Stetige Faltungshalbgruppen und Grenzwertsätze auf Hypergruppen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Dortmund

Dem Fachbereich Mathematik
der Universität Dortmund
vorgelegt von

Sonja Menges

Juli 2003

Gutachter der Dissertation:

Prof. Dr. W. Hazod, Universität Dortmund
Prof. Dr. H. Heyer, Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Januar 2004

Meinen Eltern

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie spielen Grenzwertsätze eine zentrale Rolle (vgl. z.B. [16] und [18]). Insbesondere werden durch solche, die sich in gewisse Schemata einordnen lassen, Klassen von Grenzverteilungen ausgezeichnet. So sind in $\mathbb{R}^d$ die möglichen Limiten von zeilenweise aus infinitesimalen Dreieckssystemen gebildeten Summen gerade die unendlich teilbaren Verteilungen (vgl. [16] und [40]), welche eindeutig in stetige Faltungshalbgruppen einbettbar sind. Für den Spezialfall identisch verteilter Dreieckssysteme erhält man im Kontext von Wahrscheinlichkeitsmaßen aus der Konvergenz $\nu_n^{k_n} \to \mu$ (wobei (k_n) eine Teilfolge der natürlichen Zahlen ist) die kompakt-gleichmäßige Konvergenz der diskreten Faltungshalbgruppen $(\nu_n^{[k_n t]})_{t\geq 0}$ gegen die stetige Faltungshalbgruppe $(\mu^t)_{t\geq 0}$. Sind die zeilenweise gebildeten Summen normierte Summen von unabhängigen, identisch verteilten reellen Zufallsvariablen, d.h. gilt $\nu_n = H_{c_n}(\nu)$ (mit $x \mapsto H_{c_n}(x) := c_n x$) in der obigen Situation mit $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ und einer Nullfolge $(c_n) \subseteq \mathbb{R}_+^*$, so treten als mögliche Grenzwerte die von P. Lévy eingeführten (strikt) stabilen (für $(k_n) = (n)$) und, als Verallgemeinerung, die (strikt) semistabilen (für (k_n) mit $k_n/k_{n+1} \to \alpha \in]0,1[$) Maße auf.

Diese beiden Konzepte lassen sich zunächst auf endlich-dimensionale Vektorräume übertragen. In [49] und [34] definierten M. Sharpe bzw. R. Jajte die operator-stabilen bzw. die operator-semistabilen Maße als Grenzwerte von Summen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvektoren, die anstelle von (c_n) durch Automorphismen normiert sind, und zeigten, dass unter Vollheitsvoraussetzungen operator- (semi-) stabile Maße eindeutig einbettbar sind in stetige Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen, und diese durch algebraische Identitäten charakterisiert werden (vgl. [49], [34] und [40]).

Ausgehend von diesen algebraischen Identitäten entwickelte W. Hazod (vgl. [24], [25] und [28]) ein Konzept für Stabilität bzw. Semistabilität auf lokalkompakten Gruppen G. Die (strikte) Semistabilität wird aufgefasst als Eigenschaft einer Faltungshalbgruppe und definiert durch:

$(\mu_t)_{t\geq 0}$ heißt semistabil bezüglich $a \in \mathrm{Aut}(G)$ und $0 < \alpha < 1$, falls $a(\mu_t) = \mu_{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$ erfüllt ist.

Semistabile Maße wurden von S. Nobel auf einfach zusammenhängenden nilpotenten Liegruppen (vgl. [44] und auch [28]) und von K. Telöken auf total unzusammenhängenden Gruppen (vgl. [51] und auch [28]) untersucht. Der Schluss von der Konvergenz

$$a_n(\nu)^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$$

(wobei μ und ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf G sind und $(a_n) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$) auf Semistabilität als Eigenschaft einer Faltungshalbgruppe führt in beiden Fällen zwangsläufig zu der Frage der (stetigen) Einbettbarkeit von μ. Diese wird in [44] und [51] jeweils im Zusammenhang mit der Gültigkeit eines Funktionalen Grenzwertsatzes behandelt. Ein solcher ist dabei in dem Sinne zu verstehen, dass aus der Konvergenz $\nu_n^{k_n} \to \mu$ für Wahrscheinlichkeitsmaße (ν_n) und μ die Existenz einer Teilfolge $\tilde{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ sowie einer stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ mit $\mu_1 = \mu$ geschlossen werden kann, so dass „funktionale Konvergenz"

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}]{} \mu_t \quad \text{für alle } t \geq 0$$

vorliegt. S. Nobel konnte einen Funktionalen Grenzwertsatz für im Sinne der Definition in [31] gleichgradig wurzelkompakte lokalkompakte Gruppen, die keine nichttrivialen kompakten Untergruppen besitzen, beweisen (vgl. [44]), K. Telöken verallgemeinerte diesen dann auf allgemeinere Klassen lokalkompakter Gruppen, insbesondere auf solche, in denen nichttriviale kompakte Untergruppen auftreten können (vgl. [51] und [52]).

Die beschriebenen Zusammenhänge lassen sich - zumindest im Kontext von Maßen - auf allgemeineren algebraischen Strukturen bzw. Faltungsstrukturen studieren. Ein wesentliches Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die zuletzt angesprochene Problemstellung, d.h. die Frage nach der Einbettbarkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen in stetige Faltungshalbgruppen in Verbindung mit der Gültigkeit eines Funktionalen Grenzwertsatzes, auf Hypergruppen zu behandeln.

Hypergruppen stellen eine natürliche Verallgemeinerung lokalkompakter Gruppen dar, wobei im Gegensatz zur deterministischen Gruppenoperation in der Theorie der Hypergruppen das Ergebnis der Verknüpfung zweier Elemente eines lokalkompakten Raumes K vom Zufall abhängt. Diese zufällige Verknüpfung auf K induziert eine binäre Operation $*$, genannt Faltung, auf der Menge $\mathcal{M}^1(K)$ der Wahrscheinlichkeitsmaße auf K. Die Axiomatik einer Hypergruppe stellt einen Apparat algebraischer und topologischer Hilfsmittel zur Verfügung, mittels dessen sich zahlreiche klassische Resultate aus Wahrscheinlichkeitstheorie und harmonischer Analyse für Hypergruppen aufrecht erhalten lassen. Eine ausführliche Darstellung der Theorie der Hypergruppen sowie zahlreiche Beispiele finden sich in [10].

Die Einführung eines Konzepts der Semistabilität selbst erweist sich als problematisch, da über die Fälle lokalkompakter Gruppen und Kingman-Strukturen (vgl. z.B. [17]) hinaus keine Beispiele von Hypergruppen mit nichttrivialen Automorphismen bekannt sind. Dabei sind Automorphismen aufgrund der nicht vorhandenen deterministischen Gruppenoperation als Homomorphismen bezüglich der Faltung definiert. Im abschließenden Kapitel dieser Arbeit wird ein Ansatz für kommutative Hypergruppen vorgestellt, welcher jedoch letztendlich mangels Beispielen auch lediglich ein solcher bleibt.

Die funktionale Konvergenz von diskreten Faltungshalbgruppen $(\nu_n^{[k_n t]})_{t\geq 0}$ gegen stetige Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf Hypergruppen wird in der vorliegenden Arbeit in einem weiteren Zusammenhang betrachtet, wobei dies ebenfalls motiviert ist durch die Gültigkeit entsprechender Aussagen für den Fall lokalkompakter Gruppen. Für jenen tritt die funktionale Konvergenz $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$ (kompakt-gleichmäßig in $t \geq 0$) als Voraussetzung im von W. Hazod bewiesenen Transfersatz von Gnedenko auf (vgl. [26] und [28]), welcher vom klassischen Transfersatz in [21] auf lokalkompakte Gruppen übertragen ist. In analytischer Formulierung macht der Transfersatz eine Aussage über die Konvergenz der Wahrscheinlichkeitsmaße

$$(\nu_n)^{\rho_n} := \sum_{k=0}^{\infty} \nu_n^k \rho_n(\{k\}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

auf G gegen das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_\xi := \int_{\mathbb{R}_+} \mu_t \, d\xi(t) \tag{2}$$

(mit $(\rho_n) \subseteq \mathcal{M}^1(\mathbb{Z}_+)$ und $\xi \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$). Dabei ergeben sich die $((\nu_n)^{\rho_n})$ im wahrscheinlichkeitstheoretischen Modell gerade als die Verteilungen randomisierter bzw. zufällig gestoppter Produkte, die aus Dreieckssystemen identisch verteilter G-wertiger Zufallsvariablen sowie aus $\mathbb{Z}_+$-wertigen zufälligen Zeiten gebildet werden, und μ_ξ ist die Verteilung des bezüglich einer $\mathbb{R}_+$-wertigen Zufallszeit T mit Verteilung ξ randomisierten Prozesses Y_T, wobei $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein zur ($\{e\}$-) stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ gehöriger Lévy-Prozess auf G ist.

Es wird sich zeigen, dass die analytische Aussage des Transfersatzes unmittelbar auf die allgemeinere Situation von Hypergruppen übertragbar ist. Für eine Formulierung im wahrscheinlichkeitstheoretischen Modell ist sicherzustellen, dass sich randomisierte Irrfahrten und Lévy-Prozesse geeignet auf Hypergruppen definieren lassen.
Für Exponential-Mischungen, d.h. Wahrscheinlichkeitsmaße der Gestalt (2), wobei ξ die Exponential-Verteilung auf $\mathbb{R}_+$ ist, ist im Fall lokalkompakter Gruppen ein Zusammenhang zu geometrischen Faltungen, d.h. Wahrscheinlichkeitsmaßen ν^ρ von der Form (1) mit geometrischen Verteilungen ρ auf $\mathbb{Z}_+$, gegeben. Unter der Voraussetzung, dass die lokalkompakte Gruppe keine nichttrivialen kompakten Untergruppen besitzt, bewies W. Hazod die für $\mathbb{R}^d$ bekannte Charakterisierung, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\lambda \in \mathcal{M}^1(G)$ genau dann eine Exponential-Mischung ist, wenn λ geometrisch unendlich teilbar ist, d.h. für jedes $0 < p < 1$ darstellbar ist als geometrische Faltung $\lambda = \nu_p^{\xi(p)}$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu_p \in \mathcal{M}^1(G)$ und der geometrischen Verteilung $\xi(p) = \sum_{k\geq 0} p(1-p)^k \varepsilon_{k+1}$ mit Parameter p (vgl. [27] und [28]). Der Beweis beruht auf funktionalanalytischen Zusammenhängen und verwendet Schlüsse über Resolventenfamilien stetiger Kontraktionshalbgruppen.
Ein weiterer Teil der vorliegenden Arbeit ist der Fragestellung gewidmet, ob eine entsprechende Aussage für Hypergruppen Gültigkeit besitzt. Da auch stetige Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Hypergruppen zu stetigen Halbgruppen kontrahierender Operatoren auf geeigneten Funktionenräumen führen, ist zunächst mit analogen Beweismethoden eine Übertragung des obigen Resultats möglich. Darüberhinaus wird untersucht, ob auf die auf die Situation von Hypergruppen übertragene Voraussetzung, dass keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen existieren, verzichtet werden kann.

Im Hinblick auf das Ziel, den angesprochenen Fragestellungen im Kontext von Hypergruppen nachzugehen, ist der Inhalt dieser Arbeit wie folgt gegliedert:

Kapitel 0 dient der Einführung in die Theorie der Hypergruppen. Es werden Definitionen, Zusammenhänge und Resultate bereitgestellt, welche in der vorliegenden Arbeit Anwendung finden, sowie bestimmte Klassen von Hypergruppen definiert. Dabei nehmen insbesondere die Doppelnebenklassen-Hypergruppen $K//H$ (wobei H kompakte Unterhypergruppe einer Hypergruppe K ist) eine wichtige Rolle ein, da sie nicht nur als Beispiel dienen, sondern ihre Struktur auch für die Beweise gewisser Aussagen im Zusammenhang mit (H-) stetigen Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen (d.h. μ_0 ist das normierte Haarmaß von H, $\mu_0 = \omega_H$) ausgenutzt wird.

Das erste Kapitel hat ebenfalls vorbereitenden Charakter. Mit Blick auf die bereits angekündigte Formulierung des Transfersatzes von Gnedenko im wahrscheinlichkeitstheoretischen Modell werden Irrfahrten in diskreter Zeit sowie Lévy-Prozesse auf Hypergruppen eingeführt. Lévy-Prozesse $(X_t)_{t\geq 0}$ auf $\mathbb{R}^d$ bzw. auf lokalkompakten Gruppen sind definiert als Prozesse mit unabhängigen und stationären Zuwächsen, die zudem càdlàg-Pfade besitzen. Da auf Hypergruppen K Summe bzw. Differenz zweier Elemente von K nicht definiert sind, ist nicht klar, was unter einer Summe $X + Y$ K-wertiger Zufallsvariablen bzw. einem Zuwachs $X_t - X_s$ für $s < t$ zu verstehen ist.
Hm. Zeuner entwickelte ein Konzept, welches es ermöglicht, über eine Hilfszufallsvariable Λ eine Summe unabhängiger K-wertiger Zufallsvariablen X und Y so zu definieren, dass sie die Verteilung $P_X * P_Y$ besitzt (vgl. [57], [58] und [59]). Diesem zugrunde liegt der Begriff der Konkretisierung einer Hypergruppe. Rekursiv lassen sich dann sogenannte randomisierte Summen für Folgen $(X_j)_{j\geq 1}$ von unabhängigen K-wertigen Zufallsvariablen definieren, wobei diese im Falle der identischen Verteilung der (X_j) als Irrfahrt auf der Hypergruppe bezeichnet werden. Die genaue Konstruktion wird in Abschnitt 1.1 beschrieben.
Der Definition von Lévy-Prozessen auf Hypergruppen liegt die in z.B. [58] und [10] gegebene von (stationären) Zuwachsprozessen zugrunde, welche eine natürliche Verallgemeinerung der Definition von Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen darstellt. In Analogie zum Vektorraum- bzw. Gruppenfall sind dann Lévy-Prozesse auf Hypergruppen stationäre Zuwachsprozesse mit $X_0 = e$ fast sicher (wobei e das neutrale Element der Hypergruppe bezeichnet) und càdlàg-Pfaden. In Abschnitt 1.2 wird deren Zusammenhang mit ($\{e\}$-) stetigen Faltungshalbgruppen beschrieben. Die Resultate sind größtenteils bekannt, sind jedoch der Vollständigkeit halber und da das wahrscheinlichkeitstheoretische Modell, d.h. die Prozessstruktur, benötigt wird, in diese Arbeit aufgenommen.
Abschließend wird in Kapitel 1 eine Verbindung zwischen dem Konzept der randomisierten Summen und der Definition eines Zuwachsprozesses $(X_t)_{t\geq 0}$ hinsichtlich der Darstellbarkeit der Zuwächse über randomisierte Summen hergestellt.

Kapitel 2 ist dem Studium Funktionaler Grenzwertsätze auf Hypergruppen gewidmet, d.h. es wird der Fragestellung nachgegangen, für welche Klassen von Hypergruppen K und unter welchen Voraussetzungen für Wahrscheinlichkeitsmaße (ν_n) und μ auf K und eine Teilfolge (k_n) natürlicher Zahlen aus der Konvergenz $\nu_n^{k_n} \to \mu$ die Existenz einer stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ gefolgert werden kann, so dass

$$\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t \tag{3}$$

für alle $t > 0$, zumindest entlang einer Teilfolge, gilt. Dabei ist, wie analog zum Fall lokalkompakter Gruppen bewiesen werden kann, für $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ die Konvergenz in (3) stets gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ (mit $\nu_n^0 := \varepsilon_e$), und für H-stetige Faltungshalbgruppen lässt sich zeigen, dass sie kompakt-gleichmäßig in $t > 0$ ist, falls $\nu_n * \omega_H = \omega_H * \nu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.
Für hermitesche Hypergruppen, für welche die Involution der Hypergruppe die Identität ist und die insbesondere kommutativ sind, ist bekannt (vgl. z.B. [10]), dass unter der Voraussetzung $\nu_n \to \varepsilon_e$ die Konvergenz $\nu_n^{k_n} \to \mu$ die eindeutige Einbettbarkeit von μ in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ impliziert. Der Beweis kann mit Methoden der Fouriertransformation geführt werden, wobei wesentlich ausgenutzt wird, dass die Fouriertransformierten von Wahrscheinlichkeitsmaßen reellwertig sind, und analoge Schlüsse sind möglich, wenn die Folge (ν_n) infinitesimal ist in einem verallgemeinerten Sinne. Die unmittelbar aus der Anwendung des Stetigkeitssatzes von Lévy resultierenden Funktionalen Grenzwertsätze sind in Abschnitt 2.1 festgehalten.
Der Fall symmetrischer Maße wird in Abschnitt 2.2 untersucht. Dabei heißt ein Maß μ auf einer Hypergruppe K symmetrisch, falls das Bildmaß von μ unter der Involution wieder μ selbst ist, und somit stellt die Situation in diesem Abschnitt eine Verallgemeinerung derjenigen aus 2.1 dar. Die zugrunde liegende Hypergruppe wird jedoch nicht notwendig als kommutativ vorausgesetzt, so dass das Hilfsmittel der Fouriertransformation nicht mehr zur Verfügung steht. An seine Stelle treten funktionalanalytische Methoden, für deren Anwendbarkeit die zu Maßen μ gehörigen Faltungsoperatoren als Operatoren auf dem Hilbertraum $L^2(K) = L^2(K, \omega_K)$ aufgefasst werden. Dazu ist es notwendig, die Existenz eines linken Haarmaßes ω_K auf der Hypergruppe vorauszusetzen. Hauptresultat ist dann ein Funktionaler Grenzwertsatz, welcher in mehreren Schritten über den Spektralsatz für normale Operatoren in Hilberträumen bewiesen wird. Dabei wird gefordert, dass (ν_n) eine Folge von symmetrischen Wahrscheinlichkeitsmaßen ist, die $\nu_n \to \varepsilon_e$ erfüllt. Die Voraussetzungen implizieren dann die eindeutige Einbettbarkeit von μ in eine symmetrische Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ sowie die funktionale Konvergenz (3). Neben dem Funktionalen Grenzwertsatz liefern die funktionalanalytischen Methoden auch eine Einbettbarkeitsaussage für symmetrisch unendlich teilbare Wahrscheinlichkeitsmaße.
In Abschnitt 2.3 wird ein allgemeiner Funktionaler Grenzwertsatz für nicht notwendig symmetrische Maße bewiesen. Formulierung und Beweisstruktur

sind dabei vom bereits erwähnten, von K. Telöken behandelten, Fall lokalkompakter Gruppen übertragen. Wesentliche Voraussetzungen sind einerseits die Eigenschaft, dass die zugrunde liegende Hypergruppe „stark wurzelkompakt" in einem geeigneten Sinne ist, und andererseits die Existenz einer kompakten Unterhypergruppe, so dass die Häufungspunkte gewisser Folgen auf dieser konzentriert sind.
Die im allgemeinen Funktionalen Grenzwertsatz geforderten Bedingungen sind starke Voraussetzungen, so dass es das Ziel von Abschnitt 2.4 ist, Beispiele von Hypergruppen anzugeben und zu konstruieren, für welche sie erfüllt sind. Es lässt sich zeigen, dass für Hypergruppen, für die $\{e\}$ einzige kompakte Unterhypergruppe ist, und die zudem „stark wurzelkompakt" sind, die obige Bedingung für die Häufungspunkte gegeben ist, da die auftretenden Folgen in diesem Fall gegen ε_e konvergieren.

Kapitel 3 beinhaltet den Transfersatz von Gnedenko im Kontext von Hypergruppen K. Wie bereits erwähnt, besitzt seine analytische Aussage in diesem Gültigkeit, d.h. unter geeigneten Voraussetzungen konvergieren die Wahrscheinlichkeitsmaße $((\nu_n)^{\rho_n})$ auf K gegen das Wahrscheinlichkeitsmaß μ_ξ, wobei diese jeweils analog zum Fall lokalkompakter Gruppen in (1) bzw. (2) definiert sind. Über die in Kapitel 1 eingeführten Objekte lassen sich randomisierte Irrfahrten und randomisierte Lévy-Prozesse definieren, so dass auch eine Formulierung im wahrscheinlichkeitstheoretischen Modell möglich ist.

In Kapitel 4 wird die für den Gruppenfall bekannte Charakterisierung, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß λ genau dann geometrisch unendlich teilbar ist, wenn $\lambda = \mu_E$ mit einer stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ und der Exponential-Verteilung $E = E(1)$ mit Parameter 1 auf $\mathbb{R}_+$ gilt, für Hypergruppen K bewiesen. Dabei ist es, wie sich zeigen wird, nicht nötig zu fordern, dass $\{e\}$ einzige kompakte Unterhypergruppe von K ist, womit insbesondere eine Verallgemeinerung des entsprechenden Resultats für lokalkompakte Gruppen gegeben ist. Die oben erwähnten Schlüsse über Resolventenfamilien stetiger Kontraktionshalbgruppen von Faltungsoperatoren sind auch in dieser allgemeineren Situation wesentliche Beweisschritte, werden jedoch auf der Doppelnebenklassen-Hypergruppe $K//H$ mit $H = \{x \in K : \varepsilon_x * \lambda = \lambda * \varepsilon_x = \lambda\}$ vollzogen.

Das abschließende Kapitel 5 ist dem Konzept der Semistabilität im Kontext von Hypergruppen gewidmet. Es wird zunächst gezeigt, dass sich für den Spezialfall von Bessel-Kingman-Hypergruppen, für welche die Homothetien $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto cx$ (mit $c > 0$) Automorphismen sind, analog zum reellen Fall ein

solches einführen lässt.
Sodann wird ein Ansatz für das Konvergenzschema

$$(\rho_n(\nu))^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t \geq 0 \tag{4}$$

gemacht, wobei die $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Homöomorphismen* in K sind und $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\mathbb{N}$ ist mit $k_n/k_{n+1} \to \alpha \in]0,1[$. Dabei wird versucht, eine Eigenschaft „infinitesimale Semistabilität" der Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ so zu definieren, dass die Limiten in (4) diese besitzen. Die gegebene Hypergruppe wird als kommutativ vorausgesetzt, und „infinitesimal" ist dann in dem Sinne zu verstehen, dass die entprechende Bedingung über die eindeutig bestimmte stark negativ definite Funktion Φ mit $\hat{\mu}_t = e^{-t\Phi}$ für $t \geq 0$ definiert ist. Motiviert ist diese Vorgehensweise durch Resultate von Hm. Zeuner ([61]) für den stabilen Fall in der Situation von Sturm-Liouville-Hypergruppen. Der Ansatz beschränkt sich dabei auf den Fall normaler Anziehungsbereiche, d.h. es gilt $\rho_n = \rho^n$ mit einem Homöomorphismus ρ in (4).
Im Anhang zu Kapitel 5 ist der Begriff des Kernbereichs für einen abgeschlossenen Operator, in diesem Fall für den Generator einer zu einer $\{e\}$-stetigen Faltungshalbgruppe gehörigen Kontraktionshalbgruppe $(R_{\mu_t})_{t\geq 0}$ von Faltungsoperatoren, zentral. Der Zusammenhang zu Kapitel 5 ist dabei über einen Teilraum von $L^2(K) \cap C_0(K)$ gegeben, welcher zur Definition eines Φ beschreibenden „infinitesimalen Funktionals" verwendet wird und zudem ein Kernbereich für den Generator von $(R_{\mu_t})_{t\geq 0}$ (betrachtet auf $C_0(K)$ und $L^2(K)$) ist.

Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie die zahlreichen Gespräche, wertvollen Ratschläge und Hilfen während ihres Entstehungsprozesses möchte ich an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. W. Hazod sehr herzlich danken.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$	nichtnegative ganze, rationale, reelle Zahlen
$\mathbb{Q}_+^*, \mathbb{R}_+^*$	$= \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\}$ bzw. $= \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
$[t]$	größte ganze Zahl kleiner oder gleich $t \in \mathbb{R}$
$\bar{A}, A^c$	topologischer Abschluss, Komplement einer Menge A
$\mathrm{HP}(A)$	Menge der Häufungspunkte von A
1_A	Indikatorfunktion der Menge A
E	lokalkompakter Hausdorff-Raum
$C(E), C^b(E)$	stetige bzw. stetige und beschränkte (komplexwertige) Funktionen auf E
$C_c(E)$	stetige (komplexwertige) Funktionen auf E mit kompaktem Träger
$C_0(E)$	stetige (komplexwertige) Funktionen auf E, die im Unendlichen verschwinden
$\mathcal{M}(E), \mathcal{M}^b(E)$	Radon-Maße bzw. beschränkte Radon-Maße auf E
$\mathcal{M}^{(1)}(E)$	kontrahierende Radon-Maße auf E
$\mathcal{M}^1(E)$	Wahrscheinlichkeitsmaße auf E
$\mathcal{M}_+(E)$	positive Radon-Maße auf E
$\mathcal{M}_+^b(E)$	positive beschränkte Radon-Maße auf E
$\mathcal{M}_+^{(1)}$	positive kontrahierende Radon-Maße auf E
$\mathcal{B}(E)$	Borelsche σ-Algebra in E
$\Vert.\Vert_\infty$	Supremums-Norm
$\mathrm{supp}(f)$	Träger einer Funktion
$\mathrm{supp}(\mu)$	Träger eines Maßes
$\Vert\mu\Vert$	$= \sup\{\lvert\mu(f)\rvert : f \in C_c(E), \Vert f\Vert_\infty \leq 1\}$
$\lvert\mu\rvert$	Totalvariation eines Maßes
$\phi(\mu)$	Bildmaß des Maßes μ unter der Abbildung ϕ

ε_x	Punktmaß mit Masse in x
$f\mu$	Maß mit Dichte f bezüglich μ
$\mu_n \to \mu$	schwache Konvergenz von positiven beschränkten Maßen
G	lokalkompakte (Hausdorff-) Gruppe
K	Hypergruppe
$\mathrm{Aut}(G), \mathrm{Aut}(K)$	Automorphismen von G bzw. K
e	neutrales Element der Gruppe/Hypergruppe
$\mu * \nu$	Faltung der Maße μ und ν
μ^n	n-te Faltungspotenz von μ
μ^0	$:= \varepsilon_e$ (sofern nichts anderes gesagt)
$x \mapsto x^-$	stetige Involution der Hypergruppe
μ^-	Bildmaß von μ unter der Involution
A^-	$=\{x^- : x \in A\}$ für $A \subseteq K$
$\bar{f}$	definiert durch $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ für $f : K \to \mathbb{C}$
$f^\sim$	definiert durch $f^\sim(x) = \bar{f}(x^-)$
ω_K	(linkes) Haarmaß einer Hypergruppe K
ω_H	normiertes Haarmaß einer kompakten Unterhypergruppe H
$[A]$	von $A \subseteq K$ erzeugte Unterhypergruppe
$A * B$	Faltung von Mengen $A, B \subseteq K$, siehe 0.7
$f(x * y)$	Translation von Funktionen, siehe 0.7
$\mu * f, f * \mu$	Faltung von Funktion und Maß, siehe 0.7
R_μ	(Links-) Faltungsoperator eines beschränkten Maßes μ
S_μ	(Rechts-) Faltungsoperator eines beschränkten Maßes μ
$f * g$	Faltung von Funktionen, siehe 0.7
$\{x\} * H$	(Links-) Nebenklasse einer Unterhypergruppe H
HxH	$= H * \{x\} * H$, Doppelnebenklasse
$K//H$	Doppelnebenklassen-Hypergruppe, siehe 0.30
G^H	Orbital-Hypergruppe, siehe 0.31
$\hat{K}$	Dual einer kommutativen Hypergruppe
π_K	Plancherel-Maß einer kommutativen Hypergruppe
$L^p(K)$	$= L^p(K, \omega_K)$, mit $\|.\|_p$ $(1 \le p < \infty)$
$L^p(\hat{K})$	$= L^p(\hat{K}, \pi_K)$, mit $\|.\|_p$ $(1 \le p < \infty)$
$\langle f, g\rangle$	$= \int_K f\bar{g}\, d\omega_K$ für $f, g \in L^2(K)$
$\hat{\mu}$	Fouriertransformierte von $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$
$\hat{f}$	Fouriertransformierte von $f \in L^1(K)$ bzw. $f \in L^2(K)$

$\check{\sigma}$	inverse Fouriertransformierte von $\sigma \in \mathcal{M}^b(\hat{K})$
$\check{f}$	inverse Fouriertransformierte von $f \in L^1(\hat{K})$ bzw. $f \in L^2(\hat{K})$
$SN(\hat{K})$	Menge der stark negativ definiten Funktionen auf $\hat{K}$, siehe 0.28
$N_T^{(w)}(\hat{K})$	Menge der T-schwach negativ definiten Funktionen auf $\hat{K}$, siehe 0.28
P_X	Verteilung einer Zufallsvariablen X
$X \overset{d}{=} Y$	Gleichheit in Verteilung
$\mathfrak{A}(\mathcal{E})$	vom Mengensystem $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra
$\mathcal{D}(\mathcal{E})$	vom Mengensystem $\mathcal{E}$ erzeugtes Dynkin-System
$\mathfrak{A}(X_i : i \in I)$	von den Zufallsvariablen (Abbildungen) X_i erzeugte σ-Algebra
$(\mathfrak{A}_t^0)_{t\in I}$	kanonische Filtration eines stochastischen Prozesses $(X_t)_{t\in I}$
$\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$	Produkt-σ-Algebra der σ-Algebren $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$
$E(X\vert\,\mathcal{C})$	bedingte Erwartung von X unter $\mathcal{C}$
$E(X\vert\,Y_i, i \in I)$	$= E(X\vert\,\mathfrak{A}(Y_i : i \in I))$
$E(X\vert\,Y = y)$	Faktorisierung der bedingten Erwartung
$P(A\vert\,\mathcal{C})$	$= E(1_A\vert\,\mathcal{C})$, bedingte Wahrscheinlichkeit
λ	(eindimensionales) Lebesgue-Maß
$\lambda_{\vert A}$	auf $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eingeschränktes Lebesgue-Maß
Γ	Gamma-Funktion
$U(n)$	Gruppe der unitären $n \times n$-Matrizen auf $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$
$SO(n)$	spezielle orthogonale Gruppe, $n \in \mathbb{N}$
B^T	die zu B transponierte Matrix
$L(X, Y)$	$= \{A : X \to Y : A$ ist linear und stetig$\}$ für normierte Räume X und Y
$L(X)$	$= L(X, X)$
$\Vert A\Vert$	Operatornorm für $A \in L(X, Y)$
X'	Dualraum von X
I	Identitätsoperator
$D(A)$	Definitionsbereich eines linearen Operators A
$U \oplus V$	direkte Summe von U und V

Kapitel 0

Vorbereitungen

In diesem vorbereitenden Kapitel werden zunächst die Axiomatik einer Hypergruppe bereitgestellt sowie grundlegende Definitionen, Resultate und Zusammenhänge, welche im Folgenden verwendet werden. Von großer Wichtigkeit im Hinblick auf die späteren Anwendungen ist dabei insbesondere die funktionalanalytische Betrachtung der Familien von Faltungsoperatoren, die sich aus speziellen stetigen Faltungshalbgruppen ergeben. Desweiteren werden die Definitionen und Bezeichnungen für gewisse Klassen von Hypergruppen, auf die im Folgenden Bezug genommen wird, angegeben.

Bemerkung 0.1. Für einen lokalkompakten (Hausdorff-) Raum K bezeichne $\mathcal{M}(K)$ die Menge der Radon-Maße, $\mathcal{M}^b(K) \subseteq \mathcal{M}(K)$ die Menge der beschränkten und $\mathcal{M}^{(1)}(K) \subseteq \mathcal{M}^b(K)$ die Menge der kontrahierenden Radon-Maße auf K. Das Suffix $+$ steht dann jeweils für die Menge der nichtnegativen Elemente, und $\mathcal{M}^1(K)$ sei die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf K.

Definition 0.2. Es sei K ein lokalkompakter (Hausdorff-) Raum. $(K, *)$ heißt *Hypergruppe*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Auf dem Vektorraum $(\mathcal{M}^b(K), +)$ ist eine weitere binäre Operation $*$ gegeben, bezüglich derer $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ eine Algebra ist.

(2) Für $x, y \in K$ ist $\varepsilon_x * \varepsilon_y \in \mathcal{M}^1(K)$, und $\operatorname{supp}(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$ ist kompakt.

(3) Die Abbildung $(\mu, \nu) \mapsto \mu * \nu$ von $\mathcal{M}^1(K) \times \mathcal{M}^1(K)$ nach $\mathcal{M}^1(K)$ ist stetig bezüglich der schwachen Topologie.

(4) Die Abbildung $(x, y) \mapsto \operatorname{supp}(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$ von $K \times K$ nach $\mathcal{C}(K) := \{C \subseteq K : C \neq \emptyset,\ C \text{ kompakt}\}$ ist stetig. Dabei ist $\mathcal{C}(K)$ mit der *Michael-Topologie* versehen, vgl. dazu [42] oder [10], Abschnitt 1.1.

(5) Es existiert ein (eindeutig bestimmtes) *neutrales Element* $e \in K$, so dass $\varepsilon_x * \varepsilon_e = \varepsilon_e * \varepsilon_x = \varepsilon_x$ für alle $x \in K$ gilt.

(6) Es existiert eine (eindeutig bestimmte) *Involution* (d.h. ein Homöomorphismus $x \mapsto x^-$ von K nach K mit der Eigenschaft $(x^-)^- = x$ für alle $x \in K$), so dass $(\varepsilon_x * \varepsilon_y)^- = \varepsilon_{y^-} * \varepsilon_{x^-}$ für alle $x, y \in K$ erfüllt ist, wobei μ^- das Bildmaß von μ unter der Involution bezeichnet.

(7) Für $x, y \in K$ gilt genau dann $e \in \mathrm{supp}(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$, wenn $x = y^-$.

Die Operation $*$ wird als *Faltung* bezeichnet. Die Hypergruppe $(K, *)$ heißt *kommutativ*, falls $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ eine kommutative Algebra ist und *hermitesch*, falls die Involution die Identität ist.
Zur Vereinfachung der Notation wird im Folgenden für eine Hypergruppe $(K, *)$ einfach das Symbol K verwendet, und für $n \in \mathbb{N}$ wird die n-te Faltungspotenz von μ mit μ^n bezeichnet.

Jede lokalkompakte (Hausdorff-) Gruppe G, wobei $\mathcal{M}^b(G)$ die von der Gruppenoperation erzeugte Faltungsstruktur trägt, ist eine Hypergruppe.

Bemerkung 0.3. In den folgenden Kapiteln sei für eine Hypergruppe K stets die Generalvoraussetzung erfüllt, dass K dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, d.h. eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Dann ist (vgl. [2], Satz 31.5) $\mathcal{M}_+(K)$ bezüglich der vagen Topologie metrisierbar und separabel.

Bemerkung 0.4. Für Maße $\mu, \nu \in \mathcal{M}^b(K)$ gilt wegen Eigenschaft (3) in Definition 0.2

$$\mu * \nu = \int_K \int_K \varepsilon_x * \varepsilon_y \, d\mu(x) \, d\nu(y) \tag{0.1}$$

(vgl. dazu [35], Abschnitte 2.3 und 2.4).

Die Faltung kann dann, sofern sie existiert, auf naheliegende Weise für Maße aus $\mathcal{M}_+(K)$ bzw. aus $\mathcal{M}(K)$ definiert werden, vgl. dazu z.B. 1.2.38 in [10].

Definition 0.5. Ein nichttriviales Maß $\omega_K \in \mathcal{M}_+(K)$ heißt *linkes* (bzw. *rechtes*) *Haarmaß* der Hypergruppe K, falls $\varepsilon_x * \omega_K = \omega_K$ (bzw. $\omega_K * \varepsilon_x = \omega_K$) für alle $x \in K$ gilt. ω_K heißt *Haarmaß*, falls ω_K linkes und rechtes Haarmaß der Hypergruppe ist.

Der folgende Satz sichert die Existenz von Haarmaßen für bestimmte Klassen von Hypergruppen.

Satz 0.6. *(a) Auf einer kommutativen Hypergruppe K existiert stets ein Haarmaß ω_K.*

(b) Auf einer kompakten Hypergruppe K existiert stets ein Haarmaß ω_K.

Die Aussage aus (a) geht auf R. Spector zurück (vgl. [50]), wird aber auch in [10] bewiesen (Theorem 1.3.15), ebenso wie diejenige aus (b) (Theorem 1.3.28).

Haarmaße sind bis auf multiplikative Vielfache eindeutig bestimmt, daher sei im Folgenden das Haarmaß einer kompakten Hypergruppe durch die Bedingung $\omega_K(K) = 1$ normiert. ω_K ist dann idempotent, d.h. es gilt $\omega_K * \omega_K = \omega_K$.

Für beliebige Hypergruppen ist die Existenz von Haarmaßen weder gesichert noch widerlegt.

Definition 0.7. Es sei K eine Hypergruppe.

(a) (Faltung von Mengen) Für Teilmengen $A, B \subseteq K$ sei

$$A * B := \bigcup_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} (\{x\} * \{y\}),$$

wobei $\{x\} * \{y\} := \operatorname{supp}(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$ für $x, y \in K$.
Es gilt: Sind A und B kompakt, so ist auch $A * B$ kompakt.

(b) (Translation von Funktionen) Für eine Borel-messbare Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ und $x, y \in K$ sei

$$f(x * y) := \int_K f \, d(\varepsilon_x * \varepsilon_y),$$

falls das Integral existiert. Dabei muss dieses nicht notwendig endlich sein.

(c) (Faltung von Funktionen und Maßen) Für $\mu \in \mathcal{M}_+^b(K)$ und Borel-messbares $f : K \to [0, \infty]$ sind die Faltungen $\mu * f$ und $f * \mu$ definiert durch

$$\begin{aligned} (\mu * f)(x) &:= \int_K f(y^- * x) \, d\mu(y), \\ (f * \mu)(x) &:= \int_K f(x * y^-) \, d\mu(y) \end{aligned}$$

für $x \in K$. Entsprechende Definitionen lassen sich für $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$ und messbares $f : K \to \mathbb{C}$ treffen, sofern die Integrale definiert sind.
In den Punkten von K, in denen $|\mu| * |f|$ endlich ist, ist $\mu * f$ definiert, und es gilt $|\mu * f| \leq |\mu| * |f|$.

(d) (Faltung von Funktionen) Existiert ein linkes Haarmaß ω_K auf K, so ist für messbare Funktionen $f, g : K \to [0, \infty]$, von denen zumindest eine σ-endlich ist, d.h. einen σ-endlichen Träger besitzt, die Faltung $f * g$ definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_K f(x * y) g(y^-) \, d\omega_K(y)$$

für $x \in K$. Auch hier ist die Definition für messbare Funktionen $f, g : K \to \mathbb{C}$ möglich, falls das Integral definiert ist. In den Punkten von K, in denen $|f| * |g|$ endlich ist, ist $f * g$ definiert, und es gilt $|f * g| \leq |f| * |g|$.

Für $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$ ist dann der Faltungsoperator $R_\mu : f \mapsto \mu * f$ ein beschränkter Operator auf den Banachräumen $L^p(K) = L^p(K, \omega_K)$ für $p \geq 1$ (sofern ein linkes Haarmaß ω_K auf der Hypergruppe existiert) und auf $(C_0(K), \|.\|_\infty)$:

Proposition 0.8. *Es sei K eine Hypergruppe.*

(a) Für $f \in C_0(K)$ und $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$ ist $\mu * f \in C_0(K)$, und es gilt

$$\|\mu * f\|_\infty \leq \|\mu\| \|f\|_\infty.$$

(b) Existiert auf K ein linkes Haarmaß, so ist für $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$ und $f \in L^p(K)$ $(1 \leq p < \infty)$ $\mu * f \in L^p(K)$, und es gilt

$$\|\mu * f\|_p \leq \|\mu\| \|f\|_p.$$

Bewiesen werden diese Eigenschaften in [10], Proposition 1.2.16 und Lemma 1.4.6.

Definition 0.9. Eine abgeschlossene nichtleere Teilmenge H einer Hypergruppe K heißt *Unterhypergruppe* von K, falls $H^- = H$ und $H * H \subseteq H$ gelten.

Die Definition liefert unmittelbar, dass stets $e \in H$ gilt. Maße $\mu, \nu \in \mathcal{M}^b(H)$ können als Elemente von $\mathcal{M}^b(K)$ aufgefasst werden, und da H abgeschlossen unter der Faltung ist, kann dann $\mu * \nu$ als Maß auf $\mathcal{M}^b(H)$ betrachtet werden. Somit ist H mit dieser Operation selbst eine Hypergruppe mit demselben neutralen Element und derselben Involution wie K.

Definition 0.10. Es sei K eine Hypergruppe. Für jede nichtleere Teilmenge A von K ist dann

$$[A] := \cap\{H : A \subseteq H,\ H \text{ Unterhypergruppe von } K\}$$

die kleinste Unterhypergruppe von K, die A enthält.

Definition 0.11. Es sei H eine Unterhypergruppe einer Hypergruppe K.

(a) Die Mengen $\{x\} * H$ für $x \in K$ werden als (Links-) *Nebenklassen* von H bezeichnet.

(b) H heißt *normal*, falls $\{x\} * H = H * \{x\}$ für alle $x \in K$ gilt.

(c) H heißt *supernormal*, falls $\{x^-\} * H * \{x\} \subseteq H$ für alle $x \in K$ erfüllt ist.

Eine wichtige Rolle nehmen in dieser Arbeit $\{e\}$- bzw. allgemeiner H-stetige Faltungshalbgruppen ein:

Definition 0.12. Sei K eine Hypergruppe. Eine Familie $(\mu_t)_{t>0} \subseteq \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen auf K heißt *Faltungshalbgruppe*, falls

$$\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t} \quad \text{für alle } s, t > 0$$

erfüllt ist. Existiert zudem $\mu_0 := \lim_{t \searrow 0} \mu_t$ in der schwachen Topologie, so gilt $\mu_0 * \mu_t = \mu_t * \mu_0 = \mu_t$ für alle $t \geq 0$, und es ist $\mu_0 = \omega_H$, wobei H eine kompakte Unterhypergruppe von K ist. In diesem Fall heißt $(\mu_t)_{t\geq 0}$ (H-) *stetige Faltungshalbgruppe.*

Bemerkung 0.13. Ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ im Sinne der obigen Definition, so ist die Abbildung $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \mu_t$ stetig bezüglich der schwachen Topologie in $\mathcal{M}_+^{(1)}(K)$.

Bemerkung 0.14. Ist im Weiteren für eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_+^b(K)$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(K)$ die Art der Konvergenz $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ nicht angegeben, so ist stets Konvergenz in der schwachen Topologie gemeint.

Proposition 0.15. *Es sei K eine Hypergruppe und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^{(1)}(K)$.*

(a) Setzt man für $t \geq 0$ $\;T_t := R_{\mu_t}$, wobei $R_{\mu_t} : C_0(K) \to C_0(K)$ den Faltungsoperator $f \mapsto R_{\mu_t} f = \mu_t * f$ bezeichne (vgl. Proposition 0.8(a)), so ist $(T_t)_{t\geq 0} \subseteq L(C_0(K))$ eine Kontraktionshalbgruppe der Klasse (C_0) im Sinne der Definition aus [55] (vgl. Definition 1 in IX, Abschnitt 1), d.h. es gelten

(1) $T_s T_t = T_{s+t}$ *für alle* $s, t \geq 0$*;*

(2) $T_0 = I$*;*

(3) $\lim_{t \to t_0} T_t f = T_{t_0} f$ *für jedes* $t_0 \geq 0$ *und jedes* $f \in C_0(K)$*;*

(4) $\|T_t\| \leq 1$ *für alle* $t \geq 0$*.*

(b) Existiert auf K *ein linkes Haarmaß und ist für* $t \geq 0$ $\; T_t = R_{\mu_t} : L^2(K) \to L^2(K)$ *der Faltungsoperator auf* $L^2(K)$*, so ist* $(T_t)_{t \geq 0}$ *eine Kontraktionshalbgruppe der Klasse* (C_0) *auf dem Banachraum* $L^2(K)$*.*

Beweis. (1) folgt wegen $\mu * (\nu * f) = (\mu * \nu) * f$, (2) ist klar, da $\mu_0 = \varepsilon_e$, und (4) ergibt sich aus Proposition 0.8. Bemerkung 0.13 und Proposition 1.2.16(iv) bzw. Lemma 1.4.6 in [10] implizieren (3). □

Die Aussage aus Proposition 0.15(b) gilt auch für $L^p(K)$ mit $1 \leq p < \infty$. Da später mit Faltungsoperatoren auf dem Hilbertraum $L^2(K)$ gearbeitet wird, ist sie hier nur für $p = 2$ formuliert.

Der infinitesimale Generator von $(R_{\mu_t})_{t \geq 0}$ ist dann wie folgt definiert:

Definition 0.16. Für eine Kontraktionshalbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$ der Klasse (C_0) auf einem Banachraum B, d.h. nach Proposition 0.15 insbesondere für die zu einer $\{e\}$-stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ gehörigen Faltungsoperatoren, also $T_t = R_{\mu_t}$ für $t \geq 0$, ist der *infinitesimale Generator* A definiert durch

$$Af := \lim_{h \searrow 0} h^{-1}(T_h - I)f$$

für

$$f \in D(A) = \{f \in B : \lim_{h \searrow 0} h^{-1}(T_h - I)f \text{ existiert in } B\}$$

(wobei hier $B = C_0(K)$ oder $B = L^2(K)$).

Es gilt dann (vgl. dazu [55], Kapitel IX, Theorem 1 in Abschnitt 3 und Theorem 1 in Abschnitt 4):

Satz 0.17. *(a)* $D(A)$ *ist dicht in* B*.*

(b) Ist $\alpha > 0$*, so besitzt der Operator* $(\alpha I - A)$ *eine Inverse* $R(\alpha, A) := (\alpha I - A)^{-1} \in L(B)$*, und es gilt*

$$R(\alpha, A)f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f \, dt \quad \text{für } f \in B \tag{0.2}$$

(Integraldarstellung der Resolventen).

