Testelemente in Fuchsschen Gruppen

Dirk Hennig

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

Dem Fachbereich Mathematik der Universität Dortmund
vorgelegt im September 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Idee zu dieser Arbeit entstand im April 2000 bei der AMS-Tagung in New York in einer Diskussion mit Edward C. Turner und John C. O'Neill nach einem Vortrag von Gerhard Rosenberger über Testelemente. Turner fragte nach der Existenz von Testelementen in jeder Fuchsschen Gruppe. Diese Frage kann durch diese Arbeit eindeutig mit ja beantwortet werden.

Allgemein, in einer Gruppe G, heißt $w \in G$ ein Testelement, wenn jeder Endomorphismus $\phi : G \to G$ mit $\phi(w) = w$ automatisch immer ein Automorphismus ist. Da w ein Wort in endlich vielen Erzeugenden ist, ist die Definition nur für endlich erzeugte Gruppen sinnvoll.

Die Namensgebung "Testelement" geht auf E. Turner zurück. Allerdings gab es schon lange Ergebnisse und Beispiele zu Testelementen, natürlich mit anderer Motivation.
Beispielsweise sind nach einem Satz von Nielsen-Zieschang (vgl. H. Zieschang, E. Vogt, H.D. Coldeway [**27**]) in der freien Gruppe F_n vom Rang $n \geq 2$ mit der Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ die Worte $[a_1, a_2] \ldots [a_{n-1}, a_n]$, falls n gerade ist, und $a_1^2 \ldots a_n^2$ Testelemente.
Dies ist die algebraische Version für den Satz von Nielsen, daß jede Homotopieklasse für die Fundamentalgruppe einer kompakten, geschlossenen Fläche eine Isotopie enthält.

Weitere Beispiele in F_n ergeben sich aus ähnlichen topologischen Fragen über CW-Komplexe, so wird etwa in [**5**] $a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}$ mit $ggT(k_1, \ldots, k_n) \geq 2$ als Testelement nachgewiesen, oder aus kombinatorischen Entscheidungsprozessen über die Lösbarkeit von Gleichungen in F_n (siehe L. Comerford [**2**] oder E. Rips [**19**]).

Die Eigenschaften all dieser Beispiele führten E. Turner zur Bezeichnung "Testelemente", wie oben definiert.
Turner versuchte eine allgemeine Theorie der Testelemente zu entwickeln. Im Falle der freien Gruppen F_n konnte er ein strukturelles Kriterium für Testelemente angeben durch das **"Retrakt-Theorem"**:

Wenn $\phi : F_n \to F_n$ ein Endomorphismus der endlich erzeugten freien Gruppe F_n ist, dann ist $\phi^\infty(F_n)$ ein Retrakt von F_n. $\phi^\infty(F_n)$ ist genau dann ein echter Retrakt, wenn ϕ kein Automorphismus ist. Wenn ϕ ein Monomorphismus ist, dann ist $\phi^\infty(F_n)$ ein freier Faktor.

Testwörter in F_n sind somit Wörter, die in keinem echten Retrakt liegen (siehe dazu E. Turner [**25**]).
Wir sagen für eine Gruppe G gilt das Retrakt-Theorem, wenn ein $w \in G$ genau dann Testelement von G ist, wenn es in keinem echten Retrakt liegt.
In einer späteren Arbeit haben J. O'Neill und E. Turner in [**13**] dieses Retrakt-Theorem für spezielle torsionsfreie hyperbolische Gruppen, Flächengruppen und Fuchssche Gruppen erweitert.
Die Gültigkeit des Retrakt-Theorem für eine Gruppe G impliziert aber noch nicht die wirkliche Existenz und Beschreibung von Testelementen in G.

Für die Fundamentalgruppen orientierbarer, geschlossener Flächen N_{2g} vom Geschlecht $g \geq 2$ zeigten J. Konieczny, G. Rosenberger und J. Wolny in [**8**] als Konsequenz allgemeiner Ergebnisse, daß etwa $a_1^k \dots a_{2n}^k$ mit $k \geq 2$ ein Testelement in N_{2g} ist.

Hier zeigen wir konstruktiv durch Angabe von Beispielen die Existenz von Testelementen für beliebige, nicht-elementare Fuchssche Gruppen; und beantworten damit die Frage von E. Turner und J. O'Neill positiv.
Dies zeigt wegen des analogen Retrakt-Theorems für jede nicht-elementare Fuchssche Gruppe (siehe auch [**13**]) die Existenz eines echten Retrakts, was etwa für Dreiecksgruppen auf den ersten Blick überraschend ist.

Weitere existenzielle Untersuchungen über Testelemente wurden auch in anderen Klassen von Gruppen gemacht, etwa in direkten Produkten von Gruppen (siehe etwa J. O'Neill und E. Turner in [**14**]), endlich erzeugten abelschen Gruppen (C. Rocca und E. Turner [**20**]) und freien Produkten von Gruppen (B. Fine, G. Rosenberger, D. Spellman und M. Stille in [**4**]).

Kapitel 1

Grundlagen und Definitionen

Definition 1.1
Sei G eine beliebige Gruppe. Dann heißt $w \in G$ **Testelement** *in G, falls jeder Endomorphismus $\phi : G \to G$ mit $\phi(w) = w$ bereits ein Automorphismus ist. Testelemente in freien Gruppen werden* **Testwörter** *genannt.*

1.1 Fuchssche Gruppen

In dieser Arbeit interessieren wir uns für algebraische Eigenschaften von Fuchsschen Gruppen, speziell für Testelemente in Fuchsschen Gruppen, und deshalb definieren wir eine Fuchssche Gruppe zunächst abstrakt.

Definition 1.2
Sei Γ **Fuchssche Gruppe** *erster Art, das heißt Γ ist nicht-elementar und hat endliches Kovolumen $\mu(\mathcal{H}/\Gamma)$, mit Signatur $(g; m_1, \ldots, m_r; s)$, so ist eine Präsentierung gegeben durch*

$$\begin{aligned}\Gamma = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, \quad & x_1, \ldots, x_r, p_1, \ldots, p_s \mid \\ & x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = [a_1, b_1] \cdots \quad [a_g, b_g] x_1 \cdots x_r p_1 \cdots p_s = 1 \rangle \ ,\end{aligned}$$

dabei sind a_i, b_i hyperbolische, x_i elliptische und p_i parabolische Erzeugende, und für das Kovolumen $\mu(\mathcal{H}/\Gamma)$ gilt

$$\mu(\mathcal{H}/\Gamma) = 2\pi[(2g-2) + \sum_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{m_i}) + s] > 0 \, .$$

Wir halten fest, daß jede endlich erzeugte nicht-elementare Fuchssche Gruppe algebraisch isomorph zu einer Fuchsschen Gruppe erster Art ist. Eine elementare Fuchssche Gruppe ist zyklisch oder isomorph zur unendlichen Diedergruppe, also für unsere Fragestellung uninteressant.

Wir betrachten im folgenden nur endlich erzeugte nicht-elementare Fuchssche

Gruppen und können uns für unsere Fragestellung auf die erster Art beschränken. Automatisch sehen wir dann im folgenden bei einer endlich erzeugten nichtelementaren Fuchsschen Gruppe Γ, daß $\mu(\mathcal{H}/\Gamma) > 0$ ist.

In einer Gruppe G bezeichnet $[a, b]$ den Kommutator $aba^{-1}b^{-1}$ von $a, b \in G$.
Γ heißt kokompakt, wenn $s = 0$ gilt.
Im Fall $r = 0$ und $s = 0$ haben wir die Präsentierung einer Fundamentalgruppe für eine orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht g, die wir abkürzend auch Flächengruppe nennen.
Ist $s \geq 1$, so ist Γ algebraisch ein freies Produkt zyklischer Gruppen, d.h. ist $s \geq 1$ und $2g + r + s \geq 2$, so können wir uns algebraisch für die Existenz eines Testelements auf den Fall $g = 0$ beschränken.

Bei konkreten Rechnungen ist es oft sehr hilfreich sich von der abstrakten Gruppe zu lösen und spezielle Darstellungen von Fuchsschen Gruppen zu betrachten.

Definition 1.3 *Es sei*

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1^{e_1} = \cdots = a_n^{e_n} = R^{m_1} = \cdots = R^{m_k} = 1 \rangle \,,$$
$$e_i \geq 2 \quad oder \quad e_i = 0 \quad 1 \leq i \leq n \,.$$

Eine Darstellung ρ von G in eine lineare Gruppe über einem Körper der Charakteristik 0 ist genau dann eine **wesentliche Darstellung***, wenn $\rho(a_i)$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ unendliche Ordnung für $e_i = 0$ und genau Ordnung e_i für $e_i \geq 2$ hat. Außerdem hat $\rho(R_j)$ für jedes $j = 1, \ldots, k$ die Ordnung m_j.*
Ist ρ zusätzlich noch injektiv, dann haben wir eine treue Darstellung.

Für das folgende Kapitel über zweielementig erzeugte Fuchssche Gruppen werden wir deshalb unsere abstrakten Gruppen mit Hilfe von wesentlichen Darstellungen in die Matrixgruppe $PSL(2, \mathbb{R})$ einbetten. Deshalb definieren wir im folgenden Fuchssche Gruppen auch als diskrete Untergruppen der speziellen linearen Gruppe

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

bzw. der projektiven speziellen linearen Gruppe $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm\, Id\}$, oder als ein Konjugat solch einer Gruppe in der $PSL(2, \mathbb{C})$.

Definition 1.4

Für $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$ sei, mit gewisser Ungenauigkeit, durch

$sp\ (T) = a + d$ die **Spur** *festgelegt.*

$T \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $T \neq Id$ heißt

- *elliptisch, falls* $|sp\ (T)| < 2$,
- *parabolisch, falls* $|sp\ (T)| = 2$,
- *hyperbolisch, falls* $|sp\ (T)| > 2$.

Bemerkung 1.5
Für $S, T \in PSL(2, \mathbb{R})$ *ist* $sp\ [S, T]$ *eindeutig festgelegt, unabhängig von der Vorzeichenwahl bei* $sp\ S$ *und* $sp\ T$.

Oft ist der Übergang von einer Matrix $T = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$ zu einer gebrochen linearen Transformation $t(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ für die geometrische Anschauung hilfreich. Die Komposition zweier Abbildungen entspricht dann dem Matrixprodukt zweier Elemente aus der $PSL(2, \mathbb{R})$.

Lemma 1.6
Seien $S, T \in PSL(2, \mathbb{R})$. S *und* T *kommutieren genau dann, wenn* S *und* T, *aufgefaßt als gebrochen lineare Transformationen, dieselbe Fixpunktmenge haben.* S *und* T *haben genau dann einen gemeinsamen Fixpunkt, wenn* $sp[S, T] = 2$ *ist.*

Lemma 1.7
Seien $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ *mit* $G = \langle A, B \rangle$, *dann gelten die Identitäten:*

a) $sp\ AB^{-1} = sp\ A \cdot sp\ B - sp\ AB$

b) $sp\ [A, B] = (sp\ A)^2 + (sp\ B)^2 + (sp\ AB)^2 - (sp\ A) \cdot (sp\ B) \cdot (sp\ AB) - 2$

Definition und Folgerung 1.8
Die Tschebyscheff-Polynome sind rekursiv definiert durch $S_0(x) = 0$, $S_1(x) = 1$ *und* $S_n(x) = x \cdot S_{n-1}(x) - S_{n-2}(x)$ *für* $n \geq 2$. *Für* $n < 0$ *gilt* $S_n(x) = -S_{-n}(x)$. *Dann gelten die weiteren Identitäten*

$$sp\ [A^n, B^m] - 2 = S_n^2(sp\ A) S_m^2(sp\ B)(sp\ [A, B] - 2) \text{ für } n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ und}$$

$$A^n = S_n(sp\ A) \cdot A - S_{n-1}(sp\ A) \cdot I \text{ für } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

1.2 Nielsentransformationen

Um ein Gruppenelement auf die Eignung zum Testelement zu untersuchen, betrachten wir die von unserem Endomorphismus erzeugte Untergruppe. Wenn wir also ein Testelment durch den Endomorphismus fixieren, darf dann die Bildgruppe keine echte Unterguppe sein.
Durch die im folgenden beschriebenen Nielsentransformationen können wir die Präsentierung einer Gruppe ändern ohne die abstrakten Eigenschaften der Gruppe zu beeinträchtigen. Das heißt, wenn ein Automorphismus vorliegt, können wir durch Nielsentransformationen die Bildgruppe in die Ausgangsgruppe überführen.

Definition 1.9
Sei G eine Gruppe und $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ mit $m \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge von G. Dann heißen folgende Transformationen auf X **elementare Nielsentransformationen** *:*

N 1 *Ersetze x_i durch x_i^{-1} in X für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

N 2 *Ersetze x_i durch $x_i x_j$ in X für $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$.*

N 3 *Streiche x_i in X, falls $x_i = 1$ für $1 \leq i \leq m$.*

Weiterhin gibt es eine **erweiterte elementare Nielsentransformation** *oder E-Transformation, wenn ein x_i endliche Ordnung p_i hat:*

N 4 *Ersetze x_i durch $x_i^{q_i}$ für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$, falls $ggT(p_i, q_i) = 1$ gilt.*

Bemerkungen 1.10

1) *Eine Nielsentransformation ist ein endliches Produkt von elementaren Nielsentransformationen und eine erweiterte Nielsentransformation ein endliches Produkt von E-Transformationen und elementaren Nielsentransformationen. Ein endliches Produkt von Transformationen vom Typ* **N 1** *und* **N 2** *heißt reguläre Nielsentransformation, falls auch* **N 3** *vorkommt singuläre Nielsentransformation. Seien X, Y endliche Systeme in einer Gruppe G, dann heißen X und Y Nielsenäquivalent, wenn es eine reguläre Nielsentransformation gibt, welche X in Y überführt. Wir schreiben dann kurz $X \overset{N}{\sim} Y$. Analog schreiben wir $X \overset{eN}{\sim} Y$, wenn X und Y erweitert Nielsenäquivalent sind.*

2) *Seien G eine Gruppe und X, Y Teilmengen von G. Entsteht Y durch eine Nielsentransformation auf X, so erzeugen X und Y dieselbe Untergruppe.*

Bemerkung 1.11
Betrachten wir Definition **1.9** *mit* $m = 2$*, so können wir eine reguläre Nielsentransformation für* $X = \{x, y\}$ *durch ein endliches Produkt von*

M 1 *ersetze* $\{x, y\}$ *durch* $\{x^{-1}, y\}$,

M 2 *ersetze* $\{x, y\}$ *durch* $\{xy, x^{-1}\}$ *und*

M 3 *ersetze* $\{x, y\}$ *durch* $\{y, x\}$

beschreiben.

Aus $\{x, y\} \overset{N}{\sim} \{u, v\}$ *folgt dann durch einfaches Nachrechnen, daß* $[x, y]$ *konjugiert ist zu* $[u, v]^{\pm 1}$ *(Schreibweise:* $[x, y] \sim [u, v]^{\pm 1}$*).*

1.3 Die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam

Für die Fuchsschen Gruppen vom algebraischen Rang ≥ 3, also für die Fuchsschen Gruppen, für die wir mindestens drei Elemente für die Erzeugung benötigen, ist es sehr hilfreich mit Präsentierungen als freie Produkte mit Amalgam zu arbeiten. Wir definieren deshalb im folgenden das freie Produkt mit Amalgam und beschreiben die modifizierte Art der Nielsentransformationen in freien Produkten mit Amalgam. Man kann das etwa bei R. Lyndon und P. Schupp in **[10]** nachlesen.

Definition 1.12
Es seien $G_1 = \langle X_1 \mid R_1 \rangle, \ldots, G_n = \langle X_n \mid R_n \rangle$ und $A = \langle Y \mid S \rangle$ Gruppen. $\psi_i : A \to G_i$ seien für $1 \leq i \leq n$ nicht surjektive, injektive Homomorphismen. Es seien $X = X_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} X_n$ und $R = R_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} R_n$.
Dann heißt $G = \langle X \dot{\cup} Y \mid R \cup \{\psi_i(y)y^{-1} \mid y \in Y, 1 \leq i \leq n\} \rangle$ das (nicht-triviale) freie Produkt der Gruppen G_i mit den amalgamierten Untergruppen $A_i = \psi_i(A)$. Die Schreibweise ist

$$G = \mathop{*_A}_{i=1}^{n} G_i \,,$$

dabei bezeichnet man die G_i als Faktoren und A als Amalgam von G. Im Fall $A = \{1\}$ heißt G das freie Produkt der Gruppen G_i, und wir schreiben

$$G = \mathop{*}_{i=1}^{n} G_i \,.$$

Betrachten wir den kanonischen Homomorphismus $\psi_i : G_i \to G$ mit $\psi_i(x_i) = x_i$ für $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots n$, so können wir die G_i als Untergruppen von G und die A_i als Untergruppen der G_i bzw. A als Untergruppe von G auffassen.

Für unsere Zwecke reicht es aus im folgenden geeignete Zerlegungen der Fuchsschen Gruppen in zwei Faktoren zu finden, daher schreiben wir im folgenden $G = H_1 *_A H_2$.
Um auch hier mit Nielsentransformationen arbeiten zu können, benötigen wir zuerst einmal eine Normalform für die Elemente aus $G = H_1 *_A H_2$, deshalb hier eine kurze Einführung in die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam. Sei also $G = H_1 *_A H_2$ freies Produkt der Gruppen H_1 und H_2 mit Amalgam $A = H_1 \cap H_2$. Wir wählen in H_1 und H_2 jeweils ein System L_1 bzw. L_2 von Vertretern für die Linksrestklassen von H_1 bzw. H_2 nach A, dabei wird A durch 1 repräsentiert. Jedes $x \in G$ besitzt eine eindeutige Darstellung $x = h_1 \ldots h_n a$, wobei $a \in A$ und die h_i, $i = 1, \ldots, n$, Linksrestklassenvertreter sind, die abwechselnd in den verschiedenen Faktoren von G liegen und ungleich 1 sind.
Durch $L(x) = n$ wird eine Länge von x definiert.

Wir nehmen nun die Inversen der Linksrestklassenvertreter als System L_i^{-1} von Vertretern für die Rechtsrestklassen. Damit erhält jedes $x \in G$ die eindeutig bestimmte symmetrische Normalform

$$x = l_1 \dots l_m k r_m \dots r_1 = l(x)k(x)r(x), \text{ für die gilt:}$$

a) $m \geq 0$, $k \in H_1 \cup H_2$, $1 \neq l_j \in L_1 \cup L_2$, $1 \neq r_j \in L_1^{-1} \cup L_2^{-1}$;

b) die l_j bzw. r_j liegen abwechselnd in verschiedenen Faktoren;

c) für $L(x) = 0$ ist $m = 0$ und $k \in A$,

d) für $L(x) = 2m$, $m \geq 1$, ist $k \in A$ und l_m und r_m liegen in verschiedenen Faktoren von G und

e) für $L(x) = 2m+1$ ist $k \notin A$, $k \in H_1$ oder $k \in H_2$ und $l_m, r_m \notin H_1, H_2$ falls $m \geq 1$.

