

Zur Kontinuumsmechanik inverser Geometrie probleme

FRANZ-JOSEPH BARTHOLD

Unabridged, electronic reprint of the Habilitationsschrift
On continuum mechanics of inverse geometry problems

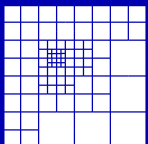
Original Publication:

Braunschweiger Schriften zur Mechanik 44-2002,
TU Braunschweig, 2002

NMI-REPORT 2004-A-02

Contact

Prof. Dr.-Ing. habil. Franz-Joseph Barthold
Chair of Numerical Methods and Information Processing
Department of Architecture and Civil Engineering
University of Dortmund
August-Schmidt. Str. 8, D-44221 Dortmund, Germany
Phone: +49-(0)231-755-4776, Fax: +49-(0)23-755-7260
E-Mail: franz-joseph.barthold@uni-dortmund.de
URL: <http://www.bauwesen.uni-dortmund.de/nmi/>



Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 44–2002

**Zur Kontinuumsmechanik
inverser Geometrieprobleme**

von

Franz-Joseph Barthold

Computational Sciences in Engineering

Technische Universität Braunschweig

Herausgegeben vom Mechanik-Zentrum der
Technischen Universität Braunschweig

Schriftleiter:

Prof. Dr. rer. nat. H. Antes

Institut für Angewandte Mechanik

Postfach 3329

38023 Braunschweig

Tel.: 0531/391-7101

Fax.: 0531/391-5843

Vom Fachbereich Bauingenieurwesen
der Technischen Universität Braunschweig
genehmigte Habilitation im Fachgebiet „Mechanik“

Tag der Einreichung: 23.06.2000

Tag des Kolloquiums: 13.07.2001

Berichter:

Prof. Dr. rer. nat. H. Antes

Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof

Prof. Dr.-Ing. P. Wriggers

©2002 F.-J. Barthold, Braunschweig

BSM 44-2002

ISBN 3-920395-43-3

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise zu
vervielfältigen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik (IBNM) der Universität Hannover im Zeitraum von 1995 bis 1999 und wurde nach dem Wechsel als Kursdirektor des Masterstudienganges „Computational Sciences in Engineering“ (CSE) an die TU Braunschweig im Frühjahr 2000 fertiggestellt.

Dem emeritierten Leiter des Instituts für Baumechanik und Numerische Mechanik, Herrn em. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. mult. Erwin Stein, danke ich für die langjährige vertrauensvolle Zusammenarbeit im Institut und seine großzügige Unterstützung und Förderung. Ohne das von ihm geschaffene attraktive und äußerst stimulierende wissenschaftliche Umfeld wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Allen Mitarbeitern des IBNM der Universität Hannover sowie von CSE der Technischen Universität Braunschweig danke ich, die durch ihre freundschaftliche Zusammenarbeit, ihre wertvollen Ratschläge und hilfreichen Diskussionen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Dieser Dank gilt – nicht ausschließlich, aber insbesondere – den Mitglieder der Arbeitsgruppe „Strukturoptimierung“ des IBNM, d.h. namentlich Dr.-Ing. Axel Becker, Dr.-Ing. Andreas Falk, Dr.-Ing. Lutz Meyer und Dr.-Ing. Karin Wiechmann sowie den Diplomanden Dipl.-Ing. Simone Mesecke und Dipl.-Ing. Mohammad Firuziaan.

Weiterhin bedanke ich mich herzlich bei Herrn Professor Dr. rer. nat. H. Antes, Herrn Professor Dr.-Ing. K. Schweizerhof und Herrn Professor Dr.-Ing. P. Wriggers für zahlreiche wertvolle Anregungen und Hinweise sowie für die Übernahme der Referate.

Mein besonderer Dank gebührt meiner Frau Silke, meinen Kindern und allen denen, die mir die familiären Voraussetzungen für den erfolgreichen Abschluß der Habilitation geschaffen haben.

Braunschweig, im April 2002

Franz-Joseph Barthold

Zusammenfassung

In dieser Arbeit *Zur Kontinuumsmechanik inverser Geometrie Probleme* werden die theoretischen und algorithmischen Grundlagen von Designänderungen und deren Auswirkungen auf die Strukturantwort in die Kontinuumsmechanik eingeführt und diskutiert.

Die vorgeschlagene *lokal-konvektive Betrachtungsweise* bzgl. konvektiver (lokaler) Koordinaten wird aus dem Begriff der (*differenzierbaren*) *Mannigfaltigkeit* hergeleitet und stellt für inverse Geometrie Probleme (z.B. Strukturoptimierung) eine Weiterentwicklung des Konzeptes *materieller Körper* (gemäß dem intrinsischen Konzept von W. Noll) dar. Hiermit sind auch die kinematischen Beziehungen der wichtigen numerischen Hilfsmittel, d.h. des *Computer Aided Geometric Design* (CAGD) und der *Finite Elemente Methode* (FEM) sowie deren Interaktion direkt aus der Theorie abzulesen. Die innerhalb der *variationellen Sensitivitätsanalyse* bisher bekannten Vorgehensweisen des *Material Derivative Approach* (MDA) sowie des *Domain Parametrization Approach* (DPA) können durch die lokal-konvektive Betrachtungsweise ersetzt werden.

Theoretische Darstellungen sowie numerische Untersuchungen zur Schädigungs- und Bruchmechanik sowie zur Fragestellung robuster, zuverlässiger Ingenieurstrukturen zeigen die Bedeutung der Empfindlichkeitsuntersuchungen und veranschaulichen die hier vorgestellten Methodik zur Sensitivitätsanalyse. Die Bandbreite möglicher Einsatzgebiete einer problemgerechten Modellierung und algorithmischen Umsetzung (mittels CAGD und FEM) inverser Geometrie Probleme werden exemplarisch an akademischen Beispielen, wie z.B. der optimalen Auslegung der Querschnittsgeometrie von PKW-Stoßfängern, aufgezeigt.

Abstract

This paper introduces and discusses the theoretical and algorithmical basic principles of design modifications and their effects on the structural response within the field of continuum mechanics.

The proposed *local-convected* approach concerning convected (i.e. local) coordinates is derived from (differentiable) manifolds and has to be seen as a further development of the concept of *material bodies* (according to the intrinsic concept of W. Noll) for the field of inverse geometric problems (e.g. structural optimization). In this connection it is also possible to gain information about kinematic relations between the most important numerical tools, i.e. the *computer aided geometric design* (cagd) and the *finite element method* (fem) as well as their interaction, directly from theory. The *material derivative approach* and the *domain parametrization approach* can also be substituted by the local-convected approach.

Theoretical representations as well as numerical investigations in damage and fracture mechanics and the question of robust and reliable engineering structures show the importance of sensitivity studies and illustrate the methodology of sensitivity analysis. The scope of possible fields of application regarding problem-oriented modelling and algorithmic implementation of inverse geometric problems (using cagd and fem) will be shown exemplarily by means of academic examples, like e.g. the optimal construction of the sectional geometry of car bumpers.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Überblick	1
1.1	Problemstellung	2
1.2	Stand der Forschung	3
1.3	Aufgabenstellung und Ziele dieser Arbeit	8
2	Kinematische Grundlagen	11
2.1	Kinematik in der Kontinuumsmechanik	13
2.2	Kinematik in CAGD und FEM	31
2.3	Integrierte Darstellung der Kinematik I	36
3	Kontinuumsmechanik der lokal-konvektiven Betrachtungsweise	39
3.1	Gradienten und Tangentenabbildungen	41
3.2	Verzerrungsmaße	47
3.3	Spannungen und Spannungsleistung	55
3.4	Materialgesetze	61
3.5	Bilanz- und Erhaltungssätze	62
3.6	Variationsprinzipien für Analyse und Sensitivität	65
3.7	Zusammenfassung und Ausblick	70
4	Diskretisierungskonzepte für Geometrie und physikalische Größen	71
4.1	Integrierte Darstellung der Kinematik II	73
4.2	Approximationsräume und Adaptivität	81
5	Sensitivitätsanalyse ausgewählter Problemklassen	87
5.1	Grundstruktur der Sensitivitätsanalyse	89
5.2	Hinweise zur Implementation	98
5.3	Sensitivitätsanalyse in der Schädigungsmechanik	100

6	Formoptimierungsprobleme	115
6.1	Formoptimierung eines PKW-Stoßfängers	117
6.2	Optimierung in der Bruchmechanik	128
6.3	Ein Konzept für robuste Konstruktionen	145
7	Zusammenfassung und Ausblick	157
7.1	Zusammenfassung	157
7.2	Ausblick	158
A	Anmerkungen zur Kontinuumsmechanik	159
A.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	161
A.2	Hinweise zur Tensorrechnung	162
A.3	Transformationsbeziehungen und deren Variation	168
A.4	Transformation und Variation der Verzerrungen	179
A.5	Transformation und Variation der Spannungen	186
A.6	Details zu den Materialgesetzen	191
B	Hinweise zur Strukturoptimierung und zur Sensitivitätsanalyse	193
B.1	Begriffsbildung und Modellprobleme	194
B.2	Methoden zur Sensitivitätsanalyse	198
B.3	Variationelle Methode der Sensitivitätsanalyse	200
	Literaturverzeichnis	208

Verzeichnis der Bilder

2.1	Der materielle Körper \mathcal{B} und seine Konfigurationen Ω_o und Ω_t	14
2.2	Eine Karte der Mannigfaltigkeit „materieller Körper“	14
2.3	Abbildungen der lokal-konvektiven Betrachtungsweise	15
2.4	Unterschiedliche Parametrisierungen der verschiedenen Konfigurationen . . .	16
2.5	Veranschaulichung konvektiver Koordinaten	17
2.6	Unterschiedliche Definition kontinuumsmechanischer Feldgrößen	19
2.7	Darstellung des Design-Raum-Zeit-Kontinuums	21
2.8	Darstellung der Konfigurationen bei Parameteränderungen im Design	23
2.9	Abbildungen zur Kinematik für einfache Körper	27
2.10	Darstellung von Bézierlinien über die zugehörigen Kontrollpunkte	32
2.11	Parametrische Definition von Coons-Flächen	32
2.12	Darstellung des isoparametrischen Konzepts	35
2.13	Abbildungen über CAGD- und FEM-Parameterräume	37
3.1	Tangentenabbildungen in der Kontinuumsmechanik	43
4.1	Beziehungen zwischen den Gradientenoperatoren	74
5.1	CAGD und FEM Modelle	93
5.2	Veranschaulichung der Sensitivitätsanalyse	96
5.3	Veranschaulichung der Sensitivitätsanalyse für die Spannungen	96
5.4	Flußdiagramm für Strukturanalyse und Sensitivitätsanalyse	102
5.5	Ausgangssystem, Randbedingungen und Lasten	108
5.6	Legende: Verteilung der Schädigungsfunktion $D := 1 - g(\Xi_s)$	109
5.7	Verlauf der Schädigung für das optimale Design A	110
5.8	Verteilung der Schädigung für das optimale Design B	110
5.9	Verteilung der Schädigung für das optimale Design C	110
5.10	Verteilung der Schädigung für das optimale Design D	111
5.11	Verteilung der Schädigung für das optimale Design E	112

5.12	Verteilung der Schädigung für das optimale Design H	113
5.13	Verletzung der Nebenbedingung bei Veränderung des Designs	113
6.1	Modellierung des Stoßfängers als nichtlineare Feder	117
6.2	Darstellung der gewünschten Last-Verformungs-Kurve des Stoßfängers	118
6.3	Spannungsdehnungslinie für den Bereich $0.9 \leq \lambda_1 \leq 1.1$	120
6.4	Spannungsdehnungslinie für den Bereich $0.7 \leq \lambda_1 \leq 1.5$	120
6.5	Ausgangsgeometrie und deformierte Struktur bei 34 mm Verschiebung	121
6.6	Lastverschiebungskurve für die Ausgangsgeometrie	122
6.7	Vergleich unterschiedlicher FE-Diskretisierungen	123
6.8	Vergleich unterschiedlicher Elementformulierungen	123
6.9	Erste optimale Geometrie und deformierte Struktur bei 15 mm Verschiebung	124
6.10	Lastverschiebungskurven für die erste optimale Geometrie	125
6.11	Zweites Optimum und deformierte Struktur bei 35 mm Verschiebung	126
6.12	Lastverschiebungskurven für die zweite optimale Geometrie	126
6.13	Doppelsymmetrische Scheibe mit zwei Außenrissen	130
6.14	Gleichmäßig und adaptiv verfeinertes FE-Netz	131
6.15	Konvergenz der Energie über die Anzahl der Elemente	131
6.16	Virtuelles Rißöffnungsfeld als großes bzw. kleines Rechteck	133
6.17	Virtuelles Rißöffnungsfeld als Ellipse mit bzw. ohne Starrkörperanteil	133
6.18	Raum zulässiger virtueller Rißöffnungsfelder	135
6.19	Verlauf der Energiefreisetzungsrates bei verschiedenen Rißrichtungen	136
6.20	Kopfplattenstoß mit unterschiedlichen Randbedingungen	140
6.21	Vergleichsspannungsverteilung für Modelle I und II	141
6.22	Vergleichsspannungsverteilung für Modell III	141
6.23	Orientierung eines Anfangsrisse im Punkt B	142
6.24	Änderung der Energiefreisetzungsrates für unterschiedliche Rißrichtungen	142
6.25	Ausbildung der Schweißnaht für das Design 1 und 2	143
6.26	Ausbildung der Schweißnaht für das Design 3 und 4	143
A.1	Eine Karte der Mannigfaltigkeit „materieller Körper“	161
B.1	Abbildungen und Konfigurationen des <i>Material Derivative Approach</i>	202
B.2	Abbildungen und Konfigurationen des <i>Domain Parametrization Approach</i>	205
B.3	Grundlagen der Strukturoptimierung	207

Verzeichnis der Tabellen

2.1	Betrachtungsweisen und deren Abbildungen	20
2.2	Basisabbildungen und deren Approximationen	36
3.1	Tangentenabbildungen unterschiedlicher Betrachtungsweisen	42
3.2	Spannungstensoren	55
5.1	Position der Kontrollpunkte für das Experiment ohne Belastungsgeschichte .	111
5.2	Ergebnisse für das Experiment $\lambda_E, \lambda_F, \lambda_G$	112
6.1	Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrates von der Orientierung des Anfangsrisses	142
6.2	Energiefreisetzungsrates in Abhängigkeit der Schweißnahtform	143
A.1	Tangentenabbildungen	168
A.2	Pull-back und push-forward Abbildungen für kontravariante Größen	172
A.3	Pull-back und push-forward Abbildungen für kovariante Größen	173
A.4	Transformation von Linien-, Flächen- und Volumenelementen	175
A.5	Variation von Linien-, Flächen- und Volumenelementen	176

Verzeichnis der Tafeln

1.1	Komplexität der Problemstellung dieser Arbeit	1
1.2	Sensitivitätsanalyse: Kritik an etablierten Zugängen und Motivation	8
1.3	Detailziele der Arbeit sowie eigene Veröffentlichungen zu den Themen	9
2.1	Hinweise zur Theorie und Numerik von Geometrie und Deformation	11
3.1	Kontinuumsmechanik der lokal-konvektiven Betrachtungsweise	39
5.1	Modellproblem für die Schädigung hyperelastischer Materialien	100
5.2	Struktur der Sensitivitätsanalyse für Schädigungsverhalten	103
6.1	Berechnung und Optimierung der robusten Zuverlässigkeit	154
B.1	Prinzipielles Ablaufschema von direkter Analyse und Sensitivitätsanalyse	195

Kapitel 1

Einleitung und Überblick

Diese Arbeit behandelt Aspekte der kontinuumsmechanischen Darstellung und adaptiven, numerischen Berechnung der Empfindlichkeit (Sensitivität) geometrisch und physikalisch nichtlinearer Deformationsprozesse gegenüber glatten Änderungen der Strukturgeometrie. Konzeptionell ist hiermit auch andere stetig differenzierbare Parameteränderungen erfaßt.

Die Komplexität der Problemstellung spiegelt sich in der Vielzahl der zu berücksichtigenden Wissenschaftsgebiete und deren Interaktionen wider. Ein theoretisches Gesamtkonzept, wie auch eine strukturierte algorithmische Realisation, sind daher für die effiziente Lösung unerlässlich. Akademische Studien sowie Prinzipbeispiele verdeutlichen die Vorgehensweise. Zentrale Aspekte dieser Arbeit sind in der nachfolgende Tabelle zusammengefaßt.

Tafel 1.1: Komplexität der Problemstellung dieser Arbeit

- Kontinuumsmechanik als Rahmen für alle nachfolgenden Wissenschaftsgebiete
- Materialtheorie für geschichtsabhängiges Verhalten und Schädigung
- Variationsprinzipien für Analyse und Optimierung sowie Sensitivitätsanalyse
- Diskretisierende Methoden der Kontinuumsmechanik
 - Computer Aided Geometric Design (CAGD) für Geometrie
 - Finite Elemente Methode (FEM) für Deformation
- Adaptive Methoden in CAGD und FEM
- Modellierung und Lösung der Optimierungsaufgabe

Entsprechend der Bedeutung des theoretischen Fundamentes für jede effiziente numerische Realisation ist diese Arbeit – über die Anwendung in der Sensitivitätsanalyse hinaus – ein kontinuumsmechanischer Grundlagenbeitrag. Weitreichende Hinweise zur Struktur der verwendeten numerischen Methoden (CAGD und FEM) ermöglichen die Formulierung eines konsistenten numerischen Gesamtkonzeptes. Die einheitliche Darstellung von Struktur- und Sensitivitätsanalyse in Kontinuumsmechanik, Diskretisierung, Adaption sowie ihrer algorithmischen Umsetzung ist in dieser geschlossenen Form neuartig.

1.1 Problemstellung

Die Kenntnis der Empfindlichkeit von Ingenieurbauwerken (Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen, Stabilität, Tragsicherheit, usw.) gegenüber Variationen wichtiger Problemvariablen (Geometrie, Material, Lasten, usw.) ist in der Konstruktions-, Bau- sowie Betriebsphase von großer Bedeutung. Die zentrale Aufgabe des Ingenieurs ist es hierbei, die Standicherheit des Bauwerks bei Beachtung wirtschaftlicher Randbedingungen zu gewährleisten. Diese Grundproblematik prägt das Ingenieurwesen seit jeher und es sind viele intuitive Methoden zur Optimierung der Konstruktion entstanden.

Mit der Entwicklung moderner Rechner- und Rechentechnologien in Hard- und Software ist es heutzutage jedoch erstmals möglich, die *Empfindlichkeit gegenüber Variationen* im Rahmen einer Studie, der sogenannten *Empfindlichkeitsanalyse* bzw. *Sensitivitätsanalyse*¹, zu quantifizieren. Diese Kenntnis wird in Zukunft mit der Verbesserung der numerischen Hilfsmittel in zunehmendem Maße Eingang in die tägliche Ingenieurarbeit finden. Bisher ist die Sensitivitätsanalyse vor allem als Mittel zur Gradientenberechnung im Rahmen der automatischen Strukturoptimierung verwendet worden. Weitergehende Anwendungen umfassen z.B. die Steuerung adaptiver Methoden zur problemgerechten Modellbildung naturwissenschaftlicher Aufgabenstellungen sowie Fragen der Zuverlässigkeit von Ingenieurbauwerken.

Die theoretischen Grundlagen sowie die entstandenen algorithmischen Konzepte haben sich in den einzelnen Fachdisziplinen (Kontinuumsmechanik und Materialtheorie, FEM, CAGD, Strukturoptimierung) in den vergangenen fünfzig Jahren zumeist unabhängig voneinander entwickelt. Die Grenzen der Kopplung fertiger Konzepte und der hierzu korrespondierenden Software sind in der kommerziellen Nutzung der Strukturoptimierung deutlich zu erkennen.

Vor dem Hintergrund komplexer industrieller Anwendungen ist für eine Weiterentwicklung der Strukturoptimierung eine weitergehende Interaktion der beteiligten Wissenschaftsgebiete erforderlich. Diese Integration muß zunächst auf der theoretischen Ebene beschrieben werden, bevor eine effiziente Kopplung numerischer und algorithmischer Bausteine möglich ist.

Aus dieser Beobachtung heraus wird in der vorliegenden Arbeit eine Reformulierung der Kontinuumsmechanik im Hinblick auf eine integrierte Darstellung zusammen mit den Grundlagen der Strukturoptimierung vorgenommen. Neben den grundlegenden Bilanz- und Erhaltungsaussagen sowie den Prinzipien der Materialbeschreibung sind daher verstärkt auch die differentialgeometrischen Grundlagen einer Geometriebeschreibung (wie es das CAGD kennt) sowie die Grundlagen der Variationsrechnung einzubeziehen.

¹In dieser Arbeit wird vornehmlich die synonyme Bezeichnung *Sensitivitätsanalyse* gewählt.

1.2 Stand der Forschung

Die genannte Problemstellung berührt mehrere Wissenschaftsgebiete, die zahlreiche bedeutende Forschungsrichtungen aufweisen können. Die Hinweise zum Stand der Forschung können und sollen deshalb nur wenige – subjektive und unvollständige – Bemerkungen zur Entwicklung der einzelnen Gebiete sowie zur Interaktion der Gebiete untereinander sein.

Der Stand der Forschung auf dem Gebiet der Sensitivitätsanalyse sowie der Stand der Technik ihrer industriellen Applikation können an dieser Stelle nur unvollständig dargestellt werden. Für detailliertere Informationen ist Kapitel B.3 im Anhang beigelegt worden.

Die Bewertung des aktuellen Entwicklungsstandes bezüglich der Interaktion der beteiligten Forschungsrichtungen verdeutlicht die Motivation des Autors zur Anfertigung dieser Arbeit.

1.2.1 Kontinuumsmechanik und Materialtheorie

Die Behandlung mechanischer Probleme war für mehrere Jahrhunderte die Triebfeder grundlegender wissenschaftlicher Entwicklungen, die von bedeutenden Persönlichkeiten wie u.a. *C.F. Gauß*, *L. Euler*, *J. Bernoulli*, *G.F. Leibniz*, *I. Newton* vorangetrieben wurde, siehe z.B. die Darstellungen in *Szabo* [218]. Die Entwicklung der „Rationalen Mechanik“ in der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts setzt die Entwicklung auf dem Gebiet der Festkörpermechanik fort. Die phänomenologische, mathematische Beschreibung thermomechanischer Prozesse wurde durch zahlreiche Arbeiten unter anderem von *S. Antman*, *J. Ball*, *M. Gurtin*, *R. Knops*, *P. Naghdi*, *W. Noll*, *R. Rivlin* und *C. Truesdell* systematisch formuliert, siehe beispielhaft *Green*, *Zerna* [107] sowie *Truesdell*, *Noll* [220] mit einer umfangreichen Literaturangabe. Moderne Darstellungen der Kontinuumsmechanik sowie zahlreiche weiterführende Referenzen finden sich z.B. in *Malvern* [162], *Wang*, *Truesdell* [223], *Gurtin* [111] bzw. für die Elastizitätstheorie z.B. in *Ogden* [182], *Ciarlet* [74] und *Stein*, *Barthold* [208].

Die Weiterentwicklung der Kontinuumsmechanik in den letzten Jahren ist wesentlich durch eine konsequent differentialgeometrische Formulierung, siehe z.B. *Marsden*, *Hughes* [164], auf der Basis des Konzepts differenzierbarer Mannigfaltigkeiten geprägt. Dieses erfordert komplexere mathematische Methoden, die ihre Leistungsfähigkeit jedoch durch konzeptionelle Klarheit und durch weitreichende Erkenntnisse unter Beweis gestellt haben. Beispielhaft sei auf die Arbeiten von *T. Hughes*, *J. Simo*, *P. Wriggers*, *C. Miehe* verwiesen.

Basierend auf den kontinuumsmechanischen Grundlagen sind vielfältige Beiträge zur Modellbildung komplexer Materialien entstanden, siehe z.B. *Krawietz* [152], *Lubliner* [160]. Es werden sowohl thermomechanische Modelle als auch insbesondere komplexe kontinuumsmechanische Schädigungstheorien, siehe z.B. *Kachanov* [145], *Lemaitre* [158], *Krajcinovic* [151], betrachtet. Hierbei ist die Beschreibung physikalischer Phänomene auf unterschiedlichen Mikro-, Meso- bzw. Makroskalen sowie deren Interaktion unter Verwendung von Homogenisierungen von steigender Bedeutung. Ein Einsatzbereich hierfür ist das Design neuer Materialien für definierte industrielle Anwendungen. Eine Absicherung der komplexen mechanischen Modellbildung erfordert eine enge Zusammenarbeit mit der Versuchstechnik und der Materialprüfung.

Die Entwicklung von Kontinuumsmechanik und Materialtheorie ist eng miteinander verknüpft und in den letzten Jahrzehnten von der Numerik, d.h. der *Finite Elemente Methode*

wesentlich mitgeprägt worden, siehe z.B. *Hughes, Simo* [202]. Heutzutage steht mit der Kontinuumsmechanischen Materialtheorie sowie mit den zugehörigen Algorithmen ein akzeptiertes und sehr leistungsfähiges Hilfsmittel zur Beschreibung realen Materialverhaltens sowie der Schädigungsphänomene auf verschiedenen Skalen zur Verfügung.

Bemerkenswert an der Entwicklung der Kontinuumsmechanik ist jedoch, daß (trotz des starken differentialgeometrischen Einflusses) durch die (praktisch ausschließliche) Verwendung einer (auf die Referenzkonfiguration) bezogenen Betrachtungsweise der *Geometriedefinition* der Körper wenig Beachtung geschenkt wird.

Darüberhinaus konnten die beiden zentralen numerischen Hilfsmittel (CAGD und FEM) die Entwicklung der Kontinuumsmechanik bzw. ihrer Darstellung in den Lehrbüchern nicht wesentlich beeinflussen. Entsprechendes gilt für die Sensitivitätsanalyse bzgl. jeder Art von Problemvariablen sowie für inverse Probleme bzw. für die Optimierung.

1.2.2 Finite Elemente Methode (FEM)

Neben der Kontinuumsmechanik und Materialtheorie ist als zweite bedeutende Entwicklung der vergangenen fünfzig Jahre die Entstehung, Weiterentwicklung sowie industrielle Anwendung der *Finite Elemente Methode* (FEM) zu nennen. Entgegen der Entwicklung der Kontinuumsmechanik, die sich mit langer Tradition den theoretischen Grundlagen widmet, konnte die FEM erst mit dem Aufkommen der elektronischen Datenverarbeitung entstehen. Wesentliche Beiträge wurden in den fünfziger Jahren zunächst für die Problemstellung der linearen Stabstatik von *Argyris* [4], *Turner et al.* [221] sowie *Clough* [77] veröffentlicht.

Aus diesen Anfängen heraus hat sich das leistungsfähigste numerische Werkzeug für die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik entwickelt. Die Einsatzmöglichkeiten sind nahezu unbegrenzt und dementsprechend vielfältig sind die Forschungsrichtungen sowie die industriellen Applikationen. Beispielhaft sei für Hinweise zur grundlegenden Darstellung auf die Lehrbücher von *Zienkiewicz, Taylor* [232, 233], *Hughes* [139], *Crisfield* [78, 79] verwiesen.

Als weiterhin zentraler Forschungsgegenstand der FEM ist die Elementtechnologie und die Wahl geeigneter Approximationskonzepte für die verschiedenen Strukturelemente bei geometrisch und physikalisch nichtlinearem Verhalten zu sehen. Moderne Konzepte umfassen hierbei *gemischte Methoden* wie z.B. die sogenannten *Enhanced Elementformulierungen*, siehe z.B. die Darstellungen in den Arbeiten z.B. von *Simo, Taylor, Ramm* und Lehrbücher wie z.B. von *Wriggers* [230].

Daneben ist die fehlerkontrollierte Berechnung von Ingenieurstrukturen mit Hilfe der hp-Adaptivität und a posteriori Fehlerschätzern von großer Bedeutung. Eine Vielzahl wissenschaftlicher Untersuchungen mit stark mathematischer Ausprägung ist z.B. von den Arbeitsgruppen von *I. Babuška, O. Zienkiewicz, J.T. Oden, E. Stein, C. Johnson* durchgeführt worden. Neben der Untersuchung nichtlinearer Problemstellungen werden auch Fragen der Dimensions- und Modelladaptivität verstärkt untersucht. Eine Übersicht der aktuellen Forschungsergebnisse findet man z.B. in den Büchern [8] bzw. den Proceedings wichtiger Konferenzen [153].

Zur Durchführung der gewünschten adaptiven Verfeinerung werden leistungsfähige Netzverfeinerungsstrategien sowie die zugehörigen Algorithmen und Softwarebausteine (insbesondere für dreidimensionale Strukturen) entwickelt, siehe z.B. *George* [106].

Industrielle Applikationen stützen sich heutzutage nicht mehr auf *In-House-Entwicklungen* sondern auf ausgereifte kommerzielle Finite Elemente Programmpakete, von denen beispielhaft *MSC-NASTRAN* [179], *ANSYS* [3] und *ABAQUS* [134] erwähnt werden sollen. Sowohl bei den kommerziellen Systemen als auch bei den Forschungsprogrammen gewinnt dabei die *Parallelrechnertechnologie* aufgrund der zunehmenden Komplexität der Modelle und untersuchten Strukturen an Bedeutung. Eine Darstellung der hierbei auftretenden Probleme sowie der verwendeten Algorithmen findet man z.B. in [163]. Die Anpassung bestehender Programme an die neue Technologie unter Verwendung der Möglichkeiten moderner Programmiersprachen stellt eine große Herausforderung an das Softwaremanagement dar.

Die Finite Elemente Methode ist heutzutage ein akzeptiertes numerisches Hilfsmittel sowohl in der Forschung als auch im industriellen Einsatz. Die Bedeutung numerischer Simulationen von Bauteilen z.B. in der Produktentwicklungsphase liegt im Vergleich zu umfangreichen experimentellen Untersuchungen vor allem in der Zeit- und somit auch der Geldersparnis.

Mit der wachsenden Akzeptanz der FEM in der Industrie wurde eine ihrer wesentlichen Beschränkungen sichtbar, d.h. die Geometriebeschreibung der Ausgangskonfiguration durch das FE-Netz unter Verwendung des sogenannten *isoparametrischen Konzeptes*. Es hat sich sowohl im industriellen Einsatz als auch im Rahmen der Strukturoptimierung als enge Beschränkung erwiesen, die Geometrie einer Struktur mit derselben Diskretisierungsmethode zu beschreiben, wie sie für die Strukturantwort, d.h. für den Verschiebungszustand, gewählt wird. Hieraus ergab sich die Notwendigkeit, die CAGD-Methoden für Analyse und Optimierung heranzuziehen.

1.2.3 Computer Aided Geometric Design (CAGD)

Für die numerische Analyse realer Ingenieurprobleme sind neben der FEM noch die Methoden des *Computer Aided Geometric Design* (CAGD) zu nennen. Entgegen der FEM, die in den ersten Jahren im wesentlichen von Bauingenieuren innerhalb der Hochschulen entwickelt wurde, entstand das CAGD aus den Problemstellungen der industriellen Anwendung im Automobil- und Flugzeugbau heraus durch Konstrukteure des Maschinenbaus.

Dabei wurde das Potential der differentialgeometrischen Darstellung parametrischer Kurven und Flächen für die rechnerorientierte CAGD-Darstellung erst spät erkannt. Wesentliche Durchbrüche sind mit der Entwicklung der Bézier-Flächen und Coons-Patches unabhängig voneinander durch *P. de Casteljau* [65, 66, 67] bei Citroen und *P. Bézier* [53, 54, 55] bei Renault erfolgt. Als eigenständige Wissenschaftsrichtung ist CAGD erst seit Mitte der siebziger Jahre (siehe *Barnhill, Riesenfeld* [14]), jedoch mit stetig steigender Bedeutung, zu erkennen. Moderne Darstellungen der differentialgeometrischen Grundlagen sowie Hinweise zur effizienten Numerik finden sich z.B. in *Farin* [99], *Hoschek, Lasser* [136].

Die Methoden des CAGD sind in zahlreichen kommerziellen Programmen des *Computer Aided Design* bzw. der *CAx-Technologien* zu finden und beherrschen den Arbeitsalltag des Konstruktionsingenieurs. Die industriellen Anwendungen, z.B. im Automobil-, Flugzeug- und Maschinenbau, benutzen dabei Softwaresysteme wie z.B. *CATIA* [80], *I-DEAS* [91], *Pro/Engineer* [183] und *Solid Edge* [92]. Die differentialgeometrischen Auswertungen werden dabei im *Geometriemodellierer* (z.B. *Parasolid*, *ASIS* oder *Cas.Cade*) auf der Basis der *B-Rep*- (Boundary Representation) oder der *CSG*- (Constructive Solid Geometry) Darstellung realisiert [143].

Große Anstrengungen werden unternommen, komplexe Strukturen und sogar Produktionsweisen im Rahmen einer CAD-basierten *Produktdaten und Prozeßmodellierung* vollständig digital abzubilden, um z.B. mit parametrischen Beschreibungen notwendige Änderungen leicht durchführen zu können. In diesen Prozeß werden wichtige Auswertefunktionen wie z.B. Stücklisten, Zeichnungen etc. eingebunden. Einen Einblick in diese Thematik gibt [104].

Die Kommunikation der einzelnen Anwendungen untereinander und der Datenaustausch mit den FEM-Programmpaketen geschieht dabei unter Verwendung standardisierter Formate wie z.B. *STEP*, *IGES*, *DXF*. Diese Datenschnittstellen sind historisch durch die getrennte Entwicklung von unterschiedlichen Programmen für FEM und CAGD erforderlich geworden. Theoretische Ergebnisse, welche eine Modifikation von Daten- und Programmstruktur erfordern, können daher im Rahmen kommerzieller CAD-FEM-Strukturen nur schwer umgesetzt werden. Hinweise auf die Probleme einer *CAGD-FEM-Kopplung* sowie Konzepte einer integrierten Modellierung findet man in z.B. [133]

Die Problematik der CAD-FEM-Kopplung, d.h. die Datenaufbereitung und Vernetzung komplexer Industriestrukturen, nimmt eine große Bedeutung im Alltag der FE-Ingenieure ein. Für die Strukturanalyse wird der Aufwand noch durchgeführt, aber der mögliche Einsatz der Strukturoptimierung im kommerziellen Bereich wird deutlich durch die Probleme der CAD-FEM-Kopplung behindert.

1.2.4 Inverse Probleme, Optimierung und Sensitivität

Optimierungsaufgaben, wie z.B. das Problem der Brachistochrone², haben zur Entwicklung einer der leistungsfähigsten Methoden der Mathematik, nämlich der Variationsrechnung, geführt. Hierbei wurden wichtige Beiträge von *Johann Bernoulli*, *Jakob Bernoulli*, *Euler*, *Lagrange*, *Legendre* und *Jacobi* zum Aufbau der Methode geleistet [216]. Die Entwicklung vollzog sich anhand analytischer Probleme bis zur Mitte des vergangenen Jahrhunderts.

Neben dieser mathematischen Betrachtung von Optimierungsaufgaben steht die jahrtausendlang Entwicklung von intuitiven Methoden zur optimalen Konstruktion von Ingenieurbauwerken. Erste Ansätze zur Kontrolle der mechanischen Spannungen über eine gezielte Veränderung der Geometrie findet man bereits 1638 bei *G. Galilei*. Aber erst mit der Arbeit von *A.G.M. Michell* [171] im Jahre 1904, der frühere Arbeiten von *J.C. Maxwell* [166] aus dem Jahre 1854 weiterverfolgte, begann die moderne Entwicklung der Strukturoptimierung.

In der ersten Hälfte des Jahrhunderts dominierten dabei noch fast ausschließlich ingenieurmäßig-heuristische Zugänge. Eine Darstellung dieser Periode findet man z.B. in den Übersichtsartikeln [224, 200].

Erst seit den sechziger Jahren führte eine konsequente Anwendung mathematischer Grundlagen, d.h. der Methoden der Variationsrechnung, mit den jetzt zur Verfügung stehenden numerischen Hilfsmitteln zu einer deutlichen Weiterentwicklung. Neuartig und in der Methode der Variationsrechnung begründet ist dabei die Verwendung erster (und evtl. zweiter) Variationen für die Definition notwendiger (und hinreichender) Optimalitätskriterien. Die Variationen wichtiger Problemfunktionen bilden dabei den Kern der sogenannten *Empfindlichkeitsanalyse* bzw. *Sensitivitätsanalyse*, die erstmals eine Quantifizierung von Parameter-

²Gefragt ist die kürzeste Zeit für den Weg zwischen zwei Punkten. Die Lösung, eine Zykloide, wurde von Johann Bernoulli im Mai 1697 in den Acta Eruditorum, S. 206ff, veröffentlicht.

Veränderungen auf das Tragverhalten von Ingenieurstrukturen ermöglicht. Eine Übersicht der Methoden zur Sensitivitätsanalyse sowie Literaturhinweise finden sich im Anhang B.

Die Entwicklung der Theorie und Algorithmen der Strukturoptimierung in diesem Jahrhundert kann nach *R.H. Gallagher* [103, Kap. 1] in vier Perioden unterteilt werden, wobei eine qualitative Verbesserung erst mit den numerischen Methoden der Variationsrechnung eintrat.

1. *Ingenieur-heuristische Methoden ohne Sensitivität und ohne Numerik*

- (a) *Theory of Layout* (Entwurfskriterien),
- (b) *Simultaneous Mode of Failure* (Simultanes Versagen),

2. *Mathematisch-fundierte Methoden mit Sensitivität und Numerik*

- (a) *Optimality Criteria Methods* (OC)
- (b) *Mathematical Programming Methods* (MP)

Auf eine ausführliche Würdigung der vielen Entwicklungsschienen und numerischen Algorithmen zur Strukturoptimierung (und der verwandten Gebiete) wird an dieser Stelle nicht eingegangen. Grundlegende Lehrbücher zur Thematik sind z.B. [5, 149, 120] bzw. [156, 9, 177] in deutscher Sprache.

Anstatt dessen soll der erreichte Entwicklungsstand folgendermaßen charakterisiert werden.

Nach fast vierzig Jahren theoretischer und rechnerorientierter Forschung, den vielfältigen Implementierungen und Anwendungen in den Hochschulen und der Industrie haben sich leistungsfähige, mathematisch-fundierte Methoden zur Strukturoptimierung herausgebildet. Trotzdem ist es bisher nicht gelungen, die hohen Erwartungen zu erfüllen. Insbesondere die Akzeptanz im industriellen Umfeld ist noch nicht hinreichend vorhanden, d.h. sie ist noch nicht zu einem ernstzunehmenden Hilfsmittel des Ingenieurs im Tagesgeschäft geworden.

Als eine Ursache, neben tradierten Arbeitsweisen und der mangelnden Ausbildung der Ingenieure in den modernen Optimierungsmethoden, kann die (evtl. unterschätzte) Komplexität der Aufgabe angesehen werden, die nur schwer mit bestehenden und evtl. veralteten Softwarebausteinen in Rahmen eines effektiven Gesamtalgorithmus gelöst werden kann. Eine Diskussion der Softwareentwicklungen findet man in [135] sowie in [90] und [144]. Zudem sind die Anforderungen in der Industrie stets interdisziplinär und nur in den seltensten Fällen existiert ein eindeutiges Minimum.

Eine Weiterentwicklung muß sich in Zukunft zum einen wieder verstärkt an den mathematischen Grundlagen orientieren sowie zum anderen (gleichberechtigt) die Anwendbarkeit im industriellen Umfeld verbessern. Hierbei spielt die Interaktion und die Integration der Einzelbeiträge eine besondere Rolle.

1.3 Aufgabenstellung und Ziele dieser Arbeit

Seit ungefähr 40 Jahren werden die Methoden zur Berechnung der Sensitivität einer Struktur bei Parameteränderungen diskutiert. Es ist nach Meinung des Autors noch nicht gelungen, einen leistungsfähigen und allgemeingültigen Zugang zur Sensitivitätsanalyse zu erarbeiten, der die theoretisch vorhandenen Potentiale der Variationsrechnung für die Strukturoptimierung effektiv nutzt. Ein Grund ist in der getrennten Entwicklung der Einzelgebiete (Kontinuumsmechanik, FEM, CAGD, Strukturoptimierung) zu sehen, die vielfach erst nach Ausbildung der Theorie und dem Entstehen von Softwarestrukturen miteinander verknüpft wurden. Diese Sichtweise wird im Anhang B.3 zusammen mit einer Detailkritik der einzelnen Vorgehensweisen erläutert und kann folgendermaßen zusammengefaßt werden.

Tafel 1.2: Sensitivitätsanalyse: Kritik an etablierten Zugängen und Motivation

- Die Beurteilung der Empfindlichkeit einer Struktur bei stetiger Veränderung von Problemparametern (z.B. Materialwerten, Geometrie, Randbedingungen, Lasten) ist eine zentrale Aufgabe des Ingenieurs im Konstruktionsprozeß. Die Vorteile einer quantitativen Kenntnis der Sensitivität bei Parametervariationen sind kaum zu überschätzen. Langfristig führt kein Weg an einer grundlegenden und systematischen Aufbereitung der variationellen Sensitivitätsanalyse vorbei.
- Viele Problemstellungen wie beispielsweise die nichtlineare Dynamik, die reibungsbehaftete Kontaktmechanik und die Bruchmechanik sind durch unstetiges Verhalten gekennzeichnet. Weiterhin können viele Veränderungen einer Konstruktion nicht durch stetig differenzierbare Funktionen beschrieben werden. Zukünftig müssen verfeinerte mathematischen Methoden zur Behandlung von nichtglatten Designänderungen bzw. von nichtdifferenzierbarem Lösungsverhalten entwickelt werden. Die Erkenntnisse der variationellen Sensitivitätsanalyse bei glattem Strukturverhalten sind aber auch in diesem Fall hilfreich und als Vorleistung unbedingt erforderlich.
- Viele Strategien zur Sensitivitätsanalyse orientieren sich derzeit an den Möglichkeiten der verfügbaren Hard- und (kommerziellen) Software und können somit durch deren Leistungsfähigkeit charakterisiert werden. Dabei behindert die getrennte Entwicklung der theoretischen Grundlagen sowie der zugehörigen Software in den Bereichen FEM und CAGD die Effektivität und somit die Akzeptanz der variationellen Sensitivitätsanalyse.
- Eine leistungsfähige Sensitivitätsanalyse kann nach Einschätzung des Autors nur durch eine weitestgehende Integration der theoretischen Grundlagen der beteiligten Gebiete (Kontinuumsmechanik, FEM, CAGD) entwickelt werden. Hieraus ergeben sich dann notwendige Folgerungen für Theorie und Numerik.
- Aus den theoretischen Erkenntnissen sind neue Softwarekonzepte abzuleiten. Die berechtigten Zweifel, ob diese neuen Strukturen in absehbaren Zeiträumen im industriellen und kommerziellen Rahmen akzeptiert werden, dürfen jedoch nicht zur Selbstbeschränkung bei der theoretischen Durchdringung der Problematik führen.

1.3.1 Detailziele dieser Arbeit

Aus der oben dargestellten Motivation heraus wurde die Fragestellung der

Integration von Strukturoptimierung und Sensitivitätsanalyse in die Kontinuumsmechanik

als Titel der eigenen Forschung gewählt. Die Bearbeitung dieser Aufgabenstellung erfordert neben einer genauen Kenntnis der Kontinuumsmechanik weiterhin vertiefte Einblicke in die beteiligten Wissenschaftsgebiete. Hierbei sind eigene Erfahrungen mit der softwaretechnischen Umsetzung in einer *CAGD-FEM-OFG-NLP-Programmentwicklung*³ unerlässlich.

Aus der geschilderten Beobachtung heraus ergeben sich die folgenden Detailziele der Arbeit. Teilergebnisse hierzu sind in den zitierten Arbeiten veröffentlicht worden. Eine zusammenfassende Darstellung, die zudem konzeptionell über die Einzelarbeiten hinausgeht, ist bisher nicht aufbereitet worden.

Tafel 1.3: Detailziele der Arbeit sowie eigene Veröffentlichungen zu den Themen

1. Die Grundlagen der Sensitivitätsanalyse, d.h. die Bereitstellung von partiellen Variationen, sollen in die theoretische Darstellung der Kontinuumsmechanik auf der Grundlage einer differentialgeometrischen Betrachtung integriert werden.
Literatur: Ansätze in [16]; erste Ergebnisse in [33, 24, 36]; erste vollständige Darstellung in [37]; Teile in [20, 21]; vollständige Neudarstellung in dieser Arbeit.
2. Die Grundlagen der Optimalitätskriterien sollen in der Kontinuumsmechanik aufbereitet werden. Es sollen die Zusammenhänge zwischen starken und schwachen Formen der Sensitivität herausgearbeitet werden.
Literatur: erstmals in dieser Arbeit veröffentlicht.
3. Die Informationen aus der variationellen Herleitung der Sensitivitäten sollen für die Modellbildung sowie die nachfolgenden Diskretisierungen verwendet werden.
Literatur: zur FE-Adaptivität bei Strukturoptimierung [22, 11, 12]; zur Geometrie-Adaptivität [95, 96, 97]
4. Ein Gesamtkonzept für die numerisch-effiziente Berechnung von Sensitivitäten soll hergeleitet werden.
Literatur: Grundlagen in [39]; Anwendungen auf Problemtypen in [227, 170, 226, 26, 25, 209]
5. Die Methoden sollen auf praxisrelevante Fragestellungen der nichtlinearen Mechanik angewendet werden.
Literatur: Industrieprojekte mit *Volkswagen*, *Conti*, *DASA*, siehe u.a. [18, 23, 26].

Die vorgestellte Methodik wird sich dabei vollständig in den Rahmen der modernen, differentialgeometrisch geprägten Kontinuumsmechanik einfügen. Es werden keinerlei Beschränkungen –außer der notwendigen stetigen Differenzierbarkeit– hinsichtlich der geometrischen Nichtlinearitäten sowie der Komplexität thermomechanischen Materialverhaltens erforderlich.

³OFG: Optimale Formgebung; NLP: Nonlinear Programming

1.3.2 Übersicht über die einzelnen Abschnitte

Die Arbeit gliedert sich in insgesamt sieben Kapitel im Hauptteil sowie zwei Anhängen. Ausgehend von dieser Einführung werden die Forschungsergebnisse in den Kapiteln des Hauptteils dargestellt. Um den „roten Faden“ konsequent entwickeln zu können, sind weitere Informationen zu den Grundlagen sowie Nebenbetrachtungen im Anhang angegeben.

Im Kapitel 2 werden die kinematischen Grundlagen für die einheitliche Betrachtung von Strukturanalyse und Strukturoptimierung vorgestellt. Hierzu wird eine Betrachtungsweise eingeführt, die nicht (wie ansonsten üblich) auf dem Konzept eines materiellen Körpers basiert. Die möglichen Designvariationen können somit beim Aufbau der Theorie von Anfang an berücksichtigt werden.

Im Kapitel 3 wird eine Darstellung der Kontinuumsmechanik basierend auf den konvektiven Koordinaten des Parameterraums aufbereitet. Die in der lokal-konvektiven Betrachtungsweise erarbeiteten Ergebnisse können problemlos durch Transformation in die bezogenen Darstellungsweisen (materiell und räumlich) übertragen werden.

Im Kapitel 4 werden leistungsfähige Diskretisierungskonzepte für die im vorhergehenden Kapitel eingeführten Größen Geometrie und Verschiebung eingeführt. Hierauf aufbauend werden adaptive Methoden in der Strukturoptimierung diskutiert, die sowohl eine Verfeinerung des CAGD-Geometriemodells bzw. des FEM-Verschiebungsmodells beschreiben.

Im Kapitel 5 wird für wesentliche Problemklassen eine effektive Methodik zur Sensitivitätsanalyse beschrieben, die stets im Vergleich mit der Strukturanalyse zu sehen ist. Als Modellproblem werden die Besonderheiten der Sensitivitätsanalyse für die Schädigungsmechanik behandelt.

Im Kapitel 6 werden drei Problemstellungen der Formoptimierung diskutiert. Die Untersuchung eines PKW-Stoßfängers zeigt die Anwendung der Methodik bei großen elastischen Deformationen. Die Betrachtungen zur Bruchmechanik geben Hinweise zur Kontrolle der Energiefreisetzungsrates durch eine gezielte Veränderung der Strukturgeometrie und somit eine Reduktion der Bruchgefährdung. Abschließend werden die Methoden der Sensitivitätsanalyse zur Formulierung eines Konzeptes für ein robustes Design aufgeführt, das durch Anwendung der Strukturoptimierung zielgerichtet verbessert werden kann.

Im Kapitel 7 wird eine Zusammenfassung der erreichten Ergebnisse dieser Arbeit formuliert sowie ein Ausblick auf weitere Fragestellungen gegeben.

Im Anhang befinden sich zwei Kapitel.

Im Kapitel A finden sich notwendige Definitionen sowie weiterführende Angaben zur Differentialgeometrie und zur Kontinuumsmechanik. Viele Nebenbetrachtungen der Kapitel 2 und 3 sind dort ausgelagert.

Im Kapitel B wird eine Einführung in die Problematik der Strukturoptimierung und der Sensitivitätsanalyse formuliert, wichtige Entwicklungen diskutiert sowie Literaturhinweise gegeben. Der Abschnitt B.3 beschreibt die Zugänge zur variationellen Sensitivitätsanalyse, wie sie sich dem Autor bis zu Beginn der eigenen Forschungsarbeiten in 1993 darstellte. Die Motivation zu dieser Arbeit wird an den Details der besprochenen Methode näher erläutert.

Kapitel 2

Kinematische Grundlagen

Ein grundlegendes Konzept zur Beschreibung des *Designs* eines materiellen Körpers und der möglichen *Designvariationen* im *Design-Raum-Zeit-Kontinuum* wird vorgestellt. Aus den fundamentalen Beziehungen der *Kontinuumsmechanik* zur Kinematik und seiner Variation werden die diskreten Darstellungen des *Computer Aided Geometric Design* (CAGD) und der *Finite Elemente Methode* (FEM) hergeleitet. Die Merkmale der *CAGD-FEM-Kopplung* werden theoretisch formuliert und in ein numerisches Konzept integriert.

Wichtige Aspekte dieses Kapitels sind:

Tafel 2.1: Hinweise zur Theorie und Numerik von Geometrie und Deformation

- Theoretische Beschreibung der Lage des Körpers im \mathbb{E}^3 mittels der einzelnen Karten der Atlanten der differenzierbarer Mannigfaltigkeit. Erörterung identischer mathematischer Strukturen bzgl. Geometrie und Deformation.
- Integration der Variation von Geometrie und Deformation als kinematische Grundlage der Sensitivitätsanalyse in die Kontinuumsmechanik.
- Geometriedarstellung mittels CAGD-Methoden. Hinweise zur Wahl geometrischen Formfunktionen sowie der zugehörigen Geometrieparameter. Approximationseigenschaften sowie Adaptivität des Geometriemodells.
- Beschreibung des Deformationszustandes der Körper mittels der FE-Methode. Hinweise zur Wahl der Ansatzfunktionen physikalischer Größen. Kriterien und Verfahren zur FE-Adaptivität.
- Hinweise zur CAGD-FEM-Kopplung aus Sicht bestehender Software. Beschränkungen theoretischer Entwicklungsmöglichkeiten.

Die kinematischen Grundlagen sind in den jeweiligen Lehrbüchern zur Kontinuumsmechanik [220, 164, 208], zum CAGD [99, 136], bzw. zur FEM [232, 139] in Einzeldarstellungen angegeben. Daneben stellen die im Kapitel B.3 näher beschriebenen Zugänge zur Sensitivitätsanalyse in der Strukturoptimierung, d.h. *material derivative approach* und *domain parametrization approach*, wichtige Grundlagen dar. Die vorliegende integrierte Darstellung faßt die Ergebnisse der Arbeiten [33, 24, 37, 36, 40, 39, 227] zusammen.

In dieser Arbeit werden ausschließlich stetig differenzierbare Deformationen behandelt, wie sie üblicherweise im Rahmen der Kontinuumsmechanik vorausgesetzt werden. Diese Annahme ist deshalb besonders wichtig, da nur so die Existenz der Variationen, insbesondere der Deformationsabbildungen bzgl. der Ausgangsgeometrie, überhaupt möglich ist.

Die Erweiterung der aufgezeigten Methodik auf nichtdifferenzierbare Phänomene bleibt der weiteren Forschung vorbehalten.

Inhaltsangabe

2.1	Kinematik in der Kontinuumsmechanik	13
2.1.1	Der materielle Körper und seine Konfigurationen	13
2.1.2	Entwicklung einer lokal-konvektiven Betrachtungsweise	14
2.1.3	Eigenschaften der lokal-konvektiven Betrachtungsweise	17
2.1.4	Betrachtung veränderlicher materieller Körper	21
2.1.5	Verfeinerung der lokal-konvektiven Betrachtungsweise	25
2.1.6	Variation von Geometrie- und Deformationsabbildung	28
2.1.7	Anmerkungen zu den Funktionenräumen	29
2.1.8	Hinweise zu weiteren Kinematikkonzepten	30
2.2	Kinematik in CAGD und FEM	31
2.2.1	Computer Aided Geometric Design (CAGD)	31
2.2.2	Finite Elemente Methode (FEM)	34
2.3	Integrierte Darstellung der Kinematik I	36
2.3.1	Zusammenfassung bisheriger Konzepte	36
2.3.2	Eine integrierte Darstellung der Abbildungen	37

2.1 Kinematik in der Kontinuumsmechanik

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Abbildungen der Kontinuumsmechanik zur Beschreibung des materiellen Körpers und seiner Konfigurationen eingeführt und analysiert. Aus den Erkenntnissen kann in Anlehnung an das intrinsische Konzept eine *lokal-konvektive* Betrachtungsweise abgeleitet werden. Zunächst werden nur die Abbildungen zwischen den Konfigurationen *eines* Körpers betrachtet. Eine Beschreibung veränderlichen Designs erfolgt im Abschnitt 2.1.4 bzw. von Tangentenabbildungen in Kapitel 3.

2.1.1 Der materielle Körper und seine Konfigurationen

Im Rahmen der phänomenologischen mathematischen Beschreibung wird der *materielle Körper* als differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathcal{B} mit Rand $\partial\mathcal{B}$ eingeführt. Hinweise zum Begriff „differenzierbare Mannigfaltigkeit“ sind im Anhang A.1 enthalten. Die Elemente \mathcal{M} von \mathcal{B} heißen *materielle Punkte*.

Der materielle Körper \mathcal{B} wird für jede Zeit t aus dem Zeitintervall \mathcal{I}_t durch die Abbildung χ in den dreidimensionalen Anschauungsraum eingebettet. Der Beobachter Σ_t mit Ursprung und (o.B.d.A. kartesischem) Basissystem $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ kann den Punkt P_t des Anschauungsraumes durch $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$ beschreiben. Das Bild von \mathcal{B} wird als *Konfiguration* $\Omega_t = \chi(\mathcal{B}, t)$ bezeichnet, wobei der materielle Punkt \mathcal{M} im Raumpunkt P_t liegt. Zusammenfassend gilt damit

$$\chi : \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathcal{I}_t & \rightarrow \Omega_t \subset \mathbb{E}^3 \\ (\mathcal{M}, t) & \mapsto \mathbf{x} = \chi(\mathcal{M}, t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Jede Konfiguration stellt selbst eine dreidimensionale Riemannsche C^∞ -Mannigfaltigkeit dar.

Zur Zeit t kann die Abbildung $\chi_t : \mathcal{B} \rightarrow \Omega_t$ des Körpers \mathcal{B} auf die *Momentankonfiguration* Ω_t mit $\mathbf{x} = \chi_t(\mathcal{M}) := \chi(\mathcal{M}, t)$ eingeführt werden. Zur Referenzzeit $t = t_o$ nimmt der Körper die *Referenzkonfiguration* $\Omega_o = \chi_o(\mathcal{B}) \subset \mathbb{E}^3$ mit $\mathbf{X} = \chi_o(\mathcal{M})$ ein. Der Beobachter zur Zeit $t = t_o$ wird mit Σ_o bezeichnet und beschreibt den Punkt \mathbf{X} im (o.B.d.A. kartesischen) Basissystem $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$. Die Abbildung χ_t ist für jede feste Zeit t invertierbar, d.h. $\mathcal{M} = \chi_t^{-1}(\mathbf{x})$, und χ_t, χ_t^{-1} sind bzgl. \mathcal{M} bzw. \mathbf{x} mindestens zweimal stetig differenzierbar.

Die *Bewegung* des gegebenen Körpers \mathcal{B} ist eine bzgl. der Zeit t zweimal stetig differenzierbare Funktion $\chi_{\mathcal{B}} : \mathcal{I}_t \rightarrow \mathbb{E}^3$ aufeinanderfolgender Konfigurationen. Ein materieller Punkt bewegt sich dabei auf einer Trajektorie im \mathbb{E}^3 , die durch die Zeit $t \in \mathcal{I}_t$ parametrisiert ist.

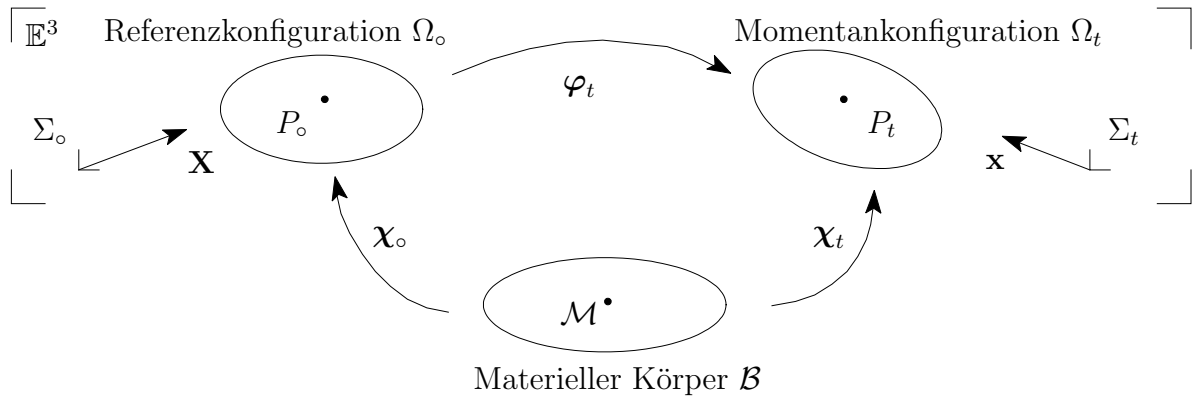
Durch Abbildungskomposition kann die Bewegung auch bezogen auf $\mathbf{X} \in \Omega_o$ in der Form

$$\varphi : \begin{cases} \Omega_o \times \mathcal{I}_t & \rightarrow \Omega_t \\ (\mathbf{X}, t) & \mapsto \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) := (\chi \circ \chi_o^{-1})(\mathbf{X}, t) \end{cases} \quad (2.2)$$

beschrieben werden. Man spricht hierbei von der *Deformation* des Körpers zwischen Referenz- und Momentankonfiguration und schreibt für eine feste Zeit t auch $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X}) := \varphi(\mathbf{X}, t)$.

Die bisherigen Zusammenhänge sind in Bild 2.1 dargestellt.

Entsprechend der Mengen \mathcal{B}, Ω_o und Ω_t sind unterschiedliche Betrachtungsweisen möglich, d.h. die *intrinsische* Beschreibung bzgl. $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$, die *Lagrangesche* (materielle) Beschreibung bzgl. $\mathbf{X} \in \Omega_o$ sowie die *Eulersche* (räumliche) Beschreibung bzgl. $\mathbf{x} \in \Omega_t$.

Bild 2.1: Der materielle Körper \mathcal{B} und seine Konfigurationen Ω_0 und Ω_t

Die bezogenen Vorgehensweisen sind – in Verbindung mit der numerischen Realisation – weitverbreitet, während die intrinsische Beschreibung (siehe *Noll* [181], *Bertram* [52]) bisher wenig beachtet wurde. Eine Analyse der Definition des materiellen Körpers als differenzierbare Mannigfaltigkeit ermöglicht eine Neubewertung der Betrachtungsweisen.

2.1.2 Entwicklung einer lokal-konvektiven Betrachtungsweise

Für jeden materiellen Punkt $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$ existiert gemäß Definition einer Mannigfaltigkeit eine Karte (\mathcal{U}_i, ϕ_i) aus dem zugehörigen Atlas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_1, \phi_1), (\mathcal{U}_2, \phi_2), \dots, (\mathcal{U}_m, \phi_m)\}$, d.h. die offene Umgebung \mathcal{U}_i von \mathcal{M} wird durch eine stetig invertierbare Abbildung ϕ_i in eine offene Umgebung $T_{\Theta,i} = \phi_i(\mathcal{U}_i)$ des Parameterraumes \mathbb{R}^3 abgebildet. Der materielle Körper wird mit m Karten überdeckt und dem materiellen Punkt \mathcal{M} ist ein Parameterpunkt $\Theta = \phi_i(\mathcal{M})$ zugeordnet. Mit der kartesischen Basis $\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3\}$ wird der Parameterpunkt $\Theta \in \mathbb{R}^3$ zu einem Vektor Θ im dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{Z}^3 und für die Karte (\mathcal{U}_i, ϕ_i) gilt

$$\phi_i : \begin{cases} \mathcal{U}_i & \rightarrow T_{\Theta,i} \subset \mathbb{Z}^3 \\ \mathcal{M} & \mapsto \Theta = \phi_i(\mathcal{M}). \end{cases} \quad (2.3)$$

Der materielle Körper \mathcal{B} wird damit lokal für die Umgebung \mathcal{U}_i des materiellen Punktes \mathcal{M} durch $\phi_i^{-1} : T_{\Theta,i} \subset \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathcal{U}_i$ definiert. Dieser Zusammenhang ist in Bild 2.2 verdeutlicht.

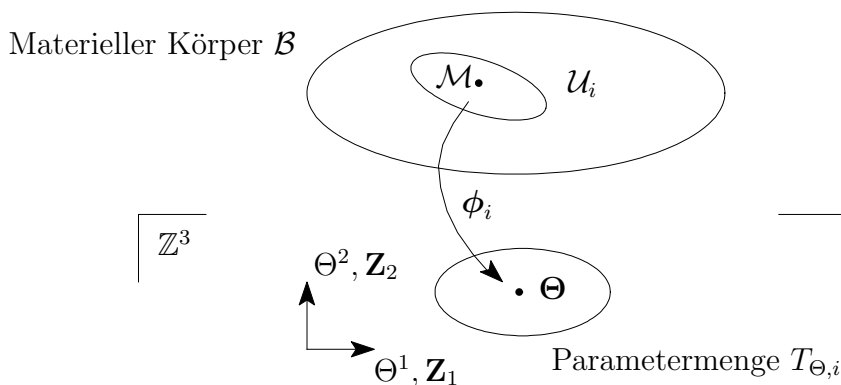


Bild 2.2: Eine Karte der Mannigfaltigkeit „materieller Körper“

Mit diesen Überlegungen können durch Komposition der Einbettungsabbildung χ nach (2.1) mit der zugehörigen Abbildung ϕ_i aus der Karte (\mathcal{U}_i, ϕ_i) die *lokale Konfigurationsabbildung*

über der lokalen Parametermenge $T_{\Theta,i} \subset \mathbb{Z}^3$ im Parameterraum \mathbb{Z}^3 definiert werden, d.h.

$$\tilde{\chi}_i : \begin{cases} T_{\Theta,i} \times \mathcal{I}_t & \rightarrow U_{t,i} \subset \Omega_t \subset \mathbb{E}^3 \\ (\Theta, t) & \mapsto \mathbf{x} = \tilde{\chi}_i(\Theta) := (\chi \circ \phi_i^{-1})(\Theta, t). \end{cases} \quad (2.4)$$

Für festgehaltene Zeit $t \in \mathcal{I}_t$ können mit der obigen Abbildung $\tilde{\chi}$ die bekannten Referenz- bzw. Momentankonfigurationen beschrieben werden. Für die Referenzkonfiguration Ω_o zur Referenzzeit $t = t_o$ erhält man

$$\tilde{\chi}_{o,i} : \begin{cases} T_{\Theta,i} & \rightarrow U_{o,i} \subset \Omega_o \subset \mathbb{E}^3 \\ \Theta & \mapsto \mathbf{X} = \tilde{\chi}_{o,i}(\Theta) := (\chi_o \circ \phi_i^{-1})(\Theta) \end{cases} \quad (2.5)$$

sowie in analoger Weise für die Momentankonfiguration Ω_t zur Zeit t

$$\tilde{\chi}_{t,i} : \begin{cases} T_{\Theta,i} & \rightarrow U_{t,i} \subset \Omega_t \subset \mathbb{E}^3 \\ \Theta & \mapsto \mathbf{x} = \tilde{\chi}_{t,i}(\Theta) := (\chi_t \circ \phi_i^{-1})(\Theta). \end{cases} \quad (2.6)$$

Dabei bezeichnen $U_{o,i}$ bzw. $U_{t,i}$ die entsprechenden lokalen Umgebungen von $\mathbf{X} \in \Omega_o$ bzw. von $\mathbf{x} \in \Omega_t$. Die Koordinaten Θ heißen *lokale* bzw. *konvektive Koordinaten*. Die Abbildungen $\tilde{\chi}_{o,i}$ und $\tilde{\chi}_{t,i}$ sind invertierbar und bzgl. Θ mindestens zweimal stetig differenzierbar.

Die Bewegung des Körpers kann somit lokal, d.h. für einen festen Parameterbereich $T_{\Theta,i}$, durch $\tilde{\chi}_{T_{\Theta,i}} : \mathcal{I}_t \rightarrow \mathbb{E}^3$ beschrieben werden. Die Abbildung ist bzgl. t zweimal stetig differenzierbar und beschreibt die Bewegung eines Punktes Θ auf einer Trajektorie im \mathbb{E}^3 .

Diese neuartige Betrachtungsweise der Kontinuumsmechanik, die sich auf die lokal definierten Parametermengen des \mathbb{Z}^3 bezieht, wird als *lokal-konvektive Betrachtungsweise* bezeichnet. Hinweise zur Bezeichnung und zum intrinsischen Konzept finden sich in Abschnitt 2.1.3.1. Die genannten Abbildungen sind im nachfolgenden Bild dargestellt.

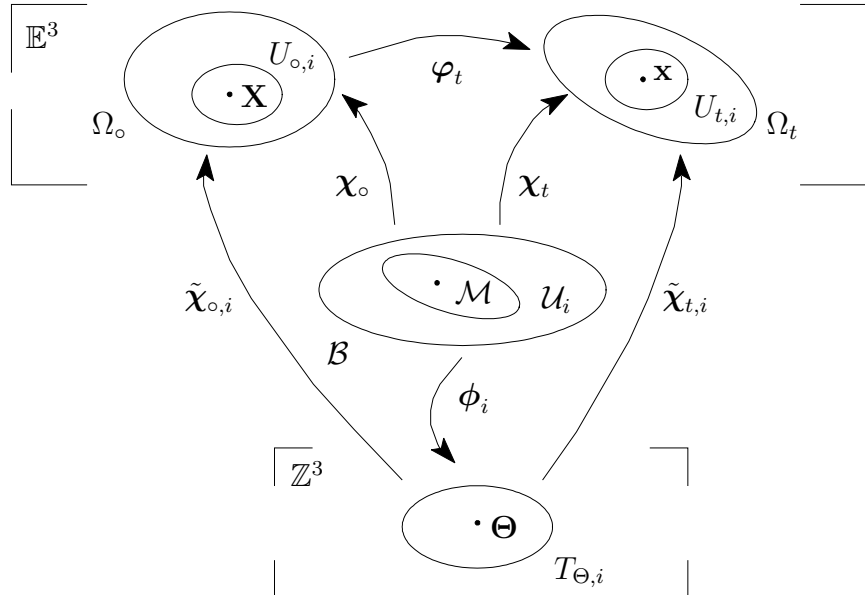


Bild 2.3: Abbildungen der lokal-konvektiven Betrachtungsweise

Aus der Theorie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten wurde bisher nur die Forderung verwendet, daß ein Atlas \mathcal{A} mit einer endlichen Anzahl von Karten existiert, der den materiellen

2.1.3 Eigenschaften der lokal-konvektiven Betrachtungsweise

2.1.3.1 Hinweise zur Bezeichnung und zum intrinsischen Konzept

Die eingeführte Darstellung wird als *lokal-konvektive Betrachtungsweise* bezeichnet, die sich *kanonisch* durch Analyse des Begriffes „differenzierbare Mannigfaltigkeit“ herleiten läßt. Die Vorgehensweise ist dem intrinsischen Konzept verwandt, d.h. nach *Bertram* [52, §7.3] kann von einer *intrinsischen Beschreibungsweise in konvektiven Koordinaten* gesprochen werden. Die vorgeschlagene Bezeichnung ist jedoch geeigneter die wesentlichen Merkmale sowie die Erweiterungen zum intrinsischen Konzept hervorzuheben, siehe hierzu Abschnitt 2.1.4.

Zunächst werden die Adjektive *lokal* und *konvektiv* näher erläutert.

Durch die Bezeichnung *lokal* wird hervorgehoben, daß sowohl der materielle Körper \mathcal{B} selbst als auch alle Konfigurationen und kontinuumsmechanischen Abbildungen nur jeweils bereichsweise für lokale Umgebungen eines materiellen Punktes \mathcal{M} angegeben werden können. Für die theoretischen Herleitungen ist dieses unwesentlich, siehe Abschnitt 2.1.3.3, aber für jede numerische Realisation im Rahmen einer CAGD-FEM-Kopplung stellt insbesondere die Beschreibung der Konfigurationen eine zentrale Herausforderung dar, siehe Abschnitt 2.3.

Die Darstellung der Kontinuumsmechanik durch lokale bzw. *konvektive Koordinaten* $\Theta \in \mathbb{Z}^3$ ist aus der Struktur des materiellen Körpers als Mannigfaltigkeit hergeleitet worden. Den Beschreibungsweisen in Abhängigkeit der materiellen und räumlichen Koordinaten wird eine solche in Abhängigkeit der konvektiven Koordinaten Θ gegenübergestellt. Die Situation ist beispielhaft für eine Karte im nachfolgenden Bild veranschaulicht.

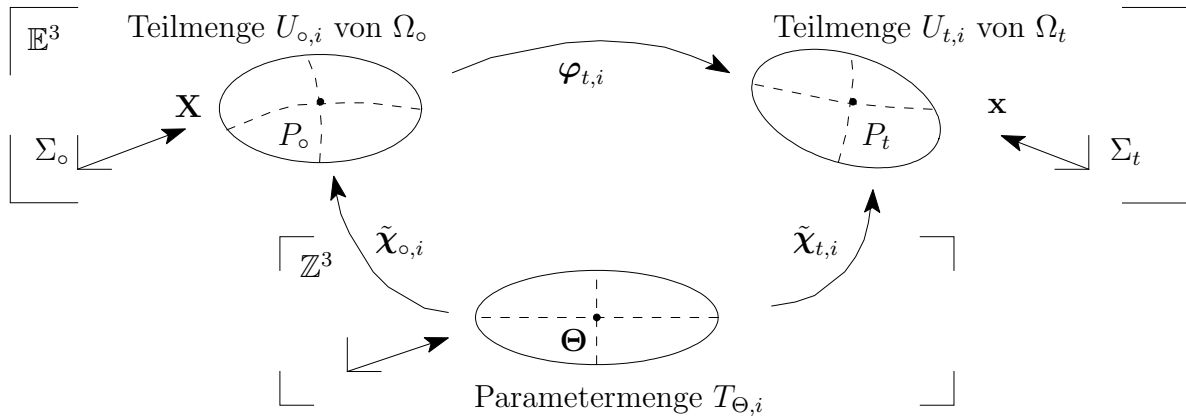


Bild 2.5: Veranschaulichung konvektiver Koordinaten

Die gestrichelten Linien kennzeichnen den Verlauf konstanter Koordinaten Θ^i des Parameterraumes, die in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration krummlinig sind.

Obwohl konvektive Koordinaten seit Jahrzehnten intensiv verwendet werden, ist das obige Vorgehen bisher in den kontinuumsmechanischen Darstellungen kaum vertreten. Zumeist werden nur die Vorgänge im Euklidischen Vektorraum \mathbb{E}^3 beschrieben, während die Definition krummliniger Koordinaten in Ω_o und Ω_t durch die Abbildungen $\tilde{\chi}_{o,i}$ und $\tilde{\chi}_{t,i}$ einer Parametermenge $T_{\Theta,i}$ (untere Hälfte der Darstellung) unterbleibt.

Es werden weiterhin Gründe gegen eine Bezeichnung der lokal-konvektiven Vorgehensweise als *intrinsische Betrachtungsweise in konvektiven Koordinaten* aufgeführt.

1. Die fehlende Verbreitung des intrinsischen Konzeptes – trotz der zentralen Bedeutung – erlaubt die Schlußfolgerung, daß zumindest ihre Darstellung verbesserungswürdig ist. Die modifizierte Bezeichnung erlaubt es, die notwendigen (auch konzeptionellen) Erweiterungen im Vergleich mit klassischen Darstellungen stärker hervorzuheben.
2. Das Konzept eines isolierten „materiellen Körpers“ ohne Einbettung in den \mathbb{E}^3 ist künstlich und im Rahmen moderner numerischer Methoden ein „Schnörkel“ zuviel. Direkter ist es, die Konfigurationen als Mannigfaltigkeiten im \mathbb{E}^3 zu betrachten und die Betrachtungsweise hierauf aufzubauen. Die nachfolgenden Untersuchungen münden genau in dieser Sichtweise.
3. Die Betrachtung eines Atlanten und seiner Details, d.h. die Wahl der Karten, ist nicht eine untergeordnete Konkretisierung einer Wahl des Koordinatensystems, wie dies die bisherige Darstellung der intrinsischen Betrachtungsweise nahelegt. Aus der Unterscheidung in Topologie und Geometrie können weitere Erkenntnisse gewonnen werden, die für CAGD und FEM nützlich sind.
4. Die Überführung des Parameterraumes in einen dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{Z}^3 ermöglicht eine volle Integration in den kontinuumsmechanischen Rahmen. Dieses zeigt sich in Kapitel 3 bzgl. der eingeführten Tangentialräume und der zugehörigen Tensoren.
5. Die Bemerkungen über beliebige Referenzkonfigurationen ist theoretisch richtig, aber praktisch (fast) überflüssig. Jede Referenzkonfiguration, deren kontinuumsmechanischer Zustand beschreibbar ist, kann gewählt werden. In der Regel wird dies jedoch nur die unbelastete, deformationsfreie Ausgangskonfigurationen sein. Die Konzepte zu ihrer rechnergestützten Beschreibung (mittels CAGD) sind damit in den theoretischen Rahmen neu einzubringen.
6. Bei Geometrieänderungen muß der Prozeß der Materialzu- bzw. abnahme beschrieben werden. Damit kann evtl. ein materieller Punkt bei Designänderungen „erscheinen“ bzw. „verschwinden“. Dieser Vorgang kann nicht plausibel im Rahmen des intrinsischen Konzeptes erklärt werden. Hierfür eignet sich jedoch die neuartige lokal-konvektive Betrachtungsweise.

Die letzte Beobachtung ist im Rahmen dieser Arbeit von besonderer Bedeutung und zeigt die Notwendigkeit einer veränderten Bezeichnung auf.

2.1.3.2 Einführung eines Verschiebungsfeldes zwischen den Konfigurationen

Die Referenz- und Momentankonfigurationen sind Untermengen des \mathbb{E}^3 , deren Lage durch Elemente \mathbf{X} und \mathbf{x} gekennzeichnet wird. Durch diese Einbettung können im \mathbb{E}^3 die Unterschiede zwischen den Konfigurationen beschrieben werden. Die lokale *Verschiebungsabbildung* $\tilde{\nu}_{t,i}$ zur Zeit t bzw. das *Verschiebungsfeld* \mathbf{u} wird als Differenz der lokalen Konfigurationsabbildungen bzw. der Koordinaten $\mathbf{u} := \mathbf{x} - \mathbf{X}$ definiert, d.h. es gilt

$$\tilde{\nu}_{t,i} : \begin{cases} T_{\Theta,i} & \rightarrow \mathbb{E}^3 \\ \Theta & \mapsto \mathbf{u} = \tilde{\nu}_{t,i}(\Theta) := (\tilde{\chi}_{t,i} - \tilde{\chi}_{o,i})(\Theta) = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Das Verschiebungsfeld stellt als Differenz von Konfigurationen selbst keine Konfiguration und damit auch keine differenzierbare Mannigfaltigkeit dar. Für die Untersuchung der Tangentenabbildungen in Kapitel 3 wird die Verwendung des Verschiebungsfeldes vermieden. Dagegen spielt es bei den Variationen sowie in der Numerik eine zentrale Rolle.

2.1.3.3 Beschränkung auf *einfache Körper*

Für die Herleitung der kontinuumsmechanischen Beziehungen, d.h. für die Definition von Verzerrungen und Spannungen in Kapitel 3, ist o.B.d.A. eine Beschränkung auf *einfache Körper* (siehe Marsden, Hughes [164, S. 25]) erlaubt. Diese Annahme bedeutet, daß eine Karte zur Beschreibung des materiellen Körpers ausreicht. Daher wird auf die Kennzeichnung der speziellen Karte ϕ_i im Atlas \mathcal{A} verzichtet und von ϕ sowie von $\tilde{\chi}_o, \tilde{\chi}_t$ bzw. $\tilde{\nu}_t$ gesprochen. Auf Seite 27 wird im Bild 2.9 die Beschränkung auf eine Karte gezeigt. Hierbei werden auch die nachfolgend noch eingeführten Bezeichnungen verwendet.

2.1.3.4 Darstellung kontinuumsmechanischer Funktionen

Die vielfältigen kontinuumsmechanischen Größen (z.B. Temperatur, Spannungen) können auf unterschiedliche Weise beschrieben werden, wobei zwischen dem Wert der Größe sowie der, zu der jeweiligen Beschreibungsweise gehörenden, Abbildungsfunktion unterschieden werden soll. Die vektorwertige kontinuumsmechanische Größe *Verschiebungsfeld* \mathbf{u} zwischen den Konfigurationen Ω_o und Ω_t kann dabei auf drei Arten beschrieben werden, nämlich

$$\mathbf{u} = \tilde{\nu}_t(\Theta) = \nu_t(\mathbf{X}) = \bar{\nu}_t(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

Die Situation ist in Bild 2.6 veranschaulicht. Hierbei unterscheidet sich das Verschiebungsfeld (als Beispiel für andere kontinuumsmechanische Funktionen) von den Konfigurationen.

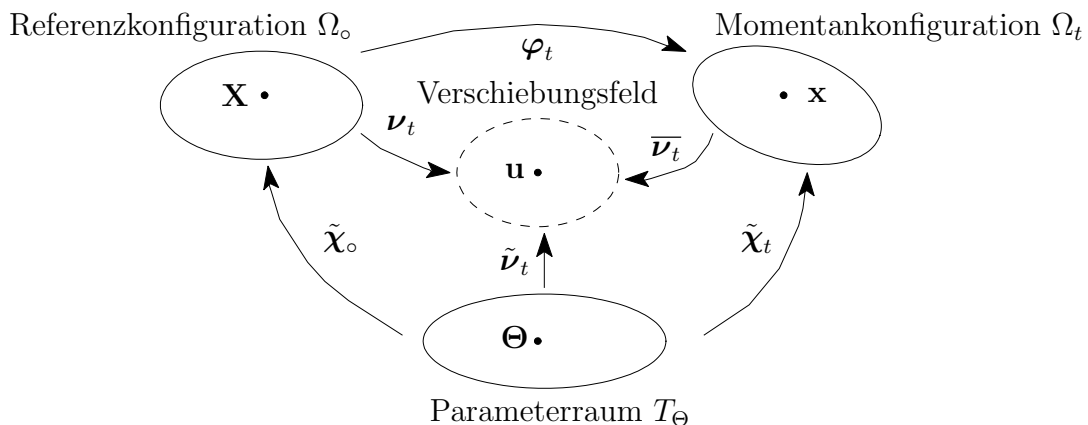


Bild 2.6: Unterschiedliche Definition kontinuumsmechanischer Feldgrößen

Es wird symbolisch als Gebiet des \mathbb{E}^3 mit einem gestrichelten Rand dargestellt. Die für eine Konfigurationen, d.h. eine differenzierbare Mannigfaltigkeit im \mathbb{E}^3 , zentrale Eigenschaft der Invertierbarkeit der lokalen Abbildungen, d.h. von $\tilde{\chi}_o$ und $\tilde{\chi}_t$, ist bei dem Verschiebungsfeld $\tilde{\nu}_t$ (und anderen Funktionen) jedoch nicht gegeben. Im Grenzfall z.B. einer Starrkörperbewegung kollabiert das gestrichelte Gebiet zu genau einem Punkt $\mathbf{u} \in \mathbb{E}^3$.

Genauer gilt:

1. *Lokal-konvektive Darstellung*, d.h. bzgl. der konvektiven Koordinaten $\Theta \in T_\Theta$. Die Abbildungsfunktion wird mit einer Tilde gekennzeichnet, d.h. $\mathbf{u} = \tilde{\nu}_t(\Theta)$.
2. *Lagrangesche Darstellung*, d.h. bzgl. der materiellen Koordinaten $\mathbf{X} \in \Omega_o$. Die Abbildungsfunktion besitzt keine besondere Kennzeichnung, d.h. $\mathbf{u} = \nu_t(\mathbf{X})$.

3. *Eulersche Darstellung*, d.h. bzgl. der räumlichen Koordinaten $\mathbf{x} \in \Omega_t$.

Die Abbildungsfunktion wird mit einem Überstrich gekennzeichnet, d.h. $\mathbf{u} = \overline{\boldsymbol{\nu}}_t(\mathbf{X})$.

Die Abbildungsvorschriften der einzelnen Betrachtungsweisen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Es werden die gegenseitigen Darstellungen der unabhängigen Koordinaten sowie die Beschreibung einer beliebigen Feldgröße, z.B. des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} , angegeben.

Bezeichnung	Wert	Abbildungsvorschriften		
		lokal-konvektiv bzgl. Θ in T_Θ	materiell bzgl. \mathbf{X} in Ω_o	räumlich bzgl. \mathbf{x} in Ω_t
konvektive Koordinate	Θ	id	$\tilde{\chi}_o^{-1}$	$\tilde{\chi}_t^{-1}$
materielle Koordinate	\mathbf{X}	$\tilde{\chi}_o$	id	φ_t^{-1}
räumliche Koordinate	\mathbf{x}	$\tilde{\chi}_t$	φ_t	id
Verschiebungsfeld ¹	\mathbf{u}	$\tilde{\boldsymbol{\nu}}_t$	$\boldsymbol{\nu}_t$	$\overline{\boldsymbol{\nu}}_t$

Tabelle 2.1: Betrachtungsweisen und deren Abbildungen

Durch die obige Darstellung wird nochmals deutlich, daß die lokalen Abbildungen $\tilde{\chi}_{o,i}$ sowie $\tilde{\chi}_{t,i}$ die zentralen unabhängigen Abbildungen der Kontinuumsmechanik sind. Wird die Einbettung in den \mathbb{E}^3 hinzugezogen, so kann weiterhin die lokale Verschiebungsabbildung $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{t,i}$ definiert werden.

Die bezogenen Betrachtungsweisen (bzgl. \mathbf{X} bzw. bzgl. \mathbf{x}) sind nur abgeleitete Konzepte, wie es das Beispiel der Deformationsabbildung

$$\varphi_{t,i} : \begin{cases} U_{o,i} \subset \Omega_o & \rightarrow U_{t,i} \subset \Omega_t \subset \mathbb{E}^3 \\ \mathbf{X} & \mapsto \mathbf{x} = \varphi_{t,i}(\mathbf{X}) := (\tilde{\chi}_{t,i} \circ \tilde{\chi}_{o,i}^{-1})(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (2.9)$$

zwischen der Referenz- und Momentankonfiguration zeigt. Die Leistungsfähigkeit dieses Ansatzes wird mit der nachfolgenden Erweiterung der kontinuumsmechanischen Ereigniswelt um die Beschreibung einer Veränderung des materiellen Körpers deutlich.

¹Das Verschiebungsfeld \mathbf{u} kann nur im umgebenden Euklidischen Vektorraum \mathbb{E}^3 definiert werden.

2.1.4 Betrachtung veränderlicher materieller Körper

Die Behandlung inverser Probleme erfordert eine Erweiterung des kontinuumsmechanischen Konzeptes, um Veränderungen des materiellen Körpers und seiner Eigenschaften erfassen zu können. Hierbei ist im Rahmen der Formoptimierung eine Variation der Geometrie sowie für die Parameteridentifikation eine Änderung der Materialparameter von Interesse. Eine leistungsfähige, d.h. für die numerische Behandlung brauchbare, Definition des Körpers und seiner Eigenschaften ist für die theoretische Beschreibung und algorithmische Durchführung von *Designänderungen*² wesentlich. Entsprechend der Zielsetzung stehen bei den Untersuchungen dieser Arbeit die Geometrieänderungen des materiellen Körpers im Vordergrund.

2.1.4.1 Hinweise zum kontinuumsmechanischen *Design-Raum-Zeit-Rahmen*

In der klassischen Kontinuumsmechanik wird die *Ereigniswelt* als ein *Raum-Zeit-Kontinuum* eingeführt, siehe z.B. [220, 223, 52], in der ein materieller Körper mit seinen zeitveränderlichen Konfigurationen betrachtet wird. Die hierzu erforderlichen mathematischen Konzepte und Definitionen werden an dieser Stelle nicht aufbereitet und sind der Literatur zu entnehmen.

Für die Berücksichtigung veränderlicher Körper kann mit dem *Design* des materiellen Körpers eine weitere Dimension der Ereigniswelt eingeführt werden. Analog den mathematischen Anforderungen an die Deformation eines Körpers wird angenommen, daß die Designänderung hinreichend glatt erfolgt. Konkret wird daher gefordert, daß die Veränderung des Designs durch eine skalarwertige Variable $s \in \mathcal{I}_s \subset \mathbb{R}$ beschrieben werden kann. Weiterhin seien diese funktionalen Anhängigkeiten hinreichend oft stetig differenzierbar. Hierbei bezeichnet s_0 das Ausgangsdesign sowie s das aktuelle Design. Im nächsten Abschnitt wird diskutiert, welche Designänderungen mit dieser Annahme beschrieben werden können. Diese Erweiterung führt zu einem *Design-Raum-Zeit-Kontinuum*, welches in Bild 2.7 veranschaulicht wird.

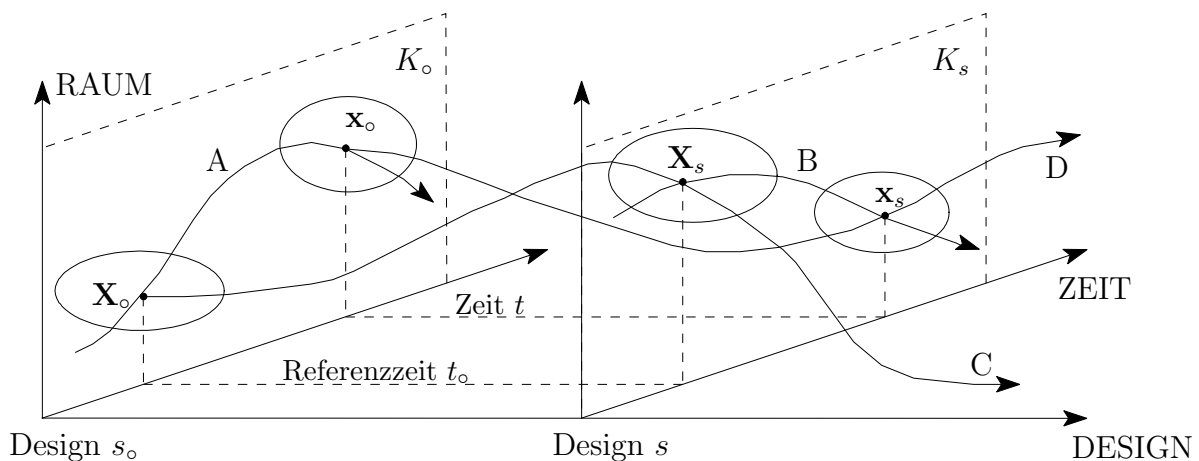


Bild 2.7: Darstellung des Design-Raum-Zeit-Kontinuums

²Unter dem *Design* eines materiellen Körpers wird allgemein die Wahl der Topologie, der Geometrie sowie der thermomechanischen Eigenschaften verstanden. Eine skalarwertige Variable, welche das Änderungsverhalten parametrisiert, heißt *Designvariable*. Für die Optimierung werden dabei die folgenden Begriffe benutzt: *Topologieoptimierung*, *Form- bzw. Geometrieoptimierung* sowie *Parameteroptimierung*. Die Klassifizierung erfolgt im nächsten Abschnitt.

Für jedes konstante Design ergibt sich jeweils das zugehörige und bekannte Raum-Zeit-Kontinuum der Kontinuumsmechanik, welches graphisch durch die dargestellten Ebenen gekennzeichnet ist. Hierbei bezeichnet K_o das Raum-Zeit-Kontinuum zum Design s_o bzw. K_s das entsprechende zum Design s .

Die Kurve A kennzeichnet die Raum-Zeit-Trajektorie eines materiellen Punktes für das feste Design s_o , d.h. der materielle Punkt \mathcal{M}_o bewegt sich aus der Lage \mathbf{X}_o zur Referenzzeit t_o in die Lage \mathbf{x}_o zur aktuellen Zeit t . Entsprechendes gilt für das Design s (Kurve B), d.h. der materielle Punkt \mathcal{M}_s bewegt sich aus der Lage \mathbf{X}_s in die Lage \mathbf{x}_s .

Die Kurve C beschreibt die sogenannte *Designtrajektorie* der Referenzkonfigurationen (C) zur Referenzzeit $t = t_o$, während Kurve D die zugehörige *Trajektorie der Strukturantwort*, d.h. der Momentankonfigurationen zum aktuellen Zeitpunkt t , darstellt. Dies bedeutet, daß die Gleichgewichtskonfiguration Ω_t der Struktur zum Zeitpunkt t gemäß Kurve D auf eine Designänderungen gemäß Kurve C antwortet.

Zur genaueren Erläuterung der auftretenden Phänomene ist eine Unterscheidung der betrachteten (allgemeinen) Designänderung erforderlich, die im nächsten Abschnitt auf der Grundlage der eingeführten lokal-konvektiven Betrachtungsweise vorgenommen wird.

Die folgenden Bemerkungen sind jedoch für alle Designänderungen gültig.

1. Die bisher eingeführten Abbildungen sind mit den obigen Überlegungen sämtlich von der Wahl des aktuellen Designs abhängig, d.h. die funktionale Abhängigkeit von der *Designvariablen* $s \in \mathcal{I}_s$ könnte in die Abbildungsvorschriften aufgenommen werden. Hierauf wird jedoch zur Vereinfachung der Schreibweise (weitestgehend) verzichtet. Vereinzelt (wie bereits oben) erhalten die Abbildungen bzw. die Werte zusätzliche Indizes zur Kennzeichnung des betreffenden Designs, d.h. s_o für das Ausgangsdesign und s für das aktuelle Design. Eine modifizierte Definition erfolgt in Abschnitt 2.1.5.
2. Damit treten bzgl. des Designs (Variable s) und der Zeit (Variable t) dieselben mathematischen Strukturen in den funktionalen Abhängigkeiten auf. Diese Tatsache wurde bereits in dem sogenannten *material derivative approach* für die Formoptimierung gewinnbringend verwendet. Diese Methode wird in Abschnitt B.3 über Zugänge zur variationellen Sensitivitätsanalyse näher diskutiert.

Die Parametrisierung veränderlichen Designs mit einer skalarwertigen Designvariable ist symbolhaft und prinzipiell zu verstehen. Die Klassifizierung möglicher Veränderungen erfolgt im nächsten Abschnitt.

2.1.4.2 Klassifizierung möglicher Designänderungen

Die Untersuchung allgemeiner Designänderungen wird auf der Grundlage der bisherigen Erkenntnisse zur lokal-konvektiven Betrachtungsweise vorgenommen. Hierfür ist wiederum die Struktur des materiellen Körpers als differenzierbare Mannigfaltigkeit wesentlich, die sich konkret in der Wahl der Anzahl und der Topologie der offenen Mengen \mathcal{U}_i und der auf der einzelnen Menge definierten Abbildung ϕ_i niederschlägt. Entsprechend der Darstellung in Bild 2.4 werden zwei Atlanten \mathcal{A}_o und \mathcal{A}_t des materiellen Körpers \mathcal{B} betrachtet, aus denen die Atlanten A_o und A_t zur Beschreibung der Referenz- bzw. der Momentankonfiguration abgeleitet wurden.

Die Einteilung von Designänderungen (im allgemeinen Sinne) kann bei Betrachtung der Auswirkungen möglicher Änderungen auf die zugrundeliegenden Atlanten \mathcal{A}_o des materiellen Körpers \mathcal{B} bzw. A_o der zugehörigen Referenzkonfiguration vorgenommen werden. Dabei ist die Einteilung in die beiden folgenden Problemklassen sinnvoll.

1. *Parameteränderungen* sind dabei durch die folgende Definition beschrieben:

Unter einer Parameteränderung eines materiellen Körpers versteht man eine Designänderung, die nur die thermomechanischen Eigenschaften modifiziert. Die Atlanten \mathcal{A}_o des materiellen Körpers \mathcal{B} bzw. A_o der Referenzkonfiguration Ω_o bleiben bei einer solchen Designänderung unverändert erhalten.

Damit besitzt die Designänderung keinen Einfluß auf \mathcal{B} und Ω_o und die Designtrajektorie im Design-Raum-Zeit-Kontinuum, siehe Bild 2.7, fällt auf eine Referenzkonfiguration zusammen. Der Körper reagiert somit bei gleicher Referenzkonfiguration nur in veränderter Form auf die Modifikation des Designs, d.h. es ist nur die Trajektorie der Strukturantwort zu beobachten, siehe Bild 2.8.

Für diese Problemklasse ergeben sich gegenüber den Strukturänderungen (siehe unten) weitreichende theoretische und algorithmische Vereinfachungen, die in den Abschnitten B.3 zur Sensitivitätsanalyse und 2.3 zur CAGD-FEM-Kopplung erläutert werden.³

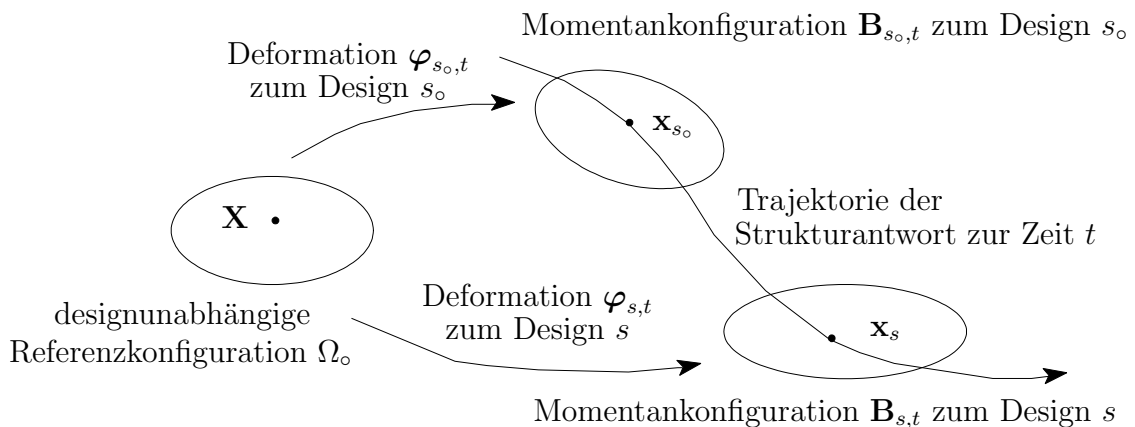


Bild 2.8: Darstellung der Konfigurationen bei Parameteränderungen im Design

Ein wichtiges Anwendungsbeispiel für die Klasse der Parameteränderungen ist die *Parameteridentifikation*, welche die Modifikation der Materialparameter des materiellen Körpers betrachtet. Diese Problematik wird in dieser Arbeit nur am Rande behandelt.

2. *Strukturänderungen* sind durch die folgende Definition beschrieben:

Unter einer Strukturänderung des materiellen Körpers \mathcal{B} werden Designänderungen verstanden, die beim Übergang von einem Design s_o zu einem modifizierten Design s notwendig eine Änderung des Atlanten \mathcal{A}_o bzw. des Atlanten A_o der zugehörigen Referenzkonfiguration Ω_o erfordern.

Für jeden Atlanten können dabei sowohl die Topologie der Karten als auch deren Form, d.h. die Abbildungsvorschriften ϕ_i , geändert werden.

³Viele Probleme der Topologie- und Formoptimierung (siehe die Erläuterungen weiter unten) werden durch die Formulierung von Ersatzproblemen in Parameteroptimierungsaufgaben umformuliert. Als Beispiel seien die Topologieoptimierung (siehe unten) sowie die *fictitious domain method*, siehe z.B. *Haslinger, Neittaanmäki* [124], im Rahmen der Formoptimierung genannt.

Somit kann eine weitere Unterteilung in die folgenden zwei Unterklassen erfolgen.

- (a) *Geometrieänderungen*, die folgendermaßen charakterisiert werden.

Die Atlanten $\mathcal{A}_{s_o, o}$ (Design s_o) und $\mathcal{A}_{s, o}$ (Design s) besitzen dieselben offenen Mengen (Anzahl und Topologie), jedoch sind die Abbildungen $\phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow T_{\Theta, i}$ unterschiedlich. Dieses bedeutet, daß der materielle Körper lokal unterschiedlich definiert ist, d.h. die lokalen Referenzabbildungen $\tilde{\chi}_{o, i}$ sind designabhängig.

Da die Wahl der Parametrisierung beliebig ist, kann immer erreicht werden, daß die Parametermenge $T_{\Theta, i}$ trotz Designänderungen konstant bleibt. Es ändern sich damit nur die Abbildungen ϕ_i und die Mengen \mathcal{U}_i für den materiellen Körper sowie die Mengen $U_{o, i}$ für die Referenzkonfiguration Ω_o . Dieser Vorgang, d.h. die Veränderung der zu den einzelnen Karten gehörenden Abbildungsfunktionen, ist im Rahmen der Kontinuumsmechanik hinreichend glatt beschreibbar. Diese Problematik, die auch als *Formänderung* bezeichnet wird, steht im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit.

- (b) *Topologieänderungen*, die folgendermaßen charakterisiert werden.

Die betrachteten materiellen Körper (bzw. die zugehörigen Referenzkonfigurationen) werden durch Atlanten beschrieben, die eine unterschiedliche Anzahl von lokalen Umgebungen mit unterschiedlichen Topologien⁴ aufweisen und die nicht ineinander überführt werden können.