Bemerkung 0.18. Das Integral in (0.2) ist ein uneigentliches Riemann-Integral. Für die Definition des Integrals $\int S(t)\,dt$ einer Operator-wertigen Funktion $S(t)$ einer reellen Variablen t sei verwiesen auf [36], Kapitel III, Abschnitt 3.1. Entscheidend ist hier die *starke* Stetigkeit, d.h. Eigenschaft (3) in Proposition 0.15, die es ermöglicht, das Integral für jedes $f \in B$ zu definieren.

Ist K eine *kommutative* Hypergruppe, so steht als Instrument die Fouriertransformation zur Verfügung, über die es möglich ist, die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen zu beschreiben.

Definition 0.19. Es sei K eine kommutative Hypergruppe. Eine stetige Funktion $\chi : K \to \mathbb{C}$ heißt *multiplikativ*, falls

(1) $\chi(e) = 1$ und

(2) $\chi(x * y) = \chi(x)\chi(y)$ für alle $x, y \in K$

erfüllt sind. Gilt zudem $\chi(x^-) = \overline{\chi(x)}$ für alle $x \in K$, so heißt χ ein *Semicharakter*. Ein beschränkter Semicharakter wird als *Charakter* bezeichnet. Der *Dual* $\hat{K}$ von K ist dann der Raum der Charaktere, der mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen ein lokalkompakter (Hausdorff-) Raum ist.

Definition 0.20. Es sei K eine kommutative Hypergruppe (mit Haarmaß ω_K).

(a) Für $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$ ist die *Fouriertransformierte* $\hat{\mu} : \hat{K} \to \mathbb{C}$ definiert durch
$$\hat{\mu}(\chi) := \int_K \bar{\chi}\, d\mu, \quad \chi \in \hat{K}.$$
Die Abbildung $\mu \mapsto \hat{\mu}$ von $\mathcal{M}^b(K)$ nach $C^b(\hat{K})$ wird als *Fouriertransformation* (von K) bezeichnet.

(b) Die *Fouriertransformierte* einer Funktion $f \in L^1(K)$ ist durch
$$\hat{f}(\chi) := (f\omega_K)^\wedge(\chi) = \int_K f\bar{\chi}\, d\omega_K, \quad \chi \in \hat{K},$$
definiert.

Satz 0.21 (Levitan-Plancherel). *Es sei K eine kommutative Hypergruppe. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß $\pi_K \in \mathcal{M}_+(\hat{K})$, so dass*
$$\int_K |f|^2\, d\omega_K = \int_{\hat{K}} |\hat{f}|^2\, d\pi_K$$

für alle $f \in L^1(K) \cap L^2(K)$ gilt. π_K wird Plancherel-Maß der Hypergruppe genannt.

Für den Beweis des Satzes sei auf [35], Theorem 7.3I, oder [10], Theorem 2.2.13, verwiesen. Im Gegensatz zum Fall abelscher lokalkompakter Gruppen stimmt der Träger des Plancherel-Maßes im Allgemeinen nicht mit dem Dual $\hat{K}$ von K überein.

Die Fouriertransformation kann wie folgt stetig auf $L^2(K)$ fortgesetzt werden, vgl. dazu Theorem 2.2.22 in [10]. Dabei ist wieder K eine kommutative Hypergruppe.

Definition und Satz 0.22. Für $f \in L^2(K)$ ist die *Fouriertransformierte* $\hat{f} \in L^2(\hat{K})$ definiert durch $\hat{f} := \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n$ in $L^2(\hat{K})$, wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c(K)$ mit $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ in $L^2(K)$. Die Fouriertransformation ist dann wohldefiniert auf $L^2(K)$, und es gilt

$$\int_K |f|^2 \, d\omega_K = \int_{\hat{K}} |\hat{f}|^2 \, d\pi_K$$

für alle $f \in L^2(K)$.

Definition 0.23. Es sei K eine kommutative Hypergruppe.

(a) Die *inverse Fouriertransformierte* $\check{\sigma}$ eines Maßes $\sigma \in \mathcal{M}^b(\hat{K})$ ist definiert durch

$$\check{\sigma}(x) := \int_{\hat{K}} \chi(x) \, d\sigma(\chi) \quad \text{für alle } x \in K.$$

(b) Für eine Funktion $f \in L^1(\hat{K}) = L^1(\hat{K}, \pi_K)$ ist die *inverse Fouriertransformierte* definiert durch

$$\check{f}(x) := (f\pi_K)^\vee(x) = \int_{\hat{K}} f(\chi)\chi(x) \, d\pi_K(\chi) \quad \text{für alle } x \in K.$$

Die inverse Fouriertransformation kann zu einer Isometrie zwischen $L^2(\hat{K})$ und $L^2(K)$ fortgesetzt werden, vgl. [10], Theorem 2.2.34.

Definition und Satz 0.24. Es sei K eine kommutative Hypergruppe. Für $f \in L^2(\hat{K})$ ist die inverse Fouriertransformierte $\check{f} \in L^2(K)$ gegeben durch $\check{f} := \lim_{n\to\infty} \check{f}_n$ in $L^2(K)$, wobei die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c(\hat{K})$ $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ in $L^2(\hat{K})$ erfüllt. Die inverse Fouriertransformation ist dann wohldefiniert auf $L^2(\hat{K})$, und es gilt

$$\int_K |\check{f}|^2 \, d\omega_K = \int_{\hat{K}} |f|^2 \, d\pi_K$$

für alle $f \in L^2(\hat{K})$.

Somit ist die Fouriertransformation $\wedge$ ein isometrischer Isomorphismus von $L^2(K)$ nach $L^2(\hat{K})$, und die inverse Fouriertransformation $\vee$ ist ein isometrischer Isomorphismus von $L^2(\hat{K})$ nach $L^2(K)$. Es gilt $\wedge^{-1} = \vee$.

Für die Fouriertransformation besitzt ein Eindeutigkeitssatz Gültigkeit, vgl. Theorem 2.2.24 in [10]:

Satz 0.25. *Es seien K eine kommutative Hypergruppe und $\mu, \nu \in \mathcal{M}^b(K)$ mit $\hat{\mu}_{|supp(\pi_K)} = \hat{\nu}_{|supp(\pi_K)}$. Dann folgt $\mu = \nu$.*

Zwischen der Konvergenz einer Folge von positiven beschränkten Maßen und der der zugehörigen Fouriertransformierten besteht der folgende Zusammenhang, vgl. [10], Theoreme 4.2.2 und 4.2.11:

Satz 0.26. *Es sei K eine kommutative Hypergruppe.*

(a) Ist $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{M}^b_+(K)$ und $\mu \in \mathcal{M}^b_+(K)$, so konvergiert $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen μ, wenn $(\hat{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\hat{\mu}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\hat{K}$ konvergiert.

(b) Es sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{M}^b_+(K)$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(K) < \infty$, und $(\hat{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere punktweise auf $supp(\pi_K)$ gegen eine Funktion f auf $\hat{K}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß $\mu \in \mathcal{M}^b_+(K)$ mit $f = \hat{\mu}$ π_K-lokal fast überall, und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert vag gegen μ. Ist darüberhinaus $1_K \in supp(\pi_K)$ und f stetig im Einheitscharakter 1_K, so gilt $\hat{\mu} = f$, und die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen μ.

Definition 0.27. Eine kommutative Hypergruppe K heißt *Godement-Hypergruppe*, falls der Einheitscharakter 1_K im Träger des Plancherel-Maßes gelegen ist.

Für $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf einer kommutativen Hypergruppe gilt die *Schoenberg-Beziehung* (vgl. [10], Theorem 5.2.15). Zu ihrer Formulierung wird die folgende Definition (vgl. ebenfalls [10], Definition 4.4.18/4.4.19) benötigt.

Definition 0.28. Es sei K eine kommutative Hypergruppe und $f : \hat{K} \to \mathbb{C}$ stetig.

(a) f heißt *stark negativ definit*, falls $f(1_K) \geq 0$ gilt sowie $\exp(-tf)$ für jedes $t > 0$ *stark positiv definit* ist. Dabei heißt eine Funktion $g : \hat{K} \to \mathbb{C}$ stark positiv definit, falls ein $\mu \in \mathcal{M}^b_+(K)$ existiert, so dass $\hat{\mu} = g$.
$SN(\hat{K})$ bezeichne die Menge der stark negativ definiten Funktionen auf $\hat{K}$.

(b) f heißt *T-schwach negativ definit*, $f \in N_T^{(w)}(\hat{K})$, falls $f(1_K) \geq 0$ und $f(\bar{\chi}) = \overline{f(\chi)}$ für alle $\chi \in \hat{K}$ erfüllt sind sowie $\int_{\hat{K}} f\, d\sigma \leq 0$ für alle $\sigma \in T := \{\sigma \in \mathcal{M}^b(\hat{K}) : \sigma = c\varepsilon_{1_K} + g\pi_K \text{ mit } c \in \mathbb{C}, g \in C_c(\hat{K})\}$ mit $\check{\sigma} \geq 0$ und $\check{\sigma}(e) = 0$ gilt.

Satz 0.29 (Schoenberg-Beziehung). *Es sei K eine kommutative Hypergruppe.*

(a) Zu jeder $\{e\}$-stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $f \in SN(\hat{K})$ mit $\hat{\mu}_t = \exp(-tf)$ für alle $t \geq 0$.

(b) Zu jeder Funktion $f \in N_T^{(w)}(\hat{K})$ existiert eine eindeutig bestimmte $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ mit $\hat{\mu}_{t|supp(\pi_K)} = \exp(-tf)_{|supp(\pi_K)}$ und $\hat{\mu}_t(1_K) \leq \exp(-tf(1_K))$ für alle $t \geq 0$.

Abschließend in diesem Kapitel werden nun, wie angekündigt, die Definitionen bestimmter Klassen von Hypergruppen sowie die verwendeten Notationen angegeben. Es sind dies im Einzelnen Doppelnebenklassen-, Orbital- und Sturm-Liouville-Hypergruppen.

Definition und Bezeichnungen 0.30 (Doppelnebenklassen-Hypergruppen). (vgl. [35], Abschnitt 14, oder [10], 1.5.13-1.5.20)
Es sei K eine Hypergruppe und $H \subseteq K$ eine kompakte Unterhypergruppe mit Haarmaß $\omega_H \in \mathcal{M}^1(H)$. Die *Doppelnebenklassen* von H sind dann die Mengen $H * \{x\} * H$, wobei $x \in K$. Zur Vereinfachung der Notation werden diese mit HxH bezeichnet.

$$K//H := \{HxH : x \in K\}$$

sei die Menge der Doppelnebenklassen. $K//H$ ist dann eine Zerlegung von K in kompakte Teilmengen, insbesondere gilt $K//H \subseteq \mathcal{C}(K)$. $K//H$ trage die Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Projektion

$$\begin{aligned} \pi'_H : K &\rightarrow K//H \\ x &\mapsto HxH. \end{aligned}$$

Diese stimmt mit der durch die Michael-Topologie auf $\mathcal{C}(K)$ (vgl. Definition 0.2(4)) induzierten relativen Topologie überein, und versehen mit dieser Topologie ist $K//H$ ein lokalkompakter (Hausdorff-) Raum. Die Abbildung π'_H kann zu einer Abbildung

$$\begin{aligned} \pi'_H : \mathcal{M}^b(K) &\rightarrow \mathcal{M}^b(K//H) \\ \mu &\mapsto \pi'_H(\mu) \end{aligned}$$

erweitert werden, wobei $\pi'_H(\mu)$ das Bildmaß von μ unter der kanonischen Projektion ist. Schränkt man π'_H auf den Raum der H-invarianten beschränkten Maße auf K

$$\mathcal{M}^b_H(K) := \{\mu \in \mathcal{M}^b(K) : \omega_H * \mu * \omega_H = \mu\}$$

ein und bezeichnet diese eingeschränkte Abbildung mit π_H, so ist π_H bijektiv. Die Inverse von π_H ist die eindeutig bestimmte positiv-stetige lineare Abbildung (vgl. die Definition in 2.3 in [35]) $\pi^*_H : \mathcal{M}^b(K//H) \to \mathcal{M}^b_H(K)$, die $\pi^*_H(\varepsilon_{HxH}) = \omega_H * \varepsilon_x * \omega_H$ für jedes $x \in K$ erfüllt. Durch

$$\mu * \nu := \pi_H(\pi^*_H(\mu) * \pi^*_H(\nu))$$

für $\mu, \nu \in \mathcal{M}^b(K//H)$ ist dann eine Faltungsstruktur auf $\mathcal{M}^b(K//H)$ definiert, bezüglich derer π_H und π^*_H Homomorphismen sind. Mit dieser Faltung ist $K//H$ eine Hypergruppe mit neutralem Element H und der durch $(HxH)^- = Hx^-H$ für $x \in K$ gegebenen Involution.
Die Abbildungen π_H und π^*_H sind stetig.

Definition und Bezeichnungen 0.31 (Orbital-Hypergruppen). Es sei G eine lokalkompakte (Hausdorff-) Gruppe, $\mathrm{Aut}(G)$ die mit der Topologie aus Definition 26.3 in [30] versehene Gruppe der (topologischen) Automorphismen von G und $H \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ eine kompakte Untergruppe mit normiertem Haarmaß ω_H. Mit Theorem 1.1.11 in [10] oder Theorem 8.3A in [35] folgt, dass der Raum

$$G^H = \{x^H : x \in G\},$$

wobei für $x \in G$

$$x^H = \{x^h : h \in H\} = \{a(x) : a \in H\}$$

den Orbit von x unter H bezeichnet, eine Hypergruppe ist mit der durch

$$\varepsilon_{x^H} * \varepsilon_{y^H} := \int_H \varepsilon_{(a(x)y)^H}\, d\omega_H(a) = \int_H \varepsilon_{(xb(y))^H}\, d\omega_H(b)$$

für $x^H, y^H \in G^H$ gegebenen Faltung. G^H ist dabei eine Zerlegung von G in kompakte Teilmengen, und Quotiententopologie und relative Topologie bezüglich der Michael-Topologie auf $\mathcal{C}(G)$ stimmen überein. Mit dieser Topologie ist G^H ein lokalkompakter (Hausdorff-) Raum. Neutrales Element der Hypergruppe ist $e^H = \{e\}$, und die Involution ist gegeben durch $(x^H)^- = (x^{-1})^H$ für $x \in G$.

Bemerkung 0.32. (a) Eine spezielle Klasse von Doppelnebenklassen-Hypergruppen $K//H$ sind diejenigen, für welche $K = G$ eine lokalkompakte (Hausdorff-) Gruppe und H eine kompakte Untergruppe von G ist. Nach Theorem 8.3B in [35] ist jede Orbital-Hypergruppe isomorph zu einer solchen Doppelnebenklassen-Hypergruppe.

(b) In [10] (vgl. die Theorem 8.1.31 vorangehende Definition sowie Beispiel B1 im Anhang) wird bei der Definition von Orbital-Hypergruppen G^H zusätzlich gefordert, dass die inneren Automorphismen von G in H enthalten sind, während hier auf diese Bedingung verzichtet wird.

Bemerkung 0.33. Im Folgenden besitze ein beliebiger lokalkompakter Raum stets die Hausdorff-Eigenschaft.

Definition und Bezeichnungen 0.34 (Sturm-Liouville-Hypergruppen). (vgl. z.B. [59], Abschnitte 2,3 und 4, oder [10], Abschnitt 3.5)

(1) Es sei $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine *Sturm-Liouville-Funktion*, d.h. es gelten $A \in C(\mathbb{R}_+)$, $A(x) > 0$ für alle $x > 0$ sowie $A_{|\mathbb{R}_+^*} \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$. Für A seien die Bedingungen (SL1) und (SL2) wie folgt definiert:

(SL1) Es ist entweder (SL1a) oder (SL1b) erfüllt, wobei

(SL1a) (Singularität in 0) Es ist $A(0) = 0$, und der Quotient A'/A besitzt in einer Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}_+$ die Darstellung

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{\alpha_0}{x} + \alpha_1(x) \quad \text{für } 0 \neq x \in U$$

mit $\alpha_0 > 0$ und $\alpha_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $\alpha_1(-x) = -\alpha_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(SL1b) (Regularität in 0) Es ist $A(0) > 0$ und $A \in C^1(\mathbb{R}_+)$.

(SL2) Es existiert eine Funktion $\beta \in C^1(\mathbb{R}_+)$ mit $\beta(0) \geq 0$, so dass $\frac{A'}{A} - \beta$ nichtnegativ und monoton fallend auf $\mathbb{R}_+^*$ und $q := \frac{1}{2}\beta' - \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{A'}{2A}\beta$ monoton fallend auf $\mathbb{R}_+^*$ ist.

(2) Für eine Sturm-Liouville-Funktion A wird der zugehörige *Sturm-Liouville-Operator* L_A erklärt durch

$$L_A f := -\frac{1}{A}(Af')' = -f'' - \frac{A'}{A}f' \quad \text{für } f \in C^2(\mathbb{R}_+^*).$$

Der Differentialoperator l auf $C^2(]0,\infty[^2)$ ist definiert durch

$$l[u](x,y) := (L_A)_x u(x,y) - (L_A)_y u(x,y)$$

für $x, y > 0$ und $u \in C^2(]0,\infty[^2)$, wobei die Indizes x und y am Operator die Variable bezeichnen, auf die der Operator wirkt.

(3) Eine Hypergruppe $(\mathbb{R}_+, *)$ wird als *Sturm-Liouville-Hypergruppe* bezeichnet, falls eine Sturm-Liouville-Funktion A existiert, so dass für jede reellwertige Funktion f auf $\mathbb{R}_+$, die die Einschränkung einer geraden C^∞-Funktion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}_+$ ist, die Funktion u_f, definiert durch

$$u_f(x,y) := \int_{\mathbb{R}_+} f \, d(\varepsilon_x * \varepsilon_y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}_+,$$

zweimal differenzierbar ist und die partielle Differentialgleichung

$$l[u_f] = 0, \quad (u_f)_y(x,0) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^*$$

erfüllt. Dabei bezeichnet der Index y die partielle Ableitung von u_f nach der Variablen y.

(4) Nach Theorem 3.11 in [59] oder Theorem 3.5.45 in [10] existiert zu gegebener Sturm-Liouville-Funktion A mit den Eigenschaften (SL1) und (SL2) eine gemäß (3) zu A gehörige Sturm-Liouville-Hypergruppe. Im Folgenden genüge daher für eine Sturm-Liouville-Hypergruppe die zugehörige Sturm-Liouville-Funktion stets den Bedingungen (SL1) und (SL2).

Eigenschaften 0.35 (von Sturm-Liouville-Hypergruppen). Sei $(\mathbb{R}_+, *)$ eine Sturm-Liouville-Hypergruppe mit Sturm-Liouville-Funktion A.

(a) Das neutrale Element ist 0.

(b) Die Hypergruppe ist hermitesch.

(c) Das Maß mit Dichte A bezüglich $\lambda_{|\mathbb{R}_+}$ ist Haarmaß der Hypergruppe.

(d) Es existiert

$$\gamma := \lim_{x\to\infty} \frac{A'(x)}{2A(x)} \geq 0.$$

γ wird als *Index* der Sturm-Liouville-Hypergruppe bezeichnet.

(e) Eine stetige Funktion $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ ist genau dann multiplikativ, wenn sie das Anfangswertproblem

$$L_A\phi = r\phi, \quad \phi(0) = 1 \quad \text{und } \phi'(0) = 0 \quad \text{für ein } r \in \mathbb{C}$$

löst.
Eine multiplikative Funktion ist genau dann reellwertig und beschränkt, also ein Charakter der Hypergruppe, wenn der zugehörige Eigenwert r

des Sturm-Liouville-Operators ein Element von $\mathbb{R}_+$ ist. Wird der Dual $\hat{\mathbb{R}}_+$ durch

$$\hat{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup i[0, \gamma]$$

parametrisiert, so sind die Charaktere ϕ_λ genau die Lösungen des Anfangswertproblems

$$L_A \phi_\lambda = (\lambda^2 + \gamma^2)\phi_\lambda, \quad \phi_\lambda(0) = 1 \quad \text{und } \phi'_\lambda(0) = 0$$

für $\lambda \in \hat{\mathbb{R}}_+$. Im Folgenden wird also der Dual der Hypergruppe $\mathbb{R}_+$ mit der Teilmenge $\mathbb{R}_+ \cup i[0, \gamma] \subseteq \mathbb{C}$ identifiziert. Insbesondere ist dann für $\mu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}_+)$ die Fouriertransformierte $\hat{\mu}$ für $\lambda \in \hat{\mathbb{R}}_+$ definiert, d.h. $\hat{\mu}(\lambda) = \hat{\mu}(\phi_\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} \phi_\lambda \, d\mu$.

Bewiesen werden diese Eigenschaften z.B. in [56] und [10]. Spezielle Sturm-Liouville-Hypergruppen sind Bessel-Kingman-Hypergruppen:

Definition und Bezeichnungen 0.36. Ist $\alpha > -\frac{1}{2}$, so heißt die zur Sturm-Liouville-Funktion

$$A(x) := x^{2\alpha+1}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

gehörige Sturm-Liouville-Hypergruppe $(\mathbb{R}_+, *)$ $(= (\mathbb{R}_+, \underset{\alpha}{*}))$ *Bessel-Kingman-Hypergruppe* mit Parameter α. Es gilt $\gamma = 0$ und somit $\hat{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+$, wobei für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ der Charakter ϕ_λ von der Gestalt

$$\phi_\lambda(x) = \Lambda(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

mit der modifizierten Besselfunktion $\Lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\Lambda(x) := \begin{cases} 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha} & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases},$$

ist.
Speziell gilt dann für die Homothetie $H_c : \mathbb{R}_+ \ni x \mapsto cx$ $(c > 0)$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned} (H_c(\mu))^\wedge(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}_+} \phi_\lambda(cx) \, d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \phi_{c\lambda}(x) \, d\mu(x) \\ &= \hat{\mu}(c\lambda). \end{aligned}$$

Kapitel 1

Zuwachsprozesse auf Hypergruppen

Es werden hier zunächst Irrfahrten auf einer Hypergruppe K eingeführt, die sich aus Folgen $(X_j)_{j\geq 1}$ von unabhängigen, identisch verteilten K-wertigen Zufallsvariablen ergeben. Desweiteren werden stationäre Zuwachsprozesse $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Zustandsraum K definiert und ihr Zusammenhang mit stetigen Faltungshalbgruppen beschrieben. Dabei spielen diejenigen Prozesse eine zentrale Rolle, welche càdlàg-Pfade besitzen. Diese Vorbereitungen erweisen sich als notwendig, um in Kapitel 3 den Transfersatz von Gnedenko im wahrscheinlichkeitstheoretischen Modell zu formulieren.
In beiden Fällen ergibt sich dabei zunächst das Problem, dass keine deterministische punktweise Operation in der Hypergruppe K gegeben ist, die es im ersten Fall erlauben würde, eine Summe $X + Y$ von zwei unabhängigen K-wertigen Zufallsvariablen X und Y direkt zu definieren. Ebenso ist unklar, was im zweiten Fall unter einem Zuwachs $X_t - X_s$ für $s < t$ zu verstehen ist. Die folgende Definition eines Zuwachsprozesses (allgemein mit total geordneter Parametermenge I) verallgemeinert die Definition eines Prozesses mit unabhängigen Zuwächsen.

Definition 1.1. Sei $I \neq \emptyset$ eine total geordnete Menge. $(X_t)_{t\in I}$ sei ein stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in einer Hypergruppe K. $(\mathfrak{A}_t^0)_{t\in I}$ sei die kanonische Filtration von $(X_t)_{t\in I}$. $(X_t)_{t\in I}$ heißt *Zuwachsprozess*, falls Folgendes gilt:
Zu jedem Paar $s, t \in I$ mit $s < t$ existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\eta_{s,t} \in \mathcal{M}^1(K)$, so dass

$$P\{X_t \in A | \, \mathfrak{A}_s^0\} = (\eta_{s,t} * \varepsilon_{X_s})(A) \quad P\text{-f.s.}$$

für alle Mengen $A \in \mathcal{B}(K)$ erfüllt ist.

Ist $I = \mathbb{Z}_+$ oder $I = \mathbb{R}_+$, so heißt ein Zuwachsprozess $(X_t)_{t\in I}$ *stationär*, falls $\eta_{s,t} = \eta_{0,t-s}$ für alle $s, t \in I$ mit $s < t$ gilt.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass Zuwachsprozesse $(X_t)_{t\in I}$ die elementare Markov-Eigenschaft besitzen, d.h. es gilt

$$P\{X_t \in A | \mathfrak{A}_s^0\} = P\{X_t \in A | X_s\} \quad P\text{-f.s.}$$

für jedes Paar $s, t \in I$ mit $s < t$ und jede Menge $A \in \mathcal{B}(K)$.

1.1 Irrfahrten auf Hypergruppen in diskreter Zeit

Wie zuvor bereits erwähnt, kann also aus der Definition einer Hypergruppe heraus die Summe $X + Y$ zweier unabhängiger Zufallsvariablen nicht direkt definiert werden. Über den Begriff der *Konkretisierung* einer Hypergruppe ist es jedoch möglich, eine Summe von K-wertigen Zufallsvariablen X und Y so festzulegen, dass sie im Falle der Unabhängigkeit die Verteilung $P_X * P_Y$ besitzt. Die Konstruktion einer solchen Summe, die nun kurz beschrieben wird, geht auf Hm. Zeuner zurück und wird in den Arbeiten [57], [58] und [59] durchgeführt. Nachzuvollziehen ist sie jedoch auch in [10], Abschnitt 7.1.

Definition 1.2. K sei eine Hypergruppe, μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem kompakten Raum M, und $\Phi : K \times K \times M \to K$ sei Borel-messbar. Das Tripel (M, μ, Φ) heißt *Konkretisierung* von K, falls

$$\mu\{\Phi(x, y, \cdot) \in A\} = (\varepsilon_x * \varepsilon_y)(A)$$

für alle $x, y \in K$ und $A \in \mathcal{B}(K)$.

Beispiele für Konkretisierungen von Hypergruppen finden sich in [57] und [10], Abschnitt 7.1.

Der folgende Satz sichert die Existenz von Konkretisierungen für Hypergruppen, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, was in dieser Arbeit nach der Generalvoraussetzung stets gegeben sein soll.

Satz 1.3. *Sei K eine Hypergruppe. Dann existiert eine messbare Abbildung $\Phi : K \times K \times [0, 1] \to K$, so dass $([0, 1], \lambda_{|[0,1]}, \Phi)$ eine Konkretisierung von K ist.*

Bewiesen wird diese Aussage in Arbeiten von Hm. Zeuner ([57], [58] und [59]) oder in [10], Theorem 7.1.3.

Definition 1.4. Sei K eine Hypergruppe, $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (M, μ, Φ) eine Konkretisierung von K. X und Y seien K-wertige Zufallsvariablen, Λ sei eine M-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Λ sei unabhängig von (X, Y), und es gelte $P_\Lambda = \mu$. Dann wird die *randomisierte Summe* von X und Y definiert durch

$$X \overset{\Lambda}{+} Y := \Phi(X, Y, \Lambda).$$

$X \overset{\Lambda}{+} Y$ ist dann eine K-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, und im Falle der Unabhängigkeit gilt der folgende Zusammenhang.

Proposition 1.5. *In der Situation von Definition 1.4 seien X, Y und Λ unabhängig. Dann gilt*

$$P_{X \overset{\Lambda}{+} Y} = P_X * P_Y.$$

Für den *Beweis* sei verwiesen auf [57] und [10], Proposition 7.1.6.

Bemerkung 1.6. (a) Eine Konkretisierung ist nicht eindeutig bestimmt durch die Hypergruppe, und somit ist die randomisierte Summe $X \overset{\Lambda}{+} Y$ abhängig von der speziellen Wahl der zugrunde liegenden Konkretisierung von K.

(b) Die gemeinsame Verteilung von X, Y und $X \overset{\Lambda}{+} Y$ ist unabhängig von der Wahl der Konkretisierung.
(Dies wird in [57] und [10], Proposition 7.1.8, bewiesen.)

(c) Die Bildung randomisierter Summen ist im Allgemeinen nicht assoziativ, obwohl die Faltung von Verteilungen dies ist.

Zu Irrfahrten gelangt man nun, indem man die Definition randomisierter Summen rekursiv auf Folgen $(X_j)_{j\geq 1}$ von Zufallsvariablen und (Hilfs-) Zufallsvariablen $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ erweitert.

Definition 1.7. $(X_j)_{j\geq 1}$ sei eine Folge von K-wertigen Zufallsvariablen und $(\Lambda_j)_{j\geq 1}$ eine Folge von M-wertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\Lambda_j} = \mu$ für $j \geq 1$. $X_1, \Lambda_1, X_2, \Lambda_2, \ldots$ seien unabhängig. Dann werden die randomisierten Summen $S_n := \sum_{j=1}^{n} {}^\Lambda X_j$, $n \geq 0$, rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{0} {}^\Lambda X_j &:= e, \\ \sum_{j=1}^{n} {}^\Lambda X_j &:= X_n \overset{\Lambda_n}{+} \sum_{j=1}^{n-1} {}^\Lambda X_j \quad , n \geq 1. \end{aligned}$$

Korollar 1.8. *In der Situation von Definition 1.7 ist* $(S_n)_{n\geq 0}$ *eine (im Allgemeinen nicht homogene) Markov-Kette mit zugehöriger Folge* $(N_n)_{n\geq 1}$ *von Übergangskernen auf* $(K, \mathcal{B}(K))$, *wobei*

$$\begin{aligned} N_n(x, A) &= (P_{X_n} * \varepsilon_x)(A) \\ &= P\{S_n \in A | \, S_{n-1} = x\} \end{aligned}$$

für $P_{S_{n-1}}$*-fast alle* $x \in K$, $A \in \mathcal{B}(K)$ *und* $n \geq 1$.

Definition 1.9. Sind in der Situation von Definition 1.7 die Zufallsvariablen $(X_j)_{j\geq 1}$ identisch verteilt, so bezeichnet man $(S_n)_{n\geq 0}$ als eine *Irrfahrt* auf der Hypergruppe K.

Irrfahrten auf Hypergruppen sind dann stationäre Zuwachsprozesse im Sinne der Definition 1.1:

Korollar 1.10. *Jede Irrfahrt* $(S_n)_{n\geq 0}$ *auf einer Hypergruppe* K *ist ein stationärer Zuwachsprozess mit* $\eta_{m,n} = \nu^{n-m}$ *für alle* $m, n \in \mathbb{Z}_+$ *mit* $m < n$, *wobei* $\nu := P_{X_1}$.

1.2 Lévy-Prozesse auf Hypergruppen

In diesem Abschnitt werden ausgehend von ($\{e\}$-) stetigen Faltungshalbgruppen in $\mathcal{M}^1(K)$ Lévy-Prozesse auf Hypergruppen konstruiert. In Analogie zum Vektorraum- bzw. Gruppenfall sei dabei ein Lévy-Prozess definiert als stationärer Zuwachsprozess (gemäß Definition 1.1) mit $X_0 = e$ fast sicher und càdlàg-Pfaden. Es ist klar, dass bei gegebener stetiger Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ der zu den Übergangskernen

$$K \times \mathcal{B}(K) \ni (x, A) \mapsto P_t(x, A) := (\mu_t * \varepsilon_x)(A), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

konstruierte kanonische Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Start in e ein stationärer Zuwachsprozess ist mit $P_{X_t} = \mu_t$ für alle $t \geq 0$:

Proposition 1.11. *Es sei* K *eine Hypergruppe und* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *eine* $\{e\}$*-stetige Faltungshalbgruppe in* $\mathcal{M}^1(K)$. *Dann existiert ein* K*-wertiger stationärer Zuwachsprozess* $(X_t)_{t\geq 0}$ *mit* $P_{X_t} = \mu_t$ *für alle* $t \geq 0$.

Beweis. Es sei an die Konstruktion des Prozesses erinnert (vgl. dazu z.B. [1], Abschnitte 35, 36 und 42, oder [32], Abschnitte 2, 3 und 6): Aus den Eigenschaften der Faltung folgt, dass $(P_t)_{t\geq 0}$, wobei P_t definiert sei wie in (1.1), eine normale (d.h. P_0 ist der Einheitskern) Markovsche Halbgruppe von Kernen auf $(K, \mathcal{B}(K))$ ist. Diese sowie die Startverteilung ε_e führen in natürlicher Weise zu einer projektiven Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen über $(K, \mathcal{B}(K))$. Mit dem Konsistenzsatz von Kolmogorov folgt dann die Existenz eines (kanonischen) Prozesses $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Zustandsraum $(K, \mathcal{B}(K))$ derart, dass die projektive Familie die Familie seiner endlich-dimensionalen Verteilungen ist. Weiter gilt

$$P\{X_t \in A |\, \mathfrak{A}_s^0\} = P_{t-s}(X_s, A) = (\mu_{t-s} * \varepsilon_{X_s})(A) \quad P\text{-f.s.}$$

für beliebige $A \in \mathcal{B}(K)$ und $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s \leq t$, wobei wieder $(\mathfrak{A}_t^0)_{t\geq 0}$ die kanonische Filtration des Prozesses bezeichnet. Daher ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stationärer Zuwachsprozess im Sinne von Definition 1.1 (mit $\eta_{s,t} = \mu_{t-s}$). Aus der Konstruktion erhält man $P_{X_t} = \mu_t$ für alle $t \geq 0$. □

Bemerkung. Auch hier wird die Eigenschaft benötigt, dass die Hypergruppe das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Um zu beweisen, dass sogar stets ein stationärer Zuwachsprozess *mit càdlàg-Pfaden* existiert, werden Resultate aus [32] verwendet. Ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ und setzt man für $t \geq 0$ $T_t := R_{\mu_t^-}$, wobei $R_{\mu_t^-}$ den Faltungsoperator von $\mu_t^- \in \mathcal{M}^1(K)$ auf $C_0(K)$ bezeichne, d.h. $T_t f = \mu_t^- * f$ für $f \in C_0(K)$ (vgl. Proposition 0.8), so ist zunächst $(T_t)_{t\geq 0}$ eine *Fellersche Halbgruppe* im Sinne der Definition aus [32] (vgl. S. 26):

Lemma 1.12. *Es sei K eine Hypergruppe und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$. Dann ist $(T_t)_{t\geq 0} \subseteq L(C_0(K))$, definiert wie oben, eine Fellersche Halbgruppe, d.h. es gelten:*
$(T_t)_{t\geq 0}$ ist eine Halbgruppe positiver kontrahierender Operatoren mit $T_0 = I$ und der Eigenschaft

$$\lim_{t \searrow 0} \|T_t f - f\|_\infty = 0 \quad \textit{für alle } f \in C_0(K).$$

Beweis. $(\mu_t^-)_{t\geq 0}$ ist eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe, daher ergeben sich die Eigenschaften unmittelbar aus Proposition 0.15. □

Mit Lemma 1.12 folgt nun aus Satz 10.5 in [32] die Existenz eines Markov-Prozesses mit càdlàg-Pfaden, dessen Übergangsfunktion die Fellersche Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ fortsetzt.

Satz 1.13. *Es sei K eine Hypergruppe und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$. Dann existiert ein stationärer Zuwachsprozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit càdlàg-Pfaden mit $P_{X_t} = \mu_t$ für alle $t \geq 0$.*

Beweis. Es sei $(T_t)_{t\geq 0}$ die gemäß Lemma 1.12 zu $(\mu_t)_{t\geq 0}$ gehörige Fellersche Halbgruppe. Für $t \geq 0$ gilt dann $\|T_t\| = 1$, da μ_t ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Denn wäre $\|T_t\| < 1$, d.h.

$$\|\mu_t^- * f\|_\infty \leq M\|f\|_\infty \quad \text{für alle } f \in C_0(K)$$

mit $M := \|T_t\| < 1$, so erhielte man wegen

$$\left|\int f\, d\mu_t\right| = |(\mu_t^- * f)(e)| \leq \|\mu_t^- * f\|_\infty \leq M$$

für alle $f \in C_0(K)$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$ einen Widerspruch zu $\|\mu_t\| = 1$.
Nach Satz 10.5 in [32] (im Falle der Kompaktheit von K wende man Satz 10.1 an) existiert ein *Huntscher Prozess* (vgl. dazu die Definition in Abschnitt 10 in [32]), dessen Übergangsfunktion die Fellersche Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ fortsetzt. D.h. insbesondere:
Es existieren K-wertige Zufallsvariablen $(X_t)_{t\geq 0}$ auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie Wahrscheinlichkeitsmaße $(P^x)_{x\in K}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so dass die universelle Markov-Eigenschaft

$$P^x\{X_{s+t} \in A|\, \mathfrak{A}_s^0\} = P^{X_s}\{X_t \in A\} \quad P^x\text{-f.s.}$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$, $x \in K$ und $A \in \mathcal{B}(K)$ erfüllt ist. Dabei besitzt $(X_t)_{t\geq 0}$ càdlàg-Pfade. Bezeichnet $(P_t)_{t\geq 0}$ die in (1.1) definierte normale Markovsche Halbgruppe von Kernen, so gilt wegen

$$\begin{aligned} T_t f(x) &= \int f(y * x)\, d\mu_t(y) \\ &= \int f\, d(\mu_t * \varepsilon_x) \end{aligned}$$

für $t \geq 0$, $f \in C_0(K)$ und $x \in K$

$$P_t(x, A) = P^x\{X_t \in A\}$$

für alle $t \geq 0$, $x \in K$ und $A \in \mathcal{B}(K)$.
Mit $P := P^e$ ergibt sich also für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$ und $A \in \mathcal{B}(K)$

$$P\{X_{s+t} \in A|\, \mathfrak{A}_s^0\} = (\mu_t * \varepsilon_{X_s})(A) \quad P\text{-f.s..}$$

Daher ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stationärer Zuwachsprozess auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\eta_{s,t} = \mu_{t-s}$, und aufgrund der Wahl von P gilt $P_{X_t} = \mu_t$ für alle $t \geq 0$. □

Es gilt auch die Umkehrung von Satz 1.13:

Proposition 1.14. *Es sei* $(X_t)_{t\geq 0}$ *ein stationärer Zuwachsprozess mit càdlàg-Pfaden auf einer Hypergruppe* K*,* $X_0 = e$ P*-f.s.. Dann ist* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *eine* $\{e\}$*-stetige Faltungshalbgruppe in* $\mathcal{M}^1(K)$*, wobei* $\mu_t := P_{X_t}$ *für* $t \geq 0$*.*

Beweis. Wegen $X_0 = e$ gilt für jedes $t > 0$ $\quad P_{X_t} = \eta_{0,t}$ und dann aufgrund der Stationarität $\mu_{t-s} = P_{X_{t-s}} = \eta_{0,t-s} = \eta_{s,t}$ für $0 \leq s < t$. Sind $s, t > 0$ und ist $A \in \mathcal{B}(K)$, so folgt mit der Definition eines Zuwachsprozesses

$$\begin{aligned}
(\mu_s * \mu_t)(A) &= \int (\mu_s * \varepsilon_x)(A)\, d\mu_t(x) \\
&= \int (\mu_s * \varepsilon_{X_t})(A)\, dP \\
&= \int (\eta_{t,s+t} * \varepsilon_{X_t})(A)\, dP \\
&= \int P\{X_{s+t} \in A |\, \mathfrak{A}_t^0\}\, dP \\
&= P\{X_{s+t} \in A\} \\
&= \mu_{s+t}(A),
\end{aligned}$$

also die Halbgruppeneigenschaft.
$\lim_{t\searrow 0} \mu_t = \varepsilon_e$ erhält man unmittelbar aus der rechtsseitigen Stetigkeit der Pfade sowie $X_0 = e$ P-fast sicher. $\square$

1.3 Eine neue Definition für Zuwachsprozesse

Ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum G, wobei G eine lokalkompakte Gruppe ist, so besitzt der Prozess unabhängige Zuwächse, falls für je endlich viele Zeitpunkte $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ mit $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ die Zufallsvariablen $X_{t_0}, X_{t_1}X_{t_0}^{-1}, \ldots, X_{t_n}X_{t_{n-1}}^{-1}$ unabhängig sind. Insbesondere gilt dann für Paare $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t$ mit $Z_{s,t} := X_t X_s^{-1}$

$$X_t = Z_{s,t} \cdot X_s, \tag{1.2}$$

und X_s und $Z_{s,t}$ sind unabhängig.
Ein G-wertiger Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit unabhängigen Zuwächsen ist ein Zuwachsprozess im Sinne der auf Gruppen übertragenen Definition 1.1 (mit $\eta_{s,t} = P_{X_t X_s^{-1}}$), wobei $*$ die übliche Faltung auf G bezeichnet. Davon ausgehend wird nun die Fragestellung behandelt, ob sich auf Hypergruppen die Definition eines Zuwachsprozesses derart abändern lässt, dass eine zu (1.2) analoge Aussage über die Verteilungen gefordert wird. Dabei ist aufgrund der nicht vorhandenen deterministischen punktweisen Operation die rechte

Seite als randomisierte Summe bezüglich einer Konkretisierung (M, μ, Φ) der Hypergruppe darzustellen.

Definition 1.15. Es sei K eine Hypergruppe mit Konkretisierung (M, μ, Φ). Ein K-wertiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ besitzt die *Eigenschaft (Z)*, falls gilt:
Zu jedem Paar $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t$ existieren eine K-wertige Zufallsvariable $Z_{s,t}$ sowie eine M-wertige Zufallsvariable $\Lambda_{s,t}$ mit $P_{\Lambda_{s,t}} = \mu$ und $X_s, Z_{s,t}, \Lambda_{s,t}$ unabhängig, so dass

$$X_t \overset{d}{=} Z_{s,t} \overset{\Lambda_{s,t}}{+} X_s$$

erfüllt ist.

Im Folgenden wird zunächst untersucht, ob ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit der Eigenschaft (Z) ein Zuwachsprozess gemäß Definition 1.1 ist. Sind $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t$, so soll also nachgewiesen werden, dass mit $\eta_{s,t} := P_{Z_{s,t}} \in \mathcal{M}^1(K)$

$$P\{X_t \in B |\, \mathfrak{A}_s^0\} = (\eta_{s,t} * \varepsilon_{X_s})(B) \quad P\text{-f.s.}$$

für alle $B \in \mathcal{B}(K)$ gilt.
Dazu wird das folgende Lemma (vgl. [14], S. 268, Nr. 9) verwendet.

Lemma 1.16. *Es seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ Messräume und $X : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ sowie $Y : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}_+$ sei messbar bezüglich $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. $\mathcal{C}$ sei eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$. X sei unabhängig von $\mathcal{C}$, und Y sei $\mathcal{C}$-messbar. Dann gilt*

$$E(f(X,Y)|\, \mathcal{C}) = \int_{\Omega_1} f(x, Y)\, dP_X(x) \quad P\text{-}f.s.. \tag{1.3}$$

Beweis. Es seien $A_1 \in \mathfrak{A}_1$, $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ und $f := 1_{A_1 \times A_2}$. Dann ist (1.3) erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned}
E(f(X,Y)|\, \mathcal{C}) &= E(1_{A_1}(X)\, 1_{A_2}(Y)|\, \mathcal{C}) \\
&= 1_{A_2}(Y)\, E(1_{A_1}(X)|\, \mathcal{C}) \\
&= 1_{A_2}(Y)\, E(1_{A_1}(X)) \\
&= 1_{A_2}(Y) \int_{\Omega_1} 1_{A_1}(x)\, dP_X(x) \\
&= \int_{\Omega_1} f(x, Y)\, dP_X(x) \quad P\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

aufgrund der Voraussetzungen.
Um für Funktionen $f = 1_C$ mit $C \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ (1.3) zu zeigen, weist man zunächst nach, dass

$$\mathcal{G} := \{C \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 : 1_C \text{ erfüllt (1.3)}\}$$

ein Dynkin-System ist.

$$\mathcal{E} := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2\}$$

ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$. Somit gilt $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}$, also $\mathcal{G} = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Dann erfüllen auch Elementarfunktionen $\sum_{i=1}^n c_i 1_{C_i}$ mit $c_i \geq 0$ und $C_1, \ldots, C_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ disjunkt (1.3), und für messbares $f \geq 0$ folgt die Behauptung mittels monotoner Konvergenz. $\square$

Bemerkung 1.17. Für lokalkompakte Gruppen G lässt sich unter Anwendung von Lemma 1.16 wie folgt beweisen, dass jeder Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit unabhängigen Zuwächsen ein Zuwachsprozess gemäß Definition 1.1 ist:
Für $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t$ setze $\eta_{s,t} := P_{Z_{s,t}} \in \mathcal{M}^1(G)$ (wobei $Z_{s,t} = X_t X_s^{-1}$). Dann erhält man für $B \in \mathcal{B}(G)$

$$\begin{aligned} P\{X_t \in B \mid \mathfrak{A}_s^0\} &= E(1_B(Z_{s,t}\, X_s) \mid \mathfrak{A}_s^0) \\ &= \int_G 1_B(x\, X_s)\, dP_{Z_{s,t}}(x) \\ &= \int_G 1_B\, d(\eta_{s,t} * \varepsilon_{X_s}) \\ &= (\eta_{s,t} * \varepsilon_{X_s})(B) \quad P\text{-f.s..} \end{aligned}$$

Dabei ist X_s trivialerweise $\mathfrak{A}_s^0$-messbar, und $Z_{s,t}$ ist unabhängig von $\mathfrak{A}_s^0$. Für Letzteres benötigt man die Unabhängigkeit der Zuwächse für je endlich viele Zeitpunkte.