Wir bezeichnen $l(x) = l_1 \dots l_m$ als die vordere Hälfte, $r(x) = r_m \dots r_1$ als die hintere Hälfte und $k(x) = k$ als den Kern von x.
Für unsere Zwecke setzen wir G als abzählbar voraus. Dies ist keine Einschränkung, wenn man endlich erzeugte Untergruppen von G oder gegebene endliche Systeme in G betrachtet. Ist G abzählbar, so kann man in jedem Faktor die Repräsentanten der Linksrestklassen abzählen. Somit können nur endlich viele Repräsentanten in der Ordnung vor einem bestimmten Repräsentanten vorkommen.

Wir führen nun eine Ordnung auf G ein. Dazu ordnen wir erst die Menge $\{1, 2\}$ und somit die Faktoren H_1 und H_2, dann die Restklassenvertreter aus L_i vollständig in jedem Faktor, dabei sei 1 das erste Element. Wir ordnen für jedes m die Produkte $l_1 \dots l_m$ erst der Länge nach und dann lexikographisch. Die so erhaltene Ordnung in G bezeichnen wir mit $<$.
Auf die hinteren Hälfte $r_m \dots r_1$ wird diese Ordnung durch Übergang zum Inversen übertragen. Mit Hilfe der Ordnung $<$ können wir die Ordnung $\preceq$ auf den Paaren $\{x, x^{-1}\}$ mit $x \in G$ erklären. Ohne Einschränkungen dürfen wir annehmen, daß für ein Paar $\{x, x^{-1}\}$ entweder die vordere Hälfte vor der hinteren Hälfte steht oder Gleichheit gilt (ansonsten ersetze x durch x^{-1}).
Dann gilt für $x, y \in G = H_1 *_A H_2$: $\{x, x^{-1}\} \preceq \{y, y^{-1}\}$, falls

1) $L(x) < L(y)$, oder

2) $L(x) = L(y)$ und $l(x) < l(y)$, oder

3) $L(x) = L(y)$ und $l(x) = l(y)$ und $r(x) \leq r(y)$.

Aus $\{x, x^{-1}\} \preceq \{y, y^{-1}\}$ und $\{y, y^{-1}\} \preceq \{x, x^{-1}\}$ folgt nicht notwendigerweise die Gleichheit der Elemente. Im Kern können sich x und y sehr wohl unterscheiden.

Wir haben somit keine Ordnung im üblichen Sinne.

Ein endliches System $\{x_j\}_{j\in J}$ heißt kürzer als ein System $\{y_j\}_{j\in J}$, wenn $\{x_j, x_j^{-1}\} \preceq \{y_j, y_j^{-1}\}$ für alle $j \in J$, aber $\{y_j, y_j^{-1}\} \preceq \{x_j, x_j^{-1}\}$ für mindestens ein j nicht gilt.

Definition 1.13
Sei $\{x_1, \dots, x_m\}$ ein endliches System in G und sei $\leq$ eine Ordnung der Elemente auf G. Dann ist $\{x_1, \dots, x_m\}$ ein **Nielsenreduziertes System** *bzgl. $\leq$, falls $\{x_1, \dots, x_m\}$ nicht durch eine Nielsentransformation in ein System $\{y_1, \dots, y_m\}$ mit $y_i = 1$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$ überführt werden kann, und es kein kürzeres Nielsenäquivalentes System zu $\{x_1, \dots, x_m\}$ gibt.*

Bemerkung 1.14
Ein endliches System $\{x_1, \dots, x_m\}$ in G kann in endlich vielen Schritten in ein Nielsenreduziertes System überführt werden.

Der folgende Satz beschreibt die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam, er geht auf Zieschang **[26]** bzw. Rosenberger **[21]** zurück.

Satz 1.15
Sei $G = \mathop{*_A}\limits_{i=1}^{n} G_i$ und $\{x_1, \dots, x_m\}$ ein endliches System von Elementen in G. Dann gibt es eine Nielsentransformation von $\{x_1, \dots, x_m\}$ zu einem System $\{y_1, \dots, y_m\}$ und einer der folgenden Fälle tritt ein:

1) *$y_i = 1$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$.*

2) *Es gibt zu jedem $w \in \langle y_1, \dots, y_m\rangle$ eine Darstellung $w = \prod_{i=1}^{q} y_{\nu_i}^{\epsilon_i}$, $\epsilon_i = \pm 1$ und $\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$ falls $\nu_i = \nu_{i+1}$ mit $L(y_{\nu_i}) \leq L(w)$ für $i = 1, \dots, q$.*

3) *Es gibt ein $a = \prod_{i=1}^{q} y_{\nu_i}^{\epsilon_i}$, $a \neq 1$ mit $y_{\nu_i} \in A$ für $i = 1, \dots, q$ und in einem der Faktoren G_j gibt es ein Element $x \notin A$ mit $x^{-1}ax \in A$.*

4) *Es gibt ein $g \in G$, so daß für ein $i \in \{1, \dots, m\}$, $y_i \notin gAg^{-1}$, aber für eine passende natürliche Zahl k gilt $y_i^k \in gAg^{-1}$.*

5) *Es gibt einige y_i, die in einer zu einem G_j konjugierten Untergruppe von G liegen, und ein Produkt dieser y_i ist konjugiert zu einem nicht-trivialen Element aus A.*

In den Kapiteln 3 und 4 verwenden wir eine modifizierte Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam, bei der in jedem Kürzungsschritt die Elemente endlicher Ordnung nur durch Elemente endlicher Ordnung ersetzt werden.

Definition 1.16
Eine endliche Teilmenge $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geq 1$, in der Gruppe $G = H_1 *_A H_2$ nennen wir eine **K-Menge**, *wenn wir eine Zerlegung folgender Gestalt angeben können:*

a) $X = X_1 \cup X_2$ *mit* $X_1 \cap X_2 = \emptyset$,

b) *jedes* $x_j \in X_1$ *ist konjugiert zu einem Element von* H_1 *oder* H_2 *und*

c) *jedes* $x_j \in X_2$ *ist nicht konjugiert zu einem Element von* H_1 *oder* H_2.

Definition 1.17
Auf einer K-Menge $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ mit Zerlegung $X = X_1 \cup X_2$ wie in Definition **1.16** *definieren wir die folgenden Typen von Transformationen, welche eine K-Menge Y mit Zerlegung $Y = Y_1 \cup Y_2$ erzeugen:*

(K1) *Ersetze ein* $x_j \in X_1$ *durch* $x'_j = x_k^\epsilon x_j x_k^{-\epsilon}$ *mit* $k \neq j$, $\epsilon \pm 1$ *und lasse die übrigen* x_i *fest;*

(K2) *ersetze ein* $x_j \in X_2$ *durch* $x'_j = x_k^\epsilon x_j$ *oder* $x'_j = x_j x_k^\epsilon$ *mit* $k \neq j$, $\epsilon \pm 1$ *und lasse die übrigen* x_i *fest;*

(K3) *ersetze ein* $x_j \in X$ *durch* $x'_j = x_j^{-1}$ *und lasse die übrigen* x_i *mit* $i \neq j$ *fest;*

(K4) *permutiere Elemente in* X_1 *and lasse* X_2 *fest;*

(K5) *permutiere Elemente in* X_2 *and lasse* X_1 *fest;*

(K6) *entferne ein* $x_j \in X$ *mit* $1 \leq j \leq m$, *falls* $x_j = 1$ *ist.*

Wir nennen **(K1)-(K6)** elementare K-Transformationen. Ein endliches Produkt von elementaren K-Transformationen ist einfach eine K-Transformation. Eine K-Menge Y ist herleitbar aus einer K-Menge X, wenn eine K-Transformation von X zu Y existiert. Eine K-Menge $X = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset G$ ist K-reduziert, wenn es keine K-Menge $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ herleitar aus X gibt, so daß eine der folgenden beiden Aussagen gilt:

(a) $y_i = 1$ für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$

(b) $y_i \neq 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und Y ist kürzer als X.

Es sei bemerkt, daß wir durch die elementare K-Transformation **(K2)** von einer K-Menge X zu einer K-Menge Y kommen können, welche mehr Elemente enthält, die zu einem Element aus H_1 oder H_2 konjugiert sind. Daher kann in den zugehörigen Zerlegungen $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$ die Menge Y_1 mehr Elemente als X_1 enthalten. Weiter bemerken wir, daß in einer Zerlegung $X = X_1 \cup X_2$ eine der beiden Mengen X_1 und X_2 leer sein kann.

Lemma 1.18

i) *Wenn eine K-Menge Y aus einer K-Menge X herleitbar ist, dann gilt $\langle X\rangle = \langle Y\rangle$.*

ii) *Sei X eine endliche K-Menge. Dann gibt es eine K-reduzierte, endliche K-Menge Y, die in endlich vielen Schritten aus X herleitbar ist.*

Für die Nielsensche Kürzungsmethode unter Verwendung von K-Transformationen in freien Produkten mit Amalgam können wir den Satz **1.15** wie folgt formulieren.

Satz 1.19
Sei $G = H_1 *_A H_2$ und $\{x_1, \dots, x_m\}$, $m \geq 1$ ein endliches System von Elementen in G. Dann gibt es eine K-Transformation von $\{x_1, \dots, x_m\}$ zu einem System $\{y_1, \dots, y_m\}$, und einer der folgenden Fälle tritt ein:

1) *$y_i = 1$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$.*

2) *Es gibt zu jedem $w \in \langle y_1, \dots, y_m\rangle$ eine Darstellung $w = \prod_{i=1}^{q} y_{\nu_i}^{\epsilon_i}$, $\epsilon_i = \pm 1$ und $\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$ falls $\nu_i = \nu_{i+1}$ mit $L(y_{\nu_i}) \leq L(w)$ für $i = 1, \dots, q$.*

3) *Es gibt einige y_i, die in einer zu einem H_j, $j = 1, 2$, konjugierten Untergruppe von G liegen, und ein Produkt dieser y_i ist konjugiert zu einem nicht-trivialen Element aus A.*

Die Fälle **3)**, **4)** und **5)** aus Satz **1.15** werden hier in **3)** zusammengefaßt. Für unsere Zwecke ist dieses ausreichend.
Wir zitieren hier die beiden folgenden Lemmata aus [**6**], die für den Beweis wesentlich sind, um die Bedeutung und Anwendung des Satzes **1.19** zu verdeutlichen.

Lemma 1.20
Seien $x, y \in G$ mit $L(y) \leq L(x)$ und $y \equiv p_y k_y q_y$, $x \equiv p_x k_x p_x^{-1}$, $k_x \in H_i \backslash A$, $i = 1$ oder $i = 2$, in symmetrischer Normalform. Wenn $L(xy^\epsilon) < L(x)$ oder $L(y^{-\epsilon}x) < L(x)$ mit $\epsilon = \pm 1$ gilt, dann tritt einer der folgenden Fälle ein.

a) *$L(y^{-\epsilon}xy^\epsilon) < L(x)$,*

b) *$q_y = p_y^{-1} = p_x^{-1}$, und $k_x k_y^\epsilon$ oder $k_y^{-\epsilon}k_x$ ist aus A,*

c) *$q_y \neq p_y^{-1}$, $k_y \in H_i \backslash A$, $L(x) = L(y)$, $L(y^{-\epsilon}xy^\epsilon) = L(x)$, und $k_x k_y^\epsilon$ oder $k_y^{-\epsilon}k_x$ ist aus A. Insbesondere gilt dann $L(xy^\epsilon) < L(y)$ oder $L(y^{-\epsilon}x) < L(y)$.*

Beweis:
Angenommen es gilt $L(xy) < L(x)$.
Da $k_x \in H_i \backslash A$ gilt, haben wir $L(x) = 2 \cdot L(p_x) + 1$. Aus $L(y) \leq L(x)$ und $L(xy) < L(x)$ erhalten wir $p_x^{-1} \equiv r_x^{-1} p_y^{-1}$. Wenn $r_x \neq 1$ gilt, dann ist notwendig $L(r_x^{-1} k_y q_y) < L(r_x) + L(q_y) + 1$ und Fall **a)** tritt ein.

Nehmen wir jetzt an $p_x^{-1} = p_y^{-1}$. Wenn $k_y \in A$ ist, dann gilt notwendigerweise $L(k_x k_y q_y) < L(q_y) + 1$ und $L(y^{-1}xy) = L(q_y^{-1} k_y^{-1} k_x k_y q_y) < L(x)$ und Fall **a)** tritt ein.

Sei nun $k_y \notin A$. Dann gilt $L(x) = L(y)$, $xy = p_x k_x k_y q_y$ und $k_x k_y \in A$, da $L(xy) < L(x)$. Für $q_y = p_x^{-1}$ tritt Fall **b)** ein, während für $q_y \neq p_x^{-1}$ Fall **c)** eintritt.

□

Lemma 1.21
Seien $x, y \in G$ mit $L(y) \leq L(x)$ und $x \equiv p_x k_x p_x^{-1}$, $k_x \in H_i \backslash A$, $i = 1$ oder $i = 2$, in symmetrischer Normalform. Wenn $L(xy^\epsilon) = L(x)$ oder $L(y^{-\epsilon} x) = L(x)$, $\epsilon = \pm 1$, gilt, dann ist $L(y^{-\epsilon} x y^\epsilon) \leq L(x)$.

Beweis:
Sei $L(xy) = L(x)$ und $y \equiv p_y k_y q_y$ in symmetrischer Normalform. Wenn $p_x = 1$ ist, also auch $p_y = 1$ ist, und $x, y \in H_i$ gilt, weil $L(y) \leq L(x) = L(xy)$ ist, folgt dann $L(y^{-1}xy) \leq L(x)$.
Für $p_x \neq 1$ gilt $p_x^{-1} \equiv r_x^{-1} p_y^{-1}$ wegen $L(xy) = L(x)$, somit $xy = p_x k_x r_x^{-1} k_y q_y$. Im Fall $r_x \neq 1$ gilt dann $L(r_x^{-1} k_y q_y) = L(p_x)$ und daher $L(y^{-1}xy) = L(x)$, da $L(y) \leq L(x)$.
Für $r_x = 1$ gilt dann $xy = p_x k_x k_y q_y$. Somit ist $L(k_x k_y) = 1$, weil $L(xy) = L(x)$ ist, und $L(y^{-1}xy) = L(q_y^{-1} k_y^{-1} k_x k_y q_y) \leq L(x)$, da $L(y) \leq L(x)$ ist.

□

Kapitel 2

Der Kommutator der Erzeugenden als Testelement in zweielementig erzeugten Fuchsschen Gruppen

Zuerst benötigen wir eine Klassifizierung der zweielementig erzeugten Fuchsschen Gruppen. Diese können wir zum Beispiel bei B. Fine und G. Rosenberger in [**3**] finden.

2.1 Klassifizierung zweielementig erzeugter Fuchsscher Gruppen

Satz 2.1
Eine nicht-elementare Fuchssche Gruppe G in zwei Erzeugenden kann algebraisch genau auf eine der folgenden Weisen präsentiert werden:

(1) $G = \langle a, b \mid \ \rangle$ *ist freie Gruppe vom Rang* 2,

(2) $G = \langle a, b \mid a^p = 1 \rangle$ *für* $p \geq 2$,

(3) $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = 1 \rangle$ *für* $p, q \geq 2$ *und* $p + q \geq 5$,

(4) $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1 \rangle$ *für* $2 \leq p \leq q \leq r$ *und* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$,

(5) $G = \langle a, b \mid [a, b]^n = 1 \rangle$, *für* $n \geq 2$,

(6) $G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^p = 1 \rangle$ *für* $p = 2k + 1 \geq 3$.

Eine Gruppe vom Typ $G = \langle a, b, p \mid [a, b]p = 1\rangle$, p parabolisch, ist algebraisch isomorph zu einer Gruppe vom Typ **(1)**, braucht für unsere Zwecke also nicht gesondert betrachtet werden.

B. Fine und G. Rosenberger sind bei der Klassifizierung der zweielementig erzeugten Fuchsschen Gruppen von den diskreten Untergruppen der $PSL(2, \mathbb{R})$ ausgegangen. Sie haben die Fälle anhand der Spur des Kommutators der Erzeugenden untersucht.
Es seien $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ und $[A, B] \neq Id$. Dann entspricht $sp\ [A, B] > 2$ oder $sp\ [A, B] < -2$ einem hyperbolischen Kommutatorelement $[A, B]$.
$sp\ [A, B] = 2$ oder $sp\ [A, B] = -2$ entspricht einem parabolischen $[A, B]$ und $-2 < sp\ [A, B] < 2$ einem elliptischen $[A, B]$.

Der Fall $sp\ [A, B] = 2$ oder $sp\ [A, B] = -2$ bedeutet nach Lemma **1.6**, daß A, B einen gemeinsamen Fixpunkt haben. Ist also $\langle A, B\rangle < PSL(2, \mathbb{R})$ diskret, so ist $\langle A, B\rangle$ zyklisch. Somit kommt der Fall $sp\ [A, B] = 2$ oder $sp\ [A, B] = -2$ im folgenden nicht mehr vor.

Bei der Klassifikation der Fälle mit $sp\ [A, B] > 2$ ist der folgende wichtige Satz von B. Fine und G. Rosenberger maßgeblich.

Satz 2.2
Seien $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $sp\ [A, B] > 2$ und weiter sei $G = \langle A, B\rangle$ nichtelementar. Dann ist G genau dann diskret, wenn es eine erweiterte Nielsentransformation von (A, B) zu einem Paar (R, S) gibt, welches folgende Bedingungen erfüllt (nach geeigneter Vorzeichenwahl):

- $0 \leq sp\ R \leq sp\ S \leq |sp\ RS|$,
- $sp\ R = 2cos\frac{\pi}{p}$ *oder* $sp\ R \geq 2$,
- $sp\ S = 2cos\frac{\pi}{q}$ *oder* $sp\ S \geq 2$ *und*
- $sp\ RS = -2cos\frac{\pi}{r}$ *oder* $sp\ RS \leq -2$ *mit* $p, q, r \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Daher ist G, wenn diskret vorausgesetzt, also eine Fuchssche Gruppe ist, auf die folgenden Möglichkeiten darstellbar:

(1) $G = \langle A, B \mid \ \rangle$,

(2) $G = \langle A, B \mid A^p = 1\rangle$ mit $p \geq 2$,

(3) $G = \langle A, B \mid A^p = B^q = 1\rangle$ für $p, q \geq 2$ und $p + q \geq 5$ oder

(4) $G = \langle A, B \mid A^p = B^q = (AB)^r = 1\rangle$ für $2 \leq p \leq q \leq r$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.

Im folgenden Abschnitt **2.2** behandeln wir die Klassen **(1)**-**(3)** zusammen, da sie strukturell sehr ähnlich sind, und wir erst am Ende des Beweises im Hauptsatz die einzelnen Fälle differenzieren müssen. Danach kommen wir im Abschnitt **2.3** zu den gewöhnlichen Dreiecksgruppen, welche in **(4)** präsentiert sind.

Die Klasse **(5)** wird im Abschnitt **2.4** und die Klasse **(6)** im letzten Abschnitt **2.5** behandelt, diese beiden decken den Fall $-2 < sp\,[A, B] < 2$ ab.

2.2 $[a, b]$ als Testelement in Gruppen der Form $\langle a, b \mid a^p = b^q = 1\rangle$ mit $p, q \in \mathbb{N}_0 \backslash \{1\}$

Satz 2.3
Es sei $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = 1\rangle$ mit $p = 0$ oder $p \geq 2$, $q = 0$ oder $q \geq 2$ sowie $p \leq q$ und $(p, q) \neq (2, 2)$. Weiter sei $\phi : G \to G$ ein Endomorphismus mit $\phi([a, b]) = [a, b]$. Dann ist ϕ bereits ein Automorphismus.

