviewerin (Zeilen 37-38), was überhaupt die Vektoren in dem Vektorraum sein sollen, präzisiert Frau Rolle, indem sie auf die Spalten in (b) zeigt. Diese sieht sie vermutlich als Spaltenvektoren an, welche die Elemente des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ für ein noch zu spezifizierendes $n$ sind. Auf die Nachfrage der Interviewerin, was in der Situation der Maschine den Vektoren entspricht, reagiert sie jedoch mit einer Erklärung (Zeilen 44-46), die sich ausschließlich auf alle anderen Bestandteile ihrer Gleichung bezieht, während die leeren Spalten keinen Kommentar erhalten. Ihre Aussage, dass $x$ das 'Komplette' ist, was sie 'raus haben' möchte, und ihre Handbewegung, die die ganze Zeichnung der Farbmaschine einschließt, kann bedeuten, dass sie mit $x$ den gesamten Prozess oder die produzierte Farbe meint. In jedem Fall ist dieses Objekt das Einzige, welches der Bezeichnung 'Vektor' entspricht. In dieser Erklärung deutet sie zudem die Koeffizienten $r, s, y$ nochmals, nämlich als 'Regulatoren' der Öffnungszeiten für die einzelnen Rohre. Wie schon zuvor ordnet Frau Rolle hier zunächst die Koeffizienten den vier kleinen Behältern zu, wie auch die Wahl des ersten Buchstabens andeutet, denn sie sagt beim Aufstellen ihrer Gleichung, dass sie "$r$ mal den Inhalt von $r$, also von rot" nimmt. Die Namen der Koeffizienten geben also die Information, für welchen Behälter sie jeweils die Öffnungszeit angeben. Die Anfangsbuchstaben der nächsten Farben eignen sich nicht weiter als Kennzeichnung, da diese Farben gelb und grün sind. Durch die Wahl der nächsten Koeffizienten nach dem Alphabet ist dennoch eindeutig rekonstuierbar, auf welchen Behälter sich diese Buchstaben beziehen. Frau Rolle konzentriert hier die gesamte relevante Information über die Maschine in den vier Koeffizienten. Sie braucht bei dieser Zuordnung keine bestimmten Vektoren, mit denen diese Buchstaben multipliziert werden, um den einzelnen Regulator mit dem jeweiligen Farbtopf eindeutig in Beziehung zu setzen. Dies funktioniert allerdings nur solange die Buchstaben nicht durch konkrete Mengenangaben ersetzt werden.

Die Bemerkung der Interviewerin (Zeilen 49-50), dass ein Computer Anweisungen als Tupel geben kann, ist Anstoss für Frau Rolle, nun doch eine konkrete Wahl für ihre Spaltenvektoren zu treffen. Sie entscheidet sich - vermutlich im Hinblick auf die vier Grundfarben - für vier Komponenten. Nach ihren Worten (Zeile 55) steht der linke Spaltenvektor für die Farbe, die produziert wird, nicht für die Anweisung, die zu ihrer Produktion führt. Bei der Wahl, die sie für die Koordinaten der anderen Spaltenvektoren trifft, ist auch nicht ohne Rechnung zu erkennen, wie die Farbe $x$ produziert werden kann. Wiederum verwendet sie den Ausdruck 'komplett': Sie bezeichnet den ersten Spaltenvektor als 'die komplette Farbe', 'die rauskommen soll.' Dies impliziert die Vorstellung, dass die anderen auftretenden Farben nicht 'komplett' sind. Sie spielen hier nur die Rolle von Zutaten. Der Ausdruck „oder sowas" (Zeile 56) bei der Wahl der Koordinaten deutet auf Beliebigkeit hin. Allerdings sind die ersten drei Vektoren linear unabhängig, falls der dritte, bei dem sie abbricht, nicht gerade der Nullvektor werden soll. Die Verteilung der Komponenten mit Nullen oder nicht Nullen auf eine Weise, die die lineare Unabhängigkeit ohne weitere Rechnung sicherstellt, kann hier durchaus gezielt geschehen. Die Aussage zum Schluss (Zeile 62), dass Basisvektoren eine bessere Wahl gewesen wären, scheint zu implizieren, dass sie bei ihrer ersten Wahl nicht beabsichtigte, eine Basis des $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren. Allerdings ist es möglich, dass sie unter dem Begriff 'Basis' nur die Standardbasis versteht.

Im Weiteren wechselt Frau Rolle die gewählten Spaltenvektoren auf der rechten Seite durch die Standardbasisvektoren aus und bestimmt, wie der Vektor links erzeugt werden kann. Dies liefert die Darstellung (b")

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = \overset{3}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{0}{s} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{1}{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{0}{y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Interviewerin fragt nun, was die Begriffe 'linear abhängig', 'linear unabhängig', 'Basis', 'Erzeugendensystem' bedeuten.

Transkriptausschnitt: (VR(1), Rolle) 98-104

98 R: Also, ich mach erstmal linear unabhängig. Also linear unabhängig heißt jetzt,
99 dass sich kein Vektor mehr aus ner Kombination von den anderen erzeugen lässt.
100 Also so hab ich das immer gemacht. Also ich kann nicht durch eine Kombination
101 von den Vieren (zeigt in (b") auf die rechte Seite) auf den Nullvektor kommen. Das
102 ist dann linear unabhängig. Und linear abhängig ist dann, wenn ich z.B. aus Zweien
103 den Dritten erzeugen könnte (zeigt in (b") auf die rechte Seite). Aber geht jetzt
104 nicht. Weil ich schon Basisvektoren genommen habe.

Frau Rolle gibt hier zwei Beschreibungen des Begriffs 'linear unabhängig', nämlich dass kein Vektor sich aus den anderen erzeugen lässt und keine Kombination "aus den Vieren" den Nullvektor darstellt. Sie zeigt dabei auf die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^4$ in (b"). Die erste Beschreibung ist möglicherweise anschaulicher, sicherlich aber wenig geeignet für die Überprüfung oder gar den Nachweis der linearen Unabhängigkeit von gegebenen Vektoren, da sie einen vielfachen Aufwand gegenüber der Verwendung der zweiten Definition erfordert. Vielleicht meint Frau Rolle mit ihrer Äußerung, "so hab ich das immer gemacht" nur, dass sie diese Vorstellung verwendet, um in Aufgaben zur linearen Unabhängigkeit einen Ansatz zum Rechnen zu finden. Oder sie denkt nur an Beispiele von höchstens drei Vektoren, deren Koordinatendarstellung man leicht ansieht, wenn sich zwei durch einander darstellen lassen, der dritte sich aber nicht durch einen der beiden anderen erzeugen lässt. Kompliziertere Situationen hat sie wahrscheinlich in der Schule nicht kennengelernt. Lineare Abhängigkeit beschreibt Frau Rolle damit, dass man "aus Zweien den Dritten erzeugen" könnte, wobei sie auf die Vektoren in ihrer Gleichung weist. Sie macht darauf aufmerksam, dass das in diesem Fall nicht möglich ist, weil die Genannten Basisvektoren sind. Sie erläutert den Begriff nur an diesem Negativbeispiel von Basisvektoren, statt z.B. die fünf in (b") auftretenden Vektoren als positives Beispiel anzuführen.

Die Interviewerin fragt dann nach, was lineare Abhängigkeit in dem Farbmaschinenmodell bedeutet. Frau Rolle antwortet:

Transkriptausschnitt: (VR(1), Rolle) 111-117

111 R: Ja, das würd z.B. heißen, also sagen wir, rot, gelb, grün wäre linear abhängig,
112 dann könnte man blau wegfallen lassen, weil blau ja dann, also, den brauchte man
113 nicht unbedingt, ne, um was zu erzeugen. Also ich hab jetzt gerad, dass man ein
114 Erzeugendensystem. Da brauchte man das ja, also da brauchte man ein minimales,
115 wie soll ich das, kann man das sagen, ein minimales Erzeugendensystem?
116 I: Ja, das wäre dann ne Basis, ne, ein minimales Erzeugendensystem.
117 R: Aber ich brauch ja ne Grundbasis, um ne Farbe zu erstellen.

Frau Rolle schlägt hier den Fall vor, dass rot, gelb, grün linear abhängig sind, und schließt daraus, dass dann blau nicht gebraucht wird, "um etwas zu erzeugen". Sie verbindet die Eigenschaft 'lineare Abhängigkeit' mit der Eigenschaft, den ganzen Raum zu erzeugen. Vielleicht will sie sagen, dass aus der linearen Abhängigkeit von rot, gelb, grün folgt, dass sie ein Erzeugendensystem sind. Ihre Formulierung, "da brauchte man das ja" und der Hinweis auf ein minimales Erzeugendensystem zeigen, dass ihre Gedanken sich damit beschäftigen, welche Aufgaben im Zusammenhang mit linearer Abhängigkeit zu behandeln sind. Vielleicht erinnert sie sich, dass man aus einem Erzeugendensystem aus linear abhängigen Vektoren durch Weglassen bestimmter Vektoren ein minimales Erzeugendensystem konstruieren kann. Sie schließt hier: rot, gelb, grün sind linear abhängig. Also bilden nicht nur rot, gelb, grün, blau, sondern auch bereits rot, gelb, grün ein Erzeugendensystem. Frau Rolle wählt als Beipiel für lineare Abhängigkeit Farben, die ursprünglich in den Zuflussbehältern der Maschine sind, die also nicht erst gemischt werden müssen. Frau Rolle scheint die Idee des linearen Erzeugens, die ja auch in der Beziehung der linearen Abhängigkeit enthalten ist, überhaupt nur auf die Grundbausteine eines Vektorraums, aus denen der gesamte Raum konstruiert wird, zu beziehen. Diese Idee erklärt ihre Annahme, dass ein System von linear abhängigen Vektoren Erzeugendensystem des Vektorraums ist. Diese Vermutung wird auch durch ihre Darstellung der linearen Abhängigkeit im $\mathbb{R}^4$ gestützt, wo sie sie ebenfalls nur auf ein Erzeugendensystem bezieht, obwohl dieses als Basis ein ungeeignetes Beispiel ist.

Als die Interviewerin den Begriff der Basis als minimales Erzeugendensystem ins Spiel bringt, verwendet Frau Rolle die neue Bezeichnung "Grundbasis". Unter einer "Grundbasis" versteht sie offenbar die Farben, aus denen andere Farben gemischt werden. Der Begriff 'Basis' scheint Frau Rolle hierfür nicht auszureichen. Vielleicht verbindet sie mit dem Konzept eines minimalen Erzeugendensystems, welches die Interviewerin hier als 'Basis' bezeichnet, ein System, welches aus einem größeren Erzeugendensystem gewonnen wird, und somit nicht 'das' ursprüngliche ist. Die "Grundbasis" des Farbenraums hingegen besteht aus den ursprünglichen vier Farben in den Zuflussbehältern.

Nachdem die Interviewerin vorgeschlagen hat, dass das Grün, das als Grundfarbe gewählt worden ist, aus dem Blau und dem Gelb in bestimmter Weise erzeugt werden kann, wird festgestellt, dass nun gilt:

Transkriptausschnitt: (VR(1), Rolle) 163-177

$$\begin{array}{cccccccccc} (c') * & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & * \\ . & \text{gr} & & \text{gelb} & & \text{blau} & & \text{gr} & \end{array}$$

R: Ja.
I: Ja, da haben wir ein Problem.
R: (?) besser nicht so gewählt haben.
I: Nee, das, ich hab das absichtlich so mit den Farben gemacht, dass wir auf das Problem stoßen. Es gibt jetzt ne andere Möglichkeit, wie wir das als Vektorraum deuten könnten. Nicht die Farbe, die da unten rauskommt (zeigt in (a) auf den Mischbehälter), hat dieses 4-Tupel (zeigt in (b") auf den ersten Spaltenvektor), sondern das 4-Tupel ist die Anweisung, wie lange diese (zeigt in (a) auf die Zuflussbehälter) geöffnet sein sollen. Diese (zeigt in (c') auf den ersten und den letzten Vektor) Anweisungen sind verschieden. Aber die Farben, die sie erzeugen, sind gleich.
R: Also quasi, dass ich dann hier immer hätte, also die Zeile (zeigt in (b") auf die erste Zeile) wäre dann immer rot, gelb, grün, blau (zeigt jeweils in (b") eine Zeile), ja?

Frau Rolle kommentiert das Problem damit, dass es besser gewesen wäre, diese Wahl nicht zu treffen. Sie bezieht sich damit auf die frühere Äußerung der Interviewerin für die Wahl des Grün als erzeugbar aus Gelb und Blau. Frau Rolle stellt sich hier nicht der sachlichen Herausforderung, die der scheinbare Widerspruch bietet, sondern weicht dem Problem aus. Die Interviewerin erklärt darauf hin, dass das Problem durch eine andere Bedeutungszuweisung gelöst werden kann, die nämlich die Spaltenvektoren nicht als Bezeichnungen für Farben als Endprodukte, sondern als Anweisungen für den Produktionsvorgang wählt. Frau Rolle nennt als Konsequenz dieses Vorschlags, dass nun jede Zeile in ihrer Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = \overset{3}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{0}{s} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{1}{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{0}{y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Angaben für eine der vier Grundfarben enthält. Diese Zuordnung gab es bereits in ihrer eigenen Bedeutung der Vektoren, nachdem sie für die vier Grundfarben die Standardbasisvektoren gewählt hatte. Ihre Äußerung jetzt zeigt, dass dies keineswegs Absicht gewesen war, und dass es ihr nicht einmal bei der Berechnung der Koeffizienten, die mit den Komponenten im Ergebnisvektor übereinstimmen, aufgefallen war. Hier wird deutlich, dass die Spaltenvektoren in Frau Rolles Modellierung ausschließlich Namen für Farben sind, deren Einträge keine Produktionsanweisungen geben. Auch jetzt noch sieht Frau Rolle nicht die Gesamtanweisung, sondern betont die Bedeutung der einzelnen Zeilen für die einzelnen Farben.

### Polynomraum

Die Interviewerin nennt die Aufgabe, dass eine lineare Abbildung $f$ von $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ nach $\mathbb{R}^2$ konstruiert werden soll, die die Bedingungen

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(2x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erfüllt[78], und fragt, ob es eine oder sogar mehrere solche Abbildungen gibt.

Transkriptausschnitt: (VR(2), Rolle) 13-24

R: Hm. (7 Sek) Im Endeffekt, mein Polynom kann ja eigentlich nur sein $x$ plus eins oder $x$ plus $c$ eigentlich, ne?
I: Ja, oder Vielfache von $x$ geht auch noch.
R: Hätte ich etwas mit $ax$ plus $c$ und dann will ich. Muss mal eben kurz verdeutlichen, was linear ist. Im Endeffekt will ich zeigen, dass, wenn ich jetzt hätte
* $f(x+1) = f(x) + f(1)$ *, oder?
I: Ja.
R: Das möchte ich zeigen, und dann möchte ich noch zeigen
* $f(2x) = 2f(x)$ *, oder?
I: Ja.
R: Und das dann noch gleich (ergänzt zu:)
(c) * $\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) + f(1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(2x) &= 2f(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$ *

Frau Rolle stellt mit etwas Hilfe fest, dass die Polynome Summen von Vielfachen von $x$ und Konstanten sind. Dies sind die Linearkombinationen aus $x$ und 1, und falls das Frau Rolles Sichtweise wäre, würde sie damit die Elemente gemäß der Vektorraumstruktur des Polynomraums beschreiben. Es gibt jedoch keine klaren Hinweise darauf, dass Frau Rolle die Konstanten $c$ als die Vielfachen des Polynoms 1 betrachtet. Dagegen spricht, dass sie zunächst $x+1$ zusätzlich zu den mit $x+c$ beschriebenen Polynomen nennt, als wäre $x+1$ ein Typ für sich.[79] In ihrer Beschreibung des Begriffs 'linear' wendet sie die beiden Linearitätseigenschaften richtig auf Beispiele an. Logisch ist ihre Bemerkung aber nicht korrekt, denn bevor sie etwas zeigen kann, muss sie die gesuchte Abbildung so konstruieren, dass diese unter Anderem die genannten Gleichungen erfüllt. Ist die Abbildung konstruiert, so müssen für sie die Linearitätseigenschaften allgemein nachgewiesen werden, nicht nur für zwei Sonderfälle. In der letzten Bemerkung bleibt offen, ob Frau Rolle sagen will, dass sie die Informationen über die Bilder bei ihrem Beweis berücksichtigen muss,

[78] Die Interviewerin fragt Frau Rolle, ob sie die Elemente von $\mathbb{R}^2$ lieber in Spalten- oder in Zeilenform sieht, und diese entscheidet sich für Spalten.

[79] Diese Interpretation wird in einer späteren Episode im Interview bestätigt (Siehe im Transkript Zeile 143-163): Hier ist von einer anderen linearen Abbildung $g$ zwischen denselben Räumen die Rede, für die das Bild von 1 gegeben ist. Frau Rolle wählt ein beliebiges Bild für $c$, weil ihr nicht bewusst ist, dass $c$ ein Vielfaches von 1 ist.

oder dass diese Gleichheitszeichen ebenfalls zu beweisen sind.

Transkriptausschnitt:(VR(2), Rolle) 25-44

R: Und $x$ aber für mich ein Vektor, ja?

I: $x$ ist ein Polynom und insofern

R: Mein Problem ist jetzt: Wenn ich ein Polynom hab, wie kann ich dann auf null eins kommen?

I: Das ist so zu sagen eine Vorgabe, das soll das $f$ tun.

R: Ja, aber ich wechsle ja auf einmal von Polynomen zu Vektorraum im Endeffekt (zeigt in (b) auf die rechte Seite).

I: Das (zeigt in (a) auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) kann ich mir schon auch als Vektorraum vorstellen, insofern war deine Frage, ist $x$ ein Vektor, auch richtig, $x$ ist ein Vektor und ein Polynom. Ich kann die Elemente hiervon (zeigt in (a) auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) als Vektor bezeichnen, weil das ein Vektorraum ist, ich kann sie auch als Polynome bezeichnen, weil das ein Polynomring ist. Beide Namen sind zutreffend.

R: Wie stelle ich mir das dann vor, das $x$ (zeigt in (b) auf $x$)?(5 Sek)

I: Du kannst beide Vorstellungen

R: Nee, ich mein, also jetzt ganz konkret: Ich such jetzt irgend etwas, wo $x$ jetzt ist irgendwie z.B. eins null oder eins eins oder so was, so ne Darstellung wie hier (zeigt in (b) auf die rechten Seiten)

I: Du möchtest ne 2-Tupel Darstellung.

R: Weil ich sonst nicht verstehe, wie ich von einem normalen $x$ hierauf (zeigt auf (b)) kommen kann.

Frau Rolle fragt nach dem $x$. Sie vermutet, dass es ein Vektor ist. Die Interviewerin antwortet: "$x$ ist ein Polynom und insofern", wird aber von Frau Rolle unterbrochen, bevor sie sagen kann, dass es auch ein Vektor ist. Frau Rolle sagt, dass dies ein Problem für sie ist, denn, sie weiß nicht, wie sie von einem Polynom auf "null eins" kommen kann. Vielleicht ist dies ein Sprechfehler und sie meint statt 'null eins' das erste angegebene Bildtupel eins null. Die Interviewerin fasst dies offenbar so auf und antwortet, dass die Vorgabe ist, dass $f$ das tun soll. Frau Rolle benennt ihr Problem nun etwas anders, nämlich als Wechsel von Polynomen zu Vektorräumen. Warum ist das ein Problem?

- Eine Möglichkeit ist, dass Frau Rolle noch gar nicht über die Abbildung $f$ nachdenkt, sondern zunächst $x$ als Vektor auffassen möchte und darunter versteht, dem $x$ eine Tupeldarstellung zu geben. Diese hat sie noch nicht und fragt nach, wie sie eine solche finden kann. Dass sie eine solche Tupeldarstellung sucht, sagt sie explizit (Zeilen 39-40). Weitere Schwierigkeiten können sein:

- Ihr Einwand kann heißen: 'Ich wechsle von Polynomen zu einem Vektorraum, und so etwas geht überhaupt nicht, d.h. es gibt gar keine Abbildung dazwischen.'

- Das Problem kann auch darin liegen, dass die Abbildung $f$ scheinbar noch nicht vollständig definiert ist. Frau Rolle soll daraus erst noch eine Abbildung machen, d.h. sie auf dem ganzen Polynomraum definieren. Und das kann in

> Frau Rolles Augen bedeuten, eine Funktionsvorschrift zu finden, die angibt, durch welchen Rechenvorgang man von Polynomen zu 2-Tupeln, und das heißt von Funktionstermen zu Vektoren, kommt.

Nach der Erklärung der Interviewerin, dass sie das $x$ sowohl als Vektor als auch als Polynom auffassen kann, fragt Frau Rolle nochmals, wie sie eine Darstellung für $x$ in der Art von “eins null” oder “eins eins” bekommen kann. Hier ist nun deutlich, dass sie nicht die gegebenen Bilder von $f$ meint, sondern irgendwelche 2-Tupel. D.h., dass aus ihrer Sicht die Elemente eines Vektorraums immer Tupeldarstellungen haben müssen. Auf die entsprechende Nachfrage der Interviewerin erklärt sie, dass sie andernfalls nicht auf die definierenden Gleichungen von $f$ “kommt”. Vielleicht stellt sie sich vor, dass sie diese Zuordnungen nachweisen muss, und sieht nicht, wie man durch Rechnen mit Polynomen zu Endergebnissen gelangen kann, die Tupeldarstellungen besitzen.

Die Interviewerin versucht nun eine Abbildungsdarstellung mit Zuordnungspfeilen, aber auch das hilft Frau Rolle nicht weiter. Sie beschreibt ihr Problem nun präzisert:

Transkriptausschnitt: (VR(2), Rolle) 54-57

R: Aber ich verstehe nicht, weil $x$ ist für mich irgend ne konkrete Zahl, die ich hier einsetzen kann, hundert oder ne Million oder so etwas, und dann hätte ich hier z.B. hundert plus eins oder so und dann soll das abgebildet werden auf eins null, das ist mein Problem.

Sie fasst also $x$ als Variable auf, für die sie Zahlen einsetzen kann. Vielleicht durchläuft $x$ vor ihrem inneren Auge die reellen Zahlen. $x + 1$ ist die Anweisung, eine Zahl einzusetzen und dann die Zahl eins zu addieren. Aber unter der Abbildung $f$ gibt es nur ein einziges Bild dieses Ausdrucks $x + 1$. Vielleicht stellt sie sich vor, dass hier alle reellen Zahlen auf dasselbe 2-Tupel abgebildet werden. Das wäre eine konstante Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies fasst Frau Rolle entweder nicht als Abbildung auf, oder sie sieht, dass diese Vorschrift nicht zu dem Bild passt, das nach dem gleichen Prinzip allen reellen Zahlen durch die zweite Gleichung zugeordnet würde.

Frau Rolle spricht hier drei Probleme an. Das eine Problem ist, dass sie einen Term wie $x + 1$ als Aufforderung auffasst, für $x$ verschiedene Zahlen einzusetzen und dann die Zahl eins zu addieren. Diese Interpretation des Terms ist ihr sicherlich häufig in der Schule begegnet. Sie passt nicht zum Kontext der linearen Algebra. Erschwert wird die Sichtweise, $x+1$ als Vektor aufzufassen, durch das zweite Problem, dass nämlich der Term $x + 1$ nicht in der Form repräsentiert ist, die Frau Rolle für typisch für Vektoren hält. Dabei setzt sie sich bewusst mit der Frage aus einander, wie $x + 1$ als ‘Vektor’ angesehen werden kann, womit sie Tupeldarstellung meint. Diese ist für sie offenbar konstituierend. Das dritte Problem ist, dass sie sich nicht vorstellen kann, wie eine Abbildung eine Verbindung von Objekten einer Art zu Objekten ganz anderer Art - oder ganz anderer Darstellungsform - herstellen kann.

Alle drei Probleme sind dadurch hervorgerufen, dass gegebene Darstellungsformen nicht mit den Orientierungsmustern von Frau Rolle kompatibel sind.

Nachdem einige Versuche, die das Zeichen $x$ oder $x+1$ durch andere Notationen zu ersetzen, fehlgeschlagen sind, schlägt die Interviewerin vor, das Bild eines Polynoms $ax+c$ anzugeben. Frau Rolle antwortet:

Transkriptausschnitt:(VR(2), Rolle) 116-129

116 R: Was wir hier sowieso haben (ergänzt (f) zu:)

117 (f) * $ax + c \longmapsto \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ *

118 I: Egal, was $a$ und $c$ ist? Also für jedes $a$ und $c$ auf eins null?

119 R: Ach ja, nee Quatsch, dann lieber auf $d$, weiß ich nicht, $d$ null oder so. (korrigiert
120 zu:)

121 (f) * $ax + c \longmapsto \begin{matrix} d \\ 0 \end{matrix}$ *

122 I: Hat $d$ mit $a$ und $c$ zu tun? Oder ist das irgend eine beliebige Zahl?

123 R: Nee, hat was damit zu tun, weil je nach dem, was ich jetzt hier (zeigt in (f) auf
124 $c$) nehme, kommt in Abhängigkeit davon kommt ja $d$ raus (zeigt auf (f)). Wenn ich
125 jetzt z.B. sage, wenn ich erst habe $x$ plus eins, das wird auf eins null abgebildet
126 (zeigt auf (a)), könnte ich ja z.B. sagen, wenn ich jetzt zwei $x$ plus zwei habe, wird
127 auf zwei null abgebildet.

128 I: Müsste ich das sogar?

129 R: Ja, müsste ich.

Zunächst fällt hier auf, das Frau Rolle die Klammern, welche null und eins zu einem Gesamtobjekt zusammenfassen, weglässt. Sie lässt es kommentarlos geschehen, dass die Interviewerin Spaltenvektoren stets mit Klammern schreibt, aber sie selber lässt diese Klammern an vielen Stellen weg. Möglicherweise ist dies ein Hinweis darauf, dass sie null und eins als zwei Objekte betrachtet.

Frau Rolles Notation, die jedes $ax+c$ auf dasselbe Bild abbildet, scheint nicht so gemeint zu sein. Ihre Worte zeigen, dass sie etwas notiert hat, worunter sie sich etwas Anderes vorstellt. Sie hat offenbar Schwierigkeiten, das, was sie denkt, in Zeichen auszudrücken. Der zweite Versuch macht dies deutlich: Sie ersetzt

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \text{ durch } \begin{matrix} d \\ 0 \end{matrix},$$

um auszudrücken, dass nicht alle Bilder gleich sind. Das $d$ ist hier nicht als Konstante aufzufassen, sondern ist ein Ausdruck, welcher von $a$ und $c$ abhängt. Diese Abhängigkeit kennt Frau Rolle im Einzelnen nicht. Sie meint etwas wie

$$ax + c \longmapsto \begin{matrix} d_{a,c} \\ 0 \end{matrix},$$

wobei $d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (a,c) \longmapsto d_{a,c}$ eine Funktion in zwei Unbekannten ist, also $d_{a,c}$ eine Zahl ist, die in bestimmter Weise aus $a$ und $c$ zu berechnen ist. Dies ist für sie eine Selbstverständlichkeit, und es befremdet sie, dass die Interviewerin nachfragt:

"in Abhängigkeit davon kommt **ja** $d$ raus". Auch diese Antwort ist falsch. Frau Rolle berücksichtigt hier nicht, dass die zweite Koordinate nicht immer null ist. Ihr späteres Beispiel zeigt, dass sie ihren Polynomtyp vereinfacht als $cx + c$, im Beispiel $2x + 2$, denkt, und für diesen das Bild angeben kann. Mit ihrer ersten Antwort meint sie nicht das, was formal mathematisch gelesen wird. Sondern für sie scheint das Symbol

$$x + 1$$

als Prototyp für Polynome vom Grad kleiner als zwei zu stehen, also für Polynome der Form $ax + c$, nicht als ein bestimmtes Polynom, und das Symbol

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$

als Prototyp für 2-Tupel, nicht als ein bestimmtes 2-Tupel. Die Variable $d$ steht für eine - noch unbekannte - Anweisung, wie aus $a$ und $c$ das Bildtupel zu errechnen ist. Es scheint so, als ständen die notierten Zeichen für Frau Rolle wie eine Art Geheimsprache für ganz private Gedankengänge, und entsprechen ganz selbstverständlich nicht den Konventionen.

Auf die Frage, wie mit der Matrix (h)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

die Bilder von $f$ durch multiplizieren berechnet werden können, antwortet Frau Rolle:

Transkriptausschnitt:(VR(2), Rolle) 334-344

334 R: Ja. Wenn ich jetzt sage, das ist meine Grundfarbe (zeigt in (h) auf die Matrix),
335 von der aus ich meinen kompletten Raum erzeuge, würde ich ja sagen, dass ich ir-
336 gendwie eine Linearkombination mal einen anderen Vektor. Dann komme ich immer
337 weiter, aber man bleibt eigentlich immer im selben Raum.
338 I: Z.B. mal Vektor sieben fünf, dann kann ich ausrechnen.
339 (h') * $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *
340 Was bedeuten jetzt diese beiden Vektoren? Wofür steht sieben fünf, wofür steht fünf
341 zwei?
342 R: (zeigt in (h') auf $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$) Sieben fünf ist das Vielfache, was ich jetzt auf diese
343 Basis (zeigt in (h') auf die Matrix) anwende, sag ich mal, dann komme ich dahin
344 (zeigt auf $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$), also in den Vektor.

Frau Rolle nimmt hier (Zeilen 334-337) Bezug auf die Farbmaschine im ersten Teil des Interviewgesprächs. Die Matrix spielt in Frau Rolles Vorstellung die Rolle der "Grundfarbe", eine Art Baumaterial, aus dem Vektoren gemacht werden: Dabei spielt eine 'Linearkombination' und die 'Multiplikation mit einem Vektor' eine Rolle. In dem Rechenbeispiel, das die Interviewerin ihr zeigt, soll Frau Rolle dann die

Bedeutung der beiden Spaltenvektoren erklären.[80] In Frau Rolles Antwort (Zeilen 342-344) wird deutlich, dass sie die Matrix als 'Basis' versteht, wobei vielleicht die Spalten der Matrix als die einzelnen Basisvektoren gemeint sind. Frau Rolle bezeichnet den Spaltenvektor hinter der Matrix als 'das Vielfache' das sie auf die Basis anwendet. Da nur ein Objekt mit zwei Komponenten anstelle der vier Komponenten der Matrix herauskommt, und dies von keinem in der Matrix notierten Spalten- oder Zeilenvektor ein Vielfaches ist, vermute ich, dass dieser Ausdruck eine Verkürzung des Gedankens ist: 'Der Vektor enthält die Vielfachen, die ich auf die Basisvektoren anwende.' Die Verwendung des Singulars 'das Vielfache' deutet dabei auf eine Sichtweise, die die Koordinaten nicht als Einzeloperatoren versteht, sondern den Vektor als Gesamtobjekt auffasst. Es ist auch möglich, dass Frau Rolle nicht nur die Vielfachen- sondern zusätzlich die Summenbildung meint, und damit die Gesamtwirkung des Spaltenvektors im Sinn hat. Der Spaltenvektor, nicht die Matrix, dient hier als Operator, der etwas mit der Basis tut: Der Operator wird auf die Basis angewendet und erzeugt so aus der Basis einen Vektor. Frau Rolle fasst also die Matrix nicht als Abbildungsvorschrift auf, sondern eher als Form, die Elemente einer Basis zu notieren. Das Ergebnis der Operation betrachtet Frau Rolle als Vektor, i.e. als ein Element des Vektorraums, der aus der 'Basis', für die die Matrix steht, erzeugt wird. Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

entspricht diese Auffassung der Idee, dass in einer Linearkombination von Vektoren die Koeffizienten die Operatoren sind, über die die Handlung definiert wird. Diese Auffassung finden wir im ersten Teil des Interviews mit Frau Rolle. Im Unterschied zum ersten Teil des Gesprächs vollzieht Frau Rolle hier die Verkapselung der Einzelanweisungen zu einem einzigen Operator. Allerdings wird dieser Operator ausschließlich in aktiver Weise verwendet und nicht als Objekt behandelt. Mit dieser Sichtweise vermeidet Frau Rolle die abstrakte Idee, die durch die Matrix dargestellte Abbildung $f$ als Gesamtprozess zu begreifen, der auf allen 2-Tupeln operiert.

## Der Aufbau von Vorstellungen bei Frau Rolle

**Zu den inhaltlichen Vorstellungen:**

Die Wesensmerkmale der Farbmaschine sieht Frau Rolle in den Anweisungen für die vier Öffnungszeiten, durch welche der Produktionsprozess gesteuert wird. Diese Anweisungen identifiziert sie in ihrer Übertragung auf einen Vektorraum mit den Koeffizienten in einer Linearkombination. Dies passt zur Beschreibung $M_B$.[81] Allerdings identifiziert Frau Rolle zugleich auch die Grundfarben oder ihre Behälter mit diesen Koeffizienten, um darzustellen, dass für jeden Behälter eine auf ihn bezogene Öffnungszeit gegeben werden muss. Dies führt zu einer doppelten Belegung der Koeffizienten mit Bedeutung und einer fehlenden individuellen Bedeutung für die Vektoren in der Linearkombination. Das Ergebnis ist, dass die Strukturen der Farbmaschine auf Objekte übertragen werden, die nicht Träger der gleichen Strukturen

[80] In dem Beispiel ist ein Rechenfehler: Die zweite Koordinate des Ergebnisvektors muss eine Vier sein. Der Fehler fällt in dem Gespräch erst in den Zeilen 370-375 auf.

[81] Vgl. Abschnitt 3.3.1.

sind. Daher kann der Prozess des linearen Kombinierens unter dieser Bedeutungszuordnung nicht ausgeführt werden. Somit scheitert Frau Rolles Modellierung der Farbmaschine mit einem Vektorraum, denn die Repräsentation des von ihr gewählten Raumes ist nicht 'funktionstüchtig'.

Zwei Vektorraumvorstellungen, die in Einklang mit Frau Rolles Prioritäten im Zusammenhang mit der Farbmaschine stehen, sind Folgende:

1. Ein Vektorraum ist dadurch charakterisiert, dass in ihm Objekte linear kombiniert werden.

2. Ein Vektorraum ist dadurch charakterisiert, dass in ihm Objekte (genannt Vektoren) durch lineares Kombinieren von anderen Objekten konstruiert werden.

Die zweite Idee ist die in der Sachanalyse[82] definierte Baukastenvorstellung.

In der Aufgabe zum Polynomraum spricht Frau Rolle verschiedene Deutungen für das Zeichen $x + 1$ an:

1. Der Term $x + 1$ dient als prototypisches Polynom. Es ist verbunden mit der Idee, dass es weitere Polynome wie $x + c$, $cx + c$ oder $ax + c$ gibt. Entsprechend ist das Zeichen
$$\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$
Prototyp für alle Bilder der Abbildung $f$ oder generell für alle 2-Tupel.

2. Der Ausdruck 'lineare Abbildung' und die Zeichen $f(x + 1)$ und $f(2x)$ veranlassen sie, die Linearitätseigenschaften linearer Abbildungen auf die Summe und die skalare Multiplikation anzuwenden.

3. Der Term $x + 1$ initiiert bei Frau Rolle den Wunsch, einen Einsetzungsalgerorithmus anzuwenden.

In ihrer Konstruktion des Polynomraums als Vektorraum geht Frau Rolle trotz ihrer anfänglichen Überlegungen, wie die Elemente des Polynomraums aussehen, und wie eine lineare Abbildung auf die Summen- und Vielfachenbildung wirkt, zu der dritten oben genannten Assoziation über, in der sie die Terme mit $x$ als Funktionsterme deutet. Von dieser Idee ausgehend gelingt es ihr nicht, einen Bezug zum $\mathbb{R}^2$, in den die Aufgabe den Polynomraum stellt, zu konstruieren. Ihr Zugang entspricht $P_{(E)}$, einer Elementtypvorstellung, die von der spezifischen Art der Elemente ausgeht, in diesem Fall jedoch nicht zur Konstruktion eines Vektorraums führt, weil die berücksichtigten Merkmale der Elemente nicht auf Vektorraumstrukturen verweisen. Andere, nämlich vektorraumtypische Merkmale, die Frau Rolle ebenfalls anspricht, baut sie nicht ein. Das heißt aber nicht, dass sie sie für unbedeutsam hält: Sie erklärt, dass sie gerne 2-Tupel-Bezeichnungen für die Polynome $x + 1$ und $2x$ hätte, damit sie diese 'als Vektoren' auffassen kann. Dabei ist für sie unwichtig, welche 2-Tupel als Namen für die beiden Polynome gegeben werden. Je nachdem, welche Funktion Frau Rolle diesen beiden Polynomen zuspricht, entspricht dieser Wunsch der in der

[82] Vgl. 2.2.1.

Feinanalyse genannten Vorstellung $P_{B_3}$ oder $P_{K_3}$.

Die Eigenschaften einer linearen Abbildung, dass sie die Summe von zwei Elementen auf die Summe ihrer Bilder und ein Vielfaches auf das Vielfache des Bildes abbildet, sind Frau Rolle vertraut. Allerdings ist ihr nicht klar, dass ein Nachweis dieser Eigenschaft auf alle möglichen Summen und Vielfachen, nicht nur auf diejenigen einer ausgewählten Teilmenge des Vektorraums, bezogen sein muss.

In ihrem Umgang mit der Darstellungsmatrix von $f$ scheint Frau Rolle von einer Vorstellung auszugehen, nach der die Matrix ein Objekt ist, auf das Operatoren angewendet werden, wobei jeder Operator (er ist ein Spaltenvektor mit zwei Einträgen) auffordert: 'Bilde eine bestimmte Linearkombination der Spaltenvektoren'. Der Vektorraum, der durch diese Handlungen erzeugt wird, ist durch das lineare Kombinieren charakterisiert. Dies entspricht einer Baukastenvorstellung.

**Zu den Strategien und Orientierungsmerkmalen im Interviewgespräch:**

Der oben beschriebene Modellierungsansatz für die Farbmaschine gibt Einblicke in Prioritäten und Orientierungspunkte von Frau Rolles Denken. Sie zeigt hier mit ihren klaren Prioritäten des Handelns gegenüber Eigenschaften von Objekten eine starke Präferenz für funktionales Denken. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über Frau Rolles Umgang mit der Farbmaschine, die in Form einer Zeichnung zusammen mit erklärenden Worten ein neu zu deutendes Zeichensystem darstellt und unter dem Aspekt 'Vektorraum' von ihr gedeutet wird:

| | | |
|---|---|---|
| Referenzkontext: | $\longleftrightarrow$ | neues 'Zeichen': |
| lineares Kombinieren | $\longleftrightarrow$ | Darstellung der Maschine |
| | konkret: | |
| $\vec{x} = r(\ ) + s(\ ) + t(\ ) + y(\ )$ | $\longleftrightarrow$ | Produktion von Farben |
| $\vec{x}$ | $\longleftrightarrow$ | produzierte Farbe |
| $r$ | $\longleftrightarrow$ | rot und |
| | | Mengenangabe für rot |
| $(\ )$ | $\longleftrightarrow$ | Farbtopf |
| $+$ | $\longleftrightarrow$ | Mischen von Farben |
| | Begriff: | |
| | Vektorraum | |

Das Problem in dieser Bedeutungszuordnung ist: Die Skalare im Vektorraum übernehmen die Bedeutung von 'Skalaren' und 'Vektoren' in der Maschine, können aber in Rechnungen nur in der Rolle von Skalaren eingesetzt werden. So geht die vektorraumähnliche Struktur der Maschine bei der Übertragung verloren.

Die Grundidee von Frau Rolles Deutung kann ist durchaus tragfähig. Sie kann wie folgt in eine Beschreibung der Maschinenfunktion mit Hilfe eines Vektorraums umgesetzt werden:

‘Die Öffnungszeiten der vier Zuflussbehälter werden durch die Koeffizienten $r, s, t, y$ einer Linearkombination repräsentiert. Linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4$, auf die diese Koeffizienten angewendet werden, stellen die vier Zuflussbehälter dar. Der Produktionsprozess einer Farbe, repräsentiert durch $x$, wird beschrieben durch

$$x = rv_1 + sv_2 + tv_3 + yv_4.\text{'}$$

In dieser Darstellung haben die Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4$ fest vorgegebene Bedeutung, während die Koeffizienten variabel sind: Sie werden je nach zu produzierender Farbe gewählt. Das bedeutet, dass letztlich diese vier Koeffizienten die Informationen zur Produktion der Farbe $x$ verschlüsseln. Die Information der angegebenen Gleichung kann man konzentrierter fassen durch

$$x = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ y \end{pmatrix}$$

und die Festlegung, welche Komponente die Öffnungszeit für welchen Farbtopf angibt. Diese Zuordnung von Bedeutungen läuft darauf hinaus, die vier einzelnen Handlungen des Einstellens der vier Öffnungszeiten, die zu der Produktion einer bestimmten Farbe führen, zu einem einzigen Gesamtobjekt, einem ‘Spaltenvektor’ zusammenzufassen. Er ist eine Verkapselung des Produktionsprozesses. Eine Variante der vorgestellten Modellierung wählt anstelle der Namen $v_1, v_2, v_3, v_4$ vier konkrete, linear unabhängige 4-Tupel aus, wie Frau Rolle das nach einem Hinweis auf Tupeldarstellungen für ihre leeren Spaltenvektoren tut. Werden die vier Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^4$ gewählt, stößt man auf dieselbe Darstellung des Vektors $x$ wie die oben beschriebene, jedoch wird sie nun als Name dieses Vektors, nicht als ‘Produktionsanweisung’ aufgefasst. Dass dieser Darstellung des Ergebnisses auch die zugehörige Produktionsanweisung abgelesen werden kann, ist bei Frau Rolle nicht auf gezielte Bedeutungszuweisung zurückzuführen. Dies ist ein weiteres Anzeichen dafür, dass Frau Rolle die Kodierung des Erzeugungsprozesses, der gemäß ihrem Denken im Zentrum des Vektorraumbegriffs steht, durch eine Verkapselung dieses Prozesses nicht von selbst vornimmt.

Die Aufgabe, die Begriffe der linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit zu erklären, beantwortet Frau Rolle, indem sie ihr Vorgehen zur Überprüfung der Eigenschaften beschreibt. Es fällt auf, dass sie die beiden Begriffe ausschließlich in Bezug auf ein Erzeugendensystem eines Vektorraums erläutert. Im Farbenraum kann das daran liegen, dass die produzierten Farben nur in einem Sachzusammenhang zu den erzeugenden Farben stehen, nicht aber zu einander: Eine Ähnlichkeit im Verfahren, wie die Anweisungen für ihre Produktion gelautet haben, ist ohne jede Konsequenz für den Zweck der Maschine. In Bezug auf den $\mathbb{R}^4$ sieht dies allerdings anders aus. Hier ist eine Berücksichtigung von linearer Abhängigkeit von Vektoren, die nicht die Standardbasis bilden, für eine Erklärung des Begriffs an sich unumgänglich. Die Beschränkung auf ein Erzeugendensystem ist möglicherweise ein Hinweis darauf, dass Frau Rolle den Begriff nicht als allgemeine Eigenschaft verinnerlicht hat, sondern nur im Zusammenhang bestimmten Aufgaben und Handlungen sieht.

In beiden Interviewteilen fällt auf, dass Frau Rolle Strukturen von Vektorräumen aber an keiner Stelle explizit anspricht. Sie berücksichtigt Vektorraumstrukturen soweit sie Handlungsspielräumen in einem Vektorraum oder von Abbildungen auf einem Vektorraum unterliegen.

Gleich zu Anfang zeigt Frau Rolle in ihrem Umgang mit der Polynomraumaufgabe drei verschiedene Orientierungen, die die formalen Zeichen ihr liefern. Jeweils spielt das Zeichen ‘x’ eine zentrale Rolle. Die drei Deutungsrichtungen bleiben isoliert neben einander stehen. Die ersten beiden passen in einen Referenzkontext ‘Vektorraum’ und könnten gut mit einander harmonieren: die erste spricht durch die Darstellung der Polynome eine Vektorraumstruktur an, die zweite verwendet die Erhaltung der Vektorraumstruktur durch eine Abbildung. Die dritte Deutung scheint aus dem Zusammenhang der Schulanalysis zu stammen, in dem die Variablen ‘x’ in Termen für reelle Zahlen steht. Diese Deutung ist in der Tat mit den beiden anderen nicht vereinbar. Frau Rolle hat große Schwierigkeiten, die Konnotationen mit den ihr länger vertrauten Sachzusammenhängen zu ignorieren und die Symbole ‘x+1’ und ‘2x’ rein formal zu behandeln. Eine Hilfe wäre ihr nach eigenen Angaben eine Darstellung in Tupeln. Solche Symbole würden dann auch für Polynome stehen, aber dann könnte sie diese referentielle Bedeutung vielleicht leichter ignorieren.

An einigen Stellen geht Frau Rolle mit Zeichen so um, dass sie mit einem reinen Notationscharakter zufrieden ist. Ihr dienen diese mathematischen Zeichen dann als konkrete Objekte, auf denen sie die entscheidenden Handlungen ausführen kann. Sie zeigt dort keinen Bedarf an Bedeutungen, die diesen Objekten einen abstrakten Charakter als Symbole für Ideen geben. Ein Beispiel ist ihre Linearkombination mit leeren Spaltenvektoren, welche die Farbmaschine modelliert.

Auch in ihrer Erklärung zur Darstellungsmatrix von $f$ zeigt sie eine Interpretation, die sich nur auf die Zeichenebene selbst bezieht, nicht auf dahinter stehenden Begriffe. Frau Rolle versteht die Matrix nicht als Symbol für ein Objekt, das eine Verkapselung des Abbildungsprozesses repräsentiert. In der Multiplikation der Matrix mit einem Spaltenvektor sieht sie das Erzeugen einer Linearkombination der Matrizenspalten durch den dahinter stehenden Vektor. Während also der Vektor im Sinne eines Operators als Vorschrift für eine Handlung auftritt, ist die Matrix ein Diagramm, auf das diese Handlung angewendet wird. Die Matrix selbst stellt also nicht eine Abbildung dar, welche auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ wirkt. Den Spaltenvektor, der hier nach Frau Rolles Auffassung als Operator dient, welcher einen neuen Vektor erzeugt, könnte man als verkapselten Prozess des linearen Kombinierens ansehen. Möglicherweise nimmt Frau Rolle an dieser Stelle diese Position ein, weil der ‘Operator’ zunächst als solcher und nicht in Einzelanweisungen auftritt. Ein andere Ursache, die diese Sichtweise fördert, kann darin liegen, dass sie von den zwei zur Wahl stehenden, entweder die Matrix oder den Spaltenvektor als abstraktes Objekt aufzufassen, die einfachere ist. Jeder Spaltenvektor wird nämlich im Zusammenhang der gestellten Aufgabe nur auf eine bestimmte Matrix angewendet, während die Matrix als Darstellung einer Abbildung auf alle Spaltenvektoren des $\mathbb{R}^2$ anzuwenden ist.

## 3.4 Analyse der Dualrauminterviews

### 3.4.1 Feinanalyse zu den Dualrauminterviews

In diesem Abschnitt werden die Herausforderungen entfaltet, die die Interviewaufgabe an die Studierenden stellte.

Thema der Aufgabe ist die Beschreibung des Dualraums eines den Studierenden gut vertrauten Vektorraums, nämlich des $\mathbb{R}^3$, mit Hilfe einer Basis des Dualraums. Dieser Vektorraum liegt auf einem hohen Abstraktionsniveau, da er durch eine Abfolge mehrerer, auf einander aufbauender Abstraktionsschritte konstruiert wird. Dies kann z.B. so aussehen:

| Stufe<br>Objekt | kognitive Anforderungen |
|---|---|
| 1<br>Vektorräume:<br>$\mathbb{R}^3; \mathbb{R}$ | ∘ **Vereinigungen** von Mengen und Verknüpfungen<br>$((\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot))$<br>∘ **Konstruktion** eines Ordnungsgefüges<br>(mit Hilfe einer Basis) |
| 2<br>lineare Abbildungen:<br>$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ | ∘ **Verkapselung** oder **Verdinglichung** von Prozessen<br>(Zuordnungsprozessen)<br>∘ **Transfer** von Strukturen (Vektorraumstrukturen) |
| 3<br>Menge von<br>linearen Abb.<br>$\{\text{lin. Abb.} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\}$ | ∘ **Vereinigung** von abstrakten Objekten zu einer Menge<br>∘ **Simultane Berücksichtigung** von zwei Wesensarten<br>(Abbildungen sind zugleich Vektoren) |

Die Studierenden hatten in ihrer Vorlesung "Lineare Algebra und Analytische Geometrie II" einen Vektorraumtyp studiert, der aus linearen Abbildungen besteht, nämlich den Raum der Endomorphismen eines Vektorraums. Obwohl verschiedentlich von Endomorphismen und ihren Darstellungsmatrizen die Rede war und Zusammenhänge zwischen beiden aufgezeigt wurden, standen bei diesem Studium weniger die Endomorphismen als die quadratischen Matrizen im Vordergrund. Die Studierenden lernten Darstellungen von linearen Abbildungen über Matrizen und die Methode der Beschreibung und Klassifizierung eines bestimmten Typs von linearen Abbildungen über Eigenschaften ihrer Darstellungsmatrizen kennen. Diese Thematik war in der Vorlesung bereits zwei bis drei Wochen abgeschlossen, als die Interviewgespräche stattfanden. Der nachfolgende Inhalt der Veranstaltung, der zur Zeit der Interviews aktuell war, waren Bilinearformen. Nun wurden Matrizen zur Darstellung von Bilinearformen eingesetzt. Hier kamen auch Linearformen und Skalarprodukte zur Sprache.

Die Interviews beginnen damit, dass die Interviewerin eine Situation vorgibt, um die sich die Gespräche im Weiteren drehen werden. Für welche Sichtweisen und Assoziationen gibt dieser Einstieg Impulse? Die Zeichenkombinationen

$V = \mathbb{R}^3$,
$V^* = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ lin. Abb.$\}$ bzw.
$V^* = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi$ lineare Abbildung $\}$ beinhalten:

- Der Buchstabe '$V$' wurde in der Vorlesung meist als Name für einen Vektorraum verwendet. Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist ein den Studierenden vertrauter Raum, dessen Elemente sie sowohl als Spalten- wie auch als Zeilenvektoren kennen. Die Interviewerin gibt vor, dass er hier als Spaltenraum angesehen werden soll.

- Das Zeichen '$V^*$' deutet an, dass dieses Objekt irgendwie von dem zuvor definierten Raum $V$ abgeleitet wird. Die Tatsache, dass dieser Name im Wesentlichen aus dem Großbuchstaben $V$ (zusammen mit einer Art Index) besteht, kann als Hinweis auf den Vektorraumcharakter verstanden werden.

- Die Notation '$\{\varphi \quad \mid \quad \}$' ist eine typische Mengendarstellung mit Beschreibung der Elemente. Die Elemente dieser Menge werden hier mit einem griechischen Buchstaben deklariert, bevor nach dem vertikalen Strich spezifische, einschränkende Eigenschaften genannt werden. Griechische Buchstaben wurden in der Vorlesung häufig zur Bezeichnung von Abbildungen verwendet; zur Bezeichnung von Matrizen, insbesondere auch von Zeilen- oder Spaltenvektoren wurden nie griechische Buchstaben eingesetzt.

- Die Pfeildarstellung '$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$' betont den Gedanken des Zuordnens.

- Die Worte 'lineare Abbildung' weisen direkt auf die Abbildungseigenschaft hin.

Diese Einführung des Dualraums von $\mathbb{R}^3$ betont eine enge Beziehung zu dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und den Abbildungscharakter der Elemente gegenüber ihrer Eigenschaft Vektoren zu sein.

Unter den hier genannten Voraussetzungen sollen nun Schwierigkeiten vorgestellt werden, die mit der gestellten Aufgabe, eine Basis von $V^*$ anzugeben, einhergehen können.

**1. Schritt:** Allgemeine Überlegungen zu linearen Abbildungen
Gegeben ist eine Menge von Abbildungen. Zunächst stellt sich die Frage: Was sind Abbildungen? Welche besonderen Eigenschaften besitzen die spezifischen Abbildungen dieser Menge?[83]

- Die Menge umfasst
  - Tätigkeiten des Zuordnens;
  - Ergebnisse des Zuordnens in Form von Paarbeziehungen zwischen Urbildern und Bildern;[84]
  - Ergebnisse des Abbildens in Form von Bildern;[85]
  - Zuordnungen als verkapselte Prozesse.

[83]Hier wird nur eine kurze Aufzählung verschiedener Ideen zum Begriff der linearen Abbildung gegeben. Ausführlichere Erläuterungen sind in der Feinanalyse zu den Vektorrauminterviews in 3.3.1 zu finden.

[84]Dies ist eine Verdinglichung. Vgl. Sfard (1991).

[85]Dies ist eine andere Verdinglichung, jedoch ist sie nicht dem Abbildungsbegriff angemessen.

Je nach Vorstellung von dem, was der Abbildungsbegriff beinhaltet, können sich die Ideen zum Begriff der ‘linearen Abbildung’ unterscheiden.

- Lineare Abbildungen sind charakterisiert durch:
  - eine formale Gleichung
  - Respektierung der Vektorraumstrukturen
    - Übertragung von Linearkombinationen?
    - Übertragung von Eigenschaften wie lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit (Aus dem zweiten folgt die Injektivität der Abbildung)?
    - Übertragung auch von Dimensionseigenschaften (Daraus ergibt sich die Injektivität)?
    - Form der Identifizierung von Definitions- und Zielraum (als Mengen zusammen mit ihren Strukturen) der Abbildung (Daraus ergibt sich die Umkehrbarkeit der Abbildung)?
- Definitions- und Zielraum von linearen Abbildungen müssen Vektorräume sein. Wie kann $\mathbb{R}$ als ein $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst werden? Was ist eine Basis von $\mathbb{R}$? Welche Dimension hat $\mathbb{R}$?

**2. Schritt:** Darstellung von linearen Abbildungen
Die vorgegebene Menge von Abbildungen soll strukturiert werden. Um die Abbildungen zu ordnen, muss eine einheitliche Darstellungsform gefunden werden, welche für alle Abbildungen der Menge geeignet ist. Dazu ist es notwendig, aus der Linearitätseigenschaft der Abbildungen Konsequenzen zu ziehen. Mögliche Darstellungsformen sind:

**(a)** Angabe des Namens einer Abbildung, wie z.B. ‘Spur’, ‘Norm’, ‘Identität’.

Keine dieser beispielhaft genannten Abbildungen liegt in $V^*$. Sie dienen hier nur der Veranschaulichung, welche Wirkung der Name einer Abbildung erzielen kann. Bezeichnungen wie die erwähnten sind in der Vorlesung über Zuordnungsvorschriften formal definiert worden. Die alleinige Verwendung der Namen kann, muss aber nicht bedeuten, dass eine konkrete Vorschrift damit verbunden wird. Stattdessen können auch eher intuitive Ideen mit diesen Namen verbunden sein.[86]

**(b)** Angabe eines Funktionsterms zur Berechnung des Bildes eines allgemeinen Vektors. In diesem Funktionsterm können die Koordinaten des Vektors auftreten.

Diese Darstellungsform hat den Nachteil, dass zu untersuchen ist, welche Typen von Funktionstermen auftreten können. Hierzu ist es notwendig, die Linearitätseigenschaften der Abbildungen zu berücksichtigen. Das kann z.B. über eine der beiden Darstellungsformen **(c)** und **(d)** geschehen. Aus ihnen kann

[86] Namen wie ‘Spur’ und ‘Norm’ betonen z.B. das Bild einer Abbildung als deren Ergebnis anstelle der Beziehung von Urbild und Bild oder des Berechnungsverfahrens. Diese Namen sind somit gut mit der umgangssprachlichen Vorstellung von Abbildung als Bild vereinbar.

erschlossen werden, dass alle Funktionsterme die Form $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ besitzen, wobei $v_1, v_2, v_3$ die Koordinaten eines allgemeinen Vektors in $\mathbb{R}^3$ sind, und die Koeffizeinten $a_1, a_2, a_3$ und $\mathbb{R}$ liegen.

**(c)** Angabe der Bilder einer Basis von $\mathbb{R}^3$; mittels der Linearitätseigenschaft wird die Abbildung auf den ganzen Definitionsraum fortgesetzt.

Eine Darstellung einer allgemeinen Abbildung sieht so aus:[87]

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ e_1 &\longmapsto a_1 \\ e_2 &\longmapsto a_2 \\ e_3 &\longmapsto a_3 \end{aligned}$$

Dabei sind $a_1, a_2, a_3$ beliebige reelle Zahlen.

Wird diese Hürde überwunden, so erfordert es auf der formalen Ebene keine langen Überlegungen nachzuweisen, dass dies wohldefinierte lineare Abbildungen sind. Schwierig ist an dieser Darstellung die Tatsache, dass das Bild eines allgemeinen Vektors nur indirekt impliziert ist und erst über die Linearitätsgleichung erschlossen werden muss.

Legt man anstelle der formalen Definition das Charakteristikum der Strukturerhaltung zugrunde, so wird eine solche Abbildung unter Umständen nicht als linear anerkannt. Dies hängt von der Vorstellung ab, welche Eigenschaften respektiert werden müssen.

**(d)** Angabe einer Darstellungsmatrix (naheliegend ist der Bezug zu den Standardbasen $(e_1, e_2, e_3)$ in $\mathbb{R}^3$ und $(1)$ in $\mathbb{R}$.)

Die Darstellungsmatrix zu der in **(b)** und **(c)** gegebenen Abbildung lautet:

$$(a_1 \ a_2 \ a_3)$$

**3. Schritt:** Die Konstruktion einer Basis von $V^*$

**(a)** Durch alleinige Betrachtung von Abbildungen, für die man eigene Namen kennt, kann man keine Basis des Raums $V^*$ konstruieren und nachweisen, dass sie tatsächlich ein Erzeugendensystem ist. Diese Darstellungsform ist eine Sackgasse, wenn sie nicht in andere Repräsentationen übersetzt wird.

**(b)** Ohne die konkrete Angabe der Funktionsterme ist die Darstellung nicht geeignet für die Konstruktion einer Basis. Da die einfachsten Herleitungen über die Darstellungen **(c)** oder **(d)** erfolgen, wird dieser Ansatz hier nicht weiter verfolgt. Die Funktionsgleichung

$$\varphi(v) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

könnte die Abbildungsdarstellung in **(c)** ersetzen und dann analog zu den Überlegungen unter **(c)** fortgeführt werden.

[87] $(e_1, e_2, e_3)$ steht für die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

**(c)** Aus der Definition aller Abbildungen über ihre Wirkungen auf die Standardbasis kann noch nicht unmittelbar eine Basis von $V^*$ abgeleitet werden.

- Es ist zu klären, wieso die Abbildungsmenge überhaupt ein Vektorraum ist: Wie addiert man lineare Abbildungen? Bei der Darstellungsform **(c)** ist das aufwändig:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & a_1 \\ e_2 & \longmapsto & a_2 \\ e_3 & \longmapsto & a_3 \end{array} + \begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & b_1 \\ e_2 & \longmapsto & b_2 \\ e_3 & \longmapsto & b_3 \end{array} = \begin{array}{rcl} (\varphi + \psi) : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & a_1 + b_1 \\ e_2 & \longmapsto & a_2 + b_2 \\ e_3 & \longmapsto & a_3 + b_3 \end{array}$$

  Auf ähnliche Weise findet man Antworten auf die Fragen: Wie sieht die Multiplikation mit einer reellen Zahl aus? Wann sind zwei Abbildungen gleich? Was ist die Null in diesem Raum? Hinter diesen formalen Fragen steht die Überlegung: Wie können lineare Abbildungen Vektoren sein? Die Beantwortung dieser Frage fordert zu einer kognitiv anspruchsvollen Abstraktionsleistung heraus:
  ◦ Abbildungen operieren auf abstrakten Gebilden, nämlich Vektorräumen. Der erste Abstraktionsschritt besteht darin, dieses Operieren in ein abstraktes Objekt 'Abbildung' umzuwandeln. Während das Abbilden auf der unteren Abstraktionsstufe des ursprünglichen Vektorraums geschieht, liegt das Objekt 'Abbildung' quasi auf einer höheren Abstraktionsebene.
  ◦ Auf dieser zweiten Ebene stellt man fest, dass die linearen Abbildungen ihrerseits in eine Vektorraumstruktur eingebunden sind. Diese Beschreibung der Menge der Abbildungen stellt eine dritte Abstraktionsstufe dar.
  ◦ Die Gleichzeitigkeit der Abstraktionsebenen des Vektorraums und des Dualraums stellt eine weitere Schwierigkeit dar: Abbildungen operieren auf Vektoren und sind selbst ebenfalls Vektoren.

  Die beiden Abstraktionsebenen sind zwar deutlich von einander getrennt zu halten, sind aber gleichzeitig zu berücksichtigen, denn zur Operation mit den Strukturen des Vektorraums der linearen Abbildungen muss auf die Definition der Abbildungen auf der ersten Ebene zurückgegriffen werden.

  Wenn dieser Doppelcharakter der Abbildungen geklärt ist, kann nach einer Basis gesucht werden:

- Eine mögliche Beobachtung am Darstellungsschema der Abbildungen ist nun, dass es drei von einander unabhängige Wahlmöglichkeiten zur Festlegung der Bilder der Standardbasis gibt. Dies ist ein Hinweis auf die Dimension Drei.

- Eine Wahl von drei Vektoren, die die lineare Unabhängigkeit sicherstellt, legt Nullen und Einsen jeweils an verschiedene Positionen der Bilder. So erhält man z.B. die duale Basis der Standardbasis:

$$\begin{array}{rcl} e_1^* : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & 1 \\ e_2 & \longmapsto & 0 \\ e_3 & \longmapsto & 0 \end{array} , \quad \begin{array}{rcl} e_2^* : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & 0 \\ e_2 & \longmapsto & 1 \\ e_3 & \longmapsto & 0 \end{array} , \quad \begin{array}{rcl} e_3^* : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & 0 \\ e_2 & \longmapsto & 0 \\ e_3 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

- Nun fehlt noch ein Nachweis, dass diese Vektoren tatsächlich eine Basis bilden. Die Darstellbarkeit einer allgemeinen Abbildung $\varphi$ als Linearkombination aus diesen Dreien ist leicht zu zeigen, da die zu verwendenden Koeffizienten unmittelbar abgelesen werden können. Der Nachweis der linearen Unabhängigkeit ist aufgrund der logisch schwierigen Aussage etwas komplizierter und erfordert eine komplexere Argumentation, die auf den Kerngedanken hinausläuft: Eine Summe von Vielfachen der drei Abbildungen bildet den Vektor $e_i$ nur dann auf null ab, wenn der Koeffizient von $e_i^*$ null ist.

**(d)** Bei der Darstellungsform **(d)** ist der Gedanke naheliegend, von dem Charakter des Objekts als Abbildung abzusehen und es als Vektor zu betrachten. Die Standardbasis $(1\ 0\ 0), (0\ 1\ 0), (0\ 0\ 1)$ fällt unmittelbar ins Auge.

Die Schwierigkeiten bei der Lösung dieser Aufgabe hängen wesentlich von der Darstellungsform ab, die gewählt wird. Die Form **(d)** vermeidet einen großen gedanklichen Umweg der eigenständigen Erschließung von Zusammenhängen, der bei den Formen **(b)** und **(c)** geleistet werden muss, indem sie auf ältere Ergebnisse zurückgreift. Das ist natürlich legitim. An den Formen **(b)** und **(c)** wird ersichtlich, welche komplexen Zusammenhänge sich hinter der schlichten Lösung **(d)** verbergen. Die folgende Auflistung gibt einen Überblick über mathematische und kognitive Werkzeuge, die bei einem Zugang ohne **(d)** zum Einsatz kommen:

**Formalisierung** zur Darstellung einer linearen Abbildung in $V^*$:

- Schlussfolgerungen aus den Linearitätseigenschaften nutzen
- einen Sichtwechsel vollziehen (Der Fokus wechselt von der individuellen Betrachtung eines einzelnen Elementes von $\mathbb{R}^3$ und seines Bildes hin zu seiner Einbettung in das Ordnungsgefüge eines Vektorraums.)
- eine kondensierte Darstellungsform entwickeln

  (Diese Formalisierung haben die Studierenden in der Veranstaltung kennen gelernt. Sie muss hier nicht neu entwickelt werden, sondern nur erinnert oder nochmals nach-vollzogen werden.)

**Konstruktion von abstrakten Objekten:** ‘Abbildungen’, ‘Vektoren’

- einen zweifachen Sichtwechsel auf das Abbilden vollziehen:
  ◦ Die Schemata für die Zuordnungsvorschriften der linearen Abbildungen werden als abstrakte Objekte behandelt.
  ◦ Die zu Abbildungen verkapselten oder verdinglichten Abbildungsprozesse werden als Vektoren angesehen: Dieselbe Grundstruktur, auf der sie operieren kehrt auf der höheren Abstraktionsebene, auf der sie Objekte sind, wieder.
- Gleichzeitiges Handeln auf drei Abstraktionsebenen:
  ◦ Abbilden von Vektoren des $\mathbb{R}^3$
  ◦ Verknüpfen der Abbildungen
  ◦ Beschreiben von Eigenschaften der Abbildungsverknüpfungen
- Formalisieren der genannten Tätigkeiten und Gedankengänge, so dass die verschiedenen Ebenen in der formalen Darstellung unterscheidbar sind

**Transfer** zur Konstruktion einer Basis:

- Entdecken eines Ordnungsgefüges (z.B. freie Parameter), das der Strukturierung durch eine Basis entspricht
- Formalisierung dieses Ordnungsgefüges in der zuvor gewählten Darstellung der Vektorraumelemente durch geeignete Wahl von Basisvektoren
- Beweisen, dass die gewählten Vektoren die Eigenschaften einer Basis erfüllen

Diese einzelnen Schritte sind kognitiv anspruchsvolle Tätigkeiten. Der Vorgang insgesamt kann als **Formalisierung** beschrieben werden, die zahlreiche Teilschritte erfordert. Insbesondere zeichnet sie sich durch eine Abfolge von vertikal auf einander aufbauenden Abstraktionsschritten aus, wobei verschiedene Abstraktionsebenen in der Formalisierung gleichzeitig Berücksichtigung finden müssen. Dies wird in der Verwendung des Begriffs ‘Basis’ deutlich: Um eine Basis von $V^*$ zu konstruieren, muss man auf eine Basis von $\mathbb{R}^3$ zurückgreifen. Diese spielt sowohl in der Strukturierung von $\mathbb{R}^3$ als auch in der Darstellung der Elemente von $V^*$ eine zentrale Rolle. Die beiden Basen beinhalten Vektoren sehr unterschiedlichen Charakters und sind sich dennoch so ähnlich, dass sie verwechselt werden können.[88] Die Unterscheidung von diesen Ebenen erfordert ein sehr bewusstes Umgehen mit den Bestandteilen des Dualraums.

### 3.4.2 Deutung des Dualrauminterviews mit P. Sendig

Das Gespräch mit Herrn Sendig beginnt mit der Definition des Dualraums von $\mathbb{R}^3$ als Menge der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$, und der Aufgabe, ein Element dieser Menge anzugeben. Der erste Vorschlag von Herrn Sendig wird ausführlich untersucht und dann verworfen. Es folgt ein Gespräch über Darstellungsformen und Eigenschaften von linearen Abbildungen. Anschließend wird die Frage nach einer Basis erörtert. Dabei werden Überlegungen angestellt, was lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit für lineare Abbildungen bedeutet.

Wie in den anderen Interviewgesprächen mit Herrn Sendig gilt auch hier, dass er grundsätzlich nichts schreibt. Alle Tafelnotizen stammen von der Interviewerin. Sie sind zum Teil von Herrn Sendig diktiert, beinhalten aber natürlich Interpretationen der Interviewerin.

#### Konstruktion einer Dualraumbasis

Die Interviewerin definiert die Menge $V$ als Menge der Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^3$ und den Dualraum $V^*$ als Menge der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$, in Zeichen: (b)

$$V^* = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ lineare Abbildung } \}$$

Sie fragt zunächst nach einem Beispiel für eine solche Abbildung.

[88] Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die duale Basis der Basis $(e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$ mit Darstellungsmatrizen notiert wird, die in $\mathbb{R}^3$ als Zeilenraum dieselben Namen $e_1, e_2, e_3$ tragen.

Transkriptausschnitt: (DR, Sendig) 17-20

S: Wenn ich jetzt z.B. die Norm von nem Vektor nehme, ist das eigentlich auch so was?
I: Ehm, ja.
S: Ich muss jetzt nem Vektor ne Zahl zuordnen.

Herr Sendig berücksichtigt hier zunächst die Bedingung, von wo nach wo abgebildet wird. Er gibt seine Abbildung mit einem Namen an. Die Interviewerin fragt ihn dann, ob diese Abbildung linear ist, was er nicht unmittelbar beantworten kann. Offenbar spielt diese Frage in seinem ersten Vorschlag eine untergeordnete Rolle. Nachdem eine Überprüfung durchgeführt und das Beispiel verworfen ist, spricht die Interviewerin die Frage an, ob $\mathbb{R}$ ein Vektorraum ist. Herr Sendig stimmt dem zu und gibt die richtige Dimension an. Nun folgt die Diskussion:

Transkriptausschnitt: (DR, Sendig) 103-115

I: Wie könnte man, wie kann man ne lineare Abbildung im Allgemeinen angeben? Das können wir doch hier auch so machen.
S: Mit Matrizen?
I: Ja, wär ne Möglichkeit. (5 Sek) Zumal beim K hoch n geht das gut. R hoch n haben wir ja hier. (5 Sek). Wie würde denn dann ne Matrix aussehen, die, du sollst ja eine Abbildung erst mal nur angeben, wie würde die Matrix dazu aussehen?
S: Müsste invertierbar sein, oder?
I: Eh, warum?
S: Ist das nicht so, dass wenn man n Homomorphismus hat, dass die Matrix invertierbar ist?
I: Nee, das muss nicht sein. Das ist ein Spezialfall, das sind die besonders einfachen, die invertierbaren.
S: Hm, dann müsste das nicht sein. (4 Sek)

Herr Sendig weiß, dass man eine lineare Abbildung mit Hilfe einer Matrix angeben kann. Aber dann lässt er lange Gesprächspausen ohne eine Matrix anzugeben. Der Grund kann mit seinem Einwand (Zeile 109), dass sie invertierbar sein müsste, zusammenhängen, wenn er nämlich bemerkt, dass er hier keine invertierbare Matrix finden kann. Warum nimmt er jedoch an, dass die Abbildung invertierbar sein müsste? Er verwendet (Zeile 111) anstelle des gebräuchlicheren Ausdrucks 'lineare Abbildung' den Begriff 'Homomorphismus'. Dieser kann sich im Gegensatz zu 'lineare Abbildung' auch auf andere algebraische Strukturen als Vektorräume beziehen und bezeichnet allgemein eine strukturerhaltende Abbildung. Diese Wortwahl weist also möglicherweise darauf hin, dass er in einer linearen Abbildung vor allem das Charakteristikum sieht, dass Strukturen übertragen werden. Herr Sendig äußert die Überzeugung, dass eine solche Darstellungsmatrix invertierbar ist. Dahinter steht vielleicht der Gedanke, dass nur eine invertierbare Abbildung Strukturen ohne Verlust übertragen kann.

Die Interviewerin fragt nach anderen Darstellungsmöglichkeiten für eine lineare Abbildung und Herr Sendig nennt die Möglichkeit, die Bilder einer Basis anzugeben. Er erklärt, dass dies im Prinzip das Gleiche ist wie die Angabe einer Darstellungsmatrix. Das Gespräch setzt sich fort:

Transkriptausschnitt: (DR, Sendig) 129-155

S: Also ich müsste jetzt quasi dem Basisvektor eins null null den (?) zuordnen.
I: Ach so, hm.
(d) * $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto$ *
S. Irgendwie, was kann ich jetzt falsch machen, dass es nicht linear wird?
I: Ja, kannst du was falsch machen?
S: Weiß ich nicht. Mal überlegen. (10 Sek) Man könnte dem jetzt erst mal die Eins zuordnen, oder so.
I: Das können wir machen. (ergänzt in (d) * 1 *)
S: So und dann
I: (d) * $\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \longmapsto & 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \longmapsto & \end{array}$ *
(6 Sek)
S: Bin mir jetzt nicht so ganz sicher, ob das funktioniert.
I: Probiers doch aus. Was könntest du dem zuordnen? (3 Sek)
S: Ja eigentlich soll man jetzt ne andere Sorte von Zahlen haben, weil wenn ich die beiden jetzt addiere, dann habe ich ja zwei unterschiedliche
I: Die beiden meinst du, ne?
(e) * $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *
S: Ja, zwei verschiedene Komponenten. Wenn ich jetzt dem ne Zwei zuordne,
I: Diesem (zeigt in (d) auf den zweiten Spaltenvektor) hier?
S: Ja, das würde ja nicht gehen. (I notiert 2 hinter dem zweiten Zuordnungspfeil in (d))
I: Warum würde es nicht gehen?
S: Ja, weil die ersten, weiß ich nicht, die sind linear unabhängig, im Prinzip,
I: ja, die beiden sind linear unabhängig (zeigt in (d) auf die beiden Spaltenvektoren)
S: die lassen sich nicht aus einander kombinieren, aber ich kann die Eins ja zweimal addieren und krieg die Zwei.

In seinem Versuch, den Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^3$ Bilder zuzuordnen, ist Herr Sendig sehr unsicher, dass er etwas falsch machen könnte. Offenbar ist ihm nicht klar, dass er die Bilder einer Basis beliebig im Zielraum wählen kann. Nur mit Zureden, es zu versuchen, lässt er sich darauf ein, dem ersten Basisvektor eine Zahl zuzuordnen. Irgendetwas an der gegebenen Situation scheint nicht mit seiner Vorstellung von einer linearen Abbildung vereinbar zu sein. Es sieht so aus, dass er sich Gedanken macht (Zeile 141), die er nicht im Einzelnen ausspricht, die aber zu einem Ergebnis führen, das ihm nicht passend zu sein scheint. Bei der Zuordnung für den zweiten Basisvektor (Zeile 143-147) erklärt er das Problem, das er sieht: Er braucht für die Bilder der ersten beiden Basisvektoren zwei verschiedene 'Sorten' von Zahlen, weil er bei den Basisvektoren 'zwei verschiedene Komponenten' hat. Vielleicht will er damit ausdrücken: Die beiden Einsen in den Basisvektoren sind so etwas wie verschiedene Sorten von Zahlen, denn ihre Position in unterschiedlichen Komponenten trennt die beiden in einer Weise von einander, dass sie nicht verknüpft werden können. Eine andere Erklärung seiner Äußerung kann sein: Jeder der beiden Basisvektoren kann die Vektoren erzeugen, die in der Position, wo er die Eins stehen hat, eine beliebige Zahl und in den beiden anderen Positionen eine Null stehen haben. Diese Vektoren sind - abgesehen vom Nullvektor, der zu beiden Erzeugnissen gehört - unterschiedliche 'Sorten' von Vektoren. Sein Argument ist nun: Da die Basisvektoren verschiedene Objekttypen innerhalb des Definitionsraums sind - oder verschiedene Typen von Zahlen repräsentieren - , müssen auch ihre Bilder verschiedene Objekttypen innerhalb des Zielraums sein.

Er spricht hier eine Strukturierung vom $\mathbb{R}^3$ an, die die Vektoren nach grundsätzlich verschiedenen Typen ähnlich verschiedenen 'Sorten' von Zahlen ordnet. Dies ist eine starre Ordnung, die sich an dem festen Bezugssystem der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ orientiert. Sie harmoniert gut mit der Komponentenvorstellung eines Vektorraums.

Herr Sendig führt seine Idee über den Charakter linearer Abbildungen noch präziser aus (Zeile 152-155): Wenn er dem zweiten Basisvektor eine Zwei zuordnet, dann entsteht die Situation, dass zwei linear unabhängige Vektoren linear abhängige Bilder zugeordnet bekommen. Das hält er für unmöglich.

Auf Aufforderung der Interviewerin wird dennoch der zweite Vektor der Standardbasis auf 2 und der dritte auf 3 abgebildet, und die Interviewerin fragt, ob das ein Problem gibt.

Transkriptausschnitt: (DR, Sendig) 174-176

S: Das Problem ist, dass ich die Drei zwei verschiedenen Vektoren zuordne, nämlich einmal dem Vektor eins eins null und dem Vektor null null eins. Und dann ist das Ganze nicht mehr linear, oder?

Hier kommt deutlich zum Ausdruck, dass Herr Sendig die Injektivität für eine notwendige Bedingung für die Linearität einer Abbildung hält. Vielleicht orientiert er sich dabei an der landläufigen Vorstellung von einem Abbild als etwas, woraus das Urbild rekonstruierbar ist. Allerdings steht sein Einwand in Bezug zu der Eigenschaft der Linearität (Zeile 176); bei seinem ersten Vorschlag, bei dem er sich nur auf die Berücksichtigung der Definitions- und Zielmenge zu konzentrieren scheint, hat er keine Schwierigkeit eine nicht invertierbare Abbildung zu verwenden.

Auffällig ist die Reihenfolge von Herrn Sendigs Einwänden: Die Eigenschaft, dass eine Abbildung linear abhängige Bilder linear unabhängigen Urbildern zuordnet (siehe Zeile 154-155), ist logisch schwerer zu begreifen als die Eigenschaft, dass eine Abbildung ein Bild zwei verschiedenen Urbildern zuordnet (siehe Zeile 174-176). Es wäre auch naheliegender gewesen, die Verletzung der zweiten Eigenschaft zu beobachten als die Verletzung der ersten:

> Wenn $e_1$ auf 1 und $e_2$ auf 2 abgebildet werden, dann werden $2e_1$ und $e_2$ auf dasselbe abgebildet.

Herr Sendig kommt zur Verletzung der zweiten Eigenschaft jedoch erst über den Umweg:

> Wenn $e_1$ auf 1 und $e_2$ auf 2 abgebildet werden, dann werden zwei linear unabhängige Vektoren auf linear abhängige Bilder abgebildet. Wenn außerdem $e_3$ auf 3 abgebildet wird, werden $e_3$ und $e_1 + e_2$ auf dasselbe abgebildet.

Die beiden Eigenschaften, Respektierung der linearen Unabhängigkeit und Injektivität bedingen sich gegenseitig. Der Umweg von Herrn Sendigs Gedankengang lässt vermuten, dass er intuitiv einen Widerspruch zur Linearität vor allem darin sieht, dass die lineare Unabhängigkeit nicht erhalten bleibt. Eine Erklärung kann in der besonderen Beziehung der Begriffe 'lineare Unabhängigkeit' und 'lineare Abbildung' liegen. Diese kann unmittelbar aus dem Wort 'linear' bestehen, welches in beiden Begriffen auftritt. Sie kann inhaltlich so gedeutet werden: Die lineare Unabhängigkeit ist eine Eigenschaft, die nur auf Elemente von Vektorräumen bezogen werden kann. Insofern kann sie - im Gegensatz zu der Frage der Gleichheit - bei Abbildungen, in denen Vektorraumstrukturen keine Rolle spielen, nicht relevant sein. Was eine lineare Abbildung gegenüber anderen auszeichnet, ist ihre Eigenschaft, lineare Strukturen, i.e. Vektorraumstrukturen, zu respektieren. Die Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit spielt bei diesen Strukturen eine wichtige Rolle und muss daher erhalten bleiben. Der Fehler in diesem Schluss liegt darin, dass zwar lineares Erzeugen und damit auch lineare Abhängigkeit übertragen werden, nicht jedoch lineare Unabhängigkeit.

Eine Konsequenz aus dieser Vorstellung, dass lineare Unabhängigkeit ein Merkmal ist, das durch lineare Abbildungen auf Bilder übertragen wird, ist die Überzeugung, dass jede lineare Abbildung injektiv ist, und das bedeutet insbesondere, dass sie ein Isomorphismus zwischen ihrem Definitions- und ihrem Bildraum ist. Sie überträgt dann nicht nur Strukturen, sondern sie identifiziert Elemente der beiden Räume paarweise mit einander. Diese Idee ist in Herrn Sendigs Äußerung in Zeilen 109-112, dass ein Homomorphismus invertierbar sein muss, enthalten: Wenn Strukturen übertragen werden, ist dies für ihn gleichbedeutend damit, dass die Strukturen auch wieder zurück übertragen werden können.