Analog zu Bemerkung 1.17 kann mit Lemma 1.16 gezeigt werden:

Lemma 1.18. *Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein K-wertiger stochastischer Prozess mit der Eigenschaft (Z), wobei K eine Hypergruppe mit Konkretisierung (M, μ, Φ) ist. Für Paare $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t$ gilt dann*

$$P\{Z_{s,t} \overset{\Lambda_{s,t}}{+} X_s \in B \mid X_s\} = (\eta_{s,t} * \varepsilon_{X_s})(B) \quad P\text{-f.s.} \tag{1.4}$$

für alle $B \in \mathcal{B}(K)$ (wobei $\eta_{s,t} := P_{Z_{s,t}}$).

Beweis. Seien $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t$, $B \in \mathcal{B}(K)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P\{Z_{s,t} \overset{\Lambda_{s,t}}{+} X_s \in B | X_s\} &= E(f((Z_{s,t}, \Lambda_{s,t}), X_s)| X_s) \\ &= \int_{K\times M} f((x,z), X_s)\, dP_{(Z_{s,t},\Lambda_{s,t})}(x,z) \\ &= \int_{K\times M} 1_B(\Phi(x, X_s, z))\, dP_{(Z_{s,t},\Lambda_{s,t})}(x,z) \quad P\text{-f.s.} \end{aligned}$$

nach Lemma 1.16, wobei

$$f((x,z),y) := 1_B(\Phi(x,y,z))$$

für $((x,z),y) \in (K \times M) \times K$, und $(Z_{s,t}, \Lambda_{s,t})$ ist unabhängig von $\mathfrak{A}(X_s)$ nach Definition von Eigenschaft (Z). Somit erhält man weiter aufgrund der Unabhängigkeit von $Z_{s,t}$ und $\Lambda_{s,t}$, $P_{\Lambda_{s,t}} = \mu$ und der Eigenschaft der Konkretisierung

$$\begin{aligned} P\{Z_{s,t} \overset{\Lambda_{s,t}}{+} X_s \in B | X_s\} &= \int_K \int_M 1_B(\Phi(x, X_s, z))\, dP_{\Lambda_{s,t}}(z)\, dP_{Z_{s,t}}(x) \\ &= \int_K \mu\{z \in M : \Phi(x, X_s, z) \in B\}\, dP_{Z_{s,t}}(x) \\ &= \int_K (\varepsilon_x * \varepsilon_{X_s})(B)\, dP_{Z_{s,t}}(x) \\ &= (\eta_{s,t} * \varepsilon_{X_s})(B) \quad P\text{-f.s..} \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die bedingte Wahrscheinlichkeit wird in Lemma 1.18 im Gegensatz zum Gruppenfall in Bemerkung 1.17 bezüglich der σ-Algebra $\mathfrak{A}(X_s)$ bestimmt, da nur die Unabhängigkeit von $(Z_{s,t}, \Lambda_{s,t})$ und $\mathfrak{A}(X_s)$ vorliegt. In Bemerkung 1.17 ergab sich die Unabhängigkeit von $Z_{s,t}$ und $\mathfrak{A}_s^0$ aus der Unabhängigkeit der Zuwächse für je endlich viele Zeitpunkte, die Definition der Eigenschaft (Z) umfasst dagegen nur zwei Zeitpunkte. Daher sollte neben (Z) die elementare Markov-Eigenschaft vorausgesetzt werden. Desweiteren stellt sich auf Hypergruppen das Problem, dass unklar ist, ob

$$P\{X_t \in B | X_s\} = P\{Z_{s,t} \overset{\Lambda_{s,t}}{+} X_s \in B | X_s\} \quad P\text{-f.s.} \tag{1.5}$$

erfüllt ist.
Dieses lässt sich jedoch lösen, indem man zusätzlich die Gleichheit der Verteilungen von (X_s, X_t) und $(X_s, Z_{s,t} \overset{\Lambda_{s,t}}{+} X_s)$ fordert.

Lemma 1.19. *Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit der Eigenschaft (Z) auf einer Hypergruppe K mit Konkretisierung (M,μ,Φ). Zusätzlich gelte stets $(X_s, X_t) \stackrel{d}{=} (X_s, Z_{s,t} \stackrel{\Lambda_{s,t}}{+} X_s)$ für die gemeinsamen Verteilungen. Dann folgt (1.5) für Paare $s,t \in \mathbb{R}_+$ mit $s<t$ und $B \in \mathcal{B}(K)$.*

Beweis. Seien $A, B \in \mathcal{B}(K)$. Wegen einerseits

$$P_{(X_s,X_t)}(A\times B) = \int 1_{\{X_s\in A\}}\, P\{X_t \in B|\, X_s\}\, dP$$

und andererseits

$$P_{(X_s, Z_{s,t} \stackrel{\Lambda_{s,t}}{+} X_s)}(A\times B) = \int 1_{\{X_s\in A\}}\, P\{Z_{s,t} \stackrel{\Lambda_{s,t}}{+} X_s \in B|\, X_s\}\, dP$$

folgt nach der Voraussetzung

$$\int 1_{\{X_s\in A\}}\, P\{X_t \in B|\, X_s\}\, dP = \int 1_{\{X_s\in A\}}\, P\{Z_{s,t} \stackrel{\Lambda_{s,t}}{+} X_s \in B|\, X_s\}\, dP,$$

und dies liefert unmittelbar (Faktorisierung der bedingten Erwartung, vgl. [1], Satz 15.9)

$$P\{X_t \in B|\, X_s\} = P\{Z_{s,t} \stackrel{\Lambda_{s,t}}{+} X_s \in B|\, X_s\} \quad P\text{-f.s.}$$

für $B \in \mathcal{B}(K)$. □

Damit erhält man nun insgesamt:

Satz 1.20. *Es sei K eine Hypergruppe und (M,μ,Φ) eine Konkretisierung von K. $(X_t)_{t\geq 0}$ sei ein K-wertiger stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. $(X_t)_{t\geq 0}$ erfülle die Bedingung $(Z*)$, was bedeuten soll:*
Der Prozess besitzt die elementare Markov-Eigenschaft bezüglich der kanonischen Filtration $(\mathfrak{A}_t^0)_{t\geq 0}$ sowie die Eigenschaft (Z), und für die gemeinsamen Verteilungen gilt stets $(X_s, X_t) \stackrel{d}{=} (X_s, Z_{s,t} \stackrel{\Lambda_{s,t}}{+} X_s)$.
Dann ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Zuwachsprozess im Sinne von Definition 1.1.

Der *Beweis* dieses Satzes ergibt sich aus den vorherigen Überlegungen.

Mittels üblicher Konstruktion über Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen sieht man, dass zu jedem Zuwachsprozess ein äquivalenter Prozess, der die Bedingung $(Z*)$ erfüllt, existiert. Die Äquivalenz zweier stochastischer Prozesse ist dabei in dem Sinne zu verstehen, dass sie zum selben System endlich-dimensionaler Verteilungen führen.

Proposition 1.21. *$(X_t)_{t\geq 0}$ sei ein K-wertiger Zuwachsprozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ gemäß Definition 1.1. Dann existiert ein äquivalenter Prozess $(Y_t)_{t\geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{P})$, der die Bedingung $(Z*)$ erfüllt.*

1.22 (Bemerkungen zu Kapitel 1). Die in Abschnitt 1.1 beschriebenen randomisierten Summen, welche allgemein über den von Hm. Zeuner entwickelten Begriff der Konkretisierung einer Hypergruppe definiert sind, wurden für den Spezialfall von Bessel-Kingman-Hypergruppen bereits von J.F.C. Kingman (vgl. [37]) betrachtet. Dieser entwickelte eine Theorie radialer Summen, wobei in ihr die Methoden zur Untersuchung rotations-invarianter Zufallsvektoren auf nichtganzzahlige Dimensionen verallgemeinert sind. Die zu diesem Zweck eingeführte Faltung entspricht gerade der der Bessel-Kingman-Hypergruppe, und die radialen Summen sind in diesem Sinne randomisierte Summen bezüglich einer geeigneten Konkretisierung. Weitere Untersuchungen solcher radialer Summen im Kontext von Kingman-Strukturen sind in [17] enthalten.
Über die Definition randomisierter Summen ist es möglich, Grenzwertsätze für Folgen von Partialsummen wie Gesetze der großen Zahlen, Zentrale Grenzwertsätze und Invarianzprinzipien für gewisse Klassen von Hypergruppen zu beweisen. Für Sturm-Liouville-Hypergruppen $\mathbb{R}_+$ (vgl. Vorbereitungen, 0.34) ist dies Inhalt von Arbeiten von Hm. Zeuner (vgl. [57], [58] und [60]), wobei der Spezialfall der Bessel-Kingman-Hypergruppen zum Teil bereits in [37] und [17] enthalten ist. Da die Bildung randomisierter Summen im Allgemeinen nicht distributiv ist, ist bei der entsprechenden Normierung zwischen innerer und äußerer Normierung zu unterscheiden.
Die Aussage aus Satz 1.13 über die Existenz eines stationären Zuwachsprozesses mit càdlàg-Pfaden zu gegebener $\{e\}$-stetiger Faltungshalbgruppe ist bekannt, ist jedoch der Vollständigkeit halber in diese Arbeit aufgenommen. Man erhält sie z.B. mit Theorem 2.2 in [47], welches besagt, dass zu jedem zu einer $\{e\}$-stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ assoziierten Lévy-Prozess auf einer Hypergruppe K (Lévy-Prozess ist dabei im Sinne der Definition in [47] zu verstehen) eine äquivalente càdlàg-Version existiert. Ein weiterer Zugang ist über die Arbeit [39] möglich (vgl. Abschnitt III, 2.), wobei dort die Konstruktion in einem allgemeineren Rahmen erfolgt, da nichtstationäre Markov-Prozesse betrachtet werden.

Kapitel 2

Funktionale Grenzwertsätze

Konvergiert ein Dreieckssystem identisch verteilter Wahrscheinlichkeitsmaße des $\mathbb{R}^d$ gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ, so folgt, wie man mit Hilfe der Methode der Fouriertransformation einfach einsieht, aus der Konvergenz $\nu_n^{k_n} \to \mu$ einerseits, dass μ unendlich teilbar und damit eindeutig einbettbar in die stetige Faltungshalbgruppe $(\mu^t)_{t\geq 0}$ ist, und andererseits die Konvergenz der diskreten Faltungshalbgruppen $(\nu_n^{[k_n t]})_{t\geq 0}$ gegen $(\mu^t)_{t\geq 0}$, also die funktionale Konvergenz

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu^t, \quad t \geq 0,$$

welche gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ ist.
Geht man jedoch zu allgemeineren algebraischen Strukturen bzw. Faltungsstrukturen über, so ist nicht klar, ob sich der Schluss von der einfachen auf die funktionale Konvergenz aufrecht erhalten lässt, d.h. ob $\nu_n^{k_n} \to \mu$ stets die Existenz einer stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ impliziert, so dass die diskreten Halbgruppen $(\nu_n^{[k_n t]})_{t\geq 0}$ zumindest entlang einer Teilfolge gegen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ konvergieren. Für lokalkompakte Gruppen ist er im allgemeinen Fall nicht möglich (vgl. dazu Beispiel 3.1 in [51]), wie S. Nobel gezeigt hat (vgl. Satz 1.11 in [44]), besitzt die Implikation aber Gültigkeit, wenn vorausgesetzt ist, dass die Gruppe gleichgradig wurzelkompakt ist und $\{e\}$ als einzige kompakte Untergruppe besitzt.
Ziel dieses Kapitels ist es, die obige Problemstellung im Kontext von Hypergruppen zu behandeln. Im Folgenden seien dabei stets $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $k_n \nearrow \infty$ und K eine zunächst beliebige Hypergruppe.

Bemerkung 2.1. In Anlehnung an die Sprechweise in Arbeiten von W. Hazod, S. Nobel und K. Telöken werden Aussagen, welche diese Problemstellung betreffen, als *Funktionale Grenzwertsätze* bezeichnet. In der Theorie der stochastischen Prozesse wird der Begriff der funktionalen Konvergenz

anders gebraucht. Funktionale Grenzwertsätze oder Invarianzprinzipien beinhalten in diesem Zusammenhang Aussagen über die Konvergenz in Verteilung von Prozessen in kontinuierlicher Zeit, die sich durch lineare Interpolation von Summen unabhängiger, identisch verteilter reeller Zufallsvariablen und Standardisierung ergeben und welche als Zufallsvariablen aufgefasst werden, die Werte im Skorokhod-Raum der càdlàg-Funktionen, versehen mit der Skorokhod-Topologie, annehmen (vgl. [5], Kapitel 3).
Invarianzprinzipien für Irrfahrten auf Sturm-Liouville-Hypergruppen (vgl. Definition 0.34) wurden von Hm. Zeuner in [58] und [60] untersucht. Die Irrfahrten sind dabei im Sinne der Definitionen 1.7 und 1.9 zu verstehen, wobei bei der Standardisierung der interpolierenden Prozesse zwischen innerer und äußerer Normierung zu unterscheiden ist, da die Bildung der randomisierten Summen im Allgemeinen nicht distributiv ist. Aufgeführt sind die Resultate auch in [33] und [10], Abschnitt 7.5.

Für $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ erhält man aus der punktweisen Konvergenz $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$ für alle $t \geq 0$ die gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ (wenn dabei $\nu_n^0 := \varepsilon_e$ gesetzt wird). Der Beweis der folgenden Proposition lässt sich völlig analog vom Fall lokalkompakter Gruppen, für welchen er in [44] unter Verwendung eines Approximationssatzes aus [36] geführt ist, übertragen.

Bemerkung 2.2. Da K nach der Generalvoraussetzung das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist die Topologie der schwachen Konvergenz auf $\mathcal{M}^1(K)$ metrisierbar durch eine Metrik d. Die kompakt-gleichmäßige Konvergenz $\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t$ in $t \geq 0$, wobei $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ ist, ist daher definiert durch:
Zu jeder kompakten Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}_+$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $t \in C$ gilt $d(\nu_n^{[k_n t]}, \mu_t) < \varepsilon$.
Dazu äquivalent sind (vgl. [15], 7.5 in Kapitel XII) die beiden folgenden Bedingungen:

(1) Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ und jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, die gegen t konvergiert, gilt $\nu_n^{[k_n t_n]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t$.

(2) Für alle $f \in C^b(K)$ gilt $\int f\, d\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f\, d\mu_t$ kompakt-gleichmäßig in $t \geq 0$.

Entsprechendes erhält man für kompakt-gleichmäßige Konvergenz in $t > 0$.

Proposition 2.3. *Es seien $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$. Es gelte*

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \textit{für alle } t \geq 0.$$

Dann ist die Konvergenz gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$.

Beweis. Es sei für $n \in \mathbb{N}$ $\quad R_n := R_{\nu_n}$ der Faltungsoperator von ν_n (als Operator auf $C_0(K)$). $(R_n(t))_{t\geq 0}$ sei die diskrete Halbgruppe mit Zeiteinheit $1/k_n$, d.h. $R_n(t) := R_{\nu_n^{[k_n t]}}$ für $t \geq 0$, und U_n ihr Generator, also $U_n := k_n(R_n(1/k_n) - I)$ (vgl. [36], Kapitel IX, Abschnitt 3.1). Mit $R(t) := R_{\mu_t}$ für $t \geq 0$ sei $(R(t))_{t\geq 0}$ die Kontraktionshalbgruppe der Klasse (C_0) der Faltungsoperatoren, und U bezeichne den zugehörigen infinitesimalen Generator (vgl. Vorbereitungen, Proposition 0.15 und Definition 0.16).
Aus der Voraussetzung $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$ für alle $t \geq 0$ folgt nach Proposition 1.2.16 in [10], dass für alle $t \geq 0$ und $f \in C_0(K)$

$$\|R_n(t)f - R(t)f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{2.1}$$

erfüllt ist.
Es sei $\lambda > 0$ fest. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann (Neumannsche Reihe)

$$(\lambda I - U_n)^{-1} = \frac{1}{k_n}\frac{1}{1+\lambda/k_n}\left(I - \frac{R_n(1/k_n)}{1+\lambda/k_n}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)},$$

wobei

$$B_k^{(n)} := \frac{1}{k_n}\frac{R_n(k/k_n)}{(1+\lambda/k_n)^{k+1}} \in L(C_0(K)) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Ist $k \in \mathbb{N}_0$, so ist für $t \in [k/k_n, (k+1)/k_n[\quad [k_n t] = k$. Daher erhält man

$$B_k^{(n)} f = \int_{k/k_n}^{(k+1)/k_n} \frac{R_n(t)f}{(1+\lambda/k_n)^{[k_n t]+1}}\,dt,$$

also

$$(\lambda I - U_n)^{-1} f = \int_0^\infty \frac{R_n(t)f}{(1+\lambda/k_n)^{[k_n t]+1}}\,dt$$

für $f \in C_0(K)$.
$((1+\lambda/k_n)^{-[k_n t]-1})_{n\in\mathbb{N}} =: (g_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für alle $t \geq 0$ gegen $e^{-\lambda t}$. Da für $n \geq 2$ und $t \geq 0$

$$\left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n \geq 1 + \lambda t + \frac{1}{4}\lambda^2 t^2$$

ist, folgt

$$\left(1+\frac{\lambda}{k_n}\right)^{-[k_n t]-2} \leq \left(1+\lambda t+\frac{1}{4}\lambda^2 t^2\right)^{-1}$$

für alle $t \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$t \mapsto (1+\lambda)\left(1+\lambda t+\frac{1}{4}\lambda^2 t^2\right)^{-1}$$

Majorante von (g_n), und der Satz von Lebesgue impliziert dann mit (2.1)

$$(\lambda I - U_n)^{-1} f \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\infty e^{-\lambda t} R(t) f \, dt$$

in $\| \; \|_\infty$, also aufgrund der Integraldarstellung der Resolventen (vgl. Vorbereitungen, Satz 0.17) $(\lambda I - U_n)^{-1} \to (\lambda I - U)^{-1}$ in der starken Operatortopologie. Ein Approximationssatz aus [36] (Theorem 3.6 in IX, Abschnitt 3.3) liefert unmittelbar die Behauptung, wobei hier zu beachten ist, dass die Konvergenz von Faltungsoperatoren in der starken Operatortopologie von $L(C_0(K))$ die schwache Konvergenz der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße impliziert. $\square$

Ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine H-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ (vgl. Definition 0.12), so lässt sich beweisen:

Proposition 2.4. *Es seien $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine H-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$. Es gelte*

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \textit{für alle } t > 0. \tag{2.2}$$

Weiterhin sei $\nu_n * \omega_H = \omega_H * \nu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Dann ist die Konvergenz gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+^*$.

Beweis. Der Beweis wird in zwei Schritten geführt.
1. Schritt: Projektion auf die Doppelnebenklassen-Hypergruppe $K//H$ (vgl. Definition 0.30).
Es seien $p_H : \mathcal{M}_H^1(K) \to \mathcal{M}^1(K//H)$ und $p_H^* : \mathcal{M}^1(K//H) \to \mathcal{M}_H^1(K)$ die Einschränkungen von π_H und π_H^* auf $\mathcal{M}_H^1(K) = \{\mu \in \mathcal{M}^1(K) : \omega_H * \mu * \omega_H = \mu\}$ bzw. $\mathcal{M}^1(K//H)$ (vgl. die Notation aus Definition 0.30). Für $n \in \mathbb{N}$ setze $\nu_{n,H} := \omega_H * \nu_n * \omega_H \; (= \nu_n * \omega_H)$. Dann ist $(\nu_{n,H})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_H^1(K)$, und aufgrund der Vertauschbarkeit folgt aus (2.2)

$$\nu_{n,H}^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t > 0. \tag{2.3}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ bzw. $t \geq 0$ sei $\tilde{\nu}_n := p_H(\nu_{n,H}) \in \mathcal{M}^1(K//H)$ bzw. $\tilde{\mu}_t := p_H(\mu_t) \in \mathcal{M}^1(K//H)$. $(\tilde{\mu}_t)_{t\geq 0}$ ist dann eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K//H)$, und (2.3) liefert

$$\tilde{\nu}_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{\mu}_t \quad \text{für alle } t \geq 0$$

(mit $\tilde{\nu}_n^0 := \varepsilon_e$).
Aus Proposition 2.3 folgt, dass die Konvergenz kompakt-gleichmäßig in $t \geq 0$ ist. Sei nun $t \in \mathbb{R}_+$ und $(t_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ eine Folge mit $t_n \to t$. Dann gilt $\nu_{n,H}^{[k_n t_n]} \to \mu_t$ wegen $\tilde{\nu}_n^{[k_n t_n]} \to \tilde{\mu}_t$, und mit der Vertauschbarkeit erhält man

$$\nu_n^{[k_n t_n]} * \omega_H \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \tag{2.4}$$

(wenn dabei $\nu_{n,H}^0 := \omega_H$ und $\nu_n^0 := \omega_H$ gesetzt werden).
2. Schritt: (2.4) impliziert, dass $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+^*$:
Sei $(t_n) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ eine Folge mit $t_n \to t > 0$. Im Folgenden werden die Faltungsoperatoren R_μ von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ wieder als Operatoren auf $C_0(K)$ betrachtet. Sei $f \in C_0(K)$. f lässt sich zerlegen in $f = f_1 + f_2$, wobei $f_1 := R_{\omega_H} f \in C_0(K)$, $f_2 := f - f_1 \in C_0(K)$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\|R_{\nu_n^{[k_n t_n]}} f - R_{\mu_t} f\|_\infty \leq \\ &\qquad \|R_{\nu_n^{[k_n t_n]}} f_1 - R_{\mu_t} f_1\|_\infty + \|R_{\nu_n^{[k_n t_n]}} f_2 - R_{\mu_t} f_2\|_\infty.\end{aligned} \tag{2.5}$$

(1) Wegen

$$\|R_{\nu_n^{[k_n t_n]}} f_1 - R_{\mu_t} f_1\|_\infty = \|(\nu_n^{[k_n t_n]} * \omega_H) * f - \mu_t * f\|_\infty$$

und (2.4) konvergiert $(\|R_{\nu_n^{[k_n t_n]}} f_1 - R_{\mu_t} f_1\|_\infty)$ gegen 0, denn die schwache Konvergenz impliziert die Konvergenz der zugehörigen Faltungsoperatoren in der starken Operatortopologie von $L(C_0(K))$ (vgl. Proposition 1.2.16(iv) in [10]).
(2) Da $R_{\omega_H} f_2 = 0$, ist $R_{\mu_s} f_2 = R_{\mu_s * \omega_H} f_2 = R_{\mu_s} R_{\omega_H} f_2 = 0$ für alle $s > 0$, woraus wegen (2.2) $\|R_{\nu_n^{[k_n s]}} f_2\|_\infty \to 0$ für alle $s > 0$ folgt. Wählt man nun $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $t_n > t - \varepsilon > 0$ für alle $n \geq n_0$, so ist mit $\delta_n := [k_n t_n] - [k_n(t-\varepsilon)]$ $\delta_n \in \mathbb{N}_0$ für alle $n \geq n_0$. Man erhält dann

$$\|R_{\nu_n^{[k_n t_n]}} f_2\|_\infty = \|R_{\nu_n^{\delta_n}} R_{\nu_n^{[k_n(t-\varepsilon)]}} f_2\|_\infty \leq \|R_{\nu_n^{[k_n(t-\varepsilon)]}} f_2\|_\infty,$$

also $\|R_{\nu_n^{[k_n t_n]}} f_2\|_\infty \to 0$.
Mit (1) und (2) folgt aus (2.5) $\|R_{\nu_n^{[k_n t_n]}} f - R_{\mu_t} f\|_\infty \to 0$, und somit, da $f \in C_0(K)$ beliebig war, $R_{\nu_n^{[k_n t_n]}} \to R_{\mu_t}$ in der starken Operatortopologie. Dies liefert die Behauptung. □

2.1 Der hermitesche Fall

Im Fall hermitescher Hypergruppen folgt, falls $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimal ist, d.h. gegen ε_e konvergiert, aus der Konvergenz $\nu_n^{k_n} \to \mu$, dass μ unendlich teilbar ist, was wiederum die eindeutige Einbettbarkeit von μ in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ impliziert. In diesem Fall lässt sich ein Funktionaler Grenzwertsatz einfach mit Hilfe von Fouriertransformierten unter Verwendung des Lévyschen Stetigkeitssatzes beweisen. Dabei ist zu beachten, dass für hermitesche Hypergruppen die Charaktere und damit die Fouriertransformierten von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf dem Dual reellwertig sind. Mit Blick auf Abschnitt 2.2, in welchem analoge Aussagen für den symmetrischen Fall bewiesen werden, werden zunächst die oben erwähnten Zusammenhänge für hermitesche Hypergruppen formuliert.

Proposition 2.5. *Es sei K eine hermitesche Hypergruppe und $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ mit $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon_e$. Es gelte $\nu_n^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann ist μ unendlich teilbar, d.h. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\mu_n \in \mathcal{M}^1(K)$, so dass $\mu_n^n = \mu$ gilt.*

Proposition 2.6. *Es sei K eine hermitesche Hypergruppe und $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ unendlich teilbar. Dann existiert eine eindeutig bestimmte stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ mit $\mu_1 = \mu$. Dabei ist $\hat{\mu}_t = (\hat{\mu})^t$ für alle $t > 0$ erfüllt.*

2.5 ist ein Spezialfall von Proposition 5.3.11 in [10], und 2.6 wird in Theorem 4.3 in [54] oder in Theorem 5.3.4 in [10] bewiesen. Es ergibt sich unmittelbar:

Satz 2.7 (Funktionaler Grenzwertsatz). *Es sei K eine hermitesche Hypergruppe und $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ mit $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon_e$. Es gelte $\nu_n^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann ist μ eindeutig einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$, und es gilt*

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \textit{kompakt-gleichmäßig in } t > 0.$$

Beweis. Nach den Propositionen 2.5 und 2.6 ist μ eindeutig einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$, und es gilt $\hat{\mu}_t = (\hat{\mu})^t$ für alle $t > 0$. Ist nun $t > 0$ und $\chi \in \hat{K}$, so folgt wegen $\frac{[k_n t]}{k_n} \to t$ und $(\hat{\nu}_n(\chi))^{k_n} \to \hat{\mu}(\chi)$

$$\left(\nu_n^{[k_n t]}\right)^\wedge(\chi) = (\hat{\nu}_n(\chi))^{[k_n t]} = \left((\hat{\nu}_n(\chi))^{k_n}\right)^{\frac{[k_n t]}{k_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} (\hat{\mu}(\chi))^t = \hat{\mu}_t(\chi).$$

Dabei ist zu beachten, dass aufgrund von $\hat{\nu}_n(\chi) \to 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\hat{\nu}_n(\chi) > 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Der Stetigkeitssatz von Lévy (vgl.

Satz 0.26) liefert dann $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$ für alle $t > 0$, und nach Proposition 2.4 ist die Konvergenz kompakt-gleichmäßig in $t > 0$, was man hier auch direkt einsehen kann. □

Verallgemeinert man den Begriff der Infinitesimalität wie folgt, so lässt sich ein Funktionaler Grenzwertsatz unter dieser Voraussetzung nahezu analog beweisen. Die folgende Definition ist dabei für beliebige, nicht notwendig hermitesche, Hypergruppen sinnvoll.

Definition 2.8. Es sei K eine Hypergruppe. Eine Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ heißt *infinitesimal*, falls gelten:

(i) $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu \in \mathcal{M}^1(K)$;

(ii) $H := [\mathrm{supp}(\nu)]$ ist kompakt, und ν ist auf keiner Nebenklasse $\{x\} * G$ einer echten supernormalen Unterhypergruppe G von H konzentriert.

Mit dem Satz von Kawada/Ito für kompakte Hypergruppen erhält man die folgende Charakterisierung der Infinitesimalität:

Proposition 2.9. *Es sei K eine Hypergruppe.*

(a) Sei $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ infinitesimal. Dann folgt $\nu^l \xrightarrow[l\to\infty]{} \omega_H$, wobei $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu$ und $H = [supp(\nu)]$.

(b) Für $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ gelte $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu \in \mathcal{M}^1(K)$ und $\nu^l \xrightarrow[l\to\infty]{} \omega_H$, wobei H eine kompakte Unterhypergruppe ist. Dann ist $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimal, und es gilt $[supp(\nu)] = H$.

Beweis. Teil (a) ergibt sich unmittelbar aus dem Satz von Kawada/Ito (vgl. [10], Theorem 5.1.17), die Aussage aus (b) erhält man ebenfalls mit Kawada/Ito, wobei hier zunächst gezeigt werden muss, dass $[\mathrm{supp}(\nu)]$ kompakt ist. Dies folgt aber sofort aus der Voraussetzung $\nu^l \to \omega_H$, da dann wegen $\nu^{l+1} \to \omega_H$ gilt $\nu * \omega_H = \omega_H$ und somit (vgl. Theorem 1.6.9 in [10]) $[\mathrm{supp}(\nu)] \subseteq L(\omega_H) = \{x \in K : \varepsilon_x * \omega_H = \omega_H\}$. Nach Theorem 1.6.3 in [10] ist $L(\omega_H)$ kompakt. □

Bemerkung 2.10. (a) $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ mit $\nu_n \to \varepsilon_e$ ist infinitesimal, ebenso $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ mit $\nu_n \to \omega_H$, wobei H eine kompakte Unterhypergruppe von K ist.

(b) Falls K keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen besitzt, so ist $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann infinitesimal, wenn (ν_n) gegen ε_e konvergiert.

(c) Dieses erweiterte Konzept der Infinitesimalität ist vom Gruppenfall übertragen, vgl. [51], Definition 3.2 und Lemma 3.4, bzw. [52], Definition 2.1, und wird auch im allgemeinen Funktionalen Grenzwertsatz in Abschnitt 2.3 als wesentliche Voraussetzung auftreten.

(d) In Proposition 2.9(b) reicht es, die Existenz von $\rho := \lim_{l\to\infty} \nu^l$ zu fordern, da zunächst die Idempotenz von ρ folgt und dann mit Theorem 1.6.7 in [10] $\rho = \omega_H$ mit einer kompakten Unterhypergruppe H.

Die Aussage aus Proposition 2.5 bleibt erhalten, wenn die Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimal ist im Sinne der neuen Definition, und somit lässt sich unter Verwendung von Proposition 2.6 ein Funktionaler Grenzwertsatz unter dieser Voraussetzung beweisen.

Proposition 2.11. *Es sei K eine hermitesche Hypergruppe und $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ infinitesimal, d.h. es gelten $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu \in \mathcal{M}^1(K)$, $H := [supp(\nu)]$ kompakt und $\nu^l \xrightarrow[l\to\infty]{} \omega_H$. Weiterhin konvergiere $(\nu_n^{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann ist μ unendlich teilbar.*

Beweis. Es wird gezeigt, dass μ schwacher Limes einer Folge von unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaßen ist. Nach Theorem 5.3.8 in [10] ist dann auch μ unendlich teilbar.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei δ_n das Poisson-Maß

$$\delta_n := e^{-k_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k_n^k}{k!} \nu_n^k$$

(mit $\nu_n^0 := \varepsilon_e$). $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaßen, und es gilt

$$\hat{\delta}_n(\chi) = \exp(k_n(\hat{\nu}_n(\chi) - 1)) \quad \text{für alle } \chi \in \hat{K}.$$

Für $\chi \in \hat{K}$ mit $\hat{\omega}_H(\chi) = 1$ folgt $\hat{\nu}(\chi) = 1$, d.h. $\hat{\nu}_n(\chi) \to 1$, also ist $\hat{\nu}_n(\chi) > 0$ von einem Index n_0 an. Dann erhält man aus $\nu_n^{k_n} \to \mu$ unmittelbar $\exp(k_n \log(\hat{\nu}_n(\chi))) \to \hat{\mu}(\chi)$, was wegen

$$k_n(\hat{\nu}_n(\chi) - 1) = k_n \log(\hat{\nu}_n(\chi)) \frac{\hat{\nu}_n(\chi) - 1}{\log(\hat{\nu}_n(\chi))} \quad (\text{für } \hat{\nu}_n(\chi) \neq 1)$$

und $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\log x} = 1$

$$\exp(k_n(\hat{\nu}_n(\chi) - 1)) \to \hat{\mu}(\chi) \tag{2.6}$$

impliziert.
Ist im anderen Fall $\chi \in \hat{K}$ mit $\hat{\omega}_H(\chi) = 0$, so folgt $\hat{\nu}_n(\chi) \to \hat{\nu}(\chi)$ mit $\hat{\nu}(\chi) \in]-1, 1[$, also $\hat{\nu}_n(\chi) - 1 \to \hat{\nu}(\chi) - 1 < 0$, was $k_n(\hat{\nu}_n(\chi) - 1) \to -\infty$ und somit $\exp(k_n(\hat{\nu}_n(\chi) - 1)) \to 0$ impliziert. Aus $\nu_n^{k_n} \to \mu$ folgt in diesem Fall aber $\hat{\mu}(\chi) = 0$, also ebenfalls (2.6).
Somit erhält man aus beiden Fällen $\delta_n \to \mu$ und damit die Behauptung. □

Satz 2.12 (Funktionaler Grenzwertsatz). *Es sei K eine hermitesche Hypergruppe und $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ infinitesimal. Es gelte $\nu_n^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann ist μ eindeutig einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$, und es gilt*

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \textit{kompakt-gleichmäßig in } t > 0.$$

Beweis. Die eindeutige Einbettbarkeit folgt aus den Propositionen 2.11 und 2.6. Dabei ist $\hat{\mu}_t = (\hat{\mu})^t$ für alle $t > 0$ erfüllt. Es sei $H = [\mathrm{supp}(\nu)]$, wobei $\nu = \lim_{n\to\infty} \nu_n$. Ist $\chi \in \hat{K}$ mit $\hat{\omega}_H(\chi) = 1$, so folgt $\hat{\nu}_n(\chi) \to 1$, und wie im Beweis von Satz 2.7 erhält man $(\nu_n^{[k_n t]})^\wedge(\chi) \to \hat{\mu}_t(\chi)$.
Für $\chi \in \hat{K}$ mit $\hat{\omega}_H(\chi) = 0$ konvergiert $((\hat{\nu}_n(\chi))^{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, d.h. es gilt $\hat{\mu}(\chi) = 0$, und wegen

$$\left|(\hat{\nu}_n(\chi))^{[k_n t]}\right| = \left(|\hat{\nu}_n(\chi)|^{k_n}\right)^{\frac{[k_n t]}{k_n}} \to 0$$

folgt $(\nu_n^{[k_n t]})^\wedge(\chi) \to 0 = \hat{\mu}_t(\chi)$. □

Bemerkung. Für die kompakten Unterhypergruppen H ((ν_n) H-infinitesimal) und C ($(\mu_t)_{t\geq 0}$ C-stetige Faltungshalbgruppe) im Funktionalen Grenzwertsatz 2.12 gilt die Beziehung $H \subseteq C$, denn über den Eindeutigkeitssatz der Fouriertransformation sieht man zunächst, dass für alle $t > 0$ $\mu_t * \omega_H = \mu_t$ erfüllt ist. Dies impliziert $\omega_C * \omega_H = \omega_C$, woraus $H \subseteq C$ folgt.

2.2 Der symmetrische Fall

Grundlegend für die einfach mittels Fouriertransformierter zu beweisenden Funktionalen Grenzwertsätze in Abschnitt 2.1 war die Einbettbarkeit von unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaßen μ in stetige Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf hermiteschen Hypergruppen, wobei dann der Zusammenhang $\hat{\mu}_t = (\hat{\mu})^t$ $(t > 0)$ für die Fouriertransformierten besteht. Ein Beweis dieser Eigenschaft lässt sich dergestalt führen (vgl. [54], Theorem 4.3, oder [10], Theorem 5.3.4), dass für die Funktionen $f_t := (\hat{\mu})^t \in C^b(\hat{K})$, $t > 0$, sowie $f_0 := 1_{\{\hat{\mu}>0\}}$, welche $f_s f_t = f_{s+t}$ für alle $s, t \geq 0$ erfüllen, gezeigt wird, dass

sie Fouriertransformierte von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mu_t \in \mathcal{M}^1(K)$ sind. Betrachtet man Hypergruppen mit linkem Haarmaß ω_K, so kann ein ähnlicher Schluss auf der Ebene von Operatoren mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln durchgeführt werden, sofern die $\mu_n \in \mathcal{M}^1(K)$ mit $\mu_n^n = \mu$ (und damit auch μ) *symmetrisch* sind, d.h. $\mu_n^- = \mu_n$ erfüllen. Die Rollen der Funktionen f_t übernehmen dabei Operatoren $(T_t)_{t\geq 0}$ auf $L^2(K)$ $(= L^2(K, \omega_K))$, die sich über den Spektralsatz für normale Operatoren auf Hilberträumen auf naheliegende Weise aus dem Faltungsoperator R_μ ergeben werden, und für welche dann entsprechend nachzuweisen ist, dass es sich um Faltungsoperatoren von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mu_t \in \mathcal{M}^1(K)$ handelt.
Darauf aufbauend ist es möglich, als Verallgemeinerung von 2.7 einen Funktionalen Grenzwertsatz für den Fall zu beweisen, dass $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von symmetrischen Wahrscheinlichkeitsmaßen ist, die $\nu_n \to \varepsilon_e$ erfüllt.

Im Folgenden seien stets K eine Hypergruppe mit linkem Haarmaß ω_K und die Faltungsoperatoren R_μ Operatoren auf dem Hilbertraum $L^2(K)$.

Bemerkung 2.13. Ist $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$, so gilt (vgl. Eigenschaften 1.4.1 in [10]) für $f, g \in L^2(K)$

$$\langle R_\mu f, g\rangle = \int_K (\mu * f)\bar{g}\, d\omega_K = \int_K f(\mu^- * \bar{g})\, d\omega_K = \langle f, R_{\mu^-} g\rangle,$$

d.h. ist μ symmetrisch, so ist R_μ selbstadjungiert.

Zunächst wird nun also das symmetrische Analogon zu Proposition 2.6 in Abschnitt 2.1 bewiesen.

Satz 2.14. *$\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ sei unendlich teilbar, d.h. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\mu_{(n)} \in \mathcal{M}^1(K)$, so dass $\mu_{(n)}^n = \mu$. Dabei seien die $(\mu_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ symmetrisch, d.h. es gilt $\mu_{(n)}^- = \mu_{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ mit $\mu_1 = \mu$ und $\mu_t^- = \mu_t$ für alle $t \geq 0$.*

Dem Beweis des Satzes wird ein Lemma vorangestellt, dessen Aussage bekannt ist und welches mit dem Spektralsatz für normale Operatoren in Hilberträumen (vgl. z.B. [41], Satz 18.10) bewiesen wird. Entscheidend für die Anwendbarkeit der Spektraltheorie in dieser Form ist die Positivität des Faltungsoperators R_μ, die sich in der Situation von Satz 2.14 aus den Voraussetzungen ergibt. Dabei ist in diesem Zusammenhang die Positivität von Operatoren als positive Semidefinitheit zu verstehen (vgl. die Definition in [41], Abschnitt 18). Das folgende Lemma beschreibt somit die eingangs angekündigte Konstruktion.

Lemma 2.15. *Es sei $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$, so dass der zugehörige Faltungsoperator R_μ positiv ist, also $\langle R_\mu f, f\rangle \geq 0$ für alle $f \in L^2(K)$ erfüllt ist. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Familie $(T_t)_{t\geq 0} \subseteq L(L^2(K))$ positiver Operatoren mit $T_1 = R_\mu$, $\|T_t\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$, $T_{s+t} = T_s T_t$ für alle $s, t \geq 0$, und $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T_t \in L(L^2(K))$ ist stetig bezüglich der schwachen Operatortopologie.*

Beweis. Es wird die Konstruktion der Operatoren über den Spektralsatz beschrieben. Für die folgenden Definitionen, Bezeichnungen und Zusammenhänge sei dabei verwiesen auf [41], Abschnitte 17 und 18.
Da R_μ Faltungsoperator eines Wahrscheinlichkeitsmaßes und nach Voraussetzung positiv ist, ist sein Spektrum $\sigma(R_\mu)$ in $[0, 1]$ enthalten. R_μ ist als selbstadjungierter Operator insbesondere normal, und damit existiert nach dem Spektralsatz für normale Operatoren in Hilberträumen (vgl. [41], Satz 18.10) ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E auf $\sigma(R_\mu)$, so dass

$$R_\mu = \int z \, dE$$

gilt, wobei z die identische Abbildung auf $\sigma(R_\mu)$ bezeichne.

$$\Psi_{R_\mu} : \mathcal{M}_\infty(\sigma(R_\mu)) \to L(L^2(K))$$

sei der stetige Funktionalkalkül von R_μ, dabei sei $\mathcal{M}_\infty(\sigma(R_\mu))$ die Menge aller Borel-messbaren und beschränkten Funktionen auf $\sigma(R_\mu)$. (E erfüllt dann $E(M) = \Psi_{R_\mu}(1_M)$ für alle $M \in \mathcal{B}(\sigma(R_\mu))$.)
Für $t > 0$ sei $h_t : \sigma(R_\mu) \to \mathbb{R}_+$ definiert durch $h_t(x) := x^t$, sowie $h_0 := 1_{\{x\in\sigma(R_\mu):x\neq 0\}}$. Dann ist $h_t \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(R_\mu))$ für alle $t \geq 0$, und für $s, t \geq 0$ gilt $h_{s+t} = h_s h_t$. Setzt man nun für $t \geq 0$

$$T_t := \Psi_{R_\mu}(h_t) = \int h_t \, dE, \tag{2.7}$$

so ist $T_1 = R_\mu$, und aufgrund der Homomorphismus-Eigenschaft von Ψ_{R_μ} folgt $T_{s+t} = T_s T_t$ für alle $s, t \geq 0$. Die Eigenschaften „T_t positiver Operator“ und $\|T_t\| \leq 1$ für jedes $t \geq 0$ erhält man wegen $\langle T_t f, f\rangle = \int h_t \, dE_{f,f}$ für alle $f \in L^2(K)$ aus Eigenschaften des Spektralmaßes (vgl. [41], S. 187/188). Die w-Stetigkeit des Funktionalkalküls (vgl. [41], Satz 18.3 und die vorangehende Definition) impliziert, dass für jede Folge $(t_n) \subseteq \mathbb{R}_+^*$, die gegen $t \in \mathbb{R}_+$ konvergiert,

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_{t_n} f, g\rangle = \langle T_t f, g\rangle \quad \text{für alle } f, g \in L^2(K)$$

erfüllt ist, und dies liefert die Eindeutigkeit der Familie $(T_t)_{t\geq 0}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich $T_{\frac{1}{n}}$ die eindeutig bestimmte positive n-te Wurzel des positiven Operators $T_1 = R_\mu$ (vgl. [41], Lemma 18.17; der Beweis dort ist für $n = 2$ geführt, lässt sich aber völlig analog auf den allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$ übertragen), ist also $(S_t)_{t\geq 0}$ eine weitere Familie von Operatoren mit den angegebenen Eigenschaften, so folgt daraus wegen der Halbgruppeneigenschaft zunächst $S_{\frac{1}{n}} = T_{\frac{1}{n}}$ und dann $S_r = T_r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Mit der Stetigkeit bezüglich der schwachen Operatortopologie erhält man für $t \in \mathbb{R}_+$ $\langle S_t f, g\rangle = \langle T_t f, g\rangle$ für alle $f, g \in L^2(K)$, also $S_t = T_t$. □

Ferner werden für den Beweis von Satz 2.14 Eigenschaften derjenigen Abbildung verwendet, die jedem Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß μ den entsprechenden Faltungsoperator R_μ zuordnet. Da diese auch an späteren Stellen noch benötigt werden, werden sie im folgenden Lemma festgehalten.

Lemma 2.16. *Die Abbildung $\Phi : \mathcal{M}_+^{(1)}(K) \to L(L^2(K))$ sei definiert durch*

$$\mathcal{M}_+^{(1)}(K) \ni \mu \mapsto \Phi(\mu) := R_\mu.$$

Dann ist Φ injektiv und stetig bezüglich der vagen Topologie bzw. der schwachen Operatortopologie in $L(L^2(K))$. $\Phi(\mathcal{M}_+^{(1)}(K))$ ist somit kompakt, und die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : \Phi(\mathcal{M}_+^{(1)}(K)) \to \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ ist ebenfalls stetig.

Beweis. Die Injektivität von Φ folgt aus Theorem 6.2I in [35]. Da K dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, ist $\mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ metrisierbar bezüglich der vagen Topologie, und somit reicht es, die Folgen-Stetigkeit von Φ nachzuweisen. Es sei nun also $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ eine Folge, die gegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ vag konvergiert. Für $\nu \in \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ und $f, g \in C_c(K)$ gilt stets

$$\begin{aligned}
\langle R_\nu f, g\rangle &= \int_K (\nu * f)\bar{g}\, d\omega_K \\
&= \int_K \int_K f(y^- * x)\, d\nu(y)\bar{g}(x)\, d\omega_K(x) \\
&= \int_K \int_K f(y * x)\, d\nu^-(y)\bar{g}(x)\, d\omega_K(x) \\
&= \int_K \int_K f(y * x)\bar{g}(x)\, d\omega_K(x)\, d\nu^-(y) \\
&= \int_K (f * g^\sim)(y)\, d\nu^-(y), \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

daher folgt für $f, g \in C_c(K)$ wegen $f * g^\sim \in C_c(K)$ (wobei $g^\sim(x) = \bar{g}(x^-)$ für $x \in K$) und $\mu_n^- \to \mu^-$ vag

$$\langle R_{\mu_n} f, g\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle R_\mu f, g\rangle. \qquad (2.9)$$

Mit der Dichtheit von $C_c(K)$ in $L^2(K)$ erhält man (2.9) für alle $f, g \in L^2(K)$, also $R_{\mu_n} \to R_\mu$ in der schwachen Operatortopologie von $L(L^2(K))$, und somit die Stetigkeit von Φ. Da $\mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ vag kompakt ist, ist $\Phi(\mathcal{M}_+^{(1)}(K))$ kompakt, und nach Satz 8.12 in [45] ist Φ^{-1} stetig. $\square$

Bemerkung 2.17. (a) Φ, definiert wie in Lemma 2.16, ist ein Homomorphismus, d.h. für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ gilt $\Phi(\mu * \nu) = \Phi(\mu)\Phi(\nu)$.