Beweis:
Sei zunächst $p, q \geq 2$.
Wir schließen den Fall $(p, q) = (2, 2)$ aus, da dann $[a, b] = (ab)^2$ eine echte Potenz in G ist.
Wir betrachten G als freies Produkt $G = \langle a \mid a^p = 1\rangle * \langle b \mid b^q = 1\rangle$ zusammen mit der Länge L und einer Ordnung bzgl. dieser Faktorisierung.
Wir setzen $x = \phi(a)$ und $y = \phi(b)$. Dann gilt $[x, y] = [a, b]$. **(*)**

Wir müssen zeigen, daß $\{x, y\}$ Nielsen-äquivalent zu $\{a, b\}$ ist.
Dazu dürfen wir annehmen, daß $\{x, y\}$ Nielsen-reduziert ist, wenn wir Kürzungen bezüglich $[x, y]$ durchführen. Insbesondere ist dann $L(x), L(y) \leq 4$.

Ist etwa x nicht zu einer Potenz von a oder b konjugiert, so besitzt x in der Darstellung bezüglich der Faktorisierung einen semistabilen Buchstaben, der höchstens nur von einer Seite durch Verschmelzung beeinflußt werden kann (vgl. Fine, Rosenberger, Spellman, Stille [**4**]).

Dies geht bei der Darstellung **(*)** nur, wenn y zu einer Potenz von a oder b konjugiert ist.
Wegen $L([a, b]) = 4$ muß dann aber $y = a^\alpha$ mit $1 \leq \alpha < p$ oder $y = b^\beta$ mit $1 \leq \beta < q$ gelten. Sei etwa $y = b^\beta$.
Ist $ggT(\beta, q) \geq 2$, so führen wir dann in G die Relation $b^\beta = 1$ ein und erhalten einen Widerspruch zu **(*)**, denn es ist dann in der Faktorgruppe $[x, y] = 1$, aber $[a, b] \neq 1$.

Also ist notwendig $ggT(\beta, q) = 1$, d.h. die Normalform von x beginnt weder mit einer Potenz von b noch endet sie mit einer Potenz von b. Damit wird der semistabile Buchstabe von x von keiner Seite durch Verschmelzung beeinflußt.

Sei $p = a^\delta$ oder $p = b^\gamma$ der semistabile Buchstabe von x und $x = upv$ mit $L(x) = L(u) + 1 + L(v)$ die Normalform von x.
Dann ist $[x, y] = upvb^\beta v^{-1}p^{-1}u^{-1}b^{-\beta}$ und $L([x, y]) = 2 \cdot L(u) + 2 \cdot L(v) + 4$, was einen Widerspruch zu $L([a, b]) = 4$ ergibt, denn es ist $L(u) \neq 0$ oder $L(v) \neq 0$, da x nicht zu einer Potenz von a oder b konjugiert ist.

Analog können wir wegen $[a,b]^{-1} = [b,a] = [x,y]^{-1} = [y,x]$ argumentieren, wenn y nicht zu einer Potenz von a oder b konjugiert ist.
Also sind sowohl x als auch y zu einer Potenz von a oder b konjugiert.

Wegen $L([a,b]) = 4$ ist dann notwendig $x = a^{\alpha}$ mit $1 \leq \alpha < p$ und $y = b^{\beta}$ mit $1 \leq \beta < q$ oder $x = b^{\beta}$ mit $1 \leq \beta < q$ und $y = a^{\alpha}$ mit $1 \leq \alpha < p$.
Wegen $[a,b]^{-1} = [b,a]$ sei also etwa $x = a^{\alpha}$ mit $1 \leq \alpha < p$ und $y = b^{\beta}$ mit $1 \leq \beta < q$.

Im folgenden weisen wir nun nach, daß $\alpha = 1$ und $\beta = 1$ gelten muß.
Hierzu verwenden wir eine treue Darstellung von $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = 1 \rangle$ in die $PSL(2,\mathbb{R})$. Es gilt dann $\widetilde{G} = \langle A, B \mid A^p = B^q = 1 \rangle$.
önnen wir ohne Einschränkungen annehmen, daß $sp\ A = 2cos\frac{\pi}{p}$ für $p \geq 2$, $sp\ B = 2cos\frac{\pi}{q}$ für $q \geq 2$ und $sp\ AB = -2$ gilt.

Wir verwenden die Spurformel für den Kommutator aus Folgerung **1.8** :

$$sp\ [A^{\alpha}, B^{\beta}] - 2 = S_{\alpha}^2\left(2cos\frac{\pi}{p}\right) \cdot S_{\beta}^2\left(2cos\frac{\pi}{q}\right) \cdot (sp\ [A,B] - 2) = sp\ [A,B] - 2$$

$$\Rightarrow \qquad \left(S_{\alpha}^2\left(2cos\frac{\pi}{p}\right) S_{\beta}^2\left(2cos\frac{\pi}{q}\right) - 1\right) \cdot \underbrace{(sp\ [A,B] - 2)}_{>0} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad S_{\alpha}^2\left(2cos\frac{\pi}{p}\right) = 1 \text{ und } S_{\beta}^2\left(2cos\frac{\pi}{q}\right) = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \text{ und } \beta = 1$$

Sei nun $p = 0$ oder $q = 0$.
Im Fall $p = 0$ kann die treue Darstellung derart gewählt werden, daß $sp\ A = 2$ ist, gleichfalls gilt für $q = 0$ dann $sp\ B = 2$.
Die obige Spurformel gilt dann genauso, und weil $S_{\alpha}(2) = \alpha$ ist, was leicht induktiv gezeigt werden kann, folgt auch hier $\alpha = 1$ und $\beta = 1$.

Damit ist alles gezeigt, und $[a,b]$ ist Testelement in $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = 1 \rangle$.
$\square$

2.3 $[a, b]$ als Testelement in der cokompakten Dreiecksgruppe

In diesem Abschnitt erreichen wir unser Ergebnis, $[a, b]$ ist Testelement in der cokompakten Dreiecksgruppe, indem wir einen Spuralgorithmus von G. Rosenberger verwenden (siehe dazu auch **[3]**). Dieser wurde bei der Klassifikation der Fuchsschen Gruppen dazu verwendet, um kanonische Erzeugende für eine vorgegebene Präsentierung zu erhalten.
Wir nutzen diesen speziell, um die Bildgruppe unter einem Endomorphismus durch Nielsentransformationen auf eine Standardpräsentierung umzuformen.
Wir werden dann als Bildgruppe einer Dreiecksgruppe wieder eine Dreiecksgruppe erhalten. Anschließend zeigen wir dann, daß diese Dreiecksgruppe keine echte Untergruppe ist, womit der Endomorphismus automatisch zum Automorphismus wird.
Vorab benötigen wir einige Hilfsaussagen.

Lemma 2.4
Es seien $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $|sp\ A| \leq 2$. Dann gilt $sp\ [A, B] \geq 2$.

<u>Beweis:</u>
Wir können annehmen, daß $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} t & s \\ -s & t \end{pmatrix}$ mit $t = cos\ \theta$ und $s = sin\ \theta$ ist. Es sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann gilt $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2$.
Im ersten Fall gilt dann $sp\ [A, B] = 2(ad - bc) + \lambda^2 c^2 \geq 2$, und im zweiten Fall haben wir $sp\ [A, B] = 2t^2(ad - bc) + s^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 2(t^2 + s^2) = 2$.

□

Proposition 2.5
Es seien $x = sp\ A$, $y = sp\ B$ und $z = sp\ AB$, und es gelte $0 \leq x \leq y \leq z$. Dann gilt $xy - z < z$.

<u>Beweis:</u>
Annahme: Es gelte $z \leq xy - z$.
Dann ist $x \geq 2$, weil $y \leq z = \frac{xy}{2} - \sqrt{\frac{x^2y^2}{4} - x^2 - y^2 + c}$ mit $c = sp\ [A, B] + 2 > 4$ ist. Daraus folgt $y^2(x - 2) \leq x^2 - c < x^2 - 4$, und da $c > 4$ ist, erhalten wir $x > 2$ und $x^2 \leq y^2 \leq x + 2$, was einen Widerspruch ergibt. Daher gilt $xy - z < z$.

□

Proposition 2.6
Es seien $x = sp\ A$, $y = sp\ B$ und $z = sp\ AB$, und es gelte $0 \leq x \leq y \leq z$. Dann gilt $xy - z < y$.

Beweis:
Annahme: Es gelte $y \leq xy - z$.
Dann ist $0 \leq x \leq y \leq xy - z$ und nach **2.5** mit $z = xy - z$ gilt
$z = xy - (xy - z) < xy - z$, was einen Widerspruch ergibt. Daher gilt $xy - z < y$.
□

Für $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $\langle A, B \rangle$ definieren wir weiter die Mengen:

- $E_G = \{(U, V) \mid U, V \in PSL(2, \mathbb{R}) \text{ und } (U, V) \overset{N}{\sim} (A, B)\}$,
- $L_G = \{(sp\ U, sp\ V, sp\ UV) \mid (U, V) \in E_G\}$,
- $M_G = \{sp\ U \mid (U, V) \in E_G \text{ für ein } V \in G\}$,
- $E_G^* = \{(U, V) \mid U, V \in PSL(2, \mathbb{R}) \text{ und } (U, V) \overset{eN}{\sim} (A, B)\}$,
- $M_G^* = \{sp\ U \mid (U, V) \in E_G^* \text{ für ein } V \in G\}$.

Die Nielsentransformationen **M 1**, **M 2** und **M 3**, angewendet auf ein Paar (A, B), induzieren Permutationen von L_G durch

O 1 $(sp\ U, sp\ V, sp\ UV) \mapsto (sp\ U, sp\ V, sp\ U \cdot sp\ V - sp\ UV)$,

O 2 $(sp\ U, sp\ V, sp\ UV) \mapsto (sp\ UV, sp\ U, sp\ V)$ und

O 3 $(sp\ U, sp\ V, sp\ UV) \mapsto (sp\ V, sp\ U, sp\ UV)$.

Lemma 2.7
Es seien $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $0 \leq sp\ A, sp\ B$ und $sp\ [A, B] > 2$. Weiter sei $G = \langle A, B \rangle$, dann gibt es ein Paar $(R, S) \in E_G$ mit $0 \leq sp\ R \leq sp\ S$ und $sp\ RS < 0$.

Beweis:
Es seien $x = sp\ A$, $y = sp\ B$ und $z = sp\ AB$. Für $z < 0$ ist nichts zu zeigen, daher können wir $z \geq 0$ annehmen. Weiter können wir annehmen, es sei $0 \leq x \leq y \leq z$.

Für $xy - z < 0$ ist nichts mehr zu zeigen, also können wir annehmen, es gilt $xy - z \geq 0$. Wenn $xy - z \leq x$ ist, betrachten wir das Tripel $(xy - z, x, y)$ mit $0 \leq xy - z \leq x \leq y$, und wenn $xy - z > x$ gilt, betrachten wir das Tripel $(x, xy - z, y)$ mit $0 \leq x \leq xy - z \leq y$.

Nach **2.6** gilt in jedem Fall $xy - z < y$, so daß wir eine (endliche oder unendliche) Folge (x_n, y_n, z_n) mit $0 \leq x_n \leq y_n \leq z_n$ in L_G erhalten, für die gilt $(x_1, y_1, z_1) = (x, y, z)$ und für $n \geq 1$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = (x_n y_n - z_n, x_n, y_n) \text{ falls } 0 \leq x_n y_n - z_n \leq x_n \text{ oder}$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = (x_n, x_n y_n - z_n, y_n) \text{ falls } 0 \leq x_n y_n - z_n > x_n.$$

In jedem Fall haben wir $x_n y_n - z_n \leq z_n$, $x_{n+1} \leq x_n$, $y_{n+1} \leq y_n$, $z_{n+1} \leq z_n$.

Nehmen wir an, die Folge wäre unendlich. Dann konvergieren die drei Folgen $(x_n), (y_n), (z_n)$. Es seien $x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n$, $y_0 := \lim_{n\to\infty} y_n$ und $z_0 := \lim_{n\to\infty} z_n$.
Wir haben dann $x_0 \leq x_n$, $y_0 \leq y_n$, $z_0 \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) $0 \leq x_0 \leq y_0 \leq z_0$
(ii) $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - x_0 y_0 z_0 > 4$
(iii) $x_0 y_0 - z_0 \leq y_0 \leq z_0$.

$x_0 y_0 - z_0 < y_0$ kann nicht auftreten, denn sonst würde ein y_n existieren mit $y_n < y_0$.
Genauso kann $x_0 y_0 - z_0 < z_0$ nicht auftreten, daher gilt $x_0 y_0 - z_0 = y_0 = z_0$, und somit erhalten wir $x_0 y_0 = 2y_0$, was $x_0 = 2$ bedeutet. Damit bekommen wir einen Widerspruch $4 < x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - x_0 y_0 z_0 = 4 + 2y_0^2 - 2y_0^2 = 4$.

Also ist die Folge (x_n, y_n, z_n) endlich, und wir haben $x_n y_n - z_n < 0$ für ein (x_n, y_n, z_n), womit die Aussage gezeigt ist.

$\square$

Es sei angemerkt, daß für den Fall $0 \leq sp\ A < 2$ Lemma **2.7** trivial ist. Hier wählen wir einfach ein $m \geq 1$ mit $sp\ A^{m-1}B \geq 0$ und $sp\ A^m B < 0$.

Satz 2.8
Seien $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$ mit $Sp\ [A, B] > 2$, und weiter sei $G = \langle A, B \rangle$ nicht-elementar. Jedes elliptische Element in G habe endliche Ordnung. Dann existiert eine erweiterte Nielsentransformation von (A, B) zu einem Paar (R, S), welches folgende Bedingungen erfüllt (nach geeigneter Vorzeichenwahl):

- $0 \leq sp\ R \leq sp\ S \leq |sp\ RS|$,
- $sp\ R = 2cos\frac{\pi}{p}$ *oder* $sp\ R \geq 2$,
- $sp\ S = 2cos\frac{\pi}{q}$ *oder* $sp\ S \geq 2$ *und*
- $sp\ RS = -2cos\frac{\pi}{r}$ *oder* $sp\ RS \leq -2$ *mit* $p, q, r \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Beweis:
Es sei $R \in G$ mit $R \neq \pm Id$ elliptisch von Ordnung n, dann gilt $sp\ R = \pm 2cos\frac{m\pi}{n}$ mit $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$ und $ggT(m, n) = 1$. Es seien $x = sp\ A$, $y = sp\ B$ und $z = sp\ AB$. Nach Lemma **2.7** können wir $0 \leq x \leq y \leq |z|$ mit $z < 0$ (nach geeigneter Vorzeichenwahl) annehmen.

Für $x \geq 2$ ist nichts mehr zu zeigen, also nehmen wir an, es gilt $0 \leq x < 2$ mit $x = \pm 2cos\frac{m\pi}{n}$ und $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$, $ggT(m,n) = 1$.
Weiter können wir (möglicherweise nach einer erweiterten Nielsentransformation) sogar annehmen $x = \lambda_n = 2cos\frac{\pi}{n}$ mit $n \geq 2$.

Für $y \geq 2$ ist auch weiter nichts zu zeigen, daher können wir wie vorher annehmen $0 \leq y < 2$, also $y = \pm 2cos\frac{t\pi}{s}$ und $1 \leq t \leq \frac{s}{2}$, $ggT(t,s) = 1$.

Dann erhalten wir eine erweiterte Nielsentransformation von $\{A, B\}$ zu einem Paar $\{U, V\}$ mit $sp\ U = \lambda_n$, $sp\ V = \lambda_s = 2cos\frac{\pi}{s}$, $s \geq 2$ und $sp\ UV < 2$, (möglicherweise nach geeigneter Vorzeichenwahl), weil falls $sp\ U = \lambda_n$, $sp\ V = \lambda_s$ und $sp\ UV \geq 2$ ist, gilt $sp\ UV^{-1} = \lambda_n\lambda_s - sp\ UV < 2$.

Für $sp\ UV \leq -2$ ist nichts weiter zu zeigen, daher können wir annehmen, es gilt $|sp\ UV| < 2$, das heißt, es ist $sp\ UV = \pm 2cos\frac{m\pi}{k}$, mit $1 \leq m \leq \frac{k}{2}$ und $ggT(k,m) = 1$.

Für $m = 1$ ist für $sp\ UV = -2cos\frac{\pi}{k}$ nichts mehr zu zeigen,und für $sp\ UV = 2cos\frac{\pi}{k}$ können wir annehmen $\lambda_n \leq \lambda_s \leq \lambda_k = 2cos\frac{\pi}{k}$, möglicherweise nach Vertauschung der Erzeugenden.

Daraus folgt $sp\ UV^{-1} = \lambda_n\lambda_s - \lambda_k < \lambda_k$, und wir betrachten nun das Erzeugendenpaar $\{U, V^{-1}\}$, und fahren fort wie bisher.

Sei nun $m \geq 2$, und wir betrachten das Erzeugendenpaar $\{U, W\}$ mit $W = UV$. Da $ggT(m,k) = 1$ ist, gibt es ein $W_1 \in G$ mit $W = W_1^m$ und $sp\ W_1 = \lambda_k = 2cos\frac{\pi}{k}$. Wir erhalten $G = \langle U, V\rangle = \langle U, W_1\rangle$ (möglicherweise nach geeigneter Vorzeichenwahl). Weiter gilt

$$sp\ [U,V] - 2 = sp\ [U,W] - 2 = S_m^2(\lambda_k)(sp\ [U,W_1] - 2).$$

Dabei ist $S_m^2(\lambda_k) > 1$, weil $m \geq 2$ ist, und daher gilt $2 < sp\ [U, W_1] < sp[U, W]$. Wir betrachten nun das Erzeugendenpaar $\{U, W_1\}$ und setzen wie oben fort.

Nun sei R ein beliebiges Element aus G, dann gilt $sp\ R \in \mathbb{Q}(\lambda_n, \lambda_s, \lambda_k)$, und es gibt höchstens endlich viele $\lambda_h = 2cos\frac{\pi}{h}$, $h \geq 2$ mit $\lambda_h \in \mathbb{Q}(\lambda_n, \lambda_s, \lambda_k)$ und auch nur höchstens endlich viele $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq \frac{h}{2}$, $ggT(j,h) = 1$.

Daher erhalten wir eine erweiterte Nielsentransformation von $\{A, B\}$ zu einem Paar $\{R, S\} \in E_G^*$ mit $2 < sp\ [R,S] \leq sp\ [C,D]$ für alle $(C,D) \in E_G^*$.

Wir können jetzt $sp\ R = \lambda_p = 2cos\frac{\pi}{p}$, $p \geq 2$, $sp\ S = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$, $q \geq 2$ und $|sp\ RS| = \lambda_r = 2cos\frac{\pi}{r}$, $r \geq 2$ mit $\lambda_p \leq \lambda_q \leq \lambda_r$ annehmen (möglicherweise nach Vertauschung der Erzeugenden und geeigneter Vorzeichenwahl).