Die Interviewerin gibt Herrn Sendig eine Erklärung, warum eine lineare Abbildung nicht injektiv sein muss. Sie fragt ihn dann nach einer Matrixdarstellung der gefundenen linearen Abbildung, worauf er richtig antwortet. Dann bringt die Interviewerin das Thema einer Basis von $V^*$ auf. Doch zunächst:

Transkriptausschnitt: (DR, Sendig) 223-238

223 I: Jeder Vektorraum hat eine Basis. Ist das klar, dass es ein Vektorraum ist? (3
224 Sek) Wollen wir gucken, wie die Summe von zwei linearen Abbildungen aussieht?
225 S: Ja, die muss auch linear sein, oder?
226 I: Ja, das müsste man zeigen, dass sie auch linear ist, um zu zeigen, dass das ein
227 Vektorraum ist.
228 S: Das müsste (?) Skalarmultiplikation zeigen. Da muss es auch klappen.
229 I: Genau, erst mal dann haben wir, dass die Summe und die Vielfachen wieder

Elemente davon sind, und dafür, dass es ein Vektorraum ist, da müsste man dann zeigen, dass zwei addieren, zwei lineare Abbildungen, da gelten die Gruppenaxiome,
S: Ich glaub, das machen wir nicht.
I: O.k., die Frage ist, wie sieht ne Basis aus dazu? (wischt (d)-(f) weg)
S: Das verstehe ich jetzt nicht so ganz. Ich such jetzt quasi nach ner, das sind auch drei Elemente, die in der Basis drin sein müssen, oder nicht?
I: Ja, das ist richtig. Die Frage ist warum, aber das stimmt.
S: D.h. ich muss jetzt drei Abbildungen finden, aus denen ich alle linearen Abbildungen erzeugen kann.

Herr Sendig bestätigt, dass er weiß, wie zwei lineare Abbildungen addiert werden, und er erklärt, dass die Summe ebenfalls eine lineare Abbildung ist. Er hat nicht das Bedürfnis, die Vektorraumaxiome für diesen Raum nachzuweisen. Es bleibt offen, ob ihm die Zusammenhänge so klar sind, wie er angibt. Zumindest akzeptiert er die Tatsache, dass diese linearen Abbildungen als Elemente eines Vektorraums auftreten.

Herr Sendig hat mit der Frage nach einer Basis ein Problem (Zeile 234). Es ist offen, was er sich unter einer Basis (Zeile 235) vorstellt. Meint er diesen Begriff im mathematischen oder in einem alltagssprachlichen Sinn? Wenn er ihn mathematisch versteht, kann sein Problem sowohl darin liegen, wie man Basisvektoren findet. Ihm ist jedenfalls klar, dass eine Basis dieses Raums, dessen Elemente Abbildungen sind, ebenfalls aus Abbildungen bestehen muss (Zeile 237). Vielleicht fällt es ihm schwer, sich Abbildungen als Basiselemente oder überhaupt als Vektoren vorzustellen.

Herr Sendig vergewissert sich dann zunächst, dass eine Basis von $V^*$ auch - wohl ebenso wie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ - aus drei Elementen besteht. Es bleibt offen, wieso er dies annimmt. Es ist denkbar, dass er in Erinnerung hat, dass ein Vektorraum und sein Dualraum immer dieselbe Dimension besitzen. Ebenso ist möglich, dass er an den drei Komponenten der Matrixdarstellung (1 2 3) der gefundenen linearen Abbildung erkennt, dass der Raum der Darstellungsmatrizen dreimensional ist.

Herr Sendig wählt die Eigenschaft einer Basis aus, dass sie ein Erzeugendensystem ist (Zeile 238). Diese Überlegung ist sinnvoll: wenn die Dimension des Raumes bekannt ist, genügt es, ein Erzeugendensystem der entsprechenden Länge zu finden.

Sein erster Vorschlag für ein Basiselement ist die Identität, die jedoch im Weiteren verworfen wird, weil der Zielraum sich vom Definitionsraum unterscheidet. Mit dem Argument, dass Herr Sendig bereits vermutet, dass die Dimension von $V^*$ drei ist, schlägt die Interviewerin vor, lieber nach drei linear unabhängigen linearen Abbildungen als nach drei Erzeugenden des Raums zu suchen. Herr Sendig erinnert sich dann an die Matrixdarstellung (1 2 3) der ersten Abbildung und schlägt vor: (g')

$$\begin{aligned} M(\alpha_1) &= (1\ 0\ 0)\\ M(\alpha_2) &= (0\ 1\ 0)\\ M(\alpha_3) &= (0\ 0\ 1) \end{aligned}$$

Die Interviewerin fragt ihn, ob dies lineare Abbildungen sind, was er nach einer Zeit des Nachdenkens von 18 Sekunden bestätigt. Die ersten beiden Abbildungen werden auch noch in einer Darstellung ohne Matrizen notiert:

(h')

$$\begin{array}{lll} \alpha_1(e_1) = 1, & \alpha_1(e_2) = 0, & \alpha_1(e_3) = 0 \\ \alpha_2(e_1) = 0, & \alpha_2(e_2) = 1, & \alpha_2(e_3) = 0 \end{array}$$

Die Interviewerin fragt nun, warum diese beiden Abbildungen linear unabhängig sind.

Transkriptausschnitt: (DR, Sendig) 301-320

S: Mir ist noch nicht so ganz klar, wie Abbildungen linear unabhängig sein können.
I: Also wie sind Vektoren linear unabhängig? Was würde das heißen?
S: Ja, eh, keine Ahnung, dass die sich nicht durch einander erzeugen lassen.
I: Die Vektoren heißen $\alpha$ eins und $\alpha$ zwei, um die es hier geht, also?
(i) * $\alpha_1$ *
S: (diktiert weiter:)
(i') * $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ *
daraus würde dann folgen, dass die alle null sind. War das nicht so?
I: Eh, nee, die $\alpha$'s sind ja jetzt fest, die $\alpha$'s sind ja jetzt die Vektoren, da fehlt noch was.
S: Ach so, da irgendwie noch $\delta$'s oder so irgendwas vor.
I: Irgendwas.
(i") * $\delta_1\alpha_1 + \delta_2\alpha_2 + \delta_3\alpha_3 = 0$ *
Koeffizienten.
S: Ja, und die müssen null sein.
I: Die $\delta$'s sind jetzt aus R, reelle Zahlen, ne? Also das gilt nur (zeigt auf (i")), wenn alle drei Koeffizienten null sind, linear unabhängig. Wenn jetzt die $\alpha$'s Abbildungen sind, wie kann denn die Summe von Abbildungen null sein? Was ist das für eine Null?
S: Ja, das ist auch ne Abbildung, die alles auf null abbildet, oder?

Herr Sendig äußert ein Problem mit dem Begriff 'linear unabhängig' (Zeile 301). Er sagt nicht, dass er den Begriff selbst nicht versteht, sondern, dass er ihn nicht auf Abbildungen anwenden kann. Mit seiner Antwort (Zeile 303), wie Vektoren linear unabhängig sind, spricht er eine Kernidee der linearen Unabhängigkeit an und zeigt damit ein inhaltliches, richtiges Verständnis des Begriffs: Wenn sich von einer Menge von Vektoren kein Vektor aus den anderen erzeugen lässt, dann sind sie linear unabhängig. Somit liegt sein Problem speziell darin, diese Vorstellung auf Abbildungen anzuwenden. Denkbar ist zunächst, dass er nicht weiß, wie das Erzeugen aus linearen Abbildungen geschieht. Dagegen spricht jedoch, dass er zuvor angegeben hat, dass die Summe von zwei linearen Abbildungen linear ist, und dass diese Eigenschaft auch beim Multiplizieren mit einem Skalar erhalten bleibt. Er hat also die Operationen, die auf $V^*$ erlaubt sind, im Sinn. Es ist Folgendes möglich: Er denkt gar nicht an Details der Durchführung, sondern kann sich die Idee des Erzeugens nicht auf Abbildungen bezogen vorstellen. Möglicherweise sind die hier betrachteten Abbildungen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ in den gegebenen Darstellungen als Objekte so kompliziert, dass ihre gedankliche Erfassung Herrn Sendigs kognitive Kapazitäten bereits voll in Anspruch nimmt. Das kann ein Grund sein, dass er den nächsten Schritt, sie in Beziehung zu einander zu setzen, nicht vornimmt, oder zumindest an dem übernächsten Schritt scheitert, in dem die grundsätzliche Möglichkeit einer linearen Abhängigkeit von zwei solchen Objekten in diesem besonderen Fall als Unmöglichkeit erkannt werden muss.

Bei manchen Vektorräumen, mit denen Herr Sendig vertrauter sein wird, sind Vorstellungen von der linearen Unbabhängigkeit als Unmöglichkeit des Erzeugens leichter denkbar. Z.B.

- geometrisch: Drei Vektorpfeile, die nicht parallel zu einer Ebene liegen, können nicht durch einander erzeugt werden.

- algebraisch: Tupel, die von Null verschiedene Einträge nur in unterschiedlichen Komponenten haben, lassen sich nicht durch einander erzeugen. Diese Vorstellung passt auf alle Typen von Vektoren, denen man solche Komponenten eindeutig ablesen kann. Zu diesen gehören z.B. Elemente von Polynomräumen.

Ich vermute, dass Herr Sendig zu Abbildungen keine solche Vorstellung im Sinn hat, sondern dass der Begriff 'Menge von Abbildungen' vorrangig die Idee einer gänzlich unstrukturierten Sammlung von abstrakten Objekten hervorruft, welche nur vereinzelt und eher zufällig in Beziehungen zu einander stehen. Zwar stimmt er zuvor zu, dass die Vektorraumaxiome für $V^*$ gelten, aber das gibt ihm vielleicht noch keine Strukturierung dieses Raums nach Komponenten. Seine Äußerung, dass er nicht weiß, wie Abbildungen linear unabhängig sein können, kann ein Hinweis sein, dass er gedanklich von allgemeinen Abbildungen, nicht speziell von linearen Abbildungen oder sogar von den Abbildungen in $V^*$ ausgeht. Insofern berücksichtigt er hier auch nicht die Angaben von $\alpha_1$ und $\alpha_2$, welche eine Strukturierung von $V^*$ nach den Komponenten suggerieren. Diese Komponenten sind die Wirkung von Abbildungen auf der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Die Darstellungen von $\alpha_1$ und $\alpha_2$ beinhalten noch ein zweites Problem, das Herrn Sendig die Auffassung, dass es sich hier um Vektoren handelt, erschweren kann: Diese Objekte sind Abbildungen, welche etwas mit Vektoren tun - in den Darstellungen wird ihre Wirkung auf die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ expliziert. Diese Abbildungen nun ihrerseits auch als Vektoren anzusehen, bedeutet, auf einer höheren Abstraktionsebene die gleichen Strukturen wiederzufinden. Die Abstraktionsstufe, von der zunächst ausgegangen wird, kann aber nun nicht einfach zurückgelassen werden um gänzlich die Sichtweise der höheren Stufe einzunehmen, sondern diese Abbildungen sind auf beiden Abstraktionsebenen zugleich zu behandeln: sie wirken auf Vektoren und sie sind selbst Vektoren.

Die Interviewerin betont (Zeile 304-305) die Sichtweise, dass $\alpha_1$ und $\alpha_2$ Vektoren sind, und notiert $\alpha_1$. Dies kann von Herrn Sendig als Aufforderung verstanden werden, eine formale Darstellung der linearen Unabhängigkeit zu nennen oder anzuwenden. Vielleicht gibt er deshalb nicht eine Antwort, die seiner inhaltlichen Interpretation des Begriffs 'lineare Unabhängigkeit' entspricht, wie z.B.: '$\alpha_1 = \delta\alpha_2$ ist unmöglich.' Seine Wiedergabe der formalen Definition von linearer Unabhängigkeit von Vektoren (Zeile 307) ist sehr verkürzt. Es sieht so aus, dass Herr Sendig diese formale Fassung nicht mit Bedeutung versieht, sondern nur aus seinem Gedächtnis Bestandteile zitiert. Das muss aber nicht sein: Seine Frage "War das nicht so?" zeigt, dass er sich in der Wiedergabe unsicher ist. In seiner Aussage

“$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ daraus würde dann folgen, dass die alle null sind”

ist offen, auf was der Artikel ‘die’ zu beziehen ist:

- Wenn gemeint ist, dass die Abbildungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ null sein müssen, so macht die Aussage nicht viel Sinn, da diese Abbildungen ja vorgegeben sind und nicht null sind.

- Es ist möglich, dass Herr Sendig sagen will, dass die Gleichung nur dann zutrifft, wenn die drei Abbildungen aus der Gleichung verschwinden, d.h. die Summanden der Linearkombination alle drei null sind. Seine formale Darstellung hat das Defizit, dass die variablen Koeffizienten der drei Abbildungen fehlen, durch die es möglich wird, dass die Summanden null werden, ohne dass dazu die Abbildungen selbst zu null werden müssen.

  Der Einwand der Interviewerin, dass noch etwas fehlt, bringt Herrn Sendig genau auf diese Koeffizienten.

Die Frage, wie eine Abbildung null sein kann, beantwortet Herr Sendig (Zeile 320) richtig. Dies zeigt, dass er die Sichtweise, die Zeichen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ als Namen für Vektoren zu betrachten, nicht isoliert einnimmt, sondern zugleich den Charakter von Abbildungen im Blick hat.

## Der Aufbau von Vorstellungen bei Herrn Sendig

In einem ersten Teil wird Herrn Sendigs Vorgehen anhand der in der Feinanalyse besprochenen Schrittfolge zur Konstruktion einer Dualraumbasis dargestellt.

**1. Schritt:** Allgemeine Überlegungen zu linearen Abbildungen
In Bezug auf lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ spricht Herr Sendig mehrere Charakteristika an:

- Diese Abbildungen ordnen jedem Vektor eine Zahl zu.

  Diese Vorstellung ist der erste Referenzkontext, den Herr Sendig heranzieht, um ein Element von $V^*$ anzugeben. Hier werden weitere Eigenschaften nicht berücksichtigt.

- Lineare Abbildungen respektieren Strukturen.

  Diese Eigenschaft als Leitidee zieht weitere Eigenschaften nach sich:
  - Lineare Abbildungen erhalten die Eigenschaft ‘lineare Unabhängigkeit’.
  - Lineare Abbildungen sind injektiv.
  - Lineare Abbildungen sind invertierbar.

- Lineare Abbildungen können durch Matrizen dargestellt werden. Sie sind definiert durch die Angabe der Bilder einer Basis.

- Summen und skalare Vielfache von linearen Abbildungen sind lineare Abbildungen.

- Lineare Abbildungen sind Objekte, die als solche mathematischen Handlungen wie Summenbildung und Vervielfachung unterworfen werden können, und die mathematische Eigenschaften besitzen wie Elemente einer Menge zu sein und linear zu sein. Lineare Abbildungen werden von Herrn Sendig wie verkapselte oder verdinglichte Prozesse behandelt.

**2. Schritt:** Darstellung von linearen Abbildungen (Formalisierung)
Herr Sendig verwendet für seinen ersten Vorschlag für ein Element von $V^*$ die Dartellungsform **(a)**, nämlich die 'Norm'. Die Untersuchung dieses Beispiels auf die Linearitätseigenschaft wird über einen Funktionsterm geführt, den Herr Sendig angibt. Später spricht Herr Sendig die Darstellungsformen **(c)** und **(d)** an, kann sie aber nicht ohne Hilfe konkretisieren, weil er von der Notwendigkeit der Invertierbarkeit der Abbildungen überzeugt ist. Nachdem eine lineare Abbildung in der Darstellungsform **(c)** gemeinsam gefunden ist, kann er diese in die Form **(d)** übersetzen.

Die Formalisierungen **(c)** und **(d)** werden von Herrn Sendig erinnert. Da er erkennt, dass sie im Widerspruch zu seinen Vorstellungen von linearen Abbildungen stehen, wendet er sie jedoch nicht an.

**3. Schritt:** Konstruktion einer Basis von $V^*$ (Konstruktion abstrakter Objekte; Transfer)
Für Darstellungen gemäß **(d)** findet Herr Sendig die Standardbasis als Basis des Dualraums. Nach einer Übertragung dieser in eine Darstellung, die den Abbildungscharakter betont, und insofern mit **(c)** vergleichbar ist, kann Herr Sendig jedoch die Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit an diesen Objekten nicht ohne Hilfe erläutern. Es ist zu vermuten, dass ihm hier der Abbildungscharakter im Wege steht, so dass er die Objekte von sich aus nicht als Vektoren betrachtet und daher die Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit nicht auf sie beziehen kann. Mit Hinweisen der Interviewerin nimmt er die gleichzeitige Sichtweise jedoch ein.

Herr Sendig erkennt dass die Addition und skalaren Multiplikation von linearen Abbildungen wieder zu linearen Abbildungen führt. Hier spricht er von 'Abbildungen' als Objekten. Er scheint die kognitive Konstruktion der abstrakten Objekte 'Abbildungen' vorzunehmen. Mit Anregungen durch die Interviewerin gelingt ihm auch, diese Objekte als Vektoren zu behandeln, indem er eine nur auf Vektoren anwendbare Bezeichnung - lineare Abhängigkeit' - für Abbildungen beschreibt. Dabei berücksichtigt er gleichzeitig die Abstraktionsebenen von $V$, auf dem die Abbildungen operieren, und von $V^*$, in dem die Abbildungen 'Vektoren' sind, ohne sie mit einander zu vermischen.

Den Transfer von Eigenschaften der Basis eines Vektorraums auf den Dualraum nimmt Herr Sendig nicht in der Darstellungsform **(c)** vor. In der Form **(d)** ist eine Basis unmittelbar ersichtlich.

Herr Sendig gibt in diesem Interviewgespräch durch seinen Umgang mit linearen Abbildungen auch Hinweise auf seine Ideen von einem Vektorraum. Diese scheinen gut mit der Komponentenvorstellung beschrieben zu sein, in der eine Ordnung der Elemente nach Komponenten besteht. Diese Kategorien klassifizieren die Elemente nach grundsätzlich verschiedenen Typen, die Herr Sendig als 'Sorten' umschreibt.

Herr Sendig schlüsselt den Raum $V^*$ für sich auf, indem er sich damit auseinander setzt, wie seine Elemente als 'Vektoren' verstanden werden können. Damit bewegt er sich auf der Ebene der Vektorraumstrukturen von $V^*$. Die mentale Konstruktion des Dualraums in sukzessiven Abstraktionsschritten sieht bei ihm so aus:

| Stufe<br>Objekt | kognitive Anforderungen | Vermutetes Konzept<br>von Herrn Sendig |
|---|---|---|
| 1<br>Vektorraum | ∘ Vereinigung von einer Menge und Verknüpfungen<br>∘ Konstruktion einer Struktur | Komponentenstruktur der Vektoren (und zugehörige Operationen) |
| 2<br>lineare Abb. | Verkapselung oder Verdinglichung von Prozessen | Verkapselung oder Verdinglichung des Zuordnens |
| | Transfer von VR-Strukturen | Erhaltung von VR-Strukturen ohne Verlust bedingt:<br>- Invertierbarkeit<br>- Respektieren von Summen- und Vielfachenbildung |
| 3<br>Menge von linearen Abb. | Vereinigung | Menge von Abbildungen |
| | Simultane Berücksichtigung von zwei Wesensarten | VR mit Abbildungen als Vektoren<br>- Respektieren von VR-Strukturen<br>- Bestandteile von VR-Strukturen |

### 3.4.3 Deutung des Dualrauminterviews mit A. Beck

Das Interview mit Frau Beck beginnt mit der Definition des Dualraums von $\mathbb{R}^3$ und der Aufgabe für Frau Beck, ein Element dieses Raums anzugeben. Anschließend dreht sich das Gespräch um die Frage nach einer Basis des Dualraums.

#### Konstruktion einer Dualraumbasis

Die Interviewerin bezeichnet $V = \mathbb{R}^3$ als Menge der Spaltenvektoren und definiert den Dualraum: (b)

$$V^* = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lin. Abb.}\}.$$

Sie fragt zunächst nach einem Beispiel für eine Abbildung, die Element von $V^*$ ist. Frau Becks erster Vorschlag ist 'die Spur', wird aber verworfen, weil sie die Spur einer $3 \times 3-$Matrix, also nicht eines Elements von $\mathbb{R}^3$, meint. Es folgt das Gespräch:

Transkriptausschnitt: (DR, Beck) 19-26

B: Man kann ja auch einfach die Summe machen, also wenn man jetzt halt v eins, v zwei, v drei abbildet auf

(c) * $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \longmapsto v_1 + v_2 + v_3$ *

I: O.k. Ist das sicher, dass das ne lineare Abbildung ist?

B: Denke ich, ja. Eigentlich schon. Ob ich jetzt vorher oder hinterher addiere, ist ja eigentlich egal.

I: Hm.

B: Ob ich vorher multipliziere, ich kanns jetzt gerne aufschreiben.

Frau Beck gibt hier direkt das Bild eines allgemeinen Vektors an. Dieser Definition ist nicht ohne Weiteres anzusehen, dass es sich um eine lineare Abbildung handelt. Frau Becks Erklärung geht auf die Eigenschaften ein, dass Addition und skalare Multiplikation respektiert werden. Sie deutet nur an, dass das Addieren im Definitionsraum

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$

zum Addieren der Bilder $(v_1+v_2+v_3)+(w_1+w_2+w_3) = (v_1+w_1)+(v_2+w_2)+(v_3+w_3)$ passt. Entsprechendes gilt für die Multiplikation. Frau Becks Angebot, den Nachweis aufzuschreiben, lässt vermuten, dass sie eine konkrete Vorstellung von diesem Zusammenhang hat.

Transkriptausschnitt: (DR, Beck) 27-49

I: O.k., ist aber klar, ist ne lineare Abbildung. Kannst du auch ne Basis angeben von dem Raum $V^*$?

B: (6 Sek) Hm. Ja eigentlich müsste ja diese Basis auch aus e eins, e zwei, e drei bestehen, z.B.. Weil ich vom R hoch drei nach R abbilde, also betrachte ich mir den R hoch drei (zeigt in (b) auf $\mathbb{R}^3$) um eine Basis zu finden, weil der Raum (zeigt in (b) auf $V^*$) setzt sich im Prinzip hieraus (zeigt in (b) auf $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$) zusammen. Also muss ich ja zunächst von R hoch drei das Ganze betrachten.

I: Inwiefern ist denn, wenn du sagst, eine Basis könnte e eins, e zwei, e drei sein, inwiefern ist denn e eins ein Element von $V^*$?

B: Ja, das ist ein Element von der Urmenge, nicht Urmenge. Also von hier (zeigt in (b) auf $\mathbb{R}^3$), und somit ist es ja die Ausgangssituation, um abbilden zu können. Man kann natürlich auch, ehm, ne Identität z.B. als ein Basiselement nehmen. Nee.

I: Warum geht das nicht?

B: Das geht nicht, weil, ehm, da müsste hier (zeigt in (b) auf $\mathbb{R}$) $R$ hoch drei stehn.

I: Genau, wir gehen ja nur in den Körper nur. Also müsste noch ein bißchen konkreter, könnte was zu tun haben mit dem e eins, e zwei, e drei, ne? Aber, aber so ganz, das sind erstmal Elemente von dem $R$ hoch drei.

B: Mir ist noch nicht klar, wie man ne Basis von ner Abbildung machen sollte,

I: Eh,

B: oder von ner Menge von Abbildungen. Also weil da müsste man ja als Basis, eh, als Basiselement ne Abbildung nehmen.

48 I: Hm.
49 B: Aber, ich weiß nicht, wie man ne Abbildung als Basiselement darstellt.

Frau Becks erste Antwort (Zeilen 29-30) nennt $e_1, e_2, e_3$ als Beispiel für eine Basis von $V^*$. Das Wörtchen 'auch' weist vermutlich darauf hin, dass diese Vektoren ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. In der Vorlesung wurden die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^n$, hier also des $\mathbb{R}^3$, mit diesen Buchstaben bezeichnet. Hier stellt sich die Frage, was Frau Beck mit der Vokabel 'Basis' meint:

1. Bezeichnet sie eine Basis im mathematischen Sinn?

   Damit würde Frau Beck für den Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ dieselbe Basis verwenden wie für den $\mathbb{R}^3$.

2. Bezeichnet sie eine Basis im umgangssprachlichen Sinn als Grundlage, Sammlung von Grundbausteinen?

Die nächsten Sätze (Zeilen 30-33) leitet sie ein als Erklärung ihrer ersten Antwort, aber vielleicht stellen sie auch eine Fortführung ihrer Gedanken dar:

- Weil sie vom $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ abbildet, schaut sie sich den $\mathbb{R}^3$ an, um eine Basis zu finden.

  Hier beschreibt sie ihr Vorgehen, wie sie eine Basis findet, gibt aber nicht eine Begründung, warum die genannte eine Basis ist. Zu diesem Vorgehen passt die Deutung der Vokabel 'Basis' im umgangssprachlichen Sinn: Weil sie beim $\mathbb{R}^3$ anfangen muss, um sich den Raum $V^*$ zu ordnen, darum ist die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ Grundlage für ihr weiteres Vorgehen. Da sie aber mit Hilfe der Vektoren $e_1, e_2, e_3$ 'eine Basis finden' möchte, ist es auch möglich, dass sie in ihrer ersten Antwort, 'Basis' umgangssprachlich als Grundlage meint, bei der zweiten Verwendung des Wortes aber im mathematischen Sinn versteht.

- Sie muss zunächst von $\mathbb{R}^3$ 'das Ganze' betrachten, weil $V^*$ sich aus '$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$' zusammensetzt.

  Das kann heißen:

  - Der 'ganze' $\mathbb{R}^3$ muss betrachtet werden, da $\mathbb{R}^3$ die Definitionsmenge der Abbildungen ist.

  - Der Raum $V^*$ muss von $\mathbb{R}^3$ aus erschlossen werden, weil der Pfeil und damit die 'ganze' Prozedur von $\mathbb{R}^3$ ausgeht.

Frau Beck spricht das Vorgehen an, wie eine Abbildung, die ein Element von $V^*$ ist, konstruiert wird: Man geht von den Elementen der Definitionsmenge aus. Daher ist das Problem von hier aus aufzurollen. Sie betont die Richtung der Abbildung, dargestellt durch den Abbildungspfeil, und die beiden Vektorräume, zwischen denen abgebildet wird. Sie spricht nicht von einer Abbildung als Ganzes, welches diese Bestandteile zu einem einzigen Objekt vereint. Sie nimmt auf eine Abbildung nur Bezug, indem sie zum Ausdruck bringt, dass sie abbildet, und indem sie mit dem Finger auf die Zeichenkette '$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$' deutet. Sie erwähnt den Raum $V^*$, der sich aus einer oder vielen linearen Abbildungen zusammensetzt, der also ein komplexes Gebilde ist. Aber sie sucht einen Zugang zu diesem Raum nur über ihre Vorstellung von dem, was '$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$' bedeutet, nämlich das lineare Abbilden von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ oder die einzelne oder alle diese linearen Abbildungen. Aus diesem Handeln oder diesen Objekten konstituiert sich der Raum. Er wird vom $\mathbb{R}^3$ aus strukturiert. Die Ausführungen von Frau Beck unterstellen, dass 'zunächst' nur der Definitionsraum der linearen Abbildungen wesentlich für eine Beschreibung dieser Abbildungen ist. Sie bleibt aber dabei stehen, nur den Definitions- und nicht den Zielraum einzubeziehen. Zwei mögliche Erklärungen sind:

- Ihre Äußerungen sind nicht als fertige Antworten, sondern als eine Annäherung an das Problem zu verstehen, den Raum $V^*$ zu erfassen.

- Sie bezieht den Zielraum nicht ein, weil er 'nur Zahlen' enthält und sie ihn nicht als Vektorraum ansieht oder nicht (mit Hilfe einer Basis) organisieren kann. Er scheint zu der Struktur von $V^*$ als Vektorraum nichts beizutragen.

Falls Frau Beck ihre erste Antwort so meint, dass Elemente des $\mathbb{R}^3$ als Basisvektoren (im mathematischen Sinn) für den Dualraum zu verwenden sind, stellt sich natürlich die Frage, wie sie dazu kommt, zwei Vektorräumen, die völlig verschieden aussehen, dieselbe Basis zuzuschreiben. Durchschaut sie, dass ein Vektorraum zu seinem Dualraum isomorph ist, ja, dass man den $\mathbb{R}^3$ mit seinem Dualraum über die kanonische Basis sogar identifizieren kann? Die Antwort $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ aufgefasst als Darstellungsmatrizen von linearen Abbildungen bzgl. der Standardbasen in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}$ ist korrekt. Die nächste Frage der Interviewerin (Zeilen 34-35) zielt darauf ab, ob Frau Beck eine solche Deutung im Sinn hat.

Frau Becks Antwort (Zeilen 36-37) zeigt, dass sie $e_1 \in \mathbb{R}^3$ nicht als Element von $V^*$ im mathematischen Sinn auffasst, sondern dass es in einem bestimmten Sinn zu $V^*$ gehört, nämlich als Element der Definitionsmenge $\mathbb{R}^3$. Der Ausdruck 'Urmenge', den sie selbst als unkorrekt verwirft, kommt vermutlich von der Vorstellung, dass die Definitionsmenge die Urbildmenge der Bilder einer Abbildung $\varphi$ ist. Diese Äußerung ist ein starker Hinweis darauf, dass Frau Beck den Begriff 'Basis' zunächst nicht in seiner mathematischen Bedeutung verwendet, sondern in der umgangssprachlichen Bedeutung als eine Art Grundgerüst zur Beschreibung des Abbildens versteht. Sie bezieht sich mit $e_1$ offenbar nicht auf die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung.

Frau Beck schlägt nun (Zeile 38-40) 'ne Identität' als Basiselement vor, sieht aber selbst sogleich ein, dass diese nicht in $V^*$ liegt, weil Definitions- und Bildraum verschieden sind. Hier verwendet sie wie schon zu Beginn mit der 'Spur' einen Namen für eine Abbildung. Dies deutet darauf hin, dass sie sie als Objekt, nicht als Handlung versteht. Es zeigt außerdem, dass sie nun die Deutung des Wortes 'Basis' wechselt: Während sie vorher eine 'Basis' aus Elementen des $\mathbb{R}^3$ vorschlug, wählt sie nun eine Abbildung. Die Interviewerin (Zeilen 41-43) deutet und bestätigt Frau Becks Antwort im Sinne eines ersten Zugangs, fordert sie nun jedoch auf, einen konkreteren Zusammenhang zwischen der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und $V^*$ zu suchen.

Frau Beck macht nun (Zeilen 44-49) deutlich, dass sie $V^*$ als eine Menge von Abbildungen ansieht. Sie bringt ihr Problem auf den Punkt: Gemäß dem mathematischen Sinn des Wortes wird eine Basis gesucht, deren Elemente Abbildungen sind. Es sieht so aus als hätte Frau Beck zuvor für die Frage nach einer Basis eine Lösung beschrieben, die dieses Problem vermeidet. Eine Erklärung für diese neue Sichtweise kann sein: Sie hat für sich zunächst die Aspekte der Darstellung von $V^*$

betrachtet und gedeutet, die ihr vertraut sind, und die sie ordnen kann. Das ist der $\mathbb{R}^3$ und das Abbilden von dort nach $\mathbb{R}$. Die Bezeichnung ‘Basis’ hat sie dabei unter dem Aspekt betrachtet, sich von einer Grundposition aus den Raum erschließen. Nun ist sie - vielleicht angeregt durch die Zwischenbilanz der Interviewerin - an dem Punkt, die ihr merkwürdig erscheinenden Aspekte von $V^*$ bewusst in den Blick zu nehmen: die Tatsache, dass Abbildungen als Basiselemente auftreten sollen. Die Aussage, dass sie eine Abbildung nicht als Basiselement darzustellen versteht, bedeutet womöglich, dass Frau Beck eine Abbildung überhaupt nicht als Vektor, i.e. als Element eines Vektorraums, ansieht. Dies ist jedenfalls Voraussetzung dafür, dass sie als Basiselement in Frage kommt. Die Eigenschaften einer Basis, nämlich lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensystem zu sein, sind beide ausschließlich für Teilmengen eines Vektorraums definiert.

Im Folgenden wird deutlich, dass Frau Beck neben ihrer ersten Form, eine lineare Abbildung zu definieren, auch die Darstellungsform mit Hilfe einer Basis des Definitionsraums geläufig ist. Auf Aufforderung der Interviewerin hin notiert und berechnet sie für ihre vorherige Abbildung: (d)

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & 1+0+0=1 \\ e_2 & \longmapsto & 0+1+0=1 \\ e_3 & \longmapsto & 0+0+1=1 \end{array}$$

Die Interviewerin fragt dann nach Varianten, die zu anderen Abbildungen führen. Frau Beck versteht die Frage zunächst bezogen auf Bilder weiterer Vektoren unter der angegebenen Abbildung $\varphi$. Das Gespräch setzt sich fort:

Transkriptausschnitt: (DR, Beck) 78-86

I: Und wenn wir sie alle suchen, alle linearen Abbildungen, mit Hilfe von ner Basis von dem $V^*$ werden wir sie ja alle darstellen können.
B: Ja, man müsste als Basis das zusammenfassen. Also die Eigenschaften, die auf die Einheitsvektoren ausgeübt werden, ja, den Einheitsvektoren auferlegt werden. Also wir müssen quasi jede einzelne Abbildung beschreiben können über andere Abbildungen, die man als Basis definiert.
I: Hm.
B: Ist dann die Frage, wie man das macht. Das kann man höchstens über, na ja, Addition und Subtraktion und so was halt.

Frau Beck sieht nun eine Basis von $V^*$ als eine Menge von linearen Abbildungen an, die alle anderen Abbildungen von $V^*$ beschreiben. Diese Elemente von $V^*$ geben den ‘Einheitsvektoren’ ‘Eigenschaften’. Ich vermute, dass Frau Beck hiermit die Bilder meint, die den Standardbasisvektoren zugeordnet werden. Sie spricht hier eine Fülle von Kombinationen der drei Standardbasisvektoren und aller möglichen Bilder von jedem dieser drei Vektoren an, welche durch wenige Abbildungen erfasst werden müssen. Sie beschreibt in den Zeilen 80-83 die Kernidee einer Basis von $V^*$, dass diese alle notwendigen Informationen konzentriert enthält. Sie sieht diese Informationen auf zwei Stufen:

1. Jede Abbildung ist durch ihre Wirkung auf den Einheitsvektoren von $\mathbb{R}$ festgelegt.
2. Eine Basis von $V^*$ muss alle diese Abbildungen beschreiben.

Frau Beck erfasst somit die komplexen Zusammenhänge, die eine Basis in $V^*$ darstellen muss. Sie hat die grundsätzliche Vorstellung, dass diese wenigen Abbildungen durch Addition verknüpft werden können (Zeilen 85-86). Unter den Ausdruck 'und so was halt' kann auch die skalare Multiplikation fallen, aber sie nennt sie nicht explizit und begrenzt die Möglichkeiten auch nicht auf zwei Operationen. Sie deutet hier an, dass eine Strukturierung der Abbildungen gebraucht wird, mit deren Hilfe sie nach wenigen Kriterien beschrieben werden können. Ihr fehlt eine konkrete Umsetzung, mit anderen Worten: eine Formalisierung.

Die Interviewerin gibt nun die Basis $e_1^*, e_2^*, e_3^*$ vor, wobei $e_1^*$ folgende lineare Abbildung ist:

$$\begin{array}{rcl} e_1^* : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & 1 \\ e_2 & \longmapsto & 0 \\ e_3 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

und die beiden anderen analog definiert sind. Frau Beck behauptet, aus diesen kann man alle anderen Abbildungen von $V^*$ kombinieren, und die Interviewerin fragt, wie sie die in (d) angegebene Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & 1+0+0=1 \\ e_2 & \longmapsto & 0+1+0=1 \\ e_3 & \longmapsto & 0+0+1=1 \end{array}$$

darstellt. Nach einer langen Pause antwortet Frau Beck:

Transkriptausschnitt: (DR, Beck) 107-110

B: Da müsste e eins stern. Ist in dem (zeigt in (d) auf $e_1$) Falle ja nichts Anderes als die Abbildung e eins?
I: Ehm, wir haben jetzt, das Bild von e eins meinst du, oder die Abbildung e eins?
B: Ja, das Bild von e eins. Ist ja die Abbildung e eins.

Frau Beck macht deutlich (Zeile 110), dass sie für den mathematischen Begriff 'Bild' auch die Bezeichnung 'Abbildung' verwendet. Die Formulierung „Ist 'ja' die Abbildung e eins" zeigt, dass sie diese Identifikation für allgemeingültig und selbstverständlich hält, und lässt vermuten, dass ihr nicht bewusst ist, dass die beiden Worte von anderen Leuten deutlich unterschieden werden.

Frau Beck will sich versichern (Zeilen 107-108), dass $e_1^*$ im Fall

$$e_1 \longmapsto 1+0+0=1$$

dasselbe ist wie 'die Abbildung $e_1$'. Frau Beck bezeichnet also $e_1^*$ und $e_1$ (in dem Fall $\varphi$) als dasselbe. Somit sind beide Objekte gleicher Art nämlich 'Abbildungen', d.h. Bilder einer Abbildung.

Dann ist die Abbildung $e_1^*$:

$$\begin{aligned} e_1^* : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ e_1 &\longmapsto 1 \\ e_2 &\longmapsto 0 \\ e_3 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

in ihren Augen das Bild dieser Zuordnung. Hier sehe ich zwei Interpretationsmöglichkeiten:

- Das Bild von $e_1^*$ ist 1, nämlich das Bild von $e_1$. Alles andere, was im Bildbereich der Zuordnungsvorschrift von $e_1^*$ steht, ist 0, also nichts. Das kann ignoriert werden.[89] Nicht ganz verständlich ist bei dieser Interpretation die Betonung 'in dem Fall von $\varphi$'. Zwar ist unter $\varphi$ das Bild von $e_1$ ebenfalls 1, aber die Identifizierung von 'Bild von $e_1^*$' und 'Bild von $e_1$' geschieht unabhängig von $\varphi$.

- Das Bild von $e_1^*$ ist das Erzeugnis der drei angegebenen Bilder. Dieses weckt in der gegebenen Notation

  $$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

  die Assoziation mit

  $$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  und erklärt Frau Becks Behauptung, $e_1^*$ und $e_1$ seien dasselbe. Wenn diese Interpretation zutrifft, meint Frau Beck mit 'Abbildung $e_1$' nicht, wie die Interviewerin formuliert, 'das Bild <u>von</u> $e_1$', sondern 'das Bild $e_1$', nämlich der Vektor $e_1$ oder der von $e_1$ erzeugte Raum. Problematisch an dieser Vorstellung ist, dass $e_1$ nicht im Zielraum $\mathbb{R}$ liegt. Da Frau Beck diesen Zielraum in ihren Überlegungen nicht erwähnt, ist es denkbar, dass sie diesen Widerspruch nicht bemerkt. Falsch ist an dieser Vorstellung auch, dass das Erzeugnis von $1, 0$ und 0 anders aussieht, nämlich

  $$\{a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

  Dieser Fehler impliziert, dass Frau Beck sich nicht im Klaren ist, in welcher Weise ein Vektorraum erzeugt wird. Im zweiten Interview hat sie in dieser Hinsicht deutliche Unsicherheiten gezeigt. In diesem dritten Interview gibt es jedoch keine Hinweise darauf.

  Unerklärlich ist bei dieser Deutung wiederum die Betonung im Fall von $\varphi$.

- Vielleicht trifft jedoch die von der Interviewerin vorgeschlagene Bedeutung von Frau Becks Ausdruck 'Abbildung $e_1$' gar nicht ganz Frau Becks Intention. Es mag sein, dass sie zustimmt, weil sie die Bedeutungen dieser beiden Wörter

[89] Diese Interpretation ist gerechtfertigt durch die Tatsache, dass die Sichtweise, dass die Zahl Null gleichbedeutend ist mit 'nichts' unter Schülern weit verbreitet ist.

im Allgemeinen nicht unterscheidet, dass sie aber in dieser Situation eigentlich sagen will: $e_1^*$ ist in dem Fall $\varphi$ ‘das Abbilden von $e_1$’, also die Beziehung, in die $e_1$ und sein Bild durch $\varphi$ gestellt werden.

Zu dieser Reduzierung der Abbildung $e_1^*$ auf ihr Bild von $e_1$ kann Frau Beck durch die Notation $e_1 \longmapsto 1+0+0=1$ veranlasst worden sein. Entsprechend der ursprünglichen Definition von $\varphi$ steht in der Summe $1+0+0$ der $i$-te Summand für die $i$-te Koordinate des Vektors

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Summe als Bild von $e_1$ ist somit ‘in dem Fall’ gleich der ersten Koordinate. Diese wiederum ist der Koeffizient des Vektors $e_1$, wenn er als Linearkombination der Standardbasis dargestellt wird.

Frau Becks Gedankengang sieht dann etwa so aus: Jedes $e_i^*$ berücksichtigt beim Abbilden nur die $i$-te Koordinate eines Vektors, in einer Linearkombination der Standardbasis repräsentiert durch den Koeffizienten von $e_i$. Somit ist $e_1^*$ in einer Linearkombination von $e_1^*, e_2^*, e_3^*$ für das Abbilden von $e_1$ und seine Vielfachen zuständig. Gemäß dieser Interpretation meint Frau Beck eines der beiden Folgenden:

- ‘$e_1^*$ ist dafür zuständig, dass $e_1$ abgebildet wird.’
- ‘$e_1^*$ legt fest, wie $e_1$ abgebildet wird.’

Die zuletzt genannte Vorstellung ist verallgemeinerungsfähig und erfasst gut die Rolle der $e_1^*, e_2^*, e_3^*$: Zur Darstellung einer Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & p_1 \\ e_2 & \longmapsto & p_2 \\ e_3 & \longmapsto & p_3 \end{array}$$

mit Hilfe von $e_1^*, e_2^*, e_3^*$ ist das $p_i$-fache von $e_i^*$ für $e_i$ und seinen Koeffizienten zuständig, wenn eine Linearkombination

$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$$

abzubilden ist:

$$\begin{aligned} (p_1e_1^* + p_2e_2^* + p_3e^*)(v) &= p_1e_1^*(v_1e_1) + p_2e_2^*(v_2e_2) + p_3e^*(v_3e_3) \\ &= v_1p_1 + v_2p_2 + v_3p_3 \\ &= \psi(v) \end{aligned}$$

Das Besondere an dem vorliegenden Fall ist, dass die Komponenten direkt durch $e_i^*$, ohne einen Koeffizienten, vertreten sind, da $\varphi(e_i) = 1$.

Die Deutung des Wortes ‘Abbildung’ im Sinne von ‘Bild’, die Frau Beck in Zeile 110 explizit ausspricht, hat weitreichende Konsequenzen hinsichtlich ihrer inneren Repräsentation des Abbildungsbegriffs. Sie identifiziert eine Abbildung mit dem

Ergebnis des Abbildens. Das ist eine Verdinglichung des Abbildungsprozesses, die jedoch nur die Bilder, nicht Paarbeziehungen zwischen Urbildern und Bildern als Ergebnis einer Zuordnung ansieht. Diese Art der Verdinglichung des Abbildens verfehlt wesentliche Charakteristika der mathematischen Abbildung.

Mit der Vorgabe der Identifizierung von 'Abbildung' und 'Bild' sollen nun die Zeilen 29-36 nochmals betrachtet werden. Dabei wird das Wort 'Abbildung' durch 'Bild' ersetzt. Frau Beck äußert sich zu einer Basis der Menge:

$$V^* = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lineares Bild}\}$$

also zu der 'Menge der linearen Bilder $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$'. Eine Interpretation kann sein: Die Bilder, die in $\mathbb{R}$ liegen, stammen von den Standardbasiselementen des $\mathbb{R}^3$ und ihren Linearkombinationen. Sie werden alle durch diese Standardbasis - nämlich durch lineares Kombinieren und anschließendes Abbilden - erzeugt. Zwei Alternativen sind nun:

- Also ist $e_1, e_2, e_3$ eine Basis von $V^*$.

  Hier wird das Wort 'Basis' im umgangssprachlichen Sinn als System von Grundbausteinen verwendet.

- Also bilden die Bilder von $e_1, e_2, e_3$ eine Basis von $V^*$.

  Hier wird nicht berücksichtigt, dass diese Bilder, die ja alle in dem eindimensionalen Raum $\mathbb{R}$ liegen, linear abhängig sind: Sie bilden ein Erzeugendensystem, nicht eine Basis, von $\mathbb{R}$.

  Es ist aber auch möglich, dass Frau Beck das Erzeugnis der Bilder von $e_1, e_2, e_3$, das als Menge mit $\mathbb{R}$ identisch ist, nicht mit dem eindimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^1$ gleichsetzt, sondern dieses Erzeugnis strukturell als dreidimensionalen Raum, also als $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, versteht. Diese Sicht würde bei einer Abbildung $\varphi$, die $e_1$, $e_2$ und $e_3$ alle auf die Zahl 7 abbildet, drei 'verschiedene' Siebenen berücksichtigen, nämlich $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ und $\varphi(e_3)$.

Diese Interpretation unterstellt, dass Frau Beck das 'Bild' als Bildmenge einer Abbildung nicht losgelöst von der Herkunft der einzelnen Bilder sieht, sondern in irgendeiner Weise eine Verbindung mit den Urbildern für relevant hält.[90]

## Der Aufbau von Vorstellungen bei Frau Beck

Zunächst wird Frau Becks Verhalten in Bezug auf die Konstruktion einer Dualraumbasis entlang den in der Feinanalyse genannten Schritten beschrieben:

**1. Schritt:** Allgemeine Überlegungen zu linearen Abbildungen
Frau Becks Leitidee zum Abbildungsbegriff scheint in der Aussage zum Ausdruck zu kommen, dass 'Abbildung' und 'Bild' dasselbe ist: Das ist ein Hinweis auf ein in seinen Grundzügen umgangssprachlich motiviertes Verständnis des Wortes 'Abbildung'. Die Folgerung, dass Frau Beck unter einer mathematischen Abbildung genau

[90] Diese Interpretation passt zu ihren Äußerungen im Vektorrauminterview, wo sie den Bildraum einer linearen Abbildung dadurch charakterisiert, dass sie ihn mit Hilfe der Bilder derjenigen Basis strukturiert, die in der Darstellung der Abbildung verwendet wird.

die Menge der einzelnen Bilder versteht, ist jedoch zu einfach. Ihr Verhalten im Dualrauminterview zeigt, dass sie einen Bezug der Bildmenge zu der Definitionsmenge in entscheidender Weise in ihre Vorstellungen einbezieht, indem sie diese Bilder mit Hilfe ihrer Urbilder strukturiert.

**2. Schritt:** Darstellung von linearen Abbildungen (Formalisierung)
Frau Beck verwendet als erste Darstellung für eine Abbildung einen Namen, nämlich 'die Spur', also die Repräsentationsform **(a)**, und ändert diesen unpassenden Vorschlag ab zu einer Zuordnungsvorschrift, die zu den Koordinaten eines dreidimensionalen Raums passt. Hier verwendet sie die Darstellungsform **(b)**. Auf Anregung der Interviewerin, eine andere Darstellungsform zu wählen, definiert sie diese Abbildung gemäß **(c)**, indem sie die Bilder der Standardbasis berechnet.

**3. Schritt:** Konstruktion einer Basis von $V^*$ (Konstruktion abstrakter Objekte; Transfer)
Frau Beck wählt keine allgemeine Darstellung von linearen Abbildungen, die vom $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}$ abbilden, um den Dualraum zu strukturieren. Sie nimmt hier keine Formalisierung vor.

Zugang zum Begriff des Dualraums bekommt sie zunächst durch die im Interview gegebene Definition als Menge der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Diese Definition ist in Zeichenform gegeben. Referenzkontext wird für Frau Beck damit zunächst die Vorstellung, die sie von linearen Abbildungen hat, nämlich eine der folgenden:

- Der Dualraum ist eine Menge von Abbildungen, die sehr unterschiedliche Abbildungsvorschriften besitzen.
- Der Dualraum ist eine Menge von Abbildungen, die durch ihr Wirken auf $e_1, e_2, e_3$ charakterisiert sind. Diese Menge wird von Frau Beck gedanklich mit dem linearen Erzeugnis von $(e_1, e_2, e_3)$ identifiziert.
- Der Dualraum ist eine Menge von Teilmengen des Zielraums $\mathbb{R}$.
- Der Dualraum ist eine Menge von Bildmengen, die vom $\mathbb{R}^3$ aus strukturiert sind.

Der Dualraum ist in Frau Becks Vorstellungen zunächst nicht als ein Vektorraum, der eine Vektorraumbasis besitzt, charakterisiert. Sie sucht für diese Menge erst eine Struktur von unten her innerhalb ihres Vorstellungsmodells, wobei sie mit der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$, von dem aus die linearen Abbildungen definiert werden, beginnt. Sie baut damit auf ihre zweite Vorstellung von linearen Abbildungen auf. Frau Beck erarbeitet sich einen Zugang zum Dualraum, der einer Elementtypvorstellung eines Vektorraums entspricht. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über ihren ersten Versuch, die Frage nach einer Basis von $V^*$ zu lösen:

| | Name | Objekt | Strukturierung durch |
|---|---|---|---|
| 1. | $\mathbb{R}^3$ | Vektorraum | Basis $(e_1, e_2, e_3)$ |
| 2. | $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ | lin. Abbildung | Basis $(e_1, e_2, e_3)$ |
| 3. | $V^*$ | Menge von Abb. vom Typ 2. | Basis $(e_1, e_2, e_3)$ |

Frau Beck erkennt, dass die linearen Abbildungen auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert sind, und insofern auf dessen Struktur aufgebaut werden, und dass der Dualraum aus linearen Abbildungen zusammengesetzt ist, und versucht ihn von diesen her zu beschreiben. Dabei erfasst sie die Struktur des Dualraums aber nur soweit, wie sie diese vom $\mathbb{R}^3$ aus aufbauen kann, nämlich die grundsätzliche Idee, wie die Elemente des Dualraums konstruiert werden. Sie kommt nicht zu einer Beschreibung der Vektorraumstruktur des Dualraums. Dafür fehlt der Sichtwechsel, der die linearen Abbildungen als Objekte an sich erfasst, die die Rolle von Vektoren, i.e. von Elementen eines Vektorraums, einnehmen. Sie vollzieht in dieser ersten Beschreibung nicht den Wechsel vom $\mathbb{R}^3$ auf abstraktere Betrachtungsebenen, nämlich zunächst zu linearen Abbildungen auf diesem Raum und dann zum Dualraum, einem Raum von bestimmten linearen Abbildungen.

Frau Becks Ergebnis, das den $\mathbb{R}^3$ mit seinem Dualraum über die kanonische Basis identifiziert, ist der Struktur dieses Raums angemessen. Sie berücksichtigt in ihren Überlegungen jedoch mit keinem Wort den Bildraum der Elemente des Dualraums. Die Tatsache, dass er eindimensional ist, ist für die Dimension drei von $V^*$ von entscheidender Bedeutung. Ihre Überlegungen sind somit verkürzt. In der Anfangsphase der Auseinandersetzung mit dem Dualraum erkennt oder unterscheidet Frau Beck offenbar nicht die zwei Stufen, auf denen die Elemente des Dualraums zu betrachten sind, nämlich die Ebene des Abbildens, auf der man auf eine Basis des $\mathbb{R}^3$ zurückgreifen kann, und die Ebene des Ordnens der Abbildungen, auf der eine Basis aus Abbildungen gesucht wird. Nach einer Phase des Hineindenkens formuliert sie diese Problematik jedoch sehr klar. Hier zeigt sie, dass ihr die Notwendigkeit der Unterscheidung der beiden Ebenen bei gleichzeitiger Berücksichtigung bewusst ist. Die schwierige Formalisierung dieser Ideen gelingt ihr nicht.

In ihrem Versuch, den Dualraum durch eine Basis darzustellen, orientiert Frau Beck sich an Merkmalen der Strukturen des $\mathbb{R}^3$ und der linearen Abbildungen. Sie überträgt hier Vorgehensweisen und Prinzipien, die zur Strukturierung eines Vektorraums sinnvoll sind, auf die neue Menge 'Dualraum'. Dass ihr diese Übertragung nicht vollständig gelingt, liegt daran, dass sie die Abstraktionsebene des Dualraums von $\mathbb{R}^3$ mit Ordnungsmitteln des $\mathbb{R}^3$ zu strukturieren versucht.

Eine Darstellung der drei Objekte $\mathbb{R}^3$, lineare Abbildung und Dualraum mit Hilfe von Basen, die den Wechsel von einer Stufe des Ordnens auf die nächsthöhere Ebene der zunehmend abstrakten Objekte vollzieht, könnte so aussehen:

| | Name | Objekt | Strukturierung durch |
|---|---|---|---|
| 1. | $\mathbb{R}^3$ | Vektorraum | Basis von $\mathbb{R}^3 : (e_1, e_2, e_3)$ |
| 2. | $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ | lin. Abbildung | Angabe der Bilder $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ von $e_1, e_2, e_3$ |
| 3a. | $V^*$ | Menge von Abb. vom Typ 2. | Basis von $V^*$: $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ mit Angabe der Bilder $\varphi_i(e_1), \ldots, \varphi_i(e_3)$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ |
| | konkreter: | | |
| 3b. | $V^*$ | Menge von Abb. vom Typ 2. | Basis von $V^*$: $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ mit $e_i^*(e_i) = 1, e_i^*(e_j) = 0$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $j \neq i$ |

Eine Abfolge von Abstraktionsschritten ist zur mentalen Rekonstruktion des Dualraums notwendig. Frau Beck gelingt dies auf der zweiten und dritten Stufe nur teilweise:

| Stufe<br>Objekt | kognitive Anforderungen | Vermutetes Konzept<br>von Frau Beck |
|---|---|---|
| 1<br>Vektorraum | ∘ Vereinigung von einer<br>Menge und Verknüpfungen<br>∘ Konstruktion eines<br>Ordnungsgefüges | Konstruktion der Elemente<br>aus einer 'Basis' |
| 2<br>lineare Abb. | Verkapselung oder<br>Verdinglichung<br>von Prozessen | Identifikation der Abbildungsprozesse<br>mit ihrem Ausgangspunkt<br>oder ihrem Endpunkt |
| | Transfer von Strukturen | Übertragen der Struktur des<br>Definitionsraums auf<br>· den Bildraum?<br>· die Abbildung?<br>· die Menge der Abbildungen? |
| 3<br>Menge von<br>linearen Abb. | Vereinigung | Innerhalb dieser Menge werden<br>die Elemente des $\mathbb{R}^3$ abgebildet |
| | Simultane Berücksichtigung<br>von zwei Wesensarten:<br>Abbildungen sind zugleich<br>Vektoren | Identifizierung von<br>verschiedenen Objekten:<br>Elemente von $\mathbb{R}^3$ sind zugleich<br>Elemente von $V^*$ |

Im Laufe des Gesprächs entwickelt sich Frau Becks Vorstellung vom dritten Schritt zu:

| Stufe<br>Objekt | kognitive Anforderungen | Frau Becks Konzept |
|---|---|---|
| 3<br>Menge von<br>linearen Abb. | Vereinigung | Vereinigung von Abbildungen<br>(als Bildmengen?) |
| | Simultane Berücksichtigung<br>von zwei Wesensarten | VR mit Abbildungen als Vektoren:<br>- Respektieren von VR-Strukturen<br>- Bestandteile von VR-Strukturen |

Frau Becks Identifizierung von linearen Abbildungen mit ihrem Definitions- oder ihrem Bildraum ist ein Versuch, das abstrakte Wesen dieser Abbildungen, welches dynamische Verbindungen auf statischen Strukturen erfasst, durch den Fokus auf eine statische Struktur zu reduzieren. Diese Strategie zur Vermeidung der Verkapselung des Abbildens passt zu prädikativem Denken.

## 3.5 Die Konstruktion von internen Repräsentationen in den acht Interviewgesprächen: Prozesse und Ergebnisse

In diesem Kapitel sollen grundsätzliche Vorstellungen und Strategien der drei Studierenden herausgestellt werden. Zunächst werden ihre inhaltlichen Vorstellungen der Kernthemen, nämlich der Begriffe ‘Restklasse’, ‘Vektorraum’ und ‘Homomorphismus’ einander gegenüber gestellt, soweit sie aus den Analysen der Interviewgespräche vermutet werden. Im darauf folgenden Abschnitt geht es um die Struktur ihrer internen Repräsentationen und ihre Stragteien zur Verarbeitung mathematischer Informationen.

### Inhalte

Das Restklasseninterview mit Herrn Sendig lässt bei ihm eine Vorstellung vermuten, die der Menge $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ein kompliziertes und nicht korrektes, aber in sich stimmiges Beziehungsgefüge zuweist. Deutlich wird, dass er die ganzen Zahlen als Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ansieht und Restklassen nur eine Ordnungsfunktion zuweist. Dem Gespräch mit Frau Rolle kann ebenfalls eine konsistente Deutung ihrer Äußerungen gegeben werden, welche eine stimmiges Gesamtbild ihrer Vorstellung von Restklassen als abstrakte Objekte ergeben. Als nicht stimmig mit ihrem übrigen Bild erweist sich aber ein Merkmal ihrer Additionsvorstellung, das überhaupt erst durch die Aufgabe im Interviewgespräch in Erscheinung tritt und zuvor vermutlich noch nie zu Ungereimtheiten geführt hat. Frau Becks Äußerungen im Laufe des Gesprächs weisen auf unterschiedliche Vorstellungen vom Wesen von Restklassen hin. Während manche Verhaltensweisen beim Addieren in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ den Schluss nach sich ziehen, dass sie die ganzen Zahlen für die Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ hält, legen andere Äußerungen nahe, dass sie nur die drei Reste $0, 1, 2$ für Elemente hält, und wiederum andere Antworten implizieren, dass die Elemente Mengen sind. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick:

Mögliche Restklassenvorstellungen

| | Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ | Addition |
|---|---|---|
| Sendig | die ganzen Zahlen | in $\mathbb{Z}$ addieren und die Summe<br>in eine Restklasse einordnen<br>Ergebnis: Zahl |
| Beck | die drei Restklassen | - vereinigen oder kart. Produkt bilden<br>- Vertreter in $\mathbb{Z}$ addieren und<br>Restklasse der Summe bestimmen<br>Ergebnis: Menge (Restklasse?) |
| | oder die Reste 0, 1, 2 | in $\mathbb{Z}$ addieren und Rest der Summe bilden<br>Ergebnis: Rest oder Restklasse? |
| | oder die ganzen Zahlen | in $\mathbb{Z}$ addieren und Rest der Summe bilden<br>Ergebnis: Rest |
| Rolle | Restklassen:<br>- $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$<br>- $0 + 3\mathbb{Z}$, $1 + 3\mathbb{Z}$, $2 + 3\mathbb{Z}$ | <br>- weiterzählen im Zyklus<br>- Repräsentanten addieren<br>Ergebnis: Restklasse |

Zu den Vektorraumvorstellungen der drei Interviewten gibt es vielfache Hinweise im jeweils zweiten und dritten Interviewgespräch, nämlich bei der Modellierung der Farbmaschine mit Hilfe eines Vektorraums, bei der Diskussion einer linearen Abbildung zwischen einem Polynomraum und dem $\mathbb{R}^2$, und schließlich bei der Beschreibung des Dualraums des $\mathbb{R}^3$. Ein Interview zu dem letzten Gesprächsthema wurde allerdings nur mit Frau Beck und Herrn Sendig durchgeführt.

Es gibt starke Hinweise darauf, dass Herrn Sendigs interne Repräsentationen des Vektorraumbegriffs der Komponentenvorstellung entsprechen. Er orientiert sich jeweils an der Komponentenstruktur der gegebenen Vektorraumelemente. Im Dualraum als Raum von Matrizen findet er die Komponentenstruktur, jedoch als Raum von linearen Abbildungen fehlt sie ihm. Hier kann er den Raum nur formal hinsichtlich seiner Operationen als Vektorraum anerkennen, kann jedoch einen Begriff wie 'lineare Unabhängigkeit' nicht ohne Hilfestellungen auf lineare Abbildungen beziehen.

Frau Beck zeigt im ersten Teil des zweiten Gesprächs eine Elementtypvorstellung von einem Vektorraum, in der sie sich an den Gegebenheiten der Farben orientiert und von dort aus den Raum mit Hilfe von 4-Tupeln in einer Weise strukturiert, welche die im $\mathbb{R}^4$ üblichen Konventionen verletzt. Im zweiten Teil dieses Gesprächs gibt Frau Beck einer Strukturierung Priorität, welche einen Vektorraum als Erzeugnis einer Basis charakterisiert. Diese Konstruktion trägt Merkmale der Baukastenvorstellung, jedoch mit einem Fokus auf der erzeugenden Basis statt auf den Operationen zum Erzeugen. Im Dualrauminterview geht Frau Beck wiederum von den Elementen des Raums, hier den linearen Abbildungen, aus, und versucht eine Ordnungsystem zu gewinnen, das sie aus den Definitionen der einzelnen linearen

Abbildungen konstruiert. Im ersten Zugang führen verschiedene Fehlvorstellungen und verkürzte Beobachtungen sie zu einer sehr einfachen Basis des Dualraums, die bei Identifizierung des Dualraums mit seinem zugrundeliegenden Vektorraum sogar richtig ist. Nach genauerer Betrachtung des Dualraums macht sie deutlich, dass eine Basis aus Abbildungen bestehen muss.

Frau Rolle orientiert sich nicht am Charakter der Elemente eines Vektorraums, sondern an den dort erlaubten Operationen. Das Ordnungsgefüge eines Vektorraums ergibt sich indirekt aus den Grenzen und Möglichkeiten des Operierens. Sie wird von Frau Rolle nicht thematisiert. Frau Rolles Verhalten passt gut zur Baukastenvorstellung.

Merkmale von Vektorraumvorstellungen

| Interv. | Merkmale | Ordnungsgefüge |
|---|---|---|
| Sendig | | |
| VR | Elemente mit Komponenten | - durch eine kanonische Basis bestimmt |
| DR | - Elemente: lin. Abbildungen (ohne Komponenten) | - Summen- und Vielfachenbildung möglich<br>lineare Unabh. von Abbildungen? |
| | - Elemente: Matrizen (mit Komponenten) | - kanonische Basis |
| Beck | | |
| VR | - Elemente in Beziehungen | - austauschbare Erzeugendensysteme |
| | - Erzeugnis einer Basis | - Jede Basis definiert einen eigenen VR |
| DR | - Elemente: lin. Abbildungen | - kan. Basis des $\mathbb{R}^3$ als Basis der $(\mathbb{R}^3)^*$<br>- Basis aus Abbildungen? |
| Rolle | | |
| VR | Regeln zum Erzeugen von 'Vektoren' | implizit bestimmt durch die Regeln zum Erzeugen |

Allen drei Studierenden sind die formalen Eigenschaften eines Homomorphismus bekannt, dass nämlich für $x, y$ Elemente der Definitionsmenge eines Homomorphismus $f$ gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

und im Falle eines Vektorraumhomomorphismus zusätzlich für jeden Skalar $a$ gilt:

$$f(ax) = af(x)$$

Darüber hinausgehende Konzepte der Interviewten von einem Homomorphismus unterscheiden sich.

Herr Sendig scheint das Wesen von einem Homomorphismus darin zu sehen, dass er Strukturen erhält. Im zweiten und dritten Gespräch mit ihm wirkt sich diese Idee dahin aus, dass er fordert, dass Strukturmerkmale, die er sich für die jeweiligen Definitionsmengen zurechtlegt, von den angesprochenen linearen Abbildungen eins-zu-eins auf die Zielmenge transferiert werden. Wo die Strukturen der Zielmenge nicht in dieser Weise mit den Strukturen der Definitionsmenge oder den Zuordnungsvorschriften für eine Abbildung kompatibel sind, hält er die Homomorphiegleichungen für nicht erfüllbar. Im Restklassengespräch deutet sich die Sichtweise, dass Strukturen respektiert werden müssen, ebenfalls an.

Über Frau Becks Homomorphismusvorstellung ist im Restklasseninterview nicht mehr erkennbar, als dass sie das Respektieren der Summenbildung berücksichtigt. Im Dualrauminterview äußert sie explizit die Überzeugung, dass die Vokabeln 'Abbildung' und 'Bild' dasselbe bezeichnen. Im Vektorrauminterview gibt es implizite Hinweise auf eine solche Vorstellung, in der das Bild einer Abbildung mit dieser identisch ist. Ihre Ideen von linearen Abbildungen scheinen dabei einen Einfluss zu beinhalten, den die Zuordnungsvorschriften auf die Strukturierung des Bildraums haben, indem sie dort ein Erzeugendensystem auszeichnen.

Frau Rolles Vorstellungen von Homomorphismen bleiben sowohl im Restklassen- als auch im Vektorrauminterview eher vage. In beiden Interviews zeigt sie an Beispielen, dass Homomorphismen die oben angegebenen Gleichungen erfüllen müssen, die mit den Operationen im Definitionsraum und im Bildraum zu tun haben. Im zweiten Gespräch zeigt sie keine Vorstellung von der Erhaltung eines Ordnungsgefüges, sondern bindet diese Bedingungen ausschließlich in konkrete Situationen von Beispielen ein. Im ersten Gespräch hingegen behandelt sie die Abbildung, von der sie untersucht, ob sie ein Homomorphismus ist, so, als wäre sie konstituierend für die Verknüpfung im Bildraum. Eine Folge einer solchen Wirkungsweise ist eine Veränderung oder Neuschöpfung der Struktur der Bildmenge. Diese Vorstellung kommt derjenigen nahe, die bei Frau Beck im Zusammenhang mit linearen Abbildungen vermutet werden kann. Ein kleiner Unterschied besteht darin, dass Frau Rolle durch den Gruppenhomomorphismus zu einer neuen Addition in der Bildmenge findet, während Frau Beck durch den Vektorraumhomomorphismus nicht die formalen Strukturen verändert sieht, sondern ein Ordnungsgefüge auf einer höheren Darstellungsebene konstruiert, das auch der Wahl einer speziellen Sichtweise auf den Vektorraum entsprechen könnte.

Merkmale von Homomorphismusvorstellungen

| | Homomorphismus auf $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$ | lineare Abbildung | Darstellungsmatrix |
|---|---|---|---|
| Sendig | - respektiert Summenbildung<br>- respektiert die Strukturen $(\mathbb{Z},\equiv_3,+)$ | - respektiert die Verknüpfungen<br>- identifiziert kanonische Basen | - Notationsform einer linearen Abbildung |
| Beck | - respektiert Summenbildung | - respektiert die die Verknüpfungen<br>- Abbildung = Bild<br>- Legt 'die' Basis des Bildraums fest | - strukturiert den Bildraum |
| Rolle | - Operator, schafft im Bildbereich Strukturen (neue Add.) | - Anwendungsregeln: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $f(ax)=af(x)$ | - Diagramm, auf das ein Operator angewendet wird |

## Strategien und Orientierungspunkte zur Konstruktion von internen Repräsentationen

Bei der Konstruktion von Vorstellungen für komplexe mathematische Begriffe scheint Herr Sendig ein einziges, in sich stimmiges Modell zu bilden, in dem er alle ihm bewussten Aspekte mit einander zu einem zusammenhängenden Komplex verbindet. Diese Modelle entsprechen nicht immer den Definitionen der Begriffe. Dabei erwecken sie den Eindruck, dass die Fehler, die sie enthalten, nicht modellimmanent sind, sondern in Übertragungsfehlern zwischen der formalen mathematischen Sprache und den persönlichen Vorstellungen liegen. Eine Erklärung für solche Übertragungsfehler ist: Sie passieren, wenn Herr Sendig sich einen Sachverhalt nicht vorstellen kann und daher unbewusst explizit genannte Eigenschaften ignoriert oder ebenfalls unbewusst weitere Eigenschaften hinzufügt, die er für unabdingbar hält. Letzteres führt zu einem internen Modell mit einem enger strukturierten Ordnungssystem als dem des modellierten Begriffs. Hinweise auf solche Mechanismen sind in allen drei Interviews mit Herrn Sendig zu finden. Im Verlaufe eines jeden der drei Gespräche stellt er fest, dass Teilaspekte seiner Vorstellungen falsch sind. Er lässt sich für die Dauer eines Gesprächs darauf ein, andere Bedingungen oder Eigenschaften anzunehmen als diejenigen, die die Begriffe in seiner Vorstellung haben. Es zeigt sich jedoch in der Frage der Invertierbarkeit einer linearen Abbildung, dass er zwar im zweiten Interviewgespräch Beispiele von linearen Abbildungen, die nicht injektiv oder nicht surjektiv sind, erkennt, und dass er akzeptiert, dass eine lineare Abbildung weder injektiv noch surjektiv sein muss. Aber er vergisst diese Erkenntnis bis zum dritten Interviewgespräch wieder, was vermuten lässt, dass er sie nicht wirksam in sein internes Modell einbaut. Möglicherweise liegt der Grund darin, dass er an seiner Vorstellung von linearen Abbildungen sehr intensiv gearbeitet hat, um verschiedene Informationen über sie zu verknüpfen, so dass dieses Modell zum Einen gegenüber der neuen Erkenntnis dominierend ist und zum Anderen eine Revision nur mit großem Aufwand und daher auch nur bewusst durchgeführt werden kann, da sie die Infragestellung und gegebenenfalls Neukonstruktion aller Bestandteile erfordert. Bauersfelds (1983) Theorie der subjektiven Erfahrungsbereiche und auch Tall (2004) sprechen von solchen kognitiven Repräsentationseinheiten, die so dominierend sind, dass sie die Aufnahme neuer, ihnen widersprechender Beobachtungen verhindern.

Herrn Sendigs Überlegungen beim Lösen von Aufgaben und bei der Konstruktion von Vorstellungen orientieren sich weitgehend an Begriffen und bedeutungshaltigen Eigenschaften. Er signalisiert Interesse an übergeordneten Ordnungskriterien und Fragen zum Sinn abstrakter Konstruktionen. Er begnügt sich nicht mit dem Verstehen von Verfahren und Argumenten, die sich auf rein diagrammatische Manipulationen gründen, sondern möchte diese Argumente auf eine Ebene transferieren, die ihnen in Bezug auf Begriffe und allgemeine Zusammenhänge Bedeutung verleiht. Dies scheint die Ebene zu sein, auf der er seine internen Modelle anlegt.

Sowohl im Restklassen- wie im Dualrauminterview akzeptiert Herr Sendig Variablen als Namen für die Objekte, von denen die Rede ist, aber in beiden Fällen betrachtet er diese Namen nicht als Objekte eigenen Rechts sondern sieht sie als Bezeichnungen, die auf Objekte von bestimmter Wesensart hinweisen. Im ersten Fall sind dies Restklassen, im zweiten Fall lineare Abbildungen. Generell scheint Herr Sendig Zeichen als Ausdruck von Begriffen zu verstehen. Er übersetzt auch formale Darstellungen von Handlungen oder Beziehungen in begriffliche Vorstellungen. Ein Beispiel ist die Homomorphieeigenschaft einer Abbildung, die formal mit einer (oder zwei) Gleichung definiert wird und die Herr Sendig mit Ausdrücken wie 'Summen im Definitionsraum entsprechen Summen der Bilder' umschreibt. Herr Sendig zeigt an keiner Stelle der Interviews ein diagrammatisches Denken, denn er verzichtet nie auf referentielle Bedeutungen der formalen Zeichen.

Frau Becks Aufbau von einer Vorstellung zu einem gehaltvollen mathematischen Begriff scheint in mehreren Ansätzen zugleich oder neben einander zugeschehen. Diese scheinen nur teilweise mit einander verknüpft zu sein und widersprechen sich in Manchem, wenn man sie als präzise Beschreibungen mit den daraus folgenden Konsequenzen wörtlich nimmt. Das mag aber nicht so ganz Frau Becks Auffassung sein. Sie scheint diese verschiedenen Teilmodelle eher als Repräsentationen von Ideen anzusehen, die auf einige Aspekte des Begriffs hinweisen, die aber nicht vollständig diesen Aspekten entsprechen und die auch nicht in ihrer Gesamtheit den ganzen Begriff exakt repräsentieren. Dieses Bauprinzip interner Repräsentationen deutet sich in allen drei Gesprächen an verschiedenen Inhalten an.

Während der Interviewgespräche treten Widersprüche und Fehler in Frau Becks Vorstellungen nicht so deutlich hervor, dass für sie die Notwendigkeit besteht, ihre Vorstellungen grundsätzlich zu revidieren; es scheint zu genügen, jeweils kleine Ausbesserungen an einzelnen Stellen vorzunehmen, die sie in ihr Modell integrieren kann. Da sie verschiedene Modelle neben einander stehen zu lassen scheint, ohne auf der Konsistenz des Gesamtmodells zu bestehen, kann sie solche kleinen Korrekturen leicht vornehmen, oder durch die Konstruktion eines weiteren Modells aufnehmen, ohne dabei andere Teilmodelle grundsätzlich zu beschädigen.

In der Auseinandersetzung mit gestellten Problemen und beim Aufbau von Vorstellungen orientiert Frau Beck sich sehr vielseitig an unterschiedlichsten Informationen. Es spielen sowohl Begriffe und Ordnungssysteme wie auch formale Darstellungen und die Möglichkeiten der Erfindung und der Manipulation von Diagrammen eine wichtige Rolle. Im Umgang mit bestehenden Diagrammen verzichtet Frau Beck manchmal auf referentielle Bedeutungen der Bestandteile und zeigt diagrammatischem Denken, wenn auch nicht ganz fehlerfrei, denn die Manipulationsregeln ihrer Diagramme sind nicht ganz auf die repräsentierten mathematischen Strukturen abgestimmt. Frau Beck zeigt somit Orientierungen an Zeichen in zwei sehr unterschiedlichen Weisen. Innerhalb eines Problemlösungsvorgangs bleibt sie in den Interviewgesprächen jedoch bei einer Methode und nimmt einen Wechsel erst auf Anregung der Interviewerin vor. Frau Beck scheint sich lange Zeit in zwei verschiedenen mathematischen Welten zu bewegen, die mit wenigen internen Verbindungen neben einander existieren, nämlich in der Welt der formalen Darstellungen und ihrer Manipulationen und in der Welt der bedeutungshaltigen Begriffe und zugehöriger Vorstellungen von mathematischen Beziehungen und Strukturen.

Frau Rolles Vorstellungen von mathematischen Begriffen scheinen keine direkten Repräsentationen von strukturellen Zusammenhängen zu sein, wie wir sie bei Frau Beck und Herrn Sendig finden, sondern eher eine Zusammenstellung von Regeln und Handlungsabläufen in Abstimmung mit Zeichensystemen. Die Objekte, an denen Handlungen stattfinden, sind konkrete Schreibfiguren, und es gibt verschiedene Hinweise darauf, dass Frau Rolle ihnen keine referentielle Bedeutung beimisst. Das Reden und Handeln von Frau Rolle bewegt sich um Tätigkeiten mit diesen Zeichen. In der Beschäftigung mit mathematischen Problemen sucht sie als Erstes nach erlaubten Handlungen, die sie z.B. mit Hilfe von Gleichungen darstellt, manchmal in allgemeiner Form, aber lieber noch in einer Form mit einigen konkreten Objekten. Zu mathematischen Begriffen stellt sie stets eine Verbindung mit bestimmten Zeichen und zugehörigen Handlungen her. Beispiele hierfür sind in beiden mit ihr geführten Interviewgesprächen zu finden.

Zeichen scheinen für Frau Rolle Orientierungspunkte zu sein, auf denen Handlungen möglich sind und die zu bestimmten Handlungen auffordern. Frau Rolle übersetzt Begriffe und Darstellungen von Beziehungen und Eigenschaften in Zeichenkombinationen, die dann Handlungsrituale oder Algorithmen bei ihr aufzurufen scheinen, welche sich manchmal verselbstständigen. Sie deutet Handlungen und Zeichenabfolgen meist nicht von sich aus in allgemeinen begrifflichen Zusammenhängen, sondern allenfalls innerhalb der 'Zeichenwelt'. Sie ist häufig bereit, Diagramme ohne Referenz zur Bedeutung ihrer Bestandteile zu manipulieren. Insofern zeigt sie diagrammatisches Denken. Bei der Konstruktion von Diagrammen zur Darstellung von mathematischen Zusammenhängen macht sie allerdings vielfach Übertragungsfehler.

Vermutete Strategien zum Arbeiten mit internen Modellen

| | Vorstellung | Zeichen | Orientierung |
|---|---|---|---|
| Sendig | ein Bild<br>in sich stimmig, wenig offen für Modifikation | - Symbole für Begriffe | am internen Modell |
| Beck | mehrere (vorläufige?) Teilmodelle z.T. unvereinbar, offen für Modifikationen | - Symbole für Begriffe<br>- Diagramme für Operationen | an einem Teilmodell und an Diagrammen |
| Rolle | - keine direkte Repräsentation als statisches Bild<br>- Handlungsabläufe auf Zeichen | - Hinweise für Operationstypen<br>- Diagramme für Operationen | an Zeichensystemen und an zugehörigen Verfahrensroutinen |

In den Interviewgesprächen ist vielfach der Einsatz kognitiver Werkzeuge zu beobachten. Als Erstes soll hier die Konstruktion neuer Objekte thematisiert werden, welche eine anspruchsvolle mentale Abstraktionsstrategie erfordert. Dazu gehören insbesondere die Strategien der Verdinglichung und der Verkapselung von Prozessen und die Vereinigung von Objekten und/oder Prozessen zur Konstruktion von abstrakten Objekten.[91]

Aus den Interviews kann nicht entschieden werden, ob Frau Rolle und ansatzweise auch Frau Beck die Vereinigung von ganzen Zahlen zu Restklassen als abstrakte Objekte unter Zuhilfenahme der Strategien der Verkapselung oder Verdinglichung vollziehen. Bei dieser Abstraktion stehen nicht Prozesse, sondern die ganzen Zahlen, also Objekte, als Ausgangspunkte im Vordergrund. Ein Zwischenschritt ist dann der Prozess des Ordnens der ganzen Zahlen, durch welchen der Bedarf an Restklassen als Teilmengen von $\mathbb{Z}$ entsteht. In welcher Beziehung dieser Prozess jedoch zu den Restklassen steht, wird in den Interviews nicht angesprochen, denn alle drei Studierenden bewegen sich auf einer Abstraktionsstufe, auf der die Restklassen zumindest als Ordnungsinstumente bereits mental konstruiert sind. Die Schwierigkeit besteht für sie im nächsten Schritt, wo diese Objekte eine neue Rolle einnehmen sollen.

Ein Prozess, der in den Interviews auftritt, ist der Produktionsprozess einer Farbe, der in einer Verdinglichung die Farbe als Ergebnis in den Blick nimmt, und der in einer Verkapselung den Prozess selbst etwa in Form einer Computerinstruktion zur Herstellung einer Farbe als Objekt konstruiert. Das Gegenüber des Produktionsprozesses im Vektorraum ist der Erzeugungsprozess von Vektoren aus einem Erzeugendensystem, wo ebenfalls zu unterscheiden ist, ob das konstruierte Objekt als Erzeugungsprozess in der Angabe der Koeffizienten der zugehörigen Linearkombination gemeint wird, oder ob es als der erzeugte Vektor gedacht wird. Bei Herrn Sendig

[91] Diese Begriffe sind in 1.2.1 definiert.

und Frau Beck ist eindeutig Letzteres der Fall: Sie klammern den Erzeugungsprozess der Farben aus ihrer Modellierung vollständig aus und verwenden ihre Zeichen unmittelbar zur Beschreibung der Farben, indem sie deren Bestandteile an Grundfarben benennen. Frau Rolle verwendet zwar ebenfalls 4-Tupel zur Bezeichnung von Farben, aber diese 4-Tupel sind lediglich Namen ohne unmittelbaren Informationscharakter über Merkmale der Farben oder ihren Herstellungsprozess. Der Prozess selbst, der ihr vorrangig wichtig ist, wird durch die Einzelinformationen für die Zuflussrohre bzw. durch die einzelnen Koeffizienten beschrieben; diese werden von ihr jedoch nicht als Gesamtheit erfasst.