(b) Für Wahrscheinlichkeitsmaße $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ und $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ gelten:
Aus $\mu_n \to \mu$ vag (d.h. schwach) folgt sogar $R_{\mu_n} \to R_\mu$ in der starken Operatortopologie (vgl. Lemma 1.4.6 in [10]).
$R_{\mu_n} \to R_\mu$ in der schwachen Operatortopologie impliziert $\mu_n \to \mu$ vag, also $\mu_n \to \mu$ schwach.

Es folgt nun der Beweis von Satz 2.14.

Beweis von Satz 2.14. Da ein symmetrisches $\mu_{(2)} \in \mathcal{M}^1(K)$ existiert mit $\mu_{(2)}^2 = \mu$, gilt

$$\langle R_\mu f, f\rangle = \langle R_{\mu_{(2)}} R_{\mu_{(2)}} f, f\rangle = \langle R_{\mu_{(2)}} f, R_{\mu_{(2)}} f\rangle \geq 0$$

für alle $f \in L^2(K)$, also ist R_μ positiv. Nach Lemma 2.15 existiert folglich eine eindeutig bestimmte Familie $(T_t)_{t\geq 0} \subseteq L(L^2(K))$ positiver Operatoren mit $T_1 = R_\mu$, $\|T_t\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$,

$$T_{s+t} = T_s T_t \quad \text{für alle } s, t \geq 0, \tag{2.10}$$

und $t \mapsto T_t$ ist stetig bezüglich der schwachen Operatortopologie. Dabei ist für $n \in \mathbb{N}$ $T_{\frac{1}{n}}$ die eindeutig bestimmte positive n-te Wurzel von R_μ. Ist nun $n \in \mathbb{N}$ und $\mu_{(2n)} \in \mathcal{M}^1(K)$, so dass $\mu_{(2n)}^{2n} = \mu$ und $\mu_{(2n)}^- = \mu_{(2n)}$, so ist $R_{\mu_{(2n)}^2}$ positiv, und wegen $(R_{\mu_{(2n)}^2})^n = R_{\mu_{(2n)}^{2n}} = R_\mu$ folgt $R_{\mu_{(2n)}^2} = T_{\frac{1}{n}}$.
Setzt man für $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\mu_r := \mu_{(2q)}^{2p},$$

so ist aufgrund der Halbgruppeneigenschaft (2.10) zunächst

$$R_{\mu_r} = \left(R_{\mu_{(2q)}^2}\right)^p = \left(T_{\frac{1}{q}}\right)^p = T_{\frac{p}{q}} = T_r$$

und dann $(\mu_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$ eine rationale Faltungshalbgruppe, d.h. für $q, r \in \mathbb{Q}_+^*$ gilt $\mu_q * \mu_r = \mu_{q+r}$. Weiterhin ist μ_r für jedes $r \in \mathbb{Q}_+^*$ symmetrisch.

Sei nun $t \in \mathbb{R}_+$ und $(r_n) \subseteq \mathbb{Q}_+^*$ eine Folge mit $r_n \to t$. Dann besitzt die Folge $(\mu_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ einen vagen Häufungspunkt $\lambda_t \in \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$, d.h. es existiert eine Teilfolge $(n_k) \subseteq \mathbb{N}$ mit

$$\mu_{r_{n_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_t \quad \text{vag.}$$

Nach Lemma 2.16 konvergiert $(R_{\mu_{r_{n_k}}})$ gegen R_{λ_t} in der schwachen Operatortopologie, und aufgrund der Stetigkeit von $t \mapsto T_t$ und $R_{\mu_r} = T_r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_+^*$ folgt dann

$$\langle T_t f, g\rangle = \langle R_{\lambda_t} f, g\rangle \quad \text{für alle } f, g \in L^2(K),$$

also $T_t = R_{\lambda_t}$. Insbesondere ist λ_t der einzige vage Häufungspunkt von $(\mu_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. es gilt $\mu_{r_n} \to \lambda_t =: \mu_t$ vag. Wegen (2.10) folgt $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ für alle $s, t \geq 0$, und da für jedes $r \in \mathbb{Q}_+^*$ μ_r ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, ist $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$. Nach Konstruktion ist die Faltungshalbgruppe stetig. □

Basierend auf den verwendeten funktionalanalytischen Zusammenhängen lässt sich nun ein Funktionaler Grenzwertsatz unter den folgenden Voraussetzungen beweisen.

Voraussetzungen 2.18. Es sei K eine Hypergruppe mit linkem Haarmaß ω_K. $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ sei eine Folge von symmetrischen Wahrscheinlichkeitsmaßen, die $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon_e$ erfüllt. $(\nu_n^{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$.

Ziel ist es also zunächst, in der Situation von 2.18 die Existenz einer eindeutig bestimmten stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ mit

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t > 0$$

zu zeigen.
Der Nachweis erfolgt in mehreren Schritten, welche im Folgenden zum Teil als Hilfssätze formuliert werden.

Lemma 2.19. *Es gelten die Voraussetzungen 2.18. Dann ist R_μ ein positiver Operator, d.h. es ist $\langle R_\mu f, f\rangle \geq 0$ für jedes $f \in L^2(K)$.*

Beweis. Aus $\nu_n^{k_n} \to \mu$ folgt $R_{\nu_n^{k_n}} \to R_\mu$ in der starken Operatortopologie, woraus sich unmittelbar

$$\langle \nu_n^{k_n} * f, f\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \mu * f, f\rangle \quad \text{für alle } f \in L^2(K) \tag{2.11}$$

ergibt. Ebenso erhält man, da $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ε_e konvergiert,

$$\langle \nu_n^{k_n+1} * f, f\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \mu * f, f\rangle \quad \text{für alle } f \in L^2(K). \tag{2.12}$$

Besitzt $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(k_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$, so dass k_{n_l} gerade ist für alle $l \in \mathbb{N}$, so ist wegen der Selbstadjungiertheit von $R_{\nu_{n_l}}$

$$\langle \nu_{n_l}^{k_{n_l}} * f, f\rangle = \langle \nu_{n_l}^{k_{n_l}/2} * f, \nu_{n_l}^{k_{n_l}/2} * f\rangle \geq 0$$

für alle $l \in \mathbb{N}$ und $f \in L^2(K)$, und (2.11) liefert dann $\langle \mu * f, f\rangle \geq 0$ für alle $f \in L^2(K)$. Falls es keine solche Teilfolge gibt, so enthält $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit ausschließlich ungeraden Folgengliedern, und die letzte Aussage folgt analog mit (2.12). □

Lemma 2.20. *Es seien T und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive Operatoren auf einem Hilbertraum H mit $\|T\| \leq 1$ und $\|T_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ in der starken Operatortopologie. Für $N \in \mathbb{N}$ folgt dann $\sqrt[N]{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[N]{T}$ in der starken Operatortopologie (wobei $\sqrt[N]{T}$ und $\sqrt[N]{T_n}$, $n \in \mathbb{N}$, die eindeutig bestimmten positiven Operatoren mit $(\sqrt[N]{T})^N = T$ bzw. $(\sqrt[N]{T_n})^N = T_n$ sind).*

Beweis. Auch hier sei für Bezeichnungen und Zusammenhänge verwiesen auf [41], Abschnitte 17 und 18.
Im Folgenden sei $N \in \mathbb{N}$ fest. Für die eindeutig bestimmten positiven N-ten Wurzeln der Operatoren gilt $\sqrt[N]{T} = \int w_N \, dE$ bzw. $\sqrt[N]{T_n} = \int w_N \, dE^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, wobei E und $E^{(n)}$ die zu den Operatoren T und T_n gehörigen Spektralmaße bezeichnen. $w_N : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ sei definiert durch $w_N(x) := h_{\frac{1}{N}}(x) = \sqrt[N]{x}$ (vgl. die Notation aus dem Beweis von Lemma 2.15). Nach dem Approximationssatz von Weierstraß kann w_N gleichmäßig auf $[0,1]$ durch Polynome approximiert werden.
Es sei nun $x \in H$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein Polynom p, so dass $\|w_N - p\|_\infty < \varepsilon$, und wegen der definierenden Eigenschaft von $\int f \, dE$ für $f \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(T))$ und Eigenschaften des Spektralmaßes (vgl. [41], S. 187/188) erhält man

$$\begin{aligned} \left\| \int w_N \, dEx - \int p \, dEx \right\|^2 &= \int |w_N - p|^2 \, dE_{x,x} \\ &\leq \|w_N - p\|_\infty^2 \, E_{x,x}(\sigma(T)) \\ &= \|w_N - p\|_\infty^2 \, \|x\|^2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \left\| \int w_N \, dEx - \int p \, dEx \right\| &\leq \|w_N - p\|_\infty \, \|x\| \\ &\leq \varepsilon \, \|x\|, \end{aligned} \tag{2.13}$$

und die gleiche Abschätzung ist auch für $E^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, gültig. Da p ein Polynom ist, gilt aufgrund der Voraussetzung $T_n \to T$

$$\int p\, dE^{(n)} = p(T_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(T) = \int p\, dE \tag{2.14}$$

in der starken Operatortopologie. Mit (2.13) für E und $E^{(n)}$ und (2.14) liefert die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left\|\int w_N\, dE^{(n)}x - \int w_N\, dEx\right\| \leq \\ &\quad \left\|\int w_N\, dE^{(n)}x - \int p\, dE^{(n)}x\right\| + \left\|\int p\, dE^{(n)}x - \int p\, dEx\right\| + \\ &\quad \left\|\int p\, dEx - \int w_N\, dEx\right\|\end{aligned}$$

$\int w_N\, dE^{(n)}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int w_N\, dEx$ und damit die Behauptung. □

Für den nach Lemma 2.19 positiven Operator R_μ sei $(T_t)_{t\geq 0} \subseteq L(L^2(K))$ die in Lemma 2.15 konstruierte Familie positiver Operatoren. Insbesondere ist also für $N \in \mathbb{N}$ $T_{\frac{1}{N}}$ die eindeutig bestimmte positive N-te Wurzel von R_μ. Unter Verwendung der im vorigen Lemma nachgewiesenen Hilfsaussage aus der Funktionalanalysis erhält man dann:

Lemma 2.21. *Die Voraussetzungen 2.18 seien erfüllt. Setzt man für $N \in \mathbb{N}$*

$$\lambda_n^{(N)} := \nu_n^{[\frac{k_n}{2N}]} * \nu_n^{[\frac{k_n}{2N}]}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

so konvergieren die Faltungsoperatoren $(R_{\lambda_n^{(N)}})_{n\in\mathbb{N}}$ in der starken Operatortopologie gegen $T_{\frac{1}{N}}$.

Beweis. Schreibt man für $n \in \mathbb{N}$ k_n als

$$k_n = \underbrace{\left[\frac{k_n}{2N}\right] + \cdots + \left[\frac{k_n}{2N}\right]}_{2N \text{ Summanden}} + \varepsilon_n$$

mit $\varepsilon_n \in \{0, 1, \ldots, 2N-1\}$, so erhält man aufgrund der Voraussetzung $\nu_n \to \varepsilon_e$ zunächst $\nu_n^{\varepsilon_n} \to \varepsilon_e$ und dann mit $\nu_n^{k_n} \to \mu$ und dem Theorem über Shift-Kompaktheit (vgl. [10], Theorem 5.1.4)

$$\underbrace{\nu_n^{[\frac{k_n}{2N}]} * \cdots * \nu_n^{[\frac{k_n}{2N}]}}_{2N \text{ Faktoren}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu,$$

also

$$(\lambda_n^{(N)})^N \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu. \tag{2.16}$$

Wegen der Definition von $\lambda_n^{(N)}$ und der Symmetrie der (ν_n) sind $R_{(\lambda_n^{(N)})^N}$ und $R_{\lambda_n^{(N)}}$ positive Operatoren, und somit ist für $n \in \mathbb{N}$ $R_{\lambda_n^{(N)}}$ die eindeutig bestimmte positive N-te Wurzel von $R_{(\lambda_n^{(N)})^N}$. Aus (2.16) folgt dann mit Lemma 2.20 $R_{\lambda_n^{(N)}} \to T_{\frac{1}{N}}$ in der starken Operatortopologie. □

Mit Lemma 2.21 und Lemma 2.16 folgt nun, dass die Operatoren $T_{\frac{1}{N}}$ Faltungsoperatoren sind.

Lemma 2.22. *Die Voraussetzungen 2.18 seien erfüllt.* $(T_t)_{t\geq 0} \subseteq L(L^2(K))$ *sei die gemäß Lemma 2.15 zum positiven Faltungsoperator* R_μ *gehörige Familie positiver Operatoren. Dann existiert zu jedem* $N \in \mathbb{N}$ *ein (symmetrisches)* $\lambda_{\frac{1}{N}} \in \mathcal{M}^1(K)$*, so dass* $T_{\frac{1}{N}} = R_{\lambda_{\frac{1}{N}}}$ *gilt.*

Beweis. Es sei $N \in \mathbb{N}$ fest. Für einen vagen Häufungspunkt $\rho \in \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ von $(\lambda_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dann wegen Lemma 2.16 und Lemma 2.21 $R_\rho = T_{\frac{1}{N}}$, und insbesondere ist ρ einziger vager Häufungspunkt. Setzt man also $\lambda_{\frac{1}{N}} := \rho$, so ist wegen $R_\mu = R_{(\lambda_{\frac{1}{N}})^N}$ $\lambda_{\frac{1}{N}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und es folgt die Behauptung. Die Symmetrie ergibt sich dabei aus $\lambda_n^{(N)} \to \lambda_{\frac{1}{N}}$ mit der Symmetrie der (ν_n) und der Definition der $(\lambda_n^{(N)})$. □

Insbesondere ist damit das symmetrische Analogon zu Proposition 2.5 bewiesen:

Korollar 2.23. *Es gelten die Voraussetzungen 2.18. Dann ist* μ *symmetrisch unendlich teilbar, d.h. zu jedem* $n \in \mathbb{N}$ *existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mu_{(n)} \in \mathcal{M}^1(K)$ *mit* $\mu_{(n)}^n = \mu$ *und* $\mu_{(n)}^- = \mu_{(n)}$.

Bemerkung 2.24. (a) Eine Zusammenfassung der bisherigen Schritte liefert:
Sind die Voraussetzungen 2.18 erfüllt, so ist μ symmetrisch unendlich teilbar und demzufolge nach Satz 2.14 eindeutig einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ mit $\mu_t^- = \mu_t$ für alle $t \geq 0$. Für die für $N \in \mathbb{N}$ gemäß (2.15) definierte Folge $(\lambda_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ gilt

$$\lambda_n^{(N)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_{\frac{1}{N}}. \tag{2.17}$$

(b) In Lemma 2.22 wurde die Existenz von symmetrischen Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\lambda_{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ gezeigt mit $(\lambda_{\frac{1}{n}})^n = \mu$ und $R_{\lambda_{\frac{1}{n}}} = T_{\frac{1}{n}}$. An dieser Stelle würde man auch ohne die Anwendung von Satz 2.14 zunächst die Existenz einer rationalen Faltungshalbgruppe $(\lambda_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$ mit $R_{\lambda_r} = T_r$ für $r \in \mathbb{Q}_+^*$ erhalten und dann mit dem letzten Schritt aus dem Beweis von Satz 2.14, in welchem die Stetigkeit von $t \mapsto T_t$ ausgenutzt wird, die einer eindeutig bestimmten stetigen Faltungshalbgruppe $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ mit $R_{\lambda_t} = T_t$ für $t \geq 0$. Der in allgemeineren Situationen gültige Satz 2.14 wurde vorab formuliert und bewiesen, da die Einbettungsaussage für sich interessant ist und darüberhinaus die Übertragung des Beweises vom entsprechenden Resultat für hermitesche Hypergruppen auf die Ebene von Operatoren die Motivation für diesen funktionalanalytischen Ansatz unterstreicht.

Korollar 2.25. *Die Voraussetzungen 2.18 seien erfüllt. Dann ist μ eindeutig einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ mit $\mu_t^- = \mu_t$ für alle $t \geq 0$, und es gilt*

$$\nu_n^{[k_n r]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_r \quad \textit{für alle } r \in \mathbb{Q}_+^*.$$

Beweis. Aus (2.17) folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$ wegen

$$\nu_n^{[k_n \frac{1}{N}]} = \nu_n^{[\frac{k_n}{2N}]} * \nu_n^{[\frac{k_n}{2N}]} * \nu_n^{\varepsilon_n} = \lambda_n^{(N)} * \nu_n^{\varepsilon_n}$$

mit $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und der Voraussetzung $\nu_n \to \varepsilon_e$

$$\nu_n^{[k_n \frac{1}{N}]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_{\frac{1}{N}}.$$

Da für $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $r = \frac{M}{N}$ mit $M, N \in \mathbb{N}$,

$$\nu_n^{[k_n r]} = \nu_n^{M[k_n \frac{1}{N}]} * \nu_n^{\varepsilon_n}$$

mit $\varepsilon_n \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ ist, liefert dies

$$\nu_n^{[k_n r]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\mu_{\frac{1}{N}}\right)^M = \mu_{\frac{M}{N}} = \mu_r.$$

□

Als letzter Schritt erfolgt nun der Nachweis, dass auch $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$ für alle $t > 0$ erfüllt ist. Dazu werden auf der Ebene von Operatoren wieder Methoden der Spektraltheorie benutzt, für deren Anwendbarkeit in dieser Form zunächst vorausgesetzt sei, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Operator R_{ν_n} positiv ist, woraus sich dann auch die Positivität von $R_{\nu_n^{k_n}}$ ergibt.

Lemma 2.26. *Es gelten die Voraussetzungen 2.18. Dabei sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Operator R_{ν_n} positiv. Dann ist μ eindeutig einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ mit $\mu_t^- = \mu_t$ für alle $t \geq 0$, und es gilt*

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \textit{für alle } t > 0.$$

Beweis. Es sei $t > 0$ beliebig und $(r_n) \subseteq \mathbb{Q}_+^*$ die durch $r_n := \frac{[k_n t]}{k_n}$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge mit $\lim_{n\to\infty} r_n = t$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Psi_n : \mathcal{M}_\infty(\sigma(R_{\nu_n^{k_n}})) \to L(L^2(K))$ der Funktionalkalkül des positiven Operators $R_{\nu_n^{k_n}}$ und $E^{(n)}$ das zugehörige Spektralmaß. Mit den wie im Beweis von Lemma 2.15 definierten Funktionen $(h_s)_{s>0}$ auf $[0,1]$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int h_{r_n}\, dE^{(n)} &= \Psi_n(h_{r_n}) = \Psi_n\left(\left(h_{\frac{1}{k_n}}\right)^{[k_n t]}\right) = \left(\Psi_n\left(h_{\frac{1}{k_n}}\right)\right)^{[k_n t]} \\ &= (R_{\nu_n})^{[k_n t]} = R_{\nu_n^{[k_n t]}} \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Es wird nun gezeigt, dass $(R_{\nu_n^{[k_n t]}})$ gegen R_{μ_t} in der starken Operatortopologie konvergiert, d.h. dass

$$\left\| \int h_{r_n}\, dE^{(n)} f - \int h_t\, dE f \right\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{für alle } f \in L^2(K) \tag{2.18}$$

erfüllt ist. Dabei bezeichne E das zu R_μ gehörige Spektralmaß, somit ist nach Konstruktion von $(\mu_t)_{t\geq 0}$ $\;R_{\mu_t} = T_t = \int h_t\, dE$.

Es sei $f \in L^2(K)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen [15], Kapitel XII, 7.5, konvergiert (h_{r_n}) gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen h_t. Folglich existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|h_{r_n} - h_{r_{n_0}}\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $\|h_{r_{n_0}} - h_t\|_\infty < \varepsilon$ gelten, und wie im Beweis von Lemma 2.20 erhält man

$$\left\| \int h_{r_n}\, dE^{(n)} f - \int h_{r_{n_0}}\, dE^{(n)} f \right\|_2 \leq \varepsilon \|f\|_2 \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

sowie

$$\left\| \int h_{r_{n_0}}\, dE f - \int h_t\, dE f \right\|_2 \leq \varepsilon \|f\|_2.$$

Da für $N \in \mathbb{N}$ $\;\int h_{\frac{1}{N}}\, dE^{(n)}$ die N-te Wurzel von $R_{\nu_n^{k_n}}$ ist, $n \in \mathbb{N}$, folgt aus $R_{\nu_n^{k_n}} \to R_\mu$ mit Lemma 2.20

$$\int h_{\frac{1}{N}}\, dE^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int h_{\frac{1}{N}}\, dE$$

in der starken Operatortopologie. Ist dann $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $r = \frac{M}{N}$ mit $M, N \in \mathbb{N}$, so erhält man daraus

$$\int h_r \, dE^{(n)} = \left(\int h_{\frac{1}{N}} \, dE^{(n)}\right)^M \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\int h_{\frac{1}{N}} \, dE\right)^M = \int h_r \, dE$$

in der starken Operatortopologie. Folglich existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \geq n_0$, so dass

$$\left\| \int h_{r_{n_0}} \, dE^{(n)} f - \int h_{r_{n_0}} \, dE f \right\|_2 \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left\| \int h_{r_n} \, dE^{(n)} f - \int h_t \, dE f \right\|_2 \leq \\ &\quad \left\| \int h_{r_n} \, dE^{(n)} f - \int h_{r_{n_0}} \, dE^{(n)} f \right\|_2 + \\ &\quad \left\| \int h_{r_{n_0}} \, dE^{(n)} f - \int h_{r_{n_0}} \, dE f \right\|_2 + \\ &\quad \left\| \int h_{r_{n_0}} \, dE f - \int h_t \, dE f \right\|_2 \end{aligned}$$

liefert dann, weil f beliebig war, (2.18), also $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$. $\square$

Bemerkung 2.27. Ist im Beweis des vorigen Lemmas $t > 0$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ eine Folge, die gegen t konvergiert, und definiert man dann $(r_n) \subseteq \mathbb{Q}_+^*$ durch $r_n := \frac{[k_n t_n]}{k_n}$ für n hinreichend groß, so lässt sich völlig analog zeigen, dass

$$\nu_n^{[k_n t_n]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t$$

gilt. Somit erhält man in Lemma 2.26 sogar kompakt-gleichmäßige Konvergenz.

Damit ergibt sich nun unmittelbar der angekündigte Funktionale Grenzwertsatz.

Satz 2.28 (Funktionaler Grenzwertsatz). *Es sei K eine Hypergruppe mit linkem Haarmaß ω_K. $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ sei eine Folge von symmetrischen Wahrscheinlichkeitsmaßen, die $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon_e$ erfüllt. $(\nu_n^{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann ist μ eindeutig einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ mit der Eigenschaft $\mu_t^- = \mu_t$ für alle $t \geq 0$, und es gilt*

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \textit{kompakt-gleichmäßig in } t > 0.$$

Beweis. Setzt man für $n \in \mathbb{N}$ $\delta_n := \nu_n * \nu_n$ sowie $\rho := \mu * \mu$, so sind die Voraussetzungen 2.18 mit (δ_n) und ρ anstelle von (ν_n) und μ erfüllt, und $(R_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sind positive Operatoren. Demnach ist gemäß der bisherigen Konstruktion ρ eindeutig einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\rho_t)_{t\geq 0}$ mit $\rho_t^- = \rho_t$ für alle $t \geq 0$, und es gilt (vgl. Bemerkung 2.27)

$$\delta_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho_t \quad \text{kompakt-gleichmäßig in } t > 0. \tag{2.19}$$

Mit $\mu_t := \rho_{\frac{t}{2}}$ für $t \geq 0$ ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ die einzige stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ mit $\mu_1 = \mu$ und $\mu_t^- = \mu_t$ für alle $t \geq 0$. Weiterhin folgt für $t > 0$ und $(t_n) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ wegen (2.19) und $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu_n^{[k_n t_n]} = \nu_n^{[k_n \frac{t_n}{2}]+[k_n \frac{t_n}{2}]+\varepsilon_n} = \delta_n^{[k_n \frac{t_n}{2}]} * \nu_n^{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho_{\frac{t}{2}} = \mu_t.$$

□

2.3 Ein allgemeiner Funktionaler Grenzwertsatz

In Abschnitt 2.1 wurde ein Funktionaler Grenzwertsatz für hermitesche Hypergruppen mit Hilfe von Fouriertransformierten bewiesen, in Abschnitt 2.2 gelang es, einen solchen mit Methoden aus der Funktionalanalysis, deren Anwendung auf die zugehörigen Faltungsoperatoren die Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsmaße (ν_n) ermöglichte, zu zeigen. Es wird nun auf diese Voraussetzungen verzichtet und ein Funktionaler Grenzwertsatz bewiesen, der sich vom Fall lokalkompakter Gruppen, für welchen er in [51] und [52] geführt ist, übertragen lässt. Dabei ist es im Unterschied zu den beiden bisherigen Fällen nicht möglich, die eindeutige Einbettbarkeit des Grenzmaßes μ auszunutzen. Der Beweis beruht wesentlich auf Teilfolgenargumenten und ist zweigeteilt. Zunächst wird gezeigt, dass unter Voraussetzung der relativen Kompaktheit von $\{\nu_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}$ aus $\nu_n^{k_n} \to \mu$ für eine infinitesimale Folge (ν_n) die Existenz einer rationalen Faltungshalbgruppe $(\mu_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$ folgt mit

$$\nu_n^{[k_n r]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}]{} \mu_r \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}_+^*$$

entlang einer Teilfolge $\tilde{\mathbb{N}}$. Im Funktionalen Grenzwertsatz wird dann eine Bedingung angegeben, die die eindeutige Fortsetzbarkeit von $(\mu_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$ zu einer stetigen Faltungshalbgruppe impliziert.

Lemma 2.29. *Es sei K eine Hypergruppe und $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ infinitesimal (d.h. (vgl. Definition 2.8 und Proposition 2.9) es gilt $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu \in \mathcal{M}^1(K)$, $H := [supp(\nu)]$ ist kompakt und $\nu^l \xrightarrow[l\to\infty]{} \omega_H$). $\mathcal{R}$ sei kompakt, wobei $\mathcal{R} := \overline{\{\nu_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}}$. Es gelte $\nu_n^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann existieren eine Teilfolge $\tilde{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und eine rationale Faltungshalbgruppe $(\mu_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$, so dass*

$$\nu_n^{[k_n r]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}]{} \mu_r$$

und $\mu_r * \omega_H = \omega_H * \mu_r = \mu_r$, $\mu_r * \nu = \nu * \mu_r = \mu_r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_+^*$.

Beweis. Für $L \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{R}_L := \overline{\{\nu_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n L\}}.$$

Nach dem Satz von Tychonoff und wegen (3) in Definition 0.2 ist $\mathcal{R} * \cdots * \mathcal{R}$ (L Faktoren) kompakt, und da $\mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R} * \cdots * \mathcal{R}$, folgt die Kompaktheit von $\mathcal{R}_L$.
Betrachtet man nun ein festes $r \in \mathbb{Q}_+^*$, so ist $\{\nu_n^{[k_n r]} : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{R}_{[r]+1}$ enthalten und somit relativ kompakt. Es existieren also eine (von $r \in \mathbb{Q}_+^*$ abhängige) Teilfolge $\mathbb{N}_r \subseteq \mathbb{N}$ sowie ein $\mu_r \in \mathcal{M}^1(K)$ mit

$$\nu_n^{[k_n r]} \xrightarrow[n\in\mathbb{N}_r]{} \mu_r.$$

Die Anwendung eines Diagonalfolgenarguments liefert die Existenz einer Teilfolge $\tilde{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, die nicht von r abhängt, und von $\mu_r \in \mathcal{M}^1(K)$ für $r \in \mathbb{Q}_+^*$, so dass

$$\nu_n^{[k_n r]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}]{} \mu_r \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}_+^* \tag{2.20}$$

erfüllt ist.
Als nächstes wird nun

$$\mu_r * \omega_H = \omega_H * \mu_r = \mu_r \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}_+^* \tag{2.21}$$

gezeigt. Es sei dazu $r \in \mathbb{Q}_+^*$ fest. Für $l \in \mathbb{N}$ ist dann wegen

$$\{\nu_n^{[k_n r]-l} : n \in \mathbb{N}, [k_n r] \geq l\} \subseteq \mathcal{R}_{[r]+1} \tag{2.22}$$

$\{\nu_n^{[k_n r]-l} : n \in \mathbb{N}, [k_n r] \geq l\}$ relativ kompakt, und folglich findet man eine Teilfolge $\tilde{\mathbb{N}}_l \subseteq \tilde{\mathbb{N}}$ und

$$\lambda_{r,l} \in \overline{\{\nu_n^{[k_n r]-l} : n \in \mathbb{N}, [k_n r] \geq l\}}, \tag{2.23}$$

so dass

$$\nu_n^{[k_n r]-l} \xrightarrow[n \in \tilde{\mathbb{N}}_l]{} \lambda_{r,l}. \tag{2.24}$$

Da

$$\nu_n^{[k_n r]} = \nu_n^{[k_n r]-l} * \nu_n^l$$

für $n \in \mathbb{N}$ mit $[k_n r] \geq l$, folgt aus (2.20) und (2.24)

$$\mu_r = \lambda_{r,l} * \nu^l \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N}. \tag{2.25}$$

(2.23) für ein festes $l \in \mathbb{N}$ und (2.22) für alle $l \in \mathbb{N}$ implizieren, dass $\{\lambda_{r,l} : l \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{R}_{[r]+1}$ enthalten und somit relativ kompakt ist. Also existieren eine Teilfolge $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$ und $\lambda_r \in \mathcal{M}^1(K)$ mit

$$\lambda_{r,l} \xrightarrow[l \in \mathbb{N}']{} \lambda_r.$$

Dann erhält man mit (2.25) und der Voraussetzung $\nu^l \to \omega_H$

$$\mu_r = \lambda_r * \omega_H,$$

woraus sofort $\mu_r * \omega_H = \mu_r$ folgt. Analog wird $\omega_H * \mu_r = \mu_r$ gezeigt. $\nu^l \to \omega_H$ liefert weiterhin $\omega_H * \nu = \nu * \omega_H = \omega_H$ und daher mit (2.21)

$$\mu_r * \nu = \nu * \mu_r = \mu_r \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}_+^*. \tag{2.26}$$

Es verbleibt der Nachweis, dass $(\mu_r)_{r \in \mathbb{Q}_+^*}$ eine rationale Faltungshalbgruppe ist. Seien dazu $r, s \in \mathbb{Q}_+^*$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\nu_n^{[k_n(r+s)]} = \nu_n^{[k_n r]} * \nu_n^{[k_n s]} * \nu_n^{\varepsilon_n}$$

mit $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$, und es tritt mindestens einer der beiden folgenden Fälle ein:

- $\varepsilon_n = 0$ für unendlich viele $n \in \tilde{\mathbb{N}}$.
- $\varepsilon_n = 1$ für unendlich viele $n \in \tilde{\mathbb{N}}$.

Jeweils durch Betrachtung geeigneter Teilfolgen von $\tilde{\mathbb{N}}$ erhält man also wegen (2.20) im ersten Fall direkt $\mu_{r+s} = \mu_r * \mu_s$ und im zweiten zunächst $\mu_{r+s} = \mu_r * \mu_s * \nu$ und dann aufgrund von (2.26) ebenfalls $\mu_{r+s} = \mu_r * \mu_s$. □

Satz 2.30 (Funktionaler Grenzwertsatz). *Es sei K eine Hypergruppe und $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ infinitesimal, $\nu_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \nu \in \mathcal{M}^1(K)$. $\mathcal{R} = \overline{\{\nu_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}}$ sei kompakt, und es gelte $\nu_n^{k_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu \in \mathcal{M}^1(K)$.*

Dann existieren eine Teilfolge $\tilde{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und eine rationale Faltungshalbgruppe $(\mu_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$, so dass

$$\nu_n^{[k_n r]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}]{} \mu_r \tag{2.27}$$

und $\mu_r * \omega_H = \omega_H * \mu_r = \mu_r$, $\mu_r * \nu = \nu * \mu_r = \mu_r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_+^*$ erfüllt sind (wobei $H = [supp(\nu)]$).
Gilt weiterhin für eine kompakte Unterhypergruppe $C \subseteq K$

$$HP\{\nu_n^{r_n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}^1(C) \tag{2.28}$$

für jede Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $\frac{r_n}{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ sowie

$$\mu_r * \omega_C = \omega_C * \mu_r = \mu_r \quad \textit{für alle } r \in \mathbb{Q}_+^*, \tag{2.29}$$

so ist $(\mu_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$ eindeutig fortsetzbar zu einer stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ mit $\mu_0 = \omega_C$, und es gilt

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}]{} \mu_t \quad \textit{für alle } t > 0. \tag{2.30}$$

Die Konvergenz in (2.30) ist dabei kompakt-gleichmäßig in $t > 0$, und sie ist genau dann kompakt-gleichmäßig in $t \geq 0$, wenn $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega_C$ gilt (wobei $\nu_n^0 := \omega_C$ gesetzt wird).

Beweis. Die Existenz einer Teilfolge $\tilde{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ sowie einer rationalen Faltungshalbgruppe $(\mu_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$, so dass (2.27), $\mu_r * \omega_H = \omega_H * \mu_r = \mu_r$ und $\mu_r * \nu = \nu * \mu_r = \mu_r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_+^*$ erfüllt sind, wurde in Lemma 2.29 gezeigt. Setzt man $\mu_0 := \omega_C$, so ist $(\mu_r)_{r\in\mathbb{Q}_+}$ aufgrund der Voraussetzung (2.29) eine rationale Faltungshalbgruppe, d.h. f, definiert durch $f(r) := \mu_r$ für $r \in \mathbb{Q}_+$, ist ein Halbgruppen-Homomorphismus von $\mathbb{Q}_+$ nach $\mathcal{M}^1(K)$. Ist $r \in]0,1[\cap\mathbb{Q}$, so gilt wegen $\nu_n^{[k_n r]} \in \{\nu_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\nu_n^{[k_n r]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}]{} \mu_r$ $\mu_r \in \mathcal{R}$. Also ist $f(]0,1[\cap\mathbb{Q}) = \{\mu_r : r \in]0,1[\cap\mathbb{Q}\}$ relativ kompakt in $\mathcal{M}^1(K)$. Es wird jetzt die Stetigkeit von f in $r = 0$ gezeigt. Dazu sei $(t_m) \subseteq]0,1[\cap\mathbb{Q}$ eine Folge mit $\lim_{m\to\infty} t_m = 0$. $\rho = \lim_{m\in\mathbb{M}} \mu_{t_m}$ sei ein Häufungspunkt der relativ kompakten Folge (μ_{t_m}). Aus (2.29) erhält man dann durch Grenzwertbildung entlang der Teilfolge $\mathbb{M}$

$$\rho * \omega_C = \omega_C * \rho = \rho. \tag{2.31}$$

Als nächstes wird nun nachgewiesen, dass eine Teilfolge $(n_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathbb{N}}$ existiert, so dass

$$\rho = \lim_{m\in\mathbb{M}} \nu_{n_m}^{[k_{n_m} t_m]}. \tag{2.32}$$

Dazu bezeichne d die Metrik, welche die Topologie der schwachen Konvergenz auf $\mathcal{M}^1(K)$ induziert. Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ findet man wegen $\lim_{n\in\tilde{\mathbb{N}}} \nu_n^{[k_n t_m]} = \mu_{t_m}$ ein $n_m \in \tilde{\mathbb{N}}$ mit

$$d\left(\nu_{n_m}^{[k_{n_m} t_m]}, \mu_{t_m}\right) < \frac{1}{m}.$$

Die n_m können dabei so gewählt werden, dass $(n_m)_{m\in\mathbb{N}} \nearrow$ und $[k_{n_m} t_m] \geq 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für $m \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\begin{aligned} d\left(\nu_{n_m}^{[k_{n_m} t_m]}, \rho\right) &\leq d\left(\nu_{n_m}^{[k_{n_m} t_m]}, \mu_{t_m}\right) + d(\mu_{t_m}, \rho) \\ &< \frac{1}{m} + d(\mu_{t_m}, \rho), \end{aligned}$$

und es folgt (2.32) mit der Teilfolge $(n_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathbb{N}}$. Definiert man nun eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ durch $r_{n_m} = [k_{n_m} t_m]$ und $r_k = 1$, falls $k \neq n_m$, $m \in \mathbb{N}$, so gilt wegen $\lim_{m\to\infty} \frac{r_{n_m}}{k_{n_m}} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{k_n} = 0$, und mit (2.32) und der Voraussetzung (2.28) erhält man $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq C$. Zusammen mit (2.31) liefert dies $\rho = \omega_C$. ω_C ist somit einziger Häufungspunkt der relativ kompakten Folge $(\mu_{t_m})_{m\in\mathbb{N}}$, folglich gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mu_{t_m} = \omega_C,$$

womit die Stetigkeit von f in 0 bewiesen ist.
Nach Lemma 3.4.4 in [31] ist dann $r \mapsto \mu_r$ ein *stetiger* Halbgruppen-Homomorphismus von $\mathbb{Q}_+$ nach $\mathcal{M}^1(K)$, und aus Theorem 3.4.6 in [31] erhält man die Existenz einer eindeutig bestimmten stetigen Fortsetzung $(\mu_t)_{t\geq 0}$. Für diese stetige Faltungshalbgruppe wird nun (2.30) nachgewiesen. Sei dazu $t > 0$ fest. Dann ist wegen $\nu_n^{[k_n t]} \in \mathcal{R}_{[t]+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (vgl. die Notation aus dem Beweis von Lemma 2.29) die Folge $(\nu_n^{[k_n t]})_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$ relativ kompakt, und es wird jetzt gezeigt, dass μ_t ihr einziger Häufungspunkt ist.

$$\sigma_t = \lim_{n\in\tilde{\mathbb{N}}_1} \nu_n^{[k_n t]}$$

sei ein Häufungspunkt von $(\nu_n^{[k_n t]})_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$. $(t_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}_+^*$ sei eine Folge mit $t_m \nearrow t$ und $r_m := t - t_m \leq 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{\nu_n^{[k_n r_m]} : n, m \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{R}$ enthalten und somit relativ kompakt. Für festes $m \in \mathbb{N}$ ist $(\nu_n^{[k_n r_m]})_{n\in\mathbb{N}}$ relativ kompakt, d.h. es existieren eine Teilfolge $\hat{\mathbb{N}}_m \subseteq \tilde{\mathbb{N}}_1$ sowie $\rho_m \in \mathcal{M}^1(K)$, so dass

$$\nu_n^{[k_n r_m]} \xrightarrow[n\in\hat{\mathbb{N}}_m]{} \rho_m.$$

Durch ein Diagonalfolgenargument befreit man sich von der Abhängigkeit der Folge $\hat{\mathbb{N}}_m$ von m, daher existieren eine Teilfolge $\tilde{\mathbb{N}}_2 \subseteq \tilde{\mathbb{N}}_1$ und Wahrscheinlichkeitsmaße ρ_m, $m \in \mathbb{N}$, mit

$$\nu_n^{[k_n r_m]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}_2]{} \rho_m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Wegen $\rho_m \in \overline{\{\nu_n^{[k_n r_m]} : n, m \in \mathbb{N}\}}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\{\rho_m : m \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt, und man findet eine Teilfolge $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$ und $\rho \in \mathcal{M}^1(K)$, so dass

$$\lim_{m\in\mathbb{M}} \rho_m = \rho. \tag{2.33}$$

Es sei nun zunächst $m \in \mathbb{N}$ fest. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\nu_n^{[k_n t]} = \nu_n^{[k_n r_m]} * \nu_n^{\varepsilon_{m,n}} * \nu_n^{[k_n t_m]} \tag{2.34}$$

mit $\varepsilon_{m,n} \in \{0,1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Für den Fall, dass $\varepsilon_{m,n} = 0$ ist für unendlich viele $n \in \tilde{\mathbb{N}}_2$, erhält man aus (2.34)

$$\sigma_t = \rho_m * \mu_{t_m} \tag{2.35}$$

durch Grenzwertbildung entlang einer geeigneten Teilfolge. Ist $\varepsilon_{m,n} = 1$ für unendlich viele $n \in \tilde{\mathbb{N}}_2$, so folgt analog

$$\sigma_t = \rho_m * \nu * \mu_{t_m},$$

also aufgrund von $\nu * \mu_r = \mu_r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_+^*$ ebenfalls (2.35). Grenzübergang entlang $\mathbb{M}$ liefert mit (2.33) und der Stetigkeit der Halbgruppe

$$\sigma_t = \rho * \mu_t.$$

Nun ist

$$\rho = \lim_{m\in\mathbb{M}} \rho_m = \lim_{m\in\mathbb{M}} \lim_{n\in\tilde{\mathbb{N}}_2} \nu_n^{[k_n r_m]},$$

und wie im Beweis der Stetigkeit von f in 0 folgt erst die Existenz einer Teilfolge $(n_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathbb{N}}_2$ mit

$$\rho = \lim_{m\in\mathbb{M}} \nu_{n_m}^{[k_{n_m} r_m]}$$

und dann wegen (2.28) $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq C$. Daraus erhält man aber mit $\omega_C * \mu_t = \mu_t$ und den Theoremen 1.6.9 und 1.3.12 in [10] unmittelbar $\rho * \mu_t = \mu_t$, also ist $\sigma_t = \rho * \mu_t = \mu_t$ der einzige Häufungspunkt von $(\nu_n^{[k_n t]})_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$, und es folgt (2.30).

Es wird nun gezeigt, dass die Konvergenz kompakt-gleichmäßig in $t > 0$ ist. Sei dazu (vgl. Bemerkung 2.2) $(t_n)_{n\in\tilde{\mathbb{N}}} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ eine Folge mit $\lim_{n\in\tilde{\mathbb{N}}} t_n = t > 0$. $(t_n)_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$ ist beschränkt durch ein $M \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{\nu_n^{[k_n t_n]} : n \in \tilde{\mathbb{N}}\}$ in $\mathcal{R}_M$ enthalten und somit relativ kompakt. Es wird jetzt nachgewiesen, dass μ_t einziger Häufungspunkt ist.

$$\sigma_t = \lim_{n\in\tilde{\mathbb{N}}_1} \nu_n^{[k_n t_n]}$$

sei ein Häufungspunkt von $(\nu_n^{[k_n t_n]})_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$. Mindestens einer der beiden folgenden Fälle liegt vor:

- Die Menge $\{n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 : t_n > t\}$ ist unendlich.
- Die Menge $\{n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 : t_n \leq t\}$ ist unendlich.

Im ersten Fall gilt für alle $n \in \tilde{\mathbb{N}}_2 := \{n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 : t_n > t\}$

$$\nu_n^{[k_n t_n]} = \nu_n^{[k_n(t_n - t)]} * \nu_n^{[k_n t]} * \nu_n^{\varepsilon_n} \tag{2.36}$$

mit $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$, $n \in \tilde{\mathbb{N}}_2$.

$$\rho_t = \lim_{n\in\tilde{\mathbb{N}}_3} \nu_n^{[k_n(t_n - t)]} \tag{2.37}$$

sei ein Häufungspunkt der relativ kompakten Folge $(\nu_n^{[k_n(t_n-t)]})_{n\in\tilde{\mathbb{N}}_2}$. Die Betrachtung der Fälle $\varepsilon_n = 0$ bzw. $\varepsilon_n = 1$ für unendlich viele $n \in \tilde{\mathbb{N}}_3$ und Grenzübergang entlang geeigneter Teilfolgen in (2.36) führt dann auf die Gleichung

$$\sigma_t = \rho_t * \mu_t \tag{2.38}$$

bzw.

$$\sigma_t = \rho_t * \mu_t * \nu$$

im zweiten Fall, woraus (2.38) folgt. Wegen (2.37) und (2.28) ist $\mathrm{supp}(\rho_t) \subseteq C$, und $\omega_C * \mu_t = \mu_t$ impliziert zunächst $\rho_t * \mu_t = \mu_t$ und dann $\sigma_t = \rho_t * \mu_t = \mu_t$. Der zweite Fall wird analog behandelt.

Als letzter Schritt verbleibt nun der Nachweis von

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}]{} \mu_t \text{ kompakt-gleichmäßig in } t \geq 0 \iff \nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega_C.$$

$\Longrightarrow$ ist trivial (setze $t_n := \frac{1}{k_n}$).

$\Longleftarrow$: Aufgrund des bereits Bewiesenen ist nur zu zeigen:

Für jede Folge $(t_n)_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$, die gegen 0 konvergiert, gilt

$$\nu_n^{[k_n t_n]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}]{} \omega_C.$$

Es wird gezeigt, dass ω_C der einzige Häufungspunkt und damit der Limes der relativ kompakten Folge $(\nu_n^{[k_n t_n]})_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$ ist.

$$\rho = \lim_{n\in\tilde{\mathbb{N}}_1} \nu_n^{[k_n t_n]}$$

sei ein Häufungspunkt. Dann tritt mindestens einer der folgenden drei Fälle ein:

- Die Menge $\tilde{\mathbb{N}}_2 := \{n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 : [k_n t_n] = 0\}$ ist unendlich. Dann
$$\rho = \lim_{n\in\tilde{\mathbb{N}}_2} \nu_n^{[k_n t_n]} = \omega_C.$$

- Die Menge $\tilde{\mathbb{N}}_3 := \{n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 : [k_n t_n] = 1\}$ ist unendlich. Dann
$$\rho = \lim_{n\in\tilde{\mathbb{N}}_3} \nu_n^{[k_n t_n]} = \lim_{n\in\tilde{\mathbb{N}}_3} \nu_n = \omega_C.$$

- Die Menge $\tilde{\mathbb{N}}_4 := \{n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 : [k_n t_n] \geq 2\}$ ist unendlich. Dann
$$\nu_n^{[k_n t_n]} = \nu_n * \nu_n^{[k_n t_n]-1}$$
für $n \in \tilde{\mathbb{N}}_4$, und die Folge $(\nu_n^{[k_n t_n]-1})_{n\in\tilde{\mathbb{N}}_4}$ ist relativ kompakt. Grenzwertbildung entlang einer geeigneten Teilfolge liefert
$$\rho = \omega_C * \sigma$$
mit einem Häufungspunkt σ von $(\nu_n^{[k_n t_n]-1})_{n\in\tilde{\mathbb{N}}_4}$. Wegen Voraussetzung (2.28) ist $\mathrm{supp}(\rho) \subseteq C$, und
$$\varepsilon_x * \rho = \varepsilon_x * \omega_C * \sigma = \omega_C * \sigma = \rho \quad \text{für alle } x \in C$$
führt dann zu $\rho = \omega_C$.