Dieser Vorgang, d.h. die z.B. durch das Einfügen von Löchern in die Struktur erzwungene Topologieänderung, ist einer kontinuumsmechanischen Beschreibung durch stetig differenzierbare Abbildungen nicht zugänglich.

Das Phänomen einer erzwungenen Topologieänderung ist im Rahmen der Strukturmechanik und seiner numerischen Umsetzung mittels FEM hinreichend bekannt. In den unten genannten Beispielen werden die theoretischen Schwierigkeiten bei der Beschreibung einer Topologieänderung konstruktiv-algorithmisch umgangen.

Die Änderung der Topologie wird in der vergleichbaren Situation der Deformation eines Körpers mit Reißbildung (Aufreißen eines Körpers) explizit ausgeschlossen. Das Reißwachstum kann geometrisch beschrieben werden, jedoch nicht die Reißentstehung. Algorithmisch wird durch Auswertung eines Bruchkriteriums die Topologie durch Einführen eines Anfangsrissses geändert.

Ein anderes Beispiel stellt die adaptive Netzverfeinerung im Rahmen der Finite Elemente Methode (FEM) dar. Hierbei werden Verfeinerungsindikatoren berechnet, die durch einen Algorithmus zu einem h-adaptiv verfeinertem FE-Netz führt. Der Prozeß der Netzveränderung, d.h. die Topologieänderung der Elemente, kann nicht als stetig differenzierbarer Prozeß beschrieben werden.

Die Problemstellungen der Topologieoptimierung werden in dieser Arbeit nur am Rande betrachtet.

⁴In der Literatur hat sich der Begriff *Topologieoptimierung* für die Berechnung optimierter Strukturen mit veränderter Materialverteilung ausgeprägt, siehe z.B. Bendsoe [49]. Die Zielsetzung dieser Optimierungsstrategie, d.h. die Generation neuer Strukturen mit veränderter Topologie, d.h. das Entstehen und Verschwinden von Hohlräumen, ist erwünscht. Die algorithmische Umsetzung bedient sich jedoch der Methoden der Parameteränderung (z.B. Materialparameter, Dichte) auf einer topologisch gleichbleibenden Grundstruktur.

2.1.5 Verfeinerung der lokal-konvektiven Betrachtungsweise

Die Hinweise zur Struktur von Designänderungen, welche im kontinuumsmechanischen Rahmen beschreibbar sind, sollen zur weiteren Ausformulierung des lokal-konvektiven Konzeptes herangezogen werden. Entsprechend der obigen Bemerkungen werden Topologieänderungen der betreffenden Atlanten sowie Parameteränderungen nur am Rande betrachtet. Der Schwerpunkt liegt in der Beschreibung einer Änderung der Abbildungsfunktionen einer Karte, d.h. einer sogenannten *Geometrieänderung* sowie der Folgerungen hieraus für die weiteren kontinuumsmechanischen Formulierungen.

Im weiteren wird angenommen, daß die Wahl der lokalen Umgebungen fest vorgegeben ist. Die Möglichkeiten einer unterschiedlichen Parametrisierung der Körper betreffen die kontinuumsmechanischen Formulierungen nicht und werden erst im Abschnitt 2.3 betrachtet.

2.1.5.1 Verzicht auf das Konzept des materiellen Körpers

Die lokalen Abbildungen $\phi_i^{-1} : T_{\Theta,i} \rightarrow \mathcal{U}_i$ beschreiben den materiellen Körper \mathcal{B} , der ohne Einbettung in den umgebenden Euklidischen Raum \mathbb{E}^3 eingeführt wurde. Der materielle Körper ist zwar im grundlegenden intrinsischen Konzept von Bedeutung, die Darstellungen in der Kontinuumsmechanik sowie die numerischen Methoden konzentrieren sich aber (fast nur) auf die Beschreibung der zugehörigen Konfigurationen Ω_o und Ω_t .

Mit Einführung der Parametermengen im lokal-konvektiven Konzept, d.h. der Auswertung der Eigenschaften einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, kann auf das Konzept des materiellen Körpers verzichtet werden. Die zugehörigen Konfigurationen sind dann lokal über die *lokalen Parameterabbildungen* $\tilde{\chi}_{o,i}$ und $\tilde{\chi}_{t,i}$ beschreibbar, siehe auch Bild 2.9. Als zentrale unabhängige Koordinate wird damit nicht mehr der materielle Punkt \mathcal{M} sondern der lokale Parameterpunkt Θ betrachtet. Dieser Zugang ist für die kontinuumsmechanische Beschreibung von Änderungen, siehe Abschnitt 2.1.4, geeigneter.

Damit ist eine Trennung von Geometrie der Konfigurationen und den physikalischen Eigenschaften vorgenommen worden. Sämtliche Eigenschaften des materiellen Körpers werden unabhängig von der jeweiligen geometrischen Form der Konfigurationen auf den lokalen Parametermengen $T_{\Theta,i}$ des Parameterraumes \mathbb{Z}^3 eingeführt.

Als Beispiel sei die *Massendichte* der einzelnen Konfigurationen mit den unterschiedlichen Abbildungsfunktionen betrachtet, d.h. für die Dichteverteilung gilt

$$\rho_t = \tilde{\varrho}(\Theta, t) = \varrho(\mathbf{X}, t) = \bar{\varrho}(\mathbf{x}, t). \quad (2.10)$$

Die Momentankonfiguration zur festen Zeit t bzw. die Referenzkonfiguration zur Referenzzeit $t = t_o$ besitzen damit die Dichteverteilungen

$$\rho_t = \tilde{\varrho}_t(\Theta) = \varrho_t(\mathbf{X}) = \bar{\varrho}_t(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad \rho_o = \tilde{\varrho}_o(\Theta) = \varrho_o(\mathbf{X}) = \bar{\varrho}_o(\mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Hierbei stellen ρ_t bzw. ρ_o die Werte der Massendichte sowie $\tilde{\varrho}_t, \varrho_t, \bar{\varrho}_t$ bzw. $\tilde{\varrho}_o, \varrho_o, \bar{\varrho}_o$ die zugehörigen Abbildungsfunktionen dar. Die Definition einer Dichtefunktion des Parameterraumes erfolgt in Kapitel 3.

2.1.5.2 Bemerkungen zur Referenz- sowie zur Momentankonfiguration

Die Stellung der Geometrie eines Körpers innerhalb der Kontinuumsmechanik ist für die weitere Betrachtung der *Formoptimierung* genauer herauszuarbeiten. Die Referenz- bzw. Momentankonfiguration wird lokal über die Abbildungen $\tilde{\chi}_{o,i}$ bzw. $\tilde{\chi}_{t,i}$ beschrieben.

In Abschnitt 3.2 wird gezeigt, daß die (relative) Verzerrung zwischen beiden Körpern durch die (lokalen Gradienten der) genannten Abbildungen angegeben werden kann. Dabei ist der derzeitige Verzerrungs- bzw. Deformationszustand der Konfigurationen unerheblich. Zur Erleichterung des Verständnisses wird jedoch eine einprägsamere Notation eingeführt.

Unter der Voraussetzung, daß die Referenzkonfiguration im physikalischen Sinne unbelastet, spannungsfrei sowie temperaturhomogen und somit deformationsfrei ist, stellt Ω_o ein Bild der Geometrie des Körpers im \mathbb{E}^3 dar. Diese Forderung ist bisher nicht zwingend erforderlich, wird aber aus praktischem Interesse üblicherweise erfüllt. Die Referenzkonfiguration Ω_o stellt somit die (undeformierte) Geometrie des Körpers im \mathbb{E}^3 dar und das zweckmäßigste Mittel zur numerischen Beschreibung ist das *Computer Aided Geometric Design* (CAGD).

Die Veränderung des materiellen Körpers und damit seiner Referenzkonfiguration, die sich durch die Veränderungen der lokalen Abbildungen ergibt, wurde die skalarwertige Designvariable s eingeführt. Für die hier speziell beschriebene Situation wird die Abbildung $\tilde{\chi}_{o,i}$ im weiteren als *lokale Geometrieabbildung*

$$\tilde{\psi}_i : \begin{cases} T_{\Theta,i} \times \mathcal{I}_s & \rightarrow \Omega_o \subset \mathbb{E}^3 \\ (\Theta, s) & \mapsto \mathbf{X} = \tilde{\psi}_i(\Theta, s). \end{cases} \quad (2.12)$$

bezeichnet. Für ein festes Design ergibt sich damit $\tilde{\psi}_{s,i}$. Die Abhängigkeit der Abbildung von der Designvariablen s ist im weiteren noch zu konkretisieren.

Um die Bedeutung einer Deformation aus der undeformierten Referenzkonfiguration hervorzuheben, wird für die Abbildung $\tilde{\chi}_{t,i}$ die Bezeichnung *lokale Deformationsabbildung*

$$\tilde{\varphi}_i : \begin{cases} T_{\Theta,i} \times \mathcal{I}_t & \rightarrow \Omega_t \subset \mathbb{E}^3 \\ (\Theta, t) & \mapsto \mathbf{x} = \tilde{\varphi}_i(\Theta, t). \end{cases} \quad (2.13)$$

eingeführt. Für einen festgehaltenen Zeitpunkt ergibt sich damit $\tilde{\varphi}_{t,i}$. Weiterhin ist φ_t dann eine Deformationsabbildung eines *undeformierten* in einen *deformierten* Körper.

2.1.5.3 Formulierung einer modifizierten Sichtweise

Die lokalen Abbildungen $\tilde{\psi}_i$ und $\tilde{\varphi}_i$ sind (gemäß Annahme) auf demselben Parameterraum definiert. Dabei ist die Geometrie durch die Designvariable s bzw. die Deformation durch die Zeit t parametrisiert. Somit besitzen beide Abbildungen identische mathematische Struktur und keine ist (derzeit, d.h. gemäß der Definition der Abbildungen) von der anderen abhängig. Weiterhin wurden Geometrie und physikalische Eigenschaften bisher eindeutig getrennt.

Die Gewohnheit legt jetzt nahe, die Deformation fest an die Referenzkonfiguration zu knüpfen und entsprechend der Lagrangeschen Betrachtungsweise von der Deformation einer gegebenen Referenzkonfiguration in die zugehörige Momentankonfiguration zu sprechen. Dieses würde zu einer zusätzlichen Parametrisierung der Deformation mit der Designvariablen s führen, d.h. es gilt z.B. $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}(s), s)$. In dieser Arbeit soll bewußt mit der Tradition

der Lagrangeschen (sowie auch der Eulerschen) Betrachtungsweise gebrochen werden. Die Notwendigkeit und die Chancen einer modifizierten Sichtweise, d.h. der lokal-konvektiven Betrachtungsweise, die zudem noch ungewohnte Einblicke in die grundlegende Struktur der Kontinuumsmechanik liefert, werden im weiteren erläutert.

Implizit und stillschweigend werden bei der Formulierung der kinematischen Abbildungen immer zwei Gegebenheiten akzeptiert. Die erste ist die Tatsache, daß die Masse der Referenz- und Momentankonfiguration identisch ist. Weiterhin wird angenommen, daß sich die Momentankonfiguration im Gleichgewicht befindet. Strenggenommen sind dieses jedoch Bedingungsgleichungen, welche erst die Beziehungen zwischen den Konfigurationen definieren.

Für die Sensitivitätsanalyse ist es hilfreich, zunächst die Unabhängigkeit aller Größen voneinander zu fordern, um dann mit der Einführung der Bedingungsgleichungen (z.B. Massenerhaltung, Impulsbilanz, etc.) die notwendigen Verknüpfungen herzustellen.

2.1.5.4 Zusammenstellung der Abbildungen

Die Abbildung $\tilde{\psi} : T_{\Theta} \times \mathcal{I}_s \rightarrow U_{\circ} \subset \mathbb{E}^3$ nach (2.12) zur Beschreibung der Geometrie sowie die Abbildung $\tilde{\varphi} : T_{\Theta} \times \mathcal{I}_t \rightarrow U_t \subset \mathbb{E}^3$ nach (2.13) zur Beschreibung der Deformation wurden für die lokal-konvektive Betrachtungsweise eingeführt und bilden die kinematische Grundlage der Kontinuumsmechanik. Damit kann für die Lagrangesche Betrachtungsweise die Deformation der Referenzkonfiguration Ω_{\circ} in die Momentankonfiguration Ω_t durch die Abbildungskomposition $\varphi_{s,t} := \tilde{\varphi}_t \circ \tilde{\psi}_s^{-1}$ beschrieben werden, siehe Bild 2.9.

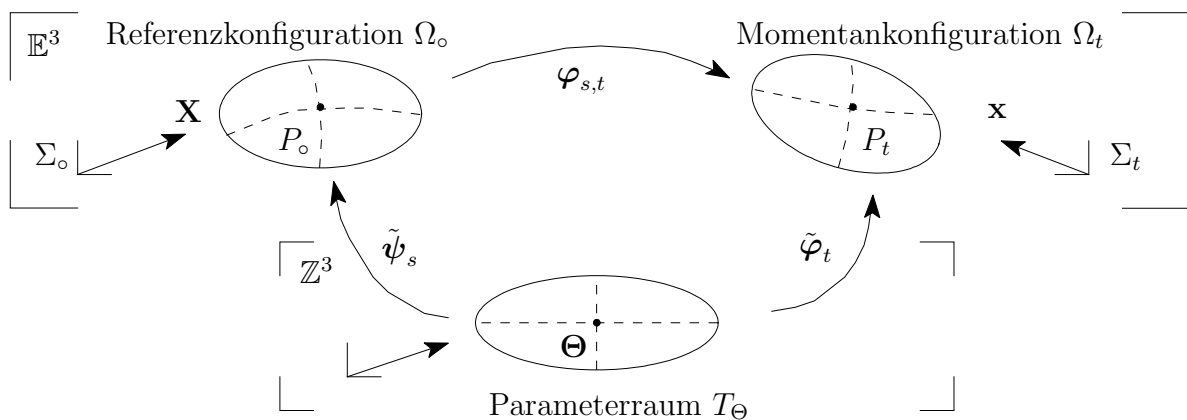


Bild 2.9: Abbildungen zur Kinematik für einfache Körper

Die beiden Abbildungen sind auf der lokalen Parametermenge definiert und weisen eine identische mathematische Struktur auf. Sie werden als unabhängig angesehen. Dieses gilt solange, wie keine konkreten Bedingungsgleichungen für Massenerhaltung, Impulsbilanz, usw. eingeführt und ausgewertet werden. Diese Sichtweise wird im Kapitel 3 verwendet.

2.1.6 Variation von Geometrie- und Deformationsabbildung

Die Variation, Linearisierung sowie Zeitableitung jeder kontinuumsmechanischen Größe zur aktuellen Zeit t kann auf die entsprechende Variation, Linearisierung sowie Zeitableitung der lokalen Abbildungen für Geometrie und Deformation (sowie für die Temperatur) zurückgeführt werden. Die drei genannten Ableitungskonzepte sind über die sogenannte *Richtungsableitung* bzw. *Gâteaux-Ableitung* miteinander verknüpft, wie nachfolgend verdeutlicht wird. Darüberhinaus ist die Kenntnis der sog. *Fréchet-Ableitung* sowie die Beziehungen zur Richtungsableitung von Bedeutung.

2.1.6.1 Grundlagen

Durch eine Vereinheitlichung der Darstellungsweise basierend auf der eingeführten lokal-konvektiven Betrachtungsweise kann die mathematische Struktur zunächst in abstrakter Form herausgearbeitet werden. Hierauf aufbauend ist eine Auswertung der Ergebnisse für die Sonderfälle Zeitableitung, Linearisierung bzgl. eines Verschiebungsincrementes sowie für die Sensitivität bzgl. der Geometrie ohne weiteren Aufwand möglich. Die Variation weiterer Problemgrößen wie z.B. Materialparameter sind in diesem Konzept in analoger Form enthalten. Zur Vereinfachung der Darstellung wird auf eine explizite Angabe dieser weiteren Variationsmöglichkeiten verzichtet.

Grundlage für das weitere Vorgehen ist die Berechnung von Variationen, die kurz am Beispiel einer skalarwertigen Funktion erläutert wird, siehe z.B. *Epheser* [93], *Fung* [102].

Sei $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $I := [a, b]$ definierte skalarwertige Funktion. Die Variation von u wird mit $\delta u := \varepsilon \eta$ bezeichnet, wobei η eine zulässige Funktion ist. Hieraus kann eine Einbettung $v(x) = u(x) + \varepsilon \eta(x) =: g(\varepsilon)$ formuliert werden, d.h. für jedes feste x kann v auch als Funktion von ε aufgefaßt werden. Dieses gilt auch für alle von u abhängigen Funktionen, d.h. für ein Funktional $J(u)$ gilt durch Anwendung der Einbettung $\Phi(\varepsilon) := J[u + \varepsilon \eta]$. Damit kann die Variation des Funktionals $\delta J := \varepsilon \Phi'(\varepsilon)$ definiert werden.

Für die Durchführung der genannten Variationen ist der Einbettungsansatz von zentraler Bedeutung. Hierbei ist für die Kontinuumsmechanik die Einbettung der Konfigurationen in den Euklidischen Vektorraum \mathbb{E}^3 zu betrachten. Zunächst sind die in der Kontinuumsmechanik möglichen Variationen der kinematischen Grundabbildungen $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$ zu untersuchen. Für die Geometrieabbildungen bzw. für die Deformationsabbildung gilt demnach

$$\delta \tilde{\psi} := \varepsilon \Delta \tilde{\psi} \quad \text{bzw.} \quad \delta \tilde{\varphi} := \varepsilon \Delta \tilde{\varphi}. \quad (2.14)$$

In der obigen Darstellung können die Richtungen $\Delta \tilde{\psi}$ sowie $\Delta \tilde{\varphi}$ der gewünschten Richtungsableitungen bei konstantem Design s bzw. bei konstanter Zeit t beliebig vorgegeben werden. Es ist jedoch auch möglich, die mathematische Struktur der Abbildungen $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$ zur Definition der gewünschten Variation zu nutzen, indem man $\Delta \tilde{\psi}$ und $\Delta \tilde{\varphi}$ durch partielle Ableitungen der Abbildungen $\tilde{\psi}$ nach dem Design s und $\tilde{\varphi}$ nach der Zeit t gewinnt, d.h.

$$\delta \tilde{\psi} := \varepsilon \frac{D \tilde{\psi}}{Ds} := \varepsilon \overset{\circ}{\mathbf{X}} \quad \text{bzw. analog} \quad \delta \tilde{\varphi} := \varepsilon \frac{D \tilde{\varphi}}{Dt} := \varepsilon \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.15)$$

Für die Geometrieviation beschreibt $\overset{\circ}{\mathbf{X}} := D \tilde{\psi} / Ds$ das sogenannte *design velocity field* des Körpers. Analog ergibt sich für die Deformationsvariation das *Geschwindigkeitsfeld* des Körpers $\dot{\mathbf{x}} := D \tilde{\varphi} / Dt$.

Analog zu den ersten Variationen $\delta\tilde{\psi}$ und $\delta\tilde{\varphi}$ der kinematischen Grundabbildungen $\tilde{\psi}$ bzw. $\tilde{\varphi}$ können höhere Variationen beliebiger Ordnung definiert werden, d.h. $\delta^n\tilde{\psi}$ sowie $\delta^n\tilde{\varphi}$. Die hierfür notwendige Differenzierbarkeit wird implizit vorausgesetzt.

2.1.6.2 Die Bedeutung der Verschiebungsabbildung

Die Beschreibung von Variationen kann auch auf die Verschiebungsabbildung $\tilde{\nu}$ übertragen werden, d.h. man erhält $\delta\tilde{\nu}, \delta^2\tilde{\nu}, \dots$ bzw. $\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots$ für die Zeitableitung.

Die weitere Vorgehensweise wird exemplarisch für die Deformationsabbildung $\tilde{\varphi}$ erläutert.

Im umgebenden Euklidischen Raum \mathbb{E}^3 (bzw. im \mathbb{R}^3) kann der Differenzvektor der Konfigurationen, d.h. das Verschiebungsfeld \mathbf{u} gemäß (2.7) eingeführt werden. In diesem Fall gilt $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ und anstelle $\tilde{\varphi}_t$ wird die lokale Verschiebungsabbildung $\tilde{\nu}_t$ als zweite unabhängige Abbildung (neben $\tilde{\psi}_s$) angesehen. Diese Sichtweise wird immer dann notwendig, wenn Variationen durchgeführt werden. Mit der Einführung der Verschiebungsabbildung $\tilde{\nu}$ ergibt sich die additive Zerlegung $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} + \tilde{\nu}$, d.h. $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$. Hierbei ist $\mathbf{X} = \tilde{\psi}(\Theta, s)$ von der Designvariablen s und $\mathbf{u} = \tilde{\nu}(\Theta, t)$ von der Zeit t abhängig. Für einen festen Zeitpunkt t wird die Variation von $\tilde{\varphi}_t$ an der Stelle $\bar{\mathbf{x}} := \tilde{\varphi}_t(\Theta) = \tilde{\psi}_s(\Theta) + \tilde{\nu}_t(\Theta) = \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{u}}$ vorgenommen. Die Einbettung der Deformationsabbildung ergibt sich für Variationen von Geometrie und Verschiebung zu

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{X} + \delta\mathbf{u} = (\bar{\mathbf{X}} + \delta\mathbf{X}) + (\bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}). \quad (2.16)$$

Sämtliche kontinuumsmechanische Funktionen können nach Wahl dieser Einbettung bzgl. $\delta\mathbf{x}$ variiert werden. Diese Variation ist somit nur einmal auszuführen und anschließend für die jeweils interessierende Variation $\delta\mathbf{x}$ auszuwerten. Mit diesem Vorgehen vereinfacht sich der Aufwand der tensoranalytischen Ableitungen wesentlich. Die verwandte mathematische Struktur von „Designableitung“ und „Zeitableitung“ wurde bereits in dem sogenannten *material derivative approach* verwendet, siehe Kapitel B.3 im Anhang. Dieses Vorgehen wird in Kapitel 3 näher erläutert.

2.1.7 Anmerkungen zu den Funktionenräumen

Die genannten Abbildungen sind Elemente aus unterschiedlichen unendlichdimensionalen Funktionenräumen. Eine genaue Betrachtung der Räume kann erst nach weiteren Spezifikationen erfolgen, d.h. nach Angabe z.B. der betrachteten Raumdimension sowie der Randbedingungen. Weiterhin sind noch keine Randwertaufgaben bzw. Variationsaufgaben formuliert worden, die zusätzliche (Stetigkeits-) Eigenschaften der Lösungen $\tilde{\psi}$, $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\nu}$ erfordern.

An dieser Stelle sei zunächst nur die Notation eingeführt;

- \mathcal{G} sei der Raum der zulässigen Geometrieabbildungen $\tilde{\psi}$,
- \mathcal{D} sei der Raum der zulässigen Deformationsabbildungen $\tilde{\varphi}$ und
- \mathcal{V} sei der Raum der zulässigen Verschiebungsabbildungen $\tilde{\nu}$.

2.1.8 Hinweise zu weiteren Kinematikkonzepten

Die dargestellte *lokal-konvektive* Betrachtungsweise basiert auf der Zerlegung der Kinematik in separate Geometrie- und Deformationsabbildungen. Die notwendigen Variationen werden auf der untersten Stufe vollzogen, d.h. die Grundabbildungen werden variiert. Weiterhin ist eine Trennung zwischen der Geometrie einer Struktur und der zugehörigen Masseverteilung durchgeführt worden, d.h. die Geometrie wird nicht mehr über Massepunkte definiert. Damit sind die Vorbereitungen zur effizienten Beschreibung der Strukturoptimierung nebst Sensitivitätsanalyse erbracht. Einzelaspekte der beschriebenen Methodik finden sich in unterschiedlichen Theorien und Anwendungen wieder, aber eine geschlossene Darstellung ist bisher in der Literatur nicht formuliert worden.

2.1.8.1 Die intrinsische Betrachtungsweise

Die intrinsische Betrachtungsweise ist ein eigenständiges und vollständig in die Kontinuumsmechanik integriertes Konzept. Sie erweitert die Möglichkeiten der theoretischen Beschreibung kontinuumsmechanischer Phänomene gegenüber den bezogenen Darstellungsformen, d.h. den bestehenden Lagrangeschen bzw. Eulerschen Betrachtungsweisen. Die Beziehungen der intrinsischen zur lokal-konvektiven Betrachtungsweise sind in Abschnitt 2.1.3.1 ausführlich beschrieben worden.

2.1.8.2 Die ALE-Methode (Arbitrary Lagrangian-Eulerian)

Die *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* Methode wurde in den siebziger Jahren im Rahmen der Finite-Differenzen-Methode entwickelt. Mit den Arbeiten von *Donéa et al.* [89], *Belytschko et al.* [46] und *Hughes et al.* [140] wurde diese kinematische Beschreibungsweise in die Finite Elemente Methode eingeführt. Seitdem sind zahlreiche Veröffentlichungen erschienen, die sich mit der Anwendung auf komplexe physikalische Fragestellungen z.B. der Fluid-Struktur-Interaktion beschäftigen.

Die ALE-Methode war ebenfalls Ausgangspunkt zur Einführung des *domain parametrization approach* für die Strukturoptimierung durch *R. Haber* [113]. Auch mit diesem Schritt, d.h. der Verwendung der ALE-Idee in der Strukturoptimierung bzw. Sensitivitätsanalyse, ist es bisher nicht zu einer integrierten Formulierung der Kinematik gekommen. Vielmehr besteht für die Sensitivitätsanalyse mit der *material derivative approach* ein weiterer Zugang der Kinematikbeschreibung. Dieses ist Indiz für das noch vorhandene Potential zur Integration und Weiterentwicklung, siehe auch Kapitel B.3.

2.1.8.3 Kinematik in den diskreten Methoden

Es existieren weitere diskrete Methoden, wie z.B. die *meshless methods* oder die *fictitious domain methods*, die zwar auf einer Lagrangeschen Betrachtungsweise beruhen, in der konkreten Durchführung jedoch von der nachfolgend beschriebenen Standardwahl der Finite Elemente Methode abweichen. Hierauf kann in dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen werden.

2.2 Kinematik in CAGD und FEM

In diesem Abschnitt werden die kinematischen Abbildungen der beiden zentralen numerischen Hilfsmittel im Ingenieurwesen, d.h. des *Computer Aided Geometric Design* (CAGD) und der *Finite Elemente Methode* (FEM) erläutert. Eine umfassende Darstellung der Theorie beider Methoden ist an dieser Stelle weder sinnvoll noch möglich. Vielmehr werden nur Hinweise zur praktischen Anwendung gegeben sowie Anmerkungen zur derzeitigen Strategie der Integration beider Zugänge im industriellen Rahmen gemacht.

2.2.1 Computer Aided Geometric Design (CAGD)

Die Methoden des *Computer Aided Geometric Design* (CAGD) basieren ebenfalls auf der Differentialgeometrie, d.h. auf der gleichen mathematischen Grundlage wie die Kontinuumsmechanik. Konkret bedeutet dies, daß die geometrischen Objekte (lokal) durch stetig invertierbare Funktionen des Parameterraumes (Teilraum von \mathbb{R}^3) in den Euklidischen Vektorraum \mathbb{E}^3 definiert werden. Dabei unterscheidet sich die Notation bzw. Terminologie im Bereich CAGD von der in der Kontinuumsmechanik üblichen, siehe z.B. die Beiträge von *Böhm* in *Farin* [99] sowie *Hoschek, Lasser* [136].

Die gewünschten Eigenschaften einer CAGD-Beschreibung seien kurz dargestellt.

Eine wesentliche Aufgabe der computergestützten Geometriebeschreibung liegt gerade in der Darstellung komplexer Bauteile. Zusätzlich zur effektiven Beschreibung der Geometrie eines Teilbereiches müssen daher die Beziehungen der „Patches“ untereinander beachtet werden.⁵ In der Praxis bedeutet dieses –in der Sprechweise der Kontinuumsmechanik– jedoch, daß der Einsatz von CAGD die Festlegung der Geometriebeschreibung eines materiellen Körpers auf einen konkret gegebenen Atlas A_{CAGD} bedingt. Dieser Atlas A_{CAGD} wird gewählt zur effektiven Beschreibung der Geometrie des Körpers, d.h. der Referenzkonfiguration $\Omega_o \in \mathbb{E}^3$. Damit bewirkt die praktische Verwendung von CAGD-Methoden eine Diskretisierung der Geometriebeschreibung, d.h. die Approximation des Raumes \mathcal{G} zulässiger Geometriefunktionen $\tilde{\psi}$ durch einen endlichdimensionalen Unterraum $\mathcal{G}_g \subset \mathcal{G}$ mit approximierenden Funktionen $\tilde{\psi}_g$. Dabei habe \mathcal{G}_g die Dimension m_g , d.h. $\dim \mathcal{G}_g = m_g$. Die diskrete Approximation wird (wie aus der FEM bekannt) ebenfalls mit einem Index g (für Geometrie) gekennzeichnet.

Das CAGD konzentriert sich auf die Beschreibung der geometrischen Objekte selbst, d.h. auf den Objekten definierte Abbildungen, wie z.B. die Deformation, werden nicht betrachtet. Im Rahmen der Festkörpermechanik ist dieses Aufgabe der Kontinuumsmechanik. Somit ist auch verständlich, daß innerhalb des CAGD eine Beschreibung mit überlappenden Patches üblich ist. Erst die Erfordernisse der FEM, d.h. der Erstellungen von FE-Netzen, führen zur Säuberung der Geometriebeschreibung (z.B. T-Stoß freie Geometrie). Inverse Geometrieprobleme erfordern weitere Strukturänderungen, die aus der Beschreibung partieller Differentialgleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Geometrie resultieren. Diese Problematik wird in Abschnitt 2.3 weiter erläutert.

⁵In der Kontinuumsmechanik wird diese Problematik nicht behandelt. Die Existenz eines Atlanten geeigneter Karten mit den gewünschten Eigenschaften wird dort vorausgesetzt. Weiterhin wird (durch den mathematischen Rahmen der differenzierbaren Mannigfaltigkeit) nur die Forderung erhoben, daß die eventuell vorkommenden Kartenwechsel beliebig oft differenzierbar sind.

2.2.1.1 Parametrische Abbildungen im CAGD

An dieser Stelle sollen nur zwei Beispiele für parametrische Abbildungen in der Ebene und im Raum angeführt werden. Komplexere parametrische Abbildungen wie z.B. *non-uniform rational b-splines* (NURBS) werden z.B. in *Farin* [99] beschrieben.

Das nachfolgende Bild zeigt zwei Bézierlinien, die jeweils durch drei Kontrollpunkte modelliert werden ($\mathbf{k}_0^I, \mathbf{k}_1^I, \mathbf{k}_2^I$ für Linie I und $\mathbf{k}_0^{II}, \mathbf{k}_1^{II}, \mathbf{k}_2^{II}$ für Linie II).

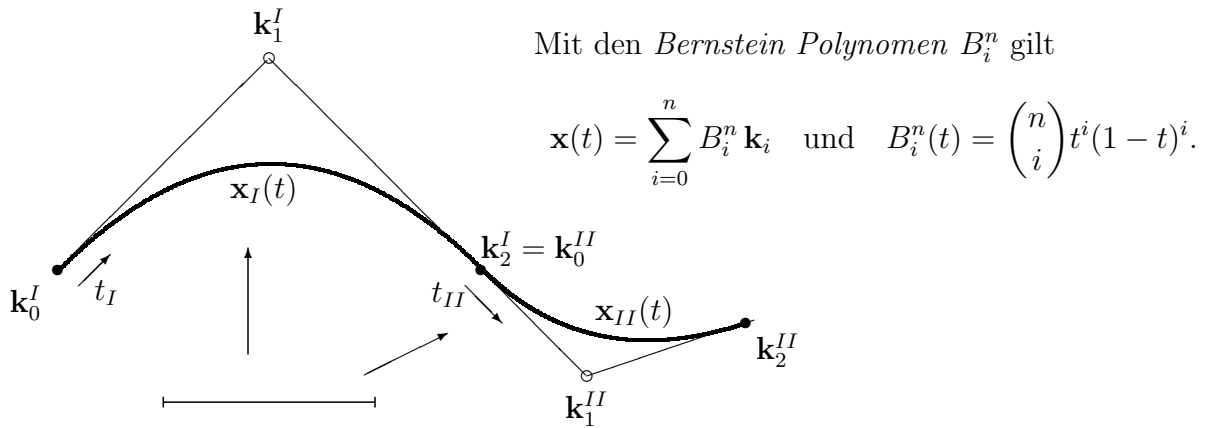


Bild 2.10: Darstellung von Bézierlinien über die zugehörigen Kontrollpunkte

Als weiteres Beispiel werden Coons-Flächen betrachtet, die vierseitig berandete Flächen über parametrische Randkurven beschreiben.

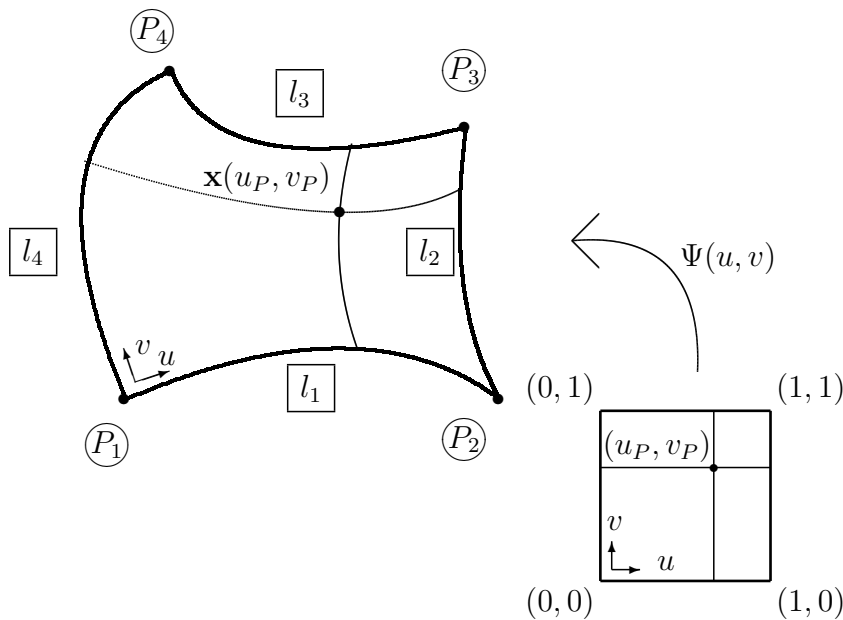


Bild 2.11: Parametrische Definition von Coons-Flächen

Mit den Koordinaten der vier Eckpunkte ($\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$) sowie den parametrischen Beschreibungen der Randlinien ($\mathbf{x}_{l1}, \mathbf{x}_{l2}, \mathbf{x}_{l3}, \mathbf{x}_{l4}$) gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= \mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{42} - \mathbf{r}_P & (2.17) \\ \mathbf{r}_{13} &= (1 - v) \mathbf{x}_{l1}(u) + v \mathbf{x}_{l3}(u) \\ \mathbf{r}_{42} &= (1 - u) \mathbf{x}_{l4}(v) + u \mathbf{x}_{l2}(v) \\ \mathbf{r}_P &= (1 - v) (1 - u) \mathbf{p}_1 + (1 - v) u \mathbf{p}_2 + v (1 - u) \mathbf{p}_4 + u v \mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

Einige wichtige Eigenschaften der Bézierlinien (-flächen) seien kurz erwähnt.

- Die Kurve (Fläche) liegt in der konvexen Hülle des Kontrollpunktpolygons.
- Die Stetigkeitsbedingungen an den Übergängen sind durch geometrische Bedingungen an die Lage der Kontrollpunkte einfach zu beschreiben.
- Eine Graderhöhung der Bézierbeschreibung ist einfach möglich.
- Die Lage eines Kontrollpunktes beeinflusst die gesamte Form der Linie (Fläche).

2.2.1.2 Hinweise zu Datenmodellen im CAGD

Für die Beschreibung der Geometriemodelle haben sich zwei Datenstrukturen etabliert: B-Rep (Boundary Representation) und CSG (Constructive Solid Geometry). Die B-Rep-Methode basiert auf einer Randdarstellung, in der ein Festkörper über seine Randelemente (Flächenstücke, Kanten, Ecken) und deren Topologie (Zusammenhang und Lage zueinander) beschrieben wird. Mit Hilfe der B-Rep-Methode wird eine exakte Repräsentation von 3D-Körpern ermöglicht.

Bei der CSG-Methode erfolgt eine prozedurale Definition von 3D-Körpern durch Boolesche Operationen bezogen auf vordefinierte Raumprimitive wie Zylinder, Kugel, Kegel oder Quader. Sie eignet sich besonders gut für globale gestaltsverändernde Operationen, beispielsweise für das Editieren des Gesamtkörpers oder den Einsatz von Features [143].

Die industriellen Anwendungen, z.B. im Automobil-, Flugzeug- und Maschinenbau, benutzen dabei Softwaresysteme wie z.B. *CATIA* [80], *I-DEAS* [91], *Pro/Engineer* [183] und *Solid Edge* [92]. Die differentialgeometrischen Auswertungen werden dabei im *Geometriemodellierer* (z.B. *Parasolid*, *ASIS* oder *Cas.Cade*) auf der Basis der *B-Rep*- (Boundary Representation) oder der *CSG*- (Constructive Solid Geometry) Darstellung realisiert.

2.2.1.3 Hinweise zu Geometrievariation: *Design Velocity Fields*

Im Rahmen der Strukturoptimierung ist die Variation der Geometrie bereitzustellen, welches in Form der sogenannten *design velocity fields* Eingang in die Sensitivitätsanalyse findet. Ansätze zur Berechnung der Geometrievariationen finden sich vor allem in den Hochschulentwicklungen (siehe z.B. CARAT [148, 58] sowie INA-OPT [43, 16, 94]). Im kommerziellen Rahmen ist die Berechnung noch nicht weitentwickelt, da hierzu die komplexen Zusammenhänge der CAGD-FEM-Kopplung und der Berechnung der FE-Netze berücksichtigt werden müssen. Für weitere Hinweise ist die Literatur [142, 72] zu konsultieren.

2.2.2 Finite Elemente Methode (FEM)

Die zentrale Aufgabe der *Finite Elemente Methode* besteht in der numerischen Lösung von *Anfangs- Randwertaufgaben*. Die Grundlagen dieses Verfahrens sind in vielfältiger Form in der Literatur dargestellt worden, siehe z.B. *Bathe* [41], *Hughes* [139], *Zienkiewicz, Taylor* [232]. Es werden hierbei die Strukturen des umgebenden Euklidischen Vektorraums ausgenutzt, d.h. das Verschiebungsfeld $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \in \mathbb{E}^3$ zwischen Referenz- und Momentankonfiguration wird zur Beschreibung der physikalischen Vorgänge verwendet.

2.2.2.1 Parametrische Abbildungen in der FEM

Als Modellverfahren wird die *h*-Methode mit reinen bilinearen Verschiebungsansätzen (primale Methode) in Teilgebieten des Körpers unter Verwendung des isoparametrischen Konzepts betrachtet. Bei dieser Formulierung werden die Knotenverschiebungen \mathbf{V} der Knoten der finiten Elemente als Unbekannte eingeführt. Die Approximation \mathbf{u}_h des Verschiebungszustandes \mathbf{u} kann auf Elementebene durch die Beziehung

$$\underline{u}_{(i)} = \underline{N}_{(i)} \underline{v}_{(i)} \quad (2.18)$$

in Matrixschreibweise angegeben werden. Hierbei ist $\underline{N}_{(i)}$ die Matrix der Ansatzfunktionen und $\underline{v}_{(i)}$ der Vektor der Knotenverschiebungen für das *i*-te Element. Für die Komponenten u_h^i des diskreten Verschiebungszustandes gilt mit *nkel* als der Anzahl der Knoten am Element

$$u_h^i = \hat{u}_h^i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^{nkel} \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \hat{v}_k^i = \tilde{u}_h^i(X^1, X^2, X^3) = \sum_{k=1}^{nkel} \tilde{N}^k(X^1, X^2, X^3) \hat{v}_k^i.$$

Dabei sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 die lokalen Koordinaten des isoparametrischen Konzeptes und X^1, X^2, X^3 die kartesischen Koordinaten der Punkte der diskreten Referenzkonfiguration. Weiterhin stellen \hat{X}_k^A die *A*-te Koordinate und \hat{v}_k^i die *i*-te Verschiebungskomponente des *k*-ten Knotens dar.

Die Besonderheit des isoparametrischen Konzeptes besteht darin, daß die Geometrie und der Verschiebungszustand im Element in gleicher Form über die Knotenwerte approximiert werden, d.h. es gilt für die Geometrie des Elementes

$$X_h^A = \hat{X}_h^A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^{nkel} \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \hat{X}_k^A. \quad (2.19)$$

Das isoparametrische Konzept ist in der Bild 2.12 verdeutlicht.

Die Auswahl der Teilgebiete, d.h. geeigneter FE-Netze, wird von der Notwendigkeit einer hinreichenden Genauigkeit der Approximation bestimmt. Im Rahmen eines adaptiven Verfahrens wird dabei die Güte stetig verbessert.

Die isoparametrische FE-Methode approximiert mit einem Atlas A_{FEM} den Verschiebungszustand $\tilde{\mathbf{v}}_h$ aus einem Approximationsraum $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ der Dimension $\dim \mathcal{V}_h = n_\nu$. Dieses bedeutet gleichzeitig, daß die deformierte Geometrie der Momentankonfiguration $\Omega_t \subset \mathbb{E}^3$ in geeigneter Form dargestellt wird. Hierbei gilt $\tilde{\varphi}_h \in \mathcal{D}_h \subset \mathcal{D}$ mit $\dim \mathcal{D}_h = n_\varphi$.

Die Darstellung der Geometrie im isoparametrischen Konzept weist gegenüber der CAGD-Beschreibung einen weiteren Diskretisierungsfehler auf, da die gewählten bilinearen Ansätze

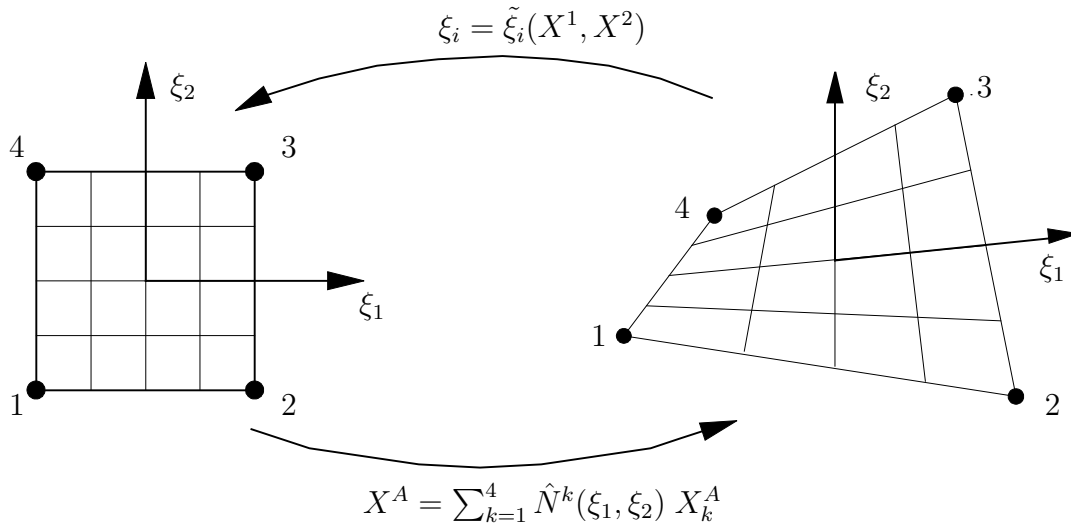


Bild 2.12: Darstellung des isoparametrischen Konzepts

die CAGD-Geometrie (ursprünglich der Atlas A_{CAGD}) nur annähern können. Die Approximation eines Kreisloches durch einen Polygonzug der Kanten bilinearer isoparametrischer Elemente verdeutlicht dieses. Dieser Sachverhalt wird in der Regel durch Wahl einer hinreichend feinen Anfangsdiskretisierung beachtet. Genauer bedeutet dies, daß ein Approximationsraum $\mathcal{G}_h \subset \mathcal{G}$ mit Dimension $\dim \mathcal{G}_h = m_h$ und Funktionen ψ_h eingeführt wird. Im Allgemeinen kann wegen der unterschiedlichen Ansatzfunktionen und der unterschiedlichen Topologie von Patch und Element keine strenge Schachtelung der Räume \mathcal{G}_g und \mathcal{G}_h angegeben werden.

Die Geometriebeschreibung der Referenzkonfiguration wird bei Netzverfeinerung ebenfalls nachgezogen, d.h. die Dimension $m_h = \dim \mathcal{G}_h$ erhöht sich. Hierfür gibt es außer bei der Approximation gekrümmter Ränder oder Flächen keinen sachlichen Grund. Im Rahmen der Strukturoptimierung ist hiermit ein wesentlicher Nachteil verbunden, da die Anzahl der Freiheitsgrade bei inversen Problemen (unnötig) angehoben wird. Weiterhin ist es kaum möglich, sinnvolle *design velocity fields* auf der Basis eines FE-Netzes zu generieren, siehe z.B. die Netze in [120, S. 5]. Ebenfalls aus diesem Grund besitzt die Geometriemodellierung durch CAGD-Methoden eine große Bedeutung für die Strukturoptimierung.

2.2.2.2 Hinweise zu kommerziellen Softwaresystemen

Kommerzielle Programmpakete wie z.B. *MSC-NASTRAN* [179], *ANSYS* [3] und *ABAQUS* [134] ermöglichen die Analyse komplexer industrieller Problemstellungen. Die erforderliche CAD-FEM-Kopplung zwischen den Programmen erfolgt über das FE-Netz, d.h. basierend auf einer CAGD-Beschreibung wird die Topologie des FE-Netzes sowie die Koordinaten der FE-Knoten erzeugt. Die weiteren Angaben der Randwertaufgabe (Lasten, Randbedingungen, Material) werden durch Auswertung der Zusammenhänge auf die FE-Elemente übertragen. Damit ist das FE-Modell hinsichtlich der Strukturanalyse vollständig und benötigt (evtl. im Falle adaptiver Methoden) keinen Rückgriff auf die CAGD-Datenbasis.

2.3 Integrierte Darstellung der Kinematik I

Ziel dieses Abschnittes ist es, die konsequente Umsetzung der kinematischen Zusammenhänge der lokal-konvektiven Betrachtungsweise in den diskreten Methoden vorzubereiten. Hierbei ergibt sich eine modifizierte Darstellung der CAGD–FEM–Kopplung, welche hilfreich für die Anforderungen der Strukturoptimierung sein wird.

2.3.1 Zusammenfassung bisheriger Konzepte

Aus den vorhergehenden Abschnitten wurden die folgenden Aussagen hergeleitet.

- **Kontinuumsmechanik:** Die undeformierte Referenzkonfiguration $\Omega_o \subset \mathbb{E}^3$ sowie die deformierte Momentankonfiguration $\Omega_t \subset \mathbb{E}^3$ sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten, d.h. sowohl Geometrie als auch Deformation werden durch parametrische Abbildungen (Karten) der Atlanten A_o und A_t dargestellt, siehe Bild 2.5.
- **CAGD:** Die Geometrie des betrachteten Körpers, d.h. die undeformierte Referenzkonfiguration $\Omega_o \subset \mathbb{E}^3$, wird in praktischen Anwendungen mittels CAGD dargestellt. Der Einsatz von CAGD bedeutet eine Diskretisierung A_{CAGD} des Atlanten A_o .
- **FEM:** Der deformierte Körper nimmt den Raum $\Omega_t \subset \mathbb{E}^3$ ein, der durch den Einsatz von FEM nur approximativ beschrieben werden kann. Der Einsatz der FE-Methode bedeutet somit eine Diskretisierung A_{FEM} des Atlanten A_t . Bei Verwendung der isoparametrischen Methode wird auch die undeformierte Referenzkonfiguration Ω_o durch die FE-Methode approximiert.

Zusammenfassend führt dieses dazu, daß in der praktischen Anwendung von CAGD und FEM die Atlanten A_o bzw. A_t sowohl durch einen Atlas A_{CAGD} zur Geometriebeschreibung (CAGD) als auch durch einen anderen Atlas A_{FEM} zur Deformationsbeschreibung (FEM) ersetzt werden.⁶

Die bisherigen Abbildungen und Approximationen sind hier zusammengefaßt.

Abbildung	Theorie	CAGD	FEM
Geometrie	$\tilde{\psi} \in \mathcal{G}$	$\tilde{\psi}_g \in \mathcal{G}_g \subset \mathcal{G}$	$\tilde{\psi}_h \in \mathcal{G}_h \subset \mathcal{G}$
Verschiebung	$\tilde{\nu} \in \mathcal{V}$	$\dim \mathcal{G}_g = m_g$	$\tilde{\nu}_h \in \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$
Deformation	$\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}$		$\tilde{\varphi}_h \in \mathcal{D}_h \subset \mathcal{D}$
			$\dim \mathcal{G}_h = m_h$
			$\dim \mathcal{V}_h = n_\nu$
			$\dim \mathcal{D}_h = n_\varphi$

Tabelle 2.2: Basisabbildungen und deren Approximationen

⁶Der hier gewählte Sprachgebrauch ist im Rahmen der FEM und des CAGD zunächst ungewöhnlich, da man dort von *FE-Netzen* und *Geometrie-Patches* spricht. Bei der angestrebten integrierten Darstellung ist aber auch eine gemeinsame Bezeichnung wichtig, die sich konsequenterweise an den mathematischen Grundlagen orientiert. Der Vorteil dieser Bezeichnungsweise ist ebenfalls, daß im Begriff *Atlas* sowohl die Topologie der Karten als auch deren Abbildungen erfaßt ist. Damit können z.B. in der FEM die klassischen adaptiven Methoden, d.h. h- und/oder p-Adaptivität beschrieben werden.

2.3.2 Eine integrierte Darstellung der Abbildungen

Die Tabelle 2.2 zeigt deutlich, daß mittels CAGD nur die Geometrie (und nicht die Deformation) approximiert wird. Andererseits wird in der (isoparametrischen) FEM sowohl die Deformation (bzw. Verschiebung) als auch die Geometrie approximiert. Das nachfolgende Konzept zeigt auf, wie die theoretisch vorhandene Unabhängigkeit ebenfalls in der Numerik beibehalten werden kann.

Da theoretisch ein Kartenwechsel unendlich oft differenzierbar ist, gilt es im konkreten Einsatz von CAGD und FEM die Beziehungen zwischen A_{CAGD} und A_{FEM} zu beschreiben. Eine nicht allzu wesentliche Einschränkung des Zusammenspiels von CAGD und FEM im praktischen Einsatz besteht darin, für jede Karte j des FEM-Atlanten anzunehmen, daß der zugehörige Parameterraum vollständig im Parameterraum der zugehörigen Karte i des CAGD-Atlanten befindet. Dies bedeutet, daß jedes finite Element sich in genau einem Geometriepatch befindet. Damit kann der Kartenwechsel (im Fall von Vierecken im Parameterraum) durch eine bilineare Abbildung (Koordinatentransformation) ausgedrückt werden.

Das folgende Bild zeigt den Zusammenhang der Parametergebiete von CAGD und FEM.

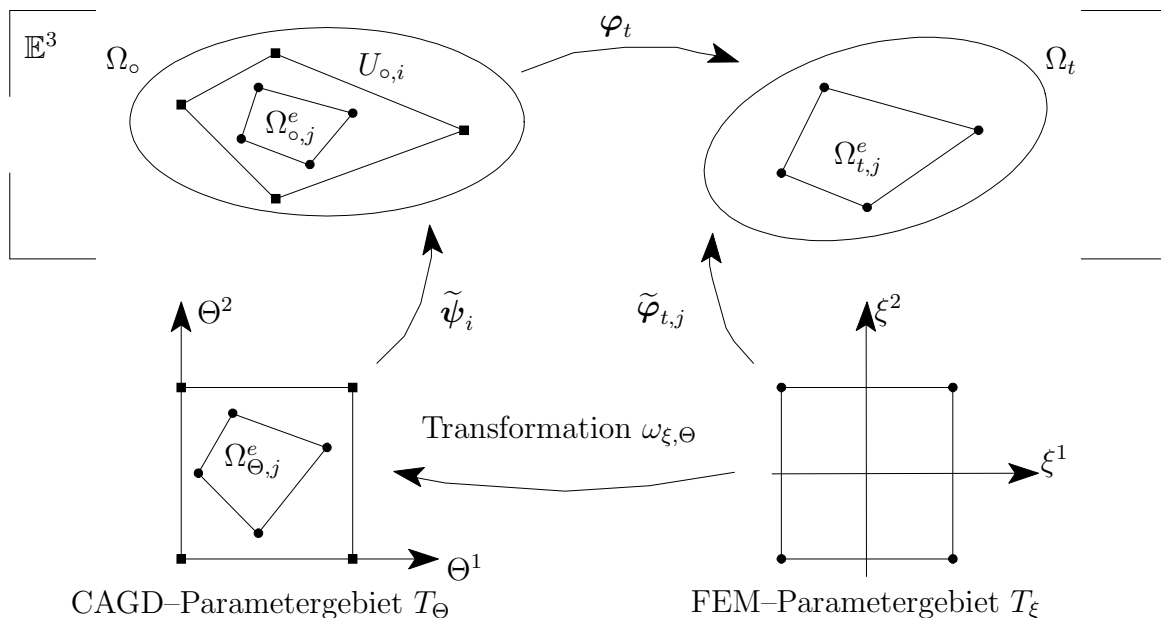


Bild 2.13: Abbildungen über CAGD- und FEM-Parameterräume

Im Vergleich mit der isoparametrischen FE-Methode besteht der wesentlich Unterschied darin, daß die lokale Geometrieabbildung $\tilde{\psi}_i$ über dem CAGD-Parametergebiet T_{Θ} definiert ist, während die lokale Deformationsabbildung $\tilde{\varphi}_{t,j}$ über dem FEM-Parametergebiet T_{ξ} angegeben wird. Hierbei sind beide lokalen Parametergebiete nicht identisch. Diese Situation wird auch nicht über die sogenannten *super- oder subparametrischen* Beschreibungen in der FEM erfaßt, da dort nur die Ansatzordnungen differieren, aber nicht das Parametergebiet.

Mit der obigen Darstellung ist die Richtung für die vorzunehmende Integration aufgezeigt. Die weitere Entwicklung dieses integrierten Konzeptes wird in Kapitel 4 fortgesetzt, nachdem in Kapitel 3 die Kontinuumsmechanik der lokal-konvektiven Betrachtungsweise aufbereitet wurde.

Die ergänzende Darstellung in Abschnitt 4.1 konkretisiert die in Bild 2.13 eingeführten Abbildungen. Insbesondere werden durch die Gleichungen (4.8) und (4.10) die lokalen Beschreibungen der Geometrie und Verschiebung angegeben. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß sich diese Darstellungen auf unterschiedliche Parameterräume T_Θ bzw. T_ξ beziehen. Entsprechend hierzu können die Variationen der eingeführten Approximationen hergeleitet werden, siehe die Gleichungen (4.9) und (4.11). Durch Einführung der zugehörigen Form- bzw. Ansatzfunktionen treten somit nur noch die Variationen skalarwertiger Parameter auf.

Zur integrierten Beschreibung sind weiterhin die Transformationsbeziehungen zwischen den Parametergebieten einzuführen und die entsprechenden Gradientenoperatoren zu verknüpfen. Aus diesen Überlegungen kann der Sonderfall der isoparametrischen FEM-Beschreibung hergeleitet werden.

Kapitel 3

Kontinuumsmechanik der lokal-konvektiven Betrachtungsweise

Es wird eine Darstellung der Kontinuumsmechanik in den konvektiven Koordinaten Θ des im vorherigen Kapitel eingeführten lokalen Parameterraumes $T_\Theta \subset \mathbb{Z}^3$ hergeleitet. Diese Vorgehensweise weist, wie im vorigen Kapitel erläutert, starke Gemeinsamkeiten mit einer intrinsischen Betrachtungsweise nach *Noll* [181] in konvektiven Koordinaten auf. Hinweise und weiterführende Literaturangaben finden sich zum intrinsischen Konzept z.B. in *Bertram* [52], zur Anwendung konvektiver Koordinaten in der Schalentheorie z.B. in den Arbeiten von *Wagner* [222], *Gruttmann* [110], *Ramm* [63, 57], *Schweizerhof* [42, 131], *Betzinger* [59] und in *Wriggers* [230] sowie für den allgemeinen theoretischen Rahmen in *Marsden, Hughes* [164], siehe z.B. auch die Arbeiten von *Wriggers* [229] und *Miehe* [172].

Für die Sensitivitätsanalyse wurde das Potential einer Parametrisierung des Gebietes bereits von *Haber* [114] erkannt. Dieser Zugang zur Sensitivitätsanalyse konnte sich jedoch bisher nicht allgemein durchsetzen. Die Bedeutung konvektiver Koordinaten für eine *natürlich* innerhalb der Kontinuumsmechanik vorhandene Parametrisierung und die weitreichenden Folgerungen für die variationelle Sensitivitätsanalyse wurde in [16, 37] hingewiesen. Dieses Kapitel beinhaltet eine bisher nicht veröffentlichte Darstellung mit den folgenden wichtigen Aspekten:

Tafel 3.1: Kontinuumsmechanik der lokal-konvektiven Betrachtungsweise

- Trennung und Dualität von Geometrie und Deformation sowie
- Integration der Sensitivität (Variation) in die Kontinuumsmechanik.

Die Inhalte dieses Kapitels sind nachfolgend aufgeführt. Es werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen aus der lokal-konvektiven Darstellung heraus definiert und motiviert. Die bezogenen Darstellungen ergeben sich deshalb stets als Folgerung aus der lokalen Darstellung. Die Herleitungen sind im Hauptteil kurz gehalten und mit Querverweisen auf den Anhang versehen. Die bezogenen Darstellungen finden sich ebenfalls überwiegend im Anhang.

Inhaltsangabe

3.1	Gradienten und Tangentenabbildungen	41
3.1.1	Tangentialräume und Transformationen	41
3.1.2	Gradienten der variierten Grundabbildungen	44
3.1.3	Variation von Funktionen der Grundabbildungen	46
3.2	Verzerrungsmaße	47
3.2.1	Die metrische oder erste Fundamentalform	47
3.2.2	Lokale Verzerrungstensoren und deren Variation	47
3.2.3	Eigenwerte und Eigenvektoren der Verzerrungstensoren	50
3.2.4	Variation von Funktionen des lokalen Verzerrungsmaßes	51
3.3	Spannungen und Spannungsleistung	55
3.3.1	Definition von Spannungstensoren	55
3.3.2	Variation von Spannungstensoren	56
3.3.3	Oberflächen- und Volumenspannungen	57
3.3.4	Einführung der Spannungsleistung	57
3.3.5	Variation der Spannungsleistung	58
3.4	Materialgesetze	61
3.5	Bilanz- und Erhaltungssätze	62
3.5.1	Massenerhaltung	62
3.5.2	Erhaltungssatz der Bewegungsgröße	62
3.5.3	Weitere Bilanz- und Erhaltungssätze	64
3.6	Variationsprinzipien für Analyse und Sensitivität	65
3.6.1	Die schwache Form des Gleichgewichts	65
3.6.2	Die schwache Form der Gleichgewichtsvariation	66
3.6.3	Einführung von Linear- und Bilinearformen	66
3.6.4	Lagrangefunktion und Optimalitätsbedingungen	68
3.7	Zusammenfassung und Ausblick	70

3.1 Gradienten und Tangentenabbildungen

Der Ausgangspunkt der Betrachtungen ist in Abschnitt 2.1.5.4 mit Bild 2.9 zusammengefaßt worden, d.h. die Abbildungen $\tilde{\psi}$ nach (2.12) und $\tilde{\varphi}$ nach (2.13) bilden die Parametermenge T_Θ (lokal) in die Umgebungen U_X bzw. U_x von $\mathbf{X} \in \Omega_o$ bzw. $\mathbf{x} \in \Omega_t$ ab. O.B.d.A. für die weiteren Herleitungen in diesem Kapitel wird ein *einfacher* Körper angenommen, d.h. die Konfigurationen Ω_o und Ω_t lassen sich vollständig durch eine Karte beschreiben.

3.1.1 Tangentialräume und Transformationen

Es können drei unterschiedliche Gradientenoperatoren bzgl. der drei Koordinaten $\Theta, \mathbf{X}, \mathbf{x}$ in der Kontinuumsmechanik verwendet werden. Die Gradienten $\text{GRAD}_\Theta, \text{Grad}_X$ bzw. grad_x werden als *lokaler, materieller* bzw. *räumlicher* Gradient bezeichnet. Die jeweiligen Koordinaten bzgl. derer die Gradientenbildung erfolgt sind als Index angegeben. Die Notation lehnt sich dabei an die in der Literatur übliche an. Die kartesischen Basissysteme $\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3\}$ für den Parameterraum sowie $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ und $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ für die Referenz- und Momentan-konfiguration sind in Abschnitt 2.1 eingeführt worden. Auf die Einbettungseigenschaft der Konfigurationen in den \mathbb{E}^3 (bzw. den \mathbb{R}^3) wird weitestgehend verzichtet.

Die partiellen Ableitungen der Abbildungen zur Geometrie $\tilde{\psi}$ und zur Deformation $\tilde{\varphi}$ bzgl. der Koordinaten Θ^i ergeben in $\mathbf{X} \in \Omega_o$ bzw. $\mathbf{x} \in \Omega_t$ die konvektiven Tangentenvektoren

$$\mathbf{G}_i := \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \Theta^i} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i := \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \Theta^i} \quad (3.1)$$

an die Koordinatenlinien $\Theta^i = \text{konst.}$ für $i = 1, 2, 3$. Die drei Tangentenvektoren bilden die kovariante Basis und spannen die jeweiligen Tangentialräume T_X im Punkt \mathbf{X} an Ω_o bzw. T_x im Punkt \mathbf{x} an Ω_t auf. Die zugehörigen kontravarianten Basisvektoren, welche die dualen Tangentialräume T_X^* bzw. T_x^* aufspannen, sind durch $\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j$ bzw. $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$ definiert.¹

Die Gradienten von $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$ bzgl. Θ können durch \mathbf{G}_i und \mathbf{g}_i beschrieben werden. Die fundamentalen Tensoren der Kinematik sind der *lokale Geometriegradient* $\mathbf{K}_\Theta : T_\Theta \rightarrow T_X$

$$\mathbf{K}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \tilde{\psi} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \Theta^i} \otimes \mathbf{Z}^i = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{Z}^i \quad (3.2)$$

sowie der *lokale Deformationsgradient* $\mathbf{F}_\Theta : T_\Theta \rightarrow T_x$

$$\mathbf{F}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \tilde{\varphi} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \Theta^i} \otimes \mathbf{Z}^i = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{Z}^i. \quad (3.3)$$

Diese lokalen Gradienten sind die Grundlage *aller* (lokalen, materiellen oder räumlichen) Tangentenabbildungen in der Kontinuumsmechanik, siehe z.B. auch *Bertram* [52] für das intrinsische Konzept sowie *Barthold* [37] für die Einbeziehung der Sensitivitätsanalyse.

¹Im Rahmen einer tensoranalytischen Darstellung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten unterscheidet sich der Sprachgebrauch und die Darstellung von der klassischen Tensoranalysis. Hierbei bilden die partiellen Ableitungen $\partial/\partial\Theta^i$ die Basis des Tangentialraumes (Vektoren). Die Differentiale $d\Theta^i$ (Kovektoren, lineare Funktionale) stellen die duale Basis dar. Für eine ausführliche Diskussion sei auf *Marsden, Hughes* [164, Box 2.1] verwiesen. Im weiteren Verlauf wird die gebräuchlichere Notation der klassischen Tensoranalysis verwendet. Nach *Miehe* [172] kann auch ausführlicher $T_X \Omega_o$ statt T_X und $T_x \varphi_t(\Omega_o)$ statt T_x geschrieben werden.

Der materielle Gradientenoperator Grad_X sowie der räumliche Gradientenoperator grad_x können aus einer Komposition lokaler Gradienten hergeleitet werden. Die Bedeutung des *materiellen Deformationsgradienten* $\mathbf{F}_X : T_X \rightarrow T_x$ mit $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_X = \text{Grad}_X \mathbf{x}$ ist bekannt. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Darstellung von \mathbf{F}_X als Komposition der lokalen Gradienten \mathbf{K}_Θ und \mathbf{F}_Θ angegeben. Aus der Darstellung $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) = (\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1})(\Theta)$ als Komposition von Geometrie- und Deformationsabbildung ergibt sich (siehe auch [52, §7])

$$\mathbf{F}_X = \text{Grad}_X \varphi = \text{GRAD}_\Theta \tilde{\varphi} (\text{GRAD}_\Theta \tilde{\psi})^{-1} = \mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1}. \quad (3.4)$$

Diese Beziehung kann auch durch tensoralgebraische Umformungen erhalten werden, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_X = \text{Grad}_X \mathbf{x} &= \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i = \mathbf{g}_i \otimes \delta_j^i \mathbf{G}^j = \mathbf{g}_i \otimes (\mathbf{Z}^i \cdot \mathbf{Z}_j) \mathbf{G}^j = (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{Z}^i) (\mathbf{Z}_j \otimes \mathbf{G}^j) \\ &= (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{Z}^i) (\mathbf{G}_j \otimes \mathbf{Z}^j)^{-1} = \text{GRAD}_\Theta \tilde{\varphi} (\text{GRAD}_\Theta \tilde{\psi})^{-1} = \mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1}. \end{aligned}$$

Die nachfolgende Tabelle gibt die lokalen, materiellen und räumlichen Gradienten von Geometrie und Deformation sowie der Verschiebungsabbildung an.

lokaler	Geometriegradient	$\mathbf{K}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \tilde{\psi}(\Theta) = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{Z}^i : T_\Theta \rightarrow T_X$
materieller	Geometriegradient	$\mathbf{K}_X = \text{Grad}_X \psi(\mathbf{X}) = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i : T_X \rightarrow T_X$
räumlicher	Geometriegradient	$\mathbf{K}_x = \text{grad}_x \bar{\psi}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i : T_x \rightarrow T_X$
lokaler	Deformationsgradient	$\mathbf{F}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \tilde{\varphi}(\Theta) = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{Z}^i : T_\Theta \rightarrow T_x$
materieller	Deformationsgradient	$\mathbf{F}_X = \text{Grad}_X \varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i : T_X \rightarrow T_x$
räumlicher	Deformationsgradient	$\mathbf{F}_x = \text{grad}_x \bar{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i : T_x \rightarrow T_x$
lokaler	Verschiebungsgradient	$\mathbf{H}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \tilde{\nu}(\Theta) = \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{Z}^i : T_\Theta \rightarrow \mathbb{E}^3$
materieller	Verschiebungsgradient	$\mathbf{H}_X = \text{Grad}_X \nu(\mathbf{X}) = \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{G}^i : T_X \rightarrow \mathbb{E}^3$
räumlicher	Verschiebungsgradient	$\mathbf{H}_x = \text{grad}_x \bar{\nu}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{g}^i : T_x \rightarrow \mathbb{E}^3$

Tabelle 3.1: Tangentenabbildungen unterschiedlicher Betrachtungsweisen

Die aufgeführten Geometrie- und Deformationsgradienten sind stetig invertierbar. Der materielle Geometriegradient $\mathbf{K}_X = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i = \mathbf{1}_X$ sowie der räumliche Deformationsgradient $\mathbf{F}_x = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i = \mathbf{1}_x$ sind gemischtvariante Einheitstensoren. Die Verschiebungsgradienten sind nur nach Einbettung von Ω_o, Ω_t in den \mathbb{E}^3 erklärt, jedoch i.d.R. nicht invertierbar. Für die partielle Ableitung der Verschiebungsabbildung wird die Definition $\mathbf{h}_i := \partial \tilde{\nu} / \partial \Theta^i$ verwendet. Die eingeführten Tangentenabbildungen sind in Bild 3.1 veranschaulicht.

Für das Verschiebungsfeld $\mathbf{u} = \tilde{\nu}(\Theta) = \nu(\mathbf{X}) = \bar{\nu}(\mathbf{x})$ hängen die lokalen, materiellen und räumlichen Verschiebungsgradienten in der folgenden Form zusammen

$$\mathbf{H}_X = \text{Grad}_X \mathbf{u} = \mathbf{H}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} = \text{GRAD}_\Theta \mathbf{u} (\text{GRAD}_\Theta \mathbf{X})^{-1} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{H}_x = \text{grad}_x \mathbf{u} = \mathbf{H}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} = \text{GRAD}_\Theta \mathbf{u} (\text{GRAD}_\Theta \mathbf{x})^{-1} \quad (3.6)$$

$$= \mathbf{H}_X \mathbf{F}_X^{-1} = \text{Grad}_X \mathbf{u} (\text{Grad}_X \mathbf{x})^{-1}. \quad (3.7)$$

Diese multiplikative Zerlegung des materiellen und des räumlichen Gradientenoperators erlaubt eine effiziente Darstellung, Analyse und Trennung der Einflüsse von Geometrie und Deformation auf die weiteren kontinuumsmechanischen Größen.

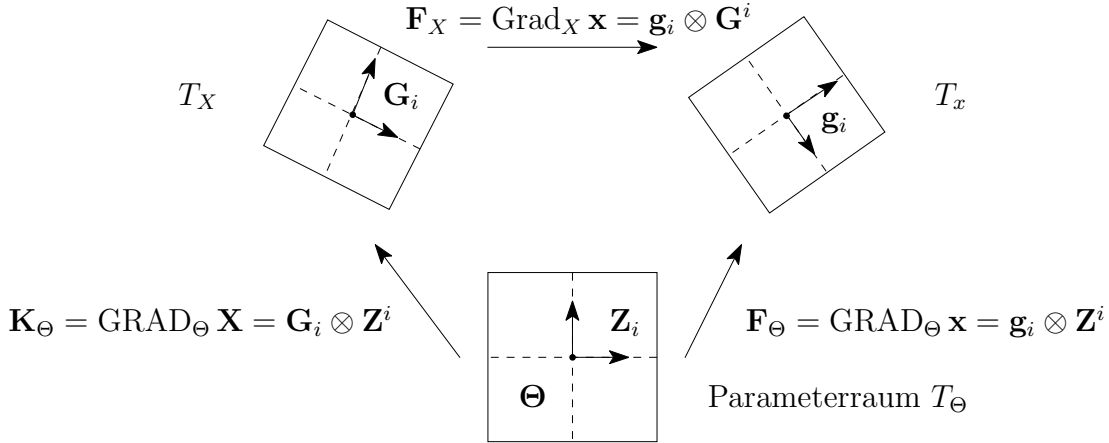


Bild 3.1: Tangentenabbildungen in der Kontinuumsmechanik

Für eine aussagekräftige Beschreibung der theoretischen Zusammenhänge in der Kontinuumsmechanik sowie für die effizienten numerischen Algorithmen werden die unterschiedlichen Betrachtungsweisen (lokal-konvektiv, materiell, räumlich) benötigt. Damit sind die kontinuumsmechanischen Größen stets zwischen diesen Darstellungsweisen zu transformieren. An dieser Stelle werden kurz die notwendigen Konzepte vorgestellt sowie auf weitere Hinweise in den Anhängen bzw. in der Literatur verwiesen.

Die oben eingeführten Gradientenabbildungen \mathbf{K}_Θ , \mathbf{F}_Θ und \mathbf{F}_X sind gemischtvariante Zweifeldtensoren, mit denen die Transformationen zwischen dem Parameterraum und den Tangentialräumen der Konfigurationen bzw. zwischen dem Tangentialraum T_X der Referenz- und T_x der Momentankonfiguration durchgeführt werden können.

Zur Kennzeichnung einer Rücktransformationen (*pull-back*) wird ein hochgestellter Stern $(\bullet)^*$ beigelegt, d.h.

$$\tilde{\psi}^* : T_X \rightarrow T_\Theta, \quad \tilde{\varphi}^* : T_x \rightarrow T_\Theta \quad \text{und} \quad \varphi^* : T_x \rightarrow T_X.$$

Ein tiefgestellter Stern $(\bullet)_*$ kennzeichnet eine Vorwärtstransformationen (*push-forward*), d.h.

$$\tilde{\psi}_* : T_\Theta \rightarrow T_X, \quad \tilde{\varphi}_* : T_\Theta \rightarrow T_x \quad \text{und} \quad \varphi_* : T_X \rightarrow T_x.$$

Die Transformation von Skalaren, Vektoren und Tensoren zwischen den Räumen T_Θ, T_X, T_x wird im Anhang A.3.5 näher beschrieben. Hierbei ist zwischen den Transformationsvorschriften für ko- bzw. kontravariante Vektoren bzw. Tensorkomponenten zu unterscheiden. Weitere Hinweise finden sich z.B. in *Marsden, Hughes* [164] und den darauf aufbauenden Arbeiten, z.B. *Wriggers* [229].

Die Determinanten der Abbildungen \mathbf{K}_Θ , \mathbf{F}_Θ und $\mathbf{F}_X = \mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1}$ werden mit J_ψ , J_φ sowie J bezeichnet. Aus der multiplikativen Zerlegung von \mathbf{F}_X erhält man die Beziehung $J = J_\varphi J_\psi^{-1}$.

Die Linien-, Flächen- und Volumenelemente der Konfigurationen werden mit $d\Theta$, $d\mathbf{A}_\Theta$, dV_Θ (lokal-konvektiv), $d\mathbf{X}$, $d\mathbf{A}_X$, dV_X (materiell) sowie $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{A}_x$, dV_x (räumlich) bezeichnet und können mittels der eingeführten Transformationen (pull-back- und push-forward-Operationen) ineinander überführt werden. Weitere Hinweise zu den Herleitungen sowie eine Zusammenstellung der Transformationsbeziehungen finden sich im Anhang A.3.6.

Zusätzlich zu den Volumenelementen können auch die Massenelemente dM_Θ , dM_X und dM_x in Beziehung gesetzt werden. Eine Ableitung findet sich im Anhang A.3.7.

3.1.2 Gradienten der variierten Grundabbildungen

In Abschnitt 2.1.6 wurden die Beziehungen zwischen der Linearisierung bzw. der Variation kontinuumsmechanischer Feldgrößen und einer Zeitableitung erläutert sowie auf die entsprechende Linearisierung, Variation bzw. Zeitableitung der Abbildungen $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$ zurückgeführt. An dieser Stelle werden nun die oben eingeführten Tangentenabbildungen untersucht. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden die Werte der Abbildungen (z.B. $\text{Grad}_X \mathbf{x}$) anstatt der Abbildungsvorschriften (z.B. $\text{Grad}_X \varphi(\mathbf{X})$) geschrieben.

Eine wesentliche Eigenschaft der lokal-konvektiven Betrachtungsweise ist die Unabhängigkeit der Variation und der Gradientenbildung voneinander, die eine Vertauschung beider Operationen erlaubt. Die lokalen, materiellen und räumlichen Gradienten der Abbildungen $\tilde{\psi}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\nu}$ sind oben bereits angegeben worden. Analog hierzu sind die unterschiedlichen Gradienten GRAD_Θ , Grad_X , grad_x von $\delta\tilde{\psi}$, $\delta^2\tilde{\psi}$ und $\delta\tilde{\varphi}$, $\delta^2\tilde{\varphi}$ sowie $\delta\tilde{\nu}$, $\delta^2\tilde{\nu}$ bereitzustellen.

3.1.2.1 Lokale Gradienten von Variationen der Grundabbildungen

Der lokale Gradient der ersten bzw. zweiten Variation bzw. der ersten und zweiten Zeitableitung von $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$ wird hier eingeführt. Eine Erweiterung auf Variationen bzw. Zeitableitungen beliebiger Ordnung ist somit leicht möglich. Höhere Ableitungen werden in dieser Arbeit jedoch nicht betrachtet.

Der lokale (*Erste–*)*Geometrie– (Deformations–/Verschiebungs–) Variationsgradient* lautet:

$${}^1\mathbf{K}_\Theta := \delta\mathbf{K}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta\tilde{\psi}(\Theta) = \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{X} = \delta\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{Z}^i, \quad (3.8)$$

$${}^1\mathbf{F}_\Theta := \delta\mathbf{F}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta\tilde{\varphi}(\Theta) = \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{Z}^i, \quad (3.9)$$

$${}^1\mathbf{H}_\Theta := \delta\mathbf{H}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta\tilde{\nu}(\Theta) = \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{h}_i \otimes \mathbf{Z}^i. \quad (3.10)$$

In analoger Form ergeben sich die lokalen Gradienten GRAD_Θ der zweiten Variationen, d.h. der lokale (*Zweite–*)*Geometrie– (Deformations–/Verschiebungs–) Variationsgradient* lautet:

$${}^2\mathbf{K}_\Theta := \delta^2\mathbf{K}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta^2\tilde{\psi}(\Theta) = \text{GRAD}_\Theta \delta^2\mathbf{X} = \delta^2\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{Z}^i, \quad (3.11)$$

$${}^2\mathbf{F}_\Theta := \delta^2\mathbf{F}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta^2\tilde{\varphi}(\Theta) = \text{GRAD}_\Theta \delta^2\mathbf{x} = \delta^2\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{Z}^i, \quad (3.12)$$

$${}^2\mathbf{H}_\Theta := \delta^2\mathbf{H}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta^2\tilde{\nu}(\Theta) = \text{GRAD}_\Theta \delta^2\mathbf{u} = \delta^2\mathbf{h}_i \otimes \mathbf{Z}^i. \quad (3.13)$$

Diese Gradienten der (totalen) Variationen der Grundabbildungen bilden neben \mathbf{K}_Θ nach (3.2) und \mathbf{F}_Θ nach (3.3) die Grundlage der Kinematik. Alle sonstigen Größen der materiellen und räumlichen Betrachtungsweise können durch sie dargestellt werden. Eine Auswertung liefert die Zusammenhänge ${}^1\mathbf{F}_\Theta = {}^1\mathbf{K}_\Theta + {}^1\mathbf{H}_\Theta$ und ${}^2\mathbf{F}_\Theta = {}^2\mathbf{K}_\Theta + {}^2\mathbf{H}_\Theta$.

Als Spezialfall einer Variation gilt die Zeitableitung. Für die lokale Deformationsabbildung erhält man den lokale *Deformationsgeschwindigkeits– (bzw. –beschleunigungs–) gradienten*

$$\mathbf{l}_\Theta := \dot{\mathbf{F}}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \frac{D}{Dt} \tilde{\varphi}(\Theta) = \text{GRAD}_\Theta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{Z}^i \quad (3.14)$$

$${}^2\mathbf{l}_\Theta := \ddot{\mathbf{F}}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \frac{D^2}{Dt^2} \tilde{\varphi}(\Theta) = \text{GRAD}_\Theta \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{Z}^i. \quad (3.15)$$

Der Tensor \mathbf{l}_Θ stellt den Kern aller weiteren Geschwindigkeitsgradienten sowie Verzerrungsraten dar. Es ist deutlich, daß sich die zeitliche Veränderung der kovarianten Basisvektoren des Tangentialraumes T_x , d.h. des Tangentialraumes selbst, dahinter verbirgt.

3.1.2.2 Transformation in materielle und räumliche Gradienten

Die lokalen Gradienten können durch die push-forward-Operationen $\tilde{\psi}_*$ und $\tilde{\varphi}_*$, d.h. durch Nachmultiplikation mit \mathbf{K}_Θ^{-1} bzw. mit \mathbf{F}_Θ^{-1} , in materielle bzw. räumliche Gradienten transformiert werden. Es ist zu beachten, daß es sich hierbei um Transformationen von bereits variierten Größen handelt. Dies darf nicht mit der Variation transformierter Größen vertauscht werden. Die beiden Operationen sind nicht generell vertauschbar, d.h. i.d.R. gilt

$$\delta [\tilde{\psi}_*(\mathbf{A})] \neq \tilde{\psi}_*(\delta\mathbf{A}) \quad \text{und} \quad \delta [\tilde{\varphi}_*(\mathbf{A})] \neq \tilde{\varphi}_*(\delta\mathbf{A}).$$

Die Transformation des lokalen Gradienten GRAD_Θ in den materiellen Gradienten Grad_X liefert

$${}^1\mathbf{K}_X := \delta\mathbf{K}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} = \text{Grad}_X \delta\mathbf{X} = \delta\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (3.16)$$

$${}^1\mathbf{F}_X := \delta\mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} = \text{Grad}_X \delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (3.17)$$

$${}^1\mathbf{H}_X := \delta\mathbf{H}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} = \text{Grad}_X \delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{h}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (3.18)$$

$${}^2\mathbf{K}_X := \delta^2\mathbf{K}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} = \text{Grad}_X \delta^2\mathbf{X} = \delta^2\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (3.19)$$

$${}^2\mathbf{F}_X := \delta^2\mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} = \text{Grad}_X \delta^2\mathbf{x} = \delta^2\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (3.20)$$

$${}^2\mathbf{H}_X := \delta^2\mathbf{H}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} = \text{Grad}_X \delta^2\mathbf{u} = \delta^2\mathbf{h}_i \otimes \mathbf{G}^i. \quad (3.21)$$

Den *materiellen Deformationsgeschwindigkeits-* (bzw. *-beschleunigungs-*) *gradienten* erhält man im Spezialfall der Zeitableitung

$$\mathbf{l}_X := \dot{\mathbf{F}}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} = \text{Grad}_X \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{G}^i = \dot{\mathbf{F}}_X \quad (3.22)$$

$${}^2\mathbf{l}_X := \ddot{\mathbf{F}}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} = \text{Grad}_X \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{G}^i = \ddot{\mathbf{F}}_X. \quad (3.23)$$

Die Zeitableitung materieller Größen wird üblicherweise direkt berechnet, da die Größen der Referenzkonfiguration gemäß Definition zeitunabhängig sind.

Die Transformation in den räumlichen Gradienten grad_x liefert

$${}^1\mathbf{K}_x := \delta\mathbf{K}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} = \text{grad}_x \delta\mathbf{X} = \delta\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad (3.24)$$

$${}^1\mathbf{F}_x := \delta\mathbf{F}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} = \text{grad}_x \delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad (3.25)$$

$${}^1\mathbf{H}_x := \delta\mathbf{H}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} = \text{grad}_x \delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{h}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad (3.26)$$

$${}^2\mathbf{K}_x := \delta^2\mathbf{K}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} = \text{grad}_x \delta^2\mathbf{X} = \delta^2\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad (3.27)$$

$${}^2\mathbf{F}_x := \delta^2\mathbf{F}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} = \text{grad}_x \delta^2\mathbf{x} = \delta^2\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad (3.28)$$

$${}^2\mathbf{H}_x := \delta^2\mathbf{H}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} = \text{grad}_x \delta^2\mathbf{u} = \delta^2\mathbf{h}_i \otimes \mathbf{g}^i. \quad (3.29)$$

Den *räumlichen Deformationsgeschwindigkeits-* (bzw. *-beschleunigungs-*) *gradienten* erhält man im Spezialfall der Zeitableitung

$$\mathbf{l}_x := \dot{\mathbf{F}}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} = \text{grad}_x \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i = \dot{\mathbf{F}}_X \mathbf{F}_X^{-1} =: \mathbf{l} \quad (3.30)$$

$${}^2\mathbf{l}_x := \ddot{\mathbf{F}}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} = \text{grad}_x \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i = \ddot{\mathbf{F}}_X \mathbf{F}_X^{-1}. \quad (3.31)$$

Für die räumlichen Größen ist insbesondere die Reihenfolge von Variation bzw. Zeitableitung und der Vorwärts- bzw. Rücktransformation zu beachten.

3.1.3 Variation von Funktionen der Grundabbildungen

Die grundlegenden kinematischen Abbildungen sind auf dem lokalen Parameterraum eingeführt worden. Daneben werden zentrale Aussagen der Kontinuumsmechanik aber auch durch materielle bzw. räumliche Größen ausgedrückt.

Die Variation bzw. Zeitableitung einer Reihe von abgeleiteten kinematischen Größen wird nachfolgend hergeleitet. Hierbei werden nur die ersten Variationen und als Sonderfall hiervon die erste Zeitableitung betrachtet.

3.1.3.1 Variation eines inversen Tensors

Für die weiteren Untersuchungen ist die Bereitstellung der Variation der Inversen \mathbf{A}^{-1} eines Tensors \mathbf{A} hilfreich. Aus der Variation $\delta(\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}) = \delta\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A} \delta(\mathbf{A}^{-1}) = \delta\mathbf{1} = \mathbf{0}$ ergibt sich $\delta(\mathbf{A}^{-1}) = -\mathbf{A}^{-1} \delta\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}$. Diese Beziehung wird in den nachfolgenden Herleitungen wiederholt verwendet. Insbesondere gilt damit

$$\delta(\mathbf{K}_\Theta^{-1}) = -\mathbf{K}_\Theta^{-1} \delta\mathbf{K}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} \quad \text{und} \quad \delta(\mathbf{F}_\Theta^{-1}) = -\mathbf{F}_\Theta^{-1} \delta\mathbf{F}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1}. \quad (3.32)$$

3.1.3.2 Variation von Linien- Flächen-, Volumen und Massenelementen

Die Transformationsbeziehungen der Linien-, Flächen- und Volumenelemente können nach dieser Vorarbeit variiert werden. Damit ist auch eine Variation der Massenelemente möglich. Die Details dieser Berechnung sowie die Endergebnisse sind in Anhang A.3.6 zu finden.

3.1.3.3 Variation transformierter Größen

Die Variation lokal-konvektiver Größen des Parameterraumes kann durch die Unabhängigkeit des Gradientenoperators GRAD_Θ einfach ermittelt werden. Bei transformierten Größen treten jedoch Geometrie- und Deformationsabhängigkeiten der materiellen und räumlichen Gradienten auf, die eine komplexere Herleitung erfordern. Hinweise und Endergebnisse für eine Reihe von Größen finden sich im Kapitel A des Anhanges.

3.1.3.4 Variation skalarwertiger integraler Größen

Für die weiteren Herleitungen werden skalarwertige integrale Größen $A = \int_{T_\Theta} da$ betrachtet. Die Variation des Integranden $da := \Psi_\Theta \, dM_\Theta = \Psi_\Theta \, \rho_\Theta \, dV_\Theta$ liefert mit den bisherigen Herleitungen und der Invarianz des Volumenelementes dV_Θ

$$\delta da = \delta(\Psi_\Theta \, dM_\Theta) = \delta\Psi_\Theta \, dM_\Theta + \Psi_\Theta \, \delta(dM_\Theta) = (\delta\Psi_\Theta \, \rho_\Theta + \Psi_\Theta \, \delta\rho_\Theta) \, dV_\Theta.$$

Diese Beziehung kann transformiert werden und ergibt mit den Transformationsbeziehungen für die Massen- und Volumenelemente

$$\delta da = (\tilde{\psi}_*[\delta\Psi_\Theta] \, \rho_X + \Psi_X \, \delta\rho_\Theta \, J_\psi^{-1}) \, dV_X = (\tilde{\varphi}_*[\delta\Psi_\Theta] \, \rho_x + \Psi_x \, \delta\rho_\Theta \, J_\varphi^{-1}) \, dV_x.$$

3.2 Verzerrungsmaße

Die Beanspruchung des Körpers führt zu Verzerrungen und Spannungen. Entsprechend der Grundidee dieser Arbeit wird die Verzerrung als geometrisch motivierte Größe eingeführt. Hierzu wird auf die Grundlagen der (parametrischen) Differentialgeometrie zurückgegriffen.

3.2.1 Die metrische oder erste Fundamentalform

Mit den lokalen Abbildungen $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$ sind zwei Konfigurationen im \mathbb{E}^3 (lokal) gegeben. In den Punkten $\mathbf{X} \in \Omega_o$ und $\mathbf{x} \in \Omega_t$ werden durch die kovarianten Vektoren \mathbf{G}_i bzw. \mathbf{g}_i zwei Tangentialräume T_X und T_x definiert. In den Tangentialräumen sind mit den *kontra-varianten Metrikkoeffizienten* $G_{ij} := \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j$ bzw. $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ in natürlicher Form jeweils *Metriken*, d.h. Abstandsmaße, vorgegeben. Die Bedeutung der Metrikkoeffizienten für die Differentialgeometrie ist in der Literatur beschrieben, siehe z.B. *Laugwitz* [155, §3.4].

Als Beispiel sei die Berechnung der Bogenlänge einer Kurve $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(\Theta(t))$ betrachtet, die sich durch $s(t) = \int_t \sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2} dt$ berechnen läßt. Das Längenquadrat $\dot{\mathbf{x}}^2$ kann in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^i} \dot{\Theta}^i \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^j} \dot{\Theta}^j \right) = \left(\mathbf{g}_i \dot{\Theta}^i \right) \cdot \left(\mathbf{g}_j \dot{\Theta}^j \right) = g_{ij} \dot{\Theta}^i \dot{\Theta}^j \quad (3.33)$$

beschrieben werden. Die bereits von *C.F. Gauß* beschriebenen Funktionen $g_{ij} = \hat{g}_{ij}(\Theta^i)$ werden als *metrische Fundamentalgrößen* bezeichnet. Die quadratische Form

$$ds^2 = g_{ij}(\Theta^k) d\Theta^i d\Theta^j \quad (3.34)$$

nennt man *metrische* oder *erste Fundamentalform* der Fläche. Es ist zu beachten, daß sie in Abhängigkeit der (konvektiven) Parameter Θ definiert ist.

3.2.2 Lokale Verzerrungstensoren und deren Variation

3.2.2.1 Definition des lokalen Verzerrungstensors

Die metrischen Fundamentalformen in $\mathbf{X} \in \Omega_o$ bzw. in $\mathbf{x} \in \Omega_t$ können mit der modernen Tensorschreibweise durch $ds^2 = d\Theta \cdot \mathbf{m}_\Theta d\Theta$ sowie $dS^2 = d\Theta \cdot \mathbf{M}_\Theta d\Theta$ dargestellt werden, wobei die positiv definiten *kovarianten Metriktensoren* der Tangentialräume T_X und T_x durch

$$\mathbf{M}_\Theta := \mathbf{K}_\Theta^T \mathbf{K}_\Theta = G_{ij} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j \quad \text{und} \quad \mathbf{m}_\Theta := \mathbf{F}_\Theta^T \mathbf{F}_\Theta = g_{ij} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j, \quad (3.35)$$

mit Determinanten $g := \det(g_{ij}) = \det \mathbf{m}_\Theta$ bzw. $G := \det(G_{ij}) = \det \mathbf{M}_\Theta$, gegeben sind. Die Invertierung der Metriktensoren liefert die *kontravarianten Metriktensoren* von T_X^* und T_x^*

$$\mathbf{M}_\Theta^{-1} = G^{ij} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \quad \text{und} \quad \mathbf{m}_\Theta^{-1} = g^{ij} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j. \quad (3.36)$$

Die Differenz der Liniennquadrate $\delta := (ds^2 - dS^2)$ wird als *Verzerrungsmaß* angesehen und führt zur Einführung des *lokalen Verzerrungstensors*

$$\mathbf{E}_\Theta := \frac{1}{2} (\mathbf{m}_\Theta - \mathbf{M}_\Theta) = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_\Theta^T \mathbf{F}_\Theta - \mathbf{K}_\Theta^T \mathbf{K}_\Theta). \quad (3.37)$$

3.2.2.2 Variationen des lokalen Verzerrungstensors

Die in den letzten Abschnitten diskutierte Variation der Abbildungen $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$ führt auch zu einer Veränderung der eingeführten lokalen Metrik- und Verzerrungstensenoren, d.h. es gilt

$$\delta \mathbf{M}_\Theta = \delta G_{ij} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j = (\delta \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{G}_i \cdot \delta \mathbf{G}_j) \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j = 2 \operatorname{sym}(\mathbf{K}_\Theta^T \delta \mathbf{K}_\Theta), \quad (3.38)$$

$$\delta \mathbf{m}_\Theta = \delta g_{ij} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j = (\delta \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \delta \mathbf{g}_j) \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j = 2 \operatorname{sym}(\mathbf{F}_\Theta^T \delta \mathbf{F}_\Theta). \quad (3.39)$$

Damit gilt für den *lokalen Verzerrungsvariationstensor* $\mathbf{D}_\Theta := \delta \mathbf{E}_\Theta$

$$\delta \mathbf{E}_\Theta = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{m}_\Theta - \delta \mathbf{M}_\Theta) = \frac{1}{2} (\delta g_{ij} - \delta G_{ij}) \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j = \operatorname{sym}(\mathbf{F}_\Theta^T \delta \mathbf{F}_\Theta - \mathbf{K}_\Theta^T \delta \mathbf{K}_\Theta). \quad (3.40)$$

Hierbei bezeichnet sym die symmetrische Ergänzung, d.h. $\operatorname{sym} \mathbf{A} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2$.

Die zweiten Variationen der lokalen Metrik- und Verzerrungstensenoren ergeben sich zu

$$\delta^2 \mathbf{M}_\Theta = \delta^2 G_{ij} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j = 2 \operatorname{sym}(\mathbf{K}_\Theta^T \delta^2 \mathbf{K}_\Theta + \delta \mathbf{K}_\Theta^T \delta \mathbf{K}_\Theta), \quad (3.41)$$

$$\delta^2 \mathbf{m}_\Theta = \delta^2 g_{ij} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j = 2 \operatorname{sym}(\mathbf{F}_\Theta^T \delta^2 \mathbf{F}_\Theta + \delta \mathbf{F}_\Theta^T \delta \mathbf{F}_\Theta) \quad (3.42)$$

sowie für die zweite Variation des lokalen Verzerrungstensors zu

$$\begin{aligned} {}^2 \mathbf{D}_\Theta := \delta^2 \mathbf{E}_\Theta &= \frac{1}{2} (\delta^2 \mathbf{m}_\Theta - \delta^2 \mathbf{M}_\Theta) = \frac{1}{2} (\delta^2 g_{ij} - \delta^2 G_{ij}) \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j \\ &= \operatorname{sym}(\mathbf{F}_\Theta^T \delta^2 \mathbf{F}_\Theta + \delta \mathbf{F}_\Theta^T \delta \mathbf{F}_\Theta - \mathbf{K}_\Theta^T \delta^2 \mathbf{K}_\Theta - \delta \mathbf{K}_\Theta^T \delta \mathbf{K}_\Theta). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Für die Definition der Verzerrungen wird die Differenz der kovarianten Metrikkoeffizienten herangezogen. Für die Verzerrungsvariationen ist damit die Differenz der variierten kovarianten Metrikkoeffizienten von zentraler Bedeutung. Hierbei ist zu beachten, daß die mathematische Struktur symmetrisch ist, d.h. keine der Abbildungen $\tilde{\psi}$ bzw. $\tilde{\varphi}$ gegenüber der anderen ausgezeichnet ist.

3.2.2.3 Auswertung für den Sonderfall der Zeitableitung

Die Zeitableitung ergibt sich als Sonderfall aus der obigen Beziehung und mit $\dot{\mathbf{M}}_\Theta = \mathbf{0}$ erhält man den *lokalen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor* \mathbf{d}_Θ in der Form

$$\mathbf{d}_\Theta := \dot{\mathbf{E}}_\Theta = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{m}}_\Theta = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \dot{\mathbf{g}}_j) \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j = \operatorname{sym}(\mathbf{F}_\Theta^T \mathbf{l}_\Theta), \quad (3.44)$$

wobei $\mathbf{l}_\Theta = \dot{\mathbf{F}}_\Theta$. Weiterhin kann ein *lokaler Spintensor* \mathbf{w}_Θ durch die Beziehung

$$\mathbf{F}_\Theta^T \mathbf{l}_\Theta = \mathbf{d}_\Theta + \mathbf{w}_\Theta = \operatorname{sym}(\mathbf{F}_\Theta^T \mathbf{l}_\Theta) + \operatorname{skew}(\mathbf{F}_\Theta^T \mathbf{l}_\Theta)$$

eingeführt werden, wobei $\operatorname{skew} \mathbf{A} := (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)/2$. Die anderen bekannten Verzerrungsgeschwindigkeiten leiten sich hieraus ab.

3.2.2.4 Anmerkungen zur Bedeutung der lokal-konvektiven Verzerrungen

Mit den eingeführten lokal-konvektiven Gradienten \mathbf{K}_Θ der Geometrieabbildung $\tilde{\psi}$ sowie \mathbf{F}_Θ der Deformationsabbildung $\tilde{\varphi}$ und den jeweils zugehörigen Variationen sind die grundlegenden kinematischen Größen der Kontinuumsmechanik gegeben. Alle weiteren kinematischen Größen können hieraus abgeleitet werden.

Zur Beschreibung der geometrischen Verzerrungen sind die lokal-konvektiven Metriktensoren \mathbf{M}_Θ und \mathbf{m}_Θ sowie der lokal-konvektive Verzerrungstensor \mathbf{E}_Θ definiert worden. Die Variationen dieser Größen können aus den Variationen der Grundabbildungen abgeleitet werden.

In der klassischen Kontinuumsmechanik wird der Modifikation der unverformten Geometrie keine Beachtung geschenkt und die Veränderung der Verzerrungen wird (fast ausschließlich) mit der Veränderung der verformten Struktur gleichgesetzt. Es zeigt sich jedoch, daß eine Formulierung bzgl. der Grundabbildungen bzw. bzgl. der Metriktensoren und deren Variation wegen der unterschiedlichen Behandlung von Referenz- und Momentankonfiguration von Vorteil ist.

Für die weitere Darstellung der Kontinuumsmechanik reicht die alleinige Betrachtung der Verzerrungstensoren und ihrer Variationen nicht aus. Jeder zweistufige Tensor kann in Form einer *Polaren Zerlegung* angegeben werden.

Auf dieser Grundlage werden verschiedene Darstellungsformen (*reduzierte Formen*), z.B. in Abhängigkeit von den Invarianten der Verzerrungstensoren, für die Materialgesetze abgeleitet. Von zentraler Bedeutung ist hierbei das *Prinzip der materiellen Objektivität*, welches die Unabhängigkeit physikalischer Aussagen von überlagerten Starrkörperbewegungen verlangt.

Die weiteren Abschnitte dieses Kapitels führen zunächst die Elemente der Kontinuumsmechanik auf dem lokalen Parameterraum ein, d.h. sämtliche Definitionen werden in lokal-konvektiver Form gegeben. Ebenfalls werden alle Variationen zunächst lokal-konvektiv angegeben. Erst danach werden die materiellen und räumlichen Darstellungsweisen durch Vorwärtstransformation abgeleitet. Die bezogenen Darstellungen sowie Details der Herleitungen sind im Anhang angegeben.

Im Anhang A.4 sind ebenfalls Hinweise zur Variation transformierter Größen enthalten. Es zeigt sich jedoch, daß sämtliche Beziehungen ohne dieses Vorgehen herzuleiten sind.

3.2.3 Eigenwerte und Eigenvektoren der Verzerrungstensoren

Die physikalischen Größen können im Rahmen einer Spektralzerlegung durch die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Verzerrungen, ggfs. in reduzierten Formen, dargestellt werden. Die notwendigen Herleitungen in der lokal-konvektiven Form sind hier aufgeführt. Hinweise zu den bezogenen Formen sowie den Variationen finden sich im Kapitel A.4.4 des Anhanges.