Ein weiterer Prozess ist der Abbildungsprozess. Bei Frau Beck liegt der Fokus hinsichtlich einer linearen Abbildung auf ihrem Ergebnis, wobei ihre Interpretation, ob eine Abbildung durch das Bild oder die Urbild-Bild-Beziehung repräsentiert wird, zu schwanken scheint. Die Identifikation der kanonischen Basen des Definitions- und des Bildraums einer linearen Abbildung im zweiten Interview mit Herrn Sendig deutet ebenfalls auf einen Fokus hin, welcher das Ergebnis des Abbildungsprozesses betont. Im Dualrauminterview könnte seine Verwendung von Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen jedoch eine Betonung des Abbildungsverfahrens vermuten lassen, denn sie sind eine verschlüsselte Form der Zuordnungsvorschrift. Diese Matrizen sind dann als Verkapselung des Prozesses zu verstehen. Frau Beck verwendet eine Darstellungsmatrix im zweiten Interview demgegenüber anders: Die Matrix beschreibt in Frau Becks Bedeutungszuordnung nicht die Abbildungsvorschift, sondern den Bildraum. Frau Rolle schließlich scheint einen Abbildungsprozess ausschließlich als Prozess zu betrachten, ohne den Übergang zu einem Objekt zu vollziehen. Auch eine darstellende Matrix fasst sie nicht als Objekt auf, welches den Abbildungsprozess beschreibt, sondern als Diagramm, auf welchem durch Anwendung eines Operators ein Vektor erzeugt wird.

Beispiele für die mentale Konstruktion neuer Objekte

| | Restklasse | Produktionsprozess | lineare Abbildung |
|---|---|---|---|
| Sendig | ——<br>(nur Instrument zum Ordnen) | Verdinglichung<br>(Farbe) | - Verdinglichung<br>(paarweise Identifizierung von Basisvektoren)<br>- Verkapselung ?<br>(Darstellungsmatrix) |
| Beck | Vereinigung ?<br>(oder nur Instrument zum Ordnen) | Verdinglichung<br>(Farbe) | - Verdinglichung<br>(Abb.matrix als Repräsentation des Bildes)<br>(Abb. als Beziehung zw. Definitions- und Bildraum) |
| Rolle | Vereinigung<br>(Menge) | —— | ——<br>(Matrix nur als Diagramm zum linearen Kombinieren) |

Neben der Konstruktion von abstrakten Objekten soll noch der Einsatz der kognitiven Werkzeuge des Sichtwechselns, des Transfers und des Formalisierens angesprochen werden. Einige in den Gesprächen beobachtete Beispiele sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

Beispiele für den Einsatz kognitiver Werkzeuge

| | Sichtwechsel | Transfer | Formalisierung |
|---|---|---|---|
| Sendig | - von Objekttypen<br>(lineare Abbildungen<br>als Dualraumelemente)<br>- von Betrachtungsebenen<br>(Details zu Strukturen) | - von Beziehungen<br>(lineare Abbildung<br>transferiert<br>VR-Strukturen)<br>- von Begriffen<br>(zw. math. VR<br>und Farbenraum) | - von Objekten<br>(Farbenraum als $\mathbb{R}^4$) |
| Beck | - von Objekten<br>(von Elementen der Restkl.<br>zu den Restklassen)<br>- von Beschreibungsmitteln<br>(kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$<br>als Basis des Dualraums) | - von Beziehungen<br>(lineare Abbildung<br>strukturiert<br>Bildraum vom<br>Def.raum aus<br>- von Begriffen<br>(zw. math. VR<br>und Farbenraum) | - von Objekten<br>(Farbtypen<br>als 4-Tupel)<br>(lin. Abbildungen<br>durch Matrizen) |
| Rolle | - von Objekttypen<br>(Restklassen als Objekte) | - von Handlungen<br>(Erzeugen von<br>Farben/Vektoren) | - unvollständiger<br>Bedeutungstransfer<br>(Restklassenadd.)<br>(Linearkombination) |

In den internen Strategien der Studierenden zur Verarbeitung und zum Gebrauch mathematischen Wissens spiegeln sich insbesondere auch Merkmale funktionalen und prädikativen Denkens wider. In der folgenden Tabelle sind einige Beobachtungen ihres Vorgehens aufgezeigt. Einige können deutlich den Präferenzen für einen Denkstil zugeordnet werden, andere sind nicht ohne Weiteres typisch für diesen Denkstil. Bei Herrn Sendig ist in dem kleinen Vortest eine Präferenz für prädikatives Denken, bei Frau Rolle eine Präferenz für funktionales Denken festgestellt worden. Dies passt gut zu Beobachtungen in den Interviewgesprächen. Bei Frau Beck war der Vortest nicht aussagekräftig. In den Interviewgesprächen gibt sie vielfache Hinweise für eine Präferenz prädikativen Denkens.

Bemerkenswert ist insbesondere, dass Frau Rolle von den Dreien am Leichtesten mit Restklassen als Objekten umgeht. Diese mentale Konstruktion von abstrakten Objekten ist eine große Herausforderung an Lernende. Ihr Ergebnis besitzt statischen Charakter und scheint somit für Menschen mit einer Präferenz für prädikatives Denken leichter zu erfassen zu sein. Eine Erklärung für die Beobachtungen kann folgende sein: Alle drei Studierenden sind mit der Aufgabe überfordert, Mengen als

Objekte zu erfassen, welche Zahlen vergleichbar sind. Konfrontiert mit dieser Forderung, suchen sie nach Ausweichstrategien. Frau Rolle wählt eine Strategie, bei der sie den Charakter der Objekte, mit denen sie umgeht, ignorieren kann: Sie konzentriert sich auf die vorgegebenen Rechenverfahren. Diese sind klar und einfach zu handhaben. Frau Rolles Strategie ist sinnvoll und in vielen Situationen tragend. Dass es bei Frau Rolle auf einem fehlenden tieferen Verständnis beruht, zeigt sich, als das Problem auftaucht, dass ihre beiden Verfahren nicht zu demselben Ergebnis führen. Sie ist dann nicht an einer Erklärung interessiert, warum die Ergebnisse verschieden sind, sondern lediglich daran, das falsche Verfahren zu korrigieren. Dies ist ein Zeichen dafür, dass sie sich nicht auf eine echte Auseinandersetzung mit den zugrunde liegenden Sachverhalten einlassen möchte. Herr Sendig hingegen konstruiert eine komplizierte Darstellung der Modulo-Beziehungen zwischen Zahlen mit Hilfe des Instruments ‘Restklassen’. Seine Orientierung an Wesensmerkmalen schließt für ihn die Strategie von Frau Rolle aus, die Wesensmerkmale der Objekte ‘Restklassen’ als Mengen zu ignorieren. Der Schritt, Restklassen zugleich als Mengen und als Objekte mathematischer Handlungen zu sehen, ist ihm in diesem Stadium seines Lernens noch zu schwierig. Frau Becks Umgang mit Restklassen kann ein Hinweis darauf sein, dass sie an dieser Idee arbeitet, sie einerseits als Mengen, andererseits auch als Objekte mathematischer Handlungen anzusehen. Diese gleichzeitige Betrachtung gelingt ihr noch nicht ganz, sondern sie wechselt zwischen den Sichtweisen, was auf den ersten Blick den Eindruck erweckt, dass sie widersprüchliche Modelle neben einander stehen lässt ohne dies zu bemerken.

Ein Arbeiten mit Diagrammen ist an sich nicht typisch für einen der beiden Denkstile, sondern kann mit beiden Präferenzen wirkungsvoll genutzt werden. Die Art, wie Frau Rolle mit Diagrammen umgeht, zeigt einen auffälligen Schwerpunkt bei den dort möglichen Handlungen im Gegensatz zu der Übertragung von Bedeutung zur Konstruktion der Diagramme, oder zum Suchen von Mustern, welche Schlussfolgerungen aus den Ergebnissen zulassen. Untypisch für funktionales Denken ist an ihrem Verhalten jedoch die Tatsache, dass die Wirkung ihrer Operationen im Diagramm nicht immer zu den repräsentierten Operationen passt.

Denkstiltypische Vorgehensweisen und Orientierungen

| | Merkmale | Denk-stil |
|---|---|---|
| Sendig | - Denken orientiert an Beziehungen und Begriffen | präd. |
| RK | - '4 plus 7' als Zahl (nicht als Handlung) | präd. |
| | - verbale Beschreibungen statt Durchführung konkreter Handlungen | präd. |
| | - Vorstellung eines komplizierten Beziehungsgefüges von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ statt Vorstellung von Restklassen als abstrakte Objekte | ? |
| VR/DR | - Ignorieren des Produktionsprozesses von Farben | präd. |
| | - Priorität der Gleichheit von Strukturierungen von Definitions- und Bildraum vor der Wirkung der Operationsvorschriften für eine lineare Abbildung | präd. |
| | - Priorität des Wesensmerkmals 'Abbildung' vor dem Wesensmerkmal 'Vektor' | ? |
| Beck | - Denken orientiert an Beziehungen und Begriffen | präd. |
| RK | - Erfinden einer Addition für Restklassen | ? |
| | - Wechseln zwischen verschiedenen, unvereinbaren Restklassenvorstellungen und Additionen | ? |
| VR/DR | - Ignorieren des Produktionsprozesses von Farben | präd. |
| | - Lineares Kombinieren nur theoretische Idee | präd. |
| | - Ersetzen des Abbildungsprozesses durch statische Objekte (Bilder) oder Beziehungen (Bilder-Urbilder) | präd. |
| | - Orientierung an statischen Beziehungsgefügen, die durch Basen vorgegeben sind | präd. |
| Rolle | - Denken orientiert an Handlungen | funk. |
| | - Diagramme als Grundlage für Operationen | ? |
| RK | - Interesse an der Einsatzfähigkeit von Zeichen/Diagrammen für Operationen | funk. |
| | - Vorstellung von Restklassen als abstrakte Objekte | ? |
| VR | - Transfer der Farbmaschine auf einen VR ist auf Operationen beschränkt | funk. |
| | - Zeichen als Handlungsaufforderungen statt als Symbole für Begriffe ($x + 1$: einsetzen für $x$, dann 1 addieren) | funk. |

Alle drei Studierenden sind in der Auseinandersetzung mit mathematischen Begriffen verschiedentlich mit kognitiven Anforderungen konfrontiert, denen sie nicht gerecht werden. Ihre meist unbewussten Strategien im Umgang mit diesen Überforderungen sind ähnlich. Sie bestehen darin, Informationen, die etwa eine formale Definition beinhaltet, zu übersehen oder zu vereinfachen, so dass sie in ihre Vorstellungen hineinpassen. Herr Sendig übersieht z.B. die Tatsache, dass eine Menge von Restklassen Mengen statt Zahlen als Elemente besitzt, Frau Beck übersieht die Tatsache, dass die Elemente des Dualraums von $\mathbb{R}^3$ nicht mit den Elementen von $\mathbb{R}^3$ identisch sind, und Frau Rolle ignoriert die Bedeutung mancher Zeichen, z.B. der Notationen für Restklassen, wenn sie ihre Weiterzählstrategie anwendet. Eine andere Form von Ignorieren bestimmter Informationen geschieht durch Assoziationen mit äußeren Darstellungen, seien es Zeichen oder Worte. Dies ist bei Frau Beck und Frau Rolle zu beobachten. Frau Beck lässt sich von der Alltagsbedeutung des Wortes 'Abbildung' statt von der formalen Definition leiten, und Frau Rolle ordnet dem Zeichen '$x$' die in der Schule meist verwendete Aufgabe zu, dass es zum Einsetzen reeller Zahlen auffordert, statt es als Element eines Polynomraums anzusehen. Herr Sendig und Frau Beck passen die Informationen, die sie über den Zusammenhang von der Struktur eines Vektorraums und dem Basisbegriff haben, an ihre persönlichen Ideen an, wie eine Strukturierung durch eine Basis aussehen kann.

Die Untersuchungen mit Herrn Sendig, Frau Beck und Frau Rolle zeigen eine große Vielfalt an Vorstellungen, die mathematische Ideen und Begriffe intern repräsentieren. Die vermutlichen persönlichen Modelle und Strategien der Drei im Zusammenhang mit einzelnen Inhalten und Aufgaben weisen erhebliche Unterschiede hinsichtlich der internen Repräsentationsformen, der Orientierungspunkte und des Gebrauchs von Zeichen auf. Dabei gibt es starke Hinweise auf individuelle Grundmuster, die bei unterschiedlichen Inhalten wiederkehren, und die sowohl die Grundprinzipien des Aufbaus von Vorstellungen wie auch den Einsatz dieser Vorstellungen beim Denkprozess betreffen. Die drei Proband(inn)en sind selbstverständlich nicht repräsentativ für die Hörenden einer Einführungsvorlesung zur linearen Algebra, so dass die bei ihnen vermuteten Strategien und Vorstellungen nicht als typisch und schon gar nicht als erschöpfend bezeichnet werden können. Jedoch lassen bereits diese Untersuchungen mit nur drei Interviewten ein weites Spektrum von Vorstellungen und Vorgehensweisen erwarten.

# Kapitel 4

# Eine zweite empirische Untersuchung

In zweierlei Hinsicht wurden die Ergebnisse der Interviewstudie in einem kleinen Nachfolgeprojekt aufgenommen und weitergeführt.

1. Der erste Teil des Projekts stellte eine kurze Unterrichtsreihe dar, in der die Hypothesen fruchtbar gemacht werden sollten, die sich aus den Beobachtungen der Pilotstudie zur mentalen (Re)konstruktion von abstrakten Begriffen durch die drei Interviewten ergeben.

2. Den Abschluss des Projekts bildete eine zweite empirische Studie auf einer quantitativ breiteren Basis, die die in der Unterrichtsreihe geförderten Vorstellungen von Studierenden untersuchen sollte.

Eine Konsequenz, die die Mitglieder der amerikanischen Gruppe LACSG[1] aus frustrierenden Erlebnissen mit Unverständnis von Studierenden ziehen, ist, abstrakte, konzeptionelle Anforderungen zumindest in einem ersten Kurs zur linearen Algebra zu vermeiden und sich stattdessen auf den Umgang mit Matrizen zu konzentrieren. Auch Sierpinska (2000) äußert die Vermutung, dass theoretisches, auf mathematische Strukturen und Begriffe bezogenes Denken viele Studierende überfordert. Demgegenüber steht die epistemologische Analyse der linearen Algebra durch Dorier (2000), in der er überzeugend darlegt, dass Wesen und Stärke der modernen linearen Algebra durch die Formalisierung abstrakter Ideen konstituiert werden. Didaktiker, die konstruktivistischen Lernvorstellungen folgen, betonen, dass das Lernen von Mathematik nicht ohne eine persönliche interne (Re)konstruktion der mathematischen Begriffe und Zusammenhänge möglich ist.[2] Somit kann der Kern der heutigen linearen Algebra nicht unter weitgehender Vermeidung abstrakter Ideen gelernt werden. Meines Erachtens ist ein solches Ausweichmanöver auch nicht erforderlich:

Die Interviewgespräche der in dieser Arbeit vorgestellten Pilotstudie zeigen eine große Vielfalt individueller Ausprägungen hinsichtlich Vorstellungen und Strategien zur Verarbeitung von Strukturen in der linearen Algebra. Es wird ein hohes Potential zur Konstruktion von internen Repräsentationen sichtbar, aber auch eine große

[1] Siehe Carlson et al. (1997).

[2] Siehe Abschnitt 1.1. In der Auseinandersetzung mit den Vorschlägen der LASCG zum Lehren der linearen Algebra wird dies insbesondere von Dubinsky (1997) und Harel (1997) bestätigt.

Anfälligkeit für Fehlvorstellungen. In Tests, die Daten danach auswerten, ob sie den mathematischen Normen gerecht werden oder nicht, liegt die Schlussfolgerung nahe, dass auf den ersten Blick völlig falsche Antworten darauf hinweisen, dass Begriffe nicht mental verarbeitet wurden. Die hier beschriebenen Interviewgespräche zeigen jedoch, dass Anzeichen für ein Nichtverstehen nicht zugleich Anzeichen für fehlende Auseinandersetzung mit der Thematik sind. Manche zunächst unsinnig erscheinenden Äußerungen resultieren aus einer fehlerhaften, aber durchaus sinnvoll konstruierten, in großen Teilen nützlichen, und vor allem korrigierbaren Vorstellung. Diese Studie zeigt, dass ein Lehrender bei den Lernenden mit einem beträchtlichen Potential zur sinnhaften Verarbeitung von mathematischen Strukturen rechnen kann, und dass es sich lohnt, Lernenden Zeit und Anstöße zu geben, eigene Vorstellungen zu konstruieren, aber auch, dass Anregungen gebraucht werden, um diese zu hinterfragen, zu korrigieren und auszubauen.

In die Interviews selbst fließt nicht nur der aktuelle Stand von Kenntnissen, Vorstellungen und Vorgehensweisen der drei Studierenden ein, sondern es spiegeln zuweilen auch Weiterentwicklungen der Vorstellungen wider. Diese wurden durch kognitive Konflikte, in die die Interviewten durch die gestellten Aufgaben gebracht wurden, ausgelöst. Ein wesentlicher Motor für Lernfortschritte war die Herausforderung, ihre noch vagen Vorstellungen und Ideen nicht nur anzuwenden, sondern auch mitzuteilen und so ihre kognitiven Konflikte zu thematisieren. In einem Unterrichtsdesign für eine größere Anzahl von Studierenden, in dem die direkte Rückmeldung fehlt, kann zum bewussten Umgang mit dem eigenen Handeln durch die Aufforderung, sich schriftlich zu erklären, angeregt werden. Wie von Lengnink/Prediger (2000) dargelegen, ist eine solche Reflexion auch im Hinblick auf sinnstiftendes Lernen wünschenswert. Auch Dorier et al. (2000b) betonen in ihrem Unterrichtsdesign zur linearen Algebra die Bedeutung der bewussten Auseinandersetzung mit Strukturen und Leitideen der mathematischen Theorie durch die Lernenden.

Zudem gibt die Beobachtung, dass individuelle Prioritäten beim Lernen eine große Rolle spielen, Anlass für ein vielfältiges Angebot zur Erschließung abstrakter oder strukturell komplexer Begriffe. Die Lernumgebung für das angesprochene Unterrichtsprojekt sollte diesen Merkmalen Rechnung tragen.

## 4.1 Ein Unterrichtsprojekt zu Restklassen

Im Rahmen von Präsenzübungen, die den Lehramtsstudierenden für die Sekundarstufe II in ihrem ersten Semester begleitend zu der Vorlesung "Lineare Algebra und Analytische Geometrie I" im Wintersemester 03/04 angeboten wurden, wurde eine Reihe von drei anderthalbstündigen Übungen zu "Restklassen" durchgeführt, bevor diese in der Vorlesung thematisiert wurden. Die Studierenden sollten vier Aufgaben in Kleingruppen bearbeiten, und jeweils in der gesamten Gruppe diskutieren, bevor sie die nächste Aufgabe erhielten. Die Aufgaben lauteten im Einzelnen:

**Aufgabe 1:**

a) Begründen Sie: Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist gerade.
Welche anderen Aussagen über Summen und gerade und ungerade Zahlen können Sie machen und begründen?

b) Eine Zahl ist gerade, wenn sie durch zwei teilbar ist, ungerade, wenn sie nicht durch zwei teilbar ist. Betrachten Sie nun das Teilen durch drei:
Suchen Sie ähnliche Aussagen über Summen wie beim Teilen durch zwei!
c) Untersuchen Sie die gleichen Fragen für andere natürliche Zahlen.

**Aufgabe 2:**

a) $R_n$ sei die Menge der Reste, die man beim Teilen von natürlichen Zahlen durch die natürliche Zahl $n$ erhalten kann.
Definieren Sie eine Addition für diese Reste, die zu den Ergebnissen von Aufgabe 1 passt: Was soll die Summe von zwei bestimmten Resten sein? Wie in Aufgabe 1 ist es möglicherweise sinnvoll, diese Aufgabe zunächst für ein $n$, z.B. für $n = 3$ zu lösen.
b) Versuchen Sie auch für die anderen Rechenarten, die Sie von den natürlichen Zahlen kennen, entsprechende Rechenarten für $R_n$ zu definieren. Überlegen Sie sich, was Sie unter 'entsprechend' verstehen.

**Aufgabe 3:**

a) Wir färben die ganzen Zahlen (Sie bilden die Menge
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$) auf dem Zahlenstrahl so, dass jede vierte Zahl mit derselben Farbe versehen wird, wobei wir die Farben rot, blau, grün, schwarz (in dieser Reihenfolge) verwenden. Diejenigen Zahlen, die dieselbe Farbe erhalten, bilden jeweils eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$, welche die gemeinsame Farbe als Namen erhalten soll.
- Geben Sie an, welche Zahlen Sie mit rot, blau, ... färben wollen, d.h., welche Zahlen zu der Menge 'rot', zu der Menge 'blau', ... gehören sollen.
- Erklären Sie, was die Menge $F = \{\text{rot, blau, grün, lila}\}$[3] bedeutet!
b) Wir stellen uns nun vor, dass wir den gefärbten Zahlenstrahl so zu einer Spirale aufwickeln, dass jeweils gleiche Farben über einander liegen, und diese Spirale dann zusammenschieben, so dass ein Kreis entsteht, auf dem in gleichmäßigen Abständen die vier Farben markiert sind.
Eine Addition von zwei Zahlen kann man am Zahlenstrahl verdeutlichen, indem man vom Ort des ersten Summanden aus soweit vor oder zurück geht, wie der zweite Summand angibt.
- Veranschaulichen Sie diese Beschreibung an einem Beispiel.
- Kann man ein entsprechendes Additionsverfahren auf dem Kreisschema angeben?
- Definieren Sie eine 'Addition' auf der Menge $F$!

**Aufgabe 4:**

Wie in einer Schule die vielen Schüler in Klassen eingeteilt werden, teilen wir in dieser Aufgabe die ganzen Zahlen in Klassen ein.
a) Ein Vorschlag zum Verfahren, wie die neuen Erstklässler einer Schule in Klassen eingeteilt werden sollen, ist folgender: Jeder Schüler soll genau mit denjenigen Schülern in einer Klasse sein, deren Nachnamen einen gemeinsamen Buchstaben mit seinem eigenen Nachnamen besitzt.
- Was meinen Sie zu dieser Einteilung? Unter welchen Umständen ist sie praktikabel? Wann ist sie unbrauchbar?

[3]'lila' ist ein Schreibfehler auf dem Übungsblatt. Die Farbe ist durch 'schwarz' zu ersetzen.

- Geben Sie ein anderes Verfahren an, dass in jedem Fall durchführbar ist.
b) Nun teilen wir die ganzen Zahlen in Klassen ein. Dazu geben wir zunächst irgendeine natürliche Zahl $n$ vor und definieren:
Definition: Eine ganze Zahl $a$ heißt *kongruent modulo* $n$ zu einer ganzen Zahl $b$, wenn ihre Differenz $a - b$ durch $n$ teilbar ist.
(Bemerkung: Eine ganze Zahl ist durch vier teilbar, wenn man sie als Produkt aus vier und einer weiteren ganzen Zahl darstellen kann, z.B. $-8 = 4 \cdot (-2)$).
Wir erklären nun indirekt, wie die Einteilung der ganzen Zahlen in 'Klassen' aussehen soll. Wir geben diesen Klassen den Namen *Kongruenzklassen modulo* $n$:
Definition: *Kongruenzklassen modulo* $n$ sind Teilmengen von $\mathbb{Z}$ mit folgender Eigenschaft: Je zwei ganze Zahlen sollen genau dann in derselben Kongruenzklasse modulo $n$ sein, wenn sie kongruent modulo $n$ sind.
- Führt diese 'Definition' zu Widersprüchen? Überlegen Sie sich für $n = 4$, ob die Einteilung in Kongruenzklassen eindeutig ist. (Tipp: Versuchen Sie, die Elemente der Klassen anzugeben.)
- Vergleichen Sie sowohl die fertige Einteilung als auch das Verfahren zur Einteilung der ganzen Zahlen in Kongruenzklassen mit Ihrem Vorschlag zur Einteilung von Schülern einer Schule in Schulklassen.
c) Was haben die Kongruenzklassen mit den Aufgaben 1, 2 und 3 zu tun?
In einer Schule werden manchmal nicht alle einzelnen Schüler berücksichtigt, sondern nur die Klassen: So gibt z.B. ein Raumplan nur an, welche Klasse wann in welchem Raum unterrichtet wird, er gibt jedoch nicht vor, an welchem Platz der einzelne Schüler sitzen soll. Etwas Ähnliches sollen Sie mit den Kongruenzklassen versuchen. Anstelle des Raumplans für Schulklassen nehmen wir die 'Addition' von Kongruenzklassen:
Definieren Sie, wie man Kongruenzklassen modulo $n$ 'addieren' könnte.[4]

Die erste Aufgabe verlangt, Aussagen über Reste von Summen von ganzen Zahlen bzgl. dem Teilen durch eine vorgegebene Zahl zu machen und zu begründen. Sie regt eine forschende Haltung in Bezug auf ganze Zahlen an und legt das Ordnen der ganzen Zahlen nach Resten nahe. Sie lässt Freiraum, zwischen formalen und rein inhaltlich-sachlichen Darstellungen zu wählen. Diese Aufgabe soll zu einer aktiven Auseinandersetzung mit Mathematik und zur Konstruktion von Vorstellungen durch bewusstes Ordnen ermutigen.

Die zweite Aufgabe fordert dazu auf, auf der Menge der Reste bzgl. einer gegebenen Zahl eine Addition zu definieren. Sie erfordert eine Diskussion, was eine solche Definition leisten soll und die Suche nach einer formalen oder verbalen Darstellung einer entsprechenden Definition. Hier sind die Lernenden aufgefordert, eine eigene Konstruktion einer Operation vorzunehmen, die durch die Orientierung an bestimmten Zielen reflektiert wird.

Die dritte Aufgabe leitet die Studierenden zu einem Verfahren zum Identifizieren der ganzen Zahlen an, deren Abstände Vielfache von vier betragen, und fordert

[4]Das Beispiel der Raumpläne sollte verdeutlichen, dass eine 'Klasse' nicht nur als Ordnungsinstrument eingesetzt wird, sondern auch als eigenständiges Objekt behandelt wird. Das Beispiel stellt keine direkte Analogie zu der Addition von Kongruenzklassen dar und ist insofern etwas unglücklich gewählt.

eine Addition, welche die Veranschaulichung der Addition in $\mathbb{Z}$ an der Zahlengraden durch 'Weiterzählen' auf die Restklassen überträgt. Das Zusammenfassen ganzer Zahlen zu Restklassen und das Benennen dieser Klassen nach Farben soll den Lernenden helfen, eine echte Mengenvorstellung von Restklassen zu konstruieren und diese Mengen dann als Objekte zu behandeln, ohne sie gedanklich durch je einen Repräsentanten zu ersetzen. Die Addition als Weiterzählen, die von Frau Rolle in der Pilotstudie favorisiert wurde, ist ein Angebot, das manchen Lernenden vielleicht hilfreich ist.

Die vierte Aufgabe schließlich gibt eine formale Definition von Kongruenzklassen modulo einer gegebenen natürlichen Zahl $n$ durch die Kongruenzrelation vor, welche besagt, dass zwei Zahlen kongruent sind, wenn ihre Differenz durch $n$ teilbar ist. Die Studierenden werden aufgefordert, eine Addition für die Kongruenzklassen zu definieren. Die Aufgabe verlangt zudem einen Vergleich der drei Konstruktionen. Diese Aufgabe soll den Übergang zu formalen, für die Vorlesung typischen Definitionsdarstellungen veranlassen, indem sie die Studierenden mit einer Definition dieses Typs konfrontiert und Anregungen zur ihrer Erschließung gibt. Der Vergleich der drei Konstruktionsmethoden von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, die in den Aufgaben 2, 3 und 4 durchgeführt werden, spricht eine Metaebene des Nachdenkens über das mathematische Handeln an.

In der folgenden Präsenzübung erhielten die Studierenden die Aufgabe, ihre Vorstellungen von Restklassen in einem kurzen Aufsatz darzulegen. Dieser Übung ging eine Vorlesungsstunde voraus, in der Faktorgruppen formal definiert und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als Beispiel genannt wurde. Diese Menge wurde als Menge der Elemente $m + n\mathbb{Z}$ definiert und mit der Addition versehen, bei welcher die Summe zweier Elemente die Menge aller Summen ist, welche aus einem Element des ersten Summanden und einem Element des zweiten Summanden gebildet werden können. Als Beispiel wurde dazu gegeben:

$$\begin{array}{ccccc} \{\ldots,-1,6,13,\ldots\} & + & \{\ldots,-4,3,10,\ldots\} & = & \{\ldots,-5,2,9,\ldots\} \\ 7\mathbb{Z}+6 & + & 7\mathbb{Z}+3 & = & 7\mathbb{Z}+2 \\ \overline{6} & + & \overline{3} & = & \overline{9}=\overline{2} \end{array}$$

## 4.2 Methodologie der zweiten empirischen Untersuchung

### 4.2.1 Die Konzeption der Untersuchung

Die genannten Aufsätze dienten als Datenmaterial für eine zweite empirische Untersuchung zu der Konstruktion von mentalen Repräsentationen von Mengen von Restklassen. Alle 39 Teilnehmenden der beiden von mir selbst geleiteten Präsenzübungen fertigten in der Übungsgruppe eine schriftliche Ausarbeitung an, auf die sie zwischen 15 und 25 Minuten Zeit verwendeten. Die Länge der 'Aufsätze' liegt zwischen wenigen Zeichen und zwei Seiten.

Das Hauptziel der Studie war, die in der ersten Untersuchung gewonnenen Hypothesen, auf welche Weise und mit welchen Ergebnissen Studierende Vorstellungen zu abstrakten Konzepten der linearen Algebra aufbauen, durch eine größere Probandenzahl zu erweitern. Da in den Interviewgesprächen der Pilotstudie bei jedem der drei

Interviewten deutliche Hinweise auf Ähnlichkeiten in dem Aufbau ihrer bzw. seiner mentalen Repräsentationen unterschiedlicher mathematischer Inhalte aufzumachen sind, ist zu vermuten, dass Beobachtungen an einem einzelnen mathematischen Inhalt grundsätzliche, auf eine Reihe anderer Inhalte übertragbare Erkenntnisse liefern können.

Als Zweites sollte die Studie eine Evaluierung der Unterrichtsreihe im Blick auf einen Aufbau von tragfähigen Vorstellungen zu Mengen von Restklassen durch die Studierenden unterstützen.

Die Studierenden sollten in dieser Untersuchung Gelegenheit bekommen, ihre Vorstellungen von Mengen von Restklassen darzulegen. Sie sollten dazu eine Aufgabe erhalten, die Anregungen gab, verschiedene Aspekte zu berücksichtigen, und dennoch Freiraum für persönliche Ausführungen und Prioritäten legte. Dieser Freiraum sollte insbesondere die Wahl des Abstraktionsniveaus, der Notationsformen und der Referenzkontexte betreffen. In der Aufgabenstellung wurde eine Darstellung von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gewählt, welche zuvor noch nicht thematisiert worden war, um die Studierenden nicht durch die Darstellung auf eine der Einführungsaufgaben direkt hinzuweisen. Diese Darstellung wurde zudem so ausgewählt, dass sie verschiedene Interpretationsmöglichkeiten offen ließ. Sie lautete:

> Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
> - Elemente
> - Addition
> - Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Zwar bezeichnet die Aufgabenstellung die Graphik als Darstellung der Menge der Kongruenzklassen modulo fünf, aber für Studierende, die diese Menge noch nicht verstehen, sind auch Erklärungen aus anderen Blickwinkeln denkbar. Ich möchte drei grundsätzlich verschiedene Sichtweisen auf die Graphik unterscheiden, bei denen von jeweils unterschiedlichen Objekten der mathematischen Betrachtung und Beschreibung ausgegangen wird, nämlich:

1. Die ganzen Zahlen

2. Die Restklassen modulo fünf als Teilmengen der Menge der ganzen Zahlen oder alternativ die fünf Reste als Stellvertreter für die anderen ganzen Zahlen

3. Die Gruppe der Restklassen (oder der Reste) modulo fünf

Diese drei Betrachtungsebenen entsprechen drei Abstraktionsniveaus, auf denen man der Thematik begegnen kann, und bauen aufeinander auf. Auf jeder der drei Ebenen ist eine Beschreibung der Graphik möglich:

1. Die Graphik stellt die Elemente von $\mathbb{Z}$ dar, welche nach dem Kriterium der Reste geordnet sind, die sie beim Teilen durch fünf lassen. Die Zahlen mit gleichem Rest liegen jeweils in einer Spalte.

   Addiert man zwei Zahlen, so liegt ihre Summe immer in derjenigen Spalte, in der auch die Summe ihrer Reste liegt.

2. Die Graphik stellt die Restklassen modulo fünf dar. Die einzelne Restklasse ist durch eine Aufzählung ihrer Elemente in der jeweiligen Spalte als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ beschrieben. Die Restklassen stehen zueinander in Beziehung durch die Tatsachen, dass ihre Schnittmengen leer sind, dass ihre Vereinigungsmenge $\mathbb{Z}$ ist, und dass sie die Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sind.

   Die Summe von zwei Restklassen ist wieder eine Restklasse, und zwar diejenige Restklasse, in der die Summe von einem Element des ersten und einem Element des zweiten Summanden liegt.

3. Die Graphik stellt die Menge der Restklassen $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dar. Ihre fünf Elemente sind durch die fünf Spalten der Graphik repräsentiert.

   Die Addition auf $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ geschieht wie folgt: Man wählt von jedem Summanden ein Element als Repräsentanten. Die Restklasse, in der die Summe der beiden Repräsentanten liegt, ist das Ergebnis der Addition. Es ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Zusammen mit dieser Addition bildet $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ eine Gruppe. Die erste Spalte der Graphik repräsentiert das neutrale Element.

Es gibt auch die Möglichkeit, nacheinander die verschiedenen Sichtweisen oder auch eine Perspektive dazwischen einzunehmen.

Die drei Abstraktionsniveaus sind durch zwei große Abstraktionshürden voneinander getrennt. Die Hürde zwischen dem ersten und dem zweiten Niveau ist die Konstruktion von Restklassen als neue, abstrakte Objekte, die mathematischen Handlungen unterworfen werden. Solche Handlungen können neben der Addition die Benennung und die Behandlung als Elemente einer Menge, nämlich von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, sein. Die Hürde zwischen dem zweiten und dem dritten Niveau ist ebenfalls durch die Konstruktion eines neuen Objekts markiert. Dieses ist eine Gruppe, also eine Menge, die mit einer bestimmten Struktur versehen ist. Eine Beschreibung der Graphik kann häufig nicht durch einige bestimmte Merkmale einem Niveau zugeordnet werden. So kann z.B. die Benennung der Restklassen diesen in den Augen des Beschreibenden den Status von mathematischen, abstrakten Objekten geben, und ein Anzeichen für eine Betrachtung auf mindestens dem zweiten Niveau sein, aber sie kann auch nur als Instrument zum Ordnen der ganzen Zahlen verwendet werden, und so ausschließlich einer Beschreibung auf dem ersten Niveau dienen. Entsprechendes gilt für die Verwendung des Namens $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über Handlungen auf den drei Betrachungsebenen:

| Objekte mathem. Betrachung | Handlungen | Abkürzung |
|---|---|---|
| Menge von Kongruenzklassen | Hinweise auf Gruppenstruktur von $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},+)$ geben | $(G,+)$ |
| | Addition auf $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ angeben | $G_+$ |
| —————— | $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als Menge von Kongruenzklassen beschreiben — | $G_E$ — |
| Kongruenzklassen | Kongruenzklassen addieren | $K_+$ |
| —————— | Kongruenzklassen mit Namen bezeichnen —————— | $K_N$ — |
| ganze Zahlen | Summen von Zahlen in Kongruenzklassen einordnen | $Z_+$ |
| | Zahlen in Kongruenzklassen einordnen | $Z_O$ |

### 4.2.2 Das Auswertungsverfahren

Die 39 abgegebenen 'Aufsätze' wurden durch eine sukzessive interpretative Auswertung kleiner Sinnabschnitte nach dem Abduktionsverfahren analysiert. Dabei wurden die möglichen Interpretationen abgeglichen und anschließend zu einer Gesamtdeutung zusammengefasst. Erste Leitaspekte der Interpretation der einzelnen Aufsätze waren:

- Objekte mathematischer Beschreibung:
  - Welche Objekte werden diskutiert?
  - Welche Objekte werden addiert?
- Darstellung:
  - Welche Symbole werden für Restklassen ausgewählt? Werden Zeichen ganz vermieden?
  - Haben verwendete Zeichen referentielle Bedeutung und wenn ja, welche?
  - Welche Additionsregeln werden bevorzugt?

Es stellte sich heraus, dass in einer Reihe von Aufsätzen die Fragen nach der Bedeutung verwendeter Zeichen und in engem Zusammenhang hiermit nach den Objekten der Beschreibung nicht eindeutig beantwortet werden können. Dies liegt bei einigen Aufsätzen an mangelnder Ausdrucksfähigkeit der Verfasser(innen), in anderen überhaupt an fehlenden Ausführungen. Es finden sich auch in einigen Aufsätzen widersprüchliche Darstellungen, welche zwar keine Antworten in eindeutigen Kategorien erlauben, welche aber einigen Aufschluss über die bestehenden Vorstellungen geben.

In einem nächsten Schritt wurden die Aufsätze auf Merkmale der drei Betrachtungsebenen hin untersucht und nach erreichten Abstraktionsniveaus geordnet. Dabei wird die Betrachtung der ganzen Zahlen als Niveau I, die Betrachtung von Restklassen als Niveau II und die Betrachtung von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als Niveau III bezeichnet. Ziel der Analysen ist es, Ideen und Vorstellungen der Studierenden auszumachen und zu beschreiben. Dabei werden auch falsche Äußerungen daraufhin analysiert, mit welchen dahinterstehenden Vorstellungen sie Sinn geben können. Die Einordnung auf Abstraktionsniveaus erfolgt weniger gemäß richtigen Darstellungen als vielmehr gemäß plausibler Interpretationen der Ideen, welche zum Ausdruck gebracht werden. Somit ist weder die Deutung noch die Klassifizierung der Aufsätze nach Abstraktionsniveaus sind als Leistungsbeurteilung der Verfasser(inn)en zu verstehen.

## 4.3 Analyse der einzelnen Aufsätze

Eine Bemerkung soll den Auswertungen der Aufsätze vorausgeschickt werden: Die Begriffe 'Restklassen', 'Kongruenzklassen', 'Äquivalenzklassen', 'Klassen', 'Nebenklassen' bei den Studierenden sollen als gleichwertig eingestuft und nicht näher differenziert werden, es sei denn, dass jemand mehrere dieser Begriffe verwendet und dabei explizit zwischen ihnen unterscheidet. Ebensowenig wird auf den Unterschied eingegangen, ob jemand allgemein $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ beschreibt.

Schließlich soll der Umgang mit einem Problem erklärt werden, welches in sechs Aufsätzen ($A_{02}$, $A_{04}$, $A_{07}$, $A_{15}$, $A_{26}$, $A_{32}$) zu finden ist, und welches gleiche Behandlung bekommen soll: 'Die Kongruenzklasse modulo 5' ist ein Ausdruck, der dort ohne Bezug zu einer bestimmten Kongruenzklasse verwendet wird. Ich vermute, dass hier vielfach eine Verkürzung der in der Aufgabenstellung verwendeten Bezeichnung 'die Menge der Kongruenzklassen modulo fünf' vorliegt. Eine solche Verkürzung wird unter Umständen von den Betroffenen gar nicht bemerkt. In der Interpretation von vier der Aufsätze wird diese Bedeutung unterstellt. In den beiden anderen ($A_{15}$, $A_{26}$) gibt es jedoch gute Gründe für eine andere Deutung. Hier werden alternative Auslegungen angeboten.

Nach der Analyse jedes Aufsatzes wird dieser auf ein Abstraktionsniveau eingeordnet, das sich aus der aufgrund der Analyse vermuteten Thematik des Aufsatzes ergibt. Zudem erhält er formale Klassifikationsmerkmale gemäß den auf Seite 233 genannten Abkürzungen.[5] Diese Zuordnungen gründen auf plausiblen Interpretationen der Aufsätze und sind nicht als absolute Erkenntnisse zu werten: denn letztlich kann nicht entschieden werden, was die Studierenden jeweils wirklich mit ihren Äußerungen gemeint haben.

$A_{01}$

Der Autor gibt die Definition

"Menge der fünf Nebenklassen $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$"

und erläutert verschiedene Additionsdefinitionen für diese Menge, z.B.:

[5] Über die dort beschriebenen Merkmale hinaus gibt es bei einzelnen Aufsätze Phänomene, die nicht in diese Kategorien passen, aber ebenfalls Hinweise auf ein Vorgehen auf einer bestimmten Betrachtungsebene geben. Sie erhalten eigene, an der betreffenden Stelle definierte Zeichen.

> “Also ist $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \oplus)$ eine Gruppe, denn wir haben eine gruppentaugliche Tafel der Verknüpfungen:
>
> | $\oplus$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ |
> | $\overline{1}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ |
> | $\overline{2}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
> | $\overline{3}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ |
> | $\overline{4}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ |
>
> Also haben wir ein Neutralelement $e = \overline{0}$ und jedes $\overline{a}$ hat wie man sieht ein $-\overline{a}$.”

und

$$\text{“}\quad \begin{array}{rcllll} \overline{2} & \oplus & \overline{3} = \overline{0} & & & \\ 5\mathbb{Z}+2 & \oplus & 5\mathbb{Z}+3 = & 5\mathbb{Z}\ 5 = & & 5\mathbb{Z}+0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & \{..-5,0,5,..\} & = & \{..-5,0,5,..\} \end{array} \quad \text{”}$$

Dieser Aufsatz zeigt einen vielseitig ausgeprägten Umgang mit $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Betont wird vor allem die Idee, dass diese Menge zusammen mit der Verknüpfung $\oplus$ eine Gruppenstruktur besitzt. Außerdem wird deutlich, dass Restklassen Mengen sind, die als Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ Objektcharakter besitzen.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau III und erhält die Klassifikation:
$Z_O$ $K_N$ $K_+$ $G_E$ $G_+$ $(G, +)$

$A_{02}$

Dieser Aufsatz beginnt mit folgender Definition:

> “Die Kongruenzklasse modulo 5, bestehen aus 5 Elementen: 0, 1, 2, 3, 4. Jeder Zahl aus $\mathbb{Z}$ wird einem Element zugeordnet, indem diese Zahl durch 5 dividiert wird und der Rest dieser Division entspricht einem Element.”

Hier liegen offenbar zwei Grammatikfehler vor. Im ersten Satz muss entweder das Prädikat einen Singular erhalten, oder das Subjekt einen Plural. Im zweiten Fall ergibt sich die Aussage, dass alle Kongruenzklassen aus denselben fünf Elementen bestehen, was wohl kaum gemeint ist. Im anderen Fall spricht die Autorin nur von einer Menge, nämlich $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Diese bezeichnet sie als ‘Die Kongruenzklasse’. Vermutlich meint sie die Menge der Kongruenzklassen, nach der die Aufgabenstellung fragt.
Im zweiten Satz erklärt die Autorin, dass jede ganze Zahl einem ‘Element’ zugeordnet wird, nämlich demjenigen, das ihrem Rest beim Teilen durch fünf entspricht. Mit dem Ausdruck ‘Element’ bezieht sie sich vermutlich auf die zuvor aufgezählten fünf ‘Elemente’. Sie unterscheidet hier offenbar sorgfältig zwischen ‘ganze Zahl’ bzw. ‘Rest’ einerseits und ‘Element’ der Menge der Kongruenzklassen andererseits, obwohl die Reste exakt dieselben Zahlzeichen besitzen wie die ‘Elemente’. Daran wird deutlich, dass diese ‘Elemente’ in ihren Augen Objekte anderen Charakters sind als

Zahlen. Sie fährt fort:

> "Entsprechend folgt die Addition: $a \oplus b = c$ falls $c \leq 4$ ist wird es dem Entsprechenden Element zugeordnet. Falls $c \geq 5$, wird durch 5 dividiert, also $\frac{c}{5} = d + \frac{r}{5}$ das $r$ entspricht einem Element. Bsp. 1+2=3 4+1=0"

Diese Definition ist recht präzise. Das Zeichen $\oplus$ deutet an, dass eine Addition definiert wird, die nicht die gewöhnliche Addition in $\mathbb{Z}$ ist. Ich vermute, dass der Kreis in den Beispielen vergessen wird. Es fällt wiederum auf, dass der errechnete Rest nicht selbst als Ergebnis bezeichnet wird, sondern 'einem Element', also einem dieser neuen Objekte, 'entspricht': Er führt auf ein ganz bestimmtes der anfangs bezeichneten fünf Objekte.

Die Autorin benennt die Menge der Kongruenzklassen nicht, bezeichnet aber ihre Elemente und definiert eine Addition. Es ist eindeutig, dass sie dabei nicht die ganzen Zahlen, sondern Elemente dieser Menge als Summanden und als Summen betrachtet. Dieser Aufsatz wird auf Abstraktionsniveau III eingeordnet und erhält die Klassifikation:
$Z_O\ K_N\ K_+\ G_E$, evtl. auch $G_+$

$A_{03}$

Der Aufsatz gibt eine sehr kurze Darstellung:

> "Addition: Bsp.:
>
> $$\begin{array}{rcccccl} & 5\mathbb{Z}+2 & + & 5\mathbb{Z}+4 & = & 5\mathbb{Z}+1 \\ \text{bzw.} & \overline{2} & + & \overline{4} & = & \overline{6} \overset{-5}{=} \overline{1} \end{array}$$
>
> Elemente: Die Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ werden mit $\overline{a} : n\mathbb{Z} + a$ bezeichnet. In $\overline{a}$ liegen die ganzen Zahlen, die bei Division durch $n$ (hier $n = 5$) den Rest $a$ haben."

Der letzte Satz macht deutlich, dass die Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als Mengen angesehen werden. Die Anzahl der Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ wird nicht genannt. Da in dem gegebenen Beispiel auch die Bezeichnung $\overline{6}$ verwendet wird, muss die Angabe der Elemente $\overline{a}$ nicht nur für $0 \leq a \leq 4$ gemeint sein. Allerdings zeigt das Beispiel, dass $\overline{6} = \overline{1}$ dasselbe bezeichnet. Daraus ergeben sich fünf verschiedene Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Der Aufsatz spricht die Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ an und benennt ihre Elemente und eine Addition für diese Elemente. Bei der Addition, welche gleich zu Anfang gegeben wird, noch bevor von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die Rede ist, stehen offenbar die Restklassen selber im Mittelpunkt. Der Aufsatz berührt das Abstraktionsniveau III nur eben gerade, bewegt sich im Wesentlichen auf Niveau II. Er wird wie folgt klassifiziert:
$Z_O\ K_N\ K_+\ G_E$

$A_{04}$

Der Aufsatz beginnt:

> "Die Menge $\mathbb{Z}$ lässt sich in Kongruenzklassen einteilen. Die allgemeine Schreibweise lautet $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und diese Kongruenzklasse enthält folgende Elemente: $\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$, die Kongruenzklasse modulo 5 besitzt die folgenden Elemente: $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$."

Wenn der Autor den Begriff 'Kongruenzklassen' in dem offiziell gebräuchlichen Sinn versteht, lässt der erste Satz auf eine Mengenvorstellung von Kongruenzklassen schließen. Im zweiten Satz bezeichnet er die Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zunächst als Schreibweise für die Einteilung der ganzen Zahlen, versteht sie also als Ordnungsinstrument. Dann jedoch beschreibt er sie als Menge mit $n$ Elementen, dargestellt als Zahlen mit Querstrichen. Für $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ verwendet er die Vokabel 'Kongruenzklasse'. Wenn dies kein Versehen, sondern eine konsequent verwendeter Ausdruck für $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist, dann bedeutet seine erste Äußerung, dass $\mathbb{Z}$ sich in 'Kongruenzklassen einteilen' lässt, dass er mit dem Plural die verschiedenen Mengen von Kongruenzklassen für verschiedene $n$ anspricht, und dass er $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entweder als eine besondere Darstellungsform von $\mathbb{Z}$ versteht, in der nämlich die ganzen Zahlen in bestimmter Weise geordnet sind, oder dass er mit dem ersten Satz sagen will: 'Die Menge $\mathbb{Z}$ lässt sich gemäß unterschiedlichen Mengen von Kongruenzklassen in Teilmengen gliedern.' Die erste Deutung widerspricht seiner Aufzählung von $n$ Elementen der 'Kongruenzklasse'. Der Autor fährt fort:

> "Jedes $a \in \mathbb{Z}$ kann man in Klassen einteilen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n\mathbb{Z}+0$ | $n\mathbb{Z}+1$ | $n\mathbb{Z}+2$ | $n\mathbb{Z}+3$ | $n\mathbb{Z}+4$ | $\ldots$ | $n\mathbb{Z}+n-1$ |

"

Die Darstellung der $n$ Restklassennamen in den Kästen erinnert an die in der Aufgabenstellung gegebene Graphik mit ihren Spalten. Wenn 'Klassen' die Mengen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für die verschiedenen natürlichen Zahlen sind, bedeutet dies, dass man jede ganze Zahl hinsichtlich jeder Kongruenzklassenbildung einordnen kann. Wenn mit 'Klassen' Restklassen, also Teilmengen von $\mathbb{Z}$, gemeint wären, wäre die Pluralbildung unpassend, denn dann würde jedes $a \in \mathbb{Z}$ in genau eine Klasse eingeteilt.
Zur Erläuterung der Addition zeigt der Autor einen Kreis, auf dem er fünf Pfeile markiert, die in Richtung des Uhrzeigersinns zeigen, und neben denen im Uhrzeigersinn angeordnet die Zeichen $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ stehen. Er sagt dazu:

> "Die Addition von Elementen in Kongruenzklassen lässt sich sehr gut an einem Kreis erklären. Beispiele:
> $$\begin{array}{ll} \overline{1} \oplus \overline{1} = \overline{2} & \overline{2} + \overline{1} = \overline{3} \\ \overline{1} \oplus \overline{2} = \overline{3} & \overline{2} + \overline{2} = \overline{4} \\ \overline{1} \oplus \overline{3} = 4 & \overline{2} + \overline{3} = 0 \\ \overline{1} + \overline{4} = \overline{0} & \overline{2} + \overline{4} = \overline{1} \\ \overline{1} + \overline{0} = \overline{1} & \overline{2} + \overline{0} = \overline{2} \end{array}$$
> "

Wenn er unter 'Kongruenzklassen' die Mengen von Restklassen, die sich für unterschiedliche Wahl von $n$ unterscheiden, versteht, bedeutet diese Aussage, dass Elemente einer solchen Menge, also dass Restklassen addiert werden. Wenn er den Begriff 'Kongruenzklassen' jedoch korrekt verwendet, dann bedeutet diese Aussage, dass ganze Zahlen addiert werden. Er notiert nun zehn Beispiele von Summen, z.B. $\overline{1} + \overline{4} = \overline{0}$, wobei er bei den ersten drei Beispielen um das Pluszeichen einen Kreis schreibt. Er addiert also offenbar nicht ganze Zahlen, sondern Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Das besondere Pluszeichen weist darauf hin, dass es sich nicht um die bei Zahlen gebräuchliche Addition handelt. Bemerkenswert ist außerdem, dass er die zehn Beispiele systematisch wählt. Die Liste liest sich wie eine Additionstabelle, die die einzelnen Summen definiert, ohne zu erklären, wie man sie berechnen kann. Die Erklärung des Ausdrucks 'Kongruenzklassen' in der Bedeutung von 'Menge von Kongruenzklassen' gibt ein stimmiges Gesamtbild. Die Deutung im Sinne von Teilmengen von $\mathbb{Z}$ hingegen bringt an mehreren Stellen Widersprüche. Sie ist daher zu verwerfen.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau III, denn er hat Mengen von Kongruenzklassen im Mittelpunkt seiner Darstellung. Er wird eingeordnet unter: $Z_O$ $K_N$ $K_+$ $G_E$, $G_+$

$A_{05}$

Der Aufsatz beginnt mit:

> "Zwei Elemente heißen kongruent modulo $n$, wenn ihre Differenz durch $n$ - teilbar ist. Die verschiedenen Klassen bezeichnen verschiedene Restklassen zu $n = 5$. Ein Element kann immer nur Teil einer Menge sein, d.h.
> $$\overline{0} \not\subset \overline{1}, \quad \overline{0} \not\subset \overline{2} \quad \text{usw.} \ldots \quad "$$

Dabei ist zunächst das Nicht-Element-Zeichen notiert, dann durchgestrichen und durch ein Nicht-Teilmengen-Zeichen ersetzt worden. Gemäß seiner vorangestellten Beschreibung möchte der Autor hier in Zeichen eigentlich ausdrücken:

$$\overline{0} \cap \overline{1} = \{ \ \ \}$$

Es wird deutlich, dass er die Zahlen mit Querstrichen nicht als Zeichen für ganze Zahlen sondern für Mengen versteht und dass er sorgfältig zwischen diesen Objekten unterscheidet. Er schreibt weiter:

> "Die Addition der Kongruenzklassenelemente führt zu einer anderen Kongruenzklasse, darstellbar durch eine Gruppentabelle.
> Dieses ist für Elemente aus ganz $\mathbb{Z}$ möglich bzw. alle Elemente sind $\in \mathbb{Z}$."

Meint er mit 'Kongruenzklassenelemente' Elemente von Kongruenzklassen, Elemente einer bestimmten Kongruenzklasse oder Elemente vom Charakter von Kongruenzklassen? Der zweite Satz macht deutlich, dass er hier nicht die Kongruenzklassen als Elemente ansieht, welche addiert werden, sondern ganze Zahlen, also Elemente der Kongruenzklassen meint. Somit bedeutet der Ausdruck 'führt zu einer anderen Kongruenzklasse' vermutlich, dass die Summe in einer anderen Kongruenzklasse liegt, nicht aber dass sie eine andere Kongruenzklasse ist. Dass die Addition durch eine Gruppentabelle darstellbar ist, bedeutet wörtlich genommen, dass die Menge, auf der die Addition ausgeführt wird, zusammen mit dieser Addition eine Gruppe bildet. Vielleicht will der Autor aber auch nur sagen, dass man diese Addition in einer Tabelle darstellen kann, wie das bei Gruppentafeln üblich ist. In jedem Fall ist eine solche Tabelle nur möglich, wenn die Menge endlich viele Elemente hat. Vielleicht stellt er sich vor, dass in dieser Tabelle die Elemente einer Kongruenzklasse jeweils in einer Zeile bzw. Spalte gleichzeitig berücksichtigt werden, indem sie z.B. durch einen Repräsentanten vertreten werden.

Die Tatsache, dass er die einzelnen Elemente der Kongruenzklassen bei dieser Addition im Vordergrund sieht, macht diese Vorstellung sehr kompliziert. Er scheint die mentale Konstruktion einer Gruppe, oder der Menge $\mathbb{Z}$ mit einer besonderen Operation zu versuchen, ohne die mentale Konstruktion der Summanden vollzogen zu haben.

Der Autor spricht die Menge der Kongruenzklassen nicht an. Er beschreibt die Konstruktion von Kongruenzklassen von der Menge $\mathbb{Z}$ aus und diese Perspektive bestimmt seine Ausführungen. Er gibt Kongruenzklassen formale Namen und versteht sie als Teilmengen von $\mathbb{Z}$, deren Elemente addiert werden. Möglicherweise hat er auch eine Verknüpfungstafel vor Augen, in der nur die Kongruenzklassen der jeweiligen Summanden, nicht aber die Summanden selbst aufgeführt sind. Dennoch sagt er nicht, dass Kongruenzklassen selbst addiert werden. Der Aufsatz bewegt sich somit im Wesentlichen auf dem Abstraktionsniveau I, berührt jedoch sowohl das Niveau II wie das Niveau III. Er erhält die Ordnungsmerkmale:
$Z_O$ $Z_+$ $K_N$ und ein eigenes Zeichen für eine Additionsform auf der Betrachtungsebene der Gruppe: $G_a$.

$A_{06}$

Die ersten beiden Zeilen lauten:

“$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$
$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},\ \{0\},\ \underbrace{\{0, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}}_{\text{Nichtteiler}}$ ”

Hier wird die Menge $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ klar als Menge mit fünf Elementen dargestellt. Die dritte Zeile ist zunächst nicht zu deuten.
Daneben ist eine kreisförmige Unterteilung mit fünf Abschnitten zu sehen, in denen folgende Zeichen stehen:

“$\overline{0} = \overline{5}$ 10
$\overline{1}$ 6, 11
$\overline{2}$ 7, 12
$\overline{3}$ 8, 13, $-2$
$\overline{4}$ 9, 1 ”

Die Überschrift über die Graphik lautet:

“Restgruppen Tabelle”

Außerdem wird erklärt:

> "Jeder Ring mod. $n$, in diesem Fall $n = 5$, besitzt Elemente, die Nicht Teiler darstellen und normalerweise auch Teiler. In diesem Fall gibt es jedoch nur Nichtteiler. Die 5 besitzt keine Teiler, da sie eine Primzahl ist. Alle Zahlen die ein Vielfaches von 5 sind $(5 \cdot n)$, haben keine Reste, da sie der $\overline{0}$ entsprechen. Alle anderen Zahlen, die kein Vielfaches von 5 sind werden in 4 weiteren Restklassen zugeordnet (alle Reste von 1-4) die zwischen 0-5 liegen. Im allgemeinen alle Zahlen zwischen 0 und $(n-1)$ bei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ steht für die ganzen Zahlen."

Die Autorin erklärt die Einteilung der ganzen Zahlen in fünf Restklassen. Sie versteht Restklassen also als Teilmengen von $\mathbb{Z}$. Die Zahlen mit Querstrichen verwendet sie in der Graphik vermutlich als Namen für diese Restklassen, wobei weder in der Zeichnung noch im anschließenden Text die angesprochene Beziehung zu den dazu aufgeführten ganzen Zahlen präzisiert wird: Die Bemerkung, die Vielfachen von fünf 'entsprechen' der $\overline{0}$, lässt offen, ob diese Vielfachen Elemente der Menge $\overline{0}$ sind, ob sie alle mit $\overline{0}$ idenitifiziert werden, oder ob vielleicht $\overline{0}$ als Stellvertreter für die Vielfachen von fünf anzusehen ist.
Die ersten Sätze der Erklärung zeigen, dass die Autorin die Menge $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ unter strukturellen Gesichtspunkten, nämlich als Ring, betrachtet. Sie erwähnt allerdings in dem gesamten Aufsatz weder eine Addition noch eine Multiplikation.

Das Thema dieses Aufsatzes ist die Menge $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, die in ihrer Ringstruktur angesprochen wird. Er erhält hierfür das Sonderzeichen $(G, \cdot)$. Er liegt hiermit thematisch auf dem Abstraktionsniveau III. Die fehlenden Verknüpfungen bedeuten jedoch, dass er weder auf diesem noch auf Niveau II Sicherheit zeigt. Der Aufsatz wird eingeordnet unter:
$Z_O$ $K_N$ $G_E$ $(G, \cdot)$

$A_{07}$

Die Autorin schreibt:

> "$n\mathbb{Z}$ bedeutet, dass alle Zahlen Teiler von 5 sein müssen, das $\overline{0}$ rauskommt, also kein Rest'
> $10 = \overline{0}$ modulo 5"

Die Autorin sagt hier nicht, dass $n\mathbb{Z}$ eine Menge ist, deren Elemente die von ihr genannten Eigenschaft besitzen. Stattdessen sagt sie 'bedeutet', das heißt, dass sie $n\mathbb{Z}$ als eine Aussage versteht. Das kann genauso bedeuten, dass $n\mathbb{Z}$ die Zahlen bezeichnet, die diese Eigenschaft haben, wie dass es diese Zahlen als Elemente enthält. Das Zeichen $\overline{0}$ steht hier für einen Rest, also eine ganze Zahl, nicht jedoch für die Menge $n\mathbb{Z}$.

> "Die Kongruenzklasse modulo 5 besteht aus 5 Elementen $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $\underline{\underline{\text{alle}}}$ Zahlen addiert, lassen sich durch diese Elemente darstellen. z.B. $4 + 6 = \overline{10} = \overline{0}$, da sich 10 durch 5 eindeutig (ohne Rest) teilen lässt, somit gehört $\overline{10}$ in die Gruppe der $n\mathbb{Z}$."

Mit 'Kongruenzklasse modulo 5' ist vermutlich die Menge der Kongruenzklassen modulo fünf gemeint, und der Ausdruck 'alle Zahlen addiert' bezeichnet wahrscheinlich alle Summen von Zahlen. Die Verwendung der Querstriche über Zahlen ist eigenwillig, scheint aber nicht zufällig zu geschehen. Zunächst fällt auf, dass die Elemente der Kongruenzklasse modulo fünf ohne Querstriche notiert sind. Sie scheinen fünf Zahlen zu sein, vielleicht fünf Reste. Es sieht so aus, dass die Querstriche in den Beispielen ansagen, dass eine Zahl in eine der fünf Unterteilungen von $\mathbb{Z}$ eingeordnet wird: Das würde bei $10 = \overline{0}$ modulo 5 bedeuten: ‘Zehn betrachtet hinsichtlich Teilen durch fünf hat Rest null’. Entsprechend $4 + 6 = \overline{10} = \overline{0}$: ‘Die Summe von vier und sechs hat denselben Rest wie zehn und dies denselben Rest wie null.’ Offensichtlich ist, dass die Autorin nicht das Wesen von Zahlen mit und ohne Querstrich unterscheidet, sondern dass sie beide gleichermaßen auf die Unterteilungen von $\mathbb{Z}$ bezieht.

Dieser Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I, bei dem die ganzen Zahlen im Mittelpunkt des Interesses stehen. Restklassen dienen dem Ordnen von ganzen Zahlen. Die Wesensart dieser Ordnungsinstrumente wird nicht präzisiert: Sie sind Beschreibungsmittel, Mengen oder als Reste ganze Zahlen. Insofern die Menge der Kongruenzklassen genannt und ihre Elemente bezeichnet werden, berührt der Aufsatz die Niveaus II und III. Eine Addition wird jedoch ausschließlich auf ganze Zahlen bezogen. Der Aufsatz wird folgendermaßen klassifiziert:
$Z_O$ $Z_+$ $K_N$ $G_E$

$A_{08}$

Die Autorin schreibt:

> “Die Menge der Kongruenzklasse modulo 5 ergibt sich aus den Restklassen. Somit kann diese Menge auch als Restklassengruppe benannt werden.”

Die Formulierung ‘Die Menge der Kongruenzklasse’ ist wörtlich genommen falsch. Im handschriftlichen Text ist zu sehen, dass ‘Menge der’ nachträglich eingefügt wurde. Ich vermute, dass hierbei die Pluralbildung für die Kongruenzklassen schlicht vergessen wurde. Es ist denkbar, dass die Autorin hier sagen will, dass die Menge der Kongruenzklassen modulo fünf die Restklassen als Elemente enthält. Aber sie legt sich auf die Art der Beziehung zwischen ‘Menge von Kongruenzklassen’ und ‘Restklassen’ nicht fest. Sie schreibt weiter:

> “Die Spalte 1 ergibt sich aus $n \cdot 5 + 0 = \overline{0}$, d.h. ein beliebiges Vielfaches der Zahl 5 addiert mit einer Zahl kleiner als 5 (hier 0), ergibt einen Rest (hier 0).”

Die Erklärung der Zeichenkette macht deutlich: $n$ bezeichnet eine ganze Zahl und damit auch die Summe $n \cdot 5 + 0$. Diese Zahl hat den ‘Rest’ 0 und die Autorin gibt ihr das Zeichen $\overline{0}$. Das Gleichheitszeichen sagt den Konventionen entsprechend aus, dass die Zahl $n \cdot 5 + 0$ mit $\overline{0}$ identisch ist. Nun ist $n \cdot 5 + 0$ natürlich kein Rest, sondern eine Darstellung der ganzen Zahlen, welche beim Teilen durch fünf den Rest null haben. Die Autorin vermischt hier mehrere Dinge, nämlich die Zahlen, welche den Rest null lassen, die Menge dieser Zahlen und den Rest null. Das Zeichen $\overline{0}$ wird hier als eine ganze Zahl aufgefasst, welche mit allen Zahlen der Form $n \cdot 5 + 0$ zu identifizieren ist. Es ist aber denkbar, dass die Autorin das Gleichheitszeichen entsprechend ihrer

Beschreibung im Sinne von ‘ergibt’ meint, und dass $\overline{0}$ für ‘Rest null’ steht. Später schreibt sie:

> “Den Rest benennt man auch als das Erzeugnis von 5. Aus dem Errechnen der Erzeugnisse ergibt sich eine neue Addition, die nichts mit der uns bekannten Addition in $\mathbb{R}$ zu tun hat.
> Die Menge kann man schreiben als $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, 5-1\}$ wobei $\overline{0}$ das Neutralelement ist.
> Da die Kongruenzklassen wieder Gruppen bilden, müssen dort auch die Gruppengesetze wirken. Somit muß in der Menge der Kongruenzklasse ein Neutrales und zu jedem Element ein Inverses sein.”

Ich vermute, sie beschreibt hier zunächst, wie die Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zustande kommen: Es sind die Reste, die beim Teilen durch fünf auftreten. Für diese Reste gibt es eine neue Addition. Die Formulierung im Aufsatz lässt vermuten, dass der Autorin nicht so ganz klar ist, wie diese ‘Reste’ und ihre ‘Addition’ konstruiert werden. Sie benennt hier mehr oder weniger Zwischenstationen, ohne sich über das Verfahren und die Wesensart der konstruierten Objekte so ganz im Klaren zu sein. Dazu passt auch der letzte Abschnitt: Sie bezeichnet nun Kongruenzklassen als Gruppen, weist dann jedoch der ‘Menge der Kongruenzklasse’ ein neutrales und inverse Elemente zu. Hier wird nochmals fälschlicherweise der Singular für Kongruenzklassen verwendet. Möglich ist, dass es sich um eine Unachtsamkeit ohne tiefere Bedeutung handelt. Es kann aber auch sein, dass diese Verwendung des Ausdrucks darauf hinweist, dass die Autorin ihn nicht als Beschreibung, sondern als feststehenden Begriff versteht, der nicht den Regeln der deutschen Grammatik unterworfen ist.

Dieser Aufsatz beschäftigt sich mit der Menge der Kongruenzklassen modulo fünf. Er spricht nicht nur die Menge und die Addition, sondern die Gruppenstruktur von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ an, und bewegt sich somit auf dem Abstraktionsniveau III. Die Addition ist nicht näher erklärt, und die Objekte des Niveaus II sind nicht klar erkannt. Daher erhält die Klassifikation einige einschränkende Sonderzeichen:
$Z_O \; K_N \; K_{(+)} \; G_E \; G_{(+)} \; (G,+)$

$A_{09}$

Der Aufsatz lautet:

> “Hier bekomme ich die Menge der Elemente die bei der Division durch 5 entstehen. (modulo n)
>
> $$\begin{array}{ccc} a & + & n\mathbb{Z} \\ \uparrow & & \\ \text{Rest} & \multicolumn{2}{c}{\text{(Restklasse)}} \end{array} \quad \Longleftrightarrow a \text{ modulo } n \text{ ”}$$

Bei der Division durch fünf entstehen Bruchzahlen. Dies meint der Autor sicherlich nicht. Er denkt vermutlich an die Reste 0, 1, 2, 3, 4, die bei der Division durch fünf entstehen können, denn immerhin spricht er in seiner letzten Zeile von Resten und von Restklassen. Er beschreibt das Ergebnis der graphischen Darstellung als ‘die Menge der Elemente’, die bei dem Verfahren entstehen, das er andeutet.

Es wird nicht klar, ob er dies an der Graphik sieht oder aus der Formulierung der Aufgabenstellung schließt. Im ersten Fall 'sieht' er in den Zahlen einer Spalte ihren gemeinsamen Rest anstelle der einzelnen Zahlen. Im zweiten Fall versteht er unter dem Ausdruck 'Menge der Kongruenzklassen modulo fünf' die Menge der fünf Reste, die beim Teilen durch fünf auftreten können. Er identifiziert also die fünf Spalten der Graphik oder die fünf Kongruenzklassen modulo fünf mit den fünf Resten. Seine letzte Zeile zeigt, dass er dabei nicht zwischen Rest und Restklasse unterscheidet, denn er versieht '$a$' mit beiden Begriffen. Er setzt hier auch ein Äquivalenzzeichen zwischen Symbole, die keine Aussagen bezeichnen. Eine korrekte Aussage zu seiner Zeichenkette wäre: 'Die Zahlen in der Menge $a+n\mathbb{Z}$ sind genau die Zahlen, die zu $a$ kongruent modulo $n$ sind. Dabei ist $a$ der gemeinsame Rest, der beim Teilen durch $n$ entsteht und $a + n\mathbb{Z}$ heißt Restklasse dieser Zahlen.' Diese feine Differenzierung zwischen verschiedenen Begriffen, wie z.B. zwischen 'Rest' und 'Restklasse' nimmt er aber nicht vor. Eine andere Möglichkeit ist, dass er den Gedanken aus der ersten Zeile nochmals notiert und die Zeichenketten $a + n\mathbb{Z}$ und $a$ modulo $n$ ebenfalls als Handlungen versteht: eine Zahl $a$ ist durch den Rest zu ersetzen, den sie beim Teilen durch $n$ lässt. Das Äquivalenzzeichen bedeutet in dem Fall, dass beide Ausdrücke Anweisungen für die gleiche Handlung sind. Diese Deutung passt zu der Vorstellung, dass die Menge der Kongruenzklassen modulo fünf die Menge $\{0, ..., 4\}$ der fünf Reste ist.

Dieser Aufsatz spricht das Abstraktionsniveau II an, indem er eine Bezeichung für Restklassen nennt, und er deutet das Niveau III an, indem er von der Menge der Reste spricht, allerdings ohne diese Menge exakt zu benennen. Er hält sich auf keinem der drei Niveaus durch umfangreichere Tätigkeiten oder Beschreibungen auf. Insbesodere erwähnt er keine Addition. Er wird wie folgt klassifiziert:
$Z_O$ $K_N$ $G_E$

$A_{10}$

Der Aufsatz beginnt mit der Erklärung:

> "Die Elemente von $\mathbb{Z}$ haben folgende Form: $\overline{a} : n\mathbb{Z} + a$"

Die Autorin setzt hier die beiden gebräuchlichen Notationen für Restklassen in Beziehung zu einander. Allerdings verwendet sie diese Zeichen nicht für Restklassen, sondern für ganze Zahlen. Die Aussage, dass das Zeichen '$\overline{a}$' eine ganze Zahl darstellt, könnte bedeuten, dass sie es als Rest beim Teilen der Zahl $a$ durch $n$ versteht. Vielleicht will sie mit dem Querstrich ausdrücken, dass jede ganze Zahl bzgl. ihrer Eigenschaft, welchen Rest sie beim Teilen durch $n$ lässt, betrachtet wird. Das Zeichen $n\mathbb{Z} + a$ als Zeichen für eine ganze Zahl ist vielleicht in dem Sinn gemeint, dass jede ganze Zahl in der Form $n \cdot z + a$ geschrieben werden kann, wobei sie $n$ als fest vorgegeben, $a$ als Rest zwischen 0 und $n - 1$ und $z$ als beliebige ganze Zahl versteht. In diesem Fall steht ein Zeichen $\overline{1}$ für jede Zahl mit Rest eins, ist also eine Art Variable für bestimmte ganze Zahlen.
Sie fährt fort:

> “Die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 (auch $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) enthält die fünf Teilmengen $5\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}+1, 5\mathbb{Z}+2, 5\mathbb{Z}+3, 5\mathbb{Z}+4$, die sog. additiven Restklassen (ganze Zahlen durch 5, die den Rest $n$ haben bsp. $5\mathbb{Z}+n$). Die Elemente dieser Teilmengen erfüllen also jeweils die Vorschrift, wie z.B. die ganze Zahl $11 \in \mathbb{Z}$ ist auch Element der Teilmenge $5\mathbb{Z}+1$. (Man könnte auch meinen, dass $5\mathbb{Z}+n$ Elemente von $\mathbb{Z}$ sind).”

Hier wird die Menge der Kongruenzklassen angesprochen, aber es bleibt offen, ob die fünf genannten Mengen als Teilmengen oder als Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zu verstehen sind. Die Nebenklassendarstellung wird im Sinne einer Mengenbezeichnung verstanden. Die Beschreibung scheint einen Prozess widerzuspiegeln, durch den die Autorin allmählich zu einer Festlegung der Bedeutung einer Darstellung $5\mathbb{Z}+n$ kommt. Ihre letzte Bemerkung in den Klammern zeigt, dass sie sich mit der Frage beschäftigt, ob $5\mathbb{Z}+n$ ganze Zahlen sind oder nicht. Sie macht deutlich, dass ihr der Gedanke naheliegt, dass sie ihn aber nicht für ganz zutreffend hält.

> “Wenn man Elemente der verschiedenen Kongruenzklassen addiert, so reicht es auch aus, die Reste zu addieren’. (bzw. man addiert die Elemente, indem man die Reste addiert, wobei man berücksichtigen muss, dass man ja nur bis Rest vier rechnet in der Kongruenzklasse mod 5.)

$$
\begin{array}{ccccc}
(5\mathbb{Z}) & + & (5\mathbb{Z}+2) & = & 5\mathbb{Z}+2 \\[1em]
\underbrace{(5\mathbb{Z}+3)} & + & \underbrace{(5\mathbb{Z}+4)} & = & \underbrace{5\mathbb{Z}+2} \\[1em]
\overline{3} & + & \overline{4} & = & \overline{2}
\end{array}
\quad ”
$$

Die Autorin sagt explizit, dass sie ganze Zahlen, nicht aber Kongruenzklassen, addiert. Das bedeutet, dass sie hier die Darstellungen wie $5\mathbb{Z}+3$ wiederum als Zahlen auffasst, wie bereits oben vermerkt, obwohl sie diese Bedeutungszuweisung zwischendurch verwirft. Ihre Bemerkung in Klammern, die sie nachträglich eingefügt zu haben scheint, bezieht sich vermutlich auf die dritte Zeile ihrer Rechnung, wo sie Zahlen mit Querstrichen verwendet. Diese gebraucht sie oben schon einmal als Darstellungsform für ganze Zahlen. Die Unterscheidung von den gewöhnlichen Zahlzeichen kann für sie auf die Tatsache hinweisen, dass hier Reste betrachtet werden. Vielleicht ist der Grund, warum die Autorin ständig zwischen den Bedeutungszuordnungen für $5\mathbb{Z}+n$ schwankt, dass sie diese Mengen nicht als Objekte erfassen kann, die man addieren kann. Es wird jedoch deutlich, dass sie sich mit dieser Problematik auseinander setzt.

Dieser Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I, insofern er vorwiegend eine Ordnung und Addition von Zahlen angibt. Er berührt die Niveaus II und III jedoch ebenfalls, denn sowohl die Menge von Kongruenzklassen modulo fünf wie auch die Restklassen erhalten Bezeichnungen. Die Klassifikation dieses Aufsatzes lautet:
$Z_O$ $Z_+$ $K_N$ $G_E$

$A_{11}$

Über den Spalten der Graphik sind die Zeichen $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ notiert. Diese können als Namen der Kongruenzklassen oder auch als Namen für Zahlen gemeint sein. Der Text beginnt mit:

> "$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ besteht aus 5 Kongruenzklassen, deren Elemente entweder glatt durch fünf, oder mit Rest 1, 2, 3, 4 teilbar sind. Man kann zwei Kongruenzklassen addieren, indem man die Reste addiert, wobei das Ergebnis zur Klasse der rausgekommenen Restes gehört."

Der Ausdruck 'besteht aus' lässt sowohl die Deutungsmöglichkeit zu, dass die Kongruenzklassen Teilmengen als auch die Interpretation, dass sie Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sind. Deutlich wird, dass Kongruenzklassen Mengen von ganzen Zahlen sind. Summanden der Addition sind eindeutig Kongruenzklassen, nicht Zahlen.

Die Bezeichnung der Reste mit Zahlen ohne Querstrich und die Erwähnung, dass es fünf Kongruenzklassen in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gibt, lassen vermuten, dass Symbole über der Graphik Kongruenzklassen und nicht Zahlen bezeichnen sollen.

Der Aufsatz bewegt sich sicher auf dem Abstraktionsniveau II, auf dem die Addition stattfindet. Er spricht das Niveau III insofern an, als er die Menge $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ kurz beschreibt. Er erhält folgende Ordnungsmerkmale:
$Z_O$ $K_N$ $K_+$ $G_E$

$A_{12}$

Der Aufsatz beginnt mit:

> "Die Schreibweise $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, gelesen $\mathbb{Z}$ modulo $n\mathbb{Z}$ beschreibt mehrere Zahlenmengen. Jene Zahlenmengen werden als Kongruenzklassen bezeichnet."

Der Autor legt sich nicht darauf fest, welchen Objekttyp $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezeichnet. Kongruenzklassen hingegen beschreibt er als Mengen von Zahlen.
Er erklärt als Nächstes ausführlich ein Einteilungsverfahren der ganzen Zahlen und kommt dann zur Addition:

> "Bei der Addition ist zu berücksichtigen, dass man keine konkreten Zahlen allein addiert, sondern jeweils die gesamten Klassen. Folglich wird mit Resten gerechnet. Somit entspräche bei der Addition von 7 und 9 im Zusammenhang mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ das Ergebnis $\overline{1}$. [...] Die zweite Möglichkeit besteht darin, die zu den Zahlen gehörigen Restklassen zu addieren. Somit würden im Falle 7+9 die Restklassen $\overline{2}$ und $\overline{4}$ addiert. $\overline{2}+\overline{4}$ liefert die Restklasse $\overline{6}$, da diese jedoch der Klasse $\overline{1}$ entspricht, ist das Ergebnis $\overline{1}$.

Der Autor geht hier nicht von zwei Restklassen aus, deren Summe er ermittelt, sondern er beginnt sein Beispiel mit zwei ganzen Zahlen, deren Addition er auf eine Addition in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ überträgt. Dabei meint er vermutlich jedoch $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, denn für allgemeines $n$ kommt man nicht auf das Ergebnis $\overline{1}$. Sein Ergebnis ist eine Restklasse. Dabei sagt er nicht, dass 7+9 eine Restklasse ist, sondern die zugehörige Aufgabe bei Restklassen als Ergebnis eine Restklasse hat. Er unterscheidet sehr sorgfältig zwischen Zahlen und Restklassen. In seinem zweiten Rechenweg stellt er eine reine Addition von Restklassen vor.

Der Aufsatz bewegt sich auf den Abstraktionsniveaus I und II. Obwohl der Name $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ fällt, wird das Niveau III nicht berührt, da dieser Name nicht als Symbol für ein Objekt verwendet wird. Die Klassifikation lautet:
$Z_O$ $K_N$ $K_+$

$A_{13}$

Der Autor beginnt:

> "Alle Elemente der Menge $\mathbb{Z}$ lassen sich in Kongruenzklassen einteilen, wie man an der Graphik sieht. Alle ganzen Zahlen, die durch eine Zahl $n$, in diesem Fall 5, ohne Rest teilbar sind, werden in einer Kongruenzklasse zusammengefasst, der Klasse $n\mathbb{Z}$ bzw. $5\mathbb{Z}$."