□

Bemerkung 2.31. (a) In [51], Beispiel 3.7, wird für den Gruppenfall ein Beispiel auf dem Torus konstruiert, welches zeigt, dass der Funktionale Grenzwertsatz 2.30 ohne die Bedingung (2.28)/(2.29) keine Gültigkeit besitzt.

(b) Für die kompakten Unterhypergruppen H und C gilt der Zusammenhang $H \subseteq C$, denn aus $\mu_r * \omega_H = \mu_r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_+^*$ folgt durch Grenzwertbildung $r \to 0$ $\omega_C * \omega_H = \omega_C$, was $H \subseteq C$ impliziert. Beispiel 3.8 in [51], ebenfalls für den Torus, verdeutlicht, dass der Fall $H \subsetneq C$ eintreten kann. Insbesondere zeigt dieses Beispiel auch, dass die Konvergenz in (2.30) nicht kompakt-gleichmäßig in $t \geq 0$ zu sein braucht.

(c) Sind die Voraussetzungen des Funktionalen Grenzwertsatzes 2.30 erfüllt, d.h. liefert seine Anwendung die Existenz einer Teilfolge $\tilde{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ sowie einer stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ mit

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}]{} \mu_t \quad \text{für alle } t > 0, \tag{2.39}$$

so erhält man im Falle der eindeutigen Einbettbarkeit des Grenzmaßes μ in eine rationale Faltungshalbgruppe in (2.39) die Konvergenz für $n \to \infty$ anstelle der Konvergenz entlang einer Teilfolge.
Denn für eine beliebige Teilfolge $\mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}$ existieren nach Teil 1 des Funktionalen Grenzwertsatzes eine Teilfolge $\mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_1$ und eine rationale Faltungshalbgruppe $(\pi_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$, so dass

$$\nu_n^{[k_n r]} \xrightarrow[n\in\mathbb{N}_2]{} \pi_r \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}_+^*$$

gilt. Es folgt dann

$$\nu_n^{[k_n r]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_r \tag{2.40}$$

für alle $r \in \mathbb{Q}_+^*$, und der zweite Teil von 2.30 liefert (2.40) für alle $r > 0$.

2.4 Anwendungsbeispiele zum allgemeinen Funktionalen Grenzwertsatz

Im in 2.3 bewiesenen Funktionalen Grenzwertsatz sind - neben der Infinitesimalität der Folge (ν_n) - die Kompaktheit von $\mathcal{R} = \overline{\{\nu_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}}$ sowie die Bedingung (2.28)/(2.29) die wesentlichen Voraussetzungen. In diesem Abschnitt wird nun die Fragestellung behandelt, für welche Klassen von Hypergruppen diese jeweils erfüllt sind.

Es sei zunächst erwähnt, dass sich im Fall hermitescher Godement-Hypergruppen (vgl. Definition 0.27) stets die Kompaktheit von $\mathcal{R}$ ergibt, wobei dieser Zusammenhang hier aber von geringerem Interesse ist, da für den hermiteschen Fall bereits ein Funktionaler Grenzwertsatz vorhanden ist.

Proposition 2.32. *K sei eine hermitesche Godement-Hypergruppe. $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ konvergiere gegen $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$, und es gelte $\nu_n^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann ist $\mathcal{N} := \{\nu_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}$ relativ kompakt.*

Beweis. Es wird zunächst die folgende Hilfsaussage bewiesen:
K sei eine hermitesche Godement-Hypergruppe und $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ mit $\hat{\delta}_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $\delta_n^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann ist $\{\delta_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}$ relativ kompakt.
$\lceil$ $\{\delta_n^{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist relativ kompakt. Nach Proposition 5.1.10 in [10] existiert zu $\varepsilon > 0$ eine Umgebung Ω von 1_K in $\mathrm{supp}(\pi_K)$, so dass

$$(\delta_n^{k_n})^\wedge(\chi) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \chi \in \Omega.$$

Dann folgt für alle $\mu \in \mathcal{N}_1 := \{\delta_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}$, $\mu = \delta_n^l$, und $\chi \in \Omega$

$$\hat{\mu}(\chi) \geq (\hat{\delta}_n(\chi))^{k_n} \geq 1 - \varepsilon,$$

und nach Proposition 5.1.10 ist $\mathcal{N}_1$ relativ kompakt. $\rceil$
Setzt man für $n \in \mathbb{N}$ $\delta_n := \nu_n * \nu_n$ und $\rho := \mu * \mu$, so sind die Voraussetzungen der Hilfsaussage erfüllt, und folglich ist $\mathcal{N}_1 = \{(\nu_n * \nu_n)^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}$ relativ kompakt. Wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &\subseteq \mathcal{N}_1 * (\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varepsilon_e\}) \\ &\subseteq \overline{\mathcal{N}_1} * (\overline{\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}} \cup \{\varepsilon_e\}) \end{aligned}$$

und der Voraussetzung $\nu_n \to \nu$ ist $\mathcal{N}$ relativ kompakt. □

Eine weitere Eigenschaft von Hypergruppen, die in der Situation des Funktionalen Grenzwertsatzes die Kompaktheit von $\mathcal{R}$ impliziert, ist die *starke Wurzelkompaktheit.*

Bemerkung 2.33. (a) In [7] (vgl. Definition 4.1) wird für $n \in \mathbb{N}$ die n-Wurzelkompaktheit einer Hypergruppe K wie folgt definiert:
K heißt *n-wurzelkompakt*, $K \in \mathcal{W}_n$, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:
Zu jeder kompakten Teilmenge C von K existiert eine kompakte Menge $C_n \subseteq K$, so dass alle endlichen Mengen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in K mit $x_n = e$, für die

$$\{x_i\} * C * \{x_j\} * C \cap \{x_{i+j}\} * C \neq \emptyset$$

für $i + j \leq n$ gilt, in C_n enthalten sind.
K heißt *wurzelkompakt*, falls K n-wurzelkompakt ist für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $K \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n$ gilt.

(b) In Theorem 4.4 in [7] wird gezeigt, dass für eine n-wurzelkompakte Hypergruppe K die Menge

$$\mathcal{R}(n, \mathcal{N}) := \{\mu \in \mathcal{M}^1(K) : \mu^n \in \mathcal{N}\}$$

relativ kompakt ist für jede relativ kompakte Menge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$.

(c) Die nun folgende Definition der starken Wurzelkompaktheit - analog zum Fall lokalkompakter Gruppen, vgl. [31], Definition 3.1.10 - verschärft den Begriff der Wurzelkompaktheit, da in ihr gefordert wird, dass die kompakte Menge C_0 unabhängig von n gewählt werden kann.

Definition 2.34. Eine Hypergruppe K heißt *stark* (oder auch *gleichgradig) wurzelkompakt*, falls zu jeder kompakten Teilmenge C von K eine kompakte Menge $C_0 \subseteq K$ existiert mit der Eigenschaft:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind alle endlichen Mengen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in K mit $x_n = e$, für die

$$\{x_i\} * C * \{x_j\} * C \cap \{x_{i+j}\} * C \neq \emptyset$$

für $i + j \leq n$ gilt, in C_0 enthalten.

Bemerkung 2.35. In [31], Theorem 3.1.13, wird gezeigt, dass für lokalkompakte Gruppen G aus der starken Wurzelkompaktheit folgt, dass die Wurzelmenge

$$\mathcal{R}(\mathcal{N}) = \bigcup_{\mu \in \mathcal{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\nu^m : \nu \in \mathcal{M}^1(G) \text{ mit } \nu^n = \mu, 1 \leq m \leq n\}$$

relativ kompakt ist für jede relativ kompakte Menge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^1(G)$.

Eine analoge Aussage lässt sich für Hypergruppen beweisen.

Proposition 2.36. *Sei K eine stark wurzelkompakte Hypergruppe. Dann ist die Wurzelmenge*

$$\mathcal{R}(\mathcal{N}) := \bigcup_{\mu \in \mathcal{N}} \mathcal{R}(\mu),$$

wobei

$$\mathcal{R}(\mu) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\nu^m : \nu \in \mathcal{M}^1(K) \textit{ mit } \nu^n = \mu, 1 \leq m \leq n\}$$

die Wurzelmenge von μ ist, relativ kompakt für jede relativ kompakte Menge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$.

Beweis. Der Beweis verläuft weitestgehend analog zum Beweis der Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ in Theorem 4.4 in [7], welche die Aussage aus Bemerkung 2.33(b) beinhaltet.
Es sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ relativ kompakt. Nach dem Satz von Prohorov existiert zu $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ eine kompakte Menge $C \subseteq K$, so dass $\mu(C) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\mu \in \mathcal{N}$ erfüllt ist. Die starke Wurzelkompaktheit impliziert dann die Existenz einer kompakten Menge $C_0 \subseteq K$ mit der Eigenschaft:

Für jedes $n \geq 1$ sind alle endlichen Mengen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in K mit $x_n = e$, für die

$$\{x_i\} * C * \{x_j\} * C \cap \{x_{i+j}\} * C \neq \emptyset \tag{2.41}$$

für $i + j \leq n$ gilt, in C_0 enthalten.
Setzt man $D := C_0 * C$, so ist D kompakt, und es lässt sich

$$\rho(D) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{für alle } \rho \in \mathcal{R}(\mathcal{N}) \tag{2.42}$$

zeigen, woraus die relative Kompaktheit von $\mathcal{R}(\mathcal{N})$ folgt.
Zum Nachweis von (2.42) zeigt man zunächst wie im Beweis von Theorem 4.4 in [7], dass für $\mu \in \mathcal{N}$ und $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$ mit $\nu^n = \mu$ $(n \geq 2)$ gilt:
Zu jedem $1 \leq i < n$ existiert ein $x_i \in K$ mit

$$\nu^i(\{x_i\} * C) \geq 1 - \varepsilon.$$

Mit $x_n := e$ zeigt man dann analog zum Vorgehen in [7] (2.41) für $i + j \leq n$, und die Wahl von C_0 liefert $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq C_0$.
Es sei nun $\rho \in \mathcal{R}(\mathcal{N})$, d.h. $\rho \in \mathcal{R}(\mu)$ für ein $\mu \in \mathcal{N}$, also $\rho = \nu^m$, wobei $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$ mit $\nu^n = \mu$ und $n \geq 2$, $1 \leq m < n$ gelte (die Fälle $n = 1$ und $m = n$ ergeben sich sofort aus $e \in C_0$). Mit $x_1, \ldots, x_n$ wie oben gewählt ist insbesondere $x_m \in C_0$, und es folgt

$$\rho(D) = \nu^m(C_0 * C) \geq \nu^m(\{x_m\} * C) \geq 1 - \varepsilon,$$

also (2.42). □

Korollar 2.37. *K sei eine stark wurzelkompakte Hypergruppe und $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$. Es gelte $\nu_n^{k_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann ist $\mathcal{R}$ kompakt, wobei $\mathcal{R} = \overline{\{\nu_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}}$.*

Beweis. Anwendung von Proposition 2.36 auf die relativ kompakte Menge $\{\nu_n^{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$. □

Da die starke Wurzelkompaktheit eine starke, schwierig zu handhabende Eigenschaft ist und für Korollar 2.37 nur die in Proposition 2.36 bewiesene Eigenschaft benötigt wurde, wird diese im Folgenden bei der Konstruktion weiterer Beispiele von Hypergruppen, für die im Funktionalen Grenzwertsatz die Voraussetzung, dass $\mathcal{R}$ kompakt ist, stets erfüllt ist, als Definition der Wurzelkompaktheit verwendet.

Definition 2.38. Eine Hypergruppe K heißt $(*)$-*wurzelkompakt*, falls die Eigenschaft $(*)$ erfüllt ist, was bedeuten soll, dass für jede relativ kompakte Menge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ die Wurzelmenge $\mathcal{R}(\mathcal{N})$ ebenfalls relativ kompakt ist.

Korollar 2.39. *K sei eine $(*)$-wurzelkompakte Hypergruppe und $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$. Es gelte $\nu_n^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann ist $\mathcal{R}$ kompakt, wobei $\mathcal{R}$ definiert ist wie in Korollar 2.37.*

Es wird jetzt gezeigt, dass die Eigenschaft $(*)$ bei *Orbital-Hypergruppen* (vgl. Vorbereitungen, Definition 0.31) erhalten bleibt, d.h. für eine lokalkompakte Gruppe G, die $(*)$ erfüllt, und eine kompakte Untergruppe $H \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ besitzt die Orbital-Hypergruppe G^H ebenfalls die Eigenschaft $(*)$.

Bemerkung 2.40. Ist $(G^H, *)$ eine Orbital-Hypergruppe und setzt man

$$\mathcal{M}_H^\sharp(G) := \{\mu \in \mathcal{M}^1(G) : \mu \ \tau\text{-invariant für alle } \tau \in H\},$$

so besteht der folgende Zusammenhang (vgl. dazu auch den Beweis von Theorem 1.1.7 in [10]):
Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} q_H : \mathcal{M}_H^\sharp(G) & \to & \mathcal{M}^1(G^H) \\ \mu & \mapsto & q_H(\mu) := \mu_q, \end{array}$$

wobei $\mu_q \in \mathcal{M}^1(G^H)$ das Bildmaß von μ unter der kanonischen Projektion $q : G \to G^H$ bezeichne, ist bijektiv, und für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_H^\sharp(G)$ gilt $\mu * \nu \in \mathcal{M}_H^\sharp(G)$ und $q_H(\mu * \nu) = q_H(\mu) * q_H(\nu)$. q_H und q_H^{-1} sind stetig.

Proposition 2.41. *Es sei $K = G^H$ eine Orbital-Hypergruppe, wobei G $(*)$-wurzelkompakt sei. Dann ist K ebenfalls $(*)$-wurzelkompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^1(G^H)$ relativ kompakt. Aufgrund der Stetigkeit von q_H^{-1} gilt dies dann auch für $q_H^{-1}(\mathcal{N})$, und da G die Eigenschaft $(*)$ besitzt, ist die Wurzelmenge $\mathcal{R}(q_H^{-1}(\mathcal{N}))$ relativ kompakt. Nun ist

$$q_H^{-1}(\mathcal{R}(\mathcal{N})) \subseteq \mathcal{R}(q_H^{-1}(\mathcal{N})),$$

denn für $\rho \in q_H^{-1}(\mathcal{R}(\mathcal{N}))$, d.h. $\rho = q_H^{-1}(\kappa)$ mit $\kappa \in \mathcal{R}(\nu)$ für ein $\nu \in \mathcal{N}$, gilt, da q_H^{-1} ein Faltungshomomorphismus ist, mit $\mu = q_H^{-1}(\nu)$ $\rho \in \mathcal{R}(\mu)$, also $\rho \in \mathcal{R}(q_H^{-1}(\mathcal{N}))$. Folglich sind auch $q_H^{-1}(\mathcal{R}(\mathcal{N}))$ und $\mathcal{R}(\mathcal{N}) = q_H(q_H^{-1}(\mathcal{R}(\mathcal{N})))$ relativ kompakt, und dies liefert die Behauptung. □

Mit ähnlichen Methoden erhält man:

Proposition 2.42. *(a) Ist K eine $(*)$-wurzelkompakte Hypergruppe und $H \subseteq K$ eine kompakte Unterhypergruppe, so ist auch die Doppelnebenklassen-Hypergruppe $K//H$ $(*)$-wurzelkompakt.*

(b) Sind K und H $(*)$-wurzelkompakte Hypergruppen, so ist auch die Produkt-Hypergruppe $K \times H$ (für die Definition vgl. z.B. 1.5.28 in [10]) $(*)$-wurzelkompakt.

Beweis. (a) lässt sich analog zu Proposition 2.41 zeigen, wobei p_H und p_H^*, definiert wie im Beweis von Proposition 2.4, die Rollen von q_H und q_H^{-1} übernehmen.
Zum Beweis von (b) seien $p_{\pi_1} : \mathcal{M}^1(K \times H) \to \mathcal{M}^1(K)$ bzw. $p_{\pi_2} : \mathcal{M}^1(K \times H) \to \mathcal{M}^1(H)$ die stetigen Abbildungen, die $\mu \in \mathcal{M}^1(K \times H)$ das Bildmaß unter den Projektionen $\pi_1 : K \times H \to K$ bzw. $\pi_2 : K \times H \to H$ zuordnen.
Ist $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^1(K \times H)$ relativ kompakt, so sind wegen der $(*)$-Wurzelkompaktheit von K und H $\mathcal{R}(p_{\pi_1}(\mathcal{N})) \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ sowie $\mathcal{R}(p_{\pi_2}(\mathcal{N})) \subseteq \mathcal{M}^1(H)$ relativ kompakt. Da p_{π_1} und p_{π_2} nach Definition der Faltung auf der Produkt-Hypergruppe Faltungshomomorphismen sind, ist

$$\mathcal{R}(\mathcal{N}) \subseteq \{\lambda \in \mathcal{M}^1(K \times H) : p_{\pi_i}(\lambda) \in \mathcal{R}(p_{\pi_i}(\mathcal{N})), i = 1, 2\} =: \mathcal{F}. \quad (2.43)$$

Es wird jetzt gezeigt, dass $\mathcal{F}$ gleichmäßig straff ist. Zu $\varepsilon > 0$ existieren

- $K_\varepsilon \subseteq K$ kompakt, so dass $\lambda_1(K_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\lambda_1 \in \mathcal{R}(p_{\pi_1}(\mathcal{N}))$
- $H_\varepsilon \subseteq H$ kompakt, so dass $\lambda_2(H_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\lambda_2 \in \mathcal{R}(p_{\pi_2}(\mathcal{N}))$.

Für $\lambda \in \mathcal{F}$ gelten dann $p_{\pi_1}(\lambda)(K_\varepsilon^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ sowie $p_{\pi_2}(\lambda)(H_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, woraus

$$\begin{aligned}
\lambda(K_\varepsilon \times H_\varepsilon) &= \lambda(K \times H_\varepsilon) - \lambda(K_\varepsilon^c \times H_\varepsilon) \\
&\geq \lambda(K \times H_\varepsilon) - \lambda(K_\varepsilon^c \times H) = p_{\pi_2}(\lambda)(H_\varepsilon) - p_{\pi_1}(\lambda)(K_\varepsilon^c) \\
&\geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

folgt. Nach dem Satz von Prohorov ist also $\mathcal{F}$ relativ kompakt, und (2.43) liefert die Behauptung. □

Nach Diskussion der Wurzelkompaktheit erfolgt nun, wie eingangs angekündigt, die Behandlung der Fragestellung, für welche Klassen von Hypergruppen die Bedingung (2.28)/(2.29) im zweiten Teil des Funktionalen Grenzwertsatzes erfüllt ist.

Bemerkung 2.43. Im Fall lokalkompakter Gruppen (mit abzählbarer Basis der Topologie) ist dies für Gruppen der Fall, die keine nichttrivialen kompakten Untergruppen besitzen, denn es kann gezeigt werden (vgl. den Beweis von Proposition 2.5 in [52]):

(A) Ist G eine lokalkompakte Gruppe, die keine nichttrivialen kompakten Untergruppen besitzt, $(\nu_n) \subseteq \mathcal{M}^1(G)$ und $\{\nu_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}$ relativ kompakt, so gilt für jede Folge $(r_n) \subseteq \mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{k_n} = 0 \quad \nu_n^{r_n} \to \varepsilon_e$.

Beweisen lässt sich diese Aussage mit dem folgenden Lemma:

(B) Ist G eine lokalkompakte Gruppe, die keine nichttrivialen kompakten Untergruppen besitzt, und $\rho \in \mathcal{M}^1(G)$, so dass $\{\rho^k : k \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt in $\mathcal{M}^1(G)$ ist, so folgt $\rho = \varepsilon_e$.

(B) wiederum ist eine unmittelbare Folgerung aus dem allgemeineren Lemma (C), welches in [44] als Lemma 1.9 formuliert ist und sich aus Theorem 2 in [43] ergibt.

(C) Ist G eine lokalkompakte Gruppe und $\rho \in \mathcal{M}^1(G)$, so dass $\{\rho^k : k \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt in $\mathcal{M}^1(G)$ ist, so existiert eine kompakte Untergruppe H von G mit $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq H$.

Für Hypergruppen kann eine (A) aus Bemerkung 2.43 entsprechende Aussage bewiesen werden. Dabei stellt sich das Problem, dass nicht bekannt ist, ob Theorem 2 aus [43], welches besagt, dass für eine lokalkompakte Gruppe G (mit abzählbarer Basis der Topologie), die nicht kompakt ist und vom Träger eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\pi \in \mathcal{M}^1(G)$ erzeugt wird, $(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vag gegen 0 konvergiert, übertragen werden kann. Mit einem Resultat aus [12] über kompakte affine Halbgruppen ist es jedoch möglich, eine zu (B) analoge Aussage zu beweisen. Dessen Anwendung erfordert zunächst Vorbereitungen, wobei der Inhalt des folgenden Lemmas zwar bekannt ist, der Beweis hier aber mangels eines geeigneten Zitats dennoch durchgeführt wird.

Lemma 2.44. *Es sei E ein lokalkompakter Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^1(E)$ kompakt. Definiert man für $\lambda \in \mathcal{M}^1(\mathcal{A})$*

$$\sigma : C_c(E) \ni f \mapsto \int_{\mathcal{A}} \int_E f \, d\mu \, d\lambda(\mu),$$

so ist $\sigma \in \mathcal{M}^1(E)$, und für $f \in C^b(E)$ gilt

$$\int_E f \, d\sigma = \int_{\mathcal{A}} \int_E f \, d\mu \, d\lambda(\mu).$$

Beweis. Ist $f \in C_c(E)$, so ist nach Definition der schwachen Topologie

$$\mathcal{A} \ni \mu \mapsto I_f(\mu) := \int_E f \, d\mu$$

stetig, und es gilt $|I_f(\mu)| \leq \|f\|_\infty$ für alle $\mu \in \mathcal{A}$. Folglich ist $\sigma(f)$ für alle $f \in C_c(E)$ definiert. Positivität und Linearität ergeben sich sofort aus Eigenschaften des Integrals, ebenso

$$|\sigma(f)| \leq \|f\|_\infty \quad \text{für alle } f \in C_c(E).$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert ein eindeutig bestimmtes $\sigma_0 \in \mathcal{M}_+^{(1)}(E)$ mit $\int f d\sigma_0 = \sigma(f)$ für alle $f \in C_c(E)$.
Nun ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^1(E)$ gleichmäßig straff, d.h. zu $\varepsilon > 0$ existiert $K_\varepsilon \subseteq E$ kompakt mit $\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ für alle $\mu \in \mathcal{A}$. Wählt man $f_\varepsilon \in C_c(E)$ mit $1_{K_\varepsilon} \leq f_\varepsilon \leq 1$, so erhält man wegen

$$\int_E f_\varepsilon \, d\mu \geq \mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{für alle } \mu \in \mathcal{A}$$

$\sigma(f_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$. Dies zeigt $\|\sigma_0\| = 1$.
Es sei nun $f \in C^b(E)$. Dann ist das Integral $\int_\mathcal{A} \int_E f d\mu \, d\lambda(\mu)$ definiert. Es wird jetzt nachgewiesen, dass

$$\int_E f \, d\sigma_0 = \int_\mathcal{A} \int_E f \, d\mu \, d\lambda(\mu) \tag{2.44}$$

gilt. Zunächst folgt aus $\sigma(f_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$

$$\int_\mathcal{A} \int_E (1 - f_\varepsilon) \, d\mu \, d\lambda(\mu) \leq \varepsilon.$$

Dann erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left| \int_E f \, d\sigma_0 - \int_\mathcal{A} \int_E f \, d\mu \, d\lambda(\mu) \right| \\
&\quad \leq \left| \int_E f \, d\sigma_0 - \int_E f \, f_\varepsilon \, d\sigma_0 \right| + \left| \int_\mathcal{A} \int_E f \, f_\varepsilon \, d\mu \, d\lambda(\mu) - \int_\mathcal{A} \int_E f \, d\mu \, d\lambda(\mu) \right| \\
&\quad \leq \|f\|_\infty \int_E (1 - f_\varepsilon) \, d\sigma_0 + \|f\|_\infty \int_\mathcal{A} \int_E (1 - f_\varepsilon) \, d\mu \, d\lambda(\mu) \\
&\quad \leq \|f\|_\infty \, \varepsilon + \|f\|_\infty \, \varepsilon,
\end{aligned}$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, liefert dies (2.44). □

Lemma 2.45. *Sei E ein lokalkompakter Raum (mit abzählbarer Basis der Topologie) und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^1(E)$ kompakt. Dann ist $\overline{co(\mathcal{A})}$ kompakt, wobei $co(\mathcal{A})$ die konvexe Hülle von $\mathcal{A}$ bezeichne.*

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathcal{M}^1(\mathcal{A}) &\to \mathcal{M}^1(E) \\
\lambda &\mapsto \int_\mathcal{A} \mu \, d\lambda(\mu)
\end{aligned}$$

ist stetig (jeweils bezüglich der schwachen Topologien), denn ist $(\lambda_n) \subseteq \mathcal{M}^1(\mathcal{A})$ eine Folge, die gegen $\lambda \in \mathcal{M}^1(\mathcal{A})$ konvergiert, so gilt für $f \in C^b(E)$

$\int f d\Phi(\lambda_n) \to \int f d\Phi(\lambda)$ aufgrund von $I_f : \mu \mapsto \int f d\mu \in C^b(\mathcal{A})$. Da nach Korollar 1.1.4 in [31] $\mathcal{M}^1(\mathcal{A})$ kompakt ist, ist daher $\Phi(\mathcal{M}^1(\mathcal{A}))$ kompakt. $\mathrm{co}(\mathcal{A}) \subseteq \Phi(\mathcal{M}^1(\mathcal{A}))$ liefert die Behauptung, wobei man Letzteres wie folgt einsieht: Ist zunächst $\nu \in \mathcal{A}$, so ist wegen $\Phi(\varepsilon_\nu) = \nu \quad \nu \in \Phi(\mathcal{M}^1(\mathcal{A}))$. Für

$$\nu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \nu_i \in \mathrm{co}(\mathcal{A})$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $\nu_i \in \mathcal{A}$, $\alpha_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ definiert man

$$\lambda := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{\nu_i} \in \mathcal{M}^1(\mathcal{A}).$$

Dann ist $\Phi(\lambda) = \nu$ und somit $\nu \in \Phi(\mathcal{M}^1(\mathcal{A}))$. □

Bemerkung 2.46. Ist K eine Hypergruppe und $\rho \in \mathcal{M}^1(K)$, so dass $\{\rho^k : k \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt ist, so ist mit

$$\mathcal{A} := \overline{\{\rho^k : k \in \mathbb{N}\}}$$

$(\mathcal{A}, *)$ eine kompakte Halbgruppe. $(\overline{\mathrm{co}(\mathcal{A})}, *)$ ist dann ebenfalls eine Halbgruppe, die nach Lemma 2.45 kompakt ist. Aufgrund der Konvexität von $\overline{\mathrm{co}(\mathcal{A})}$ handelt es sich um eine *kompakte affine Halbgruppe* im Sinne der Definition aus [12]. In dieser Situation liefert nun die Anwendung von Theorem 1 in [12] unmittelbar das (B) aus Bemerkung 2.43 entsprechende Resultat für Hypergruppen.

Proposition 2.47. *Es sei K eine Hypergruppe, die keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen besitzt, und $\rho \in \mathcal{M}^1(K)$, so dass $\{\rho^k : k \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt ist. Dann folgt $\rho = \varepsilon_e$.*

Beweis. Mit $\mathcal{A} = \overline{\{\rho^k : k \in \mathbb{N}\}}$ ist nach Bemerkung 2.46 $(\overline{\mathrm{co}(\mathcal{A})}, *)$ eine kompakte affine Halbgruppe, und es ist $\rho \in \overline{\mathrm{co}(\mathcal{A})}$. Nach Theorem 1 in [12] konvergiert dann mit

$$\delta_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \rho^k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

die Folge (δ_n) gegen ein Idempotent $\omega \in \overline{\mathrm{co}(\mathcal{A})}$ mit $\omega * \rho = \rho * \omega = \omega$. Aufgrund der Voraussetzung folgt $\omega = \varepsilon_e$, und dies impliziert $\rho = \varepsilon_e$. □

Bemerkung 2.48. Auch die allgemeinere Aussage (C) in Bemerkung 2.43 lässt sich mit dieser Methode auf Hypergruppen übertragen. Ist nämlich $\rho \in \mathcal{M}^1(K)$ und $\{\rho^k : k \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt, so konvergiert die Folge (δ_n) gegen ein Idempotent $\omega_H \in \mathcal{M}^1(K)$, wobei H eine kompakte Unterhypergruppe ist, und $\rho * \omega_H = \omega_H$ impliziert dann $\mathrm{supp}(\rho) \subseteq L(\omega_H) = \{x \in K : \varepsilon_x * \omega_H = \omega_H\}$.

Korollar 2.49. *Sei K eine Hypergruppe, die keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen besitzt, $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ und $\mathcal{N} = \{\nu_n^l : n \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq k_n\}$ relativ kompakt. Dann gilt für jede Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{k_n} = 0$ $\nu_n^{r_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon_e$.*

Beweis. $\rho = \lim_{n\in\tilde{\mathbb{N}}} \nu_n^{r_n}$ sei ein Häufungspunkt der relativ kompakten Folge $(\nu_n^{r_n})$. Dann ist $\{\rho^k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\mathcal{N}}$ relativ kompakt, und mit Proposition 2.47 folgt $\rho = \varepsilon_e$. □

Man erhält nun aus dem Funktionalen Grenzwertsatz 2.30:

Proposition 2.50. *Es sei K eine $(*)$-wurzelkompakte Hypergruppe, die keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen besitzt, und $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ mit $\nu_n^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann existieren eine Teilfolge $\tilde{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ und eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$, so dass*

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\in\tilde{\mathbb{N}}]{} \mu_t \quad \textit{kompakt-gleichmäßig in } t \geq 0.$$

Beweis. Wegen Korollar 2.39 und Korollar 2.49, welches insbesondere die Infinitesimalität von (ν_n) (d.h. $\nu_n \to \varepsilon_e$, da K keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen besitzt) liefert, sind die Voraussetzungen von Satz 2.30 erfüllt. □

Bevor abschließend Beispiele für - nicht hermitesche - Hypergruppen angegeben werden, die die Voraussetzungen aus Proposition 2.50 erfüllen, wird zunächst gezeigt, dass sich die Eigenschaft „keine nichttrivialen kompakten Unter(hyper)gruppen“ auf Orbital-Hypergruppen bzw. Produkt-Hypergruppen überträgt.

Proposition 2.51. *Es sei $K = G^H$ eine Orbital-Hypergruppe und $\{e\}$ die einzige kompakte Untergruppe von G. Dann ist $\{e^H\}$ die einzige kompakte Unterhypergruppe von G^H.*

Beweis. Sei C eine kompakte Unterhypergruppe von G^H. Dann ist $\mathcal{M}^1(C)$, aufgefasst als Teilraum von $\mathcal{M}^1(K)$, kompakt und somit (vgl. Bemerkung 2.40) $q_H^{-1}(\mathcal{M}^1(C)) \subseteq \mathcal{M}^1(G)$ kompakt. Ist $\rho \in \mathcal{M}^1(C)$, so ist wegen $\{(q_H^{-1}(\rho))^k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq q_H^{-1}(\mathcal{M}^1(C))$ $\{(q_H^{-1}(\rho))^k : k \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt, woraus nach Bemerkung 2.43(B) $q_H^{-1}(\rho) = \varepsilon_e$ folgt. Dies liefert $\rho = \varepsilon_{e^H}$ und folglich $C = \{e^H\}$. □

Proposition 2.52. *Es seien K und H Hypergruppen, die $\{e_K\}$ bzw. $\{e_H\}$ als einzige kompakte Unterhypergruppen besitzen. Dann ist $\{(e_K, e_H)\}$ die einzige kompakte Unterhypergruppe der Produkt-Hypergruppe $K \times H$.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass für beliebige Hypergruppen K und H und eine kompakte Unterhypergruppe C der Produkt-Hypergruppe $K \times H$ $\pi_1(C)$ und $\pi_2(C)$ kompakte Unterhypergruppen von K bzw. H sind, wobei π_1 bzw. π_2 die Projektionen bezeichnen. Denn aufgrund der Definition der Involution und der Faltung in der Produkt-Hypergruppe sowie Theorem 1.1.13 in [31] gelten $(\pi_i(C))^- = \pi_i(C)$ und $\pi_i(C) * \pi_i(C) = \pi_i(C * C) \subseteq \pi_i(C)$ $(i = 1, 2)$.
Ist nun C eine kompakte Unterhypergruppe von $K \times H$, so folgen mit der Voraussetzung $\pi_1(C) = \{e_K\}$ und $\pi_2(C) = \{e_H\}$ und dann $C = \{(e_K, e_H)\}$. □

Beispiel 2.53. (a) Es sei $G = \mathbb{H}_n$ die $(2n + 1)$-dimensionale Heisenberg-Gruppe $(n \in \mathbb{N})$, d.h. $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ mit der Verknüpfung

$$(z, t)(z', t') = (z + z', t + t' - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\langle z, z'\rangle)$$

für $(z, t), (z', t') \in \mathbb{H}_n$. Bezeichnet $U(n)$ die Gruppe der unitären $n \times n$-Matrizen auf $\mathbb{C}^n$, so ist für $A \in U(n)$ die Abbildung

$$\begin{aligned} F_A : \mathbb{H}_n &\rightarrow \mathbb{H}_n \\ (z, t) &\mapsto (Az, t) \end{aligned} \tag{2.45}$$

ein Automorphismus von $\mathbb{H}_n$, und $H := \{F_A : A \in U(n)\}$ ist eine kompakte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_n)$ (vgl. [3] und [4]). Da die Heisenberg-Gruppe einfach zusammenhängend und nilpotent ist, ist sie nach z.B. (1.4) und (1.7) in [44] $(*)$-wurzelkompakt und besitzt keine nichttrivialen kompakten Untergruppen. Nach den Propositionen 2.41 und 2.51 gelten die entsprechenden Eigenschaften dann auch für die Orbital-Hypergruppe G^H. Diese ist nicht hermitesch, denn für $x = (z, t) \in \mathbb{H}_n$ hat der Orbit von x unter H die Gestalt $x^H = \{(Az, t) : A \in U(n)\}$, und es gilt $(x^H)^- = (x^{-1})^H = \{(-Az, -t) : A \in U(n)\} \neq x^H$, falls $t \neq 0$.

(b) Speziell besitzt also für die 3-dimensionale Heisenberg-Gruppe $G = \mathbb{H}_1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ mit

$$((x, y), s)((a, b), t) = ((x + a, y + b), s + t + \frac{1}{2}(xb - ya))$$

für $((x, y), s), ((a, b), t) \in \mathbb{H}_1$, $\mathrm{SO}(2) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^T A = I, \det A = 1\} \cong U(1)$ sowie $H = \{F_A : A \in \mathrm{SO}(2)\} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{H}_1)$, wobei F_A wie in (2.45), die Orbital-Hypergruppe G^H die gewünschten Eigenschaften. Die Orbits $((x, y), t)^H = \{(A(x, y)^T, t) : A \in \mathrm{SO}(2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ sind um t

verschobene, zur (x, y)-Ebene parallele Kreise mit Mittelpunkt 0, und die Räume G^H und $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sind homöomorph vermöge der Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \rightarrow & G^H \\ (x,t) & \mapsto & ((x,0),t)^H \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{-1} : G^H & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ (x,t)^H & \mapsto & (\|x\|_2, t) \end{array}$$

(wohldefiniert und stetig).
Transport der Faltungsstruktur von G^H auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ liefert dann wegen

$$\varepsilon_{x^H} * \varepsilon_{y^H} = \int_H \varepsilon_{(xa(y))^H} \, d\omega_H(a)$$

für $x^H, y^H \in G^H$ sowie

$$\begin{aligned} &\Phi^{-1}((((x,0),s)\, a((y,0),t))^H) \\ &\quad = \Phi^{-1}((((x,0),s)((y\cos\phi, y\sin\phi),t))^H) \\ &\quad = \Phi^{-1}(((x+y\cos\phi, y\sin\phi), s+t+1/2\, xy\sin\phi)^H) \\ &\quad = (\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\phi}, s+t+1/2\, xy\sin\phi) \end{aligned}$$

für $(x,s),(y,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$\varepsilon_{(x,s)} * \varepsilon_{(y,t)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{(\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\phi}, s+t+1/2\, xy\sin\phi)} \, d\phi$$

für $(x,s),(y,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mit den Identifizierungen $\mathrm{SO}(2) \cong \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ und $d\omega_H = \frac{1}{2\pi} d\phi$.
$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mit der obigen Faltungsoperation ist also eine kommutative, nicht hermitesche Hypergruppe (die Involution ist die Abbildung $(x,t) \mapsto (x,-t)$) mit den gewünschten Eigenschaften. Es handelt sich dabei um eine *Laguerre-Hypergruppe* (mit Parameter 0), vgl. z.B. Definition 1.2.6 in [46]. Eine exakte Übereinstimmung der Definitionen erhält man, wenn man die Verknüpfung in der Heisenberg-Gruppe definiert als

$$((x,y),s)((a,b),t) = ((x+a, y+b), s+t-\frac{1}{2}(xb-ya))$$

für $((x,y),s),((a,b),t) \in \mathbb{H}_1$.

(c) Ein weiteres Beispiel für eine (nicht hermitesche) Hypergruppe, die $(*)$-wurzelkompakt ist und keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen besitzt, ist die Orbital-Hypergruppe G^H, wobei $G = \mathbb{H}_1$ und

$$H = \left\{ F_A : A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}.$$

Für $((x,y),t) \in \mathbb{H}_1$ hat der zugehörige Orbit die Gestalt

$$((x,y),t)^H = \{((x,y),t), ((-y,x),t), ((-x,-y),t), ((y,-x),t)\}.$$

2.54 (Bemerkungen zu Kapitel 2). In den Funktionalen Grenzwertsätzen 2.7 und 2.12 für den Fall hermitescher Hypergruppen ergab sich jeweils aus den Voraussetzungen, dass das Grenzmaß μ unendlich teilbar ist, woraus dann die eindeutige Einbettbarkeit in eine stetige Faltungshalbgruppe folgte. Diese Einbettbarkeitsaussage für unendlich teilbare Wahrscheinlichkeitsmaße auf hermiteschen Hypergruppen (Proposition 2.6) wurde von M. Voit bewiesen und ist ein Teil von Theorem 4.3 in [54]. Ein zweiter Teil des Theorems beinhaltet eine analoge Aussage, wobei die Voraussetzung, dass die gegebene Hypergruppe hermitesch ist, ersetzt wird durch die folgende Bedingung: Zu jedem Charakter $\chi \in \mathrm{supp}(\pi_K)$ existieren ein positiver Charakter $\chi_0 \in \hat{K}$ und ein stetiger Weg $\tilde{\chi} : [0,1] \to \hat{K}$, so dass $\tilde{\chi}(0) = \chi_0$ und $\tilde{\chi}(1) = \chi$ gelten. Dabei ist K eine kommutative Hypergruppe (mit abzählbarer Basis der Topologie). Die beiden mittels Fouriertransformation bewiesenen Aussagen sind vom reellen Fall übertragen (im zweiten Fall impliziert die Voraussetzung, dass die Fouriertransformierten von unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaßen nicht verschwinden), und der Beweis liefert zunächst eine rationale, dann eine reelle Einbettung.
Offen bleibt in dieser Arbeit die Frage nach der Gültigkeit eines Funktionalen Grenzwertsatzes für (kommutative) Hypergruppen, welche einen schwach wegzusammenhängenden Dual im Sinne der obigen Definition besitzen.
Mit Hilfe der in Abschnitt 2.2 zum Beweis der Einbettungsaussage für den symmetrischen Fall (Satz 2.14) verwendeten funktionalanalytischen Hilfsmittel kann bewiesen werden, dass jede symmetrische Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t>0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ stetig ist, sofern die Existenz eines linken Haarmaßes auf der Hypergruppe K vorausgesetzt ist. Die Stetigkeit von symmetrischen Faltungshalbgruppen wurde von W.R. Bloom und H. Heyer in [9] (Theorem 6) für den Fall gezeigt, dass die gegebene Hypergruppe die Eigenschaft $(\mathcal{S})$ besitzt, was bedeuten soll (vgl. [9] und [10], Definition 5.1.6): Zum einen folgt für Netze $(x_\alpha), (y_\alpha) \subseteq K$ aus der Straffheit von $(\varepsilon_{y_\alpha} * \varepsilon_{x_\alpha})$ die von $(\varepsilon_{x_\alpha^-} * \varepsilon_{x_\alpha})$,

und zum anderen ist $(\lambda_\alpha * \nu_\alpha)$ genau dann straff, wenn $(\nu_\alpha * \lambda_\alpha)$ straff ist.
Die Stetigkeit ist ebenfalls gegeben, wenn die Hypergruppe kommutativ ist (vgl. Proposition 5.2.7 in [10]). In diesem Fall lässt sich der Beweis mit Methoden der Fouriertransformation unter Anwendung des Lévyschen Stetigkeitssatzes führen, und in der oben erwähnten allgemeinen Situation übernehmen dann im Beweis wieder Faltungsoperatoren auf $L^2(K)$ die Rollen der Fouriertransformierten.
Der Funktionale Grenzwertsatz 2.28 für den symmetrischen Fall wird unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Folge (ν_n) gegen ε_e konvergiert. Diese Eigenschaft wird in Lemma 2.19 benutzt, um die positive Semidefinitheit des Faltungsoperators R_μ zu beweisen. Es wird hier nicht untersucht, ob sie ersetzt werden kann durch eine verallgemeinerte Infinitesimalitäts-Bedingung, z.B. die Konvergenz von (ν_n) gegen das normierte Haarmaß ω_H einer kompakten Unterhypergruppe H.
Der Funktionale Grenzwertsatz 2.30 ist vom von K. Telöken behandelten Fall lokalkompakter Gruppen übertragen. In [51] und [52] wiederum wird S. Nobels Funktionaler Grenzwertsatz für gleichgradig wurzelkompakte Gruppen, die keine nichttrivialen kompakten Untergruppen besitzen (vgl. [44], Satz 1.11), verallgemeinert. In der Situation von Hypergruppen ist die Formulierung somit allgemein gehalten, obwohl in den Anwendungsbeispielen (im Sinne von Definition 2.38) stark wurzelkompakte Hypergruppen mit $\{e\}$ als einziger kompakter Unterhypergruppe betrachtet werden.
In Analogie zum Gruppenfall kann gezeigt werden, dass für gemäß 2.33(a) wurzelkompakte Hypergruppen jedes unendlich teilbare Wahrscheinlichkeitsmaß μ rational einbettbar ist (vgl. auch Theorem 5.6 in [7]).
Fordert man in der Definition von Orbital-Hypergruppen G^H zusätzlich, dass die inneren Automorphismen von G in H enthalten sind, so ist die Hypergruppe kommutativ und Pontryagin (vgl. [10], S. 541, sowie 2.4.1 für die Definition).
Für Gelfand-Paare (G, H) ist der Doppelnebenklassenraum $G//H$ eine kommutative Hypergruppe. In [22] werden Einbettungssaussagen im Zusammenhang mit dem Begriff der Wurzelkompaktheit im Kontext von gewissen Gelfand-Paaren gemacht.

Kapitel 3

Der Transfersatz von Gnedenko

Im Fall lokalkompakter Gruppen G ist es möglich, Grenzwertsätze für *randomisierte* Produkte

$$S_{T_n}^{(n)} = \prod_{k=0}^{[T_n]} X_{n,k},$$

wobei $(X_{n,k})_{n,k\geq 1}$ G-wertige ($X_{n,0} := e$) und $(T_n)_{n\geq 1}$ $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariablen sind, zu untersuchen. Sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ $(X_{n,k} : k \geq 1)$ unabhängig und identisch verteilt und darüberhinaus $(T_n, X_{n,k} : k \geq 1)$ unabhängig, so besagt eine einfache Version des Transfersatzes von Gnedenko für lokalkompakte Gruppen (vgl. [28], Abschnitt 2.12 III), welche das Analogon zum klassischen Transfersatz in [21] ist: Die randomisierten Produkte $(S_{T_n}^{(n)})$ konvergieren in Verteilung gegen den randomisierten Lévy-Prozess Y_T, sofern funktionale Konvergenz

$$S_{k_n t}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} Y_t \quad \text{in Verteilung für alle } t \geq 0$$

vorausgesetzt ist, wobei (k_n) eine Teilfolge von $\mathbb{N}$ ist, $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein Lévy-Prozess und T eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable, so dass T und $(Y_t)_{t\geq 0}$ unabhängig sind, und $(\frac{1}{k_n} T_n)$ in Verteilung gegen T konvergiert.