3.2.3.1 Das Eigenwertproblem für die lokal-konvektiven Verzerrungen

Zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren ist ein allgemeines Eigenwertproblem für den lokalen Verzerrungstensor \mathbf{E}_Θ zu lösen. Die Hauptdehnungen Λ_i und -richtungen $\mathbf{Y}_{\Theta,i}$ von \mathbf{E}_Θ können durch Lösen von

$$\mathbf{E}_\Theta \mathbf{Y}_{\Theta,i} = \Lambda_i \mathbf{M}_\Theta \mathbf{Y}_{\Theta,i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.45)$$

bestimmt werden. Die Vormultiplikation mit \mathbf{M}_Θ^{-1} liefert nach kurzer Rechnung ein spezielles Eigenwertproblem

$$(\mathbf{B}_\Theta - \lambda_i^2 \mathbf{1}_\Theta) \mathbf{Y}_{\Theta,i} = \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.46)$$

für die Eigenwerte $\lambda_i^2 := 1 + 2 \Lambda_i$ des gemischtvarianten Tensors

$$\mathbf{B}_\Theta := \mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta = \mathbf{K}_\Theta^{-1} (\mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1})^T \mathbf{F}_\Theta = G^{ij} g_{jk} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^k. \quad (3.47)$$

Die Hauptwerte λ_i^2 eines Eigenwertproblems mit Determinante $\det(\mathbf{B}_\Theta - \lambda \mathbf{1}_\Theta) = 0$ ergeben sich aus der Lösung des charakteristischen Polynoms $\lambda_i^6 - \text{I} \lambda_i^4 + \text{II} \lambda_i^2 - \text{III} = 0$, wobei die Invarianten durch

$$\text{I} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad \text{II} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad \text{und} \quad \text{III} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

gegeben sind.

Der Tensor \mathbf{B}_Θ stellt die zentrale Verzerrungsgröße für die weiteren Betrachtungen dar. Dieser gemischtvariante Tensor soll als *lokaler Hauptverzerrungstensor* bezeichnet werden. Eine wichtige Beobachtung ist, daß alle bisher eingeführten Größen wie \mathbf{K}_Θ , \mathbf{F}_Θ , \mathbf{M}_Θ , \mathbf{m}_Θ und \mathbf{E}_Θ sowie \mathbf{B}_Θ geometrisch motiviert sind. Der weiteren Abschnitte werden jedoch zeigen, daß nur \mathbf{B}_Θ und die zugehörigen materiellen und räumlichen Formen in der Materialtheorie verwendet werden. Hinweise auf die bezogenen Formen finden sich im Abschnitt A.4.4.

3.2.3.2 Variation der Invarianten

Mit den Rechenregeln für die Ableitung der Invarianten gilt (siehe Seite 183)

$$\frac{\partial \text{I}}{\partial \mathbf{B}_\Theta} = \mathbf{1}_\Theta, \quad \frac{\partial \text{II}}{\partial \mathbf{B}_\Theta} = \text{I} \mathbf{1}_\Theta - \mathbf{B}_\Theta^T \quad \text{und} \quad \frac{\partial \text{III}}{\partial \mathbf{B}_\Theta} = \text{III} \mathbf{B}_\Theta^{-T}. \quad (3.48)$$

Die zweite Ableitung der ersten Invarianten verschwindet und für die weiteren zweiten Ableitungen erhält man (siehe Abschnitt A.4.4.4) die Beziehungen

$$\frac{\partial^2 \text{II}}{\partial \mathbf{B}_\Theta \partial \mathbf{B}_\Theta} = \mathbf{1}_\Theta \otimes \mathbf{1}_\Theta - \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{\mathbf{B}_\Theta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \text{III}}{\partial \mathbf{B}_\Theta \partial \mathbf{B}_\Theta} = \text{III} (\mathbf{B}_\Theta^{-T} \otimes \mathbf{B}_\Theta^{-T} - \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{\mathbf{B}_\Theta^{-1}}). \quad (3.49)$$

3.2.4 Variation von Funktionen des lokalen Verzerrungsmaßes

In Abschnitt 3.4 werden die Materialgesetze eingeführt, die Spannungen und Verzerrungen durch materialspezifische Abhängigkeiten miteinander verknüpfen. Hierfür werden die Ableitungen skalar- und tensorwertiger Größen (Freie Energiefunktion, Spannungstensor) nach zweistufigen Tensoren (Verzerrungstensor) benötigt. Zur Vorbereitung dient die Diskussion der geometrischen Aspekte der Ableitungsregeln in Verbindung mit der Transformation äquivalenter Größen zwischen den Konfigurationen. Die Beweise sind im Anhang A enthalten.

Bei den nachfolgenden Ableitungen werden mehrere zwei- bzw. vierstufige Tensoren eingeführt, die an dieser Stelle ausschließlich hinsichtlich ihrer geometrischen Eigenschaften diskutiert werden. Die Notation lehnt sich jedoch zur Vereinfachung der Schreibweise und zur Erleichterung des Verständnisses an den späteren Gebrauch an. Hinweise hierzu werden über die Fußnoten gegeben.

3.2.4.1 Vorbemerkungen

Im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik, die sich auf die Beschreibung der physikalischen Phänomene infolge von Deformationen bei konstanter Geometrie beschränkt, wird nur die Veränderung der deformierten Metrik betrachtet. Aus diesem Grunde werden oftmals die Ableitungen von Energiefunktionen bzw. Spannungen nach den Verzerrungen mit denen nach der deformierten Metrik gleichgesetzt, d.h. man findet Aussagen wie

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{S}} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_X} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}}, & \tilde{\mathbf{C}}_X &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_X \partial \mathbf{E}_X} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}, \\ \tilde{\mathbf{T}} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_x} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{g}}, & \tilde{\mathbf{C}}_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_x \partial \mathbf{E}_x} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}}.\end{aligned}$$

Diese Beziehungen sind bei der vorliegenden erweiterten Betrachtung nicht mehr uneingeschränkt gültig und müssen unter Einbeziehung einer möglichen Veränderung der undeformierten Metrik ersetzt werden.

3.2.4.2 Variationen skalarwertiger Funktionen im Parameterraum

Eine skalarwertige Funktion $\Psi = \Psi_\Theta(\mathbf{E}_\Theta(\Theta))$ des lokal-konvektiven Verzerrungstensors \mathbf{E}_Θ wird betrachtet.² Diese funktionale Abhängigkeit kann weiter aufgelöst werden und (ohne Einführung neuer Abbildungsbezeichnungen) gilt

$$\Psi = \Psi_\Theta(\mathbf{E}_\Theta) = \Psi_\Theta(\mathbf{M}_\Theta, \mathbf{m}_\Theta) = \Psi_\Theta(\mathbf{K}_\Theta, \mathbf{F}_\Theta) = \Psi_\Theta(\mathbf{G} \mathbf{K}_\Theta, \mathbf{g} \mathbf{F}_\Theta).$$

Die Notwendigkeit der nachfolgenden Untersuchungen ergibt sich daraus, daß die Funktion Ψ i.d.R. durch \mathbf{E}_Θ bestimmt wird, aber \mathbf{M}_Θ und \mathbf{m}_Θ (bzw. noch fundamentaler \mathbf{K}_Θ und \mathbf{F}_Θ) die zentralen geometrischen Größen sind. Jede Variation muß damit auf $\delta \mathbf{m}_\Theta$ und $\delta \mathbf{M}_\Theta$, d.h. auf $\delta \mathbf{K}_\Theta$, $\delta \mathbf{F}_\Theta$ sowie letztendlich auf $\delta \tilde{\psi}$ und $\delta \tilde{\varphi}$, zurückgeführt werden.

²Die Größe Ψ_Θ stellt die massenspezifische freie Energiefunktion dar, die im Fall isothermer Hyperelastizität der massenspezifischen Formänderungsenergie W_Θ entspricht. In diesem Fall ist dann $E_\Theta = \Psi_\Theta = W_\Theta$, wobei E_Θ die *innere Energie* ist. Die gesamte Energie des Körpers ist über $E = \int_{T_\Theta} \rho_\Theta E_\Theta dV_\Theta$ bestimmt, wobei ρ_Θ die Massendichte im Parameterraum ist, siehe auch die Abschnitte 3.5.1 und A.3.7.

An dieser Stelle werden nur die Variationen von Ψ nach den lokal-konvektiven Metrikensoren \mathbf{m}_Θ und \mathbf{M}_Θ betrachtet. Weiterführende Hinweise zur Abhängigkeit von den Gradientenabbildungen in der Form $\Psi_\Theta(\mathbf{K}_\Theta, \mathbf{F}_\Theta)$ bzw. $\Psi_\Theta(\mathbf{G}, \mathbf{K}_\Theta, \mathbf{g}, \mathbf{F}_\Theta)$ finden sich im Anhang A.5.

Die erste Variation der lokalen Abbildung $\Psi = \Psi_\Theta(\mathbf{E}_\Theta) = \Psi_\Theta(\mathbf{M}_\Theta, \mathbf{m}_\Theta)$ lautet

$$\delta\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{M}_\Theta} : \delta\mathbf{M}_\Theta + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{m}_\Theta} : \delta\mathbf{m}_\Theta. \quad (3.50)$$

Die auftretenden zweistufigen, symmetrischen, kontravarianten Tensoren werden dabei mit

$$\tilde{\mathbf{R}}_\Theta := 2 \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{M}_\Theta} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{S}}_\Theta := 2 \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{m}_\Theta} \quad (3.51)$$

bezeichnet. Der Tensor $\tilde{\mathbf{S}}_\Theta$ stellt den auf ein Massenelement bezogenen 2. lokalen Spannungstensor \mathbf{S}_Θ dar, d.h. $\mathbf{S}_\Theta = \rho_\Theta \tilde{\mathbf{S}}_\Theta$. Der Tensor $\tilde{\mathbf{R}}_\Theta$ kann als Äquivalent zu $\tilde{\mathbf{S}}_\Theta$ betrachtet werden, da er durch eine Ableitung nach der undeformierten Struktur anstelle der deformierten Struktur entsteht. Die Zusammenhänge zwischen den Tensoren werden ausführlich in Abschnitt 3.3 diskutiert. Damit kann die erste Variation von Ψ auch durch

$$\delta\Psi = \tilde{\mathbf{R}}_\Theta : \frac{1}{2} \delta\mathbf{M}_\Theta + \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \frac{1}{2} \delta\mathbf{m}_\Theta = \tilde{\mathbf{R}}_\Theta : \mathbf{K}_\Theta^T \delta\mathbf{K}_\Theta + \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \mathbf{F}_\Theta^T \delta\mathbf{F}_\Theta \quad (3.52)$$

beschrieben werden. Die letzte Umformung ergibt sich aus der Symmetrie von $\tilde{\mathbf{R}}_\Theta$ und $\tilde{\mathbf{S}}_\Theta$. Die obige Ableitung zeigt, daß die Ableitungen der Funktion Ψ nach den kovarianten Metrikoeffizienten G_{ij} und g_{ij} der unverformten und der verformten Konfiguration bestimmt werden müssen. Im Anhang werden die zugehörigen bezogenen Darstellungen angegeben.

Eine weitere Variation von $\delta\Psi$ gemäß Gleichung (3.50) liefert

$$\begin{aligned} \delta^2\Psi &= \delta\mathbf{M}_\Theta : \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{M}_\Theta \partial\mathbf{M}_\Theta} : \delta\mathbf{M}_\Theta + \delta\mathbf{M}_\Theta : \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{M}_\Theta \partial\mathbf{m}_\Theta} : \delta\mathbf{m}_\Theta + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{M}_\Theta} : \delta^2\mathbf{M}_\Theta \\ &+ \delta\mathbf{m}_\Theta : \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{m}_\Theta \partial\mathbf{m}_\Theta} : \delta\mathbf{m}_\Theta + \delta\mathbf{m}_\Theta : \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{m}_\Theta \partial\mathbf{M}_\Theta} : \delta\mathbf{M}_\Theta + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{m}_\Theta} : \delta^2\mathbf{m}_\Theta. \end{aligned}$$

Hierbei entstehen vier unterschiedliche vierstufige Tensoren³ $\tilde{\mathbb{A}}_\Theta, \tilde{\mathbb{B}}_\Theta, \tilde{\mathbb{C}}_\Theta$ und $\tilde{\mathbb{D}}_\Theta$, d.h.

$$\tilde{\mathbb{A}}_\Theta := 4 \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{M}_\Theta \partial\mathbf{M}_\Theta} = 2 \frac{\partial\tilde{\mathbf{R}}_\Theta}{\partial\mathbf{M}_\Theta}, \quad (3.53)$$

$$\tilde{\mathbb{B}}_\Theta := 4 \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{M}_\Theta \partial\mathbf{m}_\Theta} = 2 \frac{\partial\tilde{\mathbf{R}}_\Theta}{\partial\mathbf{m}_\Theta}, \quad (3.54)$$

$$\tilde{\mathbb{C}}_\Theta := 4 \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{m}_\Theta \partial\mathbf{m}_\Theta} = 2 \frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}_\Theta}{\partial\mathbf{m}_\Theta}, \quad (3.55)$$

$$\tilde{\mathbb{D}}_\Theta := 4 \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{m}_\Theta \partial\mathbf{M}_\Theta} = 2 \frac{\partial\tilde{\mathbf{S}}_\Theta}{\partial\mathbf{M}_\Theta}. \quad (3.56)$$

Damit ergibt sich die zweite Variation zu

$$\begin{aligned} \delta^2\Psi \cdot 4 &= \delta\mathbf{M}_\Theta : \tilde{\mathbb{A}}_\Theta : \delta\mathbf{M}_\Theta + \delta\mathbf{M}_\Theta : \tilde{\mathbb{B}}_\Theta : \delta\mathbf{m}_\Theta + 2 \tilde{\mathbf{R}}_\Theta : \delta^2\mathbf{M}_\Theta \\ &+ \delta\mathbf{m}_\Theta : \tilde{\mathbb{D}}_\Theta : \delta\mathbf{M}_\Theta + \delta\mathbf{m}_\Theta : \tilde{\mathbb{C}}_\Theta : \delta\mathbf{m}_\Theta + 2 \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \delta^2\mathbf{m}_\Theta. \end{aligned} \quad (3.57)$$

³Es treten insgesamt vier lokale Materialtensoren $\mathbb{A}_\Theta, \mathbb{B}_\Theta, \mathbb{C}_\Theta, \mathbb{D}_\Theta$ auf, d.h. z.B. gilt $\mathbb{C}_\Theta = \rho_\Theta \tilde{\mathbb{C}}_\Theta$.

3.2.4.3 Hinweise zur physikalischen Bedeutung

Diese abgeleiteten Beziehungen für die Variation einer skalarwertigen Funktion sind fundamental für die lokal-konvektive Betrachtungsweise und darüber hinaus für die gesamte Kontinuumsmechanik und die numerischen Methoden. In den folgenden Kapiteln wird diese Struktur entsprechend der physikalischen Bedeutung (massenspezifische freie Energiefunktion) der Funktion Ψ_Θ sowie der speziellen Wahl des Variationsoperators δ wiederholt diskutiert. Betrachtet werden die Zeitableitung, die Linearisierung nach dem Verschiebungszuwachs im Rahmen der Strukturanalyse sowie die partiellen Variationen im Rahmen der Sensitivitätsanalyse.

Hierbei sind insbesondere die zugehörigen materiellen und räumlichen Darstellungsformen von Bedeutung, die im Anhang beschrieben sind.

Die genannten Variationen erfordern die Kenntnis der zweistufigen Tensoren $\tilde{\mathbf{R}}_\Theta$ und $\tilde{\mathbf{S}}_\Theta$ sowie der vierstufigen Tensoren $\tilde{\mathbf{A}}_\Theta, \tilde{\mathbf{B}}_\Theta, \tilde{\mathbf{C}}_\Theta, \tilde{\mathbf{D}}_\Theta$. Eine erhebliche Reduktion der Anzahl der bereitzustellenden Tensoren ist bei Kenntnis der genauen funktionalen Abhängigkeiten möglich. In der Materialtheorie werden durch das *Prinzip der materiellen Objektivität* sogenannte *reduzierte Formen* der Materialgleichungen hergeleitet. Durch die Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften, z.B. der Isotropie, kann sich eine ausschließliche Abhängigkeit von \mathbf{B}_Θ bzw. den Invarianten I, II, III von \mathbf{B}_Θ ergeben.

3.2.4.4 Beziehung zwischen Geometrie- und Deformationsvariation

Für die weitere Betrachtung wird die Abhängigkeit der Funktion Ψ vom lokal-konvektiven Tensor \mathbf{B}_Θ vorausgesetzt. Die erste und zweite Variation von Ψ ergibt somit zu

$$2 \cdot \delta\Psi = \tilde{\mathbf{A}}_\Theta : \delta\mathbf{B}_\Theta \quad \text{bzw.} \quad 4 \cdot \delta^2\Psi = \delta\mathbf{B}_\Theta : \tilde{\mathbf{E}}_\Theta : \delta\mathbf{B}_\Theta + 2 \tilde{\mathbf{A}}_\Theta : \delta^2\mathbf{B}_\Theta, \quad (3.58)$$

wobei die obigen zwei- bzw. vierstufigen Tensoren durch

$$\tilde{\mathbf{A}}_\Theta := 2 \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{B}_\Theta} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{E}}_\Theta := 4 \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{B}_\Theta \partial\mathbf{B}_\Theta} \quad (3.59)$$

gegeben sind.

Diese Darstellung kann durch Anwendung der Kettenregel mit den Variationen von \mathbf{M}_Θ und \mathbf{m}_Θ in Beziehung gesetzt werden. Hierzu sind die Ableitungen von \mathbf{B}_Θ nach \mathbf{m}_Θ und \mathbf{M}_Θ in der Form

$$\frac{\partial\mathbf{B}_\Theta}{\partial\mathbf{m}_\Theta} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial\mathbf{B}_\Theta}{\partial\mathbf{M}_\Theta} = -\frac{\partial\mathbf{B}_\Theta}{\partial\mathbf{m}_\Theta} \mathbf{B}_\Theta^T \quad (3.60)$$

bereitzustellen. Eine detaillierte Berechnung der genannten Ableitungen ist im Anhang A.2 auf Seite 165 enthalten.

Für die Reduktion der erforderlichen zwei- und vierstufigen Tensoren können die Beziehungen zwischen den Ableitungen von \mathbf{B}_Θ nach \mathbf{m}_Θ bzw. \mathbf{M}_Θ ausgenutzt werden. Für die erste Variation von \mathbf{B}_Θ gilt

$$\delta\mathbf{B}_\Theta = \frac{\partial\mathbf{B}_\Theta}{\partial\mathbf{m}_\Theta} : \delta\mathbf{m}_\Theta + \frac{\partial\mathbf{B}_\Theta}{\partial\mathbf{M}_\Theta} : \delta\mathbf{M}_\Theta = \frac{\partial\mathbf{B}_\Theta}{\partial\mathbf{m}_\Theta} : (\delta\mathbf{m}_\Theta - \mathbf{B}_\Theta^T \delta\mathbf{M}_\Theta). \quad (3.61)$$

Damit kann die erste Variation von Ψ folgendermaßen ausgedrückt werden

$$2 \cdot \delta\Psi = \tilde{\mathbf{A}}_{\Theta} : \delta\mathbf{B}_{\Theta} = \tilde{\mathbf{S}}_{\Theta} : (\delta\mathbf{m}_{\Theta} - \mathbf{B}_{\Theta}^T \delta\mathbf{M}_{\Theta}). \quad (3.62)$$

Diese Überlegungen können in analoger Form auch für die zweiten Ableitungen von Ψ gemäß Gleichung (3.57) durchgeführt werden.

Die aufgeführten Variationen $\delta\Psi$ und $\delta^2\Psi$ geben die allgemeine Struktur für eine beliebige skalarwertige Funktion (z.B. die Formänderungsenergiefunktion) an.

Im Rahmen der Kontinuumsmechanik bzgl. der lokal-konvektiven Betrachtungsweise ist jedoch insbesondere die erste partielle Variation der Formänderungsenergiefunktion Ψ nach der lokal-konvektiven Metrik \mathbf{m}_{Θ} zur Bestimmung des lokal-konvektiven Spannungstensors $\tilde{\mathbf{S}}_{\Theta}$ sowie dessen erneute Variation von Bedeutung. Diese Thematik behandelt der folgende Abschnitt.

3.3 Spannungen und Spannungsleistung

In diesem Abschnitt werden die Spannungstensoren der einzelnen Konfigurationen eingeführt, deren Transformationseigenschaften erläutert sowie die Variation diskutiert. Die Darstellung konzentriert sich zunächst auf die geometrischen Aspekte. Die zugehörigen Materialgesetze werden im nächsten Abschnitt behandelt.

3.3.1 Definition von Spannungstensoren

Der Ausgangspunkt der Betrachtung ist der *Cauchy-Spannungstensor* \mathbf{T} , der in einem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega_t$ definiert ist und die „wahren“ Spannungen angibt. Durch Rücktransformation entstehen weitere kontravariante Spannungstensoren, die in absoluter Tensornotation bzw. in ihrer konvektiven Darstellung in der nachfolgenden Tabelle angegeben sind.

Spannungstensor	Beziehungen \Downarrow	konvektiv	Beziehungen \Uparrow
<i>Cauchy</i> \mathbf{T}		$= \rho_x \tilde{T}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$	$= J_\varphi^{-1} \mathbf{F}_\Theta \mathbf{S}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^T$
<i>materieller Kirchhoff</i> $\mathbf{T}_X = J \mathbf{T}$		$= \rho_X \tilde{T}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$	$= J_\psi^{-1} \mathbf{F}_\Theta \mathbf{S}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^T$
1. <i>Piola-Kirchhoff</i> $\mathbf{P} = J \mathbf{T} \mathbf{F}_X^{-T}$		$= \rho_X \tilde{T}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j$	$= J_\psi^{-1} \mathbf{F}_\Theta \mathbf{S}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^T$
2. <i>Piola-Kirchhoff</i> $\mathbf{S} = J \mathbf{F}_X^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}_X^{-T}$		$= \rho_X \tilde{T}^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$	$= J_\psi^{-1} \mathbf{K}_\Theta \mathbf{S}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^T$
<i>lokaler Kirchhoff</i> $\mathbf{T}_\Theta = J_\varphi \mathbf{T}$		$= \rho_\Theta \tilde{T}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$	$= \mathbf{F}_\Theta \mathbf{S}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^T$
1. <i>Lokaler</i> $\mathbf{P}_\Theta = J_\varphi \mathbf{T} \mathbf{F}_\Theta^{-T}$		$= \rho_\Theta \tilde{T}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{Z}_j$	$= \mathbf{F}_\Theta \mathbf{S}_\Theta$
2. <i>Lokaler</i> $\mathbf{S}_\Theta = J_\varphi \mathbf{F}_\Theta^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}_\Theta^{-T}$		$= \rho_\Theta \tilde{T}^{ij} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j$	
Für die kontravarianten Koeffizienten T_x^{ij}, T_X^{ij} und T_Θ^{ij} gelten die Beziehungen			
$T_\Theta^{ij} = \rho_\Theta \tilde{T}^{ij}$ und $T_X^{ij} = \rho_X \tilde{T}^{ij}$ sowie $T_x^{ij} = \rho_x \tilde{T}^{ij}$.			
Tabelle 3.2: Spannungstensoren			

Die lokalen Spannungstensoren $\mathbf{P}_\Theta, \mathbf{S}_\Theta$ ergeben sich durch Rücktransformationen (pull-back) des Cauchy-Spannungstensors \mathbf{T} auf den lokalen Parameterraum T_Θ . Damit bilden sie ein Analogon zu den Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren \mathbf{P} und \mathbf{S} , die eine Rücktransformation auf den Tangentialraum T_X beschreiben. Die Abhängigkeiten der Spannungstensoren vom Cauchy-Spannungstensor sind in der Spalte 'Beziehungen \Downarrow ' aufgeführt.

Der 2. Lokale-Spannungstensor stellt die vollständige Rücktransformation von \mathbf{T} dar. Entsprechend der Programmatik dieser Arbeit, d.h. der unabhängigen Definition aller geometrischen und physikalischen Größen auf dem Parameterraum, wird \mathbf{S}_Θ die Grundlage der weiteren Darstellung sein. Damit können alle weiteren Spannungstensoren aus einer Vorwärts-Transformation (push-forward) von \mathbf{S}_Θ erklärt werden. Nach kurzen Umformungen erhält man die Zusammenhänge der Spalte 'Beziehungen \Uparrow '.

Aus der obigen Tabelle erkennt man, daß die Koeffizienten \tilde{T}^{ij} in jeder Darstellung unverändert erhalten bleiben. In Abschnitt 3.4 werden diese Spannungskoeffizienten über das Materialgesetz hergeleitet. Für die weitere Untersuchung ist der Bezug der Spannungstensoren auf die Massendichte der einzelnen Konfigurationen vorteilhaft. Diese modifizierten Spannungstensoren werden durch eine Tilde gekennzeichnet, d.h. es gilt z.B. $\mathbf{T} = \rho_x \tilde{\mathbf{T}}$. Im Falle einer Potentialfunktion Ψ ergeben sich die kontravarianten Spannungskoeffizienten zu

$$\tilde{T}^{ij} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial g_{ij}}. \quad (3.63)$$

Durch die Determinanten J, J_φ, J_ψ werden die Massedichten $\rho_\Theta, \rho_X, \rho_x$ der einzelnen Konfigurationen bei Annahme der Massenkonstanz ineinander überführt. Die Multiplikation der Spannungstensoren mit $\mathbf{K}_\Theta, \mathbf{F}_\Theta$ und \mathbf{F}_X sowie mit den Inversen transformiert die Basen ineinander. Hierbei sind alle sinnvollen Möglichkeiten aufgeführt worden.

Die oben angegebenen Spannungstensoren beschreiben die lokale Beanspruchung infolge einer Deformation bei konstanter Geometrie des Körpers. Darüberhinaus können aber auch Spannungstensoren angegeben werden, welche sich aus einer Designänderung bei konstanter Deformation ergeben. In diesen Fällen ergeben sich die Spannungstensoren nicht aus der Ableitung einer Potentialfunktion nach der verformten Metrik sondern nach der unverformten Metrik, d.h. die kontravarianten Koeffizienten lauten

$$\tilde{R}^{ij} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial G_{ij}} \quad (3.64)$$

und damit gilt

$$\mathbf{R}_\Theta = \rho_\Theta \tilde{\mathbf{R}}_\Theta = \rho_\Theta \tilde{R}^{ij} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j = \rho_\Theta \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{M}_\Theta}. \quad (3.65)$$

Analog zur Tabelle 3.2 können mehrere Spannungstensoren angegeben werden, die in den Koeffizienten übereinstimmen aber unterschiedliche Basen besitzen. Die Interpretation ist entsprechend derjenigen der üblichen Spannungstensoren möglich.

3.3.2 Variation von Spannungstensoren

Die Variation der Spannungen kann auf der Grundlage der in Tabelle 3.2 gegebenen Beziehungen hergeleitet werden und setzt sich aus den Ableitungen des lokal-konvektiven Spannungstensors $\tilde{\mathbf{S}}_\Theta$ und den zugehörigen geometrischen Größen zusammen. Eine Übersicht und detaillierte Informationen gibt Anhang A.5. An dieser Stelle seien kurz die Endergebnisse der lokal-konvektiven Beschreibung angegeben, d.h.

$$\delta \tilde{\mathbf{P}}_\Theta = \tilde{\mathbf{F}}_\Theta : \delta \mathbf{F}_\Theta + \tilde{\mathbf{G}}_\Theta : \delta \mathbf{K}_\Theta \quad (3.66)$$

$$\delta \tilde{\mathbf{S}}_\Theta = \tilde{\mathbf{C}}_\Theta : \mathbf{F}_\Theta^T \delta \mathbf{F}_\Theta + \tilde{\mathbf{D}}_\Theta : \mathbf{K}_\Theta^T \delta \mathbf{K}_\Theta. \quad (3.67)$$

Die Beziehungen zwischen den vierstufigen Tensoren sowie äquivalente bezogene Darstellungen sind im Anhang angegeben.

3.3.3 Oberflächen- und Volumenspannungen

Die oben eingeführten Spannungstensoren können aus der Darstellung der gesamten Oberflächenkraft des Körpers $\bar{\mathbf{F}}_t$ über die Oberflächenspannungen hergeleitet werden, d.h. es gilt

$$\bar{\mathbf{F}}_t = \int_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{t}}_x(\mathbf{x}, \mathbf{N}_x) d\mathbf{A}_x = \int_{\partial\Omega_o} \bar{\mathbf{t}}_X(\mathbf{X}, \mathbf{N}_X) d\mathbf{A}_X = \int_{\partial T_\Theta} \bar{\mathbf{t}}_\Theta(\Theta, \mathbf{N}_\Theta) d\mathbf{A}_\Theta.$$

Für die einzelnen Darstellungsweisen werden die eingepprägten Oberflächenspannungen $\bar{\mathbf{t}}_x$, $\bar{\mathbf{t}}_X$ und $\bar{\mathbf{t}}_\Theta$ über das *Cauchy-Theorem* mit den äußeren Normalen (\mathbf{N}_x , \mathbf{N}_X und \mathbf{N}_Θ) und den Spannungstensoren (\mathbf{T} , \mathbf{P} bzw. \mathbf{P}_Θ) verbunden, d.h.

$$\bar{\mathbf{t}}_x = \mathbf{t}_x = \mathbf{T} \mathbf{N}_x \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad (3.68)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_X = \mathbf{t}_X = \mathbf{P} \mathbf{N}_X \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_o, \quad (3.69)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_\Theta = \mathbf{t}_\Theta = \mathbf{P}_\Theta \mathbf{N}_\Theta \quad \forall \Theta \in T_\Theta. \quad (3.70)$$

Die Beziehungen der Tabelle 3.2 erhält man mit den Transformationsbeziehungen für die Flächenelemente nach kurzer Rechnung. Die symmetrischen Tensoren \mathbf{S} und \mathbf{S}_Θ stellen dabei die vollständige Rücktransformation auf T_X bzw. T_Θ dar. Ihre Bedeutung ergibt sich aus theoretischen und numerischen Vereinfachungen z.B. im Hinblick auf arbeitskonforme Paarungen von Spannungen und Verzerrungen.

Die eingepprägten Volumenspannungen ergeben die gesamte Kraft $\bar{\mathbf{F}}_b$, d.h.

$$\bar{\mathbf{F}}_b = \int_{\Omega_t} \rho_x \bar{\mathbf{b}}_x(\mathbf{x}) dV_x = \int_{\Omega_o} \rho_X \bar{\mathbf{b}}_X(\mathbf{X}) dV_X = \int_{T_\Theta} \rho_\Theta \bar{\mathbf{b}}_\Theta(\Theta) dV_\Theta.$$

Die eingepprägten Volumenkraftdichten der einzelnen Konfigurationen können mit Hilfe der Transformation der Volumenelemente sowie der Massendichtefunktionen ineinander überführt werden. Hierbei wird die Massenkonstanz während der Deformation angenommen.

Für die Spannungstensoren wie z.B. \mathbf{R}_Θ , welche sich aus einer Geometrievariation herleiten, ist keine dem Cauchy-Theorem (siehe Gleichungen (3.68) – (3.70)) äquivalente Aussage bekannt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Oberflächenspannungen als design- und deformationsunabhängig angesehen, d.h. die Variationen von $\bar{\mathbf{F}}_t$ und $\bar{\mathbf{F}}_b$ verschwinden.

3.3.4 Einführung der Spannungsleistung

Die Spannungsleistung eines thermomechanischen Systems wird in Abschnitt 3.5 eingeführt. Zunächst sollen die Transformationsbeziehungen zwischen den Darstellungsformen betrachtet werden. Man spricht bei der Wahl zugehöriger Spannungen und Verzerrungsraten auch von „arbeitskonformen Paarungen“. In Abschnitt 3.2.4 wurden hierfür bereits Vorbereitungen getroffen. Für die gesamte Spannungsleistung \mathcal{P}_{ges} folgt

$$\mathcal{P}_{ges} = \int_{\Omega_t} \mathcal{P}_x dV_x = \int_{\Omega_o} \mathcal{P}_X dV_X = \int_{T_\Theta} \mathcal{P}_\Theta dV_\Theta.$$

Einzelheiten der Herleitung sowie weitere Hinweise findet man im Anhang A.5.3.

Für die volumenspezifischen Spannungsleistungen gelten die Beziehungen

$$\mathcal{P}_\Theta = \rho_\Theta \tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \rho_\Theta \tilde{\mathbf{P}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} = \rho_\Theta \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \mathbf{F}_\Theta^T \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \quad (3.71)$$

$$\mathcal{P}_X = \rho_X \tilde{\mathcal{P}}_X = \rho_X \tilde{\mathbf{P}} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} = \rho_X \tilde{\mathbf{S}} : \mathbf{F}_X^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \quad (3.72)$$

$$\mathcal{P}_x = \rho_x \tilde{\mathcal{P}}_x = \rho_x \tilde{\mathbf{T}} : \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} = \rho_x \tilde{\mathbf{T}} : \mathbf{F}_x^T \text{grad}_x \boldsymbol{\eta}. \quad (3.73)$$

Hierbei bezeichnen $\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{P}}_x, \tilde{\mathcal{P}}_X$ und $\tilde{\mathcal{P}}_\Theta$ die massenspezifischen Spannungsleistungen mit

$$\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \tilde{\mathbf{P}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \mathbf{F}_\Theta^T \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \quad (3.74)$$

$$= \tilde{\mathcal{P}}_X = \tilde{\mathbf{P}} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{S}} : \mathbf{F}_X^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \quad (3.75)$$

$$= \tilde{\mathcal{P}}_x = \tilde{\mathbf{T}} : \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{T}} : \mathbf{F}_x^T \text{grad}_x \boldsymbol{\eta}. \quad (3.76)$$

Mit den Definitionen $\mathcal{P}_x = \rho_x \tilde{\mathcal{P}}_x$, $\mathcal{P}_X = \rho_X \tilde{\mathcal{P}}_X$ und $\mathcal{P}_\Theta = \rho_\Theta \tilde{\mathcal{P}}_\Theta$ gilt für das Integral

$$\mathcal{P}_{ges} = \int_{\Omega_t} \tilde{\mathcal{P}}_x \, dM_x = \int_{\Omega_o} \tilde{\mathcal{P}}_X \, dM_X = \int_{T_\Theta} \tilde{\mathcal{P}}_\Theta \, dM_\Theta.$$

3.3.5 Variation der Spannungsleistung

Die Variation der Spannungen sowie der Spannungsleistung ist für die Behandlung der Sensitivitäten von zentraler Bedeutung und soll an dieser Stelle ausführlich dokumentiert werden.

3.3.5.1 Struktur der Beziehungen

Die Variation der Spannungen und der Spannungsleistung kann vorteilhaft an der massenspezifischen Darstellung erläutert werden, d.h. sie setzt sich aus der Variation von ρ_Θ sowie der Variation der Anteile $\tilde{\mathcal{P}}_x, \tilde{\mathcal{P}}_X$ und $\tilde{\mathcal{P}}_\Theta$ zusammen. Mit $\rho_\Theta = \rho_X J_\psi$ und $\delta\rho_X = 0$ sowie $\delta J_\psi = J_\psi \text{Div } \delta\mathbf{X}$ folgt $\delta\rho_\Theta = \rho_\Theta \text{Div } \delta\mathbf{X}$. Damit gilt

$$\delta\mathcal{P}_\Theta = \delta(\rho_\Theta \tilde{\mathcal{P}}_\Theta) = \delta\rho_\Theta \tilde{\mathcal{P}}_\Theta + \rho_\Theta \delta\tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \rho_\Theta \tilde{\mathcal{P}}_\Theta \text{Div } \delta\mathbf{X} + \rho_\Theta \delta\tilde{\mathcal{P}}_\Theta$$

und die Variation der gesamten Spannungsleistung ergibt

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{P}_{ges} &= \int_{T_\Theta} \left[\mathcal{P}_\Theta \text{Div } \delta\mathbf{X} + \rho_\Theta \delta\tilde{\mathcal{P}}_\Theta \right] dV_\Theta \\ &= \int_{\Omega_o} \left[\mathcal{P}_X \text{Div } \delta\mathbf{X} + \rho_X \delta\tilde{\mathcal{P}}_X \right] dV_X \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\mathcal{P}_x \text{Div } \delta\mathbf{X} + \rho_x \delta\tilde{\mathcal{P}}_x \right] dV_x. \end{aligned}$$

Hierbei wird in allen Darstellungen der materielle Divergenzoperator Div auf die Geometrievariation $\delta\mathbf{X}$ angewendet. Die Darstellungen für $\mathcal{P}_\Theta, \mathcal{P}_X, \mathcal{P}_x$ können den Gleichungen (3.71)–(3.73) entnommen werden, siehe auch die Bemerkungen in Abschnitt 3.2.4 zur Variation integraler Größen.

3.3.5.2 Variation der massenspezifischen Spannungsleistung

Die Variation der massenspezifischen Spannungsleistung $\delta\tilde{\mathcal{P}}_\Theta$ der lokal-konvektiven Darstellung kann für die funktionale Abhängigkeit von den Metrikensoren \mathbf{m}_Θ und \mathbf{M}_Θ bzw. die Abhängigkeit von den Tangenten \mathbf{K}_Θ und \mathbf{F}_Θ hergeleitet werden, siehe Anhang A.5.4 für weitere Hinweise. Im Abschnitt 3.3.2 wurden die Variationen der Spannungen angegeben.

Mit den lokal-konvektiven Materialensoren $\tilde{\mathbb{F}}_\Theta$ und $\tilde{\mathbb{G}}_\Theta$ ergibt sich aus der Abhängigkeit von \mathbf{K}_Θ und \mathbf{F}_Θ die Beziehung

$$\delta\tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} : \delta\tilde{\mathbf{P}}_\Theta \quad (3.77)$$

$$= \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} : \left\{ \tilde{\mathbb{F}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{x} + \tilde{\mathbb{G}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{X} \right\} \quad (3.78)$$

$$= \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} : \left\{ (\tilde{\mathbb{F}}_\Theta + \tilde{\mathbb{G}}_\Theta) : \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{X} + \tilde{\mathbb{F}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{u} \right\}. \quad (3.79)$$

Die Transformation von $\delta\tilde{\mathcal{P}}_\Theta$ in materielle und räumliche Darstellungen ist durch die bisherigen Teilergebnisse leicht möglich und ergibt

$$\delta\tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} : \left\{ (\tilde{\mathbb{F}}_\Theta + \tilde{\mathbb{G}}_\Theta) : \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{X} + \tilde{\mathbb{F}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{u} \right\} \quad (3.80)$$

$$= \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \left\{ (\tilde{\mathbb{F}}_X + \tilde{\mathbb{G}}_X) : \text{Grad}_X \delta\mathbf{X} + \tilde{\mathbb{F}}_X : \text{Grad}_X \delta\mathbf{u} \right\} \quad (3.81)$$

$$= \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} : \left\{ (\tilde{\mathbb{F}}_x + \tilde{\mathbb{G}}_x) : \text{grad}_x \delta\mathbf{X} + \tilde{\mathbb{F}}_x : \text{grad}_x \delta\mathbf{u} \right\}. \quad (3.82)$$

Eine äquivalente Darstellung ergibt sich für die Abhängigkeit von \mathbf{m}_Θ und \mathbf{M}_Θ , d.h. mit $\tilde{\mathbf{P}}_\Theta = \mathbf{F}_\Theta \tilde{\mathbf{S}}_\Theta$ und den lokal-konvektiven Materialensoren $\tilde{\mathbb{C}}_\Theta$ und $\tilde{\mathbb{D}}_\Theta$ gilt

$$\delta\tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \mathbf{F}_\Theta^T \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} : \left[\tilde{\mathbb{C}}_\Theta : \delta\mathbf{m}_\Theta + \tilde{\mathbb{D}}_\Theta : \delta\mathbf{M}_\Theta \right] + \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta^T \delta\mathbf{x} \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta}. \quad (3.83)$$

Äquivalente materielle bzw. räumliche Beziehungen erhält man mit den Materialensoren $\tilde{\mathbb{C}}_\Theta, \tilde{\mathbb{D}}_\Theta$ und $\tilde{\mathbb{C}}_X, \tilde{\mathbb{D}}_X$ sowie $\tilde{\mathbb{C}}_x, \tilde{\mathbb{D}}_x$

$$\delta\tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \mathbf{F}_\Theta^T \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} : \left[\tilde{\mathbb{C}}_\Theta : \delta\mathbf{m}_\Theta + \tilde{\mathbb{D}}_\Theta : \delta\mathbf{M}_\Theta \right] + \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta^T \delta\mathbf{x} \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta},$$

$$= \mathbf{F}_X^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \left[\tilde{\mathbb{C}}_X : \tilde{\boldsymbol{\psi}}_*(\delta\mathbf{m}_\Theta) + \tilde{\mathbb{D}}_X : \tilde{\boldsymbol{\psi}}_*(\delta\mathbf{M}_\Theta) \right] + \tilde{\mathbf{S}} : \text{Grad}_X^T \delta\mathbf{x} \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta},$$

$$= \mathbf{F}_x^T \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} : \left[\tilde{\mathbb{C}}_x : \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_*(\delta\mathbf{m}_\Theta) + \tilde{\mathbb{D}}_x : \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_*(\delta\mathbf{M}_\Theta) \right] + \tilde{\mathbf{T}} : \text{grad}_x^T \delta\mathbf{x} \text{grad}_x \boldsymbol{\eta}.$$

Durch Einsetzen der Ergebnisse für die Variation der lokalen Metrikensoren sowie deren Transformation können weitere Darstellungsformen hergeleitet werden. Dieses gilt insbesondere für die Aufteilung in Anteile partieller Variationen bzgl. Geometrie und Verschiebung. Auf eine ausführliche Auflistung alternativer Formen wird an dieser Stelle verzichtet.

Weiterhin führen die Beziehungen (3.60) und (3.61) zu der Beziehung

$$\tilde{\mathbb{C}}_\Theta : \delta\mathbf{m}_\Theta + \tilde{\mathbb{D}}_\Theta : \delta\mathbf{M}_\Theta = \tilde{\mathbb{C}}_\Theta : (\delta\mathbf{m}_\Theta - \mathbf{B}_\Theta^T \delta\mathbf{M}_\Theta), \quad (3.84)$$

d.h. es wird nur die Berechnung des lokal-konvektiven Materialensors $\tilde{\mathbb{C}}_\Theta$ erforderlich.

Mit diesen Beobachtungen kann somit eine Aufteilung der obigen Variation in die partiellen Anteile $\delta_u \tilde{\mathcal{P}}_\Theta$ und $\delta_X \tilde{\mathcal{P}}_\Theta$ vorgenommen werden, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
\delta_u \tilde{\mathcal{P}}_\Theta &= \mathbf{F}_\Theta^T \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} : \tilde{\mathbb{C}}_\Theta : \text{sym}(\text{GRAD}_\Theta^T \mathbf{x} \text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{u}) &+ \tilde{\mathbb{S}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta^T \delta \mathbf{u} \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \\
&= \mathbf{F}_X^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \tilde{\mathbb{C}}_X : \text{sym}(\text{Grad}_X^T \mathbf{x} \text{Grad}_X \delta \mathbf{u}) &+ \tilde{\mathbb{S}} : \text{Grad}_X^T \delta \mathbf{u} \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \\
&= \mathbf{F}_x^T \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} : \tilde{\mathbb{C}}_x : \text{sym}(\text{grad}_x^T \mathbf{x} \text{grad}_x \delta \mathbf{u}) &+ \tilde{\mathbb{T}} : \text{grad}_x^T \delta \mathbf{u} \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} \\
\delta_X \tilde{\mathcal{P}}_\Theta &= \mathbf{F}_\Theta^T \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} : \tilde{\mathbb{C}}_\Theta : \text{sym}(-\text{GRAD}_\Theta \mathbf{u} \text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{X}) &+ \tilde{\mathbb{S}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta^T \delta \mathbf{X} \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \\
&= \mathbf{F}_X^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \tilde{\mathbb{C}}_X : \text{sym}(-\text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}) &+ \tilde{\mathbb{S}} : \text{Grad}_X^T \delta \mathbf{X} \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \\
&= \mathbf{F}_x^T \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} : \tilde{\mathbb{C}}_x : \text{sym}(-\text{grad}_x \mathbf{u} \text{grad}_x \delta \mathbf{X}) &+ \tilde{\mathbb{T}} : \text{grad}_x^T \delta \mathbf{X} \text{grad}_x \boldsymbol{\eta}
\end{aligned}$$

Diese Form der Darstellung ist direkt für die Berechnung der sogenannten tangentialen Steifigkeiten und tangentialen Sensitivitäten zu verwenden, siehe Abschnitt 3.6.

3.4 Materialgesetze

Die thermomechanische Materialtheorie ist in der Literatur, siehe z.B. [52, 152, 160], ausführlich dokumentiert und ein reges Forschungsgebiet. Aufgrund der Vielfältigkeit der vorhandenen Problemklassen sowie der möglichen Lösungsansätze kann an dieser Stelle nur exemplarisch auf die veränderte Darstellung von Materialgesetzen im Rahmen der lokal-konvektiven Betrachtungsweise hingewiesen werden. Hierzu wird als Modellproblem mit dem *kompressiblen Neo-Hooke-Material* ein hyperelastisches Materialverhalten ausgewählt.

Das *kompressible Neo-Hooke-Material* zeigt ein sowohl physikalisch als auch geometrisch nichtlineares Verhalten auf. Mit den auf Seite 183 eingeführten Invarianten $\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}$ wird die freie Energiefunktion in der Form

$$\Psi = \hat{\Psi}(\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}) = \frac{1}{2} \mu (\mathbf{I} - 3) - \mu \ln J + \frac{1}{2} \lambda \ln^2 J \quad (3.85)$$

eingeführt. Hierbei bezeichnen μ und λ die aus der Elastizitätstheorie bekannten *Lamé-Konstanten*. Mit den obigen Herleitungen können die Spannungstensoren

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_{\Theta} &= \mu (\mathbf{M}_{\Theta}^{-1} - \mathbf{m}_{\Theta}^{-1}) + \lambda \ln J \mathbf{m}_{\Theta}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{S}} &= \mu (\mathbf{G}^{-1} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda \ln J \mathbf{C}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{T}} &= \mu (\mathbf{b} - \mathbf{g}^{-1}) + \lambda \ln J \mathbf{g}^{-1} \end{aligned}$$

sowie die Materialtensoren

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_{\Theta} &= \lambda \mathbf{m}_{\Theta}^{-1} \otimes \mathbf{m}_{\Theta}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln J) \mathbf{I}_{\Theta} \\ \tilde{\mathbf{C}}_X &= \lambda \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln J) \mathbf{I}_X \\ \tilde{\mathbf{C}}_x &= \lambda \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln J) \mathbf{I}_x \end{aligned}$$

abgeleitet werden, siehe [180]. Hierbei bezeichnen $\mathbf{I}_{\Theta}, \mathbf{I}_X, \mathbf{I}_x$ vierstufige Tensoren, siehe Anhang Seite 162. Die weiteren Tensoren sind bereits eingeführt worden.

Im Kapitel 5 wird im Rahmen der Detailbetrachtung zur Sensitivitätsanalyse ausführlich auf komplexes Materialverhalten mit u.a. Geschichtsabhängigkeit und Schädigung eingegangen.

Darüberhinaus wurde die entwickelte Methodik auch auf die Plastizität und Viskoplastizität bei kleinen Verzerrungen und die multiplikative Elastoplastizität angewendet, siehe [167, 40, 227, 226, 225]

3.5 Bilanz- und Erhaltungssätze

In diesem Abschnitt werden die Bilanz- und Erhaltungssätze der Thermodynamik in der lokal-konvektiven Betrachtungsweise eingeführt und durch *Lokalisierung* werden die für einen Punkt Θ des Parameterraumes gültigen *lokalen Formen* hergeleitet.⁴

Es wird gezeigt, daß die Variation der integralen Aussagen der lokal-konvektiven Betrachtungsweise mit dem Prozeß der Lokalisierung vertauschbar ist, d.h. im Ergebnis identisch mit der Variation der lokalen Formen. Diese variierten lokalen Formen der lokal-konvektiven Betrachtungsweise sind eine wesentliche Erweiterung der Kontinuumsmechanik, die für die weiteren Anwendungen in unterschiedlicher Form ausgenützt werden können.

Über die Vorwärtstransformationen ergeben sich hieraus materielle und räumliche Darstellungsformen der integralen sowie lokalen Aussagen. Die Ableitungen sind knapp gehalten, da eine grundsätzliche Kenntnis der Zusammenhänge vorausgesetzt wird.

3.5.1 Massenerhaltung

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur solche thermomechanischen Prozesse betrachtet, bei denen die zeitabhängige Deformation des Körpers aus der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration die Gesamtmasse nicht verändert. Diese Annahme deckt einen großen Anwendungsbereich der Kontinuumsmechanik ab. Mit den in Anhang A.3.7 eingeführten Massenelementen und Massendichten folgt für die Gesamtmasse des Körpers

$$m = \int_{T_\Theta} dM_\Theta = \int_{T_\Theta} \rho_\Theta dV_\Theta = \int_{\Omega_o} dM_X = \int_{\Omega_o} \rho_X dV_X = \int_{\Omega_t} dM_x = \int_{\Omega_t} \rho_x dV_x = \text{konst.}$$

Nach kurzer Rechnung folgt mit den Transformationsbeziehungen der Volumenelemente die lokal-konvektive Darstellung der *ersten* bzw. *zweiten lokalen Form der Massenerhaltung*

$$\rho_\Theta = \rho_x J_\varphi \quad \forall \Theta \in T_\Theta \quad \text{bzw.} \quad \dot{\rho}_x + \rho_x \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad \forall \Theta \in T_\Theta.$$

3.5.2 Erhaltungssatz der Bewegungsgröße

Die Bewegungsgröße eines Körpers ist durch die Geschwindigkeit aller Massenelemente bestimmt, d.h. mit $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\varphi}(\Theta)$ in der lokal-konvektiven Betrachtungsweise gilt

$$\mathbf{I} := \int_{T_\Theta} \rho_\Theta \dot{\mathbf{x}} dV_\Theta = \int_{\Omega_o} \rho_X \dot{\mathbf{x}} dV_X = \int_{\Omega_t} \rho_x \dot{\mathbf{x}} dV_x. \quad (3.86)$$

Die lokal-konvektive Form des Erhaltungssatzes der Bewegungsgröße $\dot{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{F}}_t + \bar{\mathbf{F}}_b$ lautet

$$\frac{D\mathbf{I}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{T_\Theta} \rho_\Theta \dot{\mathbf{x}} dV_\Theta = \int_{\partial T_\Theta} \bar{\mathbf{t}}_\Theta(\Theta, \mathbf{N}_\Theta) d\mathbf{A}_\Theta + \int_{T_\Theta} \bar{\mathbf{b}}_\Theta(\Theta) dV_\Theta.$$

⁴An dieser Stelle wird der Begriff *lokal* zweifach verwendet, d.h. im Sinne der lokal-konvektiven Betrachtungsweise und weiterhin im Sinne einer punktwisen – im Gegensatz zu einer integralen – Aussage. Für eine integrale Größe A gelte $A = \int_{T_\Theta} a(\Theta) dV_\Theta = 0$. Aus der Stetigkeit von a folgt damit die lokale Beziehung $a = 0$ für alle $\Theta \in T_\Theta$. Diese Schlußfolgerung wird *Lokalisierung* genannt.

Mit der Massenerhaltung folgt für die drei Betrachtungsweisen

$$\text{lokal-konvektiv} \quad \int_{T_\Theta} \rho_\Theta \ddot{\mathbf{x}} dV_\Theta = \int_{\partial T_\Theta} \bar{\mathbf{t}}_\Theta(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{N}_\Theta) d\mathbf{A}_\Theta + \int_{T_\Theta} \bar{\mathbf{b}}_\Theta(\boldsymbol{\Theta}) dV_\Theta, \quad (3.87)$$

$$\text{materiell} \quad \int_{\Omega_o} \rho_X \ddot{\mathbf{x}} dV_X = \int_{\partial \Omega_o} \bar{\mathbf{t}}_X(\mathbf{X}, \mathbf{N}_X) d\mathbf{A}_X + \int_{\Omega_o} \bar{\mathbf{b}}_X(\mathbf{X}) dV_X, \quad (3.88)$$

$$\text{räumlich} \quad \int_{\Omega_t} \rho_x \ddot{\mathbf{x}} dV_x = \int_{\partial \mathbf{B}_x} \bar{\mathbf{t}}_x(\mathbf{x}, \mathbf{N}_x) d\mathbf{A}_x + \int_{\Omega_t} \bar{\mathbf{b}}_x(\mathbf{x}) dV_x. \quad (3.89)$$

3.5.2.1 Herleitung der dynamischen Feldgleichungen

Durch Einsetzen der Beziehung $\bar{\mathbf{t}}_\Theta = \mathbf{t}_\Theta = \mathbf{P}_\Theta \mathbf{N}_\Theta$ in die lokal-konvektive Darstellung, Anwenden des Gauß-Integralsatzes (A.33) sowie durch anschließende Lokalisierung folgt hieraus die *dynamische Feldgleichung in lokal-konvektiver Darstellung* bzw. in analoger Form die materiellen und räumlichen Aussagen, d.h.

$$\text{lokal-konvektiv} \quad \text{DIV } \mathbf{P}_\Theta + \rho_\Theta (\bar{\mathbf{b}}_\Theta - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\Theta} \in T_\Theta, \quad (3.90)$$

$$\text{materiell} \quad \text{Div } \mathbf{P} + \rho_X (\bar{\mathbf{b}}_X - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_o, \quad (3.91)$$

$$\text{räumlich} \quad \text{div } \mathbf{T} + \rho_x (\bar{\mathbf{b}}_x - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t. \quad (3.92)$$

Die obige lokal-konvektive Darstellung (3.90) der dynamischen Feldgleichungen wird an späterer Stelle im Rahmen adaptiver Untersuchungen verwendet werden.

3.5.2.2 Variation der dynamischen Feldgleichungen

Für die lokal-konvektive Darstellung kann die Variation der dynamischen Feldgleichung problemlos ermittelt werden. Man erhält direkt durch Variation von Gleichung (3.90)

$$\text{DIV } \delta \mathbf{P}_\Theta + \delta \rho_\Theta (\bar{\mathbf{b}}_\Theta - \ddot{\mathbf{x}}) + \rho_\Theta \delta (\bar{\mathbf{b}}_\Theta - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\Theta} \in T_\Theta. \quad (3.93)$$

Diese Beziehung stellt den Kern der Variation der Gleichgewichtsbedingungen und somit der Sensitivitätsanalyse dar. Die Herleitung kann auch über die Variation des Erhaltungssatzes erfolgen. In diesem Fall werden wiederum das Cauchy-Theorem, der Gauß-Integralsatz und die Lokalisierung angewendet.

Der Vorteil der lokal-konvektiven Darstellung liegt in der Vertauschbarkeit von Variation und Divergenz, da der Divergenzoperator DIV konstant ist. Die Variation der Spannungen wird an dieser Stelle nicht weiter aufgelöst, siehe hierzu Abschnitt A.5.

3.5.2.3 Transformation der variierten dynamischen Feldgleichungen

Zur Bestimmung materieller und räumlicher Formen werden die oben angegebenen materiellen und räumlichen Darstellungen des globalen Kräftegleichgewichts variiert, mit dem Gauß-Integralsatz umgeschrieben und anschließend einem Lokalisierungsprozeß unterzogen. Ein zweiter Zugang erfolgt über die Variation der Divergenzoperatoren, siehe Anhang A.3.3.

Es gilt dann für \mathbf{P} sowie \mathbf{T}

$$\delta[\text{Div } \mathbf{P}] = \text{Div } \delta \mathbf{P} - \text{Grad}_X \mathbf{P} \text{ Grad}_X \delta \mathbf{X} : \mathbf{1}_X, \quad (3.94)$$

$$\delta[\text{div } \mathbf{T}] = \text{div } \delta \mathbf{T} - \text{grad}_x \mathbf{T} \text{ grad}_x \delta \mathbf{x} : \mathbf{1}_x. \quad (3.95)$$

3.5.3 Weitere Bilanz- und Erhaltungssätze

3.5.3.1 Drehimpulserhaltungssatz

Der Drehimpulserhaltungssatz in der lokal-konvektiven Form lautet

$$\frac{D}{Dt} \int_{T_\Theta} \rho_\Theta \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{x}} dV_\Theta = \int_{\partial T_\Theta} \mathbf{r} \times \bar{\mathbf{t}}_\Theta(\Theta, \mathbf{N}_\Theta) d\mathbf{A}_\Theta + \int_{T_\Theta} \mathbf{r} \times \bar{\mathbf{b}}_\Theta(\Theta) dV_\Theta.$$

Analog zur Herleitung der Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ ergibt sich hieraus die lokale Form $\mathbf{S}_\Theta = \mathbf{S}_\Theta^T$, d.h. die Symmetrie des 2. Lokalen Spannungstensors. Die Variation dieser Beziehung ergibt sofort $\delta \mathbf{S}_\Theta = \delta \mathbf{S}_\Theta^T$, d.h. die Symmetrie bleibt bei allen vollständigen Variationen erhalten.

3.5.3.2 1. Hauptsatz der Thermodynamik

Im *Bilanzsatz der inneren Energie* (1. Hauptsatz der Thermomechanik) wird postuliert, daß die zeitliche Änderung der inneren Energie U der Summe aus der inneren Spannungsleistung und der zugeführten Wärmemenge ist.

Es werden die massenspezifische innere Energie $u = \tilde{\nu}(\Theta) = \nu(\mathbf{X}) = \bar{\nu}(\mathbf{x})$, die massenspezifische innere Wärmequelle $r = \tilde{r}(\Theta) = r(\mathbf{X}) = \bar{r}(\mathbf{x})$ und der äußere Wärmeflußvektor $\mathbf{q} = \mathbf{q}_\Theta(\Theta) = \mathbf{q}_X(\mathbf{X}) = \mathbf{q}_x(\mathbf{x})$ eingeführt. Damit gilt dann die integrale Aussage

$$\frac{D}{Dt} \int_{T_\Theta} \rho_\Theta \tilde{\nu}(\Theta) dV_\Theta = \int_{T_\Theta} \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \dot{\mathbf{x}} dV_\Theta + \int_{T_\Theta} \rho_\Theta \tilde{r}(\Theta) dV_\Theta - \int_{\partial T_\Theta} \mathbf{q}_\Theta \cdot \mathbf{N}_\Theta d\mathbf{A}_\Theta$$

Die Lokalisierung liefert hieraus

$$\dot{u} = r - \frac{1}{\rho_\Theta} \text{DIV} \mathbf{q}_\Theta + \frac{1}{\rho_\Theta} \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \mathbf{D}_\Theta.$$

3.5.3.3 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Die massenspezifische Entropie $s = \tilde{\eta}(\Theta) = \eta(\mathbf{X}) = \bar{\eta}(\mathbf{x})$ beschreibt die Prozeßrichtung. Mit der absoluten Temperatur θ , der Entropiezufuhr im Innern $\sigma = \tilde{\sigma}(\Theta) = \sigma(\mathbf{X}) = \bar{\sigma}(\mathbf{x})$ wird postuliert, daß die zeitliche Änderung der Entropie der Summe der Entropiezufuhr durch Wärmeproduktion im Innern und durch den Wärmeflußvektor über die Oberfläche sowie der Entropieproduktion im Innern ist. Dann gilt

$$\frac{D}{Dt} \int_{T_\Theta} \rho_\Theta \tilde{\eta}(\Theta) dV_\Theta = \int_{T_\Theta} \rho_\Theta \frac{\tilde{r}(\Theta)}{\theta} dV_\Theta - \int_{\partial T_\Theta} \frac{1}{\theta} \mathbf{q}_\Theta \cdot \mathbf{N}_\Theta d\mathbf{A}_\Theta + \int_{T_\Theta} \rho_\Theta \tilde{\sigma}(\Theta) dV_\Theta.$$

Mit der Forderung irreversibler Prozesse $\sigma \geq 0$ ergibt sich die *Clausius-Duhem-Ungleichung* als lokale Form des zweiten Hauptsatzes

$$\dot{s} \geq \frac{r}{\theta} - \frac{1}{\rho_\Theta} \text{DIV} \frac{\mathbf{q}_\Theta}{\theta}$$

In den obigen Fällen kann eine Variation ohne Probleme durchgeführt werden. Auf die Ausformulierung wird jedoch verzichtet, da sich diese Arbeit vornehmlich energieerhaltenden Prozessen widmet. Die vollständige Ausformulierung der Sensitivität in der Thermodynamik bleibt einer späteren Arbeit vorbehalten.

3.6 Variationsprinzipien für Analyse und Sensitivität

In diesem Abschnitt werden zwei wesentliche Variationsprinzipien der Mechanik in der lokal-konvektiven Betrachtungsweise hergeleitet, d.h. das bekannte Arbeitsprinzip als Gleichgewichtsaussage sowie ein entsprechendes Prinzip für die variierten Spannungen. Eine andere Interpretation weist auf die *schwachen Formen* der in Abschnitt 3.5 hergeleiteten starken Formen des Gleichgewichts und seiner Variation hin. Die hier hergeleiteten Aussagen sind für die Strukturanalyse wie auch für die Sensitivitätsanalyse bei inversen Problemen von zentraler Bedeutung. Abschließend werden die *Optimalitätsbedingungen* in allgemeiner Form hergeleitet.

3.6.1 Die schwache Form des Gleichgewichts

Die schwache Form des Gleichgewichts wird als integrale Aussage durch Wichtung der Differentialgleichung und der Randbedingungen mit zulässigen Testfunktionen $\boldsymbol{\eta}$ gebildet. Beide Formen stellen für hinreichend glatte Funktionen äquivalente Aussagen dar.

3.6.1.1 Herleitung der schwachen Form

Die Multiplikation der Differentialgleichung $\text{DIV } \mathbf{P}_\Theta + \mathbf{k}_\Theta = \mathbf{0}$, wobei $\mathbf{k}_\Theta := \rho_\Theta(\bar{\mathbf{b}}_\Theta - \ddot{\mathbf{x}})$ abgekürzt wird, sowie der Kräfte-Randbedingung $\bar{\mathbf{t}}_\Theta - \mathbf{t}_\Theta = \mathbf{0}$ mit der Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ liefert

$$(\text{DIV } \mathbf{P}_\Theta + \mathbf{k}_\Theta) \cdot \boldsymbol{\eta} = 0 \quad \forall \Theta \in T_\Theta \quad \text{sowie} \quad (\bar{\mathbf{t}}_\Theta - \mathbf{t}_\Theta) \cdot \boldsymbol{\eta} = 0 \quad \forall \Theta \in \partial T_\Theta.$$

Die anschließende Integration über T_Θ bzw. über ∂T_Θ sowie die Addition der Anteile ergibt

$$\int_{T_\Theta} \text{DIV } \mathbf{P}_\Theta \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV_\Theta + \int_{T_\Theta} \mathbf{k}_\Theta \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV_\Theta + \int_{\partial T_\Theta} (\bar{\mathbf{t}}_\Theta - \mathbf{t}_\Theta) \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{A}_\Theta = 0.$$

Das Oberflächenintegral kann mit dem Gauß-Integralsatz (A.33) umgeschrieben werden. Nach einigen Umformungen erhält man $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{int} + \mathcal{R}^{ext} = 0$. Der innere Anteil der schwachen Form $\mathcal{R}^{int} = \delta\mathcal{W}$ wird auch als *innere virtuelle Arbeit* sowie der äußere Anteil der schwachen Form $\mathcal{R}^{ext} = -\delta\mathcal{A}$ als *äußere virtuelle Arbeit* bezeichnet. In Formeln gilt

$$\mathcal{R}_\Theta = \int_{T_\Theta} \mathbf{P}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \, dV_\Theta - \int_{T_\Theta} \rho_\Theta (\bar{\mathbf{b}}_\Theta - \ddot{\mathbf{x}}) : \boldsymbol{\eta} \, dV_\Theta - \int_{\partial T_\Theta} \bar{\mathbf{t}}_\Theta : \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{A}_\Theta = 0. \quad (3.96)$$

3.6.1.2 Transformation der schwachen Form des Gleichgewichts

Diese Aussage in lokal-konvektiver Form kann auch in die materielle sowie in die räumliche Darstellungsweise transformiert werden, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_X &= \int_{\Omega_o} \mathbf{P} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \, dV_X - \int_{\Omega_o} \rho_X (\bar{\mathbf{b}}_X - \ddot{\mathbf{x}}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV_X - \int_{\partial\Omega_o} \bar{\mathbf{t}}_X \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{A}_X = 0 \\ \mathcal{R}_x &= \int_{\Omega_t} \mathbf{T} : \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} \, dV_x - \int_{\Omega_t} \rho_x (\bar{\mathbf{b}}_x - \ddot{\mathbf{x}}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV_x - \int_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{t}}_x \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{A}_x = 0. \end{aligned}$$

3.6.2 Die schwache Form der Gleichgewichtsvariation

Die Variation der schwachen Form des Gleichgewichts als Bestandteil der Kontinuumsmechanik, entstanden aus der Variation der starken Formen, ist eine wesentliche Erweiterung der Kontinuumsmechanik, siehe auch Abschnitt B.3 im Anhang.

3.6.2.1 Herleitung der schwachen Form der Gleichgewichtsvariation

In analoger Weise können auch die Variationen beliebiger Ordnung behandelt werden. Die Multiplikation der variierten Differentialgleichung $\text{DIV } \delta \mathbf{P}_\Theta + \delta \mathbf{k}_\Theta = \mathbf{0}$ sowie der variierten Kräfte- und Randbedingungen $\delta(\bar{\mathbf{t}}_\Theta - \mathbf{t}_\Theta) = \mathbf{0}$ mit der Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ und anschließende Integration über T_Θ bzw. über ∂T_Θ ergibt

$$\int_{T_\Theta} (\text{DIV } \delta \mathbf{P}_\Theta) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV_\Theta + \int_{T_\Theta} \delta \mathbf{k}_\Theta \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV_\Theta + \int_{\partial T_\Theta} \delta(\bar{\mathbf{t}}_\Theta - \mathbf{t}_\Theta) \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{A}_\Theta = 0.$$

Das Oberflächenintegral kann mit dem Gauß-Integralsatz umgeschrieben werden, d.h. mit $\delta \mathbf{t}_\Theta = \delta(\mathbf{P}_\Theta \mathbf{N}_\Theta) = \delta \mathbf{P}_\Theta \mathbf{N}_\Theta$ sowie mit $\delta \mathbf{P}_\Theta \mathbf{N}_\Theta \cdot \boldsymbol{\eta} = \delta \mathbf{P}_\Theta^T \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{N}_\Theta$ folgt

$$\int_{\partial T_\Theta} \delta \mathbf{t}_\Theta \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{A}_\Theta = \int_{\partial T_\Theta} \delta \mathbf{P}_\Theta^T \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{N}_\Theta \, d\mathbf{A}_\Theta = \int_{T_\Theta} \text{DIV}(\delta \mathbf{P}_\Theta^T \boldsymbol{\eta}) \, dV_\Theta.$$

Mit der Beziehung $(\text{DIV } \delta \mathbf{P}_\Theta) \cdot \boldsymbol{\eta} = \text{DIV}(\delta \mathbf{P}_\Theta^T \boldsymbol{\eta}) - \delta \mathbf{P}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta}$ gilt abschließend

$$\delta \mathcal{R}_\Theta = \int_{T_\Theta} \delta \mathbf{P}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \, dV_\Theta - \int_{T_\Theta} \delta \mathbf{k}_\Theta \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV_\Theta - \int_{\partial T_\Theta} \delta \bar{\mathbf{t}}_\Theta \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{A}_\Theta = 0. \quad (3.97)$$

Diese Gleichung kann auch direkt über die Variation der schwachen Form nach (3.96) hergeleitet werden.

Die Variation der volumenspezifischen Spannungsleistung $\delta \mathcal{P}_x = \delta \mathbf{P}_x : \text{GRAD}_x \boldsymbol{\eta}$ kann mit den Ergebnissen des Abschnittes 3.3 umgeschrieben werden, d.h. mit der massenspezifischen Spannungsleistung $\tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \tilde{\mathbf{P}}_\Theta : \text{Grad}_x \boldsymbol{\eta}$ und mit $\mathcal{P}_\Theta = \rho_\Theta \tilde{\mathcal{P}}_\Theta$ gilt

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R}_\Theta^{\text{int}} &= \int_{T_\Theta} \delta \mathbf{P}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \, dV_\Theta \\ &= \int_{T_\Theta} \rho_\Theta \left(\delta \tilde{\mathbf{P}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} + \tilde{\mathbf{P}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \, \text{Div } \delta \mathbf{X} \right) \, dV_\Theta. \end{aligned}$$

3.6.2.2 Transformation der schwachen Form der Gleichgewichtsvariation

Die Transformation der obigen Aussage in äquivalente materielle und räumliche Formen ist mit der Transformation der massenspezifischen Spannungsleistung leicht möglich. Die unterschiedlichen Möglichkeiten werden im Abschnitt A.5.4 beschrieben.

3.6.3 Einführung von Linear- und Bilinearformen

Die Ergebnisse dieses Abschnittes werden in mathematischer Terminologie angegeben.

Die schwache Form des Gleichgewichts und deren Variation wird an der aktuellen Stelle $(\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\Theta}), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\Theta}))$ gebildet. Bei dynamischen Problemen ist der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand $\dot{\mathbf{x}}$ bzw. $\ddot{\mathbf{x}}$ aus der Abbildung $\mathbf{x} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\Theta})$ zusätzlich zu bestimmen. Es ist zu erkennen, daß es sich hierbei um Linearformen bzw. um Bilinearformen der Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$, der Variation der Grundabbildungen sowie der Variation des Spannungstensors $\delta\mathbf{P}_\Theta$ handelt. Die variierten Spannungen sind selbst wieder in komplexer Form abhängig von den Variationen der Grundabbildungen. Bei geschichtsabhängigem Materialverhalten ist die gesamte Deformationsgeschichte und deren Variation zu betrachten. Hierauf wird an dieser Stelle verzichtet, siehe Abschnitt 5.3. Damit sind alle Variationen letztendlich, wie schon mehrmals betont, durch $\delta\mathbf{X}$, $\delta\mathbf{x}$ (und $\delta\dot{\mathbf{x}}, \delta\ddot{\mathbf{x}}$) bzw. durch $\delta\mathbf{X}$, $\delta\mathbf{u}$ (und $\delta\dot{\mathbf{u}}, \delta\ddot{\mathbf{u}}$) bestimmt. In mathematischer Schreibweise kann die schwache Form des Gleichgewichts gemäß Gleichung (3.96) durch die Linearform

$$\mathcal{R} = \hat{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{X}, \mathbf{x}) = 0 \quad (3.98)$$

beschrieben werden. Die Angabe von \mathbf{X}, \mathbf{x} nach dem Semikolon kennzeichnet die Stelle, an der die Linearform ausgewertet wird. Die Variation der schwachen Form überführt die Linearform zunächst in eine Multilinearform, d.h. in Gleichung (3.97) bzw. in

$$\delta\mathcal{R} = \delta\hat{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X}, \delta\mathbf{x}, \delta\dot{\mathbf{x}}, \delta\ddot{\mathbf{x}}; \mathbf{X}, \mathbf{x}) = 0. \quad (3.99)$$

Durch die Substitution von $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$, die auch für die Variationen $\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{X} + \delta\mathbf{u}$ gilt, ist eine additive Trennung in vier Bilinearformen möglich. Es gilt dann

$$\delta\mathcal{R} = \delta_X\mathcal{R} + \delta_u\mathcal{R} = s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X}) + k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}) + d(\boldsymbol{\eta}, \delta\dot{\mathbf{u}}) + m(\boldsymbol{\eta}, \delta\ddot{\mathbf{u}}) = 0. \quad (3.100)$$

Die Bilinearform $k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u})$ wird als „tangente Steifigkeit“ (‘tangent stiffness’) bezeichnet und beschreibt die Variation der schwachen Form des Gleichgewichts an der Stelle (\mathbf{X}, \mathbf{u}) in Richtung der virtuellen Verschiebungsänderung $\delta\mathbf{u}$, d.h. in Richtung $(\mathbf{0}, \delta\mathbf{u})$.

Die Bilinearformen $d(\boldsymbol{\eta}, \delta\dot{\mathbf{u}})$ und $m(\boldsymbol{\eta}, \delta\ddot{\mathbf{u}})$ werden als „tangente Dämpfung“ sowie als „tangente Massenträgheit“ bezeichnet und beschreiben die Variationen der schwachen Form des Gleichgewichtes an der Stelle (\mathbf{X}, \mathbf{u}) in Richtung der virtuellen Geschwindigkeitsänderung $\delta\dot{\mathbf{u}}$ bzw. Beschleunigungsänderung $\delta\ddot{\mathbf{u}}$, welche durch die obige virtuelle Verschiebungsänderung $\delta\mathbf{u}$ induziert werden. Man beachte, daß die partielle Variation $\delta_u\mathcal{R}$ insgesamt die drei Bilinearformen k, d, m erzeugt. Eine Dämpfung tritt im Zusammenhang dieser Arbeit nicht auf, wird aber zur Vervollständigung aufgeführt.

Die Bilinearform $s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X})$ wird als „tangente Sensitivität“ bezeichnet und beschreibt die Variation der schwachen Form des Gleichgewichts an der Stelle (\mathbf{X}, \mathbf{u}) in Richtung der virtuellen Geometrieänderung $\delta\mathbf{X}$, d.h. in Richtung $(\delta\mathbf{X}, \mathbf{0})$.

Entsprechend dieser Vorgehensweise kann für jede kontinuumsmechanische Funktion φ die vollständige Variation angegeben werden, d.h. es gilt

$$\delta\varphi = \delta_X\varphi + \delta_u\varphi = a(\delta\mathbf{X}) + b(\delta\mathbf{u}). \quad (3.101)$$

Hierin sind $a(\delta\mathbf{X})$ und $b(\delta\mathbf{u})$ Linearformen in den Variationen $\delta\mathbf{X}$ bzw. $\delta\mathbf{u}$. Die Funktion φ stellt einen Zielfunktionsanteil bzw. eine Nebenbedingung dar, siehe Kapitel 5 für weitere Hinweise zur Sensitivitätsanalyse.

3.6.4 Lagrangefunktion und Optimalitätsbedingungen

Für die Behandlung von Optimierungsaufgaben wird eine beliebige Zielfunktion φ betrachtet, die unter Wahrung der Gleichgewichtsbedingung minimiert werden soll. Diese Aufgabenstellung führt zur Lösung eines Sattelpunktproblems für die sogenannte *Lagrangefunktion* \mathcal{L} . Die lokal-konvektive Form lautet mit \mathcal{R}_Θ gemäß (3.96) für die statische Situation mit verschwindender Dämpfung und Trägheit zu

$$\mathcal{L}_\Theta(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \tilde{\boldsymbol{\nu}}) := \tilde{\varphi}_\Theta(\tilde{\boldsymbol{\psi}}, \tilde{\boldsymbol{\nu}}) + \mathcal{R}_\Theta(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}; \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \tilde{\boldsymbol{\nu}}). \quad (3.102)$$

$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ bezeichnet die sogenannten *Lagrange-Multiplikatoren* oder auch die *adjungierten Variablen*.

Die notwendige Optimalitätsbedingung, d.h. die *Karush-Kuhn-Tucker*-Bedingung (KKT) für stationäre Punkte, lautet dann $\nabla \mathcal{L}_\Theta(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \tilde{\boldsymbol{\nu}})(\delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \delta \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \delta \tilde{\boldsymbol{\nu}}) = 0$, wobei der Operator ∇ durch

$$\nabla \mathcal{L} := \begin{bmatrix} \delta_u \mathcal{L} \\ \delta_X \mathcal{L} \\ \delta_\lambda \mathcal{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

definiert ist. Die Auswertung der angegebenen Variationen liefert mit den bereits ermittelten Beziehungen somit

$$\delta_u \mathcal{L} = 0 = b(\delta \mathbf{u}) + k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \delta \mathbf{u}) \quad (3.104)$$

$$\delta_X \mathcal{L} = 0 = a(\delta \mathbf{X}) + s(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \delta \mathbf{X}) \quad (3.105)$$

$$\delta_\lambda \mathcal{L} = 0 = \mathcal{R}(\delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}; \mathbf{X}, \mathbf{u}). \quad (3.106)$$

Die Lösung der obigen Beziehungen ergibt das Tripel $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \tilde{\boldsymbol{\nu}})$, das grundsätzlich durch zwei unterschiedliche Zugänge ermittelt werden kann. Die beiden Berechnungsmöglichkeiten, d.h. die

1. *Methode der direkten Differentiation* (*direct differentiation method*) (DDM) bzw. die
2. *Methode der adjungierten Variablen* (*adjoint variable method*) (AVM),

betrachten dabei zwei unterschiedliche theoretische Aspekte der Problemformulierung. Die grundlegende Vorgehensweise wird am Beispiel statischer Probleme ohne Geschichtsabhängigkeit des Materialverhaltens demonstriert. Die Vorgehensweise kann auch für die lineare Theorie in diskreter Matrixschreibweise erläutert werden, siehe hierzu die Abschnitte 5.1 und B.1.4.

3.6.4.1 Methode der direkten Differentiation

Die Methode der direkten Differentiation verwendet die Beziehungen (3.98), (3.100) und (3.101), wobei sich grundsätzlich folgendes Vorgehen ergibt.

1. Die Geometrieabbildung $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ ist als Startpunkt bzw. als Iterationspunkt vorgegeben.
2. Die schwache Form (3.98), d.h. $\mathcal{R}(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{X}, \mathbf{u}) = 0$, wird für das vorliegende Design gelöst, um die zugehörige Gleichgewichtslösung $\mathbf{u} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\Theta})$ zu bestimmen.

3. Die Variation der Gleichgewichtsbedingung (3.100) (hier für die statische Situation mit $d = 0, m = 0$), d.h.

$$\delta\mathcal{R} = \delta_X\mathcal{R} + \delta_u\mathcal{R} = s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X}) + k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}) = 0$$

wird betrachtet, um für jede Variation $\delta\mathbf{X}$ die zugehörige Antwort $\delta\mathbf{u}$ zu bestimmen.

4. Mit den somit verfügbaren Variationen $\delta\mathbf{X}$ und $\delta\mathbf{u}$ kann die Gleichung (3.101), d.h. $\delta\varphi = \delta_X\varphi + \delta_u\varphi = a(\delta\mathbf{X}) + b(\delta\mathbf{u})$ zur Bestimmung von $\delta\varphi$ ausgewertet werden.

Bei diesem Vorgehen bleiben die adjungierten Variablen (Lagrange-Multiplikatoren) $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ unbestimmt. Demgegenüber ist für jede vorgegebene Variation $\delta\mathbf{X}$ die zugehörige Variation der Strukturantwort $\delta\mathbf{u}$ zu bestimmen.

3.6.4.2 Methode der adjungierten Variablen

Die Methode der adjungierten Variablen verwendet die Stationaritätsbedingungen, d.h. die KKT-Bedingungen (3.104–3.106) zur Ermittlung des Tripels $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \tilde{\boldsymbol{\nu}})$.

1. Die Geometrieabbildung $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ ist als Startpunkt bzw. als Iterationspunkt vorgegeben.
2. Die dritte KKT-Beziehung (3.106), d.h. die schwache Form $\mathcal{R}(\delta\tilde{\boldsymbol{\lambda}}; \mathbf{X}, \mathbf{u}) = 0$, wird für das vorliegende Design gelöst, um die zugehörige Gleichgewichtslösung $\mathbf{u} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\Theta})$ zu bestimmen.
3. Die erste KKT-Gleichung (3.104) kann mit Hilfe der zur Bilinearform k zugehörigen adjungierten Form k^* , d.h. mit $k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \delta\mathbf{u}) = k^*(\delta\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}})$, in die Form $b(\delta\mathbf{u}) + k^*(\delta\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}) = 0$ überführt werden. Die Lösung dieser Beziehung liefert somit $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$.
4. Zum Abschluß dient die zweite KKT-Beziehung (3.105) als notwendige Beziehung $\delta_X\mathcal{L} = 0$, um im Rahmen eines NLP-Algorithmus die weitere Veränderung des Designs zu ermitteln.

Bei diesem Vorgehen bleiben somit die Variationen $\delta\mathbf{u}$ der Strukturantwort unbekannt.

3.6.4.3 Äquivalenz der Vorgehensweisen

Bei den beiden Zugängen werden zum einen $\delta_X\varphi$ (DDM) sowie $\delta_X\mathcal{L}$ (AVM) berechnet. Es bleibt zu zeigen, daß beide Ausdrücke übereinstimmen. Es gilt mit (3.104) und (3.100)

$$\delta_X\mathcal{L} = \delta_X\varphi + s(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \delta\mathbf{X}) + \left[\delta_u\varphi + k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \delta\mathbf{u}) \right] = \delta_X\varphi + \delta_u\varphi + \left[k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \delta\mathbf{u}) + s(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \delta\mathbf{X}) \right] = \delta\varphi,$$

d.h. $\delta_X\mathcal{L} = \delta\varphi$, und damit die geforderte Äquivalenz der Vorgehensweisen.

3.7 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel wurden die zentralen Beziehungen der Kontinuumsmechanik in der lokal-konvektiven Betrachtungsweise hergeleitet. Die Erweiterung gegenüber der klassischen Vorgehensweise besteht darin, daß alle kontinuumsmechanischen Größen auf dem Parametergebiet T_Θ definiert bzw. eingeführt wurden. Alle bezogenen Darstellungen wurden anschließend nur durch eine Transformation der bereits bzgl. Θ bestimmten Größen ermittelt. Weiterhin wurde die Variation der Beziehungen von Beginn an in die Kontinuumsmechanik integriert und auf die Variation der Grundabbildungen $\tilde{\psi}$, $\tilde{\varphi}$ bzw. $\tilde{\nu}$ zurückgeführt.

Basierend auf diesen beiden Techniken konnte die Sensitivität der starken und schwachen Form der Gleichgewichtsbedingung in Beziehung gesetzt werden, d.h. es konnte analog zur Gleichgewichtsbedingung selbst der systematische Übergang zwischen beiden Formen für alle Betrachtungsweisen gezeigt werden. Eine wesentliche Erweiterung besteht dabei in der Angabe einer Bilinearform s der „tangentialen Sensitivität“, die analog zur tangentialen Steifigkeit aus der Variation der schwachen Form des Gleichgewichts ermittelt werden kann.

Die hergeleiteten Darstellungen können im Rahmen der diskreten Methoden effizient umgesetzt werden. Weiterhin sind die Grundlagen für den Einsatz adaptiver Methoden bzgl. der Geometrie und Verschiebung unter Verwendung von Sensitivitäten vorbereitet worden. Hinweise zu den diskreten Methoden sowie zur adaptiven Problemlösung sind in den folgenden Kapiteln enthalten.

Die Aufbereitung von Variationen und Sensitivitäten beschränkt sich in dieser Arbeit wesentlich auf die unterschiedlichen Gleichgewichtsaussagen und hierbei vor allem auf den Anteil der Spannungen bzw. der inneren virtuellen Arbeiten. Diese Beschränkung war zur Verdeutlichung der Zusammenhänge erforderlich. Zur Vervollständigung der Beziehungen müssen daher auch alle Anteile aus der Variation der äußeren Kräfte (Volumen- und Oberflächenkräfte) berücksichtigt werden.

Für die Behandlung komplexeren Materialverhaltens bzw. von Mehrfeldproblemen ist ebenfalls eine genauere Betrachtung der Hauptsätze der Thermodynamik und deren Sensitivitäten bzgl. Parametervariationen sinnvoll. Auf diese Thematik konnte in der vorliegenden Arbeit nicht eingegangen werden und eine detaillierte Beschreibung bleibt einer zukünftigen Darstellung vorbehalten.

Kapitel 4

Diskretisierungskonzepte für Geometrie und physikalische Größen

In diesem Kapitel werden Diskretisierungskonzepte für die *Geometrie* und die *Verschiebung* eingeführt und Hinweise zur adaptiven Verbesserung der gewählten Approximationen gegeben.

Die Bedeutung einer *Diskretisierung* und einer *adaptive Verfeinerung* im Rahmen der numerischen Strukturanalyse z.B. mittels der Finite Elemente Methode ist hinreichend bekannt. Demgegenüber ist die Verwendung dieser Begriffe in der Strukturoptimierung immer noch nicht allgemein gebräuchlich. Aus diesem Grund soll zu Beginn die eigene Sichtweise und der sich daraus ergebende Sprachgebrauch erläutert werden.

Die theoretischen Untersuchungen haben die Gleichwertigkeit der Geometrieabbildung $\tilde{\psi}$ und der Deformationsabbildung $\tilde{\varphi}$ ergeben. Die gesamte Darstellung vermeidet den sonst üblichen Schritt, d.h. die Deformation in expliziter Abhängigkeit von der Geometrie darzustellen. Wie bereits erläutert ist die implizite Abhängigkeit erst mit der Forderung nach Gleichgewicht gegeben. Die Kontinuumsmechanik ist somit (mindestens) eine *Zweifeldtheorie* der beiden unabhängigen Funktionen $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$, die je nach Wahl der Aufgabenstellung, d.h. des direkten oder inversen Problems, teilweise gegeben sind oder aus Variationsformulierungen bestimmt werden.

Damit ist die Grundstruktur der Problemstellung identisch, d.h. bei Vorgabe der Eingangsgrößen wird durch ein kontinuierliches Variationsproblem die (theoretische, analytische) Lösung charakterisiert. Dieses Variationsproblem kann in beiden Fällen nicht analytisch gelöst werden, sondern muß aufgrund der Komplexität mittels numerischer Verfahren im Rechner behandelt werden. Hierfür ist das kontinuierliche Variationsproblem durch Einführung endlichdimensionaler Approximationsräume zu diskretisieren. Hierbei geht die Variation einer kontinuierlichen Funktion in die Ableitung der diskreten Approximierenden nach den skalaren Designvariablen über.

Aus diesen Überlegungen folgt der Sprachgebrauch der *kontinuierlichen Geometriefunktion* $\tilde{\psi} \in \mathcal{G}$ als der exakten Lösung eines Variationsproblems zur Formoptimierung sowie der *diskreten Geometriefunktion* $\tilde{\psi}_g \in \mathcal{G}_g$ als der zugehörigen endlichdimensionalen Approximation. Entsprechendes gilt für alle anderen Zusammenhänge der Strukturanalyse, die sinngemäß auf die Strukturoptimierung, d.h. die Suche nach Geometriefunktionen, übertragen werden können.

Zunächst wird die Darstellung einer integrierten Behandlung der Kinematik in CAGD und FEM entsprechend Abschnitt 2.3 weiterentwickelt. Hierbei stehen zunächst die technischen Zusammenhänge und deren effiziente Realisation in den Programmsystemen im Vordergrund. Hieran schließen sich Überlegungen zur genauen Wahl der Approximationsräume und der Möglichkeit adaptiver Verfahren an.

Inhaltsangabe

4.1	Integrierte Darstellung der Kinematik II	73
4.1.1	Beziehung zwischen den Parametergebieten	73
4.1.2	Diskretisierung von Geometrie, Deformation, Verschiebung	75
4.1.3	Anmerkungen zur algorithmischen Umsetzung	78
4.2	Approximationsräume und Adaptivität	81
4.2.1	Anmerkungen zur Wahl der Approximationsräume	81
4.2.2	Anmerkungen zur Wahl der Verfeinerungsstrategien	82
4.2.3	Anmerkungen zur Wahl der Verfeinerungskriterien	83

4.1 Integrierte Darstellung der Kinematik II

Die Überlegungen im Abschnitt 2.3 werden an dieser Stelle aufgenommen und vertieft. Nach Einführung der Gradientenoperatoren im Kapitel 3 können die zugehörigen diskreten Berechnungen für die Strukturanalyse und die Sensitivitätsanalyse in Anlehnung an die theoretischen Vorgaben realisiert werden. Die hierzu notwendigen Hinweise finden sich hier.

Die theoretischen Untersuchungen zur Kontinuumsmechanik führten zu zwei unterschiedlichen Atlanten, die sich in der Wahl der Parametergebiete sowie der Abbildungen über den jeweiligen Parametergebieten unterscheiden. Diese Situation ist im Bild 2.13 beschrieben. Für die Approximation von Geometrie und Deformation (Verschiebung) sind daher Aussagen sowohl zur Überführung der Beziehungen zwischen den Parametergebieten als auch zu den Näherungsfunktionen über dem jeweiligen Parametergebiet zu treffen.

4.1.1 Beziehung zwischen den Parametergebieten

Im Rahmen der theoretische Darstellung der kontinuumsmechanischen Beziehungen ergeben sich für das Zusammenwirken der möglichen Parametergebiete T_Θ und T_ξ zwei wichtige Problemstellungen, d.h.

1. die Beschreibung der Koordinatentransformation zwischen den Gebieten T_Θ und T_ξ
2. und die Berechnung der zugehörigen lokalen Gradientenoperatoren.

Diese Fragestellungen sind unabhängig von der späteren Approximation von Geometrie und Deformation (Verschiebung). Die theoretischen Grundlagen werden durch die hier beschriebene Koordinatentransformation nicht beeinträchtigt.

4.1.1.1 Transformation der Parametergebiete

Die Vorteile der theoretischen Herleitung einer Entkoppelung von Geometrie und Verschiebung können nur gewinnbringend in die diskreten Methoden übertragen werden, wenn für beide Funktionen unabhängige Approximationen gewählt werden. Hierbei tritt neben dem CAGD-Parameterraum T_Θ auch der FEM-Parameterraum T_ξ auf. Die (lineare) Koordinatentransformation zwischen den Gebieten ist durch die Abbildung

$$\omega_{\xi,\Theta} : T_\xi \rightarrow T_\Theta \quad (4.1)$$

gegeben, siehe Bild 2.13. Die konkrete Transformationsvorschrift lautet

$$\Theta = \omega_{\xi,\Theta}(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \hat{\Theta}_3, \hat{\Theta}_4) = \sum_{I=1}^4 L_I(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \hat{\Theta}_I. \quad (4.2)$$

Hierbei sind L_I die trilinearen Funktionen der Koordinatentransformation und $\hat{\Theta}_I$ die lokalen Koordinatenvektoren der FE-Knoten im Parametergebiet T_Θ . Bei den Funktionen L_I handelt es sich um die üblichen trilinearen Ansatzfunktionen in der isoparametrischen FEM.

Komplexere Koordinatentransformationen werden hier nicht betrachtet. Die allgemeine Abbildungsvorschrift transformiert Koordinatentripel, als Beispiele werden jedoch nur Transformationen im Rahmen der zweidimensionalen FEM betrachtet.

Die Abbildungen $\tilde{\psi}$, $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\nu}$ können somit durch Abbildungskompositionen in der Form

$$\tilde{\psi}_e := \tilde{\psi} \circ \omega_{\xi, \Theta}, \quad \tilde{\varphi}_e := \tilde{\varphi} \circ \omega_{\xi, \Theta} \quad \text{und} \quad \tilde{\nu}_e := \tilde{\nu} \circ \omega_{\xi, \Theta}. \quad (4.3)$$

über dem FEM-Gebiet T_ξ dargestellt werden, d.h. alle kontinuumsmechanischen Beziehungen übertragen sich auf T_ξ . Zur Vereinfachung der Notation wird zukünftig einfach ω anstatt $\omega_{\xi, \Theta}$ geschrieben.

4.1.1.2 Gradientenoperator für das FEM-Parametergebiet

Durch die Einführung eines FEM-Parametergebietes T_ξ kann der lokale Gradient GRAD_ξ bzgl. ξ eingeführt werden. Für die unterschiedlichen lokalen Gradientenoperatoren wird jeweils GRAD mit einem Index entsprechend der lokalen Parameter Θ oder ξ , d.h. GRAD_Θ oder GRAD_ξ , geschrieben. Die Zusammenhänge sind anschaulich in Bild 4.1 dokumentiert.

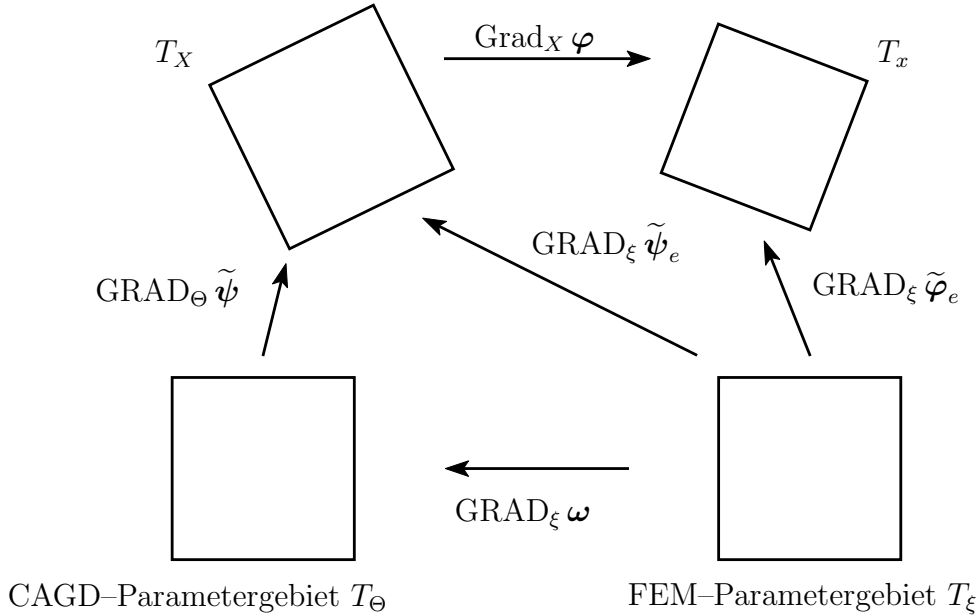


Bild 4.1: Beziehungen zwischen den Gradientenoperatoren

Der Gradient der Koordinatentransformation $\text{GRAD}_\xi \omega$ lautet

$$\mathbf{W} := \text{GRAD}_\xi \omega = W^{ij} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j, \quad (4.4)$$

wobei die Koeffizientenmatrix der Koordinatentransformation (Jacobi-Matrix) durch

$$[W^{ij}] = \left[\frac{\partial \Theta^i}{\partial \xi^j} \right] \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \Theta^i}{\partial \xi^j} = \sum_{I=1}^4 \frac{\partial L_I}{\partial \xi^j} \hat{\Theta}_I^i \quad (4.5)$$

gegeben ist. Damit können auch die lokalen Gradienten von $\tilde{\psi}_e$, $\tilde{\varphi}_e$ und $\tilde{\nu}_e$ bzgl. der Koordinaten ξ bestimmt werden, d.h. z.B. gilt für die Geometrieabbildung

$$\text{GRAD}_\xi \tilde{\psi}_e = \text{GRAD}_\Theta \tilde{\psi} \text{ GRAD}_\xi \omega. \quad (4.6)$$

Mit den Regeln für die Transformation und Variation der Volumenelemente zwischen den Gebieten, siehe Abschnitt A.3.6, folgt

$$dV_{\Theta} = W dV_{\xi} \quad \text{mit} \quad W = \det(\text{GRAD}_{\xi} \boldsymbol{\omega}) = \det [W^{ij}]. \quad (4.7)$$

Mit dieser Überführung gelten alle Beziehungen des letzten Kapitels unverändert auch für die Wahl des FE-Parametergebietes T_{ξ} . Damit ist auch eine Darstellung der kontinuumsmechanischen Beziehungen für das FEM-Parametergebiet T_{ξ} hergeleitet worden.

4.1.2 Diskretisierung von Geometrie, Deformation, Verschiebung

Die theoretischen Herleitungen zur Kontinuumsmechanik setzen unabhängige Geometrie- und Deformationsabbildungen voraus. Durch Verwendung der Einbettungseigenschaft der Konfigurationen im \mathbb{E}^3 kann auch eine Darstellung mittels der Verschiebungsabbildung $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ formuliert werden, d.h. $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$, wobei alle Darstellungen äquivalent sind.

Durch die notwendige Diskretisierung können jedoch nur für zwei Funktionen unabhängige Ansätze eingeführt werden. Die Möglichkeiten für die Wahl der Approximationen werden kurz diskutiert, ohne jedoch die jeweiligen Form- bzw. Ansatzfunktionen festzulegen bzw. die Dimension des Approximationsräume zu beschreiben. Diese Fragestellung wird im folgenden Abschnitt behandelt.

In der Literatur wird das Zusammenspiel zwischen Geometriebeschreibung und FEM-Diskretisierung unter anderem für die Berechnung gekrümmter Schalen, siehe z.B. [105, 76], die adaptive Netzverfeinerung, siehe z.B. [75] sowie im Rahmen der p-Methode, siehe z.B. [189, 62], diskutiert. Die Autoren verweisen auf die Notwendigkeit, die Wahl der Ansätze aufeinander abzustimmen, siehe hierzu auch Abschnitt 4.2.1.

4.1.2.1 Unabhängige Approximation von Geometrie und Deformation

Die unabhängige Approximation von Geometrie und Deformation bietet sich bei Betrachtung der theoretischen Herleitungen an, da sich hierbei die Ähnlichkeit zwischen direkten und inversen Problemen am deutlichsten zeigt. Praktisch treten jedoch im Grenzfall einer belastungsfreien Deformation Inkompatibilitäten zwischen den Konfigurationen auf.

Für den Fall eines verschwindenden Verschiebungszustandes, d.h. mit $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ergibt sich $\mathbf{x} = \mathbf{X}$. Bei einer Verwendung unterschiedlicher Approximationen für die unverformte und die verformte Konfiguration tritt ein Widerspruch auf, d.h. die unbelastete Konfiguration wird nicht eindeutig beschrieben.

Aus diesem Grund wird die Möglichkeit einer unabhängigen Approximation von Geometrie und Deformation verworfen.

4.1.2.2 Unabhängige Approximation von Geometrie und Verschiebung

In Anlehnung an die Darstellung im Abschnitt 2.3 können auf den lokalen Parametergebieten T_{Θ} bzw. T_{ξ} die jeweiligen diskreten Approximationen eingeführt werden.

Die Geometriefunktion $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ wird über dem Parametergebiet T_Θ durch Einführung der sogenannten *Formfunktionen* $M_\alpha(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$ und der Vektoren der Kontrollparameter $\hat{\mathbf{y}}_\alpha$ des aktuellen Patch approximiert, d.h. es gilt

$$\mathbf{X}_g = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_g(\boldsymbol{\Theta}, s) = \sum_{\alpha=1}^{m_g} M_\alpha(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \hat{\mathbf{y}}_\alpha(s). \quad (4.8)$$

Die Indizes bzgl. einer Geometrieapproximation werden in griechischen Buchstaben α, β, \dots angegeben. Die Vektoren $\hat{\mathbf{y}}_\alpha$ bezeichnen die lokalen Kontrollvektoren im betreffenden Patch, die auf Systemebene den globalen Vektor $\hat{\mathbf{Y}}$ bilden. Zur Verdeutlichung der approximierenden Eigenschaften der Geometrieabbildung wird gelegentlich dem Punkt \mathbf{X} ein Index g beigefügt, d.h. \mathbf{X}_g . Dieses entspricht der Praxis in der FEM, d.h. \mathbf{u}_h als Approximation für \mathbf{u} zu bezeichnen.