Falls $sp\ RS = -\lambda_r$ ist, sind wir fertig. Für $sp\ RS = +\lambda_r$ gilt $sp\ RS^{-1} = \lambda_p\lambda_q - \lambda_r$. Da $sp\ [R,S] = sp[R,S^{-1}]$ ist, und da $sp\ [R,S]$ minimal ist, erhalten wir $sp\ RS^{-1} = \lambda_p\lambda_q - \lambda_r = \pm\lambda_h < \lambda_r$ mit $\lambda_h = 2cos\frac{\pi}{h}$, $h \geq 2$. Ansonsten existiert ein Paar $(E,F) \in M_G^*$ mit $2 < sp\ [E,F] < sp\ [R,S]$, da RS^{-1} endliche Ordnung hat, im Widerspruch zur Minimalität von $sp\ [R,S]$.

Somit können wir $sp\ RS = -\lambda_r$ annehmen, und der Satz ist gezeigt.

□

Satz 2.9
Es seien $U,V \in PSL(2,\mathbb{R})$ und $G = \langle U,V\rangle$ nicht-elementar. Weiter gelten die folgenden Bedingungen:

- $0 \leq sp\ U \leq sp\ V \leq |sp\ UV|$,
- $sp\ U = 2cos\frac{\pi}{p}$ *oder* $sp\ U \geq 2$,
- $sp\ V = 2cos\frac{\pi}{q}$ *oder* $sp\ V \geq 2$ *und*
- $sp\ UV = -2cos\frac{\pi}{r}$ *oder* $sp\ UV \leq -2$ *mit* $p,q,r \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Dann ist G diskret und kann auf eine der folgenden Weisen präsentiert werden:

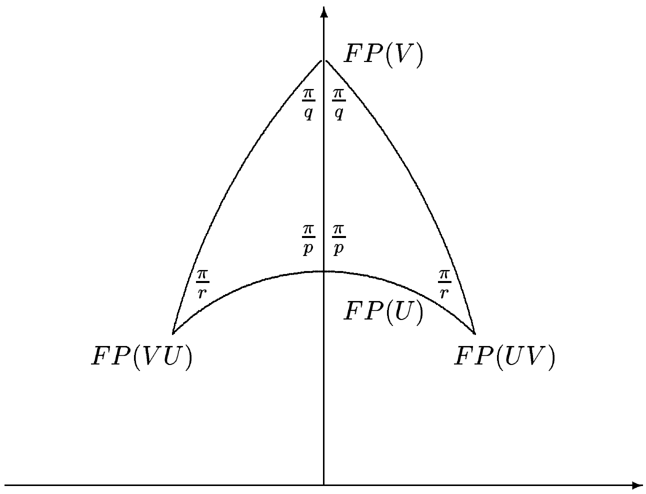
- $G = \langle U,V \mid\ \rangle$ *ist freie Gruppe vom Rang* 2,
- $G = \langle U,V \mid U^p = 1\rangle$ *für* $p \geq 2$,
- $G = \langle U,V \mid U^p = V^q = 1\rangle$ *für* $p,q \geq 2$ *und* $p+q \geq 5$,
- $G = \langle U,V \mid U^p = V^q = (UV)^r = 1\rangle$ *für* $2 \leq p \leq q \leq r$ *und* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} < 1$.

Beweis:
Wir merken zunächst an, daß $sp\ [U,V] > 2$ gilt. Die obigen Bedingungen beschreiben ein Paar kanonischer Erzeugender für G, so daß wir ein Standardbild eines Fundamentalbereichs von G konstruieren können.

Wir zeigen das hier für $sp\ U = 2cos\frac{\pi}{p}$, $sp\ V = 2cos\frac{\pi}{q}$ und $sp\ UV = -2cos\frac{\pi}{r}$. Nach einer geeigneten Konjugation können wir annehmen, es seien $U = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{p} & -sin\frac{\pi}{p} \\ sin\frac{\pi}{p} & cos\frac{\pi}{p} \end{pmatrix}$ und $V = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{q} & b \\ c & cos\frac{\pi}{q} \end{pmatrix}$ mit $b < 0$, $c > 0$, $c < |b|$, $bc = -(sin\frac{\pi}{q})^2$ und $sp\ UV = -2cos\frac{\pi}{r}$.

Die Fixpunkte (FP's) in der hyperbolischen Ebene $\mathcal{H}^*$ von U, V, UV und VU und das resultierende Nicht-Euklidische Dreieck werden in **Figur 1** dargestellt.
Dieses Diagramm ist zur Erzeugung von Fuchsschen Gruppen durch das Poincarè Theorem ein Standardbild für einen Fundamentalbereich der (p, q, r)-Dreiecksgruppe G. Daher ist G im Fall $sp\ U = 2cos\frac{\pi}{p}$, $sp\ V = 2cos\frac{\pi}{q}$ und $sp\ UV = -2cos\frac{\pi}{r}$ diskret und eine (p, q, r)-Dreiecksgruppe G.
Die anderen nicht-cokompakten Fälle sind ähnlich, und wir verzichten auf die Details.

$\square$



Figur 1. Nicht-Euklidisches Dreieck

Kommen wir nun zur Hauptaussage dieses Abschnitts:

Satz 2.10
Es sei $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1 \rangle$ mit $2 \leq p \leq q \leq r$ die von a und b erzeugte cokompakte Dreiecksgruppe. Weiter sei $\phi : G \to G$ ein Endomorphismus, für den $\phi([a, b]) = [a, b]$ gilt. Dann folgt daraus, ϕ ist bereits ein Automorphismus auf G.

Beweis:
Wir betrachten eine treue Darstellung $\rho : G \hookrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ mit $\rho(a) = A$, $\rho(b) = B$, $sp\ A = 2cos\frac{\pi}{p}$, $sp\ B = 2cos\frac{\pi}{q}$ und $sp\ AB = -2cos\frac{\pi}{r}$.
Es sei $\widetilde{G} := \rho(G) = \langle A, B \mid A^p = B^q = (AB)^r = 1 \rangle$ und $\widetilde{\phi} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ der von ϕ induzierte Endomorphismus.

Es seien $\widetilde{\phi}(A) = X$ und $\widetilde{\phi}(B) = Y$, dann ist $H = \langle X, Y \rangle$ eine Untergruppe von $\widetilde{G}$, da $\widetilde{\phi}$ ein Endomorphismus ist. Die Ordnungen von A und B werden übertragen, somit gilt $sp\ X = \pm 2cos\frac{m\pi}{p}$, $sp\ Y = \pm 2cos\frac{n\pi}{q}$ und $sp\ XY = \pm 2cos\frac{o\pi}{r}$ mit

$m, n, o \in \mathbb{N}$.

Im ersten Schritt des Beweises zeigen wir, daß $H = \langle X, Y \rangle$ wieder eine Dreiecksgruppe ist. Dannach werden wir zeigen, daß H keine echte Untergruppe von $\widetilde{G}$ sein kann, $\widetilde{\phi}$, somit auch ϕ, also ein Automorphismus ist.

Nach **2.4** wissen wir, daß $sp\ [X, Y] \geq 2$ ist.
Den Fall $sp\ [X, Y] = 2$ können wir ausschließen, da das bedeutet, A und B haben einen gemeinsamen Fixpunkt, und wegen der Diskretheit von $H = \langle X, Y \rangle$ haben dann alle Elemente $\neq id$ von H dieselben Fixpunkte, was bedeutet, daß H zyklisch wäre (vgl. auch S. Katok in [**7**]).

Wir betrachten nun weiter $H = \langle X, Y \rangle$ als abstrakte Gruppe und verändern ihre Präsentierung, indem wir erweiterte Nielsentransformationen auf die Erzeugenden anwenden.

Wir erhalten mittels Satz **2.8** dann ein erweitert Nielsenäquivalentes Paar $\{R, S\}$ mit $\langle R, S \rangle = \langle X, Y \rangle$, das folgende Eigenschaften erfüllt:

- $0 \leq sp\ R \leq sp\ S \leq |sp\ RS|$,
- $sp\ R = 2cos\frac{\pi}{p}$ oder $sp\ R \geq 2$,
- $sp\ S = 2cos\frac{\pi}{q}$ oder $sp\ S \geq 2$ und
- $sp\ RS = -2cos\frac{\pi}{r}$ oder $sp\ RS \leq -2$ mit $p, q, r \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Mit Hilfe von Satz **2.9** kommen wir so zu einer der folgenden Standardpräsentierungen für $\langle R, S \rangle$:

- $G = \langle R, S \mid \ \rangle$ ist freie Gruppe vom Rang 2,
- $G = \langle R, S \mid R^p = 1 \rangle$ für $p \geq 2$,
- $G = \langle R, S \mid R^p = S^q = 1 \rangle$ für $p, q \geq 2$ und $p + q \geq 5$,
- $G = \langle R, S \mid R^p = S^q = (RS)^r = 1 \rangle$ für $2 \leq p \leq q \leq r$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.

Wir können nun den Fall $\langle X, Y \rangle \cong \langle R \rangle * \langle S \rangle$ ausschließen, denn sonst können wir ohne Einschränkungen annehmen es gelte $X = R^\alpha$ und $Y = tS^\beta t^{-1}$.

Weiter sei ohne Einschränkungen $t = R^\gamma t'$, dann haben wir

$$XY = R^\alpha t S^\beta t^{-1} = R^\alpha R^\gamma t' S^\beta t'^{-1} R^{-\gamma} = R^\gamma (R^\alpha t' S^\beta t'^{-1}) R^{-\gamma} .$$

Nun schreiben wir $t' = t''S^\delta$ mit $t'' = 1$ oder $t'' = S^{a_1}R^{b_1}\dots S^{a_k}R^{b_k}$, dann ist

$$XY = R^\gamma(R^\alpha t'' S^\delta S^\beta S^{-\delta} t''^{-1})R^{-\gamma} = R^\gamma(R^\alpha t'' S^\beta t''^{-1})R^{-\gamma}\,.$$

Nach dem Normalformensatz für freie Produkte (siehe dazu etwa R. Lyndon und P. Schupp in **[10]**) folgt, XY hat unendliche Ordnung im Widerspruch zur Ordnungserhaltung unseres Endomorphismus ϕ. Also kann unsere Bildgruppe $\langle X, Y\rangle$ nur wieder eine Dreiecksgruppe sein.

D. Singerman hat in **[24]** alle möglichen Dreiecksgruppen, die als Untergruppen in Dreiecksgruppen vorkommen, klassifiziert.
Die folgende Tabelle gibt alle möglichen Kombinationen an. Wir schreiben hier kurz $[p, q, r]$, wenn wir die Dreiecksgruppe $G = \langle A, B \mid A^p = B^q = (AB)^r = 1\rangle$ meinen.

Fall	Untergruppe	Obergruppe	Index
1)	$[7,7,7]$	$[2,3,7]$	24
2)	$[2,7,7]$	$[2,3,7]$	9
3)	$[3,3,7]$	$[2,3,7]$	8
4)	$[4,8,8]$	$[2,3,8]$	12
5)	$[3,8,8]$	$[2,3,8]$	10
6)	$[9,9,9]$	$[2,3,9]$	12
7)	$[4,4,5]$	$[2,4,5]$	6
8)	$[n,4n,4n]$	$[2,3,4n]$	6
9)	$[n,2n,2n]$	$[2,4,2n]$	4
10)	$[3,n,3n]$	$[2,3,3n]$	4
11)	$[2,n,2n]$	$[2,3,2n]$	3

Berechnet hat D. Singerman diese Tabelle mit Hilfe der Riemann-Hurwitz-Formel für das Kovolumen einer Fuchsschen Gruppe Γ mit Signatur $(g; m_1, \dots, m_r; s)$:

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{r}(1 - \tfrac{1}{m_i}) + s \tag{2.1}$$

und den zahlentheoretischen Notwendigkeiten an mögliche Untergruppen.

Wir gehen nun alle Möglichkeiten durch und zeigen, daß keine dieser möglichen echten Untergruppen als Bildgruppe unter einem Endomorphismus auftreten kann.

Betrachten wir nun die einzelnen Fälle, so können wir direkt einige ausschließen. In den Fällen **1),3),6)** gibt es in der Untergruppe kein Element der Ordnung 2 im Gegensatz zur Obergruppe, was mit unserem Endomorphismus ϕ im Widerspruch steht. Genauso schließen wir die Fällen **2)** und **4)** aus, da dort kein Element der Ordnung 3 in der Untergruppe existiert im Gegensatz zur Obergruppe.

Im Fall **5)** erhalten wir als Untergruppe $H = \langle X, Y\rangle$ von $[2,3,8] = \langle A, B \mid A^2 = B^3 = (AB)^8 = 1\rangle$ nach einer erweiterten Nielsentransformation $H = [3,8,8] = \langle U, V \mid U^3 = V^8 = (UV)^8 = 1\rangle$. In H muß nun $X \sim V^4$ oder $X \sim (UV)^4$ gelten, da wegen $\phi(A) = X$ auch X die Ordnung 2 hat. Sei ohne Einschränkungen $X \sim V^4$. Dann führen wir eine zusätzliche Relation $V^4 = 1$ in $H = \langle X, Y\rangle$ ein und erhalten so die Faktorgruppe $H' = \langle U, V \mid U^3 = V^4 = (UV)^8 = 1\rangle$. Nun haben wir einen Widerspruch, da H' nicht zyklisch ist, was wegen $X \sim V^4$ der Fall sein müßte.

Den Fall **7)** $[4,4,5] < [2,4,5]$ können wir auf die gleiche Weise ausschließen, wenn wir annehmen $X \sim U^2$ in H und die Relation $U^2 = 1$ in H einführen.

Auch die übrigen Fälle kann man in Abhängigkeit von n auf die oben erwähnten Weisen behandeln.

Wir unterscheiden im Fall **8)** $[n, 4n, 4n] < [2,3,4n]$ ob n durch 3 teilbar ist. Für $3 \mid n$ führen wir die zusätzliche Relation $U^3 = 1$ in H ein, und erhalten den uns schon bekannten Widerspruch. Für $3 \not| n$ existiert kein Element der Ordnung 3 in der Untergruppe.

Betrachten wir jetzt den Fall **9)** $[n, 2n, 2n] < [2,4,2n]$. Hier ist notwendig $n > 2$. Ist analog wie oben, $X \sim V^n$ oder $X \sim (UV)^n$ in H, so führen wir in H die Relation $V^n = 1$ bzw. $(UV)^n = 1$ ein, und erhalten wie oben einen Widerspruch. Ist $2 \mid n$ und $X \sim U^{\frac{n}{2}}$ in H, so führen wir in H die Relation $U^{\frac{n}{2}} = 1$ ein (beachte $n > 2$).

Im Fall **10)** $[3, n, 3n] < [2,3,3n]$ ist notwendig $n > 2$ und $2 \mid n$. Wir führen dann in H die Relation $V^{\frac{n}{2}} = 1$ bzw. $(UV)^{\frac{3n}{2}} = 1$ ein, und erhalten analog einen Widerspruch.

Zuletzt unterscheiden wir im Fall **11)** $[2, n, 2n] < [2,3,2n]$ wieder ob n durch 3 teilbar ist. Für $3 \not| n$ existiert kein Element der Ordnung 3 in der Untergruppe H, und für $3 \mid n$, $n \geq 6$ gilt $Y \sim V^{\frac{n}{3}}$ oder $Y \sim (UV)^{\frac{2n}{3}}$ in H. Im letzteren Fall nehmen wir ohne Einschränkungen $Y \sim V^{\frac{n}{3}}$ an und führen als zusätzliche Relation $Y^{\frac{n}{3}} = 1$ in H ein, so erhalten wir wie oben einen Widerspruch.

Insgesamt kann also unter dem Endomorphismus ϕ keine echte Dreiecksgruppe als Bildgruppe auftauchen, somit ist unser Bild wieder ganz G.
Das heißt $[a, b]$ ist ein Testelement für $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = 1\rangle$. □

2.4 $[a,b]$ als Testelement in Gruppen der Form $\langle a,b \mid [a,b]^r = 1\rangle$

Bemerkung
Diese und die im folgenden Abschnitt behandelte Klasse von zweielementig erzeugten Fuchsschen Gruppen erhalten wir durch eine Idee von N. Purzitsky **[17]**. Er betrachtete diese als Realisierung in der $PSL(2,\mathbb{R})$, und faßte sie als Gruppe von gebrochen linearen Transformationen auf.
Für den Fall $A,B \in PSL(2,\mathbb{R})$ mit $sp[A,B] < 2$ bedeutet dieses, A und B sind hyperbolisch, und die Achsen schneiden sich in genau einem Punkt τ in $\mathcal{H}$.
Es sei nun E_1 die elliptische Transformation der Ordnung 2, welche τ fest läßt, dann gilt $E_1AE_1 = A^{-1}$ und $E_1BE_1 = B^{-1}$.
Weiter seien $E_2 = E_1A$ und $E_3 = BE_1$, dann sind E_2 und E_3 auch von Ordnung 2, und es gilt $[A,B] = (E_1E_2E_3)^2$. $G = \langle A,B\rangle$ ist offenbar Untergruppe von $\widetilde{G} = \langle E_1,E_2,E_3\rangle$ und hat maximal Index 2 in $\widetilde{G}$. Weiter ist $G = \langle A,B\rangle$ genau dann eine Fuchssche Gruppe, wenn $\widetilde{G} = \langle E_1,E_2,E_3\rangle$ eine Fuchssche Gruppe ist.

Weiterführende Überlegungen von B. Fine und G. Rosenberger unter anderem mit Hilfe des Theorems von Poincaré aus **[9]** führen uns zu dem folgenden Lemma, welches wir an dieser Stelle nicht beweisen.

Lemma 2.11
Seien $A,B \in PSL(2,\mathbb{R})$, dann gilt

(1) *$\langle A,B\rangle$ ist genau dann eine Fuchssche Gruppe mit Signatur $(1;r;0)$, $r \geq 2$, wenn gilt $sp\ [A,B] = -2cos\frac{\pi}{r}$.*

(2) *$\langle A,B\rangle$ ist genau dann eine Fuchssche Gruppe mit Signatur $(0;2,2,2,q;0)$, $q \geq 3$ ungerade, wenn gilt $sp\ [A,B] = -2cos\frac{2\pi}{q}$.*

Das nun folgende Lemma beinhaltet die wichtigste Vorbereitung für unsere Hauptaussage über Testelemente in Gruppen $G = \langle a,b \mid [a,b]^r = 1\rangle$, so daß der eigentliche Satz am Ende des Abschnitts eher ein Korollar ist.

Lemma 2.12
Es sei $G = \langle a,b \mid [a,b]^r = 1\rangle$ mit $r \geq 2$. Dann wird G genau dann durch zwei Elemente $u,v \in G$ erzeugt, wenn $[u,v]$ in G konjugiert zu $[a,b]^\epsilon$ mit $\epsilon = \pm 1$ ist.

Beweis:
„ $\Leftarrow$ “: Seien $u,v \in G$ mit $[u,v] \sim [a,b]^\epsilon$, $\epsilon = \pm 1$.
Wir betrachten eine treue Darstellung $\rho : G \hookrightarrow PSL(2,\mathbb{R})$ mit $\rho(u) = U$, $\rho(v) = V$, $\rho(a) = A$ und $\rho(b) = B$.
Aus Lemma **2.11** folgt dann $sp\ [U,V] = -2cos\frac{\pi}{r} = sp\ [A,B]$.