Es wird deutlich, dass Kongruenzklassen Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind. Nach einer Beschreibung der anderen Klassen fährt er fort:

> "Addiert man zwei Kongruenzklassen mit einander, so werden die einzelnen Ergebnisse dieser Addition in ein und derselben Kongruenzklasse zusammengefasst. Addiert man so die Kongruenzklassen $5\mathbb{Z}+1$ und $5\mathbb{Z}+2$, so finden sich alle Additionsergebnisse in der Kongruenzklasse $5\mathbb{Z}+3$ wieder."

Der Autor sagt klar, dass Kongruenzklassen addiert werden. Er spricht dann aber nicht von einer Kongruenzklasse als Ergebnis, sondern von 'den einzelnen Ergebnissen', die alle in derselben Klasse liegen. Vermutlich denkt er an das Verfahren, zwei Kongruenzklassen zu addieren, indem man zwei ganze Zahlen, von denen je eine in einer der beiden Klassen liegt, addiert. Da er von mehr als einem Ergebnis spricht, hat er offenbar viele solcher Summen im Sinn. Entweder bezieht er sich auf das Problem, ob die Wahl der Summanden die Restklasse beeinflusst, in der die Summe liegt, oder er stellt sich vor, dass alle möglichen Summen zu bilden sind.

Der Aufsatz erwähnt die Menge der Kongruenzklassen modulo fünf nicht. Er bewegt sich auf den Abstraktionsniveaus I und II, denn sein Thema sind ganze Zahlen und Kongruenzklassen. Insbesondere beschreibt er eine Addition von Kongruenzklassen, wobei er diese auf dem Niveau der Zahlen durchführt und hier auch das Ergebnis ansiedelt. Der Aufsatz wird eingeordnet in:
$Z_O$ $K_N$ $K_+$

$A_{14}$

Der Autor schreibt:

> "Die Elemente wurde in 4 Spalten eingeteilt und auch in di Klasse $5\mathbb{Z}+0, 5\mathbb{Z}+1, \ldots, 5\mathbb{Z}+4$ (allg. $n\mathbb{Z}+(n-1)$). Bei der Addition zweier Kongruenzklassen ensteht wieder eine Kongruenzklasse. Die Zahl, die nicht durch 5 (allg. $n$) teilbar ist, nennt man Rest. Dieser Rest durchläuft die Zahlen $\overline{0}-\overline{4}$ (allg. $0-(n-1)$). Bei 5 ist der Rest wieder 0, da 5 wieder durch 5 teilbar ist.
> Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$ ????"

'Die Elemente' sind vermutlich die ganzen Zahlen, denn diese stehen in den Spalten der Graphik, allerdings in fünf Spalten. Die Spalten der Graphik sind mit $5\mathbb{Z}+0, 5\mathbb{Z}+1, \ldots, 5\mathbb{Z}+4$ unterschrieben, so dass er mit dem ersten Satz ausdrückt, dass die Spalten die Kongruenzklassen sind. Addiert werden Kongruenzklassen, nicht Zahlen, aber es wird nicht erklärt, wie das geschieht. Die nächsten Sätze erklären den Begriff 'Rest', ohne ihn in den Zusammenhang der Kongruenzklassenbildung oder der Addition einzubinden. Möglich, aber nicht erkennbar, ist, dass der Autor an einen solchen Zusammenhang denkt. Die letzte Zeile bezieht sich vermutlich auf die Aufgabenstellung. Die Tatsache, dass der Autor zum Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$ nichts zu sagen weiß, liegt offenbar nicht daran, dass er keine ganze Zahlen in der Graphik sieht. Seine Äußerung gibt also nur Sinn, wenn seine ganze Ausführung $\mathbb{Z}$ zum Thema hat, so dass er keinen Anlass sieht, hier noch einen Zusammenhang herzustellen.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I mit Berührpunkten auf dem Niveau II. Dort wird eine Addition zwar angesprochen, aber nicht erklärt. Die Einordnung lautet:
$Z_O\ K_N\ K_{(+)}$

$A_{15}$

Über den Spalten der Graphik sind die Zeichen $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ notiert. Darunter steht:

> "$\overline{0}: -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15$ "

und eine ähnliche Zeile für $\overline{1}$, die jedoch einen Fehler enthält und durchgestrichen ist. Es geht weiter:

> "- Die Elemente der Kongruenzklasse modulo 5 sind jeweils in 5 Restklassen dargestellt ($\overline{0}-\overline{4}$)
> - Bei der Addition mit den Restklassen erhält wieder eine neue Zahl die aber bereits in einer vorhandene Restklasse. z.B. $\overline{4}+\overline{4}+\overline{2}=\overline{10}=\overline{0}$ "

Der erste Satz ist wohl kaum wörtlich zu verstehen, denn das würde bedeuten, dass es genau eine Kongruenzklasse modulo fünf gibt und deren Elemente jedes aus fünf Restklassen besteht. Die Bezeichnungen mit Zahlen mit Querstrichen stehen in Zusammenhang mit den Spalten der Graphik. Sie bezeichnen entweder die Spalten oder ihre Elemente. Folgende Deutungsmöglichkeiten gibt es für den ersten Satz:

1. 'Die Elemente der Menge der Kongruenzklassen modulo 5 sind durch die Graphik in 5 Restklassen (d.h. Spalten) dargestellt.'

   Durch die Graphik sind ganze Zahlen in Restklassen geordnet, so dass dieser Deutung eine Vorstellung von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als Menge der ganzen Zahlen entspricht.

Eine Zahl mit Querstrich kann als Rest im Sinne eines Stellvertreters für die Elemente der jeweiligen Restklasse oder als Namen für die Restklasse verstanden werden. Im zweiten Fall wäre sie nicht als Element, sondern als Teilmenge von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gemeint.

2. 'Die Elemente jeweils einer Kongruenzklasse modulo 5 sind durch die Graphik in einer Restklasse (d.h. in einer Spalte, bezeichnet mit einer Zahl mit Querstrich) dargestellt.'

   Diese Deutung beschreibt eine Ordnung der ganzen Zahlen, zu welcher eine Vorstellung von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als Menge von Restklassen passt. Hier wird eine Kongruenzklasse als Menge verstanden.

3. 'Jede Spalte der Graphik ist ein Element der Menge der Kongruenzklassen modulo fünf. Ein solches Element ist in der Graphik als Restklasse, d.h. als Menge ganzer Zahlen, dargestellt. Es wird hier bezeichnet mit einer Zahl mit Querstrich.'

   Diese Deutung hat die Restklassen zum Thema, welche als Elemente der Menge der Kongruenzklasssen modulo fünf und in ihrer Beziehung zu den ganzen Zahlen beschrieben sind. Sie entspricht einer korrekten Vorstellung von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Es bleibt offen, ob eine Zahl mit Querstrich als Menge, als bloßes Symbol oder als Rest verstanden wird.

Die Addition ist ebenfalls nicht eindeutig. Die Beschreibung weist darauf hin, dass ganze Zahlen addiert werden, wobei ihre Zugehörigkeit zu Restklassen zur Kenntnis genommen wird. Das Ergebnis der Addition ist eine Zahl. Diese liegt in einer der fünf Restklassen. Das Beispiel hingegen weist darauf hin, dass Mengen oder neuartige Objekte addiert werden, wenn man der zweiten oder dritten oben angegebenen Deutung folgt. Möglicherweise handelt es sich bei der sprachlichen Darstellung um eine Ungenauigkeit, und es ist eine Addition von statt mit Restklassen gemeint. Bei der ersten Deutung der Restklassenvorstellung ist die Addition eindeutig als Addition von Zahlen zu verstehen, welche in Restklassen eingeordnet werden. Eine Zahl mit Querstrich verstanden als Stellvertreter für jeweils eine ganze Zahl mit dem entsprechenden Rest ist dann als eine Art Zahlvariable zu verstehen.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I oder II. Seine Klassifikation ist
entweder: $Z_O$ $Z_+$ $K_N$ oder: $Z_O$ $K_N$ $K_+$

$A_{16}$

Der Aufsatz beginnt mit:

> "Die Graphik zeigt alle Elemente der Menge der ganzen Zahlen. Diese Menge wurde in fünf Kongruenzklassen eingeteilt"

Kongruenzklassen werden hier als Teilmengen von $\mathbb{Z}$ beschrieben. Nach einer Beschreibung der Einteilung heißt es:

> "Die erste Säule heißt übrigens einfach nur "$5\mathbb{Z}$", da in ihr ja alle Elemente die sich glatt durch 5 teilen lassen.
> Man kann die Elemente zweier Säulen auch addieren und an dem Ergebnis erkennen, in welche Kongruenzklasse das Ergebnis gehört. Einfach das Ergebnis durch 5 teilen und dann schauen, ob ein Rest übrig bleibt oder es sich restlos teilt."

Hier wird die Addition von ganzen Zahlen und die Tatsache der Zugehörigkeit von Summanden und Summe zu Restklassen angesprochen, ohne dass weitere Aussagen über diese Zugehörigkeiten gemacht werden.

Das Thema dieses Aufsatzes ist das Ordnen ganzer Zahlen. Er bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I, wobei er das Niveau II insofern streift, als er Kongruenzklassen Namen gibt. Er wird klassifiziert als:
$Z_O$ $Z_+$ $K_N$

$A_{17}$

Die Spalten der Graphik sind in folgender Reihenfolge überschrieben: $\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{4}$, wobei die Überschriften der dritten und vierten Spalte ursprünglich umgekehrt lauteten und durchgestrichen wurden. Ein Grund für diese Vertauschung ist mir nicht ersichtlich. Der Aufsatz beginnt:

> "- Die Elemente einer Spalte gehören zu einer Äquivalenzklasse
> Die erste Spalte zu modulo 5 ist $5\mathbb{Z} + 2 := \overline{2}$
> $= \{\ldots, 0, 5, 10, \ldots\}$
> Die zweite Spalte hat den Rest $\overline{1}$. $\Rightarrow 5\mathbb{Z} + \overline{1}$
> Die dritte Spalte hat den Rest $\overline{3}$. $\Rightarrow 5\mathbb{Z} + \overline{3}$
> Die vierte Spalte hat den Rest $\overline{2}$. $\Rightarrow 5\mathbb{Z} + \overline{2}$
> Die letzte Spalte hat den Rest $\overline{4}$. $\Rightarrow 5\mathbb{Z} + \overline{4}$"

Die ersten drei Zeilen zeigen, dass die Autorin Äquivalenzklassen als Mengen versteht, repäsentiert durch die Spalten der Graphik. Die nächsten Zeilen sagen aus, dass die Spalten, nicht etwa ihre Einträge, einen Rest besitzen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Autorin nicht sauber zwischen Mengen und ihren Elementen unterscheidet. Einen Rest kennzeichnet sie durch einen Querstrich. Zunächst taucht diese Darstellung am Rande - vielleicht als eine Art Erinnerung oder Merkposten - in einer anderen Verwendung auf: die beiden üblichen Darstellungen von Restklassen $5\mathbb{Z}+2$ und $\overline{2}$ werden einander gleichgesetzt. Hier bezeichnet $\overline{2}$ eine Menge, nicht einen Rest, falls die Autorin diese Notation überhaupt mit Bedeutung versieht. Später werden die beiden Darstellungen in $5\mathbb{Z}+\overline{2}$ mit einander vermischt. Vielleicht bedeutet diese Form soviel wie: 'Vielfaches von fünf und dazu der Rest zwei', ohne dass die Autorin für sich differenziert, ob sie eine, alle oder die Menge der Zahlen dieser Gestalt meint. Sie fährt fort:

> "Bei der Addition zweier Elemente, erhält man wieder einen Rest, der wieder in einer dieser Äquivalenzklassen modulo 5 enthalten ist. Die Klassen sind $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$. (s.o.)"

An dieser Stelle werden die Zahlen mit Querstrichen nicht als Reste, also als ganze

Zahlen, sondern als Mengen verstanden. Addiert werden ganze Zahlen. Die Summe - genau genommen ihr Rest - gehört zu einer der fünf Äquivalenzklassen. Eine allgemeine Aussage über diese Klassenzugehörigkeit wird nicht gemacht.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I. Er spricht das Niveau II insofern an, als er sich mit Äquivalenzklassen auseinandersetzt und verschiedene Bezeichnungen für sie einführt. Er erhält die Klassifikation:
$Z_O$ $Z_+$ $K_N$

$A_{18}$

Die Autorin beginnt:

> "Die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) lässt sich in 5 Klassen unterteilen, denen man wie folgt alle Elemente aus $\mathbb{Z}$ zuordnen kann:
>
> $$\begin{array}{ll} \text{Gruppe 1:} & 5 \cdot x \\ \text{Gruppe 2:} & 5x+1 \\ \text{Gruppe 3:} & 5x+2 \\ \text{Gruppe 4:} & 5x+3 \\ \text{Gruppe 5:} & 5x+4 \end{array}$$
>
> Durch diese Einteilung hat man alle Elemente aus $\mathbb{Z}$ erfasst und eingeteilt."

Der einleitende Satz besagt, dass es $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist, was in Klassen unterteilt wird. Dies deutet an, dass $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen ist. Eine solche Identifizierung wird durch die Ergänzung, dass diesen 'Klassen' die Elemente aus $\mathbb{Z}$ 'zugeordnet' werden, abgeschwächt: offenbar versteht die Autorin diese beiden Mengen nicht als gleich. In ihrer Auflistung der fünf Unterteilungen, die sie nun als 'Gruppen' bezeichnet, verwendet sie Zeichen, welche richtig sind, wenn sie als Beschreibungen für deren Elemente gemeint sind: Die Zahlen der ersten Spalte der Graphik besitzen alle eine Darstellung $5x$, mit $x \in \mathbb{Z}$. Bemerkenswert an der Auflistung ist, dass die Autorin die Nummerierung der Abteilungen unabhängig von der Darstellung ihrer Elemente vornimmt. Sie fährt fort:

> "Die Kongruenzklassen lassen sich auch verknüpfen. In der Addition zweier Elemente aus ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) addiert man lediglich die "Reste" und ordnet den neuentstandenen Rest einer Gruppe zu. Bsp: $(5x+2)+(5x+3) = 5x+5 = 5x$, also liegt das Ergebnis der Addition von Elementen der Gruppe 2 und 3 in Gruppe 1"

In der Beschreibung wird deutlich, dass die Autorin Kongruenzklassen, und das heißt bei ihr Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, addieren möchte. Abgesehen von ihrem Fehler in der Zuordnung der Gruppennummern fällt in der Rechnung auf, dass sie $(5x+2)+(5x+3) = 5x+5$ statt $(5x+2)+(5x+3) = 5(2x)+5$ und $5x+5 = 5x$ statt $5x+5 = (5+1)x$ schreibt. Die Summanden dieser Rechnung, an der sie ein Additionsverfahren für Restklassen veranschaulicht, sind ganze Zahlen. Sie wählt hier die gleiche Darstellung wie oben in der Einordnung der ganzen Zahlen in fünf 'Gruppen'. Andererseits weist ihre Identifizierung von $5x$ mit $10x$ bzw. $5x+5$ mit $5x$ darauf hin, dass diese Zeichen nicht jeweils eine einzelne ganze Zahl bezeichnen, sondern Stellvertreter für alle Zahlen sind, die beim Teilen durch fünf einen bestimmten Rest lassen. Insofern geht die Autorin mit dieser Darstellung $5x$ um, als sei sie ein Name für die Menge $5\mathbb{Z}$. Ihre Deutung zum Schluss zeigt jedoch, dass sie Zahlen addiert und das Ergebnis $5x$ als Element der 'Gruppe 1' versteht, also als ganze Zahl ansieht.

Die Autorin bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I an der Schwelle zum Niveau II. Sie spricht von Kongruenzklassen und ihrer Addition, gibt ihnen jedoch keine Namen, sondern nur referentielle Zeichen, die ihre Ordnungsfunktion für ganze Zahlen betonen. Zugleich geht sie mit Zeichen für Elemente der Kongruenzklassen um, als wären sie Namen für die Kongruenzklassen selbst. Der Aufsatz wird klassifiziert als:
$Z_O$ $K_+$

$A_{19}$

Der Autor zitiert zunächst die Definition von 'kongruent modulo $n$' und erklärt dann:

> "D.h. die ganzen Zahlen werden in Klassen eingeteilt nach den Resten bei ganzzahliger Division durch $n$."

Diese Einteilung beschäftigt sich mit den ganzen Zahlen. Die 'Klassen' dienen zum Ordnen. Er erklärt außerdem:

> "Auch haben wir Operationen auf den Klassen (d.h. Mengen) definiert wie z.B. die "Multiplikation" einer solchen Menge mit einer Zahl $a \in \mathbb{Z}$, wobei man eine andere dieser Klassen erhält."

Der Autor betont hier, dass die Klassen Mengen sind, auf welche Operationen angewendet werden. Die Multiplikation, die er beschreibt, ist nicht die im Restklassenring übliche, sondern eine Multiplikation einer Zahl mit einer Menge.

> "Bei der Addition zweier Elemente einer Klasse erhält man nicht zwingend eine Element derselben Klasse."

Die erwähnte Addition ist eine Addition von Zahlen, welche innerhalb einer gmeinsamen Klasse liegen. Über das Ergebnis wird eine Aussage in Bezug auf seine Klassenzugehörigkeit gemacht. Es werden jedoch weder Mengen addiert, noch wird die allgemeine Addition auf $\mathbb{Z}$ angesprochen.

Der Aufsatz liegt auf dem Abstraktionsniveau I und streift das Niveau II, indem er von einer Multiplikation mit Klassen spricht, ohne sie im Einzelnen auszuführen. Er gibt jedoch Klassen keine Namen, beschreibt sie nicht als Elemente einer Menge und erwähnt keine Addition von Klassen. Die für ganze Zahlen erwähnte Addition ist beschränkt auf bestimmte Summanden. Er erhält er in seiner Klassifikation für die Verknüpfungen Sonderzeichen, nämlich $Z_{(+)}$ für die Addition und $K_{(m)}$ für die Multiplikation von Kongruenzklassen:
$Z_O$ $Z_{(+)}$ $K_{(m)}$

$A_{20}$

Der Autor schreibt zunächst:

> “An dieser Graphik, die in ihrer Gesamtheit $\mathbb{Z}$ mod 5 darstellt, lässt sich wunderschön ablesen, dass in den Spalten die Untergruppen $5\mathbb{Z}+0, 5\mathbb{Z}+1, \ldots$ usw. stehen (mit den jeweiligen Elementen dieser Untergruppen).”

Die Spalten der Graphik werden mit den Namen $5\mathbb{Z}+k$ bezeichnet, die ihrerseits als Mengen verstanden werden, deren Elemente in den Spalten aufgeführt, also Zahlen sind. Diese Mengen werden als ‘Untergruppen’ bezeichnet. Am Schluss des Aufsatzes steht die Frage:

> “Worin besteht der Unterschied zwischen Nebenklasse und Untergruppe?”

Dies zeigt, dass der Begriff Untergruppe nicht im mathmatischen Sinn gemeint ist. Vielleicht bezeichnet er einfach nur eine Menge, die in bestimmten Bezügen zu anderen Mengen steht, welche nicht näher erläutert werden.

> “Desweiteren lässt sich an dieser - meiner Meinung nach erstaunlich guten - Graphik ablesen, in welcher Kongruenzklasse bzw. Untergruppe man sich nach addieren oder multiplizieren befindet.”

Der Autor sagt hier nicht, was verknüpft wird. Aber die Tatsache, dass er nur einen Hinweis gibt, dass man erkennt, in welcher Kongruenzklasse das Ergebnis liegt, deutet darauf hin, dass er nur an das Verknüpfen von ganzen Zahlen, nicht aber von Kongruenzklassen denkt. Diese Bezeichnungen ist für ihn offenbar synonym zu ‘Untergruppen’ und ‘Nebenklassen’.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionaniveau I mit Berührpunkten zum Niveau II durch die Benennung der Kongruenzklassen. Er erwähnt eine Addition, ohne Regeln in Bezug auf Zugehörigkeiten zu Kongruenzklassen zu geben. Er wird klassifiziert als:
$Z_O$ $Z_+$ $K_N$

$A_{21}$

Der Aufsatz ist mit einigen Spiegelstrichen gegliedert:

> “- die Elemente in einer Spalte gehören zu einer Äquivalenzklasse
> - addiert man zwei Elemente, so erhält man, wenn man die Summe wieder durch 5 dividiert einen Rest, der wieder den Äquivalenzklassen zugeordnet werden kann.
> - Die Äquivalenzklassen modulo 5 sind $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$; das sind die Reste die bei einer Division mit modulo 5 entstehen können
> - addiert man zu einer Zahl in einer Klasse, die Zahl 5, so erhält man wieder eine Zahl, die in derselben Klasse ist.
> - fasst man alle Äquivalenzklassen zusammen, so erhält man $\mathbb{Z}$.”

Die Objekte in einer Spalte sind ganze Zahlen. Der Ausdruck ‘Elemente’ kann entweder auf die Menge $\mathbb{Z}$ oder auf die Spalte und d.h. auf die Äquivalenzklasse bezogen

sein. Im zweiten Fall ist eine Äquivalenzklasse eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$.
Die erwähnte Addition ist eine Addition von ganzen Zahlen. Es wird nicht gesagt, dass die Summe einer Äquivalenzklasse zugeordnet werden kann, sondern ihr Rest. Hier wird auf ein Verfahren angespielt, ohne dass der Sinn dieses Verfahrens als zur Herstellung eines Zusammenhangs zwischen Restklassenbildung und Addition sichtbar wird. Die Formulierung, dass der Rest einer Äquivalenzklasse 'zugeordnet' werden kann, lässt offen, in welcher Weise eine Beziehung zwischen beiden besteht. Insbesondere tritt die Äquivalenzklasse hier nicht in ihrer Eigenschaft als Menge auf, in der die Beziehung bereits zu der Summe selbst bestehen würde.
Die dritte Aussage schließlich sieht eine Äquivalenzklasse als einen Rest an, benannt mit einer Zahl mit Querstrich.
In der vierten und fünften Aussage werden Äquivalenzklassen wiederum als Teilmengen von $\mathbb{Z}$ verstanden.

Der Aufsatz beschreibt das Ordnen der ganzen Zahlen, bewegt sich also auf dem Abstraktionsniveau I. Er spricht Niveau II durch die Benennung der Restklassen an. Er wird eingeordnet:
$Z_O$ $Z_+$ $K_N$

$A_{22}$

Über den Spalten der Graphik steht $5, 5+1, 5+2, 5+3, 5+4$ und unter den Spalten $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$. Der Aufsatz besagt:

> "Was sind Kongruenzklassen?
> die 5 Teilt $\mathbb{Z}$ in 5 gleichgroße Teile
> unendlich viele Elemente
> Die Addition ergibt von z.B. $(5+1)$ und $(5+2)$ ergibt $\overline{3}$. Man kann nur
> die $\overline{n}$ addieren, um auf das Ergebnis zu kommen."

Die Autorin sagt mit ihrer Frage aus, dass sie den Begriff 'Kongruenzklassen' nicht versteht. Sie beschreibt dann die Graphik in Stichpunkten, wobei sie auf die Einteilung der ganzen Zahlen eingeht. Beim Addieren verwendet sie ganze Zahlen als Summanden. Die Darstellung dieser Zahlen in ihrer Aufgliederung in fünf plus eine (nicht negative) Zahl kleiner als fünf deutet ein allgemeines Prinzip an, ohne dass dies ausgeführt oder explizit angesprochen wird. Die Benennung des Ergebnisses mit $\overline{3}$ verstärkt diesen Eindruck. Es wird nirgendwo erklärt, was mit $\overline{3}$ bezeichnet werden soll, nämlich eine Variable für alle Zahlen mit Rest drei, den Rest drei oder die Menge der Zahlen dieses Rests. Da allerdings Zahlen addiert werden, scheint es mir unsinnig zu vermuten, die Summe könnte eine Menge sein. Der Wechsel des Zeichentyps von den Summanden zur Summe könnte besagen, dass im ersten Fall Zahlen, im zweiten Reste von Zahlen gemeint sind. Die Aussage könnte dann sein: 'Wenn ich die Zahl sechs aus der ersten Spalte und die Zahl sieben aus der zweiten Spalte addiere, dann erhalte ich eine Zahl mit Rest drei.' Der letzte Satz sagt dann aus: 'Wenn ich direkt die Reste addiere, erhalte ich denselben Rest.'

Der Aufsatz beschäftigt sich mit den ganzen Zahlen, welche er ordnet, über deren Addition er Aussagen in Bezug auf diese Ordnung macht. Er bewegt sich

ausschießlich auf dem Abstraktionsniveau I. Er wird klassifiziert als:
$Z_O$ $Z_+$

$A_{23}$

Die Spalten der Graphik sind der Reihe nach mit $5\mathbb{Z}, a, b, c, d$ beschriftet.

> "Die Klasse $5\mathbb{Z}$ bezeichnet die Kongruenzklasse, die bei der Division ganzer Zahlen durch 5 keinen Rest lässt. So bezeichnet die Kongruenzklasse $a$, ganze Zahlen (Reste), die bei der Division durch 5 als Rest übrig bleiben ($5\mathbb{Z} + a = (?)$) Analog dazu $b, c, d$...!"

Die Wesensart von Kongruenzklassen wird nicht eindeutig bezeichnet. Jede Klasse steht in Bezug zu bestimmten ganzen Zahlen. Zur Klasse $5\mathbb{Z}$ gehören alle Vielfachen von fünf. Zu den anderen Klassen jedoch gehören die Reste, die bei der Division durch fünf entsehen. Demnach sind diese Klassen alle gleich. Diese Beschreibung beruht sicherlich auf einem sprachlichen Fehler. Zur Addition wird nur ein Beispiel gegeben:

> "$\overline{9} + \overline{4} = \overline{3}$ (aus Kongruenzklasse c)."

Hier werden bisher nicht erwähnte Zeichen verwendet, von welchen offen bleibt, welche Art von Objekten sie bezeichnen. Dieser fehlende Bezug zu den bisherigen Ausführungen deutet darauf hin, dass hier nur eine Zeichenkette memoriert wird. Das Ergebnis wird allerdings gedeutet, und zwar als in Kongruenzklasse c liegend, womit die Spalte beschriftet ist, in der die Drei steht. Damit wird das Ergebnis nicht als Kongruenzklasse, sondern als Zahl verstanden.

Der Aufsatz beschäftigt sich mit ganzen Zahlen, die er in Bezug zu dem Wort 'Kongruenzklasse' zu setzen versucht. Er bewegt sich ausschließlich auf Abstraktionsniveau I. Zwar verwendet er Zeichen, die üblicherweise Kongruenzklassen benennen, aber er selbst gibt keine Hinweise auf diese Bedeutung. Er erhält die Klassifikation:
$Z_O$ $Z_+$

$A_{24}$

Der Aufsatz beginnt mit einer ausführlichen Beschreibung der Einteilung der ganzen Zahlen in Kongruenzklassen. Ein Auszug daraus ist:

> "Die Klasse 1 enthält alle Elemente aus $\mathbb{Z}$, die beim Teilen durch 5 den Rest 1 ergeben."

Hier wird deutlich, dass eine Kongruenzklasse eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist. Sie erhält als Namen die Zahl, die dem gemeinsamen Rest ihrer Elemente entspricht. Die Erläuterung zur Addition beginnt mit:

> "Möchte man nun zwei Zahlen addieren und wissen, in welche Klasse diese Summe gehört"

Anschließend werden zwei Verfahren beschrieben, wie dieses Ziel erreicht wird.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I des Ordnens von ganzen Zahlen. Er berührt das Niveau II durch die Benennung von Kongruenzklassen, diese werden aber ausschließlich in einer Ordungsfunktion verstanden. Seine Klassifikation ist:
$Z_O$ $Z_+$ $K_N$

$A_{25}$

Über den Spalten der Graphik stehen die Zahlen von null bis vier. Der Aufsatz beginnt mit:

> "$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ergibt 5 Kongruenzklassen."

Hier wird nicht gesagt, dass $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ eine Menge ist. Stattdessen wird das Zeichen wie ein Name für ein Verfahren verwendet.

> "Bei der Division einer ganzen Zahl durch 5 können sich die Reste 0,1,2,3 oder 4 ergeben. Die Elemente der Klassen sind dabei die Summe von Rest und $x \cdot 5$, wobei $x \in \mathbb{Z}$."

Hier werden Kongruenzklassen als Teilmengen von $\mathbb{Z}$ präzise definiert. Zur Addition ist zu lesen:

> "Bei der Addition 2er Elemente verschiedener Klassen kommt es auf den Rest der Klassen an. Die jeweiligen Elemente lassen sich als $x \cdot 5 + \text{ Rest } (x \in \mathbb{Z})$ schreiben. Man erkennt, dass sich daraus $y \cdot 5 + \text{ Summe der Reste }$ ergibt, damit ist die Klasse der Summe $((\text{Rest}_1 + \text{Rest}_2)\text{mod}5)$. In der Graphik findet man die Klasse der Summe (Spalten 0,..,4) indem man von der Spalte des einen Elementes nach rechts geht, wobei man hier zyklisch vorgehen muss (auf 4 folgt 0)."

Die beschriebene Addition ist explizit eine Addition von Zahlen. Beim zweiten Verfahren wird deutlich, dass die Beschriftung der Graphik nicht als Namen für Kongruenzklassen verwendet wird, sondern nur die Spalten bezeichnet.

Der Aufsatz bewegt sich mit großer Sicherheit auf dem Abstraktionsniveau I, ohne die beiden anderen Niveaus zu berühren. Das Zeichen $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ weist nicht auf die Menge der Kongruenzklassen hin, daher ist es kein Indiz für einen Schritt auf Niveau III. Der Aufsatz erhält die Einordnung:
$Z_O$ $Z_+$

$A_{26}$

Der Aufsatz sagt:

> "Die Kongruenzklasse modulo 5 ist Element von $\mathbb{Z}$. Dabei gibt es Elemente mit Rest 1, Rest 2, Rest 3, Rest 4 und ohne Rest. Diese Elemente treten zyklisch auf (siehe Spalten der Graphik). Die ganze Zahl, der der Rest gehört, ist der jeweiligen Zeile zu entnehmen. Addiert man zwei Zahlen, so erhält man eine Zahl, deren Rest genauso groß ist wie der Rest der Summe beider Reste"

Der erste Satz weist auf eine Kongruenzklasse oder die Menge der Kongruenzklassen als eine ganze Zahl hin. Vermutlich ist jedoch etwas anderes gemeint. Vielleicht soll nur darauf hingewiesen werden, dass der Begriff 'Kongruenzklasse' mit ganzen Zahlen zu tun hat. Die nächsten Sätze beschreiben eine Ordnung der ganzen Zahlen nach Resten, welche durch die Graphik dargestellt wird. Der letzte Satz setzt die Addition von Zahlen in Beziehung zu der genannten Ordnung.

Der Aufsatz bewegt sich ausschließlich auf dem Abstraktionsniveau I. Er wird klassifiziert als
$Z_O$ $Z_+$

$A_{27}$

Der Aufsatz beschränkt sich auf:

> "Die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 lässt sich in 5 unterschiedliche Klassen bzgl. der Addition der Reste einteilen. Die 1.ste Klasse, $5\mathbb{Z}+0$ hat den Rest 0 (...0, 5, 10,...), die 2te, $5\mathbb{Z}+1$ den Rest 1 (..-4,1,6,...)und so weiter bis zu $5\mathbb{Z}+4$ mit dem Rest 4 (...-1, 4, 9,...). D.h. die Elemente der einzelnen Klassen lassen sich darstellen als $5\mathbb{Z}+$ einen Rest $n$. Alle Kongruenzklassen modulo 5 vereinigt ergeben die Menge $\mathbb{Z}$."

Die Menge der Kongruenzklassen modulo fünf wird im ersten Satz beschrieben, als wäre sie mit $\mathbb{Z}$ identisch: Das Einteilen in fünf Klassen unterstellt, dass diese Klassen Teilmengen sind, auf die die Elemente der Menge aufgeteilt werden. In welcher Weise diese Einteilung auf eine Addition von Resten bezogen ist, wird nicht erläutert. Möglicherweise soll diese Bemerkung darauf hinweisen, dass die Einteilung mit der Addition von Resten harmoniert. Im Weiteren wird die Einteilung beschrieben, ohne nochmals auf eine Addition einzugehen. Es werden Namen für die Klassen verwendet.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I und berührt das Niveau II durch Benennung der Kongruenzklassen. Eine Addition von Resten wird zwar angesprochen, aber es werden keine Aussagen darüber gemacht. Der Aufsatz wird klassifiziert als:
$Z_O$ $K_N$

$A_{28}$

Der Aufsatz beginnt wie folgt:

> "Die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 besteht aus 5 Teilmengen, die alle aus $\mathbb{Z}$ sind, also teilt die Kongruenzklasse modulo 5 die Menge aller $\mathbb{Z}$ in 5 Teilmengen auf."

Der Ausdruck 'besteht aus' kann sich sowohl auf Elemente wie auf Teilmengen beziehen. Dabei wird ein deutlicher Unterschied zwischen $\mathbb{Z}$ und der Menge der Kongruenzklassen gesehen. In der Erklärung, dass 'die Kongruenzklasse modulo 5' die ganzen Zahlen aufteilt, meint die Autorin sicherlich die Menge der Kongruenzklassen, denn sie verwendet diesen Ausdruck zuvor und sagt damit, dass es mehrere, nicht eine einzige, gibt, auf die der bestimmte Artikel angewendet werden könnte. Die Rolle des Aufteilens könnte das Unterscheidungsmerkmal zwischen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sein, so dass sie sich nicht in ihren Elementen, sondern nur in ihrer weiteren Struktur unterscheiden. Ebenso ist es möglich, dass $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als Menge der fünf Teilmengen von $\mathbb{Z}$ verstanden wird. Der Ausdruck 'die Menge aller $\mathbb{Z}$' weist darauf hin, dass die Autorin zwischen einer Menge und ihren Elementen überhaupt nicht differenziert.
Im Weiteren wird die Aufteilung der ganzen Zahlen nach Resten beschrieben. Es fallen keine Namen für Restklassen, sondern nur Bezeichnungen für ihre Elemente, und es wird keine Addition erwähnt.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktinsniveau I, ohne Addition. Es besteht die Möglichkeit, dass die Menge der Kongruenzklassen richtig als Menge von Teilmengen aus $\mathbb{Z}$ erkannt wird. In diesem Fall berührt der Aufsatz das Niveau III. Das Niveau II wird jedoch ausgelassen. Der Aufsatz wird qualifiziert mit:
$Z_O$ oder $Z_O\ G_E$

$A_{29}$

Über den Spalten der Graphik stehen die Buchstaben a, b, c, d, e, unter den Spalten die Zeichen $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{-2}, \overline{-1}$, also jeweils die erste Zahl, die in einer Spalte notiert ist. Der Aufsatz beginnt mit:

> "Die Elemente der Kongruenzklassen a, b, c, d, e setzen sich wie folgt zusammen:
> für d. Kongruenzklasse a: $\{0 \mathbin{\bar{+}} 5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$"

Es folgen entsprechende Darstellungen für b, c, d, e. Hier werden Kongruenzklassen als Mengen, und zwar als Teilmengen von $\mathbb{Z}$ aufgefasst. Sie erhalten Zeichen, die die Autorin sich ausgedacht hat. Mit ihnen kann sie auf die einzelnen Kongruenzklassen verweisen. Der Doppelpunkt anstelle eines Gleichheitszeichens zwischen der Bezeichnung $a$ und der Mengendarstellung der Kongruenzklasse deutet darauf hin, dass diese Bezeichnung nicht in dem Sinne verstanden wird, dass $a$ mit der angegebenen Menge identifiziert wird, wie das bei Verwendung eines Namens üblich ist. Die Autorin fährt fort:

> "Bzgl. der Addition innerhalb der Kongruenzklassen: Addiert man zwei Elemente einer Kongruenzklasse ist das Ergebnis stets in der jeweiligen Kongruenzklasse enthalten"

Diese Addition bezieht sich nur auf ganze Zahlen innerhalb einer Kongruenzklasse, wobei die Zuordnung der Summe zu einer Kongruenzklasse falsch vorgenommen wird.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I mit einer Berührung des

Niveaus II durch die Benennung der Kongruenzklassen. Die Addition wird auf ganze Zahlen innerhalb einer Kongruenzklasse beschränkt. Sie erhält anstelle von $Z_+$ das Zeichen $Z_{(+)}$. Somit wird der Aufsatz wie folgt klassifiziert:
$Z_O$ $Z_{(+)}$ $K_N$

$A_{30}$

Über den Spalten der Graphik stehen die Buchstaben a, b, c, d, e.

> "Die Elemente der Kongruenzklassen a, b, c, d, e setzen sich wie folgt zusammen:
> für die Kongruenzklasse a: $0 \mp 5n$"

Es folgen entsprechende Darstellungen für b, c, d, e. Hier werden die fünf Kongruenzklassen als Mengen von ganzen Zahlen angesehen. Diese Klassen erhalten eigene, unübliche Bezeichnungen. In der Beschreibung liegt das Augenmerk auf ihren Elementen. Zur Addition wird gesagt:

> "Bzgl. der Addition innerhalb der Kongruenzklassen wird deutlich: addiert man zwei Elemente einer Kongruenzklasse ist das Ergebnis stets in der jeweiligen Kongruenzklasse enthalten (also immer ein Teiler von modulo 5)"

Hier werden ganze Zahlen in einer gemeinsamen Kongruenzklasse addiert. Die Zuordnung der Summe ist falsch.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I, berührt aber das Niveau II durch die Benennung der Kongruenzklassen. Die Addition wird auf ganze Zahlen innerhalb einer Kongruenzklasse beschränkt. Sie erhält anstelle von $Z_+$ das Zeichen $Z_{(+)}$. Somit erhält der Aufsatz die Einordnung:
$Z_O$ $Z_{(+)}$ $K_N$

$A_{31}$

Der Autor schreibt:

> "Die Menge beinhaltet die Elemente $\{0, 5, 10, \ldots, 5\lambda\}$ für $\lambda \in \mathbb{Z}$. Alle 5 Spalten stellen jeweils KongruenzKlassen dar."

Es wird nicht deutlich, auf was 'Die Menge' bezogen wird. Aus der Darstellung der Menge ist zu vermuten, dass die erste Spalte der Graphik gemeint sein kann. Kongruenzklassen werden offenbar als Mengen ganzer Zahlen verstanden. Zur Addition wird gesagt:

> "Bei Addition ist die Summe der Elemente (aus der gleichen Klasse) nur in der ersten Kongruenzklasse in der selben Klasse wie die beiden Summanden"

Damit wird die Addition nur auf ganze Zahlen derselben Kongruenzklasse bezogen.

Der Aufsatz bewegt sich ausschließlich auf dem Abstraktinsniveau I. Wegen der Beschränkung der Addition auf ganze Zahlen innerhalb einer gemeinsamen Kongruenzklasse erhält er die Klassifizierung:
$Z_O$ $Z_{(+)}$

$A_{32}$

Die Autorin beginnt:

> "Die Kongruenzklasse modulo 5 teilt die Menge $\mathbb{Z}$ in 5 Teilmengen auf die Erste besteht aus den Elementen die folgende Eigenschaft erfüllt: 5n"

Anstelle von 'Kongruenzklasse modulo 5' ist hier vermutlich die Menge der Kongruenzklassen modulo fünf gemeint. Diese wird nicht als Menge angesehen, sondern als ein Operator auf der Menge $\mathbb{Z}$. Die Beschreibung der ersten Teilmenge lässt aufgrund der vielen grammatischen Fehler keine Rückschlüsse zu, ob sich das Zeichen '$5n$' als 'Eigenschaft' auf die Teilmenge oder auf ihre Elemente bezieht.
Eine Addition wird nicht erwähnt.

Der Aufsatz bewegt sich auf den Abstraktionsniveau I, da er bei dem Ordnen ganzer Zahlen in Teilmengen von $\mathbb{Z}$ stehen bleibt. Er wird klassifiziert mit:
$Z_O$

$A_{33}$

Der Aufsatz besagt:

> "Die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 wird in 5 Teilmengen unterteilt, wobei jede TM verschiedene Eigenschaften erfüllt:
> $5n \mid 5n+1 \mid 5n+2 \mid 5n+3 \mid 5n+4$"

Das Unterteilen der Menge der Kongruenzklassen in Teilmengen deutet darauf hin, dass die 'Teilmengen' nicht ihre Elemente sind. Die nachfolgende Beschreibung der Teilmengen meint sicherlich für jede Teilmenge einen Abschnitt. Die verwendete Notation lässt vermuten, dass es sich bei diesen 'Eigenschaften' der Teilmengen um eine Variablendarstellung ihrer Elemente handelt.
Eine Addition wird nicht erwähnt.

Der Aufsatz bewegt sich auf dem Abstraktionsniveau I. Er erhält die Einordnung:
$Z_O$

$A_{34}$

Zunächst wird die Beziehung der Zahlen innerhalb einer gemeinsamen Spalte beschrieben: Teilt man die Differenz zweier solcher Zahlen durch fünf erhält man eine ganze Zahl $z$. Es folgt:

> "Jedes Element der Graphik wird in eine bestimmte "Einheit" eingeteilt und es gelten gewisse Rechenregeln
>
> $$\begin{array}{lll} \{5\lambda \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} & \rightarrow \text{ z.B.} & 5 \cdot 5 \cdot 2 = 10 \\ \{5\lambda + 1 \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} & \rightarrow \text{ z.B.} & 5 \cdot 3 + 1 = 16 \text{ ''} \end{array}$$

Diese Liste wird fortgestzt für die anderen drei Kongruenzklassen. Die Bezeichnung 'Einheit' ist ein ungewöhnlicher Ausdruck für eine Menge. Er kann im Sinne von 'Abteilung' gemeint sein, aber er könnte auch die Idee eines Gesamtobjekts andeuten, in welchem die einzelnen Bestandteile nicht mehr isoliert auftreten, sondern zusammengefasst sind. Für diese Deutung gibt es jedoch keine weiteren Hinweise. Die erwähnten Rechenregeln beziehen sich nicht auf eine Addition von Zahlen oder Kongruenzklassen, sondern auf das Berechnen der einzelnen Elemente aus der angegebenen allgemeinen Darstellung.

Der Aufsatz gehört zum Abstraktionsniveau I des Ordnens ganzer Zahlen. Er erhält die Einordnung:
$Z_O$

$A_{35}$

Der Aufsatz beginnt mit:

> "Gegeben ist die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Diese werden in Kongruenzklassen modulo 5 eingeteilt."

Die Menge $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ wird nicht erwähnt, Kongruenzklassen werden als Teilmengen von $\mathbb{Z}$ verstanden. Es folgt eine nähere Beschreibung jeder Kongruenzklasse, z.B.:

> "Die erste Kongruenzklasse lässt sich darstellen als
>
> $$\{5\lambda + 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \leftarrow \text{ Rest 1 ''}$$

Die Klasse erhält eine korrekte Mengendarstellung, aber keinen Namen. Die Bemerkung 'Rest 1' kann sich sowohl auf die Elemente wie auf die Klasse beziehen. Eine Addition wird nicht erwähnt.

Der Aufsatz behandelt das Abstraktionsniveau I. Er wird eingeordnet mit:
$Z_O$

$A_{36}$

Die Autroin schreibt:

> "Die Graphik zeigt die Kongruenzklassen modulo 5. Die erste Klasse setzt sich aus den Elementen $\lambda 5, \lambda \in \mathbb{Z}$ zusammen"

Es folgt eine entsprechende Beschreibung der anderen Klassen. Dieser Anfang weist darauf hin, dass das Thema des Aufsatzes die Kongruenzklassen, nicht die ganzen Zahlen sind. Die Klassen werden aufgefasst als Teilmengen von $\mathbb{Z}$. Zum Schluss kommt noch die Bemerkung:

> "$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist (soweit ich weiß) eine mögliche schreibweise des Zusammenhang von $\mathbb{Z}$ zu den Klassen."

Die Autorin macht deutlich, dass ihr die Bedeutung von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ nicht klar ist. Insbesondere betrachtet sie diese Zeichenkombination nicht als Bezeichnung für eine Menge von Kongruenzklassen.
Eine Addition erwähnt sie nicht.

Der Aufsatz thematisiert zwar die Kongruenzklassen, aber er stellt sie als Ordnungsinstrumente der ganzen Zahlen dar. Auch Bezeichnungen werden nur für ganze Zahlen verwendet. Darum wird der Aufsatz dem Abstraktionsniveau I zugeordnet und klassifiziert als:
$Z_O$

$A_{37}$

Der Aufsatz lautet:

> "Die vorliegende Graphik ist eine Darstellung der Menge der Kongruenzklassen modulo 5.
> Die Kongruenzklassen nennt man nach Nebenklassen.
> Man wählt die $a, b$, die miteinander dividiert werden. Das sind die Elemente, die zu einer bestimmten Gruppe gehören.
> $n\mathbb{Z}$"

Diese Bemerkungen sind ohne erkennbaren Sinn. Aus der Tatsache, dass keine sinnvolle Beschreibung der Graphik oder der Kongruenzklassen erfolgt, lässt sich vermuten, dass der erste Satz nur die Übernahme der Beschreibung aus der Aufgabenstellung ist.

Der Aufsatz wird auf Abstraktiosniveau 0 eingestuft, da er keinen erkennbaren Zusammenhang dem Ordnen von ganzen Zahlen nach Resten oder zu Kongruenzklassen herstellt. Seine Klassifikation ist:
—

$A_{38}$

An den Spalten der Graphik steht $5\lambda, 5\lambda + 1, 5\lambda + 2, 5\lambda + 3, 5\lambda + 4$.

> "$a$ ist kongruent modulo $n$ zu $b$, wenn $a - b$ durch $n$ teilbar ist. Man muß also eine ganze Zahl (wegen $\mathbb{Z}$) finden, die sich als Produkt aus 5 und einer weiteren ganzen Zahl schreiben lässt, damit diese Bedingung erfüllt ist."

Hier wird beschrieben, wann zwei Zahlen kongruent modulo fünf sind. Außerdem lassen die Beschreibungen zu den Spalten eine Einteilung der ganzen Zahlen nach Resten erkennen. Weder Kongruenzklassen noch eine Addition werden erwähnt.

Der Aufsatz wird dem Abstraktionsniveau I zugeschrieben und klassifiziert mit:
$Z_O$

$A_{39}$

Die Spalten der Graphik sind unterschrieben mit $5\lambda, 5\lambda+1, 5\lambda+2, 5\lambda+3, 5\lambda+4$. Im Übrigen steht auf dem Blatt nur ein großes Fragezeichen. Die Unterschriften der Spalten lassen eine Einteilung der ganzen Zahlen nach Resten erkennen.

Der Aufsatz wird auf dem Abstraktionsniveau I eingeordnet und klasifiziert mit: $Z_O$

## 4.4 Der Umgang mit Abstraktion

### 4.4.1 Einordnung der Aufsätze auf Abstraktionsniveaus

Von den 39 Aufsätzen stoßen 38 das Abstraktionsniveau I, auf dem die ganzen Zahlen betrachtet werden, insofern an, als sie von einer Einteilung der ganzen Zahlen direkt sprechen oder eine solche Einteilung durch Bezeichnungen wie $5\mathbb{Z}+1$ oder $5\lambda+1$ implizit ansprechen. $A_{37}$ ist der einzige Aufsatz, der kein Ordnen ganzer Zahlen andeutet. Sein Abstraktionsniveau wird hier als 0 gekennzeichnet, und er erhält keine der angegebenen Klassifikationsmerkmale. Eine Addition von ganzen Zahlen oder von Kongruenzklassen wird in 27 Aufsätzen genannt. Beim Aufsatz $A_{15}$ ist nicht entscheidbar, ob sich die beschriebene Addition auf Zahlen oder auf Restklassen bezieht. Zehn weitere der 27 sprechen eine Addition von Kongruenzklassen explizit an. Keiner von diesen erwähnt zusätzlich eine Addition von ganzen Zahlen per se, sondern allenfalls als Zwischenschritt in dem Additionsverfahren für Kongruenzklassen. 16 oder 17 von den Aufsätzen, welche eine Addition ansprechen, beziehen diese auf die ganzen Zahlen. Vier dieser Aufsätze zeigen die Besonderheit, dass sie Aussagen ausschließlich über die Summen machen, deren Summanden in derselben Kongruenzklasse liegen. Zwei von ihnen, $A_{29}$ und $A_{30}$, behaupten, dass die Summe immer in derselben Klasse liegt wie die beiden Summanden, die beiden anderen, $A_{19}$ und $A_{31}$, sagen richtig, dass die Summe nicht immer in derselben Klasse liegt. Diese vier Aufsätze werden gesondert erwähnt, da die Addition, mit der sie sich beschäftigen, kein Beitrag zu der Gesamtstrukturierung der ganzen Zahlen ist. Dennoch zeigen sie eine Beschäftigung mit den ganzen Zahlen, die über das Ordnen nach Resten hinausgeht. Wir unterscheiden somit auf der ersten Abstraktionsebene zwei Stufen, die mit $Z_O$ (38 Aufsätze) für das Ordnen der ganzen Zahlen in Restklassen, und mit $Z_+$ (12 oder 13 Aufsätze) für die Erwähnung einer Addition der ganzen Zahlen mit Einordnung der Summen in Restklassen bezeichnet werden sollen. Für das ausschließliche Betrachten von Summen, deren Summanden innerhalb einer Restklasse liegen, wird das Zeichen $Z_{(+)}$ verwendet (vier Aufsätze).

Ein zumindest ansatzweises Darstellen auf dem Abstraktionsniveau II, auf dem die Kongruenzklassen im Mittelpunkt des Interesses stehen, soll allen Aufsätzen zugesprochen werden, die mit Kongruenzklassen oder den Resten, die bei Division durch fünf auftreten, mathematischen Umgang zeigen, indem sie sie mit Namen versehen, hier abgekürzt mit $K_N$, Summen dieser Objekte erklären, abgekürzt mit $K_+$, oder sie als Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, abgekürzt mit $G_E$, bezeichnen. Zwei Aufsätze, die eine Addition von Kongruenzklassen erwähnen, ohne sie näher zu erklären, erhalten anstelle von $K_+$ die Klassifikation $K_{(+)}$. Ein weiteres Anzeichen für den Umgang mit

Kongruenzklassen als eigenständige Objekte zeigt sich in dem Aufsatz $A_{19}$, der davon spricht, dass Kongruenzklassen mit ganzen Zahlen multipliziert werden können, wobei als Ergebnis eine andere Kongruenzklasse herauskommt. Diese Multiplikation, die er nicht näher ausführt, wird mit $K_{(m)}$ bezeichnet. Eine oder mehrere der genannten Handlungen treten in 25 oder 26 der 39 Aufsätze auf. Beim Aufsatz $A_{28}$ ist nicht klar, ob die Kongruenzklassen als Elemente einer Menge betrachtet werden oder nicht. Er spricht das Niveau II sonst nicht an. Je nachdem ob der oben erwähnte Aufsatz $A_{15}$ eine Addition von Zahlen oder von Kongruenzklassen meint, sind es neun oder zehn Aufsätze, in denen mehrere Merkmale des Niveaus II in Erscheinung treten.

Das Abstraktionsniveau III, das sich mit $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ beschäftigt, berühren zehn oder elf Aufsätze, indem sie $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als Menge mit fünf Elementen verstehen, bezeichnet mit $G_E$. ($A_{28}$ ist der Aufsatz, der nur vielleicht dazugehört.) Drei oder vier von ihnen, nämlich $A_{01}$, $A_{04}$ und $A_{08}$ und evtl. auch $A_{02}$, erklären, dass auf dieser Menge eine Addition definiert ist. Sie haben die Klassifikation $G_+$ bekommen, wobei diese bei $A_{08}$ auf $G_{(+)}$ eingeschränkt wurde, weil die Addition nicht näher erklärt ist. $A_{01}$ und $A_{08}$ sprechen zudem Gruppenstrukturen von $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ an, was mit $(G, +)$ gekennzeichnet wird. $A_{06}$ spricht die Ringstruktur von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ an, jedoch ohne zugehörige Verknüpfungen zu erwähnen. Er erhält die Sonderkennzeichnung $(G, \cdot)$. In einem Aufsatz, $A_{05}$, wird zwar die Menge $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ nicht erwähnt, aber hier wird erklärt, dass für die Addition von Zahlen und die Einordnung der Ergebnisse in Kongruenzklassen eine Gruppentabelle verwendet werden kann. Dieser Aufsatz wurde als elfter oder zwölfter zu denen gezählt, die das Niveau III ansprechen. Da bei ihm als Summanden jedoch keine Kongruenzklassen, sondern die ganzen Zahlen auftreten, wird er nicht in die Kategorie $K_+$ oder $G_+$ eingeordnet, sondern bekommt eine eigene Kategorie $(G_a)$. Von den Aufsätzen, die dieses höchste Niveau in Ansätzen erreichen, scheinen sich fünf Aufsätze, nämlich $A_{01}$, $A_{02}$, $A_{03}$, $A_{04}$, $A_{11}$, sicher auf dem zweiten Niveau zu bewegen.

Die folgenden Tabellen illustrieren die genannten Zahlen. In den ersten beiden Tabellen werden die drei Abstraktionsniveaus dargestellt.

Für die erste Tabelle gilt: Das zweite und dritte Abstraktionsniveau werden in zwei Stufen unterteilt, gekennzeichnet durch II und ii bzw. III und iii. Die großen Buchstaben bezeichnen das Niveau, auf dem ein Aufsatz im Wesentlichen angelegt ist, die kleinen Buchstaben weisen darauf hin, dass das jeweilige Niveau nur berührt wird. Zu I gehören alle Aufsätze, die mit $Z_O$ beschrieben sind. Die Stufe ii erreichen die Aufsätze, die $K_N$ oder $K_{(m)}$ und evtl. zusätzlich $K_{(+)}$ erfüllen, während für II die Eigenschaften $K_N$ und $K_+$ erfüllt sein müssen. Der Stufe iii werden alle Aufsätze zugeschrieben, die Eigenschaften $G_E$, $G_a$ oder $G_+$ zeigen, und in die Stufe III werden diejenigen eingeordnet, die sowohl $G_E$ wie auch $G_+$ erfüllen, oder die die Gruppen- oder Ringstruktur ansprechen.

Tabelle 1: Formale Einordnung:

| Kombinationen von Niveaus: | | | | Anzahl der Aufsätze |
|---|---|---|---|---|
| III | II | I | | 2 (+1?) ($A_{02}$) |
| III | ii | I | | 2 |
| iii | II | I | | 2 (+1?) ($A_{02}$) |
| iii | ii | I | | 4 |
| iii | – | I | | 0 (+1?) ($A_{28}$) |
| – | II | I | | 2 (+1?) ($A_{15}$) |
| – | ii | I | | 11 (+1?) ($A_{15}$) |
| – | – | I | | 12 (+1?) ($A_{28}$) |
| – | – | – | 0 | 1 |

In der zweiten Tabelle werden die Aufsätze nach den Abstraktionsniveaus eingeordnet, die der thematischen Beschreibungsebene entsprechen. Die höchste formale Kategorie von I, II, und III passt mit einer Ausnahme immer zu der jeweiligen inhaltlichen Kategorie, die durch die Thematik der Aufsätze gebildet werden. Die Ausnahme bildet der Aufsatz $A_{02}$, der thematisch auf dem Niveau III angelegt ist, der aber gemäß der einen der alternativen Interpretationen nur ein formales Merkmal dieses Niveaus trägt. Er erhält in dieser Interpretation die formale Stufung II, I, iii statt der Stufung III, II, I, die die andere Interpretation liefert. Besonderheiten stellen zudem die Aufsätze $A_{12}$ und $A_{13}$ dar, welche als einzige zwei gleichberechtigte Themenschwerpunkte aufweisen, nämlich die ganzen Zahlen und die Kongruenzklassen.

Tabelle 2: Thematische Einordnung:

| Niveau : | Anzahl der Aufsätze[6] |
|---|---|
| III | 5 |
| II | 4 oder 5 |
| I | 30 oder 31 |
| 0 | 1 |

Die Einordnung der Aufsätze auf drei Abstraktionsniveaus mit jeweils zwei Abstufungen legt die Frage nach einer hierarchischen Stufenfolge für die Klassifikationsmerkmale nahe, der für einen Lernweg typisch sein kann. Die nächste Tabelle ist ein Versuch, eine solche Stufenfolge zu beschreiben. In der ersten Spalte sind die Anzahlen der Aufsätze angegeben, die die in der jeweiligen Zeile genannten Eigenschaften ganz oder mit einer Einschränkung, die durch $Z_{(+)}$, $K_{(+)}$ und $G_{(+)}$ gemacht ist, aufweisen, und die zugleich keine Eigenschaften höherer Zeilen erfüllen. Dabei wird $Z_+$ für diejenigen Aufsätze ausgenommen, die $K_+$ erfüllen. In diese Kategorien sind 31 der 39 Aufsätze eingeordnet.

Tabelle 3:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $Z_O$ | | $K_N$ | $K_+$ | $G_E$ | $G_+$ | $(G,+)$ |
| 1/2 | $Z_O$ | | $K_N$ | $K_+$ | $G_E$ | $G_+$ | |
| 2/3 | $Z_O$ | | $K_N$ | $K_+$ | $G_E$ | | |
| 3/4 | $Z_O$ | | $K_N$ | $K_+$ | | | |
| 7/8 | $Z_O$ | $Z_+$ | $K_N$ | | | | |
| 5 | $Z_O$ | $Z_+$ | | | | | |
| 7 | $Z_O$ | | | | | | |
| 1 | – | | | | | | |
| 30 | | | | | | | |

Die Aufsätze, die nicht in die Kategorien der dritten Tabelle passen, zeigen folgende Merkmale auf:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_{06}$ | $Z_O$ | | $K_N$ | | $G_E$ | | $(G,\cdot)$ |
| $A_{05}$ | $Z_O$ | $Z_+$ | $K_N$ | | | $G_a$ | |
| $A_{07}$ | $Z_O$ | $Z_+$ | $K_N$ | | $G_E$ | | |
| $A_{10}$ | $Z_O$ | $Z_+$ | $K_N$ | | $G_E$ | | |
| $A_{09}$ | $Z_O$ | | $K_N$ | | $G_E$ | | |
| $A_{28}$ | $Z_O$ | | | | evtl.$G_E$ | | |
| $A_{27}$ | $Z_O$ | | $K_N$ | | | | |
| $A_{18}$ | $Z_O$ | | | $K_+$ | | | |
| $A_{19}$ | $Z_O$ | $Z_{(+)}$ | | $K_{(m)}$ | | | |

Bei den ersten fünf Aufsätzen dieser Liste und gegebenenfalls beim sechsten fehlt die Addition von Restklassen, aber es wird ein Schritt auf der nächsten Abstraktionsstufe, der Erfassung der Menge von Restklassen, vollzogen. Bei $A_{27}$ fehlt die Addition von Zahlen, aber er erreicht das nächste Abstraktionsniveau durch die Benennung von Kongruenzklassen. Der Aufsatz $A_{18}$ erklärt eine Addition von Restklassen ohne Bezeichnungen für diese Klassen als Hilfsmittel einzusetzen. Der Aufsatz $A_{19}$ leistet einen Schritt zur Anwendung von Operationen auf Kongruenzklassen, der jedoch außerhalb des üblichen Rahmens liegt, insofern hier eine eigene Operation verwendet werden. Zudem wird keine allgemeine Addition, weder auf der unteren Ebene der ganzen Zahlen noch auf der Ebene der Kongruenzklassen, behandelt.

Die Tabelle 3 zeigt eine Hierarchie von Merkmalen auf, in die die drei Viertel der Aufsätze eingeordnet werden können, wobei die Aufsätze auf höheren Stufen mit einer Ausnahme die Merkmale für die niedrigeren ebenfalls tragen. Die Ausnahme bildet die Addition von ganzen Zahlen, die nirgendwo zusätzlich zu der Addition von Restklassen thematisiert wird. Diese Ausnahme steht der Hypothese, dass die angegebene Stufenfolge als Lernweg geeignet ist, nicht im Weg, denn wenn die Addition von Zahlen mit Einordnung in Restklassen nur als Hilfsmittel zur Konstruktion einer Addition von Restklassen aufgefasst wird, wird die erste Addition nach Verstehen der zweiten nicht länger gebraucht, es sei denn, man möchte deren Wohldefiniertheit nachweisen. Es fällt außerdem auf, dass von den insgesamt elf oder zwölf Aufsätzen, die das dritte Abstraktionsniveau zumindest streifen, nur sechs in die Tabelle 3 eingefügt werden konnten. Die anderen fünf oder sechs Aufsätze lassen wesentliche Aspekte der unteren Ebenen in ihren Darstellungen aus. Aufgrund dieses großen Anteils der Abweichungen unter den höher eingestuften Aufsätzen kann man die Stufenabfolge der Tabelle 3 kaum als Leitlinie für einen typischen Lernweg bezeichnen. Sie stellt lediglich einen möglichen Weg zur mentalen Konstruktion von Mengen von Kongruenzklassen dar. Andere Lernende konzentrieren sich zunächst auf bestimmte Tätigkeiten, die sie auf mehreren Abstraktionsstufen ausführen, bevor sie sich auf einer Stufe in allen Tätigkeitsbereichen sicher bewegen. Insbesondere die Addition wird bei einigen Aufsätzen auf einer oder beiden unteren Stufen ausgelassen.

Die zahlreichen Ausnahmen und Sonderfälle zeigen, dass eine rein quantitative Darstellung der Interpretationsergebnisse aus den Aufsätzen nur sehr vorsichtige Verallgemeinerungen zulässt.[7] Die nächsten beiden Abschnitte beschäftigen sich daher mit Einzelfällen, an denen verschiedene individuelle Strategien aufgezeigt werden.

### 4.4.2 Übergänge zwischen den Stufen

Von den Aufsätzen, die nicht auf einer Abstraktionsebene sicheres Verständnis zeigen, bevor sie sich mit Merkmalen der nächsten Ebene auseinander setzen, sollen einige in diesem Abschnitt näher beschrieben werden.

Manche Aufsätze, die sich nicht durchgängig auf einer Abstraktionsstufe bewegen, erwecken den Eindruck, dass verschiedene Aspekte, die irgendwie mit Restklassen zu tun haben, aufgezählt werden ohne aus einem zusammenhängenden mentalen Modell zu resultieren. Solche Aufsätze spiegeln keine mentale Stuktur wider, sondern zählen eher unverbundene Wörter, Verfahren und Assoziationen auf. Andere Aufsätze vermitteln den Eindruck, dass der Verfasser oder die Verfasserin eine strukturierte mentale Vorstellung zum Restklassenbegriff besitzt und widerzugeben versucht. Diese beiden Aufsatztypen sind nicht eindeutig durch Klassifikationsmerkmale von einander zu unterscheiden und darum werden hier keine Anzahlen genannt. Von den Aufsätzen, die ausführlichere Erklärungen geben und den verwendeten Bezeichnungen Bedeutungen zuordnen, sollen hier einige herausgegriffen und im Blick auf die Vorstellungen, die dahinter zu stehen scheinen, näher beschrieben werden. Sie alle bewegen sich auf der Schwelle der mentalen Konstruktion von Kongruenzklassen als Objekte mathematischer Manipulation, also zwischen den Abstraktionsebenen I und II.

$A_{18}$:
Hier ist ein Übergang von Zahl zu Kongruenzklasse zu sehen durch den Fehler $5x + 5 = 5x$, d.h. durch Identifizierung von Elementen in einer Klasse. Die Zeichen beziehen sich ausschließlich auf die Elemente der Kongruenzklassen, nicht auf Kongruenzklassen selbst. Allerdings werden verschiedene Elemente einer Kongruenzklasse als gleich bezeichnet. Das ist ein Hinweis, dass die Autorin von $A_{18}$ in ihrem Denken einen Schritt weiter geht als sie in ihren äußeren Repräsentationen auszudrücken vermag. Ich vermute Folgendes: Sie erkennt, dass die ganzen Zahlen nur hinsichtlich eines Merkmals betrachtet werden sollen, und lässt sich gedank-

[7] Nnadozie/Sierpinska (2001) stellen bei einem Versuch eine qualitative Interviewstudie zu Inhalten höherer Mathematik statistisch auszuwerten, ebenfalls fest, dass allgemeine Aussagen nur schwer zu treffen sind.

lich darauf ein. Sie erkennt ebenfalls die Ordnung der ganzen Zahlen mit Hilfe von Restklassen. Aber sie versteht noch nicht die Konstruktion dieser Restklassen als Objekte, die an die Stelle ihrer Elemente treten und in ihrem Additionsverhalten die Gemeinsamkeiten ihrer Elemente bei der Addition in $\mathbb{Z}$ widerspiegeln. Der Aufsatz lässt eine interne Repräsentation vermuten, welche auf der Ebene der ganzen Zahlen ein schlüssiges Bild gibt, das aber bei dem Versuch, es auf Kongruenzklassen zu erweitern, in formale Widersprüche auf der Ebene der ganzen Zahlen verwickelt wird. Es ist nicht festzustellen, ob Vorstellungen von den Eigenschaften, die eine Addition von Kongruenzklassen kennzeichnen, bereits ein eigenes internes Modell besitzen, welches mit dem Modell für ganze Zahlen zunächst noch nicht vereinbar ist, oder ob das Modell für Kongruenzklassen erst aus der Erweiterung des anderen langsam im Entstehen ist.

$A_{10}$:

Hier ist eine andere Art des Übergangs von Zahl zu Kongruenzklassen zu beobachten: Kongruenzklassen sind schon mit Namen versehen, dienen aber noch als Beschreibung ihrer Elemente, nicht als Objekte für sich. Der Name dient sowohl der Kennzeichnung aller einzelnen Elemente einer Kongruenzklasse wie der Darstellung des gemeinsamen Merkmals dieser Elemente, nämlich des Rests, den sie beim Teilen durch fünf lassen. Der Fokus scheint noch auf den einzelnen Elementen zu liegen. Es sieht so aus, dass die Verfasserin mit ihren Darstellungsmitteln ihren Vorstellungen einen kleinen Schritt voraus ist. Die Bedeutungszuordnungen, die sie ihren Zeichen gibt, implizieren ein Denken in zwei verschiedenen Modellen, welche bislang nur durch ein gemeinsames Zeichen verbunden sind, sich aber begrifflich widersprechen.

$A_{07}$:

Die Autorin dieses Aufsatzes nimmt die mentale Konstruktion der Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ durch Zusammenfassung und Identifizierung der Zahlen mit gleichem Rest vor. Die Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sind die Merkmalsträger der Reste. Der Schritt, eine neue Addition zu erklären, fehlt noch. Die Addition bezieht sich nur auf Zahlen und die Tatsache, dass die Summe ebenfalls einen Rest besitzt. Hier zeigt sich, dass die neuen Objekte in ihrer Vorstellung noch vage Ideen sind, die zwar mit Namen versehen werden, deren Charakter aber noch nicht so klar gefasst ist, dass sie an ihnen operieren würde. Insbesondere ist das Wesen dieser Objekte durch sich widersprechende Merkmale beschrieben, welche auf den Ansatz mehrerer interner, unverbundener Untermodelle für die Restklassenbildung hinweisen.

$A_{06}$:

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ tritt als Menge mit fünf formalen Symbolen, nämlich Zahlen mit Querstrichen auf, deren Ringeigenschaften diskutiert werden. Erst anschließend gibt die Autorin eine Erklärung über den Zusammenhang zu den ganzen Zahlen. Sie deutet an, welche Zahlen zu welchem Element von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gehören ohne die Art dieser Zugehörigkeit klar zu definieren. Sie scheint die mentale Konstruktion einer Menge mit fünf Elementen und einer Struktur zu vollziehen. Diese Menge steht im Mittelpunkt ihrer Darstellung. Somit bewegt sie sich auf dem höchsten Abstraktionsniveau, allerdings ohne eine Verknüpfung zu erwähnen. In ihrer Vorstellung von dieser Menge scheint sie zudem auf dem zweiten Abstraktionsniveau eine Lücke zu lassen, denn sie spart die Frage, welcher Art diese Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sind, aus: Sie bezeichnet diese Elemente weder als Mengen noch als Reste, sondern erklärt lediglich, mit welchen ganzen Zahlen sie jeweils in Beziehung stehen. Es ist sowohl möglich, dass sie verschiedene

Vorstellungen von dem Charakter dieser Objekte besitzt, und ihr bewusst ist, dass diese Vielfalt nicht vereinbar ist, als auch, dass sie eben aufgrund unvereinbarer Informationen noch gar keine Vorstellung vom Wesen dieser Objekte besitzt.

$A_{19}$:
Dieser Aufsatz zeigt einen kleinen Schritt zu einem Übergang von Zahl zu Kongruenzklasse durch die Erklärung einer Multiplikation einer Zahl mit einer Kongruenzklasse. Eine Addition der Zahlen innerhalb einer Kongruenzklasse wird ebenfalls angesprochen. Während bei dieser Addition die Kongruenzklasse als Menge auftritt, mit deren Elementen etwas geschieht, ist die Kongruenzklasse bei der erwähnten Multiplikation ein Objekt, auf das eine mathematische Handlung angewendet wird. Der Aufsatz kann mit einer in sich schlüssigen Vorstellung gedeutet werden, welche Phänomene, die noch nicht verstanden sind, wie z.B. die Addition von Kongruenzklassen, ausspart.

$A_{05}$:
Ein Übergang von Zahlen zu Kongruenzklassen findet an zwei Stellen statt: Zum Einen werden Kongruenzklassen mit Namen versehen, die den Objektcharakter dieser Klassen betonen, nämlich mit Zahlen mit Querstrichen, die dann aber mit Mengenzeichen in Beziehung zu einander gestellt werden. Zum anderen wird erklärt, dass eine Addition von Elementen von Kongruenzklassen durch eine Gruppentabelle dargestellt werden kann. Hierzu passt eine Vorstellung, nach der zwar Zahlen und nicht Kongruenzklassen addiert werden, nach der diese Zahlen aber in bestimmten Gruppierungen zusammen in einer Zeile bzw. Spalte einer Gruppentabelle auftreten. Es sieht so aus, als würde der Autor versuchen eine Struktur zu beschreiben, ohne dass er eine mentale Konstruktion der Objekte, die in diese Struktur eingebunden sind, vollzogen hat. Anders ausgedrückt: er scheint zu versuchen, eine zweistufige mathematische Struktur in einer einzigen Stufe zu erfassen. Das dargestellte Modell bleibt an entscheidenden Stellen, wo widersprüchliche Eigenschaften unvereinbar sind, vage. Es kann ein Beispiel für eine Denkstrategie sein, die mehrere Teilmodelle aufbaut.

### 4.4.3 Verwendung von Zeichen

Eine Vorstellung von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, die in mehreren Aufsätzen anklingt, ist die Idee, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als Menge mit $\mathbb{Z}$ zu identifizieren, sie aber mit einer zusätzlichen Struktur, nämlich einer Unterteilung der Menge in fünf bestimmte Teilmengen, zu versehen. Die Identifizierung der beiden Mengen $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$ in den Vorstellungen von Studierenden kann man mit einem alltäglichen Sprachgebrauch gut erklären:

> Wir betrachten eine Grundschule. Sie hat acht Klassen und 200 Schüler. Jedes Kind ist Schüler der Schule und Schüler einer Klasse. Die Klassen sind Klassen der Schule. Max ist in der Klasse 1a. Man kann sowohl sagen, die 1a hat heute Turnunterricht, als auch, Max hat heute Turnunterricht.

Hier wird nicht zwischen den Kategorien ‘Element’ und ‘Teilmenge’ unterschieden. Die Schule entspricht in der Übertragung des Bildes auf Kongruenzklassen modulo fünf sowohl $\mathbb{Z}$ als auch $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, sie bezeichnet sowohl die Schülerschaft als auch die Organisation des Schulbetriebs in acht Klassen. Verwendet man die Alltagssprache in Bezug auf die mathematischen Objekte, kommt man unter Anderem zu folgenden

Aussagen:

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$,
$6 \in \mathbb{Z}$, $\quad 5\mathbb{Z} + 1 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\quad 5\mathbb{Z} + 1 \in \mathbb{Z}$, $\quad 6 \in 5\mathbb{Z} + 1$,
$5\mathbb{Z} + 1$ hat Rest 1, $\quad$ 6 hat Rest 1

Aussagen über Restklassen oder Bezeichnungen von Restklassen, die auf ihre Elemente bezogen sind, treten in einer Reihe von Aufsätzen auf und zeigen, dass keine klare Trennung zwischen den mathematischen Objekten von Restklassen und ihren Elementen vorgenommen wird. Ohne diese Trennung ist auch keine eindeutige Unterscheidung zwischen $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als Menge von Mengen und $\mathbb{Z}$ als Menge von Zahlen möglich.

In $A_{10}$ wird deutlich, dass die Autorin sich bei mehrfachem Wechsel der Bedeutungen mit der Frage auseinander setzt, welche Art von Objekten ihre Bezeichnungen jeweils repräsentieren. Andere Aufsätze verwenden ein und dasselbe Zeichen nebeneinander für verschiedene Bedeutungen, ohne einen Hinweis auf Inkonsistenz zu geben. Vielfach bleibt offen, ob dies geschieht, weil die sachliche Unterscheidung zwischen den Objekten den Autor(inn)en nicht bewusst ist oder nicht gelingt, oder ob es als Notlösung für mangelnde Ausdrucksfähigkeit eingesetzt wird.[8] Es kommt häufiger vor, dass Zeichen, die als Namen für Restklassen deklariert werden, im Sinn von Stellvertretern für die Elemente der bezeichneten Mengen verwendet werden. Dabei bedeutet die Bezeichnung jedoch nicht ein bestimmtes Element der Restklasse, sondern kann zugleich für verschiedene einzelne Elemente der Klasse eingesetzt werden. Dies findet man bei $A_{10}$, $A_{07}$, $A_{27}$, $A_{23}$, $A_{08}$ und evtl. bei $A_{15}$. Einer von diesen Aufsätzen, $A_{07}$, verwendet Nebenklassenbezeichnungen wie $n\mathbb{Z}$ als Beschreibung von ganzen Zahlen, die einen bestimmten Rest lassen, verwendet hier also Bezeichnungen für Mengen als Beschreibungen ihrer Elemente. Zahlen mit Querstrichen werden hier anders eingesetzt. Sie bedeuten nicht Mengen, sondern Reste, d.h. ganze Zahlen, die aber mit allen Zahlen, die den jeweiligen Rest lassen, gleichgesetzt werden. Umgekehrt gibt es auch Aufsätze, die Terme mit Variablen für ganze Zahlen einer Restklasse als Namen oder Eigenschaftsbeschreibung der jeweiligen Restklasse verwenden. Dies findet man bei $A_{33}$, und in besonderer Form auch bei $A_{18}$ und $A_{22}$: Hier werden Zeichen für einzelne Zahlen nicht direkt auf Restklassen bezogen, aber sie werden als Stellvertreter für andere Zahlen aus ihrer Restklasse eingesetzt. In anderen Fällen, nämlich in $A_{17}$ und $A_{21}$, werden Zahlen mit Querstrichen zugleich als Bezeichnungen für Restklassen, d.h. für Mengen, und als Bezeichnungen für die zugehörigen Reste, d.h. für ganze Zahlen zwischen null und vier, verwendet.

In $A_{04}$ werden in unterschiedlichen Zusammenhängen unterschiedliche Bezeichnungen für Restklassen verwendet: In seiner Erklärung, dass Zahlen in Klassen eingeteilt werden können, verwendet der Autor Nebenklassenbezeichnungen wie $n\mathbb{Z}+1$, während er die Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit Zahlen mit Querstrichen bezeichnet, sowohl

[8] Die vielfältigen Verwendungsarten von Symbolen wie $ov1$ und $1 + 5\mathbb{Z}$, manchmal mit klaren Referenzen, manchmal mit widersprüchlichen und unpräzisen Referenzen, mögen Indizien für ein Zwischenstadium in der mentalen Konstruktion von neuen Objekten sein, welche über den Weg der Verwendung von Zeichen vollzogen wird, die zunächst keine referentielle Bedeutung besitzen. Sfard (2000) beschreibt dies als eine häufig auftretende Strategie mathematischer Konstruktion neuer, abstrakter Objekte. In diesem Licht betrachtet sind die formal fehlerhaften Darstellungen wertvolle Zwischenschritte im Lernprozess.

in der Angabe dieser Menge wie auch in der Addition der Elemente. Denkbar ist, dass er mit Hilfe der zwei Symboltypen die beiden Wesensarten von Elementen von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ für sich selbst trennt: Den einen Symboltyp verwendet er, wenn er diese Objekte als Mengen auffasst, den anderen Symboltyp verwendet er, wenn er Eigenschaften der Objekte betrachtet, die in seiner Erfahrungswelt typischerweise Zahlen zugeschrieben werden.

Die Aufsätze $A_{02}$, $A_{08}$, $A_{09}$ und evtl. auch $A_{06}$ identifizieren die Zahlen eines bestimmten Rests mit dem Rest ohne dabei eine Mengenvorstellung der Restklasse anzusprechen. Zwei von ihnen sprechen die Tatsache an, dass auf diesen Objekten eine neue Addition erklärt ist, die beiden anderen erwähnen keine Addition. Bei einem dieser Aufsätze, nämlich $A_{02}$, wird eine präzise mathematische Form der Identifizierung der ganzen Zahlen eines bestimmten Rests mit diesem Rest vorgenommen, indem nämlich eine Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ definiert wird, die jeder ganzen Zahlen ihren Rest beim Teilen durch fünf zuordnet. Anschließend wird eine Addition auf der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ durch Angabe eines bestimmten Verfahrens definiert. In einem anderen Aufsatz, $A_{09}$, wird diese Identifikation durch die Symbole $a + n\mathbb{Z}$ und $a$ modulo $n$ vorgenommen, die vermutlich als Anweisungen zu verstehen sind, dass der Rest einer Zahl beim Teilen durch fünf zu bestimmen ist. Die beiden anderen Aufsätze notieren lediglich die Zahlen eines Rests im Zusammenhang mit dem Symbol, das diesen Rest mit Querstrich darstellt, ohne dass sie sich festlegen, in welcher Beziehung diese Dinge zu einander stehen.

Die Aufsätze $A_{11}$, $A_{19}$ und $A_{31}$ geben Darstellungen des Mengencharakteristikums von Kongruenzklassen durch Worte ohne für ihre Erläuterungen Symbole für die Mengen oder ihre Elemente zu Hilfe zu nehmen.

## 4.5 Die Ergebnisse der schriftlichen empirischen Untersuchung

### 4.5.1 Vorstellungen und Strategien

Die Untersuchung mit 39 Studierenden zu ihrer internen Verarbeitung der abstrakten Konzepte von Mengen von Restklassen gibt als auffälligstes Ergebnis eine Klassifikation der Aufsätze nach dem Abstraktionsniveau des Betrachtungsgegenstandes: 36 der 39 Aufsätze können auf eine von drei thematischen Ebenen eingeordnet werden, auf denen sie angelegt sind, von den drei anderen thematisieren zwei jeweils zwei dieser Ebenen. Diese Themen betreffen den Gegenstand der Beschreibung, nämlich ganze Zahlen, Kongruenzklassen von ganzen Zahlen oder eine Menge von Kongruenzklassen. Die mentale Konstruktion dieser drei Objekttypen erfordert aufeinander aufbauende Abstraktionsschritte, wobei die Kongruenzklassen nur mit einem Verständnis von ganzen Zahlen erfasst werden können, und die mentale Konstruktion einer Menge von Kongruenzklassen ein Verständnis von Kongruenzklassen voraussetzt. Somit bestimmt die Wahl des Gegenstandes zugleich ein Abstraktionsniveau, auf dem sich ein Aufsatz im Wesentlichen bewegt. Ziel dieser Einteilung ist nicht eine Bewertung der Aufsätze. Die Tatsache, dass die Abstraktionsniveaus selbstgewählt sind, gibt nur einen Hinweis auf den jeweiligen Stand der kognitiven

Verarbeitung von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Die Einordnung sagt noch nichts aus über das Maß an Verständnis, das einem Aufsatz zugrunde liegt. Für dieses spielen noch andere Kriterien eine Rolle. So gibt es Aufsätze, die auf einem unteren Niveau angelegt sind, auf diesem jedoch einen ausgeprägten Sinn für Ordnung, Zusammenhänge und Feinheiten in Darstellungen zeigen. Andere Aufsätze beschäftigen sich in der Hauptsache mit dem Übergang von Niveau I zu Niveau II und verwickeln sich dabei in Widersprüchlichkeiten in ihren Darstellungen, die ihnen bei einem Zugang rein auf dem Niveau I vielleicht nicht passieren würden, die bei einer strengen Bewertung jedoch den Schluss nach sich ziehen, dass auch das Ordnen von ganzen Zahlen nicht verstanden ist. Die Einordnung der Aufsätze nach drei Abstraktionsniveaus ermöglicht eine weitere Differenzierung in zweierlei Hinsicht:

Zum Ersten werden Merkmale gesucht, welche nicht nur die drei Niveaus kennzeichnen, sondern welche in hierarchischer Ordnung in dem Sinne auftreten, dass die meisten Aufsätze, welche ein höheres Merkmal aufweisen, auch die darunter stehenden erfassen. Das Ergebnis ist eine Merkmalshierarchie, bei der beinahe ein Viertel der Aufsätze als Ausnahmen behandelt werden müssen, wobei der Anteil der Ausnahmen unter den Aufsätzen, welche das Niveau III in irgend einer Weise ansprechen, sogar die Hälfte beträgt. Diese Hierarchie zeigt, dass individuelle Prioritäten der mentalen Verarbeitung bestimmter Merkmale einen bedeutenden Einfluss beim Lernen ausüben.