Damit ist die diskrete Geometriefunktion $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_g \in \mathcal{G}_g \subset \mathcal{G}$ eingeführt, wobei die lokalen Vektoren $\hat{\mathbf{y}}_\alpha$ in komplexer Form von anderen geometrischen Parametern s abhängen können. Zur Vereinfachung wird nur die funktionale Abhängigkeit von einem skalaren Parameter angeführt.

Die Koordinatentransformation $\boldsymbol{\omega}_{\xi, \Theta}$ zwischen ξ und Θ liefert $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{e,g} := \tilde{\boldsymbol{\psi}}_g \circ \boldsymbol{\omega}_{\xi, \Theta}$, d.h. eine über dem FEM-Parametergebiet T_ξ dargestellte diskrete CAGD-basierte Approximation der Geometrieabbildung $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_e$.

Mit diesem Ansatz ergibt sich die Variation der Geometrie in der Form

$$\delta \mathbf{X}_g = \delta \tilde{\boldsymbol{\psi}}_g(\boldsymbol{\Theta}, s) = \sum_{\alpha=1}^{m_g} M_\alpha(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \delta \hat{\mathbf{y}}_\alpha(s), \quad (4.9)$$

d.h. die parametrischen Formfunktionen bleiben unverändert und nur die Vektoren der Kontrollvariablen (Kontrollpunkte) sind zu variieren, d.h. nach den jeweiligen Designparametern s abzuleiten. Eine entsprechende Transformation auf T_ξ ist möglich.

Durch die Wahl der funktionalen Beziehung $\hat{\mathbf{y}}_\alpha(s)$ der lokalen Geometrieparameter von höherwertigen skalaren Parametern s wird das Designmodell festgelegt. Bei einer unabhängigen Wahl alle Parametervektoren ergibt sich der Designraum zum gesamten Ansatzraum, d.h. $\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_g$. Diese Situation ist jedoch eine Extremsituation und i.d.R. sollte der Designraum ein echter Unterraum mit Dimension $m_s \ll m_g$ sein.

Die Darstellung der (kontinuierlichen) Verschiebungsfunktion über dem FEM-Parameterraum T_ξ wird mit $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_e$ bezeichnet und ist somit nur die Transformation der Abbildung $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ vom Gebiet T_Θ auf das Gebiet T_ξ . Die Verschiebungsapproximation $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{e,h}$ über dem Parametergebiet T_ξ wird durch die sogenannten *Ansatzfunktionen* $N_I(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ und die lokalen Verschiebungsvektoren (Knotenverschiebungen) $\hat{\mathbf{v}}_I$ beschrieben, d.h.

$$\mathbf{u}_h = \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{e,h}(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{I=1}^{n_h} N_I(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \hat{\mathbf{v}}_I(t). \quad (4.10)$$

Damit gilt $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{e,h} \in \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$. Die Variation der Verschiebungsapproximation liefert somit

$$\delta \mathbf{u}_h = \sum_{I=1}^{n_h} N_I(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \delta \hat{\mathbf{v}}_I(t), \quad (4.11)$$

d.h. die Knotenverschiebungen werden variiert bzw. nach den Designvariablen abgeleitet. Die Indizes bzgl. einer Verschiebungsapproximation werden in großen lateinischen Buchstaben I, J, K, \dots angegeben. Die Vektoren $\hat{\mathbf{v}}_I$ bezeichnen die lokalen Knotenverschiebungsvektoren des betreffenden Elementes, die auf Systemebene den globalen Verschiebungsvektor $\hat{\mathbf{V}}$ ergeben.

Mit den obigen Beziehungen ist formal die Struktur der beiden Approximationen beschrieben. Eine Konkretisierung sowie die Beziehung zwischen den gewählten Funktionen, den unterschiedlichen lokalen Parametern $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$ bzw. (ξ^1, ξ^2, ξ^3) sowie den Parametergebieten ist noch näher anzugeben. Die wesentlichen Anforderungen zur Wahl der jeweiligen Ansatzräume werden im Abschnitt 4.2 kurz zusammengestellt.

4.1.2.3 Der Sonderfall des isoparametrischen Konzeptes

Beim isoparametrischen Konzept werden Geometrie und Verschiebung über dem gleichen Parametergebiet mit den gleichen Ansatzfunktionen beschrieben, siehe Abschnitt 2.2.2. Hierbei befinden sich die FEM-Knoten auf der durch die CAGD-Methode beschriebenen geometrischen Linien und Flächen. Formal kann diese Vereinfachung aus Gleichung (4.8) hergeleitet werden, wobei die Koordinatentransformation nur die lokalen Knotenkoordinaten erfaßt, d.h.

$$\mathbf{X}_h = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{e,g,h}(\boldsymbol{\xi}, s) := \sum_{I=1}^4 L_I(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \tilde{\boldsymbol{\psi}}_g(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_I, s) = \sum_{I=1}^4 L_I(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \hat{\mathbf{X}}_I(s).$$

Wesentlicher Nachteil dieser Vorgehensweise liegt in der gleichzeitigen Approximation beider Funktionen durch eine Methode, d.h. eine unabhängige Verfeinerung nur einer Funktion ist hierbei nicht möglich. D.h. eine sinnvolle Verfeinerung des Verschiebungszustandes zieht eine mitunter sinnlose Verfeinerung des Geometriemodells nach sich. Dieses ist insbesondere dann der Fall, wenn nach der Erstellung der FE-Netze die CAGD-Geometrieinformation verworfen wird.

Im Rahmen der isoparametrischen FEM werden weiterhin die Ansatzfunktionen gleichgesetzt. Genauer betrachtet bedeutet dies, daß die bilinearen Funktionen L_I der (linearen) Koordinatentransformation mit den lokalen Ansatzfunktionen N_I übereinstimmen.

Zusammenfassend gelten dann für die isoparametrische FEM die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{e,g,h}(\boldsymbol{\xi}, s) = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \hat{\mathbf{X}}_I(s), \\ \mathbf{u} &= \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{e,h}(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \hat{\mathbf{v}}_I(t), \\ \mathbf{x} &= \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{e,h}(\boldsymbol{\xi}, s, t) = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \hat{\mathbf{x}}_I(s, t), \end{aligned}$$

wobei für die Knotenkoordinaten der deformierten Konfiguration die Beziehung

$$\hat{\mathbf{x}}_I(s, t) := \hat{\mathbf{X}}_I(s) + \hat{\mathbf{u}}_I(t)$$

gilt.

4.1.3 Anmerkungen zur algorithmischen Umsetzung

Einige wesentliche Besonderheiten zum integrierten Konzept wurden im Abschnitt 2.3 bzw. in den bisherigen Abschnitten dieses Kapitels angegeben. Eine Kurzübersicht über das Gesamtkonzept folgt an dieser Stelle.

4.1.3.1 Die Behandlung der Geometrie

Die folgenden Schritte müssen innerhalb der CAGD-Modellierung vollzogen werden.

1. Die Modellierung erfolgt auf der Basis einer B-Rep-Beschreibung, d.h. es werden Punkte, Linien, Flächen, Volumina mit den jeweiligen Abhängigkeiten eingeführt.
2. Die Säuberung der Geometriebeschreibung wird durchgeführt, d.h. es ergibt sich eine Konstruktion ohne sogenannte T-Stöße. Weiterhin werden eventuell vorhandene Löcher bzw. Lücken in der Geometriebeschreibung beseitigt, die aus einer nicht vollständigen Überdeckung des Körpers heraus entstanden sind.
3. Es wird eine Liste der geometrischen Parameter $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \dots)_p$ für jeden Patch p aufgebaut. In der FEM wäre dies die Liste aller Knoten am Element. Weiterhin existiert eine Liste aller geometrischen Parameter $(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_3, \dots)$ auf der Systemebene. In der FEM wäre dies die Liste aller Knoten mit zugehörigen Koordinaten. Für einen beliebigen Punkt \mathbf{X} gilt somit

$$\mathbf{X} = \tilde{\psi}_g(\Theta; \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_3, \dots),$$

Somit entsteht eine Beschreibung der Geometrie im Raum \mathcal{G}_G mit Dimension m_g .

4. Die Geometrievariation eines beliebigen Punktes \mathbf{X} wird durch Ableitung nach den geometrischen Parametern \hat{Y}_i berechnet, d.h.

$$\delta \mathbf{X} = \frac{\partial \tilde{\psi}_g}{\partial \hat{Y}_i} \delta \hat{Y}_i.$$

Bei Verwendung einer Matrixschreibweise gilt $\delta \underline{X} = \underline{A} \delta \underline{\hat{Y}}$, wobei $\delta \underline{X} \in \mathbb{R}^3$ die Spaltenmatrix der Koordinatenvariation auf Systemebene dargestellt. Weiterhin ist $\delta \underline{\hat{Y}} \in \mathbb{R}^{m_g}$ die globale Spaltenmatrix der geometrischen Freiheitsgradvariationen und $\underline{A} \in \mathbb{R}^{3, m_g}$ die Matrix der Koordinatenableitungen. Eine entsprechende Darstellung kann für die Beziehungen auf der Patchebene angegeben werden.

5. Die Berechnung von Tangential- und Normalenvektoren an gekrümmte Flächen im Raum ist ein Teil der Grundfunktionalität jedes CAGD-Programmkernes. Im Sprachgebrauch der Kontinuumsmechanik (siehe Kapitel 3) bedeutet dieses die Berechnung der konvektiven Basisvektoren \mathbf{G}_i . Die zugehörigen kontravarianten Basisvektoren sind hieraus mit $\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j$ leicht zu berechnen. Die Komponenten der Basisvektoren \mathbf{G}_i belegen zeilenweise die sogenannte *Jacobi-Matrix* der Koordinatentransformation zwischen Θ und \mathbf{X} . Zur Berechnung von \mathbf{G}^j ist die Inverse zu bestimmen.
6. Die Variation der Basisvektoren ergibt sich mit der Vertauschbarkeit von partieller Ableitung nach Θ^i bzw. \hat{Y}_j zu

$$\delta \mathbf{G}_i = \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_g}{\partial \Theta^i \partial \hat{Y}_j} \delta \hat{Y}_j.$$

In Matrixschreibweise gilt dann $\delta \underline{G}_i = \underline{B}_i \delta \hat{Y}$.

7. In analoger Form erhält man für die Variation der kontravarianten Vektoren die Aussage $\delta \underline{G}^j = \underline{B}^j \delta \hat{Y}$.

Zusammenfassend bedeutet dies, daß mit der CAGD-Geometriebeschreibung die Auswertungen für \mathbf{X} , \mathbf{G}_i , \mathbf{G}^j in jedem Punkt Θ des Patches durchgeführt werden müssen. Darüberhinaus werden für die Strukturoptimierung die zugehörigen Variationen bzgl. der Geometrieparameter erforderlich, d.h. es sind die Beziehungen

$$\delta \underline{X} = \underline{A} \delta \hat{Y} \quad \text{und} \quad \delta \underline{G}_i = \underline{B}_i \delta \hat{Y} \quad \text{sowie} \quad \delta \underline{G}^i = \underline{B}^i \delta \hat{Y}$$

zu berechnen. Diese Auswertungen können auf der Ebene des Geometriepatches bei Kenntnis der lokalen Koordinaten Θ problemlos durchgeführt werden. Die lokalen Parameter Θ sind im Rahmen der sogenannten *mapped mapping* Technik für die Netzgenerierung in direkter Form vorhanden. Bei den freien Vernetzern müssen diese Informationen im Rahmen einer Nachlaufberechnung (lokale Iteration) eigens ermittelt werden. Die Beziehungen zwischen finitem Element und zugehörigem Geometriepatch können während der Netzgenerierung ermittelt werden und müssen erst mit einer erneuten (adaptiven) Verfeinerung angeglichen werden.

Die Verwendung dieser Informationen in der Strukturanalyse sowie der Strukturoptimierung wird später erläutert.

4.1.3.2 Die Behandlung der Verschiebung bzw. der Deformation

Die wichtigsten Hinweise zur Behandlung der Verschiebung innerhalb der FEM werden kurz dargestellt. Die nachfolgenden Strukturen müssen innerhalb der FE-Methode realisiert werden, um eine unabhängige Approximation von Geometrie und Verschiebung auf der Elementebene effektiv angeben zu können.

1. Für die numerische Behandlung von Variationsaufgaben ist ein approximierender Ansatz für die Verschiebungen (und mit $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ auch für die Deformation) zu wählen. Dieser Ansatz entspricht einer Konkretisierung des Atlanten \mathcal{A} , d.h. er besteht aus der Wahl lokaler Umgebungen sowie der hierauf definierten Abbildungen. An dieser Stelle wird die übliche Finite Elemente Methode (nur der Verschiebungsteil) betrachtet.
2. Entsprechend der Grundthematik wird an dieser Stelle die Zerlegung des Parameterraumes eines Patches betrachtet. Für jeden Patch wird eine Parameterisierung $\Theta \in [0, 1]^3$ vorausgesetzt. Zur Vereinfachung der Darstellung wird weiterhin angenommen, daß jedes finite Element eindeutig in einem Patch liegt. Die lokalen Umgebungen, d.h. die finiten Elemente, beschreiben jeweils eine Untermenge $\Omega_{\Theta,j}^e$ im Parameterraum T_Θ des zugehörigen CAGD-Patches.
3. Eine bilineare Koordinatentransformation $\omega_{\xi,\Theta}$ bildet das Einheitsparametergebiet $T_\xi = [-1, +1]^3$ in das Elementgebiet $\Omega_{\Theta,j}^e$ ab. Unter Verwendung der Knotenkoordinaten $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \hat{\Theta}_3, \hat{\Theta}_4$ der Eckpunkte sowie der linearen Abbildungen L_I lautet die Koordinatentransformation

$$\Theta = \omega_{\xi,\Theta}(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \hat{\Theta}_3, \hat{\Theta}_4) = \sum_{I=1}^4 L_I(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \hat{\Theta}_I. \quad (4.12)$$

4. Für jedes Element ist die Transformation nur von der Wahl des FE-Netzes abhängig und muß bei einer Netzverfeinerung erneut aufbereitet werden. Ansonsten ist sie für die nichtlineare Strukturmechanik bzw. die Strukturoptimierung konstant. Dieses kann für die Berechnung und Abspeicherung der im weiteren erforderlichen Jacobi-Matrix von $\omega_{\xi, \Theta}$ hilfreich sein.
5. Die Approximation des Verschiebungszustandes kann auf dem Standardgebiet T_ξ eingeführt werden. Für die erforderlichen Ableitungen und Gradienten werden die eingeführten Abbildungen komponiert. Hierbei können alle geometrischen Informationen unabhängig von der speziellen FE-Formulierung vorgehalten werden. Als einzige Voraussetzung ist die Kenntnis des numerischen Integrationsverfahren erforderlich, da sämtliche Auswertungen an den Gaußpunkten erfolgen.
6. Die Verwendung des jeweiligen Geometriemodells kann innerhalb der Elemente durch geeignete Schnittstellenroutinen effizient organisiert werden. Es wird jeweils der lokale Gradient der Verschiebungsfunktion sowie der lokale Gradient der jeweiligen Geometriefunktion bezogen auf die lokalen Koordinaten ξ des FE-Parametergebietes T_ξ ausgewertet. Die zugehörige Koeffizientenmatrix des Geometriegradients muß dann invertiert werden. Dieser Aufwand ist für jeden Integrationspunkt für jedes Netz einmal durchzuführen und nur bei Neuvernetzung bzw. Geometrieänderung erneut durchzuführen. Für Untersuchungen in den Größen der verformten Momentankonfiguration müssen die notwendigen lokalen Gradienten aus den CAGD- oder FEM-Modellen der Geometrie sowie der Verschiebung ermittelt werden. Berechnet werden muß also $\text{GRAD}_\xi \mathbf{X} = \text{GRAD}_\xi \tilde{\psi}_e$ bzw. $\text{GRAD}_\xi \mathbf{x} = \text{GRAD}_\xi \tilde{\psi}_e + \text{GRAD}_\xi \tilde{\nu}_e$. Bei der letzteren Beziehung tritt ein Unterschied zur isoparametrischen FEM auf, d.h. es sind die Gradienten zu addieren und erst dann ist die Inverse zu bestimmen.

Diese Vorgehensweise setzt wesentlich die Existenz des Parametergebietes T_Θ eines Geometriepatches voraus. Im Rahmen der CAGD-Methode ist diese Parametrisierung (zumindestens bei einer B-Rep-Darstellung) vorhanden. Für die FEM geht die Beziehung zwischen FE-Knoten \mathbf{X} und zugehörigem lokalen Koordinaten Θ durch die Verwendung der Freivernetzer im Gegensatz zu den *mapped meshing techniques* verloren und muß im Rahmen einer Nachlaufberechnung (lokale Iteration) ermittelt werden. Diese Informationen werden üblicherweise in kommerziellen Softwareumgebungen nicht zur Verfügung gestellt.

4.2 Approximationsräume und Adaptivität

Dieser Abschnitt enthält einige Bemerkungen zur Wahl der Form- und Ansatzfunktionen für Geometrie und Verschiebung sowie Erläuterungen zum Potential adaptiver Methoden in der Strukturanalyse und -optimierung.

Die Überlegungen basieren auf der folgenden Strukturierung der adaptiven Veränderung beider Modelle:

1. Wahl der Approximationsräume

Die Diskretisierung von Geometrie bzw. Verschiebung wird durch die Wahl eines speziellen Atlanten vorgenommen, d.h. die Approximation besteht aus der Wahl der lokalen Umgebungen (CAGD-Patches bzw. FEM-Elementnetz) sowie der in den einzelnen Patches bzw. Elementen eingeführten Form- bzw. Ansatzfunktionen.

2. Wahl der Verfeinerungsstrategie

Für die Anwendung adaptiver Methoden muß zunächst die Strategie der Modellveränderung festgelegt werden, d.h. die technischen Details für den Übergang zwischen zwei Atlanten. Hierbei sind sowohl Verfeinerung bzw. Vergrößerung der (CAGD- bzw. FEM)-Netze und die Veränderung der Form- und Ansatzfunktionen in jedem Patch bzw. Element zu berücksichtigen. Darüberhinaus kann auch eine Veränderung der Zeitdiskretisierung erforderlich sein. Der Transfer der bereits auf einem Modell berechneten Größen auf das nachfolgende veränderte Modell erfordert insbesondere bei geschichtsabhängigen Prozessen eine genauere Betrachtung. Als anspruchsvollste Art der Verfeinerungsstrategie ist die Veränderung des zugrundeliegenden mathematischen Modells anzusehen.

3. Wahl der Verfeinerungskriterien

Entscheidend für den Erfolg der adaptiven Berechnung ist die Bereitstellung geeigneter Verfeinerungskriterien, die Hinweise auf die effektivste Wahl des diskreten Modells geben, um eine gewünschte Genauigkeit des Ergebnisses garantiert sicherzustellen. Diese Problemstellung ist für Fragen der FEM-Netzverfeinerung seit Jahren ein großes Forschungsgebiet, welches sowohl von Ingenieuren als auch von Mathematikern bearbeitet wird. Für Fragen der Optimierung (und hier insbesondere der Strukturoptimierung) liegen erst anfängliche Ergebnisse vor.

4.2.1 Anmerkungen zur Wahl der Approximationsräume

4.2.1.1 Approximation und Variation der Verschiebung

Im Rahmen der FEM werden in zahlreichen Arbeiten die Ansatzräume unterschiedlichster Formulierungen und Strategien diskutiert. Eine Darstellung an dieser Stelle wäre unvollständig und sollte deshalb auch unterbleiben. Grundsätzlich ist jedoch festzustellen, daß die Anzahl der Freiheitsgrade sehr groß ist und i.d.R. nur durch die Rechnergröße bzw. das Erreichen der gewünschten Genauigkeit beschränkt ist. Für die Variation der Verschiebung müssen keine besonderen Bedingungen erfüllt werden. Eine Ausnahme mag die Sicherstellung positiver Jacobideterminanten des materiellen Deformationsgradienten im Rahmen iterativer nichtlinearer Prozesse sein. Hier kann die Wahl der Ansatzfunktion direkten Einfluß

auf die Empfindlichkeit der Elemente bei großen Verschiebungszuwächsen (große Schritte im Newton-Verfahren) haben. Der Grund hierfür liegt darin, daß die schwache Form für alle Testfunktionen $\boldsymbol{\eta}_h \in \mathcal{V}_h$ erfüllt sein muß, d.h. es wird keine spezielle Richtung in \mathcal{V}_h vorgegeben.

4.2.1.2 Approximation und Variation der Geometrie

Die CAGD-Methoden sind in der Literatur hinreichend beschrieben und sollen an dieser Stelle nur qualitativ im Vergleich zur FEM betrachtet werden. Im Gegensatz zur FEM (dort die Ansatzfunktionen) ist die Komplexität der (CAGD-) Formfunktionen wesentlich größer. In der FEM werden i.d.R. einfache (polynomiale) Ansatzfunktionen geringer Ordnung eingesetzt. Im Gegensatz hierzu verwendet das CAGD Formfunktionen höherer Ordnung wie z.B. die *NURBS* oder *trimmed surfaces*.

Weiterhin hat die automatische Strukturoptimierung gezeigt, daß ein Einsatz der FE-Knotenkoordinaten als Designvariablen ungeeignet ist und durch eine höhere Regularität der geometrischen Form ersetzt werden sollte, siehe z.B. [142, 146]. Dieses wurde durch den Einsatz der CAGD-Modelle in der Formoptimierung erreicht. Hierdurch ist jedoch nur die Grenze der Anwendung herausgeschoben worden, d.h. die dort beobachteten Phänomene treten jetzt im Rahmen ungeeignet gewählter CAGD-Patches auf. Ein Beispiel hierfür ist mit dem *hierarchischen Optimierungsmodell* in [94, 97] angegeben worden.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Modellierung der Geometrie durch eine kleine Anzahl aussagekräftiger Formfunktionen sehr wertvoll für die automatische Strukturoptimierung ist. Zum einen wird hierdurch die Anzahl der Designvariablen im Rahmen der NLP-Algorithmen und somit die Rechenzeit begrenzt, zum anderen können manche Designänderungen erst damit erreicht werden. Die Konvergenz des Verfahrens (gegen ein ingenieurmäßig sinnvolles lokales Minimum) ist aufgrund der vielen lokalen Minima nicht immer sichergestellt.

4.2.1.3 Beziehungen zwischen den Approximationen

Die Kopplung von Geometriemodellen und der FE-Methode wird insbesondere in der numerischen Untersuchung von Schalen seit Jahren praktiziert, siehe z.B. [105, 189]. Es wird berichtet, daß bei glatten Flächen in der Regel keine numerischen Probleme auftreten, d.h. die Kopplung mit grundsätzlich unterschiedlichen Ansätzen ohne Schwierigkeiten erfolgen kann. Ist die CAGD-Geometrie jedoch nicht hinreichend glatt, so ist die bekannte Approximation der Geometrie durch ein isoparametrisches Vorgehen numerisch stabiler. Eine mathematische Begründung für dieses Phänomen ist bisher meines Wissens nach noch nicht bekannt.

4.2.2 Anmerkungen zur Wahl der Verfeinerungsstrategien

Die Verfeinerungsstrategien im Rahmen der FEM sind aus der Literatur bekannt.

Im Rahmen der Strukturoptimierung müssen zusätzlich zur FEM-Netzverfeinerung (bzw. auch Netzvergrößerung) sowie der Zeitschrittsteuerung die Verfeinerungsstrategien für das Geometrie- bzw. das Optimierungsmodell betrachtet werden. Hinweise hierzu enthalten die Arbeiten [94, 95, 96, 97], die kurz zusammengefaßt werden.

4.2.2.1 Veränderung des Geometriemodells

Hiermit ist die durch adaptive Kriterien gesteuerte Erweiterung oder Beschränkung der Geometrieapproximation bzgl. der geometrischen Designvariablen gemeint.

- Technische Schwierigkeiten entstehen, wenn durch die Dimensionserweiterung zusätzlicher Speicherplatzbedarf entsteht bzw. sich die Struktur der Hessematrix bzw. deren BFGS-Approximation ändert. Abhilfe ist durch nichtaktive Dummyvariablen in ausreichender Anzahl möglich. Hierdurch wird der Zeitbedarf im NLP-Problem nicht erhöht.
- Für die Veränderung des Geometriemodells sind gestaltserhaltende alternative Beschreibungen mit höheren Freiwerten möglich, siehe [94, §5.1]. Damit kann eine adaptive Erweiterung des Modells ohne Unstetigkeitssprung in der Form zwischen aufeinanderfolgenden Modellen erfolgen.
- Ein wichtiger Testraum für mögliche Erweiterungen des CAGD-Designraumes stellt die vorhandene FEM-Geometriebeschreibung dar. Durch Untersuchung möglicher FEM-Geometrieänderungen können sinnvolle CAGD-Designmodelle eingeführt werden.

4.2.2.2 Veränderung des Optimierungsmodells

Hiermit ist die durch adaptive Kriterien gesteuerte Veränderung der Lagrangefunktion hinsichtlich der zu berücksichtigenden Nebenbedingungen und evtl. Zielfunktionsanteile gemeint.

Die Veränderung der Geometrie im Verlauf einer Optimierungsberechnung kann zur Modifikation der Tragwirkung einer Struktur führen. Hierdurch werden auch die relevanten Nebenbedingungen beeinflusst, d.h. Spannungsbeschränkungen in bisher nicht betrachteten Bereichen sowie evtl. Stabilitätsphänomene treten erst während der Berechnung auf. Eine adaptive Kontrolle des Optimierungsmodells berücksichtigt diese Effekte.

4.2.3 Anmerkungen zur Wahl der Verfeinerungskriterien

Zur Untersuchung von Adaptionskriterien werden die Beziehungen im Abschnitt 3.6 benutzt. Die Stationarität $\nabla \mathcal{L} = 0$ der *Lagrangefunktion* gemäß Gleichung (3.102), d.h. von

$$\mathcal{L}_\Theta(\tilde{\lambda}; \tilde{\psi}, \tilde{\nu}) := \tilde{\varphi}_\Theta(\tilde{\psi}, \tilde{\nu}) + \mathcal{R}_\Theta(\tilde{\lambda}; \tilde{\psi}, \tilde{\nu}),$$

stellt eine notwendige Optimalitätsbedingung dar. Die Lösung wird durch das Tripel $(\tilde{\lambda}, \tilde{\psi}, \tilde{\nu})$ bezeichnet, das die auf dem Parametergebiet T_Θ eingeführten Abbildungen für die Lagrange-Multiplikatoren, Geometrie und Verschiebung enthält.

Die numerische Untersuchung kann die obige Bedingung nur approximativ erfüllen, wobei sowohl eine Verbesserung des Geometriemodells (CAGD, Abbildung $\tilde{\psi}$) als auch des Berechnungsmodells (FEM, Abbildung $\tilde{\nu}$) betrachtet werden muß.

4.2.3.1 Modellprobleme für den Einsatz adaptiver Methoden

Für die Betrachtung möglicher Adaptionskriterien ist die Einführung von vier Modellproblemen für die Strukturoptimierung von Interesse. Angegeben werden dabei jeweils die lokalen Geometrie- und Verschiebungsabbildungen in den jeweils gültigen Approximationsräumen. Durch die Einführung der lokal-konvektiven Betrachtungsweise wird die optimale Geometrie durch die Angabe der zugehörigen Abbildung $\tilde{\psi} \in \mathcal{G}_g$ beschrieben. Auch hier zeigt sich die Ähnlichkeit zur Formulierung bzgl. der Verschiebungslösung $\tilde{\nu} \in \mathcal{V}_h$ in der FEM.

AM-1:	kontinuierliche	Geometrie	$\tilde{\psi} \in \mathcal{G}$	kontinuierliche	Verschiebung	$\tilde{\nu} \in \mathcal{V}$
AM-2:	kontinuierliche	Geometrie	$\tilde{\psi} \in \mathcal{G}$	diskrete	Verschiebung	$\tilde{\nu}_h \in \mathcal{V}_h$
AM-3:	diskrete	Geometrie	$\tilde{\psi}_g \in \mathcal{G}_g$	kontinuierliche	Verschiebung	$\tilde{\nu} \in \mathcal{V}$
AM-4:	diskrete	Geometrie	$\tilde{\psi}_g \in \mathcal{G}_g$	diskrete	Verschiebung	$\tilde{\nu}_h \in \mathcal{V}_h$

Für diese vier unterschiedlichen Situationen können die folgenden Konvergenzfragen von Bedeutung sein. Hierzu wird die Abhängigkeit einer beliebigen Ergebnisfunktion α , z.B. die Zielfunktion $\tilde{\varphi}_\Theta$, vom Tripel $(\tilde{\lambda}, \tilde{\psi}, \tilde{\nu})$ betrachtet.

Die interessierenden Modellprobleme lauten.

- **Modellproblem 1:** Konvergenz von (AM-3) in (AM-1)
 Betrachtet werden Problemstellungen, die bzgl. der Strukturanalyse exakt lösbar sind, d.h. bei der keine Raumdiskretisierungsfehler z.B. durch die FE-Methode auftreten. Dann ist es von Interesse, wie sehr die Lösung des diskreten Problems (AM-3), d.h. der diskreten optimalen Form $\tilde{\psi}_g \in \mathcal{G}_g \subset \mathcal{G}$, von der Lösung des kontinuierlichen Problems (AM-1), d.h. von $\tilde{\psi} \in \mathcal{G}$, abweicht. Die Abweichung gibt hierbei nur den Fehler $\|\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_g\|$ in einer geeigneten Norm an.
 Weiterhin interessiert der Fehler in den Verschiebungslösungen, d.h. $\|\mathbf{u}(\tilde{\psi}) - \mathbf{u}(\tilde{\psi}_g)\|$ sowie der Fehler einer Ergebnisfunktion bzw. Zielfunktion $\|\alpha(\mathbf{u}(\tilde{\psi})) - \alpha(\mathbf{u}(\tilde{\psi}_g))\|$.
- **Modellproblem 2:** Konvergenz von (AM-2) in (AM-1)
 Das gleiche Optimum $\tilde{\psi} \in \mathcal{G}$ kann durch den Grenzübergang bei einem numerischen FE-Diskretisierungsverfahren auftreten, d.h. die approximierende Lösung $(\tilde{\lambda}_h, \tilde{\psi}_h, \tilde{\nu}_h)$ für das Approximationsmodell (AM-2) geht durch entsprechende (adaptive) Netzverfeinerung im Grenzprozeß in die kontinuierliche Lösung von (AM-1), d.h. in $(\tilde{\lambda}, \tilde{\psi}, \tilde{\nu})$, über.
- **Modellproblem 3:** Konvergenz von (AM-4) in (AM-3)
 Die letzte Fragestellung kann natürlich auch bzgl. eines beliebigen Unterraumes $\mathcal{G}_g \subset \mathcal{G}$ betrachtet werden.
- **Modellproblem 4:** Konvergenz von (AM-4) in (AM-1)
 Die letzte Fragestellung ist die Konvergenz der mittels einer approximierten Geometrie und einer approximierenden FE-Methode berechneten Lösung $(\tilde{\lambda}_{g,h}, \tilde{\psi}_{g,h}, \tilde{\nu}_h)$ gegen die kontinuierliche Lösung $(\tilde{\lambda}, \tilde{\psi}, \tilde{\nu})$. Diese Fragestellung ist komplex, spiegelt aber die Notwendigkeit der Ingenieurpraxis wider.

Der Wert der Zielfunktion $\tilde{\varphi}$ sowie das Tripel $(\tilde{\lambda}, \tilde{\psi}, \tilde{\nu})$ stellen die Lösung des Optimierungsproblems dar. Für die Güte der Lösung können vielfältige Maße (Normen) betrachtet werden, wobei grundsätzlich auch beliebige Ergebnisfunktion α auftreten können.

4.2.3.2 Adaptionskriterien für Optimierungsprobleme

Die mathematische Literatur weist unzählige Arbeiten zur FE-Adaptivität bei linearen bzw. nichtlinearen Strukturanalyseproblemen auf. Optimierungsprobleme sind demgegenüber komplexer und werden erst seit kürzerem in der mathematischen Literatur betrachtet, siehe z.B. [161, 45] sowie die darin enthaltenen weiteren Literaturhinweise. Die betrachteten Problemklassen behandeln Optimierungsprobleme und liefern für einfache exemplarische Modellprobleme a-priori und a-posteriori Fehlerschätzer.

4.2.3.3 Vorschläge für Adaptionskriterien zur Strukturoptimierung

Seitens der Ingenieure wurden *heuristische Fehlerindikatoren* angegeben und im Rahmen bestehender Optimierungsprogramme auf größere Beispielprobleme angewendet, siehe z.B. Falk [94], Oñate, Bugeda [64], Banichuk et al. [11, 12] sowie Ramm et al. für die Anwendung auf Topologieoptimierungsprobleme, siehe die Angaben in [165]. Auf eine detaillierte Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet.

Kapitel 5

Sensitivitätsanalyse ausgewählter Problemklassen der nichtlinearen Strukturmechanik

In diesem Kapitel werden im ersten Abschnitt grundlegende Hinweise zur Struktur der Sensitivitätsanalyse gemacht. Besonderer Wert wird dabei auf die Bereitstellung der gegenüber der Strukturanalyse notwendigen Zusatzinformationen (wie z.B. der tangentialen Sensitivitätsmatrix) gelegt.

Der zweite Abschnitt führt einige Hinweise zur Implementation der Methodik auf und verweist auf weitere entstandene Veröffentlichungen.

Der Abschnitt 5.3 widmet sich ausführlich dem ausgewählten Modellproblem, d.h. der Sensitivitätsanalyse in der Schädigungsmechanik.

Inhaltsangabe

5.1	Grundstruktur der Sensitivitätsanalyse	89
5.1.1	Grundlagen	89
5.1.2	Berechnung der Elementbeiträge zur Sensitivität	90
5.1.3	Bereitstellung der globalen Sensitivitätsmatrix	91
5.1.4	Berechnungsstrategien für die Sensitivitätsanalyse	91
5.1.5	Numerische Experimente	92
5.1.6	Sensitivität der Verschiebungen und Spannungen	94
5.1.7	Zusammenfassung und Ausblick	97
5.2	Hinweise zur Implementation	98
5.2.1	Kontrolle der entwickelten Sensitivitäten	98
5.2.2	Weitere Problemstellungen und Lösungsverfahren	99
5.3	Sensitivitätsanalyse in der Schädigungsmechanik	100
5.3.1	Finite Elastizität mit isotroper Schädigung	100
5.3.2	Sensitivitätsanalyse für Schädigung	102

5.3.3	Hinweise zur numerischen Umsetzung	105
5.3.4	Numerische Experimente	108
5.3.5	Zusammenfassung und Ausblick	114

5.1 Grundstruktur der Sensitivitätsanalyse

Die theoretischen Grundlagen zur Sensitivitätsanalyse wurden ausführlich hergeleitet und führten zur Einführung von Linear- und Bilinearformen im Abschnitt 3.6.3. Am Beispiel der linearisierten Elastizitätstheorie im statischen Gleichgewicht werden die zugehörigen diskreten Formulierungen angegeben sowie die Algorithmen der Sensitivitätsanalyse erläutert.

5.1.1 Grundlagen

Die Darstellung basiert auf den Angaben im Abschnitt 3.6.3, d.h. der Kenntnis der Variation der schwachen Form des Gleichgewichts $\mathcal{R} = 0$ sowie der Variation einer beliebigen Zielfunktion oder Nebenbedingung φ_i , d.h.

$$\delta\mathcal{R} = \delta_X\mathcal{R} + \delta_u\mathcal{R} = s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X}) + k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}) = 0 \quad (5.1)$$

$$\delta\varphi_i = \delta_X\varphi_i + \delta_u\varphi_i = a_i(\delta\mathbf{X}) + b_i(\delta\mathbf{u}). \quad (5.2)$$

Hierbei beschreibt $\boldsymbol{\eta}$ eine Testfunktion und $\delta\mathbf{X}$ bzw. $\delta\mathbf{u}$ sind die Geometrievariation und die sich hieraus ergebende Variation des Verschiebungszustandes. Die Bilinearformen $k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u})$ und $s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X})$ beschreiben die tangente Steifigkeit ('tangent stiffness') bzw. die tangente Geometriesensitivität ('tangent sensitivity'). Analog sind $a_i(\delta\mathbf{X})$ und $b_i(\delta\mathbf{u})$ Linearformen, die sich aus der Variation einer Zielfunktion bzw. Nebenbedingung φ_i bzgl. Geometrie und Verschiebung ergeben.

Diese Zusammenhänge sind fundamental und in der Literatur hinreichend bekannt. Trotzdem treten in der praktischen Durchführung die folgenden Probleme auf.

1. Wie können die Linear- und Bilinearformen, d.h. $a_i(\delta\mathbf{X})$, $b_i(\delta\mathbf{u})$ und $s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X})$, $k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u})$, möglichst effizient im Rahmen eines allgemeingültigen Zuganges auch für komplexes nichtlineares Material- und Strukturverhalten hergeleitet werden?
2. Welche Art der Diskretisierung ist bzgl. Geometrie und Verschiebung vorzunehmen?

Diese grundsätzlichen Fragen wurden in den bisherigen Kapiteln dieser Arbeit behandelt.

Für das Beispiel isoparametrischer Elemente erhält man den globalen Knotenverschiebungsvektor $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{nu}$ und den Vektor der Knotenkoordinaten $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{nx}$, welche die diskreten Approximationen von Verschiebung und Geometrie beschreiben. Hierbei sind nu und nx die Dimensionen der eingeführten Approximationsräume.

Für jede gegebene Diskretisierung müssen die Elementbeiträge der Steifigkeit \mathbf{k}_e und der Sensitivität \mathbf{s}_e abgeleitet, implementiert, berechnet und zu den globalen Matrizen \mathbf{K}_T und \mathbf{S}_T assembliert werden. Der Index T wird zur Schreibvereinfachung im weiteren fortgelassen. Die Herleitung und Implementierung der Elementbeiträge sollte zukünftig sowohl die Steifigkeit als auch die Sensitivität beinhalten. Hierbei ist die gleichzeitige Bereitstellung beider Bestandteile ratsam, da nur so ein minimaler Mehraufwand für die zusätzliche Sensitivitätsanalyse gegenüber der Strukturanalyse entsteht. Die nachträgliche Herleitung und vor allem der nachträgliche Einbau der Sensitivitäten auf Elementebene haben sich als uneffizient herausgestellt.

Mit den bereitgestellten und assemblierten Elementbeiträgen ergeben sich die diskreten Matrizenbeziehungen

$$\mathbf{S} \delta \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \delta \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \delta \varphi_i = \mathbf{a}_i^T \delta \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{b}_i^T \delta \hat{\mathbf{V}}, \quad (5.3)$$

wobei $\delta \hat{\mathbf{V}}$ und $\delta \hat{\mathbf{X}}$ die Variation der diskreten Knotenverschiebungen und bzw. der Knotenkoordinaten beschreiben. Durch die obige Gleichung ist $\delta \hat{\mathbf{V}}$ implizit bei Vorgabe von $\delta \hat{\mathbf{X}}$ definiert und kann in expliziter Form durch

$$\delta \hat{\mathbf{V}} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{S} \delta \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \delta \hat{\mathbf{X}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} := -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{S} \quad (5.4)$$

angegeben werden. Die resultierende Matrix \mathbf{A} verbindet die Variation der Verschiebung (des Gleichgewichtspunktes) mit einer beliebigen Variation der Geometrie. Dieses bedeutet, daß mit Kenntnis der Matrix \mathbf{A} beliebige Sensitivitäten bzgl. der Formänderungen $\delta \hat{\mathbf{X}}_j$ leicht berechnet werden können, d.h.

$$\delta \varphi_i = [\mathbf{a}_i^T - \mathbf{b}_i^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}] \delta \hat{\mathbf{X}}_j = [\mathbf{a}_i^T + \mathbf{b}_i^T \mathbf{A}] \delta \hat{\mathbf{X}}_j \quad j = 1, 2, \dots, ndv, \quad (5.5)$$

wobei ndv die Anzahl der Designvariablen ist.

Für einen effizienten Gesamtalgorithmus müssen die folgenden Fragen beantwortet werden.

3. Wie werden die Vektoren \mathbf{a}_i , \mathbf{b}_i sowie die Elementmatrizen \mathbf{k}_e ('tangent stiffness matrix') und \mathbf{s}_e ('tangent sensitivity matrix') bereitgestellt?
4. Wie können die Elementbeiträge möglichst effizient zu den globalen Vektoren und Matrizen ('tangent sensitivity matrix' \mathbf{S}) assembliert werden und wie kann der zusätzliche Speicherbedarf minimiert werden?
5. Wie kann der numerische Aufwand zur Auswertung von Gleichung 5.4 minimiert werden?

Diese Fragen werden in folgenden Abschnitten behandelt. Hierbei wird besonderer Wert auf die gleichzeitige Behandlung der Steifigkeit und der Sensitivität zur Minimierung des Zusatzaufwandes aufgrund der Sensitivitätsanalyse gelegt. Die hergeleitete Methodik zur Berechnung und Speicherung der Matrizen wird an einem Testbeispiel demonstriert.

5.1.2 Berechnung der Elementbeiträge zur Sensitivität

Für die linearisierte Elastizitätstheorie ergibt die Variation der schwachen Form bzgl. der Verschiebungen

$$\delta_u R_e^{int} = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \boldsymbol{\eta}_I^T \left[\int_{V_{\Omega_e}} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_J dV_{\Omega_e} \right] \delta \hat{\mathbf{V}}_J = \boldsymbol{\eta}_e^T \mathbf{k}_e \delta \hat{\mathbf{V}}_e,$$

wobei $\boldsymbol{\eta}_e$ und $\delta \hat{\mathbf{V}}_e$ die lokalen Elementvektoren der diskreten Testfunktion und der Verschiebungsvariation sind. Entsprechend folgt für die Geometrievariation

$$\delta_X R_e^{int} = \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \boldsymbol{\eta}_I^T \left[\int_{V_{\Omega_e}} \{ -\mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_J \mathbf{H} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{L}_J \mathbf{L}_I^T + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{L}_I \mathbf{L}_J^T \} dV_{\Omega_e} \right] \delta \hat{\mathbf{X}}_J = \boldsymbol{\eta}_e^T \mathbf{s}_e \delta \hat{\mathbf{X}}_e.$$

Die Details der Matrizendarstellung können aus der kontinuierlichen Form leicht hergeleitet werden, siehe [38]. An dieser Stelle soll nur auf die vollständig identische Struktur der Berechnung von Steifigkeit und Sensitivität hingewiesen werden. Der zusätzliche Aufwand für die Sensitivität kann mit der Erweiterung von einer geometrisch linearen zu einer geometrisch nichtlinearen Formulierung gleichgesetzt werden. Damit können sie im Rahmen eines begrenzten Mehraufwandes abgeleitet, implementiert und berechnet werden.

5.1.3 Bereitstellung der globalen Sensitivitätsmatrix

Die Elementsensitivitätsmatrizen \mathbf{s}_e müssen nach ihrer Berechnung auf Elementebene zu der globalen Sensitivitätsmatrix \mathbf{S} assembliert werden. Die hierzu notwendigen Schritte werden in Kürze dargestellt.

1. Globale (auf der Systemebene) und lokale (auf der Elementebene) Vektoren der geometrischen Parameter müssen eingeführt werden. Die Steifigkeitsmatrix besitzt die Dimension $nu \times nu$ aber kann effizient aufgrund der Bandstruktur gespeichert werden sofern eine Knotennummernoptimierung verwendet wird. Die Sensitivitätsmatrix besitzt die Dimension $nu \times nx$ und ihre Struktur als unsymmetrische Matrix hängt wesentlich von der Wahl der Geometrieapproximation ab.
2. Der Einfluß der Geometrieparameter für die Verschiebungen des FE-Modells muß für das gewählte Geometriemodell bekannt sein. Im Rahmen einer hier untersuchten bilinearen isoparametrischen FE-Methode sind die Zusammenhänge einfach, können aber i.d.R. entsprechend der Darstellungen in Kapitel 4 komplexer sein. Für den hier vorliegenden Fall liefern nur die Knotenkoordinaten einen Beitrag zur Sensitivitätsmatrix, die zum betrachteten Knoten der Verschiebungen benachbart sind. Die Geometrieparameter spannen einen endlichdimensionalen Raum der Größe nx auf, der alle möglichen Designs und die zugehörigen Variationen enthält.
3. Integer- oder logische Flags zur Festlegung von „Randbedingungen“ für die geometrischen Parameter müssen eingeführt und verwaltet werden. Hierdurch kann eine Reduktion des Raumes zulässiger Geometrievariationen erreicht werden.
4. Ein Zeiger für die Speicherplätze der globalen Matrix in einer kompakten Speicherung muß eingeführt werden. Da nur Matrix-Vektor-Multiplikationen berechnet werden müssen, ist keine besondere Struktur für die Speicherung der globalen Sensitivitätsmatrix vorzuhalten. Es zeigt sich somit, daß der Gesamtspeicherplatzbedarf für \mathbf{S} geringer als der Speicherplatzbedarf der Steifigkeitsmatrix in Column-Height-Technik ist, siehe auch das numerische Beispiel. Bei einer kompakten Speichertechnik sowohl für die Steifigkeitsmatrix als auch für die Sensitivitätsmatrix verdoppelt sich bei isoparametrischen Elemente (ungefähr) der Speicherplatzbedarf.
5. Abschließend müssen noch die Einbauroutinen für das Assemblieren der lokalen zu den globalen Sensitivitätsmatrizen bereitgestellt werden.

5.1.4 Berechnungsstrategien für die Sensitivitätsanalyse

Die Durchführung der Sensitivitätsanalyse orientiert sich an Gleichung (5.4), wobei die folgenden Hinweise für eine effiziente Auswertung beachtet werden sollten.

1. Die variationelle Darstellung der Sensitivitätsanalyse liefert kontinuierliche Aussagen, d.h. für jede Art der Diskretisierung können die zugehörigen Approximationen schnell bereitgestellt werden. Als Beispiel sei $\delta\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A} \delta\hat{\mathbf{X}}$ betrachtet, d.h. die Variation der geometrischen Parameter ergibt die zugehörige Variation der Gleichgewichtsverschiebungen. Allgemeiner sind jedoch nicht nur einzelne Vektoren sondern beide Approximationsräume hierdurch verknüpft.
2. Der Ansatzraum für die Verschiebungen wird im Rahmen der adaptiven Strukturanalyse gewählt, um die gewünschte Genauigkeit der Ergebnisse sicherzustellen. Damit ist die Dimension nu des Knotenverschiebungsvektors $\hat{\mathbf{V}}$ und somit der Steifigkeitsmatrix und ebenfalls die Zeilenanzahl von \mathbf{S} und \mathbf{A} vorgegeben.
3. Die Dimension nx des Approximationsraumes für die Geometrie wird über die Wahl der Methode, d.h. z.B. der isoparametrischen Elemente, bestimmt. Üblicherweise sind die Variationen $\delta\hat{\mathbf{X}}$ im selben Ansatzraum \mathbb{R}^{nx} . Durch Wahl der „Randbedingungen“ kann die Dimension jedoch noch reduziert werden. Auf eine Darstellung dieses Effektes wird hier verzichtet. Damit fällt die Anzahl der Spalten von \mathbf{S} und \mathbf{A} mit der Dimension nx zusammen.
4. Die numerische Berechnung der Matrix $\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{S}$ ist in der Regel nicht ratsam. Die $nu \times nx$ Matrix \mathbf{A} ist vollbesetzt und erfordert damit den maximalen Speicherplatzbedarf. Eine Berechnung und Speicherung ist nur dann effizient möglich, wenn die Anzahl nx hinreichend klein ist. In diesem Fall ist die Anzahl der Vorwärts-Rückwärts-Substitutionen zur Lösung linearer Systeme und ebenfalls der Speicherplatzbedarf für die volle $nu \times nx$ Matrix \mathbf{A} begrenzt und somit auch durchführbar.
5. Bei der isoparametrischen FE-Methode wird die Geometrie des Körpers mittels der Knotenkoordinaten beschrieben. Aufgrund der großen Knotenanzahl ist es vorteilhafter, \mathbf{S} getrennt zu speichern und für die Multiplikationen die ursprüngliche Form $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{S}$ anstatt \mathbf{A} zu verwenden. In diesem Fall ist entweder die direkte oder die adjungierte Methode von Vorteil, wobei die Effizienz von der Anzahl der Nebenbedingungen und der Designvariablen abhängt.
6. Für eine Erweiterung auf geschichtsabhängiges Material, z.B. die Prandtl-Reuß-Elastoplastizität, muß die Matrix \mathbf{A} in jedem Zeitschritt aufdatiert werden. D.h. hier ist es dringend erforderlich, effiziente Geometriemodelle einzuführen, siehe [40].

5.1.5 Numerische Experimente

Ein numerisches Experiment (Scheibe mit Loch) wurde durchgeführt, um die Rechenzeiten für die Struktur- und Sensitivitätsanalyse zu vergleichen. Eine isoparametrische Elementformulierung (Q1) für das linear-elastische Problem wurde dabei als Extremfall für das Verhältnis der Rechenzeiten betrachtet, da bei nichtlinearem Verhalten der Rechenzeitbedarf für die Strukturanalyse wächst und die Geometriebeschreibung mit bilinearen Elementen die meisten Geometrieparameter (d.h. Knotenkoordinaten) benötigt. Der Quotient „Zeit für Sensitivitätsanalyse/Zeit für Strukturanalyse“ ist somit maximal.

Ein Gewichtsminimierungsproblem wurde betrachtet, wobei 12 Kontrollpunktkoordinaten gemäß Bild 5.1 als Designvariablen gewählt wurden. Insgesamt 8 Verschiebungskomponenten an den Eckpunkten des symmetrischen Viertelsystems sowie die Vergleichsspannungen in

72 Elementen der Randschichten wurden kontrolliert. Das dargestellte Ausgangsnetz wurde mehrfach gleichmäßig verfeinert, um ein hinreichend großes FE-Sytem zu erhalten. Die Linien bezeichnen die Symmetrieachsen, in denen die Horizontal- bzw. Vertikalverschiebungen unterdrückt sind.

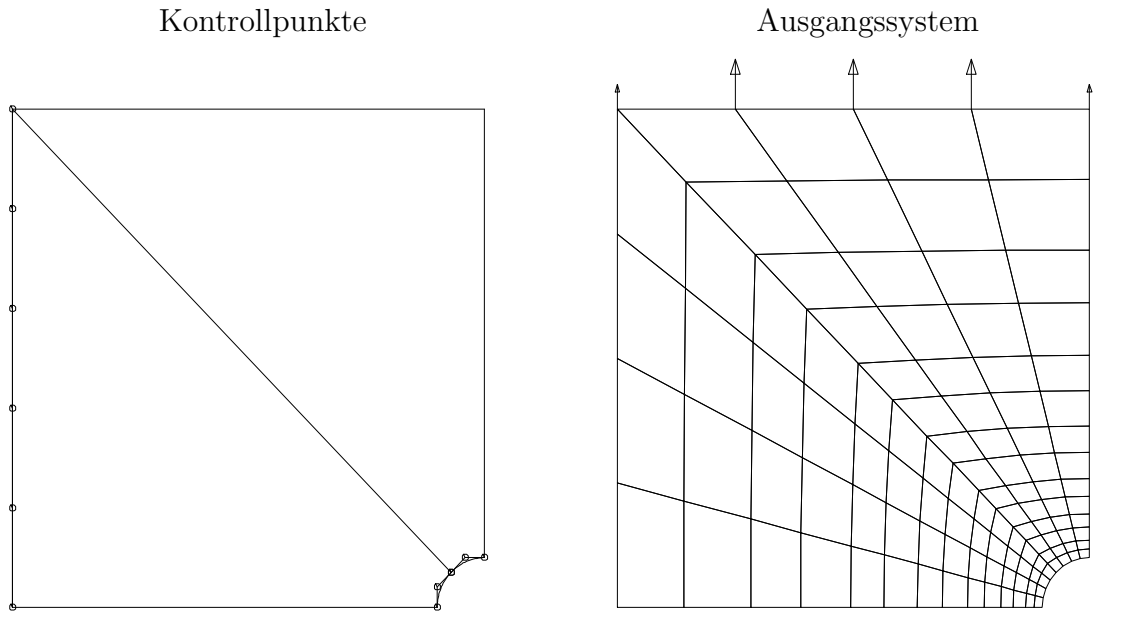


Bild 5.1: CAGD und FEM Modelle

Alle Berechnungen wurden auf einem Pentium PC (133 Mhz und 64 MB RAM) mit einem Linux Betriebssystem und dem G77-Fortrancompiler durchgeführt.

Die Problemgröße kann folgendermaßen beschrieben werden: 7.168 bilineare isoparametrische Elemente (nel), 7.345 FE-Knoten ($nnode$) und 14.464 Freiheitsgrade ($nu = 2nnode - b.c.$) in der Strukturanalyse, wobei $b.c.$ die Anzahl der Randbedingungen ist. Es ergab sich eine Bandbreite von 245 und ein Speicherplatzbedarf von 2.138.810 Einträgen für die tangentielle Steifigkeitsmatrix bei einer Skyline-Speicherung bei einem direkten Löser. Dieser Speicherbedarf kann bei iterativen Lösern noch weiter reduziert werden.

Das Geometriemodell besteht aus 14.690 Knotenkoordinaten ($nx = 2nnode$) mit einem Speicherplatzbedarf von nur 257.468 Einträgen für die globale Sensitivitätsmatrix \mathbf{S} aufgrund der kompakten Speichertechnik. Der zusätzliche Speicherplatzbedarf für \mathbf{S} , d.h. für die nichtverschwindenden Einträge in einer $nu \times nx$ Matrix, ist für direkte Löser erheblich kleiner als der Bedarf für die Steifigkeitsmatrix. Im Fall iterativer Löser benötigt die globale Sensitivitätsmatrix einen vergleichbaren Speicherplatz wie die Steifigkeitsmatrix.

Die gewählte isoparametrische Methode gewährleistet keine optimale Modellierung der Optimierungsaufgabe. Dieses ist darin begründet, daß die gewählte Approximation für das Verschiebungsfeld aufgrund von Fehlerindikatoren und adaptiver Netzverfeinerung gewählt wird. Damit wird aber auch das geometrische Modell ständig verfeinert, da eine lineare Abhängigkeit $nx = 2nnode$ zwischen FE-Knoten und der Größe von \mathbf{S} besteht. Die Verfeinerung des Geometriemodells aufgrund der Netzadaptivität kann für die Strukturanalyse noch toleriert werden, ist aber in der Strukturoptimierung nicht akzeptabel.

Die Zeiten zur Berechnung von \mathbf{K} und \mathbf{S} betragen 9.3 *sec* und 15.2 *sec*. Der Zeitaufwand für \mathbf{S} stimmt mit dem Mehraufwand zur Bestimmung der Elementsensitivitätsmatrizen überein. Die Faktorisierung der globalen Steifigkeitsmatrix beträgt 16.5 *sec*, die Zeit für die Lösung der linearen Gleichung für eine rechte Seite ist 0.6 *sec*. Die Gesamtzeit zur Lösung der Strukturanalyse beträgt 26.4 *sec*.

Die Zeiten für die grundlegenden Berechnungen in der Sensitivitätsanalyse lauten: 0.4 *sec* für die Multiplikation von \mathbf{S} mit einem Vektor, 1 *sec* zur Berechnung von \mathbf{a}_i und 12 *sec* für 10.000 Multiplikationen $\mathbf{a}_i^T \delta \hat{\mathbf{X}}_j$.

Die gesamte Zeit für die Sensitivitätsanalyse beträgt 97 *sec* für den Fall einer adjungierten Methode und 27 *sec* für die direkte Methode. In diesem Fall ist die direkte Methode aufgrund der geringeren Anzahl der Designvariablen vorzuziehen, d.h. 12 Designvariable im Vergleich zu 80 Nebenbedingungen. In diesem Fall ist die Sensitivitätsanalyse genau so aufwendig wie die Strukturanalyse.

5.1.6 Sensitivität der Verschiebungen und Spannungen

Die Sensitivitäten für die Verschiebungen und Spannungen in den einzelnen finiten Elementen können im Rahmen einer Nachlaufberechnung ermittelt werden. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Sensitivität des Gleichgewichtszustandes $\delta \mathbf{u}$ für jede Geometrievariation $\delta \mathbf{X}$ vorliegt. In den folgenden Bildern 5.2 und 5.3 werden die Details an einem einfachen Beispiel erläutert. Die dargestellte Konsole mit Loch ist an der linken Seite unverschieblich gelagert und an der Oberkante mit einer Streckenlast belastet, siehe auch [94, §7.2]. Dargestellt sind zum einen der Verschiebungszustand (Bild 5.2) und die σ_{xx} -Spannung (Bild 5.3).

Mit der Einführung einer Geometrievariation $\delta \mathbf{X}$ ergibt sich durch Auswertung von

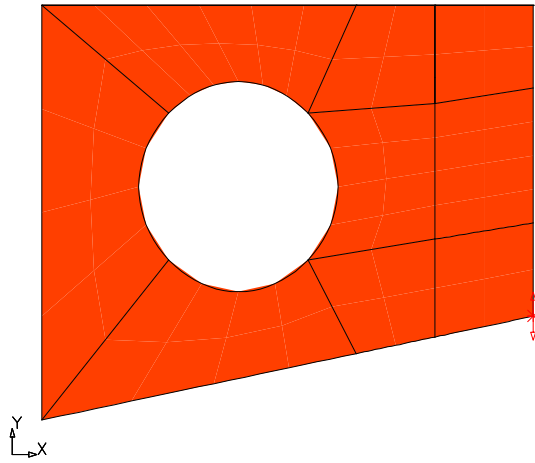
$$\delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{S} \delta \mathbf{X}$$

die zugehörige Gleichgewichtsvariation $\delta \mathbf{u}$. Bild 5.2a zeigt die Darstellung der Geometrie über insgesamt 9 Patches. Die Geometrievariation $\delta \mathbf{X}$ wird hier über ein bilineares Modell über die gesamte Kragarmbreite und -höhe bestimmt, siehe auch [94]. Eine virtuelle Vertikalverschiebung des Punktes A, d.h. $\delta Y_A = 1$, erzeugt die in Bild 5.2b dargestellte Vertikalkomponente des virtuellen Geometriefeldes $\delta \mathbf{X}$. In allen Darstellungen wird eine Farbskala entsprechend Bild 5.6 verwendet, d.h. das Maximum wird in blauer Farbe und das Minimum in roter Farbe dargestellt.

Die Bilder 5.2c-e zeigen die Horizontal- und Vertikalkomponenten der Verschiebungen \mathbf{u} im Gleichgewichtszustand und die zugehörige Variation des Verschiebungszustandes $\delta \mathbf{u}$. Die Vertikalkomponente der Verschiebung und der Verschiebungsvariation verläuft nahezu linear zwischen der Einspannung an der linken Seite und dem freien Ende an der rechten Seite. In Bild 5.2c ist der Druckgurt an der Kragarmunterseite sowie der Zuggurt an der Kragarmoberseite ansatzweise zu erkennen.

Der Veränderung des Gleichgewichtszustandes aufgrund der eingeführten Geometrievariation ist somit aus den Bildern 5.2d,f abzulesen.

Die nachfolgenden Bilder zeigen sämtliche Feldgrößen und deren Variation, die zur Berechnung der Empfindlichkeit der Spannungskomponente σ_{xx} benötigt werden.



a) CAGD Geometriebeschreibung

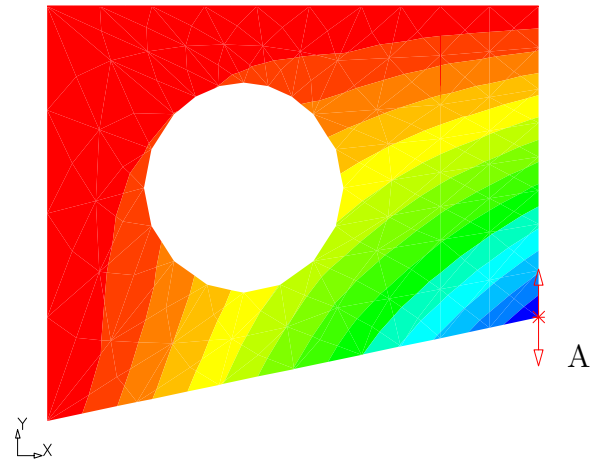
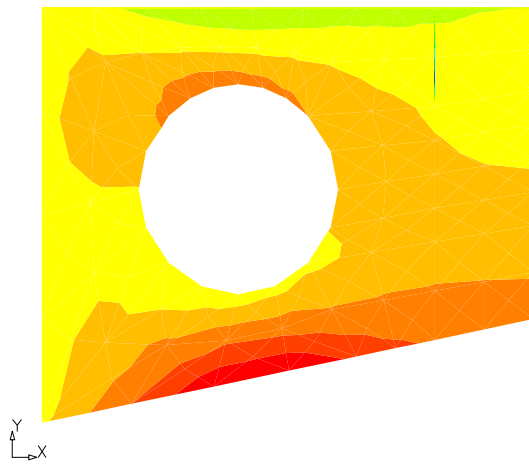
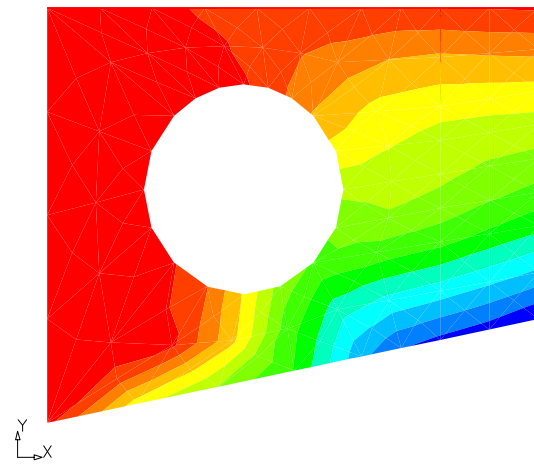
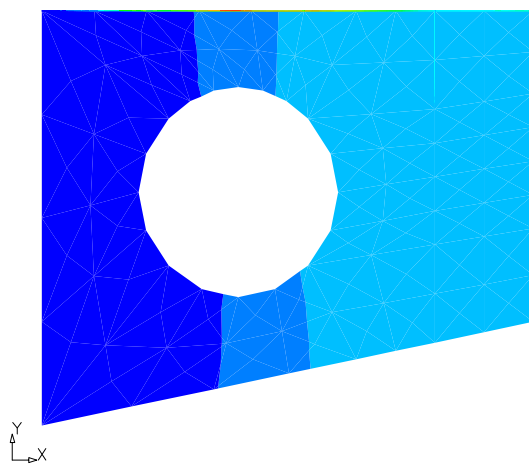
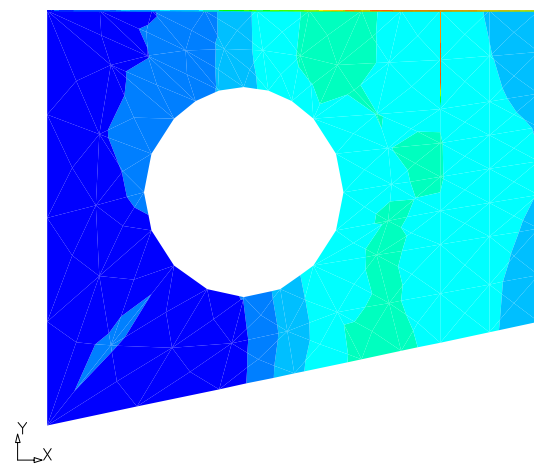
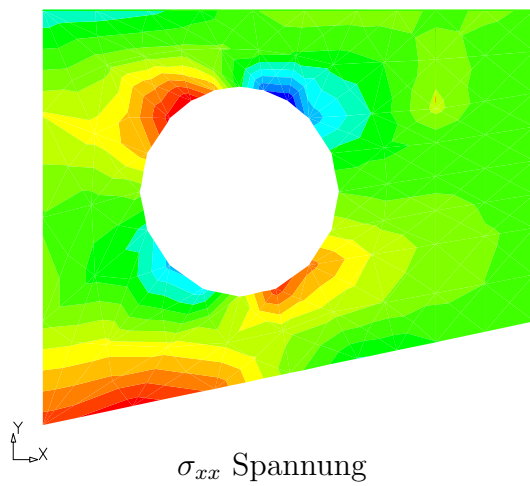
b) vertikale Komponente der
Variation δX c) horizontale Komponente der
Verschiebung u d) horizontale Komponente der
Variation der Verschiebung δu e) vertikale Komponente der
Verschiebung u f) vertikale Komponente der
Variation der Verschiebung δu

Bild 5.2: Veranschaulichung der Sensitivitätsanalyse



Variation der Spannung σ_{xx}

$$\delta\sigma_{xx} = \delta_X\sigma_{xx} + \delta_u\sigma_{xx}$$

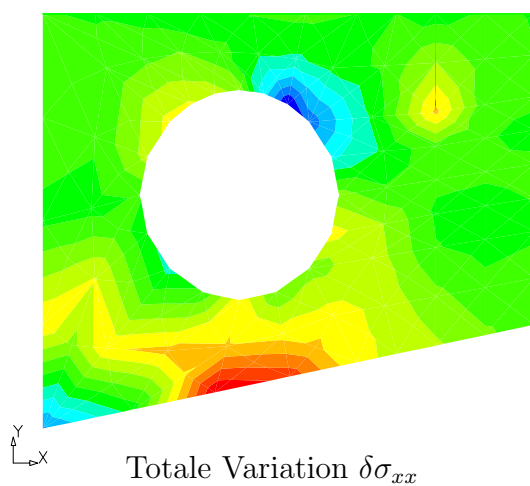
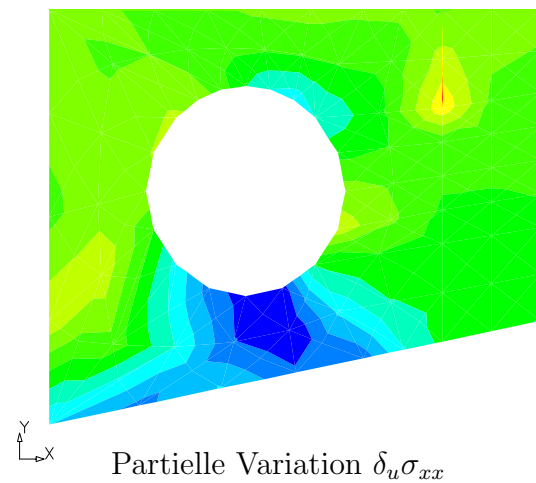
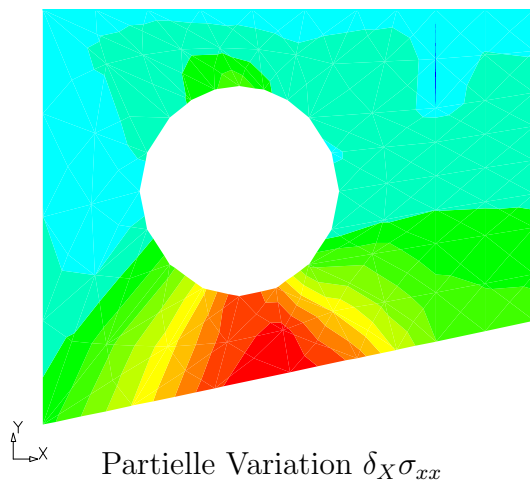


Bild 5.3: Veranschaulichung der Sensitivitätsanalyse für die Spannungen

Die totale Variation der Spannungskomponente σ_{xx} setzt sich, wie in Bild 5.3 veranschaulicht, aus den partiellen Variationen $\delta_X \sigma_{xx}$ und $\delta_u \sigma_{xx}$ zusammen, d.h.

$$\delta \sigma_{xx} = \delta_X \sigma_{xx} + \delta_u \sigma_{xx}.$$

Die Variation $\delta_X \sigma_{xx}$ hängt direkt von der Geometrievariation $\delta \mathbf{X}$ ab und die Variation $\delta_u \sigma_{xx}$ kann über die Variation des Gleichgewichtszustandes $\delta \mathbf{u}$ ermittelt werden. Die notwendigen partiellen Ableitungen für die Spannungen werden auf dem Elementgebiet über die zugehörige konsistente Materialmatrix, d.h. die Werkstoffmatrix des Hookeschen Materialgesetzes, und die entsprechenden Variationen des linearen Verzerrungstensors ermittelt.

5.1.7 Zusammenfassung und Ausblick

Ein wesentlicher Vorteil in der hier vorgeschlagenen Methodik liegt in der Flexibilität, nach Abschluß der Berechnung der Matrix \mathbf{A} weitere Zielfunktionen und Nebenbedingungen φ und Formvariationen betrachten zu können. Durch die geeignete Wahl der zulässigen Variationen $\delta \mathbf{X}$ bzw. des zugehörigen Approximationsraumes ermöglicht die Formulierung eine Trennung der Sensitivitätsanalyse in die CAGD- und FEM-Bestandteile. Dieses bedeutet, daß die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} sowie die Matrix $\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}$ im FEM-Algorithmus ohne vorherige Kenntnis der Geometrievariation $\delta \mathbf{X}$ berechnet werden können. Die für das aktuelle Optimierungsproblem relevanten Formänderungen können nachträglich durch CAGD-Methoden bereitgestellt werden.

Dieser Zugang kann auch im Rahmen eines bilinearen isoparametrischen Konzeptes verwendet werden, wobei der zusätzliche Speicherbedarf sowie die zusätzliche Rechenzeit für die Sensitivitätsanalyse den Aufwand der Strukturanalyse nicht übersteigt.

Die obengenannten Vorteile erfordern jedoch ein Geometriemodell, das es erlaubt, die Variationen $\delta \mathbf{X}$ effizient zu berechnen. Die Wahl eines für das jeweilige Problem aussagekräftigen Geometriemodelles und die Bestimmung der Variationen stellt dabei in der Praxis ein wesentliches Problem dar. Die theoretisch möglichen Vorteile, die hier an einem akademischen Beispiel erläutert wurden, sind somit bei komplexen Strukturen der Ingenieurpraxis nicht immer auch zu realisieren.

5.2 Hinweise zur Implementation

Die Aufgaben der Strukturmechanik können aufgrund der mathematischen Struktur der zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen in *elliptische*, *parabolische* sowie *hyperbolische* Probleme unterteilt werden. Weiterhin ist eine Einteilung in unrestringierte bzw. restringierte Aufgabenstellungen möglich, die theoretisch durch Variationsgleichungen bzw. -ungleichungen beschrieben werden.

Für jede dieser Problemklassen sind bereits in der Strukturanalyse unterschiedliche numerische Algorithmen zur effizienten Lösung einzusetzen. Für die begleitende Sensitivitätsanalyse müssen diese algorithmischen Vorgehensweisen untersucht und geeignet ergänzt werden.

Für die nachfolgenden Problemstellungen wurden die Algorithmen im Forschungsprogramm-system *Inelastic Analysis and Optimization* (INA-OPT) des Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik (IBNM) der Universität Hannover implementiert und mit der zugehörigen integrierten Sensitivitätsanalyse ergänzt. Hierbei wurde konzeptionell immer ein geometrisch und physikalisch nichtlineares Verhalten vorausgesetzt. Die Entwicklung des Programmsystems wurde seit ungefähr 1988 zur Lösung von Fragestellungen der Formoptimierung eingesetzt, siehe hierzu die Hinweise in den Arbeiten [56, 51, 154, 187, 43, 16, 94, 193, 169, 225].

5.2.1 Kontrolle der entwickelten Sensitivitäten

Für die effiziente Entwicklung der Sensitivitätsanalyse in dieser Komplexität ist es unumgänglich, eine schnelle Fehlerkontrolle der implementierten Beziehungen zu ermöglichen. Hierbei ist es nicht möglich, sich vollständig auf numerische Tools wie z.B. das *automatische Differenzieren*, siehe z.B. *ADIFOR*, bzw. *Mathematica* oder ähnliche Formelmanipulationsprogramme zu verlassen. Die Arbeitsgruppe hatte Zugang zu diesen Tools und hat sie anfänglich auch eingesetzt. Es zeigte sich aber, daß eine CAGD-FEM-Umgebung sehr komplex ist und letztendlich der Gesamtalgorithmus funktionieren muß und nicht nur ein kleines isoliertes Teilergebnis.

Diese Überlegungen führten dazu, die vollständig numerische Sensitivitätsanalyse als Hilfsmittel bei der Entwicklung der variationellen Sensitivitätsanalyse einzusetzen. Die Grundidee besteht darin, sowohl die variationellen als auch die numerischen Sensitivitäten parallel zu ermitteln und anschließend relative Fehler bezogen auf die Ausgangsstörung zu berechnen.

Der theoretische Hintergrund kann durch die Taylorreihenentwicklung einer differenzierbaren Funktion f verdeutlicht werden, d.h. es gilt

$$f(x + \varepsilon u) = f(x) + f'(x) \cdot \varepsilon u + \frac{1}{2} f''(\xi) \cdot \varepsilon^2 u^2. \quad (5.6)$$

Hierbei ist $\xi \in [x, x + \varepsilon u]$. Werden sehr kleine Störungen $\varepsilon \in [10^{-9}, 10^{-6}]$ gewählt, können die höheren Ableitungen vernachlässigt werden. Unter der Annahme, daß die zweite Ableitung f'' im Intervall $[x, x + \varepsilon u]$ beschränkt ist, d.h. $|f''| \leq M$ für alle $\xi \in [x, x + \varepsilon u]$, kann die folgende Abschätzung hergeleitet werden, d.h.

$$\eta := \frac{1}{|u|} \left[\frac{f(x + \varepsilon u) - f(x)}{\varepsilon u} - f'(x) \right] \leq \frac{M}{2} \varepsilon, \quad (5.7)$$

wobei $|u| \neq 0$ vorausgesetzt wird. Die Terme in der Klammer stellen den numerischen bzw. analytischen Wert der Sensitivität dar. Sind alle analytischen (variationellen) Sensitivitäten richtig implementiert, so muß die obige Kontrolle einen relativen Fehler in der Größenordnung der aufgetragenen Störung ε ergeben. Die jahrelange Erfahrung mit dieser Selbstkontrolle der ermittelten Sensitivitäten bestätigt, daß eine größere Abweichung, d.h. ein Vielfaches der aufgetragenen Störung (Faktor 100 oder mehr) als relativer Fehler η , ein sicheres Zeichen für eine fehlerhafte Sensitivität (theoretisch oder in der Umsetzung) ist.

5.2.2 Weitere Problemstellungen und Lösungsverfahren

An dieser Stelle werden Arbeiten angegeben, die weiterführende Hinweise zur Strukturoptimierung und zur Sensitivitätsanalyse für unterschiedliche Problemstellungen enthalten. Alle Arbeiten stehen in Verbindung mit der hier aufgezeigten Methodik und dem für die Berechnung erforderlichen Gesamtalgorithmus zur Formoptimierung.

Die Sensitivitätsanalyse für die nichtlineare Elastizität wird in [16, 213, 19, 17, 34, 36, 24] diskutiert. Die Arbeiten [212, 44, 43] beschäftigen sich mit der Strukturoptimierung und der Sensitivitätsanalyse für Stabilitätsprobleme.

Die Sensitivitätsanalyse für dynamische Probleme wird in [170, 169] behandelt und die Arbeiten [40, 226, 227, 225] sowie [228] stellen die Ergebnisse für elastoplastische Deformationen bzw. restringierte Probleme der Shake-Down Analyse zusammen.

5.3 Sensitivitätsanalyse in der Schädigungsmechanik

Viele praktische Problemstellungen im Ingenieurwesen zeigen unter wechselnder Belastung einen Abfall der Materialfestigkeit. Der komplexe mikromechanische Prozeß, der zu der beobachteten Aufweichung führt, kann phänomenologisch auf der makroskopischen Ebene durch die Schädigungsmechanik beschrieben werden. Ein möglicher Zugang stellt das von *Simo* [201] aufgestellte konstitutive Modell einer isotropen Schädigungsmechanik bei hyperelastischem Materialverhalten dar. Der zusätzliche theoretische und numerische Aufwand für die Aufbereitung der Sensitivitätsanalyse, die Bereitstellung der FE-Informationen sowie die anschließende Optimierung werden an dieser Stelle kurz beschrieben, siehe auch (*Firuziaan* [100]) und [25].

Die Strukturantwort sowie die Sensitivitäten zu einem betrachteten Zeitpunkt hängen von den entsprechenden Größen zu allen vorherigen Zeiten ab, d.h. von der Deformationsgeschichte und ihrer Sensitivität. Die Ergebnisse der variationellen Sensitivitätsanalyse für den hier betrachteten Fall der Schädigungsmechanik, d.h. für die Kontrolle der Schädigungsfunktion in allen finiten Elementen, werden vollständig angegeben und sind mit den Ergebnissen der Arbeiten zur Prandtl-Reuß-Elastoplastizität, siehe z.B. [40, 227, 226, 225], eng verbunden.

5.3.1 Finite Elastizität mit isotroper Schädigung

Der hier vorgestellte Zugang basiert auf einem Materialmodell für die finite Elastizität unter Einbeziehung eines irreversiblen isotropen Schädigungsmechanismus mit einer skalarwertigen internen Schädigungsvariablen. Der Ursprung dieser Materialformulierung liegt im experimentell beobachteten Steifigkeitsabfall von Polymeren. Die Beobachtungen führten zu der Annahme, daß die jeweils maximalen Verzerrungen vollständig den Schädigungsprozeß beschreiben und kontrollieren.

Dieses Modell ist durch eine Entkopplung der volumetrischen und deviatorischen Anteile der Deformation charakterisiert, welches durch eine multiplikative Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten ermöglicht wird. Das von *Kachanov* im Jahr 1958 in die Schädigungsmechanik eingeführte Konzept der äquivalenten Spannungen, siehe auch [145], sowie die Erweiterungen um Kriechphänomene wurde von *Simo* zu einem vollständigen dreidimensionalen Materialmodell zusammengeführt. Für eine vollständige Darstellung sei auf [201] verwiesen. Die dortige Notation wird an dieser Stelle verwendet, um eine kurze Charakterisierung des Modells zu geben.

5.3.1.1 Das Modellproblem

Der Index n beschreibt die aktuelle Zeit t_n und $t_s \in (-\infty, t)$ kennzeichnet die Belastungsstufe mit der maximalen Schädigung. Die relevante Zeit t_s kann für unterschiedliche materielle Punkte differieren.

Tafel 5.1: Modellproblem für die Schädigung hyperelastischer Materialien

1. Der Deformationsgradient zur Zeit t_n wird multiplikativ gemäß $\bar{\mathbf{F}}_n = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}_n$ zerlegt, wobei $J := \det \mathbf{F}_n$ gilt. Die Verzerrungstensoren lauten $\mathbf{E}_n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_n^T \mathbf{F}_n - \mathbf{1})$ und $\bar{\mathbf{E}}_n = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{F}}_n^T \bar{\mathbf{F}}_n - \mathbf{1})$.
2. Die Vergleichsverzerrungen Ξ_n zum Zeitpunkt t_n und der maximale Wert der Schädigung Ξ_s zur Zeit $t_s \in (-\infty, t)$ ergeben sich zu

$$\Xi_n = \sqrt{2 \psi^\circ(\bar{\mathbf{E}}_n)} \quad \text{und} \quad \Xi_s = \max_{t_s \in (-\infty, t)} \sqrt{2 \psi^\circ(\bar{\mathbf{E}}_s)}. \quad (5.8)$$

3. Die freie Energiefunktion lautet $\psi = U(J) + g(\Xi_s) \psi^\circ(\bar{\mathbf{E}}_n)$ und sinnvolle Funktionen sind $U(J) = \kappa/2 \cdot (J - 1)^2$ und $\psi^\circ(\bar{\mathbf{E}}_n) = \mu/2 \cdot \text{tr}(\bar{\mathbf{F}}_n^T \bar{\mathbf{F}}_n)$. Einzig der deviatorische Anteil wird durch die Schädigungsfunktion $g(\Xi_s)$ beeinflusst.
4. Eine einfache Schädigungsfunktion mit extremalen Werten für ungeschädigte ($g = 1$) bzw. vollständig geschädigte ($g = 0$) materielle Punkte lautet

$$g(\Xi_s) = \beta + (1 - \beta) (1 - \exp(-\Xi_s/\alpha))/(\Xi_s/\alpha), \quad (5.9)$$

wobei α, β die materialabhängigen Schädigungsparameter sind. Die Bedingung $\Phi = \Xi_n - \Xi_s \leq 0$ kontrolliert die Evolution der Schädigung $\dot{g} \leq 0$.

5. Der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{S}_n ist durch

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_n^{vol} + g(\Xi_s) \mathbf{S}_n^{dev} \quad (5.10)$$

gegeben und die volumetrischen und deviatorischen Anteile sind

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n^{vol} &= U'(J) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}_n} = \kappa J (J - 1) \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{S}_n^{dev} &= \frac{\partial \psi^\circ(\bar{\mathbf{E}}_n)}{\partial \mathbf{E}_n} = \mu J^{-2/3} \left(\mathbf{1} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{C}^{-1} \right). \end{aligned}$$

6. Der Materialtensor ergibt sich zu (siehe [201, 100] für die Details)

$$\bar{\mathbf{C}}_n = \bar{\mathbf{C}}_n^{vol} + g(\Xi_s) \bar{\mathbf{C}}_n^{dev}, \quad (5.11)$$

falls die maximale Schädigung bereits zur Zeit t_s vorhanden war. Tritt im aktuellen Zeitschritt t_n eine weitere Schädigung auf, so muß ein zusätzliches dyadisches Produkt im Materialtensor hinzugefügt werden, d.h.

$$\bar{\mathbf{C}}_n = \bar{\mathbf{C}}_n^{vol} + g(\Xi_n) \bar{\mathbf{C}}_n^{dev} + \frac{g'(\Xi_n)}{\Xi_n} \mathbf{S}_n^{dev} \otimes \mathbf{S}_n^{dev}. \quad (5.12)$$

Die konsistente Linearisierung bzgl. der Verschiebungen zum Zeitpunkt t_n führt für dieses Schädigungsmodell zu einem symmetrischen Materialtensor und somit zu einer symmetrischen Steifigkeitsmatrix.

5.3.1.2 Hinweise zur numerischen Umsetzung

Die konsistente Linearisierung ist erforderlich, um mit dem Newton-Raphson-Verfahren die Konvergenz der Berechnung in wenigen Iterationsschritten zu erreichen.

Für die Strukturanalyse sind für jeden Integrationspunkt in den finiten Elementen nur die Schädigungsvariablen Ξ_s zu speichern. Der Speicherbedarf wächst jedoch für die Sensitivitätsanalyse beträchtlich. Hinweise hierzu gibt der nächste Abschnitt.

Für eine problemgerechte Modellierung und um die bekannten Versteifungseffekte der reinen Verschiebungsmethode (Q1-Elemente) zu vermeiden, sind verbesserte Dreifeldfunktionale für die Elementansätze zu wählen. Die Details dieser Problematik werden mit dem Hinweis auf die Arbeiten von z.B. *Simo* [201, 203] und anderen an dieser Stelle nicht diskutiert.

5.3.2 Sensitivitätsanalyse für Schädigung

Die Sensitivitätsanalyse für Materialien mit Schädigungsverhalten sollte sich an das gewählte numerische Integrationsverfahren orientieren, um hierzu konsistente Darstellungen und Algorithmen zu erzeugen. Die zentralen Bestandteile des verwendeten Verfahrens sowie die Abfolge der Berechnungsschritte zeigt das Flußdiagramm im Bild 5.4.

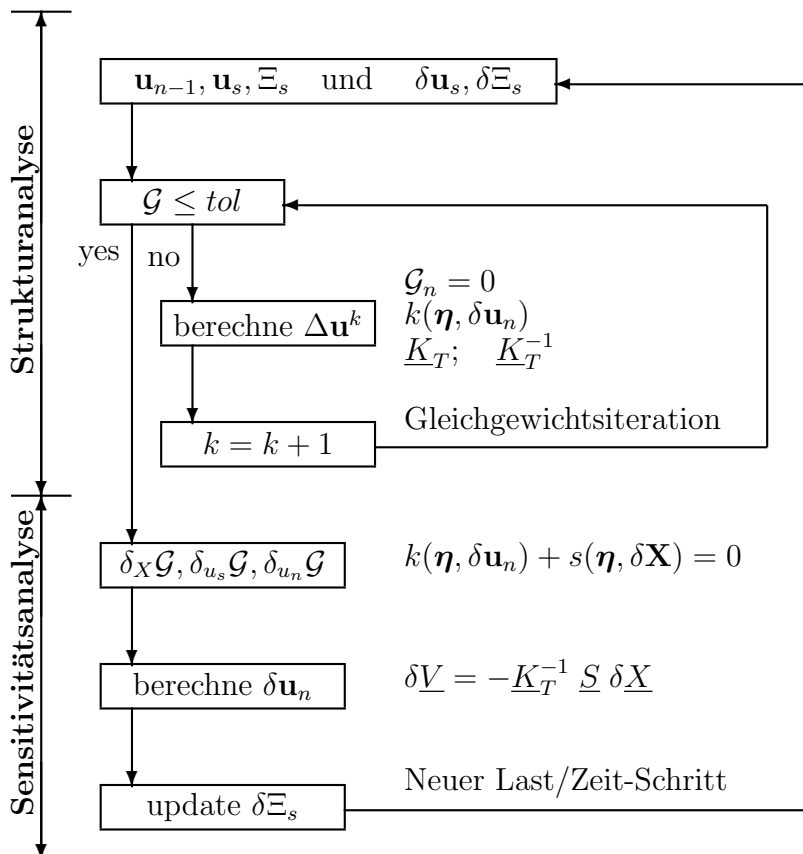


Bild 5.4: Flußdiagramm für Strukturanalyse und Sensitivitätsanalyse

5.3.2.1 Struktur der Sensitivitätsanalyse

Die wesentlichen Bestandteile des zuvor gezeigten Berechnungsverfahrens sind in der nachfolgenden Darstellung nochmals zusammengefasst.

Tafel 5.2: Struktur der Sensitivitätsanalyse für Schädigungsverhalten

- Die Variation der Geometrie, d.h. $\delta\mathbf{X} = \delta\tilde{\psi}(\Theta)$, wird als bekannt vorausgesetzt.
- Die Variation der Verschiebungsabbildung $\mathbf{u}_s = \tilde{\nu}_s(\Theta)$ wird parallel zum inkrementellen Berechnungsverfahren der Strukturanalyse bestimmt, d.h. sowohl \mathbf{u}_s als auch $\delta\mathbf{u}_s = \mathbf{A}_s\delta\mathbf{X}$ werden zum Zeitpunkt t_s bestimmt.
- Die Gleichgewichtsbedingung zur Zeit t_n wird gelöst, um die Verschiebungsabbildung $\mathbf{u}_n = \tilde{\nu}_n(\Theta)$ aufzudatieren, d.h. sie ist implizit definiert durch

$$\tilde{\mathcal{G}}_n(\Theta, \tilde{\psi}(\Theta), \tilde{\nu}_s(\Theta), \tilde{\nu}_n(\Theta)) = 0. \quad (5.13)$$

- Die Variation der Gleichgewichtsbedingung liefert $\mathcal{G}_n = 0$

$$0 = \delta_X \mathcal{G}_n + \delta_{u_s} \mathcal{G}_n + \delta_{u_n} \mathcal{G}_n = s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X}) + k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}_n), \quad (5.14)$$

wobei $s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X})$ die „tangentielle Sensitivität“ bezeichnet, die durch

$$s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial \mathbf{X}} \delta\mathbf{X} + \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial \mathbf{u}_s} \delta\mathbf{u}_s \quad (5.15)$$

$$= \left(\frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial \mathbf{u}_s} \mathbf{A}_s \right) \delta\mathbf{X} \quad (5.16)$$

gegeben ist. Analog beschreibt $k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}_n)$ die „tangentielle Steifigkeit“, d.h.

$$k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}_n) = \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial \mathbf{u}_n} \delta\mathbf{u}_n. \quad (5.17)$$

5.3.2.2 Variation von Zielfunktion und Nebenbedingung

Die Gradienten der Zielfunktion und Nebenbedingung f bzgl. der Formvariationen werden für den mathematischen Optimierungsalgorithmus benötigt. An dieser Stelle werden zunächst nur geometrische Designvariablen betrachtet. Damit ergibt sich für die vollständige Variation von f die Abhängigkeit von der Geometrie ($\delta_X f$), vom aktuellen Verschiebungsfeld zum Zeitpunkt t_n ($\delta_{u_n} f$) und von der Geschichte des Schädigungsprozesses (δ_{Ξ}). Die letzte Abhängigkeit kann durch das Verschiebungsfeld \mathbf{u}_s zum Zeitpunkt t_s mit der maximalen Vergleichsverzerrung Ξ_s ersetzt werden. Zusammenfassend folgt für die vollständige Variation

$$\delta f = \delta_X f + \delta_{u_n} f + \delta_{\Xi} f = \delta_X f + \delta_{u_n} f + \delta_{u_s} f. \quad (5.18)$$

Der gesamte Speicherbedarf wächst mit jeder zusätzlichen Funktion f und mit der wachsenden Anzahl der Designvariablen.

5.3.2.3 Partielle Variationen der schwachen Form

Die Gleichgewichtsbedingungen sind in jeder Zielfunktion und Nebenbedingung implizit enthalten, d.h. die Variation der schwachen Form muß berücksichtigt werden, d.h. $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_n^{int} + \mathcal{G}_n^{ext} = 0$ muß berechnet werden. Zur Vereinfachung der Notation wird an dieser Stelle der äußere Anteil \mathcal{G}_n^{ext} als designunabhängig angesehen. Für den inneren Anteil erhält man

$$\mathcal{G}_n^{int} = \int_{\Omega_o} \mathbf{F} \mathbf{S} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} dV,$$

wobei die zugehörigen Variationen nachfolgend erläutert werden. Die tangentielle Steifigkeit $k(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{u}_n)$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \delta_{u_n} \mathcal{G}_n^{int} &= \int_{\Omega_o} \mathbf{S} : \text{Grad}_X^T \delta \mathbf{u} \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} dV \\ &+ \int_{\Omega_o} \mathbf{F}^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{F}^T \text{Grad}_X \delta \mathbf{u} dV, \end{aligned} \quad (5.19)$$

d.h. alle Anteile betreffen den Zeitpunkt t_n . Die weiteren Variationen treten nur für die Sensitivitätsanalyse auf und benötigen zusätzlich noch Informationen des Zeitschrittes $t_s < t_n$ der maximalen Schädigung, d.h.

$$\delta_{u_s} \mathcal{G}_n^{int} = \int_{\Omega_o} \mathbf{F}^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \mathbb{D}_s : \mathbf{F}_s^T \text{Grad}_X \delta \mathbf{u}_s dV \quad (5.20)$$

für die Variation bzgl. \mathbf{u}_s und abschließend

$$\begin{aligned} \delta_X \mathcal{G}_n^{int} &= \int_{\Omega_o} \mathbf{S} : \mathbf{F}^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \text{Div} \delta \mathbf{X} dV \\ &- \int_{\Omega_o} \mathbf{S} : \mathbf{F}^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X} dV \\ &- \int_{\Omega_o} \mathbf{S} : \text{Grad}_X^T \delta \mathbf{X} \mathbf{H}^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} dV \\ &- \int_{\Omega_o} \mathbf{F}^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{F}^T \mathbf{H} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X} dV \\ &- \int_{\Omega_o} \mathbf{F}^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \mathbb{D}_s : \mathbf{F}_s^T \mathbf{H}_s \text{Grad}_X \delta \mathbf{X} dV. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Diese zusätzliche Variationen benötigen den materiellen Verschiebungsgradienten $\mathbf{H}_s = \text{Grad}_X \mathbf{u}_s$ (und $\mathbf{F}_s = \mathbf{1} + \mathbf{H}_s$). Weiterhin muß der Schädigungstensor

$$\mathbb{D}_s := \frac{\partial \mathbf{S}_n}{\partial \Xi_s} \otimes \frac{\partial \Xi_s}{\partial \mathbf{E}_s} = \frac{g'(\Xi_s)}{\Xi_s} \mathbf{S}_n^{dev} \otimes \mathbf{S}_s^{dev} \quad (5.22)$$

berechnet werden, wobei \mathbf{S}_s^{dev} die deviatorischen Spannungen des Zeitpunktes t_s sind. Der Tensor \mathbb{D}_s besteht in diesem Fall aus einem dyadischen Produkt, aber er ist ein vollständiger Tensor vierter Stufe bei allgemeinem anisotropen Schädigungsverhalten.

Die Werte $\mathbf{H}_s, \mathbf{F}_s, \mathbb{C}_s$ in Gleichung (5.21) sind abhängig von der relevanten Zeit t_s der maximalen Schädigung, wobei sich der betreffende Zeitschritt für jeden materiellen Punkt gesondert ergeben kann. Zusätzlich muß diese Gleichung für unterschiedliche Variationen der Geometrie $\delta\mathbf{X}$ berechnet werden. Gleichung (5.20) ist somit abhängig von der totalen Variation der Verschiebungsfelder $\delta\mathbf{u}_s$ für unterschiedliche Zeiten t_s .

Diese Beziehungen müssen in einem numerischen Verfahren ermittelt werden, wobei der zusätzliche Speicheraufwand minimiert werden sollte.

5.3.2.4 Variation bzgl. der Materialwerte

Bisher wurden nur geometrische Designvariablen auf dem makroskopischem Level betrachtet. Allgemeinere Optimierungsaufgaben unter Berücksichtigung verschiedener Mikro-, Meso- und Makroebenen und unter Verwendung der Homogenisierungsverfahren sind von besonderer Bedeutung in der Schädigungsmechanik. Wesentlich ist hierbei zu erkennen, ob geometrische Modifikationen auf der Mikroskala die makroskopische Materialbeschreibung wie z.B. die Schädigungsparameter α und β beeinflussen.

Um die mikromechanischen Phänomene zu kontrollieren und die unterschiedlichen Skalen koppeln zu können, müssen weitere Sensitivitäten bzgl. der Materialparameter (d.h. $\kappa, \mu, \alpha, \beta$ in diesem Modell) berechnet werden. Die allgemeine Struktur bleibt erhalten, anstatt der Gleichung (5.21) müssen jedorch Variationen bzgl. der Parameter $\delta_m \mathcal{G}_n^{int}$ berechnet werden, d.h.

$$\delta_m \mathcal{G}_n^{int} = \int_{\Omega_o} \mathbf{F}^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \delta_m \mathbf{S} dV. \quad (5.23)$$

Die Variationen $\delta_m \mathbf{S}$ bzgl. skalarwertiger Materialparameter können leicht bestimmt werden, sobald das Materialgesetz definiert wurde, siehe Abschnitt 5.3.1.1. Diese Betrachtungen sollen an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden.

5.3.3 Hinweise zur numerischen Umsetzung

Allgemeine Hinweise zur effizienten Implementation der variationellen Formsensitivität wurden in [40, 227, 226] gegeben. An dieser Stelle soll nur die isoparametrische FE-Formulierung betrachtet werden, d.h. Details zur Beschreibung erweiterter Elementformulierungen, z.B. die sogenannten 'enhanced elements' werden übergangen. Weiterhin werden diskrete Zeitschritte $t_1, t_2, \dots, t_s, \dots, t_{n-1}, t_n$ entsprechend der gewählten Zeitdiskretisierung eingeführt.

5.3.3.1 Bemerkungen zur Berechnungsstrategie

Für die Sensitivitätsanalyse sind grundsätzlich zwei Zugänge möglich, d.h. das direkte oder das adjungierte Verfahren. In der linearen Elastizität sind beide Verfahren zulässig und die aktuelle Entscheidung kann über den Vergleich der Anzahl der Designvariablen mit der Anzahl der Zielfunktionen und Nebenbedingungen getroffen werden. Üblicherweise wird dabei

das Verfahren mit der minimalen Anzahl der Vorwärts-Rückwärts-Substitutionen zur Lösung der linearen Gleichungssysteme benutzt.

Für den allgemeinen Fall des nichtlinearen und zeitabhängigen Verhaltens in der Numerischen Mechanik kann nur das direkte Verfahren effizient angewendet werden, siehe auch die Darstellung in Bild 5.4. Es wird hierbei angenommen, daß alle betrachteten Formvariationen (design velocity fields) und alle Zielfunktionen und Nebenbedingungen vor dem Beginn der inkrementellen Berechnung bekannt sind.

5.3.3.2 Diskretisierung der Variation der schwachen Form

Die Gleichung (5.14) wird diskretisiert und in Matrixform dargestellt, d.h.

$$\delta \mathcal{G}_n = \hat{\eta}^T \left[\underline{S}_X \delta \hat{X}_j + \sum_{s=1}^{n-1} \underline{S}_s \delta \hat{V}_{s,j} + \underline{K}_n \delta \hat{V}_{n,j} \right] = 0 \quad (5.24)$$

beschreibt die Variation der Gleichgewichtsbedingung, wobei $\underline{S}_X, \underline{S}_s, \underline{K}_n$ direkt aus den Gleichungen (5.21), (5.20), (5.19) ermittelt werden. Weiterhin beschreiben $\hat{X}_j, \hat{V}_{s,j}$ und $\hat{V}_{n,j}$ die j -te Variation des Designs (discrete design velocity field) und die zugehörigen Variationen der Knotenverschiebungen zur Zeit t_s und t_n .

Die Matrix \underline{S}_X , vergl. (5.21), kann effizient berechnet und gespeichert werden, siehe *Barthold et al.* [39], sobald die Zusatzwerte $\mathbf{H}_s, \mathbf{F}_s, \mathbf{S}_s^{dev}$ für jeden Integrationspunkt bekannt sind. Hierbei sind zwei Alternativen möglich, d.h. (i) die Speicherung der Werte für jeden Integrationspunkt während des inkrementellen Berechnungsverfahrens oder (ii) die Neuberechnung aller Größen zur Zeit t_n . Eine Diskussion beider Alternativen wird weiter unten vorgenommen. Das Matrix-Vektor-Produkt $\underline{S}_X \delta \hat{X}_j$ kann effizient berechnet werden, sobald die volle Matrix \underline{S}_X berechnet und gespeichert wurde.

Schädigungsphänomene können in jedem Zeitschritt eines komplexen Be- und Entlastungsprozesses auftreten, d.h. grundsätzlich müssen alle vergangenen Zeitschritte t_s berücksichtigt werden.