Daher ist $[U, V]$ in $\rho(G)$ unabhängig von r zu $[A, B]^\epsilon$ mit $\epsilon = \pm 1$ konjugiert.
Wenn wir nun $F = \langle a, b \mid \ \rangle$ als freie Gruppe und dazu den kanonischen Epimorphismus $\phi : F \twoheadrightarrow \rho(G)$ betrachten, dann haben wir zwei Elemente $u, v \in F$ derart, daß $[u, v]$ in F zu $[a, b]^\epsilon$ mit $\epsilon = \pm 1$ konjugiert ist, und $U = \phi(u), V = \phi(v)$ gilt. Nach Nielsens Theorem (siehe dazu **[9]**) folgt dann $\{u, v\} \overset{N}{\sim} \{a, b\}$ in F und somit $\{U, V\} \overset{N}{\sim} \{A, B\}$ in $\rho(G)$. Also gilt $G = \langle u, v \rangle$.
„ $\Rightarrow$ “:
Die Rückrichtung ist trivial, denn aus $G = \langle u, v \rangle$ folgt direkt $\{u, v\} \overset{N}{\sim} \{a, b\}$ und daraus $[u, v] \sim [a, b]^\epsilon$, $\epsilon = \pm 1$.

$\square$

Satz 2.13
Es sei $G = \langle a, b \mid [a, b]^r = 1 \rangle$ mit $r \geq 2$. Weiter sei $\phi : G \to G$ ein Endomorphismus mit $\phi([a, b]) = [a, b]$. Dann ist ϕ bereits ein Automorphismus.

<u>Beweis:</u>
Es seien $\phi(a) = u$ und $\phi(b) = v$, dann ist $[u, v] = \phi([a, b]) = [a, b]$, und es folgt aus Lemma **2.12** $\{u, v\} \overset{N}{\sim} \{a, b\}$. Damit ist ϕ ein Automorphismus auf G.

$\square$

2.5 $[e_1e_2, e_3e_1]$ als ein Testelement in Gruppen $\langle e_1, e_2, e_3 \mid e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = (e_1e_2e_3)^q = 1\rangle$ mit $q = 2k+1 \geq 3$

Lemma 2.14
Es sei $G = \langle e_1, e_2, e_3 \mid e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = (e_1e_2e_3)^q = 1\rangle$ mit $q = 2k+1 \geq 3$. Dann erzeugen zwei Elemente $u, v \in G$ genau dann G, wenn $[u,v]$ in G zu $[e_1e_2, e_3e_1]^\epsilon$ mit $\epsilon = \pm 1$ konjugiert ist.

Beweis:
„ $\Leftarrow$ “: Seien $u, v \in G$ mit $[u,v] \sim [e_1e_2, e_3e_1]^\epsilon$, $\epsilon = \pm 1$.
Sei $\rho : G \hookrightarrow PSL(2,\mathbb{R})$ eine treue Darstellung analog wie in Lemma **2.12** mit $\rho(u) = U$, $\rho(v) = V$, $\rho(e_1) = E_1$, $\rho(e_2) = E_2$ und $\rho(e_3) = E_3$.
Nach Lemma **2.11** folgt dann $sp\,[U,V] = -2cos\frac{2\pi}{q} = sp\,[E_1E_2, E_3E_1]$, und $[U,V]$ ist daher in $\rho(G)$ unabhängig von q zu $(E_1E_2E_3)^{2\epsilon}$ mit $\epsilon = \pm 1$ konjugiert.
Im freien Produkt $F = \langle e_1, e_2, e_3 \mid e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1\rangle$ auf den drei Elementen e_1, e_2, e_3 der Ordnung 2 und mit dem kanonischen Epimorphismus $\phi : F \twoheadrightarrow \rho(G)$ haben wir dann Elemente $u, v \in F$ derart, daß $[u,v]$ in F zu $(e_1e_2e_3)^{2\epsilon}$ mit $\epsilon = \pm 1$ konjugiert ist, und $U = \phi(u)$, $V = \phi(v)$ gilt.
Wenn wir F als Fuchssche Gruppe mit endlichem Kovolumen auffassen, sehen wir, daß $\langle u, v\rangle$ die einzige 2-erzeugte freie Untergruppe vom Geschlecht 1 und Index 2 in F ist.
Daher folgt $\{u,v\} \overset{N}{\sim} \{e_1e_2, e_3e_1\}$ in F und somit $\{U,V\} \overset{N}{\sim} \{E_1E_2, E_3E_1\}$ in $\rho(G)$. Also gilt $G = \langle u, v\rangle$.
„ $\Rightarrow$ “:
Die Rückrichtung ist trivial, denn aus $G = \langle u, v\rangle$ folgt direkt $\{u,v\} \overset{N}{\sim} \{e_1e_2, e_3e_1\}$ und daraus $[u,v] \sim [e_1e_2, e_3e_1]^\epsilon$, $\epsilon = \pm 1$.

$\square$

Satz 2.15
Es sei $G = \langle e_1, e_2, e_3 \mid e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = (e_1e_2e_3)^r = 1\rangle$ mit $r = 2k+1 \geq 3$. Weiter sei $\phi : G \to G$ ein Endomorphismus mit $\phi([e_1e_2, e_3e_1]) = [e_1e_2, e_3e_1]$. Dann ist ϕ bereits ein Automorphismus.

Beweis:
Es seien $\phi(e_1e_2) = u$ und $\phi(e_3e_1) = v$, dann ist $[u,v] = \phi([e_1e_2, e_3e_1]) = [e_1e_2, e_3e_1]$, und es folgt aus Lemma **2.14** $\{u,v\} \overset{N}{\sim} \{e_1e_2, e_3e_1\}$. Damit ist ϕ ein Automorphismus auf G.

$\square$

Kapitel 3

Testelemente in Fuchsschen Gruppen vom Geschlecht $g \geq 2$

3.1 Testelemente in Fuchsschen Flächengruppen vom Geschlecht $g \geq 2$

Das Korollar **3.3** über Testelemente in Flächengruppen ist ein Teilergebnis der Theorie über fast-primitive Elemente in Flächengruppen. J. Konieczny, G. Rosenberger und J. Wolny haben in **[8]** gezeigt, daß das Element $w = a_1^{p_1} b_1^{p_2} \ldots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}}$, wobei $p_1, \ldots, p_{2g}$ Primzahlen sind, fast-primitiv in

$$G = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = 1 \rangle$$

mit $g \geq 2$ ist.

Wir benötigt daher an dieser Stelle ein paar zusätzliche Definitionen, die man bei H. Neumann in **[11]** nachlesen kann.

Definitionen

- Sei G eine Gruppe, F eine freie Gruppe beliebigen Ranges und $\alpha : F \to G$ ein beliebiger Homomorphismus. Für $w \in F$ heißt dann $\alpha(w)$ ein Wert von w in G.
- w heißt ein Gesetz in der Gruppe G, falls der einzig mögliche Wert von w in G gerade 1 ist, also $\alpha(w) = 1$ für jeden Homomorphismus $\alpha : F \to G$ ist.
- Sei G eine Gruppe, $w \in G$ und V eine Menge von Werten von w in G. Dann heißt die Untergruppe von G, die erzeugt wird von allen Werten in G der Wörter von w, die verbale Untergruppe $V(G)$ von G, also ist $V(G) = \langle \alpha(w) \mid w \in V, \alpha : F \to G \rangle$.

- Sei V eine Menge von Gesetzen. Eine Varietät $\mathcal{V}$ von Gruppen ist die Klasse der Gruppen, welche den Gesetzen aus V genügt.

Definitionen
Sei G eine beliebige Gruppe.

- Ein Element $w \in G$ heißt primitiv in G, wenn wir $G = \langle w \rangle * G_1$ mit $|w| = \infty$ schreiben können.

- $w \in G$ heißt fast-primitiv in G, falls w nicht primitiv ist, und für jede Untergruppe H, die w enthält, gilt, w ist primitiv in H.

Definition
Sei G eine beliebige Gruppe, V eine Menge von Gesetzen, $\mathcal{V}$ die von V erzeugte Varietät und $w \in G$. Dann heißt w $\mathcal{V}$-generisch in G, wenn w in der von V erzeugten verbalen Untergruppe $V(G)$ von G liegt und für alle Homomorphismen $\phi : H \to G$, H eine beliebige Gruppe, mit $\phi(u) = w$ für ein $u \in V(H)$ gilt, ϕ ist surjektiv.

Bemerkung
Eine Gruppe G heißt residual endlich, wenn zu jedem $w \in G$ mit $w \neq 1$ ein Normalteiler N in G existiert mit $w \notin N$ und G/N endlich.
Endlich erzeugte residual endliche Gruppen sind hopfsch.

Weiterhin hat der nachfolgende Satz fundamentale Bedeutung. Der Beweis ist bei J. Konieczny, G. Rosenberger und J. Wolny in **[8]** zu finden. Wir werden den Satz im nachfolgenden Abschnitt modifizieren und beweisen, daher verzichten wir hier auf die Wiedergabe des Beweises.

Satz 3.1
Sei G eine Flächengruppe mit folgender Darstellung

$$G = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = 1 \rangle,$$

mit $g \geq 2$.
Es seien $y_1, \ldots, y_s \in G$ mit $Y = \langle y_1, \ldots, y_s \rangle$ und $w = a_1^{p_1} b_1^{p_2} \ldots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}}$ ein Wort aus Y, wobei die p_i für $i = 1, \ldots, 2g$ Primzahlen sind. Dann gibt es eine Nielsentransformation von $\{y_1, \ldots, y_s\}$ zu $\{z_1, \ldots, z_m\}$ mit $m \leq s$, so daß einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

a) $z_1 = a_1^{p_1} b_1^{p_2} \ldots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}}$ *oder*

b) $Y = G$.

Satz 3.2
Sei G eine Flächengruppe mit folgender Darstellung

$$G = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = 1 \rangle,$$

mit $g \geq 2$.
Sei $w \in G$ und V eine Menge von Gesetzen, so daß die durch V definierte Varietät $\mathcal{V}$ nicht-trivial ist, und es gelte $V(H) \neq H$ für jede Untergruppe H von G.
Sei $w \in V(G)$. Ist w fast-primitiv in G, so ist w auch $\mathcal{V}$-generisch in G. Weiter folgt, w ist ein Testelement in G.

Beweis:
Sei $w \in G$ fast-primitiv in G, d.h. w ist primitiv in jeder echten Untergruppe, die w enthält. Sei $V(G) < G$, $V(G) \neq G$, die verbale Untergruppe von G, die w enthält. Wir untersuchen eine endlich erzeugte, echte Untergruppe H von G.
Gilt $w \in H$, so ist w primitiv in H, d.h. w erzeugt einen zu $\mathbb{Z}$ isomorphen zyklischen Faktor von H, und es ist $H = \langle w \rangle * H_1$, $H_1 < H$. Also ist $w \notin V(H)$, da $\mathcal{V}$ nicht-triviale Varietät und $V(H) \neq H$ ist. Gilt $w \notin H$, so auch $w \notin V(H)$.
Da G hopfsch ist, folgt w ist Testelement in G.

$\square$

Korollar 3.3
Es sei

$$G = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = 1 \rangle,$$

mit $g \geq 2$ und $w = a_1^p b_1^p \ldots a_g^p b_g^p$, wobei p eine Primzahl ist.
Dann ist w ein Testelement in G.

Beweis:
Nach Satz **3.1** ist $w = a_1^p b_1^p \ldots a_n^p b_n^p$ fast-primitiv in G.
Es sei $V = \{x^p, [x, y]\}$ eine Menge von Gesetzen und $\mathcal{A}_p$, die von V erzeugte Varietät. Dann ist $w \in V(G)$, also ist w nach Satz **3.2** $\mathcal{A}_p$-generisch und ein Testelement in G, da G hopfsch ist.

$\square$

Bemerkung
Es existieren weitere Testelemente der Form

$$a_1^{l_1 p} b_1^{k_1 p} \ldots a_i^{l_i p} b_i^{k_i p} [a_{i+1}, b_{i+1}] \ldots [a_n, b_n]$$

mit $l_j, k_j \in \mathbb{N}$ für $1 \leq j \leq i$, was man in ähnlicher Weise zeigen kann.

3.2 Testelemente in nicht-zweielementig erzeugten Fuchsschen Gruppen der Form $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x \mid x^m = [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]x = 1\rangle$

Im Falle $g = 1$ haben wir in Abschnitt **2.4** bereits gezeigt, daß $[a_1, b_1]$ Testelement in $G = \langle a_1, b_1 \mid [a_1, b_1]^m = 1\rangle$ ist. Hier zeigen wir, daß für $g \geq 1$ allgemein auch $a_1^p b_1^p \cdots a_g^p b_g^p$ mit p Primzahl ein Testelement ist. Die Argumente für $g = 1$ und $g \geq 2$ unterscheiden sich. Deshalb sei zunächst $g \geq 2$.

Satz 3.4
Es sei $G = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x \mid x^m = [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]x = 1\rangle$ mit $g, m \geq 2$. Weiter sei $\phi : G \to G$ ein Endomorphismus mit $\phi(a_1^p b_1^p \cdots a_g^p b_g^p) = a_1^p b_1^p \cdots a_g^p b_g^p$, wobei p eine Primzahl ist. Dann ist ϕ bereits ein Automorphismus.

Der Beweis dieses Satzes ist eng an den Fall der Fuchsschen Flächengruppen angelehnt. Zunächst werden wir den unbewiesenen Satz **3.1** modifizieren und beweisen. In diesem Beweis geht der folgende Satz ein.

Satz 3.5
Es sei $G = H_1 * \cdots * H_n$ mit $n \geq 2$ das freie Produkt der Gruppen $H_1, \dots, H_n$. Weiter seien $a_j \in H_j$, $a_j \neq 1$, und p die Anzahl der echten Potenzen von a_j in H_j, $(1 \leq j \leq n)$. Seien $\{y_1, \dots, y_m\} \subset G$, $m \geq 1$, und H die von $y_1, \dots, y_m$ erzeugte Untergruppe in G. Wenn $a = a_1 \dots a_n \in H$ ist, dann gilt eine der beiden folgenden Aussagen:

(1) *Es existiert eine Nielsentransformation von $\{y_1, \dots, y_m\}$ zu einem System $\{z_1, \dots, z_m\}$ mit $z_1 = a_1 \dots a_n$.*

(2) *Es ist $m \geq 2n - p$, und es existiert eine Nielsentransformation $\{y_1, \dots, y_m\}$ zu einem System $\{z_1, \dots, z_m\}$ mit $z_i \in H_j$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq 2n - p$. Weiter kann a_j als Wort in den z_k, $1 \leq k \leq m$, welche in H_j, $1 \leq j \leq n$ enthalten sind, geschrieben werden.*

Beweise findet man zum Beispiel bei G. Rosenberger in **[23]** oder bei B. Fine, G. Rosenberger, D. Spellman und M. Stille in **[4]**.

Satz 3.6
Sei G eine Fuchssche Gruppe mit folgender Darstellung:

$$G = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid ([a_1, b_1] \dots [a_g, b_g])^m = 1\rangle, \quad g, m \geq 2$$

Es seien $y_1, \dots, y_s \in G$ mit $H = \langle y_1, \dots, y_s \rangle$ und $w = a_1^{p_1} b_1^{p_2} \dots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}}$ ein Wort aus H, wobei p_i für $i = 1, \dots, 2g$ Primzahlen sind.
Dann gibt es eine Nielsentransformation von $\{y_1, \dots, y_s\}$ zu $\{z_1, \dots, z_m\}$ mit $m \leq s$, so daß einer der folgenden Fälle eintritt:

a) $z_1 = a_1^{p_1} b_1^{p_2} \dots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}}$ *oder*

b) $H = G$.

<u>Beweis:</u>
Wir können G als freies Produkt mit Amalgam schreiben:

$$G = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid ([a_1, b_1] \dots [a_g, b_g])^m = 1 \rangle = H_1 *_A H_2$$

Dabei seien $H_1 = \langle a_1, b_1, x \mid x^m = 1 \rangle$ und $H_2 = \langle a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid \ \rangle$, dann kann man das Amalgam wie folgt präsentieren:

$$A = \langle x[a_1, b_1] \rangle = \langle ([a_2, b_2] \dots [a_g, b_g])^{-1} \rangle .$$

Wir haben weiter eine Länge L und eine geeignete Ordnung. A ist malnormal in G, was bedeutet für $a \in A$ mit $a \neq 1$ und $j \in G \backslash A$ gilt stets $jaj^{-1} \notin A$.

Ohne Einschränkung dürfen wir $\{y_1, \dots, y_s\}$ als minimales Nielsenreduziertes System betrachten bzgl. der Länge L und der Ordnung. Für dieses minimale Nielsenreduzierte System $\{y_1, \dots, y_s\}$ haben wir folgende Gleichung in H:

$$\prod_{k=1}^{q} y_{\nu_k}^{\epsilon_k} = a_1^{p_1} b_1^{p_2} \dots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}} , \tag{3.1}$$

$\epsilon_k = \pm 1$ und $\epsilon_k = \epsilon_{k+1}$ falls $\nu_k = \nu_{k+1}$.

Unter den Gleichungen der Form **(3.1)** gibt es eine, für die q minimal ist. Wir nehmen an, daß dieses für Gleichung **(3.1)** gilt. Dann dürfen wir voraussetzen, daß $y_i \neq 1$ für jedes $i = 1, \dots, q$ gilt, und jedes y_i in der Gleichung **(3.1)** auch auftritt.

Falls ein y_i genau einmal in **(3.1)** vorkommt, entweder als y_i oder y_i^{-1}, dann tritt Fall **a)** ein. Für den Rest des Beweises nehmen wir nun an, daß Fall **a)** nicht eintritt, d.h. insbesondere tritt jedes y_i in **(3.1)** entweder mindestens zweimal mit demselben Exponenten $\epsilon = \pm 1$ oder genau einmal mit Exponent $+1$ und genau einmal mit Exponent -1 auf.

Aus $L(x a_1^{p_1} b_1^{p_2} \dots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}}) = 2$ folgt für Gleichung **(3.1)**

$$\prod_{k=1}^{q} y_{\nu_k}^{\epsilon_k} = h_1 h_2 = a_1^{p_1} b_1^{p_2} \dots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}} , \tag{3.2}$$

mit $h_1 = a_1^{p_1} b_1^{p_2} \in H_1$ und $h_2 = a_2^{p_3} b_2^{p_4} \ldots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}} \in H_2$.
Da wir hier ein minimales Nielsenreduziertes System vorliegen haben, gilt auf jeden Fall

$$L(y_i^{\epsilon} y_j^{\eta}) \geq L(y_i), L(y_j)\,,$$

für $\epsilon, \eta = \pm 1$ und $\epsilon = \eta$ falls $i = j$.

Wir untersuchen im nachfolgenden Dreierprodukte uvw mit $u, v, w \in V$ mit $V = \{y_1, y_1^{-1}, \ldots, y_s, y_s^{-1}\}$.
Es können die folgenden Situationen eintreten:

1) Gilt für ein Dreierprodukt uvw

$$L(uvw) < L(u) - L(v) + L(w)$$

mit $u, v, w \in V$, so ist v konjugiert zu einem Element aus A oder $u = v = w$. Wir bezeichnen mit $u \equiv p_u k_u q_u$, $v \equiv p_v k_v q_v$ und $w \equiv p_w k_w q_w$ die symmetrischen Normalformen von u, v und w.