Zum Zweiten werden Aufsätze herausgefiltert, in denen eine Auseindersetzung mit dem Übergang vom Ordnen ganzer Zahlen zu einer höheren Betrachtungsebene sichtbar wird. Diese Übergänge werden auf sehr verschiedene Weisen versucht. Einige beschäftigen sich mit dem Wechselspiel von Restklassen als Mengen, Restklassen als Objekte, formale Unterscheidung und sachliche Identifizierung von Restklassen, Resten und Zahlen mit bestimmten Resten. Andere wagen einen Schritt zur Betrachtung von Restklassen als Objekte mathematischer Handlungen in nur einer einzigen Hinsicht. Besonders schwer scheint hier der Schritt zu sein, Restklassen als Summanden und Summen anzusehen. Wieder ein anderer Aufsatz scheint zu versuchen, eine Art Gruppenstruktur für die Menge der Kongruenzklassen allein auf eine Addition von ganzen Zahlen aufzubauen, ohne die mentale Konstruktion von Kongruenzklassen als mathematische Objekte vorzunehmen.

Bei vielen Aufsätzen gibt es Hinweise dafür, dass der Einsatz von Zeichen die kognitive Konstruktion von Kongruenzklassen oder Resten als neuartige mathematische Objekte unterstützt. Aber auch hier treten viele verschiedene Strategien auf: Während ein Aufsatz verschiedene Zeichen für dasselbe Objekt zur gezielten Differenzierung von Sichtweisen auf dieses Objekt einsetzt, wählen andere Aufsätze dasselbe Zeichen für verschiedenartige Objekte und bringen auf diese Weise eine Identifizierung, welche in der Vorstellungsebene vorgenommen werden soll, auf der Darstellungsebene zum Ausdruck. Trotz des formalen Fehlers scheint diese Ausdrucksform ein Werkzeug und ein Signal der internen Verarbeitung zu sein. Die Priorität für eine Vorstellung der Elemente von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als Mengen, mit der die Studierenden durch die Aufgabenstellung konfrontiert werden, überwiegt deutlich. Dennoch gibt es drei oder vier Aufsätze, die sie allein als Reste oder als rein formale Zeichen präsentieren.

Ein weiteres Merkmal kognitiver Strategien zur internen Repräsentation von abstrakten Konzepten ist ein Modell, das von vorne herein als ein im Wesentlichen stimmiges Gesamtmodell konstruiert wird, oder das in mehreren Teilmodellen aufgebaut wird, welche sich zunächst widersprechen können und unterschiedliche Aspekte eines mathematischen Begriffs aufnehmen. Solche internen Strategien sind in einer Momentaufnahme schwer zu beobachten oder gar klar zu identifizieren. Hinweise darauf finden sich jedoch bei einigen Aufsätzen, die sich an Übergängen zwischen zwei Abstraktionsniveaus bewegen. Einige von ihnen zeigen widersprüchliche Vorstellungen, wenn sie über Ideen schreiben, die noch nicht sicher verarbeitet zu sein scheinen. Anzeichen für mehrere nur wenig verknüpfte Teilmodelle sind insbesondere widersprüchliche Bedeutungszuweisungen für verwendete Zeichen. Andere Aufsätze scheinen hingegen auf einer sicheren, schlüssigen Vorstellung auf einer Abstraktionsebene zu gründen und vorsichtige Schritte auf die nächsthöhere Ebene zu zeigen.

### 4.5.2 Lernerfolge im Unterrichtsprojekt

Von den drei inhaltlichen Vorstellungen vom Wesen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als Menge von $n$ Zahlen (Resten), als Menge von $n$ Objekten (mit Farben bezeichnet) und als Menge von Mengen (bezeichnet durch Farben bzw. durch Kongruenzklassen), die in der Unterrichtsreihe thematisiert wurden, ist in den Aufsätzen die Vorstellung von einer Menge von Mengen am stärksten vertreten, was durch die Aufgabenstellung auch unterstützt wurde. Die Addition wurde zumeist mit Hilfe von Rechenwegen beschrieben. Die Idee der Addition durch Weiterzählen, welche in der dritten Übungsaufgabe eingeführt worden war, wird nur in zwei Aufsätzen erwähnt. Zudem sprechen drei Aufsätze eine Addition durch eine Tabelle an, welche nicht im Zusammenhang mit Restklassen, wohl aber in Bezug auf Gruppen in der Vorlesung thematisiert worden war.

Die oben ausgeführte Abstufung der Aufsätze nach drei Betrachtungsebenen, die sehr anschaulich die Komplexität der geforderten kognitiven Leistungen zeigt, spiegelt die durch die Lernumgebung gegebenen Möglichkeiten von Zugängen zu dem Thema auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus wider. Diese Abstufung verdeutlicht, dass die Einführung in Mengen von Restklassen für die meisten Studierenden noch keineswegs abgeschlossen ist. Es ist bei vielen von ihnen zu erkennen, dass sie sinnvolle Vorstellungen zu diesem Begriff aufbauen, aber ebenso, dass die Zeit, die sie zur Auseinandersetzung mit der Thematik zur Verfügung hatten, bei Weitem nicht ausreicht, um hinreichende Abstraktionsschritte zur Konstruktion der Gruppe der Restklassen modulo $n$ zu vollziehen. Insofern führt die Lernumgebung zu keinem sichtbaren Erfolg, der über das Lernergebnis bei einer schlichten Präsentation von Mengen von Restklassen mit ein oder zwei anschließenden Übungsaufgaben zur Anwendung hinausweist. Die durchgeführte Untersuchung zeigt nur einen Zwischenstand, der bei manchen Studierenden keine Prognose zulässt, ob sie eine Grenze ihrer Abstraktionsfähigkeit erreicht haben, oder ob eine weitergehende Beschäftigung mit der Thematik zu einem Wechseln auf eine höhere Abstraktionsebene führen kann. Bei einigen Studierenden jedoch, die eine intensive Auseinandersetzung mit einem noch nicht vollzogenen Abstraktionsschritt zeigen, kann vermutet werden, dass ausgedehntere Gelegenheiten der Beschäftigung mit dieser oder ähnlichen Konstruktionen zu weiteren Erfolgen führen würden.

Die Metaebene von Erörterungen in den Übungen, welche Art von Addition auf den jeweils eingeführten Mengen wünschenswert ist, und welche Rolle die Konstruktion neuer Begriffe und die Entscheidung für bestimmte Definitionen in der mathematischen Forschung einnehmen können, wird in keinem Aufsatz angesprochen. Ebensowenig geht ein Aufsatz explizit auf die verschiedenen Ebenen der Betrachtung der Graphik oder des mathematischen Arbeitens im Zusammenhang mit Resten ganzer Zahlen ein. Das diesbezügliche Anliegen der Unterrichtsreihe, den Studierenden einen Blick aus der Vogelperspektive zu eröffnen, scheint sie nicht erreicht zu haben. Stattdessen konzentrieren sich die meisten eher auf die Details einer einzelnen Darstellung oder vermischen mehrere Repräsentationen, ohne ihren Zusammenhang deuten zu können. Dies gilt gleichermaßen für die drei Betrachtungsniveaus wie für verschiedene inhaltliche Vorstellungen der Menge von Kongruenzklassen. Auch hier kann die Kürze der Unterrichtsreihe Ursache sein, zumal der Zugang für die Studierenden gänzlich neuartige Perspektiven eröffnete.

# Kapitel 5

# Ergebnisse und Ausblick

## Zusammenfassung der Forschungsergebnisse

Das in dieser Arbeit vorgestellte Forschungsprojekt gründet auf der wechselseitigen Befruchtung von didaktisch orientierten Sachanalysen und empirischen Untersuchungen:

Ausgehend von Doriers (2000) Sachanalyse zur linearen Algebra wurden Begriffe aus einer Vorlesung zur linearen Algebra ausgesucht, die inhaltlich und methodisch zentrale Aspekte dieser mathematischen Theorie widerspiegeln. In inhaltlicher Hinsicht waren dies die Begriffe des Vektorraums und der linearen Abbildung, in methodischer Hinsicht war dies das Fortschreiten auf höhere Abstraktionsebenen, das bei der Konstruktion von Mengen von Restklassen und von einem Dualraum auftritt.

Zu den ausgewählten Inhalten wurde eine erste Sachanalyse durchgeführt, die Grundvorstellungen und Herausforderungen für Lernende herausstellte.

Darauf aufbauend wurden Interviewgespräche konzipiert und mit drei Studierenden durchgeführt. Die qualitative Analyse dieser Gespräche zeigt inhaltliche Vorstellungen auf, die hinter den Verhaltensweisen der Studierenden stehen können. Sie gibt zudem mögliche Erklärungen für kognitive Strategien der Studierenden im Umgang mit den gestellten Aufgaben. Dies bezieht sich zum Teil auf Verfahren bei der Suche nach Lösungen, zum Teil auf Vorgehensweisen zur kognitiven Verarbeitung neuen Wissens.

Die Erkenntnisse und Vermutungen bzgl. der studentischen Vorstellungen gaben wertvolle Anstöße für eine zweite Untersuchung der betrachteten Inhalte. In dieser Sachanalyse wurden die durch die Interviews angeregten Ideen über diese Inhalte hinsichtlich ihrer Bedeutung und Tragfähigkeit als Grundvorstellungen unter die Lupe genommen. Für diesen Teil wurden Spuren dieser Vorstellungen in der Geschichte und in Lehrbuchdarstellungen untersucht. Zudem wurden Auswirkungen einiger Fehlvorstellungen auf weitere Begriffsbildungen aufgezeigt.

In Bezug auf Abstraktionsschritte in der linearen Algabra wurden zudem kognitive Anforderungen herausgestellt, die einige der Inhalte an Lernende stellen.

Die Ergebnisse dieser zweiten Sachanalyse, die auf das Restklassenthema bezogen waren, wurden zur Konzipierung einer Lernumgebung und einer anschließenden zweiten empirischen Untersuchung eingesetzt. Diese Untersuchung bezog sich auf kurze Aufsätze von 39 Studierenden des nachfolgenden Jahrgangs. Die qualitative Auswertung der Aufsätze führte zu einem Kategoriensystem von drei Abstraktionsstufen.

Dieses Kategoriensystem gibt - neben den zuvor erwähnten Grundvorstellungen - eine zweite Sichtweise auf das Thema 'Mengen von Restklassen', die ein hohes Abstraktionsniveau aufzeigt.

Das erste Ergebnis dieses Forschungsprojekts ist ein Einblick in die Komplexität des Lernens einiger Studierender, die hohen kognitiven Anforderungen ausgesetzt sind. Vor allem aus dem Verhalten von drei Studierenden in ausführlichen Interviewgesprächen werden plausible Rückschlüsse auf ihre Vorstellungen zu einzelnen Begriffen aus der linearen Algebra und auf ihre Strategien zur Verarbeitung und Anwendung abstrakten Wissens gezogen. Die Ergebnisse dieser Fallstudien zeigen Stärken und Schwächen, Grenzen und vor allem Möglichkeiten zur Weiterentwicklung dieser individuellen Lernwege auf. Insbesondere zeigen die Interviewanalysen, dass ein oberflächlicher Eindruck von studentischen Äußerungen als 'Fehlen jeglichen Verständnisses' eine vorschnelle Bewertung sein kann:[1] Viele Antworten in den Interviewgesprächen waren falsch und schienen mir auf den ersten Blick unsinnig zu sein. Die Analysen der Gespräche führten jedoch meist zu plausiblen Deutungen, die ein Denken in reichhaltigen und sinnvollen, wenn auch nicht ganz fehlerfreien Vorstellungen vermuten ließen. Einige Vorgehensweisen zur Verarbeitung der Informationen aus den Interviews sind individuell sehr verschieden. Manches lässt sich auf unterschiedliche Vorstellungen zurückführen, in die das neue Wissen integriert werden muss. Anderes scheint auf unterschiedlichen Grundstrategien der Wissensverarbeitung zu beruhen. Zwei Hypothesen über solche Grundstrategien sind:

Präferenzen prädikativen oder funktionalen Denkens[2]
Eine Reihe von Verhaltensweisen, die bei den Interviewgesprächen beobachtet wurden, lassen sich zufriedenstellend mit diesem Merkmal erklären.

Die Konstruktion von mentalen Repräsentationen unter zwei Leitprinzipien:
◦ Neues Wissen wird zunächst nur teilweise integriert, soweit dies nämlich unmittelbar möglich ist. Es veranlasst die Konstruktion eines neuen Teilmodells, das zu anderen, älteren Modellen nicht vollständig in Einklang stehen muss. Die Angleichung und Versöhnung dieser verschiedenen Modelle geschieht erst allmählich (oder vielleicht niemals).
◦ Bestandteile neuen Wissens werden nur soweit mental gespeichert, wie sie in bestehende mentale Repräsentationen integriert werden können. Das bedeutet, dass neues Wissen nur soweit verarbeitet wird, wie die bestehenden internen

[1] Vielfach wird diese Diagnose damit zum Ausdruck gebracht, dass man den Studierenden unterstellt, sie würden nur formale Vorgehens- und Darstellungsweisen imitieren, ohne zu wissen, was die Zeichen bedeuten.

[2] Die Begriffe werden im Sinne von Schwank (2003) verwendet. Erläuterungen dazu werden in 1.1 gegeben.

Modelle daran angepasst werden können, ohne dass Widersprüche bestehen bleiben.

Die Kurzaufsätze, die 39 Studierende über ihr Verständnis der Menge $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ geschrieben haben, geben geringere Hinweise auf Erkenntnisstand und Strategien einzelner als die Interviewgespräche. Sie zeigen eine Abstufung von Verständnis dieses Themas nach drei Abstraktionsstufen. Insbesondere zeigen sie, dass im wesentlichen richtige Darstellungen in den Aufsätzen zumeist leicht auf eine Abstraktionsebene eingeordnet werden können, während einige in sich widersprüchliche Darstellungen Hinweise auf das Bemühen geben, von einer sicher erreichten Abstraktionsebene aus einen Schritt auf die nächste Ebene zu wagen. Wieder andere Aufsätze geben Darstellungen eines einzelnen Merkmals von Mengen von Restklassen auf verschiedenen Stufen und sprechen andere der erfragten Merkmale gar nicht an. Es wird deutlich, dass innerhalb einer Lerngruppe, die dieselbe Veranstaltung besucht, nicht nur ein sehr unterschiedliches Maß an Verständnis erreicht wird, sondern auch die Ansätze zur Erschließung dieses Themas sehr verschieden sind.

Das zweite Ergebnis dieses Forschungsprojekts ist eine verfeinerte didaktisch orientierte Sachanalyse grundlegender Begriffe der linearen Algebra. Sie zeigt Grundvorstellungen und eine hohe Komplexität der Begriffe auf. Dabei geht sie auf vielfältige kognitive Abstraktionsleistungen ein, die mit einer mentalen Konstruktion dieser Begriffe einhergehen. Diese Analyse berücksichtigt verschiedene Grundstrategien und ihre Möglichkeiten und Grenzen:

Zum Begriff des Vektorraums:

Es wurden die drei Grundvorstellungen, nämlich die ‘Elementtypvorstellung’, die ‘Komponentenvorstellung’ und die ‘Baukastenvorstellung’, als Träger unterschiedlicher Charakteristika des Vektorraumbegriffs aufgespürt. Auch wenn definitive Entscheidungen, was sich die Interviewten tatsächlich vorstellten, natürlich nicht aufgrund indirekter Hinweise ihres Verhaltens bei den Interviews getroffen werden können, so kristallisierte sich doch bei den Interviewanalysen die Möglichkeit dieser drei Vorstellungen heraus. Spuren dieser drei Vorstellungen sind auch in der Entstehungsgeschichte der Theorie der linearen Algebra zu finden. Zudem wird an einem Beispiel, das bereits in einer Einführung in die lineare Algebra eine Rolle spielt, die Nützlichkeit jeder dieser drei Grundvorstellungen nachgewiesen.

Zum Begriff der linearen Abbildung:

Dieser Begriff wurde vor allem in seiner horizontalen und vertikalen[3] Einbindung in mathematische Zusammenhänge entfaltet.

◦ Vertikale Verbindungen: Der Begriff der linearen Abbildung baut auf Abstraktionsschritte unterschiedlicher Art auf, nämlich den Abbildungsbegriff als Verdinglichung oder Verkapselung von Zuordnungsprozessen, und den Strukturbegriff des Vektorraums als Vereinigung[4]. Ein weiterer Abstraktionsschritt

[3] Die Bezeichnung ‘vertikal’ lehnt sich an seine Verwendung bei Harel/Kaput (1991) an, die die Konstruktion neuer abstrakter Objekte als ‘vertikales’ Wachstum mathematischen Wissens bezeichnen. Demgegenüber ist mit ‘horizontalem’ Wachstum Vernetzungen und Erkenntnisgewinn innerhalb einer Abstraktionsebene gemeint.

[4] Die drei Begriffe ‘Verdinglichung’, ‘Verkapselung’ und ‘Vereinigung’ sind in 1.2.1 definiert.

geschieht durch den Sichtwechsel, der lineare Abbildungen unter dem Charakteristikum von Elementen eines Vektorraumes betrachtet. Durch lineare Abbildungen entstehen somit vertikale Verbindungen zwischen verschiedenen Abstraktionsebenen, auf denen sie z.T. agieren, z.T. selbst Objekte mathematischer Betrachtung sind.

∘ Horizontale Verbindungen: Durch lineare Abbildungen werden Zusammenhänge zwischen Vektorräumen hergestellt, die die Vektorraumstrukturen berücksichtigen. Dazu gehören Spezialfälle wie die Beschreibung von Basiswechseln mit Hilfe von Automorphismen und die Identifizierung von verschiedenen Vektorräumen mit Hilfe von Isomorphismen.

Zum Begriff der Menge von Restklassen:

Es wurden zwei Grundvorstellungen aufgedeckt, die sich gegenseitig ergänzen und gemeinsam ein stimmiges, vielseitiges Bild von Gruppen von Restklassen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ geben. Diese sind erstens: eine Menge von Teilmengen von $/Z$, auf die die Addition von $\mathbb{Z}$ 'vererbt' wird; zweitens: eine Menge mit $n$ Elementen, auf der eine formale Addition, bei konkretem $n$ z.B. mit Hilfe einer Gruppentafel, definiert ist.

Zudem wurden drei Abstraktionsebenen beschrieben, auf denen Restklassen betrachtet werden können, und mögliche Übergänge für Lernende zum Verständnis von Gruppen von Restklassen diskutiert. Diese Überlegungen orientierten sich schwerpunktmäßig an dem Ziel, ein internes Modell aufzubauen, das die erste Grundvorstellung zumindest mit berücksichtigt.

## Erste Konsequenzen für die Lehre

Die in dieser Arbeit vorgestellten Sachanalysen und empirischen Untersuchungen zur linearen Algebra münden weder in eine Empfehlung eines bestimmten, detailliert beschriebenen Lehrrezepts, noch in einen Katalog inhaltlicher Schwerpunkte, denen eine Vorlesung zur linearen Algebra folgen sollte. In Anbetracht der Vielfalt studentischer Prioritäten hinsichtlich ihrer Lernwege wird es wohl kaum einen optimalen Lehrweg geben. Die Untersuchungen weisen jedoch auf verschiedene Prinzipien für einen veränderten Lehrstil hin. Diese betreffen Gelegenheiten und Anregungen für Lernende, eigene Vorstellungen zu konstruieren, zu hinterfragen, zu korrigieren, anzuwenden und auszubauen. Sie werden hier nach vier Aspekten von Mathematik geordnet, die in einem Mathematikstudium unverzichtbar sind: das Entdecken und Entwickeln von neuer Mathematik, das schriftliche und mündliche Präsentieren von Mathematik, das Anwenden von mathematischen Ergebnissen auf Probleme innerhalb und außerhalb der Mathematik und das Nachvollziehen von mathematischen Darstellungen. Letztlich kann man alle diese Punkte unter den ersten subsummieren, aber da sie in den üblichen Lehrveranstaltungen auch isoliert von mathematischem Forschen auftreten, sind sie hier gesondert genannt.

Mathematisches Forschen

Studierende brauchen Zeit und Anlässe sich mit der inhaltlichen Tragweite von neuen Begriffen auseinanderzusetzen, ohne dass dieser Prozess durch formale Darstellungen eingeschränkt wird. Denn viele Studierende werden durch formale Symbole von den Inhalten abgelenkt, die durch die Symbolsprache repräsentiert werden.

Anregungen zum Reflektieren des eigenen Tuns, sei es in mündlichem oder schriftlichem Rahmen, helfen Studierenden über vielen Details einen Überblick und somit einen Sinnzusammenhang zu suchen.

Das bewusste Formalisieren eigener Ideen und Erkenntnisse als Ausdruck präziser Beschreibung von Begriffen und Zusammenhängen hilft eine gesunde Einstellung zu den Möglichkeiten und Grenzen formaler Darstellungen zu entwickeln.

Mathematik darstellen

Hierunter fallen viele Tätigkeiten, die bei der Bearbeitung klassischer Übungsaufgaben ausgeführt werden. Dazu gehört das Erlernen der Konventionen mathematischer Darstellungssprache und der Logik von Beweisen. Die Tatsache, dass Studierende auf diesem Gebiet große Probleme zeigen, lässt nach Anlässen noch intensiverer Auseinandersetzung mit mathematischer Logik suchen. Diese könnte z.B. darin bestehen, dass die Logik der mathematischen und der alltagsweltlichen Sprache verglichen wird, und auf diese Weise mathematische Ausdrucksformen auf einer Metaebene reflektiert werden.

Mathematik anwenden

Zur Anwendung von erlerntem Wissen und Methoden gehören Aufgaben, in denen die Kenntnisse in neuen Problemzusammenhängen eingesetzt, erprobt und erweitert werden. Solche Anwendungen können sowohl inner- wie außermathematischer Art sein. Sie werden in vielen der traditionellen Übungsaufgaben gefordert.

'Fertige' Mathematik verstehen

Das Nachvollziehen von Mathematik, die in deduktiver Form in Vorlesungen und Büchern präsentiert wird, erscheint vordergründig als eine passive Form des Lernens und wird von vielen Studierenden als eine Herausforderung zu einer reinen Gedächtnisleistung verstanden, wohingegen ein aktives, mentales Rekonstruieren der präsentierten Mathematik wichtig wäre. Hilfestellungen finden sich in Aufgaben, die zum Suchen nach Beispielen anregen, und Aufgaben, die zur Darstellung von Erkenntnissen in Gesamtzusammenhängen auffordern.

Wichtig scheint mir, dass sich eine Lehrveranstaltung nicht einseitig auf einen dieser Aspekte von Mathematiklernen konzentriert, sondern ein ausgewogenes Angebot macht. Dabei schlage ich eine Organisationsform vor, welche Anteile des aktiven Lernens in Übungen gegenüber dem von Studierenden meist als passives Lernen verstandenen Zuhören in Vorlesungen betont.

### Ein Beispiel

Ein Versuch zur Anregung eines forschenden Umgangs mit mathematischen Strukturen, zum Reflektieren des eigenen Tuns und zum mentalen Konstruieren neuer Objekte stellt die oben präsentierte Unterrichtssequenz zu Restklassen dar.

Als weiteres Beispiel zu dieser ersten Kategorie von mathematischen Tätigkeiten soll eine Aufgabensequenz zur Auseinandersetzung mit Vektorraumstrukturen dienen. Voraussetzung für eine Bearbeitung des Blattes ist die Kenntnis einer axiomatischen Vektorraumdefinition[5], nicht aber die Kenntnis von linearen Abbildungen. Die Beschäftigung mit diesen Aufgaben ist als inhaltliche Vorbereitung auf einige Begriffe der linearen Algebra, nicht als ein Ersatz für eine formale Einführung dieser Begriffe gedacht.

**Aufgabenblatt:**

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $a_1, a_2, a_3, a_4$ Elemente von $V$, so dass gilt: $V = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}\}$. Seien außerdem $b_1, b_2, b_3, b_4$ Elemente eines $\mathbb{R}$-Vektorraums $W$.

In den ersten Aufgaben sollen Abbildungen von $V$ nach $W$ untersucht werden, die Strukturen, welche durch die Vektorraumoperationen gegeben sind, respektieren. Diese Eigenschaft wird mit Hilfe von zwei Gleichungen zum Ausdruck gebracht. Wir beginnen mit der Multiplikation mit Skalaren:

**Aufgabe 1:**

Sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{rcll} \varphi(a_i) & = & b_i & \text{für } i \in \{1,2,3,4\} \\ \varphi(\lambda v) & = & \lambda\varphi(v) & \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und alle } v \in V \end{array}$$

a) Gibt es ein solches $\varphi$, bzw. unter welchen Umständen gibt es bei der Definition von $\varphi$ Probleme?
b) Setzen wir Umstände voraus, unter denen es ein solches $\varphi$ gibt: Gibt es mehrere Abbildungen, die die Bedingungen erfüllen? Wenn ja, beschreiben Sie, wie man solche Abbildungen konstruieren kann. Wenn nein, begründen Sie.

**Aufgabe 2:**

Wir ergänzen noch eine weitere Bedingung für $\varphi$, nämlich

$$\varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v') \text{ für alle } v, v' \in V.$$

Beantworten Sie die Fragen a) und b) in Aufgabe 1 noch einmal. Beschreiben Sie präzise die Bedingungen, die Sie an die $a_i$ und die $b_i$ stellen müssen, damit $\varphi$ eine wohldefinierte Abbildung ist.

**Aufgabe 3:**

Sei

$$\psi : V \longrightarrow W$$

ein Abbildung, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{array}{rcll} \psi(\lambda v) & = & \lambda\psi(v) & \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und alle } v \in V \\ \psi(v + v') & = & \psi(v) + \psi(v') & \text{für alle } v, v' \in V \end{array}.$$

Geben Sie eine einfache Darstellungsmöglichkeit für $\psi$ an!

[5] Anstelle einer axiomatischen Vektorraumdefinition genügt auch die Kenntnis von mindestens einem Modell eines Vektorraums, wenn der Aufgabentext diesem angepasst wird.

**Aufgabe 4:**

a) Ein Vektorraum ist eine Menge mit einer besonderen Struktur. Welche Analogie fällt Ihnen zur Illustration dieser Struktur ein? Erläutern Sie!
b) Erklären Sie, inwiefern man bei den Abbildungen, die auf diesem Aufgabenblatt betrachtet wurden, von 'strukturerhaltenden Abbildungen' sprechen kann!

Diese Aufgabenabfolge regt zur forschenden Beschäftigung mit den Strukturen eines Vektorraums an. Der Konstruktion dieser Aufgaben liegt die Strategie zugrunde, mit Hilfe strukturerhaltender Abbildungen Erkenntnisse über Ordnungsgefüge zu gewinnen, die Folgerungen aus den gegebenen mathematischen Strukturen sind. Ohne dass die Bezeichnungen erwähnt werden, fordern die Aufgaben eine Auseinandersetzung mit den Begriffen 'lineare Abbildung', 'lineare Abhängigkeit' und 'lineare Unabhängigkeit', 'Erzeugendensystem' und 'Basis', und geben Anstöße zur Erschließung und Formalisierung der Kernideen dieser Begriffe.

Zur Lösung der Aufgaben braucht man weder sehr originelle Ideen noch komplizierte Argumentationsketten. Im Vergleich mit vielen anderen Übungsaufgaben stellen sie keine hohen Ansprüche an Problemlöse- oder Abstraktionsfähigkeiten. Der Schwerpunkt dieser Aufgaben liegt in der Erfahrung, dass die gegebenen Vektorraumaxiome weitreichende Auswirkungen auf das Beziehungsgefüge haben, in das die Elemente eines Vektorraums eingebunden sind, und in dem Versuch, einen Teil dieser Beziehungen in Worten oder Zeichen zu explizieren.

Zur Bearbeitung der ersten beiden Aufgaben ist zunächst die heuristische Strategie des Vorwärtsarbeitens, welche Schlussfolgerungen aus den Voraussetzungen zieht, ausreichend. Anschließend sind die Ergebnisse zu beurteilen, wobei die Aufgabenstellung bereits darauf hinweist, dass möglicherweise nicht alles glatt geht. Die Zusammenfassung der Beobachtungen zu einem Gesamtergebnis fordert entweder mehrere Fallunterscheidungen oder eine geschickte Formulierung, die verschiedene Fälle gemeinsam behandelt und damit den Kernpunkt der Problematik zum Ausdruck bringt. Dies wird insbesondere bei der zweiten Aufgabe interessant. Der Bearbeitungsvorgang kann hier wie folgt aussehen:

1. Das Ergebnis aus Aufgabe 1, dass die Bilder aller Vielfachen der $a_i$ festgelegt sind, kann genutzt werden um weitere Schlussfolgerungen aus der hinzugekommenen Bedingung zu ziehen: Alle Summen aus Vielfachen der $a_i$ - also alle Elemente von $V$ - haben nun eindeutig bestimmte Bilder.

2. Widersprüche können entstehen, wenn zwei Linearkombinationen der $a_i$ (die sich in mindestens einem Koeffizienten unterscheiden) denselben Vektor beschreiben, wenn es also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ und $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass mindestens für ein $i$ gilt
$$\lambda_i \neq \mu_i$$
und
$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4.$$
Diese Gleichung kann man umstellen zu
$$(\lambda_1 - \mu_1)a_1 + (\lambda_2 - \mu_2)a_2 + (\lambda_3 - \mu_3)a_3 + (\lambda_4 - \mu_a)a_4 = 0$$

und, falls z.B. $\lambda_1 \neq \mu_1$, zu

$$a_1 = -\frac{\lambda_2 - \mu_2}{\lambda_1 - \mu_1} a_2 - \frac{\lambda_3 - \mu_3}{\lambda_1 - \mu_1} a_3 - \frac{\lambda_4 - \mu_4}{\lambda_1 - \mu_1} a_4.$$

Ein Widerspruch wird in diesem Fall nur vermieden, wenn die $b_i$ in exakt derselben Abhängigkeit zu einander stehen. Diese kann man mit entsprechenden Gleichungen ausdrücken.

3. Eine zusammenfassende Antwort ist: Durch die Bedingungen ist keine Abbildung definiert, falls eines der $a_i$ als Linearkombination der anderen geschrieben werden kann und sein Bild nicht mit der entsprechenden Linearkombination der Bilder der beiden anderen ausgedrückt wird. Andernfalls ist genau eine Abbildung definiert.

   Diese Beschreibung kann man noch 'eleganter' und kürzer fassen. Eine Bedingung für die Wohldefiniertheit der Abbildung, die kein $a_i$ auszeichnet, ist: Zu jeder Linearkombination der $a_i$, die den Nullvektor in $V$ repräsentiert, stellt die entsprechende Linearkombination der Bilder den Nullvektor in $W$ dar.

   Natürlich ist hier auch eine Zweiteilung der Antwort sinnvoll, die eine Bedingung allein an die $a_i$ gesondert behandelt: Wenn ausschließlich die triviale Linearkombination der $a_i$ den Nullvektor darstellt, dann ist die Abbildung wohldefiniert, egal wie die $b_i$ aussehen.

Diese zuletzt genannte Bedingung, die die lineare Unabhängigkeit beschreibt, ist nützlich zur Lösung der Aufgabe 3: Wenn man eine linear unabhängige Teilmenge von $V$ konstruieren kann, die $V$ erzeugt, so kann man seinen Elementen beliebige Bilder in $W$ zuordnen und erhält mittels der beiden gegebenen Gleichungen eine wohldefinierte Abbildung auf ganz $V$. Die Konstruktion kann durch sukzessives Weglassen von geeigneten Elementen des gegebenen Erzeugendensystems geschehen. Die Aufgabe regt eine Reflexion dessen an, was in den ersten beiden Aufgaben erarbeitet wurde: Sie demonstriert ein Ordnungsgefüge eines Vektorraums, das die gewonnenen Erkenntnisse impliziert, und seine Auswirkungen auf strukturerhaltende Abbildungen.

Die Aufgabe 4a) verlangt, über dieses Ordnungsgefüge in informeller Weise zu sprechen. Hier können sowohl dynamische als auch statische Analogien genannt werden. Die Aufgabe regt dazu an, sich der eigenen Vorstellungen bewusst zu werden. Die Erläuterung, inwiefern die Analogie die Vektorraumstruktur widerspiegelt, kann helfen, Grenzen und Möglichkeiten dieser Vorstellung auszuloten und Brüche zu erkennen. Der zweite Teil von Aufgabe 4 regt an, den Weg der Erkenntnisgewinnung zu reflektieren. Eine Antwort kann sich zum Einen auf die beiden Linearitätsbedingungen beziehen und erklären, dass sie die Operationen in den beiden Vektorräumen zu einander in Beziehung setzen und damit die Strukturen übertragen, welche durch die Operationsgesetze bedingt sind. Zum Anderen kann sich die Antwort auf die spezifischen, in Teil a) beschriebenen Ordnungsprinzipien beziehen und erklären, wie diese bei der Bearbeitung der vorangegangenen Aufgaben, also in der Auseinandersetzung mit den Abbildungsbedingungen, offengelegt werden.

Die Vorschläge für einen veränderten Lehr- und Lernstil, die in dieser Aufgabenreihe zur Erforschung von Charakteristika linearer Räume und linearer Abbildungen, aber auch in der Lernsequenz zur mentalen Konstruktion von Mengen von Restklassen[6] umgesetzt werden, sind Resultat einer spiralförmigen Entwicklungsarbeit, in der sich Lehren, Beobachten, Analysieren, Modifizieren,... im Sinne der 'Design Science'[7] abwechseln und befruchten. Das hier vorgestellte Forschungsprojekt wurde durch die Dynamik einer solchen Abfolge von Tätigkeiten getragen.

[6]Vgl. Kapitel 4.1.
[7]Vgl. E.Wittmann (1995).

# Literaturverzeichnis

[1] Alves-Dias, Marlene; Artigue, Michele (1995). Articulation Problems Between Different Systems of Symbolic Representations in Linear Algebra. In: Proceedings of the 19th Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bd.2. Recife 1995. S. 34-41.

[2] Artigue, Michele (2001). What We Can Learn from Educational Research at the University Level. In: Holton, Derek (Hrg). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study. Dordrecht 2001. S.207-220.

[3] Artigue, Michele; Chartier, Ghislaine; Dorier, Jean-Luc (2000). Presentation of Other Research Works. In: Dorier, Jean-Luc (Hrg). On The Teaching Of Linear Algebra. Dordrecht 2000. S. 247-264.

[4] Artmann, Benno (1991). Lineare Algebra. Basel 1991.

[5] Baer, Reinhold (1952). Linear Algebra and Projective Geometry. New York 1952.

[6] Bauer, Ludwig (1978). Mathematische Fähigkeiten. Mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben. Paderborn 1978.

[7] Bauersfeld, Heinrich (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln. IDM 6. Köln 1983. S. 1-56.

[8] Beck, Christian; Jungwirth, Helga (1999). Deutungshypothesen in der interpretativen Forschung. In: JMD 20(4). 1999. S. 231-259.

[9] Beck, Christian; Maier, Hermann (1993). Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung. In: JMD 14(2). 1993. S. 147-179.

[10] Beth, Evert W.; Piaget, Jean (1966). Mathematical Epistemology and Psychology. Dordrecht 1966.

[11] Beutelspacher, Albrecht (1998). Lineare Algebra. Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen. Wiesbaden 1998.

[12] Blum, Werner; Niss, Mogens (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications, and Links to Other Subjects - State, Trends, and

Issues in Mathematics Instruction. In: Educational Studies in Mathematics 22(1). 1991. S. 37-68.

[13] Borromeo-Ferri (2003). Mathematische Denkstile - visuell, analytisch, konzeptuell und ihre Präferenzen bei Jugendlichen am Ende der Sekundarstufe. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Dortmund 2003. S. 141-144.

[14] Bourbaki, Nicolas (1971). Elemente der Mathematikgeschichte. Hrg. von Karl Peter Grotemeyer, Dietrich Morgenstern, Horst Tietz. Göttingen 1971.

[15] Brieskorn, Egbert (1983). Lineare Algebra und analytische Geometrie I. Noten zu einer Vorlesung mit historischen Anmerkungen von Erhard Scholz. Braunschweig 1983.

[16] Brieskorn, Egbert (1985). Lineare Algebra und analytische Geometrie II. Noten zu einer Vorlesung mit historischen Anmerkungen von Erhard Scholz. Braunschweig 1985.

[17] Burton, Leone (1999). Mathematics and their Epistemologies - and the Learning of Mathematics. In: European Research in Mathematics Education I. Osnabrück 1999. S. 90-105.

[18] Carlson, David (Hrg); Johnson, Charles R. (Hrg); Lay, David C. (Hrg); Porter, A. Duane (Hrg); Watkins, Ann (Hrg); Watkins, William (Hrg) (1997a). Resourses for Teaching Linear Algebra. MAA Notes 42. 1997.

[19] Carlson, David; Johnson, Charles R.; Lay, David C.; Porter, A. Duane (1997b). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. In: Carlson, David (Hrg); Johnson, Charles R. (Hrg); Lay, David C. (Hrg); Porter, A. Duane (Hrg); Watkins, Ann (Hrg); Watkins, William (Hrg). Resourses for Teaching Linear Algebra. MAA Notes 42. 1997. S. 53-58.

[20] Cohors-Fresenborg, Elmar; Schwank, Inge (1996). Kognitive Aspekte des Business Reengineering. In: Kriz, J. (Hrg); Stemberger, G. (Hrg); Tholley, P. (Hrg); Walter, H.-J. (Hrg). Gestalt Theory. Bd. 18, Nr. 4 (Sonderdruck), Dez. 1996.

[21] Dorier, Jean-Luc (2000). Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. In: Dorier, Jean-Luc (Hrg). On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht 2000. S. 1-81.

[22] Dorier, Jean-Luc; Robert, Aline; Robinet, Jacqueline; Rogalski, Marc (2000a). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. In: Dorier, Jean-Luc (Hrg). On The Teaching of Linear Algebra. Dordrecht 2000. S. 85-124.

[23] Dorier, Jean-Luc; Robert, Aline; Robinet, Jacqueline; Rogalski, Marc (2000b). The Meta Lever. In: Dorier, Jean-Luc (Hrg). On The Teaching of Linear Algebra. Dordrecht 2000. S. 151-172.

[24] Dorier, Jean-Luc; Sierpinska, Anna (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. In: Holton, Derek (Hrg). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study. Dordrecht 2001. S. 255-273.

[25] Dörfler, Willi (2002). Grenzen diagrammatischen Denkens. In: Beiträge zum Mathematikunterrricht. Klagenfurt 2002. S. 151-154.

[26] Dörfler, Willi (2003). Diagrammatisches Denken in der Linearen Algebra. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim 2003. S. 189-192.

[27] Dreyfus, Tommy (1991). Advanved Mathematical Thinking Processes. In: Tall, David(Hrg). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht 1991. S. 113-134.

[28] Dubinsky, Ed (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: David Tall (Hrg). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht 1991. S. 95-123.

[29] Dubinsky, Ed (1997). Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at the College Level. In: Carlson, David (Hrg); Johnson, Charles R. (Hrg); Lay, David C. (Hrg); Porter, A. Duane (Hrg); Watkins, Ann (Hrg); Watkins, William (Hrg). Resourses for Teaching Linear Algebra. MAA Notes 42. 1997. S. 85-105.

[30] Dubinsky, Ed; Dautermann, Jeannie; Leron, Uri; Zazkis, Rina (1994). On Learning Fundamental Theories of Group Theory. In: Educational Studies in Mathematics Education. 1994. S. 267-305.

[31] Dubinsky, Ed; Mcdonald, Michael (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: Holton, Derek (Hrg), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study. Dordrecht 2001. S. 275-282.

[32] Fischbein, Ephraim (1987). Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach. Dordrecht 1987.

[33] Fischer, Astrid (2003). Mentale Modelle zum Vektorraumbegriff. Erste Ergebnisse einer empirischen Untersuchung unter Studierenden. In: mathematica didactica 26(2). 2003. S. 91-114.

[34] Fischer, Gerd (2002). Lineare Algebra. Wiesbaden 2002.

[35] Freudenthal, Hans (1977). Mathematik als pädagogische Aufgabe. Stuttgart 1977.

[36] Gray, Eddie; Pinto, Marcia; Pitta, Demetra; Tall, David (1999). Knowledge Constrction and Diverging Thinking in Elementary and Advanced Mathematics. In: Educational Studies in Mathematics (38). 1999. S. 111-133.

[37] Gray, Eddie; Tall, David (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. In: The Journal for Research in Mathematics Education 26(2). S. 115-141.

[38] Gray, Eddie; Tall, David (2001). Relationships between Embodied Objects and Symbolic Procepts: An Explanatory Theory of Success and Failure in Mathematics. In: Proceedings of the 25th Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht 2001. S. 65-72.

[39] Gray, Jeremy J. (1990). Herausbildung von strukturellen Grundkonzepten der Algebra im 19. Jahrhundert. In: Scholz, Erhard (Hrg) (1990). Geschichte der Algebra. Eine Einführung. Mannheim 1990. S. 293-318.

[40] Greub, Werner (1976). Lineare Algebra. Toronto 1976 (Nachdruck von 1958).

[41] Harel, Guershon (1989). Learning and Teaching Linear Algebra: Difficulties and an Alternative Approach to Visualizing Concepts and Processes. In: Focus on Learning Problems in Mathematics. Bd. 11(2). Framingham, Mass. 1989. S. 139-148.

[42] Harel, Guershon (1990). The Role of Conceptual Entities in Learning Mathematical Concepts at the Undergraduate Level. In: Proceedings of the 14th Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bd. 1. Mexico 1990. S. 53-60.

[43] Harel, Guershon (1997). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommandations: Moving Beyond Concept Definition. In: Carlson, David (Hrg); Johnson, Charles R. (Hrg); Lay, David C. (Hrg); Porter, A. Duane (Hrg); Watkins, Ann (Hrg); Watkins, William (Hrg). Resourses for Teaching Linear Algebra. MAA Notes 42. 1997. S. 107-126.

[44] Harel, Guershon; Kaput, James (1991). The Role of Conceptual Entities and their Symbols in Building Advanced Mathematical Concepts. In: Tall, David (Hrg). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht 1991. S. 82-94.

[45] Hefendehl-Hebeker, Lisa (2003). Das Zusammenspiel von Form und Inhalt in der Mathematik. In: Hefendehl-Hebeker, Lisa (Hrg); Hußmann, Stefan (Hrg). Mathematikdidaktik zwischen Empirie und Fachorientierung. Festschrift für Norbert Knoche. Hildesheim 2003. S. 65-71.

[46] Hillel, Joel (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In: Dorier, Jean-Luc (Hrg). On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht 2000. S. 191-207.

[47] Jänich, Klaus (1979). Lineare Algebra. Ein Skriptum für das erste Semester. Berlin 1979.

[48] Klingenberg, Wilhelm (1984). Lineare Algebra und Geometrie. Berlin 1984.

[49] Klein, Felix (1973). Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Erster Band. Liniengeometrie. Grundlegung der Geometrie. Zum Erlanger Programm. Hrg. von Fricke, R.; Ostrowski, A.. Berlin 1973. (Nachdruck von 1921.)

[50] Koecher, Max (1985). Lineare Algebra und analytische Geometrie. Berlin 1985.

[51] Kowalsky, Hans-Joachim; Michler, Gerhard (1995). Lineare Algebra. Berlin 1995.

[52] Lengnink, Katja; Prediger, Susanne (2000). Mathematisches Denken in der Linearen Algebra. In: ZDM 2000. Bd. 4. S.111-122.

[53] Linchevsky, Liora; Sfard, Anna (1994). The Gains and Pitfalls of Reification - The Case of Algebra. In: Educational Studies in Mathematics (26). 1994. S. 191-228.

[54] Lorenz, Falko (1988). Lineare Algebra I. Zürich 1988.

[55] Maier, Hermann; Steinbring, Heinz (1998). Begriffsbildung im alltäglichen Mathematikunterricht - Darstellung und Vergleich zweier Theorieansätze zur Analyse von Verstehensprozessen. In: JMD 19(4). 1998. S. 292-329.

[56] Malle, Günther (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra: mit vielen Beispielaufgaben. Braunschweig 1993.

[57] Maracci, Mirco (2003). Difficulties in Vector Space Theory: A Compared Analysis in Terms of Conceptions and Tacit Models. In: Proceedings of the 27th Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bd. 3. Honolulu 2003. S. 229-236.

[58] Mittelstraß, Jürgen (Hrg) (1996). Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Bd 1. Mannheim 1996.

[59] Mittelstraß, Jürgen (Hrg) (1996). Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Bd 3. Mannheim 1996.

[60] Nnadozie, Alfred; Sierpinska, Anna (2001). Methodological Problems in Analysing Data from a Small Scale Study on Theoretical Thinking in High Achieving Linear Algebra Students. In: Proceedings of the 25th Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bd.4. 2001. S. 177-184.

[61] Polya, Georg (1966/1967). Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. 2 Bde. Basel 1966/67.

[62] Rogalski, Marc (2000). The Teaching Experimented in Lille. In: Jean-Luc Dorier (Hrg). On The Teaching of Linear Algebra. Dordrecht. S. 133-149.

[63] Scholz, Erhard (Hrg) (1990). Geschichte der Algebra. Eine Einführung. Mannheim 1990.

[64] Schwank, Inge (1999). On Predicative versus Functional Cognitive Structures. In: European Research in Mathematics EducationI.II. Osnabrück 1999. S. 84-96.

[65] Schwank, Inge (2003). Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In: ZDM 2003. Bd. 35 (3). S. 70-78.

[66] Sierpinska, Anna (2000). On Some Aspects of Student's Thinking in Linear Algebra. In: Jean-Luc Dorier (Hrg). On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht 2000. S. 209-246.

[67] Sierpinska, Anna; Trgalova, Jana; Hillel, Joel; Dreyfus, Tommy (1999). Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri. In: Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bd 1. Haifa 1999. S. 119-134.

[68] Sfard, Anna (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objetcs as Different Sides of The Same Coin. In: Educational Studies in Mathematics (22). 1991. S. 1-36.

[69] Sfard, Anna (2000). Symbolizing Mathematical Reality into Being - Or how Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other. In: Cobb, Paul; McClain (Hrg), Kay (Hrg); Yackel, Erna (Hrg). Symbolizing and Comunicating in Mathematics Classrooms. Perspectives on Discourses, Tools, and Instructional Design. Mahwah (USA) 2000. S. 37-98.

[70] Sjuts, Johann (1999). Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Theoretische Einordnung, konzeptionelle Abgrenzung und interpretative Auswertung eines kognitions- und konstruktivismus-theoriegeleiteten Mathematikunterrichts. Dissertation. Osnabrück 1999.
(Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik).

[71] Steinbring, Heinz (1993). Die Konstruktion mathematischen Wissens im Unterricht - Eine epistemologische Methode der Interaktionsanalyse. In: JMD 14(2). 1993. S. 113-145.

[72] Steinbring, Heinz (2000). Epistemologische und sozial-interaktive Bedingungen der Konstruktion mathematischer Wissensstrukturen (im Unterricht der Grundschule). Bd 1. Dortmund 2000 (Abschlussbericht zum DFG-Projekt).

[73] Steinbring, Heinz (2005). The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. New York 2005.

[74] Tall, David (Hrg) (1991). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht 1991.

[75] Tall, David (2004). Thinking through Three Worlds of Mathematics. In: Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bd. 4. 2004. S. 281-288.

[76] Tietze, Uwe-Peter(Hrg); Klika, Manfred(Hrg); Wolpers, Hans (Hrg) (2000). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Bd 2. Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Braunschweig 2000.

[77] Tucker, Alan (1997). The Growing Importance of Linear Algebra in Undergraduate Mathematics. In: Carlson, David (Hrg); Johnson, Charles R. (Hrg); Lay, David C. (Hrg); Porter, A. Duane (Hrg); Watkins, Ann (Hrg); Watkins, William (Hrg). Resourses for Teaching Linear Algebra. MAA Notes (42), 1997. S. 5-11.

[78] Van der Waerden, Bartel L. (1966). Algebra. Erster Teil. Berlin 1966 (siebte Auflage).

[79] Vinner, Shlomo (1997). Scenes from Linear Algebra Classes. In: Carlson, David (Hrg); Johnson, Charles R. (Hrg); Lay, David C. (Hrg); Porter, A. Duane (Hrg); Watkins, Ann (Hrg); Watkins, William (Hrg). Resourses for Teaching Linear Algebra. MAA Notes (42). 1997. S. 155-171.

[80] Vom Hofe, Rudolf (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Texte zur Didaktik der Mathematik. Heidelberg 1995.

[81] Vom Hofe, Rudolf (1996). Grundvorstellungen - Basis für inhaltliches Denken. In: mathematik lehren 78. 1996. S. 4-8.

[82] Wille, Rudolf (1981). Versuche der Restrukturierung der Mathematik am Beispiel der Grundvorlesung "Lineare Algebra" In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hannover 1981. S. 102-112.

[83] Wille, Rudolf (2002a). Allgemeine Mathematik. Mathematik für die Allgemeinheit. In: Lengnink, Katja (Hrg); Prediger, Susanne (Hrg); Siebel, Franziska (Hrg). Mathematik und Mensch: Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik. Darmstadt 2002.

[84] Wille, Rudolf (2002b). Kommunikative Rationalität und Mathematik. In: Prediger, Susanne (Hrg); Siebel, Franziska (Hrg); Lengnink, Katja (Hrg). Mathematik und Kommunikation. Darmstadt 2002. S. 181-196.

[85] Wittmann, Erich Chr. (1981). Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1981 (6., neubearbeitete Auflage).

[86] Wittmann, Erich Chr. (1995). Mathematics Education as a 'Design Science'. In: Educational Studies in Mathematics 29(4). 1995. S. 355-374.

[87] Wittmann, Gerald (2000). Schülerkonzepte und epistemologische Probleme. In: Tietze, Uwe-Peter(Hrg); Klika, Manfred(Hrg); Wolpers, Hans (Hrg) (2000). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd 2. Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Braunschweig 2000. S. 132-148.

[88] Wittmann, Gerald (2003). Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie. Mathematikhistorische, epistemologische und empirische Untersuchungen. Hildesheim 2003.

# Anhang A

# Transkripte der Restklasseninterviews

## A.1 Restklassen: Herr Sendig (RK, Sendig)

I: Dann gucken wir uns doch jetzt noch mal Restklassen an. Hast du die verstanden?
S: Ich glaub ja.
I: Mittlerweile haben wir auch schon viel darüber gesprochen, ne? Erstmal schreiben wir das ein bißchen anders, und zwar
.* $N = \{\{3k|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+1|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+2|k \in \mathbb{Z}\}\}$ *
(liest beim Schreiben vor). Kennst du, die Menge, ne?
S: Ja, also das Erste ist Restklasse Null, dann Restklasse Eins, dann Restklasse Zwei bzgl. $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$.
I: Genau. (ergänzt:)
.* $= \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *
Die haben wir sonst immer $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$ genannt. Wie addiert man zwei Mengen? So allgemein kann man das eigentlich nicht sagen, ne? Aber wir haben eine Addition definiert.
S: Ja, wir hatten gesagt, dass wir einfach, ehm, Haben wir das für die ganzen Mengen gesagt? Ich dachte nur für jeweils Elemente aus der Menge.
I: Ja, nämlich?
S: Dass ich die Elemente addiere und dann gucke, in welcher Restklasse ich dann wieder lande.
I: Hm. Ja, nun haben wir hier eine Menge, die besteht aus Mengen. Und wir möchten gerne eine Gruppe daraus machen. Und das machen wir, indem wir uns eine Verknüpfung darauf definieren, die nennen wir plus.
S: Ja.
I: * $+ : N \times N \longrightarrow N$ *
Da sollen zwei Elemente aus N verknüpft werden und ein Element aus N wieder rauskommen.
S: Hm! (zustimmend)
I: Also ist die Frage: Was, ja, wie machen wir das? Diese Menge plus diese Menge (zeigt auf die ersten beiden Elemente von N). Was soll das sein?
S: Wie soll ich das. Wie das jetzt aufgeschrieben wird, weiß ich jetzt nicht so genau. Also heißt das drei k plus drei k plus eins, oder? Wie benennen wir die Elemente,

die da drin sind?
I: Es sind zwei Sachen, zu sagen, wie rechne ich, um das Ergebnis zu finden, und eine andere Sache, das Ergebnis anzugeben. Das ist ja hier ziemlich einfach, weil wir nur bei $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$ sind.
S: Ja.
I: Wie werden zwei, also z.B., ich geb denen mal Namen (schreibt A,B,C unter die Elemente von N). Was soll z.B.
.* A + B *
sein? Die Summe aus den beiden Mengen. Was soll da rauskommen? Welche Menge? Oder
.* B + C * ?
So könnten wir jetzt alle Kombinationen aufschreiben.
S: Das habe ich noch nicht ganz verstanden.
I: Also wir haben hier eine Menge (zeigt auf N), die hat drei Elemente, A,B,C. Und wir wollen auf dieser Menge eine Verknüpfung haben, weil wir eine Gruppe daraus machen wollen, aus der Menge. Jetzt müssen wir sagen, wie soll die Verknüpfung aussehen. Was soll Element A plus Element B sein?
S: Müsste eigentlich B sein.
I: Ja, warum? (ergänzt: * A+B=B * )
S: Weil das Erste hat keinen Rest, das Zweite hat Rest Eins. Also muss wieder Rest Eins rauskommen.
I: Genau. Also es ist eine Sache. Ich meine, wenn ich das hier mit den Restklassen geschrieben hätte, hättest du sagen können, wie ich rechne, um das zu finden. (schreibt zu A: * = $\overline{0}$ *, zu B: * = $\overline{1}$ *, zu C: * = $\overline{2}$* ) Ich kann aber auch einfach die fertigen Ergebnisse alle angeben, dann habe ich auch die Verknüpfung definiert. Das haben wir bei den Gruppentafeln z.B. gemacht.
S: Hm! Gruppentafeln ist mir auch noch nicht klar, was wir damit bezwecken wollen.
I: Manchmal. Hier (zeigt auf N) konnten wir eine Rechenanweisung angeben, wie wir addieren, wenn wir diese Restklassen Null, Eins, Zwei nehmen. Mit Hilfe von Repräsentanten, also einzelnen Elementen aus diesen Mengen, wie du das eben gesagt hast. Aber es gibt auch Gruppen, da kann man nicht drin rechnen, weil da gar nicht solche Zahlen vorkommen. Und da kann man trotzdem ne Verknüpfung definieren, indem man alle Kombinationen angibt, was da rauskommen soll. Und das kann man mit Hilfe von einer Tabelle machen.

.*

| $+$ | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | | | |
| $B$ | | | |
| $C$ | | | |

*

Hier soll A plus A stehen (zeigt in die Tabelle). Da geben wir einfach an, was da stehen soll.
S: Jetzt müssen wir da halt A angeben.
I: Genau. Wir wissen, was wir gerne möchten, was rauskommt, denn da soll die gleiche Verknüpfung wir bei $\mathbb{Z}$ modulo 3 $\mathbb{Z}$ rauskommen. Und das wäre, A plus A?
S: Ist A.
I: A plus B?
S: B. A plus C ist C. Und das vertikal genauso.
I: Genau, muss kommutativ sein. Da können wir B plus B noch überlegen.

S: Ja, ist auch C. und B plus C ist A.

I: Genau. u.s.w.(füllt die Tabelle aus). Das ist ne Definition für, das ist einfach eine andere Schreibweise als dieses hier (zeigt auf A+B=B). Ich könnte jetzt alle Kombinationen aufschreiben. Kürzer zu schreiben ist es in so einer Tabelle. Es soll das Gleiche bedeuten. Leichter ist es, sich so eine Rechenanweisung zu merken. Wir addieren zwei Repräsentanten und gucken, in welcher von den Restklassen sie liegen. Das kann man sich leichter merken als so eine Tabelle. Da muss man sich schon neun Einträge merken nur für $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$. Wenn wir nun Größeres als drei nehmen, ist das zu kompliziert, sich das zu merken. Deswegen ist so ne Anweisung einfacher. Aber im Prinzip ist es das Gleiche.

S: Ja, bei diesen Tabellen konnte man noch alles Mögliche ablesen, ob das eine kommutative Gruppe ist, oder so. Das war mir auch nicht ganz klar, wie das funktioniert, also mit der Symmetrie oder so, weil, in der Vorlesung, Herr Kreuzer hat teilweise die einfach so eingetragen, dass sie kommutativ sein musste. Halt dann einfach gesagt, das kann nicht so sein, dann ist es nicht mehr kommutativ oder so. Da ist mir nicht so ganz klar, von wo nach wo ich schließe oder so.

I: Das kommt dann, also, wenn wir so was haben wie $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$. Und die Anweisung dazu, wir rechnen in $\mathbb{Z}$, wir rechnen mit Repräsentanten, rechnen in $\mathbb{Z}$ und gucken, in welcher Restklasse das Ergebnis liegt, und das soll dann das Ergebnis sein. Da wissen wir, dass das letztlich zu einer Vertauschbarkeit in $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$ führt. Deswegen weiß er bereits, es muss etwas Kommutatives rauskommen. Und dann genügt es, nur einen Teil auszufüllen und dann den Rest so zu machen, dass es symmetrisch wird. Aber wenn man das noch nicht weiß, dass es kommutativ sein muss, dann muss man das einzeln ausrechnen und hinterher gucken, aha, es ist symmetrisch. Kommt also darauf an, was man voraussetzt.

S: Ja.

...

I: Jetzt nehmen wir Homomorphismen. Ich schreib das mal so

.* Hom(N,N) *

Die Menge der Homomorphismen. So ähnlich wie bei

S: Die Menge der Homomorphismen. Hatten wir das überhaupt schon gemacht?

I: Hm! Ich glaub die Schreibweise nicht, aber ihr habt davon gesprochen.

S: Ja, o.k. Gucken wir einfach.

I: Ich kann denen auch einen Namen geben, H, meinetwegen, dann haben wir es kürzer. (ergänzt * H:= * .) Also H soll jetzt genau alle Homomorphismen von N nach N enthalten. Welche sind das? (ergänzt: * Hom(N,N) = { * )

S: Also alle Abbildungen, ehm (5 Sek.) ja, wo, also unter dieser Verknüpfung, die wir jetzt da definiert haben, plus, halt nur jetzt, ne?

I: Ja, genau. Also mal. Stimmt. Gruppenhomomorphismen meine ich dann jetzt.

S: Ja, o.k. Mal kurz überlegen.

I: Du kannst auch was schreiben. Vielleicht einfacher als das im Kopf zu machen.

S: Mir ist noch nicht ganz klar, was wir jetzt genau suchen. Also Homomorphismus heißt doch, dass es bzgl. dieser Verknüpfung egal ist, ob ich in, eh, erst verknüpfe und dann das Ganze abbilde, oder ob ich erst abbilde und dann die gleiche Verknüpfung auf der anderen Menge halt nehme.

I: Genau. Mach das doch so ähnlich wie eben mit den Abbildungen. Du musst, wie viele, also du hast eine Abbildung

.* $N \longrightarrow N$ *
die diese zusätzliche Eigenschaft dann erfüllen muss.
S: D.h. wir können jetzt eigentlich null, eins, zwei hinschreiben.
I: * $\begin{array}{ll} N \longrightarrow & N \\ \overline{0} \longmapsto & \\ \overline{1} \longmapsto & \\ \overline{2} \longmapsto & \end{array}$ *
Ja, jetzt guckst du, was du für Möglichkeiten für das Bild hast.
S: Also die Identität ist dann ja, ist auch ein Homomorphismus, ja?
I: Ja, das ist <u>einer</u>. (ergänzt die Tabelle:)
(a) * $\begin{array}{ll} N \longrightarrow & N \\ \overline{0} \longmapsto & \overline{0} \\ \overline{1} \longmapsto & \overline{1} \\ \overline{2} \longmapsto & \overline{2} \end{array}$ *
S: Und dann (3 Sek)
I: Welche Möglichkeiten habe ich für die Null?
S: Ja, nur die Null.
I: Genau, das macht es ziemlich einfach. Da kann man schon mal zur Null die Null schreiben. Und gibt es hier jetzt Möglichkeiten (zeigt in (a) auf $\overline{1}$ und $\overline{2}$)?
S: Rein von der Kombination würde ich sagen eins auf die Zwei und zwei auf die Eins.
I: können wir ja mal probieren, ob das ein Homomorphismus wird, ne? (ergänzt Tabelle (a) zu:)
(b) * $\begin{array}{lll} N \longrightarrow & N & \\ \overline{0} \longmapsto & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} \longmapsto & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} \longmapsto & \overline{2} & \overline{1} \end{array}$ *
S: Ja, vor allem ist mir jetzt nicht klar, was das rechnerisch heißt, wenn ich jetzt eins auf zwei abbilde und zwei auf eins, was da jetzt hinter steht.
I: Das ist jetzt nur eine Anweisung, wie ich abbilde.
S: Ja.
I: Das hat jetzt nichts mit dem Rechnen in N zu tun. Zunächst mal nicht. Nur wir müssen überprüfen, ob <u>diese</u> Anweisung (zeigt in (b) auf die dritte Spalte) verträglich ist mit den Verknüpfungen, die ja in diesem Fall sind ja die Verknüpfungen dieselben, weil wir ja zweimal dieselbe Menge haben. D.h., was müssten wir z.B. überprüfen? (3 Sek)
S: Wir müssen ja einfach mal. Können wir nicht einfach mal ein Element auswählen oder zwei Elemente auswählen aus der Restklasse und dann die addieren und gucken, ob das das Gleiche ist?
I: Probier doch mal.
S: Ja also in Eins sind meinetwegen jetzt vier und sieben drin. D.h. da müsste (4 Sek)
I: * $4, 7 \in \overline{1}$ *
S: Wenn man sagt, ich verknüpfe die beiden Elemente, also vier plus sieben
I: * 4+7 *
S: Dann wäre das, dann würde ich ja in Restklasse Zwei landen.
I: Ja. * $4 + 7 \in \overline{2}$ *

S: Jetzt soll aber das Ganze abgebildet werden auf Restklasse Zwei. Wenn wir jetzt z.B.

I: Was wird auf Restklasse Zwei abgebildet? Die Zwei oder was?

S: Nein, nein.

I: Ich glaub, du bringst was durch einander. Vier und sieben sind ja keine Elemente von N. N hat ja nur drei Elemente null, eins und zwei (zeigt in (b) auf die erste Spalte).

S: Hm.

I: Dass jedes von diesen Elementen eine Menge ist, und dass z.B. diese Eins (zeigt in (b) auf $\overline{1}$ in der ersten Spalte) vier und sieben enthält, ist eine ganz andere Sache. Um die Vier und die Sieben kümmern wir uns nicht. Wir kümmern uns nur um diese drei Elemente von N (zeigt auf N). Wir haben nachgewiesen, dass die Addition, die wir auf N definiert hatten, oder auf $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$ definiert hatten, dass die nicht im Widerspruch dazu steht, ob wir jetzt die Vier nehmen oder Sieben als Repräsentant von dieser Restklasse hier, dass unsere Regel, wir addieren die und dann gucken wir, in welcher Restklasse das liegt, dass das funktioniert und nicht zu Widersprüchen führt. Das ist die Ebene, auf der das liegt, wenn wir hier vier und sieben aus einer Restklasse nehmen.

S: D.h. ich müsste jetzt Restklasse Eins und Restklasse Zwei addieren.

I: Genau. Z.B. oder Restklasse Eins und Restklasse Eins. Kannst du auch.

S: Ach so! (erstaunt)

I: Alle Kombinationen von Summen müssten wir untersuchen, die wir hier bilden können. Also eins plus zwei z.B.

.* $\overline{1} + \overline{2} =$ *

S: Null, nach den Rechengesetzen jetzt wieder, ne?

I: Ja, und wird abgebildet auf?

S: Ja, auch auf die Null.

I: * $\overline{1} + \overline{2} = \overline{0} \longrightarrow \overline{0}$ *

S: Also das wär ja richtig.

I: Was müssen wir denn jetzt noch überprüfen?

S: Na ja, die anderen Elemente noch, oder?

I: Du hast ja eben gesagt, eine Summe hier (zeigt in (b) auf die erste Spalte) muss dasselbe sein wie

S: Ach so, erst abbilden und dann. Also müsste ich jetzt gucken. Das habe ich gerad, das meinte ich, dass das richtig ist, weil die Eins wird ja auf die Eins, oder halt, umgekehrt, eins wird auf die Zwei und zwei wird auf die Eins und das gibt zusammen die Summe null. Also in dem Fall ist das richtig.

I: Genau. In dem Fall ist das richtig.

S: Ich dachte, wir müssten die anderen Kombinationen noch.

I: Müssten wir auch, genau. Machen wir jetzt nicht. Das funktioniert: Eins plus eins ist zwei, und die wird auf eins abgebildet, und zwei plus zwei, also die Bilder von der Eins, ist vier, macht eins, ist also auch eins, und entsprechend hier. Also, das ist eine. Nenne ich mal $\varphi$. Haben wir noch eine? Eine Möglichkeit gibt es noch, wie wir abbilden können.

S: Die sehe ich nicht. Weil die Null muss ja auf die Null, ne?

I: Ja. Die Null muss auf die Null.

S: Ach so, ich kann ja alle auf die Null abbilden.

I: Ja genau. (ergänzt:)

.* $\begin{array}{lllll} N \longrightarrow & N & \varphi & \psi \\ \overline{0} \longmapsto & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} \longmapsto & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{2} \longmapsto & \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \end{array}$ *

(und) * Hom(N,N) = $\{id, \varphi, \psi\}$ *
Warum geht das? Warum ist das ein Homomorphismus?

S: Ja, weil die Null das neutrale Element ist. Dann kann ich ja, da kommt auf jeden Fall (18 Sek) Wenn ich jetzt z.B. eins plus eins mache, ne, würde ich ja, eh, in Restklasse zwei landen. Also Restklasse Eins plus Restklasse Eins ist dann, ist n zwei. Wenn ich das jetzt aber erst abbilde und dann addiere, das wäre null plus null ist ja dann nicht zwei.

I: Wenn ich aber hier addiere: Eins plus eins ist zwei, und zwei geht auf null.

S: Ach ja.

I: Und null plus null ist auch wieder null. Also da alle Bilder null sind und Summen von null auch wieder null sind, kann das kein Problem mit dieser Addition geben. Das nennt man den trivialen Homomorphismus, der funktioniert immer bei Gruppen.

...

S: Also, was ich immer schwer finde, ist, ehm, so diesen Schritt zu kriegen von dem, diesen allgemeinen Sachen dann hin zu dem Konkreten. Also z.B., wenn dann auch irgendwo steht, dass man was nachweisen soll und so, dann kann man immer alles hinschreiben, aber auch nur in dieser allgemeinen Fachsprache und so weiter, aber wenn man dann konkret, irgendwas dann, dann wird es auf einmal komisch.

## A.2 Restklassen: Frau Beck (RK, Beck)

I: Jetzt nehmen wir mal eine Menge, die sieht ein bißchen anders aus, nämlich N, das ist eine Menge, da sind Mengen drin.
.*$N = \{\{3k|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+1|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+2|k \in \mathbb{Z}\}\}$*
(liest beim Schreiben vor) Kommt dir das bekannt vor?
B: Ehrlich gesagt auf den ersten Blick nicht so.
I: Nee, ne? Ist aber was, was du kennst. Ist bloß anders aufgeschrieben.
B: Also, wenn. Im Prinzip hat die (3 Sek). Die erste Gruppe hat also immer drei k, die zweite Gruppe immer drei k plus eins, also jeweils die Zahl, die darüber liegt, und bei drei k plus zwei jeweils die Zahl, die darüber liegt. Also wirkt das so'n bißchen ehm, wenn man das jetzt z.B. in Restklassen einteilen würde, hätte man dieses Null, Eins und Zwei, bei der Restklasse von drei.
I: Also ist das dasselbe wie
B: $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$.
I: * $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$*
Nur anders notiert. Ich geb denen mal Namen, dann brauche ich nicht so viel zu schreiben. (Schreibt unter die drei Elemente von N die Namen A,B und C.) Kann man so zwei Mengen addieren? A plus B?
B: Dann ist das die Restklasse von null und die Restklasse von eins. Und die beiden zusammen addiert ist also. Ja. Sicher kann man die addieren. Also: Es kommt darauf an, wenn man. Darf ich mal kurz?
I: Hm!
B: * 3,6,9 *
Die Null wahrscheinlich auch?
I: Ja, und minus drei auch.
B: (ergänzt zu:)
(a) * $\begin{array}{cccc} 0, & 3, & 6, & 9 \\ 1, & 4, & 7, & 10 \end{array}$ *
Wenn ich die jetzt addiere, muss ich nur gucken, dass ehm, dass das wieder in der gleichen Restklasse liegt, also, dass das nicht in C liegt. Wenn ich jetzt also drei und vier addieren würde, bin ich bei sieben, bin ich da, (zeigt in (a) auf die zweite Zeile), das würde theoretisch gehen. Also, was die Addition angeht: Null und eins geht auch. Null und vier also mit null sowieso, weil das ja das neutrale Element ist. Neun und eins. Das Problem ist nur, wenn ich jetzt hier vier und sieben zusammen addiere, dann geht es nicht mehr, weil ich dann ja in die Restklasse C komme.
I: Also was ist A plus B?
.* A + B = *
Du hast dir das hier (zeigt auf (a)) mit Elementen überlegt.
B: Also A plus B ist zumindest nicht vollständig. Wenn ich das eh
I: Leichter wäre es, wenn ich das so geschrieben hätte, wie du es eben gesagt hast, ne? Mit A,B,C
B: Ja, mit null, eins und zwei
I: genau, dann ist es einfacher, ne?
(b) * $\overline{0} + \overline{1} =$ *
B: Ja, wenn ich null plus eins (zeigt auf (b)) habe, wenn ich also wirklich nur ein Element aus Null und Eins ehm (zeigt auf (a)) nehme, dann komme ich weiterhin

immer in die Restklasse Eins (zeigt in (a) auf die zweite Zeile), weil das ja das neutrale Element (zeigt in (b) auf $\overline{0}$) ist. Wenn ich hier jetzt, wenn ich innerhalb von Eins addiere, dann geht's nicht.
I: Das könnte ich ja auch sagen: Was soll eins plus eins sein?
.* $\overline{1} + \overline{1} =$ *
B: Ist, schätze ich mal, immer zwei.
I: * $\overline{1} + \overline{1} = \overline{2}$ *
Das hatten wir so definiert, ne?
B: Ja.
I: Genau. Das ist die Sache mit den Resten. Also der Trick ist: Wenn man so zwei Mengen (zeigt auf N) addiert, das sieht merkwürdig aus. Du hast jetzt hier die Elemente aufgeschrieben und geguckt, jedes mit jedem sozusagen, was rauskommt.
B: So ein bißchen ausprobiert.
I: Und da hast du recht, dass das zu nichts führt. Wenn du hier zwei addierst, kommt was anderes raus als eins von denen mit eins von denen (zeigt auf die Mengen in N). Aber man definiert sich das eben und das ist in der Vorlesung gesagt worden, wie man rechnet. Man nimmt einen davon und einen davon (zeigt auf die Mengen in N), addiert die und guckt, in welcher Menge das liegt.
B: Weil das (zeigt auf $\overline{1} + \overline{1} = \overline{2}$) ist ja quasi wie mit Zahlen. Und dann kann man das
I: Genau, das ist genau der Witz hier, dass diese Mengen wie Zahlen behandelt werden: indem man hier eine Addition definiert, haben wir hier ja definiert, kann man mit denen umgehen wie mit Zahlen und nicht mehr wie mit Mengen.
B: Ja.
...
I: Jetzt gucken wir uns die die Homomorphismen an von N nach N.
B: Von M nach N.
I: Nee nur N. Von N nach N. Ich weiß nicht, ob ihr das so geschrieben habt.
.* Hom(N,N) *
Kennst du die Schreibweise?
B: Also so haben wir das nie aufgeschrieben. Aber ich weiß ja, was gemeint ist.
I: Können wir auch einfach H nennen, das ist kürzer. Das sollen jetzt die Homomorphismen sein, die von N nach N abbilden. Welche sind das? Können wir ja aufzählen, das sind nicht so ganz viele.
.* H=Hom(N,N)={ *
Ähnlich wie da. (zeigt auf die Abbildungen von Aufgabe 1))
B: Ja also, ein Homomorphismus würde ja bedeuten: Dass wenn
(gleichzeitig:
- I: Wir können eins, zwei nehmen
- B: ich dann eins plus eins vorher)
B: wär für mich hinterher das Gleiche wie eins plus eins hinterher. Also von der einen zur anderen Menge. Da das jetzt aber die gleichen Mengen sind, ist es wahrscheinlich völlig egal. Weil ehm, also N von sagen wir zwei plus.
.* N(2)+N *
Ach nee. Das ist jetzt irgendwie nicht so ganz richtig. (wischt wieder weg)
I: Erst mal: Was ist ein Homomorphismus?
B: Ein Homomorphismus ist, eh, wenn ich die Verknüpfung in der einen Menge vor-

her vornehmen kann und dass es auf das Gleiche abgebildet werden würde, als wenn ich die Abbildung hinterher.

I: Genau. Also erstmal ist es eine Abbildung mit dieser zusätzlichen Eigenschaft. Abbildung zwischen einer Menge mit drei Elementen. Also können wir ja einfach hinschreiben. Was soll mit den Elementen passieren?

B: Wohin die abgebildet werden.

I: .* $\begin{array}{l} \overline{0} \mapsto \\ \overline{1} \mapsto \\ \overline{2} \mapsto \end{array}$ *

Genau. Dann muss man ein bißchen darauf achten, dass diese zusätzliche Eigenschaft erfüllt ist. Welche Möglichkeiten gibt es?

B: Ja, da gibt es jetzt ja wieder. Soll ich die jetzt mal mit Kommas?

(ergänzt die angefangene Tabelle:)

.* $\begin{array}{llll} \overline{0} \mapsto & \overline{0}, & \overline{1}, & \overline{1} \\ \overline{1} \mapsto & \overline{1}, & \overline{2}, & \\ \overline{2} \mapsto & \overline{2}, & \overline{0}, & \end{array}$ *

I: Gut, da kriegen wir ziemlich viele.

(gleichzeitig:

- I: Dann müsste man das alles

- B: Dann kommen wir auf sechs.)

I: überprüfen. Einen Trick gibt es dabei, den man beachten muss. Die Null

B: Die Null wird immer auf sich selbst abgebildet, wahrscheinlich.

Also haben wir hier null und da zwei und da eins. Und das bleibt es dann, im Prinzip.

I: Ja, dürfen wir jetzt. Da hatten wir schon mal sowas (zeigt auf die Aufgabe 1)). Jetzt ist nur noch die Null dazugekommen, aber die wird ja sowieso auf null abgebildet.

B: Frage ist natürlich: Also ich muss nicht im Bijektiven bleiben. Oder?

I: Genau, muss ich nicht.

B: Also ich kann ja auch dann weiterhin wieder (ergänzt die Tabelle:)

(c) * $\begin{array}{lllll} \overline{0} \mapsto & \overline{0}, & \overline{0}, & \overline{0}, & \overline{0} \\ \overline{1} \mapsto & \overline{1}, & \overline{2}, & \overline{1}, & \overline{2} \\ \overline{2} \mapsto & \overline{2}, & \overline{1}, & \overline{1}, & \overline{2} \end{array}$ *

I: Müsste man dann überlegen, ob das geht oder ob das ein Widerspruch zur Homomorphismuseigenschaft ist.

B: Also wenn ich jetzt vorher gucken würde (zeigt in (c) auf die erste Spalte) null plus eins würde auf eins abgebildet werden. Also dann habe ich hier (zeigt in (c) auf die zweite Spalte) null plus eins auf eins. Das wird also auf jeden Fall schon mal gehen. Eins plus zwei wird auf null (zeigt in (c) auf die erste Spalte) abgebildet werden.

I: Ja.

B: Ehm. Ja. Das ist ja null (zeigt in (c) auf die erste Spalte) und wird auf null (zeigt in (c) auf die zweite Spalte) abgebildet. Das stimmt auch. Wenn ich hier eins plus zwei nehme, ist auch wieder null (zeigt in (c) auf die zweite Spalte). Und von daher müsste das rein theoretisch. Also ich mein man müsste das halt

I: Hier auch (zeigt in (c) auf die dritte Spalte): zwei plus eins: da passt es auch.

B: Ja. wird auch auf null abgebildet.

I: Hier (zeigt in (c) auf die vierte Spalte):

B: Eins plus eins wird auf zwei.

I: Geht schon mal nicht

B: Das würde schon mal nicht gehen. (zeigt in (c) auf die fünfte Spalte): Dann ist das hier das Gleiche. Das geht dann auch nicht, weil das auf eins abgebildet werden würde.

I: (streicht in (c) die vierte und fünfte Spalte durch). Also die beiden gehen nicht. Aber wir haben noch einen weiteren: alle auf null. (ergänzt die Tabelle)

B: Wenn eins auf null abgebildet wird. Also eins plus zwei ist null wird auf null abgebildet. Und wenn ich hier null plus null (zeigt in (c) auf die sechste Spalte). Also die Null spielt jetzt sowieso nicht mit, weil die ja eh das neutrale Element ist.

I: Genau, was immer wir hier für Summen bilden, es geht sowieso alles auf null. Und die Summen stören uns dabei nicht. Also haben wir drei Elemente da drin.

B: Genau. So etwas hätte ich jetzt übersehen. Das hätte ich gar nicht gemacht, wahrscheinlich.

I: Klar. Aber das ist ein wichtiger Homomorphismus, der alles auf null abbildet.

B: Dann könnte man aber theoretisch ja auch sagen: Hier null, eins, null (zeigt in (c) auf die sechste Spalte)

I: (c') * $\begin{array}{lllllll} \overline{0} \mapsto & \overline{0}, & \overline{1}, & \overline{0}, & \overline{0} & \overline{0}, & \overline{0}, \\ \overline{1} \mapsto & \overline{1}, & \overline{2}, & \overline{1}, & \overline{2} & \overline{0}, & \overline{1}, \\ \overline{2} \mapsto & \overline{2}, & \overline{0}, & \overline{1}, & \overline{2} & \overline{0}, & \overline{0}, \end{array}$ *

B: Das geht ja auch nicht. Aber theoretisch müsste man das auch aufführen, oder nicht?

I: Müsste man noch überprüfen. Warum geht das nicht?

B: Eins plus null ist eins aber das ist nicht auf null abgebildet (zeigt in (c') auf die siebte Spalte). Wenn ich hier (zeigt in (c') auf die erste Spalte) das auf null abgebildet hätte, wäre auf null abgebildet. Und das geht dann mit der Zwei auch nicht.