Die Struktur der Matrizen \underline{S}_s für jeden vergangenen Zeitschritt t_s ist unterschiedlich, abhängig von der Be- und Entlastungsgeschichte und nicht im Vorhinein bekannt. Die nichtverschwindenden Einträge korrespondieren mit der Anzahl der Integrationspunkte, bei denen in genau diesem Zeitschritt eine maximale Schädigung Ξ_s auftritt. Theoretisch ist es ebenfalls möglich, diese Matrizen \underline{S}_s für jeden Zeitschritt zu berechnen und zu speichern, aber dieses würde eine sehr große Speicherkapazität erfordern, die zudem mit der Anzahl der Lastschritte anwächst. Daher ist es effizienter, die Matrix-Vektor-Produkte $\underline{S}_s \delta \hat{V}_{s,j}$ für alle relevanten Designvariablen zu berechnen und zu speichern.

Die tangentielle Steifigkeitsmatrix wird zur Berechnung des aktuellen Verschiebungsvektors \underline{V}_n in jedem Zeitschritt t_n ermittelt und faktorisiert. Damit kann die unbekannte Variation $\delta \hat{V}_{n,j}$ in jedem Zeitschritt t_n durch Lösen der Gleichung

$$\delta \hat{V}_{n,j} = -\underline{K}_n^{-1} \left[\underline{S}_X \delta \hat{X}_j + \sum_{s=1}^{n-1} \underline{S}_s \delta \hat{V}_{s,j} \right] \quad (5.25)$$

berechnet werden.

5.3.3.3 Diskretisierung der Variation von Zielfunktion und Nebenbedingung

Eine Diskretisierung der Gleichung (5.18) ergibt

$$\delta\alpha_i = \underline{a}_{X,i} \delta\hat{X}_j + \sum_{s=1}^{n-1} \underline{b}_{s,i} \delta\hat{V}_{s,j} + \underline{c}_{n,i} \delta\hat{V}_{n,j} \quad (5.26)$$

wobei \underline{a}_X , \underline{b}_s und \underline{c}_n Bestandteile der Variationen $\delta_X\alpha$, $\delta_{u_s}\alpha$ und $\delta_{u_n}\alpha$ sind. Alle obigen Bemerkungen hinsichtlich Berechnung und Speicherung gelten in analoger Form. Die Struktur der Zielfunktionen und Nebenbedingungen α ist zu Beginn der Berechnung bekannt, sodaß eine effiziente Implementierung möglich ist, aber von Fall zu Fall anders aussehen kann. Die Schädigungsfunktion $g(\Xi_s)$ ist ein wichtiges Beispiel für eine verteilte Feldgröße in der Schädigungsmechanik, d.h. der Wert von g sollte für jedes Element des diskretisierten FE-Modells und für alle unterschiedlichen Arten der Designvariablen kontrolliert werden. Dieses bedeutet, daß eine große Anzahl an Nebenbedingungen berechnet werden muß, wobei jede einzelne aber nur auf dem jeweiligen Elementgebiet Anteile $\underline{a}_{X,i}$, $\underline{b}_{s,i}$, $\underline{c}_{n,i}$ liefert. Hierfür ist die folgende Vorgehensweise besonders geeignet, d.h. zunächst werden für jedes Element die Werte $g(\Xi_s)$, $\underline{a}_{X,i}$, $\underline{b}_{s,i}$, $\underline{c}_{n,i}$ berechnet. Danach werden für jede Designvariable die zugehörigen Elementbeiträge $\delta\hat{X}_j$, $\delta\hat{V}_{s,j}$, $\delta\hat{V}_{n,j}$ aus dem Speicher ausgelesen, die notwendigen Multiplikationen durchgeführt, um anschließend die Ergebnisse abzuspeichern. Dieses bedeutet, daß nur eine einzige Schleife über alle Elemente durchgeführt werden muß.

5.3.3.4 Hinweise zum Speicherplatzbedarf

Die Werte Ξ_s müssen für jeden Integrationspunkt berechnet und gespeichert werden, um hiermit die Spannungen und Materialmodulen für die Strukturanalyse zu berechnen. Der Zeitpunkt t_s und alle Werte zur Zeit t_s werden später nicht mehr benötigt.

Diese Situation ändert sich für die Sensitivitätsanalyse wesentlich. In diesem Fall sind für jeden Zeitschritt die Informationen zur aktuellen Zeit t_n mit denen zur Zeit t_s der maximalen Schädigung gekoppelt. Hieraus ergeben sich zwei Strategien, die kurz erläutert werden.

5.3.3.4.1 Elementbezogene Speicherung Die Werte \mathbf{H}_s und \mathbf{S}_s^{dev} , d.h. zusätzlich 4+3 Werte für den ebenen Verzerrungszustand, werden pro Integrationspunkt gespeichert. Damit müssen die Knotenverschiebungen $\hat{V}_{s,j}$ nicht für alle vergangenen Zeiten gespeichert werden, aber die Variationen $\delta\hat{V}_{s,j}$ müssen für alle Designvariationen verfügbar sein. Der notwendige Speicherbedarf hängt von der Anzahl der Elemente und der Anzahl der unterschiedlichen Lastschritte ab, die zu einer maximalen Schädigung in irgendeinem Element führen. Die Speicherung der Beiträge $\delta\hat{V}_{s,j}$ einzeln für jeden Integrationspunkt bzw. auf dem globalen Level kann für unterschiedliche Situationen von Vorteil sein. Für den Fall großer FE-Modelle mit einer großen Anzahl von Designvariablen ist es hierbei ratsam, die Beiträge $\delta\hat{V}_{s,j}$ für alle Designvariablen auf dem globalen Level zu speichern.

5.3.3.4.2 Elementbezogene Neuberechnung In diesem Fall muß ein zusätzlicher Zeiger gespeichert werden, der für jeden Integrationspunkt auf den Zeitschritt t_s mit der maximalen Schädigung verweist. Der Knotenverschiebungsvektor \hat{V}_s sowie die Variationen $\delta\hat{V}_{s,j}$

für alle Designvariablen müssen für jeden Zeitschritt t_s gespeichert werden, um $\mathbf{H}_s, \mathbf{S}_s^{dev}$ hieraus berechnen zu können.

5.3.4 Numerische Experimente

Ein einfaches Optimierungsproblem zur Kontrolle der Schädigungsfunktion $g(\Xi_s)$ wird betrachtet, um hieran die Effekte unterschiedlicher Be- und Entlastungszyklen auf das optimale Design zu studieren.

5.3.4.1 Entwurf des numerischen Experimentes

Die nachfolgenden Beobachtungen wurden durch numerische Experimente gewonnen, die an dem unten dargestellten Kragarm durchgeführt wurden.

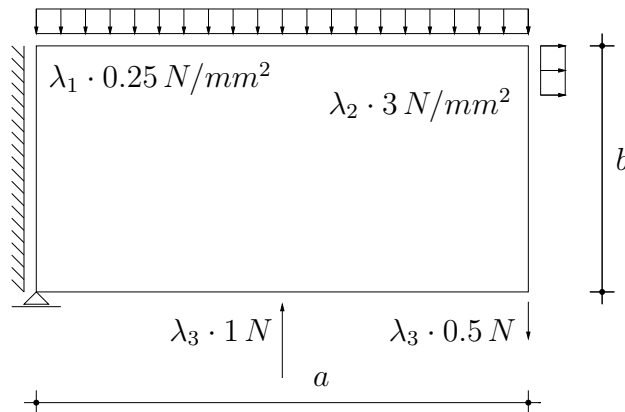


Bild 5.5: Ausgangssystem, Randbedingungen und Lasten

Das Ausgangsdesign ist ein Rechteck mit den Abmessungen $a = 10 \text{ mm}$ und $b = 5 \text{ mm}$ sowie der Dicke $t = 1 \text{ mm}$. Alle weiteren geometrischen Werte werden ohne weitere Hinweise in mm angegeben. Die Form der unteren Konturlinie wird durch zwei Bézierkurven vierter Ordnung beschrieben, d.h. durch Kontrollpunkte an den Stellen $(0, 0)$, $(1.25, 0)$, $(2.50, 0)$, $(3.75, 0)$, $(5, 0)$ sowie (5.0) , $(6.25, 0)$, $(7.50, 0)$, $(8.75, 0)$, $(10, 0)$. Die Kontinuität beider Kurven ist durch die Verwendung eines gemeinsamen Kontrollpunktes an der Stelle $(5, 0)$ gewährleistet.

Die Materialdaten des Neo-Hooke Materialgesetzes lauten $\kappa = 500 \text{ N/mm}^2$, $\mu = 50 \text{ N/mm}^2$ und die Schädigungsparameter sind $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.5$. Drei verschiedene Lasten werden aufgebracht, wobei die zugehörigen Lastparameter $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ variiert werden.

Das dargestellte Gleitlager bei diesem akademischen Beispiel erzeugt eine Spannungssingularität, die bei der Modellierung des Optimierungsproblems berücksichtigt werden muß.

Die numerische Experimente werden unter Verwendung der aufgezeigten Viereckselemente (Q1-Version) im ebenen Verzerrungszustand durchgeführt. Hierbei wird durchgängig ein 32×16 -Element-Netz verwendet.

5.3.4.2 Zielfunktionen, Nebenbedingungen und Designvariablen

Das Gesamtgewicht des Kragarms wird in allen Beispielen minimiert, wobei das zulässige Ausgangsdesign ein Volumen von $V_o = 50 \text{ mm}^3$ besitzt.

Der Mittelwert der Schädigungsfunktion $g(\Xi_s)$ wird für jedes Element durch die untere Grenze $g(\Xi_s) \geq 0.825$ beschränkt, d.h. nur 17.5% Schädigung können auftreten.

Das gewählte Auflager an der unteren linken Ecke der Struktur erzeugt eine Spannungssingularität und damit wird auch die Schädigungsfunktion in dem angrenzenden finiten Elementen unbegrenzt wachsen. Die nachfolgenden Bilder zeigen einen erhöhten Wert der Spannungsfunktion im Bereich des Gleitlagers.

Damit kann an der Stelle der Singularität und in der unmittelbaren Nachbarschaft die Schädigungsfunktion nicht beschränkt werden, d.h. eine Schädigungsnebenbedingung würde verletzt werden und der Optimierungsalgorithmus würde auf Grund der Unzulässigkeit der Iterationspunkte abbrechen. Aus diesem Grund wird die Schädigungsfunktion für die finiten Elemente in der Nähe der Singularität nicht kontrolliert.

Die untere Konturlinie wird durch den Optimierungsprozeß verändert. Der erste Kontrollpunkt $(0, 0)$ ist fixiert und die verbleibenden 8 Kontrollpunkte können sich als Designvariablen vertikal verschieben, wobei die Koordinaten durch die Werte -2 und 4 beschränkt sind. Die C^1 -Kontinuität zwischen beiden Kurven wird durch die Einführung einer Nebenbedingung erreicht, d.h. die Kontrollpunkte an den Stellen $(3.75, 0)$, $(5, 0)$, $(6.25, 0)$ müssen auf einer geraden Linie liegen. Insgesamt werden 8 geometrische Designvariablen betrachtet.

Das SQP-Verfahren (*sequential quadratic programming method*) wird verwendet, wobei ein Maximum von 30 Iterationsschritten und eine Genauigkeit von 10^{-10} in der Norm der Lagrangefunktion gefordert wird.

Der Einfluß der Schädigung auf die optimale Form für unterschiedliche Belastungssituationen wird näher dargelegt.

5.3.4.3 Kontrolle der Schädigungsfunktion

Die Kontrolle der Schädigungsfunktion $g(\Xi_s)$ innerhalb des Gebietes ist eine anspruchsvolle Problemstellung in der Schädigungsmechanik mit einer großen Anwendungsbreite bei technischen Fragestellungen. An dieser Stelle werden nur geometrische Designvariablen betrachtet und die Möglichkeiten der Methodik werden an einem akademischen Beispiel verdeutlicht.

Alle Experimente wurden erfolgreich mit weniger als 30 Iterationsschritten gelöst. Die Ergebnisse für die Zielfunktion sowie die Designvariablen sind unten zusammengefaßt.

Die Verteilung der Schädigung, definiert durch $D := 1 - g(\Xi_s)$, wird in allen Beispielen durch die nachfolgende Skala beschrieben.

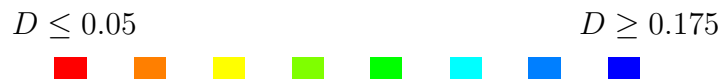


Bild 5.6: Legende: Verteilung der Schädigungsfunktion $D := 1 - g(\Xi_s)$

5.3.4.3.1 Lastfälle ohne Belastungsgeschichte Drei verschiedene Optima wurde für die Belastungsfälle $\lambda_A = (1, 0, 0)$, $\lambda_B = (0, 1, 0)$ und $\lambda_C = (0, 0, 1)$ berechnet.

Die Isolinien der Schädigungsvariablen für die Belastung λ_A verlaufen nahezu parallel zum unteren und oberen Rand des Kragarmes, siehe Bild 5.7. Hierbei tritt eine nenneswerte

Schädigung im Bereich des Auflagers auf. Die rechte Spitze des Kragarmes bleibt fast unbeschädigt, was sich durch die Lastverteilung und die obere Grenze für die Designvariablen erklären läßt.

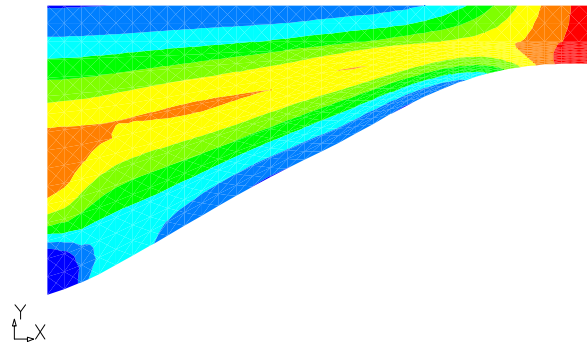


Bild 5.7: Verlauf der Schädigung für das optimale Design A

Der Lastfall λ_B erzeugt eine nahezu homogene Verteilung der Schädigung, siehe Bild 5.8. Alle Kontrollpunkte befinden sich an der oberen Grenze (4.0). Das Schädigungsniveau in einem großen Bereich der Struktur erreicht dabei nur fast die Hälfte der zulässigen Maximalschädigung. Dieses zeigt, daß dieser Lastfall nur einen geringen Beitrag zur maximalen Schädigungsvariablen Ξ_s in allen weiten Lastsituationen beiträgt.

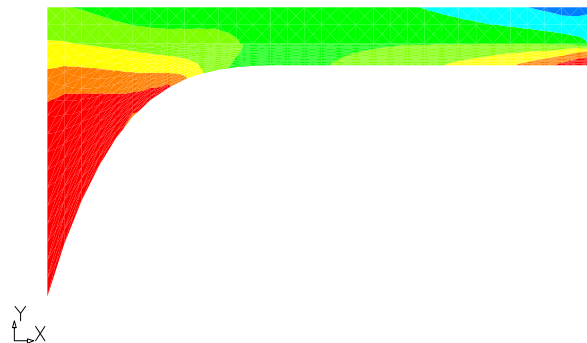


Bild 5.8: Verteilung der Schädigung für das optimale Design B

Das optimale Design für den Lastfall λ_C ergibt die typische Verteilung der Biegemomente für einen einfach gelagerten Balken, siehe Bild 5.9. Die Bereiche mit maximaler Schädigung stimmen mit denen für den Lastfall A überein, siehe Bild 5.7.

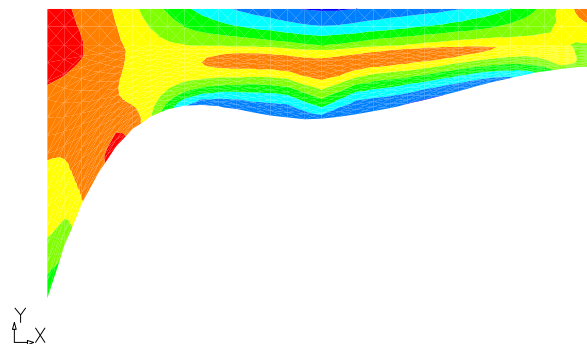
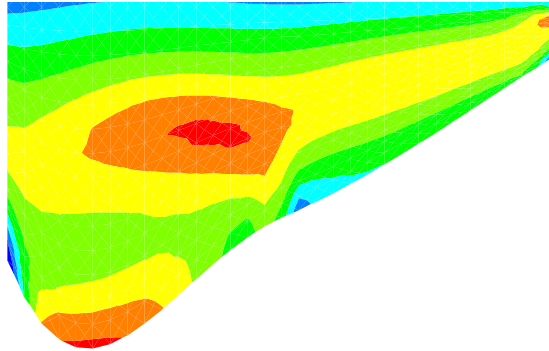


Bild 5.9: Verteilung der Schädigung für das optimale Design C

Ein vierter Lastfall wird untersucht, in dem alle drei Lasten gleichzeitig aufgebracht werden, d.h. $\lambda_D = (1, 1, 1)$. Die hierbei auftretende Schädigung ist naturgemäß wesentlich erhöht. Die Isolinien der Schädigungsvariablen verlaufen nicht hinreichend glatt und parallel zum unteren Rand. Ein verfeinertes Geometriemodell für die Optimierung, d.h. mit mehr Designvariablen, würde das Ergebnis verbessern. Eine Glättung der Struktur zur Reduktion des zusätzlich eingefügten Materials an den Stellen mit geringer Schädigung (siehe die Gebiete in Bild 5.10), erhöht das Schädigungsniveau an der oberen Kragarmoberfläche.



notwendige Form bei Begrenzung der Schädigung

Bild 5.10: Verteilung der Schädigung für das optimale Design D

Die berechneten Ergebnisse für die Designvariablen sind in Tabelle 5.1 dokumentiert. Die Werte y_1, \dots, y_8 geben dabei die vertikale Position der Kontrollpunkte von links nach rechts an.

Design	Ausgang	A	B	C	D
Volumen	50.000	29.408	18.523	22.333	38.332
y_1	0.000	0.343	4.000	4.000	-3.000
y_2	0.000	1.279	4.000	3.672	-1.187
y_3	0.000	1.906	4.000	3.007	0.218
y_4	0.000	2.479	4.000	3.103	0.731
y_5	0.000	3.051	4.000	3.200	1.244
y_6	0.000	4.000	4.000	3.560	1.974
y_7	0.000	4.000	4.000	4.000	2.799
y_8	0.000	4.000	4.000	4.000	3.542

Tabelle 5.1: Position der Kontrollpunkte für das Experiment ohne Belastungsgeschichte

Die bisher gezeigten Ergebnisse verdeutlichen die Abhängigkeit der optimalen Formen von den betrachteten Lastfällen.

5.3.4.3.2 Lastfälle mit Be- und Entlastung Die weiteren Experimente werden für Be- und Entlastungszyklen bestehend aus den vorher genannten Einzellastfällen durchgeführt. In diesem Fall sind alle Lastparameter λ_i positiv, d.h. $\lambda_i \in [0, 1]$. Die betrachteten Zyklen $\lambda_E, \lambda_F, \lambda_G$ sind durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0, 0, 1 \\ 0, 1, 0 \\ 1, 0, 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0, 1, 0 \\ 1, 0, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben, d.h. die Lasten werden in unterschiedlicher Form aufgebracht. Alle Optima sind dem Ergebnis in Bild 5.7 ähnlich, da der Lastfall λ_1 dominiert, aber das Gewicht der optimalen Struktur ist erhöht, siehe Bild 5.11 und die Ergebnisse in Bild 5.2.

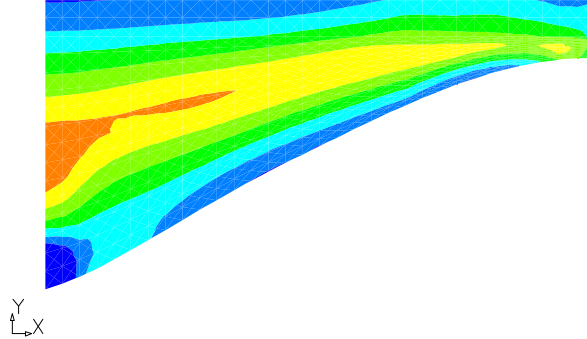


Bild 5.11: Verteilung der Schädigung für das optimale Design E

Alle Bereiche des Kragarms werden durch die komplexe Spannungsverteilung geschädigt. Die Schädigungsvariable D besitzt fast überall randparallele Isolinien, d.h. die Struktur ist (fast) optimal für diese Belastung ausgelegt.

Design	A	E	F	G
Volumen	29.408	29.712	29.686	29.713
y_1	0.343	0.337	0.326	0.337
y_2	1.279	1.290	1.301	1.290
y_3	1.906	1.905	1.897	1.905
y_4	2.479	2.475	2.485	2.475
y_5	3.051	3.045	3.073	3.045
y_6	4.000	3.660	3.648	3.660
y_7	4.000	4.000	4.000	4.000
y_8	4.000	4.000	4.000	4.000

Tabelle 5.2: Ergebnisse für das Experiment $\lambda_E, \lambda_F, \lambda_G$

Vergleichbare Experimente wurden durchgeführt, bei denen die Lasten λ_i in Teilschritten und in unterschiedlicher Reihenfolge aufgebracht wurden, d.h. z.B. in der Form

$$\left\{ \begin{array}{l} (0.5, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \\ (0.5, 0, 0) \end{array} \right\}.$$

Die erzielten Optima sind vergleichbar mit Bild 5.10, aber weisen ein leicht erhöhtes Gewicht auf. Dieses Phänomen ist mit der größeren auftretenden maximalen Schädigung zu erklären.

Die bisher durchgeführten Experimente zeigen die Abhängigkeit des Optimums von dem gewählten Belastungsfall. Die Unterschiede sind in diesem Beispiel nicht besonders signifikant, was sich aus dem elastischen Materialverhalten, der einfachen Beispielgeometrie und der Begrenzung auf nur positive Belastungsparameter erklären läßt.

Das letzte Experiment zeigt deshalb auch negative Belastungsparameter, d.h. einen echten Belastungszyklus. Das Belastungsschema ist

$$\lambda_H = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 1) \\ (0, 0, 1) \\ (0, -1, 0) \\ (0, -1, -1) \\ (1, 0, 0) \end{array} \right\},$$

d.h. die erste Last $\lambda_1 = 1$ wird auf eine bereits durch einen Zyklus der Lasten λ_2 und λ_3 vorgeschädigte Struktur aufgebracht. Die zugehörigen optimalen Formen sind nunmehr deutlich von Bild 5.7 verschieden. Die Einhaltung der Schädigungsbeschränkung ($D \leq 0.175$) an der Oberkante erfordert eine Geometrie, die an der unteren Kante des Kragarms nicht maximal beansprucht wird. In diesem Fall tritt an der unteren Kante des Kragarms wiederum keine maximale Schädigung auf, um an der Oberkante zulässige Werte zu erhalten.

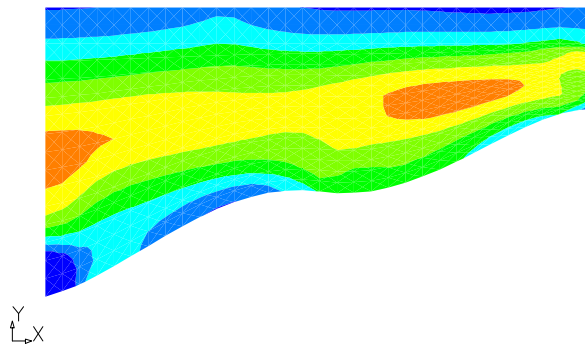


Bild 5.12: Verteilung der Schädigung für das optimale Design H

Der Versuch, die untere Kante glätten zu wollen, führt zu einer Verletzung der Nebenbedingungen an der oberen Kragarmkante, siehe Bild 5.13.

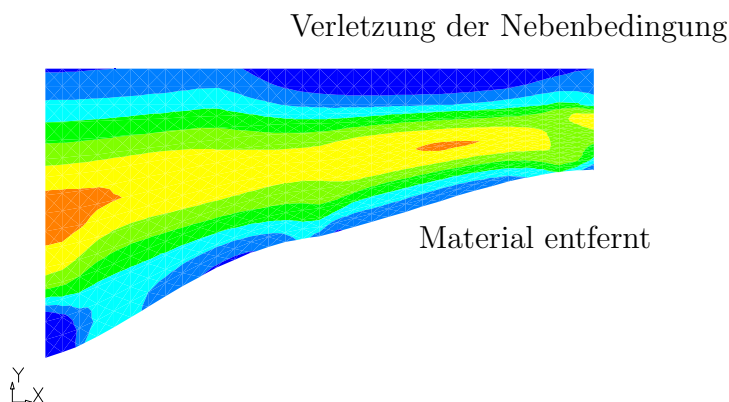


Bild 5.13: Verletzung der Nebenbedingung bei Veränderung des Designs

Alle numerischen Experimente wurden auf einem PC (Pentium II, 450 Mhz, Linux, G77 Fortran-Compiler) durchgeführt. Die Ergebnisse konnten innerhalb weniger Minuten (80 - 500 Sekunden) berechnet werden, wobei die Rechenzeit wesentlich von der Anzahl der Iterationsschritte (8-28) im SQP-Verfahren beeinflusst wurde. Hierbei wurden ungefähr 500 Nebenbedingungen (Elementwerte der Schädigung) und die zugehörigen Sensitivitäten bzgl.

der 8 Designvariablen in jedem Iterationsschritt berechnet. Eine weitere Beschleunigung der Berechnung kann durch eine Verbesserung der Berechnungen zur direkten und adjungierten Methode innerhalb der Elemente erreicht werden. Weiterhin kann die Berechnung der Sensitivitäten in den Bereichen mit geringer Schädigung vermieden werden.

5.3.5 Zusammenfassung und Ausblick

Die numerischen Ergebnisse und der hierfür erforderliche begrenzte numerische Aufwand bestätigen die Effizienz des in diesem Abschnitt aufgezeigten Berechnungsverfahrens. Diese Aussage gilt insbesondere im Vergleich zur numerischen Sensitivitätsanalyse, die zu Testzwecken stets herangezogen wurde.

Besondere Bedeutung muß hierbei der Behandlung der Geschichtsabhängigkeit, d.h. der Sensitivität der internen Variablen (hier die Schädigungsvariablen), beigemessen werden. Sowohl der Speicherplatzbedarf als auch die Rechenzeit wird dabei von der Anzahl der Lastschritte und der Anzahl der Designvariablen bestimmt. Eine Anwendung auf große Problemstellungen erfordert auch für die hier vorgestellte Methodik noch eine Analyse der Größenordnungen, z.B. für den Speicherplatzbedarf und die Rechenzeit. Die problemangepaßte Umsetzung und Optimierung des Algorithmus bei praxisrelevanten Anwendungen bleibt der weiteren Forschung vorbehalten.

Die aufgezeigte Methodik soll letztendlich dazu beitragen, z.B. den Einfluß der Belastungsgeschichte auf das aktuelle Deformationsverhalten sowie auf die ermittelte optimale Form zu untersuchen. Diese Fragestellung und weitere vergleichbare Probleme, wie z.B. die Effekte einer im Optimum zusätzlich aufgetragenen Zusatzlast auf das Strukturverhalten, sind für die Ingenieurpraxis von großer Bedeutung, können aber derzeit nur ansatzweise behandelt werden. Aus diesem Grunde müssen Sensitivitätsanalyse und problemgerechte Modellierung der Optimierungsaufgabe gleichermaßen sorgfältig behandelt werden.

Kapitel 6

Formoptimierungsprobleme

In diesem Abschnitt werden drei unterschiedliche Anwendungsbereiche der Sensitivitätsanalyse im Rahmen der nichtlinearen Mechanik vorgestellt.

Im ersten Beispiel werden die mittels der Sensitivitätsanalyse berechneten Gradienten der Zielfunktion und Nebenbedingungen innerhalb eines nichtlinearen Optimierungsverfahrens (hier das SQP-Verfahren) zur Formoptimierung des Querschnittes eines PKW-Stoßfängers verwendet. Als Unterproblem wird dabei ebenfalls die Parameteridentifikation angesprochen, die durch einen Least-Squares-Fit von Meß- und Rechenergebnissen eine gezielte Bestimmung der Materialparameter nichtlinearer Stoffgesetze ermöglicht. Der Einfluß der Elementformulierung und der FE-Diskretisierung auf das Optimierungsergebnis wird an diesem Beispiel verdeutlicht.

Die im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik auftretenden makroskopischen Risse werden im zweiten Beispiel als spezielle Formänderungen betrachtet. Anders als bei der Formoptimierung tritt die Formänderung jedoch unter Belastung auf, d.h. sie wird nicht an der undeformierten Struktur vorgenommen. Die Verwendung der Sensitivitätsanalyse für die Ermittlung der zugehörigen Rißrichtungen wird erörtert und ein numerisches Berechnungsverfahren wird vorgestellt.

Das letzte Beispiel beschäftigt sich mit der Verwendung der Sensitivitäten für die Definition der Robustheit von Strukturen. Die Erhöhung der Zuverlässigkeit einer Struktur unter Verwendung zweiter Variationen der Schadensfunktionen wird diskutiert, ein Beispiel muß die Anwendbarkeit zukünftig noch unter Beweis stellen.

Inhaltsangabe

6.1	Formoptimierung eines PKW-Stoßfängers	117
6.1.1	Die Problemstellung	117
6.1.2	Modellierung und Durchführung der Optimierungsaufgabe	117
6.1.3	Parameteridentifikation für das Materialverhalten	119
6.1.4	Ausgangsgeometrie und zugehörige Deformation	121
6.1.5	Erste optimale Form und zugehörige Deformation	124
6.1.6	Weitere Verbesserung und zugehörige Deformation	125
6.1.7	Zusammenfassung und Ausblick	127
6.2	Optimierung in der Bruchmechanik	128
6.2.1	Theoretische Untersuchungen zur Energiefreisetzungsrate	128
6.2.2	Energiefreisetzungsrate für feste Rißrichtung	129
6.2.3	Berechnung der maximalen Energiefreisetzungsrate	134
6.2.4	Sensitivitäten der Energiefreisetzungsrate	137
6.2.5	Sensitivität der Maximalwerte	139
6.2.6	Numerische Beispiele	140
6.2.7	Zusammenfassung und Ausblick	144
6.3	Ein Konzept für robuste Konstruktionen	145
6.3.1	Unempfindlichkeit und Zuverlässigkeit von Strukturen	145
6.3.2	Erweiterung durch Verwendung von Sensitivitäten	146
6.3.3	Erste Variation der schwachen Form	147
6.3.4	Zweite Variation der schwachen Form	149
6.3.5	Variationen von Zielfunktion und Nebenbedingung	152
6.3.6	Definition der robusten Zuverlässigkeit mittels Sensitivitäten	153
6.3.7	Zusammenfassung und Ausblick	155

6.1 Formoptimierung eines PKW-Stoßfängers

Die dokumentierten qualitativen Ergebnisse wurden im Anschluß an eine Projektstudie für die Abteilung Forschung-Fahrzeugtechnik der Volkswagen AG, Wolfsburg, erarbeitet. Auf die Angabe quantitativer Detailergebnisse wird verzichtet, siehe hierzu [18].

6.1.1 Die Problemstellung

Die Zielfunktion der vorgegebenen Aufgabenstellung ist die Verringerung der Reparaturkosten bei „Versicherungs-Crash-Unfällen“, d.h. bei kleinen Aufprallgeschwindigkeiten von 8 km/h. Das nachfolgende Bild veranschaulicht die Problematik.



Bild 6.1: Modellierung des Stoßfängers als nichtlineare Feder

Das nichtlineare Deformationsverhalten des Stoßfängers soll dem in Bild 6.2 dargestellten optimalen Lastverformungsverlauf entsprechen, damit die kinetische Energie kontrolliert in elastisch gespeicherte Energie umgewandelt wird. Die Optimierungsaufgabe besteht darin, die zugehörige geometrische Form des Stoßfängers zu finden.

6.1.2 Modellierung und Durchführung der Optimierungsaufgabe

Die realitätsnahe Berechnung und Optimierung eines im PKW eingebauten Stoßfängers ist äußerst komplex. Für die bereits erwähnte Projektstudie wurde daher die Optimierung der Struktur unter vereinfachten Rand- und Belastungsbedingungen durchgeführt. Hierzu wurden die durchgeführten Versuche an stabförmigen Probekörpern mit konstanten Querschnitten herangezogen, d.h. die Optimierungsaufgabe konnte auf die Bestimmung einer optimalen Querschnittsgeometrie im ebenen Verzerrungszustand vereinfacht werden. Die Approximation des realen Materialverhaltens durch ein berechenbares numerisches Modell wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

Die mathematische Formulierung der Zielfunktion führt auf eine Fehlerquadratminimierung der tatsächlichen vertikalen Verschiebung der Steife gegenüber der vorgegebenen Sollverschiebung für mehrere Belastungsstufen, d.h. auf die Formulierung

$$f = \sum_{i=1}^{n_{last}} (V_{Pi} - \bar{V}_{Pi})^2 \longrightarrow \min .$$

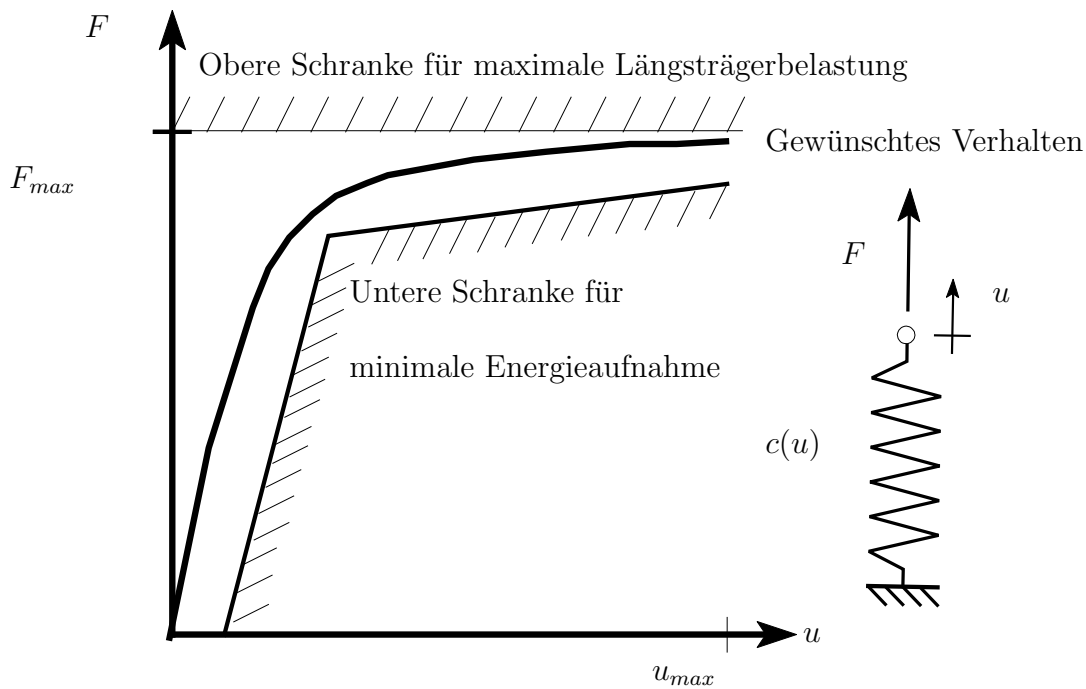


Bild 6.2: Darstellung der gewünschten Last-Verformungs-Kurve des Stoßfängers

Die Verwendung von Informationen aus unterschiedlichen Laststufen erfordert (neben dem nichtlinearen Strukturverhalten) ein inkrementelles Berechnungsverfahren.

Die Nebenbedingungen ergeben sich aus den oberen und unteren Schranken für die Last-Verformungs-Kurve, d.h. sie werden ebenfalls im Rahmen einer inkrementellen Strukturanalyse ermittelt.

Die Designvariablen kontrollieren die geometrische Gestalt der Stoßfängerquerschnittes, d.h. die Kontrollpunkte der Bézierbeschreibung modellieren die Außenwangen der Steife, siehe Bild 6.5. Auf die Angabe quantitativer Detailinformationen wird an dieser Stelle verzichtet, siehe [18]. Hierdurch ist sowohl eine beliebige Geometrie der Wange als auch eine beliebige Wanddicke zu erreichen. An dieser Stelle wurde bewußt auf die Berücksichtigung fertigungstechnischer oder sonstiger geometrischer Zwangsbedingungen verzichtet.

Die Sensitivitätsanalyse wurde vollständig analytisch durchgeführt, d.h.

- Finite-Element-Diskretisierung der Gleichgewichtsbedingungen,
- CAD-Beschreibung und Veränderung der Geometrie sowie
- Modifikation des FE-Netzes bei Geometrieänderung.

Die Details der Vorgehensweise sind in [43, 16, 94, 169] beschrieben.

6.1.3 Parameteridentifikation für das Materialverhalten

Das reale Materialverhalten des verwendeten Kunststoffes, siehe Bild 6.4, kann folgendermaßen beschrieben werden:

- nichtlinear viskoelastisch-plastisches Verhalten sowie
- zeit- und temperaturabhängige Materialkenngrößen sowie
- Materialerweichung bei großen Verzerrungen.

Die Modellierung des tatsächlichen Materialverhaltens erfolgte über ein vereinfachtes mathematisches Werkstoffmodell, d.h. als ein nichtlineares, hyperelastisches Material. Dieser Übergang war für die durchgeführten Experimente aufgrund der folgenden Annahmen möglich.

- Unter Voraussetzung einer konstanten Temperatur (23°C) und konstanter Verzerrungsgeschwindigkeit (30 mm/s) ergeben sich im Versuch die folgenden Materialparameter

$$\begin{aligned} \text{Elastizitätsmodul} & E = 1255\text{ N/mm}^2, \\ \text{Querkontraktionszahl} & \nu = 0,45 \quad \text{und} \\ \text{Kompressionsmodul} & K = 4183,3\text{ N/mm}^2. \end{aligned}$$

- Das reale Materialverhalten wird durch eine eindeutige elastische Be- und Entlastungskurve idealisiert. Mit diesen Annahmen ist eine Approximation des Materialverhaltens durch ein nichtlinear-elastisches Gesetz möglich, d.h.

$$W = \hat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \hat{U}(J)$$

mit isochorem und volumetrischem Anteil in der Form

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \sum_{i=1}^3 \omega(\lambda_i) = \sum_{i=1}^3 \beta \left(\lambda_i + \alpha \exp \frac{1 - \lambda_i}{\alpha} \right) \\ \hat{U} &= \frac{1}{2} K \left(\frac{1}{2} (J^2 - 1) - \ln J \right). \end{aligned}$$

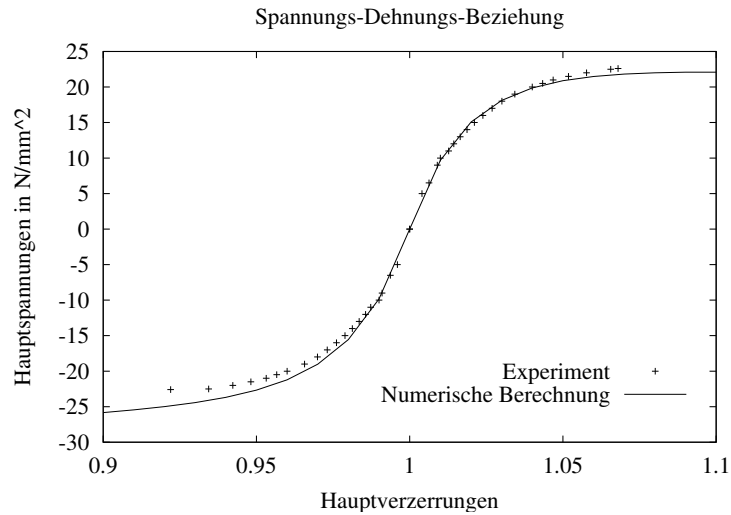
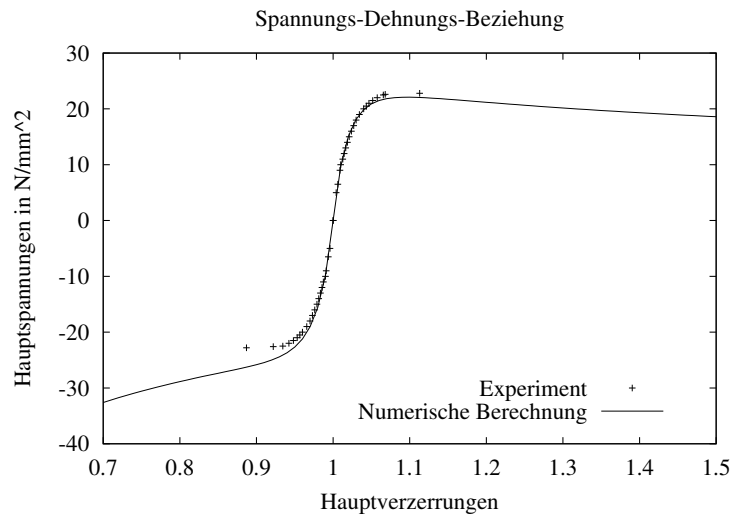
- Durch die Lösung einer Fehlerquadrataufgabe zwischen den experimentellen Werten und den berechneten Werten, siehe die Bilder 6.3 und 6.4, ergeben sich die Materialparameter

$$\alpha = 0,014 \quad \text{und} \quad \beta = 12,04\text{ N/mm}^2.$$

Weitere Hinweise zum Materialgesetz sowie der Anwendung der Optimierungsalgorithmen auf die Parameteridentifikation finden sich in [16].

Mit diesen Werten konnten die experimentell bestimmten Spannungsdehnungslinien hinreichend genau beschrieben werden. Die Identifikation erfolgte dabei im Bereich der maximalen Eigenwerte von $0.9 \leq \lambda_1 \leq 1.1$. Die Graphik zeigt im betrachteten Bereich eine für die weiteren Untersuchungen hinreichend gute Übereinstimmung von Numerik und Experiment.

Für den erweiterten Bereich $0.7 \leq \lambda_1 \leq 1.5$ zeigt das numerische Modell eine Versteifung für hohe Drücke sowie eine Materialerweichung (Softening) für große Zugverzerrungen. Die

Bild 6.3: Spannungsdehnungslinie für den Bereich $0.9 \leq \lambda_1 \leq 1.1$ Bild 6.4: Spannungsdehnungslinie für den Bereich $0.7 \leq \lambda_1 \leq 1.5$

experimentellen Werte zur Bestätigung der numerischen Beobachtungen liegen für diesen Bereich nicht vor.

Zusammenfassend ist festzuhalten, daß mit dem gewählten vereinfachten Modell das komplexe Materialverhalten der reale Struktur nur angenähert werden kann. Für die qualitativen Untersuchungen im Rahmen der durchgeführten Projektstudie sind diese Vereinfachungen sinnvoll.

6.1.4 Ausgangsgeometrie und zugehörige Deformation

Die numerischen Untersuchungen wurden, wie in Abschnitt 6.1.2 erläutert, am zweidimensionalen Querschnitt im ebenen Verzerrungszustand durchgeführt. Die äußere Belastung wurde durch eine Linienlast und inkrementell mittels Verschiebungssteuerung aufgebracht. Die Steife lag im Versuch auf einer ebenen Unterlage und stützte sich bei Deformation nur in den äußeren Bereichen auf. Dieses Verhalten wurde in der numerischen Berechnung durch Gleitlager in den äußeren Punkten beschrieben.

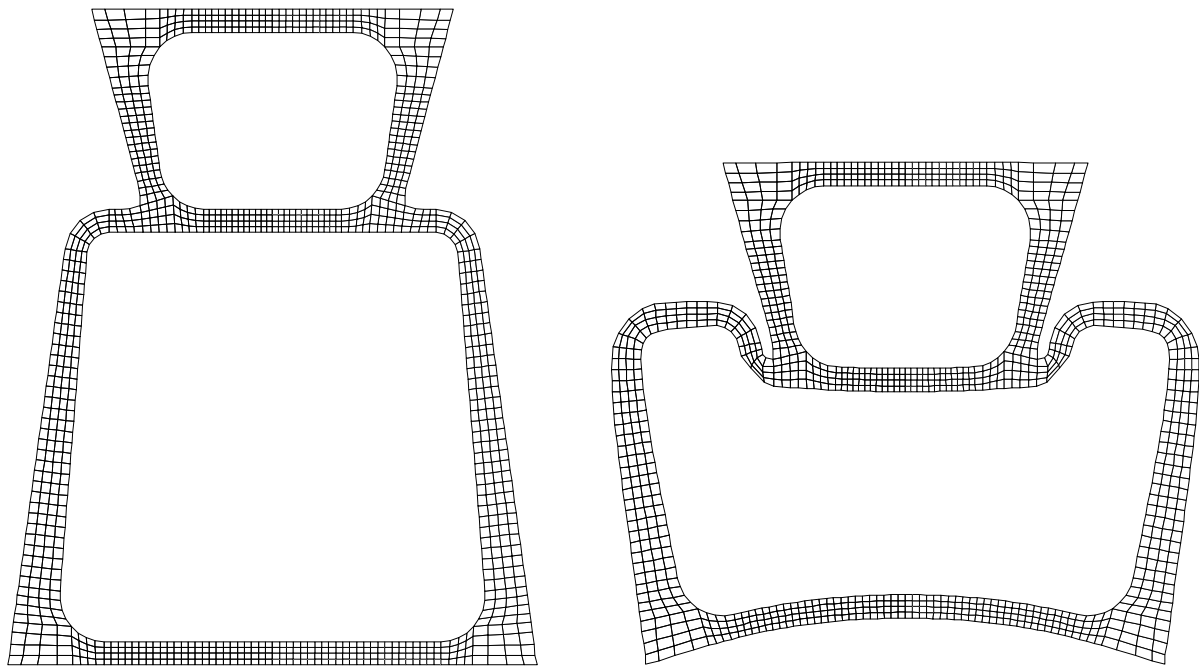


Bild 6.5: Ausgangsgeometrie und deformierte Struktur bei 34 mm Verschiebung

Die Bilder zeigen ein gleichmäßig verfeinertes FE-Netz mit 4 Elementen über die Profildicke. Gewählt wurde hierbei ein gemischtes Q1P0-Element, welches sich für die numerische Behandlung quasi-inkompressibler gummiartiger Materialien als geeignet erwiesen hat, siehe hierzu z.B. [230] und die Literatur hierin.

In den aufgeführten Lastverschiebungskurven wird jeweils die aufgebrachte Spannung der Vertikalverschiebung der Steifenoberkante gegenübergestellt. Die Sollverschiebung ist in allen Graphiken aufgeführt und entspricht der gewählten Anfangsaufgabe. Nur die Anzahl der Elemente und der Elementtyp wird in den Legenden angegeben. Der notwendige ergänzende Hinweis „über die Dicke“ wurde weggelassen. Ebenfalls meint die Bezeichnung der Abzisse die Vertikalverschiebung der Steifenoberkante.

Die experimentellen Ergebnisse konnten durch das gewählte Modell unter Verwendung des im letzten Abschnitt ermittelten Materialverhalten qualitativ hinreichend genau beschrieben werden, siehe die deformierten Versuchskörper im Vergleich zur Numerik in [18]. Auffällig ist der Abfall der Lastverschiebungskurve im Bereich einer vertikalen Verschiebung von ca. 10 mm. Der Grund hierfür liegt in der Ausbildung einer Zone mit großen Verzerrungen und Spannungen, die sich anschaulich als eine Art „Fließgelenk“ beschreiben läßt. Bei einer weiteren Deformation tritt ab ca. 70 mm Verschiebung eine merkliche Versteifung auf, die sich durch den Selbstkontakt der Steife ergibt.

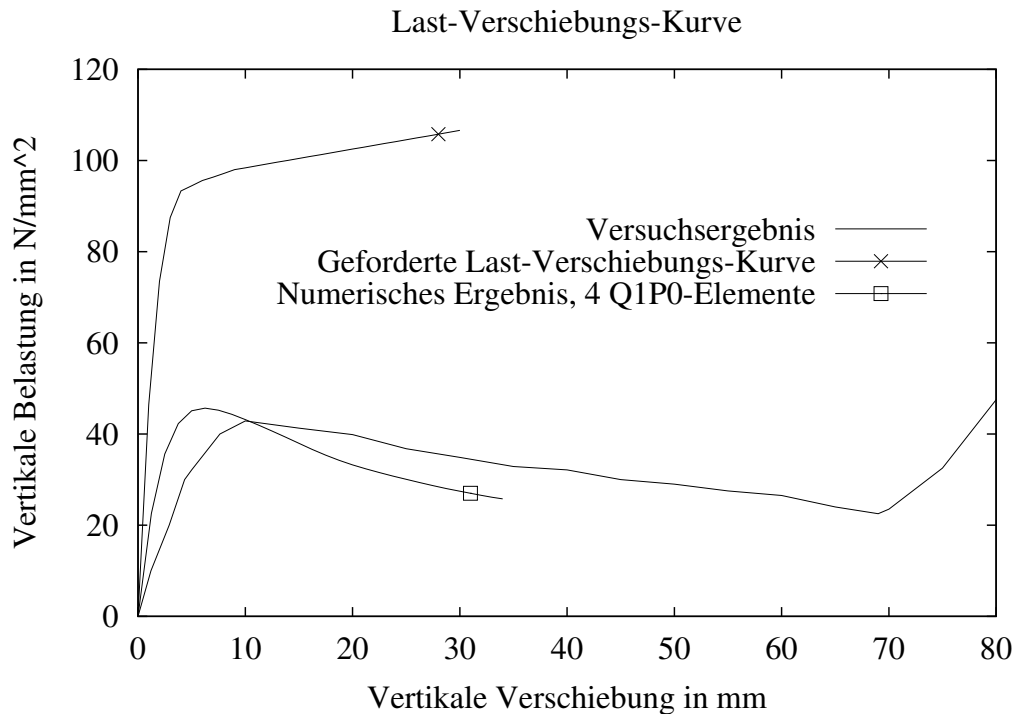


Bild 6.6: Lastverschiebungskurve für die Ausgangsgeometrie

Auf eine weitere Verbesserung der Modellierung wurde zunächst verzichtet, da die quantitative Approximation der Versuchsergebnisse durch das numerische Modell in Vergleich zum gewünschten Verhalten hinreichend genau erschien.

Die Effekte einer unterschiedlichen Verfeinerung der FE-Netzes und die Wahl unterschiedlicher FE-Beschreibungen wurden untersucht und sind in den beiden folgenden Abbildungen angegeben.

Die Variation der Elementanzahl über die Wanddicke zeigt den Einfluß der FE-Diskretisierung auf das Ergebnis, siehe Bild 6.7. Hierbei wurde auf den Einsatz einer adaptiven Netzverfeinerung verzichtet. Erwartungsgemäß zeigt die Erhöhung der Elementanzahl eine Aufweichung der Lastverschiebungskurve, da die gewählten Elementtypen bei einer Biegebeanspruchung etwas zu steif sind und die Seiten-Längen-Verhältnisse einiger Elemente ungünstig sind.

Der Abhängigkeit vom der gewählten Elementbeschreibung zeigt sich im Vergleich der Lastverschiebungskurven in Bild 6.8, wo die Ergebnisse für die Q1- bzw. Q1P0-Beschreibung gegenübergestellt sind.

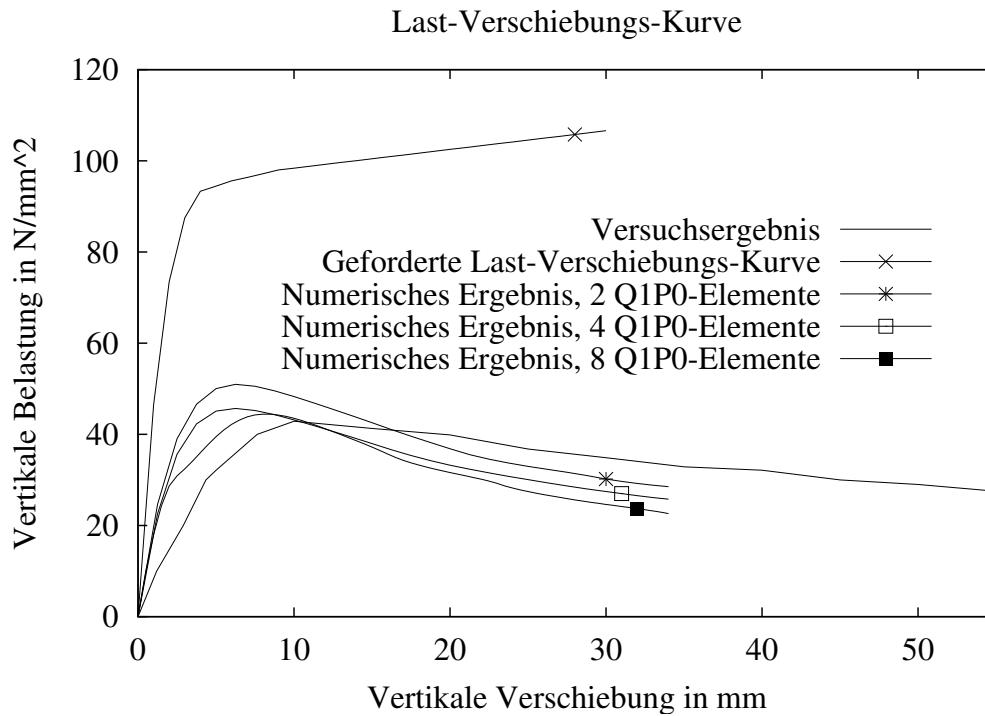


Bild 6.7: Vergleich unterschiedlicher FE-Diskretisierungen

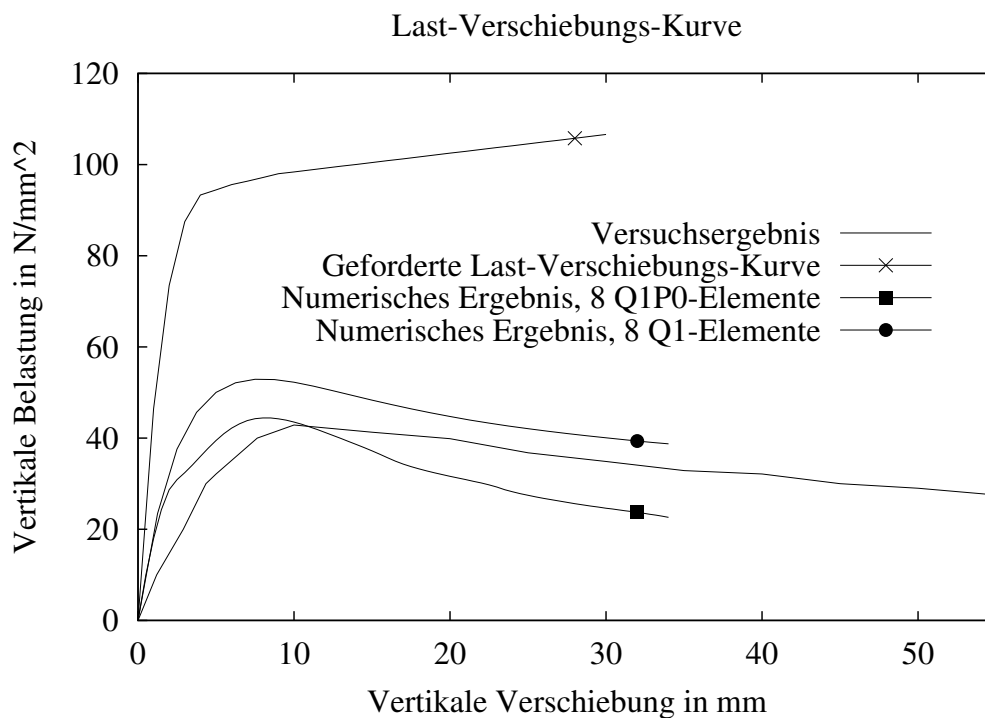


Bild 6.8: Vergleich unterschiedlicher Elementformulierungen

6.1.5 Erste optimale Form und zugehörige Deformation

Eine erste Optimierung der Steifengeometrie wurde für das gewählte FE-Netz mit 4 Elementen über die Wanddicke unter Verwendung der Q1P0-Elementformulierung durchgeführt.

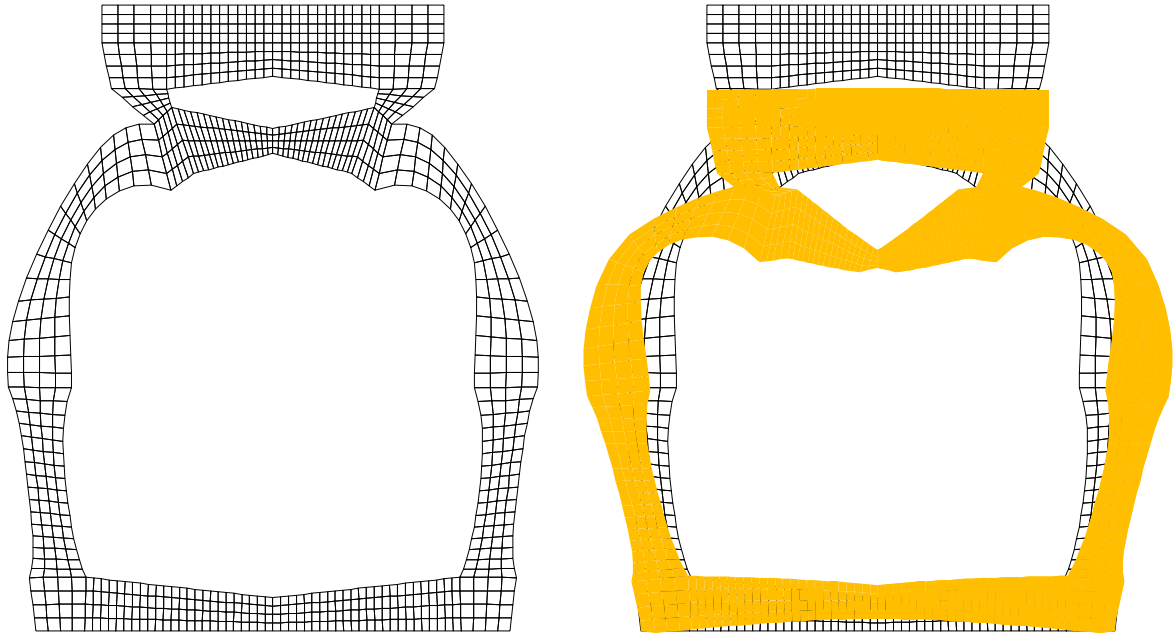


Bild 6.9: Erste optimale Geometrie und deformierte Struktur bei 15 mm Verschiebung

Der untere Steifenbereich (erster Hohlkasten) wurde vergrößert und die Bereiche möglicher Fließgelenke versteift. Hierdurch wurden zum einen die inneren Hebelarme verändert, was einen positiven Einfluß auf die von den Wänden durch Biegung aufnehmbaren Kräfte bzw. Momente bedeutet. Der obere Hohlkasten trägt bei diesem Entwurf kaum noch durch Biegung zur Energiespeicherung bei. Dieser Effekt ist auch in der anschließenden weiteren Verbesserung zu beobachten, siehe den folgenden Abschnitt. Es wurde in dieser Studie nicht versucht, ein lokales Minimum der gestellten Aufgabe zu finden, bei dem sowohl der untere als auch der obere Hohlkasten durch Biegung der Seitenwände Energie speichern.

Das für den Bereich bis 15 mm ermittelte Optimierungsergebnis zeigt die Möglichkeiten des Verfahrens, eine gewünschte Sollverschiebung durch Variation der Querschnittsgeometrie zu ermitteln, siehe das Ergebnis „Optimale Geometrie, 4 Q1P0-Elemente“ (hellblaue Kurve) im Vergleich zur „Geforderte Last-Verschiebungs-Kurve“ (dunkelblaue Kurve) in Bild 6.10.

Eine Nachuntersuchung der Ergebnisse mit verfeinerten bzw. vergrößerten FE-Netzen bestätigt den Einfluß der Diskretisierung auf das Optimierungsergebnis. Durch die Vergrößerung auf nur zwei Elemente über die Dicke bzw. durch die Verfeinerung auf acht Elemente über die Dicke treten signifikante quantitative Änderungen des berechneten Lastniveaus auf. Eine qualitative Veränderung der Ergebnisse für unterschiedliche Diskretisierungen ist jedoch nicht zu beobachten.

In der Projektstudie wurde auf die Verwendung eines auskonvergierten Netzes verzichtet, weil sich der Ort maximaler Verzerrungen bei fortschreitender Deformation verändert.

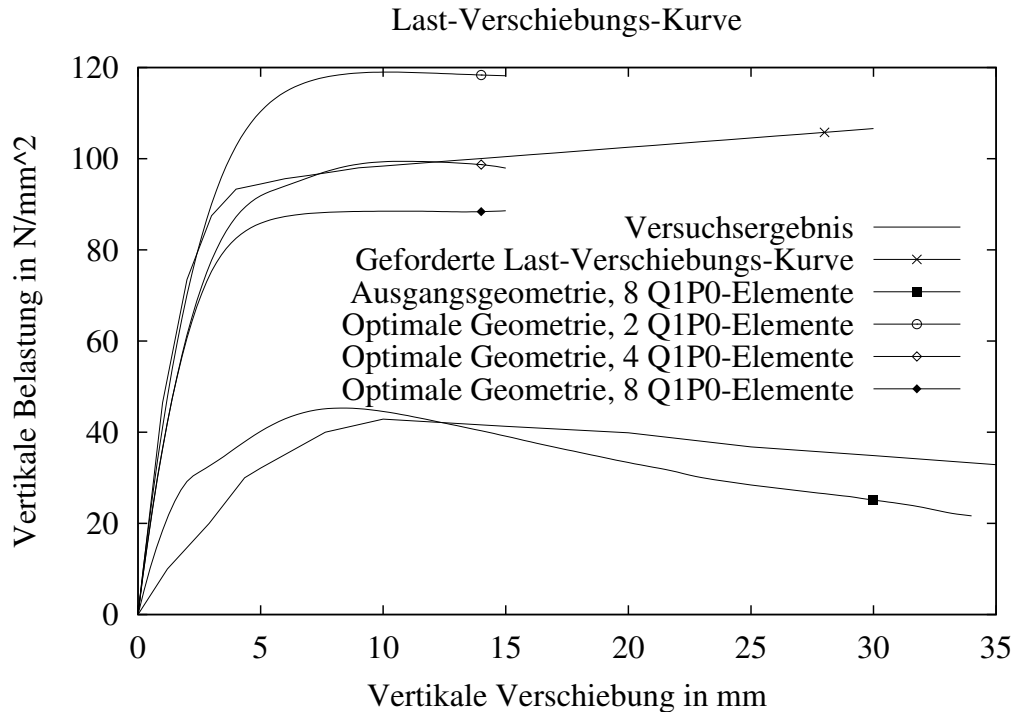


Bild 6.10: Lastverschiebungskurven für die erste optimale Geometrie

6.1.6 Weitere Verbesserung und zugehörige Deformation

In einer zweiten Optimierung wurden die Endergebnisse der ersten Optimierungsberechnung als Startwerte genommen, die Elementanzahl über die Steifendicke auf 8 Q1P0-Elemente erhöht sowie der betrachtete Bereich der Verschiebung von 15 mm auf 35 mm erhöht.

Das Optimierungsergebnis (Kurve „Optimale Geometrie, 8 Q1P0-Elemente“) zeigt eine deutliche Annäherung an die gewünschte Sollverschiebung für den Bereich bis ungefähr 15 mm Verschiebung, siehe Bild 6.11, Für den sich anschließenden Bereich ist ein deutlicher Abfall der Lastverschiebungskurve zu beobachten, siehe auch das Materialverhalten in Abschnitt 6.1.3.

Die durch das Optimierungsverfahren ermittelte geometrische Form wurde durch die Volkswagen AG hergestellt und erneut unter den bereits genannten Bedingungen in einem Versuch getestet. Das Versuchsergebnis ist den numerischen Ergebnissen gegenübergestellt, siehe die Kurve „Versuch Optimale Geometrie“. Im Bereich bis 15 mm liegt die Versuchskurve deutlich unter dem vorgegebenen Soll, kann diese aber für den Bereich 15 mm bis 30 mm gut annähern.

Zum Vergleich sind die Versuchsergebnisse sowie die Ergebnisse für die Ausgangsgeometrie beigefügt.

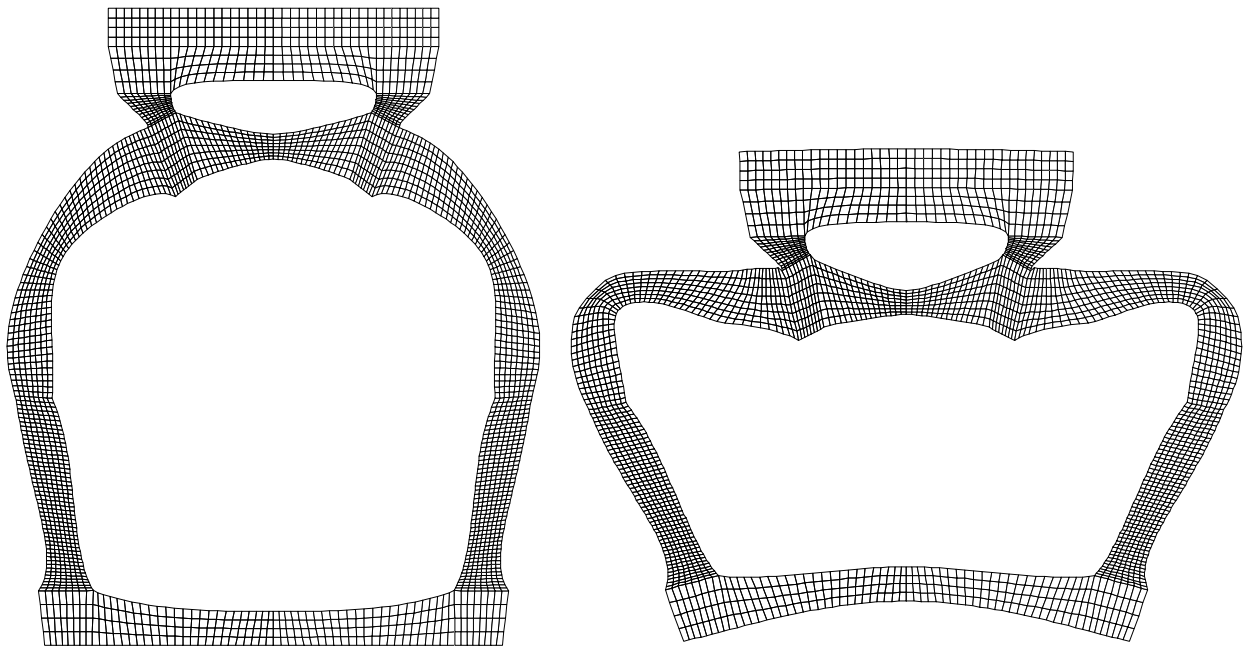


Bild 6.11: Zweites Optimum und deformierte Struktur bei 35 mm Verschiebung

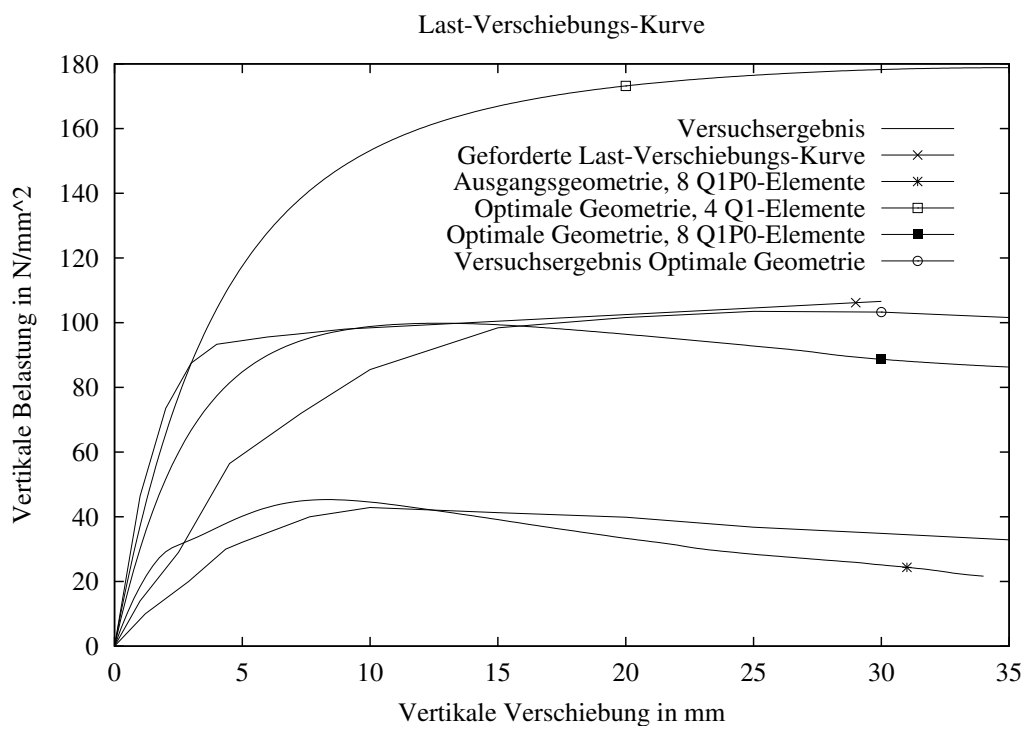


Bild 6.12: Lastverschiebungskurven für die zweite optimale Geometrie

6.1.7 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beispiel wurde der Querschnitt eines PKW-Stoßfängers optimiert, damit das Deformationsverhalten dem einer vorgegebenen Lastverschiebungskurve entspricht. Zur Vereinfachung des Optimierungsmodells wurde das reale Materialverhalten durch ein nichtlinear-elastisches Modell approximiert.

Die durchgeführten Versuche für die Ausgangsgeometrie nach Bild 6.5 sowie für die optimale Form nach Bild 6.11, siehe [18], zeigten, daß die gewählte Approximation die wesentlichen Effekte, wie z.B. den Verlauf der Lastverformungskurve sowie die Deformationsfigur, hinreichend genau beschreibt.

Die Untersuchungen verdeutlichten weiterhin die Bedeutung der FE-Diskretisierung sowie der Wahl geeigneter Elementformulierungen. Adaptive Methoden wurden in diesem Beispiel nicht verwendet; dieses bleibt einer weiteren Untersuchung vorbehalten.

Die geeignete Wahl des Optimierungsmodells, d.h. der Zielfunktion, der Nebenbedingungen sowie der Designvariablen für die jeweilige akademische oder reale Fragestellung, ist von überragender Bedeutung für den Erfolg. Die Sensitivitätsanalyse stellt nur einen –wichtigen– Baustein dar, der erforderlich ist, um richtige Gradienten für den Optimierungsalgorithmus zu liefern. Gerade bei komplexen industriellen Fragestellungen ist es fast unmöglich, die Gradienten (Sensitivitäten) vollständig analytisch bereitzustellen.

Diese Tendenz ist auch bei der vorliegenden Querschnittsoptimierung sichtbar, da eine realistischere Behandlung neben dem viskoplastischen Materialverhalten auch komplexes nichtlineares Strukturverhalten berücksichtigen muß. Der Selbstkontakt der Steife sowie mögliche Stabilitätsprobleme der Seitenwangen bzw. der Gesamtstruktur seien beispielhaft genannt, um die weiteren offenen Fragestellungen zu benennen.

6.2 Optimierung in der Bruchmechanik

Es wird ein linear-elastisches System mit Formänderungsenergiefunktion $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ und Materialgesetz $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ betrachtet, wobei $\boldsymbol{\varepsilon}$ den linearen Verzerrungstensor, $\boldsymbol{\sigma}$ den Spannungstensor und \mathbb{C} den vierstufigen Elastizitätstensor darstellt. Die gesamte potentielle Energie Π ist durch

$$\Pi = \Pi^{int} + \Pi^{ext} = \int_{\Omega_o} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) dV - \int_{\partial\Omega_o} \bar{\mathbf{t}}_o \cdot \mathbf{u} dA \quad (6.1)$$

gegeben. Hierbei bezeichnet \mathbf{u} den Verschiebungsvektor und $\bar{\mathbf{t}}_o$ den äußeren Lastvektor. Die potentielle Energie Π ist im Gleichgewichtszustand minimal und die schwache Form des Gleichgewichtes verschwindet, d.h. $\mathcal{R} := \delta_u \Pi = 0$.

Die Bedeutung der Energiefreisetzungsrate (EFR) \mathcal{G} in der linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM) ist wohlbekannt, siehe z.B. [2, 61, 109]. Für 2-D Testbeispiele wie z.B. DENT (double edge notched tension, siehe z.B. [2, 168]) ist die Energiefreisetzungsrate durch $\mathcal{G} = -d\Pi/da$ definiert, wobei a die Länge des Anfangsrisses beschreibt, siehe Bild 6.13. Der Riß wächst, falls die maximale Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_{max} einen materialabhängigen kritischen Wert \mathcal{G}_{crit} überschreitet, siehe z.B. [132, 159] bzgl. eines auf der maximalen Energiefreisetzungsrate basierenden Rißkriteriums. Üblicherweise muß \mathcal{G}_{max} numerisch bestimmt werden. Die sich ergebende Rißrichtung der Rißspitze muß dabei nicht notwendigerweise mit der aktuellen Orientierung des Risses übereinstimmen.

6.2.1 Theoretische Untersuchungen zur Energiefreisetzungsrate

Das Rißwachstum kann als ein Spezialfall der Formänderung eines Körpers betrachtet werden, welche zwar die Gesamtmasse unverändert läßt, jedoch neue freie Oberflächen erzeugt. Diese Beobachtung führt zur „virtuellen Rißöffnungsmethode“ (virtual crack extension method), siehe z.B. [13, 82, 83, 132, 184] und zur Reformulierung der Energiefreisetzungsrate als totale Variation der potentiellen Energie bzgl. eines virtuellen Rißöffnungsfeldes $\delta\mathbf{X}$, siehe [168, 26]. Diese Technik ist seit langem bekannt und wird vielfach in der linear-elastischen Bruchmechanik verwendet [116, 98, 157, 194]. Unter Verwendung der Notation und der bisher aufgezeigten Zusammenhänge zur variationellen Sensitivitätsanalyse bei Formänderungen folgt damit

$$\mathcal{G} = -\delta\Pi = -\delta_u \Pi - \delta_X \Pi = -\delta_X \Pi = -\delta_X \Pi^{int} + \delta_X \Pi^{ext} = -\delta_X \Pi^{int}, \quad (6.2)$$

da $\mathcal{R} = \delta_u \Pi = 0$ und $\delta_X \Pi^{ext} = 0$, weil $\delta\bar{\mathbf{t}}_o = \mathbf{0}$ und $\delta dA = 0$ auf $\partial\Omega_o$. Damit folgt für die Energiefreisetzungsrate die Darstellung

$$\mathcal{G} = \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta\mathbf{X} dV - \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \text{Div} \delta\mathbf{X} dV, \quad (6.3)$$

wobei $\delta\mathbf{X}$ das virtuelle Rißöffnungsfeld darstellt. Die Energiefreisetzungsrate ist somit eine Linearform $\mathcal{G}(\delta\mathbf{X})$ sofern das Verschiebungsfeld \mathbf{u} festgehalten wird. Für eine große Anzahl von Lastfällen kann aber auch die Darstellung als Trilinearform $\mathcal{G}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \delta\mathbf{X})$ hilfreich sein.

6.2.2 Energiefreisetzungsrate für feste Rißrichtung

An dieser Stelle wird ein kartesisches Koordinatensystem verwendet, wobei sich Einsteins Summenkonvention auf doppelt auftretenden Indizes bezieht.

6.2.2.1 Diskrete Formulierung der Energiefreisetzungsrate

Betrachtet wird ein isoparametrisches finites Element mit linearen Ansatzfunktionen N_I . Das Elementgebiet und die Verschiebungen können durch

$$\mathbf{X} = X^i \mathbf{E}_i = \sum_{I=1}^{nel} N_I \hat{X}_I^i \mathbf{E}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = u^i \mathbf{E}_i = \sum_{I=1}^{nel} N_I \hat{u}_I^i \mathbf{E}_i. \quad (6.4)$$

beschrieben werden, wobei nel und ndi die Anzahl der Knoten bzw. die Raumdimension (2D oder 3D) bezeichnen. Das virtuelle Rißöffnungsfeld $\delta \mathbf{X}_1$ und jede Formvariation $\delta \mathbf{X}_2$ sowie die hieraus folgende Variation des Verschiebungsfeldes $\delta \mathbf{u}_2$ ergeben sich zu

$$\delta \mathbf{X}_1 = \sum_{I=1}^{nel} N_I \delta \hat{X}_{1I}^i \mathbf{E}_i, \quad \delta \mathbf{X}_2 = \sum_{I=1}^{nel} N_I \delta \hat{X}_{2I}^i \mathbf{E}_i, \quad \delta \mathbf{u}_2 = \sum_{I=1}^{nel} N_I \delta \hat{u}_{2I}^i \mathbf{E}_i. \quad (6.5)$$

Die FE-Diskretisierung der kontinuierlichen Energiefreisetzungsrate, siehe Gleichung (6.3), ergibt sich im Fall einer Trilinearform zu

$$\mathcal{G}_h = \bigcup_{e=1}^{NE} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \sum_{r=1}^{ndi} \sum_{s=1}^{ndi} \sum_{t=1}^{ndi} \left[\int_{\Omega_e} T_{IJK}^{rst} dV \right] \hat{u}_r^I \delta \hat{u}_s^J \delta \hat{X}_t^K, \quad (6.6)$$

wobei die Koeffizienten T_{IJK}^{rst} der Knotenanteile durch

$$T_{IJK}^{rst} = \mathbb{C}_{svrw} N_{I,w} N_{J,t} N_{K,v} - \mathbb{C}_{svrw} N_{I,w} N_{J,v} N_{K,t} \quad (6.7)$$

beschrieben sind. Eine numerische Methode zur Berechnung der Trilinearformen ist im Abschnitt 6.3.4 in Verbindung mit der zweiten Variation dargestellt. An dieser Stelle wird nur die reduzierte Form für ein festgehaltenes Verschiebungsfeld \mathbf{u} angegeben, d.h.

$$\mathcal{G}_h = \bigcup_{e=1}^{NE} \sum_{K=1}^{nel} \sum_{t=1}^{ndi} \left[\int_{\Omega_e} (\sigma_{vw} u_{v,t} N_{K,w} - \sigma_{vw} u_{v,w} N_{K,t}) dV \right] \delta \hat{X}_t^K. \quad (6.8)$$

Die Berechnung dieser Beziehung wird im weiteren genauer beschrieben und kann mit der Berechnung der Elementresiduen verglichen werden. Das Residuum eines Elementes ist dabei die Ableitung der potentiellen Energie nach den Elementverschiebungen während der eingeführte „Vektor der Energiefreisetzungsrate“ (energy release rate vector) \hat{g} , siehe unten, die Ableitung bzgl. der Knotenkoordinaten ist. Der Vektor \hat{g}_I mit Dimension ndi wird für jeden Knoten eines Elementes berechnet und zum globalen Vektor \hat{g} assembliert, d.h.

$$\mathcal{G}_h = \bigcup_{e=1}^{NE} \sum_{I=1}^{nel} \hat{g}_I^T \delta \hat{X}_I = \hat{g}^T \delta \hat{X}, \quad (6.9)$$

wobei der Anteil eines Knotens

$$\hat{g}_I = \int_{\Omega_e} \underline{L}_I^T \hat{\underline{\sigma}} \underline{H} dV - \int_{\Omega_e} \Psi \underline{L}_I^T dV \quad (6.10)$$

beträgt. Die Spannungsmatrix $\hat{\underline{\sigma}}$ und der Vektor der Ansatzfunktionen eines Knotens \underline{L}_I sind für den dreidimensionalen Fall $ndi = 3$ durch

$$\hat{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad \underline{L}_I = \begin{bmatrix} N_{I,1} \\ N_{I,2} \\ N_{I,3} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

gegeben. Abschließend kann der globale Vektor \hat{g} mit beliebigen virtuellen Rißöffnungsfeldern $\delta \hat{\underline{X}}$ multipliziert werden. Damit reduziert sich die Untersuchung für verschiedene Risse auf eine einfache Matrix-Vektor-Multiplikation $\mathcal{G}_h = \hat{g}^T \delta \hat{\underline{X}}$, d.h. \mathcal{G}_h ist eine Linearform.

Damit ist eine natürliche Zerlegung der Energiefreisetzungsratesrate möglich. Der Vektor \hat{g} enthält alle Informationen über den aktuellen Spannungszustand. Der Vektor $\delta \hat{\underline{X}}$ beschreibt das aktuelle virtuelle Rißöffnungsfeld.

6.2.2.2 Numerische Experimente und Ergebnisse

Die beschriebene Methode wurde auf Standardtestbeispiele im ebenen Spannungszustand wie z.B. DENT (double edge notched tension) angewendet, siehe Bild 6.13. Dabei wurden die Systemdaten zu $W/L/B = 10/10/1 \text{ mm}$ und die Rißlänge zu $a = 2 \text{ mm}$ gewählt. Die Materialparameter sind $E = 7200000 \text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0.3$. Die Zugspannung beträgt $\sigma = 1.0 \text{ N/mm}^2$.

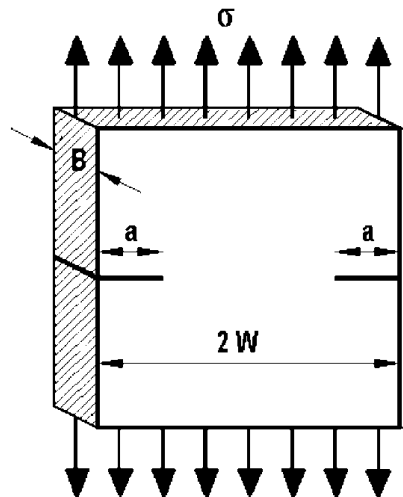


Bild 6.13: Doppelsymmetrische Scheibe mit zwei Außenrissen

Die numerische Berechnung kann aufgrund der Symmetrie an einem Viertelsystem erfolgen. Die Verschiebungsrandbedingungen für das Viertelsystem sind durch die Auflagerlinien angedeutet. Es werden sowohl gleichmäßig als auch adaptiv verfeinerte Netze betrachtet, siehe Bild 6.14.

Die numerisch erzielten Ergebnisse der Energiefreisetzungsrate hängen bekanntermaßen von der Qualität der gewählten FE-Diskretisierung ab. Zur Verifikation für dieses Beispiel wurde eine adaptive Netzverfeinerung unter Verwendung eines residualen Fehlerindikators auf ein grobes Startnetz angewendet. Die Umgebung der Rißspitze wird hinreichend verfeinert und wegen der Spannungssingularität in der Rißspitze muß ein Abbruchkriterium eingesetzt werden.

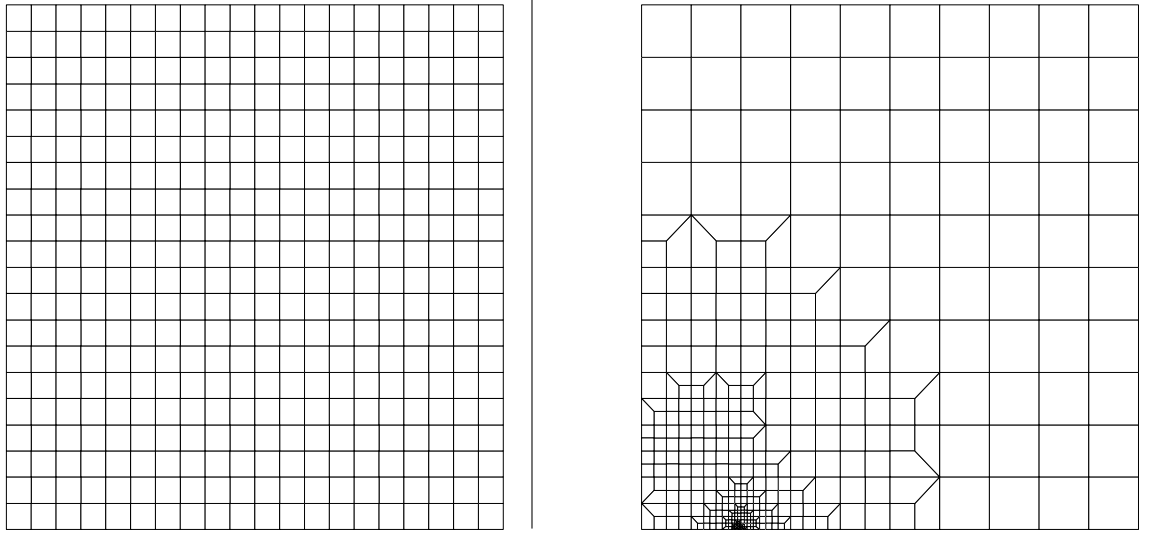


Bild 6.14: Gleichmäßig und adaptiv verfeinertes FE-Netz

Die asymptotische Konvergenz der Energie und der Energiefreisetzungsrate mit ansteigender Elementzahl kann beobachtet werden. Im Vergleich zeigt die adaptive Netzverfeinerung gegenüber einer gleichmäßigen Verfeinerung des gesamten Netzes erwartungsgemäß ein signifikant besseres Ergebnis. Die Vergleichslösung ergibt für die Energie $\Pi = 1.5040 \cdot 10^{-5} \text{ Nmm}$ sowie für die Energiefreisetzungsrate $\mathcal{G} = 1.2088 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}$.

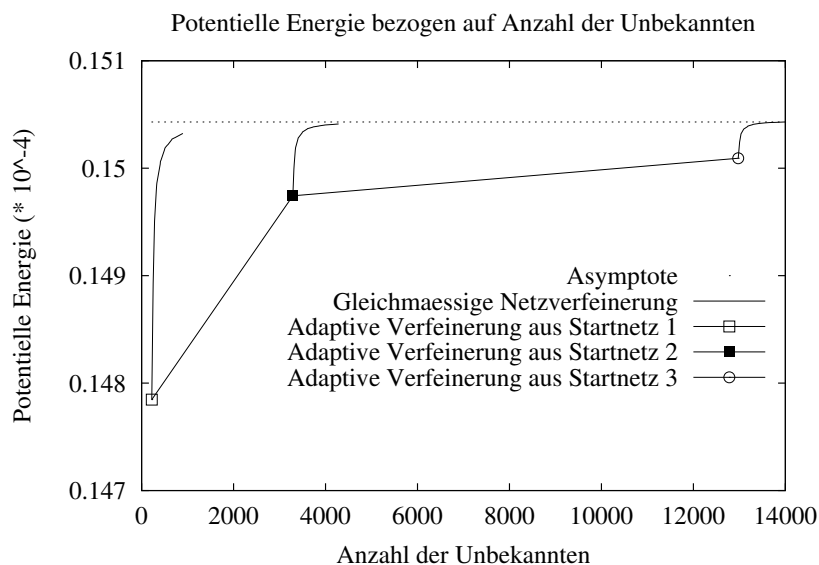


Bild 6.15: Konvergenz der Energie über die Anzahl der Elemente

Weiterhin ist zu bemerken, daß die diskrete Energiefreisetzungsrate \mathcal{G}_h unabhängig von der Form und Gestalt der virtuellen Rioffnungsfelder $\delta\hat{\underline{X}}$ ist. Ein Beispiel für ein virtuelles Rioffnungsfeld $\delta\hat{\underline{X}}$ ist in Abschnitt 6.2.3 angegeben. Diese Beobachtung korrespondiert mit der Beziehung zwischen \mathcal{G} und dem wegunabhangigen J_R -Integral, siehe z.B. [157, 168].

Die virtuellen Rioffnungsfelder werden für die Auswertung der Beziehung $\mathcal{G} = \hat{g}^T \delta\hat{\underline{X}}$ benötigt, d.h. der gewählte Raum zulässiger virtueller Rioffnungsfelder ist vom FE-Netz unabhängig. Es muß aber darauf geachtet werden, daß $\delta\hat{\underline{X}}$ vollständig innerhalb der Systemgeometrie enthalten ist. Ist diese Bedingung verletzt, so sind weitere Arbeitsanteile aus der virtuellen Geometrieänderung und den realen Auflagerspannungen zu berücksichtigen.

Die nachfolgend dargestellten virtuellen Rioffnungsfelder wurden für das adaptiv verfeinerte Netz mit 7707 Knoten, 6400 Elementen und insgesamt 13984 Freiheitsgraden berechnet. Sie können anhand Bild 6.18 erklärt werden, d.h. der Knoten $\hat{\underline{Y}}_{10}$ wird virtuell verschoben und erzeugt entsprechend der gewählten parametrischen Abbildungen die dargestellten Felder. Der Maximalwert tritt in der Rißspitze auf. Die Darstellungen sind ähnlich zur Wahl der virtuellen Geometrieänderung $\delta\underline{\mathbf{X}}$ in Bild 5.2b.

Die Felder wurden teilweise mit einer Starrkorperverschiebung der Umgebung der Rißspitze berechnet, die durch die dort auftretenden Plastifizierung motiviert wird, siehe z.B. [2].

Zunächst wurde ein Rechteck um die Rißspitze ohne Starrkorperanteil verwendet, wobei sich die Energiefreisetzungsrate zu $\mathcal{G} = 1.2088 \cdot 10^{-5} N/mm$ ergibt, siehe Bild 6.16

Eine Ellipse mit und ohne Starrkorperanteil um die Rißspitze, siehe Bild 6.17, liefert $\mathcal{G} = 1.2089 \cdot 10^{-5} N/mm$ bzw. $\mathcal{G} = 1.2088 \cdot 10^{-5} N/mm$, d.h. bis auf diskretisierungsbedingte, aber vernachlässigbare Abweichungen das identische Ergebnis.

Das Ergebnis einer numerischen Finite-Differenzen-Berechnung der Energiefreisetzungsrate lautet $\mathcal{G} = 1.2088 \cdot 10^{-5} N/mm$, wobei sich (im Rahmen der Genauigkeit) identische Ergebnisse einstellen. Somit konnte auch die Richtigkeit der theoretischen Ableitungen und der Implementierung überprüft werden.

Ein weiterer Zugang ist über die Berechnung des J -Integrals möglich, welches ein Linienintegral um die Rißspitze auswertet. Eine hierzu quivalente Formulierung erfordert die Auswertung eines Flächenintegrals in einer Ringfläche um die Rißspitze. Der Nachteil hierbei besteht in der Netzabhängigkeit und der notwendigen Anpassung der Netze bei Rißwachstum. Ansonsten ergeben sich jedoch analoge Ergebnisse, d.h. in dem vorliegenden Fall der Wert $\mathcal{G} = 1.2091 \cdot 10^{-5} N/mm$. Auf die graphische Darstellung der Ringfläche um die Rißspitze wurde verzichtet.

Zusammenfassend bestätigen die angeführten Testbeispiele, daß eine adaptive Netzverfeinerung die Effizienz der Berechnung steigert. Die Trennung der Berechnung in elementunabhangige Rioffnungsfelder (geometrischer Anteil) und einen vorab berechneten Vektor der physikalischen Anteile erlaubt die Berücksichtigung verschiedener Variationen ohne erneute Berechnungen auf der Elementebene. Diese Strategie kann die Gesamtberechnung beschleunigen. Ansonsten sind die unterschiedlichen Zugänge zur Berechnung der Energiefreisetzungsrate (innerhalb der Berechnungsgenauigkeit) gleichwertig.

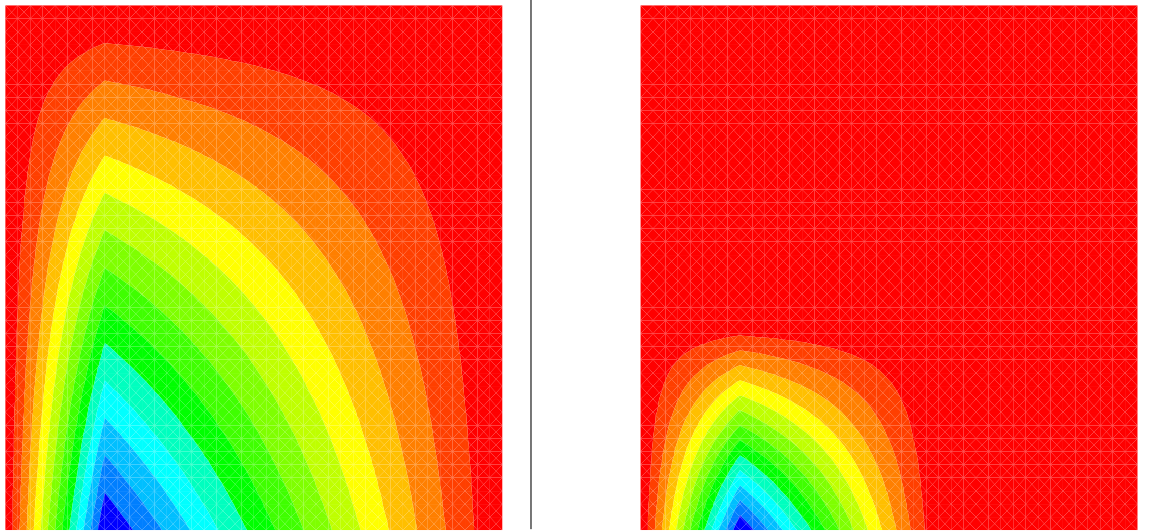


Bild 6.16: Virtuelles Riffnungsfeld als großes bzw. kleines Rechteck

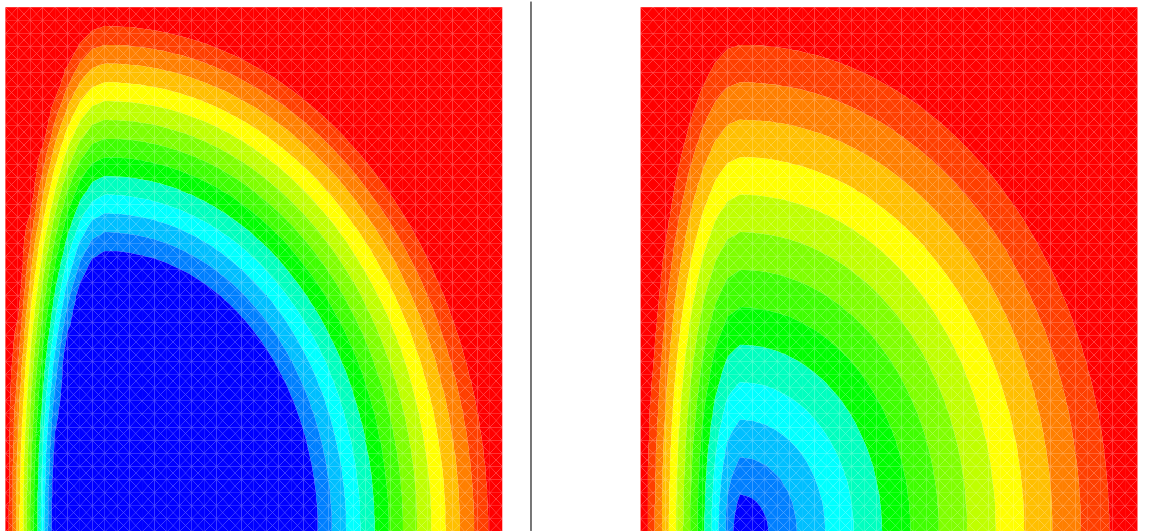


Bild 6.17: Virtuelles Riffnungsfeld als Ellipse mit bzw. ohne Starrkrperanteil

6.2.3 Berechnung der maximalen Energiefreisetzungsrate

Es wird angenommen, daß sich die maximale Energiefreisetzungsrate durch ein bestimmtes virtuelles Rißöffnungsfeld ergibt, d.h.

$$\mathcal{G}_{h,max} = \hat{\underline{g}}^T \delta \hat{\underline{X}}_{max}, \quad (6.12)$$

wobei der globale Vektor $\hat{\underline{g}}$ die Systeminformationen enthält und somit unabhängig von einer beliebigen Erweiterung der Rißöffnung ist.

6.2.3.1 Berechnungsstrategie

Das virtuelle Rißöffnungsfeld zeigt in Richtung der voraussichtlichen Rißerweiterung. Ein endlichdimensionaler Approximationsraum für alle zulässigen virtuellen Rißöffnungsfelder wird eingeführt und die maximale Energiefreisetzungsrate wird in dem gewählten Raum bestimmt.

Eine Anfangsdiskretisierung ist kanonisch durch das gewählte isoparametrische Modell sowie das vorhandene FE-Netz gegeben. Damit ist ein endlichdimensionaler Raum für $\delta \hat{\underline{X}}$ bestehend aus allen Variationen der Knotenkoordinaten gegeben. Dieser Raum muß weiterhin reduziert werden.

Zur Vereinfachung wird der Winkel α zwischen der alten und der neuen Rißrichtung und damit die Abbildung $\delta \hat{\underline{X}} = \psi(\alpha)$ eingeführt. Damit ist der zulässige Raum auf eine Dimension reduziert.

Das gesuchte Feld $\delta \hat{\underline{X}}_{max}$ kann durch Lösung der notwendigen Beziehung

$$\frac{d}{d\alpha} \mathcal{G}_h = \left(\frac{d}{d\alpha} \hat{\underline{g}} \right)^T \delta \hat{\underline{X}} + \hat{\underline{g}}^T \frac{d}{d\alpha} \delta \hat{\underline{X}} = \hat{\underline{g}}^T \frac{d}{d\alpha} \delta \hat{\underline{X}} = 0, \quad (6.13)$$

für den Winkel α_{max} ermittelt werden, wobei $\hat{\underline{g}}$ unabhängig vom Winkel α ist.

6.2.3.2 Algorithmische Details

Die Abbildung $\delta \hat{\underline{X}} = \psi(\alpha)$ soll im weiteren genauer spezifiziert werden, siehe Bild 6.18. In diesem Modellproblem werden vier Patches mit Eckknoten $\hat{\underline{Y}}_1, \dots, \hat{\underline{Y}}_{10}$ verwendet, um ψ zu beschreiben. Der Ursprung $\hat{\underline{Y}}_{10}$ befindet sich in der Rißspitze. Die ursprüngliche Richtung des Rißfortschrittes $\hat{\underline{v}}_o$ weist in Richtung des Risses. Die zugehörige Normalenrichtung sowie die Eckknoten $\hat{\underline{Y}}_i(\alpha)$ der Patches können berechnet werden. In dem angegebenen Beispiel wird nur die Abhängigkeit des Knotens $\hat{\underline{Y}}_6$ in Abhängigkeit vom Winkel α betrachtet, d.h. nur der Knoten $\hat{\underline{Y}}_6$ wird auf der geraden Linie zwischen $\hat{\underline{Y}}_2$ und $\hat{\underline{Y}}_3$ verändert.

Während der Iteration wird der Winkel α verändert, um im Lösungspunkt die Richtung der maximalen Energiefreisetzungsrate zu bestimmen. Eine Transformationsmatrix \underline{T} wird verwendet, um den aktuellen Vektor der Rißerweiterung $\hat{\underline{v}}_r = \underline{T} \hat{\underline{v}}_o$ und den zugehörigen Normalenvektor zu bestimmen. Abschließend kann die Veränderung der Knoten $\hat{\underline{Y}}_i$ berechnet werden.