Zuerst beweisen wir eine etwas schwächere Aussage für das Dreierprodukt uvw.

a) Gilt

$$L(uvw) \leq L(u) - L(v) + L(w)\,,$$

dann ist v konjugiert zu einem Element aus H_1 oder H_2.

Gilt $v \in H_1$ oder $v \in H_2$, so ist nichts zu zeigen.
Also sei $L(v) \geq 1$ ($p_w \neq 1$, $q_v \neq 1$). Unter den obigen Voraussetzungen gilt $q_u \equiv r_u p_v^{-1}$ und $p_v \equiv q_v^{-1} l_v$. Da weder uv vor u steht, noch vw vor w, erhalten wir $p_v^{-1} \leq q_v$ und $q_v^{-1} \leq p_v$. Also ist $p_v = q_v^{-1}$.

b) Wir werden nun zeigen, daß unter der Voraussetzung

$$L(u), L(w) > L(v) \text{ und } L(uvw) < L(u) - L(v) + L(w)\,,$$

v konjugiert ist zu einem Element aus A.

Gilt $v \in A$, so ist nichts zu zeigen. Sei nun $L(v) \geq 1$. Also ist nach **a)** v konjugiert zu einem Element aus H_1 oder H_2. Daher ist $k_v \notin A$ und $p_v = q_v^{-1}$. Nun muß aber $q_u \equiv r_u r p_v^{-1}$ mit $r \in L_i^{-1}$, $r \neq 1$, und $p_w \equiv q_v^{-1} l l_v$ mit $l \in L_i$, $l \neq 1$, $(i = 1, 2)$ sein.
Mit $L(uvw) < L(u) - L(v) + L(w)$ erhalten wir $r k_v l \in A$.
Sei $\overline{r}$ der Rechtsrestklassenvertreter von $r k_v$ und $\overline{l}$ der Linksrestklassenvertreter von $k_v l$. Da uv nicht vor u steht, gilt $\overline{r} \geq r$ (analog $\overline{l} \geq l$). Daher gilt $\overline{r} = l^{-1}$, $\overline{l} = r^{-1}$ und $r^{-1} = l$, da $r k_v l \in A$. Dies bedeutet, daß k_v konjugiert ist zu einem Element aus A und daher auch v.

Kommen wir nun zur eigentlichen Aussage.
Ist $L(uvw) < L(u) - L(v) + L(w)$, dann ist v konjugiert zu einem Element aus A oder $u = v = w$.

Gilt $v \in A$, so ist nichts zu zeigen.
Wir wissen nach **a)**, daß $k_v \notin A$ und $q_u \equiv r_u p_v^{-1}$, $p_w \equiv q_v^{-1} l_v$ gilt.
Falls $r_u \neq 1$ und $l_v \neq 1$ gilt, so folgt die Behauptung aus **b)**.
Sei also $r_u = 1$ oder $l_v = 1$.
Dann gilt aber $r_u = l_v = 1$, da $\{y_1, \ldots, y_s\}$ Nielsenreduziert ist.
Da $k_v \notin A$ gilt, erhalten wir $L(uvw) < L(u), L(v), L(w)$.
Aufgrund der Nielsenreduzierten Menge $\{y_1, \ldots, y_s\}$ gilt $u = v = w$.

Im Fall der Fuchsschen Gruppe

$$G = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, x \mid x^m = [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] x = 1 \rangle \,, \quad g, m \geq 2$$

gilt $u \neq v \neq w$.

Angenommen es gilt $u = v = w$, so folgt für $L(u^3) < L(u)$ gerade $u = 1$ oder $u^3 \in A$. Es ist $u \neq 1$ laut Voraussetzung. Gilt $u^3 \in A$, so muß aufgrund der Malnormalität von A in H_1 und in H_2 auch $u \in A$ sein. Das widerspricht aber $0 = L(u^3) < L(u) = 0$.

Betrachten wir nun ein Dreierprodukt in Gleichung **(3.2)**.
Seien $y_{\nu_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}}, y_{\nu_k}^{\epsilon_k}, y_{\nu_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}} \in \{y_1^{\pm 1}, \ldots, y_s^{\pm 1}\}$ in Normalform gegeben, d.h.:

$$\begin{aligned}
y_{\nu_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}} &= l_{1_{\nu_{k-1}}} \ldots l_{m_{\nu_{k-1}}} k_{y_{\nu_{k-1}}} r_{m_{\nu_{k-1}}} \ldots r_{1_{\nu_{k-1}}} \\
y_{\nu_k}^{\epsilon_k} &= l_{1_{\nu_k}} \ldots l_{m_{\nu_k}} k_{y_{\nu_k}} r_{m_{\nu_k}} \ldots r_{1_{\nu_k}} \\
y_{\nu_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}} &= l_{1_{\nu_{k+1}}} \ldots l_{m_{\nu_{k+1}}} k_{y_{\nu_{k+1}}} r_{m_{\nu_{k+1}}} \ldots r_{1_{\nu_{k+1}}}
\end{aligned}$$

Gilt nun in Gleichung **(3.2)** für ein Dreierprodukt

$$L(y_{\nu_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}} y_{\nu_k}^{\epsilon_k} y_{\nu_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}}) < L(y_{\nu_{k-1}}) - L(y_{\nu_k}) + L(y_{\nu_{k+1}}) \,,$$

dann ist y_{ν_k} konjugiert zu einem Element aus A.

y_{ν_k} hat also eine Darstellung der Form $y_{\nu_k} = rar^{-1}$ mit $r \in G \backslash A$, $a \in A$.
In dem Dreierprodukt $y_{\nu_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}} y_{\nu_k}^{\epsilon_k} y_{\nu_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}}$ wird der Konjugationsfaktor völlig gekürzt, d.h. wir haben

$$y_{\nu_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}} y_{\nu_k}^{\epsilon_k} y_{\nu_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}} =$$

$$l_{1_{\nu_{k-1}}} \ldots l_{m_{\nu_{k-1}}} k_{y_{\nu_{k-1}}} r_{m_{\nu_{k-1}}} \ldots r_{i_{\nu_{k-1}}} a l_{j_{\nu_{k+1}}} \ldots l_{m_{\nu_{k+1}}} k_{y_{\nu_{k+1}}} r_{m_{\nu_{k+1}}} \ldots r_{1_{\nu_{k+1}}} \,.$$

Aufgrund der Malnormalität von A kann in dieser Gleichung bei a keine weitere übergreifende Kürzung stattfinden, d.h. ist etwa $r_{i_{\nu_{k-1}}} \neq 1$ und

$l_{j_{\nu_{k+1}}} \neq 1$, so können sich $r_{i_{\nu_{k-1}}}$ und $l_{j_{\nu_{k+1}}}$ nicht vollständig kürzen.
Aber es kann in Gleichung **(3.2)** zu Verschmelzungen mit anderen Elementen aus einem Faktor kommen. Dadurch kann ein Element aus A entstehen. Allerdings können wegen der Nielsenreduziertheit von $\{y_1, \ldots, y_s\}$, der Minimalität von q in Gleichung **(3.2)** und der Malnormalität von A keine entscheidenden Kürzungen auftreten.

2) Gilt für ein Dreierprodukt uvw

$$L(uvw) = L(u) - L(v) + L(w)\,,$$

so ist v konjugiert zu einem Element aus H_1 oder H_2.
Dies wurde schon im Teil **1a)** gezeigt.

Betrachten wir nun ein Dreierprodukt in Gleichung **(3.2)** mit

$$L(y_{\nu_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}} y_{\nu_k}^{\epsilon_k} y_{\nu_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}}) = L(y_{\nu_{k-1}}) - L(y_{\nu_k}) + L(y_{\nu_{k+1}})\,.$$

$y_{\nu_k}^{\epsilon_k}$ ist folglich zu einem Element eines Faktors H_1 oder H_2 konjugiert.

In diesem Fall bleibt mindestens ein Repräsentant aus einem Faktor H_1 oder H_2 in y_{ν_k} erhalten, der noch durch Verschmelzung mit den Repräsentanten von $y_{\nu_{k-1}}$ bzw. von $y_{\nu_{k+1}}$ beeinflußt werden kann. Es kann jedoch nicht zu entscheidenden Kürzungen kommen. In dem Produkt $\prod_{k=1}^{q} y_{\nu_k}^{\epsilon_k} = h_1 h_2$ können sich wie oben Elemente aus einem Faktor, entweder aus $H_1 \backslash A$ oder aus $H_2 \backslash A$, zu einem Element aus A zusammenfassen.
Auch in dieser Situation können keine entscheidenden Kürzungen auftreten.

3) Gilt für ein Dreierprodukt uvw

$$L(uvw) > L(u) - L(v) + L(w)\,,$$

so werden nicht beide Hälften von v vollständig gekürzt. Der Kern von v kann höchstens von einer Seite durch Verschmelzung beeinflußt werden. Das bedeutet, daß v einen Repräsentanten besitzt, der an dieser Stelle nicht gekürzt wird. Es kann höchstens zu einer Verschmelzung von einer Seite kommen.

Wir werden im nachfolgenden zeigen, daß es kein $\lambda \in \{1, \ldots, s\}$ gibt, so daß immer

$$L(y_\delta^\epsilon y_\lambda y_\mu^\eta) > L(y_\delta) - L(y_\lambda) + L(y_\mu)$$

mit $\delta, \mu \in \{1, \ldots, s\}$, $\epsilon, \eta = \pm 1$ und $\delta \neq \lambda \neq \mu$ oder $\delta = \lambda \neq \mu$, $\epsilon = 1$ oder $\delta \neq \lambda = \mu$, $\eta = 1$ oder $\delta = \lambda = \mu$, $\epsilon = \eta = 1$ gilt.

Daraus folgt dann, daß es für $\lambda \in \{1, \ldots, s\}$ immer $\delta, \mu \in \{1, \ldots, s\}$ gibt mit

$$L(y_\delta^\epsilon y_\lambda y_\mu^\eta) \leq L(y_\delta) - L(y_\lambda) + L(y_\mu)$$

für $\epsilon, \eta = \pm 1$ und $\delta \neq \lambda \neq \mu$ oder $\delta = \lambda \neq \mu$, $\epsilon = 1$ oder $\delta \neq \lambda = \mu$, $\eta = 1$ oder $\delta = \lambda = \mu$, $\epsilon = \eta = 1$.
Also ist y_λ konjugiert zu einem Element eines Faktors H_1 oder H_2.

Wir werden zeigen, daß in Gleichung **(3.2)** kein $\lambda \in \{1, \ldots, s\}$ mit obiger Eigenschaft existiert.

Angenommen es gibt ein $\lambda \in \{1, \ldots, s\}$, so daß immer

$$L(y_\delta^\epsilon y_\lambda y_\mu^\eta) > L(y_\delta) - L(y_\lambda) + L(y_\mu)$$

für $\delta, \mu \in \{1, \ldots, s\}$, $\epsilon, \eta = \pm 1$ und $\delta \neq \lambda \neq \mu$ oder $\delta = \lambda \neq \mu$, $\epsilon = 1$ oder $\delta \neq \lambda = \mu$, $\eta = 1$ oder $\delta = \lambda = \mu$, $\epsilon = \eta = 1$ gilt.
Insbesondere sei $\lambda = \nu_k$.
Da jedes y_{ν_k} mindestens zweimal in Gleichung **(3.2)** auftreten muß, entweder mit demselben Exponenten oder genau einmal mit Exponent 1 und genau einmal mit Exponent -1, müssen wir nun die Stellen in **(3.2)** untersuchen, an denen y_{ν_k} auftritt. Es liegt folgende Situation vor:

$$y_{\nu_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{\nu_k}^{\epsilon_k} \cdots y_{\nu_j}^{\epsilon_j} \cdots y_{\nu_q}^{\epsilon_q}$$

mit $1 < k < j < q$ und $\nu_k = \nu_j$.

a) Betrachten wir zuerst den Fall, daß $y_\lambda = y_{\nu_k}$, $\nu_k = \nu_j$, zweimal mit demselben Exponenten in Gleichung **(3.2)** auftritt. Das bedeutet, die linke Hälfte von y_{ν_k} ist invers zur rechten Hälfte von y_{ν_j}, d.h. $y_\lambda = y_{\nu_k}$ ist zu einem Element eines Faktors H_1 oder H_2 konjugiert.

Für $y_\lambda = y_{\nu_k}$ bedeutet das gerade

$$L(y_{\nu_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}} y_\lambda x_{\nu_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}}) \leq L(y_{\nu_{k-1}}) - L(y_\lambda) + L(y_{\nu_{k+1}}),$$

was einen Widerspruch ergibt.

b) Nehmen wir nun an, y_{ν_k} tritt in Gleichung **(3.2)** genau einmal mit Exponent 1 und genau einmal mit Exponent -1 auf, d.h.

$$y_{\nu_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{\nu_k} \cdots y_{\nu_j}^{-1} \cdots y_{\nu_q}^{\epsilon_q}$$

mit $1 < k < j < q$ und $\nu_k = \nu_j$.

Sei $y_{\nu_k} \equiv p_{\nu_k} v_{\nu_k} q_{\nu_k}$, $y_{\nu_j}^{-1} \equiv q_{\nu_j}^{-1} v_{\nu_j}^{-1} p_{\nu_j}^{-1}$ und $y_{\nu_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}} \dots y_{\nu_{j-1}}^{\epsilon_{j-1}} \equiv q_{\nu_k}^{-1} b_t q_{\nu_k}$ mit $v_{\nu_k}, b_t \in H_t \backslash \{1\}$, $t = 1, 2$.
Wir können v_{ν_k} so wählen, daß $|L(p_{\nu_k}) - L(q_{\nu_j})| \leq 1$ gilt.

Es ist $p_{\nu_k} = 1$ und damit $q_{\nu_k} \neq 1$ und $L(q_{\nu_k}) = 1$, da y_{ν_k} nicht zu einem Element aus A konjugiert ist. Dann ist aber $y_{\nu_{k-1}} = q_{\nu_k}^{-1} d_t q_{\nu_k}$, $d_t \in H_t \backslash \{1\}$, $t = 1, 2$, $u = y_{\nu_k} y_{\nu_{k-1}} y_{\nu_k}^{-1} = v_{\nu_k} d_t v_{\nu_k}^{-1}$ und $L(u) = 1 < L(y_{\nu_{k-1}})$.
Das widerspricht der Nielsenreduzierten Menge $\{y_1, \dots, y_s\}$.
Folglich tritt y_{ν_k} nur einmal in Gleichung **(3.2)** auf. Dies widerspricht wiederum unserer Annahme, daß jedes y_i mindestens zweimal in **(3.2)** auftritt.

Aufgrund der obigen Überlegungen erhalten wir folgende Aussage.
Es gibt kein $\lambda \in \{1, \dots, s\}$, so daß immer

$$L(y_\delta^\epsilon y_\lambda y_\mu^\eta) > L(y_\delta) - L(y_\lambda) + L(y_\mu)$$

für $\delta, \mu \in \{1, \dots, s\}$, $\epsilon, \eta = \pm 1$ und $\delta \neq \lambda \neq \mu$ oder $\delta = \lambda \neq \mu$, $\epsilon = 1$ oder $\delta \neq \lambda = \mu$, $\eta = 1$ oder $\delta = \lambda = \mu$, $\epsilon = \eta = 1$ gilt.

Das bedeutet, es gibt immer $\delta, \mu \in \{1, \dots, s\}$ mit

$$L(y_\delta^\epsilon y_\lambda y_\mu^\eta) \leq L(y_\delta) - L(y_\lambda) + L(y_\mu)\,,$$

d.h. y_λ ist zu einem Element eines Faktors H_1 oder H_2 konjugiert.

Untersuchen wir nun $y_{\nu_1}^{\epsilon_1}$ und $y_{\nu_q}^{\epsilon_q}$ in der Gleichung

$$y_{\nu_1}^{\epsilon_1} y_{\nu_2}^{\epsilon_2} \dots y_{\nu_{q-1}}^{\epsilon_{q-1}} y_{\nu_q}^{\epsilon_q} = h_1 h_2\,.$$

Wir können voraussetzen, daß $L(y_{\nu_1}) \neq 0$ bzw. $L(y_{\nu_q}) \neq 0$ gilt, denn ansonsten multiplizieren wir die Gleichung

$$\prod_{k=1}^{q} y_{\nu_k}^{\epsilon_k} = h_1 h_2$$

von links mit $y_{\nu_1}^{-1}$ bzw. von rechts mit $y_{\nu_q}^{-1}$ und erhalten

$$y_{\nu_2}^{\epsilon_2} \dots y_{\nu_q}^{\epsilon_q} = \widetilde{h}_1 \widetilde{h}_2$$

bzw.

$$y_{\nu_1}^{\epsilon_1} \dots y_{\nu_{q-1}}^{\epsilon_{q-1}} = \widetilde{h}_1 \widetilde{h}_2\,,$$

wobei wieder $\widetilde{h}_1 \in H_1$ und $\widetilde{h}_2 \in H_2$ gilt, also hat $\widetilde{h}_1 \widetilde{h}_2$ wieder die Länge zwei.
Falls $y_{\nu_2}^{\epsilon_2}$ bzw. $y_{\nu_{q-1}}^{\epsilon_{q-1}}$ wieder aus A seien sollten, wiederholen wir den oben beschriebenen Prozeß.

Ebenfalls kann in $\prod_{k=1}^{q} y_{\nu_k}^{\epsilon_k} = h_1 h_2$ kein y_{ν_i}, welches zweimal dort auftritt, auch an beiden Stellen in Gleichung **(3.2)** vollständig gekürzt werden.

Insgesamt erhalten wir nach geeigneter Konjugation von H_1 und H_2 eine Blockdarstellung

$$y_{\nu_1}^{\epsilon_1} \dots y_{\nu_l}^{\epsilon_l} y_{\nu_{l+1}}^{\epsilon_{l+1}} \dots y_{\nu_q}^{\epsilon_q} = h_1 h_2 = a_1^{p_1} b_1^{p_2} \dots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}}$$

mit $h_1 = y_{\nu_1}^{\epsilon_1} \dots y_{\nu_l}^{\epsilon_l} = a_1^{p_1} b_1^{p_2}$ und $h_2 = y_{\nu_{l+1}}^{\epsilon_{l+1}} \dots y_{\nu_q}^{\epsilon_q} = a_2^{p_3} b_2^{p_4} \dots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}}$.

Nach Satz **3.5** und [**5**] folgt nun $H = G$, denn zunächst ergibt sich $H_2 < H$ und dann auch $H_1 < H$ durch Umfaktorisierung.

□

Satz 3.7
Sei G eine Fuchssche Gruppe mit folgender Darstellung

$$G = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid ([a_1, b_1] \dots [a_g, b_g])^m = 1 \rangle , \quad g, m \geq 2$$

Sei $w \in G$ und V eine Menge von Gesetzen, so daß die durch V definierte Varietät $\mathcal{V}$ nicht-trivial ist, und es gelte $V(H) \neq H$ für jede Untergruppe H von G.
Sei $w \in V(G)$. Ist w fast-primitiv in G, so ist w auch $\mathcal{V}$- generisch in G. Weiter folgt, w ist ein Testelement.