Für Hypergruppen ist die Existenz von randomisierten Irrfahrten und Lévy-Prozessen nicht offensichtlich. Bei der Übertragung einer entsprechenden Aussage in den Kontext von diesen ist daher neben ihrer Formulierung für diskrete bzw. stetige Faltungshalbgruppen ein geeignetes wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell anzugeben. Verwendet man Definitionen und Zusammenhänge aus den Abschnitten 1.1 und 1.2, so ist Letzteres möglich.

Definition 3.1. Es seien K eine Hypergruppe mit Konkretisierung (M, μ, Φ) (vgl. Definition 1.2) und $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für jedes

$n \geq 1$ seien $(X_{n,k})_{k\geq 1}$ unabhängige und identisch verteilte K-wertige Zufallsvariablen mit $P_{X_{n,k}} = \nu_n$, $k \geq 1$, und $(\Lambda_{n,k})_{k\geq 1}$ M-wertige (Hilfs-) Zufallsvariablen mit $P_{\Lambda_{n,k}} = \mu$, $k \geq 1$, so dass $X_{n,1}, \Lambda_{n,1}, X_{n,2}, \Lambda_{n,2}, \ldots$ unabhängig sind. Gemäß Definition 1.7 sind dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ die randomisierten Summen

$$(S_l^{(n)})_{l\geq 0} = \left(\sum_{k=1}^{l} {}^{\Lambda}\, X_{n,k} \right)_{l\geq 0}$$

rekursiv definiert, und aufgrund der identischen Verteilungen der $(X_{n,k})_{k\geq 1}$ handelt es sich um Irrfahrten (vgl. Definition 1.9). Für die Verteilungen gilt

$$P_{S_l^{(n)}} = \nu_n^l, \quad l \geq 0$$

(mit $\nu_n^0 = \varepsilon_e$).
Um Prozesse mit kontinuierlichem Zeitparameter in $\mathbb{R}_+$ zu erhalten, definiert man

$$S_t^{(n)} := S_{[t]}^{(n)} = \sum_{k=1}^{[t]} {}^{\Lambda}\, X_{n,k} \quad \text{für } t \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Für eine Zeiteinheit $c > 0$ wird $(S_{t/c}^{(n)})_{t\geq 0}$ als *Prozess randomisierter Summen* bezeichnet und die zugehörigen Verteilungen $(\nu_n^{[t/c]})_{t\geq 0}$ als *diskrete Faltungshalbgruppe*.
Eine *Zufallszeit* ist eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable. Für eine Zufallszeit T_n ist dann $S_{T_n}^{(n)} = S_{[T_n]}^{(n)}$ definiert und wird *Randomisierung* der randomisierten Summen genannt.

Bemerkung 3.2. Es sei an den in Abschnitt 1.2 bewiesenen Zusammenhang erinnert: Ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$, so existiert ein stationärer Zuwachsprozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit càdlàg-Pfaden mit $\eta_{s,t} = \mu_{t-s}$ für $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t$ (vgl. Definition 1.1) und $P_{X_t} = \mu_t$ für alle $t \geq 0$. Umgekehrt ist für einen stationären Zuwachsprozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit càdlàg-Pfaden und $X_0 = e$ P-fast sicher $(P_{X_t})_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ mit $P_{X_{t-s}} = \eta_{s,t}$ für $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t$. In Analogie zum Gruppenfall wird ein solcher Prozess fortan als *Lévy-Prozess* bezeichnet.

Bevor nun der Transfersatz von Gnedenko für Hypergruppen formuliert und bewiesen wird, erfolgen zunächst einige Vorbereitungen.

Lemma 3.3. *Es sei K eine Hypergruppe mit Konkretisierung (M, μ, Φ), $(X_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{X_k} = \nu \in \mathcal{M}^1(K)$, $k \geq 1$, und $(\Lambda_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von*

M-wertigen Zufallsvariablen mit $P_{\Lambda_k} = \mu$, $k \geq 1$, so dass $X_1, \Lambda_1, X_2, \Lambda_2, \ldots$ unabhängig sind. Ist T eine Zufallszeit mit $\rho = P_T \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ und sind $T, X_1, \Lambda_1, X_2, \Lambda_2, \ldots$ unabhängig, so gilt für die Verteilung der Randomisierung $S_T = \sum_{k=1}^{[T]} {}^{\Lambda} X_k$

$$P_{S_T} = \int_{\mathbb{R}_+} \nu^{[t]}\, d\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho([k, k+1[)\nu^k.$$

Beweis. Aufgrund der Unabhängigkeit von $(T, X_k, \Lambda_k : k \geq 1)$ und der Konstruktion der randomisierten Summen (S_n) (insbesondere $S_0 = e$) sieht man induktiv ein, dass für jedes $n \geq 0$ S_n und T unabhängig sind. Für $A \in \mathcal{B}(K)$ gilt dann

$$\begin{aligned} P_{S_T}(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\{S_T \in A\} \cap \{[T] = n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\{S_n \in A\} \cap \{T \in [n, n+1[\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n \in A\} P\{T \in [n, n+1[\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n(A)\, \rho([n, n+1[), \end{aligned}$$

und dies liefert die Behauptung. □

Lemma 3.4. *Es sei K eine Hypergruppe und $(Y_t)_{t \geq 0}$ ein K-wertiger Lévy-Prozess auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit zugehöriger $\{e\}$-stetiger Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$. T sei eine Zufallszeit mit Verteilung $\rho \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$, so dass T und $(Y_t)_{t \geq 0}$ unabhängig sind. Dann hat der randomisierte Prozess Y_T die Verteilung*

$$P_{Y_T} = \int_{\mathbb{R}_+} \mu_t\, d\rho(t).$$

Bemerkung. Da $(Y_t)_{t \geq 0}$ insbesondere càdlàg-Pfade besitzt, ist Y_T stets messbar.

Beweis. Für unabhängige Zufallsvariablen $X : \Omega \to \Omega_1$ und $Y : \Omega \to \Omega_2$ und messbares $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$, so dass $f(X, Y)$ integrierbar ist, ist $E(f(X, Y)| Y = y) = E(f(X, y))$ für P_Y-fast alle $y \in \Omega_2$. Daher erhält man für $A \in \mathcal{B}(K)$ mit $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \ni ((x_t)_{t \geq 0}, s) \mapsto 1_A(x_s)$ (wobei $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+) = \{f : \mathbb{R}_+ \to K :$

f ist càdlàg$\} \subseteq K^{\mathbb{R}_+})$

$$\begin{aligned}
P_{Y_T}(A) &= \int E(1_{\{Y_T \in A\}} | \, T) \, dP \\
&= \int E(f((Y_t)_{t \geq 0}, T) | \, T) \, dP \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} E(f((Y_t)_{t \geq 0}, T) | \, T = s) \, dP_T(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} E(f((Y_t)_{t \geq 0}, s)) \, d\rho(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} E(1_A(Y_s)) \, d\rho(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \mu_s(A) \, d\rho(s).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.5. Im Folgenden werden für $\rho \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$, $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$ und eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ die Notationen

$$\nu^\rho := \int_{\mathbb{R}_+} \nu^{[t]} \, d\rho(t)$$

sowie

$$\mu_\rho := \int_{\mathbb{R}_+} \mu_t \, d\rho(t)$$

verwendet. In Analogie zum Gruppenfall bezeichnet man im zweiten Fall μ_ρ als *subordiniert* zu $(\mu_t)_{t \geq 0}$ mit *Subordinator* ρ.

Aus den Definitionen ergeben sich unmittelbar die Eigenschaften:

Lemma 3.6. *(a) Für jede feste diskrete Faltungshalbgruppe $(\nu^{[t]})_{t \geq 0}$ (wobei $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$) ist die affine Abbildung*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^1(\mathbb{Z}_+) &\rightarrow \mathcal{M}^1(K) \\
\rho &\mapsto \nu^\rho
\end{aligned}$$

ein Halbgruppen-Homomorphismus bezüglich der Faltung in $\mathcal{M}^1(\mathbb{Z}_+)$ bzw. $\mathcal{M}^1(K)$.

(b) Für jede stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ ist die Subordinations-Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+) &\rightarrow \mathcal{M}^1(K) \\
\rho &\mapsto \mu_\rho
\end{aligned}$$

affin und stetig (jeweils bezüglich der schwachen Topologien) und ein Halbgruppen-Homomorphismus bezüglich der Faltung in $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ bzw. $\mathcal{M}^1(K)$.

Analog zum Gruppenfall in [28] (vgl. den Beweis von Theorem 2.12.14, 10.) wird nun zunächst der Transfersatz von Gnedenko in der analytischen Formulierung bewiesen.

Proposition 3.7. *Sei K eine Hypergruppe, $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$. Es gelte*

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \textit{für alle } t \geq 0,$$

wobei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$. Weiterhin konvergiere für $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ $(H_{1/k_n}(\rho_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\xi \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$, wobei für $c > 0$ H_c die Homothetie $x \mapsto cx$ bezeichne. Dann gilt

$$(\nu_n)^{\rho_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_\xi.$$

Beweis. Es wird gezeigt, dass für eine Folge $(\delta_n) \subseteq \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$, die gegen $\xi \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ konvergiert,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \nu_n^{[k_n t]}\, d\delta_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}_+} \mu_t\, d\xi(t)$$

gilt. Mit $\delta_n = H_{1/k_n}(\rho_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ erhält man dann unmittelbar die Behauptung.
Es sei $f \in C^b(K)$ beliebig, aber fest gewählt. Nach Proposition 2.3 ist die Konvergenz $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$ kompakt-gleichmäßig in $t \geq 0$, und somit konvergieren die Treppenfunktionen

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \int f\, d\nu_n^{[k_n t]} =: h_n(t), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ gegen die stetige und beschränkte Funktion

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \int f\, d\mu_t =: h(t) \tag{3.2}$$

(vgl. Bemerkung 2.2(2)). Ist nun $(\delta_n) \subseteq \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ mit $\delta_n \to \xi$, so muss also

$$\int_{\mathbb{R}_+} h_n\, d\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}_+} h\, d\xi \tag{3.3}$$

nachgewiesen werden.
Wegen

$$\left|\int_{\mathbb{R}_+} h_n(t)\, d\delta_n(t) - \int_{\mathbb{R}_+} h(t)\, d\xi(t)\right| \leq$$
$$\int_{\mathbb{R}_+} |h_n(t) - h(t)|\, d\delta_n(t) + \left|\int_{\mathbb{R}_+} h(t)\, d\delta_n(t) - \int_{\mathbb{R}_+} h(t)\, d\xi(t)\right|$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $h \in C^b(\mathbb{R}_+)$ erhält man (3.3) aus

$$\int_{\mathbb{R}_+} |h_n(t) - h(t)|\, d\delta_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{3.4}$$

und Letzteres sieht man wie folgt ein:
Aus den Definitionen von (h_n) und h folgt die Existenz einer Konstanten $M > 0$, so dass $\|h_n - h\|_\infty \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so kann einerseits aufgrund der gleichmäßigen Straffheit von (δ_n) eine kompakte Menge $C \subseteq \mathbb{R}_+$ gewählt werden mit $\delta_n(C^c) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und andererseits ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sup_{t\in C} |h_n(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Die für $n \geq n_0$ gültige Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}_+} |h_n(t) - h(t)|\, d\delta_n(t) =$$
$$\int_C |h_n(t) - h(t)|\, d\delta_n(t) + \int_{C^c} |h_n(t) - h(t)|\, d\delta_n(t) \leq$$
$$\frac{\varepsilon}{2} + M\,\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

liefert (3.4). □

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun möglich, den Transfersatz von Gnedenko für lokalkompakte Gruppen (vgl. [28], Theorem 2.12.14) auf Hypergruppen zu übertragen.

Satz 3.8 (Transfersatz von Gnedenko). *Es sei K eine Hypergruppe mit Konkretisierung (M, μ, Φ). Für jedes $n \geq 1$ seien $(X_{n,k})_{k\geq 1}$ unabhängige und identisch verteilte K-wertige Zufallsvariablen mit $P_{X_{n,k}} = \nu_n$, $k \geq 1$, und $(\Lambda_{n,k})_{k\geq 1}$ M-wertige Zufallsvariablen mit $P_{\Lambda_{n,k}} = \mu$, $k \geq 1$, so dass $X_{n,1}, \Lambda_{n,1}, X_{n,2}, \Lambda_{n,2}, \ldots$ unabhängig sind. Für eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $k_n \nearrow \infty$, gelte*

$$S^{(n)}_{k_n t} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{in Verteilung für alle } t \geq 0,$$

wobei $S^{(n)}_{k_n t} = \sum_{k=1}^{[k_n t]}{}^{\Lambda}\, X_{n,k}$ und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ ist. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von $\mathbb{Z}_+$-wertigen Zufallszeiten, so dass *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ $(T_n, X_{n,k}, \Lambda_{n,k} : k \geq 1)$ *unabhängig sind.* $\rho_n := P_{T_n}$, $n \in \mathbb{N}$, *seien die zugehörigen Verteilungen. Weiterhin sei* $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *eine Folge mit* $l_n \nearrow \infty$, *und es gelte* $\frac{1}{l_n}T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ *in Verteilung. Dabei stehen die Folgen* (k_n) *und* (l_n) *in der Beziehung* $\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{k_n} = c \geq 0$.

(a) *Es sei* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *ein Lévy-Prozess, so dass für jedes* $t \geq 0$ Y_t *die Verteilung* μ_t *besitzt, und* T *eine Zufallszeit mit Verteilung* ξ, *so dass* T *und* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *unabhängig sind.*
Dann konvergieren die Verteilungen $((\nu_n)^{\rho_n})$ *der Randomisierungen* $(S^{(n)}_{T_n}) = \left(\sum_{k=1}^{T_n} \Lambda X_{n,k}\right)$ *der randomisierten Summen gegen die Verteilung* $\mu_{H_c(\xi)}$ *des randomisierten Prozesses* Y_{cT}.

(b) *Es sei vorausgesetzt, dass die Zufallszeiten* (T_n) *zusätzlich erfüllen:*
Die (T_n) *seien darstellbar als Summen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen, d.h. es existieren* $\mathbb{Z}_+$*-wertige Zufallsvariablen* $(K_{n,k})_{n,k\geq 1}$, *so dass für jedes* $n \geq 1$ $(K_{n,k})_{k\geq 1}$ *unabhängig und identisch verteilt sind mit* $P_{K_{n,k}} = \kappa_n$, *und* T_n *besitzt die Darstellung* $T_n = \sum_{k=0}^{m_n} K_{n,k}$ $(K_{n,0} := 0)$ *für eine Folge* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, $m_n \nearrow \infty$.
Mit $\rho_{n,r} := \kappa_n^{[m_n r]}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *und* $r \geq 0$ *bilden dann die* $((\nu_n)^{\rho_{n,r}})_{r\geq 0}$ *eine Folge von diskreten Faltungshalbgruppen, und es gilt*

$$(\nu_n)^{\rho_{n,r}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_{H_c(\xi_r)}$$

kompakt-gleichmäßig in $r \geq 0$, *wobei* $(\xi_r)_{r\geq 0}$ *die eindeutig bestimmte stetige Faltungshalbgruppe in* $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ *ist mit* $\xi_1 = \xi$. *Definiert man für* $n \in \mathbb{N}$ *und* $r \geq 0$ $T_{n,r} := \sum_{k=0}^{[m_n r]} K_{n,k}$ *und sind für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *und* $r \geq 0$ $T_{n,r}, X_{n,1}, \Lambda_{n,1}, X_{n,2}, \Lambda_{n,2}, \ldots$ *unabhängig, so konvergieren also die Verteilungen der Randomisierungen* $(S^{(n)}_{T_{n,r}})_{r\geq 0}$ *schwach gegen die Verteilungen eines subordinierten Prozesses* $(Y_{cT_r})_{r\geq 0}$, *und die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von* $\mathbb{R}_+$. *Dabei sind* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *und* $(T_r)_{r\geq 0}$ *Lévy-Prozesse auf* K *bzw. auf* $\mathbb{R}_+$ *mit zugehörigen stetigen Faltungshalbgruppen* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *bzw.* $(\xi_r)_{r\geq 0}$, *so dass für jedes* $r \geq 0$ T_r *und* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *unabhängig sind.*

Beweis. (a) Wegen $P_{S^{(n)}_{k_n t}} = \nu_n^{[k_n t]}$ gilt

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Da $P_{\frac{1}{l_n}T_n} = H_{1/l_n}(\rho_n)$, gilt also nach Voraussetzung $H_{1/l_n}(\rho_n) \to \xi$. Dies impliziert aufgrund von $H_{1/k_n}(\rho_n) = H_{l_n/k_n}(H_{1/l_n}(\rho_n))$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{k_n} = c$

$$H_{1/k_n}(\rho_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} H_c(\xi).$$

(Dazu verwendet man die Hilfsaussage: Für $(\lambda_n) \subseteq \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ mit $\lambda_n \to \lambda \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ und $(c_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ gilt $H_{c_n}(\lambda_n) \to H_c(\lambda)$.)
Anwendung von Proposition 3.7 liefert

$$(\nu_n)^{\rho_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_{H_c(\xi)}.$$

Die von $(Y_t)_{t\geq 0}$ unabhängige Zufallszeit cT besitzt die Verteilung $H_c(\xi)$, somit gilt für den randomisierten Prozess Y_{cT} nach Lemma 3.4 $P_{Y_{cT}} = \mu_{H_c(\xi)}$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann also $\rho_n = P_{T_n} = \kappa_n^{m_n}$. Es folgt $H_{1/l_n}(\rho_n) = (H_{1/l_n}(\kappa_n))^{m_n}$ und somit nach Voraussetzung

$$(H_{1/l_n}(\kappa_n))^{m_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi.$$

Folglich ist ξ unendlich teilbar und eindeutig einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\xi_r)_{r\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$, und es gilt

$$H_{1/l_n}(\rho_{n,r}) = (H_{1/l_n}(\kappa_n))^{[m_n r]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_r \tag{3.5}$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ (vgl. [28], Lemma 1.6.1). Wendet man nun die (analytische) Aussage aus (a) für ein festes $r \geq 0$ an, so erhält man

$$(\nu_n)^{\rho_{n,r}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_{H_c(\xi_r)}. \tag{3.6}$$

Wegen Lemma 3.6(a) gilt

$$(\nu_n)^{\rho_{n,r}} = ((\nu_n)^{\kappa_n})^{[m_n r]},$$

daher ist für $n \in \mathbb{N}$ $((\nu_n)^{\rho_{n,r}})_{r\geq 0}$ eine diskrete Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$. Nach Lemma 3.6(b) ist $(\mu_{H_c(\xi_r)})_{r\geq 0}$ eine ($\{e\}$-) stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$, und folglich ist die Konvergenz in (3.6) gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ (Proposition 2.3). Nach den Voraussetzungen über die Unabhängigkeit hat für $n \in \mathbb{N}$ und $r \geq 0$ $S^{(n)}_{T_{n,r}}$ die Verteilung $(\nu_n)^{\rho_{n,r}}$ sowie Y_{cT_r} für $r \geq 0$ die Verteilung $\mu_{H_c(\xi_r)}$ (vgl. Lemma 3.3 und 3.4). □

Bemerkung 3.9. Im Fall lokalkompakter Gruppen gilt: Ist $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein Lévy-Prozess mit zugehöriger stetiger Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(G)$ und $(T_r)_{r\geq 0}$ ein Lévy-Prozess auf $\mathbb{R}_+$ mit stetiger Faltungshalbgruppe $(\xi_r)_{r\geq 0}$, so ist, falls $(T_r)_{r\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ unabhängig sind, der Prozess $(Y_{T_r})_{r\geq 0}$ wieder ein Lévy-Prozess (mit stetiger Faltungshalbgruppe $(\mu_{\xi_r})_{r\geq 0}$) (vgl. [28], Beweis von Theorem 2.12.14, 8.).

Wie die folgende Proposition zeigt, besitzt eine analoge Aussage auch im Fall von Hypergruppen Gültigkeit.

Proposition 3.10. *Es sei K eine Hypergruppe und $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein Lévy-Prozess auf K mit zugehöriger $\{e\}$-stetiger Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$. Ist $(T_r)_{r\geq 0}$ ein Lévy-Prozess auf $\mathbb{R}_+$ mit stetiger Faltungshalbgruppe $(\xi_r)_{r\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$, so dass $(T_r)_{r\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ unabhängig sind, so ist der Prozess $(Y_{T_t})_{t\geq 0}$ ein Lévy-Prozess auf K (mit zugehöriger stetiger Faltungshalbgruppe $(\mu_{\xi_t})_{t\geq 0}$).*

Beweis. Es wird gezeigt, dass $(Y_{T_t})_{t\geq 0}$ ein stationärer Zuwachsprozess ist. Die càdlàg-Eigenschaft ergibt sich unmittelbar aus der der Prozesse $(Y_t)_{t\geq 0}$ und $(T_r)_{r\geq 0}$, wobei zu beachten ist, dass die Pfade des Prozesses $(T_r)_{r\geq 0}$ monoton wachsend sind.
Es seien $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $s < t$. Nachgewiesen wird nun zunächst

$$P\{Y_{T_t} \in A |\, Y_{T_s}\} = (\mu_{\xi_{t-s}} * \varepsilon_{Y_{T_s}})(A) \quad P\text{-f.s.}$$

für alle $A \in \mathcal{B}(K)$. Seien dazu $A, B \in \mathcal{B}(K)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int 1_{\{Y_{T_s}\in B\}} 1_{\{Y_{T_t}\in A\}}\, dP \\
&\quad = E(E(1_{B\times A}(Y_{T_s}, Y_{T_t}) |\, (T_s, T_t))) \\
&\quad = \int E(1_{B\times A}(Y_{T_s}, Y_{T_t}) |\, (T_s, T_t) = (a, b))\, dP_{(T_s,T_t)}(a, b) \\
&\quad = \int E(1_{B\times A}(Y_a, Y_b))\, dP_{(T_s,T_t)}(a, b) \\
&\quad = \int\int 1_{\{Y_a\in B\}} 1_{\{Y_b\in A\}}\, dP\, dP_{(T_s,T_t)}(a, b) \\
&\quad = \int\int 1_B(Y_a)(\mu_{b-a} * \varepsilon_{Y_a})(A)\, dP\, dP_{(T_s,T_t)}(a, b) \\
&\quad = \int\int 1_B(Y_a)(\mu_b * \varepsilon_{Y_a})(A)\, dP_{(T_s,T_t-T_s)}(a, b)\, dP \\
&\quad = \int\int\int 1_B(x)(\mu_b * \varepsilon_x)(A)\, d\mu_a(x)\, d\xi_s(a)\, d\xi_{t-s}(b) \\
&\quad = \int\int 1_B(x)(\mu_b * \varepsilon_x)(A)\, d\mu_{\xi_s}(x)\, d\xi_{t-s}(b) \\
&\quad = \int 1_B(x) \int (\mu_b * \varepsilon_x)(A)\, d\xi_{t-s}(b)\, dP_{Y_{T_s}}(x) \\
&\quad = \int 1_B(x)(\mu_{\xi_{t-s}} * \varepsilon_x)(A)\, dP_{Y_{T_s}}(x) \\
&\quad = \int 1_{\{Y_{T_s}\in B\}}(\mu_{\xi_{t-s}} * \varepsilon_{Y_{T_s}})(A)\, dP
\end{aligned}$$

aufgrund der Unabhängigkeit von $(Y_r)_{r\geq 0}$ und (T_s, T_t), der Tatsache, dass für $a \leq b$

$$P\{Y_b \in A|\, Y_a\} = (\mu_{b-a} * \varepsilon_{Y_a})(A) \quad P\text{-f.s.}$$

gilt, und der Unabhängigkeit von T_s und $T_t - T_s$.
Für Zeitpunkte $0 \leq s_1 < \cdots < s_n < t$ und $A \in \mathcal{B}(K)$ gilt, da die Pfade von $(T_r)_{r\geq 0}$ monoton wachsend sind und

$$P\{Y_a \in A|\, Y_{a_1}, \ldots, Y_{a_n}\} = P\{Y_a \in A|\, Y_{a_n}\} \quad P\text{-f.s.}$$

für Zeitpunkte $0 \leq a_1 < \cdots < a_n < a$ erfüllt ist,

$$P\{Y_{T_t} \in A|\, Y_{T_{s_1}}, \ldots, Y_{T_{s_n}}\} = P\{Y_{T_t} \in A|\, Y_{T_{s_n}}\} \quad P\text{-f.s.},$$

und somit ist $(Y_{T_t})_{t\geq 0}$ ein stationärer Zuwachsprozess. □

Grundlegend für den Beweis der analytischen Aussage in Proposition 3.7 war die kompakt-gleichmäßige Konvergenz $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$ in $t \geq 0$. In der Situation des Funktionalen Grenzwertsatzes 2.30 erhält man im Allgemeinen nur kompakt-gleichmäßige Konvergenz in $t > 0$. Daher wird nun abschließend in diesem Kapitel der Fragestellung nachgegangen, ob sich - unter Zusatzvoraussetzungen - ein Transfersatz beweisen lässt, bei dem funktionale Konvergenz $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$ für alle $t > 0$ vorausgesetzt ist.
Durch Projektion auf die Doppelnebenklassen-Hypergruppe und dortige Anwendung des Transfersatzes kann zunächst gezeigt werden:

Korollar 3.11. *Es sei K eine Hypergruppe, $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$, $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine H-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$, und es gelte $\omega_H * \nu_n = \nu_n * \omega_H$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$ sei $\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t$ für alle $t > 0$ erfüllt. Weiter sei $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(\mathbb{Z}_+)$ eine Folge, so dass $(H_{1/k_n}(\rho_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\xi \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ konvergiert. Dann folgt $\omega_H * (\nu_n)^{\rho_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_\xi$.*

Beweis. Es seien $p_H : \mathcal{M}^1_H(K) \to \mathcal{M}^1(K//H)$ und $p_H^* : \mathcal{M}^1(K//H) \to \mathcal{M}^1_H(K)$ wie im Beweis von Proposition 2.4. Analog zur dortigen Vorgehensweise setzt man für $n \in \mathbb{N}$ $\nu_{n,H} := \omega_H * \nu_n * \omega_H = \omega_H * \nu_n$, definiert dann $(\tilde{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K//H)$ und die $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe $(\tilde{\mu}_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K//H)$ durch $\tilde{\nu}_n := p_H(\nu_{n,H})$ für $n \in \mathbb{N}$ bzw. $\tilde{\mu}_t := p_H(\mu_t)$ für $t \geq 0$ und folgert

$$\tilde{\nu}_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{\mu}_t \quad \text{kompakt-gleichmäßig in } t \geq 0.$$

Anwendung von Proposition 3.7 liefert dann

$$(\tilde{\nu}_n)^{\rho_n} = \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{\nu}_n)^k \, \rho_n(\{k\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{\mu}_t \, d\xi(t) = \tilde{\mu}_\xi$$

in der Hypergruppe $K//H$. Dies impliziert aber

$$p_H^*((\tilde{\nu}_n)^{\rho_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} p_H^*(\tilde{\mu}_\xi)$$

in $\mathcal{M}^1(K)$, und wegen $p_H^*(\tilde{\mu}_\xi) = \mu_\xi$ und

$$\begin{aligned} p_H^*((\tilde{\nu}_n)^{\rho_n}) &= \omega_H \, \rho_n(\{0\}) + \sum_{k=1}^{\infty} (\nu_{n,H})^k \, \rho_n(\{k\}) \\ &= \omega_H * \sum_{k=0}^{\infty} \nu_n^k \, \rho_n(\{k\}) \\ &= \omega_H * (\nu_n)^{\rho_n} \end{aligned}$$

folgt die Behauptung. □

Setzt man kompakt-gleichmäßige Konvergenz $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$ in $t > 0$ voraus und fordert für das Grenzmaß $\xi \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ $\xi(]0,\infty[) = 1$, so lässt sich der folgende Transfersatz beweisen.

Proposition 3.12. *Sei K eine Hypergruppe, $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine H-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$. Es gelte*

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \textit{kompakt-gleichmäßig in } t > 0, \tag{3.7}$$

wobei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine Folge mit $k_n \nearrow \infty$ sei. Für $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ konvergiere $(H_{1/k_n}(\rho_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\xi \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$, und es gelte $\xi(]0,\infty[) = 1$. Dann folgt

$$(\nu_n)^{\rho_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_\xi.$$

Beweis. Wie im Beweis von Proposition 3.7 wird gezeigt, dass für eine Folge $(\delta_n) \subseteq \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$, die gegen $\xi \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ konvergiert,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \nu_n^{[k_n t]} \, d\delta_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}_+} \mu_t \, d\xi(t)$$

gilt. Dabei erfüllt das Grenzmaß ξ hier $\xi(]0,\infty[) = 1$.
Ist $f \in C^b(K)$ beliebig und definiert man dazu die Treppenfunktionen (h_n)

und die stetige und beschränkte Funktion h wie in (3.1) und (3.2), so muss also (vgl. den Beweis von Proposition 3.7)

$$\int_{\mathbb{R}_+} |h_n(t) - h(t)| \, d\delta_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3.8}$$

nachgewiesen werden.
Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existieren ein $\delta > 0$ und ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\delta_n([0,\delta[) \leq \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{für alle } n \geq n_1$$

gilt, wobei $M > 0$ mit $\|h_n - h\|_\infty \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Voraussetzung $\xi(\{0\}) = 0$ gibt es nämlich zu $\varepsilon' > 0$ zunächst ein $\delta > 0$ mit $\xi([0,\delta]) < \varepsilon'$ und dann wegen $\delta_n \to \xi$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $\delta_n([0,\delta]) < \varepsilon'$ für alle $n \geq n_1$ erfüllt ist. Da (δ_n) gleichmäßig straff ist, kann weiterhin ein $C > \delta$ gewählt werden mit

$$\delta_n(]C,\infty[) \leq \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nun folgt aus der Voraussetzung (3.7) die gleichmäßige Konvergenz von (h_n) gegen h auf kompakten Teilmengen von $]0,\infty[$ (vgl. Bemerkung 2.2) und somit die Existenz von $n_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sup_{t\in[\delta,C]} |h_n(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } n \geq n_2$$

gilt. Die für $n \geq \max(n_1, n_2)$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+} |h_n(t) - h(t)| \, d\delta_n(t) = \\
&\quad \int_{[0,\delta[} |h_n(t) - h(t)| \, d\delta_n(t) + \int_{[\delta,C]} |h_n(t) - h(t)| \, d\delta_n(t) + \\
&\quad \int_{]C,\infty[} |h_n(t) - h(t)| \, d\delta_n(t) \leq \\
&\quad M\,\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\,\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon
\end{aligned}$$

liefert (3.8). □

3.13 (Bemerkungen zu Kapitel 3). Der Transfersatz für den klassischen Fall reeller Zufallsvariablen wird in den Arbeiten [19], [20] und [21] von B.V. Gnedenko behandelt. Seine Verallgemeinerung auf den Fall lokalkompakter Gruppen, welche hier auf die Situation von Hypergruppen übertragen ist, wurde von W. Hazod in [26] bewiesen.

Kapitel 4

Geometrische Faltungen und Exponential-Mischungen

Im vorigen Kapitel wurden für $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$ und $\rho \in \mathcal{M}^1(\mathbb{Z}_+)$ bzw. eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ und $\xi \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ die Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\begin{aligned} \nu^\rho &= \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \rho(\{k\}) \quad \text{bzw.} \\ \mu_\xi &= \int_{\mathbb{R}_+} \mu_t \, d\xi(t) \end{aligned}$$

in $\mathcal{M}^1(K)$ definiert, welche als Verteilungen der entsprechenden Randomisierungen auftraten. Es werden nun auf Grundlage des Falls lokalkompakter Gruppen in [27] und [28], Abschnitt 2.13 III, Charakterisierungen von und Zusammenhänge zwischen *geometrischen Faltungen* ν^ρ, bei denen ρ eine geometrische Verteilung auf $\mathbb{Z}_+$ ist, und *Exponential-Mischungen* μ_ξ, bei denen als ξ die Exponential-Verteilung auf $\mathbb{R}_+$ gewählt wird, untersucht.

Notationen 4.1. (a) Für $0 < p < 1$ seien

$$\eta(p) := \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k \varepsilon_k$$

und

$$\xi(p) := \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k \varepsilon_{k+1}$$

geometrische Verteilungen in $\mathcal{M}^1(\mathbb{Z}_+)$.

(b) Für $\alpha > 0$ sei $E(\alpha)$ die Exponential-Verteilung mit Lebesgue-Dichte $e_\alpha(x) := \alpha e^{-\alpha x}\, 1_{[0,\infty[}(x)$ in $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ und $E := E(1)$.

(c) Für $\lambda > 0$ bezeichne

$$\pi(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\, \varepsilon_k$$

die Poisson-Verteilung mit Parameter λ in $\mathcal{M}^1(\mathbb{Z}_+)$.

Analog zum Gruppenfall definiert man:

Definition 4.2. Es sei K eine Hypergruppe und $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$.

(a) λ heißt *geometrische Faltung*, falls λ darstellbar ist als $\lambda = \nu^{\xi(p)}$, wobei $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$ und $0 < p < 1$.

(b) λ heißt *Exponential-Mischung*, falls $\lambda = \mu_E$ gilt mit einer stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$.

(c) λ heißt *geometrisch unendlich teilbar*, falls zu jedem $p \in]0,1[$ ein $\nu_{(p)} \in \mathcal{M}^1(K)$ existiert, so dass $\lambda = \nu_{(p)}^{\xi(p)}$ gilt.

Für geometrische Faltungen erhält man zunächst die folgende Charakterisierung.

Proposition 4.3. *Es sei K eine Hypergruppe und $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann erfüllt λ genau dann die Gleichung*

$$\lambda = c\rho + (1-c)\lambda * \rho = (c\varepsilon_e + (1-c)\lambda) * \rho \tag{4.1}$$

für ein $\rho \in \mathcal{M}^1(K)$ und $0 < c < 1$, wenn λ als geometrische Faltung $\lambda = \rho^{\xi(c)}$ dargestellt werden kann.

Beweis. Da $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ eine Banachalgebra mit Einselement ε_e ist, lässt sich der Beweis mit Hilfe der Neumannschen Reihe analog zum Gruppenfall in [28], Proposition 2.13.9, führen (vgl. dort auch die vorangehende Bemerkung). □

Die geometrisch unendliche Teilbarkeit kann damit wie folgt charakterisiert werden.

Korollar 4.4. *Es sei K eine Hypergruppe und $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$. λ ist geometrisch unendlich teilbar, d.h. zu jedem $0 < c < 1$ existiert ein $\rho_{(c)} \in \mathcal{M}^1(K)$, so dass $\lambda = \rho_{(c)}^{\xi(c)}$ gilt, genau dann, wenn λ die Gleichung*

$$\lambda = c\rho_{(c)} + (1-c)\lambda * \rho_{(c)} \quad \textit{für alle } 0 < c < 1$$

erfüllt.

Bemerkung 4.5. Im Kontext lokalkompakter Gruppen G können Wahrscheinlichkeitsmaße $\rho, \lambda \in \mathcal{M}^1(G)$, die darstellbar sind als Konvexkombinationen (4.1), wie folgt über ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell erzeugt werden (*Zolotarev-Problem*, vgl. [28], Abschnitt 2.13 III):
Es sei X eine G-wertige Zufallsvariable und A eine Menge mit Wahrscheinlichkeit c. Die Zufallsvariablen Y und Z seien definiert durch $Y(\omega) := e$ für $\omega \in A$ bzw. $Y(\omega) := X(\omega)$ für $\omega \in A^c$ und $Z := Y^{-1}X$. Falls A so gewählt werden kann, dass zum einen X und A und zum anderen Y und Z unabhängig sind, so gilt zunächst

$$\nu = c\varepsilon_e + (1-c)\lambda$$

und dann (4.1), wenn dabei λ, ν und ρ die Verteilungen von X, Y und Z bezeichnen.
In der Situation von Hypergruppen ergibt sich das Problem der Definition von Z. Verwendet man randomisierte Summen, so muss Z so festgelegt sein, dass $X = Y \overset{\Lambda}{+} Z$ gilt, um den gewünschten Zusammenhang der Verteilungen zu erhalten. Für Spezialfälle ist es möglich, bezüglich einer gegebenen Konkretisierung (M, μ, Φ) der Hypergruppe eine Zufallsvariable Z, die die Beziehung $\Phi(Y, Z, \Lambda) = X$ erfüllt, durch X, Y und Λ zu definieren. Dabei ist Λ eine Hilfszufallsvariable mit Verteilung μ.
Beispiele sind die Bessel-Kingman-Hypergruppen. Eine Konkretisierung der Bessel-Kingman-Hypergruppe $K = \mathbb{R}_+$ mit Parameter $\alpha > -\frac{1}{2}$ ist gegeben durch das Tripel (M, μ, Φ), wobei $M := [-1, 1]$, $\mu := g\lambda_{|[-1,1]}$ mit

$$g(z) := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)\sqrt{\pi}}(1-z^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \quad \text{für } z \in]-1, 1[$$

$(g(1) = g(-1) = 0)$ und

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [-1,1] &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \Phi(x, y, \lambda) &:= (x^2 + y^2 - 2\lambda xy)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(vgl. [10], Beispiele 7.1.2).
Analog zum Gruppenfall gilt für eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable X, eine Menge A mit Wahrscheinlichkeit c und $Y := X \cdot 1_{A^c}$ zunächst

$$\nu = c\varepsilon_0 + (1-c)\lambda,$$

sofern X und A unabhängig sind (mit den Verteilungen λ und ν von X bzw. Y). Definiert man dann Z durch

$$Z := \Lambda Y + \sqrt{\Lambda^2 Y^2 + X^2 - Y^2}$$

(wobei Λ eine Hilfszufallsvariable mit Werten in $[-1,1]$ und Verteilung μ ist), so ist Z eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable, welche

$$\Phi(Y,Z,\Lambda) = X$$

erfüllt. Im Falle der Unabhängigkeit von Y, Z und Λ ergibt sich die Beziehung

$$\lambda = (c\varepsilon_0 + (1-c)\lambda) * \rho$$

mit der Verteilung ρ von Z.

In Anlehnung an den Fall lokalkompakter Gruppen in [27] (vgl. Theorem 3.4) und [28] (vgl. Theorem 2.13.12) ist es nun das Ziel, Zusammenhänge zwischen den folgenden Aussagen herzustellen:

(1) λ ist geometrisch unendlich teilbar.

(2) λ erfüllt die Beziehung $\lambda = c\rho_{(c)} + (1-c)\lambda * \rho_{(c)}$ für alle $0 < c < 1$, wobei für jedes c $\rho_{(c)} \in \mathcal{M}^1(K)$ ist.

(3) λ ist eine Exponential-Mischung $\lambda = \mu_E$ für eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$.

Dabei sei K zunächst eine beliebige Hypergruppe und $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$.

Nach Korollar 4.4 sind die Aussagen (1) und (2) äquivalent. Die Implikation (3) $\Rightarrow$ (2) erhält man unmittelbar aus dem folgenden Lemma.

Lemma 4.6. *Es sei K eine Hypergruppe, und für $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$ gelte $\lambda = \mu_E$ mit einer stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$. Dann gilt für alle $0 < c < 1$*

$$\lambda = c\mu_{E(1/c)} + (1-c)\lambda * \mu_{E(1/c)}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt wegen

$$E(1) = cE(1/c) + (1-c)E(1) * E(1/c)$$

für $0 < c < 1$ aus den Eigenschaften der Subordinations-Abbildung $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+) \ni \rho \mapsto \mu_\rho$ (vgl. Lemma 3.6(b)). □

Für lokalkompakte Gruppen wird in [27] und [28] der Beweis der Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) nur für den Fall geführt, dass die Gruppe keine nichttrivialen kompakten Untergruppen besitzt. Er gliedert sich dabei zunächst in zwei Schritte:

1. Aussage (2) impliziert, dass λ Grenzwert einer Folge von Exponential-Mischungen $(\mu_E^{(c_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit ($\{e\}$-) stetigen Faltungshalbgruppen $(\mu_t^{(c_n)})_{t\geq 0}$ ist.

2. λ ist dann selbst Exponential-Mischung.

In Schritt 2 werden dabei Schlüsse über Resolventen der Kontraktionshalbgruppen der Klasse (C_0) der zugehörigen Faltungsoperatoren verwendet, wobei die Faltungsoperatoren als Operatoren auf $L^2(K)$ betrachtet werden (vgl. Proposition 0.15). Setzt man voraus, dass $\{e\}$ einzige kompakte Unterhypergruppe von K ist, so lassen sich die Beweismethoden übertragen, sofern die Existenz eines linken Haarmaßes gefordert wird. Darüberhinaus wird es sich zeigen, dass es durch Übergang zur Doppelnebenklassen-Hypergruppe $K//H$, wobei $H = \{x \in K : \varepsilon_x * \lambda = \lambda * \varepsilon_x = \lambda\}$, und anschließende Rückführung möglich ist, auf die Voraussetzung, dass K keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen besitzt, zu verzichten.
Daher wird beim nun folgenden Nachweis des Schritt 1 entsprechenden Zusammenhangs für Hypergruppen direkt der allgemeine Fall behandelt und gezeigt, dass (2) impliziert, dass λ Grenzwert einer Folge $(\mu_E^{(c_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von Exponential-Mischungen mit H-stetigen Faltungshalbgruppen $(\mu_t^{(c_n)})_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ ist.

Definition 4.7. Es sei H eine kompakte Unterhypergruppe einer Hypergruppe K. Für $\rho \in \mathcal{M}^1(K)$ und $p \in]0,1[$ sei

$$\rho^{\eta(p),H} := p\omega_H + \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^k \rho^k.$$

Lemma 4.8. *Es sei H eine kompakte Unterhypergruppe einer Hypergruppe K, $\rho \in \mathcal{M}^1(K)$ und $p \in]0,1[$. Es gelte $\omega_H * \rho = \rho * \omega_H = \rho$. Dann ist $\lambda = \rho^{\eta(p),H}$ darstellbar als Exponential-Mischung $\lambda = \mu_E$, wobei $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine H-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ ist.*

Beweis. Mit $\alpha := \frac{1-p}{p}$ setze

$$\mu_t := e^{-\alpha t}\omega_H + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha t}\frac{\alpha^k t^k}{k!}\rho^k \quad \text{für } t > 0$$

und $\mu_0 := \omega_H$. Dann ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine H-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$, und es gilt $\rho^{\eta(p),H} = \mu_E$, wie eine einfache Rechnung zeigt. □

Proposition 4.9. *Es sei K eine Hypergruppe und $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$. λ erfülle die Beziehung*

$$\lambda = c\rho_{(c)} + (1-c)\lambda * \rho_{(c)} \quad \text{für alle } 0 < c < 1 \tag{4.2}$$

mit $\rho_{(c)} \in \mathcal{M}^1(K)$ für jedes c. Dann ist λ Grenzwert einer Folge $(\lambda^{(c_n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\lambda^{(c_n)} = \mu_E^{(c_n)}$ Exponential-Mischung mit einer H-stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t^{(c_n)})_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ ist. Dabei ist $H := \{x \in K : \varepsilon_x * \lambda = \lambda * \varepsilon_x = \lambda\}$.

Beweis. Es sei $(c_n) \subseteq]0,1[$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. (4.2) impliziert

$$\lambda * \rho_{(c_n)} + \frac{c_n}{1-c_n}\,\rho_{(c_n)} = \frac{1}{1-c_n}\,\lambda \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und dies liefert

$$\lambda * \rho_{(c_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda. \tag{4.3}$$

Für den Fall, dass K keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen besitzt, sieht man die Behauptung dann wie folgt ein (vgl. den Beweis von Theorem 2.13.12 in [28], Schritt 1 und Schritt 2, für den Gruppenfall):

- Aus (4.3) folgt, dass $\rho = \varepsilon_e$ einziger Häufungspunkt der relativ kompakten Folge $(\rho_{(c_n)})$ ist (mit dem Theorem über Shift-Kompaktheit, vgl. [9], Theorem 1, oder [10], Theorem 5.1.4, und der Voraussetzung), also gilt $\rho_{(c_n)} \to \varepsilon_e$.
- Wegen $\lambda = \rho_{(c_n)}^{\xi(c_n)}$ (nach Proposition 4.3) und $\rho_{(c_n)}^{\xi(c_n)} = \rho_{(c_n)} * \rho_{(c_n)}^{\eta(c_n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erhält man dann $\rho_{(c_n)}^{\eta(c_n)} \to \lambda$.
- Lemma 4.8 (mit $H = \{e\}$) liefert die Behauptung.

Für den allgemeinen Fall lassen sich die Schritte auf folgende Weise übertragen:

- Setzt man $\rho_{(c_n),H} := \omega_H * \rho_{(c_n)} * \omega_H$ für $n \in \mathbb{N}$, so erhält man wegen $\omega_H * \lambda = \lambda * \omega_H = \lambda$ und $\rho_{(c_n)} * \lambda = \lambda * \rho_{(c_n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (beachte $\lambda = \rho_{(c_n)}^{\xi(c_n)}$) aus (4.3)

  $$\rho_{(c_n),H} * \lambda = \lambda * \rho_{(c_n),H} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda.$$

  Für einen Häufungspunkt ρ der nach dem Theorem über Shift-Kompaktheit relativ kompakten Folge $(\rho_{(c_n),H})$ folgt dann $\omega_H * \rho = \rho * \omega_H = \rho$ sowie $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq H$ aufgrund von $\rho * \lambda = \lambda * \rho = \lambda$. Dies liefert $\rho = \omega_H$, also gilt

  $$\rho_{(c_n),H} \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega_H.$$

- Faltet man (4.2) (wobei $c = c_n$) von rechts und links mit ω_H, so folgt zunächst
$$\lambda = c_n \rho_{(c_n),H} + (1 - c_n)\lambda * \rho_{(c_n),H}$$
und dann mit Proposition 4.3
$$\lambda = (\rho_{(c_n),H})^{\xi(c_n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
Wegen
$$(\rho_{(c_n),H})^{\xi(c_n)} = \rho_{(c_n),H} * (\rho_{(c_n),H})^{\eta(c_n),H}$$
(beachte Definition 4.7) gilt also
$$\lambda = \rho_{(c_n),H} * (\rho_{(c_n),H})^{\eta(c_n),H} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
Für einen Häufungspunkt δ von $((\rho_{(c_n),H})^{\eta(c_n),H})$ sind $\omega_H * \delta = \delta$ sowie $\omega_H * \delta = \lambda$ erfüllt, somit folgt
$$(\rho_{(c_n),H})^{\eta(c_n),H} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda.$$
- Lemma 4.8 liefert die Behauptung.