## A.3 Restklassen: Frau Rolle (RK, Rolle)

I: Dann gucken wir nochmal bei Restklassen?
R: Ja. Das finde ich abstrakt.
I: Ja, das ist sehr abstrakt. Und ich glaube, dass das für Leute mit deinem Denkstil auch besonders schwer zu verstehen ist. Aber du wirst dich schon dran gewöhnen.
R: Muss ich ja notgedrungen.
I: Also nehmen wir eine Menge. Ich schreibe das mal, erstmal anders:
.* $N = \{\{3k|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+1|k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+2|k \in \mathbb{Z}\}\}$ *
(während des Schreibens:
. I: Also eine Menge (zeigt auf die ersten beiden Mengenklammern)
. R: in einer Menge. Das finde ich schon toll.
. I: Ja, ne?)
I: Was hat das mit Restklassen zu tun?
R: Also eigentlich würde ich eher das mit den Mengen in einer Menge. Das sind eigentlich immer Restklassen. Das wär jetzt $\mathbb{Z}$ modulo k $\mathbb{Z}$?
I: ehm.
R: Nee, drei k $\mathbb{Z}$ müsste man sagen, oder?
I: Auch nicht ganz.
R: Auch nicht ganz?
I: Hat mit k nicht direkt
R: Ach so, $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$ müsste man sagen.
I: Genau. Das k sagt ja nur, wie ich die einzelnen Elemente, dass ich immer in Dreierschritten gehe, durch das 3 mal k. Also
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *
Wie addiert man denn zwei solche Mengen (zeigt auf die ersten beiden Elemente von N)?
R: Wie also, wenn ich jetzt schreiben würde. Das wär ja für mich null quer, ja, eins quer und zwei quer.
.* $N = \{ \underset{\overline{0}}{\{3k|k \in \mathbb{Z}\}}, \underset{\overline{1}}{\{3k+1|k \in \mathbb{Z}\}}, \underset{\overline{2}}{\{3k+2|k \in \mathbb{Z}\}}\}$ *
Wenn ich die jetzt unter einander addiere? Ohne Homomorphismus, ja? Also ich hätte jetzt
(a) * $\overline{0} + \overline{1} =$*
I: Ja.
R: O.k. Und wenn ich es anders schreiben würde, hätte ich, ehm, wäre das jetzt einfacher, das so zu schreiben? Also jetzt wäre das ja eins quer. (Ergänzt (a) zu: * $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$ *.) Und wenn ich das anders schreiben würde, hätte ich
.* $3k + \mathbb{Z}$ *
einfach nur, oder? oder schreibe ich n $\mathbb{Z}$?
I: Hm. Da brauchst du k nicht, drei $\mathbb{Z}$. Nee, Moment, ja. Drei plus drei $\mathbb{Z}$
(gleichzeitig:
- I: oder null plus drei $\mathbb{Z}$.
- R: Nee, ich schreibe das anders: null plus drei $\mathbb{Z}$.)
R: So hatten wir das vorher auch.
I: Ja, so hatten wir das geschrieben.
R:

(b) * $0 + 3\mathbb{Z} + 1 + 3\mathbb{Z} = (0 + 1) + n\mathbb{Z} = 1 + 3\mathbb{Z} = \overline{1}$ *

(kommentiert beim Schreiben:) Also eins quer, kommt auf dasselbe raus.

I: (wirft bei ‘n’ ein:) n ist drei, ne? also drei $\mathbb{Z}$. (R korrigiert)

R: Jetzt weiß ich nur nicht: Was ist denn sinnvoller, das so (zeigt auf (a)) zu schreiben, weil das kann ich ja sofort sehen, oder so (zeigt auf (b))? Weil, zwischendurch haben wir das immer geändert.

I: Das ist Geschmacksache. Ich finde das (zeigt auf (a)) leichter.

R: Ja, weil da habe ich die drei $\mathbb{Z}$ nicht, die mich andauernd stören.

I: Das finde ich auch ziemlich schwierig, mit den drei $\mathbb{Z}$ zu arbeiten. Aber vielleicht finden manche auch das andere, dieses (zeigt auf die erste Menge in N), leichter.

R: Ich finde das (zeigt auf (b)) anschaulicher, weil ich sehe, jetzt habe ich noch genau diesen Rest (zeigt auf die $3\mathbb{Z}$). Aber zum Rechnen ist das (zeigt auf (a)) einfach, also, übersichtlicher.

I: Hier (zeigt auf die $\overline{0}$) hat man die Drei nicht dabeistehen, ne? Dieses null quer kann ja alles Mögliche heißen, je nachdem, modulo welcher Zahl man rechnet. Man muss wissen, was man gerade meint.

R: Gibt es eigentlich, weil ich bin ja jetzt. Also jetzt denke ich im Moment ja noch nicht so abstrakt. Aber, weil das sind ja Mengen und das sind ja Mengen (zeigt auf $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$).

Wenn ich jetzt sagen würde, ich würde aus dieser Menge irgendwie, ja, drei nehmen und hieraus vier (zeigt auf $\overline{0}$ bzw. $\overline{1}$). Ich schreib das ja dann nicht mehr mit quer: Ich hätte ja dann (ergänzt über (a) zu:)

.* $\begin{array}{ccccc} 3 & + & 4 = & 7 \\ \overline{0} & + & \overline{1} = & \overline{1} \end{array}$ *

Aber das ist ja dann nicht mehr quer, oder? Weil das sind ja jetzt die konkreten Elemente hieraus (zeigt auf die Mengen in N).

I: Aber 7 und 1 haben etwas mit einander zu tun.

R: Ja, das ist mir klar. Schreibt man das jetzt als quer? Weil: Das (zeigt auf 3) ist ja dann ein Element hieraus (zeigt auf die erste Menge in N), und das (zeigt auf 4) hieraus (zeigt auf die zweite Menge in N).

I: Das ist Vereinbarungssache. Man kann das auch schreiben. Man kann sagen drei quer soll dasselbe sein wie null quer, soll dasselbe mit gemeint sein.

.* $\overline{3} = \overline{0}$ *

R: Aber drei quer wäre z.B. wieder die ganze Menge (zeigt auf die erste Menge in N).

I: Genau. Null quer ja auch.

R: Genau. Aber drei ist ja jetzt ein Element daraus.

I: Gut, drei plus vier gleich sieben kann ich auch rechnen. Dann bewege ich mich in den ganzen Zahlen. Ist sozusagen eine ganz andere Rechnung.

R: Ja gibt es denn solche Aufgabenstellungen?

I: Also, ich kann ja, wenn ich solche Restklassen addiere, oder beim Multiplizieren, wenn ich nicht bei $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$ bin, sondern größeren Zahlen, zehn $\mathbb{Z}$, und ich multipliziere zwei, acht mal neun. Also * $8 \cdot 9$ *. Dann kann ich ja acht mal neun rechnen, dann bin ich bei 72, und sagen, das ist dasselbe wie 72 quer.

(c) * $\overline{8} \cdot \overline{9} = \overline{72} = \qquad\qquad mod(10)$ *

Dann kann ich gucken: 72 ist ? modulo 10?

R: plus drei.

I: Zwei. plus 70 ist 72. (ergänzt in (c) * $= \overline{2}$ *)
R: Ach so, das kann ich so vereinfacht schreiben?
I: Hm!
R: Weil, ich hätte jetzt 70 z.B. als eins schreiben können, aber das ist null, ne?
I: Ist null, ja. Die Vielfachen von der Zahl sind null. Dann ist es schon sinnvoll, dass man so eine Schreibweise benutzt, wenn man hier jetzt mit rechnet. Dann rechne ich, dann nehme ich die entsprechenden Zahlen in $\mathbb{Z}$, rechne damit und gucke dann, zu welcher Restklasse das gehört.
R: Obwohl zwei quer ist ja jetzt eigentlich, ne. Das sieht für mich jetzt komisch aus. Obwohl ich eigentlich finde, es ist so einfacher also so zu rechnen. Aber es stört mich jetzt, dass dies zwei quer ist ja wesentlich kleiner als acht mal neun. Das ist jetzt was, das finde ich komisch.
I: Das liegt daran, dass das, dass das zyklisch ist, diese $\mathbb{Z}$ modulo n $\mathbb{Z}$. Das wird nicht immer größer.
R: Ja, das bleibt so.
I: neun plus eins ist null und neun plus zwei
R: Was ich jetzt doof finde, ist diese zehn quer. Ich habe ja jetzt * $= 2 + 10\mathbb{Z}$ * (ergänzt in (c) unter $\overline{2}$), so dass man das irgendwie sehen würde.
I: Hier habe ich * $72 + 10\mathbb{Z}$ *. Davon kann ich 70 hier (zeigt auf $10\mathbb{Z}$) mit reintun. Die kommen hier schon vor.
R: Hm! Ja. Das habe ich eigentlich verstanden. Das ging noch.
I: Super. Das hat auch eine Weile gedauert. Ne? Das zu verstehen.
R: Bei der Übung ist das eigentlich ganz gut rausgekommen.
I: Bei der letzten, ne?
R: Wo wir das so geschrieben:
.* $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ *
(?) so ein Klaster da.
I: Dass man die gesamten Zahlen so sortieren kann. Dann nehmen wir jetzt Abbildungen auf dieser Menge: die Homomorphismen. Ich weiß nicht, ich glaube, ihr habt, ob ihr das so geschrieben habt:
.* Hom(N,N) *
Das sollen die Homomorphismen sein von dieser Menge (zeigt auf N) N nach N.
R: Er hat das dann anders
I: (?) irgendwie denen einen Namen geben. (schreibt davor * H:= * )
Diese Menge enthält jetzt Abbildungen.
R: Ja.
I: Zwischen diesen Restklassen. (zeigt auf N).
R: Ich würde das jetzt so schreiben. Also ich habe ja sowieso, ich bin ja noch da oben (zeigt auf N)
(d) * $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *
Jetzt soll ich allgemein Homomorphismus zeigen?
I: Die vielleicht aufzählen.
R: Also ich hätte hier
.* $\begin{array}{ccc} \overline{0} & \longrightarrow & \overline{0} \\ \overline{1} & \longrightarrow & \overline{1} \\ \overline{2} & \longrightarrow & \overline{2} \end{array}$ *
als Beispiel.

I: Das wäre die Identität. (schreibt *= $\{id$ * hinter $H := Hom(N, N)$)

R: Ja. Da bin ich mir sicher, dass das klappt. Das habe ich ja gerad eben bewiesen. Bei den anderen müsste ich jetzt erst, müsste man wieder gucken, wie das geht.

.* $\begin{array}{c}\overline{0}\\ \overline{1}\\ \overline{2}\end{array}$ *

I: Null muss immer auf?

R: Null. (ergänzt:)

(e)* $\begin{array}{ccc}\overline{0} & \longrightarrow & \overline{0}\\ \overline{1} & \longrightarrow & \overline{2}\\ \overline{2} & \longrightarrow & \overline{1}\end{array}$ *

(während des Schreibens:

. I: Das macht es jetzt einfach: Da haben wir nicht mehr viele Möglichkeiten.)

R: Ach so ja, eins hat man ja nur bei Körpern. Da hätte ich z.B. eins plus eins wär dann zwei das würd auf eins gehen. Und wenn ich hinten eins plus eins hätte ich zwei. Hä? Moment. Ich muss mir das aufschreiben.

(f) * $f(\overline{2}) = f(\overline{1} + \overline{1}) = f(\overline{1}) + f(\overline{1}) = \overline{2} + \overline{2}$ *

Dann hätte ich vier und das wäre zwei. Also stimmt es.

I: Vier ist eins, oder? in $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$? Drei ist wieder null und noch eins mehr ist eins.

R: Wieso, ich mache jetzt zwei plus zwei dann wäre ich bei null. (zeigt in (e) auf die Zwei in der zweiten Spalte und zählt von da aus zwei weiter zur Eins darunter und dann zur Null darüber). Und was habe ich gesagt? Eins, ne?

I: Wir sind in $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$. Da wäre ich bei vier (ergänzt * $= \overline{4}$ * am Ende der Gleichungskette (f)) und vier ist dieselbe Restklasse wie eins. (R ergänzt * $= \overline{1}$ *) Drei ist doch dieselbe wie null.

R: Ja, das ist mir klar.

I: Dann ist eins dieselbe wie vier: eins mehr.

.* $\begin{array}{cc}\overline{0} & = \overline{3}\\ \overline{1} & = \overline{4}\end{array}$ *

R: Ja aber, wenn ich doch jetzt hierbei bin (zeigt in (e) auf $\overline{2}$ in der zweiten Spalte), wenn ich aber von zwei losgehe. Wenn ich plus zwei (zählt in der Spalte weiter nach unten, dann ganz nach oben). So meine ich das.

I: Ah! Du musst aber von eins (zeigt in (f) auf die erste $\overline{1}$ ) aus. Du hast ja die Zwei (zeigt in (f) auf die erste $\overline{2}$) als Summe geschrieben eins plus eins. f von eins

R: gehe ich zu zwei (zeigt in (e) auf die $\overline{2}$ in der zweiten Spalte)

I: plus nochmal f von eins ist nochmal zwei (zeigt in (f) auf die letzte $\overline{2}$). Also zwei plus zwei gleich vier, das ist dasselbe wie eins. Dann musst du auf dieser Seite gucken (zeigt in (f) auf den Anfang) f von zwei ist gleich (ergänzt in (f) * $\overline{1} =$ * vor $f(\overline{2})$)

R: Ach so, ich bin gar nicht mehr auf der anderen Seite (zeigt in (e) auf die $\overline{1}$ in der zweiten Spalte)

I: Wenn du f angewendet hast, bist du da in dem (zeigt in (e) auf die zweite Spalte)

R: Ich habe jetzt immer gedacht: f von zwei was ich jetzt hier (zeigt in (e) auf die erste Spalte) hätte, würde auf eins gehen. Eins plus eins ist klar. Jetzt kommt eben der Homomorphismus (schreibt in (f) das zweite und dritte + als $\oplus$, so dass die Zeile nun lautet:)

(f') * $\overline{1} = f(\overline{2}) = f(\overline{1} + \overline{1}) = f(\overline{1}) \oplus f(\overline{1}) = \overline{2} \oplus \overline{2} = \overline{4} = \overline{1}$ *

Ich habe mir gedacht, wenn ich jetzt zwei plus zwei (zeigt in (f') auf die beiden letzten Zweien) wär vier quer. Das ist mir eigentlich noch klar. Ich habe mir nicht gedacht, dass ich jetzt hier vorne gucke (zeigt in (e) auf die erste Spalte). Sie gucken ja jetzt hier.
I: Ich rechne einfach zwei plus zwei ist vier. Dann gucke ich hier (zeigt in (d) auf $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$), in dieser Restklassenmenge (zeigt auf die Elemente von N), null, eins, zwei. Was ist vier in $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$?
R: Ist eins. Verstehen Sie, was ich meine?
I: Du rechnest von da (zeigt in (e) auf $\overline{2}$ in der zweiten Spalte) aus zwei weiter.
R: Ja, genau.
I: Und das stimmt nicht.
R: So habe ich das z.B. noch nicht gesehen.
I: Haben ja wieder $\mathbb{Z}$ modulo drei $\mathbb{Z}$. Die Addition ist hier dieselbe wie hier (zeigt in (e) auf die beiden Spalten). Und zwar nach dem Namen der Elemente, nicht nach dem Platz, wo sie stehen.
R: Wenn ich dieses zwei plus zwei habe, gucke ich wieder vorne?
I: Ja, oder generell hier oben in der Menge (zeigt auf N). Wo die stehen, macht nicht ihre Rolle aus, sondern nur, welchen Namen sie haben.
R: O.k. Dann habe ich das verstanden.
I: Gut. Das könnte also ein Homomorphismus sein, ne?
R: Ja, wenn f von zwei auf eins geht, dann stimmt das. Ach so ja, jetzt müssten wir das noch kontrollieren, oder? Also eins reicht in der Regel, ne?
I: Gibt es da ein Problem? eins plus eins passt. Zwei plus zwei ist vier, ist dasselbe wie eins, würde auf zwei gehen. Und die Bilder von zwei sind eins, eins plus eins sind auch zwei. Ja, das passt.
Dann gibt es noch einen dritten, wenn alles auf null geht.
R: Das habe ich nicht verstanden. Wenn ich jetzt hier also, wenn ich z.B. null plus eins, null plus zwei oder wie (zeigt in (e) auf die erste Spalte)?
I: Wenn ich jedes, null, eins und zwei alles auf null abbilde.

$$\text{(g)} \ * \ \begin{array}{ccc} \overline{0} & \longrightarrow & \overline{0} \\ \overline{1} & \longrightarrow & \overline{0} \\ \overline{2} & \longrightarrow & \overline{0} \end{array} \ *$$

Das nennt man den trivialen, den gibt es immer.
R: Ach so. Aber es gibt z.B. nicht so was:

$$.* \ \begin{array}{ccc} \overline{0} & \longrightarrow & \overline{0} \\ \overline{1} & \longrightarrow & \overline{2} \\ \overline{2} & \longrightarrow & \overline{2} \end{array} \ *$$

Das geht nicht, ja?
I: Das geht nicht, denn dann habe ich ja hier eins plus eins gleich zwei aber dann haben wir einen Widerspruch zu dem, was wir da eben hatten: Die Zwei geht auf die Zwei, aber hier haben wir gesagt, die Eins plus eins geht auf die Eins, haben wir da ausgerechnet (zeigt auf (f')).
R: Weil das hier auf einmal geht (zeigt auf (g)).
I: Das ist so ähnlich. Das liegt daran, dass die Summen hier immer null sind. Alles würde immer auf null abgebildet.
R: Wie bei einer normalen Menge, dass ich immer die leere Menge habe.
I: Wobei die nicht leer ist, ne?

R: Aber, dass das trivial ist.

I: Homomorphismus heißt hier, ich muss hier die Summe bilden können (zeigt in (g) auf die erste Spalte), und das tut nichts hier (zeigt in (g) auf die zweite Spalte). Alle Summen, alles ist null. Deswegen gibt es kein Problem. Wenn es Einsen wären, hätte ich eins plus eins würde auf zwei kommen. Aber weil die Null eben nichts macht.

# Anhang B

# Transkripte der Vektorrauminterviews

## B.1 Vektorraum, Teil 1: Herr Sendig (VR(1), Sendig)

I: Es geht um Vektorräume. Wir gucken uns zuerst ein Beispiel an, eine Farbmischmaschine, die soll Farben herstellen. Und da haben wir einen großen Behälter, da soll ne Farbe drin gemischt werden, und der wird gespeist von vier kleinen Behältern, und da tun wir Farben rein, rot, gelb, grün und blau.

(a)

```
| rot  |   | gelb |   | grün  |   | blau  |
_______    ______    _______    ________
      \       |          |       /
     |___________________________|
```

Und ein Computer soll dieser Maschine Anweisungen geben, wie die Farben zu mischen sind, wenn man eine bestimmte Farbe haben möchte. Das könnte man mathematisch modellieren durch einen Vektorraum. Inwiefern könnte man das als einen Vektorraum verstehen?

S: Kann man den Vektor jetzt nicht als einen Vektor mit vier Koordinaten darstellen?

I: Ja. Das wär sogar gut, weil der Computer ja irgendwas in Zahlen angeben muss.

S: Ja. Und dann würde in der ersten Koordinate die Menge rot stehen, also wieviel davon.

I: Hm. Also irgendwelche Koordinaten, und da steht, also, wir schreiben hier irgendwelche Zahlen rein

(b) * $(1, 2, 7, 4)$ *

und das (zeigt in (b) auf die erste Koordinate) ist die Menge an rot. Genau, also das könnten die Vektoren sein. Und was könnten die, was könnte dann linear abhängig, linear unabhängig, Basis, was könnte das bedeuten?

S: (12 Sek) Ja, linear abhängig könnte heißen, dass ich halt aus zwei an sich unterschiedlichen Einträgen trotzdem die gleiche Farbe herauskriege. Also z.B. jetzt zwei vier vierzehn und acht. (I ergänzt (b) zu:)

(b') * $\begin{matrix}(1, & 2, & 7, & 4)\\(2, & 4, & 14, & 8)\end{matrix}$ *

S: Wenn ich das Doppelte nehme, ist das dann die gleiche Farbe. Obwohl ich glaube nicht, dass das das ganze Problem darstellt, find ich.

I: Ja, warum?

Also gleiche Farbe ist linear abhängig schon mal. Also die beiden (zeigt auf (b')) sind linear abhängig.

S: Aber es kann noch mehr lineare Abhängigkeiten geben, also zwischen den Einträgen.

I: Ja, wie z.B.? (7 Sek)

S: Das ist mir im Moment nicht ganz (5 Sek). Ja, dass ich z.B. die gleiche Farbe z.B. mit nur drei Farben vielleicht erzeugen kann?

I: Hm. (3 Sek) Also die Farbe, die wir jetzt hier (zeigt in (b') auf die erste Zeile) erzeugt haben, auch durch drei Einträge. Das könnte sein, ne, sowas könnte vorkommen, wenn man sich die Farben da oben (zeigt auf (a)) anguckt?

S: Ja ich weiß jetzt nicht, ob das Absicht ist, halt, aber es ist, ich glaub, also eine von den vier Farben ist eigentlich überflüssig, an sich. Ich mein, ich glaub grün

I: Ja. Wenn man normal mischt, dann kann man, ich mein, das hängt jetzt davon ab, was für ein Rot, was für ein Gelb, was für ein Grün, was für ein Blau man nimmt, von daher war das von den Namen her erstmal nicht klar, aber aber gut, nehmen wir mal an, dass wir das Grün erzeugen können. Dass einmal gelb und einmal blau zusammen gemischt dieses Grün ergeben. Und was wäre dann z.B. ne lineare Abhängigkeit?

S: (8 Sek) Ich hab das Bild doch noch nicht so ganz verstanden. Weil da würde ja eigentlich die eine Koordinate wegfallen. Da könnte man ja eigentlich aus was Vierdimensionalen was Dreidimensionales machen. (6 Sek)

I: Hm. Also das wäre eine Lösung, ne? Dass ich sage, ich lass das (hält in (a) den dritten kleinen Behälter zu) ganz weg, und hab nur drei Einträge. Und dann hab ich das Problem nicht, dass die (zeigt in (a) auf die vier kleinen Behälter) durch einander erzeugt sind. Wenn wir es mit vier Einträgen machen? Was wäre

S: Der Vektor der gleichen Anteil gelb und blau hat, ehm,

I: Können wir ja mal einen hinschreiben, der (zeigt in (b') auf die erste Zeile) ist ein bißchen kompliziert hier

S: Ja, eins zwei eins eins oder so? (I notiert:)

(c) * (1 2 1 1 *

S: Würde ja die gleiche Farbe erzeugen,

I: (zeigt in (c) auf die zweite und vierte Koordinate) Hat gleiche Anteile bei gelb und blau, eh (zeigt in (c) auf die dritte und vierte Koordinate) grün und blau

S: Ach so, eine Zwei bei blau.

I: Ja gut. (ändert (c) zu (1 2 1 2))

S: Wäre das Gleiche wie, ehm, ja eins zwei zwei, ne? (leise:) Vier, eh irgendwie

I: Eins zwei zwei? (ergänzt in (c):) * = (1 2 2 4) *

S: Nochmal überlegen. Die letzte Koordinate, nein, müsste dann eins null und hinten auch ne null und dazwischen ne Vier.

I: Vier setzt sich zusammen aus?

S: Zweimal blau und zweimal gelb.

I: Und da müssen wir das einmal grün noch

S: Ach so, also fünf.

I: Fünf. Hm. ((ändert (c) zu:)

(c') $* \begin{array}{r} (1,\ \ 2,\ \ 1,\ \ 2) \\ = (1,\ \ 0,\ \ 5,\ \ 0) \end{array} *$

Genau. Z.B. Dann wären die gleich.

S: Ich seh jetzt im Moment noch gar keinen Zusammenhang zu der Vorlesung.

I: Ehm, das ist jetzt erstmal was, was man als Vektoren auffassen könnte, ein Modell von nem Vektorraum sozusagen, wobei das seine Grenzen hat, ne, und seine Probleme. Und hier kriegen wir Probleme, wir haben jetzt gesagt, diese beiden (zeigt auf (c')) sind gleich, linear abhängig, darum ging's, aber gleich ist ja ein Spezialfall sogar von linear abhängig,

S: Ach so, das hätten wir im Prinzip jetzt gar nicht so sagen dürfen.

I: Im $R$ hoch vier sind die nicht gleich, ne?

S: Ja.

I: Die beiden (zeigt auf (c')), die erzeugen dieselbe Farbe. Die Vektoren werden hier in diesem Modell, also was hier im $R$ hoch vier die 4-Tupel sind (zeigt in (b') auf die erste Zeile), das wären in diesem Modell (zeigt auf (a))? Wofür stehen die 4-Tupel?

S: Für Vektoren, oder?

I: Für Vektoren, aber in dem Modell hier (zeigt auf (a))?

S: Für Farbkombinationen.

I: Für die Farbkombinationen. Hm.

S: Für Farbanteile.

I: Und das ist. Darum ging's mir genau. Das ist ein Unterschied, ob ich jetzt sage, das sollen Farbanteile sein (zeigt in (b') auf die einzelnen Koordinaten des ersten Vektors), dann ist das tatsächlich, ist das Gleiche, weil die Fünf (zeigt in (c') auf die 5) eben diese Anteile (zeigt in (c') auf die zweite, dritte und vierte Koordinate des ersten Vektors) beinhaltet. Man könnte das ein bißchen anders deuten, dass ich sage, dass so ein Ausdruck nicht der Farbanteil von dem da oben (zeigt in (a) auf die kleinen Behälter) sein soll oder die bestimmte Farbe, die dann hier unten (zeigt in (a) auf den großen Behälter) in dem rauskommt, sondern sie soll die Anweisung sein, dass der Computer sagt, wenn ich das hier (zeigt in (a) auf die Verbindung des ersten kleinen Behälters mit dem großen), ich seh das als Rohr, das kann man auf oder zu machen und der Computer gibt Zeiten an, wie lange das Rohr geöffnet ist. Wenn ich das (zeigt in (b) auf die erste Zeile) als Anweisung von dem Computer verstehe, nicht als die Farbe, die als Ergebnis rauskommt, sind diese Anweisungen (zeigt auf (b')) verschieden. Denn im einen Fall sagt der Computer, man soll das (zeigt in (a) auf den dritten kleinen Behälter) öffnen, im andern Fall sagt er, man soll das nicht öffnen.

S: Aber die Farbe ist trotzdem das Gleiche.

I: Die Farbe ist die gleiche. Aber ich kann als, in dem Vektorraum als Vektoren die Anweisungen auffassen. Und so ein 4-Tupel ist eine Anweisung, die der Computer weitergibt an die Maschine. Und dass manche Anweisungen zu derselben Farbe führen,

S: das kann passieren.

I: das stört im Grunde nicht. Das heißt nur, dass die Farben nicht eindeutig sind, wie man die erzeugen kann. Die Anweisungen wären eindeutig. Hier (zeigt auf (b')) haben wir das Phänomen, dass wenn wir das als gleich auffassen, dass Dinge die im

$R$ hoch vier, das sieht ja aus wie im $R$ hoch vier, verschieden sind, dass die hier gleich sind. Die müssten wir an sich als unterschiedlich auffassen.
S: Ja, liegt das eh, mit dem Basisbegriff, liegt das daran, dass wir eigentlich nur dreidimensional alles haben, also wenn man jetzt die Farben an sich betrachtet, dann sind die ja nicht linear unabhängig.
I: Genau, wenn man die Farben als Vektoren hier auffasst, dann hätten wir ne Basis von drei Farben nur.
S: Ich glaub, wenn man das mit drei machen würde, dann würde es wahrscheinlich aufgehen, oder? Wenn wir das mathematisch (?) rechnen.
I: Ja, genau, dann würde es passen. Gut, eh, wir haben jetzt, ne neue Farbe, die sollen produziert werden mit unserer Maschine. Und wir wissen, dass diese Farbe aus drei Teilen orange und einem Teil türkis und vier Teilen braun besteht.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | Teile | orange | |
| (d) * | 1 | Teil | türkis | * |
| | 4 | Teile | braun | |

S: Hm!
I: Und der Computer, also die Farbe, die hieraus (zeigt auf (d)) besteht, die soll gemischt werden aus den Farben (zeigt in (a) auf die kleinen Behälter). Die Frage ist, wie kriegt der Computer das raus. Hier (zeigt auf (d)) muss man natürlich was sagen, orange ist natürlich erstmal nicht eindeutig. Da müssen wir was sagen, was denn orange, wie wir orange kriegen.
S: Müsste man halt sagen.
I: Müssen wir irgendwas vorgeben, genau. Orange wäre rot gelb, ne? Nehmen wir so was (notiert hinter orange * (1 1 0 0) *). Und türkis wäre grün blau (notiert * (0 0 1 1) *)? Oder wenn wir das nicht mit grün machen, haben wir hier ne Eins und da ne Zwei (notiert * (0 1 0 2) *). Geht natürlich auch.
S: Ja.
I: Und braun? Braun ist irgendwie eine Mischung aus allem. Von jedem eins. (ergänzt (d)), so dass es nun wie folgt aussieht:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | Teile | orange | (1 1 0 0) | |
| (d') * | 1 | Teil | türkis | (0 0 1 1) (0 1 0 2) | * |
| | 4 | Teile | braun | (1 1 1 1) | |

Oder da (zeigt in (d') auf den vorletzten Eintrag des letzten 4-Tupels) hätten wir da auch ein zweites Loch, was da möglich wäre. Wie kann der Computer, ich mein, so eine Aufgabe kann man natürlich auch für andere Mischverhältnisse da (zeigt auf (d')) stellen, wie kann der Computer das ausrechnen, welche Anweisung er geben muss, damit die Maschine diese Farbe herstellt?
S: Ja müsste dreimal halt von den einzelnen Einträgen von orange was nehmen, einmal und dann alles zusammenmischen, also.
I: Hm. Genau.
S: Das wär dann sieben sieben fünf fünf.
I: (notiert * (7 7 5 5) *). Sieben sieben fünf fünf müsste er rechnen, also müsste er als Anweisung geben. Das wär sozusagen, die Anweisung führt zu der gewünschten Farbe. Wenn wir das als Matrix angucken, ich schreib mal die hier unter einander,

(e) * $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *
was bedeutet das? (9 Sek) Kann hiermit was anfangen?
S: Muss praktisch drei eins vier als Vektor davorschreiben und multiplizieren.
I: Als Spalte? Oder als Zeile?
S: Ja, als Spalte. Ehm, nee, als Zeile.
I: (ergänzt (e) durch den Zeilenvektor * (3 1 4) * vor Matrix)
S: Oder?
I: Stimmt was nicht, ne?
S: Muss mal überlegen. (6 Sek) ja, dann versuchen wir das mal als Spalte. Oder als Zeile dahinter, oder, ist das nicht das Gleiche?
I: (ergänzt noch * (3 1 4) * als Zeile hinter der Matrix)
S: Das geht gar nicht, ne?
I: Das geht nicht, nee. Als Spalte geht hier (zeigt in (e) vor der Matrix) auch nicht. Wenn wir hier ne Spalte haben. Also das letzte, was noch übrig ist, das geht. Als Spalte dahinter. (wischt alles außer der Matrix wieder weg und ergänzt (e) zu:) (e')
* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *
Wenn wir das als Spalte dahinter schreiben und das multiplizieren, dann kriegen wir genau. Nee.
S. Nee, wir hätten die Matrix invertieren müssen, oder? (7 Sek)
I: Hier hätten wir nicht umdrehen dürfen?
S: Ich weiß es nicht.
I. Ehm, wir wollen dreimal den ersten
S: Stimmt doch so.
I: Ach ja, richtig. Warum?
S: Wenn man das multipliziert, dann kommt es ja genau raus.
I: (rechnet nach) Genau. Wenn wir diese Multiplikation nehmen, dann kriegen wir unser Ergebnis. Was heißt das für unseren Vektorraum, so eine Matrix, also für unsere Maschine? (2 Sek) Also wir sehen es funktioniert, es kommt das gleiche Ergebnis raus, aber, was tun wir da eigentlich?
S: Ist schwer. Also wenn wir jetzt diese große Matrix halt als Darstellungsmatrix von einer Funktion auffassen, dann würden wir jetzt praktisch den Vektor drei eins vier unter dieser Abbildung darstellen.
I: Ja, genau. Das wäre so der mathematische Teil. Was bedeutet der Vektor drei eins vier für unsere Maschine? Kann man das irgendwie anschaulich deuten?
S: Na ja, drei nach einander folgende Produktionsgänge oder so was. Also drei Teile orange, und dann ein Teil türkis und vier Teile braun. Also drei Handlungsanweisungen.
I: Ehm, (4 Sek) um orange und türkis und braun zu erzeugen?
S: Um die letzte Farbe zu erzeugen.
I: Aber inwiefern sind das Handlungsanweisungen an die Maschine? (6 Sek) Stimmt, eigentlich sind es drei Handlungsanweisungen (zeigt in (e') auf die drei Einträge des

Spaltenvektors)

S: Ja, wobei die Maschine es wahrscheinlich anders machen würde.

I: Was würde die Maschine tun, wenn man ihr drei eins vier eingibt?

S: Ja, sie soll ja dann das vorher schon, sie soll ja nicht erst orange mischen und dann türkis und dann braun, sondern gleich, wenn sie mit rot anfängt, schon gleich das rot mit reintun, was auch hinterher für braun gebraucht wird.

I: Genau, gleich in der passenden Menge für alles. Was muss da das drei eins vier bedeuten für unsere, für unsere Maschine? Oder die Matrix, was kann die bedeuten für die Maschine? (5 Sek)

S: Ja die Matrix, das sind ja die Öffnungszeiten würde ich mal sagen, von den einzelnen. Wenn man sie als Spalten auffasst, dann müsste rot einmal und gelb einmal geöffnet sein und grün und blau beim ersten Mal gar nicht.

I: Hm.

S: Obwohl das alles

I: Beim ersten Mal gar nicht, um was zu erzeugen?

S: Orange.

I: Um orange zu erzeugen, wäre diese Spalte (zeigt in (e') auf die erste Spalte) hier, ne? (7 Sek)

S: Weiß noch nicht so genau, in welche Richtung das gehen soll.

I: Also, die andere Lösung, also wir haben zwei Sorten von Anweisungen. Einmal diese hier (zeigt auf (d') letzte Spalte) die drei, welche Farben das hier (zeigt in (d') auf die drei Farben) sind, oder wie man die erzeugen kann, und wir haben Anweisungen, wie wir aus diesen Farben wiederum die gesuchte erzeugen. Also es sind sozusagen zwei Stufen in dem Produktionsgang. Und das (zeigt in (e') auf die Matrix) fasst die eine Stufe zusammen, die aus drei, da werden ja drei Farben gemischt, und das (zeigt in (e') auf den Spaltenvektor) verschlüsselt irgendwie die zweite Stufe. Wir könnten, wenn wir was ändern an der Maschine, könnten wir direkt diese Anweisung hier (zeigt in (e') auf den Spaltenvektor) der Maschine eingeben.

S: Da müssen wir halt so Zwischenbehälter einbauen, vielleicht, also praktisch orange wäre darunter, wo rot und gelb ist, und fließt dann erstmal orange ein, und dann.

I. Ah, gut, so was (zeichnet in (a) in die Zeile unter die kleinen Behälter drei weitere kleine Behälter ein)

S: Ja, wobei das, da geht's schlecht.

I: Oder wir sagen einfach, wir tun in die Behälter (zeigt in (a) auf die ursprünglichen vier kleinen Behälter) andere Farben rein. Wir tun. Wenn wir also die Farben orange, türkis und braun da reintun, dann können wir das (zeigt in (e') auf den Spaltenvektor) als Anweisung auffassen für diese drei Farben. Dann könnte der Computer direkt sagen, er soll die da rein fließen lassen. Wenn wir aber diese Farben (zeigt in (a) auf die vier kleinen Behälter) da drin haben, dann ist das sozusagen, dann müssen wir zuerst die (zeigt in (e') auf die drei Spalten der Matrx) erzeugen, die drei neuen Farben (zeigt in (d') auf die drei Farben) und daraus dann diese Anweisung (zeigt in (e') auf den Spaltenvektor) erzeugen. Dieses Wechseln, wenn wir hier (zeigt in (a) auf die vier kleinen Behälter) statt dieser Farben orange, türkis und braun da reintun, wem würde das entsprechen in der mathematischen Welt? (streicht in (a) die vier Farben durch und schreibt über die ersten drei kleinen Behälter or, tü, br) (5 Sek) Das weißt du vielleicht noch nicht, das habt ihr jetzt gerade neu gemacht.

S: Ist das der Basiswechsel?

I: Genau. Dieses (zeigt in (e') auf den Spaltenvektor) und dieses (zeigt auf (7 7 5 5)) sind zwei Anweisungen, bzgl., für dieselbe Farbe bzgl. verschiedenen Basen. Das (zeigt auf (7 7 5 5)) ist die Anweisung bzgl. den Farben rot gelb grün blau, und das (zeigt in (e') auf den Spaltenvektor) ist die Anweisung bzgl. diesen drei Farben (zeigt auf (d')).

S: Wobei es ja hier eigentlich noch komplizierter ist, da man ja einmal vier und einmal drei hat, oder?

I: Hier hätten wir es natürlich enfacher, wenn wir die Farbe rausnehmen und das so darstellen (zeigt in (d') auf (0 1 0 2)). Deshalb ist es auch schwierig, wenn wir jetzt von Farben sprechen, eigentlich ist es besser, von den Anweisungen, wie man die Farben erzeugt. Dann hätte die Farbe rot, würde eigentlich die Anweisung eins null null null bedeuten.

S: Hm.

## B.2 Vektorraum, Teil 2: Herr Sendig (VR(2), Sendig)

I: Wir gucken uns den Polynomraum an, ist ja auch ein Vektorraum. Nehmen wir jetzt nur ganz klein, kleiner gleich eins, und bilden ab in den $R$ hoch zwei.
(a) * $f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *
Das $f$ soll eine lineare Abbildung werden und wir geben noch zwei Bedingungen vor:
(b) * $\begin{aligned} f(x+1) &= (1,0) \\ f(2x) &= (0,4) \end{aligned}$ *
Die Frage ist: Geht das? Kann das ne lineare Abbildung, gibt es eine lineare Abbildung, die diese Bedingung erfüllt, und gibt es mehrere oder ist sie eindeutig, wenn es sie gibt? (4 Sek)
S: Also ich hätte spontan gesagt, das geht nicht.
I: Warum nicht?
S: Weil, ehm, also für ne k-lineare Abbildung müsste ja gelten, dass, wenn ich links addiere, ich dann auch rechts addiere, also, in dem Sinne, ne?
I: Ja, ja.
S: Und ich hab ja (3 Sek) auf der rechten Seite in zwei verschiedenen Koordinaten ne Null und egal, ob ich jetzt die erste Koordinate als die $x$-Koordinate wähle und die zweite Koordinate als die $x$ hoch null, also die ganzen Zahlen
I: Die Konstante
S: die Konstante als null, egal wie rum ich das jetzt wähle, kann ich, eh (6 Sek), also geht es auf jeden Fall nicht auf, weil die erste hat ja beides, für $x$ und für die Konstante und die zweite hat nur 'n $x$-Faktor, nur das $x$.
I: Probier doch mal ein Beispiel. Ich verstehe noch nicht ganz genau, was du meinst.
S: Also wir müssen doch jetzt, ehm (6 Sek), also dem, alles, was $x$ hat, eine Koordinate zuordnen und der Konstante eine Koordinate.
I: Könnten wir machen.
S: (erstaunt:) Müssen wir nicht?
I: Also wir müssen es nicht so darstellen, aber letztlich muss es darauf rauslaufen, dass es eindeutig möglich ist, dass das widerspruchsfrei möglich ist. Also können wir das versuchen.
S: Ja. Wenn ich jetzt die erste Koordinate für die $x$-Koordinate wähle, dann müsste da ja zwei mal diese erste Abbildung (6 Sek) müsste dann ja irgendwie in der zweiten Koordinate die Zwei kriegen.
I: Ich weiß jetzt, was du meinst. Müsste in der zweiten, wenn ich was, wenn ich was erst mal. Können wir ja noch ändern, wenn es nicht passt. Wenn ich $x$ auf ?
.* $x \longmapsto$ *
S: Auf eins null.
I: * $x \longmapsto (1,0)$ *
S: Müsste ja zwei $x$ auf zwei null gehen.
I: (ergänzt zu:)
.* $\begin{aligned} x &\longmapsto (1,0) \\ 2x &\longmapsto (2,0) \end{aligned}$ *
Das wäre dann automatisch. Da sehen wir, dass das nicht der Fall ist, ne?
S: Ja. Und wenn ich das umgekehrt mache, dass ich das $x$ auf null eins abbilde,
I: * $x \longmapsto (0,1)$ *

S: dann wäre es von daher problematisch, weil ich ja die Null, also dieses null eins dann würde die Null ja die Eins von der linken Seite repräsentieren.
I: (zeigt in (b) auf 1 in $f(x+1)$) Diese Eins?
S: Ja, als Eintrag. Dann wäre die Frage, was nehme ich bei der zweiten Abbildung, die ja gar keine Konstante hat, da kann ich ja eigentlich gar nicht anders als ne Null nehmen.
I: Was meinst du mit der zweiten Abbildung?
S: Die zweite Funktion. Eh, den zweiten Eintrag. Die zweite Bedingung. $f$ von zwei $x$.
I: Ah, ja gut. Zwei $x$ müsste, könnten wir jetzt sagen, was müsste das sein?
S: Das müsste auf null zwei abgebildet werden, jetzt.
I: * $\begin{array}{rcl} x & \longmapsto & (0,1) \\ 2x & \longmapsto & (0,2) \end{array}$ *
S: Aber der erste Ausdruck an sich ist ja schon problematisch,
I: Dieser (zeigt auf $f(x+1)$) oder dieser (zeigt auf $x \longmapsto (1,0)$)? Was meinst du mit dem ersten?
S. Da oben der, $f$ von $x$ plus eins, der wird ja auf null eins abgebildet.
I: Hm!
S: Weil, ich kann ja nicht
I: Ah, du meinst, wenn das $x$ auf null eins geht, dann kann das hier (zeigt in (b) auf $(1,0)$) nicht verschwinden.
S: Ja, genau. Oder umgekehrt, wenn ich jetzt $x$ plus eins auf null eins abbilden wollte, also direkt jetzt,
I: * $x+1 \longmapsto (0,1)$ *
S: dann hätte ich jetzt (3 Sek) dem einen $x$ ne Null zugeordnet, dann kann ich zwei $x$ gar nicht darstellen als n Vielfaches von null, weil das auch immer null ist.
I: Vor allen Dingen habe ich da das Problem, dass das nicht gleich dem ist, was hier (zeigt in (b) auf $(1,0)$) vorgegeben war.
S: Ach so, ich meinte auf eins null, eigentlich. Genau.
I: Ach so, auf eins null.
S: Genau. Das meine ich. Dann wird ja die $x$ plus eins. Dann wird ja die Eins von den $x$ plus eins repräsentiert als ne Null. Dann ist jetzt die Frage, was, wie repräsentiere ich denn jetzt was, wenn es da gar nicht steht. Also zwei $x$, da steht ja ne Null an der Stelle, wo die Eins oben steht. Kann ich aber eigentlich jetzt nicht wählen, weil eins ja schon durch null dargestellt wird.
I: Wir können ja mal andersrum vorgehen, dass wir gucken zwei $x$ steht hier (zeigt auf (b)) wird auf null vier abgebildet. Was würde daraus folgen für $x$? Worauf wird dann $x$ abgebildet? Wenn das möglich wäre.
S: Auf null zwei.
I: (ergänzt (b) zu:)
(b') * $\begin{array}{rlcrl} f(x+1) & = (1,0) & & & \\ f(2x) & = (0,4) & \Rightarrow & f(x) & = (0,2) \end{array}$ *
I: Das würd schon mal funktionieren, ne?
S: Dann müsste das oben halt, würde dann halt auf eins zwei meinetwegen abgebildet werden.
I: Wenn $x$ auf null zwei geht?
S: Stimmt gar nicht, auf

I: Das oben (zeigt auf $x+1$) soll auf das, was hier (zeigt auf (b)) vorgegeben ist.

S: Das geht ja nicht.

I: Wenn $x$ auf null zwei geht und $x$ plus eins auf eins null, auf was geht dann die Eins? (5 Sek) $x$ plus eins wissen wir, geht auf eins null, $x$ wissen wir, geht auf null zwei.

.* $\begin{array}{ccc} x+1 & \longrightarrow & (1,0) \\ x & \longrightarrow & (0,2) \end{array}$ *

Was können wir dann schließen, auf was die Eins geht? Wenn wir die beiden Informationen haben?

S: Eins? (7 Sek) Die Eins müsste auf eins minus zwei gehen, oder?

I: (ergänzt zu:)

(c) * $\begin{array}{ccc} x+1 & \longmapsto & (1,0) \\ x & \longmapsto & (0,2) \\ 1 & \longmapsto & (1,-2) \end{array}$ *

Wie kommst du dazu?

S: Ich hab jetzt $x$, nee, stimmt ja gar nicht, ja, doch, den ersten Eintrag minus den zweiten gemacht, also $x$ plus eins minus $x$ wäre ja die Eins.

I: Genau.

(c') * $\begin{array}{rcl} x+1 & \longmapsto & (1,0) \\ x & \longmapsto & (0,2) \\ x+1-x=1 & \longmapsto & (1,-2) \end{array}$ *

S: Wobei das ja nicht. Jetzt haben wir nicht mehr diese Eindeutigkeit, dass eine Koordinaten, also ein Eintrag, genau das $x$ oder die Eins repräsentiert. Jetzt haben wir ja. Das kann auch was anderes heißen.

I: Wäre das denn möglich, könnte ich so ne Anweisung, also, wenn ich diese mal ersetze durch $f$ von $x$ soll null zwei sein und $f$ von eins soll sein eins minus zwei. (ergänzt (b') zu:)

(b")* $\begin{array}{rlcl} f(x+1) & =(1,0) & & f(1)=(1,-2) \\ f(2x) & =(0,4) & \Rightarrow & f(x)=(0,2) \end{array}$ *

wenn ich das (zeigt auf den vorderen Teil von (b")) mal vergessen würde, und diese Vorschrift (zeigt auf den hinteren Teil von (b")), gemacht hätte, wäre das ne lineare Abbildung?

S: Ich glaub, das wäre nicht mal eindeutig. Weiß ich nicht, behaupte ich mal. Müsste man jetzt ein Beispiel finden.

I: Eindeutig heißt, es würde mindestens zwei Polynome geben, nein, es würde ein Polynom geben, das zwei verschiedene oder mehrere Bilder hat, wenn es nicht eindeutig wäre.

S: Ich hab jetzt andersrum gedacht: Zwei, die auf eins abgebildet werden.

I: Zwei verschiedene Polynome, die auf das gleiche, dasselbe 2-Tupel, abgebildet werden, wobei das nicht schlimm wäre, oder?

S: Doch, dann wär doch die, in dem Sinne keine Funktion mehr.

I: Ne Funktion hätte ich nicht, wenn ich hier (zeigt in (a) auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) was hätte, was zwei verschiedene Bilder kriegt. Zwei verschiedene Dinge hier (zeigt auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$), die dasselbe Bild da (zeigt auf $\mathbb{R}^2$) haben, heißt, die Funktion ist nicht injektiv, aber sie könnte trotzdem linear sein.

S: Moment, das habe ich jetzt nicht verstanden. Wenn ich jetzt zwei Bilder auf das gleiche abbilde.

I: Also zwei Urbilder. Zwei verschiedene hiervon (zeigt in (a) auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) auf das Gleiche abbilde (zeigt in (a) auf $\mathbb{R}^2$).

S: Aber es ist nicht mehr injektiv, oder?

I: Ja.

S. und damit auch nicht mehr k-linear, oder?

I: Nee, das stimmt nicht. Z.B. wenn ich alles auf null abbilde, ist das ne lineare Abbildung. (4 Sek)

S: Hm (nachdenklich). Ja, ja, stimmt.

I: Denn die Summe von zwei wird auf null abgebildet und die Summe von zwei Nullen ist auch null.

S: Ja, stimmt.

I: Also sie muss nicht unbedingt injektiv sein, ist nicht verlangt.(3 Sek)

S: Also, da weiß ich jetzt gar nicht so genau, warum das jetzt scheitern sollte.

I: Wir haben ja mal irgendwann aufgeschrieben: ne lineare Abbildung ist dadurch eindeutig bestimmt, dass ich weiß, was sie auf einer Basis tut, oder mit einer Basis tut. Wenn ich weiß, was sie mit eins und $x$ tut, dann ist sie dadurch eindeutig festgelegt. Und auch vollständig, denn ich kann Summen von Vielfachen von den beiden (zeigt in (b") auf $1, x$) bilden und dadurch den ganzen Raum (zeigt in (a) auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) erzeugen. Und dadurch sind die Bilder eindeutig, weil ich dieselben Linearkombinationen von diesen Bildern (zeigt in (b") auf $(1, -2), (0, 2)$) nehme.

S: Also wäre das jetzt praktisch möglich?

I: Ja, wäre möglich. Also wenn ich es so angebe (zeigt in (b") auf $f(1)$ und $f(x)$) habe ich hier ne Basis (zeigt in (b") auf $1, x$), geb die Bilder von der Basis an und dann setze ich das fort automatisch durch die Forderung, es soll linear sein, wird es automatisch fortgesetzt auf den ganzen Raum. Problem ist nur, wenn das, was ich hier, die Bilder von den Elementen, die ich hier nehme (zeigt auf $1, x$), wenn die linear abhängig sind, diese Elemente. Wenn ich hier für $x$ was vorgegeben hätte und für zwei $x$ was vorgegeben hätte, z.B. für zwei $x$ nicht null zwei, sondern null drei, dann ist es ein Widerspruch

$$.^{*} \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & (0,1) \\ 2x & \longmapsto & (0,3) \end{array} {}^{*}$$

denn hier habe ich das Doppelte (zeigt vorne auf die Zwei), also muss ich hier (zeigt hinten auf die Drei) auch das Doppelte haben, wenn es linear ist. Also wenn die, die ich vorgebe, linear abhängig sind, dann kann es Probleme geben, wenn es nicht zusammen passt. Wenn sie aber linear unabhängig sind, kann ich ganz beliebige Bilder auswählen.

S: Hm!

I: Und je nachdem, was ich wähle, das sind dann bestimmte Eigenschaften von der Abbildung $f$, z.B. ob sie injektiv ist oder nicht.

S: Also kann ich jetzt quasi auch drei Einträge da nehmen.

I: Drei hier (zeigt in (a) auf $\mathbb{R}^2$)? Wenn ich in den $R$ hoch drei gehe?

S: Ja. Auch wenn ich nur Polynome mit zwei Einträgen zulasse?

I: Kein Problem, nur wird es dann nicht surjektiv. Dann erreiche ich hier (zeigt in (a) auf den Bildraum) nicht den ganzen Raum. (8 Sek)

S: Warum nicht?

I: Weil der Raum nicht von zwei Vektoren erzeugt werden kann (zeigt in (b") auf $(1, -2), (0, 2)$), wenn er dreidimensional ist. (3 Sek) Aber ich kann ja hier. Ich kriege

hier bei dem Bild nur immer Linearkombinationen aus den Bildern der Basis, also das Bild ist das Erzeugnis von dem, was ich hier (zeigt in (b") auf $(1,-2),(0,2)$) rauskriege. Es kann nicht mehrdimensional werden als die Anzahl von diesen (zeigt in (b") auf $(1,-2),(0,2)$). Wenn wir es so (zeigt in (b") auf die rechte Seite) angegeben hätten, wär es klar, kann es eine lineare Abbildung werden und zwar eindeutig. Und das ist hier auch schon der Fall, denn die beiden (zeigt in (b") auf $x+1$ und auf $2x$) haben auch eine besondere Eigenschaft. (2 Sek) Ähnlich wie dies. (zeigt auf $1,x$)
S: Sind auch linear unabhängig.
I: Sind auch linear unabhängig und bilden eine Basis, genau, und erzeugen auch den gesamten Raum (zeigt aur $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$), wie wir ja hier (zeigt auf (c)) schon gesehen haben, dass wir $x$ und eins erzeugen können, $x$ als die Hälfte von dem (zeigt auf $2x$) und eins haben wir da unten geschrieben. Dadurch ist diese (zeigt in (b") linke Seite) Festlegung auch, legt uns auch eine lineare Abbildung fest. Jetzt ist die Frage: Wie können wir diese Abbildung als rechteckiges Zahlenschema, also als Matrix darstellen und welche zusätzlichen Informationen müssen wir geben, wenn wir die als Matrix schreiben wollen?
S: Ich müsste die Basis mit angeben, vielleicht?
I: Ja, die muss ich mit angeben, genau. Was wäre also hier ne Matrix zu, ja, musst dir ne Basis aussuchen, und dann
S: Wenn ich die Basis nehme, die da gegeben ist, $x$ plus eins und zwei $x$,
I: * $\mathcal{A} = \{x+1, 2x\}$ *
S: wäre die Matrix dann in Spalten eins null und null vier.
I: (d) * $M_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *
Genau. Und wie kann ich aus dieser Matrix meine Abbildung kriegen? (3 Sek) Also wenn ich wissen möchte, was das Bild von irgendeinem Polynom, von drei $x$ plus sieben, ist, was muss ich tun? (6 Sek)
S: Ja, da müsste ich gucken, wie drei $x$ plus sieben sich durch die Basis darstellen lässt, und müsste dann so oft, wie ich die einzelnen Faktoren halt benutze, das Bild benutzen.
I: Ja, genau.
S: Da gibt es doch keine Abkürzung, ne? Das müsste ich dann erst auf die Basis zurückführen, und dann
I: Hm. Ich müsste es in der Basis darstellen, die ich da habe. Wenn ich jetzt statt drei $x$ plus sieben gesagt hätte, was mache ich mit dem Polynom drei mal $x$ plus eins plus fünf mal zwei $x$, das wär jetzt ne andere Angabe von mir gewesen, ist auch n Polynom in dem Raum, dann wär es leichter, das hier zu sagen. Und wenn ich das bzgl. dieser Basis darstellen will?
.* $\mathcal{B} = \{1, x\}$ *
Bzgl. der Basis, die uns vertrauter ist.
S: Eins und minus zwei, null und zwei.
I: (e) * $M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ *
S: Wär das jetzt auch eine Basistransformation?
I: Genau, das ist die Darstellung in dieser Basis (zeigt auf (d)), das ist die in der anderen Basis (zeigt auf (e)). Hier (zeigt auf (d)) müsste ich die Koordinaten an-

wenden, nehmen wir mal
(f) * $2(x+1) - 4(2x)$ *
Das ist ein Polynom, das kann ich erst mal nur hier (zeigt auf (d)) anwenden, und hier (zeigt auf (e)) muss ich was tun, um es hier anwenden zu können.
S: Müsste ausmultipliziern, die Klammern.
I: Genau.
S: Minus sechs $x$ plus 2
I: (ergänzt (f) zu:)
(f') * $2(x+1) - 4(2x) = -6x + 2$ *
S: Ja, ich müsste halt die obere Matix (i.e. $M_{\mathcal{A}}$), also die A, mal den Vektor zwei minus vier multiplizieren und unten (i.e. $M_{\mathcal{B}}$) minus sechs und zwei.
I: (verändert (d) und (e) zu:)
(d') * $M_{\mathcal{A}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ * und (e') * $M_{\mathcal{B}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ *
S: Wobei ich mir nicht ganz sicher bin, ob ich das richtig.
I: Was muss ich jetzt oben hinschreiben und was unten? (7 Sek)
S: Gute Frage.
I: Das darf ich nicht verwechseln, denn zwischen minus sechs zwei und zwei minus sechs muss ja ein Unterschied sein. (8 Sek)
S: Ja, ist richtig. Also oben ist auf jeden Fall richtig, weil ich ja, wenn ich das ausmultipliziere, kriege ich ja eins null mal zwei vier.
I: Eins null mal zwei vier, genau.
S: Das ist ja zwei. Und als unteren Eintrag, ja, minus sechzehn? (I ergänzt:)
(d") * $M_{\mathcal{A}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \end{pmatrix}$ *
(9 Sek)
S: Ich weiß nicht so ganz, wo die minus sechzehn herkommt. Ob wir da, weil ich nur die erste Koordinate verglichen hab, geguckt hab zwei mal $x$ eins ist ja das Bild eins null
I: Zwei mal $x$ eins? hier? (zeigt in (f') auf $2(x+1)$).
S: Ja, genau. Und das Bild von $x$ plus eins soll ja eins null sein.
I: und zwei mal dieses ist zwei mal eins null,
S: Deshalb hab ich gedacht, dass die Zwei oben stehen muss, weil das die erste Zeile
I: Weil das und minus vier mal zwei $x$, was haben wir denn für zwei $x$? Ach hier (zeigt in (b") auf $(0,4)$) gibt minus vier mal null vier.
I: Also wir hatten hier (ergänzt zwei Pfeile:)
. * $\begin{array}{ll} \mathcal{A} = & \{x+1, 2x\} \\ & \quad\downarrow \quad \downarrow \\ M_{\mathcal{A}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \end{pmatrix} \end{array}$ *
(I kommentiert diesen Anschrieb:)
Der erste Basisvektor war das da (zeigt auf $x+1$), und das war der zweite (zeigt auf $2x$). Hier (zeigt auf die erste Spalte der Matrix) hatten wir das Bild von diesem (zeigt auf $x+1$) hingeschrieben, und hier (zeigt auf die zweite Spalte der Matrix) das Bild von diesem (zeigt auf $2x$), und deshalb muss die Koordinate bzgl. diesem hier (zeigt auf $x+1$) an der ersten Stelle stehen.
I: Bei den anderen ist es falsch rum das eins minus zwei ist das Bild von eins.

S: D.h. zwei minus sechs.
I: Genau. Wenn wir das multiplizieren kriegen wir
(e”) * $M_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \end{pmatrix}$ *
S: Ist das Zufall, dass das gleiche rauskommt, oder?
I: Ist das Zufall oder nicht? (5 Sek)
S: Ich würd sagen, es ist kein Zufall. (3 Sek)
I: Also was bedeutet das hier, das zwei minus sechzehn? (zeigt auf das Ergebnis bei $M_{\mathcal{A}}$) (10 Sek)
S: zwei minus sechzehn?
I: Ich geb dem mal nen Namen hier, weil wir verschiedene Darstellungen haben. $v$ soll das Polynom heißen. Nehmen wir lieber $p$, für Polynom. (ergänzt (f’) zu:)
(f”) * $p = 2(x + 1) - 4(2x) = -6x + 2$ *
(10 Sek) Wofür steht zwei minus sechzehn? Ist ja wie alle anderen Zahlen, die in irgendwelche Schemata eingeschrieben sind, steht das ja für etwas Bestimmtes.
S: Zwei mal den ersten Eintrag, minus sechzehn mal den zweiten.
I: Was ist der erste Eintrag?
S: Das ist ne gute Frage. (3 Sek) $x$ plus eins, oder? Also die Basis, oder?
I: Ja, aber da müssen wir jetzt aufpassen. $f$ bildet von da nach da ab (zeigt in (a) von links nach rechts). (7 Sek)
S: D.h. zwei minus sechzehn wäre jetzt das Bild in $R$ hoch zwei.
I: Genau.
S: Dann ist es kein Zufall, denn das Bild muss ja, egal welche Basis ich nehme, das gleiche sein.

## B.3 Vektorraum, Teil 1: Frau Beck (VR(1), Beck)

I: Erste Aufgabe, es geht um Vektorraum, um ne Veranschaulichung von nem Vektorraum. Und zwar, wir haben eine Farbmischmaschine. Wir haben hier irgendwie einen großen Behälter, da fließen von vier, haben wir vier Zuflüsse, und da tun wir Farben rein, rot, blau, grün, gelb.

(a)

```
| rot |  | blau |  | grün |  | gelb |
      \      |        |      /
      |______________________|
```

So, und diese Maschine, die soll programmiert werden. Ein Computer soll der Maschine sagen, wie sie Farben mischen soll. Wie könnte man das veranschaulichen mit einem Vektorraum? oder darstellen? Inwiefern könnte

B: Was ich mir vorstellen könnte, dass man das da hätte als Vektor (zeigt in (a) auf die obere Zeile) ist ja egal, ob als Zeilen- oder als (3 Sek.) Spaltenvektor. Und dass man damit dann eben, na ja, ich sag mal, das ist quasi so ne Art Unterraum von dem, was man aus allen machen könnte. Und dass man quasi so ne Art, na ja, wie wir das bei den Körpern hatten, dass da so ne Art Ideal entsteht, dass also nur durch diesen Vektor alle, die durch diesen Vektor erzeugt werden, eben in dem Ideal liegen.

I: Also, wenn wir das jetzt als, als Vektor, nehmen wir mal so was,

. * (1 1 * (fragt beim Schreiben:) wieviele brauchen wir?

B: Ja einen Vektor, um den zu halt (?)

I: Also vier Einträge, ne?

B: Ja.

I:

(b) * (1 1 1 1) *

Und was meintest du jetzt mit dem Ideal? Das habe ich nicht verstanden.

B: Na ja, dieses, dieses Verhältnis (zeigt auf (b)). Also alles, was zu dieser Farbe gehört, ob ich jetzt die doppelte, wenn ich jetzt die doppelte Menge rot nehme, nehme ich auch die doppelte Menge blau.

I: Ach so.

B: Dass man also, alle, die da drin sind, werden durch dieses Verhältnis, also diese Farbe, die dann hier entsteht (zeigt in (a) auf den großen Behälter), ist durch dieses Verhältnis entstanden, egal, welche Menge ich jetzt da nehme, weil das Verhältnis bleibt ja immer gleich. Und veränder ich das Verhältnis, veränder ich die Farbe. Also kann ich mit allen vier Farben quasi das komplette Farbenspektrum in diesem hier (zeigt in (a) auf den großen Behälter) erzeugen.

I: D.h. was sind die Vektoren, so was (zeigt auf (b)) oder das, was weiß ich, $\lambda$-fache (notiert in (b) $\lambda$ vor dem Zeilenvektor)?

B: Ja, ja, das $\lambda$-fache.

I: Dass wir also, sozusagen, die verschiedenen Farbtypen sollen die Vektoren sein?

B: Ja. Also dass man das so als $x$ eins, $x$ zwei, $x$ drei, $x$ vier (zeigt in (b) auf die einzelnen Einträge im Zeilenvektor) dann hat man halt $x$ eins, $x$ zwei , $x$ drei, $x$ vier (zeigt in (a) auf die vier kleinen Farbbehälter)

I: Gut, damit haben wir auch eine Anweisung, die der Computer kennen könnte.

Ne, nämlich so ein Zahlentupel (zeigt auf (b)). So, und wenn eine konkrete Farbe gemischt werden soll, dann muss der Computer natürlich auch sagen,

B: konkret zu (?)

I: Hm. Ja, und er muss auch sagen, wieviel, ne? Wieviel er haben will, wieviel Farbe da rein soll.

B: Ja, wieviel Farbe er hinterher, am Ende haben will.

I: Ja.

B: Aber das Verhältnis ist ja gleich, das ist ja einmalig.

I: Also der Farbtyp ist das Verhältnis, und die Menge ist

B: Und $\lambda$ ist halt die Menge

I: durch das $\lambda$ bestimmt. Gut, das muss er also irgendwie auch noch vorgeben, ne, damit die Maschine überhaupt arbeiten kann. Gut, was heißen jetzt die Begriffe, linear abhängig, linear unabhängig, Erzeugendensystem?

B: Ja also wenn man das jetzt so mit mehreren Töpfen, sag ich mal, machen könnte, die da hinterher dabei rumkommen, man hat also diese Verhältnisse,

I: Was heißt 'mehreren Töpfen'? Das ganze Modell?

B: Ja, ja, mehrere Ergebnisse quasi. Andere Verhältnisse halt. Und wenn man mit zwei, also angenommen man hat drei dieser, eh, Systeme und man könnte mit Zweien davon das Dritte erzeugen, dann ist das Dritte

I: Noch zwei solche? (zeichnet noch zwei weitere Modelle wie (a):)

(a')

```
| rot |  | blau |  | grün |  | gelb |      ⊔   ⊔   ⊔   ⊔      ⊔   ⊔   ⊔   ⊔
     \       |         |       /            \   |   |   /        \   |   |   /
      |___________________________|          |_________|          |_________|
```

B: Und dann hat ja wieder die gleiche Form, und angenommen, andere Verhältnisse. Aber, wenn man angenommen, ja, durch diese beiden (zeigt in (a') auf die ersten beiden Modelle) angenommen durch zwei Anteile von dem und einen Anteil von dem diese Farbe (zeigt in (a') auf das dritte Modell) erzeugen kann, dann sind diese Vektoren, also diese Verhältnisse zu einander nicht linear unabhängig.

I: Hm. Gut.

B: Andersherum, es wird nur schwieriger durchs Abziehen. Also ich sag mal, dass das bei dem Modell da liegt, da kann man keine Farben rausziehen.

I: Ja genau, das ist ein Problem bei dem Modell, da hat er, rechnet er nicht.

B: Müsste man da eben zuschütten und rausziehen.

I: Also wenn man so ne Maschine hat, und der Computer soll das berechnen, dann kann man natürlich einen Vektorraum, einen mathematischen Vektorraum als Beschreibung hiervon nehmen, aber da hat man so Sonderbedingungen.

B: Genau. Während wenn man keine Farbe davon jeweils erzeugen könnte durch eins oder zwei, dann sind sie linear unabhängig.

I: Gut, d.h. eigentlich sind die, sind die Vektoren, die du dir vorstellst, die man so notieren kann (zeigt auf (b)), sozusagen, dieses ganze Ding (zeigt in (a') auf das erste Modell) ist ein Vektor, und das (zeigt in (a') auf das zweite Modell) ist ein zweiter Vektor und das (zeigt in (a') auf das dritte Modell) ist ein dritter Vektor, also eine bestimmte Konstellation.

B: Also ich sag mal, so ne Basis wäre angenommen, wenn man sich mal auf die Farben bezieht, wäre rot, blau, gelb angenommen Basis, weil man grün ja durch blau und gelb ohnehin erzeugen kann.

I: Genau.

B: Ich sag mal, das ist in dem Fall ja einfach nur unglücklich gewählt oder so, aber

I: Das ist erstmal nicht eindeutig, ob man das wirklich kann, aber ich hatte es so gemeint, ich hab es extra so gewählt, dass das Problem auftaucht, dass grün durch blau und gelb

B: Man kann ja hier (zeigt in (a) auf den großen Behälter) die gleiche Farbe erzeugen, auch wenn man jetzt grün weglässt. Auch wenn wir jetzt vorher gesagt haben, das (zeigt auf (a)) ist der Vektor, aber dann würden wir es halt einzeln (?) Vektoren zählen. Also n muss ja dann da ein bißchen umdenken. Dann wär ja nur ein Vektor, der eine Farbe erzeugt.

I: Dann würden wir sagen, wenn wir jetzt grün z.B. durch einmal blau und einmal gelb erzeugen, dann wäre grün an sich, wenn wir grün für sich nur nehmen in der ersten Darstellung, wäre das welche Darstellung, also wenn hier die Farbe grün drin sein soll (schreibt * grün * in den großen Behälter in (a)), also dieses Grün (zeigt in (a) auf den kleinen grünen Behälter).

B: Dann wär null null eins null, bzw. null null, eh, null eins null eins.

I:

(c) * (0 0 1 0)   (0 1 0 1) *

Genau. Darf ich ein Gleich dazwischen schreiben?

B: Ja, in dem Fall schon. Also bzw. muss hier ein $\lambda$ vielleicht noch, aber geht, nicht unbedingt.

I: Jetzt haben wir ja für $\lambda$ eins.

B: Bei dem geh ich jetzt davon aus, dass man blau und gelb in der gleichen Konzentration nimmt.

I: Ah, dann wär das doppelt so viel, ne? Da machen wir ne Zwei davor. Oder wir können ja auch hier ne Zwei reinschreiben. (ändert zu:)

(c') * (0 0 2 0) = (0 1 0 1) *

Ah, da haben wir ein Problem, ne? Wie ist das jetzt mit Basis?

B: Ja, ich mein, die Vektoren an sich sind ja jetzt nicht gleich, sondern nur (?) praktisch von den Farben her betrachtet ist es jetzt nur gleich.

I: Also in unserem Modell ist es gleich, aber die Darstellungen sind verschieden.

B: Ja.

I: D.h. wenn wir in dem Vektorraum

B: Das Ergebnis ist gleich, aber nicht die, das Bild.

I: Wenn der Computer jetzt was ausrechnen soll, irgendwas, da kommen gleich noch Sachen, was man damit machen kann, dann rechnet er in welchem Vektorraum? Der Computer rechnet ja nicht in diesem Vektorraum (zeigt auf (a')).

B: Im $R$ hoch vier, eh, $R$ hoch drei. Weil, eigentlich brauch er das (?) hier nicht.

I: So, ein anderer Vorschlag, wie wir das Problem lösen können, wir können sagen, dass nicht die Farbe, die dann hier rauskommt (zeigt in (a) auf den großen Behälter), der Vektor ist, oder sogar die ganze Konstellation (zeigt auf (a)).

B: Sondern dass die einzelnen Farben die Vektoren sind.

I: Ehm, gut, das ist eine Möglichkeit (zeigt auf (a')).

B: dann könnte man ja, die drei sind ja linear unabhängig (zeigt in (a) auf die kleinen Behälter rot, blau, gelb), und der (zeigt in (a) auf den grünen Behälter) ist halt abhängig von den beiden (zeigt in (a) auf den blauen und den gelben Behälter)

in dem Falle. Und wenn man das dann halt als Vektoren nimmt, aus diesen vier Vektoren kann man das (zeigt in (a) auf den großen Behälter) erzeugen, man brauch aber theoretisch nur drei.
I: D.h. wie würde man dann die Darstellung wählen, hier unten (zeigt auf (c')), wenn man das ersetzen würde für den Computer in den $R$ hoch irgendwas?
B: Na ja, dann würde man jetzt wahrscheinlich irgendwie das als Vektoren schreiben und nicht als Zahlen.
I: Ah, du meinst diese einzelnen Einträge (kreist in (c') die letzte 1 im ersten 4-Tupel ein) sind die Vektoren.
B: Das könnte man machen. Weil, also ich mein so natürlich, in der Darstellung geht das natürlich nicht, aber wenn man das auf das Modell überträgt, dann kann man das machen. Wie gesagt, wenn man das (zeigt in (a) auf die vier kleinen Behälter) als Vektoren betrachtet.
I: Ja, dann haben wir also die Vektoren (notiert:)
.* rot blau grün gelb *
B: Und vorhin haben wir nur rot, blau und gelb linear unabhängig sind,
I: Hm, also es sind natürlich noch mehr Vektoren in unserem Vektorraum, ne?
B: Ja, klar, angenommen braun und was weiß ich, auf jeden Fall ist alles ja da. Nur man kann halt alle Farben aus diesen drei Farben erzeugen.
I: D.h. da wäre
B: Die Basis quasi des Vektorraums wäre rot blau gelb,
I: * $< r, b, g >$ *
B: und das (zeigt auf die Liste mit den vier Farben oder auf die Liste mit drei Farben) ist ein Erzeugendensystem.
I: Aber dem Computer kann ich nicht rot blau gelb eingeben. Der muss was im R hoch was
B: $R$ hoch drei.
I: Hm. $R$ hoch drei, genau. D.h. ich würde hier von diesen Darstellungen einfach das für grün weglassen (hält in (c') die beiden dritten Einträge zu) und dann hätte ich hier ne eindeutige Darstellung. Gut, andere Möglichkeit, wie wir das darstellen können, ist, dass wir etwas anderes als Vektoren auffassen, nämlich, wir sagen, hier muss ja irgendwie der Zufluss geregelt werden (zeigt in (a) auf die Verbindung zwischen einem kleinen und dem großen Behälter), meinetwegen, wir haben hier einen Schalter (zeichnet in (a) an den Abfluss eines kleinen Behälters einen Schalter), und der Computer sagt, wie lange das aufgedreht ist. Das sind die Anweisungen, irgendwie muss das ja mechanisch umgesetzt werden. Der Computer gibt diese Zeiten vor, für jede der vier Boxen, und dann sind die Vektoren in dem Vektorraum die Anweisungen.
B: Also dass dann quasi die Zeit als Vektor?
I: Eh, nicht die, ich hab ja vier Zeiten sozusagen.
B: Ja klar, vier Zeiten, aber pro Zeit oder pro Zeiteinheit bestimmt man einen Vektor, also pro Farbe und Zeit.
I: Ehm, also wenn ich jetzt sage, gelb fünf Minuten ( notiert * gelb 5 Min. *) Das meinst du jetzt, dass das ein Vektor ist?
B: Ja.
I: Ehm, nee, ich habs anders gemeint, ein Vektor ist eine Anweisung, ehm, wie jetzt gemischt werden soll, um eine bestimmte Farbe zu kriegen, die da unten rauskom-

men soll (zeigt in (a) auf den großen Behälter). Die setzt sich ja zusammen aus (zeigt in (a) auf die vier kleinen Behälter)
B: Ja, ja, das Verhältnis, in dem die Farben zu einander stehen. Das ist ja das, was ich am Anfang gesagt habe.
I: Genau, das wäre wieder etwas in dieser Art (zeigt auf (b)).
B: Ja.
I: Dann brauchen wir vier Anweisungen, für jeden eine (zeigt auf die vier kleinen Behälter) und eine Zeit. Also, Minuten, da sagen wir, nehmen wir eine feste Einheit.
B: Ja, also hätte man da angenommen, ja, das ist ja das, was ich damit meinte, also, dass man, dass es ja hier, das ein Vektor ist (zeigt auf (b)), in welchem Verhältnis die (zeigt in (a) auf die vier kleinen Behälter) zu einander stehen, das Teilverhältnis ist ja jetzt das Mischverhältnis, im Prinzip.
I: Ja. Haben wir dann dieses Problem auch (zeigt auf (c'))?
B: Nein.
I: Warum nicht? Wo ist der Unterschied?
B: Weil man da ja nicht berücksichtigt, welche Farbe das ist, und wie die Farben, aus welchen Farben sie sich ergeben.
I: Genau.
B: Bzw. welche Farben hinterher entstehen. Das ist ja nur ne (?)
I: Eh, ja, das Verhältnis ist ja hier (zeigt in (c') auf die beiden Seiten der Gleichung) das Gleiche.
B: Ja, darüber kriegt man ja, das Resultat ist das Gleiche, aber nur weil es ne grüne Farbe ist,
I: Genau.
B: und nicht, weil vier beliebige Farben da sind.
I: Aber, so wie ich es jetzt vorgeschlagen habe mit den Anweisungen, die beiden Anweisungen sind verschieden, im einen Fall werden die beiden Hähne aufgedreht (zeigt in (a) auf den blauen und gelben kleinen Behälter), im anderen dieser (zeigt in (a) auf den kleinen grünen Behälter). Also sind es verschiedene Anweisungen.
B: Also sind die Anweisungen von einander linear unabhängig. Das Resutat zwar nicht, aber die Anweisungen.
I: Aber wir können ja für den Computer sagen, wir interessieren uns nur für die Anweisungen, und immer wenn wir sagen, na gut, die Farben, die bei den beiden Anweisungen rauskommen, sind gleich, aber dann macht es einen Unterschied, ob ich sage, in dem Vektorraum sind die Farben die Vektoren oder die Anweisungen. Mit den Farben hätte ich das Problem, mit den Anweisungen nicht. Aber natürlich kann ich es so lösen, dass ich eben die eine rausnehme, überhaupt den Topf zumache, da (zeigt in (a) auf den grünen kleinen Behälter).
B: Aber ich glaube, das war das, worauf ich am Anfang hinauswollte, also hier damit. Nur das Problem war dann, dass das mit dem Mischverhältnis dazukam.
I: So, dann nehmen wir jetzt, gucken wir jetzt, was das heißt, wenn wir. Es soll ne neue Farbe produziert werden. Und wir wissen, dass sie besteht aus

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | Teile | orange | |
| (d) * | 1 | Teil | türkis | * |
| | 4 | Teile | braun | |

Und wir wissen von den Farben hier, wie wir die mischen können aus denen, die wir vorher hatten. Also sagen wir mal, wie können wir orange mischen, das soll die

Farbe sein, rot gelb jeweils einmal. Also eins null null eins. (notiert hinter 'orange' )

B: Dann wär das null eins eins null. Und braun?

I: Ach jedes eins. Braun ist, wenn man alles zusammenmischt. Z.B. oder da gibt es natürlich andere Möglichkeiten, es gibt ja verschiedene Brauns. (I hat (d) ergänzt zu:)

$$\text{(d')} * \begin{array}{llll} 3 & \text{Teile} & \text{orange} & (1001) \\ 1 & \text{Teil} & \text{türkis} & (0110) \\ 4 & \text{Teile} & \text{braun} & (1111) \end{array} *$$

Der Computer soll jetzt rauskriegen, wie er die neuen Anweisungen angeben muss.

B: Eh, na ja, also ich seh jetzt, das mal drei, den Vektor mal eins, den mal vier (zeigt in (d') nach einander auf die Zeilen)

I: Und dann addieren? Genau. Kann man das als Matrix aufschreiben?

B: $\text{(e)} * \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} *$

I: Aha. Muss ich erstmal überlegen, was passiert denn da, wenn man das malnimmt?

B: Nee, Moment. (5 Sek) Man betrachtet ja die Spalten. Das geht nicht. Oder muss man die Zeilen betrachten? (25 Sek) Also was käme denn hier raus? (20 Sek) drei sieben

I: Was rechnest du da?

B: Ja, dreimal das (zeigt in (d') auf die ganze erste Zeile) plus einmal das (zeigt in (d') auf die zweite Zeile) plus viermal das (zeigt in (d') auf die dritte Zeile).

I: Ah, deswegen sieben, ja, gut.

B: (notiert * (7557) * hinter (d')). Das muss rauskommen. Das Problem ist, dass ich. Ist die Frage. Also würde ich im Prinzip eins dann aufgelistet kriegen (zeigt auf den freien Platz hinter (e)). Wieviel wovon, das ist der erste Schritt.

I: Ja.

B: Und dann muss ich das ja dann hier noch mal so als Summe (ergänzt (e) zu:)

$$\text{(e')} * \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} *$$

(wischt in (e') die erste Matrix aus und schreibt:)

$$\text{(e'')} * \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} *$$

I: Ja, genau. Also wie wir das meistens, in Matrizenanwendungen ist das andersrum, dass der Vektor, auf den die Matrix angewendet wird, hinten steht. Dann macht man das einfach so:

B: Das geht aber nicht.

I: Warum nicht? (schreibt während des weiteren Wortwechsels:)

$$\text{(f)} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} *$$

B: Weil wir eine eins Kreuz drei und eine drei Kreuz vier Matrix brauchen und das nicht multiplizieren können mit einer

I: Deshalb schreibe ich das anders. Ich nehme die Transponierte. (ergänzt :)

(f') * $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *

B: Ja, das geht natürlich auch. Kommt ja aufs Gleiche raus, oder?

I: Kommt aufs Gleiche raus. Es ist auch gut, es so zu machen.

B: Hier (zeigt auf (e")) habe ich ja im Prinzip viel weniger Aufwand. Weil hier (zeigt auf (f')) muss ich beide Matrizen anders schreiben. Hier (zeigt in (f') auf den Spaltenvektor) ist ja noch ein Vektor, aber ist ja eigentlich auch eine Matrix, oder?

I: Ja, können wir auch als Matrix sehen. Genau. Wenn wir jetzt hier in die Zuflussbehälter die drei Farben orange, türkis und braun reintun (ergänzt (a) zu :)

(a")

```
  or        tü         br
| rot  |  | blau |  | grün  |  | gelb  |
       \       |          |      /
        |                        |
        |________________________|
```

was heißt das, wenn wir das auf unser mathematisches Modell übertragen?

B: Ja das ist ja das, was ich im Prinzip

I: Ja, gerade gemacht hab.