Die Ableitungen bzgl. α werden mit (\prime) bezeichnet. Damit gilt für die Ableitung des aktuellen Rißöffnungsvektors bzgl. α die Beziehung $\hat{\underline{v}}_r' = \underline{T}' \hat{\underline{v}}_o$ und die Ableitungen von $\hat{\underline{Y}}_i$ können mit Hilfe der modifizierten Transformationsmatrix berechnet werden.

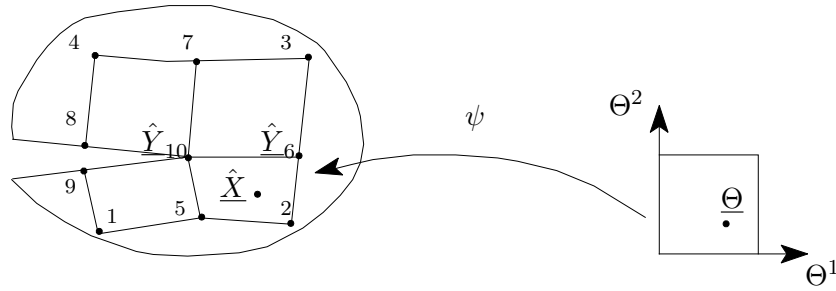


Bild 6.18: Raum zulässiger virtueller Rißöffnungsfelder

In einer Schleife über alle FE-Knoten \hat{X} werden nur solche berücksichtigt, die sich innerhalb einer der vier Flächen befinden und somit einen Beitrag zur Energiefreisetzungsrate liefern. Damit kann $\delta\hat{X}$ durch die Abbildung ψ beschrieben werden, d.h. für alle Knoten im Patch gilt

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^4 N_i(\underline{\Theta}) \hat{Y}_i(\alpha) \quad \text{und damit} \quad \delta\hat{X} = \sum_{i=1}^4 N_i(\underline{\Theta}) \delta\hat{Y}_i(\alpha). \quad (6.14)$$

Die lokalen Koordinaten $\underline{\Theta}$ im Intervall $[0, 1]$ werden durch eine lokale Newton-Iteration berechnet. Mehrere unterschiedliche Startpunkte für $\underline{\Theta}$ müssen hierbei gewählt werden, um die Konvergenz zu garantieren.

Die globalen kartesischen Koordinaten \hat{X} eines finiten Elementes sind fest, aber die lokalen Koordinaten $\underline{\Theta}$ sind vom Winkel α abhängig.

Die vollständige Ableitung $d\underline{\Theta}/d\alpha$ kann durch Lösung der Gleichung

$$\frac{d\hat{X}}{d\alpha} = \frac{\partial\hat{X}}{\partial\underline{\Theta}} \frac{d\underline{\Theta}}{d\alpha} + \frac{\partial\hat{X}}{\partial\alpha} = \underline{0}, \quad \text{d.h. durch} \quad \frac{d\underline{\Theta}}{d\alpha} = - \left(\frac{\partial\hat{X}}{\partial\underline{\Theta}} \right)^{-1} \frac{\partial\hat{X}}{\partial\alpha} \quad (6.15)$$

bestimmt werden.

Das virtuelle Rißöffnungsfeld $\delta\hat{X}$ wird durch den Winkel α beeinflusst, siehe Gleichung (6.13). Die vollständige Ableitung von $\delta\hat{X}$ bzgl. α lautet

$$\frac{d}{d\alpha} \delta\hat{X} = \frac{d}{d\alpha} \left(\sum_{i=1}^4 N_i(\underline{\Theta}) \delta\hat{Y}_i \right) = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial N_i}{\partial\underline{\Theta}} \frac{d\underline{\Theta}}{d\alpha} \delta\hat{Y}_i + N_i \frac{d\delta\hat{Y}_i}{d\alpha} \right). \quad (6.16)$$

Abschließend wird eine Fixpunktiteration für Gleichung (6.13) ausgeführt, um den Winkel α_{max} zu berechnen.

6.2.3.3 Numerische Experimente

Der Einfluß veränderlicher Faserwinkel, Schichtdicken und Elastizitätsmodulen sowie der Querdehnzahl auf die maximale Energiefreisetzungsrate und die zugehörige Rißrichtung kann durch Parameterstudien an geeigneten Beispielen untersucht werden.

An dieser Stelle wird das CCT-Beispiel (Center Crack Tension) kurz erläutert, welches unter einaxialem Zug für verschiedene Rißrichtungen ausgewertet wurde. Zur Herleitung theoretischer Ergebnisse wird eine unendlich ausgedehnte Scheibe betrachtet, die mittels der nachfolgend genannten Methoden untersucht wurde. Die maximale Energiefreisetzungsrate ist hierbei angegeben.

- Methode I nach *Lamon* ergibt

$$\mathcal{G}_{max} = \frac{1}{e^*} (K_I^4 + 6K_I^2 K_{II}^2 + K_{II}^4)^{\frac{1}{2}}.$$

- Methode II nach *Ichikawa* ergibt

$$\mathcal{G}_{max} = \frac{1}{2e^*} \left[K_I^2 + 2K_{II}^2 + K_I(K_I^2 + 6K_{II}^2) + K_{II}^4 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

- Methode III unter Verwendung virtueller Rißöffnungsfelder entsprechend der Darstellung in dieser Arbeit.

Die Ergebnisse sind in dem nachfolgenden Diagramm festgehalten.

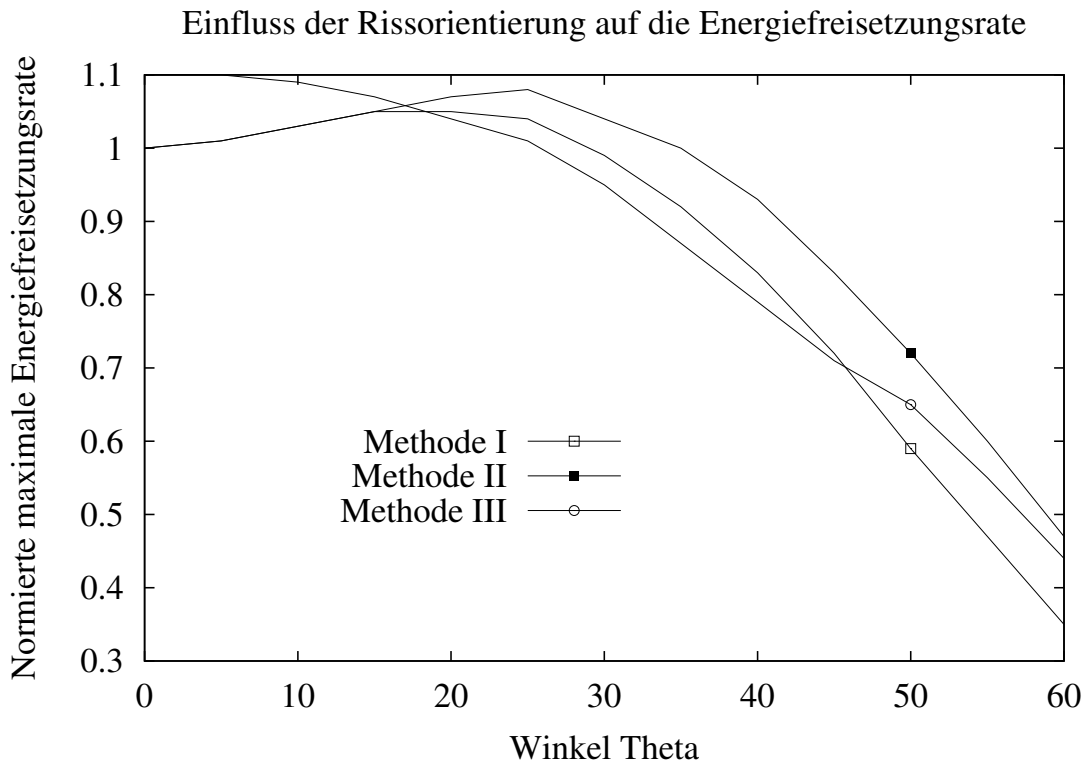


Bild 6.19: Verlauf der Energiefreisetzungsrate bei verschiedenen Rißrichtungen

Die neu entwickelte Methode III zeigt qualitativ ein ähnliches Verhalten wie die vorgenannten Methoden aus der Literatur. Die quantitativ unterschiedlichen Ergebnisse der einzelnen Vorgehensweisen bedürfen einer eingehenderen Untersuchung. Hierbei sind die Unterschiede (Werte im Bereich von 1.0 bis 1.1) für den Winkel $\alpha = 0$ zu erklären. Weiterhin ist es von Interesse, den Einfluß unterschiedlicher virtueller Rißöffnungsfelder für dieses Beispiel zu studieren.

6.2.4 Sensitivitäten der Energiefreisetzungsrate

Eine Sensitivitätsanalyse der Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} kann bzgl. zweier unterschiedlicher Parameterarten durchgeführt werden. Formvariationen \mathbf{X} können mit der bisher dargestellten Methodik durchgeführt werden, d.h.

$$\delta \mathcal{G} = \delta_u \mathcal{G}(\delta \mathbf{X}_1, \delta \mathbf{u}_2) + \delta_X \mathcal{G}(\delta \mathbf{X}_1, \delta \mathbf{X}_2). \quad (6.17)$$

Die Notation $\delta \mathbf{u}_2$ für das virtuelle Verschiebungsfeld und $\delta \mathbf{X}_2$ für das virtuelle Geometriefeld werden eingeführt. Weiterhin werden Variationen des Materialgesetzes $\delta \mathbf{m}$, siehe Abschnitt 6.3 für Details, betrachtet, d.h.

$$\delta \mathcal{G} = \delta_u \mathcal{G}(\delta \mathbf{X}_1, \delta \mathbf{u}_2) + \delta_m \mathcal{G}(\delta \mathbf{X}_1, \delta \mathbf{m}_2). \quad (6.18)$$

Die Variation $\delta \mathbf{X}_1$ bezeichnet das virtuelle Reißöffnungsfeld entsprechend der oben eingeführten Notation. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß $\delta \mathbf{X}_1$ weder explizit von $\delta \mathbf{X}_2$ bzw. $\delta \mathbf{m}_2$ abhängt, siehe Abschnitt 6.3 für eine allgemeine Darstellung.

6.2.4.1 Variation der Energiefreisetzungsrate bzgl. der Verschiebungen

Die partiellen Variationen bzgl. \mathbf{u}_2 können durch die Bilinearformen gemäß Gleichung (6.35) ausgedrückt werden, d.h.

$$\delta_u \mathcal{G} = \delta_u(-\delta_X \Pi) = -\delta_X(\delta_u \Pi) = -\delta_X \mathcal{R} = -s(\delta \mathbf{u}_2, \delta \mathbf{X}_1). \quad (6.19)$$

Die Diskretisierung von (6.19) liefert $\delta_u \mathcal{G}_h = -\delta \hat{\mathbf{X}}_1^T \underline{S}^T \delta \hat{\mathbf{V}}_2$, wobei \underline{S} die globale Sensitivitätsmatrix darstellt, siehe Gleichung (6.39). Diese Matrix ist für alle Formen der Sensitivitätsanalyse bzgl. beliebiger Variationen notwendig. Weitere Ergebnisse hängen von der speziellen Gestalt der Designvariablen ab, d.h. entweder von der Form oder vom Material.

6.2.4.2 Sensitivitäten bzgl. Geometrievariationen

Die Variation der Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} bzgl. \mathbf{X} ergibt

$$\begin{aligned} \delta_X \mathcal{G} = & - \int_{\Omega_o} \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_1 : \mathbb{C} : \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_2 dV \\ & - \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_2 \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_1 dV \\ & - \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_1 \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_2 dV \\ & + \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_1 \text{Div} \delta \mathbf{X}_2 dV \\ & + \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_2 \text{Div} \delta \mathbf{X}_1 dV \\ & + \int_{\Omega_o} \Psi \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_1 \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_2 : \mathbf{1} dV \\ & - \int_{\Omega_o} \Psi \text{Div} \delta \mathbf{X}_1 \text{Div} \delta \mathbf{X}_2 dV. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Die Diskretisierung lautet

$$\delta_X \mathcal{G}_h = \bigcup_{e=1}^{NE} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \delta \hat{\underline{X}}_{1I}^T \underline{E}_{XIJ} \delta \hat{\underline{X}}_{2J} = \delta \hat{\underline{X}}_1^T \underline{E}_X \delta \hat{\underline{X}}_2, \quad (6.21)$$

wobei die Anteile der einzelnen Knoten durch

$$\begin{aligned} \underline{E}_{XIJ} = & - \int_{\Omega_e} \underline{H}^T \underline{B}_I^T \underline{C} \underline{B}_J \underline{H} dV \\ & - \int_{\Omega_e} \underline{L}_J \underline{L}_I^T \hat{\underline{\sigma}}^T \underline{H} dV - \int_{\Omega_e} \underline{H}^T \hat{\underline{\sigma}} \underline{L}_I \underline{L}_J^T dV \\ & + \int_{\Omega_e} \underline{H}^T \hat{\underline{\sigma}} \underline{L}_J \underline{L}_I^T dV + \int_{\Omega_e} \underline{L}_I \underline{L}_J^T \hat{\underline{\sigma}}^T \underline{H} dV \\ & + \int_{\Omega_e} \Psi \underline{L}_J \underline{L}_I^T dV - \int_{\Omega_e} \Psi \underline{L}_I \underline{L}_J^T dV \end{aligned} \quad (6.22)$$

gegeben sind. Die Spannungsmatrix $\hat{\underline{\sigma}}$ und der Vektor der Formfunktionen \underline{L}_I sind durch Gleichung (6.11) gegeben. Die Matrizen für den materiellen Verschiebungsgradienten \underline{H} , die Elastizitätsmatrix \underline{C} sowie die B-Matrix \underline{B} sind wie üblich definiert.

Die Sensitivität des Verschiebungsfeldes $\delta \hat{\underline{V}}_2$ bzgl. der Formvariationen $\delta \hat{\underline{X}}_2$ ist durch die Beziehung $\delta \hat{\underline{V}}_2 = -\underline{K}^{-1} \underline{S} \delta \hat{\underline{X}}_2$ gegeben, siehe Gleichung (6.43), d.h. insgesamt gilt

$$\delta \mathcal{G}_h = \delta_u \mathcal{G}_h + \delta_X \mathcal{G}_h = \delta \hat{\underline{X}}_1^T (\underline{S}^T \underline{K}^{-1} \underline{S} + \underline{E}_X) \delta \hat{\underline{X}}_2 =: \delta \hat{\underline{X}}_1^T \delta \hat{\underline{g}}. \quad (6.23)$$

Für jedes Element werden lokale Matrizen berechnet und in die globalen Matrizen eingebaut. Die Matrix \underline{K} wird gemäß der Bandstruktur und die Matrizen \underline{S} sowie \underline{E}_X werden in kompakter Form gespeichert, siehe auch Abschnitt 6.3.

Das Lösungsverfahren gliedert sich in zwei Teile. Zunächst werden die Größen

$$a = \delta \hat{\underline{X}}_1^T \underline{E}_X \delta \hat{\underline{X}}_2, \quad \underline{b}_1 = \underline{S} \delta \hat{\underline{X}}_1 \quad \text{und} \quad \underline{b}_2 = \underline{S} \delta \hat{\underline{X}}_2 \quad (6.24)$$

berechnet. Die notwendige Anzahl der Matrix-Vektor-Multiplikationen hängt linear von der Anzahl n_1 der betrachteten virtuellen Rißöffnungsfelder $\delta \mathbf{X}_1$ ab und von der Anzahl n_2 der möglichen Designvariationen $\delta \mathbf{X}_2$. Insgesamt müssen $\min(n_1, n_2)$ Vorwärts-Rückwärts-Substitutionen durchgeführt werden, um die gewünschte Sensitivität von \mathcal{G}_h zu berechnen.

6.2.4.3 Sensitivität bzgl. Materialparametervariationen

Eine Variation des Materialmodells $\delta \mathbf{m}$ tritt beispielsweise durch die Schwankungen der Materialparameter auf. Die Variation von \mathcal{G} liefert in diesem Fall

$$\delta_m \mathcal{G} = \int_{\Omega_o} \delta_m \boldsymbol{\sigma} : \left(\text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \text{Div} \delta \mathbf{X} \right) dV \quad (6.25)$$

und die zugehörige Diskretisierung kann in der Form

$$\delta_m \mathcal{G}_h = \bigcup_{e=1}^{NE} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nmat} \delta \hat{\underline{X}}_{1I}^T \underline{E}_{mIJ} \delta \hat{m}_{2J} = \delta \hat{\underline{X}}_1^T \underline{E}_m \delta \hat{m}_2 \quad (6.26)$$

realisiert werden. Die Knotenbeiträge lauten

$$\underline{E}_{mIJ} = \int_{\Omega_e} \underline{H}^T \underline{B}_I^T d\underline{\sigma}_J dV - \int_{\Omega_e} \underline{L}_I d\underline{\Psi}_J dV. \quad (6.27)$$

Die Matrizen $d\underline{\Psi}_J$ und $d\underline{\sigma}_J$ beschreiben die partiellen Ableitungen der Energiefreisetzungsrate Ψ und der Spannungsmatrix $\underline{\sigma}$ bzgl. der Materialparameter \hat{m}_J .

Die Sensitivität des Verschiebungsfeldes \hat{V}_2 bzgl. des konstitutiven Modells $\delta\hat{m}_2$ kann mit Hilfe von $\delta\hat{V}_2 = -\underline{K}^{-1} \underline{M} \delta\hat{m}_2$ beschrieben werden, siehe Gleichung (6.43), d.h. die Sensitivität von \mathcal{G}_h bzgl. der skalaren Materialparameter \hat{m}_2 lautet

$$\delta \mathcal{G}_h = \delta_u \mathcal{G}_h + \delta_m \mathcal{G}_h = \delta \hat{\underline{X}}_1^T (\underline{S}^T \underline{K}^{-1} \underline{M} + \underline{E}_m) \delta \hat{m}_2 =: \delta \hat{\underline{X}}_1^T \delta \hat{g}. \quad (6.28)$$

Die Matrix-Vektor-Multiplikationen werden wie oben beschrieben durchgeführt.

6.2.5 Sensitivität der Maximalwerte

Der virtuelle Rißöffnungsvektor wurde als unveränderlich angesehen und die sich hieraus ergebenden Sensitivitäten lauten $\delta \mathcal{G}_h = \delta \hat{\underline{X}}_1^T \delta \hat{g}$, siehe auch die Gleichungen (6.9), (6.23) und (6.28). Es sind weiterführenden Untersuchungen erforderlich, um die Sensitivität der maximalen Energiefreisetzungsrate $\mathcal{G}_{h,max}$ und die Sensitivität des zugehörigen Winkels α_{max} zu bestimmen.

Vereinfachend wird angenommen, daß das virtuelle Rißöffnungsfeld $\delta \mathbf{X}_1$ zwar vom Winkel α abhängt (siehe Abschnitt 6.2.3), aber explizit unabhängig von einer Variation der Geometrie oder des konstitutiven Modells ist.

Dieses bedeutet, daß die Sensitivität der maximalen Energiefreisetzungsrate $\mathcal{G}_{h,max}$ mit den bisherigen Ergebnissen übereinstimmt, d.h.

$$\delta \mathcal{G}_{h,max} = \delta \hat{g}^T \delta \hat{\underline{X}}_{max} + \hat{g}^T \delta(\delta \hat{\underline{X}}_{max}) = \delta \hat{g}^T \delta \hat{\underline{X}}_{max}, \quad (6.29)$$

da $\delta(\delta \hat{\underline{X}}_{max}) = d(\delta \hat{\underline{X}}_{max})/d\alpha \delta\alpha$ und das Skalarprodukt dieses Vektors mit \hat{g} aufgrund Gleichung (6.13) verschwindet.

Zum Abschluß wird die Sensitivität des zugehörigen Winkels α_{max} betrachtet. Die notwendige Bedingung für die maximale Energiefreisetzungsrate, d.h. Gleichung (6.13), muß für alle Variationen der Geometrie und der Materialparameter gültig bleiben. Eine Variation von Gleichung (6.13) ergibt

$$\delta \left(\frac{d}{d\alpha} \mathcal{G}_h \right) = \delta \hat{g}^T \left(\frac{d \delta \hat{\underline{X}}}{d\alpha} \right) + \hat{g}^T \left(\frac{d^2 \delta \hat{\underline{X}}}{d\alpha d\alpha} \right) \delta\alpha = 0 \quad (6.30)$$

und die Variation des Winkels α_{max} kann somit leicht bestimmt werden. Zusätzlich müssen für das eingeführte eindimensionale Modell zulässiger virtueller Rißöffnungsfelder zweite partielle Ableitungen von $\delta \hat{\underline{X}}$ bzgl. α bestimmt werden.

6.2.6 Numerische Beispiele

Als letztes Testbeispiel wurden mit dem Kreuz- und dem Kopfplattenstoß zwei Varianten einer geschweißten Anschlußkonstruktion mit einer Doppel HY-Naht (Naht mit Doppelkehlnaht) aus dem Bereich des Stahlbaus betrachtet, siehe auch [168]. Die Montage des Kopfplattenstoßes hat auf der Baustelle einen großen Vorteil, da die Schweißarbeiten schon in der Werkstatt durchgeführt werden können und nicht wie beim Kreuzstoß erst vor Ort. Die Schweißnähte können somit präziser und mit weniger Aufwand ausgeführt werden als beim Kreuzstoß. Aus diesem Grund werden hier nur die Ergebnisse für den Kopfplattenstoß aufgeführt; siehe [168] für Detailergebnisse zum Kreuzstoß.

In der vergleichenden Betrachtung soll festgestellt werden, in welchem Bereich der Konstruktion eines Kopfplattenstoßes die jeweils größte Kerbwirkung auftritt. Hierfür müssen die Elementbeschreibung und die Diskretisierung sowie die nachfolgenden Parameter der FE-Modellierung geeignet gewählt bzw. durch Versuche bestimmt werden, d.h.

- das Materialgesetz und die zugehörigen Parameter,
- die Randbedingungen (festes Auflager oder elastische Bettung) und
- die Art und Größe der Imperfektionen, etc.

Vorgegeben wurde der Elastizitätsmodul $E = 210000 \text{ N/mm}^2$, die Querdehnzahl $\nu = 0.3$ sowie die Belastung $\sigma = 200 \text{ N/mm}^2$.

6.2.6.1 Abhängigkeit maximaler Vergleichsspannungen von der Lagerung

Der Kopfplattenstoß kann unterschiedlich modelliert werden, wobei zunächst eine Variation der Randbedingungen betrachtet wird, siehe Bild 6.20.

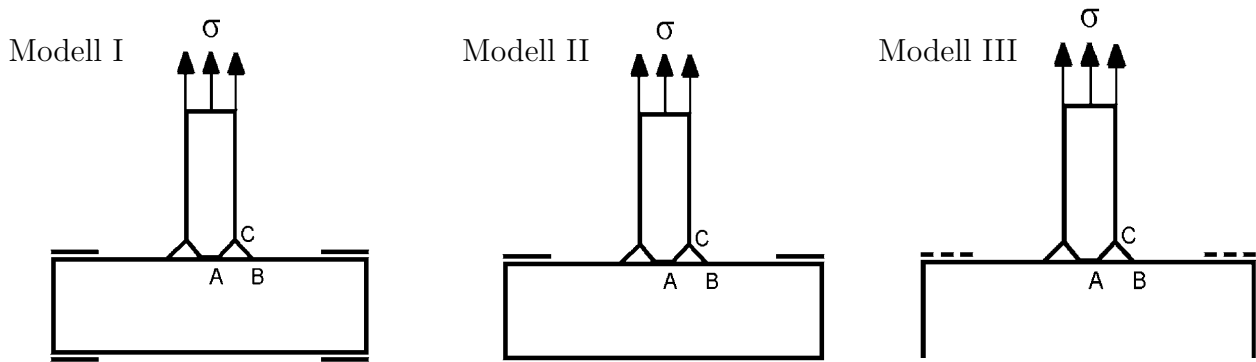


Bild 6.20: Kopfplattenstoß mit unterschiedlichen Randbedingungen

Die Randbedingungen für das Modell I und II sind jeweils starre Lagerungen im Bereich der Unterlegscheibe sowie in der Kontaktzone der beiden Kopfplatten. Die Bereich der Lagerungen sind jeweils durch die Striche markiert. Die Länge der Lagerung am unteren Rand ist für das Modell I unrealistisch, wird jedoch zu Vergleichszwecken herangezogen. Im Modell III wird der Bereich der Unterlegscheibe durch eine elastische Bettung gelagert.

Die Vergleichsspannungen wurden mit einem gleichmäßig verfeinerten FE-Netz berechnet, da aufgrund der vorhandenen Singularitäten eine adaptive Verfeinerung in den Rißspitzen zu stark verfeinern würde.

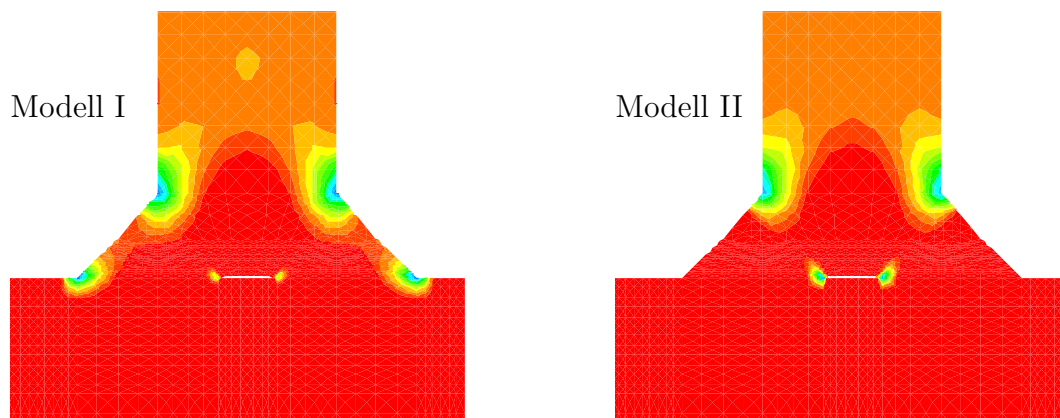


Bild 6.21: Vergleichsspannungsverteilung für Modelle I und II

Die Auswertung der Vergleichsspannungen für das Modell II zeigt, daß die größte Kerbwirkung im Bereich der Schweißnahtverbindung im Punkt C auftritt. Für das Modell II ergeben sich in etwa gleich große Vergleichsspannungen in den Punkten B und C.

Die Verteilung der Vergleichsspannungen im Modell III entspricht dem Ergebnis durchgeführter Versuche. Hierbei tritt im Punkt B die größte Vergleichsspannung auf. An dieser Stelle tritt auch der erste Riß der Struktur auf.

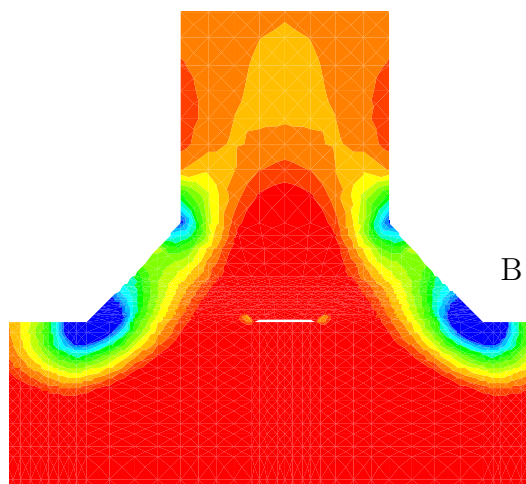


Bild 6.22: Vergleichsspannungsverteilung für Modell III

6.2.6.2 Einfluß der Riorientierung auf die Energiefreisetzungsrates

Das Modell III des geschweißten Kopfplattenstosses wird nun für die weiteren Berechnungen gewählt. Im kritischen Punkt B wird ein Riß der Länge $a = 0.5 \text{ cm}$ eingeführt, der durch Einführung eines Winkels α unterschiedlich ausgerichtet werden kann, siehe die Darstellung des CAGD-Modells für eine Umgebung des Punktes B in Bild 6.23.

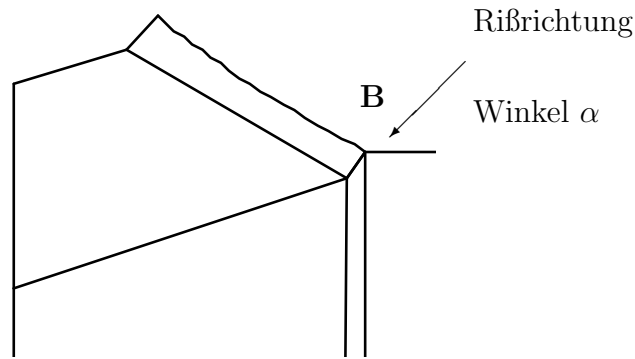


Bild 6.23: Orientierung eines Anfangsrisse im Punkt B

Numerische Untersuchungen (ohne Wiedergabe an dieser Stelle) zeigen, daß die gesamte potentielle Energie des Systems (nahezu) unabhängig von der Rißausrichtung ist.

Die Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrates (EFR) von der Orientierung des Anfangsrisse kann aus der folgenden Tabelle entnommen werden und ist in Bild 6.24 graphisch dargestellt.

Winkel	EFR
0°	0.4312E-04 N/mm
$36,87^\circ$	0.1047E-03 N/mm
45°	0.1170E-03 N/mm
$54,13^\circ$	0.1245E-03 N/mm
90°	0.1196E-03 N/mm
$126,87^\circ$	0.4879E-04 N/mm

Tabelle 6.1: Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrates von der Orientierung des Anfangsrisse

Die Kurve zwischen $\alpha = 54,13^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$ sollte durch weitere Berechnungen genauer untersucht werden, da die geradlinige Interpolation wenig wahrscheinlich ist.

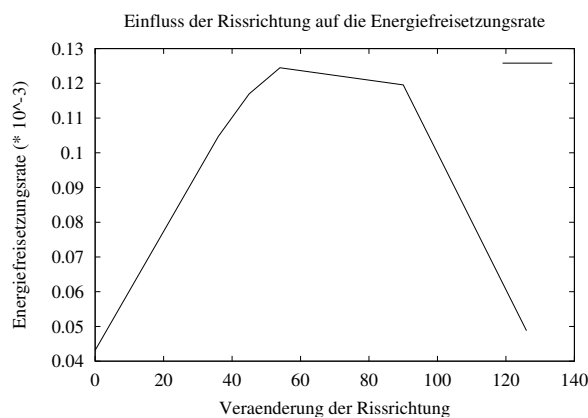


Bild 6.24: Änderung der Energiefreisetzungsrates für unterschiedliche Rißrichtungen

6.2.6.3 Minimierung der maximalen Energiefreisetzungsrate

Die geometrische Form der Schweißnaht (zwischen den Punkten B und C) besitzt einen großen Einfluß auf die maximale Energiefreisetzungsrate für einen bereits vorhandenen Anfangsriß.

Die abgeleiteten Sensitivitäten wurden verwendet, um im Rahmen eines automatischen Optimierungsverfahren die maximale Energiefreisetzungsrate durch eine gezielte Änderung der geometrischen Form der Schweißnaht zu minimieren. Dargestellt sind die unterschiedlichen geometrischen Formen (CAGD-Modelle der Umgebung vom Punkt B für vier Zwischenformen), die sich im Verlauf der automatischen Optimierung ergaben.

Die zugehörigen Energiefreisetzungsrate sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Design 1	$\mathcal{G}_h = 0.126E - 03 \text{ N/mm}$
Design 2	$\mathcal{G}_h = 0.115E - 03 \text{ N/mm}$
Design 3	$\mathcal{G}_h = 0.100E - 03 \text{ N/mm}$
Design 4	$\mathcal{G}_h = 0.905E - 04 \text{ N/mm}$

Tabelle 6.2: Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit der Schweißnahtform

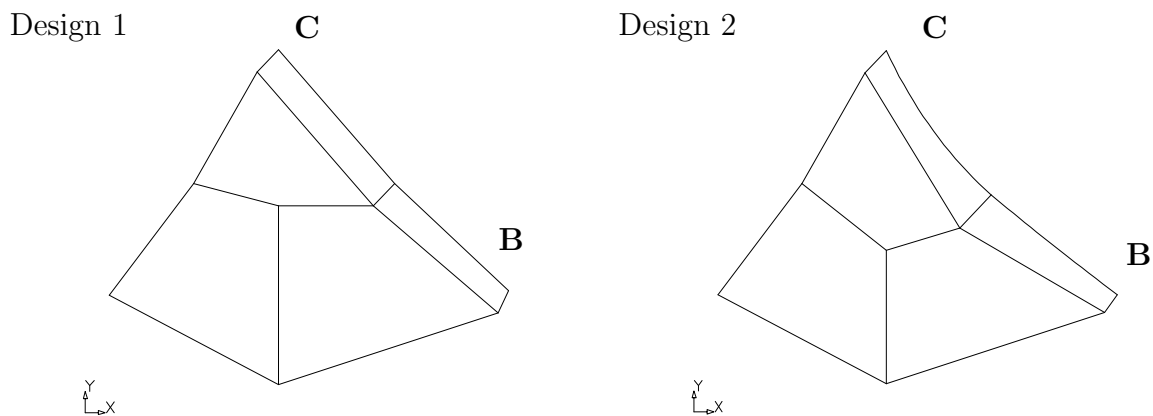


Bild 6.25: Ausbildung der Schweißnaht für das Design 1 und 2

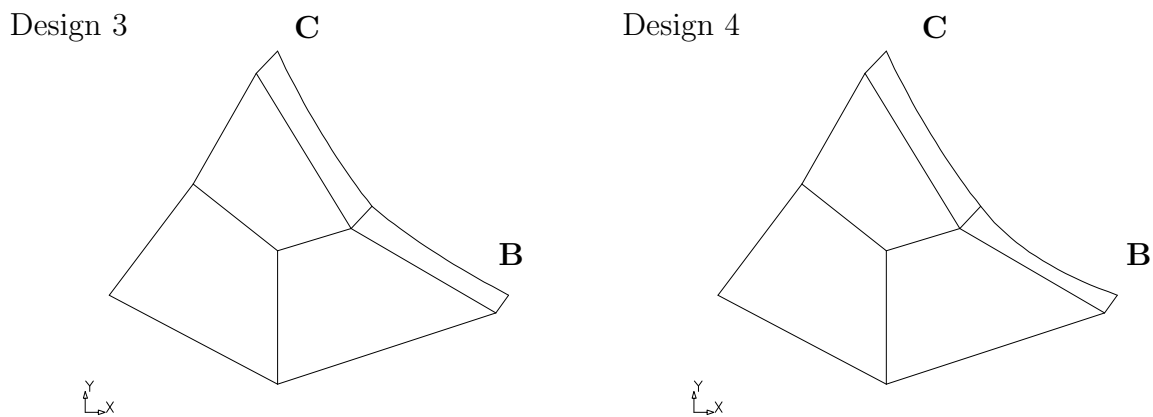


Bild 6.26: Ausbildung der Schweißnaht für das Design 3 und 4

Die Berechnung zeigt, daß eine ausgerundete Form der Schweißnaht sich vorteilhaft auf die Energiefreisetzungsrate (im Punkt B) auswirkt.

6.2.7 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Abschnitt wurde die Sensitivitätsanalyse für Fragestellungen der linear-elastischen Bruchmechanik eingesetzt. Die Untersuchungen stützten sich stets auf eine Modellierung der Geometrie durch geeignet gewählte parametrische Abbildungen. Dieses gilt insbesondere für die Bestimmung der virtuellen Rißöffnungsfelder z.B. gemäß Bild 6.18. Es ist naheliegend, daß die dargestellte Methodik versagt, falls die – für komplexe industrielle Anwendungen extrem aufwendige – Modellierung nicht möglich sein sollte.

Die Untersuchungen in diesem Abschnitt beschränken sich auf einen Riß und die Empfindlichkeit der Energiefreisetzungsrate, jedoch ohne einen Rißfortschritt zu beschreiben. Die Beschreibung des Rißwachstums ist von besonderem Interesse und wirft die Frage auf, wie sich das Geometriemodell mitverändern muß. Auch in diesem Fall ist die Anwendung bzw. Weiterentwicklung der aufgezeigten Vorgehensweise nicht trivial. Bei der Fragestellung der adaptiven Kopplung von Deformation (initiiert den Riß und sorgt für das Rißwachstum) und dem daraufhin angepaßten Geometriemodell sind noch weitere Untersuchungen erforderlich.

Es bleibt daher zukünftig zu klären, ob die Modellierung von Rissen und von Rißwachstum auf der Grundlage komplexer Geometriemodelle in der praktischen Anwendung Erfolg haben wird.

6.3 Ein Konzept für robuste Konstruktionen

In der Literatur werden zahlreiche Vorschläge zur *Robustheit* (*robustness*) und zur *Zuverlässigkeit* (*reliability*) gegeben.

Ein wichtiger Ansatz ist das *reliability-based system design*, welches das stochastische Verhalten der Systeme betrachtet, siehe z.B. [88]. In diesem klassischen Zugang wird ein System als zuverlässig (*reliable*) angesehen, wenn die Versagenswahrscheinlichkeit hinreichend klein ist. Die Strukturoptimierung, basierend auf diesem Zugang, zugehörige numerische Methoden sowie praktische Beispiele werden z.B. in [147, 150, 198] beschrieben.

Die Grenzen der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Zuverlässigkeitsanalyse werden z.B. von *Ben-Haim* in [47, §7] diskutiert. Ben-Haim argumentiert, daß es bei vielen komplexen technische Anwendungen nicht möglich sei, die für die Wahrscheinlichkeitstheorie erforderlichen Daten bereitzustellen. Die Zuverlässigkeitsanalyse sei deshalb oftmals fehlerbehaftet.

6.3.1 Unempfindlichkeit und Zuverlässigkeit von Strukturen

In einem alternativen Zugang zur Quantifizierung von Zuverlässigkeit führt Ben-Haim [47] ein Konzept ein, welches auf der Bestimmung der Robustheit eines System gegenüber Unsicherheiten basiert. Er bezeichnet dieses mit *robust reliability*, d.h. als „robuste Zuverlässigkeit“. Die mathematische Formulierung ergibt sich aus der Theorie konvexer Funktionen, siehe z.B. [48]. In diesem Konzept wird ein System als hochgradig zuverlässig angesehen, wenn es sich robust bei Variationen, d.h. Unsicherheiten, verhält. Es besitzt eine geringe Zuverlässigkeit, wenn es auf kleine Unsicherheiten mit der Möglichkeit des Schadensfalles reagiert.

Das Konzept der *robust reliability* beinhaltet drei Bestandteile, d.h. (1) ein mechanisches Modell, (2) ein Versagenskriterium und (3) ein Modell für die betrachteten Unsicherheiten. Die Zuverlässigkeit wird somit als der größte Betrag der Unsicherheit angesehen, die noch eine erfolgreiche Verwendung der Struktur ermöglicht.

Das betrachtete mechanische Modell muß in dem Sinne vollständig sein, daß die Variationen bzgl. relevanter Problemparameter α durch die Theorie beschreibbar sein müssen. Weiterhin müssen die betrachteten Variationen der Fehlerfunktion ϕ mechanisch sinnvoll sein.

Für die Fehlerfunktionen kommen unterschiedlichste Kriterien in Betracht, wobei eine Unterteilung zwischen *globalen Kriterien* wie z.B. bei Stabilitätsproblemen mit entsprechenden Beullasten und *lokalen Kriterien* mit a-priori unbekanntem Ort maximaler Spannungskriterien (z.B. Tsai-Wu-Kriterium für Spannungsbegrenzung bei Faserverbunden) möglich ist.

Verschiedene konvexe Modelle für die Unsicherheiten werden in [47] diskutiert. Als Beispiel sei die Beschränkung der Energie (*energy-bound models*) für ursprünglich gerade Stäbe und geometrische Imperfektionen im Fall von Stabilitätsversagen genannt. Wenn die maximalen Energien für die unsicheren geometrischen Formen unterhalb eines kritischen Wertes liegen, so kann kein Stabilitätsversagen auftreten und dieser kritische Wert ist ein Maß für die Zuverlässigkeit des Systems.

6.3.2 Erweiterung durch Verwendung von Sensitivitäten

Der hier zur Diskussion gestellte Zugang betrachtet konvexe Modelle für die Unsicherheiten, welche sich direkt aus den ersten Sensitivitäten des Schadenskriteriums bzgl. wichtiger Parametervariationen ergeben, siehe auch [27]. Hierbei können alle Einflußgrößen berücksichtigt werden, für die sich Sensitivitäten berechnen lassen, d.h. z.B. Geometrie, Materialwerte, Lasten, Randbedingungen. Diese Definition basiert somit direkt auf der funktionalen Abhängigkeit der Versagensfunktion von den Systemparametern. Für differenzierbare Funktionen gilt dann

$$|\delta\phi| = \left| \frac{d\phi}{d\alpha} \delta\alpha \right| \leq \left| \frac{d\phi}{d\alpha} \right| |\delta\alpha| \leq M \varepsilon. \quad (6.31)$$

Die Variation $|\delta\phi|$ der Fehlerfunktion wird dann hinreichend klein sein, wenn die Variation $|\delta\alpha|$ selbst hinreichend klein ist, d.h. $|\delta\alpha| \leq \varepsilon$ und weiterhin die Ableitung beschränkt ist, d.h. $|d\phi/d\alpha| \leq M$.

Damit ist das Modell durch die konvexe Hülle der wichtigsten Variationen gegeben. Die hierbei wichtigsten Versagensformen können in einem numerischen Vorgehen automatisch erfaßt werden. Eine detaillierte Beschreibung des Konzeptes wird in Abschnitt 6.3.6 gegeben.

Zur Verbesserung der Struktur, d.h. zur Vergrößerung der Zuverlässigkeit, muß die Sensitivität der Zuverlässigkeit bzgl. der Designparameter berechnet werden. Dieses bedeutet, daß sowohl erste als auch zweite Variationen der Schadensfunktion bestimmt und berechnet werden müssen. Die Berechnung erster und zweiter Sensitivitäten wird bereits seit etlichen Jahren in zahlreichen Veröffentlichungen diskutiert, siehe auch die Literaturangaben im Abschnitt 6.2. Hierbei werden vor allem erste Sensitivitäten entweder numerisch, semi-analytisch oder auch vollständig analytisch bzw. sogar variationell bestimmt. Die Bestimmung zweiter Ableitungen ist jedoch weitaus komplexer und wird dementsprechend bisher kaum verwendet.

Die hier vorliegende Darstellung konzentriert sich dabei auf die Ableitung, Implementierung und Berechnung zweiter Sensitivitäten bzgl. möglicher Geometrie- und Materialparametervariationen. Hierbei wird die bereits eingeführte Darstellungsform verwendet.

6.3.3 Erste Variation der schwachen Form

Die Untersuchungen verwenden die Notation der bisherigen Abschnitte insbesondere von Abschnitt 6.2. Zusätzlich werden jetzt auch Variationen des Materialmodells betrachtet.

6.3.3.1 Kontinuumsmechanische Formulierung

Die schwache Form $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = 0$ lautet für linear-elastische Materialien

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{int} + \mathcal{R}^{ext} = \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Omega_o} \rho_o \bar{\mathbf{b}}_o \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial\Omega_\sigma} \bar{\mathbf{t}}_o \boldsymbol{\eta} dA = 0, \quad (6.32)$$

wobei $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ den Spannungstensor, $\boldsymbol{\varepsilon}$ den linearen Verzerrungstensor, \mathbb{C} den Elastizitätstensor, $\boldsymbol{\eta}$ die Testfunktion, $\rho_o \bar{\mathbf{b}}_o$ die Volumenkräfte und $\bar{\mathbf{t}}_o$ die Oberflächenspannungen darstellen. Es wird nur der innere Anteil \mathcal{R}^{int} betrachtet, da voraussetzungsgemäß der äußere Anteil \mathcal{R}^{ext} deformationsunabhängig und zudem konstant bei Designänderungen sein soll, d.h. $\delta\mathcal{R}^{ext} = 0$.

Die totale Variation der schwachen Form des Gleichgewichtes kann additiv in partielle Variationen bzgl. des virtuellen Verschiebungsfeldes $\delta\mathbf{u}$, bzgl. des virtuellen Geometriefeldes $\delta\mathbf{X}$ und bzgl. des konstitutiven Modells $\delta\mathbf{m}$ zerlegt werden, d.h.

$$\delta\mathcal{R} = \delta_u \mathcal{R} + \delta_X \mathcal{R} + \delta_m \mathcal{R} = \partial_u \mathcal{R} \delta\mathbf{u} + \partial_X \mathcal{R} \delta\mathbf{X} + \partial_m \mathcal{R} \delta\mathbf{m} = 0. \quad (6.33)$$

Die „tangentielle Steifigkeit“ ist eine Bilinearform $k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}) := \delta_u \mathcal{R}$ definiert durch

$$k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_o} \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \mathbb{C} : \text{sym}\{\text{Grad}_X \delta\mathbf{u}\} dV. \quad (6.34)$$

In analoger Weise wird die „tangentielle Formsensitivität“ als Bilinearform $s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X}) := \delta_X \mathcal{R}$ durch

$$\begin{aligned} s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X}) &= - \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\sigma} : (\text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \text{Grad}_X \delta\mathbf{X} - \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \text{Div} \delta\mathbf{X}) dV \\ &\quad - \int_{\Omega_o} \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \mathbb{C} : \text{sym}\{\text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta\mathbf{X}\} dV. \end{aligned} \quad (6.35)$$

definiert. Abschließend werden die Variationen $\delta_m \boldsymbol{\sigma}$ der Spannungen bzgl. der Variation des konstitutiven Modells $\delta\mathbf{m}$ betrachtet. Es ergibt sich die „tangentielle Materialsensitivität“ als Bilinearform $m(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{m}) := \delta_m \mathcal{R}$ mit

$$m(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{m}) = \int_{\Omega_o} \delta_m \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} dV = \int_{\Omega_o} \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{m}} : \delta\mathbf{m} dV. \quad (6.36)$$

Damit kann Gleichung (6.33) in der Form

$$\delta\mathcal{R}(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{X}, \delta\mathbf{m}) = k(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}) + s(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X}) + m(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{m}) = 0 \quad (6.37)$$

dargestellt werden. Durch diese Beziehung ist die Variation des Gleichgewichtszustandes $\delta\mathbf{u}$ implizit definiert, sobald die Variationen $\delta\mathbf{X}$ der Geometrie und $\delta\mathbf{m}$ des Materials bekannt sind.

6.3.3.2 Diskrete Darstellung

Die isoparametrische FE-Methode wird betrachtet, siehe Abschnitt 6.2 für Hinweise auf die eingeführte Notation. Die Bilinearform der „tangentialen Sensitivität“ $k(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{u})$ wird durch

$$k_h(\boldsymbol{\eta}_h, \delta \mathbf{u}_h) = \bigcup_{e=1}^{NE} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \hat{\eta}_I^T \left[\int_{\Omega_e} \underline{B}_I^T \underline{\mathbb{C}} \underline{B}_J dV \right] \delta \hat{V}_J = \hat{\eta}^T \underline{K} \delta \hat{V} \quad (6.38)$$

approximiert, wobei \underline{K} die globale Steifigkeitsmatrix angibt.

In analoger Weise gilt für die Bilinearform der „tangentialen Formsensitivität“ $s_h(\boldsymbol{\eta}_h, \delta \mathbf{X}_h)$ die Beziehung

$$s_h(\boldsymbol{\eta}_h, \delta \mathbf{X}_h) = \bigcup_{e=1}^{NE} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \hat{\eta}_I^T \underline{s}_{IJ}^e \delta \hat{X}_J = \hat{\eta}^T \underline{S} \delta \hat{X}, \quad (6.39)$$

wobei \underline{S} die global Designsensitivitätsmatrix mit Knotenanteilen

$$\underline{s}_{IJ}^e = \int_{\Omega_e} \left[-\underline{B}_I^T \underline{\mathbb{C}} \underline{B}_J \underline{H} - \hat{\sigma} \underline{L}_J \underline{L}_I^T + \hat{\sigma} \underline{L}_I \underline{L}_J^T \right] dV \quad (6.40)$$

darstellt.

Abschließend gilt für die „tangentialen Materialsensitivität“ die Beziehung

$$m_h(\boldsymbol{\eta}_h, \delta \mathbf{m}_h) = \bigcup_{e=1}^{NE} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nmat} \hat{\eta}_I^T \left[\int_{\Omega_e} \underline{B}_I^T \underline{d}\sigma_J dV \right] \delta \hat{m}_J = \hat{\eta}^T \underline{M} \delta \hat{m}, \quad (6.41)$$

wobei \underline{M} die globale Materialsensitivitätsmatrix ist. Für ein konstantes Materialmodell sind nur die Materialparametervariationen zu betrachten, d.h. die Spannungsmatrix $\underline{\sigma}$ und die Elastizitätsmatrix $\underline{\mathbb{C}}$ müssen variiert werden, d.h. $\underline{d}\sigma_J$ und $\underline{d}\mathbb{C}_J$ sind zu bestimmen. Das konstitutive Modell für eine Faserverbundschale ist z.B. in [214] angegeben und die gesuchten Matrizen ergeben sich hieraus durch partielle Ableitung bzgl. der skalarwertigen makroskopischen Materialparameter.

Die diskrete Form der Gleichung (6.33) lautet

$$\delta \mathcal{R}_h = \hat{\eta}^T \left(\underline{K} \delta \hat{V} + \underline{S} \delta \hat{X} + \underline{M} \delta \hat{m} \right) = 0. \quad (6.42)$$

Üblicherweise wird $\delta \hat{V}$ entweder bzgl. einer bekannten Formvariation $\delta \mathbf{X}$ oder bzgl. einer bekannten Variation des Materialmodells $\delta \mathbf{m}$ bestimmt, d.h.

$$\delta \hat{V} = -\underline{K}^{-1} \underline{S} \delta \hat{X} \quad \text{oder} \quad \delta \hat{V} = -\underline{K}^{-1} \underline{M} \delta \hat{m}. \quad (6.43)$$

6.3.4 Zweite Variation der schwachen Form

Die Bedeutung zweiter Variationen für die Untersuchung einer robusten Struktur wurde erläutert. In diesem Abschnitt werden weiterführende Ableitungen sowie Hinweise zur numerischen Umsetzung der Berechnung zweiter Variationen der schwachen Form der Gleichgewichtsbedingung für linear-elastisches Materialverhalten gegeben.

6.3.4.1 Kontinuumsmechanische Darstellung

Jede Variation der Beziehung (6.37) muß verschwinden, da das Gleichgewicht gewahrt bleiben muß, d.h. es gilt

$$\delta^2 \mathcal{R}(\boldsymbol{\eta}, \delta^2 \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}_1, \delta \mathbf{u}_2, \delta \mathbf{X}_1, \delta \mathbf{X}_2, \delta \mathbf{m}_1, \delta \mathbf{m}_2, \delta^2 \mathbf{X}_{1,2}, \delta^2 \mathbf{m}_{1,2}) = 0. \quad (6.44)$$

Diese Multilinearform hängt von den Variationen der Verschiebungen, der Geometrie und des konstitutiven Modells ab. Die Indizes beschreiben den Zusammenhang zwischen dem virtuellen Verschiebungsvektor und der vorgegebenen Variation der Geometrie und des Materials. Weiterhin treten die Variationen $\delta^2 \mathbf{X}_{1,2}$ und $\delta^2 \mathbf{m}_{1,2}$ dann auf, wenn die vorgegebenen Variationen der Geometrie $\delta \mathbf{X}_1$ und $\delta \mathbf{X}_2$ (bzw. $\delta \mathbf{m}_1$ und $\delta \mathbf{m}_2$) nicht unabhängig sind. Dieser Fall kann dann auftreten, wenn z.B. $\delta \mathbf{X}_1$ und $\delta \mathbf{X}_2$ von komplexeren Modellen abgeleitet werden. Somit ist $\delta^2 \mathbf{u}$ implizit durch $\delta^2 \mathcal{R} = 0$ definiert. Eine grundlegende Darstellung liefert

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{R} &= \delta_{uu} \mathcal{R} + \delta_{Xu} \mathcal{R} + \delta_{mu} \mathcal{R} \\ &+ \delta_{uX} \mathcal{R} + \delta_{XX} \mathcal{R} + \delta_{mX} \mathcal{R} \\ &+ \delta_{um} \mathcal{R} + \delta_{Xm} \mathcal{R} + \delta_{mm} \mathcal{R} = 0 \end{aligned} \quad (6.45)$$

und somit müssen alle partiellen Variationen der schwachen Form bereitgestellt werden. Diese Multilinearform kann unter Verwendung der noch einzuführenden Bilinearformen bereitgestellt werden.

Die zweite partielle Variation von \mathcal{R} bzgl. der Verschiebungen liefert

$$\delta_{uu} \mathcal{R} = \delta_u (\partial_u \mathcal{R} \delta \mathbf{u}_1) = \partial_{uu} \mathcal{R} \delta \mathbf{u}_1 \delta \mathbf{u}_2 + \partial_u \mathcal{R} \delta^2 \mathbf{u} = k(\boldsymbol{\eta}, \delta^2 \mathbf{u}), \quad (6.46)$$

da $\partial_{uu} \mathcal{R} = 0$ aufgrund der Linearität des Problems ist.

Alle gemischten partiellen Variationen bzgl. der Verschiebung und der Geometrie, d.h. die Größen $\delta_{uX} \mathcal{R} = a(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{u}_1, \delta \mathbf{X}_2)$ und $\delta_{Xu} \mathcal{R} = a(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{u}_2, \delta \mathbf{X}_1)$, lauten

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{X}) &:= \int_{\Omega_o} [-\text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \mathbb{C} : \text{Grad}_X \delta \mathbf{u} \text{ Grad}_X \delta \mathbf{X} \\ &\quad - \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \text{ Grad}_X \delta \mathbf{X} : \mathbb{C} : \text{Grad}_X \delta \mathbf{u} \\ &\quad + \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \mathbb{C} : \text{Grad}_X \delta \mathbf{u} \text{ Div } \delta \mathbf{X}] dV. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Alle gemischten partiellen Variationen bzgl. der Verschiebung und bzgl. des Materials, d.h. $\delta_{um} \mathcal{R} = b(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{u}_1, \delta \mathbf{m}_2)$ und $\delta_{mu} \mathcal{R} = b(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{u}_2, \delta \mathbf{m}_1)$, lauten

$$b(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) := \int_{\Omega_o} \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \delta_m \mathbb{C} : \text{sym}\{\text{Grad}_X \delta \mathbf{u}\} dV. \quad (6.48)$$

Die gemischten partiellen Variationen bzgl. Geometrie und bzgl. des konstitutiven Modells sind $\mathcal{R}_{Xm} = c(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{X}_1, \delta \mathbf{m}_2)$ und $\mathcal{R}_{mX} = c(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{X}_2, \delta \mathbf{m}_1)$

$$\begin{aligned} c := & - \int_{\Omega_o} \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \delta_m \mathbb{C} : \text{sym}\{\text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}\} dV \\ & - \int_{\Omega_o} \delta_m \boldsymbol{\sigma} : [\text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X} - \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \text{Div} \delta \mathbf{X}] dV. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Die zweiten partiellen Variationen bzgl. Geometrie sind durch

$$\delta_{XX} \mathcal{R} = s(\boldsymbol{\eta}, \delta^2 \mathbf{X}_{1,2}) + d(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{X}_1, \delta \mathbf{X}_2) + d(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{X}_2, \delta \mathbf{X}_1) \quad (6.50)$$

gegeben, wobei die (*tangent design sensitivity*) Bilinearform s sich aus Gleichung (6.35) ergibt und die Trilinearform $d(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{X}, \delta \mathbf{X})$ durch

$$\begin{aligned} d := & \int_{\Omega_o} [- \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \mathbb{C} : \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_1 \text{Div} \delta \mathbf{X}_2 \\ & + \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_2 : \mathbb{C} : \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_1 \\ & + \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \mathbb{C} : \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_2 \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_1 \\ & + \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_2 \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_1 \\ & - \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_1 \text{Div} \delta \mathbf{X}_2 \\ & - 1/2 \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} (\text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_1 \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}_2 : \mathbf{1}) \\ & + 1/2 \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \text{Div} \delta \mathbf{X}_1 \text{Div} \delta \mathbf{X}_2] dV \end{aligned} \quad (6.51)$$

definiert ist.

Abschließend kann die zweite Variation bzgl. des konstitutiven Modells durch

$$\delta_{mm} \mathcal{R} = m(\boldsymbol{\eta}, \delta^2 \mathbf{m}_{1,2}) + e(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{m}_1, \delta \mathbf{m}_2) + e(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{m}_2, \delta \mathbf{m}_1) \quad (6.52)$$

beschrieben werden, wobei die Trilinearform $e(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{m}, \delta \mathbf{m})$ in der Form

$$e(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{m}, \delta \mathbf{m}) := \int_{\Omega_o} \delta_{mm} \boldsymbol{\sigma} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} dV. \quad (6.53)$$

beschrieben wird.

6.3.4.2 Diskrete Formulierung

Eine diskrete Darstellung der eingeführten Trilinearformen a, b, c, d, e wurde auf der Grundlage einer isoparametrischen FE-Formulierung hergeleitet. Obwohl alle Trilinearformen und alle Abbildungen sowie Variationen durch entsprechende diskrete Größen approximiert werden, wird zur Vereinfachung die eingeführte Notation beibehalten.

Das grundsätzliche Vorgehen wird am Beispiel der Trilinearform $a(\boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{X})$ vorgestellt, die in der Form

$$a = \bigcup_{e=1}^{NE} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \sum_{r=1}^{ndi} \sum_{s=1}^{ndi} \sum_{t=1}^{ndi} \left[\int_{\Omega_e} A_{IJK}^{rst} dV \right] \hat{\eta}_r^I \delta \hat{u}_s^J \delta \hat{X}_t^K \quad (6.54)$$

dargestellt werden kann, wobei NE die Anzahl der Elemente, nel die Knotenanzahl am Element und ndi die Dimension des Problems angibt. Weiterhin sind $\hat{\eta}_r^I$, $\delta\hat{u}_s^J$ und $\delta\hat{X}_t^K$ die Knotenwerte von $\boldsymbol{\eta}$, $\delta\mathbf{u}$ und $\delta\mathbf{X}$. Einsteins Summationskonvention wird vorausgesetzt, d.h. zweifach auftretende Indizes werden über die Dimension ndi summiert. Die wesentlichen Knotenanteile lauten

$$A_{IJK}^{rst} = - N_{I,t} N_{J,v} N_{K,w} \mathbb{C}_{svrw} - N_{I,t} N_{J,w} N_{K,v} \mathbb{C}_{rvsw} \quad (6.55)$$

$$+ N_{I,v} N_{J,w} N_{K,t} \mathbb{C}_{rvsw}. \quad (6.56)$$

Auf Elementebene muß für jede Knotenkombination (IJK) eine Matrix der Dimension $(ndi)^3$ berechnet werden. Dieses Feld wird elementweise in ein Feld der Dimension $(nel \times ndi)^3$ eingefügt, welches für den späteren Gebrauch gespeichert wird. Für ein Vierknotenelement ($nel = 4$, $ndi = 2$) werden somit pro Element insgesamt 256 Speicherplätze benötigt. Dieses Vorgehen kann auf alle andere Trilinearformen b, c, d, e angewendet werden.

Die Dimension entspricht der Güte der Approximation der Geometrie und der Verschiebungen auf dem Elementgebiet, d.h. dem isoparametrischen Konzept. Die beschriebenen Trilinearformen sind Bestandteile der Variationen bzgl. des vollständigen Approximationsraumes. Eine verbesserte Approximation der Geometrie durch Verwendung geeigneterer Ansätze erlaubt eine Reduktion des Speicherbedarfs. In diesem Fall ist es ratsam, alle Elementbeiträge in ein globales Feld einzufügen. Wichtig ist zu erkennen, daß die Sensitivitätsanalyse auf dem Elementgebiet nicht mit den aktuell gewählten Designvariablen, den sogenannten *design velocity fields* in Beziehung steht.

Jede Trilinearform $a(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}_1, \delta\mathbf{X}_2)$ kann durch einen Vektor $\mathbf{a}_{1,2}$ dargestellt werden, falls die Variationen der Verschiebung und der Geometrie (oder des Materials) gewählt oder berechnet wurden, d.h. $a = \boldsymbol{\eta}^T \cdot \mathbf{a}_{1,2}$. Dies bedeutet, daß für jede Kombination von Variationen $(\delta\mathbf{u}_1, \delta\mathbf{X}_2)$ die Elementbeiträge zu den Trilinearformen mit den Vektoren $(\delta\underline{\hat{V}}_1, \underline{\hat{X}}_2)$ multipliziert werden müssen, um $\underline{a}_{1,2}$ zu bestimmen. Zusammenfassend erhält man somit die Beziehung $a_h = \underline{\eta}^T \underline{a}_{1,2}$ und entsprechende Darstellungen für alle anderen Trilinearformen.

Die zweiten Variationen der schwachen Form bzgl. der Variation $\delta\mathbf{X}_1$ der Geometrie und $\delta\mathbf{m}_2$ des konstitutiven Modells sind durch

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{R} &= \delta_{uu} \mathcal{R} + \delta_{um} \mathcal{R} + \delta_{Xu} \mathcal{R} + \delta_{Xm} \mathcal{R} \\ &= k(\boldsymbol{\eta}, \delta^2 \mathbf{u}) \\ &+ b(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}_1, \delta\mathbf{m}_2) + a(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{u}_2, \delta\mathbf{X}_1) + c(\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{X}_1, \delta\mathbf{m}_2) \end{aligned} \quad (6.57)$$

gegeben. Die entsprechenden zweiten Variationen des diskreten Verschiebungsvektors $\delta^2 \hat{V}$ für den Fall von Formvariationen $(\delta\underline{\hat{X}}_1, \delta\underline{\hat{m}}_2)$ kann mit Verwendung der eingeführten Matrizen berechnet werden, d.h. mit $\underline{w} := \underline{b}_{1,2} + \underline{a}_{2,1} + \underline{c}_{1,2}$ gilt

$$\delta^2 \hat{V} = -\underline{K}^{-1} (\underline{b}_{1,2} + \underline{a}_{2,1} + \underline{c}_{1,2}) =: -\underline{K}^{-1} \underline{w}. \quad (6.58)$$

Dieses Vorgehen kann für jede andere Kombination von Designvariablen durchgeführt werden. Damit sind nur noch Matrix-Vektor-Multiplikationen außerhalb der eigentlichen Elemente notwendig, sofern die Elementbeiträge im Vorfeld berechnet und gespeichert wurden.

6.3.5 Variationen von Zielfunktion und Nebenbedingung

Ein analoges Vorgehen kann auf die Berechnung der ersten und zweiten Variationen einer Zielfunktion bzw. Nebenbedingung ϕ bzgl. Geometrie- oder Materialparametervariationen angewendet werden, siehe die Gleichungen (6.33) und (6.45). Die Linear- und Bilinearformen sowie die zugehörigen Matrizen werden verwendet, um die diskreten Formen der Variationen zu beschreiben, d.h. $\delta_u \phi =: f(\delta \mathbf{u}) = \underline{f}^T \delta \underline{\hat{V}}$ und $\delta_X \phi =: g(\delta \mathbf{X}) = \underline{g}^T \delta \underline{\hat{X}}$ sowie $\delta_m \phi =: h(\delta \mathbf{m}) = \underline{h}^T \delta \underline{\hat{m}}$ für den Fall erster Sensitivitäten. Damit kann die Sensitivitätsanalyse für geometrische Designvariablen unter Verwendung von Gleichung (6.43) in der Form

$$\delta \phi = \underline{f}^T \delta \underline{\hat{V}} + \underline{g}^T \delta \underline{\hat{X}} = - (\underline{f}^T \underline{K}^{-1} \underline{S} + \underline{g}^T) \delta \underline{\hat{X}} \quad (6.59)$$

geschrieben werden sowie in analoger Weise für Materialparameter

$$\delta \phi = \underline{f}^T \delta \underline{\hat{V}} + \underline{h}^T \delta \underline{\hat{m}} = - (\underline{f}^T \underline{K}^{-1} \underline{M} + \underline{h}^T) \delta \underline{\hat{m}}. \quad (6.60)$$

Die Effizienz der numerischen Berechnung hängt von der Anzahl der Zielfunktionen ϕ und Designvariablen $\delta \underline{\hat{X}}$ (oder $\delta \underline{\hat{m}}$) ab, siehe hierzu die Diskussion zur *direkten* oder *adjungierten* Form der Sensitivitätsanalyse z.B. in [84].

Für die zweiten Sensitivitäten müssen die folgenden Variationen, Bilinearformen und Matrizen betrachtet werden, d.h.

$$\begin{aligned} \delta_{uu} \phi &=: A(\delta \mathbf{u}_1, \delta \mathbf{u}_2) = \delta \underline{\hat{V}}_1^T \underline{A} \delta \underline{\hat{V}}_2 \\ \delta_{uX} \phi &=: B(\delta \mathbf{u}_1, \delta \mathbf{X}_2) = \delta \underline{\hat{V}}_1^T \underline{B} \delta \underline{\hat{X}}_2 \\ \delta_{um} \phi &=: C(\delta \mathbf{u}_1, \delta \mathbf{m}_2) = \delta \underline{\hat{V}}_1^T \underline{C} \delta \underline{\hat{m}}_2 \\ \delta_{XX} \phi &=: D(\delta \mathbf{X}_1, \delta \mathbf{X}_2) = \delta \underline{\hat{X}}_1^T \underline{D} \delta \underline{\hat{X}}_2 \\ \delta_{Xm} \phi &=: E(\delta \mathbf{X}_1, \delta \mathbf{m}_2) = \delta \underline{\hat{X}}_1^T \underline{E} \delta \underline{\hat{m}}_2 \\ \delta_{mm} \phi &=: F(\delta \mathbf{m}_1, \delta \mathbf{m}_2) = \delta \underline{\hat{m}}_1^T \underline{F} \delta \underline{\hat{m}}_2. \end{aligned}$$

Diese zweiten Sensitivitäten können unter Verwendung der eingeführten Matrizen berechnet werden. Beispielsweise gilt für die gemischten Sensitivitäten bzgl. Geometrie $\delta \underline{\hat{X}}_1$ und Materialgesetz $\delta \underline{\hat{m}}_2$ die Darstellung $\delta^2 \phi = \partial_u \phi \delta^2 \mathbf{u} + \delta_{uu} \phi + \delta_{um} \phi + \delta_{Xu} \phi + \delta_{Xm} \phi$. Damit ergibt sich eine weitere Darstellung

$$\begin{aligned} \delta^2 \phi = \underline{f}^T \delta^2 \underline{\hat{V}} &+ \delta \underline{\hat{V}}_1^T \underline{A} \delta \underline{\hat{V}}_2 + \delta \underline{\hat{V}}_1^T \underline{C} \delta \underline{\hat{m}}_2 \\ &+ \delta \underline{\hat{V}}_2^T \underline{B} \delta \underline{\hat{X}}_1 + \delta \underline{\hat{X}}_1^T \underline{E} \delta \underline{\hat{m}}_2 \end{aligned} \quad (6.61)$$

und weitere Formen können durch Verwendung der bereits berechneten ersten Variationen $\delta \underline{\hat{V}}_1 = -\underline{K}^{-1} \delta \underline{\hat{X}}_1$ und $\delta \underline{\hat{V}}_2 = -\underline{K}^{-1} \delta \underline{\hat{m}}_2$, vergleiche Gleichung (6.43), und der zweiten Variationen $\delta^2 \underline{\hat{V}} = -\underline{K}^{-1} \underline{w}$, siehe Gleichung (6.58), angegeben werden.

6.3.6 Definition der robusten Zuverlässigkeit mittels Sensitivitäten

Das Konzept der von Ben-Haim sogenannten *robusten Zuverlässigkeit* (*robust reliability*), wie es in [47] eingeführt wurde, basiert auf der Wahl einer Versagensfunktion und eines konvexen Modells der Unsicherheiten. Der hier vorgestellte Beitrag zur Robustheit und Zuverlässigkeit von Ingenieurstrukturen kombiniert die Versagensfunktion und die Unsicherheit mittels der Sensitivitätsanalyse. Die zentralen Ideen sind hierbei:

- Die Geometrie- und Materialparametervariationen, welche die größten Beiträge zur Sensitivität der Versagensfunktionen ϕ_i leisten, werden zur Beschreibung eines konvexen Modells der Unsicherheiten herangezogen. Hierzu wird eine beliebige Anzahl n_α von Problemparametern α_j für $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$ betrachtet. Die Variation eines Parameters α_j liefert $\delta\alpha_{(j)} = \eta_{(j)} s_{(j)}$, d.h. die zulässige Variation kann durch Grenzen $l_j \leq s_j \leq u_j$ für den Parameter s_j beschrieben werden, wobei die Variationen der einzelnen Parameter α_j als unabhängig angesehen werden. Ein n_α -dimensionaler Unterraum $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_\alpha}$, d.h. der gesuchte konvexe Raum der Unsicherheiten, ist in der folgenden Form gegeben, d.h.

$$\mathcal{P} := \{\underline{s} \in \mathbb{R}^{n_\alpha} \mid l_j \leq s_j \leq u_j, j = 1, 2, \dots, n_\alpha\}.$$

- Die robuste Zuverlässigkeit einer Struktur wird durch eine gewichtete Norm aller berechneten ersten Sensitivitäten der Versagensfunktion beschrieben. Mögliche Definitionen beinhalten:
 - Maximale Sensitivität eines einzelnen Kriteriums bzgl. einer Parametervariation.
 - Wahl einer L_q -Norm, d.h. ein gewichteter Durchschnitt der größten Sensitivitäten.
 - Wahl einer gewichteten Norm unterschiedlicher Schadensfunktionen, d.h. Spannungsbeschränkung und Stabilitätsversagen.
- Damit wird die Struktur als zuverlässig bzgl. einer betrachteten Versagensfunktion angesehen, falls diese Norm hinreichend klein ist. Die Funktion ψ der robusten Zuverlässigkeit sollte hierbei auch den Abstand des aktuell betrachteten Designs von der Schadensfläche berücksichtigen.
- Ein nichtlineares Optimierungsproblem wird betrachtet, welches die ersten Sensitivitäten minimiert, d.h. die Zuverlässigkeit erhöht.

Diese Konzept hängt zentral von der theoretischen Darstellung und Herleitung erster und zweiter Sensitivitäten sowie eines effizienten numerischen Algorithmus zu ihrer Berechnung ab.

Die Darstellung der Sensitivitäten als Linear-, Bilinear und Trilinearform wurde in einem allgemeingültigen Zugang formuliert. Es ist dabei festzuhalten, daß alle Variationen vor einer Diskretisierung der Verschiebungen bzw. der Geometrie oder des Materialmodells ermittelt wurden. Damit sind fehlerkontrollierte adaptive Methoden einsetzbar, die problemgerecht eine Verbesserung des Optimierungsproblems hinsichtlich der Erhöhung der Zuverlässigkeit der Struktur ermöglichen.

Ein numerisches Gesamtkonzept wird nachfolgend dargestellt.

Tafel 6.1: Berechnung und Optimierung der robusten Zuverlässigkeit

1. Vorbereitung

- (a) Formulierung des kontinuierlichen Problems für die Strukturanalyse.
- (b) Diskretisierung des Randwertproblems bzgl. der Geometrie, der Materialparameter, der Lasten und Randbedingungen sowie der FEM-Größen, d.h. die Wahl eines Ausgangsentwurfs, die Wahl des zugehörigen FE-Netzes.
- (c) Lösung des diskreten Strukturanalyseproblems.

2. Bestimmung der robusten Zuverlässigkeit

- (a) Festlegung des konvexen Modells der Unsicherheiten durch Wahl aller oder wichtiger Parametervariationen bzw. Berücksichtigung zusätzlicher Lastfälle.
- (b) Berechnung der partiellen Sensitivitätsmatrizen der schwachen Form des Gleichgewichtes und ggfs. Speicherung.
- (c) Berechnung aller Schadensfunktionen ϕ_i für $i = 1, 2, \dots, n_\alpha$.
- (d) Berechnung aller partiellen Sensitivitäten der Schadensfunktionen.
- (e) Berechnung der vollständigen Sensitivitäten $d\phi_i/d\alpha_j$.
- (f) Einführung der Definition der robusten Zuverlässigkeit, d.h. Wahl der Robustheitsfunktion $\psi = \hat{\psi}(d\phi_i/d\alpha_j)$.
- (g) Lösung eines nichtlinearen Optimierungsproblems um die Robustheitsfunktion ψ über dem Gebiet der zulässigen Parametervariationen \mathcal{P} zu minimieren, d.h. Bestimmung der *worst case* Situation.

3. Strukturoptimierung zur Erhöhung der robusten Zuverlässigkeit

- (a) Wahl einer zweiten Menge \mathcal{D} von Geometrie- bzw. Materialparametern zur gezielten Veränderung der Ausgangsstruktur.
- (b) Berechnung der zugehörigen Sensitivitäten der Robustheitsfunktion.
- (c) Lösung eines nichtlinearen Optimierungsproblems zur Minimierung der Fehlerfunktionen ϕ_i und zur Maximierung (*worst case* Situation) der Robustheitsfunktion ψ über dem Gebiet der zulässigen Designvariationen \mathcal{D} .

6.3.7 Zusammenfassung und Ausblick

Die Definition eines konvexen Modells der Unsicherheiten durch Sensitivitätsinformationen beschreibt die Robustheit in direkter Form. Mittels numerischer Verfahren kann dieser Zugang auf eine Vielzahl von Ingenieurproblemen mit großer Komplexität angewendet werden, da das konvexe Modell numerisch leicht und ohne weiteren theoretischen Aufwand ausgewertet werden kann.

Diese Aussage ist jedoch nur dann richtig, wenn die Sensitivitätsanalyse in Theorie und Numerik durchgeführt werden kann. Dieses ist heutzutage noch unrealistisch, insbesondere bei realen Ingenieurstrukturen. Für akademische Fragestellungen erscheint eine Anwendung möglich; ein Beweis hierfür muß jedoch der weiteren Forschung vorbehalten bleiben.

Darüberhinaus kann die Sensitivitätsanalyse –so effizient sie auch im Detail durchgeführt werden kann– nur einen Einzelbeitrag zur Problemlösung liefern. Wesentlich bleibt die korrekte mechanische Modellierung der Problemstellung.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit *Zur Kontinuumsmechanik inverser Geometrieprobleme* wurde die Problemstellung der Sensitivitätsanalyse und Optimierung von Ingenieurstrukturen für vorgegebene Geometrievariationen betrachtet. Die qualitative und quantitative Kenntnis der Sensitivität kontinuumsmechanischer Größen bzgl. Parameteränderungen stellt eine wichtige Entscheidungsgröße dar. Eine Berücksichtigung dieser Information im Konstruktionsprozeß kann die Qualität der Bearbeitung und des Ergebnisses wesentlich erhöhen.

Die aus der Literatur bekannten Zugänge zur Sensitivitätsanalyse, d.h. die Methode der materiellen Ableitung (*Material Derivative Approach*, siehe z.B. [6]) und die Methode der Gebietsparametrisierung (*Domain Parametrization Approach*, siehe z.B. [219]), konnten erweitert werden. Die vorgeschlagene *einheitliche Darstellung der Grundlagen von Strukturanalyse und Strukturoptimierung innerhalb der Kontinuumsmechanik* ermöglicht einen konzeptionell naheliegenden Zugang zur Sensitivitätsanalyse, der auch in der Numerik vorteilhaft eingesetzt werden kann.

Es sind mit der aufgezeigten Methodik drei Erweiterungen vorgeschlagen worden:

1. Die klassische Kontinuumsmechanik bzgl. der materiellen Körper wurde konsequent um eine Betrachtungsweise bzgl. der natürlich vorgegebenen Parametrisierung mittels konvektiver Koordinaten erweitert.
2. Die Variation kontinuumsmechanischer Größen kann bereits in der Theorie auf die zugehörige Variation der Grundabbildungen zurückgeführt werden, d.h. sämtliche Variationen (Zeitableitung, Designableitung, Linearisierung, etc.) sind Bestandteil der Theorie und müssen nicht nachträglich ermittelt werden.
3. Die numerischen Methoden (CAGD, FEM) können unmittelbar aus der Kontinuumsmechanik abgeleitet werden, wobei die Problemstellungen der CAGD-FEM-Kopplung bereits in den Zusammenhängen der Kontinuumsmechanik aufgezeigt werden können.

Basierend auf diesen Grundlagen konnte die Sensitivitätsanalyse für Problemstellungen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik aufgebaut und dargestellt werden. Beispielhaft wurde die *Schädigungsmechanik* betrachtet. Hierbei wurde besonderer Wert auf eine einheitliche Sichtweise von Strukturanalyse und Sensitivitätsanalyse gelegt.

Die entwickelte Methodik wurde auf drei Fragestellungen angewendet.

Die Untersuchungen zur *Formoptimierung des Querschnitts eines PKW-Stoßfängers* sowie die Bemerkungen zur *Optimierung in der Bruchmechanik* verdeutlichen anhand akademischer Beispiele exemplarisch das Potential der Sensitivitätsanalyse für die Optimierung von Ingenieurstrukturen. Das abschließend dargelegte *Konzept für robuste Konstruktionen* zeigt die Anwendungsmöglichkeiten der Methodik bei der grundsätzlichen Fragestellung zuverlässiger Ingenieurstrukturen und hebt das Potential der Sensitivitätsanalyse hervor.

7.2 Ausblick

Die Stärke der entwickelten Methodik kann aus Sicht des Autors in zwei Bereichen gewinnbringend eingesetzt werden.

Zunächst sind die methodischen Hilfsmittel grundlegend bereitgestellt worden, so daß es hiermit möglich ist, die Sensitivitätsanalyse auch für komplexe nichtlineare Prozesse durchzuführen. Diese optimistische Sichtweise begründet sich in der nachgewiesenen Ähnlichkeit der Linearisierungskonzepte der numerischen Mechanik (tangente Steifigkeit – tangente Sensitivität). Konzeptionell ist somit die *gleichzeitige* Aufbereitung von Theorie und Numerik sowohl für die Belange der Strukturanalyse als auch für die der Sensitivitätsanalyse möglich und in der Durchführung auch anzustreben.

Die aufgezeigten Zusammenhänge und die eingeführte lokal-konvektive Betrachtungsweise kann ebenfalls in der Lehre gewinnbringend eingesetzt werden. Der Zusammenhang von Theorie (Kontinuumsmechanik) und Numerik (CAGD, FEM) sowie die Interaktion zwischen CAGD und FEM kann den Studierenden mit der lokal-konvektiven Betrachtungsweise übersichtlich und verständlich nahegebracht werden.

Die entwickelte Methodik besitzt naturgemäß auch ihre Grenzen.

Zunächst sei daran erinnert, daß in dieser Arbeit die stetige Differenzierbarkeit der kontinuumsmechanischen Größen vorausgesetzt wurde. Dies bedeutet, daß alle Funktionen hinreichend glatt sein müssen, damit die Variationen berechnet werden können. Diese Annahme ist für wichtige Problemstellungen der Mechanik (z.B. reibungsbehafteter Kontakt und nichtlineare Dynamik) nicht uneingeschränkt erfüllt. Die Anwendbarkeit auf diese Problemklassen und die notwendigen Erweiterungen sind daher zukünftig noch zu untersuchen.

Ebenfalls ist zu erkennen, daß sich viele interessante Fragestellungen nur durch diskrete Optimierungsaufgaben beschreiben lassen. In diesem Fall kann die Sensitivitätsanalyse keinen Lösungsbeitrag liefern.

Die Methodik stellt weiterhin hohe Anforderungen an die Modellierung eines realen Problems. Die aufgezeigten Vorteile ergeben sich nur dann, wenn die Abbildungen und Variationen auch tatsächlich berechnet werden können. Bei industriellen Anwendungen kann diese Forderung heutzutage kaum erfüllt werden. Auch aus diesem Grund konnten in dieser Arbeit nur akademische Beispiele betrachtet werden.

Diese Arbeit stellt einen Grundlagenbeitrag zur Sensitivitätsanalyse und somit zur numerischen Behandlung von Formoptimierungsproblemen dar. Der praktische Beweis der Verwendbarkeit und die Verdeutlichung ihrer Vorteile gegenüber anderen Zugängen bleibt der weiteren Forschung vorbehalten.

Anhang A

Anmerkungen zur Kontinuumsmechanik

Hinweise zur Tensoralgebra und Tensoranalysis sind in den Büchern von *de Boer* [81], *Marsden, Hughes* [164], *Abraham, Marsden, Ratiu* [1], *Bertram* [52] sowie in den Vorlesungsunterlagen von *Stein* [207] zu finden.

Inhaltsangabe

A.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	161
A.2	Hinweise zur Tensorrechnung	162
A.2.1	Basissysteme der Tangentialräume	162
A.2.2	Fundamentaltensoren	162
A.2.3	Tensorableitungen in natürlichen Basissystemen	163
A.2.4	Wichtige Tensorableitungen	164
A.2.5	Integralsätze	167
A.3	Transformationsbeziehungen und deren Variation	168
A.3.1	Variation von Basisvektoren und Metrikkoeffizienten	168
A.3.2	Gradientenoperatoren und deren Variation	169
A.3.3	Divergenzoperatoren und deren Variation	170
A.3.4	Die Determinante eines Tensors und deren Variation	171
A.3.5	Transformation von Vektoren und Tensoren	172
A.3.6	Transformation und Variation der Linien-, Flächen- und Volumenelemente	175
A.3.7	Transformation und Variation von Massenelementen	177
A.4	Transformation und Variation der Verzerrungen	179
A.4.1	Variation der lokal-konvektiven Verzerrungstensoren	179
A.4.2	Transformation lokaler Verzerrungstensoren	180
A.4.3	Variation der transformierten Verzerrungstensoren	182
A.4.4	Transformation und Variation der Invarianten	183

A.5	Transformation und Variation der Spannungen	186
A.5.1	Transformationen der zwei- und vierstufigen Tensoren	186
A.5.2	Transformation in materielle und räumliche Darstellungsweisen . .	187
A.5.3	Transformation der Spannungsleistung	188
A.5.4	Variation der Spannungsleistung	189
A.6	Details zu den Materialgesetzen	191

A.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Die mathematischen Grundlagen zur Darstellung der Kontinuumsmechanik im differential-geometrischen Zusammenhang werden grundlegend in der Arbeit von *Abraham, Marsden, Ratiu* [1] dargestellt. Sie ist fundamental, aber gleichzeitig für den Ingenieur nur nach intensivem Studium verständlich. Leichter zugänglich sind dabei Arbeiten zur Anwendung wie z.B. *Marsden, Hughes* [164] sowie *Bertram* [52].

Die Definition einer *differenzierbaren Mannigfaltigkeit* ist z.B. in [1, S. 122] bzw. in [52, §4] gegeben worden. Weiterführende Literaturhinweise sind dort zu finden.

Zusammenfassend seien die wesentlichen Eigenschaften einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit kurz angegeben:

- Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit besteht aus einer endlichen Anzahl von *Karten*, die einen *Atlas* bilden, und die betrachtete Menge überdecken.
- Eine Karte ist dabei eine Kombination aus einer Teilmenge \mathcal{U}_i und einer Abbildung $\Phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow T_i$.
- Ein Kartenwechsel ist erlaubt. Dieser ist unendlich oft differenzierbar und verändert die Mannigfaltigkeit nicht.
- Es wird durch die Karten eine Topologie der Mannigfaltigkeit induziert.

Die Zusammenhänge sind im folgenden Bild zusammengefaßt, siehe auch Bild 2.2 auf Seite 14.

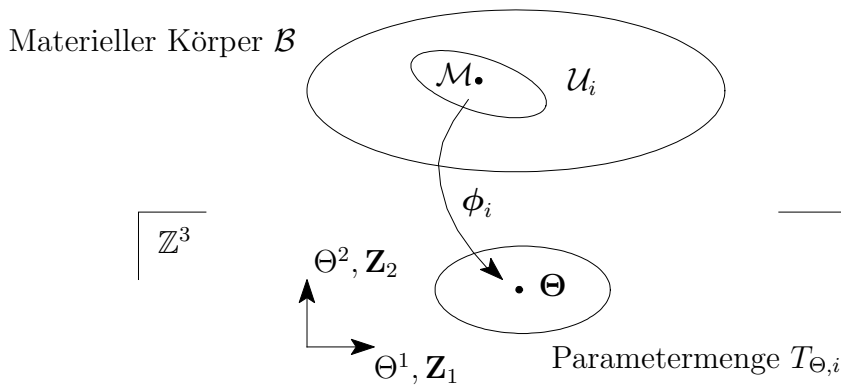


Bild A.1: Eine Karte der Mannigfaltigkeit „materieller Körper“

A.2 Hinweise zur Tensorrechnung

Dieser Abschnitt stellt einige ausgewählte Grundlagen der Tensoralgebra und -analysis kurz zusammen.

A.2.1 Basissysteme der Tangentialräume

Die Basissysteme der Euklidischen Vektorräume sind in Abschnitt 2.1 eingeführt worden. Die kartesischen Basen lauten dabei $\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3\}$ für den Parameterraum T_Θ , $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ für die Referenzkonfiguration Ω_o sowie $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ für die Momentankonfiguration Ω_t . Die zugehörigen Koordinaten sind $\Theta, \mathbf{X}, \mathbf{x}$.

Die konvektiven Tangentenvektoren

$$\mathbf{G}_i := \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \Theta^i} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i := \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \Theta^i} \quad (\text{A.1})$$

an die Koordinatenlinien $\Theta^i = \text{konst.}$ für $i = 1, 2, 3$ bilden die kovariante Basis und spannen die jeweiligen Tangentialräume T_X im Punkt \mathbf{X} an Ω_o bzw. T_x im Punkt \mathbf{x} an Ω_t auf. Die zugehörigen kontravarianten Basisvektoren, welche die dualen Tangentialräume T_X^* bzw. T_x^* aufspannen, sind durch $\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j$ bzw. $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$ definiert.

Im weiteren werden nur noch die Abbildungen zwischen den Tangentialräumen T_X, T_x und dem Parameterraum T_Θ betrachtet. Damit treten die kartesischen Basisvektoren \mathbf{E}_i und \mathbf{e}_i nicht weiter auf.

A.2.2 Fundamentaltensoren

In den einzelnen Tangentialräumen sind die ko- und kontravarianten Metrikoeffizienten definiert, d.h. es gilt

$$Z_{ij} := \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{Z}_j, \quad G_{ij} := \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j, \quad g_{ij} := \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad (\text{A.2})$$

$$Z^{ij} := \mathbf{Z}^i \cdot \mathbf{Z}^j, \quad G^{ij} := \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j, \quad g^{ij} := \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j. \quad (\text{A.3})$$

Für die ko- und kontravarianten Metrikoeffizienten des Parameterraumes T_Θ gilt aufgrund der kartesischen Basis die Beziehung $Z_{ij} = \delta_{ij}$ und $Z^{ij} = \delta^{ij}$.

Damit können die Metriktensoren der Tangentialräume eingeführt werden, d.h.

$$\mathbf{Z} := Z_{ij} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j, \quad \mathbf{G} := G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \quad \mathbf{g} := g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{Z}^{-1} := Z^{ij} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j, \quad \mathbf{G}^{-1} := G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j, \quad \mathbf{g}^{-1} := g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (\text{A.5})$$

Die Einheitstensoren der Tangentialräume sind als gemischtvariante Tensoren definiert, d.h.

$$\mathbf{1}_\Theta := \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^i, \quad \mathbf{1}_X := \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad \text{und} \quad \mathbf{1}_x := \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i. \quad (\text{A.6})$$

Die Verknüpfung der Tensoren soll in dieser Arbeit formal über die zugehörige Verknüpfung von Vektoren des Tangentialraumes sowie des dualen Tangentialraumes erfolgen. Zu diesem Zweck werden auch die transponierten Einheitstensoren eingeführt, d.h.

$$\mathbf{1}_\Theta^T := \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}_i, \quad \mathbf{1}_X^T := \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{1}_x^T := \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_i. \quad (\text{A.7})$$

Die entsprechenden vierstufigen Einheitstensoren sind durch

$$\mathbf{I}_\Theta := Z^{ik} Z^{jl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{I}_X := G^{ik} G^{jl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{I}_x := g^{ik} g^{jl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (\text{A.10})$$

gegeben. Die zugehörigen transponierten Einheitstensoren folgen hieraus, d.h.

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_\Theta := Z^{il} Z^{jk} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l, \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_X := G^{il} G^{jk} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l, \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_x := g^{il} g^{jk} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l. \quad (\text{A.13})$$

A.2.3 Tensorableitungen in natürlichen Basissystemen

Die Grundlagen der Tensoranalysis im Rahmen der lokal-konvektiven Betrachtungsweise sind z.B. in *de Boer* [81, §5.7.2] dargelegt. Hierbei seien $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$ die ko- bzw. kontravariante natürliche Basis. Für die Ableitung einer skalarwertigen Funktion $\phi(\mathbf{a}, \mathbf{A})$ nach einem Vektor \mathbf{a} in konvektiver Darstellung, d.h. $\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i = a_i \mathbf{g}^i$, gilt dann

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \phi(\mathbf{a}, \mathbf{A})}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial \phi(\mathbf{a}, \mathbf{A})}{\partial a^i} \mathbf{g}^i = \frac{\partial \phi(\mathbf{a}, \mathbf{A})}{\partial a_i} \mathbf{g}_i.$$

In entsprechender Weise gilt für die Ableitung nach einem Tensor \mathbf{A}

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \phi(\mathbf{a}, \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \phi(\mathbf{a}, \mathbf{A})}{\partial A_j^i} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_k = \frac{\partial \phi(\mathbf{a}, \mathbf{A})}{\partial A_{ij}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \frac{\partial \phi(\mathbf{a}, \mathbf{A})}{\partial A^{ij}} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j.$$

Für die Ableitung von tensorwertigen Größen zweiter Stufe $\mathbf{T} = T_j^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j$ folgt dann

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial T_j^i(\mathbf{A})}{\partial A_l^k} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_l.$$

Für andere ko- und kontravariante Kombinationen können die Beziehungen in entsprechender Weise abgeleitet werden.

Für die Situation natürlicher, konvektiver Basissysteme ergibt sich damit die Folgerung, daß für die Ableitungen nur die Koeffizientenfunktionen betrachtet werden müssen. Entsprechend der Wahl (ko- oder kontravariant) der Koeffizienten wird für jede Ableitung nach einer kovarianten (kontravarianten) Komponente ein kovarianter (kontravarianter) Basisvektor dyadisch hinzugefügt. Die Transformation zwischen den Konfigurationen (pull-back und push-forward) modifiziert nur die Basisvektoren und läßt die Ableitung der Koeffizientenfunktion nach anderen Tensorcoeffizienten unberührt. Damit ist die Vertauschbarkeit von Ableitung und pull-back bzw. push-forward-Operation augenscheinlich. Dieses zeigt sich in den weiteren Abschnitten im Detail. Es ist aber zu beachten, daß hiermit nicht die Vertauschbarkeit von Variation und Transformation gemeint ist. Diese Problematik wird in Abschnitt A.3.5 beschrieben.

A.2.4 Wichtige Tensorableitungen

Für die weitere Betrachtung ist die Berechnung der Ableitungen von \mathbf{M}_Θ , \mathbf{m}_Θ , \mathbf{B}_Θ , \mathbf{B}_Θ^T , \mathbf{B}_Θ^{-1} und \mathbf{B}_Θ^{-T} nach den Metrikensoren \mathbf{M}_Θ und \mathbf{m}_Θ wichtig. Diese Berechnung der Ableitungen wird an dieser Stelle vollständig dokumentiert.

A.2.4.1 Ableitung ko- und kontravarianter Metrikkoeffizienten

Als wesentliches Element der Tensorableitung ist die Ableitung der ko- und kontravarianten Metrikkoeffizienten g_{ir} und g^{ir} nach den kovarianten Metrikkoeffizienten g_{kl} bereitzustellen, d.h. es gilt

$$\frac{\partial g_{ir}}{\partial g_{kl}} = \delta_i^k \delta_r^l \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial g^{ir}}{\partial g_{kl}} = -g^{ik} g^{rl} \quad (\text{A.14})$$

sowie analoge Ergebnisse für die Ableitungen von G_{ir} und G^{ir} nach G_{kl} . Zum Beweis der zweiten Beziehung wird die folgende Umformung betrachtet

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \delta_k^i}{\partial g_{rs}} = \frac{\partial g^{ij} g_{jk}}{\partial g_{rs}} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{rs}} g_{jk} + g^{ij} \frac{\partial g_{jk}}{\partial g_{rs}} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{rs}} g_{jk} + g^{ij} \delta_j^r \delta_k^s \\ &= \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{rs}} g_{jk} g^{kn} + g^{ir} \delta_k^s g^{kn} = \frac{\partial g^{in}}{\partial g_{rs}} + g^{ir} g^{sn}. \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt somit das Ergebnis.

A.2.4.2 Ableitung der Metrikensoren

Für die Ableitung von $\mathbf{M}_\Theta = G_{ij} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j$ und $\mathbf{m}_\Theta = g_{ij} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j$ nach sich selbst gilt

$$\frac{\partial \mathbf{m}_\Theta}{\partial \mathbf{m}_\Theta} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial g_{kl}} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = \delta_i^k \delta_j^l \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = \mathbf{I}_\Theta \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}_\Theta}{\partial \mathbf{M}_\Theta} = \frac{\partial G_{ij}}{\partial G_{kl}} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = \delta_i^k \delta_j^l \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = \mathbf{I}_\Theta. \quad (\text{A.16})$$

Für die Ableitung der Inversen \mathbf{M}_Θ^{-1} und \mathbf{m}_Θ^{-1} nach \mathbf{M}_Θ bzw. \mathbf{m}_Θ gilt

$$\frac{\partial \mathbf{m}_\Theta^{-1}}{\partial \mathbf{m}_\Theta} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = -g^{ik} g^{jl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = -\mathbf{I}_{\mathbf{m}_\Theta^{-1}} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}_\Theta^{-1}}{\partial \mathbf{M}_\Theta} = \frac{\partial G^{ij}}{\partial G_{kl}} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = -G^{ik} G^{jl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = -\mathbf{I}_{\mathbf{M}_\Theta^{-1}}. \quad (\text{A.18})$$

Diese Ergebnisse werden im weiteren häufiger benötigt und treten bei der Berechnung der Variationen in den dort verwendeten Kettenregeln auf.

Im weiteren werden auch noch die Ableitungen von \mathbf{B}_Θ , \mathbf{B}_Θ^T , \mathbf{B}_Θ^{-1} , \mathbf{B}_Θ^{-T} nach \mathbf{B}_Θ angegeben. Hierbei wurde $\mathbf{B}_\Theta = \mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta = G^{ij} g_{jk} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^k$ in (3.47) definiert. Für die Ableitungen von \mathbf{B}_Θ und \mathbf{B}_Θ^T folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta}{\partial \mathbf{B}_\Theta} &= \delta^{ik} \delta^{jl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = \mathbf{I}_\Theta, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta^T}{\partial \mathbf{B}_\Theta} &= \delta^{il} \delta^{jk} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_\Theta. \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für die Ableitung von \mathbf{B}_Θ^{-1} und \mathbf{B}_Θ^{-T}

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}_\Theta^{-1}}{\partial \mathbf{B}_\Theta} &= g^{ir} G_{rk} g^{js} G_{sl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \otimes \mathbf{Z}^k \otimes \mathbf{Z}^l = \mathbf{I}_{\mathbf{B}_\Theta^T}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta^{-T}}{\partial \mathbf{B}_\Theta} &= g^{ir} G_{rl} g^{js} G_{sk} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \otimes \mathbf{Z}^k \otimes \mathbf{Z}^l = \mathbf{I}_{\mathbf{B}_\Theta^{-T}}.\end{aligned}$$

A.2.4.3 Ableitung des lokalen Hauptverzerrungstensors

Für die Ableitungen von \mathbf{B}_Θ und \mathbf{B}_Θ^{-1} nach \mathbf{M}_Θ und \mathbf{m}_Θ folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}_\Theta}{\partial \mathbf{m}_\Theta} &= \frac{\partial(G^{ir} g_{rj})}{\partial g_{kl}} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = G^{ir} \delta_r^k \delta_j^l \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l \\ &= G^{ik} \delta_{jr} \delta^{rl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = \mathbf{M}_\Theta^{-1} \cdot \mathbf{I}_\Theta\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}_\Theta}{\partial \mathbf{M}_\Theta} &= \frac{\partial(G^{ir} g_{rj})}{\partial G_{kl}} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = -G^{ik} G^{rl} g_{rj} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l \\ &= -G^{ik} g_{jr} G^{rl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = -\mathbf{M}_\Theta^{-1} \cdot \mathbf{I}_\Theta \cdot \mathbf{B}_\Theta^T\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}_\Theta^{-1}}{\partial \mathbf{m}_\Theta} &= \frac{\partial(g^{ir} G_{rj})}{\partial g_{kl}} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = -g^{ik} g^{rl} G_{rj} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l \\ &= -g^{ik} G_{jr} g^{rl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = -\mathbf{m}_\Theta^{-1} \cdot \mathbf{I}_\Theta \cdot \mathbf{B}_\Theta^{-T}\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}_\Theta^{-1}}{\partial \mathbf{M}_\Theta} &= \frac{\partial(g^{ir} G_{rj})}{\partial G_{kl}} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = g^{ir} \delta_r^k \delta_j^l \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l \\ &= g^{ik} \delta_{jr} \delta^{rl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = \mathbf{m}_\Theta^{-1} \cdot \mathbf{I}_\Theta.\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

Analoge Ableitungen ergeben sich für die jeweils transponierten Tensoren \mathbf{B}_Θ^T und \mathbf{B}_Θ^{-T} , d.h. die ersten beiden Basisvektoren $\mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j$ müssen vertauscht werden, sprich $\mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_i$.