Beweis:
Sei $w \in G$ fast-primitiv in G, d.h. w ist primitiv in jeder echten Untergruppe, die w enthält. Sei $V(G) < G$, $V(G) \neq G$, die verbale Untergruppe von G, die w enthält. Wir untersuchen eine endlich erzeugte, echte Untergruppe H von G.
Gilt $w \in H$, so ist w primitiv in H, d.h. w erzeugt einen zu $\mathbb{Z}$ isomorphen zyklischen Faktor von H, und es ist $H = \langle w \rangle * H_1$, $H_1 < H$. Also ist $w \notin V(H)$, da $\mathcal{V}$ nicht-triviale Varietät und $V(H) \neq H$ ist. Gilt $w \notin H$, so auch $w \notin V(H)$.
Da G hopfsch ist, folgt w ist Testelement.

□

Kommen wir nun zum **Beweis** von **Satz 3.4**:

Es sei $G = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x \mid x^m = [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] x = 1 \rangle$ mit $g, m \geq 2$.
Weiter sei $\phi : G \to G$ ein Endomorphismus mit $\phi(a_1^p b_1^p \cdots a_g^p b_g^p) = a_1^p b_1^p \cdots a_g^p b_g^p$, wobei p eine Primzahl ist. Dann ist ϕ bereits ein Automorphismus.

Beweis:
Anwendung von Tietze-Transformationen zeigt, daß für $m \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} G &= \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x \mid x^m = [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] x = 1 \rangle \\ &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid ([a_1, b_1] \dots [a_g, b_g])^m = 1 \rangle \end{aligned}$$

Nach Satz **3.6** ist $w = a_1^p b_1^p \dots a_g^p b_g^p$ fast-primitiv in G.
Es sei $V = \{x^p, [x,y]\}$ eine Menge von Gesetzen und $\mathcal{A}_p$, die von V erzeugte Varietät. Dann ist $w \in V(G)$, also ist w nach Satz **3.7** $\mathcal{A}_p$-generisch und ein Testelement in G, da G hopfsch ist.

□

Kommen wir nun auf den Fall $g = 1$ zurück.

Satz 3.8
Sei $G = \langle a_1, b_1, x \mid x^m = [a_1, b_1]x = 1\rangle$ mit $m \geq 2$. Weiter sei $\{y_1, \dots, y_k\} \subset G$, Y die von $y_1, \dots, y_k$ ($k \geq 1$) erzeugte Untergruppe von G und $w = a_1^{p_1} b_1^{p_2} \in Y$, p_1, p_2 (nicht notwendig gleiche) Primzahlen. Dann tritt einer der folgenden beiden Fälle ein:

1) *Es gibt einen freien Übergang von $\{y_1, \dots, y_k\}$ zu einem System $\{z_1, \dots, z_k\}$ mit $z_1 = a_1^{p_1} b_1^{p_2}$.*

2) $Y = G$.

Beweis:
Wir schreiben G als HNN-Erweiterung $G = \langle B, t \mid tA_{-1}t^{-1} = A_1\rangle$ mit Basis B, assoziierten Untergruppen A_{-1} und A_1 und stabilem Buchstaben t.

Dabei sind $t = b_1$, $B = \langle d_0, d_1 \mid (d_0^{p_1} d_1^{p_2})^m = 1\rangle$,
$d_0 = a_1$, $d_1 = tb_1^{-1}t^{-1}$, $A_{-1} = \langle d_0 \mid \ \rangle$ und $A_1 = \langle d_1 \mid \ \rangle$.

A_{-1} und A_1 sind beide malnormal in B.

Wir benutzen, in Analogie zu den freien Produkten mit Amalgam, die Nielsensche Kürzungsmethode in HNN-Erweiterungen. Die Details hierfür sind in **[16]** und **[4]** gut beschrieben. Da dies die einzige Stelle ist, bei der wir HNN-Erweiterungen benötigen, verzichten wir hier auf die Wiedergabe, zumal wir für G in Abschnitt **2.4** bereits ein anderes Testelement gefunden hatten, nämlich den Kommutator $[a_1, b_1]$ selbst.

Wir können wieder annehmen, daß $\{y_1, \dots, y_k\}$ Nielsenreduziert ist (bzgl. der Länge und Ordnung von G als obige HNN-Erweiterung).

Es gibt analog eine Gleichung

$$\prod_{i=1}^{q} y_{\nu_i}^{\epsilon_i} = d_0^{p_1} d_1^{p_2}\,,$$

$$\nu_i \in \{1, \dots, k\}, \quad \epsilon_i = \pm 1, \quad \epsilon_i + \epsilon_{i+1} \neq 0 \text{ falls } y_{\nu_i} = y_{\nu_{i+1}}\,.$$

Es trete Fall **1)** nicht ein.
Da A_{-1} und A_1 malnormal in B sind, erhalten wir völlig analog wie vorher

beim freien Produkt mit Amalgam, daß wir $k = 2$ und durch zusammenfassen $y_1^{k_1} y_2^{k_2} = d_0^{p_1} d_1^{p_2}$ annehmen können.

Da wegen der erwähnten Malnormalität keine Gleichung einer Art

$$d_1^{\epsilon} g d_1^{-\epsilon} = \tilde{g}\,, \quad \epsilon = \pm 1\,; \quad g, \tilde{g} \in B\,, \quad g \notin A_{-\epsilon} \quad \text{oder}$$

$$d_1^{\epsilon} g d_1^{\epsilon} = \tilde{g}\,, \quad \epsilon = \pm 1\,; \quad g, \tilde{g} \in B$$

gelten kann, muß es einen freien Übergang von $\{y_1, y_2\}$ zu $\{a_1, b_1\}$ geben, d.h. es ist dann $Y = G$.

□

Korollar 3.9
Sei $G = \langle a_1, b_1, x \mid x^m = [a_1, b_1]x = 1 \rangle$ mit $m \geq 2$ und p eine Primzahl.
Dann ist $a_1^p b_1^p$ ein Testelement in G.

Beweis:
Sei $\phi : G \to G$ ein Endomorphismus von G mit $\phi(a_1) = y$ und $\phi(b_1) = z$.
Sei H die von y, z erzeugte Untergruppe von G.
Aufgrund der Riemann-Hurwitz-Formel **(2.1)** und dem Untergruppensatz von D. Singermann (siehe dazu auch [**24**]) ist entweder $H = G$, oder es ist H eine freie Gruppe vom Rang 2. (Der Rang von H ist gleich dem Rang von G, und H hat als Untergruppe von G ein Geschlecht $g \geq 1$.)

Im letzteren Fall wäre notwendig $a_1^p b_1^p$ primitives Element in H, d.h. $\langle a_1^p b_1^p \mid \ \rangle$ wäre ein freier Faktor von H, und wir erhalten analog wie vorher, daß dieser Fall nicht eintreten kann.

□

Bemerkung
Wir erwähnen hier, daß nach B. Fine, G. Rosenberger, D. Spellman und M. Stille in [**4**] der größte gemeinsame Teiler der Exponenten der auftretenden Erzeugenden notwendig ungleich 1 ist; daher betrachten wir nur eine Primzahl.

3.3 Testelemente in Fuchsschen Gruppen der Form $\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, x_1, \ldots, x_r \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] x_1 \ldots x_r = 1 \rangle$ mit $g \geq 1$, $r \geq 2$

Satz 3.10 *Sei*
$G = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, x_1, \ldots, x_r \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] x_1 \ldots x_r = 1 \rangle$ *mit* $g \geq 1$ *und* $r \geq 2$ *und alle* $m_i \geq 2$. *Seien* $w = x_2 \ldots x_r a_1^{p_1} b_1^{p_2} \cdots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}}$ *und* p_j *für* $j = 1, \ldots, 2g$ *(nicht notwendig gleiche) Primzahlen. Sei* $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset G$, $k \geq 1$, *und* Y *die von* $y_1, \ldots, y_k$ *erzeugte Untergruppe von* G. *Ist* $w \in Y$, *so tritt einer der folgenden beiden Fälle ein:*

1) *Es gibt einen freien Übergang von* $\{y_1, \ldots, y_k\}$ *zu einem System* $\{z_1, \ldots, z_k\}$ *mit* $z_1 = w$.

2) $Y = G$.

Beweis:
Wir schreiben G als freies Produkt $G = H_1 *_A H_2$ mit Amalgam, wobei

$$H_1 = \langle x_1, \ldots, x_r \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = 1 \rangle$$

$$H_2 = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid \ \rangle \quad \text{und}$$

$$A = \langle x_1 \ldots x_r \rangle = \langle [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] \rangle \quad \text{sind.}$$

Die Länge L und eine Ordnung bezüglich dieser Faktorisierung betrachten wir wie in Paragraph **1.3** beschrieben und führen Nielsenreduktion bezüglich L und der Ordnung durch.

A ist auf alle Fälle malnormal in H_2. Allerdings ist A nicht notwendig malnormal in H_1. Es ist nämlich genau dann nicht malnormal in H_1, wenn

$$H_1 = \langle x_1, x_2 \mid x_1^2 = x_2^2 = 1 \rangle,$$

also isomorph zur unendlichen Diedergruppe ist.

Wir berücksichtigen folgende Überlegung.
Ist $H_1 = \langle x_1, x_2 \mid x_1^2 = x_2^2 = 1 \rangle$, so bringt für unser System $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset G$ die Nicht-Malnormalität genau dann einen Kollaps bei den Längen von Worten in $y_1, \ldots, y_k$, also ein Kleinerwerden der Längen bei Produktbildung für $y_1, \ldots, y_k$, wenn es einen freien Übergang von $\{y_1, \ldots, y_k\}$ zu einem System $\{z_1, \ldots, z_k\}$ gibt mit $z_1 = (x_1 x_2)^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{N}$, und $z_2 = x_1 z_2'$, $L(z_2) \geq 1$.

Dann ist $L(z_2^{-1} z_1 z_2) = L(z_2'^{-1} (x_2 x_1)^\gamma z_2') = L(z_2'^{-1} (x_1 x_2)^{-\gamma} z_2') < L(z_2) - L(z_1) +$

$L(z_2) = 2L(z_2)$.
(siehe dazu H. Zieschang [**26**] oder B. Fine, G. Rosenberger und M. Stille [**5**])
In diesem Fall tritt aber Fall **1)** des Satzes ein.

Daher nehmen wir jetzt an, daß wir ein System $\{y_1, \ldots, y_k\}$ haben, für das Fall **1)** des Satzes nicht eintritt.
Dann führt die Nicht-Malnormalität nicht mehr zu einem Hindernis bei der Anwendung der Nielsenschen Kürzungsmethode, und wir können - mit folgender Abwandlung - völlig analog wie beim Beweis von Satz **3.6** vorgehen.

Gibt es einen freien Übergang von $\{y_1, \ldots, y_k\}$ zu einem System $\{z_1, \ldots, z_k\}$ mit $z_1 = gy_i^{\alpha_i}g^{-1}$, $1 \leq \alpha_i < m_i$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, so wollen wir diese Konjugationseigenschaft nicht verlieren, da wir dann die Untergruppe Y besser kontrollieren können.
Daß wir so vorgehen können, ist durch die Einschränkung der Nielsentransformationen auf die K-Transformationen gewährleistet (siehe B. Fine, G. Rosenberger und M. Stille [**5**] oder R. Kalia und G. Rosenberger [**6**]).

Wir haben eine Gleichung

$$\prod_{i=1}^{q} y_{\nu_i}^{\epsilon_i} = h_1 h_2$$

mit $\nu_i \in \{1, \ldots, r\}$, $\epsilon_i = \pm 1$, $\epsilon_i + \epsilon_{i+1} \neq 0$ falls $y_{\nu_i} + y_{\nu_{i+1}}$ sowie

$$h_1 = x_2 \ldots x_r \quad \text{und} \quad h_2 = a_1^{p_1} b_1^{p_2} \cdots a_g^{p_{2g-1}} b_g^{p_{2g}} .$$

Gehen wir also mit obigen Modifikationen vor und beachten wir, daß wir Fall **1)** ausgeschlossen hatten, so erhalten wir, eventuell nach geeigneter Konjugation, aus $\{y_1, \ldots, y_k\}$ durch Nielsentransformationen ein System $\{z_1, \ldots, z_k\}$ mit $h_1 \in \langle y_1, \ldots, y_l \rangle$ und $h_2 \in \langle y_{l+1}, \ldots, y_k \rangle$, $1 \leq l < k$.

Da wir Fall **1)** ausgeschlossen hatten, ist nach Satz **1.19** von B. Fine, G. Rosenberger und M. Stille [**5**] notwendig $H_2 = \langle z_{l+1}, \ldots, z_k \rangle$.
Nach Lemma **3.4** aus [**5**] ist dann notwendig

$$H_1 = \langle z_1, \ldots, z_l, x_1, \ldots, x_r \rangle .$$

Man beachte dabei, daß schon $x_2 \ldots x_r \in \langle z_1, \ldots, z_l \rangle$ und nicht erst eine echte Potenz von $x_2 \ldots x_r$, also insbesondere $x_1 \in \langle z_1, \ldots, z_l, x_1, \ldots, x_r \rangle$ ist, und daß Fall **1)** nicht eintritt. Damit ist insgesamt hier $Y = G$.

$\square$

Satz 3.11 *Sei*
$G = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, x_1, \ldots, x_r \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] x_1 \ldots x_r = 1 \rangle$ *mit* $g \geq 1$ *und* $r \geq 2$ *und alle* $m_i \geq 2$. *Sei* $w = x_2 \ldots x_r a_1^p b_1^p \cdots a_g^p b_g^p$ *mit* p *eine Primzahl. Weiter sei* $\phi : G \to G$ *ein Endomorphismus mit* $\phi(w) = w$. *Dann ist* ϕ *bereits ein Automorphismus.*

Beweis:
Sei

$$\phi(x_i) = h_i x_{\nu_i}^{\alpha_i} h_i^{-1} =: u_i,\ i = 2, \ldots, r,\ h_i \in G,\ \nu_i \in \{1, \ldots, k\},\ 1 \leq \alpha_i < m_{\nu_i}\,,$$

$$v_j = \phi(a_j) \quad \text{und} \quad w_j = \phi(b_j), \quad j = 1, \ldots, g\,.$$

Wir betrachten die von $u_2, \ldots, u_r, v_1, w_1, \ldots, v_g, w_g$ erzeugte Untergruppe Y von G. Es gibt ein l derart, daß kein u_i konjugiert ist zu einer Potenz von x_l, etwa $l = 1$ (Dies können wir wegen Gleichungen vom Typ $x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1^{-1} x_1$ und Nachschalten von Automorphismen von G ohne Einschränkungen annehmen.)

Wir halten fest, daß ϕ in natürlicher Weise einen Endomorphismus $\tilde{\phi}$ der Faktorgruppe

$$\tilde{G} = \langle \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g, \tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_1^{m_1} = [\tilde{a}_1, \tilde{b}_1] \ldots [\tilde{a}_g, \tilde{b}_g] \tilde{x}_1 = 1 \rangle$$

induziert mit $\tilde{\phi}(\tilde{w}) = \tilde{w}$, wobei natürlich $\tilde{w} = \tilde{a}_1^p \tilde{b}_1^p \ldots \tilde{a}_g^p \tilde{b}_g^p$ ist.

$\tilde{\phi}$ ist ein Automorphismus von $\tilde{G}$ nach Satz **3.4**.
Dies zeigt, daß Y kein freies Produkt zyklischer Gruppen sein kann. Denn wäre das der Fall, lägen die u_i alle jeweils in einem zyklischen freien Faktor von Y, da sie endliche Ordnung haben, und es müßte dann das Bild von Y unter der kanonischen Abbildung von G auf $\tilde{G}$ auch ein freies Produkt zyklischer Gruppen sein. Dies ist aber nicht der Fall nach Korollar **5.4** aus B. Fine, G. Rosenberger und M. Stille [**5**].

Damit ist Y Untergruppe von G von endlichem Index. Damit ist wieder $Y = G$ nach der Riemann-Hurwitz-Formel **(2.1)** und dem Untergruppensatz von D. Singerman (siehe [**24**]), da der Rang von Y kleiner oder gleich dem Rang von G ist, und Y als Untergruppe von G ein Geschlecht größer oder gleich g hat.

□

Kapitel 4

Testelemente in Fuchsschen Gruppen vom Geschlecht $g = 0$ und $r \geq 4$

4.1 Spezialfälle

Satz 4.1 (Spezialfall 1)
Sei $G = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = x_4^q = x_1x_2x_3x_4 = 1\rangle$ *mit* $q \geq 3$ *und* $w = [x_1x_2, x_3x_1]$. *Ist* ϕ *ein Endomorphismus von* G *mit* $\phi(w) = w$, *so ist* ϕ *schon ein Automorphismus von* G.

Beweis:
Für q ungerade haben wir das schon in Satz **2.15** gesehen. Sei nun q gerade.
Sei $\phi(x_1x_2) = u$ und $\phi(x_3x_1) = v$. Es ist $[u, v] = [x_1x_2, x_3x_1]$.
Betrachten wir G als diskrete Untergruppe der $PSL(2, \mathbb{R})$, so folgt nach **[3]**, daß die von u und v erzeugte Untergruppe X von G endlichen Index in G und eine Darstellung $X = \langle u, v \mid [u, v]^{\frac{q}{2}} = 1\rangle$ besitzt, denn X kann wegen der Relation $[u, v]^{\frac{q}{2}}$ kein freies Produkt zyklischer Gruppen sein.
Wegen der Riemann-Hurwitz-Formel **(2.1)** folgt $[G : X] = 2$, und X ist gleich der von x_1x_2 und x_3x_1 erzeugten Untergruppe.
Aus $\phi(x_i^2) = 1$ für $i = 1, 2, 3$ ergibt sich dann $G = \phi(G)$.

□

Satz 4.2 (Spezialfall 2)
Sei

$$G = \langle x_1, \ldots, x_r \mid x_1^2 = \cdots = x_r^2 = x_1 \ldots x_r = 1\rangle \quad \text{mit } r \geq 5\,.$$

$$\text{Sei} \quad w = (x_1x_2)^p(x_3x_1)^p \ldots (x_1x_{r-1})^p(x_rx_1)^p\,, \text{ falls } r \text{ ungerade und}$$

$$w = (x_1x_2)^p(x_3x_1)^p \ldots (x_1x_{r-2})^p(x_{r-1}x_1)^p\,, \text{ falls } r \text{ gerade},$$

wobei $p \geq 3$ eine Primzahl. Ist $\phi : G \to G$ ein Endomorphismus mit $\phi(w) = w$, so ist ϕ schon ein Automorphismus.

Beweis:
Wenn r ungerade ist, erzeugen $(x_1x_2), (x_3x_1), \ldots, (x_1x_{r-1}), (x_rx_1)$ eine Flächengruppe vom Geschlecht $g = r - 1$, und für den Fall, daß r gerade ist, erzeugen $(x_1x_2), (x_3x_1), \ldots, (x_1x_{r-2}), (x_{r-1}x_1)$ eine Flächengruppe vom Geschlecht $g = r - 2$.
Die Argumente sind in beiden Fällen identisch, daher beschränken wir uns auf den Fall, daß r ungerade ist.

Sei $\phi(x_i) = y_i$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ und Y die von $y_1, y_2, \ldots, y_r$ erzeugte Untergruppe von G. Wir schreiben $z_1 = y_1y_2$, $z_2 = y_3y_1$, $z_3 = y_1y_4, \ldots, z_{r-1} = y_ry_1$.
Sei Z die von $z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}$ erzeugte Untergruppe von G.