B: Dass man erstmal diese andere Matrix raushat, diese Verhältnismatrix, diese drei null null drei, null eins eins null, vier vier vier vier (zeigt in (d') auf die Zeilenvektoren) dass man das im Prinzip vorher schon hat und dass man das Ganze im Prinzip nur noch zusammenziehen muss.

I: Hm.

B: Ich glaube, das war einfach nur der Vektor eins eins eins. Also den da vor gesetzt (zeigt auf (d')).

I: Also der Zusammenhang zwischen den beiden Vektoren, wenn ich das da rein tue (zeigt in (a") auf die ersten drei kleinen Behälter) orange, türkis, braun.

B: Das habe ich ja noch vorher dann schon berechnet.

I: Von was jetzt? Von den Dreien (zeigt in (a") auf die neuen Farben über den kleinen Behältern)

B: Das Mischverhältnis jetzt. Das brauche ich ja dann nicht mehr.

I: Genau. Das ist ja diese Information hier (zeigt auf (d'))

B: Genau. Das brauche ich dann nicht mehr.

I: D.h. wenn ich von vornherein nicht rot blau grün gelb genommen hätte, sondern diese hier (zeigt in (a") auf die kleinen Behälter), dann würde die Darstellung von meiner neuen Farbe, um die es mir hier geht, anders aussehen.

B: Dann wär ja im Prinzip nur das (zeigt in (d') auf die erste Spalte) zu nehmen und dann hätte ich es.

I: Ja, dann wäre die Darstellung (notiert * (3140) * ) und den letzten meinetwegen null, wenn der drin ist, oder wir hätten nur eine Dreierdarstellung. Genau, so haben wir sieben fünf fünf sieben als Darstellung. Für den Vektorraum bedeutet das, wenn ich die beiden Darstellungen vergleiche, ich schreib dieselbe Sache bzgl. verschiedenen Basen, wenn das hier ne Basis ist, überhaupt. Aber bzgl. verschiedenen Erzeugendensystemen könnte ich auch sagen.

B: Ja.

## B.4 Vektorraum, Teil 2: Frau Beck, (VR(2), Beck)

I: Wir nehmen eine Abbildung vom Polynomraum in den $\mathbb{R}^2$.

...(I wischt die Tafel)

I: * $f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *

Das soll eine lineare Abbildung werden, und wir geben zwei Informationen vor,

(a) * $\begin{aligned} f(x+1) &= (1,0) \\ f(2x) &= (0,4) \end{aligned}$ *

Ist das eindeutig, das $f$? Also lineare Abbildung mit den beiden Eigenschaften?

(12 Sek)

B: Also, ich verstehe den Zusammenhang nicht so genau. Also ich verstehe jetzt nicht, warum jetzt hier die Eins steht und hier ne Vier und hier die Null (zeigt in (a) auf die Zahlen in den Ergebnistupeln).

I: Ist einfach nur ne Vorgabe. Hab ich jetzt so gesagt. Also ne Bedingung gestellt, das $f$ soll lineare Abbildung sein und

(4 Sek)

B: Ja, ja, da kann ich jetzt nicht rauslesen, was wäre $x$ plus zwei? Also die Abbildung von $x$ plus zwei.

I: Aha! Kann ich das nicht rauslesen?

B: Also <u>ich</u> nicht. Jetzt, im Moment.

I: Wie kann man das denn rauskriegen? Was $f$ mit $x$ plus zwei macht? Vielleicht können wir das ja auch nicht rauskriegen. Das war ja die Frage, ob das jetzt schon vorgegeben sein muss.

B: Ja müsste ja theoretisch. Durch eine Vorschrift müsste ja alles.

I: Kann ja sein, dass noch Informationen fehlen.

B: Ach so, ja gut.

I: Wenn es eindeutig wäre, was müsste dann möglich sein mit dem $x$ plus zwei?

.* $x + 2$ *

B: Das vielleicht zu trennen.

I: Wie meinst du? zu trennen?

B: Dass man das dann mit dem $x$ plus eins schreibt, und dann. Das Problem ist ja für die Eins habe ich ja keine Zuordnungsvorschrift.

I: (ergänzt:) * $x + 2 = x + 1$ *

Für die Eins habe ich nix. Also du meinst jetzt nicht diese (zeigt auf die notierte Eins) Eins.

B: Nein, nein, ich meine die nächste Eins.

I: sondern die nächste, die dazu gehört, um das so darzustellen.

.* $x + 2 = x + 1 + 1$*

B: Ja. (6 Sek).

I: Vielleicht kann man das, ehm, wir haben das zwei $x$ und das $x$ plus eins (zeigt in (a)). Also wir hätten eigentlich das Ziel, das wie zu schreiben?

B: Man könnte das ja schreiben (diktiert:)

I: (b) * $\begin{aligned} & x+2 \\ = \; & 2x + 1 - (x-1) \end{aligned}$ *

So?

B: Ja, bzw. minus $x$ plus eins.

I: Mal gucken, zwei $x$ minus $x$ wäre $x$ da haben wir, wir haben wir eins, plus eins,

genau, das wäre schon mal ne Möglichkeit. Dies (zeigt in (b) auf $2x$) könnten wir, aber
B: Na ja, das wäre jetzt eine Kombination aus den beiden (zeigt in (a) auf $x+1$ und $2x$).
I: Können wir ja vielleicht allgemein, das ist ja jetzt noch ein bisschen raten hier, manchmal geht's ja auch sofort, wenn wir es nicht direkt hinkriegen, was suchen wir?
B: Wir suchen ne allgemeine Form.
I: Ja, du sagst ne Kombination aus den beiden (zeigt auf (a)). Also?
B: $\lambda x$ plus $\mu$, keine Ahnung
I: * $\begin{aligned} & x+2 \\ = \; & 2x+1-(x-1) \\ = \; & \lambda x + \quad\quad +\mu \end{aligned}$ *
$\lambda x$? Ach so, * $\lambda x \quad\quad + \mu$ *, das haben wir ja hier (zeigt auf $x+2$) ein mal $x$ plus zwei.
B: Ja, ja, das haben wir. Aber dafür suchen wir ja quasi ne Vorschrift.
I: Ach so.
B: Haben wir an einander vorbei geredet. Also für diese Form (zeigt auf (b)) jetzt ne allgemeine.
I: Warum hast du hier (zeigt auf (b)) die zwei $x$ genommen?
B: Von zwei $x$ weiß ich ja, was es ist, und von $x$ plus eins weiß ich es auch (zeigt auf $-(x-1)$) auch. Also habe ich hier kombiniert: zwei $x$ plus eins müsste man ja theoretisch irgendwie schon mal hinkriegen. Bzw.
I: Wir könnten ja versuchen, das so zu schreiben als eine Summe von sowas (zeigt in (a) auf $x+1$) und sowas (zeigt in (a) auf $2x$), wobei wir nicht direkt Summen haben müssen, wir können auch?
B: multiplizieren.
I: also auch Vielfache von denen.
.* $\begin{aligned} & x+2 \\ = \; & 2x+1-(x-1) \\ = \; & \lambda(2x)+\mu(x+1) \end{aligned}$ *
So was suchen wir, ne?
B: Ja. (3 Sek)
I: Kriegen wir das hin?
B: Jetzt die Frage!
I: Also eins können wir schon mal direkt sehen: Was muss $\mu$ sein, wenn das klappen soll?
B: zwei.
I: * $\begin{aligned} & x+2 \\ = \; & 2x+1-(x-1) \\ = \; & \lambda(2x)+\mu(x+1) \\ = \; & \quad\quad +2(x+1) \end{aligned}$ *
B: zwei $x$ plus zwei.
I: Also die Zwei passt schon mal.
B: Das Problem ist, wir brauchen ein $x$ weniger.
I: Also müssen wir die zwei $x$ wie oft noch dazu tun?
B: Also minus ein halb.

I: * (b')
$$\begin{aligned} & x+2 \\ = \; & 2x+1-(x-1) \\ = \; & \lambda(2x)+\mu(x+1) \\ = \; & -\tfrac{1}{2}(2x)+2(x+1) \end{aligned}$$
*

Also können wir es darstellen, eh?

B: Ja.

I: Also, d.h.: Ist die eindeutig (zeigt auf (a))?

B: Wenn man das auf alles hinkriegt, theoretisch schon, wär ja dann kleiner gleich eins.

I: Das müsste man gucken, ob man alles darstellen kann, dies war ja nur ein Beispiel. Es gibt ne andere Begründung, die letztlich darauf rausläuft, wo wir das aber nicht einzeln untersuchen müssen. Ich behaupte, das geht, weil $x$ plus eins und zwei $x$ zusammen eine Basis bilden.

B: Ja.

I: Warum tun sie das?

B: Das müsste man jetzt beweisen. Und zwar müsste man rausgucken ( 7 Sek). Also wenn das ne Basis ist, ist es eindeutig, und wenn es eindeutig ist, dann ist es die Basis. Obwohl eigentlich, die Rückrichtung is ja dann gegeben, in dem Fall.

I: Da können wir ein einfaches Argument anwenden für die eine Richtung. Wir wissen, die Dimension von diesem Raum ist (zeigt auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$)

B: ist ja nur kleiner gleich eins.

I: Also die Dimension?

B: Zwei, weil man ja einmal die Konstante hat und einmal das $x$.

I: Also die Anzahl passt schon mal, wenn wir Dimension zwei haben.

B: Aber ob das die Basis ist, ist die Frage, also müssen sie linear unabhängig von einander sein.

I: Genau. Das wäre die Frage, sind sie linear unabhängig, kann man das Eine als Vielfaches des Anderen darstellen?

B: Nee, kann man natürlich nicht. Weil einmal haben wir ne Konstante und einmal nicht und die Konstante hebt sich ja nicht auf, wenn man das andere irgendwie verdoppelt.

I: Genau. Daher wissen wir, sie sind linear unabhängig, und weil wir Dimension zwei haben, wissen wir, sie sind auch ein Erzeugendensystem, d.h. letztlich wissen wir, wir können alle erzeugen. Gut. Also ist eine eindeutige lineare Abbildung mit diesen Bedingungen.

B: Ja.

I: Wie können wir diese lineare Abbildung mit nem rechteckigen Zahlenschema, also so was wie ner Matrix darstellen? Eigentlich. Ach doch, das haben wir auch für Räume, nicht nur für den K hoch n gemacht, sondern auch allgemein. Wie könnte eine Matrix aussehen? (3 Sek) Und welche zusätzlichen Informationen müssen wir noch dazu geben, damit jemand, der die Matrix sieht, die auch richtig zu deuten weiß?

B: Na ja, man muss erstmal angeben, was wo steht, was in welcher Zeile und was in welcher Spalte steht.

I: Ja. (4 Sek). Du kannst dir ja was auswählen und dann gucken wir, wie die, wie die Matrix dann aussehen muss.

B: Zuordnung, das ist jetzt die Frage. (10 Sek) Naja, irgend was ergibt halt die

Matrix eins null null vier.

I: Ja, kannst du ja schon mal hinschreiben, die Matrix.

B: * $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *

I: und dann überlegen, wie muss man die deuten?

B: Und die wird halt erzeugt durch Vielfache der beiden Vektoren (zeigt in (a) auf $f(x+1)$ und $f(2x)$).

I: Meinst du jetzt $f$ von ? Oder der

B: Nee, der Vektoren. $f$ ist natürlich die Abbildung, die da hin führt, quasi

(c) * $\xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *

I: Meinst du jetzt mit 'der Vektoren' $x$ plus eins und zwei $x$ oder eins null und null vier? Das war meine Frage.

B: Hm. Noch mal.

I: $x$ plus eins ist ein Vektor von diesem Vektorraum (zeigt auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$), $f$ von $x$ plus eins ist auch ein Vektor, von diesem hier (zeigt auf $\mathbb{R}^2$).

B: Das (zeigt in (c) auf die Matrix) ist ja $f$ von: das (zeigt in (c) auf die erste Zeile der Matrix) ist $f$ von $x$ plus eins und das (zeigt in (c) auf die zweite Zeile der Matrix) ist $f$ von zwei $x$.

I: Ach so meinst du das.

B: Also $f$ bildet ja diese (zeigt in (c) auf den freien Raum vor dem Pfeil) Vektoren. Ich weiß jetzt nicht, wie ich <u>die</u> (zeigt in (a) auf $x+1$ und $2x$) als Vektoren schreiben soll, also das als Matrix schreiben soll, es sei denn, ich muss das so machen

(c') * $\begin{array}{c} \begin{matrix} x{+}1 & 2x \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *

wobei das (zeigt in (c') auf die erste Spalte der linken Matrix) jetzt $x$ plus eins ist, also die Anzahl von $x$ plus eins ist, und das (zeigt in (c') auf die zweite Spalte der linken Matrix) die Anzahl von zwei $x$.

I: Was meinst du mit 'die Anzahl'?

B: Na ja, ein $x$ plus eins wird abgebildet auf eins null und ein zwei $x$ wird abgebildet auf null vier (zeigt in (c') auf die Spalten der linken und die Zeilen der rechten Matrix).

I: D.h. diese Null (zeigt in (c') auf die Null in der ersten Zeile der linken Matrix) gehört die zu dem zwei $x$ oder gehört die zu dem $x$ plus eins?

B: Nee, die gehört schon zu dem zwei $x$, weil.

I: Dieses hier als Spalten und dieses hier als Zeilen? Da ist die Zeile das Bild? (zeigt in (c') in der linken Matrix auf die Spalten in der rechten auf die Zeilen)

B: (d) * $\begin{array}{c} \begin{matrix} x{+}1 & 2x \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} f(x+1) \\ f(2x) \end{matrix}$ *

Das (zeigt in (d) auf die erste Zeile der rechten Matrix) ist $f$ von $x$ plus eins, und das (zeigt auf die zweite Zeile) ist $f$ von zwei $x$.

I: Und wie kriegen wir dann das Bild von etwas anderem raus? Z.B. von $x$ plus zwei (zeigt auf (b')), da haben wir es ja schon ausgerechnet, was da am Ende rauskommen muss.

B: Ja, ja, das ist ja nur das Beispiel (zeigt in (c') auf die linke Matrix). Wenn man hier (zeigt in (d) auf die Einsen in der linken Matrix) $\mu$ und $\lambda$ einsetzt, kriegt man also hier (zeigt in (d) auf die Eins in der rechten Matrix) $\mu$ und (zeigt in (d) auf die Vier in der zweiten Matrix) vier $\lambda$.

I: $\mu$ und $\lambda$. Also würden alle Ergebnisse, würden alle Bilder (zeigt in (d) auf die Zeilen der rechten Matrix)
.* $(\mu, 0)$ * oder * $(0, \lambda)$ *
aussehen.

B: Nein, nein. Das wird schon, schon kombiniert. Weil, man kann

I: Nach welcher Vorschrift muss man denn dann rechnen?

B: Das ist ja genau das Problem jetzt. Man kombiniert (zeigt in (d) auf die linke Matrix) ja immer $x$ plus eins mit den zwei $x$. Die werden ja immer kombiniert. Also als Vektoren. Also dass man hier jetzt
(e) * $(x + 1) \circ (2x)$ *
Das ist jetzt schlecht gemacht. Ich weiß nicht, wie ich das (zeigt in (d) auf die linke Matrix) schreiben

I: Du brauchst ne Verknüpfung hier (zeigt in (a) auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) in dem Raum?

B: Ja.

I: Dann nennst du das plus. Die können wir ja addieren. Und wir können ja noch mehr damit machen.

B: Ja und wir können sie multipliziern.

I: Kannst du davor schreiben, $\mu$ und $\lambda$.

B: (e') * $\mu(x + 1) + \lambda(2x)$ *
Das müssen wir abbilden. Und das wird durch die Vorschrift, die ja hierdurch (zeigt in (d) auf die linke Matrix und den Pfeil) gegeben ist, abgebildet (zeigt in (d) auf die rechte Matrix). Frage ist nur, wie ist jetzt die Vorschrift.

I: Genau. Also irgendwie, nur muss man jetzt noch wissen, wie soll ich das deuten? Also was muss ich tun? Die Schlüsselbegriffe sind hier (zeigt in (d) auf die rechte Matrix) enthalten, die Schlüsselinformationen, nur muss man wissen, wie soll ich diese Darstellung jetzt deuten.

B: Und hier würde ich ja, das bilde ich ja ab auf eins vier. (ergänzt (d) zu:)

(d') * $\begin{array}{c} {\scriptstyle (x+1)+(2x)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{f} \end{array} \begin{array}{c} (1,4) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} f(x+1) \\ f(2x) \end{array}$ *

I: Ja. Und d.h. dies (zeigt in (e') auf $\mu(x + 1) + \lambda(2x)$ ) bilde ich ab auf?

B: Das bilde ich ab auf $\mu$ und vier $\lambda$
(e") * $\mu(x + 1) + \lambda(2x) \longrightarrow (\mu, 4\lambda)$ *

I: Genau. Mit der Matrix muss ich also was tun, um auf <u>das</u> Ergebnis zu kommen? Also ich hab hier (zeigt in (e") auf den ersten Term) die Informationen $\mu$ und $\lambda$, nehme irgendwas, was ich in dieser Darstellung habe.

B: Ich multipliziere die mit $\mu$ mal vier $\lambda$.

I: Gut, ich hab jetzt, du hast jetzt hier direkt das Ergebnis gesagt, wie ich das Bild kriege, aber dabei jetzt deine Matrix nicht benutzt. Wenn die Matrix als Anweisung zu sehen ist, müsste man ja mit Hilfe der Matrix das da unten (zeigt auf das Ergebnis in (e")) erkennen.

B: Das ist ja quasi

.* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 4\lambda \end{pmatrix}$ *

(kommentiert das Produkt: Dadurch kriege ich jetzt ne Darstellung $\mu$ null, null $\lambda$) und wenn ich das jetzt wieder addiere, dann kriege ich wieder $\mu$ $\lambda$. (Ergänzt die letzte Gleichung zu:)

.* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \quad + \quad \underline{\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 4\lambda \end{pmatrix}}$ *
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\mu \quad 4\lambda)$

Wenn ich das jetzt quasi sofort als eins vier schreibe, komme ich sofort auf die Darstellung. (ergänzt zu:)

.* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \quad + \quad \underline{\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 4\lambda \end{pmatrix}}$ *
$(1 \quad 4) \qquad\qquad \longrightarrow \qquad (\mu \quad 4\lambda)$

I: Gut. Dann habe ich das mal das unten, ja, gut. Das Gleiche, wie bei der Aufgabe davor. Du hast also, ach nee. Nur dass du es jetzt andersrum gemacht hast. Du hast hier n Zeilenvektor mal ne Matrix (zeigt auf die zweite Matrix).

B: Ja.

I: Man könnte, so wie wir Matrizen aufgeschrieben haben, wenn wir das hier (zeigt in (d') auf $x + 1$ und $2x$) als Basis nehmen. Dann kriegen wir ja so ne Darstellung (zeigt in (e") auf die linke Seite). Also wir schreiben jedes von den Polynomen in einer Darstellung $\mu, \lambda$ bzgl. dieser Basis (ergänzt (e")zu:)

$\mu(x + 1) + \lambda(2x) = (\mu, \lambda) \longrightarrow (\mu, 4\lambda)$ *

Und dann wenden wir die Matrix darauf an, wobei aber hier in der Matrix die Bilder von der Basis in den Spalten stehen. Und dann wird es hinten dran geschrieben. Aber es läuft auf dasselbe raus, als wenn ich es vorne dran schreibe.

B: Ja.

I: Gut, jetzt könnte ich anstelle von dieser Matrix auch ne Matrix bzgl. der Basis eins $x$ nehmen.

B: Ja, ja. Müsste ich nur irgendwie

I: Was müsste ich alles tun dafür

B: Ich müsste wissen, worauf eins abgebildet wird und worauf $x$ abgebildet wird. Also ich müsste jetzt erst mal so ne Vorschrift machen.

I: Also ich müsste so was (zeigt auf (b')) für eins und für $x$ machen.

B: Ich müsste quasi jetzt. Eins könnte ich darstellen als (3 Sek)

.* $1 = \ (x + 1) - \frac{1}{2}(2x)$ *
$\qquad\qquad \longrightarrow (1, -\frac{1}{2})$

(kommentiert nach der ersten Gleichung: Das wird abgebildet auf)

I: Das ist die Darstellung von eins in dieser

B: Ach so, ja, gut, das ist erst mal die Darstellung und die wird dann abgebildet auf eins und minus zwei (ändert zu:)

.* $1 = \ (x + 1) - \frac{1}{2}(2x)$ *
$\qquad (1, -\frac{1}{2}) \qquad\qquad \longrightarrow (1, -2)$

I: Genau. Entsprechend kann man das dann für $x$ auch noch machen.

B: Das $x$ wäre dann (8 Sek)

I: Guck mal, die Eins hast du schon und $x$ kannst du darstellen mit $x$ plus eins und eins.

B: Ach so, ja, ja, also könnte ich

. * $x+1-(x+1-\frac{1}{2}2x)=-\frac{1}{2}2x$*
(wischt das minus auf der rechten Seite der Gleichung wieder weg)
I: $x$ kann man natürlich aus $2x$ leicht kriegen, einfach die Hälfte von zwei $x$.
B: * $x+1-(x+1-\frac{1}{2}2x)=\frac{1}{2}2x=(0,\frac{1}{2})\longrightarrow(0,2)$ *
Also ist meine Basis quasi
.* $\{(1,-2),(0,2)\}$ *
I: Basis von was ist das jetzt?
B: Das ist die Basis von von $R$ hoch zwei.
I: Ja.
B: Und hier die Basis (zeigt auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) wäre
.* $\{(1,-\frac{1}{2}),(0,2)\}$ *
(kurze Unterbrechung durch eine Störung)
I: Das ist jetzt die Basis von? von dem Polynomraum?
B: Ja.
I: D.h. wie sieht die Matrix aus, wenn wir, ich schreib das mal dazu, damit wir hier nicht
(f) * Matrix bzgl. $\{1,x\}=\{(1,-\frac{1}{2}),(0,2)\}$ und $\{(1,-2),(0,2)\}$ Basis von $\mathbb{R}^2$. *
(Zum ersten Gleichheitszeichen kommentiert I:)
Das hast du geschrieben in den Koordinaten der anderen Basis, wäre diese Darstellung bzgl. der Basis, die wir hier (zeigt in (a) auf die linken Seiten der Gleichheitszeichen) erst hatten.
(Die letzte Basis schreibt I von B's Anschrieb ab.)
I: Und dies (zeigt in (f) auf die zweite Menge) ist Basis von $R$ von $x$. Die schreibt man eigentlich nicht. Das ist die Basis in dieser Darstellung hier (zeigt in (a) auf die linke Seite) Eigentlich schreibt man die
B: eins, $x$.
I: Genau, mit den Polynomnamen. Wie sieht die Matrix aus bzgl. diesen beiden Basen?
B: Wie ich die eine auf die andere abbilde?
I: Hm. Also die zugehörige Matrix. Die, so wie wir das geschrieben haben: in die Spalten schreiben wir die Bilder.
B: Ehm.
I: Ja? von den Basisvektoren.
B: Ja, in die Zeilen schreibe ich die ehm
I: Also wenn du die Spalten hast, ist ja die Matrix schon komplett (schreibt die Klammern einer Matrix auf und zeigt die Spalten).
B: Ach so, ja. ja. Ist ja die Matrix von den Bildern, also (ergänzt:)
.* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ *
I: Jetzt hast du es in der anderen Basis geschrieben. Was sind die Bilder? Das ist die Basis eins null, null eins. Bzgl. der Basis eins null, null eins ist eins minus zwei die Darstellung von dem Bild von eins.
B: Ja, das ist aber die Basis, die das $R$ hoch zwei erzeugt, oder nicht?
I: Die ist auch eine Basis von $R$ hoch zwei, genau. Wenn diese Darstellung * $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *
B: Was ist denn richtig?

I: Wenn wir es so schreiben, ist es nicht richtig. Aber du hast etwas anderes gemeint, vorhin. Das soll bedeuten ein mal unser Standardbasisvektor minus zwei mal $e_2$. Dann müssten wir hier (zeigt in (f) auf die dritte Menge) schreiben bzgl. der Basis $e_1, e_2$, also bzgl. der Standardbasis. Wenn wir sagen bzgl. dieser Basis, dann ist der Vektor eins minus zwei bzgl. dieser Basis einmal. Eins minus zwei und null mal das (zeigt in (f) auf die dritte Menge). Dann ist das das Bild von dem, was war das? eins, glaube ich. Dann hätten wir die Darstellung eins null, null eins.

B: Ach so.

I: Dann würde unsere Matrix nichts mehr aussagen, weil wir die Informationen schon in der Basis hätten.

# B.5 Vektorraum, Teil 1: Frau Rolle (VR(1), Rolle)

I: Es geht um Vektorräume diesmal, überhaupt, was das ist, welche Vorstellung ihr dazu habt. Wir nehmen uns, wir haben eine Farbmischmaschine. (zeichnet während der folgenden Beschreibung:)

(a)

```
| rot |  | gelb |  | grn |  | blau |
     \       |        |      /
     |_________________________|
```

Also da ist, hier in den Topf kommt die neue Farbe rein und der wird gespeist aus vier anderen Töpfen und ein Computer soll regeln, wie die Zuflüsse, wie lange die geöffnet werden. Hier tun wir Farben rein, rot, gelb, grün, blau. Ein Computer muss der Maschine sagen, wie lange sie jeweils die Zuflsse öffnen soll.

R: Damit was passiert, damit unten dann die gleich richtige Farbe rauskommt, oder?

I: Unten, das wird dann umgerührt hier, unten ist die Farbe, die man mischen möchte.

R: Ja. Aber alles zu selben Anteilen, jede Farbe?

I: Das ist jetzt unterschiedlich, du kannst ja, wenn du rot 5 Minuten öffnest und gelb nur eine Minute, dann ist eben unten mehr rot als gelb.

R: Ja, aber das meinte ich.

I: Das soll der Computer regeln, wie lange das geöffnet wird, und damit, wieviel Farbe da unten reinkommt. Die Frage ist, wie kann man das durch das mathematische Modell eines Vektorraums darstellen, dieses Problem?

R: (leise:) Das Problem?

I: Also den Computer kann man programmieren. Der muss ja dann der Maschine sagen

R: Also theoretisch also ich nehm z.B. Vektor x, dann würde ich z.B. $r$ mal den Inhalt von $r$ nehmen, also von rot

I: Ja.

R: plus $s$ mal gelb plus $t$ mal grün plus $y$ mal blau

(b) * $\vec{x} = r \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ *

Aber das würde ich eigentlich auch wieder nicht so sagen. Also das wäre für mich jetzt das Simpelste, aber weil dann hätte ich kein also, von der Schule jetzt her, weil man da (zeigt auf (b)) immer irgendwie einen ausdenken könnte, den hätte ich jetzt im Augenblick nicht.

I: Hm.

R: Aber das ist das, was mich von der Schulmathematik her jetzt stört.

I: Ja. Vielleicht fangen wir mal noch ein bißchen einfacher an, einen Schritt weiter vorne, was sollen überhaupt die Vektoren sein in dem Vektorraum?

R: Was die Vektoren bed, also du meinst jetzt hier das hier (zeigt in (b) auf die Spaltenvektoren)

I: Also wir haben jetzt hier dieses Modell (zeigt auf (a)) und was in diesem Modell soll den Vektoren in dem Vektorraum entsprechen? (2 Sek) Wir haben hier diese Maschine

R: $x$ ist das Komplette (zeigt auf ganz (a)), was ich da raus haben möchte, und $r$ oder $s$ oder $y$ sind immer die Regulatoren, wie lange man was öffnet, damit z.B. rot oder gelb oder grün oder blau reinkommt.

I: Hm.

R: So stelle ich mir das jetzt vor.

I: Und ne Anweisung, die der Computer, die der geben würde, das wäre ja so, weiß ich, n Tupel von Zahlen.

R: Ja wir hätten ja jetzt z.B., $x$ wäre z.B. drei null eins null oder so was, (ergänzt (b) zu:)

$$.* \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = r \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \ \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \ \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \ \end{pmatrix} *$$

I: Ja, genau. So was würde der Computer angeben, drei null eins null?

R: Ja genau, das ist die komplette Farbe, die rauskommen soll, z.B.. Und dann hätten wir jetzt, z.B. rot ist dann null eins null eins oder sowas und gelb ist dann eins eins eins eins und grün ist null null (ergänzt (b) zu:)

$$\text{(b')} * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \ \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \ \end{pmatrix} *$$

Ah, ich hätt es mir auch einfacher machen können, ne? (lacht) Ein bißchen doof vorgegangen.

I: Ja.

R: Wenn ich jetzt hier, ne, Basisvektoren genommen hätte.

I: Das wäre einfacher gewesen. Ich habe mich schon gewundert, warum machst du es so. Aber es geht natürlich so auch.

R: Aber komplizierter.

I: Wenn wir es so machen, wie du es da angefangen hast, was wäre denn da der Vektor eins null null null?

R: Eins null null null? Wenn ich das so stehen lasse?

I: Ja.

R: Die Frage verstehe ich nicht. Du meinst, wenn ich hier hinsetze (zeigt in (b') auf den noch leeren Spaltenvektor), oder wenn ich das da (zeigt in (b') auf den Spaltenvektor vor dem Gleichheitszeichen) rausbekomme?

I: Was dem entsprechen würde, in dem Modell, bei der Maschine da, dem Vektor eins null null null. Also wenn

R: Ja z.B. rot, also ist ja egal, weil ich könnt ja, wenn ich die (zeigt in (b') auf die Einträge im Spaltenvektor mit Koeffizient $r$) hier jetzt wegnehmen würde, also wäre das für mich einfacher.

I: Gut, wenn rot, wenn du so anfängst mit solchen (zeigt in (b) auf die Spaltenvektoren auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens) ist das schwierig, wenn du eins null null null

R: Und ich hätt hier (zeigt in (b') auf den ersten Spaltenvektor) auch was Einfacheres nehmen können.

I: Ja, aber das ist ja sinnvoll. Also es wäre sinnvoll, wenn rot eins null null null,

R: Ja, ich mach das mal (ändert (b') zu:)

$$(\text{b}") * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} *$$

So, jetzt wäre es einfacher.

I: Gut, und dann würde drei null eins null, was da vorne steht?

R: Da mssen wir z.B., müsste man dann drei mal rot eintragen und null mal gelb und einmal grün und null mal blau (ergänzt (b") zu:)

$$. * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = \overset{3}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{0}{s} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{1}{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{0}{y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} *$$

So dann hätte ich das raus, dann hätte ich meine Farbe x.

I: Und das drei null eins null soll dann also eine Farbe bezeichnen, das 4-Tupel?

R: Hm (zustimmend).

I. Gut, ist eine Möglichkeit, wie man sich das vorstellen kann. Ehm, was bedeutet denn in diesem Vektorraum linear abhängig, linear unabhängig, Basis, Erzeugendensystem, was heißen diese Begriffe?

R: Also, ich mach erstmal linear unabhängig. Also linear unabhängig heißt jetzt, dass sich kein Vektor mehr aus ner Kombination von den anderen erzeugen lässt. Also so hab ich das immer gemacht. Also ich kann nicht durch eine Kombination von den Vieren (zeigt in (b") auf die rechte Seite) auf den Nullvektor kommen. Das ist dann linear unabhängig. Und linear abhängig ist dann, wenn ich z.B. aus Zweien den Dritten erzeugen könnte (zeigt in (b") auf die rechte Seite). Aber geht jetzt nicht. Weil ich schon Basisvektoren genommen habe.

I: Gut, wenn wir das so in diesen Tupeln schreiben, ist das ja so was wie der $R$ hoch vier, ja?

R: Ja.

I: Das war hier das Modell (zeigt in (b") auf einen Vektor). Was heißt das denn da oben (zeigt auf (a)) z.B. linear abhängig, wenn man in den Farben denkt? Was würde da der Begriff linear abhängig bedeuten?

R: Ja, das würd z.B. heißen, also sagen wir, rot, gelb, grün wäre linear abhängig, dann könnte man blau wegfallen lassen, weil blau ja dann, also, den brauchte man nicht unbedingt, ne, um was zu erzeugen. Also ich hab jetzt gerad, dass man ein Erzeugendensystem. Da brauchte man das ja, also da brauchte man ein minimales, wie soll ich das, kann man das sagen, ein minimales Erzeugendensystem?

I: Ja, das wäre dann ne Basis, ne, ein minimales Erzeugendensystem.

R: Aber ich brauch ja ne Grundbasis, um ne Farbe zu erstellen.

I: Hm. Aber jetzt hast du eben etwas gesagt, wenn rot, gelb, grün linear abhängig sind,

R: dann ist blau zu den Dreien, also vielleicht ist blau auch, bei drei Sachen, linear abhängig.

I: Sozusagen, wenn wir den noch dazu nehmen?

R: Ja, z.B. es könnte ja auch sein, dass jetzt rot gelb grün linear abhängig sind, dass

wenn ich jetzt rot weglasse, dass gelb grün blau dann linear abhängig sind.
I: Das könnte noch zusätzlich sein, ne?
R: Ja.
I: Jetzt haben wir aber überlegt, die Farben, die wir jetzt gewählt haben, meistens, wir nehmen mal an, dass das geht, dass wir grün, eh, dieses Grün, das da drin ist (zeigt in (a) auf den dritten kleinen Behälter), genau die Mischung einmal gelb und einmal blau ist, das soll grün geben, wenn man einen Farbkasten nimmt, dann geht das ja auch so.
R: Ja.
I: Was heißt, was wäre dann da linear abhängig?
R: Grün wäre linear abhängig von gelb und blau, würde ich sagen, oder?
I: Ja, oder man sagt, die drei sind linear abhängig.
R: Also ich mach das immer so, dass ich gucke, ob der Dritte sich dadurch erzeugen lässt.
I: Gut, das heißt aber, da kriegen wir natürlich ein Problem, weil hier (zeigt auf (a)) was passiert, was hier (zeigt auf (b”)) komisch ist. Nämlich grün hat welche Darstellung?
R: Null null eins null.
I: Aber wenn grün das ist, was ich eben gesagt habe, dann hat grün auch?
R: Ja, dann hab ich auch null eins null null und null null null eins.
I: (c) $* \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} *$
Da muss ich mal sehen, was ich hier tun muss. Das ist ja gelb, das ist grün, gelb und das ist blau (notiert in (c) die Farben unter den Vektoren). Die beiden (zeigt in (c) auf den zweiten und den dritten Vektor), wenn ich die mische, kriege ich den (zeigt in (c) auf den ersten Vektor). Wie schreib ich das als, was heißt das Mischen für die Tupel?
R: Dass ich einen kompletten nehmen würde jetzt, oder? Also ich würd mir jetzt daraus einen neuen Vektor erzeugen, der dann eben, ja, eigentlich ist grün ja falsch gewählt. Weil ich kann jetzt hier durch gelb und blau kann ich nicht auf grün kommen.
I: Ja, nicht auf diese Darstellung. Wenn wir die mal vergessen (heißt in (c) den ersten Vektor zu), grün kriegen wir, wenn wir was tun? Was müssen wir rechnen um grün zu kriegen?
R: Ach so, ja, dann müssten wir die addieren.
I: Genau. (ergänzt in (c) ein = und ein + zwischen den Vektoren). Das wäre ein Problem, ne? In unserer Maschine wäre grün sowohl das (zeigt in (c) auf den ersten Vektor), als auch die Summe aus den beiden (zeigt in (c) auf die beiden letzten Vektoren). Das können wir ja auch schreiben als null eins null eins, wenn wir das addieren. (ergänzt (c) zu:)

$$(c') * \underset{\text{gr}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{\text{gelb}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underset{\text{blau}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{\text{gr}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} *$$

.

R: Ja.
I: Ja, da haben wir ein Problem.
R: (?) besser nicht so gewählt haben.
I: Nee, das, ich hab das absichtlich so mit den Farben gemacht, dass wir auf das Problem stoßen. Es gibt jetzt ne andere Möglichkeit, wie wir das als Vektorraum deuten könnten. Nicht die Farbe, die da unten rauskommt (zeigt in (a) auf den großen Behälter), hat dieses 4-Tupel (zeigt in (b") auf den ersten Spaltenvektor), sondern das 4-Tupel ist die Anweisung, wie lange diese (zeigt in (a) auf die kleinen Behälter) geöffnet sein sollen. Diese (zeigt in (c') auf den ersten und den letzten Vektor) Anweisungen sind verschieden. Aber die Farben, die sie erzeugen, sind gleich.
R: Also quasi, dass ich dann hier immer hätte, also die Zeile (zeigt in (b") auf die erste Zeile) wäre dann immer rot, gelb, grün, blau (zeigt jeweils in (b") eine Zeile), ja?
I: D.h., genau, die Zeile würde heißen, wie viel rot, in den Topf, also wie lange rot in den Topf fließt, usw., also nur die Anweisung, wie lange das zu öffnen ist, hier der Hahn (zeigt in (a) auf den Abfluss des ersten kleinen Behälters), und die anderen Hähne. Die Anweisungen sind ja verschieden, und dass am Ende dasselbe Produkt rauskommt, ist ja ne andere Sache. Das brauche ich nicht in meinen Vektorraum sozusagen mit reinzunehmen. Dann habe ich das Problem nicht, dass ich hier (zeigt auf (c')) Dinge linear abhängig habe, die es im $R$ hoch vier nicht sind. Diese drei (zeigt in (c') auf die ersten drei Vektoren)
R: Hm.
I: Gut. Also ist ein anderes Modell für einen Vektorraum. Ehm,
R: Transposition würde ich eigentlich sagen, oder? Kann man das nicht sagen?
I: Wie meinst du das, ne Transposition?
R: Ja, ne Transposition war doch immer, dass wenn ich z.B. m mal n Spalten, oder m kreuz n Matrix habe, ich danach dann ne n kreuz m Matrix hab, oder?
I: Ja.
R: Also für mich wäre's doch jetzt im Augenblick, also jetzt so, wie ich es jetzt geschrieben hab, ist das ja (zeigt auf (b")) nur die Zeit für mich wie lange ich was öffne, und wenn ich das Ganze jetzt einmal kippen würde, ist das ja so, wie du das jetzt sagst. Also dass jetzt hier (zeigt in (b") auf die 3 im ersten Spaltenvektor) einer sagt, wie lange ich was öffne.
I: Mit kippen meinst du, das so rum schreiben? (notiert * (3 0 1 0) * als Zeilenvektor) Oder meinst du was ganz anderes?
R: Ja, aber das Ganze dann als Matrix formulieren, ne?
I: Also wenn wir so was, ehm,
R: (?) Ist egal, schon gut.
I: Kommen wir gleich noch mal zu Matrizen. Jetzt haben wir erst noch nehmen wir noch ein anderes Problem. Wir wollen eine Farbe mischen, von der wir wissen, dass sie aus drei Teilen orange besteht, einem Teil türkis und vier Teilen braun.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | Teile | orange | |
| (d) * | 1 | Teil | türkis | * |
| | 4 | Teile | braun | |

Und wir wollen, der Computer soll irgendwie ausrechnen, oder wir wollen Anweisung angeben, wie wir diese Farbe aus denen (zeigt auf (a)) hier, also mit dieser Maschine mischen können.

R: Muss man sich überlegen, was Sache ist, ne?

I: Muss ich natürlich erst noch Informationen dazu geben, ne? Was für Informationen?

R: Ja, orange ist gelb rot, ne? Aber ich bin mir nicht ganz sicher, oder?

I: Ja, orange kann man aus gelb und rot mischen, wir mssen uns jetzt entscheiden, zu welchen Teilen, ne? Es gibt ja verschiedene orange zwischen gelb und rot.

R: Dann sagen wir, zu zwei Teilen gelb und zu einem Teil rot. (I notiert in (d) *(1 2 0 )*))

R: Wo hast du jetzt meinen Teil rot? Ach so, ah ja, ok.

I: Was hast du jetzt gedacht?

R: Ich hab jetzt gedacht du wolltest aufschreiben, also einmal zweimal (zeigt in (d) auf die 1 und die 2) verstehst du, wie ich das meine?

I: Nee.

R: Also wenn ich jetzt sage z.B. einmal zweimal gelb nehmen. Weil ich hab erst nicht gesehen, dass du hier noch Nullen schreibst. Ich dachte, du wolltest jetzt hier (zeigt in (d) auf die 1 und die 2) noch drunter schreiben einmal, oder zweimal ein Teil gelb.

I: Ach so, sozusagen du hast es so formuliert, das hinschreiben. Ich hab's jetzt in der Kurzschreibweise,

R: Ja.

I: wie man die Farbe mischen kann aus gelb und rot. Und türkis?

R: Aus grün und blau.

I: Mischung aus grün und blau, genau. Also, welche Darstellung soll das haben?

R: Nehmen wir zwei Teile blau oder so und ein Teil grün, also null null eins null, eh, null null eins zwei.

I : * (0 0 1 2) * Und für braun, das ist eine Mischung aus allen Farben, nehmen wir so was (ergänzt (d), so dass es nun wie folgt aussieht:)

$$
\text{(d') } * \quad \begin{array}{llll} 3 & \text{Teile} & \text{orange} & (1\ 2\ 0\ 0) \\ 1 & \text{Teil} & \text{türkis} & (0\ 0\ 1\ 2) \\ 4 & \text{Teile} & \text{braun} & (1\ 1\ 1\ 1) \end{array} \quad *
$$

Wie kriege ich jetzt raus, für türkis haben wir noch eine andere Darstellung, ne, die dem hier unten (zeigt auf (c')) entspricht. Kriegen wir statt dem (zeigt auf (d')) grün hier auch das (zeigt in (c') auf den letzten Vektor) schreiben.

R: Ach so, ja.

I: Ist aber egal, können ja diese nehmen. Wie kriegen wir jetzt raus, wie wir die Hahne öffnen müssen, damit wir die Farbe, die da beschrieben ist, herstellen können?

R: Willst du jetzt eine Komplettfarbe aus den Dreien (zeigt auf (d')) machen, oder jeweils immer nur die einzelnen Farben?

I: Ich möchte die Farbe haben, die drei Teile orange, einen Teil türkis und vier Teile braun hat.

R:

$$
\text{(e) } * \; 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x} \; *
$$

So würde ich das jetzt schreiben.

I: Hm. Ja, gut. Warum passt das?

R: Warum? Ja weil das (zeigt in (e) auf die Komponenten des ersten Spaltenvektors) sind meine Angaben, von wieviel Teilen ich was brauche (zeigt in (a) auf die kleinen Behälter), damit ich, ehm, also z.B. orange, türkis und braun, und das Ganze mache ich ja dann dreimal, also im Endeffekt dreimal orange und einmal türkis und viermal braun, damit ich auf meine Farbe x komme, weil ich die dann addiere, dann komme ich ja da drauf.

I: Hm. Gut. Können wir mal als Matrix aufschreiben, diese hier (zeigt in (e) auf die Spaltenvektoren) als Matrix.

$$\text{(f)} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} *$$

Was bedeutet das?

R: Das würde ich jetzt nicht so machen.

I: Ja? Sondern?

R: Weil so heißt es sich ja im Endeffekt, das (zeigt auf (f)) ist ja meine Grundsubstanz und nicht das (zeigt auf (e)), was ich jetzt eigentlich haben möchte, oder? Also wenn ich jetzt z.B. sowas (zeigt auf (e)) in meiner Klausur hätte, dann würde ich niemals so ne Matrix hinschreiben, weil ich würd dann immer schreiben, drei sechs null null (zeigt in (e) auf den ersten Spaltenvektor) null null eins zwei (zeigt in (d') auf den zweiten Spaltenvektor) vier vier vier vier.

I: Hm, gut, wenn ich das hier (zeigt auf (e)) jetzt direkt ausrechnen will. Dieses Problem hast du hier ja hiermit auch schon gelöst. Da kann ich das hier eben noch ausmultiplizieren und dann diese Summe bilden, dann kriege ich meine Farbe (zeigt auf (e)) hier, also die Anweisung, wie ich die gewnschte Farbe herstellen kann. Das wäre jetzt ne weitergehende Frage, was heißt, was bedeutet diese Matrix (zeigt auf (f))?

R: Ach so, also jetzt gar nicht mehr mit dem

I: Die hat mit unserem Problem auch zu tun, ich mein, es kommen ja dieselben Vektoren da vor.

R: Ja das (zeigt auf (f)) ist eben jetzt meine Angabe wie man die Zusammensetzung der Farben, damit ich dann später auf meine Farbe x kommen würde. Oder meinst du das jetzt nicht?

I: Ja, also dieses drei eins vier, wie könnte ich das noch mit einbauen? Ich könnte die Darstellung, die du da oben (i.e. (e)) geschrieben hast, mit Hilfe von der Matrix auch erreichen.

R: Muss ich mal was nachrechnen. Ich rechne ja Zeile mal Spalte, beim Multiplizieren. (12 Sek) Wenn ich jetzt mal (R notiert in (f) * (3 1 4) * als Zeilenvektor hinter der Matrix) Ich muss mal eben kurz nachdenken, ja? Dann hätte ich drei, nein, kann man nicht, das wäre ja Quatsch, oder?

I: Also das geht nicht, aber so was Ähnliches geht.

R: Ja, kann ich ja nicht, weil, ich muss mal, (ergänzt (f) zu:)

$$\text{(f')} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} *$$

drei plus null plus vier, das wäre auch Quatsch, oder?

I: Nein, ist richtig, oder?

R: (rechnet in (e)) Nee, so würd's stimmen, also wenn ich es so schreiben würde (zeigt auf (f')).

I: Genau, also das würde mir denselben, das (zeigt auf (f')) ist ne andere Darstellung von der gleichen Sache, die du da (zeigt auf (e)) gemacht hast, ne? Nur dass ich hier (zeigt in (f') auf den Vektor) natürlich, ich kann nicht nur drei eins vier, ich kann auch andere 3-Tupel einsetzen, das kann ich da (zeigt auf (e)) natürlich auch, und dann verschiedene Farben kriegen. Was würde das, wenn ich das, was ich hier tue (zeigt auf (f')), wie könnte ich das bertragen auf diese Maschine? Was mache ich da letztlich?

R: Ich geb meiner Maschine die Anweisung, wie lange was jetzt offen bleiben muss, welche Farbe. Weil wenn ich jetzt, also hier kommt erstmal am Ende mein x raus,

I: Wie lange welche Farbe offen bleiben muss, um was zu kriegen?

R: Meine Farbe x (zeigt auf (e)), weil das ja hier (zeigt auf (f')) meine Farbe x.

I: Hm. Wenn wir jetzt hier das ausrechnen, dann kriegen wir irgendwas raus. (rechnet in (e) und ergänzt zu:)

$$(e') * 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} *$$

Eigentlich haben wir jetzt zwei verschiedene Darstellungen für die Farbe, die wir erzeugen wollen. Einmal diese (zeigt in (e) auf das Ergebnis) und einmal diese (zeigt in (f') auf den Vektor). Was haben die mit einander zu tun, das sieben zehn fnf sechs und das drei eins vier?

R: Ich würde sagen, die drei eins vier erzeugt die sieben zehn fünf sechs, oder? Aber das kann man überhaupt nicht so sagen.

I: Jedenfalls spielt die ne Rolle dabei, um die zu erzeugen.

R: Aber ich glaub das darf man so nicht sagen.

I: Wenn der Computer die Anweisung drei eins vier geben würde, was müsste ich an der Maschine ändern, damit ich diese Farbe rauskriege?

R: Was ich ändern muss?

I: Ja.

R: Ja, ich muss von Anfang an meiner Maschine schon sagen, so also das, so viele Farben sollst du jetzt losgeben. Das ist doof formuliert, ne? Also ich muss meiner Maschine sofort sagen, ich brauch einen Anteil, was war jetzt, rot ne? (zeigt auf (f'))

I: Hm.

R: O.k., dann brauche ich soundso viele Anteile rot, und dann brauch ich gelb, grün, blau. Aber das muss man ver (?) und dann kann man erst hier (zeigt in (f') auf den Vektor) angeben, also mit was ich multiplizieren muss, damit ich dann auf x komme. Also das ist jetzt so das, was man vorher wissen muss, meiner Meinung nach.

I: Gut, also das, was ich jetzt dachte, aber das geht ein bißchen das geht wirklich ein bißchen aus dem Anfang da raus. Man könnte die Farben da rausnehmen aus den kleinen Töpfen und die Farben orange türkis und braun reintun.

R: Ach so, ja. Könnte man auch machen.

I: Und dann wäre die Anweisung, die Farbe zu mischen?

R: Ja, nur drei eins vier.

I: Genau. Und da mssen wir nur dazu sagen, wenn wir da (zeigt in (a) auf den letzten

kleinen Behälter) blau drin lassen, oder wenn da gar nichts reinkommt oder so.
R: O.k., daran habe ich jetzt nicht gedacht.
I: Nee, ist klar, weil es ja auch aus dem Modell so ein bißchen da rausgeht. Was würde das in dem Vektorraum, welcher Sache würde das entsprechen, wenn ich die Farben, da in den Töpfen andere Farben reintue?
R: Hab ich n neuen Vektorraum im Endeffekt, oder? Also dann hab ich ja nicht mehr den, von dem wir eigentlich ausgegangen sind.
I: Ehm
R: Also ich hab Farben aus demselben Vektorraum, aber mit anderen Koordinaten.
I: Ja, genau.
R: Ich hab ja hier meine Standardbasisvektoren (zeigt auf (b”)), davon sind wir ja auch glaube ich im Weiteren ausgegangen, oder?
I: Hm.
R: Und dann kann ich ja jetzt, also dadurch, dass ich ja jetzt in jeder Dimension eigentlich einmal bin, kann ich ja berall hinkommen. Und dann ist das eins zwei null null, null null eins zwei, eins eins eins eins das ist ja alles eine Möglichkeit, wie man darüber hinaus geht. Also ne Linearkombination.
I: Ja. Die darüber hinaus geht in dem Sinn, dass sie da nicht drin sind in dem Vektorraum, oder?
R: Nee, das ist ne Kombination im Endeffekt, also weil so (zeigt auf (b”)) ist es jetzt für mich schön einfach dargestellt, da kann ich das voll sehen, aber da (zeigt auf (e)) ist eben immer ne Kombination dahinter.
I: Da muss ich erst noch deuten, was die Koordinaten, dieses (zeigt in (b”) auf die linke Seite der Gleichung) so aufschlüsseln (zeigt in (b”) auf die rechte Seite der Gleichung), um das zu sehen. Genau, es ist nicht ein neuer Vektorraum, aber ne andere, wie hast du es formuliert, eben? Es ist ein anderes Erzeugendensystem, ja?
R: Ja.
I: Das den Vektorraum darstellt. So was nennen wir einen Basiswechsel.
R: Das war mir nicht klar.
I: Das ist etwas, was ihr auch gerade erst, ich glaube am Freitag, oder am Mittwoch gemacht habt. Wir stellen unsere hier jetzt unsere Farben oder hier unsere Vektoren in anderen Koordinaten dar.

## B.6 Vektorraum, Teil 2: Frau Rolle (VR(2), Rolle)

I: Und zwar gucken wir uns Polynomräume an. Wir nehmen das ganz klein, den Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich eins und eine Abbildung in den $\mathbb{R}^2$.
(a) * $f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *
Das soll eine lineare Abbildung werden, und die soll zwei Bedingungen erfüllen, nämlich * $f(x+1) =$ * soll sein, habe ich mir aufgeschrieben - hast du es lieber als Zeilen oder lieber als Spalten?
R: Spalten.
I: (b) * $\begin{aligned} f(x+1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(2x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$ *
Die Frage ist: ist es möglich, dass das eine lineare Abbildung wird und falls es möglich ist, ist es eindeutig? Oder gibt es mehrere lineare Abbildungen, die diese Bedingungen erfüllen?
R: Hm. (7 Sek) Im Endeffekt, mein Polynom kann ja eigentlich nur sein $x$ plus eins oder $x$ plus $c$ eigentlich, ne?
I: Ja, oder Vielfache von $x$ geht auch noch.
R: Hätte ich etwas mit $ax$ plus $c$ und dann will ich. Muss mal eben kurz verdeutlichen, was linear ist. Im Endeffekt will ich zeigen, dass, wenn ich jetzt hätte
.* $f(x+1) = f(x) + f(1)$ *, oder?
I: Ja.
R: Das möchte ich zeigen, und dann möchte ich noch zeigen
.* $f(2x) = 2f(x)$ *, oder?
I: Ja.
R: Und das dann noch gleich (ergänzt zu:)
(c) * $\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) + f(1) &&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(2x) &= 2f(x) &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$ *
Und $x$ aber für mich ein Vektor, ja?
I: $x$ ist ein Polynom und insofern
R: Mein Problem ist jetzt: Wenn ich ein Polynom hab, wie kann ich dann auf null eins kommen?
I: Das ist so zu sagen eine Vorgabe, das soll das $f$ tun.
R: Ja, aber ich wechsle ja auf einmal von Polynomen zu Vektorraum im Endeffekt (zeigt in (b) auf die rechte Seite).
I: Das (zeigt in (a) auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) kann ich mir schon auch als Vektorraum vorstellen, insofern war deine Frage, ist $x$ ein Vektor, auch richtig, $x$ ist ein Vektor und ein Polynom. Ich kann die Elemente hiervon (zeigt in (a) auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) als Vektor bezeichnen, weil das ein Vektorraum ist, ich kann sie auch als Polynome bezeichnen, weil das ein Polynomring ist. Beide Namen sind zutreffend.
R: Wie stelle ich mir das dann vor, das $x$ (zeigt in (b) auf $x$?)(5 Sek)
I: Du kannst beide Vorstellungen

R: Nee, ich mein, also jetzt ganz konkret: Ich such jetzt irgend etwas, wo $x$ jetzt ist irgendwie z.B. eins null oder eins eins oder so was, so ne Darstellung wie hier (zeigt in (b) auf die rechten Seiten)

I: Du möchtest ne 2-Tupel Darstellung.

R: Weil ich sonst nicht verstehe, wie ich von einem normalen $x$ hierauf (zeigt auf (b)) kommen kann.

I: Im Grunde brauchst du da keinen Weg. Das, was ich hier geschrieben habe, könnte man auch so schreiben (ergänzt (a)):

(a') * $\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x+1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$ *

(Kommentar dazu:) Das Element $x$ plus eins von dieser Menge (zeigt in (a') auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ soll abgebildet werden auf das Element eins null von dieser Menge (zeigt in (a') auf $\mathbb{R}^2$).

R: Stört mich trotzdem.

I: Hilft dir aber auch nicht weiter.

R: Dass ich das so schreiben kann, war mir klar, weil das macht Herr Kreuzer in der Vorlesung auch immer so. Aber ich verstehe nicht, weil $x$ ist für mich irgend ne konkrete Zahl, die ich hier einsetzen kann, hundert oder ne Million oder so etwas, und dann hätte ich hier z.B. hundert plus eins oder so und dann soll das abgebildet werden auf eins null, das ist mein Problem.

I: Also das $x$, das bleibt ne Unbestimmte, das ist nur ein Zeichen, ich hätte jetzt auch statt $x$ ein Dreieck schreiben können. Es ist irgendein Symbol, das steht jetzt nicht für Zahlen hier.

R: Ja, für was steht es denn dann? Weil ich muss ja (...) also ich muss irgendwie hier jetzt auf diese 2-Tupel kommen. Und so lange wie ich hier vorne (zeigt in (a') auf die linke Spalte) keinen hab, verstehe ich nicht, nein, verstehe ist auch falsch. Aber so was suche ich z.B.. Also bei z.B. bei den Restklassen hatten wir ja immer irgendwie. Das hatten wir ja auch mal gesagt

(d) * $\begin{array}{ccc} \triangle & \longmapsto & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\ \diamond & \longmapsto & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array}$ *

Damit könnte ich schon relativ viel eigentlich machen.

I: Hm.

R: Oder wenn ich jetzt z.B. sagen würde, Stern ist irgendwie das Neutrale und das wird immer abgebildet auf null null, könnte ich damit auch schon relativ viel machen. (ergänzt zu:)

(d') * $\begin{array}{ccc} \star & \longmapsto & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \triangle & \longmapsto & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\ \diamond & \longmapsto & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \vdots & & \end{array}$ *

Und das Ganze geht dann immer so weiter, weil hiermit könnte ich schon irgendwie arbeiten, finde ich.

I: Im Grunde ist das, glaube ich, nichts anderes, als was du da sagst (..). Vielleicht ist es, eh, was würde dir helfen, wenn wir statt $x$ plus eins vielleicht etwas anderes hier (zeigt auf (a') stehen hätten. Wenn du das (zeigt auf (b)) erst mal vergisst und du überhaupt eine lineare Abbildung zwischen dem Raum und dem angibst (zeigt in (a') auf die erste Zeile), könntest du das? Die können wir ja mal $g$ nennen, damit wir da nicht durch einander kommen. Überhaupt eine lineare Abbildung zwischen den beiden Räumen.

(e) * $g : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *

R: Mich stört das $x$ eigentlich. Jetzt hatten wir letztes Mal immer solche komischen Symbole. Wenn ich jetzt sagen würde, ich nehme irgendwas anderes und dann sage ich, also z.B. wenn ich das jetzt hier Stern nenne und das Dreieck, oder so, (ergänzt (b) zu:)

(b') * $$\begin{array}{rcll} f(x+1) & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \star \\ f(2x) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} & \triangle \end{array}$$ *

dann hätte ich da

(e') * $$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \star & \longmapsto & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \\ \triangle & \longmapsto & \begin{array}{c} 0 \\ 4 \end{array} \end{array}$$ *

Und jetzt würde ich gucken, ob das wirklich funktioniert. Dann hätte ich ja $f$ von Stern

.* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(\star)$ *

Ja, jetzt gehe ich im Endeffekt davon aus, dass die Eins auf eins abgebildet wird, weil das hatten wir ja gesagt, oder?

I: Ehm, muss im Vektorraum nicht sein, aber du kannst ja mal, nimm's mal an.

R: Ja, kann man das? Ja, o.k. Dann würde ich jetzt sagen, dass $f$ von (ergänzt * $= f$ * (in der letzten Gleichung) Jetzt kann ich Stern ja nicht mehr schreiben, dass ich dann sage, (wischt die Ergänzung wieder weg). Moment (5 Sek), hier fehlt mir noch ein Zwischenschritt, ne? Ich kann das jetzt nicht sofort hinschreiben, oder?

I: Ich bin noch nicht sicher, was du willst. Also Stern soll jetzt für $x$ plus eins stehen?

(Gleichzeitig:

- R: Ja.

- I: Oder für das null eins)

R: das ist doof, ich kann ja für, ich muss Stern ja irgendwie jetzt gleich aus einander ziehen, aber das kann ich ja im Augenblick nicht, wenn ich nur Stern schreibe.

I: Also wär das mit dem $x$ plus eins doch einfacher, weil du das $x$ plus eins aus einander ziehen könntest.

R: Ja, irgendwie schon. Aber das mit dem $x$ stört mich, weil $x$ immer was Konkretes ist. (wischt (e') wieder weg)

I: Wäre das ne Hilfe, wenn wir das, wenn ich geschrieben hätte, was mit dem oder vielleicht sag ich es mal anders, du hast ja eben gsagt, die Elemente hiervon (zeigt in (a') auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) haben die Darstellung $ax$ plus $c$.

R: Ja.

I: (f) * $ax + c \longmapsto$ *

Und wenn wir davon ein Bild haben, könnten wir jetzt da was angeben?

R: Was wir hier sowieso haben (ergänzt (f) zu:)

(f) * $ax + c \longmapsto \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ *

I: Egal, was $a$ und $c$ ist? Also für jedes $a$ und $c$ auf eins null?

R: Ach ja, nee Quatsch, dann lieber auf $d$, weiß ich nicht, $d$ null oder so. (korrigiert zu:)

(f) * $ax + c \longmapsto \begin{matrix} d \\ 0 \end{matrix}$ *

I: Hat $d$ mit $a$ und $c$ zu tun? Oder ist das irgend eine beliebige Zahl?

R: Nee, hat was damit zu tun, weil je nach dem, was ich jetzt hier (zeigt in (f) auf $c$) nehme, kommt in Abhängigkeit davon kommt ja $d$ raus (zeigt auf (f)). Wenn ich jetzt z.B. sage, wenn ich erst habe $x$ plus eins, das wird auf eins null abgebildet (zeigt auf (a)), könnte ich ja z.B. sagen, wenn ich jetzt zwei $x$ plus zwei habe, wird auf zwei null abgebildet.

I: Müsste ich das sogar?

R: Ja, müsste ich.

I: Aha. D.h. wenn ich diese Informationen habe (zeigt in (a') auf die zweite Zeile), habe ich automatisch auch diese. (ergänzt (a') zu:)

(a") * $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x+1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2x+2 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$ *

R: Ja, das heißt das für mich.

I: Ja, ist richtig. Das ist ja genau eine von den Linearitätseigenschaften, dass ein Vielfaches von dem (zeigt in (a")) auf $x + 1$ auf dasselbe Vielfache von dem (zeigt in (a") auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) abgebildet wird. D.h. statt hier $ax$ plus $c$ direkt anzugeben, was wäre einfacher um zu wissen, was $ax$ plus $c$ sein muss, welche beiden Informationen würden reichen?

R: $ax$ plus $a$ oder so, wäre vielleicht einfacher gewesen.

I: Ja, das wären schon mal einige. Wenn wir $x$ und eins kennen, würde das reichen? Die Bilder von $x$ und von eins?

R: Ja, würd mir jetzt helfen, aber ich weiß ja nicht, auf was sie abbilden.

I: Nehmen wir hier, das ist irgendeine andere Abbildung, $g$. Sagen wir mal, $x$ soll abgebildet werden auf zwei sieben und eins auf eins eins.

(f') * $\begin{array}{rcc} ax+c & \longmapsto & \begin{matrix} d \\ 0 \end{matrix} \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \\ 1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$ *

Wüsste ich damit automatisch, was das (zeigt in (f') auf die erste Zeile) sein muss, wenn $g$ linear ist?

R: Sagen wir, wenn das (zeigt in (f') auf $c$) $a$ ist?

I: Nee, wenn das $c$ ist. (...) oder wir können das ja erstmal weglassen (wischt in (f') das $c$ aus): Wüsste ich das von $ax$?
R: Ja, das wüsste ich.
I: Ja nämlich?
R: Dann hätte ich zwei $a$ und sieben $a$. (ergänzt in (f'))
I: Und wüsste ich, wenn ich das $c$, das wir hier eben hatten, wenn ich das einzeln nehme, wüsste ich das?

$$\text{(f') } * \quad \begin{array}{rcl} ax & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2a \\ 7a \end{pmatrix} \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \\ 1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ c & \longmapsto & \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} \end{array} \quad *$$

R: Wie, wenn ich jetzt sage, das bildet auf zwei eins ab oder so.
I: Kann ich das machen?
R: Ja, kann ich.
I: Das $c$ ist $c$ mal eins. Wenn ich die Eins schon habe,
R: O.k., dann geht es nicht. Dann muss ich zwei zwei oder irgendwie so was haben
I: zwei zwei?
R: O.k. im Endeffekt $c$ $c$, aber
I: Wenn das $c$ zwei ist, ist es zwei zwei. (ergänzt:)

$$\text{(f') } * \quad \begin{array}{rcl} ax & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2a \\ 7a \end{pmatrix} \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \\ 1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ c & \longmapsto & \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \end{array} \quad *$$

Wenn ich weiß, wohin $c$ abgebildet wird, und weiß, wohin $ax$ abgebildet wird, weiß ich das (ergänzt $ax + c$) dann auch?
R: Dann hätte ich zwei $a$ plus $c$ und sieben $a$ plus $c$.
I: Genau.

$$\text{(f") } * \quad \begin{array}{rcl} ax & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2a \\ 7a \end{pmatrix} \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \\ 1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ c & \longmapsto & \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \\ ax + c & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2a + c \\ 7a + c \end{pmatrix} \end{array} \quad *$$

R: Das ist das, was mich stört, weil hier (zeigt in (a") auf die linke Seite) habe ich keine Informationen über die einzelnen Sachen. Weil ich weiß ja nur, dass das (zeigt in (a") links) komplett auf eins null (zeigt in (a") rechts) abgebildet wird. Das ist das, was mich stört.

I: Das war genau meine Frage, ob das das ist, was dich stört. Hier ist es klar, ne?

R: Ja.

I: Warum ist es hier (zeigt auf (f”)) klar, wenn ich die beiden kenne (zeigt auf $x$ und 1), dass ich alle kenne?

R: Weil $c$ ist ja meine konkrete Zahl, die hier am Ende jetzt steht, ja $c$ $c$ ist einfach jetzt nur das Vielfache, (zeigt in (f”)) und wenn ich $x$ auch habe, ist das auch für mich klar, weil dann habe ich hier zwei Informationen. Aber hier (zeigt auf (a”)) habe ich im Endeffekt zwei Informationen in einer.

I: Also ich kann das hier darstellen als Summe von Vielfachen von den beiden (zeigt in (f”) auf $x$ und 1). D.h. wenn ich jetzt was Entsprechendes machen möchte und habe die Informationen von $x$ plus eins und zwei $x$ (zeigt in (b)), wohin die abgebildet werden,

R: Ach so, jetzt bin ich weiter. Weil wenn ich jetzt sage, dass zwei $x$ auf null vier abbildet, dann muss $x$ auf null zwei abbilden. Dann kann ich jetzt weiterarbeiten.

I: Ja.

R: O.k., ich bin weitergekommen. Dann muss

.* $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = f(2x) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *

Macht man das so als Zwischenschritt? Weil normalerweise würde ich es sofort hinschreiben.

I: Kannst du so machen. Ich weiß noch nicht, wie es weiter geht.

R: * $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = f(2x) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2(f(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ *

Dann hätte ich hier (zeigt den Anfang und das Ende der Gleichungskette) jetzt gezeigt, dass es linear ist, also für die Multiplikation. Aber ich weiß nicht, ob ich den Zwischenschritt (zeigt auf $2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$) machen muss.

I: Gezeigt hast du es noch nicht, du hast es jetzt eigentlich vorausgesetzt. Du weißt ja noch nicht, was $f$ von $x$ ist, oder?

R: Nee, stimmt, ich habe es vorausgesetzt.

I: Wir haben bisher ja nur die Bilder von $x$ plus eins und von zwei $x$ gegeben, und wenn du sagst, es ist ja gesagt, das $f$ soll linear sein. Wenn es linear ist, dann kannst du jetzt schlussfolgern: Was muss denn $f$ von $x$ sein?

R: $f$ von $x$ muss null zw, muss auf null zwei abbilden.

I: Etwas anderes geht nicht, wenn es linear ist. Gut, also kannst du zu deiner Liste dazuschreiben, das hast du ja schon rausgefunden, kannst du ja mit benutzen.

R: (ergänzt (a”) zu:)

(a”) * $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x+1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2x+2 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$ *

I: Was wir hier unten (zeigt in (f”) auf 1 und $x$) hatten, wenn wir die beiden kennen, kennen wir alle, das $x$ kennen wir ja jetzt, was mit dem $x$ passiert (zeigt auf (a”)).

R: Also eigentlich hast du ja recht, ich hab das ja jetzt ausgenutzt, dass es linear ist, also wär das für mich jetzt kein Beweis.

I: Meine Frage war ja erstmal: Gibt es eine lineare Abbildung, die die (gleichzeitig:
- I: Bedingung erfüllt, und ist sie eindeutig?
- R: und wenn, ist sie eindeutig.)

R: Also kann es sein, dass ich das erst ausnutze, und wenn ich dann sehe automatisch, dass es nur linear ist, wenn ich null zwei habe, (...) als $x$.

I: Ja, genau, die Bedingung habe ich schon mal. Jetzt bin ich noch nicht sicher, ob es wirklich linear ist, ob es in allen, beliebige Summen, auf die entsprechenden Summen abgebildet werden.

R: Die Multiplikation habe ich quasi für mich jetzt abgehakt, ja? Dadurch bin ich ja auf mein $x$ gekommen.

(gleichzeitig:
- I: Ja, Multiplikation mit dem zwei $x$.
- R: Wenn ich das so jetzt voraussetze,)

R: dass es für null zwei ist, muss es ja für sechs $x$ sein, oder egal.

I: Aber ob es auch für sechs mal drei $x$ plus sieben ist, weißt du noch nicht.

R: Würde ich das auch zeigen? Würde ich nicht machen, eigentlich.

I: Das kann man natürlich nicht für alle einzeln zeigen. Weil das sind ja unendlich viele.

R: Sonst haben wir ja immer die Bedingung, dass wir wirklich sagen, also anstatt zwei würde ja jetzt hier z.B. (schreibt in (c) $a$ über die 2 von $f(2x)$) stehen $a$ oder so, und dann ziehen wir das $a$ raus, und das wärs dann. $a$ ist für mich ja immer irgendeine konstante Zahl. Hier oben (zeigt in (c) auf $f(x+1)$) ist das für mich immer irgend ne Summe, und deshalb würde ich gar nicht zeigen, ob es n Vielfaches von ner Summe (R sagt noch ein Wort, das 'geht', 'gibt' oder 'gilt' sein könnte.)

I: Ich muss zeigen, dass ein beliebiges Element von der Menge, irgend ein $\varphi$ in $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und $\psi$ auch, ich nehme jetzt extra ganz andere Namen. Dass dann gilt:

.* $\begin{array}{ll} \psi, \varphi \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x], & f(a\varphi) = af(\varphi) \\ & f(\psi + \varphi) = f(\psi) + f(\varphi) \end{array}$ *

R: Das meine ich jetzt nicht. Ich zeige ja nie, dass gilt * $f(a(\psi + \varphi))$ *. Das zeige ich ja nie. Weißt du, was ich meinte?

I: Wobei das $\varphi$ plus $\psi$ irgendein Element, dem kann ich ja einen anderen Namen geben, $\alpha$, ein Element aus dieser Menge (zeigt auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) ist, und für das $\alpha$ muss das auch gelten, dass ich das $a$ rausziehen kann.

R: Aber das mache ich nie, so haben wir das noch nie bewiesen.

I: Doch, wir haben das allgemein: Also du würdest z.B.

.* $\begin{array}{lll} \psi & = & ax + b \\ \varphi & = & cx + d \end{array}$ *

ganz allgemein, damit sind beide beliebige Elemente aus dieser Menge (zeigt in (a") auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) und dann zeige ich das für diese Elemente, dass die Summen, das plus das (zeigt auf $\begin{array}{lll} \psi & = & ax + b \\ \varphi & = & cx + d \end{array}$), dass ich das aus einander ziehen kann, oder dass ein Vielfaches von so nen Element (zeigt auf $\psi = ax + b$), dass ich das da rausziehen kann. Dann mache ich es wirklich ganz allgemein.

R: Das mache ich aber nie in einem Schritt.

I: Ja, das mache ich nicht in einem Schritt.

R: Kann ich das jetzt wieder so machen, dass ich sage, es kann nur linear sein, wenn?

I: Ja, genau. Du kannst sagen, falls es ne lineare Abbildung gibt, dann suchst du erstmal alle möglichen Bedingungen, Eigenschaften. Und dann, wenn du das hast, dann kannst du gucken.

R: Ich muss mir jetzt ein paar Zwischenschritte machen.

.* $$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = & f(x+1) = f(x) + f(1) & \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} & \end{array}$$ *

Damit ich auf eins null komme, müsste ich haben eins und minus zwei. (ergänzt zu:)

.* $$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = & f(x+1) = f(x) + f(1) & \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} & \end{array}$$ *

Also könnte ich jetzt sagen, also ich müsste es anders aufschreiben, aber ich könnte sagen, nur wenn eins abgebildet wird auf eins minus zwei, dann kann es linear sein, und dann ist es eindeutig.

I: Genau. Also hast du jetzt hier (zeigt auf (a”)) die Eins gefunden.

R: (ergänzt (a”) zu:)

(a”’) * $$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x+1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2x+2 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$ *

I: Wenn es ne lineare Abbildung ist, dann weißt du, die Sachen, die du da stehen hast.

R: O.k., sonst wär es nicht linear.

I: Jetzt ist die Frage, wenn ich das (zeigt in (a”’) auf die Zeilen mit $x$ und 1) als Bedingung stellen würde, gibt das eine lineare Abbildung?

R: * $f(x+1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} +$ *

Schreibt man da eigentlich immer noch $f$ vor?

I: Nein, du bist ja jetzt schon in der Bildmenge.

R: (g) * $f(x+1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f($ *

Muss mal eben kurz nachdenken. Den Schritt lass ich mal weg (wischt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wieder weg).

$f(x+1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = f(x) + f(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *

Aber ich weiß nicht, darf ich das so schreiben?

I: Du hast ja den Teil hier (zeigt auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ) zweimal stehen.

R: Ja, weil das hier sehe ich noch komplett an (setzt Klammern:)
$f(x+1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = f(x) + f(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} *$

I: Als Bild von dem Ganzen, sozusagen?

R: Ja. Ich hab es nur so geschrieben, damit ich jetzt hier (zeigt auf den Term hinter den neu gesetzten Klammern) sehe, dass das $f(x) + f(1)$ ist.

I: Ah, also eigentlich als das, was hier (zeigt in (a"') auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) steht, als eins null? Eins null ist ja das Gleiche wie das.

R: (g') $* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(x+1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = f(x) + f(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} *$

I: Eigentlich wäre es geschickter, wenn du sagst $f$ von $x$ plus eins gleich eins null, das weißt du, weil es da (zeigt auf (a"')) steht, eins null ist dasselbe wie diese Summe (zeigt auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$)

R: Also das austauschen (ergänzt in (g') einen Pfeil zum Vertauschen der ersten beiden Terme).

I: Das kannst du ausrechnen ist gleich $f$ von $x$ plus $f$ von eins. Dann hast du am Anfang das stehen (zeigt in (g') auf $f(x+1)$) und am Ende das (zeigt in (g') auf $f(x) + f(1)$), und dann weißt du, dass das gleich dem ist.

R: Also könnte ich das wieder wegtun (streicht die beiden letzten Terme von (g') durch).

I: Du hast das jetzt nur für diese Summe gezeigt, an sich müsste man das für so ne Summe $\psi$ plus $\varphi$ zeigen, also für son Ausdruck plus so einen. (zeigt auf $\begin{aligned} \psi &= ax + b \\ \varphi &= cx + d \end{aligned}$)

R: Das könnte ich mir ja jetzt definieren, oder? Dass ich das (zeigt auf (g')) mit $\varphi$, $\psi$ mache.

I: Genau.(5 Sek). Und es läuft auf dasselbe raus. Ich setzte das hier. Nee, ich weiß ja die Bilder noch nicht.

R: Aber ich weiß, dass z.B. $b$ und $d$ kann nur ein Vielfaches von eins sein. (ergänzt über (a"') zunächst):
$b, d \longmapsto *$
Ich kann ja nur $b$ oder $d$

I: Nimmst halt nur eins.

R: (wischt $d$ wieder weg und ergänzt (a"') zu:)

(a°) *
$$\begin{array}{ccc} b & \longmapsto & \begin{pmatrix} b \\ -2b \end{pmatrix} \\ ax & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \end{pmatrix} \\ f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x+1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2x+2 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 1 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$
*

R: Dann könnte ich damit genauso arbeiten.

I: Genau, aus den beiden Anfangsinformationen (zeigt auf (b')) kriege ich, falls $f$ linear ist, muss alles das gelten und dann habe ich alle Bilder und kann sehen es passt, es ist ne lineare Abbildung. Wir haben ja auch gesagt, lineare Abbildungen, es genügt, wenn ich eine Basis (zeigt in (a°) auf 1 und $x$) habe und weiß, was die Abbildung mit der Basis tut.

R: Weiß ich nicht so, ob wir das gesagt haben.

I: Denn daraus kann ich genau, wie du das hier (zeigt auf (a°)) gemacht hast, auf alle anderen Bilder schließen, weil die Basis ja den gesamten Raum erzeugt. Wenn wir hier die Bilder haben null zwei und eins minus zwei, wenn ich das als Matrix schreibe,

(h) * $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ *

dann sagt mir diese Matrix, wie ich alle Bilder ausrechne.

R: Ja? (6 Sek) Das sehe ich nicht.

I: Wenn ich das malnehme mit irgendeinem

R: Ach so, jetzt habe ich es verstanden.

I: Ja nämlich?

R: Ja. Wenn ich jetzt sage, das ist meine Grundfarbe (zeigt in (h) auf die Matrix), von der aus ich meinen kompletten Raum erzeuge, würde ich ja sagen, dass ich irgendwie eine Linearkombination mal einen anderen Vektor. Dann komme ich immer weiter, aber man bleibt eigentlich immer im selben Raum.

I: Z.B. mal Vektor sieben fünf, dann kann ich ausrechnen.

(h') * $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *

Was bedeuten jetzt diese beiden Vektoren? Wofür steht sieben fünf, wofür steht fünf zwei?

R: (zeigt in (h') auf $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$) Sieben fünf ist das Vielfache, was ich jetzt auf diese Basis (zeigt in (h') auf die Matrix) anwende, sag ich mal, dann komme ich dahin (zeigt auf $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$), also in den Vektor.

I: Genau, ich müsste jetzt sagen, welcher Vektor, der irgendwas mit sieben fünf zu tun hat von hier (zeigt in (a°) auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$) auf fünf zwei (zeigt in (a°) auf $\mathbb{R}^2$) abgebildet wird.

R: Habe ich noch nicht verstanden.

I: Ich wende die Matrix an auf das (zeigt in (h') auf $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$) und kriege das (zeigt in (h') auf $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$) raus. D.h. dieses sieben fünf wird abgebildet auf fünf zwei. (ergänzt (h') zu:)

(h") * $\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$ *

bei dem, was hier oben (zeigt auf $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$) steht. Das soll ja was mit dem (zeigt auf (a°)) zu tun haben. Hat ja auch damit zu tun, ich hab ja die Matrix aus den beiden (zeigt in (a°) auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$) zusammengestellt. Die Frage ist bloß, was wird denn auf fünf zwei abgebildet von den Elementen hier (zeigt in (a°) auf $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ )?

R: (leise:) D.h. das muss ich jetzt wieder umändern.

I: Also was, welches Polynom, also $ax$ plus $b$, entspricht dem, was wir da jetzt sieben fünf nennen? (10 Sek)

R: Ich muss mal laut denken, (leise:) wenn ich jetzt sieben mal $x$ nehme plus fünf auf was komme ich denn dann? Dann hätte ich sieben mal $ax$, wär null wär zwei mal sieben sind vierzehn und dann hätte ich noch (5 Sek) sieben hätte ich $b$ das wären fünf und dann hätte ich minus zwei das wären minus zehn .* $\begin{matrix} 0 & 5 \\ 14 & -10 \end{matrix}$ *

I: Was hast du da gerechnet?

R: Ich hab mir überlegt, sieben wär $a$ und $b$ wär fünf

I: Ja, also sieben $x$ plus fünf. $x$ geht auf null zwei.

R: Ja, aber ich komm da im Moment noch nicht hin. Ich komm nur auf . * $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ * muss noch nicht richtig sein.

I: Ich überlege, ob ich mich da verrechnet habe. Ja, das Problem ist, dass ich mich verrechnet habe. (korrigiert (h') zu:)

(h"') * $\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$ *

R: O.k., dann ist das so. Sieben wär dann für $a$ und fünf ist $b$ (zeigt in die beiden oberen Zeilen von (a°)).

I: Das hier ist das Bild von $x$ und das ist das Bild von eins. (zeigt in (h"') erst auf die erste, dann auf die zweite Spalte der Matrix; ergänzt zu:)

(h°) * $$\begin{array}{c} \begin{matrix} f(x) & f(1) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad * \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ich hab $x$ eins als Basis.

R: Das ist dann mein Bild von $f$ von $x$ plus eins. Also das (zeigt in (h°) auf $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ in der unteren Zeile) ist mein komplettes Bild von der Summe von $f$ von $x$ plus eins? Kann man das sagen? (ergänzt (h°) zu:)

(h°°) * $$\begin{array}{c} \begin{matrix} f(x) & f(1) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad * \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \longmapsto \underset{f(x+1)}{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

I: Wobei ich jetzt von sieben mal $x$ plus fünf mal eins, $f$ von sieben mal $x$ plus fünf mal eins. (korrigiert den untersten Eintrag in (h°°))

R: O.k., habe ich verstanden.