Die obigen Ableitungen nach \mathbf{M}_Θ und \mathbf{m}_Θ können miteinander in Verbindung gebracht werden, d.h. durch Ausrechnen findet man die folgenden Beziehungen

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\Theta}{\partial \mathbf{M}_\Theta} = -\frac{\partial \mathbf{B}_\Theta}{\partial \mathbf{m}_\Theta} \mathbf{B}_\Theta^T \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta^T}{\partial \mathbf{M}_\Theta} = -\frac{\partial \mathbf{B}_\Theta^T}{\partial \mathbf{m}_\Theta} \mathbf{B}_\Theta^T \quad (\text{A.23})$$

$$\text{sowie} \quad \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta^{-1}}{\partial \mathbf{M}_\Theta} = -\frac{\partial \mathbf{B}_\Theta^{-1}}{\partial \mathbf{m}_\Theta} \mathbf{B}_\Theta^T \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta^{-T}}{\partial \mathbf{M}_\Theta} = -\frac{\partial \mathbf{B}_\Theta^{-T}}{\partial \mathbf{m}_\Theta} \mathbf{B}_\Theta^T. \quad (\text{A.24})$$

A.2.4.4 Ableitung der Invarianten

Für die Berechnung der Ableitung der Invarianten wird die Skalarmultiplikation der obigen vierstufigen Tensoren mit den zweistufigen Tensoren $\mathbf{1}_\Theta^T, \mathbf{B}_\Theta^T, \mathbf{B}_\Theta^{-T}$ erforderlich. Für die Skalarmultiplikation mit $\mathbf{1}_\Theta^T$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_\Theta^T : \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta}{\partial \mathbf{m}_\Theta} &= (\mathbf{Z}^r \otimes \mathbf{Z}_r) : (G^{ik} \delta_j^l \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l) \\ &= G^{ik} \delta_j^l \delta_i^r \delta_r^j \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = G^{ik} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_k = \mathbf{M}_\Theta^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_\Theta^T : \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta}{\partial \mathbf{M}_\Theta} &= (\mathbf{Z}^r \otimes \mathbf{Z}_r) : (-G^{ik} g_{js} G^{sl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l) \\ &= -G^{ik} g_{js} G^{sl} \delta_i^r \delta_r^j \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = -G^{ki} g_{ir} G^{rl} \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l \\ &= -\mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1} = -\mathbf{B}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Für die Skalarmultiplikation mit \mathbf{B}_Θ^T gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\Theta^T : \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta}{\partial \mathbf{m}_\Theta} &= (G^{rs} g_{st} \mathbf{Z}^t \otimes \mathbf{Z}_r) : (G^{ik} \delta_j^l \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l) \\ &= G^{rs} g_{st} \delta_i^t \delta_r^j G^{ik} \delta_j^l \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = G^{ik} g_{kl} G^{lj} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \\ &= \mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1} = \mathbf{B}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\Theta^T : \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta}{\partial \mathbf{M}_\Theta} &= (G^{st} g_{tu} \mathbf{Z}^u \otimes \mathbf{Z}_s) : (-G^{ik} g_{jr} G^{rl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l) \\ &= -G^{st} g_{tu} \delta_i^u \delta_s^j G^{ik} g_{jr} G^{rl} \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = -G^{ik} g_{kl} G^{lr} g_{rs} G^{sj} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \\ &= -\mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1} = -\mathbf{B}_\Theta \mathbf{B}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Für die Skalarmultiplikation mit \mathbf{B}_Θ^{-T} gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\Theta^{-T} : \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta}{\partial \mathbf{m}_\Theta} &= (g^{tu} G_{st} \mathbf{Z}^s \otimes \mathbf{Z}_u) : (G^{ik} \delta_j^l \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l) \\ &= g^{kl} \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = \mathbf{m}_\Theta^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\Theta^{-T} : \frac{\partial \mathbf{B}_\Theta}{\partial \mathbf{M}_\Theta} &= (g^{tu} G_{st} \mathbf{Z}^t \otimes \mathbf{Z}_u) : (-G^{ik} g_{jr} G^{rl} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^j \otimes \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l) \\ &= -G^{kl} \mathbf{Z}_k \otimes \mathbf{Z}_l = -\mathbf{M}_\Theta^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Abschließend können somit die Ableitungen der Invarianten von \mathbf{B}_Θ nach den Metrikensoren \mathbf{M}_Θ und \mathbf{m}_Θ angegeben werden. Die hierzu erforderlichen Ableitungen der Invarianten I, II, III nach dem Tensor \mathbf{B}_Θ findet man in Abschnitt A.4.4. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{I}}{\partial \mathbf{m}_\Theta} &= \mathbf{M}_\Theta^{-1}, & \frac{\partial \text{I}}{\partial \mathbf{M}_\Theta} &= -\mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1}, \\ \frac{\partial \text{II}}{\partial \mathbf{m}_\Theta} &= \text{I} \mathbf{M}_\Theta^{-1} - \mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1}, & \frac{\partial \text{II}}{\partial \mathbf{M}_\Theta} &= -\text{I} \mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1} + \mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1}, \\ \frac{\partial \text{III}}{\partial \mathbf{m}_\Theta} &= \text{III} \mathbf{m}_\Theta^{-1}, & \frac{\partial \text{III}}{\partial \mathbf{M}_\Theta} &= -\text{III} \mathbf{M}_\Theta^{-1}. \end{aligned}$$

A.2.5 Integralsätze

Für die Umformung von Rand- in Gebietsintegrale sind die folgenden Sätze von Bedeutung, welche in lokal-konvektiver Darstellung angegeben werden:

$$\int_{\partial T_\Theta} \phi \mathbf{N}_\Theta d\mathbf{A}_\Theta = \int_{T_\Theta} \frac{\partial \phi}{\partial \Theta} dV_\Theta \quad (\text{A.31})$$

$$\int_{\partial T_\Theta} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}_\Theta d\mathbf{A}_\Theta = \int_{T_\Theta} \text{DIV } \mathbf{u} dV_\Theta \quad (\text{A.32})$$

$$\int_{\partial T_\Theta} \mathbf{P}_\Theta \mathbf{N}_\Theta d\mathbf{A}_\Theta = \int_{T_\Theta} \text{DIV } \mathbf{P}_\Theta dV_\Theta. \quad (\text{A.33})$$

Die Beziehung (A.32) wird in der Literatur auch als *Gaußscher Integralsatz* bezeichnet. Weitere Hinweise finden sich z.B. in [81, S. 164].

A.3 Transformationsbeziehungen und deren Variation

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der Transformation skalar-, vektor- und tensorwertiger Funktionen zwischen den einzelnen Tangentialräumen dargestellt. Die aufgeführten Beziehungen sind teilweise der Literatur entnommen, teilweise für die Aufgabenstellung dieser Arbeit neu hergeleitet worden.

Die Gradienten der Basisabbildungen $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$ sowie der Abbildung φ (siehe Seite 41) bilden die Grundlage der kontinuumsmechanischen Beziehungen und werden an dieser Stelle in konvektiven Koordinaten angegeben.

$\mathbf{F}_X = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i$	$\mathbf{F}_X^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i$	$\mathbf{F}_X^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i$	$\mathbf{F}_X^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i$
$\mathbf{K}_\Theta = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{Z}^i$	$\mathbf{K}_\Theta^T = \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{G}_i$	$\mathbf{K}_\Theta^{-1} = \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{G}^i$	$\mathbf{K}_\Theta^{-T} = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{Z}_i$
$\mathbf{F}_\Theta = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{Z}^i$	$\mathbf{F}_\Theta^T = \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{g}_i$	$\mathbf{F}_\Theta^{-1} = \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{g}^i$	$\mathbf{F}_\Theta^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{Z}_i$

Tabelle A.1: Tangentenabbildungen

A.3.1 Variation von Basisvektoren und Metrikoeffizienten

Die Variation der obigen lokal-konvektiven Tangentenabbildungen \mathbf{K}_Θ und \mathbf{F}_Θ sowie der zugehörigen Transponierten und Inversen bilden die Grundlage aller Variationen in der Kontinuumsmechanik. Mit der Variation von \mathbf{K}_Θ sowie \mathbf{F}_Θ gemäß Gleichung (3.32), d.h. von

$$\delta(\mathbf{K}_\Theta^{-1}) = -\mathbf{K}_\Theta^{-1} \delta\mathbf{K}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} \quad \text{und} \quad \delta(\mathbf{F}_\Theta^{-1}) = -\mathbf{F}_\Theta^{-1} \delta\mathbf{F}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1}$$

kann die Variation der Inversen auf die Variation der Abbildung selbst zurückgeführt werden.

Von Interesse ist an dieser Stelle noch die Darstellung der Variation der ko- und kontravarianten Basisvektoren $\mathbf{G}_i, \mathbf{G}^i$ sowie $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$, die an dieser Stelle hergeleitet wird. Eine Auswertung der Variation der kontravarianten Metriktensoren \mathbf{m}_Θ^{-1} und \mathbf{M}_Θ^{-1} liefert die folgenden Komponentendarstellungen

$$\delta g^{ij} = -g^{ik} \delta g_{kl} g^{lj} \quad \text{und} \quad \delta G^{ij} = -G^{ik} \delta G_{kl} G^{lj}. \quad (\text{A.34})$$

Damit können durch Variation von $\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j$ bzw. von $\mathbf{G}^i = G^{ij} \mathbf{G}_j$ die Beziehungen

$$\delta \mathbf{g}^i = -g^{ij} \delta g_{jk} g^{kl} \mathbf{g}_l + g^{il} \delta \mathbf{g}_l \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{G}^i = -G^{ij} \delta G_{jk} G^{kl} \mathbf{G}_l + G^{il} \delta \mathbf{G}_l \quad (\text{A.35})$$

hergeleitet werden. Hierbei setzen sich die Variationen δg_{ij} und δG_{ij} aus den Skalarprodukten der kovarianten Basisvektoren und deren Variation zusammen, d.h. $\delta g_{ij} = \delta \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \delta \mathbf{g}_j$ bzw. $\delta G_{ij} = \delta \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{G}_i \cdot \delta \mathbf{G}_j$.

A.3.2 Gradientenoperatoren und deren Variation

In Abschnitt 3.1 sind drei unterschiedliche Gradientenoperatoren GRAD_Θ , Grad_X , grad_x eingeführt worden, welche jeweils bzgl. der Koordinaten Θ , \mathbf{X} , \mathbf{x} gebildet werden. In konvektiven Koordinaten gilt dann am Beispiel der Deformationsabbildung $\mathbf{x} = \tilde{\varphi}(\Theta) = \varphi(\mathbf{X}) = \bar{\varphi}(\mathbf{x})$

$$\text{GRAD}_\Theta \tilde{\varphi} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \Theta^i} \otimes \mathbf{Z}^i, \quad \text{Grad}_X \varphi = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \Theta^i} \otimes \mathbf{G}^i \quad \text{und} \quad \text{grad}_x \bar{\varphi} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \Theta^i} \otimes \mathbf{g}^i.$$

Die Transformationen zwischen den einzelnen Gradientenoperatoren lauten

$$\text{Grad}_X \varphi = \text{GRAD}_\Theta \tilde{\varphi} \left[\text{GRAD}_\Theta \tilde{\psi} \right]^{-1} \quad \text{und} \quad \text{grad}_x \bar{\varphi} = \text{GRAD}_\Theta \tilde{\varphi} \left[\text{GRAD}_\Theta \tilde{\varphi} \right]^{-1},$$

wobei $\mathbf{X} = \tilde{\psi}(\Theta)$ und $\mathbf{x} = \tilde{\varphi}(\Theta)$ gilt.

Die Variation einer Gradientenabbildung kann durch den Rückgriff auf die oben dargestellte Zerlegung durchgeführt werden. Die hier aufgezeigte Methodik, d.h. die Zerlegung kontinuumsmechanischer Funktionen in die lokal-konvektiven Anteile bzgl. Geometrie und Deformation (bzw. Verschiebung), wird bei allen vorkommenden Variationen angewandt.

Als Beispiel wird der materielle Verschiebungsgradient betrachtet. Mit der Variation eines inversen Tensors gemäß Gleichung (3.32) folgt dann

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{H}_X &= \delta[\text{Grad}_X \mathbf{u}] = \delta[\text{GRAD}_\Theta \mathbf{u} (\text{GRAD}_\Theta \mathbf{X})^{-1}] \\ &= \text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{u} (\text{GRAD}_\Theta \mathbf{X})^{-1} \\ &\quad - \text{GRAD}_\Theta \mathbf{u} (\text{GRAD}_\Theta \mathbf{X})^{-1} \text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{X} (\text{GRAD}_\Theta \mathbf{X})^{-1} \\ &= \text{Grad}_X \delta \mathbf{u} - \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Zur Verdeutlichung soll die Variation des materiellen Deformationsgradienten in symbolischer Kurzform, d.h. ohne Verwendung der Gradientensymbole, vorgestellt werden. Aus $\mathbf{F}_X = \mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1}$ erhält man durch Auswertung von

$$\delta \mathbf{F}_X = \delta \mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} + \mathbf{F}_\Theta \delta(\mathbf{K}_\Theta^{-1}) = \delta \mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} - \mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} \delta \mathbf{K}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1},$$

das Ergebnis

$$\delta \mathbf{F}_X = \delta(\text{Grad}_X \mathbf{x}) = \text{Grad}_X \delta \mathbf{x} - \text{Grad}_X \mathbf{x} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X} = {}^1\mathbf{F}_X - \mathbf{F}_X {}^1\mathbf{K}_X. \quad (\text{A.36})$$

Aus dieser grundlegenden Darstellung kann zunächst die totale Zeitableitung des materiellen Deformationsgradienten abgeleitet werden. Mit der Annahme einer zeitunabhängigen Referenzkonfiguration ergibt sich das bekannte Ergebnis $\dot{\mathbf{F}}_X = \text{Grad}_X \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{I}_X$.

Die totale Variation $\delta \mathbf{F}_X$ kann auch additiv in zwei partielle Variationen zerlegt werden. Die Zerlegung kann bei Verwendung des materiellen Verschiebungsgradienten \mathbf{H}_X und der Beziehung $\delta \mathbf{F}_X = \delta(\mathbf{K}_X + \mathbf{H}_X) = \delta \mathbf{H}_X$, da $\delta \mathbf{K}_X = \delta \mathbf{1}_X = \mathbf{0}$, hergeleitet werden, d.h. es gilt

$$\delta \mathbf{F}_X = \delta \mathbf{H}_X = \text{Grad}_X \delta \mathbf{u} - \text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X} = {}^1\mathbf{H}_X - \mathbf{H}_X {}^1\mathbf{K}_X. \quad (\text{A.37})$$

Die partiellen Anteile $\delta_u \mathbf{F}_X = \delta_u \mathbf{H}_X$ bzgl. einer Variation der lokalen Abbildung $\tilde{\nu}$ sowie $\delta_X \mathbf{F}_X = \delta_X \mathbf{H}_X$ bzgl. einer Variation der lokalen Abbildung $\tilde{\psi}$ ergeben sich zu

$$\delta_u \mathbf{F}_X = \delta_u \mathbf{H}_X = \text{Grad}_X \delta \mathbf{u} \quad (\text{A.38})$$

$$\delta_X \mathbf{F}_X = \delta_X \mathbf{H}_X = -\text{Grad}_X \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}. \quad (\text{A.39})$$

Für die Variation der Inversen des materiellen Deformationsgradienten gilt

$$\delta(\mathbf{F}_X^{-1}) = \text{grad}_x \delta \mathbf{X} - \text{grad}_x \mathbf{X} \text{grad}_x \delta \mathbf{x} = \text{grad}_x \mathbf{u} \text{grad}_x \delta \mathbf{X} - \text{grad}_x \mathbf{X} \text{grad}_x \delta \mathbf{u}. \quad (\text{A.40})$$

A.3.3 Divergenzoperatoren und deren Variation

Für den Divergenzoperator gilt am Beispiel des Tensors \mathbf{A} die Beziehungen

$$\text{DIV } \mathbf{A} = \text{tr}(\text{GRAD}_\Theta \mathbf{A}), \quad \text{Div } \mathbf{A} = \text{tr}(\text{Grad}_X \mathbf{A}) \quad \text{und} \quad \text{div } \mathbf{A} = \text{tr}(\text{grad}_x \mathbf{A}).$$

Mit der Darstellung der Spur eines Tensors über das Skalarprodukt folgt somit

$$\text{DIV } \mathbf{A} = \text{GRAD}_\Theta \mathbf{A} : \mathbf{1}_\Theta^T, \tag{A.41}$$

$$\text{Div } \mathbf{A} = \text{Grad}_X \mathbf{A} : \mathbf{1}_X^T = \text{GRAD}_\Theta \mathbf{A} : \mathbf{K}_\Theta^{-1} : \mathbf{1}_X^T = \text{GRAD}_\Theta \mathbf{A} : \mathbf{K}_\Theta^{-T}, \tag{A.42}$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \text{grad}_x \mathbf{A} : \mathbf{1}_x^T = \text{GRAD}_\Theta \mathbf{A} : \mathbf{F}_\Theta^{-1} : \mathbf{1}_x^T = \text{GRAD}_\Theta \mathbf{A} : \mathbf{F}_\Theta^{-T}, \tag{A.43}$$

wobei $\mathbf{1}_\Theta^T := \mathbf{Z}^k \otimes \mathbf{Z}_k$, $\mathbf{1}_X^T := \mathbf{G}^k \otimes \mathbf{G}_k$ und $\mathbf{1}_x^T := \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_k$ die jeweiligen Einheitstensoren sind.

Die Variation des Divergenzoperators liefert somit

$$\begin{aligned} \delta[\text{DIV } \mathbf{A}] &= \delta[\text{GRAD}_\Theta \mathbf{A}] : \mathbf{1}_\Theta^T = [\text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{A}] : \mathbf{1}_\Theta^T \\ &= \text{DIV } \delta \mathbf{A} \end{aligned} \tag{A.44}$$

$$\begin{aligned} \delta[\text{Div } \mathbf{A}] &= \delta[\text{Grad}_X \mathbf{A}] : \mathbf{1}_X^T = [\text{Grad}_X \delta \mathbf{A} - \text{Grad}_X \mathbf{A} \text{ Grad}_X \delta \mathbf{X}] : \mathbf{1}_X^T \\ &= \text{Div } \delta \mathbf{A} - \text{Grad}_X \mathbf{A} \text{ Grad}_X \delta \mathbf{X} : \mathbf{1}_X^T \end{aligned} \tag{A.45}$$

$$\begin{aligned} \delta[\text{div } \mathbf{A}] &= \delta[\text{grad}_x \mathbf{A}] : \mathbf{1}_x^T = [\text{grad}_x \delta \mathbf{A} - \text{grad}_x \mathbf{A} \text{ grad}_x \delta \mathbf{x}] : \mathbf{1}_x^T \\ &= \text{div } \delta \mathbf{A} - \text{grad}_x \mathbf{A} \text{ grad}_x \delta \mathbf{x} : \mathbf{1}_x^T. \end{aligned} \tag{A.46}$$

Diese Aussage gilt in analoger Weise für Vektoren \mathbf{a} .

A.3.4 Die Determinante eines Tensors und deren Variation

A.3.4.1 Definition für die Determinante eines Tensors

Die Determinante eines zweistufigen Tensors kann nach [81, §4.9] durch das äußere Produkt zweistufiger Tensoren dargestellt werden. Der Leser sei hierfür auf die dortige Darstellung verwiesen. Zusammenfassend gilt

$$\det \mathbf{A} = \frac{(\mathbf{A} \mathbf{u}_1 \times \mathbf{A} \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{A} \mathbf{u}_3}{[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]}, \quad (\text{A.47})$$

wobei $[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] = (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_3$ das Spatprodukt der Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ darstellt.

A.3.4.2 Variation der Determinante eines Tensors

Für die Variation sind vorbereitend die Determinanten nach ihren Argumenten abzuleiten. Für die Ableitung der Determinante eines Tensors nach dem Tensor gilt die Beziehung

$$\frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-T} \quad \text{und somit} \quad \delta(\det \mathbf{A}) = \det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-T} : \delta \mathbf{A}, \quad (\text{A.48})$$

siehe z.B. [208, §4.3.2]

A.3.4.3 Applikationen in der Kontinuumsmechanik

Somit ergeben sich für $J_\psi = \det \mathbf{K}_\Theta$ mit $\mathbf{K}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \mathbf{X}$ und $\delta \mathbf{K}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{X}$ bzw. für $J_\varphi = \det \mathbf{F}_\Theta$ mit $\mathbf{F}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \mathbf{x}$ und $\delta \mathbf{F}_\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{x}$ die Beziehungen

$$\delta J_\psi = J_\psi \mathbf{K}_\Theta^{-T} : \text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{X} = J_\psi \text{tr}(\text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{X} \mathbf{K}_\Theta^{-1}) = J_\psi \text{Div} \delta \mathbf{X} \quad (\text{A.49})$$

$$\delta J_\varphi = J_\varphi \mathbf{F}_\Theta^{-T} : \text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{x} = J_\varphi \text{tr}(\text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{x} \mathbf{F}_\Theta^{-1}) = J_\varphi \text{div} \delta \mathbf{x}. \quad (\text{A.50})$$

Für die Herleitung wurden die Gleichungen im Abschnitt A.3.3 verwendet.

Für die Variation von $J = J_\varphi J_\psi^{-1}$ ergibt sich daraus

$$\delta J = \delta J_\varphi J_\psi^{-1} - J_\varphi J_\psi^{-2} \delta J_\psi = J (\text{div} \delta \mathbf{x} - \text{Div} \delta \mathbf{X}).$$

Die Auswertung für die partiellen Variationen bzgl. $\delta \mathbf{X}$ und $\delta \mathbf{u}$ liefert die Beziehungen

$$\begin{aligned} \delta_X J_\psi &= J_\psi \text{Div} \delta \mathbf{X}, & \delta_X J_\varphi &= J_\varphi \text{div} \delta \mathbf{X}, & \delta_X J &= J (\text{div} \delta \mathbf{X} - \text{Div} \delta \mathbf{X}), \\ \delta_u J_\psi &= 0, & \delta_u J_\varphi &= J_\varphi \text{div} \delta \mathbf{u}, & \delta_u J &= J \text{div} \delta \mathbf{u}. \end{aligned}$$

A.3.5 Transformation von Vektoren und Tensoren

Die Transformationsbeziehungen von Vektoren und Tensoren (ko- bzw. kontravariant) zwischen den einzelnen Konfigurationen T_Θ, T_X, T_x sowie deren Variation wird hergeleitet.

Die Transformationsbeziehungen sowie die entsprechenden Variationen hängen dabei von der Darstellung der Vektoren und Tensoren als ko- bzw. kontravariante Größen ab. Auf eine Kennzeichnung der Tensoren als ko- bzw. kontravariante Tensoren wird hier verzichtet.¹ In der Regel sind die Verzerrungstensoren kovariant und die Spannungstensoren kontravariant.

A.3.5.1 Darstellung der Transformationsbeziehungen

Beispielhaft seien die Operationen zwischen Parameterraum T_Θ und dem Tangentialraum T_X an die Referenzkonfiguration erläutert. Die Transformation der Größen vom Parameterraum T_Θ in den Tangentialraum T_X wird dabei als „vorschieben“ (‘push-forward’) bezeichnet. Die Umkehroperation nennt man „zurückziehen“ (‘pull-back’). In Anlehnung an die englischsprachige Originalliteratur werden in den nachfolgenden Tabellen die Begriffe ‘push-forward’ und ‘pull-back’ verwendet.

Mit $\tilde{\psi}_*$ werden die Basen von T_Θ nach T_X vorgeschoben (push-forward), d.h. für kontravariante Vektoren $\mathbf{t}_\Theta = t^i \mathbf{Z}_i$ bzw. kontravariante Tensoren $\mathbf{T}_\Theta = T^{ik} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_k$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_X &= \tilde{\psi}_*(\mathbf{t}_\Theta) = \mathbf{K}_\Theta \mathbf{t}_\Theta = (\mathbf{G}_j \otimes \mathbf{Z}^j) t^i \mathbf{Z}_i = t^i \delta_i^j \mathbf{G}_j = t^i \mathbf{G}_i \\ \mathbf{T}_X &= \tilde{\psi}_*(\mathbf{T}_\Theta) = \mathbf{K}_\Theta \mathbf{T}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^T = (\mathbf{G}_j \otimes \mathbf{Z}^j) (T^{ik} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_k) (\mathbf{Z}^l \otimes \mathbf{G}_l) \\ &= T^{ik} \delta_i^j \delta_k^l \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_l = T^{ik} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_k. \end{aligned}$$

Die Transformation für kontravariante Vektoren und Tensoren gibt Tabelle A.2 an.

Von	Nach	Operation	Abbildung	Vektoren	Tensoren
T_Θ	T_X	push-forward	$\tilde{\psi}_*$	$\mathbf{t}_X = \mathbf{K}_\Theta \mathbf{t}_\Theta$	$\mathbf{T}_X = \mathbf{K}_\Theta \mathbf{T}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^T$
		pull-back	$\tilde{\psi}^*$	$\mathbf{t}_\Theta = \mathbf{K}_\Theta^{-1} \mathbf{t}_X$	$\mathbf{T}_\Theta = \mathbf{K}_\Theta^{-1} \mathbf{T}_X \mathbf{K}_\Theta^{-T}$
T_Θ	T_x	push-forward	$\tilde{\varphi}_*$	$\mathbf{t}_x = \mathbf{F}_\Theta \mathbf{t}_\Theta$	$\mathbf{T}_x = \mathbf{F}_\Theta \mathbf{T}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^T$
		pull-back	$\tilde{\varphi}^*$	$\mathbf{t}_\Theta = \mathbf{F}_\Theta^{-1} \mathbf{t}_x$	$\mathbf{T}_\Theta = \mathbf{F}_\Theta^{-1} \mathbf{T}_x \mathbf{F}_\Theta^{-T}$
T_X	T_x	push-forward	φ_*	$\mathbf{t}_x = \mathbf{F}_X \mathbf{t}_X$	$\mathbf{T}_x = \mathbf{F}_X \mathbf{T}_X \mathbf{F}_X^T$
		pull-back	φ^*	$\mathbf{t}_X = \mathbf{F}_X^{-1} \mathbf{t}_x$	$\mathbf{T}_X = \mathbf{F}_X^{-1} \mathbf{T}_x \mathbf{F}_X^{-T}$

Tabelle A.2: Pull-back und push-forward Abbildungen für KONTRAVARIANTE Größen

¹Der Leser sei auf die Notation in [164] hingewiesen. Dort wird mit $(\bullet)_b$ das Herunterziehen der Indizes, d.h. der zugehörige kovariante Tensor beschrieben. Analog gilt $(\bullet)^\sharp$ für das Hinaufziehen der Indizes, d.h. für den zugehörigen kontravarianten Tensor.

Für kovariante Vektoren $\mathbf{t}_\Theta = t_i \mathbf{Z}^i$ bzw. kovariante Tensoren $\mathbf{T}_\Theta = T_{ik} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^k$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_X &= \tilde{\psi}_*(\mathbf{t}_\Theta) = \mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{t}_\Theta = (\mathbf{G}^j \otimes \mathbf{Z}_j) t_i \mathbf{Z}^i = t_i \delta_j^i \mathbf{G}^j = t_i \mathbf{G}^i \\ \mathbf{T}_X &= \tilde{\psi}_*(\mathbf{T}_\Theta) = \mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{T}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} = (\mathbf{G}^j \otimes \mathbf{Z}_j) (T_{ik} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^k) (\mathbf{Z}_l \otimes \mathbf{G}^l) \\ &= T_{ik} \delta_j^i \delta_l^k \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{G}^l = T_{ik} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^k. \end{aligned}$$

Die Transformationsbeziehungen für kovariante Vektoren und Tensoren sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Von	Nach	Operation	Abbildung	Vektoren	Tensoren
T_Θ	T_X	push-forward	$\tilde{\psi}_*$	$\mathbf{t}_X = \mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{t}_\Theta$	$\mathbf{T}_X = \mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{T}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1}$
		pull-back	$\tilde{\psi}^*$	$\mathbf{t}_\Theta = \mathbf{K}_\Theta^T \mathbf{t}_X$	$\mathbf{T}_\Theta = \mathbf{K}_\Theta^T \mathbf{T}_X \mathbf{K}_\Theta$
T_Θ	T_x	push-forward	$\tilde{\varphi}_*$	$\mathbf{t}_x = \mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{t}_\Theta$	$\mathbf{T}_x = \mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{T}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1}$
		pull-back	$\tilde{\varphi}^*$	$\mathbf{t}_\Theta = \mathbf{F}_\Theta^T \mathbf{t}_x$	$\mathbf{T}_\Theta = \mathbf{F}_\Theta^T \mathbf{T}_x \mathbf{F}_\Theta$
T_X	T_x	push-forward	φ_*	$\mathbf{t}_x = \mathbf{F}_X^{-T} \mathbf{t}_X$	$\mathbf{T}_x = \mathbf{F}_X^{-T} \mathbf{T}_X \mathbf{F}_X^{-1}$
		pull-back	φ^*	$\mathbf{t}_X = \mathbf{F}_X^T \mathbf{t}_x$	$\mathbf{T}_X = \mathbf{F}_X^T \mathbf{T}_x \mathbf{F}_X$

Tabelle A.3: Pull-back und push-forward Abbildungen für KOVARIANTE Größen

Analoge Darstellungen sind damit (ohne Angabe) für gemischtvariante Tensoren möglich. Der Charakter eines Tensors (ko- bzw. kontravariant) wird in dieser Arbeit nicht gesondert bezeichnet, da einheitlich die Gradientenoperatoren gemischtvariante (ko-kontra) Zweifeldtensoren sind. Die Verzerrungsmaße sind einheitlich kovariant und die Spannungstensoren einheitlich kontravariant. Die vierstufigen Materialtensoren sind kontravariant.

Ohne Beweis sei angemerkt, daß Transformation und Invertierung eines Tensors vertauschbare Operationen sind, d.h. $\tilde{\psi}_*(\mathbf{A}^{-1}) = (\tilde{\psi}_*(\mathbf{A}))^{-1}$.

A.3.5.2 Variation der Transformationsbeziehungen

Die obigen Beziehungen können variiert werden, um hieraus Transformationsbeziehungen zwischen den Variationen von Vektoren und Tensoren der unterschiedlichen Darstellungsweisen herzuleiten.

Für die obige Beispielsituation kontravarianter Vektoren $\mathbf{t}_\Theta = t^i \mathbf{Z}_i$ bzw. kontravarianter Tensoren $\mathbf{T}_\Theta = T^{ik} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_k$ gilt

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{t}_X &= \delta[\tilde{\psi}_*(\mathbf{t}_\Theta)] = \delta[\mathbf{K}_\Theta \mathbf{t}_\Theta] = \delta \mathbf{K}_\Theta \mathbf{t}_\Theta + \mathbf{K}_\Theta \delta \mathbf{t}_\Theta \\ &= \tilde{\psi}_*(\delta \mathbf{t}_\Theta) + \text{Grad}_X \delta \mathbf{X} \mathbf{t}_X, \\ \delta \mathbf{t}_x &= \delta[\tilde{\varphi}_*(\mathbf{t}_\Theta)] = \delta[\mathbf{F}_\Theta \mathbf{t}_\Theta] = \delta \mathbf{F}_\Theta \mathbf{t}_\Theta + \mathbf{F}_\Theta \delta \mathbf{t}_\Theta \\ &= \tilde{\varphi}_*(\delta \mathbf{t}_\Theta) + \text{grad}_x \delta \mathbf{x} \mathbf{t}_x, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{T}_X &= \delta[\tilde{\boldsymbol{\psi}}_*(\mathbf{T}_\Theta)] = \delta[\mathbf{K}_\Theta \mathbf{T}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^T] = \mathbf{K}_\Theta \delta\mathbf{T}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^T + \delta\mathbf{K}_\Theta \mathbf{T}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^T + \mathbf{K}_\Theta \mathbf{T}_\Theta \delta\mathbf{K}_\Theta^T \\ &= \tilde{\boldsymbol{\psi}}_*(\delta\mathbf{T}_\Theta) + \text{Grad}_X \delta\mathbf{X} \mathbf{T}_X + \mathbf{T}_X \text{Grad}_X^T \delta\mathbf{X}, \\ \delta\mathbf{T}_x &= \delta[\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_*(\mathbf{T}_\Theta)] = \delta[\mathbf{F}_\Theta \mathbf{T}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^T] = \mathbf{F}_\Theta \delta\mathbf{T}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^T + \delta\mathbf{F}_\Theta \mathbf{T}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^T + \mathbf{F}_\Theta \mathbf{T}_\Theta \delta\mathbf{F}_\Theta^T \\ &= \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_*(\delta\mathbf{T}_\Theta) + \text{grad}_x \delta\mathbf{x} \mathbf{T}_x + \mathbf{T}_x \text{grad}_x^T \delta\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Entsprechend der obigen Ableitungen können weitere Zusammenhänge berechnet werden.

Für kovariante Vektoren $\mathbf{t}_\Theta = t_i \mathbf{Z}^i$ bzw. kovariante Tensoren $\mathbf{T}_\Theta = T_{ik} \mathbf{Z}^i \otimes \mathbf{Z}^k$ gilt analog

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{t}_X &= \delta[\tilde{\boldsymbol{\psi}}_*(\mathbf{t}_\Theta)] = \delta[\mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{t}_\Theta] = \delta\mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{t}_\Theta + \mathbf{K}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{t}_\Theta \\ &= \tilde{\boldsymbol{\psi}}_*(\delta\mathbf{t}_\Theta) - \text{Grad}_X^T \delta\mathbf{X} \mathbf{t}_X, \\ \delta\mathbf{t}_x &= \delta[\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_*(\mathbf{t}_\Theta)] = \delta[\mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{t}_\Theta] = \delta\mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{t}_\Theta + \mathbf{F}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{t}_\Theta \\ &= \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_*(\delta\mathbf{t}_\Theta) - \text{grad}_x^T \delta\mathbf{x} \mathbf{t}_x, \\ \delta\mathbf{T}_X &= \delta[\tilde{\boldsymbol{\psi}}_*(\mathbf{T}_\Theta)] = \delta[\mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{T}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1}] = \mathbf{K}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{T}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} + \delta\mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{T}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} + \mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{T}_\Theta \delta\mathbf{K}_\Theta^{-1} \\ &= \tilde{\boldsymbol{\psi}}_*(\delta\mathbf{T}_\Theta) - \text{Grad}_X^T \delta\mathbf{X} \mathbf{T}_X - \mathbf{T}_X \text{Grad}_X \delta\mathbf{X} \\ \delta\mathbf{T}_x &= \delta[\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_*(\mathbf{T}_\Theta)] = \delta[\mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{T}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1}] = \mathbf{F}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{T}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} + \delta\mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{T}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} + \mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{T}_\Theta \delta\mathbf{F}_\Theta^{-1} \\ &= \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_*(\delta\mathbf{T}_\Theta) - \text{grad}_x^T \delta\mathbf{x} \mathbf{T}_x - \mathbf{T}_x \text{grad}_x \delta\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Die Variation transformierter Größen ist aus der Transformation der Variation der lokalen Größe sowie den Zusatztermen gemäß der Transformationsvorschrift zusammengesetzt. Hierbei treten für ko- und kontravariante Vektoren und Tensoren vergleichbare Strukturen auf. Die Unterschiede beziehen sich auf das Vorzeichen der Zusatzterme und die Multiplikation mit den Gradienten der variierten Abbildungen bzw. den transponierten Gradienten.

Die obigen Beziehungen können in die partiellen Anteile bzgl. einer Variation $\delta\mathbf{X}$ der Geometrie und einer Variation $\delta\mathbf{u}$ des Verschiebungszustandes aufgeteilt werden. Auf eine Darstellung der Aufteilung wird an dieser Stelle verzichtet.

A.3.5.3 Zusammenhang zwischen Transformation und Variation

Der Zusammenhang zwischen der Transformation der Variation einer lokal-konvektiven Größe und der Variation einer transformierten Größe wird am Beispiel der lokal-konvektiven Metriktensoren \mathbf{M}_Θ und \mathbf{m}_Θ erläutert.

Für die Variation von \mathbf{M}_Θ und \mathbf{m}_Θ gelten die Beziehungen auf Seite 48, d.h. insbesondere gilt im Allgemeinen $\delta\mathbf{M}_\Theta \neq \mathbf{0}$ und $\delta\mathbf{m}_\Theta \neq \mathbf{0}$.

Die Transformation dieser Größen in die Referenz- bzw. Momentankonfiguration liefert gemäß der Abschnitte A.4.2 und A.4.3 andere Ergebnisse, insbesondere gilt $\delta\mathbf{M}_X = \delta\mathbf{G} = \mathbf{0}$ und $\delta\mathbf{m}_x = \delta\mathbf{g} = \mathbf{0}$.

A.3.6 Transformation und Variation der Linien-, Flächen- und Volumenelemente

A.3.6.1 Transformation der Linien-, Flächen- und Volumenelemente

Die Transformationsbeziehungen zwischen den Linien-, Flächen- und Volumenelementen des Parameterraumes T_Θ , der Referenzkonfiguration Ω_\circ sowie der Momentankonfiguration Ω_t sind in Tabelle A.4 zusammengestellt worden.

Eine Herleitung für die Transformation zwischen Referenz- und Momentankonfiguration findet sich z.B. in *Stein, Barthold* [208, §3.10]. Die weiteren Beziehungen ergeben sich analog.

$$\begin{array}{llll}
 d\mathbf{X} = \mathbf{K}_\Theta d\Theta & d\mathbf{A}_X = \det \mathbf{K}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-T} d\mathbf{A}_\Theta & dV_X = \det \mathbf{K}_\Theta dV_\Theta & J_\psi := \det \mathbf{K}_\Theta \\
 d\mathbf{x} = \mathbf{F}_\Theta d\Theta & d\mathbf{A}_x = \det \mathbf{F}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-T} d\mathbf{A}_\Theta & dV_x = \det \mathbf{F}_\Theta dV_\Theta & J_\varphi := \det \mathbf{F}_\Theta \\
 d\mathbf{x} = \mathbf{F}_X d\mathbf{X} & d\mathbf{A}_x = \det \mathbf{F}_X \mathbf{F}_X^{-T} d\mathbf{A}_X & dV_x = \det \mathbf{F}_X dV_X & J := \det \mathbf{F}_X
 \end{array}$$

Tabelle A.4: Transformation von Linien-, Flächen- und Volumenelementen

A.3.6.2 Variation der Linien-, Flächen- und Volumenelemente

Für die Variation sind die Angaben der Tabelle A.4 zu betrachten, d.h. die Darstellung der materiellen und räumlichen Elemente durch diejenigen des Parameterraumes. Diese sind gemäß Konstruktion konstant, d.h. $\delta(d\Theta) = \delta(d\mathbf{A}_\Theta) = \mathbf{0}$ und $\delta(dV_\Theta) = 0$.

Für die Variation der Linienelemente gilt somit

$$\begin{aligned}
 \delta[d\mathbf{X}] &= \delta\mathbf{K}_\Theta d\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{X} d\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{X} \mathbf{K}_\Theta^{-1} d\mathbf{X} = \text{Grad}_X \delta\mathbf{X} d\mathbf{X}, \\
 \delta[d\mathbf{x}] &= \delta\mathbf{F}_\Theta d\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{x} d\Theta = \text{GRAD}_\Theta \delta\mathbf{x} \mathbf{F}_\Theta^{-1} d\mathbf{x} = \text{grad}_x \delta\mathbf{x} d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Für die Variation der Flächenelemente sind die Darstellungen durch $d\mathbf{A}_\Theta$ zu betrachten, d.h. $d\mathbf{A}_X = J_\psi \mathbf{K}_\Theta^{-T} d\mathbf{A}_\Theta$ bzw. $d\mathbf{A}_x = J_\varphi \mathbf{F}_\Theta^{-T} d\mathbf{A}_\Theta$, und entsprechend der obigen Regeln zu variieren. Es gilt dann mit (A.49) exemplarisch für $d\mathbf{A}_X$ die Ableitung

$$\begin{aligned}
 \delta[d\mathbf{A}_X] &= \delta[J_\psi \mathbf{K}_\Theta^{-T} d\mathbf{A}_\Theta] = \delta[J_\psi \mathbf{K}_\Theta^{-T}] d\mathbf{A}_\Theta = [\delta J_\psi \mathbf{K}_\Theta^{-T} + J_\psi \delta(\mathbf{K}_\Theta^{-T})] d\mathbf{A}_\Theta \\
 &= [J_\psi \text{Div} \delta\mathbf{X} \mathbf{K}_\Theta^{-T} - J_\psi \mathbf{K}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{K}_\Theta^T \mathbf{K}_\Theta^{-T}] d\mathbf{A}_\Theta \\
 &= [\text{Div} \delta\mathbf{X} \mathbf{1}_X^T - \text{Grad}_X^T \delta\mathbf{X}] d\mathbf{A}_X.
 \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\delta[d\mathbf{A}_x] = [\text{div} \delta\mathbf{x} \mathbf{1}_x^T - \text{grad}_x^T \delta\mathbf{x}] d\mathbf{A}_x.$$

Die Variation der Volumenelemente kann direkt aus der Variation der Determinanten ermittelt werden, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
 \delta[dV_X] &= \delta J_\psi dV_\Theta = J_\psi \text{Div} \delta\mathbf{X} dV_\Theta = \text{Div} \delta\mathbf{X} dV_X \\
 \delta[dV_x] &= \delta J_\varphi dV_\Theta = J_\varphi \text{div} \delta\mathbf{x} dV_\Theta = \text{div} \delta\mathbf{x} dV_x.
 \end{aligned}$$

$\delta[d\Theta] = \mathbf{0}$	$\delta[d\mathbf{A}_\Theta] = \mathbf{0}$	$\delta[dV_\Theta] = 0$
$\delta[d\mathbf{X}] = \text{Grad}_X \delta\mathbf{X} \, d\mathbf{X}$	$\delta[d\mathbf{A}_X] = [\text{Div} \delta\mathbf{X} \, \mathbf{1}_X^T - \text{Grad}_X^T \delta\mathbf{X}] \, d\mathbf{A}_X$	$\delta[dV_X] = \text{Div} \delta\mathbf{X} \, dV_X$
$\delta[d\mathbf{x}] = \text{grad}_x \delta\mathbf{x} \, d\mathbf{x}$	$\delta[d\mathbf{A}_x] = [\text{div} \delta\mathbf{x} \, \mathbf{1}_x^T - \text{grad}_x^T \delta\mathbf{x}] \, d\mathbf{A}_x$	$\delta[dV_x] = \text{div} \delta\mathbf{x} \, dV_x$
Tabelle A.5: Variation von Linien-, Flächen- und Volumenelementen		

Die Endergebnisse sind in der Tabelle A.5 zusammengefaßt.

A.3.6.3 Zeitableitung der Linien-, Flächen- und Volumenelemente

Im Sonderfall der Zeitableitung der Elemente ergeben sich mit der Zeitunabhängigkeit der Referenzkonfiguration die Beziehungen

$$\overline{d\mathbf{x}} = \text{grad}_x \dot{\mathbf{x}} \, d\mathbf{x} \quad \overline{d\mathbf{A}_x} = [\text{div} \dot{\mathbf{x}} - \text{grad}_x^T \dot{\mathbf{x}}] \, d\mathbf{A}_x \quad \overline{dV_x} = \text{div} \dot{\mathbf{x}} \, dV_x. \quad (\text{A.51})$$

Für eine detailliertere Darstellung sei auf [208, §4.3] verwiesen.

A.3.7 Transformation und Variation von Massenelementen

Die Massenelemente ergeben sich aus dem Produkt der volumenspezifischen Massendichte mit dem zugehörigen Volumenelement. In Abschnitt 2.1.5 wurden die Dichteverteilungen eingeführt, d.h. es gilt für die Dichteverteilung der Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t bzw. für die Referenzkonfiguration zur Referenzzeit $t = t_0$

$$\rho_t = \tilde{\varrho}_t(\Theta) = \varrho_t(\mathbf{X}) = \bar{\varrho}_t(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad \rho_0 = \tilde{\varrho}_0(\Theta) = \varrho_0(\mathbf{X}) = \bar{\varrho}_0(\mathbf{x}).$$

Es ist zu beachten, daß im Allgemeinen zwei unterschiedliche Massendichtefelder existieren. An dieser Stelle wird die unterschiedliche Konzeption der lokal-konvektiven Betrachtungsweise deutlich. Die Konfigurationen Ω_0 und Ω_t werden zuerst als voneinander unabhängig eingeführt. Erst mit der Einführung der Massenerhaltung werden beide Felder verknüpft, d.h. es entsteht die Darstellung (A.53).

A.3.7.1 Transformation von Massenelementen

Die Gesamtmasse m_0 der Referenzkonfiguration Ω_0 kann mit $dM_{\mathbf{X}} = \rho_0 dV_{\mathbf{X}}$ sowie den Transformationsbeziehungen für die Volumenelemente in der Form

$$m_0 = \int_{\Omega_0} dM_{\mathbf{X}} = \int_{\Omega_0} \rho_0 dV_{\mathbf{X}} = \int_{\Omega_t} \rho_0 J^{-1} dV_{\mathbf{x}} = \int_{T_{\Theta}} \rho_0 J_{\psi} dV_{\Theta}.$$

angegeben werden. Für die jeweiligen Integranden wird die folgende Notation eingeführt

$$\rho_{0,\mathbf{X}} := \rho_0, \quad \rho_{0,\Theta} := \rho_0 J_{\psi} \quad \text{und} \quad \rho_{0,\mathbf{x}} := \rho_0 J^{-1}$$

und eine modifizierte Darstellung lautet

$$m_0 = \int_{\Omega_0} \rho_{0,\mathbf{X}} dV_{\mathbf{X}} = \int_{\Omega_t} \rho_{0,\mathbf{x}} dV_{\mathbf{x}} = \int_{T_{\Theta}} \rho_{0,\Theta} dV_{\Theta}.$$

In analoger Form ergibt sich mit $dM_{\mathbf{x}} = \rho_t dV_{\mathbf{x}}$ die Gesamtmasse m_t der Momentankonfiguration Ω_t zu

$$m_t = \int_{\Omega_t} dM_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \rho_t dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_0} \rho_t J dV_{\mathbf{X}} = \int_{T_{\Theta}} \rho_t J_{\varphi} dV_{\Theta}.$$

Für die jeweiligen Integranden wird die folgende Notation eingeführt

$$\rho_{t,\mathbf{x}} := \rho_t, \quad \rho_{t,\Theta} := \rho_t J_{\varphi} \quad \text{und} \quad \rho_{t,\mathbf{X}} := \rho_t J$$

und eine modifizierte Darstellung lautet

$$m_t = \int_{\Omega_t} \rho_{t,\mathbf{x}} dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_0} \rho_{t,\mathbf{X}} dV_{\mathbf{X}} = \int_{T_{\Theta}} \rho_{t,\Theta} dV_{\Theta}.$$

A.3.7.2 Variation der Massenelemente

Die Variation der Massenelemente dM_X und dM_x kann mit den obigen Beziehungen durch die Variation der Dichtefunktionen und der Variation der Volumenelemente ausgedrückt werden. Für die Variation des Massenelementes der Referenzkonfiguration gilt

$$\delta dM_X = \delta\rho_{\circ,\Theta} dV_\Theta = [\delta\rho_\circ J_\psi + \rho_\circ \delta J_\psi] dV_\Theta = [\delta\rho_\circ + \rho_\circ \operatorname{Div} \delta\mathbf{X}] dV_X,$$

bzw. in analoger Form für die Momentankonfiguration

$$\delta dM_x = \delta\rho_{t,\Theta} dV_\Theta = [\delta\rho_t J_\varphi + \rho_t \delta J_\varphi] dV_\Theta = [\delta\rho_t + \rho_t \operatorname{div} \delta\mathbf{x}] dV_x.$$

A.3.7.3 Der Sonderfall der Massenerhaltung

Im Rahmen der Kontinuumsmechanik werden üblicherweise Deformationen untersucht, welche die Gesamtmasse des Körpers erhalten, siehe Abschnitt 3.5.1. In diesem Fall gilt $m_\circ = m_t$ und es ergeben sich aus dem Vergleich der obigen Integrale die äquivalenten Beziehungen

$$\begin{aligned} \rho_{\circ,\Theta} &= \rho_\circ J_\psi = \rho_{t,\Theta} = \rho_t J_\varphi \\ \rho_{\circ,X} &= \rho_\circ = \rho_{t,X} = \rho_t J \\ \rho_{\circ,x} &= \rho_\circ J^{-1} = \rho_{t,x} = \rho_t \end{aligned}$$

zwischen den volumenspezifischen Massedichten. Eine Variation der ersten Beziehung liefert mit (A.49) und (A.50) sofort

$$\delta\rho_\circ J_\psi + \rho_\circ J_\psi \operatorname{Div} \delta\mathbf{X} = \delta\rho_t J_\varphi + \rho_t J_\varphi \operatorname{div} \delta\mathbf{x}.$$

Eine Auswertung für den Sonderfall Zeitableitung ergibt mit der Zeitunabhängigkeit der Massendichte der Referenzkonfiguration Ω_\circ , d.h. $\dot{\rho}_\circ = 0$, und der Zeitunabhängigkeit der Referenzkonfiguration Ω_\circ selbst, d.h. $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$, die Beziehung

$$\dot{\rho}_t + \rho_t \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad (\text{A.52})$$

d.h. die bekannte Kontinuitätsgleichung der Kontinuumsmechanik.

Im Fall der Massenerhaltung kann die Notation abgeändert werden, d.h. es gilt dann

$$\rho_\Theta := \rho_{\circ,\Theta} = \rho_{t,\Theta} = \rho_\circ J_\psi, \quad \rho_X := \rho_{\circ,X} = \rho_{t,X} = \rho_\circ, \quad \rho_x := \rho_{\circ,x} = \rho_{t,x} = \rho_\circ J^{-1}. \quad (\text{A.53})$$

In diesem Fall ist ein Massenelement des Parameterraumes $dM_\Theta = \rho_\Theta dV_\Theta$ auch eindeutig definiert. In dieser Arbeit werden nur massenerhaltende Deformationen betrachtet.

Für die Variation der obigen Beziehung gilt dann mit $\delta\rho_\circ = 0$ nach kurzer Rechnung

$$\delta_X \rho_t = \rho_t (\operatorname{Div} \delta\mathbf{X} - \operatorname{div} \delta\mathbf{x}). \quad (\text{A.54})$$

A.4 Transformation und Variation der Verzerrungen

In diesem Abschnitt werden die lokal-konvektiven Verzerrungsmaße sowie deren Variationen in die bezogenen Darstellungen der Referenz- bzw. Momentankonfiguration transformiert. Weiterhin können aber auch die in die Referenz- und Momentankonfiguration transformierten lokalen Verzerrungsmaße variiert werden, d.h. $\delta \mathbf{M}_X, \delta \mathbf{m}_X, \delta \mathbf{E}_X$ und $\delta \mathbf{M}_x, \delta \mathbf{m}_x, \delta \mathbf{E}_x$ werden bereitgestellt. Hierbei wird der Zusammenhang zwischen den Vorgehensweisen sowie die evtl. vorhandene Vertauschbarkeit von Variation und Transformation (pull-back, push-forward) aufgezeigt.

A.4.1 Variation der lokal-konvektiven Verzerrungstensoren

Für die Betrachtungen an dieser Stelle wird die Verschiebungsabbildung eingeführt. Hierdurch wird die Grundannahme unabhängiger Geometrie- und Deformationsabbildungen modifiziert. Hiernach werden die Geometrieabbildung $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ sowie die Verschiebungsabbildung $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ als unabhängige Abbildungen betrachtet, mit deren Hilfe die Deformationsabbildung definiert werden kann, d.h. $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}$. Für die Variation einer Größe $\boldsymbol{\alpha}$ ergibt sich damit die additive Zerlegung $\delta \boldsymbol{\alpha} = \delta_X \boldsymbol{\alpha} + \delta_u \boldsymbol{\alpha}$ und man erhält

$$\mathbf{E}_\Theta = \text{sym}(\mathbf{H}_\Theta^T \mathbf{K}_\Theta + 1/2 \mathbf{H}_\Theta^T \mathbf{H}_\Theta) \quad (\text{A.55})$$

$$\delta \mathbf{E}_\Theta = \text{sym}(\mathbf{H}_\Theta^T \delta \mathbf{K}_\Theta + \mathbf{F}_\Theta^T \delta \mathbf{H}_\Theta). \quad (\text{A.56})$$

Hieraus können sofort die partiellen Variationen abgelesen werden, d.h. es gilt

$$\delta_X \mathbf{E}_\Theta = \text{sym}(\mathbf{H}_\Theta^T \delta \mathbf{K}_\Theta) \quad \text{und} \quad \delta_u \mathbf{E}_\Theta = \text{sym}(\mathbf{F}_\Theta^T \delta \mathbf{H}_\Theta). \quad (\text{A.57})$$

Die zweite Variation $\delta^2 \mathbf{E}_\Theta$ mit

$$\delta^2 \mathbf{E}_\Theta = \text{sym}(\delta \mathbf{H}_\Theta^T \delta \mathbf{K}_\Theta + \mathbf{H}_\Theta^T \delta^2 \mathbf{K}_\Theta + \delta \mathbf{F}_\Theta^T \delta \mathbf{H}_\Theta + \mathbf{F}_\Theta^T \delta^2 \mathbf{H}_\Theta)$$

erfordert die Berechnung vier zweiter partiellen Variationen $\delta_{uu}^2 \mathbf{E}_\Theta, \delta_{uX}^2 \mathbf{E}_\Theta, \delta_{Xu}^2 \mathbf{E}_\Theta, \delta_{XX}^2 \mathbf{E}_\Theta$ im Punkt (\mathbf{X}, \mathbf{u}) . Hierbei treten zwei unterschiedliche erste Variationen von Geometrie und Verschiebung $(\delta \mathbf{X}_1, \delta \mathbf{u}_1)$ bzw. $(\delta \mathbf{X}_2, \delta \mathbf{u}_2)$ sowie die zweiten Variationen $(\delta^2 \mathbf{X}, \delta^2 \mathbf{u})$ auf. Allgemein gilt dann

$$\delta_{uu}^2 \mathbf{E}_\Theta = \text{sym}(\text{GRAD}_\Theta^T \delta \mathbf{u}_2 \quad \text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{u}_1) + \text{sym}(\text{GRAD}_\Theta^T \mathbf{x} \quad \text{GRAD}_\Theta \delta^2 \mathbf{u}) \quad (\text{A.58})$$

$$\delta_{uX}^2 \mathbf{E}_\Theta = \text{sym}(\text{GRAD}_\Theta^T \delta \mathbf{X}_2 \quad \text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{u}_1) \quad (\text{A.59})$$

$$\delta_{Xu}^2 \mathbf{E}_\Theta = \text{sym}(\text{GRAD}_\Theta^T \delta \mathbf{u}_2 \quad \text{GRAD}_\Theta \delta \mathbf{X}_1) \quad (\text{A.60})$$

$$\delta_{XX}^2 \mathbf{E}_\Theta = \text{sym}(\text{GRAD}_\Theta^T \mathbf{u} \quad \text{GRAD}_\Theta \delta^2 \mathbf{X}). \quad (\text{A.61})$$

Eine spezielle Situation stellt die Herleitung der schwachen Form des Gleichgewichts aus einem Energiepotential dar, d.h. es gilt $(\delta \mathbf{X}_1, \delta \mathbf{u}_1) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})$ sowie $(\delta \mathbf{X}_2, \delta \mathbf{u}_2) = (\delta \mathbf{X}, \delta \mathbf{u})$ und man erhält die Beziehungen $\delta_{Xu}^2 \mathbf{E}_\Theta = \delta_{XX}^2 \mathbf{E}_\Theta = \mathbf{0}$ sowie

$$\delta_{\eta u}^2 \mathbf{E}_\Theta = \text{sym}(\text{GRAD}_\Theta^T \delta \mathbf{u} \quad \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta}) \quad (\text{A.62})$$

$$\delta_{\eta X}^2 \mathbf{E}_\Theta = \text{sym}(\text{GRAD}_\Theta^T \delta \mathbf{X} \quad \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta}). \quad (\text{A.63})$$

Diese Beziehungen werden in Abschnitt 3.6 im Rahmen der Herleitung schwacher Formen verwendet.

A.4.2 Transformation lokaler Verzerrungstensoren

Für die Beschreibung und das Verständnis der physikalischen Phänomene ist es hilfreich die lokalen Verzerrungstensoren sowie deren Variationen neben der lokal-konvektiven Herleitung auch in materieller und räumlicher Form darzustellen.

A.4.2.1 Bezogene Darstellungen lokaler Verzerrungstensoren

Die lokalen ko- und kontravarianten Metriktensoren sowie der lokale Verzerrungstensor können in die Tangentialräume T_X und T_x transformiert werden. Dabei ist die push-forward-Operation mit der Invertierung vertauschbar. Man erhält die materiellen und räumlichen Metriktensoren in der Form

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_X &:= \tilde{\psi}_*(\mathbf{M}_\Theta) = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \mathbf{K}_X^T \mathbf{K}_X =: \mathbf{G} \\
\mathbf{M}_X^{-1} &:= \tilde{\psi}_*(\mathbf{M}_\Theta^{-1}) = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \mathbf{K}_X^{-1} \mathbf{K}_X^{-T} =: \mathbf{G}^{-1} \\
\mathbf{m}_X &:= \tilde{\psi}_*(\mathbf{m}_\Theta) = g_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \mathbf{F}_X^T \mathbf{F}_X =: \mathbf{C} \\
\mathbf{m}_X^{-1} &:= \tilde{\psi}_*(\mathbf{m}_\Theta^{-1}) = g^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \mathbf{F}_X^{-1} \mathbf{F}_X^{-T} =: \mathbf{C}^{-1} \\
\mathbf{M}_x &:= \tilde{\varphi}_*(\mathbf{M}_\Theta) = G_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \mathbf{K}_x^T \mathbf{K}_x =: \mathbf{b}^{-1} \\
\mathbf{M}_x^{-1} &:= \tilde{\varphi}_*(\mathbf{M}_\Theta^{-1}) = G^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \mathbf{K}_x^{-1} \mathbf{K}_x^{-T} =: \mathbf{b} \\
\mathbf{m}_x &:= \tilde{\varphi}_*(\mathbf{m}_\Theta) = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \mathbf{F}_x^T \mathbf{F}_x =: \mathbf{g} \\
\mathbf{m}_x^{-1} &:= \tilde{\varphi}_*(\mathbf{m}_\Theta^{-1}) = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \mathbf{F}_x^{-1} \mathbf{F}_x^{-T} =: \mathbf{g}^{-1}.
\end{aligned}$$

In der materiellen bzw. räumlichen Darstellungsweise werden insbesondere der *Rechts-Cauchy-Green-Verzerrungstensor* \mathbf{C} sowie der *Links-Cauchy-Green-Verzerrungstensor* \mathbf{b} verwendet.

Die materielle und räumliche Darstellung des lokalen Verzerrungstensors ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_X &:= \tilde{\psi}_*(\mathbf{E}_\Theta) = \frac{1}{2} (\mathbf{m}_X - \mathbf{M}_X) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_X^T \mathbf{F}_X - \mathbf{K}_X^T \mathbf{K}_X) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{G}) =: \mathbf{E} \\
\mathbf{E}_x &:= \tilde{\varphi}_*(\mathbf{E}_\Theta) = \frac{1}{2} (\mathbf{m}_x - \mathbf{M}_x) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_x^T \mathbf{F}_x - \mathbf{K}_x^T \mathbf{K}_x) = \frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1}) =: \mathbf{E}^{(A)}.
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{E}_X \equiv \mathbf{E}$ den materiellen *Cauchy-Green-Verzerrungstensor* und $\mathbf{E}_x \equiv \mathbf{E}^{(A)}$ den räumlichen *Almansi-Verzerrungstensor*.

A.4.2.2 Bezogene Darstellungen lokaler Verzerrungsvariationstensoren

Weiterhin werden die materielle und räumliche Darstellung der variierten lokalen kovarianten Metriktensoren $\delta\mathbf{M}_\Theta$ und $\delta\mathbf{m}_\Theta$ hergeleitet. Für die push-forward-Operation in den T_X gilt $\tilde{\psi}_*(\mathbf{A}) = \mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{A} \mathbf{K}_\Theta^{-1}$ sowie analog $\tilde{\varphi}_*(\mathbf{A}) = \mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{A} \mathbf{F}_\Theta^{-1}$ für die Transformation in den T_x . Als ersten Schritt erhält man

$$\begin{aligned}
{}^1\mathbf{M}_X &:= \tilde{\psi}_*(\delta\mathbf{M}_\Theta) = 2 \operatorname{sym}(\mathbf{K}_X^T {}^1\mathbf{K}_X) = 2 \operatorname{sym}(\operatorname{Grad}_X^T \mathbf{X} \operatorname{Grad}_X \delta\mathbf{X}) \\
{}^1\mathbf{m}_X &:= \tilde{\psi}_*(\delta\mathbf{m}_\Theta) = 2 \operatorname{sym}(\mathbf{F}_X^T {}^1\mathbf{F}_X) = 2 \operatorname{sym}(\operatorname{Grad}_X^T \mathbf{x} \operatorname{Grad}_X \delta\mathbf{x}) \\
{}^1\mathbf{M}_x &:= \tilde{\varphi}_*(\delta\mathbf{M}_\Theta) = 2 \operatorname{sym}(\mathbf{K}_x^T {}^1\mathbf{K}_x) = 2 \operatorname{sym}(\operatorname{grad}_x^T \mathbf{X} \operatorname{grad}_x \delta\mathbf{X}) \\
{}^1\mathbf{m}_x &:= \tilde{\varphi}_*(\delta\mathbf{m}_\Theta) = 2 \operatorname{sym}(\mathbf{F}_x^T {}^1\mathbf{F}_x) = 2 \operatorname{sym}(\operatorname{grad}_x^T \mathbf{x} \operatorname{grad}_x \delta\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Für den lokalen Verzerrungsvariationstensor $\mathbf{D}_\Theta = \delta \mathbf{E}_\Theta$ ergeben sich die materiellen und räumlichen Darstellungen

$$\mathbf{D}_X := \tilde{\psi}_*(\mathbf{D}_\Theta) = \text{sym}(\text{Grad}_X^T \mathbf{x} \text{Grad}_X \delta \mathbf{x} - \text{Grad}_X^T \mathbf{X} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X}) \quad (\text{A.64})$$

$$= \text{sym}(\text{Grad}_X^T \mathbf{u} \text{Grad}_X \delta \mathbf{X} + \text{Grad}_X^T \mathbf{x} \text{Grad}_X \delta \mathbf{u}) \quad (\text{A.65})$$

$$\mathbf{D}_x := \tilde{\varphi}_*(\mathbf{D}_\Theta) = \text{sym}(\text{grad}_x^T \mathbf{x} \text{grad}_x \delta \mathbf{x} - \text{grad}_x^T \mathbf{X} \text{grad}_x \delta \mathbf{X}) \quad (\text{A.66})$$

$$= \text{sym}(\text{grad}_x^T \mathbf{u} \text{grad}_x \delta \mathbf{X} + \text{grad}_x^T \mathbf{x} \text{grad}_x \delta \mathbf{u}). \quad (\text{A.67})$$

Hieraus können die partiellen Anteile $\tilde{\psi}_*(\delta_u \mathbf{E}_\Theta)$ und $\tilde{\psi}_*(\delta_X \mathbf{E}_\Theta)$ direkt abgelesen werden.

Die zweite Variation $\delta^2 \mathbf{E}_\Theta$ kann ebenfalls in materieller und räumlicher Form dargestellt werden, d.h. es gilt

$${}^2\mathbf{D}_X := \tilde{\psi}_*({}^2\mathbf{D}_\Theta) \quad \text{und} \quad {}^2\mathbf{D}_x := \tilde{\varphi}_*({}^2\mathbf{D}_\Theta).$$

Die Transformationen können analog durchgeführt werden. Beispielsweise ergibt sich mit (A.62) und (A.63)

$$\tilde{\psi}_*(\delta_{\eta^u}^2 \mathbf{E}_\Theta) = \text{sym}(\text{Grad}_X^T \delta \mathbf{u} \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta}) \quad (\text{A.68})$$

$$\tilde{\varphi}_*(\delta_{\eta^X}^2 \mathbf{E}_\Theta) = \text{sym}(\text{grad}_x^T \delta \mathbf{X} \text{grad}_x \boldsymbol{\eta}). \quad (\text{A.69})$$

Die neudefinierten *materiellen und räumlichen Verzerrungsvariationstensoren* können entsprechend der Abhängigkeit der Verzerrungen von den Basisabbildungen $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$ in partielle Anteile bzgl. der Variationen $\delta \tilde{\psi}$ und $\delta \tilde{\varphi}$ aufgespalten werden. Dieses ist für die numerischen Methoden von Bedeutung, siehe hierzu Abschnitt B.3.

A.4.2.3 Bezogene Darstellungen für Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren

Für die Zeitableitung erhält man mit der Zeitunabhängigkeit der Geometrieabbildung die *materiellen und räumlichen Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren*

$$\mathbf{d}_X := \tilde{\psi}_*(\dot{\mathbf{E}}_\Theta) = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \text{sym}(\mathbf{F}_X^T \mathbf{l}_X)$$

$$\mathbf{d}_x := \tilde{\varphi}_*(\dot{\mathbf{E}}_\Theta) = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \text{sym}(\mathbf{F}_x^T \mathbf{l}_x) =: \mathbf{d}.$$

Dabei gilt für den lokal-konvektiven Tensor die Definition $\mathbf{d}_\Theta = \dot{\mathbf{E}}_\Theta$ gemäß Gleichung (3.44). In entsprechender Weise kann der lokale Spintensor in materieller oder räumlicher Form geschrieben werden, d.h.

$$\mathbf{w}_X = \tilde{\psi}_*(\mathbf{w}_\Theta) = \text{skew}(\mathbf{F}_X^T \mathbf{l}_X) \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_x = \tilde{\varphi}_*(\mathbf{w}_\Theta) = \text{skew}(\mathbf{F}_x^T \mathbf{l}_x).$$

Die hier aufgezeigte Herleitung der Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren \mathbf{d}_X und $\mathbf{d}_x \equiv \mathbf{d}$ basiert ausschließlich auf der Zeitableitung der kovarianten Metrikkoeffizienten sowie der anschließenden Vorwärtstransformation auf T_X bzw. T_x . Sie verzichtet gänzlich auf das Konzept der *Lie-Ableitungen*, wie es üblicherweise, siehe z.B. die Arbeiten von *Wriggers* [229], *Miehe* [172], *Steinmann* [215], für die räumliche Betrachtungsweise erforderlich ist. Die natürliche Herleitung von Verzerrungsraten auf dem Parameterraum erleichtert zudem die Interpretation sowie das Verständnis der geometrischen Grundlagen.

A.4.3 Variation der transformierten Verzerrungstensoren

Die Variation der Metrikensoren der Referenz- und Momentankonfiguration ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{M}_X &= \delta(\mathbf{K}_X^T \mathbf{K}_X) = \delta\mathbf{K}_X^T \mathbf{K}_X + \mathbf{K}_X^T \delta\mathbf{K}_X = \mathbf{0} \\ \delta\mathbf{m}_X &= \delta(\mathbf{F}_X^T \mathbf{F}_X) = \delta\mathbf{F}_X^T \mathbf{F}_X + \mathbf{F}_X^T \delta\mathbf{F}_X = 2 \operatorname{sym} [({}^1\mathbf{H}_X - \mathbf{H}_X {}^1\mathbf{H}_X)^T \mathbf{F}_X] \\ \delta\mathbf{M}_x &= \delta(\mathbf{K}_x^T \mathbf{K}_x) = \delta\mathbf{K}_x^T \mathbf{K}_x + \mathbf{K}_x^T \delta\mathbf{K}_x = 2 \operatorname{sym} [({}^1\mathbf{K}_x - \mathbf{K}_x {}^1\mathbf{F}_x)^T \mathbf{K}_x] \\ \delta\mathbf{m}_x &= \delta(\mathbf{F}_x^T \mathbf{F}_x) = \delta\mathbf{F}_x^T \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_x^T \delta\mathbf{F}_x = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Ausgeschrieben gilt dabei

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{m}_X &= 2 \operatorname{sym} [({}^1\mathbf{F}_X - \mathbf{F}_X {}^1\mathbf{K}_X)^T \mathbf{F}_X] \\ &= 2 \operatorname{sym} [({}^1\mathbf{H}_X - \mathbf{H}_X {}^1\mathbf{K}_X)^T \mathbf{F}_X] \\ &= 2 \operatorname{sym} [(\operatorname{Grad}_X \delta\mathbf{x} - \operatorname{Grad}_X \mathbf{x} \operatorname{Grad}_X \delta\mathbf{X})^T \operatorname{Grad}_X \mathbf{x}] \\ &= 2 \operatorname{sym} [(\operatorname{Grad}_X \delta\mathbf{u} - \operatorname{Grad}_X \mathbf{u} \operatorname{Grad}_X \delta\mathbf{X})^T \operatorname{Grad}_X \mathbf{x}] \\ \delta\mathbf{M}_x &= 2 \operatorname{sym} [({}^1\mathbf{K}_x - \mathbf{K}_x {}^1\mathbf{F}_x)^T \mathbf{K}_x] \\ &= 2 \operatorname{sym} [(-{}^1\mathbf{H}_x + \mathbf{H}_x {}^1\mathbf{F}_x)^T \mathbf{K}_x] \\ &= 2 \operatorname{sym} [(\mathbf{H}_x {}^1\mathbf{K}_x - \mathbf{K}_x {}^1\mathbf{H}_x)^T \mathbf{K}_x] \\ &= 2 \operatorname{sym} [(\operatorname{grad}_x \delta\mathbf{X} - \operatorname{grad}_x \mathbf{X} \operatorname{grad}_x \delta\mathbf{x})^T \operatorname{grad}_x \mathbf{X}] \\ &= 2 \operatorname{sym} [(-\operatorname{grad}_x \delta\mathbf{u} + \operatorname{grad}_x \mathbf{u} \operatorname{grad}_x \delta\mathbf{x})^T \operatorname{grad}_x \mathbf{X}] \\ &= 2 \operatorname{sym} [(-\operatorname{grad}_x \mathbf{X} \operatorname{grad}_x \delta\mathbf{u} + \operatorname{grad}_x \mathbf{u} \operatorname{grad}_x \delta\mathbf{X})^T \operatorname{grad}_x \mathbf{X}]\end{aligned}$$

Für die materiellen und räumlichen Verzerrungstensoren \mathbf{E}_X und \mathbf{E}_x folgt damit

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{E}_X &= \operatorname{sym} [(\operatorname{Grad}_X \mathbf{X} \operatorname{Grad}_X \delta\mathbf{u} - \operatorname{Grad}_X \mathbf{u} \operatorname{Grad}_X \delta\mathbf{X})^T \operatorname{Grad}_X \mathbf{x}] \\ \delta\mathbf{E}_x &= \operatorname{sym} [(\operatorname{grad}_x \mathbf{X} \operatorname{grad}_x \delta\mathbf{u} - \operatorname{grad}_x \mathbf{u} \operatorname{grad}_x \delta\mathbf{X})^T \operatorname{grad}_x \mathbf{X}].\end{aligned}$$

Die Variation der transformierten Verzerrungen kann auch mittels der Variation der Transformationsbeziehungen hergeleitet werden. Mit den Beziehungen

$$\mathbf{E}_X = \mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{E}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_x = \mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{E}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1}$$

ergeben sich

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{E}_X &= \mathbf{K}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{E}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} + \delta\mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{E}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} + \mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{E}_\Theta \delta\mathbf{K}_\Theta^{-1} \\ &= \mathbf{K}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{E}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} - \mathbf{K}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{K}_\Theta^T \mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{E}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} - \mathbf{K}_\Theta^{-T} \mathbf{E}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} \delta\mathbf{K}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} \\ &= \mathbf{K}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{E}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} - \mathbf{K}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{K}_\Theta^T \mathbf{E}_X - \mathbf{E}_X \delta\mathbf{K}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} \\ \delta\mathbf{E}_x &= \mathbf{F}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{E}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} + \delta\mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{E}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} + \mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{E}_\Theta \delta\mathbf{F}_\Theta^{-1} \\ &= \mathbf{F}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{E}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} - \mathbf{F}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{F}_\Theta^T \mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{E}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} - \mathbf{F}_\Theta^{-T} \mathbf{E}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} \delta\mathbf{K}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} \\ &= \mathbf{F}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{E}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} - \mathbf{F}_\Theta^{-T} \delta\mathbf{F}_\Theta^T \mathbf{E}_x - \mathbf{E}_x \delta\mathbf{F}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1}.\end{aligned}$$

A.4.4 Transformation und Variation der Invarianten

Dieser Abschnitt stellt die Hintergrundinformationen zum Abschnitt 3.2.3 zusammen.

A.4.4.1 Das lokal-konvektive Eigenwertproblem

Das lokal-konvektive Eigenwertproblem (3.46) lautet

$$(\mathbf{B}_\Theta - \lambda_i^2 \mathbf{1}_\Theta) \mathbf{Y}_{\Theta,i} = \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

für die Eigenwerte $\lambda_i^2 := 1 + 2 \Lambda_i$ des gemischtvarianten lokalen Hauptverzerrungstensors

$$\mathbf{B}_\Theta := \mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta = \mathbf{K}_\Theta^{-1} (\mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1})^T \mathbf{F}_\Theta = G^{ij} g_{jk} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^k. \quad (\text{A.70})$$

Die Hauptwerte λ_i^2 eines Eigenwertproblems mit Determinante $\det(\mathbf{B}_\Theta - \lambda_i^2 \mathbf{1}_\Theta) = 0$ ergeben sich aus der Lösung des charakteristischen Polynoms $\lambda_i^6 - \text{I} \lambda_i^4 + \text{II} \lambda_i^2 - \text{III} = 0$, wobei die Invarianten I, II, III von \mathbf{B}_Θ gemäß *de Boer* [81, §4.9.5] durch

$$\begin{aligned} \text{I} &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= \mathbf{B}_\Theta : \mathbf{1}_\Theta \\ \text{II} &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 &= \frac{1}{2} ((\mathbf{B}_\Theta : \mathbf{1}_\Theta)^2 - \mathbf{B}_\Theta^T : \mathbf{B}_\Theta) \\ \text{III} &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 &= \frac{1}{6} (\mathbf{B}_\Theta : \mathbf{1}_\Theta)^3 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_\Theta : \mathbf{1}_\Theta) (\mathbf{B}_\Theta^T : \mathbf{B}_\Theta) + \frac{1}{3} \mathbf{B}_\Theta^T \mathbf{B}_\Theta^T : \mathbf{B}_\Theta \end{aligned}$$

gegeben sind. Die Auswertung für $\mathbf{B}_\Theta = G^{ij} g_{jk} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}^k$ ergibt

$$\begin{aligned} A &:= \mathbf{B}_\Theta : \mathbf{1}_\Theta &= \text{tr} \mathbf{B}_\Theta = G^{ij} g_{ji} \\ B &:= \mathbf{B}_\Theta^T : \mathbf{B}_\Theta &= \text{tr} \mathbf{B}_\Theta^2 = G^{ij} g_{jk} G^{kl} g_{li} \\ C &:= \mathbf{B}_\Theta^T \mathbf{B}_\Theta^T : \mathbf{B}_\Theta &= \text{tr} \mathbf{B}_\Theta^3 = G^{ij} g_{jk} G^{kl} g_{lm} G^{mn} g_{ni}. \end{aligned}$$

A.4.4.2 Bezogene Darstellungen des Eigenwertproblems

Eine Transformation des speziellen Eigenwertproblems auf T_X oder T_x führt zu

$$(\mathbf{B}_X - \lambda_i \mathbf{1}_X) \mathbf{Y}_{X,i} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{B}_x - \lambda_i \mathbf{1}_x) \mathbf{Y}_{x,i} = \mathbf{0},$$

wobei \mathbf{B}_X und \mathbf{B}_x die materiellen bzw. räumlichen Hauptverzerrungstensen sind, d.h.

$$\mathbf{B}_X := \mathbf{K}_\Theta \mathbf{B}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1} = \mathbf{M}_X^{-1} \mathbf{m}_X = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C} = G^{ij} g_{jk} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^k \quad (\text{A.71})$$

$$\mathbf{B}_x := \mathbf{F}_\Theta \mathbf{B}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1} = \mathbf{M}_x^{-1} \mathbf{m}_x = \mathbf{b} \mathbf{g} = G^{ij} g_{jk} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^k. \quad (\text{A.72})$$

Bei den Transformationen des gemischtvarianten und daher unsymmetrischen lokalen Hauptverzerrungstensors $\mathbf{B}_\Theta = \mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta$ wird je eine Basis ko- bzw. kontravariant transformiert, d.h. es ist eine Ähnlichkeitstransformation, welche die Determinante erhält. Damit sind die Invarianten und somit die Eigenwerte gleich. Die lokalen, materiellen bzw. räumlichen Eigenvektoren transformieren sich wie kontravariante Vektoren, d.h. $\mathbf{Y}_{X,i} = \mathbf{K}_\Theta \mathbf{Y}_{\Theta,i}$ sowie $\mathbf{Y}_{x,i} = \mathbf{F}_\Theta \mathbf{Y}_{\Theta,i}$.

Mit den Rechenregeln der Tensorrechnung kann gezeigt werden, daß die Werte A, B, C und damit die Invarianten I, II, III sowie die Eigenwerte $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$ auch durch den *Rechts-Cauchy-Green Tensor* \mathbf{C} bzw. den *Links-Cauchy-Green-Tensor* \mathbf{b} bestimmt werden können, d.h. $A = \text{tr } \mathbf{C} = \text{tr } \mathbf{b}$, $B = \text{tr } \mathbf{C}^2 = \text{tr } \mathbf{b}^2$ sowie $C = \text{tr } \mathbf{C}^3 = \text{tr } \mathbf{b}^3$.

Die Bezeichnung der Eigenwerte λ_i^2 als quadratische Werte von λ_i ist mit der Beziehung zu den Eigenwerten der *Links-* bzw. *Rechts-Strecktensoren* \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} zu erklären, siehe auch die *Polare Zerlegung* des materiellen Deformationsgradienten, z.B. in [208, §3.3].

A.4.4.3 Die Invarianten eines Tensors und einige Ableitungen

Dieser Abschnitt stellt die notwendigen Informationen aus *de Boer* [81] zusammen. Für die Invarianten gilt [81, S. 83, (4.9.108)–(4.9.110)]

$$I_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \times \mathbf{1}) : \mathbf{1}, \quad (\text{A.73})$$

$$II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) : \mathbf{1}, \quad (\text{A.74})$$

$$III_{\mathbf{A}} = \frac{1}{6} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) : \mathbf{A} = \det \mathbf{A}. \quad (\text{A.75})$$

Für das äußere Produkt zweistufiger Tensoren gelten mit [81, S. 78, (4.9.72) und (4.9.74)] die folgenden Darstellungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{1} &= (\mathbf{A} : \mathbf{1}) \mathbf{1} - \mathbf{A}^T, \\ \mathbf{A} \times \mathbf{A} &= [(\mathbf{A} : \mathbf{1})^2 - \mathbf{A}^T : \mathbf{A}] \mathbf{1} - 2 (\mathbf{A} : \mathbf{1}) \mathbf{A}^T + 2 \mathbf{A}^T \mathbf{A}^T. \end{aligned}$$

Damit können die Invarianten berechnet werden und es gilt [81, S. 83, (4.9.111)]

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} : \mathbf{1} \\ II_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{A} : \mathbf{1})^2 - \mathbf{A}^T : \mathbf{A}] \\ III_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{6} (\mathbf{A} : \mathbf{1})^3 - \frac{1}{2} (\mathbf{A} : \mathbf{1}) (\mathbf{A}^T : \mathbf{A}) + \frac{1}{3} \mathbf{A}^T \mathbf{A}^T : \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Für die Ableitung der Invarianten $I_{\mathbf{A}}, II_{\mathbf{A}}, III_{\mathbf{A}}$ nach diesem Tensor \mathbf{A} folgt dann [81, S. 150, (5.6.16)]

$$\frac{\partial I_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{1}, \quad \frac{\partial II_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A} \times \mathbf{1}, \quad \frac{\partial III_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \overset{+}{\mathbf{A}}. \quad (\text{A.76})$$

Mit der Definition eines adjungierten Tensors $\overset{+}{\mathbf{A}}$ nach [81, S. 81, (4.9.86)] und der expliziten Angabe eines inversen Tensors nach [81, S. 82, (4.9.95)] gilt

$$\overset{+}{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) = \det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-T}, \quad (\text{A.77})$$

d.h. zusammenfassend folgt

$$\frac{\partial I_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{1}, \quad \frac{\partial II_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{A} : \mathbf{1}) \mathbf{1} - \mathbf{A}^T, \quad \frac{\partial III_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-T}. \quad (\text{A.78})$$

Ist der Tensor \mathbf{A} gemischtvariant (kontra-kontravariant), so muß $\mathbf{1}$ durch $\mathbf{1}^T$ ausgetauscht werden.

A.4.4.4 Ableitung der Invarianten des lokalen Hauptverzerrungstensors

Die Ableitungen der Invarianten I, II, III der Tensoren \mathbf{B}_Θ , \mathbf{B}_X , \mathbf{B}_x nach dem jeweiligen Tensor ergeben sich mit den bekannten Ableitungsregeln, siehe [81, S. 150],

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{I}}{\partial \mathbf{B}_\Theta} &= \mathbf{1}_\Theta & \frac{\partial \text{II}}{\partial \mathbf{B}_\Theta} &= \text{I } \mathbf{1}_\Theta - \mathbf{B}_\Theta^T & \frac{\partial \text{III}}{\partial \mathbf{B}_\Theta} &= \text{III } \mathbf{B}_\Theta^{-T}, \\ \frac{\partial \text{I}}{\partial \mathbf{B}_X} &= \mathbf{1}_X & \frac{\partial \text{II}}{\partial \mathbf{B}_X} &= \text{I } \mathbf{1}_X - \mathbf{B}_X^T & \frac{\partial \text{III}}{\partial \mathbf{B}_X} &= \text{III } \mathbf{B}_X^{-T}, \\ \frac{\partial \text{I}}{\partial \mathbf{B}_x} &= \mathbf{1}_x & \frac{\partial \text{II}}{\partial \mathbf{B}_x} &= \text{I } \mathbf{1}_x - \mathbf{B}_x^T & \frac{\partial \text{III}}{\partial \mathbf{B}_x} &= \text{III } \mathbf{B}_x^{-T}. \end{aligned}$$

A.5 Transformation und Variation der Spannungen

Die Transformation der Spannungen zwischen den Konfigurationen ist in Tabelle 3.2 enthalten. Weiterhin enthält Abschnitt A.3.5 Bemerkungen zur Variation kontravarianter Tensoren.

Mit den aufgezeigten Abhängigkeiten kann die Variation jeder Spannungsdarstellung aus der Variation von $\tilde{\mathbf{S}}_\Theta$ hergeleitet werden, wobei

$$\delta\tilde{\mathbf{S}}_\Theta = \tilde{\mathbf{C}}_\Theta : \delta\mathbf{m}_\Theta + \tilde{\mathbb{D}}_\Theta : \delta\mathbf{M}_\Theta$$

gilt.

Für die Zeitableitung erhält man die bekannten Ergebnisse

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{S}}} &= \tilde{\mathbf{C}}_X : \mathbf{d}_X \\ \dot{\tilde{\mathbf{T}}} &= \tilde{\mathbf{C}}_x : \mathbf{d}_x + \mathbf{l} \tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{l}^T.\end{aligned}$$

Die Zeitableitung der Spannungstensoren $\mathbf{S} = \rho_X \tilde{\mathbf{S}}$ und $\mathbf{T} = \rho_x \tilde{\mathbf{T}}$ ergibt sich hieraus zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}} &= \mathbf{C}_X : \mathbf{d}_X \\ \dot{\mathbf{T}} &= \mathbf{C}_x : \mathbf{d}_x + \mathbf{l} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{l}^T - \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} \mathbf{T}.\end{aligned}$$

A.5.1 Transformationen der zwei- und vierstufigen Tensoren

Die Ausführungen basieren auf der Vertauschbarkeit zwischen den Tensorableitungen sowie den push-forward- und pull-back-Operationen, siehe auch Anhang A.2.

Nach den Regeln der Tensoranalysis folgt für die Transformation z.B. von $\tilde{\mathbf{S}}_\Theta$ auf T_X

$$\tilde{\psi}_*(\tilde{\mathbf{S}}_\Theta) = 2 \tilde{\psi}_* \left[\frac{\partial \Psi_\Theta(\mathbf{m}_\Theta)}{\partial \mathbf{m}_\Theta} \right] = 2 \frac{\partial \tilde{\psi}_*(\Psi_\Theta(\mathbf{m}_\Theta))}{\partial \tilde{\psi}_*(\mathbf{m}_\Theta)} = 2 \frac{\partial \Psi_X(\mathbf{m}_X)}{\partial \mathbf{m}_X} =: \tilde{\mathbf{S}}$$

sowie in analoger Weise für die Vorwärtstransformation auf T_x

$$\tilde{\varphi}_*(\tilde{\mathbf{S}}_\Theta) = 2 \tilde{\varphi}_* \left[\frac{\partial \Psi_\Theta(\mathbf{m}_\Theta)}{\partial \mathbf{m}_\Theta} \right] = 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_*(\Psi_\Theta(\mathbf{m}_\Theta))}{\partial \tilde{\varphi}_*(\mathbf{m}_\Theta)} = 2 \frac{\partial \Psi_x(\mathbf{m}_x)}{\partial \mathbf{m}_x} =: \tilde{\mathbf{T}}.$$

Für die Transformationen von z.B. $\tilde{\mathbf{C}}_\Theta$ auf T_X bzw. T_x folgt analog

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_*(\tilde{\mathbf{C}}_\Theta) &= 2 \tilde{\psi}_* \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_\Theta(\mathbf{m}_\Theta)}{\partial \mathbf{m}_\Theta} \right] = 4 \frac{\partial \tilde{\psi}_*(\tilde{\mathbf{S}}_\Theta(\mathbf{m}_\Theta))}{\partial \tilde{\psi}_*(\mathbf{m}_\Theta)} = 2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{m}_X)}{\partial \mathbf{m}_X} =: \tilde{\mathbf{C}}_X \\ \tilde{\varphi}_*(\tilde{\mathbf{C}}_\Theta) &= 2 \tilde{\varphi}_* \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_\Theta(\mathbf{m}_\Theta)}{\partial \mathbf{m}_\Theta} \right] = 4 \frac{\partial \tilde{\varphi}_*(\tilde{\mathbf{S}}_\Theta(\mathbf{m}_\Theta))}{\partial \tilde{\varphi}_*(\mathbf{m}_\Theta)} = 2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{m}_x)}{\partial \mathbf{m}_x} =: \tilde{\mathbf{C}}_x.\end{aligned}$$

Für die weiteren zwei- bzw. vierstufigen Tensoren gelten die Beziehungen analog.

A.5.2 Transformation in materielle und räumliche Darstellungsweisen

Die Vorwärtstransformation der lokalen Größe $\delta\Psi_\Theta$ in die unterschiedlichen Konfigurationen verändert den Wert der skalaren Größe $\delta\Psi$ nicht. Einzig die Darstellung durch materielle bzw. räumliche Größen wird verändert, d.h. für die erste Variation gilt

$$2 \delta\Psi = \tilde{\psi}_*(\delta\Psi_\Theta) = \tilde{\psi}_*(\tilde{\mathbf{R}}_\Theta : \delta\mathbf{M}_\Theta + \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \delta\mathbf{M}_\Theta) =: \tilde{\mathbf{R}}_X : {}^1\mathbf{M}_X + \tilde{\mathbf{S}} : {}^1\mathbf{m}_X \quad (\text{A.79})$$

$$= \tilde{\varphi}_*(\delta\Psi_\Theta) = \tilde{\varphi}_*(\tilde{\mathbf{R}}_\Theta : \delta\mathbf{M}_\Theta + \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \delta\mathbf{M}_\Theta) =: \tilde{\mathbf{R}}_x : {}^1\mathbf{M}_x + \tilde{\mathbf{T}} : {}^1\mathbf{m}_x, \quad (\text{A.80})$$

bzw. analog für die zweite Variation

$$\delta^2\Psi = \tilde{\psi}_*(\delta^2\Psi_\Theta) = {}^1\mathbf{M}_X : \tilde{\mathbb{A}}_X : {}^1\mathbf{M}_X + {}^1\mathbf{M}_X : \tilde{\mathbb{B}}_X : {}^1\mathbf{M}_X + \tilde{\mathbf{R}}_X : {}^2\mathbf{M}_X \quad (\text{A.81})$$

$$+ {}^1\mathbf{m}_X : \tilde{\mathbb{D}}_X : {}^1\mathbf{M}_X + {}^1\mathbf{m}_X : \tilde{\mathbb{C}}_X : {}^1\mathbf{m}_X + \tilde{\mathbf{S}} : {}^2\mathbf{m}_X \quad (\text{A.82})$$

$$\delta^2\Psi = \tilde{\varphi}_*(\delta^2\Psi_\Theta) = {}^1\mathbf{M}_x : \tilde{\mathbb{A}}_x : {}^1\mathbf{M}_x + {}^1\mathbf{M}_x : \tilde{\mathbb{B}}_x : {}^1\mathbf{M}_x + \tilde{\mathbf{R}}_x : {}^2\mathbf{M}_x \quad (\text{A.83})$$

$$+ {}^1\mathbf{m}_x : \tilde{\mathbb{D}}_x : {}^1\mathbf{M}_x + {}^1\mathbf{m}_x : \tilde{\mathbb{C}}_x : {}^1\mathbf{m}_x + \tilde{\mathbf{T}} : {}^2\mathbf{m}_x \quad (\text{A.84})$$

A.5.3 Transformation der Spannungsleistung

Die Transformation der Spannungsleistung (3.71), d.h.

$$\mathcal{P}_\Theta = \rho_\Theta \tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \rho_\Theta \tilde{\mathbf{P}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta},$$

in die bezogenen Darstellungen wird detailliert beschrieben. Die Betrachtung basiert auf der Darstellung gemäß Abschnitt 3.3.4, d.h. auf der massenspezifischen Spannungsleistung. Die unterschiedlichen Darstellungen $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \tilde{\mathcal{P}}_X = \tilde{\mathcal{P}}_x$ können entsprechend der folgenden Darstellung ineinander transformiert werden. Für die massenspezifische Spannungsleistung gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}_\Theta &= \tilde{\mathbf{P}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \\ &= \mathbf{F}_\Theta \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \\ &= \text{tr}[\mathbf{F}_\Theta \tilde{\mathbf{S}}_\Theta \text{GRAD}_\Theta^T \boldsymbol{\eta}] \\ &= \text{tr}[\tilde{\mathbf{S}}_\Theta (\mathbf{F}_\Theta^T \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta})^T] \\ &= \tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \mathbf{F}_\Theta^T \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \\ &= \mathbf{K}_\Theta^{-1} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{K}_\Theta^{-T} : \mathbf{F}_\Theta^T \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \\ &= \text{tr}[\mathbf{K}_\Theta^{-1} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{K}_\Theta^{-T} (\mathbf{F}_\Theta^T \text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta})^T] \\ &= \text{tr}[\tilde{\mathbf{S}} (\text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \mathbf{K}_\Theta^{-1})^T (\mathbf{F}_\Theta \mathbf{K}_\Theta^{-1})] \\ &= \text{tr}[\tilde{\mathbf{S}} \text{Grad}_X^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}_X] \\ &= \tilde{\mathcal{P}}_X = \tilde{\mathbf{S}} : \mathbf{F}_X^T \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \\ &= \text{tr}[\tilde{\mathbf{S}} \text{Grad}_X^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}_X] \\ &= \text{tr}[\mathbf{F}_X \tilde{\mathbf{S}} \text{Grad}_X^T \boldsymbol{\eta}] \\ &= \mathbf{F}_X \tilde{\mathbf{S}} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \\ &= \tilde{\mathcal{P}}_X = \tilde{\mathbf{P}} : \text{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \\ &= \text{tr}(\tilde{\mathbf{S}}_\Theta \text{GRAD}_\Theta^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}_\Theta) \\ &= \text{tr}(\mathbf{F}_\Theta^{-1} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}_\Theta^{-T} \text{GRAD}_\Theta^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}_\Theta) \\ &= \text{tr}(\tilde{\mathbf{T}} (\text{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}_\Theta^{-1})^T (\mathbf{F}_\Theta \mathbf{F}_\Theta^{-1})) \\ &= \text{tr}(\tilde{\mathbf{T}} \text{grad}_x^T \boldsymbol{\eta} \text{grad}_x \mathbf{x}) \\ &= \tilde{\mathbf{T}} : \text{grad}_x^T \mathbf{x} \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} \\ &= \tilde{\mathcal{P}}_x = \tilde{\mathbf{T}} : \text{grad}_x \boldsymbol{\eta}. \end{aligned}$$

In der obigen Darstellung wurde die Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ anstelle einer Zeitableitung $\dot{\mathbf{x}}$ verwendet. Die Auswertung liefert nach kurzer Rechnung mit $\boldsymbol{\eta} = \dot{\mathbf{x}}$ die Aussagen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}} &= \tilde{\mathcal{P}}_x = \tilde{\mathbf{T}} : \mathbf{d} = \\ &= \tilde{\mathcal{P}}_X = \tilde{\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{E}} = \\ &= \tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \dot{\mathbf{E}}_\Theta = \frac{1}{2} \tilde{T}^{ij} \dot{g}_{ij}. \end{aligned}$$

A.5.4 Variation der Spannungsleistung

Die Spannungsleistung wird unter Verwendung der Zerlegung $\mathcal{P} = \rho_\Theta \tilde{\mathcal{P}}_\Theta$ variiert, d.h.

$$\delta\mathcal{P} = \delta\rho_x \tilde{\mathcal{P}}_x + \rho_x \delta\tilde{\mathcal{P}}_x = \rho_x \tilde{\mathcal{P}}_x \operatorname{Div} \delta\mathbf{X} + \rho_x \delta\tilde{\mathcal{P}}_x. \quad (\text{A.85})$$

Die nachfolgenden Darstellungen geben die Variation der massenspezifischen Spannungsleistung $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}_\Theta = \tilde{\mathcal{P}}_X = \tilde{\mathcal{P}}_x$ an. Hierbei sind grundsätzlich zwei äquivalente Vorgehensweisen möglich, die beide vollständig dargestellt werden. Die Vertauschbarkeit von Transformation und Variation ist deshalb erlaubt, weil die Spannungsleistung als Skalar invariant bei Transformationen zwischen den Konfigurationen und dem Parameterraum ist.

A.5.4.1 Transformation der variierten lokal-konvektiven Spannungsleistung

In der ersten Vorgehensweise wird die lokal-konvektive Darstellung der Spannungsleistung $\delta\tilde{\mathcal{P}}_\Theta$ variiert und anschließend in die bezogenen Darstellungen transformiert, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathcal{P}}_\Theta &= \operatorname{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} & : \delta\tilde{\mathbf{P}}_\Theta \\ &= \mathbf{F}_\Theta^T \operatorname{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} : \delta\tilde{\mathbf{S}}_\Theta & + \tilde{\mathbf{S}}_\Theta : \operatorname{GRAD}_\Theta^T \delta\mathbf{x} \operatorname{GRAD}_\Theta \boldsymbol{\eta} \\ &= \mathbf{F}_X^T \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \psi_*(\delta\tilde{\mathbf{S}}_\Theta) + \tilde{\mathbf{S}} & : \operatorname{Grad}_X^T \delta\mathbf{x} \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \\ &= \mathbf{F}_x^T \operatorname{grad}_x \boldsymbol{\eta} : \varphi_*(\delta\tilde{\mathbf{S}}_\Theta) + \tilde{\mathbf{T}} & : \operatorname{grad}_x^T \delta\mathbf{x} \operatorname{grad}_x \boldsymbol{\eta}. \end{aligned}$$

Für die weitere Auswertung ist die Kenntnis der Variation der lokal-konvektiven Spannungstensoren $\tilde{\mathbf{P}}$ bzw. $\tilde{\mathbf{S}}_\Theta$ erforderlich.

Mit der Variation von $\tilde{\mathbf{S}}_\Theta$ gemäß Gleichung (3.67), d.h. von

$$\delta\tilde{\mathbf{S}}_\Theta = \tilde{\mathbf{C}}_\Theta : \mathbf{F}_\Theta^T \delta\mathbf{F}_\Theta + \tilde{\mathbf{D}}_\Theta : \mathbf{K}_\Theta^T \delta\mathbf{K}_\Theta,$$

können die Beziehungen auf Seite 60 hergeleitet werden.

A.5.4.2 Variation der transformierten Spannungsleistung

Zunächst wird die materielle Darstellung $\tilde{\mathcal{P}}_X = \tilde{\mathbf{P}} : \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{S}} : \mathbf{F}_X^T \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta}$ betrachtet. Eine Variation liefert

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathcal{P}}_X &= \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta} & : \delta\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} : \delta[\operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta}] \\ &= \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta} & : \delta\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{P}} : \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \operatorname{Grad}_X \delta\mathbf{X} \\ &= \mathbf{F}_X^T \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \delta\tilde{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{S}} : \delta[\operatorname{Grad}_X^T \mathbf{x} \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta}] \\ &= \mathbf{F}_X^T \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta} : \delta\tilde{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{S}} : \operatorname{Grad}_X^T \delta\mathbf{x} \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \\ & & - \tilde{\mathbf{S}} : \operatorname{Grad}_X^T \delta\mathbf{X} \operatorname{Grad}_X^T \mathbf{x} \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \\ & & - \tilde{\mathbf{S}} : \operatorname{Grad}_X^T \mathbf{x} \operatorname{Grad}_X \boldsymbol{\eta} \operatorname{Grad}_X \delta\mathbf{X}. \end{aligned}$$

Für die räumliche Darstellung folgt mit $\tilde{\mathcal{P}}_x = \tilde{\mathbf{T}} : \text{grad}_x \boldsymbol{\eta}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\delta \tilde{\mathcal{P}}_x &= \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} : \delta \tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}} : \delta[\text{grad}_x \boldsymbol{\eta}] \\ &= \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} : \delta \tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\mathbf{T}} : \text{grad}_x \boldsymbol{\eta} \text{ grad}_x \delta \mathbf{x}.\end{aligned}$$

A.6 Details zu den Materialgesetzen

An dieser Stelle werden einige ergänzende Details zu der knappen Darstellung im Abschnitt 3.4 angegeben.

Das *kompresible Neo-Hooke-Material* ist ein hyperelastisches Materialgesetz, welches sowohl physikalisch als auch geometrisch nichtlineares Verhalten aufzeigt. Die freie Energiefunktion ist mit den *Lamé-Konstanten* μ und λ , siehe Abschnitt 3.4, durch

$$\Psi = \tilde{\Psi}(\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}) = \frac{1}{2} \mu (\mathbf{I} - 3) - \mu \ln J + \frac{1}{2} \lambda \ln^2 J$$

gegeben. Die ersten Ableitungen nach den Invarianten lauten

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{I}} = \frac{1}{2} \mu, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{II}} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{III}} = \frac{\lambda \ln J - \mu}{J} \cdot \frac{1}{2J} = \frac{\lambda \ln J - \mu}{2 \mathbf{III}}.$$

Die Ableitungen der Invarianten nach \mathbf{m}_Θ , \mathbf{M}_Θ sind in Abschnitt A.2.4.4 und die Ableitungen nach \mathbf{B}_Θ in Abschnitt A.4.4.4 aufgeführt.