Es ist $z_1z_2 \ldots z_{r-1}z_1^{-1}z_2^{-1} \ldots z_{r-1}^{-1} = 1$, d.h. Z ist entweder isomorph zu einer Flächengruppe vom Geschlecht 2 oder freies Produkt von $k \leq r - 2$ zyklischer Gruppen (siehe dazu **[8]**).

Angenommen Z ist freies Produkt von $k \leq r - 2$ zyklischer Gruppen. Dann ist wegen $y_i^2 = y_1y_2 \ldots y_r = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ auch Y freies Produkt von $l \leq r - 2$ zyklischer Gruppen, und zwar sind die Faktoren zyklisch der Ordnung 2.

Da jedes y_i in G zu einem x_j konjugiert ist, gibt es mindestens zwei x_j, zu denen es kein y_i gibt, das zu x_j konjugiert ist, ohne Einschränkungen mögen etwa x_1, x_2 diese Eigenschaft haben.

Wegen $\phi(w) = w$ liegt dann w in dem von $x_3, x_4, \ldots, x_r$ erzeugten Normalteiler N von G, was einen Widerspruch ergibt, denn wegen $p \geq 3$ ist das Bild von w in

$$G/N = \langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \mid \tilde{x}_1^2 = \tilde{x}_2^2 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

gerade gleich $\tilde{x}_1 \neq 1$.

Also ist Z isomorph zu einer Flächengruppe vom Geschlecht 2. Wegen der Riemann-Hurwitz-Formel **(2.1)** folgt $[G : Z] = 2$ und damit notwendig $Y = \phi(G) = G$.

$\square$

4.2 Testelemente in Gruppen der Form $G = \langle x_1, \ldots, x_r \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = x_1 \ldots x_r = 1 \rangle$

Sei nun allgemein

$$G = \langle x_1, \ldots, x_r \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = x_1 \ldots x_r = 1 \rangle$$

mit $r \geq 4$, alle $m_i \geq 2$ und mindestens zwei der $m_i \geq 3$ falls $r = 4$ sowie mindestens ein $m_i \geq 3$ falls $r \geq 5$.

Dann können wir G stets schreiben als freies Produkt mit Amalgam $G = H_1 *_A H_2$ mit

$$H_1 = \langle x_1, \ldots, x_s \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_s^{m_s} = 1 \rangle ,$$
$$H_2 = \langle x_{s+1}, \ldots, x_r \mid x_{s+1}^{m_{s+1}} = \cdots = x_r^{m_r} = 1 \rangle \quad \text{und}$$
$$A = \langle x_1 \ldots x_s \rangle = \langle x_{s+1} \ldots x_r \rangle$$

mit $2 \leq s \leq r-2$ derart, daß sowohl A in H_1 als auch in H_2 malnormal ist. (Wir können die unendliche Diedergruppe als Faktor vermeiden.)

Sei nun $m_i \geq 3$ für ein i. Sei ohne Einschränkungen $m_r \geq 3$.
Ist $r = 4$, so können wir noch ohne Einschränkungen $m_1 \geq 3$ annehmen (siehe **Spezialfall 1**).
In der obigen Zerlegung mit A malnormal in H_1 und in H_2 mögen wir also $m_r \geq 3$ falls $r \geq 5$ und $m_1, m_4 \geq 3$ falls $r = 4$ haben.
Wir können bei der Zerlegung $s = r-2$ annehmen.

Satz 4.3 *Sei*

$$G = \langle x_1, \ldots, x_r \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = x_1 \ldots x_r = 1 \rangle$$

mit $r \geq 4$, alle $m_i \geq 2$, sowie $m_1, m_4 \geq 3$ falls $r = 4$ und $m_r \geq 3$ falls $r \geq 5$. Sei $w = x_2 \ldots x_{r-2}[x_{r-1}, x_r]$; $y_1, \ldots, y_k \in G$ mit $k \geq 1$ und Y die von $y_1, \ldots, y_k$ erzeugte Untergruppe. Weiter sei $w \in Y$. Dann tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

1) *Es gibt einen freien Übergang von $\{y_1, \ldots, y_k\}$ zu einem System $\{z_1, \ldots, z_k\}$ mit $z_1 = w$.*

2) *$Y = G$.*

Beweis:
Es trete nicht Fall **1)** ein.
Wir betrachten die obige Zerlegung mit $s = r-2$.
Nutzen wir die Malnormalität von A in H_1 und in H_2 aus, und wenden wir

die Theorie der K-Transformationen bezüglich der Zerlegung an, so erhalten wir analog zu den vorherigen Fällen einen freien Übergang von $\{y_1, \dots, y_k\}$ zu einem System $\{z_1, \dots, z_k\}$ mit $x_2 \dots x_{r-2} \in \langle z_1, \dots, z_l \rangle$ und $[x_{r-1}, x_r] \in \langle z_{l+1}, \dots, z_k \rangle$, $1 \leq l < k$.

Da Fall **1)** nicht eintritt, ist sogar $2 \leq l < k-1$.
Ferner können wir, wenn wir für die Darstellung von $x_2 \dots x_{r-2}$ bzw. $[x_{r-1}, x_r]$ überflüssige Elemente weglassen, annehmen, daß $z_1, \dots, z_l \in H_1$ und $z_{l+1}, \dots, z_k \in H_2$ gilt.

Analog wie beim Beweis von Satz **2.3** folgt $H_2 = \langle z_{l+1}, \dots, z_k \rangle$ (vgl. auch B. Fine, G. Rosenberger, D. Spellman und M. Stille in **[4]** oder N. Peczynski, G. Rosenberger und H. Zieschang in **[15]**):
Sind bei einem Nielsenreduzierten System bzgl. der Faktorisierung als freies Produkt zyklischer Gruppen mehr als 2 Elemente für die Darstellung notwendig, so muß - bei der Länge L bzgl. der gegebenen Faktorisierung als freies Produkt - nach der Theorie der semistabilen Buchstaben und der Voraussetzung, daß Fall **1)** nicht eintritt, die Länge größer 4 sein, aber $L([x_{r-1}, x_r]) = 4$, was einen Widerspruch ergibt.

Dann wird notwendig $H_1 = \langle z_1, \dots, z_l, x_{r-1}, x_r \rangle$, da Fall **1)** nicht eintritt.
Also ist $G = Y$. □

Korollar 4.4 *Sei*

$$G = \langle x_1, \dots, x_r \mid x_1^{m_1} = \dots = x_r^{m_r} = x_1 \dots x_r = 1 \rangle$$

mit $r \geq 4$, alle $m_i \geq 2$, sowie $m_1, m_4 \geq 3$ falls $r = 4$ und $m_r \geq 3$ falls $r \geq 5$. Sei $w = x_2 \dots x_{r-2}[x_{r-1}, x_r]$. Ist $\phi : G \to G$ ein Endomorphismus mit $\phi(w) = w$, so ist ϕ schon ein Automorphismus.

Beweis:
Sei $\phi(x_i) = y_i$ für $i = 2, \dots, r$ und Y die von den y_i erzeugte Untergruppe von G. Angenommen Y ist freies Produkt zyklischer Gruppen.

a) Es gebe zunächst ein x_i, $1 \leq i \leq r-2$ derart, daß kein y_j zu einer Potenz von diesem x_i konjugiert ist, es habe etwa x_1 diese Eigenschaft.
Nun gehen wir analog wie bei Satz **3.11** vor.
ϕ induziert einen Endomorphismus $\tilde{\phi}$ von

$$\tilde{G} = \langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_r \mid \tilde{x}_1^{m_1} = \tilde{x}_{r-1}^{m_{r-1}} = \tilde{x}_r^{m_r} = \tilde{x}_1 \tilde{x}_{r-1} \tilde{x}_r = 1 \rangle$$

$$\text{mit} \quad \tilde{\phi}([\tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_r]) = [\tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_r].$$

In $\tilde{G}$ ist das Bild von Y ein freies Produkt zyklischer Gruppen. Andererseits ist $[\tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_r]$ ein Testelement von $\tilde{G}$ nach Satz **2.10**, falls $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_{r-1}} + \frac{1}{m_r} < 1$ gilt, also dann $\tilde{\phi}$ ein Automorphismus von $\tilde{G}$.

Gleiches gilt auch für $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_{r-1}} + \frac{1}{m_r} = 1$, d.h. für die Euklidischen Fälle $(m_1, m_{r-1}, m_r) = (3,3,3)$, $(2,4,4)$, $(4,2,4)$, $(4,4,2)$, $(2,3,6)$, $(2,6,3)$, $(3,2,6)$, $(3,6,2)$ $(6,2,3)$ oder $(6,3,2)$.
Dies folgt sofort durch Betrachtung von treuen Darstellungen von $\tilde{G}$ in die $PSL(2,\mathbb{C})$, denn $\tilde{\phi}(\tilde{G})$ ist nicht endlich wegen $\tilde{\phi}([\tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_r]) = [\tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_r]$ und damit notwendig $\tilde{\phi}(\tilde{G}) \cong \tilde{G}$.

Ist $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_{r-1}} + \frac{1}{m_r} > 1$, so ist $\tilde{G}$ endlich, und das Bild von Y in $\tilde{G}$ nicht zyklisch wegen $\tilde{\phi}([\tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_r]) = [\tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_r]$.
Also erhalten wir hier in jedem Fall einen Widerspruch.

b) Für jedes x_i, $1 \leq i \leq r-2$ gebe es nun ein y_j derart, daß y_j zu einer Potenz von diesem x_i konjugiert ist. Dann gibt es zu x_{r-1} oder x_r kein y_j, das zu einer Potenz von x_{r-1} bzw. x_r konjugiert ist.

Y ist freies Produkt zyklischer Gruppen. Wegen $(y_2 \ldots y_r)^{m_1} = 1$ ist die Zahl der freien zyklischen Faktoren dann exakt $r-2$. Also ist kein y_j zu einer Potenz von x_{r-1} oder x_r konjugiert.
Andererseits ist $w = x_2 \ldots x_{r-2}[x_{r-1}, x_r] \in Y$.

Wir betrachten nun die Faktorisierung von G als freies Produkt mit Amalgam wie im Satz **4.3** zuvor. Wenden wir bezüglich dieser Faktorisierung K-Transformationen an, so läßt sich w nicht durch $y_2, \ldots, y_r$ darstellen, denn es kann hier keiner der beiden Fälle eintreten.

Dies ergibt einen Widerspruch. Also ist auch in diesem Fall Y kein freies Produkt zyklischer Gruppen.

Damit ist insgesamt Y kein freies Produkt zyklischer Gruppen.
Also hat Y endlichen Index in G. Da Y von Elementen endlicher Ordnung erzeugt wird, hat Y Geschlecht 0, d.h. Y ist Fundamentalgruppe einer Sphäre mit endlich vielen Verzweigungspunkten.

Weiter ist nach Konstruktion der Rang von $Y \leq$ dem Rang von G.
Nach der Riemann-Hurwitz-Formel **(2.1)** und dem Untergruppensatz von D. Singerman (siehe **[24]**), ist damit $Y = G$, also ist ϕ ein Automorphismus.

$\square$

4.3 Testelemente in Gruppen der Form $G = \langle x_1, \ldots, x_r, p_1, \ldots, p_s \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = 1 \rangle$

Es bleibt -bis auf Isomorphie- der Fall endlich erzeugter Produkte zyklischer Gruppen

$$G = \langle x_1, \ldots, x_r, p_1, \ldots, p_s \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = 1 \rangle$$

mit $0 \leq r$, $0 \leq s$, $r + s \geq 3$ und alle $m_i \geq 2$.
Beachte

1) Durch $x_1 \ldots x_r p_1 \ldots p_s p_{s+1} = 1$ kann p_{s+1} weggelassen werden.

2) Für Testelemente macht nur endliche Erzeugung einen Sinn.

Wir können G als freies Produkt mit trivialem Amalgam auffassen.
Die triviale Gruppe ist per Definition malnormal in G.
Die Nielsensche Kürzungsmethode und die Kombination mittels geeigneter Teilworte ergibt dann etwa leicht den folgenden Satz:

Satz 4.5 *Sei*

$$G = \langle x_1, \ldots, x_r, p_1, \ldots, p_s \mid x_1^{m_1} = \cdots = x_r^{m_r} = 1 \rangle$$

mit $0 \leq r$, $0 \leq s$, $r + s \geq 3$ *und alle* $m_i \geq 2$. *Sei* $m_r \geq 3$ *falls* $s = 0$.

i) *Ist* $s \geq 2$, *so sei* $w = x_1 \ldots x_r p_1^p \ldots p_s^p$ *mit* p *Primzahl.*

ii) *Ist* $s = 1$, *so sei* $w = x_1 \ldots x_{r-1}[x_r, p_1]$.

iii) *Ist* $s = 0$, *so sei* $w = x_1 \ldots x_{r-1}[x_{r-1}, x_r]$.

Ist $\phi : G \to G$ *ein Endomorphismus mit* $\phi(w) = w$, *so ist* ϕ *schon ein Automorphismus.*

□

Nun bleibt -bis auf Isomorphie- der Fall:

$$G = \langle x_1, \ldots, x_r \mid x_1^2 = \cdots = x_r^2 = 1 \rangle$$

a) Sei r ungerade, $y_1 = x_1 x_2, \ldots, y_{r-1} = x_1 x_r$ und Y die von $y_1, \ldots, y_{r-1}$ erzeugte Untergruppe von G. Dann hat Y Index 2 in G und ist freie Untergruppe vom Rang $r-1$. Damit ist etwa $w = y_1^p \ldots y_{r-1}^p$ mit p Primzahl oder $w = [y_1, y_2] \ldots [y_{r-2}, y_{r-1}]$ Testelement von Y und damit auch von G, denn ist ϕ ein Endomorphismus von G mit $\phi(w) = w$, so hat $\phi(x_1)$ notwendig die Ordnung 2 in $\phi(G)$, also ist $G = \phi(G)$.

b) Sei r gerade. Dann betrachten wir die Faktorisierung $G = H_1 * H_2$ mit

$$H_1 = \langle x_1 \mid x_1^2 = 1 \rangle \text{ und } H_2 = \langle x_2, \ldots, x_r \mid x_2^2 = \cdots = x_r^2 = 1 \rangle \,.$$

Wenden wir die Nielsensche Kürzungsmethode an, so erhalten wir etwa

$$w = x_1 (x_2 x_3)^p \ldots (x_2 x_r)^p \text{ mit } p \text{ Primzahl oder}$$

$$w = x_1 [x_2 x_3, x_2 x_4] \ldots [x_2 x_{r-1}, x_2 x_r] \text{ als Testelemente von } G \,.$$

Satz 4.6 *Sei*

$$G = \langle x_1, \ldots, x_r \mid x_1^2 = \cdots = x_r^2 = 1 \rangle \text{ mit } r \geq 3 \,.$$

- **i)** *Ist r ungerade, so sei $w_1 = (x_1 x_2)^p \ldots (x_1 x_r)^p$ mit p Primzahl und $w_2 = [x_1 x_2, x_1 x_3] \ldots [x_1 x_{r-1}, x_1 x_r]$.*
- **ii)** *Ist r gerade, so sei $w_1 = x_1 (x_2 x_3)^p \ldots (x_2 x_r)^p$ mit p Primzahl und $w_2 = x_1 [x_2 x_3, x_2 x_4] \ldots [x_2 x_{r-1}, x_2 x_r]$.*

Ist $\phi : G \to G$ ein Endomorphismus mit $\phi(w_1) = w_1$ oder $\phi(w_2) = w_2$, so ist ϕ schon ein Automorphismus.

□

Literaturverzeichnis

[1] P. Ackermann, Zweielementig erzeugte arithmetische Fuchssche Gruppen, Diplomarbeit, Dortmund (2000).

[2] L. P. Comerford jr., Generic elements of free groups, Arch. Math. Vol. **65** (1995), 185-195.

[3] B. Fine und G. Rosenberger, Classification of all generating pairs of two generator fuchsian groups, Groups '93 Galway/St. Andrews 1, London Math. Soc. Lecture Note Series **211**, Cambridge University Press (1995).

[4] B. Fine, G. Rosenberger, D. Spellman und M. Stille, Test words, Generic Elements and Almost Primitivity, Pacific Journal of Mathmatics Vol. **190**, No. **2** (1999), 277-297.

[5] B. Fine, G. Rosenberger und M. Stille, Nielsen Transformations and Applications: A Survey, Groups Korea (1994), Kim/Johnson Eds., De Gruyter (1995), 69-105.

[6] R. N. Kalia und G. Rosenberger, Über Untergruppen ebener diskontinuierlicher Gruppen, Contemp. Math. **33** (1984), 308-327.

[7] S. Katok, Fuchsian Groups, Chicago Lectures in Mathematics, Chicago, London: The University of Chicago Press, (1992).

[8] J. Konieczny, G. Rosenberger und J. Wolny, Tame almost primitive elements, Result. Math. **38** (2000), 116-129.

[9] J. Lehner, Discontinuous groups and automorphic functions, Math. Surveys No. **8**, American Math. Soc. (1964).

[10] R. C. Lyndon und P. E. Schupp, Combinatorial group theory, Berlin, Springer (1977).

[11] H. Neumann, Varieties of groups, Berlin, Springer (1967).

[12] J. Nielsen, Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden, Math. Ann. **78** (1918), 385-397.

[13] J. C. O'Neill und E. C. Turner, Test elements and the retract theorem in hyperbolic groups, New York J. Math., Preprint.

[14] J. C. O'Neill und E. C. Turner, Test elements in direct products of groups, Int. J. of Algebra and Computation, Preprint.

[15] N. Peczynski und W. Reiwer, On cancellations in HNN groups, Math. Z. **158** (1978), 79-86.

[16] N. Peczynski, G. Rosenberger und H. Zieschang, Über Erzeugende ebener diskontinuierlicher Gruppen, Invent. Math. **29** (1975), 161-180.

[17] N. Purzitsky, All two-generator Fuchsian groups, Mathematische Zeitschrift **147** (1976), 87-92.

[18] N. Purzitsky, G. Rosenberger, Two-generator Fuchsian groups of genus one, Mathematische Zeitschrift **128** (1972), 245-251.

[19] E. Rips, Subgroups of small cancellation groups, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 45-47.

[20] C. F. Rocca Jr. and E. C. Turner, Test elements in finitely generated abelian groups, Preprint.

[21] G. Rosenberger, Zum Rang und Isomorphieproblem für freie Produkte mit Amalgam, Habilitationsschrift, Hamburg (1974).

[22] G. Rosenberger, Gleichungen in freien Produkten mit Amalgam, Mathematische Zeitschrift **173** (1980), 1-12.

[23] G. Rosenberger, Über Darstellungen von Elementen und Untergruppen in freien Produkten, Proc. of Groups Korea 1983: Springer Lec. Notes in Math. **1098**, (1984), 142-160.

[24] D. Singerman, Finitely maximal Fuchsian groups, J. London Math. Soc. 2, **6**, 29-38.

[25] E. C. Turner, Test words for automorphisms of free groups, Bull. London Math. Soc. **28** (1996), 255-263.

[26] H. Zieschang, Über die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam, Invent. Math. **10** (1970), 4-37.

[27] H. Zieschang, E. Vogt, H.D. Coldeway, Surfaces and Planar Discontinuous Groups, Lecture Notes In Math. **835**, Springer-Verlag (1980).