□

Die zu Schritt 2 analoge Aussage für Hypergruppen wird zunächst für den Fall formuliert und bewiesen, dass $\{e\}$ einzige kompakte Unterhypergruppe ist. Wie bereits erwähnt, ist es möglich, die Beweisstruktur aus [28] (vgl. den Beweis der Implikation $(b) \Rightarrow (c)$, Schritt 3-5, in Theorem 2.13.12) zu übernehmen, wenn zusätzlich die Existenz eines linken Haarmaßes vorausgesetzt wird.

Proposition 4.10. *Es sei K eine Hypergruppe mit linkem Haarmaß ω_K. K besitze keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen. Es gelte $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in \mathcal{M}^1(K)$, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n = \mu_E^{(n)}$ Exponential-Mischung mit der ($\{e\}$-) stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t^{(n)})_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ ist. Dann existiert eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$, so dass $\lambda = \mu_E$ gilt.*

Der Beweis der Proposition erfolgt in mehreren Schritten, deren Inhalte jeweils als Lemma formuliert werden.
Im Folgenden sei dabei stets K eine Hypergruppe, die keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen besitzt, mit linkem Haarmaß ω_K.

Lemma 4.11. *Ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$, so ist die Familie $(T_t)_{t\geq 0} \subseteq L(L^2(K))$ eine Kontraktionshalbgruppe der Klasse (C_0), wobei für $t \geq 0$ $T_t := R_{\mu_t}$ den Faltungsoperator $f \mapsto \mu_t * f$ auf $L^2(K)$ bezeichne.*

Für die Aussage von Lemma 4.11 vgl. Proposition 0.15.

Notationen 4.12. Für die Kontraktionshalbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ bezeichne A den zugehörigen infinitesimalen Generator und $R(\alpha) := R(\alpha, A) \in L(L^2(K))$, $\alpha > 0$, die Resolventen (vgl. Definition 0.16 und Satz 0.17(b)).
Für $\mu \in \mathcal{M}_+^b(K)$ sei im Weiteren stets R_μ der Faltungsoperator auf $L^2(K)$.

Lemma 4.13. *Ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ und $\lambda = \mu_E$ Exponential-Mischung, so gilt $R_\lambda = R(1)$, d.h. der Faltungsoperator von λ ist Resolvente des infinitesimalen Generators der zugehörigen Kontraktionshalbgruppe der Klasse (C_0) der Faltungsoperatoren.*

Beweis. Für $f \in C_c(K)$ und $x \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
(\lambda * f)(x) &= \int_K f(y^- * x)\, d\mu_E(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_K f(y^- * x)\, d\mu_t(y)\, dE(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} (\mu_t * f)(x)\, dE(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} (\mu_t * f)(x)\, dt,
\end{aligned}$$

und mit der Integraldarstellung der Resolventen (vgl. Satz 0.17(b)) folgt die Behauptung. □

Lemma 4.14. *Es sei $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$. Dann existiert zu jedem $\alpha > 0$ ein Maß $\lambda(\alpha) \in \mathcal{M}_+^b(K)$ mit $\|\lambda(\alpha)\| = \frac{1}{\alpha}$, so dass $R(\alpha)$ der Faltungsoperator von $\lambda(\alpha)$ ist.*

Beweis. Setzt man für $\alpha > 0$ $\lambda(\alpha) := \frac{1}{\alpha}\, \mu_{E(\alpha)}$, so erhält man die Behauptung ebenfalls über die Integraldarstellung der Resolventen, denn für $f \in C_c(K)$ und $x \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
(\lambda(\alpha) * f)(x) &= \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}_+} \int_K f(y^- * x)\, d\mu_t(y)\, dE(\alpha)(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} (\mu_t * f)(x)\, dt.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.15. Gelten die Voraussetzungen von Proposition 4.10, so seien für $n \in \mathbb{N}$ $R_n(\alpha) = R_n(\alpha, A_n)$, $\alpha > 0$, Resolventen des infinitesimalen Generators A_n der zu $(\mu_t^{(n)})_{t\geq 0}$ gehörigen Kontraktionshalbgruppe der Faltungsoperatoren auf $L^2(K)$, und $(\lambda_n(\alpha))_{\alpha>0}$ bezeichne die Familie von Maßen aus Lemma 4.14, d.h. $R_n(\alpha) = R_{\lambda_n(\alpha)}$ für $\alpha > 0$, wobei $\|\lambda_n(\alpha)\| = \frac{1}{\alpha}$.

Lemma 4.16. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition 4.10. Dann konvergiert für jedes* $\alpha > 0 \quad (R_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ *in der starken Operatortopologie gegen ein* $Q(\alpha) \in L(L^2(K))$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man aus der Resolventengleichung (vgl. z.B. [55], Kapitel VIII, Abschnitt 2, Theorem 2)

$$R_n(\alpha_0) = (I - (\alpha_0 - \alpha)R_n(\alpha_0))R_n(\alpha) \tag{4.4}$$

für $\alpha, \alpha_0 > 0$. Ist $|\alpha - \alpha_0| < \alpha_0$, so gilt

$$\|(\alpha_0 - \alpha)R_n(\alpha_0)\| = |\alpha_0 - \alpha| \, \|R_{\lambda_n(\alpha_0)}\| \leq |\alpha_0 - \alpha| \, \frac{1}{\alpha_0} < 1,$$

und mit der Neumannschen Reihe (vgl. z.B. [41], Lemma 17.2) und (4.4) folgt die Darstellung

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_0 - \alpha)^k (R_n(\alpha_0))^{k+1} \quad \text{für } |\alpha - \alpha_0| < \alpha_0. \tag{4.5}$$

Speziell mit $\alpha_0 = 1$ gilt somit

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k (R_n(1))^{k+1} \quad \text{für } 0 < \alpha < 2.$$

Nun liefert die Voraussetzung $\lambda_n \to \lambda$ mit Lemma 4.13

$$R_n(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} R_\lambda \quad \text{in der starken Operatortopologie,}$$

also

$$(R_n(1))^k \xrightarrow[n\to\infty]{} (R_\lambda)^k \quad \text{in der starken Operatortopologie} \tag{4.6}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
Für $0 < \alpha < 2$ ist

$$Q(\alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k (R_\lambda)^{k+1} \in L(L^2(K))$$

(Neumannsche Reihe), und da

$$\left\| \sum_k (1 - \alpha)^k (R_n(1))^{k+1} \right\| \leq \sum_k |1 - \alpha|^k$$

folgt mit (4.6)

$$R_n(\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} Q(\alpha) \quad \text{in der starken Operatortopologie.} \tag{4.7}$$

Um die Behauptung für alle $\alpha > 0$ zu erhalten, vergrößert man in (4.5) schrittweise den Entwicklungspunkt ($\alpha_0 = \frac{3}{2}, \dots$) und wiederholt das Verfahren, wobei zu beachten ist, dass wegen $\|R_n(\frac{3}{2})\| \leq \frac{2}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (4.7) $\|Q(\frac{3}{2})\| \leq \frac{2}{3}$ ist. □

Lemma 4.17. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition 4.10. Dann ist die Familie $(Q(\alpha))_{\alpha>0} \subseteq L(L^2(K))$ aus Lemma 4.16 eine Pseudo-Resolvente, d.h. die Resolventengleichung ist erfüllt (vgl. die Definition in [55], Kapitel VIII, Abschnitt 4).*

Beweis. Seien $\alpha, \beta > 0$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Resolventengleichung

$$R_n(\alpha) - R_n(\beta) = (\beta - \alpha) R_n(\alpha) R_n(\beta)$$

erfüllt. Da für $f \in L^2(K)$

$$\begin{aligned}
&\|R_n(\alpha)R_n(\beta)f - Q(\alpha)Q(\beta)f\|_2 \\
&\quad \leq \|R_n(\alpha)R_n(\beta)f - R_n(\alpha)Q(\beta)f\|_2 + \|R_n(\alpha)Q(\beta)f - Q(\alpha)Q(\beta)f\|_2 \\
&\quad \leq \frac{1}{\alpha}\|R_n(\beta)f - Q(\beta)f\|_2 + \|R_n(\alpha)Q(\beta)f - Q(\alpha)Q(\beta)f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

folgt die Gültigkeit von

$$Q(\alpha) - Q(\beta) = (\beta - \alpha) Q(\alpha) Q(\beta).$$

□

Lemma 4.18. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition 4.10. Dann existiert eine Familie von Maßen $(\lambda(\alpha))_{\alpha>0} \subseteq \mathcal{M}^b_+(K)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) $\lambda(1) = \lambda$.

(2) $\|\lambda(\alpha)\| \leq \frac{1}{\alpha}$ *für alle* $\alpha > 0$.

(3) Für $\alpha > 0$ *ist* $Q(\alpha) = R_{\lambda(\alpha)}$ *der Faltungsoperator von* $\lambda(\alpha)$.

Dabei ist $(Q(\alpha))_{\alpha>0}$ die Familie von Operatoren aus Lemma 4.16 und Lemma 4.17.

Beweis. Es seien $\lambda_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, die Maße aus Lemma 4.14 bzw. Bemerkung 4.15. Ist $\alpha > 0$ fest, so besitzt wegen $\|\lambda_n(\alpha)\| = \frac{1}{\alpha}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(\lambda_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ einen vagen Häufungspunkt $\delta \in \mathcal{M}_+^b(K)$ mit $\|\delta\| \leq \frac{1}{\alpha}$,

$$\lambda_{n_k}(\alpha) \xrightarrow[k\to\infty]{} \delta \quad \text{vag.} \tag{4.8}$$

Nach Lemma 2.16 konvergiert dann $(R_{\lambda_{n_k}(\alpha)})$ gegen R_δ in der schwachen Operatortopologie, und mit $R_{\lambda_n(\alpha)} \to Q(\alpha)$ in der starken Operatortopologie folgt $R_\delta = Q(\alpha)$. Also ist $\lambda(\alpha) := \delta$ der einzige vage Häufungspunkt von $(\lambda_n(\alpha))$, d.h. $(\lambda_n(\alpha))$ konvergiert gegen $\lambda(\alpha)$ vag, und es gilt $Q(\alpha) = R_{\lambda(\alpha)}$. □

Es folgen nun die entscheidenden Schritte im Beweis von Proposition 4.10, in denen gezeigt wird, dass $Q(\alpha)$ für $\alpha > 0$ Resolvente des infinitesimalen Generators einer zu einer stetigen Faltungshalbgruppe gehörigen Kontraktionshalbgruppe der Klasse (C_0) von Faltungsoperatoren ist. Dazu werden im Folgenden Aussagen aus [55] und [36] verwendet.

Bemerkung 4.19. Nach [55], Kapitel VIII, Abschnitt 4, besitzt die Pseudo-Resolvente $(Q(\alpha))_{\alpha>0} \subseteq L(L^2(K))$ (vgl. Lemma 4.17) die Eigenschaften:

(1) Für $\alpha, \beta > 0$ gelten $N(Q(\alpha)) = N(Q(\beta))$ und $R(Q(\alpha)) = R(Q(\beta))$, wobei N und R Kern bzw. Bild eines linearen Operators bezeichnen. Es seien $\mathcal{N} := N(Q(\alpha))$ und $\mathcal{R} := R(Q(\alpha))$.

(2) Gilt $\mathcal{N} = \{0\}$, so ist für jedes $\alpha > 0$ $Q(\alpha)$ Resolvente eines linearen Operators B (mit Definitionsbereich $D(B) = \mathcal{R}$).

Der nächste Schritt besteht nun also darin, $\mathcal{N} = \{0\}$ nachzuweisen.

Lemma 4.20. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition 4.10.* $(Q(\alpha))_{\alpha>0}$ *sei die Pseudo-Resolvente aus Lemma 4.16 und Lemma 4.17. Dann ist* $\mathcal{N} = \{0\}$.

Beweis. Da $L^2(K)$ ein reflexiver Banachraum ist und somit die Voraussetzung in Korollar 1' erfüllt, gilt nach Lemma 1' und Korollar 1' in [55], Kapitel VIII, Abschnitt 4,

$$\overline{\mathcal{R}} = \{f \in L^2(K) : \lim_{\alpha\to\infty} \alpha Q(\alpha) f = f\}$$

sowie

$$L^2(K) = \mathcal{N} \oplus \overline{\mathcal{R}}.$$

Dabei ist die geforderte gleichgradige Stetigkeit wegen

$$\|\alpha Q(\alpha)\| = \alpha \|R_{\lambda(\alpha)}\| \leq 1 \quad \text{für alle } \alpha > 0,$$

wobei $(\lambda(\alpha))_{\alpha>0}$ die Maße aus Lemma 4.18 sind, gegeben.
Bezeichnet $P : L^2(K) \to L^2(K)$ die Projektion auf $\overline{\mathcal{R}}$ längs $\mathcal{N}$, so gilt also

$$\alpha Q(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} P \tag{4.9}$$

in der starken Operatortopologie. Im Folgenden wird gezeigt, dass P die Identität ist. Dann folgt $\mathcal{N} = \{0\}$ und somit die Behauptung. Aufgrund von $(\alpha\lambda(\alpha))_{\alpha>0} \subseteq \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ und der vagen Kompaktheit von $\mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ existiert eine Folge $(\alpha_n\lambda(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\alpha_n \to \infty$ und

$$\alpha_n\lambda(\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} p \in \mathcal{M}_+^{(1)}(K) \quad \text{vag.}$$

Wegen

$$R_{\alpha_n\lambda(\alpha_n)} = \alpha_n R_{\lambda(\alpha_n)} = \alpha_n Q(\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P$$

in der starken Operatortopologie folgt dann mit Lemma 2.16 $P = R_p$.
Es gilt $P \neq 0$, denn ist $P = 0$, so ist $\mathcal{N} = L^2(K)$, und aufgrund von $\mathcal{N} = N(Q(1))$ und $Q(1) = R_\lambda$ mit $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$ führt dies zu einem Widerspruch. Wegen $p \in \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ und $P = R_p$ ist P stetig mit $\|P\| \leq 1$, und $P^2 = P \neq 0$ impliziert dann $\|P\| = 1$. Folglich ist p ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Da p wegen $R_{p*p} = R_p$ ein Idempotent ist und K nach Voraussetzung keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen besitzt, folgt $p = \varepsilon_e$ und dann $P = I$. □

Das folgende Lemma vervollständigt den Beweis von Proposition 4.10.

Lemma 4.21. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition 4.10. Dann existiert eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$, so dass $Q(\alpha)$, $\alpha > 0$, Resolvente des infinitesimalen Generators der zugehörigen Kontraktionshalbgruppe der Klasse (C_0) der Faltungsoperatoren ist. Weiterhin gilt $\lambda = \mu_E$.*

Beweis. Nach Lemma 4.20 und Bemerkung 4.19(2) existiert ein linearer Operator B von $L^2(K)$ nach $L^2(K)$ mit $D(B) = \mathcal{R}$, so dass für $\alpha > 0$

$$(\alpha I - B)^{-1} = Q(\alpha)$$

gilt. Da $(\alpha I - B)^{-1}$ insbesondere auf ganz $L^2(K)$ definiert ist, ist B ein abgeschlossener Operator (vgl. dazu die Definition in [36], Kapitel III, Abschnitt 5.2). Weiterhin ist wegen $\mathcal{N} = \{0\}$ und $L^2(K) = \mathcal{N} \oplus \overline{\mathcal{R}}$ $D(B)$ dicht in $L^2(K)$, und für $\alpha > 0$ gilt

$$\|(\alpha I - B)^{-1}\| = \|Q(\alpha)\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

In [36], Kapitel IX, Abschnitte 1.2 und 1.3, wird gezeigt, dass für jedes $t \geq 0$

$$T_t := \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n} B\right)^{-n}$$

in der starken Operatortopologie existiert und dann $(T_t)_{t\geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe der Klasse (C_0) mit infinitesimalem Generator B ist. Ist $t > 0$, so ist wegen

$$\begin{aligned}\left(I - \frac{t}{n} B\right)^{-n} &= \left(\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} I - B\right)^{-1}\right)^{n} \\ &= \left(\frac{n}{t} Q\left(\frac{n}{t}\right)\right)^{n} \\ &= \left(R_{\frac{n}{t}\lambda(\frac{n}{t})}\right)^{n} \\ &= R_{(\frac{n}{t}\lambda(\frac{n}{t}))^{n}}\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ T_t Limes einer Folge von Faltungsoperatoren $(R_{\nu_n^{(t)}})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\nu_n^{(t)} := (\frac{n}{t}\lambda(\frac{n}{t}))^n$.
Da $\|\nu_n^{(t)}\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt, dass $(\nu_n^{(t)})_{n\in\mathbb{N}}$ vag gegen ein $\mu_t \in \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ konvergiert und $T_t = R_{\mu_t}$ gilt (vgl. Lemma 2.16). Aufgrund der Eigenschaften einer Kontraktionshalbgruppe der Klasse (C_0) ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ (mit $\mu_0 = \varepsilon_e$) eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^{(1)}(K)$, deren Stetigkeit sich aus (3) in Proposition 0.15 und Bemerkung 5.2.6 in [10] ergibt. Für $\mu_E = \int_{\mathbb{R}_+} \mu_t \, dE(t)$ erhält man aus $R_\lambda = Q(1)$ und $R_{\mu_E} = Q(1)$ (Integraldarstellung der Resolventen) $R_{\mu_E} = R_\lambda$, also $\mu_E = \lambda$, und wegen $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$ ist dann $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$.
Zunächst folgt nämlich aus den Eigenschaften einer stetigen Faltungshalbgruppe $\mu_t(K) = e^{-\alpha t}$ für alle $t \geq 0$ mit einem $\alpha > 0$, und

$$1 = \mu_E(K) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} e^{-\alpha t} \, dt$$

liefert dann $\alpha = 0$. □

Grundlegend für die Durchführbarkeit der einzelnen Beweisschritte von Proposition 4.10 in dieser Form ist zunächst die Eigenschaft, dass es sich bei den Familien von Faltungsoperatoren um Kontraktionshalbgruppen der Klasse (C_0) handelt, welche dadurch gegeben ist, dass die Faltungshalbgruppen stetig, also $\{e\}$-stetig, sind.
Darüberhinaus wird die Voraussetzung, dass K keine nichttrivialen kompakten Unterhypergruppen besitzt, lediglich an der Stelle im Beweis von Lemma 4.20 benötigt, an der nachgewiesen wird, dass die Projektion die Identität ist.

Verzichtet man nun auf diese Forderung und setzt voraus, dass $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$ Grenzwert einer Folge von Exponential-Mischungen $(\mu_E^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit H-stetigen Faltungshalbgruppen $(\mu_t^{(n)})_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ ist, wobei $H = \{x \in K : \varepsilon_x * \lambda = \lambda * \varepsilon_x = \lambda\}$, so erhält man in der Doppelnebenklassen-Hypergruppe $K//H$ eine konvergente Folge von Exponential-Mischungen $\{e\}$-stetiger Faltungshalbgruppen, und es können zunächst analoge Schlüsse über die Resolventen in $L^2(K//H)$ gezogen werden. Wie sich zeigen wird, ist es möglich, den oben erwähnten Schritt im Beweis von Lemma 4.20 auch in dieser Situation durchzuführen. Nach Rückführung auf die ursprüngliche Hypergruppe K erhält man dann die folgende allgemeinere Aussage.

Proposition 4.22. *Es sei K eine Hypergruppe mit linkem Haarmaß ω_K. Es gelte $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in \mathcal{M}^1(K)$, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n = \mu_E^{(n)}$ Exponential-Mischung mit einer H-stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t^{(n)})_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ ist, $H := \{x \in K : \varepsilon_x * \lambda = \lambda * \varepsilon_x = \lambda\}$. Dann existiert eine H-stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$, so dass $\lambda = \mu_E$ gilt.*

Beweis. Es seien $p_H : \mathcal{M}_H^1(K) \to \mathcal{M}^1(K//H)$ und $p_H^* : \mathcal{M}^1(K//H) \to \mathcal{M}_H^1(K)$ wie im Beweis von Proposition 2.4. Ist $n \in \mathbb{N}$, und setzt man für $t \geq 0$ $\tilde{\mu}_t^{(n)} := p_H(\mu_t^{(n)}) \in \mathcal{M}^1(K//H)$, so ist $(\tilde{\mu}_t^{(n)})_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K//H)$, und für die zugehörige Exponential-Mischung

$$\tilde{\mu}_E^{(n)} = \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{\mu}_t^{(n)}\, dE(t)$$

gilt $\tilde{\mu}_E^{(n)} = p_H(\mu_E^{(n)})$. Daher folgt nach Voraussetzung

$$\tilde{\mu}_E^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} p_H(\lambda) =: \delta$$

in $\mathcal{M}^1(K//H)$. Da die Faltungshalbgruppen $\{e\}$-stetig sind, sind die zugehörigen Familien der Faltungsoperatoren auf $L^2(K//H)$ Kontraktionshalbgruppen der Klasse (C_0). Die Existenz eines linken Haarmaßes in $K//H$ folgt dabei aus Theorem 1.5.20(v) in [10]. Zur Vereinfachung der Notation sei im Folgenden $M := K//H$, und für $\alpha > 0$ seien die Resolventen der infinitesimalen Generatoren wieder mit $R_n(\alpha)$ bezeichnet.

Wie in den einzelnen Beweisschritten von Proposition 4.10 folgt dann die Konvergenz von $(R_n(\alpha))$ gegen ein $Q(\alpha) \in L(L^2(M))$ für jedes $\alpha > 0$, wobei $(Q(\alpha))_{\alpha>0}$ eine Pseudo-Resolvente ist, und die Existenz von Maßen $(\delta(\alpha))_{\alpha>0} \subseteq \mathcal{M}_+^b(M)$ mit den Eigenschaften $\|\delta(\alpha)\| \leq \frac{1}{\alpha}$ und $Q(\alpha) = R_{\delta(\alpha)}$ für alle $\alpha > 0$, $\delta(1) = \delta$. Weiterhin gilt mit $\mathcal{N} := N(Q(\alpha))$ und $\mathcal{R} := R(Q(\alpha))$

$$\overline{\mathcal{R}} = \{f \in L^2(M) : \lim_{\alpha\to\infty} \alpha Q(\alpha) f = f\}$$

und

$$L^2(M) = \mathcal{N} \oplus \overline{\mathcal{R}}.$$

Bezeichnet wieder $P : L^2(M) \to L^2(M)$ die Projektion auf $\overline{\mathcal{R}}$ längs $\mathcal{N}$, so folgt wie im Beweis von Lemma 4.20 für einen vagen Häufungspunkt

$$\mathcal{M}_+^{(1)}(M) \ni p = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \delta(\alpha_n) \quad \text{(vag)}$$

$P = R_p$ und $p \in \mathcal{M}^1(M)$, also ist p ein idempotentes Wahrscheinlichkeitsmaß.
Ist nun $\alpha = 1$, so gilt für $f \in L^2(M)$ einerseits

$$\begin{aligned} R_\delta f &= R_\delta(I-P)f + R_\delta P f \\ &= Q(1)(I-P)f + R_\delta P f \\ &= R_\delta P f = R_{\delta * p} f, \end{aligned}$$

da $(I-P)f \in N(P) = \mathcal{N} = N(Q(1))$, und andererseits

$$R_\delta f = (I-P)R_\delta f + P R_\delta f = P R_\delta f = R_{p*\delta} f$$

aufgrund von $(I-P)R_\delta f = R_\delta f - PQ(1)f = R_\delta f - Q(1)f = 0$.
Dies impliziert

$$\delta * p = p * \delta = \delta.$$

Setzt man $\nu := p_H^*(p) \in \mathcal{M}_H^1(K)$, so ist ν idempotent, d.h. es ist $\nu = \omega_C$ mit einer kompakten Unterhypergruppe $C \subseteq K$, und es gilt

$$\lambda * \nu = \nu * \lambda = \lambda. \tag{4.10}$$

Wegen $\nu \in \mathcal{M}_H^1(K)$ gilt $\omega_C * \omega_H = \omega_C$, woraus $H \subseteq C$ folgt, und (4.10) liefert $C \subseteq H$. Somit ist $p = p_H(\omega_H) = \varepsilon_{HeH}$ und $P = R_p$ die Identität. Es gilt also $\mathcal{N} = \{0\}$, und wie im Beweis von Lemma 4.21 kann mit Bemerkung 4.19(2) gezeigt werden, dass eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe $(\tilde{\mu}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(M)$ existiert, so dass $\delta = \tilde{\mu}_E$ ist. Mit $\mu_t := p_H^*(\tilde{\mu}_t)$ für $t \geq 0$ ist dann $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine H-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$, und es gilt $\lambda = p_H^*(\tilde{\mu}_E) = \mu_E$. □

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass sich für den Fall $H = \{e\}$ aus Proposition 4.22 unmittelbar die folgende Verallgemeinerung von Proposition 4.10 ergibt.

Korollar 4.23. *Es sei K eine Hypergruppe mit linkem Haarmaß. Es gelte $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in \mathcal{M}^1(K)$, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n = \mu_E^{(n)}$ Exponential-Mischung mit einer $\{e\}$-stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t^{(n)})_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ ist. Ist $H = \{x \in K : \varepsilon_x * \lambda = \lambda * \varepsilon_x = \lambda\} = \{e\}$, so ist $\lambda = \mu_E$ Exponential-Mischung mit einer $\{e\}$-stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$.*

Die Kombination der Aussagen aus Proposition 4.9 und Proposition 4.22 liefert nun das folgende Resultat, welches insbesondere den entsprechenden Zusammenhang für lokalkompakte Gruppen in [28] (Theorem 2.13.12) und [27] (Theorem 3.4) verallgemeinert.

Satz 4.24. *Es sei K eine Hypergruppe mit linkem Haarmaß. $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$ erfülle die Beziehung $\lambda = c\rho_{(c)} + (1-c)\lambda * \rho_{(c)}$ für alle $0 < c < 1$, wobei $\rho_{(c)} \in \mathcal{M}^1(K)$. Dann ist λ darstellbar als Exponential-Mischung $\lambda = \mu_E$ mit einer H-stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$. Dabei ist $H = \{x \in K : \varepsilon_x * \lambda = \lambda * \varepsilon_x = \lambda\}$.*

Insgesamt ergeben sich damit (vgl. Korollar 4.4 und Lemma 4.6) die Charakterisierungen:

Satz 4.25. *Es sei K eine Hypergruppe mit linkem Haarmaß. Für $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$ sind dann äquivalent:*

(1) λ ist geometrisch unendlich teilbar.

(2) λ erfüllt die Beziehung $\lambda = c\rho_{(c)} + (1-c)\lambda * \rho_{(c)}$ für alle $0 < c < 1$, wobei $\rho_{(c)} \in \mathcal{M}^1(K)$ ist.

(3) λ ist eine Exponential-Mischung $\lambda = \mu_E$ mit einer stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$.

Bemerkung 4.26. Ist K eine kommutative Hypergruppe, so lässt sich die Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) unter Verwendung von Fouriertransformierten wie folgt beweisen. Dabei wird zunächst der erste Schritt aus Proposition 4.9 übernommen.
Für eine Folge $(c_n) \subseteq]0,1[$ mit $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ gilt

$$\lambda = c_n\rho_{(c_n)} + (1-c_n)\lambda * \rho_{(c_n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und mit $\rho_{(c_n),H} = \omega_H * \rho_{(c_n)} * \omega_H$ für $n \in \mathbb{N}$ (dabei ist wieder $H = \{x \in K : \varepsilon_x * \lambda = \lambda * \varepsilon_x = \lambda\}$) erhält man gemäß Proposition 4.9 $\rho_{(c_n),H} \to \omega_H$ und $\lambda_n \to \lambda$, wobei $\lambda_n = (\rho_{(c_n),H})^{\eta(c_n),H} = \mu_E^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, Exponential-Mischung mit einer H-stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t^{(n)})_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ ist.
Nach einer Version der Schoenberg-Beziehung für H-stetige Faltungshalbgruppen (vgl. Theorem 3.7 in [8] und Theorem 5.2.18 in [10]) existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte Funktion $\Psi_n \in C(\Lambda)$, so dass $\Psi_n(1_K) \geq 0$ und

$$(\mu_t^{(n)})^\wedge(\chi) = \begin{cases} \exp(-t\Psi_n(\chi)) & , \quad \chi \in \Lambda \\ 0 & , \quad \chi \notin \Lambda \end{cases}$$

für alle $t \geq 0$ gilt. Dabei ist $\Lambda := A(\hat{K}, H) := \{\chi \in \hat{K} : \chi(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in H\}$ unabhängig von n. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\chi \in \Lambda$ gilt dann

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_n(\chi) &= (\mu_E^{(n)})^\wedge(\chi) = \int_K \bar{\chi}\, d\mu_E^{(n)} = \int_{\mathbb{R}_+} \int_K \bar{\chi}\, d\mu_t^{(n)}\, dE(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} e^{-t\Psi_n(\chi)}\, dt = \frac{1}{1+\Psi_n(\chi)},\end{aligned}$$

da wegen $\exp(-\Psi_n(\chi)) = (\mu_1^{(n)})^\wedge(\chi)$ mit $\mu_1^{(n)} \in \mathcal{M}^1(K) \quad \mathrm{Re}(\Psi_n(\chi)) \geq 0$ erfüllt ist. Dies liefert

$$\Psi_n(\chi) = \frac{1-\hat{\lambda}_n(\chi)}{\hat{\lambda}_n(\chi)},$$

woraus mit $\lambda_n \to \lambda$

$$\Psi_n(\chi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1-\hat{\lambda}(\chi)}{\hat{\lambda}(\chi)} =: \Psi(\chi) \quad \text{für alle } \chi \in \Lambda$$

folgt. Hier ist zu beachten, dass die Voraussetzungen für $\chi \in \Lambda$ wegen $\hat{\omega}_H(\chi) = 1 \quad \hat{\lambda}(\chi) \neq 0$ implizieren.
Ist nun $t \geq 0$ fest, so konvergiert $((\mu_t^{(n)})^\wedge)$ punktweise gegen f_t, wobei

$$f_t(\chi) := \begin{cases} \exp(-t\Psi(\chi)) & , \quad \chi \in \Lambda \\ 0 & , \quad \chi \notin \Lambda \end{cases}.$$

Nach dem Stetigkeitssatz von Lévy (vgl. Satz 0.26(b)) existiert ein eindeutig bestimmtes $\mu_t \in \mathcal{M}_+^{(1)}(K)$, so dass $(\mu_t^{(n)})$ vag gegen μ_t konvergiert, und es gilt $f_t = \hat{\mu}_t \quad \pi_K$-lokal fast überall. Da Ψ stetig auf Λ und Λ offen und abgeschlossen in $\hat{K}$ ist (vgl. Proposition 2.2.45 in [10]), ist f_t stetig, woraus $f_t = \hat{\mu}_t$ auf $\mathrm{supp}(\pi_K)$ folgt. Mit Theorem 5.2.18(b) in [10] erhält man dann, dass $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine H-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^{(1)}(K)$ ist, und aufgrund von

$$\hat{\mu}_E(\chi) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} e^{-t\Psi(\chi)}\, dt = \frac{1}{1+\Psi(\chi)} = \hat{\lambda}(\chi)$$

für $\chi \in \mathrm{supp}(\pi_K) \cap \Lambda$ folgt $\lambda = \mu_E$. Da λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine H-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$.

4.27 (Bemerkungen zu Kapitel 4). Geometrisch unendlich teilbare Wahrscheinlichkeitsmaße bzw. Zufallsvariablen wurden in [38] für den reellen Fall eingeführt. Die Satz 4.25 entsprechende Aussage ist dort mittels Fouriertransformierter bewiesen, wobei die Eigenschaft, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß

$\lambda \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ genau dann geometrisch unendlich teilbar ist, wenn λ darstellbar ist als Exponential-Mischung mit einer stetigen Faltungshalbgruppe, sich unmittelbar aus Theorem 2 in [38] ergibt. Zusammengefasst sind die Resultate auch in [29]. W. Hazod verallgemeinerte diese dann in [27] auf die in diesem Kapitel angesprochene Weise auf lokalkompakte Gruppen.

Kapitel 5

Semistabilität

Ist ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine Folge mit $k_n \nearrow \infty$ und $k_{n+1}/k_n \to \alpha > 1$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so sind die möglichen Limiten μ von $(H_{c_n}(\nu)^{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, wobei für $c > 0$ $H_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Homothetie $x \mapsto cx$ sei, charakterisiert als die *(strikt) semistabilen Maße*, d.h. es gilt

$$H_{\alpha^{\frac{1}{\kappa}}}(\mu) = \mu^\alpha \tag{5.1}$$

mit einem Index $\kappa \in]0, 2]$ und der eindeutig bestimmten stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu^t)_{t\geq 0}$ mit $\mu^1 = \mu$. Entsprechende Zusammenhänge besitzen auch im $\mathbb{R}^d$ Gültigkeit (vgl. [40], Abschnitt 7.4).
Bei der Festlegung eines Konzepts der Semistabilität im Fall lokalkompakter Gruppen übernehmen Automorphismen in G die Rollen der Homothetien. Die Semistabilität ist dann definiert als Eigenschaft einer Faltungshalbgruppe, und zwar heißt eine ($\{e\}$-) stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(G)$ *(strikt) semistabil*, falls $b \in \mathrm{Aut}(G)$ und $\alpha \in]0, 1[$ existieren, so dass

$$b(\mu_t) = \mu_{\alpha t}$$

für alle $t \geq 0$ erfüllt ist (vgl. Definition 2.3.5 in [28]). Über sie sollen funktionale Limiten charakterisiert werden, wobei im Allgemeinen aufgrund der nicht geklärten Frage der eindeutigen Einbettbarkeit in Verbindung mit der Gültigkeit eines Funktionalen Grenzwertsatzes zwischen solchen und Grenzwerten als einzelnen Wahrscheinlichkeitsmaßen zu unterscheiden ist. Für den Fall einfach zusammenhängender nilpotenter Liegruppen wird in Abschnitt 2.6 in [28] unter Vollheitsvoraussetzungen der Zusammenhang von semistabilen Faltungshalbgruppen mit funktionalen Grenzwerten der Form

$$a_n \nu^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t, \quad t \geq 0, \tag{5.2}$$

wobei $\nu \in \mathcal{M}^1(G)$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ und $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$ und $k_n/k_{n+1} \to \alpha \in]0,1[$, hergestellt. In diesem Fall impliziert die einfache Konvergenz $a_n\nu^{k_n} \to \mu$ die Existenz einer stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ mit $\mu_1 = \mu$, so dass (5.2) entlang einer Teilfolge gilt.

Ziel dieses Kapitels ist der Versuch, in Spezialfällen ein Konzept der Semistabilität für Hypergruppen einzuführen.

Definition 5.1. Es sei K eine Hypergruppe. Eine stetige Abbildung $\Phi : K \to K$ heißt *Homomorphismus*, falls

$$\varepsilon_{\Phi(x)} * \varepsilon_{\Phi(y)} = \Phi(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$$

für alle $x, y \in K$ erfüllt ist. Ist zusätzlich Φ bijektiv und Φ^{-1} ebenfalls stetig, so heißt Φ ein *Automorphismus* in K. $\mathrm{Aut}(K)$ bezeichne die Menge der Automorphismen in K.

Bemerkung 5.2. Ist $\Phi : K \to K$ ein Homomorphismus, so gelten

$$\Phi(\mu * \nu) = \Phi(\mu) * \Phi(\nu)$$

für alle $\mu, \nu \in \mathcal{M}^b(K)$ sowie $\Phi(e) = e$ und $\Phi(x^-) = \Phi(x)^-$ für alle $x \in K$. Dabei ergibt sich $\Phi(e) = e$ aus der Tatsache, dass wegen $\varepsilon_{\Phi(e)} * \varepsilon_{\Phi(e)} = \Phi(\varepsilon_e) = \varepsilon_{\Phi(e)}$ das Punktmaß $\varepsilon_{\Phi(e)}$ idempotent ist, und die letzte Eigenschaft folgt mit $\Phi(e) = e$ und (7) in Definition 0.2 aus

$$e \in \Phi(\mathrm{supp}(\varepsilon_x * \varepsilon_{x^-})) \subseteq \mathrm{supp}(\Phi(\varepsilon_x * \varepsilon_{x^-})) = \mathrm{supp}(\varepsilon_{\Phi(x)} * \varepsilon_{\Phi(x^-)})$$

für $x \in K$.

In [62] (Theorem 4.1) wird bewiesen, dass die Bessel-Kingman-Hypergruppen (vgl. Vorbereitungen, Definition 0.36) die einzigen Sturm-Liouville-Hypergruppen (vgl. Definition 0.34) sind, für die nichttriviale Automorphismen existieren. Sie sind sogar die einzigen bekannten Beispiele für Hypergruppen auf $\mathbb{R}_+$ mit nichttrivialen Homomorphismen. Im Fall von Bessel-Kingman-Hypergruppen sind die Homothetien $H_c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $c > 0$ (die einzigen, vgl. [56], Proposition 5.1) Automorphismen, und der *stabile Fall*, d.h. die Charakterisierung der möglichen Grenzwerte von Faltungspotenzen $(H_{c_n}(\nu)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Beschreibung der zugehörigen Anziehungsbereiche wird in [53] bzw. [6] behandelt, da die Faltungsstruktur eine verallgemeinerte Faltungsstruktur im Sinne von [53] ist.

Eine Charakterisierung der Grenzwerte von $(H_{c_n}(\nu)^{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ (wobei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\mathbb{N}$ ist, die $k_n/k_{n+1} \to \alpha \in]0,1[$ erfüllt) für den Fall von Bessel-Kingman-Hypergruppen erhält man mittels des folgenden Typenkonvergenzsatzes.

Satz 5.3 (Typenkonvergenzsatz). *Seien $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}_+)$ und $c_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen μ.*

(a) Konvergiert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $c \geq 0$, so konvergiert $(H_{c_n}(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $H_c(\mu)$ (wobei $H_0(\mu) = \varepsilon_0$).

(b) Sind $\mu, \nu \neq \varepsilon_0$, so konvergiert $(H_{c_n}(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen ν, wenn $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $c > 0$ konvergiert und $H_c(\mu) = \nu$ erfüllt ist.

Bemerkung. Der Typenkonvergenzsatz ist ein Spezialfall der klassischen Version für $\mathbb{R}$ (vgl. z.B. [40], Theorem 2.3.2), welche mit Methoden der Fouriertransformation bewiesen werden kann. In der obigen Formulierung ließe sich auch ein Beweis mit Fouriertransformierten in Bessel-Kingman-Hypergruppen führen.

Aufgrund des folgenden Lemmas und des Funktionalen Grenzwertsatzes 2.7 handelt es sich bei den möglichen Grenzwerten von $(H_{c_n}(\nu)^{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ um funktionale Limiten.

Lemma 5.4. *Es seien K eine Bessel-Kingman-Hypergruppe, $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(K)$ mit $\mu \neq \varepsilon_0$ und $c_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$, und es gelte*

$$H_{c_n}(\nu)^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu.$$

Dann ist $(H_{c_n}(\nu))_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimal, d.h. es gilt $H_{c_n}(\nu) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon_0$.

Beweis. Für $(k_n) = (n)$ ist die Behauptung in [53], Theorem 4, und [48], Lemma 4.4, gezeigt.
Es sei $(c_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (c_n) mit

$$\lim_{l\to\infty} c_{n_l} = c \in [0, \infty].$$

Ist $c = \infty$, so gilt $1/c_{n_l} \to 0$, und mit Satz 5.3(a) folgt

$$\nu^{k_{n_l}} = H_{\frac{1}{c_{n_l}}}(H_{c_{n_l}}(\nu^{k_{n_l}})) \xrightarrow[l\to\infty]{} \varepsilon_0.$$

Für $0 < c < \infty$ erhält man analog

$$\nu^{k_{n_l}} \xrightarrow[l\to\infty]{} H_{\frac{1}{c}}(\mu).$$

Da die Folge $(\nu^{k_{n_l}})$ nur dann einen Grenzwert, nämlich ε_0, besitzen kann, wenn $\nu = \varepsilon_0$ ist, ergibt sich in beiden Fällen ein Widerspruch zur Voraussetzung $\mu \neq \varepsilon_0$. Somit konvergiert (c_n) gegen 0, woraus $H_{c_n}(\nu) \to \varepsilon_0$ folgt. $\square$

Da die Homothetien Automorphismen sind, lässt sich unter Verwendung des Typenkonvergenzsatzes analog zum semistabilen Fall in $\mathbb{R}$ (vgl. [40], Lemma 7.1.4) die folgende Charakterisierung zeigen.

Proposition 5.5. *Sei K eine Bessel-Kingman-Hypergruppe.*

(a) Es seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(K)$, wobei $\mu \neq \varepsilon_0$, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$ und $k_n/k_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in]0,1[$ sowie $c_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls

$$H_{c_n}(\nu)^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu,$$

so ist zunächst wegen Lemma 5.4 und Satz 2.7 μ eindeutig einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$, und es gilt

$$H_{c_n}(\nu)^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t \geq 0. \tag{5.3}$$

Es existiert dann ein $0 < c < 1$, so dass $H_c(\mu_t) = \mu_{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$ erfüllt ist.

(b) Ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ und existieren $0 < c < 1$ und $\alpha \in]0,1[$, so dass $H_c(\mu_t) = \mu_{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$ erfüllt ist, so gilt

$$H_{c_n}(\mu_1)^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

wobei $c_n := c^n$ und $k_n := [(\frac{1}{\alpha})^n]$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} H_{c_n}(\nu)^{k_n} &= H_{c_n} H_{\frac{1}{c_{n+1}}}(H_{c_{n+1}}(\nu)^{k_n}) \\ &= H_{\frac{c_n}{c_{n+1}}}\left(H_{c_{n+1}}(\nu)^{[k_{n+1}\frac{k_n}{k_{n+1}}]}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu, \end{aligned}$$

und da die Konvergenz in (5.3) gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ ist, konvergiert

$$\left(H_{c_{n+1}}(\nu)^{[k_{n+1}\frac{k_n}{k_{n+1}}]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen μ_α. Nach dem Typenkonvergenzsatz konvergiert $(\frac{c_n}{c_{n+1}})$ gegen ein $c' > 0$, so dass $H_{c'}(\mu_\alpha) = \mu$ erfüllt ist. Mit $c := \frac{1}{c'}$ gilt $H_c(\mu) = \mu_\alpha$ und dann auch $H_c(\mu_t) = \mu_{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$. Wegen $H_{c^n}(\mu) = \mu_{\alpha^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mu_{\alpha^n} \to \varepsilon_0$, d.h. nach dem Stetigkeitssatz für Bessel-Kingman-Hypergruppen, vgl. (3.6) in [17]

$$\hat{\mu}(c^n\lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{kompakt-gleichmäßig in } \lambda \geq 0,$$

erhält man aus der Annahme $c \geq 1 \quad \mu = \varepsilon_0$, also einen Widerspruch.
Die Behauptung von Teil (b) ergibt sich sofort aus

$$H_{c^n}(\mu_1)^{[[(\frac{1}{\alpha})^n]t]} = (\mu_{\alpha^n})^{[[(\frac{1}{\alpha})^n]t]} = \mu_{\alpha^n[[(\frac{1}{\alpha})^n]t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t$$

für $t > 0$. □

Bemerkung 5.6. Analog zum semistabilen Fall in $\mathbb{R}$ lässt sich beweisen, dass $c^2 \leq \alpha$ in Teil (a) der obigen Charakterisierung erfüllt ist. Nach der Lévy-Hinčin-Formel (vgl. [17], Satz 10.2) existieren ein eindeutiges *Lévy-Maß* $\eta \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}_+^*)$ (d.h. es gilt $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{x^2}{1+x^2}\, d\eta(x) < \infty$) und eine eindeutige Konstante $M \geq 0$ mit

$$\hat{\mu}_t(\lambda) = \exp\left(t\left(-M\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}_+^*} (\phi_\lambda(x) - 1)\, d\eta(x)\right)\right)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ und $t \geq 0$. (Für die Notation sei verwiesen auf Vorbereitungen, Definition 0.36.) Aufgrund des Zusammenhangs $H_c(\mu_t) = \mu_{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$ ergeben sich damit $M\alpha = Mc^2$ und $\alpha \cdot \eta = H_c(\eta)$ (unabhängig von der Faltungsstruktur). Ist $M = 0$, so ist wegen $\mu_1 \neq \varepsilon_0 \quad \eta \not\equiv 0$, und mit Lemma 7.1.7 in [40] folgt $c < \sqrt{\alpha}$. Für $M \neq 0$ erhält man $\alpha = c^2$ und $\eta \equiv 0$. Mit

$$\kappa := \frac{\log \alpha}{\log c}$$

ist dann $0 < \kappa \leq 2$, und es gilt $H_{\alpha^{\frac{1}{\kappa}}}(\mu_t) = \mu_{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$.