Die unterschiedlichen lokal-konvektiven Spannungstensoren werden durch weitere Ableitung nach den Tensoren \mathbf{B}_Θ , \mathbf{m}_Θ , \mathbf{M}_Θ ermittelt, d.h. mit den Beziehungen (3.59a), (3.51) folgt somit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_\Theta &= 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_\Theta} = \mu \mathbf{1}_\Theta + (\lambda \ln J - \mu) \mathbf{B}_\Theta^{-T}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_\Theta &= 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{m}_\Theta} = \mu \mathbf{M}_\Theta^{-1} + (\lambda \ln J - \mu) \mathbf{m}_\Theta^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{R}}_\Theta &= 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{M}_\Theta} = -\mu \mathbf{M}_\Theta^{-1} \mathbf{m}_\Theta \mathbf{M}_\Theta^{-1} - (\lambda \ln J - \mu) \mathbf{M}_\Theta^{-1}. \end{aligned}$$

Die entsprechenden zweiten Ableitungen führen zu den Materialtensoren

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_\Theta &= 2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}_\Theta}{\partial \mathbf{B}_\Theta} = \lambda \mathbf{B}_\Theta^{-1} \otimes \mathbf{B}_\Theta^{-1} - 2 (\lambda \ln J - \mu) \mathbf{I}_{\mathbf{B}_\Theta^{-T}}, \\ \tilde{\mathbb{A}}_\Theta &= 2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}_\Theta}{\partial \mathbf{M}_\Theta} \\ \tilde{\mathbb{B}}_\Theta &= 2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}_\Theta}{\partial \mathbf{m}_\Theta} \\ \tilde{\mathbb{C}}_\Theta &= 2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_\Theta}{\partial \mathbf{m}_\Theta} = \lambda \mathbf{m}_\Theta^{-1} \otimes \mathbf{m}_\Theta^{-1} - 2 (\lambda \ln J - \mu) \mathbf{I}_{\mathbf{m}_\Theta^{-1}}, \\ \tilde{\mathbb{D}}_\Theta &= 2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_\Theta}{\partial \mathbf{M}_\Theta} = \lambda \mathbf{m}_\Theta^{-1} \otimes \mathbf{M}_\Theta^{-1} + 2 \mu \mathbf{I}_{\mathbf{M}_\Theta^{-1}}. \end{aligned}$$

Die Variation der Spannungen setzt sich somit zusammen aus

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_\Theta &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_\Theta}{\partial \mathbf{m}_\Theta} : \delta \mathbf{m}_\Theta + \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_\Theta}{\partial \mathbf{M}_\Theta} : \delta \mathbf{M}_\Theta \\ &= \tilde{\mathbb{C}}_\Theta : \mathbf{F}_\Theta^T \delta \mathbf{F}_\Theta + \tilde{\mathbb{D}}_\Theta : \mathbf{K}_\Theta^T \delta \mathbf{K}_\Theta. \end{aligned}$$

Anhang B

Hinweise zur Strukturoptimierung und zur Sensitivitätsanalyse

Dieses Kapitel soll einen Einblick in die Grundlagen der Strukturoptimierung und der Sensitivitätsanalyse geben sowie die heutzutage gebräuchlichsten Methoden zusammenfassen.

Grundlegende Darstellungen zur Strukturoptimierung finden sich in deutscher Sprache z.B. in den Büchern von *Lawo* [156], *Baier, Seeßelberg, Specht* [9] sowie in den Seminarunterlagen [177]. Weiterhin in englischer Sprache bei *Haug und Arora* [125], *Arora* [5], *Haftka und Gürdal* [120], *Kirsch* [149]. Hierbei werden die Grundlagen am Beispiel der linearen Strukturmechanik unter Verwendung der Finite Elemente Methode erläutert.

Weiterführende Forschungsergebnisse sind in zahlreichen Monographien und Konferenzbänden wie z.B. [50, 128, 174, 206, 123, 10, 146, 49, 124, 150] zu finden.

Inhaltsangabe

B.1	Begriffsbildung und Modellprobleme	194
B.1.1	Direkte und inverse Probleme	194
B.1.2	Sensitivitätsanalyse	194
B.1.3	Lösung der Optimierungsaufgabe	196
B.1.4	Ein diskretes Modellproblem	197
B.2	Methoden zur Sensitivitätsanalyse	198
B.2.1	Numerische Methode	198
B.2.2	Semianalytische Methode	198
B.2.3	Analytische Methode	199
B.3	Variationelle Methode der Sensitivitätsanalyse	200
B.3.1	Material Derivative Approach	201
B.3.2	Domain Parametrization Approach	204
B.3.3	Weiterentwicklung der variationellen Sensitivitätsanalyse	206

B.1 Begriffsbildung und Modellprobleme

An dieser Stelle sollen die Begriffe *direktes Problem* und *inverses Problem* definiert werden. Weiterhin wird die Aufgabe der *Sensitivitätsanalyse* genauer beschrieben. Die Darstellungen erfolgen zum einen in möglichst allgemeingültiger Form unter Verwendung der Notation der Variationsrechnung sowie an einem endlichdimensionalen, reellwertigen Modellproblem.

B.1.1 Direkte und inverse Probleme

Die physikalischen Gesetze, denen eine Ingenieurstruktur genügen muß, sind üblicherweise als mathematische Beziehungen in Form von gewöhnlichen bzw. partiellen Differentialgleichungen, Variationsformulierungen o.ä. gegeben. Als Ausgangspunkt der Überlegungen wird ein physikalisches Gesetz

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0 \quad (\text{B.1})$$

betrachtet. Hierbei ist zunächst unwesentlich, welche Struktur die Gleichung $f = 0$ besitzt und was die Größen α, β, γ im Detail darstellen. Wesentlich ist zunächst nur, daß eine (primäre) Größe α über $f = 0$ mit den (weiteren) Größen β, γ, \dots in Beziehung gesetzt wird, d.h. werden die Größen β, γ, \dots fest vorgegeben, so ist auch α implizit durch $f = 0$ gegeben. Es bleibt somit *nur noch* die Aufgabe $\alpha = \hat{\alpha}(\beta, \gamma, \dots)$ in Abhängigkeit der Größen β, γ, \dots explizit zu bestimmen, d.h. das *direkte Problem* zu lösen.

Eine interessierende physikalische Größe

$$h = \hat{h}(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = \hat{h}(\hat{\alpha}(\beta, \gamma, \dots), \beta, \gamma, \dots) \quad (\text{B.2})$$

besitzt ebenfalls die oben aufgezeigten Abhängigkeiten und kann nach Bestimmung von α durch eine Nachlaufberechnung (Postprocessing) ermittelt werden.

Das *inverse Problem* ergibt sich durch Umkehrung der obigen Aufgabenstellung, d.h. es sind nun nicht mehr alle Größen β, γ, \dots bekannt und fest vorgegeben. Vielmehr sollen aus den vorhandenen Informationen zu α (teilweise oder vollständig bekannt) aus $f = 0$ die noch fehlenden Größen β, γ, \dots gewonnen werden. Die Lösung dieser Aufgabenstellung, d.h. die *inverse Analyse*, ist dabei unweit schwieriger. Abhängig von den vorhandenen bzw. fehlenden Informationen ist somit eine Lösung auch nicht immer garantiert. Im Sinne von *Hadamard* [117] spricht man dann auch von schlecht gestellten inversen Problemen.

Das inverse Problem kann auch im Rahmen einer *Optimierungsaufgabe* behandelt werden, wobei zunächst die Zielsetzung der Betrachtung, d.h. die *Zielfunktion* angegeben werden muß. Weiterhin sind wichtige Eigenschaften einer Lösung immer bzw. mit einer hohen Priorität zu erfüllen, d.h. sogenannte *Nebenbedingungen* müssen eingehalten werden. Die sogenannten *Designvariablen* sind die Freiwerte, die innerhalb zulässiger Grenzen zur Lösung der Optimierungsaufgabe verändert werden können.

B.1.2 Sensitivitätsanalyse

Die *Sensitivitätsanalyse* oder auch *Empfindlichkeitsanalyse* stellt das wesentliche Hilfsmittel für die Quantifizierung der Abhängigkeit von direkter und inverser Analyse dar. Anschaulich

bedeutet dieses, daß die Veränderung einer (weiteren) Größe $\beta + \delta\beta, \gamma + \delta\gamma, \dots$ bei impliziter Definition durch $f = 0$ natürlich eine Veränderung der (primären) Größe $\alpha + \delta\alpha$ hervorruft. Genauer gilt dann für den Zusammenhang variierter Größen

$$f = \hat{f}(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta, \gamma + \delta\gamma, \dots) = 0. \quad (\text{B.3})$$

An dieser Stelle fordern wir eine hinreichende Differenzierbarkeit der Beziehung f und können dann mit dem Hilfsmittel der Variationsrechnung die totale Variation δ von f über die zugehörigen partiellen Variationen $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma, \dots$ beschreiben, d.h. es gilt

$$\delta f = 0 = \delta_\alpha f \cdot \delta\alpha + \delta_\beta f \cdot \delta\beta + \delta_\gamma f \cdot \delta\gamma + \dots \quad (\text{B.4})$$

Entsprechend Gleichung (B.1) sind nun die Variationen $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \dots$ miteinander verbunden, d.h. z.B. kann $\delta\alpha$ bei Kenntnis der Variationen $\delta\beta, \delta\gamma, \dots$ bestimmt werden. Genauer gilt dann

$$\delta\alpha = \delta\hat{\alpha}(\hat{\alpha}(\beta, \gamma, \dots), \beta, \gamma, \dots; \delta\beta, \delta\gamma, \dots), \quad (\text{B.5})$$

d.h. die Empfindlichkeitsanalyse kann erst nach Kenntnis der Lösung $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ des direkten Problems durchgeführt werden.

Die Berechnung der Variation einer physikalischen Größe δh kann dann auch im Rahmen einer Nachlaufrechnung bestimmt werden, d.h. es gilt.

$$\delta h = \delta_\alpha h \cdot \delta\alpha + \delta_\beta h \cdot \delta\beta + \delta_\gamma h \cdot \delta\gamma + \dots \quad (\text{B.6})$$

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich das folgende prinzipielle Ablaufschema einer Sensitivitätsanalyse.

Tafel B.1: Prinzipielles Ablaufschema von direkter Analyse und Sensitivitätsanalyse

1. Löse das direkte Problem, d.h. berechne $\alpha = \hat{\alpha}(\beta, \gamma, \dots)$ für vorgegebene β, γ, \dots
2. Führe ein Postprocessing für das direkte Problem durch, d.h. berechne die Funktionen $h = \hat{h}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.
3. Berechne die partiellen Variationen der Funktion f , d.h. $\delta_\alpha f, \delta_\beta f, \delta_\gamma f, \dots$, sowie der Funktionen h , d.h. $\delta_\alpha h, \delta_\beta h, \delta_\gamma h, \dots$ an der Stelle $\hat{\alpha}(\beta, \gamma, \dots), \beta, \gamma, \dots$
4. Berechne für vorgegebene Variationen $\delta\beta, \delta\gamma, \dots$ die zugehörige Variation von α durch Auswertung der Beziehung

$$\delta f = 0 = \delta_\alpha f \cdot \delta\alpha + \delta_\beta f \cdot \delta\beta + \delta_\gamma f \cdot \delta\gamma + \dots$$

5. Führe ein Postprocessing für die Sensitivitäten durch, d.h. werte die Beziehungen

$$\delta h = \delta_\alpha h \cdot \delta\alpha + \delta_\beta h \cdot \delta\beta + \delta_\gamma h \cdot \delta\gamma + \dots$$

für jede Wahl von $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ aus.

Für die theoretische und numerische Behandlung der Sensitivitätsanalyse sind hierbei zwei wesentliche Bestandteile zu betrachten und zwar

1. die effiziente Bereitstellung der partiellen Variationen physikalischer Funktionen f und h bzgl. beliebiger (primärer und weiterer) Variablen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, sowie
2. die Durchführung der Sensitivitätsanalyse selbst, d.h. die Auswertung der Gleichungen (B.4) und (B.6).

Diese Schritte werden auch im Hauptteil getrennt dargestellt.

B.1.3 Lösung der Optimierungsaufgabe

Für die Lösung der Ingenieuraufgabe als ein Optimierungsproblem sind vielfältige Lösungsstrategien einsetzbar. Eine erste Klassifizierung wurde in der Einleitung auf Seite 7 gegeben.

Eine weitere Einteilung unterscheidet zwischen den gradientenfreien und gradientenbasierten mathematischen Optimierungsstrategien. Die gradientenfreien Zugänge, d.h. z.B. die *Evolutionstrategie* [199, 190], können insbesondere dann effektiv eingesetzt werden, wenn Funktionsauswertungen relativ schnell und billig erstellt werden können, siehe z.B. [108]. Demgegenüber nutzen die Gradientenverfahren, wie z.B. das SQP-Verfahren [122, 188, 195] bzw. die MMA-Methode [101, 217], die vorhandenen Informationen vollständig aus, d.h. im Idealfall kann eine superlineare (quadratische) Konvergenz gegen ein lokales Minimum festgestellt werden. Ein Vergleich der Leistungsfähigkeit unterschiedlicher NLP-Algorithmen im Einsatz auf praxisrelevante Problemstellungen gibt z.B. [196].

Die Berechnung der Gradienten im Rahmen der Sensitivitätsanalyse ist ein komplexes Problem, daß die Kenntnis der gesamten Zusammenhänge von CAGD-Beschreibung und nicht-linearem Strukturverhalten erfordert. Diese Kenntnis kann im Rahmen einer kommerziellen Konstruktions- und Berechnungsstrategie i.d.R. nicht bereitgestellt werden. Aus dieser Situation heraus wurden Konzepte entwickelt, approximierende Funktionen für das Strukturverhalten einzuführen. Bei dieser sogenannten *response surface technique* oder auch *multipoint approximation technique* wird das Minimum einer Ersatzfunktion bestimmt, die sich adaptiv aus den bereits ermittelten Funktionswerten von Zielfunktion und Nebenbedingungen ergibt, siehe z.B. [15].

Weiterhin können unterschiedliche Strategien für die Problemtypen der Strukturoptimierung, d.h. die Form- bzw. Topologieoptimierung entwickelt werden. Für Hinweise auf den zweiten Problembereich siehe z.B. *Bendsøe* [49] und die dort angegebene Literatur sowie [165, 173].

B.1.4 Ein diskretes Modellproblem

Die Beziehungen der linearen Strukturanalyse, die durch Verwendung der Finite Elemente Methode in Matrixform formuliert werden können, stellen ein geeignetes diskretes Modellproblem für die direkte Analyse dar. Es gilt dann als Ersatz für $f = 0$ die diskretisierte schwache Form des Gleichgewichts $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Exemplarisch sei die Abhängigkeit von einem Parametervektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ gewählt, der entweder geometrische bzw. materielle Parameter bezeichnet. Somit gilt die funktionale Abhängigkeit von $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^n$ in der Form

$$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{z}), \mathbf{z}) = \mathbf{K}(\mathbf{z}) \mathbf{V}(\mathbf{z}) - \mathbf{P}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.7})$$

mit dem diskreten Verschiebungsvektor $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$, der linearen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie dem äußeren Knotenlastvektor $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$.

Die Lösung des direkten Problems besteht in der Invertierung des obigen Gleichungssystems, d.h. in der Berechnung von

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P}. \quad (\text{B.8})$$

Als Beispiel für eine Problemfunktion h wird die Spannung $\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{V}^e$ betrachtet, die sich aus der B-Matrix und den Verschiebungen \mathbf{V}^e des finiten Elementes berechnet.

Für die Strukturoptimierung wird dieses klassische Beispiel ebenfalls verwendet. Eine Ableitung der diskreten Beziehung nach einer skalaren Designvariablen z_i ergibt die Beziehungen

$$\frac{d\mathbf{K}}{dz_i} \mathbf{V} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{V}}{dz_i} - \frac{d\mathbf{P}}{dz_i} = \mathbf{0} \quad \text{und somit} \quad \frac{d\mathbf{V}}{dz_i} = -\mathbf{K}^{-1} \left[\frac{d\mathbf{K}}{dz_i} \mathbf{V} - \frac{d\mathbf{P}}{dz_i} \right]. \quad (\text{B.9})$$

Zur Berechnung der Sensitivität der Strukturantwort ist somit ein weiteres lineares Gleichungssystem mit veränderter rechten Seite zu bestimmen. Die Ableitung der Nebenbedingung h liefert

$$\frac{dh_j}{dz_i} = \frac{\partial h_j}{\partial z_i} + \frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{V}} \frac{d\mathbf{V}}{dz_i} = \frac{\partial h_j}{\partial z_i} - \frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{V}} \mathbf{K}^{-1} \left[\frac{d\mathbf{K}}{dz_i} \mathbf{V} - \frac{d\mathbf{P}}{dz_i} \right]. \quad (\text{B.10})$$

Die notwendige Lösung eines linearen Gleichungssystems kann auf zwei Arten durchgeführt werden. Beim direkten Problem wird für jede Designvariable die Ableitung $d\mathbf{V}/dz_i$ berechnet, während beim adjungierten Problem für jede Nebenbedingung h_j zunächst eine adjungierte Variable $\Lambda_j = \mathbf{K}^{-1} [\partial h_j / \partial \mathbf{V}]$ ermittelt wird, d.h. die Klammerung gibt schematisch das algorithmische Vorgehen an

$$\frac{dh_j}{dz_i} = \frac{\partial h_j}{\partial z_i} - \frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{V}} \left[\mathbf{K}^{-1} \left[\frac{d\mathbf{K}}{dz_i} \mathbf{V} - \frac{d\mathbf{P}}{dz_i} \right] \right] = \frac{\partial h_j}{\partial z_i} - \left[\frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{V}} \mathbf{K}^{-1} \right] \left[\frac{d\mathbf{K}}{dz_i} \mathbf{V} - \frac{d\mathbf{P}}{dz_i} \right].$$

Die Wahl des effizientesten Vorgehens richtet sich nach der Anzahl der Designvariablen bzw. der Nebenbedingungen.

Bei der Betrachtung des obigen Modellproblems müssen zwei wesentliche Einschränkungen beachtet werden. Zum einen wird ein diskretes Problem behandelt, d.h. es treten keine Variationen sondern nur Ableitungen auf und es können keine Aussagen zur adaptiven Verbesserung der diskreten Formulierung erwartet werden. Weiterhin wird die Sensitivität über die Ableitung der Steifigkeitsmatrix formuliert. Diese Beschreibung ist für die lineare FEM richtig, kann aber nicht einfach auf eine allgemeine nichtlineare Situation erweitert werden. Eine grundsätzliche Darstellung zeigt der Hauptteil der Arbeit.

B.2 Methoden zur Sensitivitätsanalyse

Im vorherigen Abschnitt wurde zur Struktur der Größen f und h sowie der Variablen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ mit Ausnahme der Differenzierbarkeitsforderung keine weitere Aussage gemacht. An dieser Stelle soll nun eine grobe Klassifizierung der unterschiedlichen Lösungsmethoden der Sensitivitätsanalyse zur Bestimmung der Variation δh vorgenommen werden. Die Einteilung richtet sich dabei nach den jeweils erforderlichen Informationen, die zur Durchführung der jeweiligen Methodik zugänglich sein müssen. Zur Vereinfachung wird nur die funktionale Abhängigkeit der Größen f und h von den Variablen α und β betrachtet.

B.2.1 Numerische Methode

Bei der numerischen Sensitivitätsanalyse der Funktion h wird jede Variation δh durch die Auswertung eines totalen Differenzenquotienten approximiert. Dabei muß die Veränderung der Größe β durch eine reellwertige Größe beschrieben werden. Dieses kann z.B. durch entsprechende Parametrisierung einer kontinuierlichen Größe in der Form $\beta + s \Delta\beta$ geschehen. Damit erfolgt eine Diskretisierung der Variation von β , d.h. es wird eine Richtungsableitung vorgenommen und somit nur die Veränderung von h in genau diese Richtung $\Delta\beta$ berechnet.

Bekannt sei die Lösung des direkten Problems an der Stelle β . Für die Bereitstellung jeder Richtungsableitung ist jeweils ein weiteres direktes Problem für unterschiedliche Funktionen $\beta + s \Delta\beta$ durchzuführen, d.h. neben $\alpha(\beta)$ muß auch jeweils $\alpha(\beta + s \Delta\beta)$ bestimmt werden. Damit gilt

$$\delta h = \varepsilon \frac{\partial h}{\partial s} \approx \varepsilon \frac{h[\alpha(\beta + s \Delta\beta), \beta + s \Delta\beta] - h[\alpha(\beta), \beta]}{s}. \quad (\text{B.11})$$

Bei dieser Methode bleibt die Lösung der direkten Methode verborgen, d.h. jeder Löser zur Bestimmung von α aus $f = 0$ kann durch Vorgabe unterschiedlicher Parameter β bzw. $\beta + s \Delta\beta$ eingesetzt werden. Weiterhin sind keine zusätzlichen Funktionen auszuwerten, d.h. der obige Differenzenquotient liefert direkt die gewünschte (Approximation der) Variation δh . Die Genauigkeit der numerischen Methode wird durch die spezielle Wahl des Differenzenquotienten bestimmt, d.h. sie ist von der ersten Ordnung für die Vorwärts- bzw. Rückwärts-Differenzen-Methode sowie von zweiter Ordnung für die Zentrale-Differenzen-Methode.

Entsprechend der einfachen Struktur ist diese Methode numerisch leicht umzusetzen. Nachteile bestehen in dem genannten Mehraufwand für die Lösung der zusätzlichen direkten Probleme sowie in der Problematik großer Abbruchfehler der numerischen Differenzen, welche durch geeignete Wahl hinreichend kleiner Störungen ε vermieden werden können. Eine Wahl sehr kleiner Störungen liefert aber auch numerische Rundungsfehler.

B.2.2 Semianalytische Methode

Bei der semianalytischen Methode wird die genaue Kenntnis von h als Funktion der Variablen α, β vorausgesetzt. Damit können die Variationen $\delta_\alpha h$ und $\delta_\beta h$ theoretisch hergeleitet werden und müssen für unterschiedliche Werte α, β nur noch ausgewertet werden.

Für die weitere Vorgehensweise sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Zur Bestimmung von δh gemäß Gleichung (B.6) ist bei Vorgabe von $\delta\beta$ nur noch $\delta\alpha$ bereitzustellen. Bei dieser Methodik wird hierfür wieder ein numerischer Differenzenquotient verwendet, d.h. es gilt die Approximation

$$\delta\alpha = \varepsilon \frac{\partial\alpha}{\partial s} \approx \varepsilon \frac{\alpha(\beta + s\Delta\beta) - \alpha(\beta)}{s} \quad (\text{B.12})$$

und damit gilt für die Variation $\delta h = \delta_\alpha h \cdot \delta\alpha + \delta_\beta h \cdot \delta\beta$. Für jede Variation ist (wie bei der numerischen Methode) ein zusätzliches direktes Problem zu lösen, aber die Sensitivität der Lösung von $f = 0$ muß nicht betrachtet werden. Damit ist eine genauere Kenntnis der Lösung direkter Verfahren nicht erforderlich.

2. Eine verfeinerte Form der semianalytischen Methode erfordert die Kenntnis der funktionalen Abhängigkeiten von f um die notwendigen Variationen $\delta_\alpha f$ und $\delta_\beta f$ berechnen zu können. Diese Variationen werden nur zum Teil analytisch bereitgestellt. Für die verbleibenden Variationen, i.d.R. für die Berechnung von $\delta_\beta f$, bedient man sich wiederum des numerischen Differenzenquotienten, d.h.

$$\delta_\beta f = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial s} \approx \varepsilon \frac{f(\alpha, \beta + s\Delta\beta) - f(\alpha, \beta)}{s}. \quad (\text{B.13})$$

Wesentlich hierbei ist, daß nunmehr keine weitere direkte Analyse durchzuführen ist, da dieser numerischer Differenzenquotient für festes α durchgeführt wird. Eine Auswertung der verbleibenden Gleichungen liefert dann δh .

B.2.3 Analytische Methode

Die analytische Methode erfordert eine genauere Kenntnis der direkten Probleme und ihrer Lösungsmethoden, um effizient die erforderlichen Sensitivitäten $\delta_\alpha f$ und $\delta_\beta f$ sowie $\delta_\alpha h$ und $\delta_\beta h$ bestimmen zu können. In diesem Fall werden alle partiellen Variationen analytisch bereitgestellt und die Auswertung der Beziehungen (B.4) und (B.6) liefert die gewünschten Sensitivitäten.

Die Unterschiede zwischen den Methoden können durch Betrachtung der genannten Gleichungen verdeutlicht werden. Bei den numerischen Zugängen werden die Variationen durch numerische Auswertung von Richtungsableitungen (Gâteaux-Ableitung) bereitgestellt. Bei der analytischen Methode ist jedoch die Bereitstellung der Fréchet-Ableitung, d.h. des zugehörigen linearen Operators möglich. Erst die Auswertung mit einer beliebigen Variation $\delta\beta$ liefert die Richtungsableitung. Die theoretisch aufwendigere Methodik kann für viele Applikationen wichtige Informationen liefern.

Die analytische Methode geht in die *variationelle Methode* über, falls die zu untersuchenden Größen α, β, \dots selbst Funktionen darstellen. In diesem Fall sind mit δ tatsächlich Variationen gemäß der Variationsrechnung gemeint. Diese Situation liegt für die Kontinuumsmechanik vor. Für ein diskretes Problem, wie es die lineare FEM darstellt, verliert man jedoch wieder den theoretischen Hintergrund der Variationsrechnung und beschränkt sich auf die Möglichkeiten der totalen und partiellen Ableitungen einer mehrdimensionalen Analysis.

B.3 Variationelle Methode der Sensitivitätsanalyse

Dieses Kapitel widmet sich eingehend der *variationellen Sensitivitätsanalyse* und begründet den Zugang zu den Untersuchungen im Hauptteil.

Die Abgrenzung zur analytischen Bereitstellung der Ableitungen für diskrete Probleme ist offensichtlich, sollte aber in aller Deutlichkeit herausgehoben werden. Wichtig ist zunächst den Unterschied zwischen der Variation einer Funktion und der (partiellen oder totalen) Ableitung einer Funktion zu erkennen. Im Rahmen der Kontinuumsmechanik und ihrer diskretisierenden Methoden werden Variationen kontinuierlicher Lösungen in unendlichdimensionalen Funktionenräumen in Ableitungen der zugehörigen diskreten Approximationen im \mathbb{R}^n überführt. Hierbei ist zu beachten, daß es im Rahmen adaptiver Methoden möglich ist, die Genauigkeit der diskreten Approximationen zu kontrollieren. Dieses gilt jedoch nur, wenn der variationelle Hintergrund grundsätzlich bekannt ist und zur Verfügung steht. Damit sind durch den variationellen Zugang weitreichende Informationen zu gewinnen, d.h. nicht nur die vordergründige Aufgabe einer Gradientenberechnung ist zu beachten.

Zwei unterschiedliche Zugänge zur variationellen Sensitivitätsanalyse, d.h. die Methoden des *Material Derivative Approach* (MDA) und des *Domain Parametrization Approach* (DPA) haben sich seit 1980 herausgebildet und werden heutzutage in zahlreichen Anwendungen eingesetzt. Die nachfolgenden Abschnitte B.3.1 und B.3.2 geben Hinweise zur historischen Entwicklung, eine Charakterisierung ihrer wesentlichen Aspekte sowie ein (evtl. subjektiver) Kommentar zu den Vor- und Nachteilen. Die Übersichtsartikel von *Haftka und Grandhi* [119] sowie *Haftka und Adelman* [118] liefern weitere Hinweise zu den Methoden und ihre gegenseitigen Verzahnungen.

Im Abschnitt B.3.3 wird die Kritik an den genannten Methoden zusammengefaßt und Hinweise auf verbesserte Ansätze zur variationellen Sensitivitätsanalyse gegeben. Dieser Abschnitt beschreibt den Ausgangspunkt für die eigenen Arbeiten des Autors sowie formuliert die Motivation zur Anfertigung gerade dieser Schrift.

An dieser Stelle werden noch einige Literaturhinweise zu wichtigen Entwicklungen der Sensitivitätsanalyse im Rahmen der *Computational Mechanics* gegeben.

Die derzeit modernste und vollständigste Zusammenstellung der Sensitivitätsanalyse findet man in dem Buch *Structural Optimization: Status and Promise* [146]. Die neueren Entwicklungen für die Sensitivitätsanalyse werden in mehreren Kapiteln beschrieben, wobei alle wichtigen Arbeitsgruppen zu Wort kommen. Das Buch wurde 1993 von M.P. Kamat herausgegeben, spiegelt aber immer noch die wesentlichen Entwicklungen in der Strukturoptimierung wider.

Als weiteres Buch, welches sich intensiv mit der Sensitivitätsanalyse beschäftigt, ist *Kleiber et al.* [150] zu nennen. Entsprechend dem Titel *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics* beschränken sich die Autoren auf die Untersuchung diskreter FE-Beziehungen, ohne die Eignung der Grundstrukturen der Kontinuumsmechanik für die Sensitivitätsanalyse näher zu untersuchen.

B.3.1 Material Derivative Approach

B.3.1.1 Historische Entwicklung

Die ersten Schritte zur Entwicklung dieser Methode entstanden Ende der siebziger Jahre mit Arbeiten französischer (angewandter) Mathematiker um J. Céa an der Universität Nizza, siehe [68, 69, 234]. Mit den Darstellungen von J. Céa [71, 70] sowie von J.P. Zolésio [236, 235] im Rahmen des *NATO Advanced Study Institute on Optimization of Distributed Parameter Structures* [126], (Iowa City, Iowa, 1980), wurden diese Arbeiten bekannt und zunehmend von anderen Wissenschaftlern, sowohl Mathematikern als auch Ingenieuren, aufgenommen.

Neben weiteren Mitgliedern der eigenen Arbeitsgruppe (B. Rousselet, siehe z.B. [191]) haben sich z.B. auch O. Pironneau von der Universität Paris-Nord (siehe z.B. [186]) sowie J. Sokołowski von der Polnischen Akademie der Wissenschaften in Warschau (siehe z.B. [204]) vor allem mit den mathematischen Grundproblemen der Methode beschäftigt. Dabei wurden auch Fragen der Existenz und Eindeutigkeit der Formulierung und der Lösungen untersucht. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeiten sowie weitere Literaturhinweise sind in den Büchern von O. Pironneau [186], J. Sokołowski und J.P. Zolésio [205] sowie J. Haslinger und P. Neittaanmäki [123, 124] zu finden.

Die interessierten Ingenieure, in den ersten Jahren vor allem in den USA und Polen, haben sich um die Anwendung der Methode auf strukturmechanische Probleme bemüht. Zunächst wurden Fragestellungen der linearen Elastizität, der Elastodynamik und der Stabilität untersucht, zunehmend aber auch nichtlineare (geschichtsabhängige und gekoppelte) Probleme.

Hierzu gehören für den Zeitraum bis 1986 insbesondere die Arbeitsgruppen um E.J. Haug und K.K. Choi in Iowa (siehe z.B. [129, 130, 192] in Verbindung mit der französischen Schule, [73, 231, 127] sowie die wichtige Monographie [128]), die Arbeitsgruppe von J. Arora, ebenfalls in Iowa (siehe z.B. [137, 138]), die Gruppe von Z. Mróz und K. Dems in Warschau (siehe z.B. [85, 86, 87, 178, 185] sowie mit R.T. Haftka [121]).

Die Arbeiten nach 1986 entwickeln die Darstellung der grundlegenden Methodik nicht mehr wesentlich. Vielmehr werden zunehmend die unterschiedlichen nichtlinearen Phänomene der *Computational Mechanics* untersucht, siehe z.B. die Beiträge in [146].

Die Monographie von *Haug, Choi & Komkov* [128] beschäftigt sich eingehend mit dieser Methode. Ein zusammenfassende Darstellung in einer moderneren Notation ist in *Arora* [6] zu finden. Die Arbeiten bis 1993 sowie die sich aus der Analyse der zitierten Literatur ergebenden Folgerungen waren der Ausgangspunkt für die eigenen Forschungsarbeiten zur variationellen Sensitivitätsanalyse, siehe Abschnitt B.3.3.

B.3.1.2 Erläuterung der Methode

Die Grundidee der MDA-Methode ist die Analogie einer Gebietsveränderung mit der zeitabhängigen Deformation des Körpers. Entsprechend der *materiellen Zeitableitung*, bei der die Bewegung deformierbarer Körper in Abhängigkeit der skalaren Größe Zeit t beschrieben wird, wird eine *materielle Designableitung* eingeführt. Der seitdem übliche Sprachgebrauch vom *design velocity field* entspricht dabei der Analogie.

Zur Charakterisierung dienen die folgenden Bemerkungen.

- Verwendung des Konzepts der materiellen Zeitableitung der Kontinuumsmechanik im Analogieschluß auf Geometrieänderungen.
- Verwendung der Hilfsmittel aus der Variationsrechnung zur Berechnung der Variation von Integralen über veränderliche Gebiete.
- Die Grundstruktur der materiellen Zeitableitung besteht dabei aus zwei Anteilen:
 - lokale Ableitung einer Größe bei festem materiellen Punkt des Gebietes sowie
 - konvektive Ableitung einer Größe aufgrund der Variation des Gebietes.

Die Zusammenhänge seien am Beispiel einer vektorwertigen Funktion α aufgezeigt, d.h.

$$\frac{D\hat{\alpha}(s)}{Ds} = \frac{D\alpha(\mathbf{X}, s)}{Ds} = \frac{\partial\alpha}{\partial s} + \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{X}} \frac{D\mathbf{X}}{Ds}$$

Das nachfolgende Bild veranschaulicht die Grundidee dieser Methode.

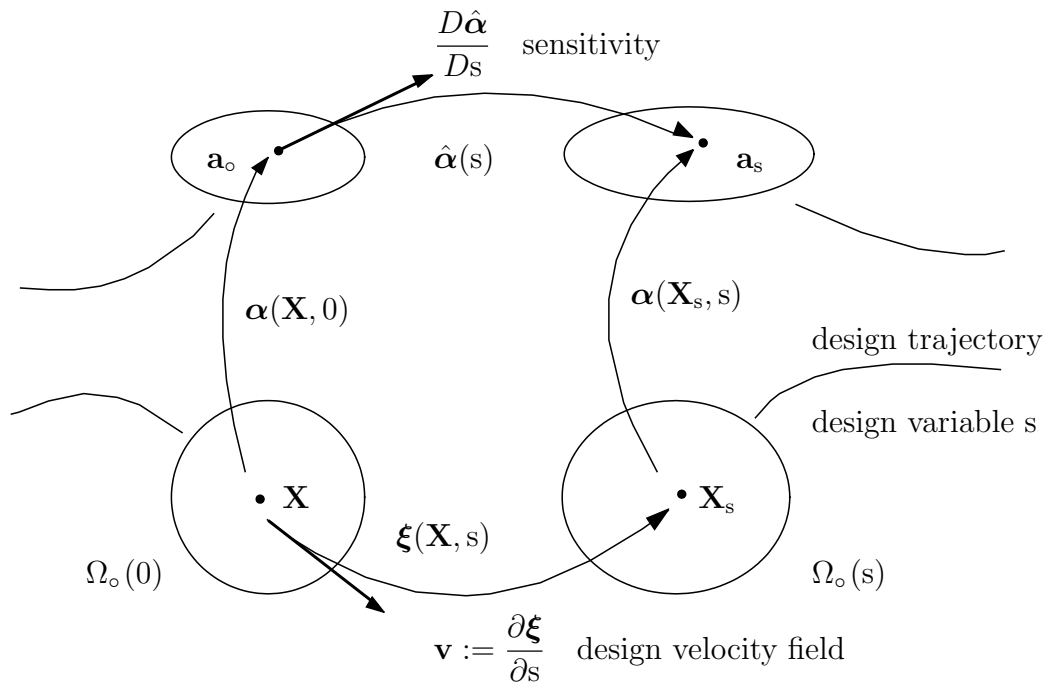


Bild B.1: Abbildungen und Konfigurationen des *Material Derivative Approach*

Ein Punkt \mathbf{X} zum Design s_o , d.h. $\Omega_o(0)$, bewegt sich auf einer Designtrajektorie ξ in den Punkt \mathbf{X}_s zum Design s . Die Tangente an diese Bewegung, d.h. $\partial\xi/\partial s$ stellt das *design velocity field* dar. Die Sensitivität $D\hat{\alpha}/Ds$ ist somit die Tangente an die Veränderung der Strukturantwort, d.h. an die Kurve $\hat{\alpha}$. Diese Darstellung zeigt die starke Anlehnung an die Geschwindigkeit eines Körpers und die reichen Möglichkeiten, vorhandene Grundlagen der Kontinuumsmechanik zu nutzen.

B.3.1.3 Zusammenfassende Kritik

Für die *Computational Mechanics* wurde die Bedeutung der *konsistenten Linearisierung* der schwachen Form des Gleichgewichts Ende der siebziger Jahre erkannt, siehe z.B. *Hughes und Pister* [141]. Diese Entwicklung setzt dabei nicht auf die Weiterverwendung der Anschauung in Form einer materiellen Zeitableitung, sondern auf eine konsequente mathematische Berechnung auf der Basis von Richtungsableitungen. Die Entwicklung in der Strukturmechanik (konsistente Linearisierung) und der Strukturoptimierung (Verwendung von MDA) haben sich damals getrennt.

Die praktische Auswertung der Beziehungen ist bei der MDA-Methode komplex und mitunter unhandlich. Die oben skizzierten Schwächen gegenüber der konsistenten Linearisierung existieren auch in der Sensitivitätsanalyse.

Weiterhin beschränkt die Analogie zur Zeitableitung naturgemäß die Sichtweise auf diskrete Designvariablen. Obwohl diese technische Schwäche leicht behoben werden kann, werden kontinuierliche Geometriefunktionen im Rahmen der MDA-Literatur kaum behandelt.

Eine weitere konzeptionelle Schwäche der MDA-Methode liegt in der Veränderung der Masse einer Struktur infolge von Designänderungen. Im Rahmen der Strukturanalyse wird üblicherweise –zumindestens bei Festkörpern– die Massenkonstanz bei zeitabhängigen Deformationen vorausgesetzt. Die Probleme, die sich bei Anwendung der Idee der materiellen Zeitableitung auf die Strukturoptimierung ergeben, wurden bisher kaum diskutiert.

B.3.2 Domain Parametrization Approach

B.3.2.1 Historische Entwicklung

Die ersten Ansätze für die Bedeutung einer Parametrisierung der Geometrie für die Sensitivitätsanalyse finden sich in den Beiträgen von J. Céa [71, 70] auf der bereits oben genannten Tagung, siehe auch [126]. Sein Konzept eines *image of a fixed domain* wurde jedoch zunächst nicht weiter beachtet.

Erst im Jahr 1986 wurde mit dem Beitrag von R.B. Haber [113] auf der *NATO Advanced Study Institute on Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems* (Tróia, Portugal, 1986) [174] die Idee einer designunabhängigen Referenzkonfiguration wieder aufgenommen.¹ Diese Entwicklung entstand aus den Arbeiten von B. Haber über Anwendungen der ALE-Formulierung auf Problemstellungen der Festkörpermechanik. Dieses waren Arbeiten zu großen Deformationen in der Strukturmechanik [112], Reibkontakt bei großen Deformationen [115] sowie für die Berechnung der Energiefreisetzungsrate bei virtuellen Rißöffnungen [116].

Das Konzept der Gebietsparametrisierung wurde von seiner Arbeitsgruppe (D.G. Phelan, PhD 1988; D.A. Tortorelli, PhD 1988; C.A. Vidal, PhD 1992) in den folgenden Jahren weiterentwickelt und auf nichtlineare Problemstellungen angewendet. Ein zusammenfassende Darstellung ist in *Tortorelli und Wang* [219] enthalten. Die Arbeiten bis 1993 sowie die sich aus der Analyse der zitierten Literatur ergebenden Folgerungen waren der Ausgangspunkt für die eigenen Forschungsarbeiten zur variationellen Sensitivitätsanalyse, siehe Abschnitt B.3.3.

B.3.2.2 Erläuterung der Methode

Die Grundidee der Methode besteht in der Transformation der Referenzkonfiguration auf eine design- und zeitfeste Bezugskonfiguration. Hiermit wird die wesentliche Schwäche der MDA-Methode umgangen. Nach der Transformation alle physikalischen Größen auf diese Konfiguration ist das betrachtete Gebiet konstant und die Variationen können vereinfacht ausgeführt werden.

Die Einzelschritte dieser Methode können folgendermaßen zusammengefaßt werden.

- Einführung einer designunabhängigen Bezugskonfiguration T_{Θ} .
- Transfer aller physikalischer Größen auf die Bezugskonfiguration T_{Θ}

$$\tilde{\alpha}(\Theta, s) := \alpha(\tilde{\psi}(\Theta, s), s).$$

- Direkte Ableitung von $\tilde{\alpha}$ nach den Designvariablen s

$$\frac{D\hat{\alpha}(s)}{Ds} = \frac{D\tilde{\alpha}(\Theta, s)}{Ds}.$$

¹Interessant ist, daß hierbei der Titel des Konferenzbeitrages „Application of the Eulerian-Lagrangian kinematic description to structural shape optimization“ sich von der anschließend gedruckten Fassung [114] mit dem Titel „A new variational approach to structural shape design sensitivity analysis“ unterscheidet. In der Rückschau würdigt m.E. die ursprüngliche Bezeichnung die Bedeutung des Beitrages besser.

Die nachfolgende Darstellung veranschaulicht das Vorgehen.

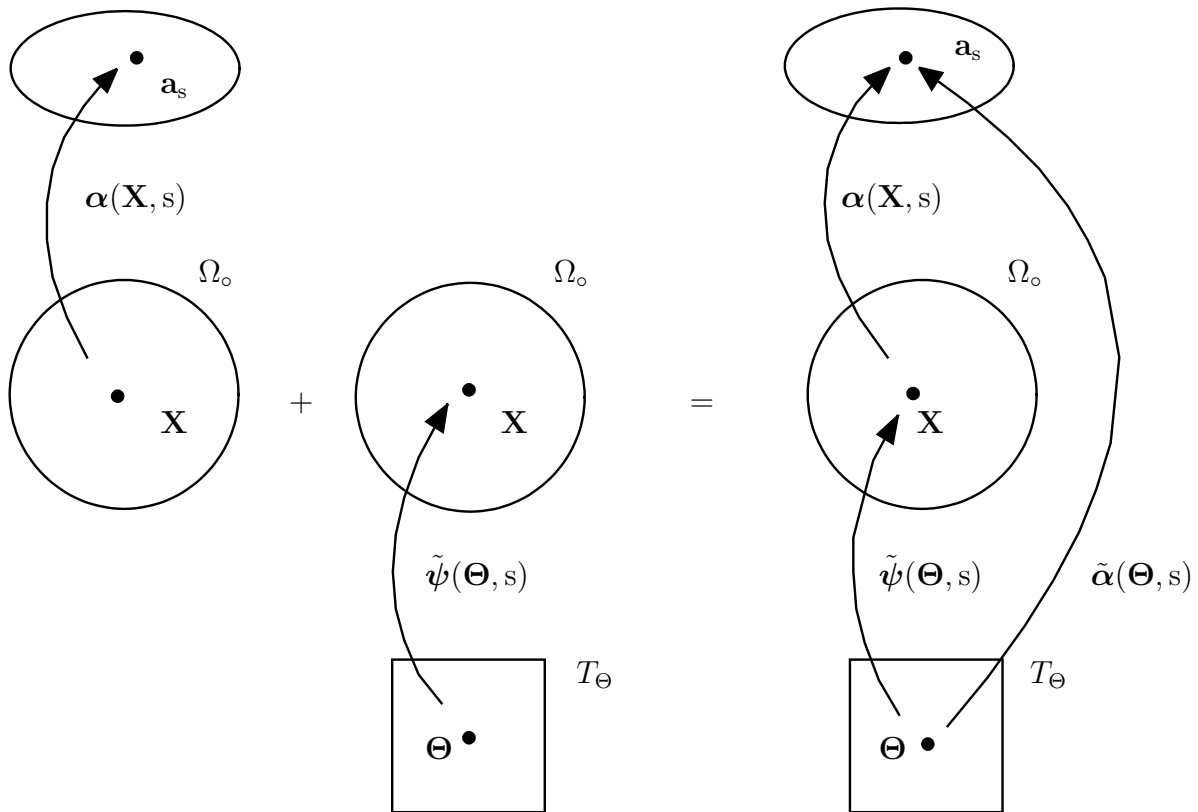


Bild B.2: Abbildungen und Konfigurationen des *Domain Parametrization Approach*

B.3.2.3 Zusammenfassende Kritik

Die DPA-Methode basiert auf einer Transformation vorhandener physikalischer Formulierungen der Lagrangeschen Betrachtungsweise auf ein (im Rahmen der Kontinuumsmechanik) neues Parametergebiet. Demzufolge ist sie ein zusätzliches Konzept, welches einer klassischen Beschreibung hinzugefügt wird.

Es ist im Rahmen der Entwicklung der *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE) Methode und der damit verbundenen DPA-Methode nicht zu einer Integration dieses Ansatzes in die Kontinuumsmechanik gekommen. Vielmehr wurde die DPA-Methode (im wesentlichen nur von den Entwicklern selbst) für vielfältige numerische Untersuchungen verwendet.

Ähnlich wie bei der MDA-Methode wurde ein nützliche Konzept der Strukturmechanik, nämlich die *pull back - Variation - push forward* Vorgehensweise, bisher nur unzureichend eingesetzt. Weiterhin wurden bei der DPA die weitreichenden Möglichkeiten einer Darstellung der Kontinuumsmechanik auf dem neuen Parametergebiet nicht ausgenutzt, d.h. der in dieser Arbeit vollzogene Schritt zur Reformulierung der Grundlagen wurde nicht durchgeführt.

B.3.3 Weiterentwicklung der variationellen Sensitivitätsanalyse

Die oben angeführten Methoden der Sensitivitätsanalyse sind Ende der siebziger bzw. in den achtziger Jahren entstanden. Dabei wurden die zeitgleich entwickelten modernen Beschreibungsweisen (differentialgeometrisch motivierte Darstellungen, z.B. nach [164]) sowie die effiziente Methodik der Computational Mechanics (konsistente Linearisierung, pull back – push forward) bisher nur zögerlich in der Sensitivitätsanalyse verwendet.

Weiterhin stehen beide Zugänge nebeneinander und wurden in der Literatur miteinander verglichen, siehe z.B. [7]. Es ist jedoch bisher nicht zu einer gemeinsamen Weiterentwicklung bzw. Vereinheitlichung gekommen.

Aus den dargestellten Beobachtungen habe ich die zentrale Schlußfolgerung gezogen, aus denen sich die Ziele dieser Arbeit ableiten:

Die Strukturoptimierung ist ein Teil der Kontinuumsmechanik.

So banal bzw. selbstverständlich diese Aussage auch sein mag, die notwendigen Konsequenzen sind bisher nicht gezogen worden.

1. Wenn die Strukturoptimierung ein Teil der Kontinuumsmechanik ist, dann muß dies auch in den theoretischen Grundlagen deutlich werden.
2. Die Grundlagen der Diskretisierungsmethoden (CAGD, FEM) müssen mit der Strukturoptimierung in der Kontinuumsmechanik integrativ zusammengeführt werden.
3. Die modernen Konzepte (z.B. konsistente Linearisierungen, Tangententransformationen) müssen in allen Bereichen der Theorie und der Numerik eingesetzt werden.
4. Die theoretischen Erkenntnisse müssen die nachfolgenden numerischen Methoden und diese die softwaretechnischen Umsetzungen diktieren.

Die obigen Bemerkungen führten zu der Entscheidung, eine geeignete Kontinuumsmechanik neu zu formulieren. Hierbei war es wichtig, keine der üblichen Vorgehensweisen der Lagrangeschen Betrachtungsweisen vorschnell zu übernehmen. Das Ergebnis dieser Überlegungen ist im Hauptteil dokumentiert.

Die Zugänge zur numerischen Behandlung der Strukturoptimierung sind im Bild B.3 veranschaulicht. Basierend auf den CAGD- und FE-Methoden werden üblicherweise diskrete Problemstellungen betrachtet, die zu der dargestellten Sensitivitätsberechnung führen. Hierbei wird die totale Ableitung einer Zielfunktion bzw. Nebenbedingung nach skalaren Designvariablen berechnet, wobei die Problemfunktionen aus dem FE-Modell stammen und die Designvariablen aus dem CAGD-Modell. Die sich hieraus ergebenden Probleme für die praktische Durchführung und Kopplung der Algorithmen ist hinreichend bekannt.

Eine konsequente Vorgehensweise, wie sie in dieser Arbeit vorgestellt wird, versucht die Integration von CAGD und FEM über die gemeinsamen mathematischen Grundlagen der Differentialgeometrie im Rahmen der Kontinuumsmechanik. Die theoretischen Ergebnisse werden abgeleitet und erst danach wird eine problemgerechte Diskretisierung durchgeführt.

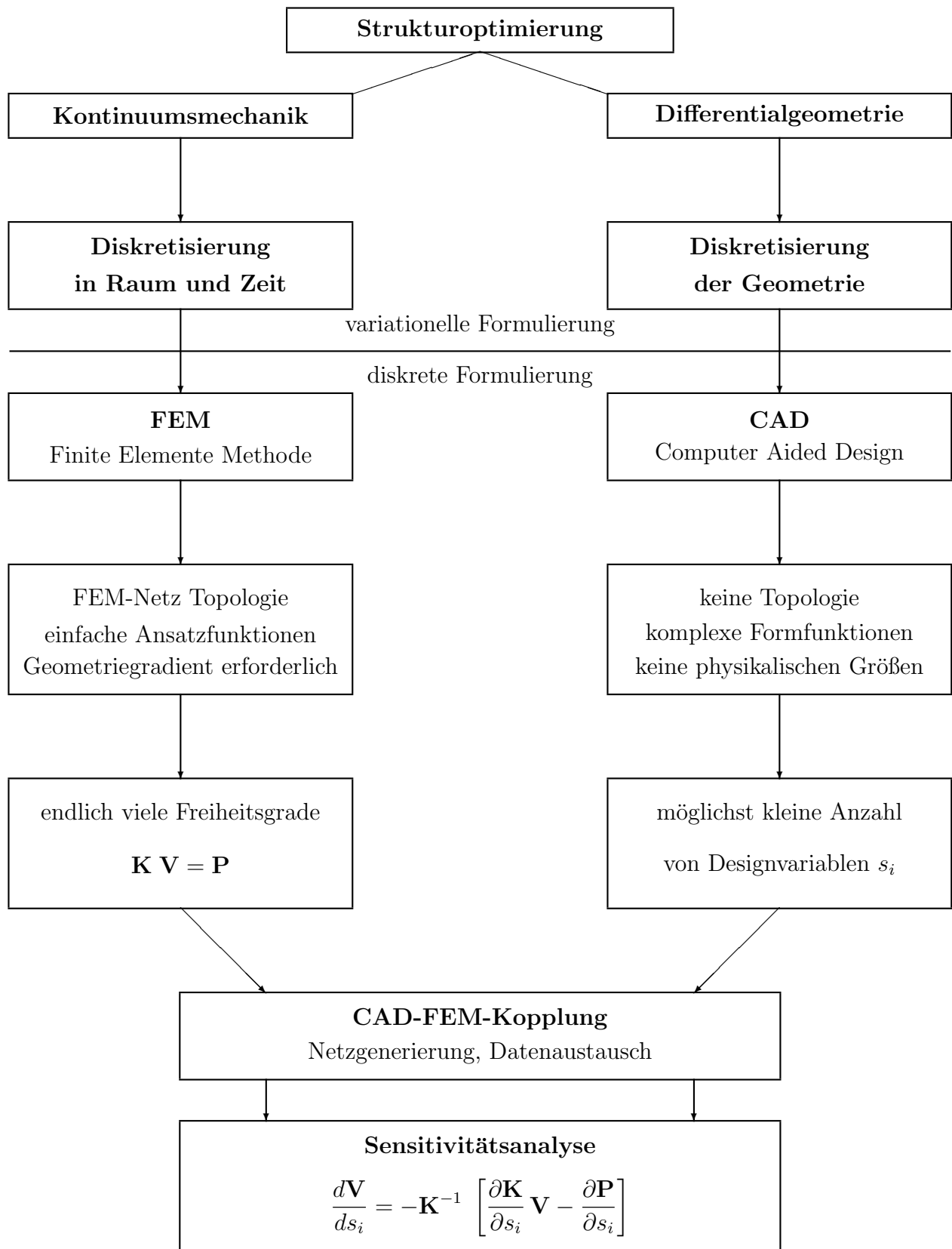


Bild B.3: Grundlagen der Strukturoptimierung

Literaturverzeichnis

- [1] ABRAHAM, R. ; MARSDEN, J. E. ; RATIU, T.: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Reading : Addison-Wesley, 1983
- [2] ANDERSON, T.L.: *Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications*. Boca Raton, Florida : CRC Press, 1991
- [3] ANSYS INC. CORPORATE. ANSYS. URL: <http://www.ansys.com>
- [4] ARGYRIS, J.H.: *Energy Theorems and Structural Analysis*. London : Butterworth, 1960. – Nachdruck aus *Aircraft Eng.* 1954-5
- [5] ARORA, J.S.: *Introduction to Optimum Design*. New York : McGraw-Hill, 1989
- [6] ARORA, J.S.: An exposition of the material derivative approach for structural shape sensitivity analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 105 (1993), S. 41–62
- [7] ARORA, J.S. ; LEE, T.H. ; CARDOSO, J.B.: Structural shape sensitivity analysis: relationship between material derivative and control volume approaches. In: *AIAA Journal* 30 (1992), Nr. 6, S. 1638–1648
- [8] BABUSKA, I.: *Modeling, Mesh Generation, and Adaptive Numerical Methods for Partial Differential Equations*. New York : Springer-Verlag, 1995
- [9] BAIER, H. ; SEESSELBERG, C. ; SPECHT, B.: *Optimierung in der Strukturmechanik*. Wiesbaden : F. Vieweg & Sohn, 1994
- [10] BANICHUK, N.V.: *Introduction to Optimization of Structures*. New York : Springer-Verlag, 1990
- [11] BANICHUK, N.V. ; BARTHOLD, F.-J. ; FALK, A. ; STEIN, E.: Mesh refinement for shape optimization. In: *Structural Optimization* 9 (1995), Nr. 1, S. 46–51
- [12] BANICHUK, N.V. ; BARTHOLD, F.-J. ; FALK, A. ; STEIN, E.: Finite element analysis with mesh refinement for shape optimization. In: *Control and Cybernetics* 25 (1996), Nr. 3, S. 657–664
- [13] BARBERO, E.J. ; REDDY, J.N.: The Jacobian derivative method for three-dimensional fracture mechanics. In: *Communications in Applied Numerical Methods* 6 (1990), S. 507–518

- [14] BARNHILL, R. (Hrsg.) ; RIESENFELD, R.F. (Hrsg.): *Computer Aided Geometric Design*. New York : Academic Press, 1974
- [15] BARTHELEMY, J.-F. M. ; HAFTKA, R.T.: Function Approximations. In: [146], S. 51–70
- [16] BARTHOLD, F.-J.: *Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Dissertation, 1993
- [17] BARTHOLD, F.-J.: Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen hyperelastischen Materialien. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 74 (1994), S. T300–T302
- [18] BARTHOLD, F.-J.: Formoptimierung eines PKW-Stoßfängerquerschnittes. Abschlußbericht eines Berechnungs- und Optimierungsauftrages der Volkswagen AG, Wolfsburg / Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover. 1994. – Interner Bericht
- [19] BARTHOLD, F.-J.: Optimierung von Strukturen aus gummiartigen Materialien – Beispielberechnungen / Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover. 1994. – IBNM-Bericht 94/2
- [20] BARTHOLD, F.-J.: Remarks on continuum mechanics and sensitivities. In: MAHNKEN, R. (Hrsg.): *Theoretische und numerische Methoden in der angewandten Mechanik mit Praxisbeispielen*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1998. – S. 41–48
- [21] BARTHOLD, F.-J.: Remarks on linear and nonlinear variational design sensitivity analysis. In: [175], S. 331–339
- [22] BARTHOLD, F.-J. ; BECKER, A. ; FALK, A. ; RUST, W.: Zum Einfluß der Netzadaption bei der Formoptimierung. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 73 (1993), S. T680–T684
- [23] BARTHOLD, F.-J. ; FALK, A.: Formoptimierung eines Busreifen-Seitenwand-Abriebindikators. Abschlußbericht eines Berechnungs- und Optimierungsauftrages der Continental AG, Hannover / Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover. 1994. – Interner Bericht
- [24] BARTHOLD, F.-J. ; FALK, A. ; STEIN, E.: Structural optimization for rubberlike materials using analytical sensitivity analysis. In: GILMORE, B.J. (Hrsg.) ; HOELTZEL, D.A. (Hrsg.) ; DUTTA, D. (Hrsg.) ; ESCHENAUER, H.A. (Hrsg.): *Advances in Design Automation*, 1994, S. 43–50
- [25] BARTHOLD, F.-J. ; FIRUZIAAN, M.: Optimization of hyperelastic materials with isotropic damage. In: *Structural Optimization* 20 (2000), Nr. 1, S. 12–21
- [26] BARTHOLD, F.-J. ; MESECKE, S.: Remarks on computing the energy release rate and its sensitivities. In: [175], S. 341–350
- [27] BARTHOLD, F.-J. ; MESECKE, S.: Some remarks on robust design. In: [175], S. 351–360

- [28] BARTHOLD, F.-J. ; SCHMIDT, M. ; STEIN, E.: Adaptive finite element method for Prandtl-Reuß elastoplasticity. In: BACH, M. (Hrsg.) ; CONSTANDA, C. (Hrsg.) ; HSIAO, G.C. (Hrsg.) ; SÄNDIG, A.-M. (Hrsg.) ; WERNER, P. (Hrsg.): *Analysis, Numerics and Applications of Differential and Integral Equations*, Addison Wesley Longman, 1996 (Pitman Research Notes in Mathematics Science 379), S. 25–30
- [29] BARTHOLD, F.-J. ; SCHMIDT, M. ; STEIN, E.: Error estimation and mesh adaptivity for elastoplastic deformations. In: OWEN, D.R.J. (Hrsg.) ; OÑATE, E. (Hrsg.) ; HINTON, E. (Hrsg.): *Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*. Barcelona : CIMNE, 1997, S. 597–602
- [30] BARTHOLD, F.-J. ; SCHMIDT, M. ; STEIN, E.: Error indicators and mesh refinements for finite element computations of elastoplastic deformations. In: METSAVEER, J. (Hrsg.): *Proc. Tenth Nordic Seminar on Computational Mechanics*, Nordic Association for Computational Mechanics, Tallinn, Estonia, 1997. – ISBN 9985–59–045–7
- [31] BARTHOLD, F.-J. ; SCHMIDT, M. ; STEIN, E.: Error indicators and mesh refinements for finite element computations of elastoplastic deformations. In: *Computational Mechanics* 22 (1998), S. 225–238
- [32] BARTHOLD, F.-J. ; STANDER, N. ; STEIN, E.: A performance comparison of SAM and SQP methods for structural shape optimization. In: *Structural Optimization* 11 (1996), S. 102–112
- [33] BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: A continuum mechanical approach for analytical sensitivity analysis in structural optimization. In: NEITTAANMÄKI, P. (Hrsg.): *Proc. of the 5th Finish Mechanics Days*, University of Jyväskylä, Finland, 1994
- [34] BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien bei großen Deformationen / Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover. 1994. – IBNM-Bericht 94/1
- [35] BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: Theorie und Algorithmen adaptiver FE-Methoden für elastoplastische Deformationen / Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover. 1995. – IBNM-Bericht 95/2. – 63 S. Zwischenbericht 1994/95 für das gleichnamige Projekt im Rahmen des DFG-Paketantrags 'Adaptive Finite Elemente Verfahren in der Angewandten Mechanik'
- [36] BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: Variational sensitivity analysis and optimal design in finite elasticity – with applications to rubber materials. In: OLHOFF, N. (Hrsg.) ; ROZVANY, G.I.N. (Hrsg.): *Proceedings of the First World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Oxford : Pergamon, 1995, S. 413–420
- [37] BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: A continuum mechanical based formulation of the variational sensitivity analysis in structural optimization. Part I: analysis. In: *Structural Optimization* 11 (1996), Nr. 1/2, S. 29–42
- [38] BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: Error estimation and mesh adaptivity for elasto-plastic deformations. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 76 (1996), S. 159–162

- [39] BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: Implementing variational design sensitivity analysis. In: GUTKOWSKI, W. (Hrsg.) ; MRÓZ, Z. (Hrsg.): *Proceedings of the Second World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization* Bd. 1. Warschau : Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Science, 1997, S. 181–186
- [40] BARTHOLD, F.-J. ; WIECHMANN, K.: Variational design sensitivity for inelastic deformations. In: OWEN, D.R.J. (Hrsg.) ; OÑATE, E. (Hrsg.) ; HINTON, E. (Hrsg.): *Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*. Barcelona : CIMNE, 1997, S. 792–797
- [41] BATHE, K.J.: *Finite-Elemente-Methoden*. 2. Auflage. Berlin : Springer-Verlag, 2002
- [42] BAUMANN, M. ; SCHWEIZERHOF, K. ; ANDRUSSOW, S.: An efficient mixed hybrid 4-node shell element with assumed stresses for membrane, bending and shear parts. In: *Engineering Computations* 11 (1994), S. 69–80
- [43] BECKER, A.: *Strukturoptimierung stabilitätsgefährdeter Systeme mittels analytischer Gradientenermittlung*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Dissertation, 1992
- [44] BECKER, A. ; BARTHOLD, F.-J.: Einfluß der Strukturoptimierung auf das Stabilitätsverhalten von Stab- und Flächentragwerken. In: EIBL, J. (Hrsg.) ; OBRECHT, H. (Hrsg.) ; WRIGGERS, P. (Hrsg.): *Finite Elemente – Anwendungen in der Baupraxis*. Berlin : W. Ernst & Sohn, 1991, S. 603–612
- [45] BECKER, R. ; KAPP, H. ; RANNACHER, R.: Adaptive finite element methods for optimization problems / IWR, Universität Heidelberg. 1999. – Preprint No. 13/99
- [46] BELYTSCHKO, T. ; KENNEDY, J.M.: Computer models for sub-assembly simulation. In: *Nucl. Engrg. Des.* 49 (1978), S. 17–38
- [47] BEN-HAIM, Y.: *Robust Reliability in the Mechanical Sciences*. Berlin : Springer-Verlag, 1996
- [48] BEN-HAIM, Y. ; ELISHAKOFF, I.: *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*. Amsterdam : Elsevier, 1990
- [49] BENDSØE, M.P.: *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*. Berlin : Springer-Verlag, 1995
- [50] BENNETT, J.A. (Hrsg.) ; BOTKIN, M.E. (Hrsg.): *The Optimum Shape: Automated Structural Design*. New York : Plenum Press, 1986
- [51] BERKHAHN, V.: *Optimale Formgebung von Stabtragwerken mit Nichtlinearitäten in der Zielfunktion und in den Restriktionen unter Verwendung der Finite-Element-Methode*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Dissertation, 1988
- [52] BERTRAM, A.: *Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Mannheim : BI-Wissenschaftsverlag, 1989

- [53] BÉZIER, P.: Définition numérique des courbes et surfaces I. In: *Automatisme* 11 (1966), S. 625–632
- [54] BÉZIER, P.: Définition numérique des courbes et surfaces II. In: *Automatisme* 12 (1967), S. 17–21
- [55] BÉZIER, P.: Procédé de définition numérique des courbes et surfaces non mathématiques. In: *Automatisme* 13 (1968)
- [56] BISCHOFF, D.: *Mathematische Formulierung und numerische Methoden für Kontaktprobleme auf der Grundlage von Extremalprinzipien*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Habilitation, 1988
- [57] BISCHOFF, M. ; RAMM, E.: Shear deformable shell elements for large strains and rotations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), S. 4427–4449
- [58] BLETZINGER, K.-U.: *Formoptimierung von Flächentragwerken*, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Dissertation, 1990
- [59] BLETZINGER, K.-U.: Form finding and optimization of membranes and minimal surfaces / DCAMM, Technical University of Denmark. 1998. – Report No. S 81
- [60] BOROVKOV, A. ; PALMOV, V. ; BANICHUK, N.V. ; STEIN, E. ; SAURIN, V. ; BARTHOLD, F.-J. ; MISNIK, Yu.: Macrofailure criterion and optimization of composite structures with edge delamination. In: *Int. Journal for Computational Civil and Structural Engineering* 1 (2000), Nr. 1
- [61] BROEK, D.: *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. 4. Auflage. Dordrecht : Martinus Nijhoff Publishers, 1986
- [62] BRÖKER, H.: *Integration von geometrischer Modellierung und Berechnung nach der p-Methode der FEM*, Lehrstuhl für Bauinformatik, TU München, Dissertation, 2001
- [63] BÜCHTER, N. ; RAMM, E. ; ROEHL, D.: Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (1994), S. 2551–2568
- [64] BUGEDA, G. ; OLIVER, J.: A general methodology for structural shape optimization problems using automatic adaptive remeshing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), S. 3161–3185
- [65] CASTELJAU, P. de: Outillages méthodes calcul / A. Citroen. 1959. – Forschungsbericht
- [66] CASTELJAU, P. de: Courbes et surfaces à poles / A. Citroen. 1963. – Forschungsbericht
- [67] CASTELJAU, P. de: *Shape Mathematics and CAD*. Kogan-Page, London, 1986
- [68] CÉA, J.: Adaption de la méthode du gradient à un problème d'identification de domaine. In: GLOWINSKI, R. (Hrsg.) ; LIONS, J.L. (Hrsg.): *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering* Bd. 2. Berlin : Springer-Verlag, 1974. – Lecture Notes in Computer Science 11, S. 391–402

- [69] CÉA, J.: Une méthode numérique pour la recherche d'un domaine optimal. In: GLOWINSKI, R. (Hrsg.) ; LIONS, J.L. (Hrsg.): *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering* Bd. 2. Berlin : Springer-Verlag, 1976. – Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 134, S. 245–257
- [70] CÉA, J.: Numerical methods of shape optimal design. In: [126], S. 1049–1087
- [71] CÉA, J.: Problems of shape optimal design. In: [126], S. 1005–1048
- [72] CHOI, K.K. ; CHANG, K.W.: A study of design velocity field computation for shape optimal design. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 15 (1994), S. 317–341
- [73] CHOI, K.K. ; HAUG, E.J.: Shape design sensitivity analysis for elastic structures. In: *Journal of Structural Mechanics* 11 (1983), Nr. 2, S. 231–269
- [74] CIARLET, P.G.: *Mathematical Elasticity I: Three-dimensional Elasticity*. Amsterdam: North-Holland, 1988
- [75] CIRAK, F.: *Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken*, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Dissertation, 1998
- [76] CIRAK, F. ; ORTIZ, M. ; SCHRÖDER, P.: Subdivision surfaces: a new paradigm for thin shell finite-element analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47 (2000), S. 2039–2072
- [77] CLOUGH, R.W.: The finite element in plane stress analysis. In: *Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation*. Pittsburgh, Pa. : ASCE, 1960
- [78] CRISFIELD, M.A.: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Bd. 1 Essentials. Chichester : John Wiley & Sons, 1991
- [79] CRISFIELD, M.A.: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Bd. 2 Advanced topics. Chichester : John Wiley & Sons, 1997
- [80] DASSAULT SYSTEMS. *CATIA*. URL: <http://www.catia.com>
- [81] DE BOER, R.: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Berlin : Springer-Verlag, 1982
- [82] DELORENZI, H.G.: On the release rate and J-integral for 3-d crack configurations. In: *International Journal of Fracture* 19 (1982), S. 183–193
- [83] DELORENZI, H.G.: Energy release rate calculations by the finite element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 21 (1985), S. 129–143
- [84] DEMS, K. ; HAFTKA, R.T.: Two approaches to sensitivity analysis for shape variation of structures. In: *Mech. Structures Mach.* 16 (1989), Nr. 4, S. 501–522
- [85] DEMS, K. ; MRÓZ, Z.: Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis – I, Variation of material parameters within fixed domain. In: *International Journal of Solids & Structures* 19 (1983), S. 677–692

- [86] DEMS, K. ; MRÓZ, Z.: Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis – II, Structural shape variation. In: *International Journal of Solids & Structures* 20 (1984), S. 527–552
- [87] DEMS, K. ; MRÓZ, Z.: Variational approach to first- and second-order sensitivity analysis of elastic structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21 (1985), S. 637–661
- [88] DITLEVSEN, O. ; MADSEN, H.D.: *Structural Reliability Methods*. Chichester : John Wiley & Sons, 1996
- [89] DONÉA, J ; FASOLI-STELLA, P ; GUILIANI, S.: Lagrangian and Eulerian finite element techniques for transient fluid-structure interaction problems, Trans. SMiRT-4, August 1977. – San Francisco
- [90] DUYSINX, P. ; FLEURY, C.: Optimization Software: View from Europe. In: [146], S. 807–849
- [91] ELECTRONIC DATA SYSTEMS (EDS). *I-DEAS*. URL: <http://www.eds.com>
- [92] ELECTRONIC DATA SYSTEMS (EDS). *Solid Edge*. URL: <http://www.solid-edge.com>
- [93] EPHESER, H.: *Vorlesung über Variationsrechnung*. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 1993 (Studia Mathematica, Skript 1)
- [94] FALK, A.: *Adaptive Verfahren für die Formoptimierung flächiger Strukturen unter Berücksichtigung der CAD-FE-Kopplung*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Dissertation, 1995
- [95] FALK, A. ; BARTHOLD, F.-J.: Ein hierarchisches Verfahren für die Formoptimierung. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 75 (1995), S. 589–590
- [96] FALK, A. ; BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: Hierarchical modelling in shape optimization. In: OLHOFF, N. (Hrsg.) ; ROZVANY, G.I.N. (Hrsg.): *Proceedings of the First World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Oxford : Pergamon, 1995, S. 371–376
- [97] FALK, A. ; BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: A hierarchical design concept for shape optimization based on the interaction of CAGD and FEM. In: *Structural Optimization* 18 (1999), Nr. 1, S. 12–23
- [98] FANCELLO, E.A. ; TAROCO, E.O. ; FEIJOO, R.A.: Shape sensitivity analysis in fracture mechanics. In: *Structural Optimization 93, Optimal Design of Structural Systems* Bd. 2, 1993. – University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, S. 239–248
- [99] FARIN, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. 3. Auflage. London : Academic Press, 1993
- [100] FIRUZIAAN, M.: *Anmerkungen zur Sensitivitätsanalyse in der Schädigungsmechanik*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Diplomarbeit, 1998

- [101] FLEURY, C. ; BRAIBANT, V.: Structural optimization – a new dual method using mixed variables. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 23 (1986), S. 409–428
- [102] FUNG, Y.C.: *Foundation of Solid Mechanics*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1965
- [103] GALLAGHER, R.H.: *Optimum Structural Design – Theory and Applications*. Chichester: John Wiley & Sons, 1973
- [104] GAUSEMEIER, J. (Hrsg.): *CAD 94: Produktdatenmodellierung und Prozeßmodellierung als Grundlage neuer CAD-Systeme*. München : Carl Hanser Verlag, 1994
- [105] GEBHARDT, H. ; SCHWEIZERHOF, K.: Interpolation of curved shell geometries by low order finite elements – errors and modifications. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), S. 287–302
- [106] GEORGE, P.L.: *Automatic Mesh Generation: Application to Finite Element Methods*. Chichester : John Wiley & Sons, 1991
- [107] GREEN, A.E. ; ZERNA, W.: *Theoretical Elasticity*. Oxford : Clarendon Press, 1968
- [108] GRIERSON, D.E. (Hrsg.) ; HAJELA, P. (Hrsg.): *NATO ASI Series F. Bd. 149: Emergent Computing Methods in Engineering Design: Applications of Genetic Algorithms and Neural Networks*. Berlin : Springer-Verlag, 1996
- [109] GROSS, D.: *Bruchmechanik*. Berlin : Springer-Verlag, 1996
- [110] GRUTTMANN, F.: *Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Habilitation, 1996
- [111] GURTIN, M.E.: *An Introduction to Continuum Mechanics*. New York : Academic Press, 1981
- [112] HABER, R.B.: A mixed Eulerian-Lagrangian displacement model for large-deformation analysis in solid mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 43 (1984), S. 277–292
- [113] HABER, R.B.: Application of the Eulerian-Lagrangian kinematic description to structural shape optimization. In: MOTA SOARES, C.A. (Hrsg.): *Computer Aided Optimal Design – Structural and Mechanical Systems* Proceedings of NATO/NASA/NSF/USAF Advanced Study Institute, (Tróia, Portugal, June 29 – July 11, 1986), Center of Mechanics and Materials of the Technical University of Lisbon, 1986, S. 297–306
- [114] HABER, R.B.: A new variational approach to structural shape design sensitivity analysis. In: MOTA SOARES, C.A. (Hrsg.): *Computer Aided Optimal Design* Bd. 27. New York : Springer-Verlag, 1987, S. 573–587
- [115] HABER, R.B. ; HARIANDJA, B.H.: An Eulerian-Lagrangian finite element approach to large-deformation frictional contact. In: *Computers and Structures* 20 (1985), S. 193–201

- [116] HABER, R.B. ; KOH, H.M.: Explicit expressions for energy release rates using virtual crack extensions. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21 (1985), S. 301–315
- [117] HADAMARD, J.: *Mémoire sur le problèmes d'analyse relatif à l'équilibre de plaques élastiques encastrées*. Paris : CNRS, 1968, 1908 (Mémoires des savants étrangers), S. 515–630
- [118] HAFTKA, R.T. ; ADELMAN, H.M.: Recent developments in structural sensitivity analysis. In: *Structural Optimization* 1 (1989), Nr. 3, S. 137–151
- [119] HAFTKA, R.T. ; GRANDHI, R.V.: Structural shape optimization - a survey. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 57 (1986), S. 91–106
- [120] HAFTKA, R.T. ; GÜRDAL, Z.: *Elements of Structural Optimization*. 3. Auflage. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1992
- [121] HAFTKA, R.T. ; MRÓZ, Z.: First- and second-order sensitivity analysis of linear and non-linear structures. In: *AIAA Journal* 24 (1986), S. 1187–1192
- [122] HAN, S.P.: A globally convergent method for nonlinear programming. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 22 (1977), S. 297–309
- [123] HASLINGER, J. ; NEITTAANMÄKI, P.: *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Applications*. 1. Auflage. Chichester : John Wiley & Sons, 1988
- [124] HASLINGER, J. ; NEITTAANMÄKI, P.: *Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design*. 2. Auflage. Chichester : John Wiley & Sons, 1996
- [125] HAUG, E.J. ; ARORA, J.S.: *Applied Optimal Design*. New York : John Wiley & Sons, 1979
- [126] HAUG, E.J. (Hrsg.) ; CÉA, J. (Hrsg.): *Optimization of Distributed Parameter Structures*. Alphen aan den Rijn, The Netherlands : Sijthoff & Noordhoff, 1981
- [127] HAUG, E.J. ; CHOI, K.K.: Material derivative method for shape design sensitivity analysis. In: [50], S. 29–60
- [128] HAUG, E.J. ; CHOI, K.K. ; KOMKOV, V.: *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Orlando : Academic Press, 1986
- [129] HAUG, E.J. ; ROUSSELET, B.: Design sensitivity analysis in structural mechanics. I Static response variations. In: *Structural Mechanics* 8 (1980), S. 17–41
- [130] HAUG, E.J. ; ROUSSELET, B.: Design sensitivity analysis in structural mechanics. II Eigenvalue variation. In: *Structural Mechanics* 8 (1980), S. 161–186
- [131] HAUPTMANN, R. ; SCHWEIZERHOF, K.: A systematic development of 'solid-shell' element formulation for linear and nonlinear analysis employing only displacement degree of freedom. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1998)

- [132] HELLEN, T.K.: On the method of virtual crack extension. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 9 (1975), S. 187–207
- [133] HELLER, M.: *Anwendung informationstechnischer Methoden zur computergestützten statischen Berechnung ebener Flächentragwerke*, Institut für Bauinformatik, Universität Hannover, Dissertation, 1994
- [134] HIBBITT, KARLSSON & SORESENSEN, INC. *ABAQUS*. URL: <http://www.hks.com>
- [135] HÖRNLEIN, H.R.E.H.: Take-off in optimal structural design. In: [174], S. 901–919
- [136] HOSCHEK, J. ; LASSER, D.: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Stuttgart : B.G. Teubner, 1992
- [137] HSIEH, C.C. ; ARORA, J.S.: Design sensitivity analysis and optimization of dynamic response. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 43 (1984), S. 195–219
- [138] HSIEH, C.C. ; ARORA, J.S.: Structural design sensitivity analysis with general boundary conditions: static problem. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20 (1984), S. 1661–1670
- [139] HUGHES, T.J.R.: *The Finite Element Method*. London : Prentice-Hall, 1987
- [140] HUGHES, T.J.R. ; LIU, W.K. ; ZIMMERMANN, T.Z.: Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 29 (1981), S. 329–349
- [141] HUGHES, T.J.R. ; PISTER, K.S.: Consistent linearization in mechanics of solids and structures. In: *Computers and Structures* 8 (1978), S. 391–397
- [142] IMAM, M.H.: Three-dimensional shape optimization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 18 (1982), S. 661–673
- [143] JANOCHA, A.T.: Die Karten auf den Tisch: 3D-Geometriemodellierer im Vergleich. In: *CAD-CAM-Report* (1998), Nr. 6, S. 38–46
- [144] JOHNSON, E.H.: Tools for Structural Optimization. In: [146], S. 851–863
- [145] KACHANOV, L.M.: *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Dordrecht : Martinus Nijhoff, 1986
- [146] KAMAT, M.P. (Hrsg.): *Structural Optimization: Status and Promise*. Washington, DC: AIAA, 1993 (Progress in Astronautics and Aeronautics 150)
- [147] KHOT, N.S. ; ABHYANKAR, N.S.: Integrated optimum structural and control design. In: [146], S. 743–767
- [148] KIMMICH, S.: *Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen*, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Dissertation, 1990
- [149] KIRSCH, U.: *Structural Optimization - Fundamentals and Applications*. Berlin : Springer-Verlag, 1993

- [150] KLEIBER, M. ; ANTÚNEZ, H. ; HIEN, T.D ; KOWALCZYK, P.: *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics: Theory and Finite Element Computations*. Chichester : John Wiley & Sons, 1997
- [151] KRAJČINOVIC, D.: *Damage Mechanics*. Amsterdam : North-Holland, 1996
- [152] KRAWIETZ, A.: *Materialtheorie. Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens*. Berlin : Springer-Verlag, 1986
- [153] LADEVÈZE, P. (Hrsg.) ; ODEN, J.T. (Hrsg.): *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*. London : Elsevier Applied Science, 1998 . – ISBN 0-08-043327-8
- [154] LAMBERTZ, K. H.: *Traglastberechnungen von Faltwerken mit elastoplastischen Deformationen*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Dissertation, 1989
- [155] LAUGWITZ, D.: *Differentialgeometrie*. 2. Auflage. Stuttgart : B.G. Teubner, 1968
- [156] LAWO, M.: *Optimierung im konstruktiven Ingenieurbau*. 1. Auflage. Braunschweig : Fr. Vieweg Verlag, 1987
- [157] LEE, T.W. ; GROSSE, I.R.: Energy release rate by a shape design sensitivity approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 44 (1993), S. 807–819
- [158] LEMAITRE, J.: *A Course on Damage Mechanics*. Berlin : Springer-Verlag, 1996
- [159] LIN, S.C. ; ABEL, J.F.: Variational approach for a new direct-integration form of the virtual crack extension method. In: *International Journal of Fracture* 38 (1988), S. 217–235
- [160] LUBLINER, J.: *Plasticity Theory*. New York : Macmillan Publishing Company, 1990
- [161] LUI, W. ; YAN, N.: A posteriori error estimates for some model boundary control problems. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 120 (2000), Nr. 1-2, S. 159–173
- [162] MALVERN, L. E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1969
- [163] MALYSHKIN, V. (Hrsg.): *Parallel Computing Technologies*. Berlin : Springer-Verlag, 1999 (Lecture notes in computer science)
- [164] MARSDEN, J.E. ; HUGHES, T.J.R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1983
- [165] MAUTE, K.: *Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken*, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Dissertation, 1998
- [166] MAXWELL, J.C.: Reciprocal figures, frames and diagrams of forces. In: *Scientific Papers II; Cambridge University Press* 2 (1869), S. 175–177

- [167] MESECKE, S.: *Zur Formoptimierung von linear elastischen-viskoplastischen Materialien*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Studienarbeit, 1997
- [168] MESECKE, S.: *Anmerkungen zur Energiefreisetzungsrate: Berechnung und Optimierung*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Diplomarbeit, 1998
- [169] MEYER, L.: *Formoptimierung in der Strukturdynamik*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Dissertation, 1997
- [170] MEYER, L. ; BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: Remarks on shape optimization of dynamically loaded structures. In: GUTKOWSKI, W. (Hrsg.) ; MRÓZ, Z. (Hrsg.): *Proceedings of the Second World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization* Bd. 2. Warschau : Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Science, 1997, S. 607–612
- [171] MICHELL, A.G.M.: The limits of economy of material in frame structures. In: *Philosophical Magazine and Journal of Science* 8 (1904), S. 589–595
- [172] MIEHE, C.: *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierung und numerische Implementation*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Habilitation, 1993
- [173] MLEJNEK, H.-P. (Hrsg.) ; SCHITTKOWSKI, K. (Hrsg.): *Computer Aided Topology Optimization*. 2000 . – Unterlagen des Seminars im Schloß Thurnau
- [174] MOTA SOARES, C.A. (Hrsg.): *NATO ASI Series F. Bd. 27: Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems*. Berlin : Springer-Verlag, 1987
- [175] MOTA SOARES, C.A. (Hrsg.) ; MOTA SOARES, C.M. (Hrsg.) ; FREITAS, M.J.M. (Hrsg.): *NATO Science Series, Serie E: Applied Science*. Bd. 361: *Mechanics of Composite Materials and Structures*. Kluwer Academic Publishers, 1999
- [176] MOTA SOARES, C.A. (Hrsg.) ; MOTA SOARES, C.M. (Hrsg.) ; FREITAS, M.J.M. (Hrsg.): *Mechanics of Composite Materials and Structures*. 1999 . – NATO-ASI on Mechanics of Composite Materials and Structures
- [177] MOTA SOARES, C.A. (Hrsg.) ; SCHITTKOWSKI, K. (Hrsg.) ; HÖRNLEIN, H. (Hrsg.): *Computergestützte Strukturoptimierung*. 1993 . – Unterlagen eines Seminars im COMETT-Programm der Europäischen Gemeinschaft
- [178] MRÓZ, Z.: Variational approach to sensitivity analysis and optimal design. In: [50], S. 79–110
- [179] MSC.SOFTWARE CORPORATION. *MSC.Nastran*. URL: <http://www.mssoftware.com>
- [180] NELSON, T.: *Finite-Element-Formulierung des Neo-Hooke-Materials in der Referenz- und Momentankonfiguration sowie im Parameterraum*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Studienarbeit, 1998

- [181] NOLL, W.: A new mathematical theory of simple materials. In: *Archives of Rational Mechanics* 48 (1972), Nr. 1, S. 1–50
- [182] OGDEN, R.W.: *Non-Linear Elastic Deformations*. Chichester : Ellis Horwood und John Wiley, 1984
- [183] PARAMETRICS TECHNOLOGY CORPORATION (PTC). *Pro/ENGINEER*. URL: <http://www.ptc.com>
- [184] PARKS, D.M.: A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. In: *International Journal of Fracture* 10 (1974), S. 487–502
- [185] PETRYK, H. ; MRÓZ, Z.: Time derivatives of integrals and functionals defined on varying volume and surface domains. In: *Archives of Rational Mechanics* 38 (1986), Nr. 5–6, S. 697–724
- [186] PIRONNEAU, O.: *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*. New York : Springer-Verlag, 1984 (Springer Series in Computational Physics)
- [187] PLANK, L.: *Netzadaption und Mehrgitterverfahren für die numerische Behandlung von Faltwerken*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Dissertation, 1990
- [188] POWELL, M. J. D.: A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations. In: WATSON, G. A. (Hrsg.): *Numerical Analysis; Proceedings of the Biennial Conference, Held at Dundee, June 1977; Lecture Notes in Mathematics; Vol. 630*. Berlin : Springer-Verlag, 1978, S. 144–157
- [189] RANK, E. ; BRÖKER, H. ; DÜSTER, A. ; RÜCKER, M.: Neue Modellierungskonzepte für FE-Berechnungen mit Ansätzen höherer Ordnung. In: *Finite Elemente in der Baupraxis – Modellierung, Berechnung und Konstruktion*. Berlin : Ernst & Sohn, 1998
- [190] RECHENBERG, I.: Evolution strategy: nature’s way of optimization. In: BERGMANN, H. W. (Hrsg.): *Optimization: Methods and Application, Possibilities and Limitations*. Berlin : Springer-Verlag, 1989, S. 106–126
- [191] ROUSSELET, B.: Implementation of some methods of shape optimal design. In: [126], S. 1195–1220
- [192] ROUSSELET, B. ; HAUG, E.J.: Design sensitivity analysis in structural mechanics. III Effects of shape variation. In: *Structural Mechanics* 10 (1983), S. 273–310
- [193] RUST, W.: *Mehrgitterverfahren und Netzadaption für lineare und nichtlineare statische FE-Berechnungen von Flächentragwerken*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Dissertation, 1991
- [194] SAURIN, V.V. ; BANICHUK, N.V.: Adaptive methods for structural analysis and structural optimization of composites / Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover. 1997. – Interner Bericht

- [195] SCHITTKOWSKI, K.: On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented Lagrangian line search function. In: *Math. Operationsforschung und Statistik, ser. Optimization* 14,2 (1983), S. 197–216
- [196] SCHITTKOWSKI, K. ; ZILLOBER, C. ; ZOTEMANTEL, R.: Numerical comparison of nonlinear programming algorithms for structural optimization. In: *Structural Optimization* 7 (1994), S. 1–19
- [197] SCHMIDT, M. ; BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: Theorie und Algorithmen adaptiver FE-Methoden für elastoplastische Deformationen / Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover. 1997 (97/2). – IBNM-Bericht. – 22 S. Zwischenbericht 1996/97 für das gleichnamige Projekt im Rahmen des DFG-Paketantrags 'Adaptive Finite Elemente Verfahren in der Angewandten Mechanik'
- [198] SCHUËLLER, G.I. ; GASSER, M. ; HARTL, J. ; LENER, G.: Reliability based optimization - a tool for practical design. In: BELEGUNDU, A.D. (Hrsg.) ; MISTREE, F. (Hrsg.): *Optimization in Industry*, ASME, 1997, S. 169–176
- [199] SCHWEFEL, H.-P.: *Numerische Optimierung von Computermodellen mittels der Evolutionsstrategie*. Stuttgart, Basel : Birkhäuser Verlag, 1977
- [200] SHEU, C.Y. ; PRAGER, W.: Recent developments in optimal structural design. In: *Applied Mechanics Reviews* 21 (1968), Nr. 10, S. 985–992
- [201] SIMO, J.C.: On a fully three dimensional finite-strain visco-elastic damage model: formulation and computational aspects. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 60 (1989), S. 153–173
- [202] SIMO, J.C. ; HUGHES, T.J.R.: *Computational Inelasticity*. New York : Springer-Verlag, 1998
- [203] SIMO, J.C. ; TAYLOR, R.L.: Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms. In: *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 85 (1991), S. 273–310
- [204] SOKOŁOWSKI, J.: Sensitivity analysis for a class of variational inequalities. In: [126], S. 1600–1609
- [205] SOKOŁOWSKI, J. ; ZOLÉSIO, J.P.: *Introduction to Shape Optimization – Shape Sensitivity Analysis*. Berlin : Springer-Verlag, 1992
- [206] STADLER, W. (Hrsg.): *Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences*. New York : Plenum Press, 1988
- [207] STEIN, E.: Tensorrechnung für Ingenieure / Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover. 1986. – Vorlesungsunterlagen
- [208] STEIN, E. ; BARTHOLD, F.-J.: Elastizitätstheorie. In: MEHLHORN, G. (Hrsg.): *Der Ingenieurbau, Grundwissen: Werkstoffe, Elastizitätstheorie*. Ernst & Sohn, Berlin, 1996. – ISBN 3-433-01570-8, S. 165–428

- [209] STEIN, E. ; BARTHOLD, F.-J.: Optimization of thin-walled structures. In: [175], S. 361–368
- [210] STEIN, E. ; BARTHOLD, F.-J. ; OHNIMUS, S. ; SCHMIDT, M.: Adaptive finite elements in elastoplasticity with mechanical error indicators and Neumann-type estimators. In: [153], S. 81–99. – ISBN 0–08–043327–8
- [211] STEIN, E. ; BARTHOLD, F.-J. ; OHNIMUS, S. ; SCHMIDT, M.: Adaptive finite elements in elastoplasticity with mechanical error indicators and Neumann-type estimators. In: IDELSOHN, S. (Hrsg.) ; OÑATE, E. (Hrsg.) ; DVORKIN, E. (Hrsg.): *Computational Mechanics – New Trends and Applications*. Barcelona : CIMNE, 1998
- [212] STEIN, E. ; BECKER, A. ; BARTHOLD, F.-J.: Structural optimization of beam structures including imperfections. In: PANDE, G.N. (Hrsg.) ; MIDDLETON, J. (Hrsg.): *Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications (NUMETA 90)*. London : Elsevier Applied Science, 1990, S. 454–463
- [213] STEIN, E. ; MAHNKEN, R. ; BARTHOLD, F.-J.: Optimierungsverfahren in der Strukturmechanik, insbesondere in der Strukturoptimierung. In: NATKE, H.G. (Hrsg.): *Proc. of the International Workshop of Inverse Problems, October 8-9 1992, Hannover*, Bericht CRI K-1/93, Mitteilungen des Curt-Risch-Instituts für Dynamik, Schall- und Meßtechnik der Universität Hannover, 1993
- [214] STEIN, E. ; TESSMER, J.: Theory and computation of multilayer composites. In: [175], S. 379–388
- [215] STEINMANN, P.: *Modellierung und Numerik duktiler kristalliner Werkstoffe*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Habilitation, 1997
- [216] STÖCKEL, P. (Hrsg.): *Variationsrechnung*. Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1976
- [217] SVANBERG, K.: The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987), S. 359–373
- [218] SZABÓ, I.: *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*. Basel, Boston, Stuttgart : Birkhäuser, 1987
- [219] TORTORELLI, D.A. ; WANG, Z.: A systematic approach to shape sensitivity analysis. In: *International Journal of Solids & Structures* 30 (1993), Nr. 9, S. 1181–1212
- [220] TRUESDELL, C. ; NOLL, W.: The Nonlinear Field Theories of Mechanics. In: FLÜGGE, S. (Hrsg.): *Handbuch der Physik III/3*. Berlin : Springer-Verlag, 1965
- [221] TURNER, M.J. ; CLOUGH, R.W. ; MARTIN, H.C. ; TOPP, L.J.: Stiffness and deflection analysis of complex structures. In: *J. Aero. Sci.* 23 (1956), S. 805–823
- [222] WAGNER, W.: *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Habilitation, 1991

- [223] WANG, C.-C. ; TRUESDELL, C.: *Introduction to Rational Elasticity*. Leyden : Noordhoff, 1973
- [224] WASIUTYNSKI, Z. ; BRANDT, A.: The present state of knowledge in the field of optimum design of structures. In: *Applied Mechanics Reviews* 16 (1963), Nr. 5, S. 341–350
- [225] WIECHMANN, K.: *Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen mit elastoplastischen Deformationen*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Dissertation, 2000
- [226] WIECHMANN, K. ; BARTHOLD, F.-J.: Remarks on variational design sensitivity analysis of structures with large elastic-plastic deformations. In: *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, 1998. – Paper No. AIAA-98-4752, S. 349–358
- [227] WIECHMANN, K. ; BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: Optimization of elasto-plastic structures using the finite element method. In: GUTKOWSKI, W. (Hrsg.) ; MRÓZ, Z. (Hrsg.): *Proceedings of the Second World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization* Bd. 2. Warschau : Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Science, 1997, S. 1013–1018
- [228] WIECHMANN, K. ; BARTHOLD, F.-J. ; STEIN, E.: Shape optimization of shakedown analysis problems. In: WEICHERT, D. (Hrsg.) ; MAIER, G. (Hrsg.): *Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads: Theory and engineering applications*, Kluwer Academic Publisher, 2000 (Solid Mechanics and its Applications 83), S. 49–68
- [229] WRIGGERS, P.: *Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Habilitation, 1988
- [230] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin : Springer-Verlag, 2001
- [231] YANG, R.J. ; CHOI, K.K.: Accuracy of finite element based shape design sensitivity analysis. In: *Structural Mechanics* 13 (1985), Nr. 2, S. 223–239
- [232] ZIENKIEWICZ, O.C. ; TAYLOR, R.L.: *The Finite Element Method. Volume 1: Basic Formulations and Linear Problems*. 4. Auflage. London : McGraw-Hill, 1989
- [233] ZIENKIEWICZ, O.C. ; TAYLOR, T.L.: *The Finite Element Method. Volume 2: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity*. 4. Auflage. London : McGraw-Hill, 1991
- [234] ZOLÉSIO, J.P.: *Identification de domaines par déformations*, University of Nice, Thèse d'état, 1979
- [235] ZOLÉSIO, J.P.: Domain variational formulation for free boundary problems. In: [126], S. 1152–1194
- [236] ZOLÉSIO, J.P.: The material derivative (or speed) method for shape optimization. In: [126], S. 1049–1151

Braunschweiger Schriften zur Mechanik — BSM

Bisher erschienene Berichte in dieser Reihe

- 1–1990 Plonski, T.:
Dynamische Analyse von schnellrotierenden Kreiszyinderschalen
- 2–1991 Wegener, K.:
Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Über-
spannungstyp
- 3–1991 Gröhlich, H.:
Finite-Element-Formulierung für vereinheitlichte inelastische Werkstoffmodelle oh-
ne explizite Fließflächenformulierung
- 4–1992 Hesselbarth, H.:
Simulation von Versetzungsstrukturbildung, Rekristallisation und Kriechschädi-
gung mit dem Prinzip der zellulären Automaten
- 5–1992 Schlums, H.:
Ein stochastisches Werkstoffmodell zur Beschreibung von Kriechen und zyklischem
Verhalten metallischer Werkstoffe
- 6–1992 Kublik, F.:
Vergleich zweier Werkstoffmodelle bei ein- und mehrachsigen Versuchsführungen
im Hochtemperaturbereich
- 7–1992 Bechtloff, J.:
Interpolationsverfahren höheren Grades für Robotersteuerungen
- 8–1993 Müller, M.:
Dreidimensionale elastodynamische Analyse von Tanks mit fluidbenetzten Einbau-
ten
- 9–1993 Senker, P.:
Stabilitätsanalyse elastischer Rotorsysteme
- 10–1993 Cheng, W.:
Schallabstrahlung einer schwingenden Reissner/Mindlin Platte
- 11–1993 Wiebe, T.:
Wellenausbreitung in poroelastischen Medien: Untersuchung mit Randintegralgleichungen
- 12–1993 Hahne, M.:
Beschreibung der plastischen Längsdehnung bei Torsion mit einem makroskopi-
schen Stoffgesetz
- 13–1993 Heisig, G.:
Zum statischen und dynamischen Verhalten von Tiefbohrsträngen in räumlich ge-
krümmten Bohrlöchern
- 14–1994 Araújo, F. C.:
Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler Probleme der Elastodynamik mit ei-
ner gekoppelten BE/FE-Methode

- 15–1994 Kristen, M.:
Untersuchung zur elektrischen Ansteuerung von Formgedächtnis-Antrieben in der Handhabungstechnik
- 16–1994 Latz, K.:
Dynamische Interaktion von Flüssigkeitsbehältern
- 17–1994 Jäger, M.:
Entwicklung eines effizienten Randelementverfahrens für bewegte Schallquellen
- 18–1994 August, M.:
Schwingungen und Stabilität eines elastischen Rades, das auf einer nachgiebigen Schiene rollt
- 19–1994 Erbe, M.:
Zur Simulation des Rißwachstums in dreidimensionalen, elastisch-plastischen Strukturen mit der Methode der Finiten Elemente
- 20–1995 Gerdes, R.:
Ein stochastisches Werkstoffmodell für das inelastische Materialverhalten metallischer Werkstoffe im Hoch- und Tieftemperaturbereich
- 21–1995 Tröndle, G.:
Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D Randelementmethode
- 22–1996 Degenhardt, R.:
Nichtlineare dynamische Bauwerksprobleme und Interaktion mit dem Baugrund
- 23–1996 Feise, H.J.:
Modellierung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern
- 24–1996 Haubrok, D.:
Reibungsfreie Kontaktprobleme der 2D-Elastostatik und -dynamik als Optimierungsaufgabe mit REM
- 25–1996 Lehmann, L.:
Numerische Simulation der Spannungs- und Geschwindigkeitsfelder in Silos mit Einbauten
- 26–1996 Klein, R.:
Dynamische Interaktion von dünnwandigen Tragwerken und Boden mit Abschirmschlitz
- 27–1996 Kopp, T.:
Simulation großer inelastischer Deformationen bei Torsionsversuchen
- 28–1997 Harder, J.:
Simulation lokaler Fließvorgänge in Polykristallen
- 29–1997 Lewerenz, M.:
Zur numerischen Behandlung von Werkstoffmodellen für zeitabhängig plastisches Materialverhalten
- 30–1997 Meywerk, M.:
Stabilität und Verschleiß bei auf Schienen laufenden Eisenbahnraden

- 31–1997 Plagge, F.:
Nichtlineares, inelastisches Verhalten von Spiralseilen
- 32–1997 Neubert, M.:
Richtungsregelung beim Tiefbohren
- 33–1998 Sangi, D.:
Die Versetzungsstrukturbildung in Metallen
- 34–1998 Thielecke, F.:
Parameteridentifizierung von Simulationsmodellen für das viskoplastische Verhalten von Metallen - Theorie, Numerik, Anwendung
- 35–1998 Vietgen, J.:
Numerische Simulation duktilen Rißwachstums mit Berücksichtigung von Schädigung
- 36–1998 Lär, B.:
Einfluß transienter Anregungen auf die Zylinderkopf-Akustik
- 37–1998 Scheld, C.:
Auswirkungen dynamischer Interaktionen auf das Schwingungsverhalten von Tanks
- 38–1999 Baaran, J.:
Schallfeldanalyse bei sich bewegenden schallerzeugenden Körpern
- 39–1999 Daros, C.H.:
Wave propagation in unbounded piezoelectric media of transversely isotropic symmetry
- 40–2000 Wagner, N.:
Untersuchung der Boden-Fahrzeug-Interaktion mit gekoppelten Rand- und Finite-Element-Methoden
- 41–2001 Langer, S.:
Schalltransmission durch Isolierverglasung
- 42–2001 Schacht, Th.:
Orientierungsabhängige Rissbildung in duktilen Metallen
- 43–2002 Ackermann, L.:
Simulation der Schalltransmission durch Wände