I: Wenn ich die andersrum geschrieben hätte (zeigt in (h°°) auf die Spalten der Matrix), eins minus zwei, null zwei

R: Obwohl man sagt ja, ja Zeile mal Spalte, dann wär ja $x$ so (zeigt in (h°°) die erste Zeile) und eins so (zeigt in (h°°) die zweite Zeile). Ich musste es erst nochmal ausprobieren, jetzt sehe ich es. Ich rechne ich ja $x$ mal sieben

I: Null mal sieben, den Teil von $x$ (zeigt in (h°°) auf 0 in der Matrix) mal sieben plus der Teil (zeigt in (h°°) auf 1 in der Matrix) von eins mal fünf und hier wieder: den Teil von $x$ mal sieben den von eins mal fünf. Wenn ich das andersrum aufgeschrieben hätte, wäre sieben fünf fünf $x$ plus sieben, würde dem entsprechen.

R: Das habe ich verstanden, jetzt.

# Anhang C

# Transkripte der Dualrauminterviews

## C.1 Dualraum: Herr Sendig (DR, Sendig)

I: Wir nehmen einen Vektorraum V, das soll der $R$ hoch drei sein, und den schreiben wir als

(a) * $V = \mathbb{R}^3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ *

wie wir das auch eigentlich immer machen. Und dann gucken wir uns an den Vektorraum $V^*$, den Dualraum. Das soll die Menge sein

(b) * $V^* = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi$ lineare Abbildung $\}$ *

Das soll die Menge sein, die haben wir Dualraum genannt.

S: Hm. Das ist z.B. was Neues, aber o.k..

I: Der Name jetzt?

S: Ja, auch die Definition. Also ich hab z.B. nie ne Vorstellung gehabt, was Dualraum ist.

I: Ja, ja gut. Also der Name ist auch jetzt gar nicht so wichtig, das heißt halt Dualraum. Wichtig ist jetzt hier (zeigt auf (b)) diese Definition. Das soll die Menge der linearen Abbildungen sein, die vom $R$ hoch drei in den R abbilden. Kannst du mal eine angeben? Ein Element aus der Menge, dass das ein bißchen konkreter wird. Was könnte so eine lineare Abbildung z.B. sein?

S: Wenn ich jetzt z.B. die Norm von nem Vektor nehme, ist das eigentlich auch so was?

I: Ehm, ja.

S: Ich muss jetzt nem Vektor ne Zahl zuordnen.

I: Ja. Ist die Norm linear? (10 Sek). Können wir ja mal überprüfen, ob die linear ist. Wie ist die denn definiert?

S: Ja, ehm, die Wurzel aus dem Skalarprodukt, der Einträge.

I: * $x \longmapsto \sqrt{< x, x >}$ *

Was müssen wir überprüfen, wenn wir wissen wollen, ob das ne lineare Abbildung ist?

S: Ja, ob die, ehm, muss jetzt eigentlich irgend ne Zahl nehmen, (?), und dann gucken ob das bzgl. plus und mal, ob das egal ist, ob ich jetzt vorher addiere und

dann abbilde,
I: Ja.
(gleichzeitig:
. I: Also, machen wir mal
. S: ob das verträglich ist mit plus und mal.)
S: Ja, v eins v zwei, oder?
I: Sollen das jetzt Koordinaten sein oder Vektoren?
S: Vektoren.
I: Vektoren, gut.
S: v eins dann halt mit x eins x zwei x drei, v zwei dann
I: * $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ *
So, wollen wir die Summe bilden, und wir wissen, auf was die Summe abgebildet wird.
S: Ja, das Skalarprodukt, die Wurzel von x eins plus y eins mal x zwei plus y zwei
I: (c) * $v_1 + v_2 \longmapsto \sqrt{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}$ *
So?
S: Muss noch mal überlegen. (4 Sek) Ja, das ist so, ne? (3 Sek)
I: Ehm,
S: Na ja, x eins mal y eins plus
I: Nee, hier ist ja ein Plus (zeigt in (c) auf das erste +) Der Vektor v eins plus v zwei, die erste Koordinate ist x eins plus y eins. Du brauchst ja die (?).
S: Wird quadriert, oder?
I: Ja, genau. (ergänzt (c) zu:)
.* $v_1 + v_2 \longmapsto \sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2}$ *
Ja, ist das ne lineare Abbildung? (3 Sek.) Was müsste rauskommen, wenn das linear wäre?
S: Das Skalarprodukt von, muss ich mal überlegen, also die Wurzel von dem Skalarprodukt von v eins v eins plus die Wurzel von
I: (ergänzt (c) zu:)
.* $v_1 + v_2 \mapsto \sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2} \stackrel{?}{=} \sqrt{< v_1, v_1 >} + \sqrt{< v_2, v_2 >}$ *
Kann das sein, dass das das Gleiche ist? (5 Sek) Schreiben wir mal die hier (zeigt in (c) auf die beiden letzten Wurzeln) ausführlicher hin, dann sieht man es besser. Wenn wir die in Koordinaten schreiben, was ist das Skalarprodukt hier? v eins, v eins?
S: x eins zum Quadrat, also die Summe von den allen zum Quadrat.
I:
.* $v_1 + v_2 \longmapsto \sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2} \stackrel{?}{=} \sqrt{< v_1, v_1 >} + \sqrt{< v_2, v_2 >}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ *
S: Ich würd jetzt mal spontan sagen, dass das nicht sein kann.
I: Ja.
S: Allerdings die ganzen (?)
I: Ja, genau. Das ist hier so aus einander gezogen. Aber es sieht nicht danach aus, dass das linear ist.
S: Hm.
I: Jetzt könnte man ganz leicht n Gegenbeispiel aus, aus (?) finden. (5 Sek)

S: Irgendwas mit Standardvektoren, oder so.
I: Z.B. wenn wir für v eins eins null null nehmen und für v zwei null eins null, wär das n Gegenbeispiel? (9 Sek)
S: Ich glaub nicht, oder?
I: Probier doch mal aus eins null null für x und null eins null für y. Dann hätten wir hier stehen (zeigt in (c) auf den ersten Summanden in der ersten Wurzel)?
S: Eins.
I: Ist eins. (zeigt in (c) auf den nächsten Summanden)
S: Auch eins.
I: Also ist zusammen zwei. (zeigt in (c) auf den nächsten Summanden)
S: Null.
I: Genau, also Wurzel aus zwei. Und da? (zeigt in (c) auf die rechte Seite) (4 Sek)
S: Da hätt man zwei insgesamt, oder?
I: Ja, genau. Also, ist keine lineare Abbildung, brauchen wir was anderes. (wischt (c) wieder weg). Mal ne andere Frage, warum können wir überhaupt von linearer Abbildung sprechen? Hier steht, $\varphi$ (zeigt auf (b)) soll lineare Abbildung sein. Den Ausdruck kennen wir, zwischen was kann es lineare Abbildungen geben? (3 Sek)
S: Zwischen Vektorräumen?
I: Genau. Ist das der Fall hier? (3 Sek)
S: Ja, warum nicht?
I: Das R, ist das ein Vektorraum?
S: Ach so. (9 Sek). Ist $R$ ein Vektorraum? Keine Ahnung.
I: Wenn es einer ist, welche Dimension hat er denn dann?
S: Eins.
I: Also ist es einer?
S: Ich meine schon.
I: Ja, ne? Ein besonders einfacher. Tritt gleichzeitig als der Körper auf. Spielt zwei Rollen, ne, das R?
S: Hm.
I: Wie könnte man, wie kann man ne lineare Abbildung im Allgemeinen angeben? Das können wir doch hier auch so machen.
S: Mit Matrizen?
I: Ja, wär ne Möglichkeit. (5 Sek) Zumal beim K hoch n geht das gut. $R$ hoch n haben wir ja hier. (5 Sek). Wie würde denn dann ne Matrix aussehen, die, du sollst ja eine Abbildung erst mal nur angeben, wie würde die Matrix dazu aussehen?
S: Müsste invertierbar sein, oder?
I: Eh, warum?
S: Ist das nicht so, dass wenn man n Homomorphismus hat, dass die Matrix invertierbar ist?
I: Nee, das muss nicht sein. Das ist ein Spezialfall, das sind die besonders einfachen, die invertierbaren.
S: Hm, dann müsste das nicht sein. (4 Sek)
I: Oder wenn du nicht ne Matrix angeben kannst, warum kann man denn normalerweise mit Matrizen lineare Abbildungen darstellen? (6 Sek)
S: Verstehe ich nicht, warum sollte man das nicht können?
I: Hier sind ja ziemlich viele Elemente drin, in dem $R$ hoch drei. Eine Matrix hat nur wenige Einträge. Wieso gibt eine Matrix die Informationen über ne gesamte lineare

Abbildung?

S: Ne Matrix ist ja immer so groß, also z.B. drei kreuz drei Matrix, dass wir alle Elemente erfassen können bzgl. bestimmten Basisvektoren.

I: Genau, wenn wir die Basisvektoren haben, die Bilder von Basisvektoren, dann haben wir die ganze Abbildung. Also du könntest entweder jetzt ne Matrix angeben, oder du gibst die Bilder von Basisvektoren an.

S: Im Prinzip das Gleiche.

I: Ist im Prinzip das Gleiche, ja. (5 Sek)

S: Also ich müsste jetzt quasi dem Basisvektor eins null null den (?) zuordnen.

I: Ach so, hm.

(d) * $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \longmapsto$ *

S. Irgendwie, was kann ich jetzt falsch machen, dass es nicht linear wird?

I: Ja, kannst du was falsch machen?

S: Weiß ich nicht. Mal überlegen. (10 Sek) Man könnte dem jetzt erst mal die Eins zuordnen, oder so.

I: Das können wir machen. (ergänzt in (d) * 1 *)

S: So und dann

I: (d) * $\begin{array}{ccc}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \longmapsto & 1 \\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & \longmapsto & \end{array}$ *

(6 Sek)

S: Bin mir jetzt nicht so ganz sicher, ob das funktioniert.

I: Probiers doch aus. Was könntest du dem zuordnen? (3 Sek)

S: Ja eigentlich soll man jetzt ne andere Sorte von Zahlen haben, weil wenn ich die beiden jetzt addiere, dann habe ich ja zwei unterschiedliche

I: Die beiden meinst du, ne?

(e) * $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ *

S: Ja, zwei verschiedene Komponenten. Wenn ich jetzt dem ne Zwei zuordne,

I: Diesem (zeigt in (d) auf den zweiten Spaltenvektor) hier?

S: Ja, das würde ja nicht gehen. (I notiert 2 hinter dem zweiten Zuordnungspfeil in (d))

I: Warum würde es nicht gehen?

S: Ja, weil die ersten, weiß ich nicht, die sind linear unabhängig, im Prinzip,

I: ja, die beiden sind linear unabhängig (zeigt in (d) auf die beiden Spaltenvektoren)

S: die lassen sich nicht aus einander kombinieren, aber ich kann die Eins ja zweimal addieren und krieg die Zwei.

I: Hm. Ist die Frage, ob das ein Problem ist, gel? Also hier (zeigt in (d) auf die Bilder) die Summe von eins und eins ist das, aber die Summe von dem (zeigt in (d) auf die Urbilder) ist nicht das. Ist das ein Problem? (10 Sek) Du bildest immer erst hier (zeigt in (d) auf die Urbilder) die Summen und musst sicherstellen, dass das abgebildet wird auf die Summe von den entsprechenden Elementen hier (zeigt in (d) auf die Bilder). Nicht umgekehrt. Die Zuordnung geht ja immer nur in einer Richtung (zeigt in (d) auf einen Zuordnungspfeil).

S: Hm.

I: Und was würde mit dem passieren, wenn wir diese Summe bilden (zeigt auf (e))?

S: Müsste dann auf drei abgebildet werden.

(I ergänzt (e) zu:)

.* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto 3$ *

S: Das würde heißen, dass ich jetzt für das Bild des dritten Basisvektors z.B. nicht die Drei wählen dürfte.

I: Eh, warum nicht?

S: Weil das nicht mehr linear wäre, weil das Bild nicht eindeutig ist.

I: Probieren wir mal aus, wenn wir die Drei wählen. (ergänzt (d) entsprechend) (7 Sek) Gibt's n Problem mit Summen. Also du sagst das Problem ist?

S: Das Problem ist, dass ich die Drei zwei verschiedenen Vektoren zuordne, nämlich einmal dem Vektor eins eins null und dem Vektor null null eins. Und dann ist das Ganze nicht mehr linear, oder?

I: Nee, das stört uns nicht. In der Richtung (zeigt in (d) auf einen Zuordnungspfeil) stört uns das nicht. Wenn wir hier (zeigt in (d) auf den dritten Spaltenvektor) einen Vektor hätten, der zwei Bilder bekommt, das ginge nicht.

S: Hm.

I: Aber hier dürfen durchaus mehrere, verschiedene Vektoren dasselbe Bild bekommen. Das ist erlaubt. (4 Sek) Das hat ne Konsequenz, z.B., wir haben jetzt zwei Vektoren, die dasselbe Bild haben. Was könnten wir mit den beiden machen, wenn die dasselbe Bild haben? Wo könnte es da Schwierigkeiten geben?

S: Wenn man die von einander abzieht?

I: Können wir machen.

(f) * $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *

S: Das Bild wäre dann null.

I: Wird auf null abgebildet. (ergänzt in (f)) Ist das ein Problem?

S: Nee, an sich nicht.

I: Eigentlich nicht. Das kennen wir ja von linearen Abbildungen, oder von Homomorphismen im Allgemeinen, das haben wir auch bei Gruppen schon besprochen, dass die Vektoren oder Elemente, die auf null abgebildet werden, die werden zu einer besonderen Menge zusammengefasst, die einen extra Namen hat.

S: Das ist der Kern.

I: Genau. (4 Sek) Also das ist erlaubt. Hier Summen (zeigt in (d) links) müssen Summen da (zeigt in (d) rechts) entsprechen, aber nicht Summen da (zeigt in (d) rechts) eindeutig Summen hier (zeigt in (d) links).

S: Das wär dann bijektiv, oder?

I: Dann wär es bijektiv, genau. Dann zunächst mal injektiv. Wenn wir die Dimensionen angucken (zeigt in (b) auf $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}$), Dimension drei und Dimension eins, das kann ja gar nichts werden, wenn wir, wenn das bijektiv sein sollte.

S: Weil ich rechts mehr Dimension, eh, links mehr als rechts.
I: Ja, genau. Also das (zeigt auf (d)) wär ne Möglichkeit.
S: Hm.
I: Erst mal diese Abbildung, ach so, die haben wir jetzt erst auf drei Elementen definiert, ist klar, wie wir die fortsetzen? Ja, ne?
S: Ja. Weil das ja Basisvektoren sind.
I: (?) Wenn wir zwei allgemeine Elemente nehmen, die Summe bilden, die Summe würde hier (zeigt in (d) rechts) würde hier keine Schwierigkeiten machen. Müssen wir das noch mal durchführen, oder ist das klar?
S: Nee, das ist mir, glaube ich, jetzt klar.
I: Wie würde denn die Matrix dazu aussehen? Zu dieser Abbildung?
S: Das wär dann eins zwei drei nebeneinander geschrieben.
I: * (1 2 3) *
Gut. Jetzt ist so ein bißchen klar, wie die linearen Abbildungen aussehen hier (zeigt auf (b))?
S: Ja, ja.
I: Dann gucken wir jetzt mal, dass wir eine Basis finden. Also das (zeigt auf (b)) ist ein Vektorraum, diese $V^*$. Die Menge der linearen Abbildungen, die vom $R$ hoch drei in den $R$ abbilden, bilden einen, diese Menge ist ein Vektorraum.
S: Hm.
I: Jeder Vektorraum hat eine Basis. Ist das klar, dass es ein Vektorraum ist? (3 Sek) Wollen wir gucken, wie die Summe von zwei linearen Abbildungen aussieht?
S: Ja, die muss auch linear sein, oder?
I: Ja, das müsste man zeigen, dass sie auch linear ist, um zu zeigen, dass das ein Vektorraum ist.
S: Das müsste (?) Skalarmultiplikation zeigen. Da muss es auch klappen.
I: Genau, erst mal dann haben wir, dass die Summe und die Vielfachen wieder Elemente davon sind, und dafür, dass es ein Vektorraum ist, da müsste man dann zeigen, dass zwei addieren, zwei lineare Abbildungen, da gelten die Gruppenaxiome,
S: Ich glaub, das machen wir nicht.
I: O.k., die Frage ist, wie sieht ne Basis aus dazu? (wischt (d)-(f) weg)
S: Das verstehe ich jetzt nicht so ganz. Ich such jetzt quasi nach ner, das sind auch drei Elemente, die in der Basis drin sein müssen, oder nicht?
I: Ja, das ist richtig. Die Frage ist warum, aber das stimmt.
S: D.h. ich muss jetzt drei Abbildungen finden, aus denen ich alle linearen Abbildungen erzeugen kann.
I: Genau. (14 Sek)
S: Kommt dazu auch mit der dualen Basis, oder?
I: Ja, die könnte man nehmen. (4 Sek)
S: Wobei ich jetzt auch wenig, was das konkret heißt, duale Basis,
I: Das ist jetzt nur der Name.
S: Ja, ja.
I: Ich mein, es gibt ja viele Basen, die man wählen kann, die duale Basis wäre eine besonders einfache. Wir können ja erst mal gucken, ob wir überhaupt eine finden, und vielleicht ist das ja die duale.
S: Also ich hätt jetzt mal so spontan gesagt, dass die Identität da mit drin ist? In der Basis?

I: Eh, wie sieht denn die Identität aus? (notiert * id : *) Wie bildet die ab?
S: $\varphi$ oder irgend nen $\psi$ oder so
I: Als Matrix oder als
S: Also irgend nen $\varphi$ eins von v ist v.
I: O.k., hier hab ich jetzt id, ob ich es jetzt $\varphi$ oder id nenne,
S: Ja, o.k.
I: Die bildet also ab von v nach v.
.* $id : v \longmapsto v$ *
S: Hm.
I: Geht nicht. (2 Sek) (zeigt in (b) auf $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}$).
S: Ach so. (4 Sek) Ja, klar, ist Quatsch.
I: Also Identität haben wir nicht, (?), ne? (wischt wieder weg).
S: Ja. (7 Sek)
I: Also wir haben eben gesagt, ne lineare Abbildung ist durch das definiert, was sie auf einer Basis tut. Und wir haben hier die Standardbasis in $R$ hoch drei. Also die linearen Abbildungen sind dadurch festgelegt, was sie auf dieser Standardbasis tun. Versuch doch einfach mal, linear unabhängige lineare Abbildungen zu finden. Du hast ja eben schon gesagt, dass wir drei finden müssen, dass die Dimension von dem Raum drei ist. Gib doch einfach mal drei verschiedene an, die linear unabhängig sind. (9 Sek).
S: Also kann man über Matrizen machen? Also
I: (nickt)
S: Also grad haben wir gesagt, eins zwei drei. Da würd ich jetzt einfach, eh (11 Sek)
I: Also $\alpha$ eins, eh, wenn wir die als Matrizen schreiben, dann, wie haben wir die geschrieben,

(g) * $\begin{array}{lcl} M(\alpha_1) & = & \\ M(\alpha_2) & = & \\ M(\alpha_3) & = & \end{array}$ *

S: Was sind die $\alpha$'s jetzt? Das sind die drei Abbildungen?
I: Das sollen die drei Abbildungen sein, die da drin sind (zeigt auf (b)). Und die zugehörigen Matrizen, die wurden in der Vorlesung immer so geschrieben, M von, dass man den Zusammenhang sieht, zwischen Matrix und Abbildung.
S: Ja. Ich würde sagen, eins null null z.B., null eins null, null null eins. (ergänzt (g) zu:)

(g') * $\begin{array}{lcl} M(\alpha_1) & = & (1\ 0\ 0) \\ M(\alpha_2) & = & (0\ 1\ 0) \\ M(\alpha_3) & = & (0\ 0\ 1) \end{array}$ *

I: Sind das lineare Abbildungen?
S: (18 Sek). Ja, würd sagen, schon,
I: Haben wir eben ja festgestellt, ne? Das ist die Kurzschreibweise, was sie mit e eins, e zwei, e drei tun (zeigt in (g) auf den ersten Zeilenvektor), und hier entsprechend. Gut, und dass sie linear unabhängig sind, das sieht man auch, ne?
S: Ja, irgendwie schon, also, im Prinzip. (3 Sek)
I: Man könnte ja auch das nochmal ausführlicher schreiben. Diese Matrix (zeigt in (g') auf die erste Zeile), was macht die mit der Basis, mit der Standardbasis? Die zugehörige Abbildung?
S: Diese lineare Abbildung

I: Ja, $\alpha$ eins von e eins
S: ist eins. Von e zwei und e drei ist jeweils null
I:
(h) * $\alpha_1(e_1) = 1,\ \alpha_2(e_2) = 0,\ \alpha_3(e_3) = 0$ *
Genau. Und wenn wir diese hier nehmen, $\alpha$ zwei,
S: (diktiert:) (I ergänzt (h) zu:))
(h') * $\begin{array}{lll} \alpha_1(e_1) = 1, & \alpha_1(e_2) = 0, & \alpha_1(e_3) = 0 \\ \alpha_2(e_1) = 0, & \alpha_2(e_2) = 1, & \alpha_2(e_3) = 0 \end{array}$ *
I: Warum sind die beiden linear unabhängig?
S: Mir ist noch nicht so ganz klar, wie Abbildungen linear unabhängig sein können.
I: Also wie sind Vektoren linear unabhängig? Was würde das heißen?
S: Ja, eh, keine Ahnung, dass die sich nicht durch einander erzeugen lassen.
I: Die Vektoren heißen $\alpha$ eins und $\alpha$ zwei, um die es hier geht, also?
(i) * $\alpha_1$ *
S: (diktiert weiter:)
(i') * $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ *
daraus würde dann folgen, dass die alle null sind. War das nicht so?
I: Eh, nee, die $\alpha$'s sind ja jetzt fest, die $\alpha$'s sind ja jetzt die Vektoren, da fehlt noch was.
S: Ach so, da irgendwie noch $\delta$'s oder so irgendwas vor.
I: Irgendwas.
(i") * $\delta_1\alpha_1 + \delta_2\alpha_2 + \delta_3\alpha_3 = 0$ *
Koeffizienten.
S: Ja, und die müssen null sein.
I: Die $\delta$'s sind jetzt aus R, reelle Zahlen, ne? Also das gilt nur (zeigt auf (i")), wenn alle drei Koeffizienten null sind, linear unabhängig. Wenn jetzt die $\alpha$'s Abbildungen sind, wie kann denn die Summe von Abbildungen null sein? Was ist das für eine Null?
S: Ja, das ist auch ne Abbildung, die alles auf null abbildet, oder?
I: Genau. Also wie können Summen von Vielfachen von diesen Dreien (zeigt auf (h') und ergänzt noch darin $\alpha_3$... (ohne weiter auszuschreiben)) null werden?
S: Die dürfen nur null werden, wenn, ehm, wenn alles auf null abgebildet wird, oder?
I: Hm. Und alles heißt insbesondere? Wenn du sagst, also alle Vektoren sagst du,
S: Ja, die Basisvektoren.
I: Insbesondere die Basisvektoren. Wenn wir den Ausdruck hier (klammert in (i') die rechte Seite ein und ergänzt dahinter $e_1$) z.B. auf $e$ eins anwenden, was können wir dann schließen? Das soll die Nullabbildung sein, das soll dasselbe sein, wie die Null von $e$ eins (schreibt in (i') rechts $0(e_1)$)
S: Ja, dann müssen die $\alpha$'s null sein.
I: Warum?
S: Weil $\alpha$ eins von e eins wär ja schon eins.
I: Ja, die können ja hierdurch (zeigt in (i') auf den zweiten und dritten Summanden) ausgeglichen werden.
S: Die sind ja beide null.
I: Also wir können hier, dass das angewendet auf e eins null sein muss, erstmal nur schließen, das $\delta$ eins ist null. Und wenn wir es auf e zwei anwenden, sehen wir, $\delta$ zwei muss null sein. Und auf e drei angewendet, sehen wir, $\delta$ drei muss null sein.

Dieser Ausdruck (zeigt in (i') auf die linke Seite) muss die Nullabbildung sein, d.h., wenn ich ihn auf einen beliebiges, auf einen beliebigen Vektor anwende, muss null rauskommen.

S: Hm.

I: (ergänzt in (i') am Ende * =0 *)Hier muss null rauskommen. Und wenn ich das jeweils auf die drei Standardbasisvektoren der Reihe nach anwende, kann ich jeweils ein $\delta$, schließen, dass eins von den $\delta$'s null ist.

S: Hm, o.k., jetzt verstehe ich.

I: Warum sind die linear unabhängig? Weil die hier auf ner Basis (zeigt auf (h)), ja, man kann das halt nicht ausgleichen, ne?

S: Also wäre, zu zeigen, dass lineare Abbildungen linear abhängig sind, das ist schwierig zu zeigen, oder?

I: Ja, das kommt jetzt drauf an, wenn wir das (zeigt auf (h)) anders definiert hätten, wenn wir hier z.B., ja gut, es kommt auf die Definition an. Ach so, du meinst da (zeigt auf (i')) passende $\delta$'s zu finden, dass das schwierig ist. Wenn man das in der Schreibweise (zeigt auf (g)) macht, ist es nicht so schwierig. Da ist es übersichtlicher zu sehen.

S: Also das würde jetzt heißen, wenn ich jetzt meintwegen, wenn M von $\alpha$ eins null eins eins wäre, dass das dann schon, dass die Abbildungen linear abhängig sind. Sehe ich das genauso wie

I: Genau. Und das kann ich auch hier (zeigt auf (h)), auch wenn ich nur diese Darstellung habe, also wenn wir jetzt null eins eins (zeigt in (h) auf die drei Bilder), dann kann ich ja sehen, $\alpha$ eins wäre dann gleich $\alpha$ zwei plus $\alpha$ drei.

S: Und unten (i.e. (i')) würde dann heißen, dass das $\delta$ eins beliebig sein kann.

I: Genau. Also es geht vom Prinzip genauso wie bei den Polynomen, das sind ja auch Abbildungen, oder kann man als Abbildungen auffassen, und trotzdem kann man relativ gut zeigen, dass die linear unabhängig sind oder linear abhängig.

S: Hm.

# C.2 Dualraum: Frau Beck (DR, Beck)

I: Wir fangen an mit dem, der Menge V, dem $R$ hoch drei

(a) * $V = \mathbb{R}^3$ *

Das soll die Menge von den Spaltenvektoren sein, das brauche ich nicht hinzuschreiben, und dem $V^*$ soll sein die Menge der $\varphi$, die abbilden vom $R$ hoch drei in den $R$ und lineare Abbildungen sind

(b) $*V^* = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ lin. Abb. $\}$ *

Der heißt Dualraum, dieser $V^*$, aber was das ist, das steht nochmal hier, das sind die linearen Abbildung von $R$ hoch drei nach $R$ (zeigt in (b)). So, und vielleicht fangen wir erst nochmal mit einem Beispiel an. Kannst du mal ein Beispiel, eine Abbildung, ein Element von dem $V^*$ angeben?

B: Ja, die Spur, z.B.

I: Kannst du es hinschreiben, das Element? Was meinst du mit die Spur?

B: Ja, wenn man von ner drei kreuz drei Matrix die Spur bestimmt.

I: Hm. Von wo nach wo bildet das dann ab, diese Abbildung Spur?

B: Von $R$ hoch drei nach R. Nee, $R$ kreuz, $R$ hoch drei kreuz $R$ hoch drei nach R.

I: Von $R$ hoch drei kreuz $R$ hoch drei o.k., also von dem Vektorraum der Matrizen, ne? Jetzt haben wir aber nur den $R$ hoch drei hier. Also Spur, eh, denk dir einfach was ganz Konkretes aus, es muss ja auch keinen Namen haben.

B: Man kann ja auch einfach die Summe machen, also wenn man jetzt halt v eins, v zwei, v drei abbildet auf

(c) * $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \longmapsto v_1 + v_2 + v_3$ *

I: O.k. Ist das sicher, dass das ne lineare Abbildung ist?

B: Denke ich, ja. Eigentlich schon. Ob ich jetzt vorher oder hinterher addiere, ist ja eigentlich egal.

I: Hm.

B: Ob ich vorher multipliziere, ich kanns jetzt gerne aufschreiben.

I: O.k., ist aber klar, ist ne lineare Abbildung. Kannst du auch ne Basis angeben von dem Raum $V^*$?

B: (6 Sek) Hm. Ja eigentlich müsste ja diese Basis auch aus e eins, e zwei, e drei bestehen, z.B.. Weil ich vom $R$ hoch drei nach $R$ abbilde, also betrachte ich mir den $R$ hoch drei (zeigt in (b) auf $\mathbb{R}^3$) um eine Basis zu finden, weil der Raum (zeigt in (b) auf $V^*$) setzt sich im Prinzip hieraus (zeigt in (b) auf $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$) zusammen. Also muss ich ja zunächst von R hoch drei das Ganze betrachten.

I: Inwiefern ist denn, wenn du sagst, eine Basis könnte e eins, e zwei, e drei sein, inwiefern ist denn e eins ein Element von $V^*$?

B: Ja, das ist ein Element von der Urmenge, nicht Urmenge. Also von hier (zeigt in (b) auf $\mathbb{R}^3$), und somit ist es ja die Ausgangssituation, um abbilden zu können. Man kann natürlich auch, ehm, ne Identität z.B. als ein Basiselement nehmen. Nee.

I: Warum geht das nicht?

B: Das geht nicht, weil, ehm, da müsste hier (zeigt in (b) auf $\mathbb{R}$) $R$ hoch drei stehn.

I: Genau, wir gehen ja nur in den Körper nur. Also müsste noch ein bißchen konkreter, könnte was zu tun haben mit dem e eins, e zwei, e drei, ne? Aber, aber so ganz, das sind erstmal Elemente von dem $R$ hoch drei.

B: Mir ist noch nicht klar, wie man ne Basis von ner Abbildung machen sollte,

I: Eh,

B: oder von ner Menge von Abbildungen. Also weil da müsste man ja als Basis, eh, als Basiselement ne Abbildung nehmen.

I: Hm.

B: Aber, ich weiß nicht, wie man ne Abbildung als Basiselement darstellt.

I: Wenn du sagst, man kann alle diese Abbildungen $\varphi$ definieren, indem man - was angibt?

B: Na, indem man ne, die Basis vom $R$ hoch drei angibt, und zu sagen, wie diese Basis abgebildet wird.

I: Genau. Schreib doch mal, du hast jetzt hier (zeigt auf (c)) ein Beispiel, da hast du es anders geschrieben. Schreib doch mal n Beispiel, entweder dasselbe oder ein anderes, wo du das angibst, wo du ein $\varphi$ so angibst, wie du es jetzt gesagt hast, in der Form.

B: Also dass ich davon quasi jetzt, also nicht das (zeigt in (c) auf den Spaltenvektor) als Vektor darstelle, sondern?

I: Sondern die Bilder von der Standardbasis vom $R$ hoch drei angibst.

B: (d) * $\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & 1+0+0=1 \\ e_2 & \longmapsto & 0+1+0=1 \\ e_3 & \longmapsto & 0+0+1=1 \end{array}$ *

I: Das ist jetzt ein $\varphi$. Welche Varianten gibt es? Und dann kann man vielleicht auch ne Basis finden von diesem Raum, wenn man alle $\varphi$'s, alle linearen Abbildungen darstellen kann. (4 Sek)

B: Hm.

I: Du hast jetzt die gewählt, die alle drei Standardbasisvektoren auf eins abbildet.

B: Ja.

I: Welche Varianten gibt es? Welche anderen Abbildungen gibt es noch?

B: Ja, die Kombinationen aus den Einheitsvektoren. Weil wenn ich mir das so definier (zeigt in (c) auf das Bild), dann muss ich ja hier (zeigt in (c) auf die Komponenten des Spaltenvektors) die Summe bilden.

I: Du meinst, welche anderen Bilder kriegt das $\varphi$ noch. Ich meinte jetzt, welche anderen Abbildungen kann man, kann man noch. Ich mein, es gibt ja ganz viele Abbildungen, wie ich das definieren könnte, wenn ich ne Abbildung auf den Dreien (zeigt in (d) auf die Elemente in der linken Spalte) angebe, damit habe ich die ganze lineare Abbildung definiert.

B: Ja. (3 Sek)

I: Und wenn wir sie alle suchen, alle linearen Abbildungen, mit Hilfe von ner Basis von dem $V^*$ werden wir sie ja alle darstellen können.

B: Ja, man müsste als Basis das zusammenfassen. Also die Eigenschaften, die auf die Einheitsvektoren ausgeübt werden, ja, den Einheitsvektoren auferlegt werden. Also wir müssen quasi jede einzelne Abbildung beschreiben können über andere Abbildungen, die man als Basis definiert.

I: Hm.

B: Ist dann die Frage, wie man das macht. Das kann man höchstens über, na ja, Addition und Subtraktion und so was halt.

I: Hm. Also ich geb mal eine an, eine Basis. Eh, die hat auch nen besonderen Namen hier die, ehm, e eins stern soll eine Abbildung sein, und die soll so abbilden, dass sie e eins auf eins abbildet, wie du das hier (zeigt auf (d)) auch gemacht hast, und die beiden anderen auf null.

(e) * $\begin{array}{rrcl} e_1^*: & e_1 & \longmapsto & 1 \\ & e_2 & \longmapsto & 0 \\ & e_3 & \longmapsto & 0 \end{array}$ *

Und entsprechend soll

B: e zwei stern halt

I: Genau. Also entsprechend e eins stern, e zwei stern und e drei stern.

B: Und dann kombiniert man die Abbildungen, und erlangt dann jede andere Abbildung (zeigt auf (d)).

I: Genau. Das $\varphi$ (zeigt auf (d)) z.B. können wir dann schreiben, in welcher Form als Summe von den, von unserer Basis? Von den e eins stern, e zwei stern, e drei stern? Also hier haben wir ja e eins stern, e zwei stern, e drei stern (zeigt auf (e)). Ich behaupte jetzt einfach mal, dass das ne Basis von $V^*$ ist.

B: Ja.

I: Das heißt, wir könnten, damit behaupte ich ja auch, wir können jede Abbildung, jede lineare Abbildung mit Hilfe von den Dreien darstellen. Wie können wir das $\varphi$ darstellen mit Hilfe von e eins stern, e zwei stern, e drei stern?

B: Dieses $\varphi$ (zeigt auf (d))? Dieses konkrete $\varphi$?

I: Ja, dieses Bestimmte, das du da gewählt hattest. (20 Sek)

B: Da müsste e eins stern. Ist in dem (zeigt in (d) auf $e_1$) Falle ja nichts Anderes als die Abbildung e eins?

I: Ehm, wie haben jetzt, das Bild von e eins meinst du, oder die Abbildung e eins?

B: Ja, das Bild von e eins. Ist ja die Abbildung e eins.

I: Wir müssen irgendwas, $\varphi$ müssen wir schreiben als so eine Summe

(f) * $\varphi = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \alpha_3 e_3^*$ *

wobei das (zeigt in (f) auf $e_1^*, e_2^*, e_3^*$) jeweils Abbildungen sind. Wir wissen, was die Summe von zwei Abbildungen sein soll.

B: Ja.

I: Machen wir ja komponentenweise.

B: In <u>dem</u> (zeigt auf (f)) Fall ist es ja nichts Anderes als das (zeigt auf (d)).

I: Ehm, ja, das hat mit einander zu tun. Aber so richtig, zunächst mal sind es zwei verschiedene Dinge. Diese (zeigt auf (d)) e's hier

B: Ja das hier (zeigt in (d) auf die drei vorderen Einträge) ist ein konkreter Vektor, und das (zeigt auf (f)) sind die Abbildungen.

I: Ja.

B: Aber das (notiert in (f) unter $e_1^*$: * $e_1 \mapsto 1$ *) impliziert ja, dass e eins auf eins abgebildet wird.

I: Ja, aber es impliziert noch mehr, es impliziert auch, dass e zwei auf

B: Ja, dass e zwei auf null abgebildet wird (ergänzt in (f) * $e_2 \mapsto 0$ *) Aber das beeinträchtigt ja nicht, weil wir ja hier (zeigt in (f) auf $e_1$), ehm, (2 Sek)

I: Was müssten denn jetzt, damit das gleich $\varphi$ wird, was müssten die $\alpha$'s sein? (6 Sek). Also damit dies (zeigt in (f) auf $\varphi$), wann sind zwei Abbildungen gleich? Dies ist eine Abbildung und das ist auch eine Abbildung (zeigt in (f) auf die beiden Seiten des Gleichheitszeichens)

B: Ja.

I: Wann sind die gleich?

B: Wenn die bzgl. der gleichen Basis auf die gleichen Vektoren abbilden. Also die Vektoren auf's gleiche Bild abbilden.

I: Ja, wenn sie jeden Vektor auf denselben abbilden, aber das brauchen wir nicht einzeln zu untersuchen, wenn sie auf der Basis daselbe tun, reicht das schon. Genau. Ja, was müssen dann die $\alpha$'s sein, damit das gleich ist? Damit $\varphi$ dasselbe tut wie diese Summe (zeigt auf (f))?

B: Generell jetzt?

I: Immer noch bei dem speziellen $\varphi$. Die sind ja noch unbekannt hier, ne? (zeigt in (f) auf die Kooeffizienten)

B: Ja. Na ja, in dem Fall würde ich sagen, müssen die $\alpha$ alle gleich eins sein. Weil ich ja jeweils ein Teil (zeigt in (c) auf die Komponenten des Spaltenvektors) des v eins, v zwei, v drei (zeigt in (c) auf die Summe) abbilde.

I: Genau. Wenn ich jetzt ein anderes $\varphi$ nehme. Ich ändere mal hier (zeigt auf (c)) dein $\varphi$ und dann bilden wir das nicht auf eins eins eins ab, sondern dann bilden wir e eins auf a eins ab, e zwei auf a zwei, e drei auf a drei (ändert (d) zu:)

(d') * $\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ e_1 & \longmapsto & a_1 \\ e_2 & \longmapsto & a_2 \\ e_3 & \longmapsto & a_3 \end{array}$ *

irgendwelche drei Zahlen in R,

B: Und dann hier (zeigt auf (f)) diese drei Zahlen sind dann a's.

I: Genau. Und damit sehen wir jetzt auch, dass wir wirklich alle Elemente aus $V^*$ mit Hilfe von diesen Dreien (zeigt in (f) auf die $e^*$) schreiben können. Und dann müssten wir noch gucken, ob die auch linear unabhängig sind, die drei,

B: Ja, muss ja, sind ja unterschiedliche Abbildungen. Also weil, man kann dann ja wieder auf die Elemente zurückgehen, und die Elemente sind von den Abbildungen her (ergänzt (f), so dass es nun wie folgt aussieht:)

(f') * $\begin{array}{rcccc} \varphi = & \alpha_1 e_1^* & + & \alpha_2 e_2^* & + \quad \alpha_3 e_3^* \\ & e_1 \mapsto 1 & & & \\ & e_2 \mapsto 0 & & & \\ & e_3 \mapsto 0 & & & \end{array}$ *

bilde ich ja nur jeweils einen Einheitsvektor auf eine Zahl ab, und somit kann man, ja, sieht man es auf einen Blick, im Prinzip, dass die linear unabhängig sind.

I: O.k., sieht man auf einen Blick, ja. Wenn wir die Nullabbildung darstellen wollten, müsste jeder von denen (zeigt in (f') auf $e_1, e_2, e_3$) null werden.

B: Ja.

# Anhang D

# Restklassenaufsätze

$A_{01}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

Die Graphik zeigt die Menge $\mathbb{Z}$, eingeteilt in 5 Nebenklassen gleicher Elementzahl/Ordnung. Jede dieser Nebenklassen kann man vereinfacht darstellen und schreibt sie oft als Symbol $\bar{5}$ (siehe links.).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋯ | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | ⋯ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

$\mathbb{Z}$

$n\mathbb{Z} + 0 \quad =: \bar{0}$

$n\mathbb{Z} + 1 \quad =: \bar{1}$

$n\mathbb{Z} + 2 \quad =: \bar{2}$

...

$n\mathbb{Z} + 4 \quad =: \bar{4}$

Wenn ich diese ~~Menge~~ Elemente ~~vereine~~ zusammentrage, erhalte ich offenbar die Menge der fünf Nebenklassen $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

Neutralelement

Wenn man zwei Elemente, zB $\bar{1}$ und $\bar{4}$ verknüpft, bediene ich mich der speziellen „Addition“ $\oplus := (n\mathbb{Z}+a)+(n\mathbb{Z}+b) := n\mathbb{Z} + \frac{a+b}{n}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$

Diese Definition teilt die Summe der addierten Reste a und b zweier Elemente aus $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ wieder einer Nebenklasse $n\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ zu, d.h. es ergibt sich wieder ein Element aus $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Also ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$ eine Gruppe, denn wir haben eine gruppentaugliche ~~Verknüp~~ Tafel der Verknüpfungen:

| $\oplus$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |

Also haben wir ein Neutralelement $e = \bar{0}$ und jedes $\bar{a}$ hat wie man sieht ein $-\bar{a}$.

Diese Gruppe ~~besteht aus Elementen von $\mathbb{Z}$~~ wird aus Elementen von $\mathbb{Z}$ gebildet und in ihr gelten ungewohnte aber definierte Rechnungen, etwa

$\bar{2} \oplus \bar{3} = \bar{0}$ .

$5\mathbb{Z}+2 \oplus 5\mathbb{Z}+3 = 5\mathbb{Z}\,5 = 5\mathbb{Z}+0$ ,

$\downarrow \qquad \downarrow$

denn $\{..-5, 0, 5, ..\} = \{..-5, 0, 5, ..\}$ .

Ich kann diese Gruppe aus $\bar{1}$, bzw. $n\mathbb{Z}+1$ erzeugen, also $[\bar{1}] = \left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}, \oplus\right)$.

Insgesamt werden die ganzen Zahlen durch / in ~~der~~ die Gruppe $(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}, \oplus)$ [illegible] den Nebenklassen $\bar{0} - \bar{4}$ zugeteilt / eingeteilt. Über die Gruppe G wird ein gleichmäßiges Gitter gelegt, so dass ich fünf gleich große Felder habe.

$A_{02}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Die Kongruenzklasse modulo 5, bestehen aus 5 Elementen: 0, 1, 2, 3, 4. ~~Sie ist eine Restklasse~~ Jeder Zahl aus $\mathbb{Z}$ wird einem Element zugeordnet, in dem diese Zahl durch 5 dividiert wird und der Rest dieser Division entspricht einem Element. Entsprechend folgt die Addition: $a \oplus b = c$ falls $c \leq 4$ ist wird es dem Entsprechenden Element zugeordnet. ~~Falls~~ $c \geq 5$, wird durch 5 dividiert, also $\frac{c}{5} = d + \frac{r}{5}$ das $r$ entspricht einem Element. Bsp. $1 + 2 = 3$ $\quad 4 + 1 = 0$

$A_{03}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

$5\mathbb{Z}+1$ $\quad$ $5\mathbb{Z}+3$ $\quad$ ~~$\mathbb{Z}$~~

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

$5\mathbb{Z}$ $\quad$ $5\mathbb{Z}+2$ $\quad$ $5\mathbb{Z}+4$

Addition:

Bsp.: $5\mathbb{Z}+2 + 5\mathbb{Z}+4 = 5\mathbb{Z}+1$

bzw. $\bar{2} + \bar{4} = \bar{6} \underset{-5}{=} \bar{1}$

Elemente: Die Elemente von $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ werden mit $\bar{a} := n\mathbb{Z}+a$ bezeichnet.
In $\bar{a}$ liegen die ganzen Zahlen, die bei Division durch n (hier $n=5$) den Rest a haben.

Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$:

~~BA~~ Die Summe der Kongruenzklassen ist $\mathbb{Z}$.

$A_{04}$

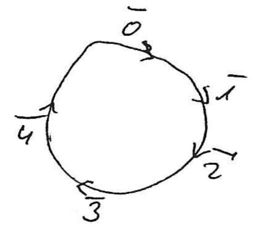
Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋯ | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | ⋯ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

1) ~~Gole~~ Die Menge $\mathbb{Z}$ lässt sich in Kongruenzklassen einteilen. Die ~~All~~gemeine Schreibweise lautet $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und ~~lässt sich in folgende~~ diese ~~Kono~~ Kongruenzklasse enthält folgende Elemente: $\{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$. Die Kongruenzklasse modulo 5 besitzt die folgenden Elemente: $\{\bar{0}\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. ~~Die~~ Jedes ~~Elem~~ $a \in \mathbb{Z}$ kann man in Klassen einteilen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n\mathbb{Z}+0$ | $n\mathbb{Z}+1$ | $n\mathbb{Z}+2$ | $n\mathbb{Z}+3$ | $n\mathbb{Z}+4$ | ... | $n\mathbb{Z}+n-1$ |

2) Addition:




Die Addition von Elementen ~~Köps~~ in Kongruenzklassen lässt sich sehr gut an einem Kreis erklären.

Beispiele:

| | |
|---|---|
| $\bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{2}$ | $\bar{2} + \bar{1} = \bar{3}$ |
| $\bar{1} \oplus \bar{2} = \bar{3}$ | $\bar{2} + \bar{2} = \bar{4}$ |
| $\bar{1} \oplus \bar{3} = 4$ | $\bar{2} + \bar{3} = 0$ |
| $\bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$ | $\bar{2} + \bar{4} = \bar{1}$ |
| $\bar{1} + \bar{0} = \bar{1}$ | $\bar{2} + \bar{0} = 2$ |

$A_{05}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Zwei Elemente heißen kongruent modulo n, wenn ihre Differenz durch n teilbar ist. Die verschiedenen Klassen bezeichnen verschiedene Restklassen zu $n=5$. Ein Element kann immer nur Teil einer Menge sein, d.h.

~~$\bar{0} \not\subset \bar{1}$~~ $\bar{0} \not\subset \bar{1}$, $\bar{0}$ ~~$\not\subset$~~ $\not\subset \bar{2}$ usw....

Die Addition der Kongruenzklassenelemente führt zu einer anderen Kongruenzklasse, darstellbar durch eine Gruppentabelle.

Dieses ist für Elemente aus ganz $\mathbb{Z}$ möglich, weil alle Elemente sind $\in \mathbb{Z}$.

Wo liegt der Zusammenhang?

Ist es auch für $\mathbb{R}$ möglich?

Die Elemente innerhalb der Gruppe haben immer eine Differenz $r = n \cdot x$ $\quad x \in \mathbb{Z}$

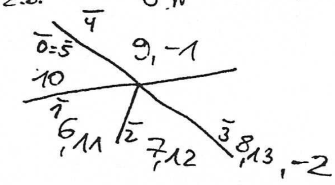
$A_{06}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

z.B. Restgruppen Tabelle




$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \{0\}, \underbrace{\{0, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}}_{\text{Nichtteiler}}$

Jeder Ring mod. n, in diesem Fall n=5, besitzt ~~nur~~ Element ~~der~~, die Nicht Teiler darstellen. ~~[illegible]~~ & ~~normalerweise~~ auch Teiler. *
Die 5 besitzt keine Teiler, da sie eine Primzahl ist.
Alle Zahlen die ein Vielfaches von 5 sind (5·n), haben keine Reste, da sie der $\bar{0}$ entsprechen. Alle anderen Zahlen, die kein Vielfaches von 5 sind werden in 4 weitere Restklassen zugeordnet (alle Reste von 1–4) die zwischen 0–5 liegen. Im allgemeinen alle Zahlen zwischen 0 und (n−1) bei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ steht für die ganzen Zahlen

* In diesem Fall gibt es jedoch nur Nichtteiler

$A_{07}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

$n\mathbb{Z}$ $n\mathbb{Z}+1$ $n\mathbb{Z}+2$ $n\mathbb{Z}+3$ $n\mathbb{Z}+4$

$n\mathbb{Z}$ bedeutet, dass alle Zahlen Teiler von 5 sein müssen, das $\bar{0}$ rauskommt, also kein Rest

$10 = \cancel{2}\bar{0}$ modulo 5

bei den anderen ergibt sich jeweils ein Rest

$n\mathbb{Z}+1$

$n\mathbb{Z}+\underline{\underline{2}}$, …, diese Zahlen lassen sich bis au~~f~~ den Rest durch 5 teilen.

<u>Allgem.</u> Die Kongruenzklasse modulo 5 besteht aus 5 Elementen $\{0,1,2,3,4\}$ und <u>alle</u> Zahlen addiert, lassen sich durch diese Elemente darstellen.

z.B. $4+6 = \bar{10} = \bar{0}$, da sich 10 durch 5 (ohne Rest) eindeutig teilen lässt, somit gehört $\bar{10}$ ~~ist~~ in die Gruppe des $n\mathbb{Z}$.

<u>Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$</u>: alle ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$) lassen sich durch Addition eindeutig in diese 5 Kongruenzklassen einordnen, diese sind auch alle aus $\mathbb{Z}$, da sie durch 5 teilbar sind, oder einen Rest ergeben. Somit ergibt sich die bestimmte Kongruenzklasse.

$A_{08}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Die Menge der Kongruenzklasse modulo 5 ergibt sich aus den Restklassen. Somit kann diese Menge auch als Restklassengruppe benannt werden. Die Spalten in der Graphik habe ich zur Veranschaulichung die von 1-5 durchnummeriert.

Die Spalte 1 ergibt sich aus $n5 + 0 = \bar{0}$, d.h. ein beliebiges Vielfaches der Zahl 5 addiert mit einer Zahl kleiner als 5 (hier 0), ergibt einen Rest (hier 0).

Die Spalte 2 ergibt sich auch $n5 + 1 = \bar{1}$

Spalte 3: $n5 + 2 = \bar{2}$

Spalte 4: $n5 + 3 = \bar{3}$

Spalte 5: $n5 + 4 = \bar{4}$

Den Rest benennt man auch als das Erzeugnis von 5. Aus deren Errechnen des Erzeugnisse ergibt sich eine neue Addition, die nichts mit der uns bekannten Addition im $\mathbb{R}$ zu tun hat.

Die Menge kann man schreiben als $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots n5-1\}$

wobei $\bar{0}$ das Neutralelement ist.

Da Kongruenzklassen wieder Gruppen bilden, müssen dort auch die Gruppengesetze wirken. Somit muss in der Menge der Kongruenzklasse ein Neutrales und zu jedem Element ein Inverses sein.

Ein Element aus modulo 5 wird aus $\mathbb{Z}$ gebildet.

$A_{09}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Hier bekomme ich die Menge der Elemente die bei der Division durch 5 entstehen. (modulo $n$)

$a + n\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $a$ modulo $n$

$\uparrow$ Rest (Restklasse)

$A_{10}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$

Die Elemente von $\mathbb{Z}$ haben folgende Form: $\bar{a}: n\mathbb{Z} + a$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $5\mathbb{Z}$ | $5\mathbb{Z}+1$ | $5\mathbb{Z}+2$ | $5\mathbb{Z}+3$ | $5\mathbb{Z}+4$ |

Die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 (auch $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) enthält die fünf Teilmengen $5\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}+1, 5\mathbb{Z}+2, 5\mathbb{Z}+3, 5\mathbb{Z}+4$, die sog. additiven Restklassen (ganze Zahlen durch 5, die den Rest n haben bsp. $5\mathbb{Z}+n$).

Die Elemente dieser Teilmengen erfüllen also jeweils die Vorschrift, wie z.B die ganze Zahl $11 \in \mathbb{Z}$ ist auch Element der Teilmenge $5\mathbb{Z}+1$.
(Man könnte auch meinen, dass $5\mathbb{Z}+n$ Elemente von $\mathbb{Z}$ sind)

Wenn man Elemente der verschiedenen Kongruenzklassen addiert, so reicht es auch aus die Reste zu addieren:
(bzw. man addiert die Elemente, indem man die Reste addiert, wobei man dabei berücksichtigen muss, dass man ja nur bis Rest 4 rechnet in der Kongruenzklasse mod 5.

Bsp.: $(5\mathbb{Z}) + (5\mathbb{Z}+2) = 5\mathbb{Z}+2$

$$(\underbrace{5\mathbb{Z}+3}_{\bar{3}}) + (\underbrace{5\mathbb{Z}+4}_{\bar{4}}) = \underbrace{5\mathbb{Z}+2}_{\bar{2}}$$

$\bar{3} + \bar{4} = \bar{2}$

Alle Kongruenzklassen sind wie gesagt Teilmengen von $\mathbb{Z}$.

$A_{11}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

$\in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/_5\mathbb{Z}$ besteht aus 5 Kongruenzklassen, deren Elemente entweder glatt durch fünf, oder mit Rest 1,2,3,4 teilbar sind. Man kann zwei Kongruenzklassen addieren, indem man die Reste addiert, wobei das Ergebnis zur Klasse des rausgekommenen Restes gehört. Die Elemente der Kongruenzklassen sind Elemente von $\mathbb{Z}$.

$A_{12}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Die Schreibweise $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, gelesen $\mathbb{Z}$ modulo $n\mathbb{Z}$ beschreibt mehrere Zahlenmengen. Jene Zahlenmengen werden als Kongruenzklassen bezeichnet. Als Beispiel dient $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Dabei werden alle ~~natürlichen~~ ganzen Zahlen durch 5 geteilt und in Klassen eingeteilt. Bei der Division durch 5 gibt es dabei 5 verschiedene Möglichkeiten: ~~Die~~ Eine Zahl ist durch 5 teilbar, es bleibt der Rest 1, der Rest 2, der Rest 3 oder der Rest 4. Dabei werden die jeweiligen Elemente einer Klasse zugeordnet. Somit fallen alle durch 5 teilbaren Zahlen in eine Klasse (linke Spalte in der obigen Grafik). Des weiteren fallen alle Zahlen, die bei der ~~Di~~ Division durch 5 den Rest 1, 2, 3 bzw 4 lassen, in eine jeweilige Klasse. Diese Klassen werden mit $\overline{0}$ für alle Zahlen ohne bzw mit Rest 0, $\overline{1}$ für alle Zahlen mit Rest 1 etc bezeichnet

Bei der Addition ist zu berücksichtigen, dass man keine konkreten Zahlen allein addiert, sondern jeweils die gesamten Klassen. Folglich wird mit Resten gerechnet.

Somit ~~wäre~~ entspräche bei der Addition von den Zahlen 7 und 9 ~~das~~ im Zusammenhang mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ das Ergebnis $\overline{1}$. Das kann man auf 2 Arten erschließen. $7 + 9 = 16$. Die 16 geteilt durch 5 läßt den Rest 1 und somit gehört das Ergebnis in die Klasse der Zahlen, die den Rest 1 lassen. Die zweite Möglichkeit besteht ~~darin~~ darin, die zu den Zahlen ~~gehörigen~~ Restklassen zu addieren. Somit würden im Falle von 7 + 9 die Restklassen $\overline{2}$ und $\overline{4}$ addiert. $\overline{2} + \overline{4}$ liefert die Restklasse $\overline{6}$, da diese jedoch der Klasse $\overline{1}$ entspricht ($6 : 5 = 1 + \text{Rest } 1$), ist das Ergebnis $\overline{1}$.

$A_{13}$ Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $5\mathbb{Z}$ | $5\mathbb{Z}+1$ | $5\mathbb{Z}+2$ | $5\mathbb{Z}+3$ | $5\mathbb{Z}+4$ |

Alle Elemente der Menge $\mathbb{Z}$ lassen sich in Kongruenzklassen einteilen, wie man an der Graphik sieht. Alle ganzen Zahlen, die durch eine Zahl n, in diesem Fall 5, ohne Rest dividierbar sind, werden in einer Kongruenzklasse zusammengefasst, der Klasse $n\mathbb{Z}$ bzw. $5\mathbb{Z}$. Genauso werden die Zahlen die mit Rest durch n bzw. 5 dividiert werden können, in Klassen eingeteilt und zwar gemäß dem Rest der bei der Division auftritt. So werden die z.B. Zahlen 6, 11, 16, etc. der Kongruenzklasse $n\mathbb{Z}+1$ zugeordnet.

Addiert man zwei Kongruenzklassen mit einander, so werden die einzelnen Ergebnisse dieser Addition in ein und dieselben Kongruenzklasse zusammengefasst. Addiert man so die Kongruenzklassen $5\mathbb{Z}+1$ und $5\mathbb{Z}+2$, so finden sich alle Additionsergebnisse in der Kongruenzklasse $5\mathbb{Z}+3$ wieder.

Bsp. $6+7=13$ $\quad 13:5=2$ Rest 3

$6:5=1$ R 1 $\quad 7:5=1$ R 2

Ergibt sich bei der Addition von zwei oder mehr Kongruenzklassen eine Kongruenzklasse mit einem Rest größer oder gleich n, so muß man diesen Rest wieder durch n dividieren und der auftretende Rest ist der Rest der Kongruenzklasse.

Bsp für $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $8 + 9 = 17$

$8:5=1$ R. 3 $\quad 9:5=1$ R. 4 $\quad 17:5=3$ R. 2

$3+4=7$

$7:5=1$ R. 2

$A_{14}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $5\mathbb{Z}$ | $5\mathbb{Z}+1$ | $5\mathbb{Z}+2$ | $5\mathbb{Z}+3$ | $5\mathbb{Z}+4$ |

Die Elemente wurden in 4 Spalten eingeteilt und zwar in die ~~Gruppen~~ Klassen $5\mathbb{Z}$, $5\mathbb{Z}+1$ … $5\mathbb{Z}+4$ (allg. $n\mathbb{Z}+(n-1)$). Bei der Addition zweier Kongruenzklassen entsteht wieder eine Kongruenzklasse. Die Zahl, die nicht durch 5 (allg. n) teilbar ist, nennt man Rest. Dieser Rest durchläuft die Zahlen $\bar{0}$–$\bar{4}$ (allg. $0 \ldots (n-1)$). Bei 5 ist der Rest wieder 0, da 5 wieder durch 5 teilbar ist.

Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$ ????

$A_{15}$ Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋯ | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | ⋯ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

$\bar{0}$ : −15, −10, −5, 0, 5, 10, 15

$\bar{1}$ : −14, −9, −4, 0, 4

- Die Elemente der Kongruenzklasse modulo 5 sind jeweils in 5 Restklassen dargestellt ($\bar{0}$ – $\bar{4}$)
- Bei der Addition mit den Restklassen erhält wieder eine neue Zahl die aber bereits in einer vorhandenen Restklasse.

z. B. $\bar{4} + \bar{4} + \bar{2} = \overline{10} = \bar{0}$

$A_{16}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Die Graphik zeigt alle ~~Elemte~~ Elemente der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.
Diese Menge werde in ~~[illegible]~~ fünf Kongruenzklassen eingeteilt,
weil ja hier „modulo 5" dargestellt werden sollte.
Dass es bei modulo 5 fünf Kongruenzklassen geben muss,
ist ja wohl klar, denn die Menge der ganzen Zahlen
also das Rechteck Elemente beinhaltet, die anders auf
die fünf reagieren. z.B. sind die Elemente, die in der
ganz linken Säule stehen glatt durch 5 teilbar. Die
Säule daneben dagegen beinhaltet die Elemente, die man zwar auch
durch 5 ~~[illegible]~~ teilen kann (mehr oder weniger) aber den
Rest 1 lassen, diese Säule nennt man auch „$5\mathbb{Z}+1$".
~~$\mathbb{Z}$ ist ja die Menge der ganzen Zahlen, die 5 beinhaltet das~~
Die zweite Säule heißt „$5\mathbb{Z}+2$", die dritte „$5\mathbb{Z}+3$" u.sw.
bis zur rechten, die „$5\mathbb{Z}+4$" heißt. Die erste Säule heißt übrigens
~~[illegible]~~ einfach nur „$5\mathbb{Z}$", da in der ja alle Elemente stehen die
sich glatt durch 5 teilen lassen.
~~Die Elemte der~~ Man kann ~~die~~ die Elemente zweier Säulen auch
addieren und an dem Ergebnis sehen, in welcher Kongruenz-
klasse das Ergebnis gehört. Einfach ~~[illegible]~~ das Ergebnis durch
5 teilen und dann schauen, ob ein Rest übrig bleibt oder
es sich restlos teilt.

$A_{17}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

- Die Elemente einer Spalte gehören zu einer Äquivalenzklasse
Die erste Spalte zu modulo 5 ist $5\mathbb{Z}+0 := \bar{0}$
$= \{\ldots, 0, 5, 10, \ldots\}$
Die zweite Spalte hat den Rest $\bar{1}$. $\Rightarrow$ ~~$n\mathbb{Z}+1$~~ $5\mathbb{Z}+\bar{1}$
Die dritte Spalte hat den Rest $\bar{3}$. $\Rightarrow$ ~~$n\mathbb{Z}+2$~~ $5\mathbb{Z}+\bar{3}$
Die vierte Spalte hat den Rest $\bar{2}$. $\Rightarrow$ ~~$n\mathbb{Z}+3$~~ $5\mathbb{Z}+\bar{2}$
Die letzte Spalte hat den Rest $\bar{4}$. $\Rightarrow$ ~~$n\mathbb{Z}+4$~~ $5\mathbb{Z}+\bar{4}$

- Bei der Addition zweier Elemente, erhält man wieder einen Rest, der wieder in einer dieser Äquivalenzklassen modulo 5 enthalten ~~sind~~ ist. Die Klassen sind $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$. (s.o)

- ~~der Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$ ist mir nicht~~

$A_{18}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Die Menge der Kongruenz$\overbrace{\text{klassen } (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})}^{\text{modulo 5}}$ läst sich in 5 Klassen unterteilen, denen man wie folgt alle Elemente aus $\mathbb{Z}$ zuordnen kann:

Grüppe 1: $5 \cdot x$
Grüppe 2: $5x + 1$
Grüppe 3: $5x + 2$
Grüppe 4: $5x + 3$
Grüppe 5: $5x + 4$

Durch diese Einteilung hat man alle Elemente aus $\mathbb{Z}$ erfasst und eingeteilt.

Die Kongruenzklassen lassen sich auch verknüpfen. In der Addition zweier Elemente aus $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ addiert man lediglich die "Reste" und ordnet den neuentstandenen Rest einer —— Grüppe zu. Bsp.: $(5x+2) + (5x+3) = 5x+5 = 5x$, also liegt das Ergebnis der Addition von Elementen der Grüppe 2 und 3 in Grüppe 1.

$A_{19}$ Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Die Einteilung der ganzen Zahlen in Kongruenzklassen modulo n erfolgt per Definition wie folgt:
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, dann ist a kongruent modulo n zu b genau dann, wenn $\frac{a-b}{n} \in \mathbb{Z}$
Das heißt, die Ganzen Zahlen werden in Klassen eingeteilt nach den Resten bei ganzzahliger Division durch n.
Jedes Element von $\mathbb{Z}$ wird hiermit eindeutig einer Klasse zugeteilt, in denen jeweils gewisse Rechenregeln gelten. Auch haben wir Operationen auf den Klassen (d. h. Mengen) definiert, wie z. B. die Multiplikation einer solchen Menge mit einer Zahl $n \in \mathbb{Z}$, wobei man eine andere dieser Klassen erhält. In der oben dargestellten Graphik steht jeweils eine solche Kongruenzklasse modulo 5 in einer Zeile. Es gibt also genau n solcher Kongruenzklassen. Bei der Addition zweier Elemente einer Klasse erhält man nicht zwingend ein Element derselben Klasse.

$A_{20}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

Anleitung zum Lesen des Aufsatzes: Klammern sind wegzudenken!

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $5\mathbb{Z}+0$ | $5\mathbb{Z}+1$ | $5\mathbb{Z}+2$ | $5\mathbb{Z}+3$ | |

An dieser Grafik* lässt sich wunderschön ablesen, dass in den Spalten die Untergruppen $n\mathbb{Z}+0$, $n\mathbb{Z}+1$ … usw. stehen (mit den jeweiligen Elementen dieser Untergruppen). Desweiteren lässt sich an dieser - meiner Meinung nach erstaunlich guten - Grafik ablesen, in welcher Kongruenzklasse bzw. Untergruppe man sich nach addieren oder multiplizieren befindet. Verbesserungsvorschläge zur Grafik: vielleicht etwas mehr ausschmücken, mit Blumen oder bunten Farben.

Frage: Worin besteht der Unterschied zwischen Nebenklasse und Untergruppe?

(* = die in ihrer Gesamtheit $\mathbb{Z}$ mod 5 darstellt.)

(Frage: Wie sind die Lösungen zu Aufgaben 3 und 4 des Übungszettels?)

$A_{21}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ··· | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | ··· |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

- die Element in einer Spalte gehören zu einer Äquivalenzklasse
- addiert man zwei Elemente, so erhält man, wenn man die Summe wieder durch 5 dividiert einen Rest, der wieder den Äquivalenzklassen zugeordnet werden kann.
- Die Äquivalenzklassen modulo 5 sind: $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$; das sind die Reste die bei einer Division mit modulo 5 entstehen können
- addiert man zu einer Zahl in einer Klasse, die Zahl 5, so erhält man wieder eine Zahl, die in der selben Klasse ist.
- fasst man alle Äquivalenzklassen zusammen, so erhält man $\mathbb{Z}$.

$A_{22}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| 5 | 5+1 | 5+2 | 5+3 | 5+4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 | Nebenklassen |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | 4 | |

Was sind Kongruenzklassen ?
die 5 Teilt $\mathbb{Z}$ in 5 gleichgroße Teile
Unendliche viele Elemente
Die Addition ergibt von z.B. $(5+1)$ und $(5+2)$ ergibt $\bar{3}$. Man kann nur die $\bar{n}$ addieren, um auf das Ergebnis zu kommen.

$A_{23}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $5\cdot\mathbb{Z}$ | a | b | c | d |

Die Klasse $5\mathbb{Z}$ bezeichnet die Kongruenzklasse, die bei der Division ganzer Zahlen durch 5 keinen Rest lässt. So bezeichnet die Kongruenzklasse a, ganze Zahlen (Reste), die bei der Division durch 5 als Rest übrig bleiben. ($5\cdot\mathbb{Z}+a$ = ?!)

Analog dazu b, c, d, …!

a, b, c, d werden auch additive Restklassen modulo 5 genannt. (glaube ich … ?)

z.B. $\overline{9} + \overline{4} = \overline{3}$ (aus Kongruenzklasse c)

q.e.D. :)

$A_{24}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

Kongruenz-Klasse 0: $\lambda \cdot 5 + 0$
Kongruenz Klasse 1: $\lambda \cdot 5 + 1$
Kongruenz Klasse 2: $\lambda \cdot 5 + 2$
Kongruenz Klasse 3: $\lambda \cdot 5 + 3$
Kongruenz Klasse 4: $\lambda \cdot 5 + 4$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Gegeben ist die Menge $\mathbb{Z}$. Jedes Element dieser Menge wird durch 5 geteilt. So erhält man verschiedene Klassen in denen jeweils eine Gruppe dieser durch 5 geteilten Zahlen enthalten ist. Es entstehen 5 solcher Klassen (wie in der obigen Tabelle zu sehen) die Kongruenz-klasse 0 enthält alle Elemente aus $\mathbb{Z}:5$, die keinen Rest ergeben (bzw. als Rest 0 haben). Also die Zahlen 0, 5, 10 …
Die Klasse 1 enthält alle Elemente aus $\mathbb{Z}$, die beim Teilen durch 5 den Rest 1 ergeben (also z.B. 6 : 5 = 1 Rest 1, 11 : 5 = 2 Rest 1). Analog dazu enthalten die anderen Klassen 2, 3, 4 alle Elemente, die beim Teilen durch 5 den Rest 2, 3, 4 haben.
Möchte man nun zwei Zahlen addieren und wissen, in welche Klasse diese Summe gehört, kann man entweder die Summe durch 5 teilen und prüfen, welcher Rest sich ergibt und damit feststellen, in welche Klasse diese Summe gehört. Oder man addiert die Reste der beiden Zahlen. Die Summe der Reste gibt dann auch wieder die Klasse an. (Bsp.: Zahl a = 10 und Zahl b = 13 ⇒ a ist in Kongruenzklasse 0 und b ist in Klasse 3 dann ist die Summe von a und b in Kongruenzklasse 3. 10 + 13 = 23 23 : 5 = 4 Rest 3)

$A_{25}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:

- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ··· | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | ··· |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ergibt 5 Kongruenzklassen. Bei der Division einer ganzen Zahl durch 5 können sich die Reste 0, 1, 2, 3 oder 4 ergeben. Die Elemente der Klassen sind dabei ~~der Rest~~ die Summe von Rest und $x \cdot 5$, wobei $x \in \mathbb{Z}$. Die Elemente der einzelnen Klassen bilden Folgen, in denen der jeweilige ~~Re~~ Rest als Element vorkommt und der Nachfolger um 5 größer ist.

Jede Zahl $\in \mathbb{Z}$ kommt nur in einer Klasse vor. Die Einteilung ist also eindeutig. Folglich sind die Schnittmengen der Klassen entweder $\emptyset$ oder eine der Klassen selbst.

Bei der Addition 2er Elemente verschiedener Klassen, kommt es auf den Rest der Klassen an. Die jeweiligen Elemente lassen sich als $x \cdot 5 + \text{Rest}$ $(x \in \mathbb{Z})$ schreiben. Man erkennt, dass sich daraus $y \cdot 5 + \text{Summe der Reste}$ (ggf. $:5$, inc$(y)$) ergibt, damit ist die Klasse der Summe $((\text{Rest}_1 + \text{Rest}_2) \bmod 5)$.

In der Grafik findet man die Klasse der Summe (Spalten $0, .., 4$) indem man von der Spalte des einen Elementes um Beschriftung der Spalte des anderen Elementes nach rechts geht, wobei man hier zyklisch vorgehen muss (auf 4 folgt 0).

~~Die Menge der~~

Die Vereinigungsmenge aller Kongruenzklassen ergibt $\mathbb{Z}$

$A_{26}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| −2 | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| −1 | ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| 3 | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Die Kongruenzklasse modulo 5 ist Element von $\mathbb{Z}$. Dabei gibt es Elemente mit Rest 1, Rest 2, Rest 3, Rest 4 und ohne Rest. Diese Elemente treten zyklisch auf (siehe Spalten der Graphik). Die ganze Zahl, der der Rest angehört, ist der jeweiligen Zeile zu entnehmen. Addiert man zwei Zahlen, so erhält man eine Zahl, deren Rest genauso groß ist wie der Rest der Summe beider Reste.

$A_{27}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 ~~ist~~ ~~un~~ lässt sich in 5 unterschiedliche Klassen bzgl. der Addition der Reste einteilen. Die 1.ste Klasse ~~hat~~, $5\mathbb{Z}+0$ hat den Rest 0 (..0, 5, 10, ...), die 2te, $5\mathbb{Z}+1$ den Rest 1 (..−4, 1, 6, ...) und so weiter bis zu $5\mathbb{Z}+4$ mit dem Rest 4 (...−1, 4, 9, ...). D.h. die Elemente ~~lassen sich~~ der einzelnen Klassen lassen sich darstellen als $5\mathbb{Z}+$ einen Rest n. Alle Kongruenzklassen modulo 5 vereinigt ergeben die Menge $\mathbb{Z}$.

$A_{28}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| $5n$ | $5n+1$ | $5n+2$ | $5n+3$ | $5n+4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 besteht aus 5 Teilmengen,
die alle aus $\mathbb{Z}$ sind, also teilt die Kongruenzklasse modulo 5
die Menge aller $\mathbb{Z}$ in 5 Teilmengen auf. Jede dieser Teilmengen
besteht aus unendlich vielen Elementen, wobei die erste alle
Vielfachen der Zahl 5 darstellt, also ..., 0, 5, 10, .... Die zweite
~~Menge~~ Teilmenge stellt alle Vielfachen der Zahl 5 dar, also
5n, wobei immer noch 1 addiert wird, also 5n+1.
Dies kann man dann analog bis 5n+4 fortführen.
5n+5 würde wieder in die erste Kongruenzklasse fallen, da
der „Rest" von 5 wieder durch 5 teilbar ist, und somit
in die erste Kongruenzklasse 5n fallen würde.

$A_{29}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| +5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{-2}$ | $\overline{-1}$ |

Die Elemente der Kongruenzklassen a, b, c, d, e setzen sich wie folgt zusammen:

für d. Kongruenzklasse a: $\{0 \pm 5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

——— " ——— b: $\{1 \pm 5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

——— " ——— c: $\{2 \pm 5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

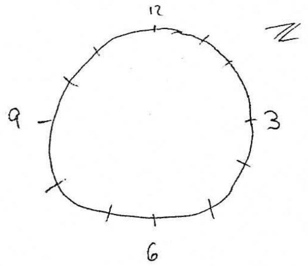
——— " ——— d: $\{3 \pm 5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

——— " ——— e: $\{4 \pm 5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Bzgl. der Addition innerhalb der Kongruenzklassen:
Addiert man ~~ein~~ zwei Elemente einer Kongruenzklasse ist das Ergebnis stets in der jeweiligen Kongruenzklasse enthalten.

*A*30 Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:

- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$




| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| +5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

→ Die Elemente der Kongruenzklassen a,b,c,d,e setzen sich wie folgt zusammen:

für die Kongruenzklasse a : $0 \pm 5n$
———— ″ ——— b : $1 \pm 5n$
———— ″ ——— c : $2 \pm 5n$
———— ″ ——— d : $3 \pm 5n$
———— ″ ——— e : $4 \pm 5n$

Bzgl. der Addition innerhalb der Kongruenzklassen wird deutlich; addiert man zwei Elemente einer Kongruenzklasse ist das Ergebnis stets in der jeweiligen Kongruenzklasse enthalten (also immer ein Teiler von modulo 5)

*A*31 Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:

- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| $5k$ | $5k+1$ | $5k+2$ | $5k+3$ | $5k+4$ |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Es ist ein a definiert, daß Kongruent modulo n zu b ist, falls a−b modulo n ganzzahlig teilbar ist.
Die Menge beinhaltet die Elemente $\{0, 5, 10, \dots, 5k\}$ für $k \in \mathbb{Z}$.
~~Bei Addition~~ Alle 5 Spalten stellen jeweils Kongruenzklassen dar. Bei Addition ist die Summe der Elemente (aus der gleichen Klasse) nur in der ersten Kongruenzklasse in der selben Klasse wie die beiden Summanden.

$A_{32}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| 5n | 5n+1 | 5n+2 | 5n+3 | 5n+4 |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Die Kongruenzklasse modulo 5 teilt die Menge $\mathbb{Z}$ in 5 Teilmengen auf die Erste besteht aus den Elementen die folgende Eigensch~~aft~~ erfüllt: 5n, die zweite: 5n+1, die dritte: 5n+2 die vierte 5n+3, die fünfte: 5n+4.
Jede diese Teilmengen hat unendlich viele Elemente.

$A_{33}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| 5n | 5n+1 | 5n+2 | 5n+3 | 5n+4 |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 wird in 5 Teilmengen unterteilt, wobei jede TM verschiedene Eigenschaften erfüllt:

5n | 5n+1 | 5n+2 | 5n+3 | 5n+4

Die Menge der Kongruenzklassen modulo 5, oder die Teilmengen zusammen, beschreiben alle Elemente aus $\mathbb{Z}$.

$A_{34}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Man nimmt zwei beliebige Zahlen a und b, die aber in einer Spalte liegen müssen, und bildet ihre Differenz.
Diese ist stets durch 5 teilbar im Beispiel, es ist zum Beispiel $13-(-2)=15$ teilbar durch 5 oder $10-5=5$ teilbar durch 5.
Also kann man aus jeder Spalte ein Element a und ein Element b wählen, ihre Differenz bilden und dann mit Teilen durch 5 eine ganze Zahl z erhalten → a heißt dann kongruent modulo 5 zu b.
Da wir eine ganze Zahl z erhalten, ist die Kongruenzklasse modulo 5 eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$.
Jedes Element der Graphik wird in eine bestimmte „Einheit" eingeteilt und es gelten gewisse Rechenregeln

$\{5\lambda \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$ → z.B. $5 \cdot 2 = 10$
$\{5\lambda+1 \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$ → z.B. $5 \cdot 3 + 1 = 16$
$\{5\lambda+2 \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$ → z.B. $5 \cdot 3 + 2 = 17$
$\{5\lambda+3 \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$ → z.B. $5 \cdot 2 + 3 = 13$
$\{5\lambda+4 \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$ → z.B. $5 \cdot 1 + 4 = 9$

$A_{35}$ Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ... | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Gegeben ist die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Diese werden in Kongrüenzklassen modülo 5 eingeteilt. Jede dieser 5 Klassen hat ünendlich viele Elemente, die jeweils züeinander kongrüent sind. ~~[illegible]~~
Die erste Kongrüenzklasse lässt sich darstellen als

$\{5\lambda / \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\Leftarrow$ Rest 0

die zweite lässt sich darstellen als

$\{5\lambda + 1 / \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\Leftarrow$ Rest 1

die dritte als

$\{5\lambda + 2 / \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\Leftarrow$ Rest 2

die vierte als

$\{5\lambda + 3 / \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\Leftarrow$ Rest 3

die fünfte als

$\{5\lambda + 4 / \lambda \in \mathbb{R}\}$. $\Leftarrow$ Rest 4

Will man wissen, welche Zahl z aüs $\mathbb{Z}$ in welche Kongrüenzklasse gehört, rechnet man:

$$\frac{z-5}{5}.$$

Bei dieser Rechnüng könnte ein Rest n übrigbleiben mit $n = \{0,1,2,3,4\}$. Anhand dieses n kann man sehen, in welche Kongrüenzklasse z gehört.
Züm Beispiel ist $z = 12$. So rechnet man

$\frac{12-5}{5} = 7:5 = 1$ Rest 2. Also $n = 2$.

Hieraüs folgt, das $z = 12$ in der 3. Kongrüenzklass liegen müss, da in ihr alle Elemente aüs $\mathbb{Z}$ mit $\frac{z-5}{5}$ = Rest 2 liegen.

*A*36

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| $\lambda 5$ | $5\lambda+1$ | $\lambda 5+2$ | $\lambda 5+3$ | $\lambda 5+4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Die Graphik zeigt die Kongruenzklassen modulo 5. ~~Als~~

Die erste Klasse setzt sich aus den Elementen $\lambda 5$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ zusammen, die zweite aus $\lambda 5+1$, die dritte aus $\lambda 5+2$, die dritte aus $\lambda 5+3$ und die vierte $\lambda 5+4$.

Diese 5 Klassen zusammen bilden die Menge $\mathbb{Z}$.

~~Innerhalb~~

(Die Klassen haben keine Schnittmenge.)

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist (soweit ich weiss) eine mögliche schreibweise des Zusammenhang von $\mathbb{Z}$ zu den Klassen.

## $A_{37}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| b | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

$\mathbb{Z}$

Die vorliegende Graphik ist eine Darstellung der Menge der Kongruenzklassen modulo 5.
Die Kongruenzklassen nennt man noch Nebenklassen.
Man wählt die a, b, die miteinander dividiert werden.
Das sind die Elemente, die zu einer bestimmten Gruppe gehoren.

$n\mathbb{Z}$.

## $A_{38}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente – n!
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | $5\lambda+2$ | | $5\lambda+4$ |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | … | −2 | −1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $5\lambda$ | $5\lambda+1$ | | $5\lambda+3$ | |

a ist k. m. 5 zu b

also: $\frac{a-b}{5}$

a ist kongruent modulo n zu b, wenn a−b durch n teilbar ist. Man muß also eine ganze Zahl (wegen $\mathbb{Z}$) finden, die sich als Produkt aus 5 und einer weiteren ganze Zahl schreiben lässt, damit diese Bedingung erfüllt wird.

$A_{39}$

Die folgende Graphik soll die Menge der Kongruenzklassen modulo 5 darstellen. Erkläre dies in einem kleinen Aufsatz. Berücksichtige dabei:
- Elemente
- Addition
- Zusammenhang zu $\mathbb{Z}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

$5\mathbb{Z}$ $5\mathbb{Z}+1$ $5\mathbb{Z}+2$ $5\mathbb{Z}+3$ $5\mathbb{Z}+4$

?