Bemerkung 5.7. Ist K eine Bessel-Kingman-Hypergruppe, so erhält man für den *stabilen Fall* nach Resultaten aus [53]/[6] und [61], dass $\mu \neq \varepsilon_0$ genau dann Grenzwert einer Folge $(H_{c_n}(\nu)^n)$ ist, wenn die Fouriertransformierte $\hat{\mu}$ von μ von der Form

$$\hat{\mu}(\lambda) = \exp(-M\lambda^\kappa), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

ist, wobei $M > 0$ und $0 < \kappa \leq 2$.
Gilt also

$$H_{c_n}(\nu)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \neq \varepsilon_0,$$

d.h.

$$H_{c_n}(\nu)^{[nt]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t \geq 0 \tag{5.4}$$

mit der eindeutig bestimmten stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ mit $\mu_1 = \mu$, und setzt man für $\alpha > 0 \quad c(\alpha) := \alpha^{\frac{1}{\kappa}}$, so ist

$$H_{c(\alpha)}(\mu_t) = H_{\alpha^{\frac{1}{\kappa}}}(\mu_t) = \mu_{\alpha t} \tag{5.5}$$

für alle $\alpha > 0$ und alle $t \geq 0$ erfüllt.
Die gleiche Charakterisierung ergibt sich, wenn man den stabilen auf den semistabilen Fall in Proposition 5.5 zurückführt. Zu $\alpha \in]0,1[$ existiert nämlich eine Teilfolge $(k_n) \subseteq \mathbb{N}$, für die (k_n/k_{n+1}) gegen α konvergiert. (5.4) und Proposition 5.5(a) implizieren dann die Existenz von $0 < c(\alpha) < 1$, so dass $H_{c(\alpha)}(\mu_t) = \mu_{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$ gilt, und mit $\kappa(\alpha) := \frac{\log \alpha}{\log c(\alpha)} \in]0,2]$ (vgl. Bemerkung 5.6) erhält man

$$H_{\alpha^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}}}(\mu_t) = \mu_{\alpha t}$$

für alle $t \geq 0$. Es lässt sich leicht zeigen, dass für ein weiteres $\alpha' \in]0,1[$ $\kappa(\alpha') = \kappa(\alpha) =: \kappa$ ist, so dass (5.5) für alle $\alpha \in]0,1[$ und alle $t \geq 0$ erfüllt ist.

Der Beweis von Proposition 5.5(a), in dem für Bessel-Kingman-Hypergruppen K aus der Konvergenz

$$\rho_n(\nu)^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t \geq 0 \tag{5.6}$$

(wobei $\rho_n \in \mathrm{Aut}(K)$ für $n \in \mathbb{N}$) die Existenz eines Automorphismus ρ gefolgert wird, so dass die stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ semistabil in dem Sinne ist, dass

$$\rho(\mu_t) = \mu_{\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0$$

erfüllt ist, folgt einem Standardschema. Dabei werden die kompakt-gleichmäßige Konvergenz in (5.6) sowie ein Typenkonvergenzsatz, welcher im behandelten Fall der Bessel-Kingman-Hypergruppen gerade der klassische für $\mathbb{R}$ ist, verwendet.
Auch für den eingangs erwähnten Fall lokalkompakter Gruppen bzw. einfach zusammenhängender nilpotenter Liegruppen wird die entsprechende Charakterisierung mittels eines Typenkonvergenzsatzes bewiesen (vgl. dazu [28], Korollar 2.6.9 bzw. Proposition 2.6.8, sowie Theorem 2.2.8 und Theorem 2.2.12).

Setzt man für eine Hypergruppe K die Gültigkeit der Eigenschaften (A) und (B) voraus, wobei

(A) $\mathrm{Aut}(K)$ ist nicht trivial.

(B) Es gelte ein Typenkonvergenzsatz der folgenden Art:
$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ sei eine geeignete echte offene $*$-Unterhalbgruppe. Für $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ und $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Aut}(K)$ implizieren dann die Konvergenzen $\mu_n \to \mu$ und $\rho_n(\mu_n) \to \nu$, wobei $\mu, \nu \in \mathcal{F}$, die relative Kompaktheit von $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $\rho(\mu) = \nu$ für jeden Häufungspunkt $\rho \in \mathrm{Aut}(K)$ von (ρ_n).
(Dabei wird $\mathrm{Aut}(K)$ mit einer zum Gruppenfall analogen Topologie ausgestattet, vgl. [30], Definition 26.3.)

so lässt sich analog mit der Standardmethode zeigen:

Proposition 5.8. *Es sei K eine Hypergruppe mit den Eigenschaften (A) und (B). $(\mu_t)_{t\geq 0}$ sei eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ mit $\mu_t \in \mathcal{F}$ für alle $t > 0$, $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Aut(K)$ sowie $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$ und $k_n/k_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in]0,1[$. Es gelte funktionale Konvergenz*

$$\rho_n(\nu)^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \textit{für alle } t \geq 0.$$

Dann existiert ein $\rho \in Aut(K)$, so dass $\rho(\mu_t) = \mu_{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$ erfüllt ist.

Beweis. Wegen

$$\rho_n(\nu)^{[k_n t]} = \rho_n \rho_{n+1}^{-1}(\rho_{n+1}(\nu)^{[k_{n+1}\frac{k_n}{k_{n+1}}t]}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t$$

für $t > 0$ folgt die Behauptung aus dem Typenkonvergenzsatz. □

Bemerkung 5.9. Ist K eine kommutative Hypergruppe und ρ ein Automorphismus in K, so ist eine Abbildung $\rho^* : \hat{K} \to \hat{K}$ definiert durch

$$\rho^*(\chi) := \chi \circ \rho \quad \text{für } \chi \in \hat{K}.$$

Für eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$, die nach der Schoenberg-Beziehung (vgl. dazu Vorbereitungen, Satz 0.29) die Darstellung $\hat{\mu}_t = e^{t\Phi}$, $t \geq 0$, mit der eindeutig bestimmten stark negativ definiten Funktion $-\Phi$ besitzt, ist die Semistabilität

$$\rho(\mu_t) = \mu_{\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0$$

(mit $0 < \alpha < 1$) aufgrund von

$$\rho(\mu_1)^\wedge(\chi) = \hat{\mu}_1(\rho^*(\chi)) = \exp(\Phi(\rho^*(\chi))), \quad \chi \in \hat{K},$$

äquivalent zur „infinitesimalen Semistabilität“

$$\rho(\Phi) := \Phi \circ \rho^* = \alpha\Phi.$$

Dies bedeutet für die als Beispiel bekannten Bessel-Kingman-Hypergruppen gerade

$$\Phi \circ H_c = \alpha\Phi,$$

da $\phi_\lambda \circ H_c = \phi_{c\lambda}$ gilt. (Vgl. dabei Vorbereitungen, Definition 0.36, für die Notation.)

Für den Spezialfall von normalen Anziehungsbereichen, d.h. $\rho_n = \rho^n$ mit einem Automorphismus ρ in der Situation der vorigen Proposition, erhält man trivialerweise, ohne dass die Gültigkeit eines Typenkonvergenzsatzes vorausgesetzt werden muss:

Proposition 5.10. *Es seien K eine Hypergruppe, $\rho \in Aut(K)$, $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$, $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$ sowie $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$ und $k_n/k_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in]0,1[$. Es gelte*

$$(\rho^n(\nu))^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dann folgt $\rho(\mu_t) = \mu_{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$.

Eine zu (b) in Proposition 5.5 analoge Aussage für eine beliebige Hypergruppe K und $\rho \in \mathrm{Aut}(K)$ ergibt sich unmittelbar.

Bemerkung 5.11. (a) In [28] ist mit Theorem 1.13.14 eine Aussage (für den stabilen Fall) formuliert und bewiesen, die vom selben Typ ist wie diejenige aus Proposition 5.8.

(b) Es fehlen Beispiele für Hypergruppen, für welche die Voraussetzungen von Proposition 5.8 erfüllt sind. Wie zuvor bereits erwähnt, sind unter den Hypergruppen auf $\mathbb{R}_+$ die vorab behandelten Bessel-Kingman-Hypergruppen die einzigen bekannten Beispiele mit nichttrivialen Automorphismen, so dass sich in dieser Klasse von Hypergruppen keine weiteren Beispiele angeben lassen.

In [61] werden für beliebige Sturm-Liouville-Hypergruppen $K = \mathbb{R}_+$ die Grenzwerte von $((H_{c_n}(\nu))^n)_{n\in\mathbb{N}}$ charakterisiert, wobei für $c > 0 \quad H_c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ wie zuvor die Homothetie $x \mapsto cx$ bezeichne, die nun - außer in Bessel-Kingman-Hypergruppen - kein Homomorphismus bezüglich der Faltung ist. Das Hauptresultat aus [61] (vgl. Theorem 4.1) besagt, dass $\varepsilon_0 \neq \mu \in \mathcal{M}^1(K)$ genau dann Grenzwert einer Folge $((H_{c_n}(\nu))^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$ und $c_n > 0$ ist, wenn μ ein „stabiles“ Wahrscheinlichkeitsmaß im Sinne der folgenden Definition ist.

Definition 5.12. Es sei K eine Sturm-Liouville-Hypergruppe.

(a) Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ heißt *stabil* vom Index $\kappa \in]0, 2[$, wenn $\mu = \mu_{\kappa,M}$ für ein $M > 0$ gilt, wobei mit

$$\Phi_{\kappa,M}(\lambda) := M \int_0^\infty \phi'_\lambda(x) x^{-\kappa}\, dx, \quad \lambda \in \hat{K}, \tag{5.7}$$

$\mu_{\kappa,M} \in \mathcal{M}^1(K)$ die Fouriertransformierte

$$\hat{\mu}_{\kappa,M} = \exp(\Phi_{\kappa,M})$$

besitzt.
μ heißt *stabil* vom Index 2, wenn μ das *Gauß-Maß* $\mu_{2,M} \in \mathcal{M}^1(K)$ mit Fouriertransformierter

$$\hat{\mu}_{2,M} = \exp(\Phi_{2,M})$$

ist, wobei $M > 0$ und

$$\Phi_{2,M}(\lambda) := -\frac{1}{2}\, M(\lambda^2 + \gamma^2), \quad \lambda \in \hat{K}. \tag{5.8}$$

(Dabei ist wieder für $\lambda \in \hat{K}$ ϕ_λ der zugehörige Charakter, und γ bezeichnet den Index der Sturm-Liouville-Hypergruppe, vgl. Vorbereitungen, Eigenschaften 0.35.)

(b) Eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ heißt *stabil*, falls $\mu_0 = \varepsilon_0$ und für alle $t > 0$ $\mu_t = \mu_{\kappa,Mt}$ mit $\kappa \in]0,2]$ und $M > 0$ gilt.

Für eine stabile stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ gilt also

$$\hat{\mu}_t = \exp(t\Phi_{\kappa,M}) \quad \text{für } t \geq 0$$

mit $\Phi_{\kappa,M}$ wie in (5.7) bzw. (5.8).
Obwohl $\phi_\lambda \circ H_c$ für $\lambda \in \hat{K}$ im Allgemeinen kein Charakter der Hypergruppe ist, ist es möglich, diese Funktion anstelle von ϕ_λ in $\Phi_{\kappa,M}$ einzusetzen. Für $\kappa = 2$ ist dabei zu beachten, dass

$$\Phi_{2,M}(\lambda) = -\frac{1}{2} M L_A(\phi_\lambda)(0) \quad \text{für } \lambda \in \hat{K} \tag{5.9}$$

gilt (vgl. Vorbereitungen, 0.34 und 0.35). Verwendet man dafür die Notation $\Phi_{\kappa,M}(\phi_\lambda \circ H_c)$, so erhält man die folgende „infinitesimale" Bedingung für die stabile stetige Faltungshalbgruppe.

Proposition 5.13. *Es sei K eine Sturm-Liouville-Hypergruppe und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine im Sinne der Definition 5.12 stabile stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$, d.h. es gilt*

$$\hat{\mu}_t = \exp(t\Phi_{\kappa,M}) \quad \textit{für } t \geq 0$$

mit $\kappa \in]0,2]$ und $M > 0$. Mit

$$H_c(\Phi_{\kappa,M})(\lambda) := \Phi_{\kappa,M}(\phi_\lambda \circ H_c) \tag{5.10}$$

für $\lambda \in \hat{K}$ und $c > 0$ folgt dann

$$H_c(\Phi_{\kappa,M}) = c^\kappa \Phi_{\kappa,M} \quad \textit{für alle } c > 0 \quad \textit{(„infinitesimale Stabilität“).}$$

Beweis. Für $\kappa < 2$ ergibt sich durch Einsetzen von $\phi_\lambda \circ H_c$

$$\begin{aligned}\Phi_{\kappa,M}(\phi_\lambda \circ H_c) &= M \int_0^\infty \phi'_\lambda(cx) c x^{-\kappa}\, dx \\ &= M c^\kappa \int_0^\infty \phi'_\lambda(z) z^{-\kappa}\, dz \\ &= c^\kappa \Phi_{\kappa,M}(\lambda)\end{aligned}$$

und für $\kappa = 2$ (vgl. (5.9))

$$\begin{aligned}\Phi_{2,M}(\phi_\lambda \circ H_c) &= -\frac{1}{2} M L_A(\phi_\lambda \circ H_c)(0) \\ &= -\frac{1}{2} M(-c^2(1+\alpha_0)\phi''_\lambda(0)) \\ &= -\frac{1}{2} M c^2(\lambda^2 + \gamma^2) \\ &= c^2 \Phi_{2,M}(\lambda),\end{aligned}$$

da $\phi_\lambda \in C^2(\mathbb{R}_+)$ und

$$\phi''_\lambda(0) = -\frac{\lambda^2 + \gamma^2}{1 + \alpha_0},$$

wobei α_0 wie in (SL1a) bzw. $\alpha_0 = 0$, falls (SL1b) vorliegt, vgl. Vorbereitungen, 0.34. □

Bemerkung 5.14. Der Ansatz von Proposition 5.13, d.h. das „Einsetzen“ von $\phi_\lambda \circ H_c$, obwohl dies im Allgemeinen kein Charakter der Hypergruppe ist, lässt sich wie folgt erläutern:
Definiert man für $\kappa \in]0,2[$ und $M > 0$ das Funktional B durch

$$B(f) := M \int_0^\infty f'(x) x^{-\kappa}\, dx, \tag{5.11}$$

so ist Definition (5.11) sinnvoll für

$$f \in C_\kappa := \{f \in C^1(\mathbb{R}_+) : x \mapsto f'(x)x^{-\kappa} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)\},$$

und für $f \in C_\kappa$ und $c > 0$ gilt $f \circ H_c \in C_\kappa$ sowie

$$B(f \circ H_c) = c^\kappa B(f).$$

Ist $L = \{\phi_\lambda : \lambda \in \hat{K}\}$ der Raum der Charaktere und $D = \langle L \rangle$ die lineare Hülle von L, so gilt $L \subseteq D \subseteq C_\kappa$ für alle $0 < \kappa < 2$, und somit erhält man für eine stabile stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_{\kappa,Mt})_{t\geq 0}$ die infinitesimale Stabilität

$$B(f \circ H_c) = c^\kappa B(f) \quad \text{für alle } f \in D \text{ und alle } c > 0.$$

Der Fall $\kappa = 2$ lässt sich analog deuten.

Motiviert durch die Resultate in [61] für Sturm-Liouville-Hypergruppen und Proposition 5.13 bzw. Bemerkung 5.14 wird im Folgenden versucht, für eine kommutative Hypergruppe K eine „infinitesimale“ Beschreibung der funktionalen Limiten $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in der Situation

$$(\rho_n(\nu))^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t \geq 0 \tag{5.12}$$

anzugeben, wobei für $n \in \mathbb{N}$ $\rho_n : K \to K$ ein Homöomorphismus ist und $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\mathbb{N}$ mit $k_n/k_{n+1} \to \alpha \in]0,1[$. Dabei werden nur normale Anziehungsbereiche betrachtet, d.h. in (5.12) sei $\rho_n := \rho^n$ mit einem Homöomorphismus ρ.

Besitzt die $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ die Darstellung $\hat{\mu}_t = e^{t\Phi}$ für $t \geq 0$ mit $-\Phi \in SN(\hat{K})$, so gilt

$$e^{t\Phi} = \lim_{n\to\infty} e^{t\Phi_n}$$

punktweise mit

$$\Phi_n := \hat{B}_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

für geeignete Poisson-Generatoren

$$B_n := \beta_n(\lambda_n - \varepsilon_e) \in \mathcal{M}^b(K), \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei $\beta_n \in \mathbb{R}_+$ und $\lambda_n \in \mathcal{M}^1(K)$ (z.B. $B_n = n(\mu_{\frac{1}{n}} - \varepsilon_e)$).
$\rho(B_n)$ ist dann stets definiert, und mit

$$\rho(\Phi_n) := (\rho(B_n))^\wedge$$

für $n \in \mathbb{N}$ besteht eine Möglichkeit, analog zum Vorgehen in Proposition 5.13 (vgl. (5.10)) $\rho(\Phi)$ sinnvoll zu definieren darin,

$$\rho(\Phi) := \lim_{n\to\infty} \rho(\Phi_n) \tag{5.13}$$

zu setzen, falls der Limes (punktweise) existiert. Wegen

$$\Phi_n(\chi) = \hat{B}_n(\chi) = \int \bar{\chi}\, dB_n, \quad \chi \in \hat{K},$$

erhält man nämlich

$$\rho(\Phi_n)(\chi) = (\rho(B_n))^\wedge(\chi) = \int \overline{\chi \circ \rho}\, dB_n, \quad \chi \in \hat{K},$$

durch „Einsetzen“ von $\chi \circ \rho$ in Φ_n.
In der Situation (5.12) ergibt sich unter Verwendung des folgenden Lemmas mit $B_n = k_n(\rho^n(\nu) - \varepsilon_e)$ unmittelbar, dass der Grenzwert in (5.13) $\alpha\Phi$ ist und damit insbesondere stets existiert. Das Lemma wird dabei in stärkerer Formulierung bewiesen als in diesem Zusammenhang zunächst benötigt.

Lemma 5.15. *Es sei K eine kommutative Hypergruppe. $(\mu_t)_{t\geq 0}$ sei eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ mit $\hat{\mu}_t = e^{t\Phi}$ für $t \geq 0$, wobei $-\Phi \in SN(\hat{K})$, $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^1(K)$ und $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$. Es gelte funktionale Konvergenz*

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dann folgt

$$k_n(\hat{\nu}_n(\chi) - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(\chi) \quad \text{für alle } \chi \in \hat{K},$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\hat{K}$.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit einem Approximationssatz aus [36] (vgl. Theorem 3.6 in Kapitel IX, Abschnitt 3.3), dessen Anwendung einiger Vorbereitungen bedarf.
Sei $J \subseteq \hat{K}$ kompakt. Für $\phi : \hat{K} \to \mathbb{C}$ stetig sei $M_\phi \in L(C(J))$ der Multiplikator

$$C(J) \ni f \mapsto M_\phi(f) := \phi_{|J} \cdot f$$

auf dem Banachraum $(C(J), \|.\|_\infty)$.
Setzt man für $t \geq 0$

$$U(t) := M_{e^{t\Phi}},$$

so ist $(U(t))_{t\geq 0} \subseteq L(C(J))$ eine Kontraktionshalbgruppe der Klasse (C_0) (vgl. die Definition in Proposition 0.15 für den Banachraum $B = C(J)$). Die Eigenschaft (3) für $t_0 \geq 0$ und $f \in C(J)$ ergibt sich dabei aufgrund von

$$\begin{aligned} \|U(t)f - U(t_0)f\|_\infty &= \|{e^{t\Phi}}_{|J} f - {e^{t_0\Phi}}_{|J} f\|_\infty \\ &\leq \|{e^{t\Phi}}_{|J} - {e^{t_0\Phi}}_{|J}\|_\infty \|f\|_\infty \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$ aus der kompakt-gleichmäßigen Konvergenz $\lim_{t\to t_0} \hat{\mu}_t = \hat{\mu}_{t_0}$, und man erhält sogar

$$U(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} U(t_0)$$

in der Operatornorm. Da für $h > 0$ und $f \in C(J)$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h}(U(h)f - f) - M_\Phi f \right\|_\infty &= \left\| \left(\frac{1}{h}({e^{h\Phi}}_{|J} - 1) - \Phi_{|J} \right) f \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \frac{1}{h}\left({e^{h\Phi}}_{|J} - 1\right) - \Phi_{|J} \right\|_\infty \|f\|_\infty \end{aligned}$$

gilt sowie

$$\frac{1}{h}\left(e^{h\Phi} - 1\right) \xrightarrow[h\searrow 0]{} \Phi$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\hat{K}$, ist $T := M_\Phi \in L(C(J))$ der infinitesimale Generator von $(U(t))_{t\geq 0}$, und auch hier liegt Konvergenz in der Operatornorm vor.
Es sei nun für $n \in \mathbb{N}$

$$R_n := M_{\hat{\nu}_n} \in L(C(J))$$

und $(R_n(t))_{t\geq 0}$ die diskrete Halbgruppe mit Zeiteinheit $1/k_n$, d.h.

$$R_n(t) = R_n^{[k_n t]}, \quad t \geq 0$$

(vgl. [36], Kapitel IX, Abschnitt 3.1).

$$T_n := k_n(R_n - I)$$

sei der zugehörige Generator.
Da die Konvergenz $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t$ kompakt-gleichmäßig in $t \geq 0$ ist und somit für eine Folge $(t_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ mit $t_n \to t_0$

$$\hat{\nu}_n^{[k_n t_n]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{\mu}_{t_0}$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\hat{K}$ gilt, approximiert die Folge (R_n) von diskreten Halbgruppen U (vgl. dazu die Definition in [36], Kapitel IX, Abschnitt 3.2), d.h. für $f \in C(J)$ ist

$$\|R_n(t_n)f - U(t_0)f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

erfüllt, und wie zuvor gilt sogar

$$\|R_n(t_n) - U(t_0)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{5.14}$$

Der oben erwähnte Approximationssatz aus [36] ist nur für Konvergenz in der starken Operatortopologie und nicht für Konvergenz in der Operatornorm bewiesen, daher liefert er in dieser Situation die Konvergenz der Resolventen in der starken Operatortopologie von $L(C(J))$. Um daraus auf die Konvergenz der Generatoren zu schließen, können Resultate aus Abschnitt 2.6 in Kapitel IV in [36] verwendet werden. Diese sind jedoch jeweils für Konvergenz in der Operatornorm formuliert, und aus diesem Grund wird nun der folgende Umweg über die Operatoren $(\tilde{U}(t))$ bzw. $(\tilde{R}_n(t))$, $n \in \mathbb{N}$, gegangen, so dass die Anwendung des Approximationssatzes Resolventen-Konvergenz in der Operatornorm in der ursprünglichen Situation ergibt.
Ist für $t \geq 0 \quad \tilde{U}(t) \in L(L(C(J)))$ der durch

$$L(C(J)) \ni A \mapsto U(t) \circ A$$

definierte Operator, so ist $(\tilde{U}(t))_{t\geq 0} \subseteq L(L(C(J)))$ eine Kontraktionshalbgruppe der Klasse (C_0) bezüglich des Banachraumes $L(C(J))$ mit der Operatornorm. $\tilde{T} \in L(L(C(J)))$, definiert durch

$$\tilde{T}A := T \circ A \quad \text{für } A \in L(C(J)),$$

ist der zugehörige infinitesimale Generator.
Ebenso sei für $n \in \mathbb{N}$ $\tilde{R}_n \in L(L(C(J)))$ definiert. Dann ist $\tilde{T}_n \in L(L(C(J)))$,

$$\tilde{T}_n A := T_n \circ A \quad \text{für } A \in L(C(J)),$$

der Generator der diskreten Halbgruppe $(\tilde{R}_n(t))_{t\geq 0}$.
Wegen (5.14) gilt für eine Folge $(t_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ mit $t_n \to t_0$

$$\|\tilde{R}_n(t_n)A - \tilde{U}(t_0)A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

für alle $A \in L(C(J))$, und der Approximationssatz aus [36] liefert die Konvergenz der Resolventen

$$(I - \tilde{T}_n)^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} (I - \tilde{T})^{-1} \tag{5.15}$$

in der starken Operatortopologie von $L(L(C(J)))$. Wählt man $A = I \in L(C(J))$, so erhält man wegen $(I - \tilde{T}_n)^{-1}A = (I - T_n)^{-1}$ und $(I - \tilde{T})^{-1}A = (I - T)^{-1}$ aus (5.15)

$$\|(I - T_n)^{-1} - (I - T)^{-1}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Theorem 2.25 und Theorem 2.23(a) in [36], Kapitel IV, Abschnitt 2.6, implizieren dann

$$\|T_n - T\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

und aufgrund von $T_n = M_{k_n(\hat{\nu}_n - 1)}$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt insbesondere

$$\|k_n(\hat{\nu}_{n|J} - 1) - \Phi_{|J}\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Korollar 5.16. *Es seien K eine kommutative Hypergruppe, ρ ein Homöomorphismus in K mit $\rho(e) = e$, $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$ und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ mit $\hat{\mu}_t = e^{t\Phi}$ für $t \geq 0$ und $-\Phi \in SN(\hat{K})$. Weiter sei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$ und $k_n/k_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in]0,1[$, und es gelte*

$$(\rho^n(\nu))^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \textit{für alle } t \geq 0. \tag{5.16}$$

Mit $B_n := k_n(\rho^n(\nu) - \varepsilon_e)$, $\Phi_n := \hat{B}_n$ und $\rho(\Phi_n) := (\rho(B_n))^\wedge$, $n \in \mathbb{N}$, ist dann

$$\rho(\Phi) := \lim_{n\to\infty} \rho(\Phi_n) = \alpha\Phi.$$

Beweis. Nach Lemma 5.15 impliziert (5.16)

$$k_n((\rho^n(\nu))^\wedge(\chi) - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(\chi) \quad \text{für alle } \chi \in \hat{K},$$

also in der obigen Notation $\Phi_n \to \Phi$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= k_{n+1}(\rho(\rho^n(\nu)) - \rho(\varepsilon_e)) \\ &= k_{n+1}(\rho(\rho^n(\nu) - \varepsilon_e)) \\ &= \frac{k_{n+1}}{k_n}\,(\rho(k_n(\rho^n(\nu) - \varepsilon_e))) \\ &= \frac{k_{n+1}}{k_n}\,\rho(B_n), \end{aligned}$$

und somit folgt $\rho(\Phi) = \alpha\Phi$. □

Korollar 5.16 besagt lediglich, dass unter den gegebenen Voraussetzungen der (punktweise) Grenzwert von $\rho(\Phi_n)$ gleich $\alpha\Phi$ ist und liefert damit nicht die angestrebte „infinitesimale" Bedingung für den funktionalen Limes. Abschließend in diesem Kapitel wird daher nun der Ansatz behandelt, Φ durch ein „infinitesimales" Funktional zu beschreiben, um so in der Situation (5.12) (mit $\hat{\mu}_t = e^{t\Phi}$) zu einer geeigneten Formulierung der „infinitesimalen Semistabilität" zu gelangen. Definiert ist dieses Funktional zunächst auf einer Menge D, welche die im folgenden Satz angegebenen Eigenschaften besitzt.

Satz 5.17. *Es sei K eine kommutative Hypergruppe. Dann existiert ein Unterraum $D \subseteq C_0(K) \cap L^2(K)$, so dass D ein Kernbereich (vgl. dazu die nachfolgende Bemerkung) ist für den infinitesimalen Generator von Faltungsoperatoren $(R_{\mu_t})_{t\geq 0}$ zu einer beliebigen $\{e\}$-stetigen Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$. Dabei werden die Faltungsoperatoren sowohl auf $C_0(K)$ als auch auf $L^2(K)$ betrachtet.*

Bemerkung 5.18. Die folgenden Definitionen finden sich in [36], Kapitel III, Abschnitte 5.2 und 5.3.
Sind X und Y Banachräume, so heißt ein linearer Operator T von X nach Y mit Definitionsbereich $D(T) \subseteq X$ bekanntlich *abgeschlossen*, falls für jede Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$, für die (u_n) gegen $u \in X$ und (Tu_n) gegen $v \in Y$ konvergiert, u zu $D(T)$ gehört und $Tu = v$ gilt. Ein linearer Operator S von X nach Y heißt *abschließbar*, falls S eine abgeschlossene Erweiterung besitzt, d.h. ein abgeschlossener Operator T existiert mit $D(S) \subseteq D(T)$ und $Su = Tu$ für alle $u \in D(S)$. Die kleinste abgeschlossene Erweiterung $\tilde{S}$ von S in dem Sinne, dass jede weitere abgeschlossene Erweiterung von S auch eine Erweiterung von $\tilde{S}$ ist, heißt der *Abschluss* von S.

Ist T ein abgeschlossener Operator und S ein abschließbarer Operator mit $\tilde{S} = T$, so heißt der Definitionsbereich $D(S)$ von S ein *Kernbereich („core")* von T.

Beweis von Satz 5.17. Sei

$$D := \{f \in L^2(K) : \operatorname{supp}(\hat{f}) \text{ kompakt}\}.$$

Für $f \in D$ ist, da $\operatorname{supp}(\hat{f})$ kompakt ist, $\hat{f} \in L^1(\hat{K}) \cap L^2(\hat{K})$, und somit ist die durch

$$f_1(x) := \int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi)\chi(x)\, d\pi_K(\chi), \quad x \in K, \tag{5.17}$$

definierte Funktion f_1 ein Repräsentant von $f \in L^2(K)$, und nach Theorem 2.2.32 in [10] gilt $f_1 \in C_0(K)$. Da ein Haarmaß ω_K auf einer kommutativen Hypergruppe die Eigenschaft besitzt, dass für jede nichtleere offene Menge $U \subseteq K$ gilt $\omega_K(U) > 0$, ist der Repräsentant aus $C_0(K)$ eindeutig bestimmt. Aufgrund der Dichtheit von $(C_c(\hat{K}))^\vee$ in $L^2(K)$ (vgl. dazu den Beweis von Theorem 2.2.13 und Proposition 2.2.31 in [10]) ist D dicht in $L^2(K)$. Als Unterraum von $C_0(K)$ ist, da nach Theorem 2.2.32 in [10] $(C_c(\hat{K}))^\vee$ auch dicht in $(C_0(K), \|.\|_\infty)$ ist und $(C_c(\hat{K}))^\vee \subseteq D$ gilt, D ebenfalls dicht in $C_0(K)$. Es sei nun $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine beliebige $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$, und es gelte $\hat{\mu}_t = e^{t\Phi}$ für $t \geq 0$ und $-\Phi \in SN(\hat{K})$. Für $f \in D$ sei dann Nf definiert durch

$$Nf(x) := \int_{\hat{K}} \Phi(\chi)\hat{f}(\chi)\chi(x)\, d\pi_K(\chi), \quad x \in K.$$

Mit $g := \Phi \cdot \hat{f}$ für $f \in D$ ist

$$Nf = \check{g},$$

und es gilt $Nf \in D$. (Dabei ist zu beachten, dass Φ stetig und somit lokal beschränkt ist.)

Betrachtet man die Faltungsoperatoren einerseits als Operatoren auf $C_0(K)$, so ist für $f \in D$ wegen

$$\begin{aligned}
(\mu_h * f_1)(x) &= \int_K \int_K \int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi)\chi(z)\, d\pi_K(\chi)\, d(\varepsilon_{y^-} * \varepsilon_x)(z)\, d\mu_h(y) \\
&= \int_K \int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi) \int_K \chi(z)\, d(\varepsilon_{y^-} * \varepsilon_x)(z)\, d\pi_K(\chi)\, d\mu_h(y) \\
&= \int_K \int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi)\chi(y^-)\chi(x)\, d\pi_K(\chi)\, d\mu_h(y) \\
&= \int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi)\chi(x) \int_K \chi(y^-)\, d\mu_h(y)\, d\pi_K(\chi) \\
&= \int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi)\chi(x)\hat{\mu}_h(\chi)\, d\pi_K(\chi)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

für $x \in K$ und $h > 0$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{h}((\mu_h * f_1)(x) - f_1(x)) - Nf(x) \right| \\
&\quad = \left| \frac{1}{h} \int_{\hat{K}} (\hat{\mu}_h(\chi) - 1)\hat{f}(\chi)\chi(x)\, d\pi_K(\chi) - \int_{\hat{K}} \Phi(\chi)\hat{f}(\chi)\chi(x)\, d\pi_K(\chi) \right| \\
&\quad \leq \int_{\hat{K}} \left| \frac{1}{h}(\hat{\mu}_h(\chi) - 1) - \Phi(\chi) \right| |\hat{f}(\chi)||\chi(x)|\, d\pi_K(\chi) \\
&\quad \leq \int_{\hat{K}} \left| \frac{1}{h}(\hat{\mu}_h(\chi) - 1) - \Phi(\chi) \right| |\hat{f}(\chi)|\, d\pi_K(\chi).
\end{aligned}$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz

$$\frac{1}{h}(e^{h\Phi} - 1) \xrightarrow[h \searrow 0]{} \Phi$$

auf kompakten Teilmengen von $\hat{K}$ und da $\operatorname{supp}(\hat{f})$ kompakt ist, folgt somit

$$\left\| \frac{1}{h}(\mu_h * f_1 - f_1) - Nf \right\|_\infty \xrightarrow[h \searrow 0]{} 0,$$

d.h. es ist $D \subseteq D(A_1)$ und $A_1 f = Nf$ für $f = f_1 \in D$, wenn A_1 den zu $(R_{\mu_t})_{t \geq 0} \subseteq L(C_0(K))$ gehörigen infinitesimalen Generator bezeichnet.
Andererseits ist für $f \in D \quad (Nf)^\wedge = \Phi \cdot \hat{f}$, und da nach Proposition 2.2.26 in [10] für $h > 0$

$$(\mu_h * f)^\wedge = \hat{\mu}_h \cdot \hat{f}$$

auf $\operatorname{supp}(\pi_K)$ gilt, erhält man wegen Satz 0.22 für $f \in D$ und $h > 0$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{h}(\mu_h * f - f) - Nf \right\|_2^2 &= \left\| \left(\frac{1}{h}(\mu_h * f - f) - Nf \right)^\wedge \right\|_2^2 \\
&= \left\| \frac{1}{h}\left((\mu_h * f)^\wedge - \hat{f} \right) - (Nf)^\wedge \right\|_2^2 \\
&= \left\| \frac{1}{h}(\hat{\mu}_h - 1)\hat{f} - \Phi \cdot \hat{f} \right\|_2^2 \\
&= \int_{\hat{K}} \left| \frac{1}{h}\left(e^{h\Phi} - 1\right) - \Phi \right|^2 |\hat{f}|^2\, d\pi_K.
\end{aligned}$$

Bezeichnet also A_2 den infinitesimalen Generator der Faltungsoperatoren $(R_{\mu_t})_{t \geq 0} \subseteq L(L^2(K))$, so ist $D \subseteq D(A_2)$, und Nf ist ein Repräsentant (aus $C_0(K)$) von $A_2 f \in L^2(K)$.

Zum Nachweis, dass D jeweils ein Kernbereich für den infinitesimalen Generator von $(R_{\mu_t})_{t\geq 0} \subseteq L(C_0(K))$ bzw. $(R_{\mu_t})_{t\geq 0} \subseteq L(L^2(K))$ ist, wird nun gezeigt, dass D invariant ist unter $(R_{\mu_t})_{t\geq 0}$. Die Behauptung folgt dann mit Theorem 1.9 in [13].
Ist $f \in D$ und $t \geq 0$, so ist mit $g := \hat{\mu}_t \cdot \hat{f}$ und $h := \check{g} \quad h \in D$, und es gelten

$$h_1(x) = \int_{\hat{K}} \hat{\mu}_t(\chi)\hat{f}(\chi)\chi(x)\, d\pi_K(\chi) = (\mu_t * f_1)(x) \quad \text{für alle } x \in K$$

nach (5.18) (für die Notation vgl. (5.17)) sowie wegen

$$(\mu_t * f)^\wedge = \hat{\mu}_t \cdot \hat{f} = g$$

auf $\operatorname{supp}(\pi_K)$ auch $\mu_t * f = h$ in $L^2(K)$. □

Definition 5.19. Ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe auf einer kommutativen Hypergruppe K mit $\hat{\mu}_t = e^{t\Phi}$ für $t \geq 0$, wobei $-\Phi \in SN(\hat{K})$, und D wie in Satz 5.17, so wird das Funktional B auf D definiert durch

$$B(f) := \int_{\hat{K}} \Phi(\chi)\hat{f}(\chi)\, d\pi_K(\chi), \quad f \in D.$$

Bemerkung. Es gilt dann

$$B(f) = Nf(e) \quad \text{für } f \in D$$

in der Notation aus dem Beweis von Satz 5.17.

Bei der angestrebten Formulierung der „infinitesimalen Semistabilität" über das Funktional B stellt sich nun das Problem, dass im Allgemeinen „$f \circ \rho \in D$ für alle $f \in D$" nicht erfüllt sein wird und somit a priori $B(f \circ \rho)$ nicht definiert ist. Will man sie daher durch die Bedingung

$$B(f \circ \rho) = \alpha B(f) \quad \text{für alle } f \in D \tag{5.19}$$

erklären, so ist dies nur möglich, indem man das Funktional (B, D) geeignet auf $(B, \tilde{D})$ mit $\tilde{D} \supseteq D$ fortsetzt, so dass $f \circ \rho \in \tilde{D}$ für alle $f \in D$ erfüllt ist. Umgeht man obiges Problem auf diese Weise, so verdeutlicht der folgende Ansatz, wie sich in der Situation (5.12) für die funktionalen Limiten die „infinitesimale" Bedingung (5.19) ergibt.

Ansatz 5.20. Es seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:
K sei eine kommutative Hypergruppe und $\rho : K \to K$ ein Homöomorphismus mit den Eigenschaften $\rho(e) = e$ und $\rho(x^-) = \rho(x)^-$ für alle $x \in K$. Weiter

seien $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ mit $\hat{\mu}_t = e^{t\Phi}$, $t \geq 0$, und $-\Phi \in SN(\hat{K})$, $\nu \in \mathcal{M}^1(K)$ und $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$ und $k_n/k_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in]0,1[$. Es gelte

$$(\rho^n(\nu))^{[k_n t]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_t \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Mit

$$B_n := k_n((\rho^n(\nu))^- - \varepsilon_e), \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt dann für $f \in D \subseteq C_0(K)$ (d.h. $f = f_1$ wie im Beweis von Satz 5.17)

$$\begin{aligned}
\int_K f\,dB_n &= k_n\left(\int_K f\,d(\rho^n(\nu))^- - f(e)\right)\\
&= k_n\left(\int_K \int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi)\chi(x)\,d\pi_K(\chi)\,d(\rho^n(\nu))^-(x) - \int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi)\,d\pi_K(\chi)\right)\\
&= k_n\left(\int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi)\int_K \chi(x^-)\,d\rho^n(\nu)(x)\,d\pi_K(\chi) - \int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi)\,d\pi_K(\chi)\right)\\
&= k_n\left(\int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi)(\rho^n(\nu))^\wedge(\chi)\,d\pi_K(\chi) - \int_{\hat{K}} \hat{f}(\chi)\,d\pi_K(\chi)\right)\\
&= \int_{\hat{K}} k_n((\rho^n(\nu))^\wedge(\chi) - 1)\hat{f}(\chi)\,d\pi_K(\chi),
\end{aligned}$$

und mit Lemma 5.15 folgt, da $\operatorname{supp}(\hat{f})$ kompakt ist,

$$B_n(f) := \int_K f\,dB_n \xrightarrow[n\to\infty]{} B(f).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= k_{n+1}(\rho((\rho^n(\nu))^-) - \rho(\varepsilon_e))\\
&= k_{n+1}\,\rho((\rho^n(\nu))^- - \varepsilon_e)\\
&= \frac{k_{n+1}}{k_n}\,\rho(B_n),
\end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$, und somit gilt für alle $f \in D$

$$B_n(f \circ \rho) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha B(f).$$

Dabei sind $B_n(f)$ und $B_n(f \circ \rho)$ jeweils für alle $f \in C^b(K)$ definiert.
Lässt sich B geeignet auf einen Funktionenraum $\tilde{D} \supseteq D$ fortsetzen, so dass $f \circ \rho \in \tilde{D}$ gilt für alle $f \in D$ und darüberhinaus $B_n(f) \to B(f)$ für alle $f \in \tilde{D}$, so ergibt sich also

$$B(f \circ \rho) = \alpha B(f) \quad \text{für alle } f \in D. \tag{5.20}$$

Eine Möglichkeit, eine von ρ abhängige und somit allerdings nicht universelle Fortsetzung von B zu konstruieren, ist die folgende:
Setzt man

$$M := \bigcup_{n=0}^{\infty} \{f \circ \rho^n : f \in D\}$$

(dabei sei wieder $f \in C_0(K)$, d.h. $f = f_1$) und

$$\tilde{D} := \langle M \rangle$$

für den von M erzeugten Unterraum in $C_0(K)$, so ist $D \subseteq \tilde{D}$, und für Funktionen $g \in M$, $g = f \circ \rho^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $f \in D$ existiert $\lim_{n\to\infty} B_n(g)$ $(= \alpha^k B(f))$. Da die Funktionen g ein Erzeugendensystem für $\tilde{D}$ bilden, gibt es eine Fortsetzung von B auf $\tilde{D}$, so dass $B_n(f) \to B(f)$ für alle $f \in \tilde{D}$ erfüllt ist. Ferner ist mit $f \in \tilde{D}$ auch $f \circ \rho \in \tilde{D}$, und es gilt dann (5.20).

5.21 (Bemerkungen zu Kapitel 5). Die Anziehungsbereiche der stabilen Maße (vgl. Definition 5.12) in der von Hm. Zeuner behandelten Situation von Sturm-Liouville-Hypergruppen können - analog zum klassischen Fall symmetrischer Irrfahrten auf $\mathbb{R}$ - durch Bedingungen für die reguläre Variation der Tails beschrieben werden (vgl.Theorem 4.2 in [61]). Die Untersuchungen in [61] sind dabei bezüglich *innerer* Normierung gemacht, d.h. es werden Folgen $((H_{c_n}(\nu))^n)$ von Faltungspotenzen zugrunde gelegt.
Für den Fall *äußerer* Normierung, d.h. der Betrachtung von Folgen $(H_{c_n}(\nu^n))$, liegen Resultate von H.-P. Scheffler/Hm. Zeuner für Sturm-Liouville-Hypergruppen von polynomiellem Wachstum vor (vgl. [48]). Diese zeigen, dass die einzig möglichen Grenzwerte stabile Verteilungen auf der Bessel-Kingman-Hypergruppe $(\mathbb{R}_+, *_\alpha)$ mit einem geeigneten Parameter α sind und sich die Anziehungsbereiche über die reguläre Variation der Fouriertransformierten beschreiben lassen.

Die Aussage aus Satz 5.17 über die Menge D wird im folgenden Anhang aufgegriffen.

5.A Anhang zu Kapitel 5

Im Zusammenhang mit der Menge

$$D = \{f \in L^2(K) : \mathrm{supp}(\hat{f}) \text{ kompakt}\},$$

welche zur Definition des „infinitesimalen“ Funktionals für Ansatz 5.20 verwendet wurde, lassen sich darüberhinaus die folgenden für sich interessanten Aussagen festhalten. K sei dabei stets eine kommutative Hypergruppe.

(1) Der entscheidende Punkt in Satz 5.17 ist der folgende:

Bemerkung 5.22. D ist ein *gemeinsamer* Kernbereich, d.h. ein Kernbereich für die infinitesimalen Generatoren von Faltungsoperatoren (betrachtet sowohl auf $C_0(K)$ als auch auf $L^2(K)$) für *alle* stetigen Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^1(K)$ mit $\mu_0 = \varepsilon_e$.

(2) Es sei $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$ mit $\hat{\mu}_t = e^{t\Phi}$ für $t \geq 0$ und $-\Phi \in SN(\hat{K})$. Für $f \in D$ seien $G_k f := \Phi^k \hat{f} \in L^1(\hat{K}) \cap L^2(\hat{K})$ und $H_k f := (G_k f)^\vee$, wobei $k \in \mathbb{Z}_+$. Dann ist $H_k f \in D$, und

$$N_k f(x) := \int_{\hat{K}} (\Phi(\chi))^k \hat{f}(\chi)\chi(x)\, d\pi_K(\chi), \quad x \in K,$$

ist Repräsentant von $H_k f$ aus $C_0(K)$. (Für $k = 1$ ist $N_1 = N$ in der Notation des Beweises von Satz 5.17.)
Da für $t \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\,\Phi^k \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{t\Phi}$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\hat{K}$ und da $\operatorname{supp}(\hat{f})$ kompakt ist, ergeben sich für $R_{\mu_t} f$ jeweils die Reihendarstellungen (vgl. dazu auch den Beweis von Satz 5.17)

$$R_{\mu_t} f = \mu_t * f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, N_k f$$

in $C_0(K)$ (wobei hier $f = f_1$ wie in (5.17)) und

$$R_{\mu_t} f = \mu_t * f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, H_k f$$

in $L^2(K)$.
$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto R_{\mu_t} f \in C_0(K)$ bzw. $L^2(K)$ lässt sich dann zu einer ganzen analytischen Funktion in $\mathbb{C}$ fortsetzen, denn für $k \in \mathbb{Z}_+$ gilt einerseits

$$\|N_k f\|_\infty \leq \|\Phi_{|L}\|_\infty^k \|\hat{f}\|_1$$

und andererseits

$$\|H_k f\|_2 = \|G_k f\|_2 \leq \|\Phi_{|L}\|_\infty^k \|\hat{f}\|_2,$$

wenn dabei $L := \mathrm{supp}(\hat{f})$ den kompakten Träger bezeichnet. Für $z \in \mathbb{C}$ sind daher die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} N_k f \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} H_k f$$

absolut konvergent. Somit erhält man:

Korollar 5.23. *Ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$, so sind die Elemente von D jeweils ganze analytische Vektoren für $(R_{\mu_t})_{t\geq 0}$ im Sinne der Definition aus [13] (vgl. S. 30). Dies gilt sowohl auf $C_0(K)$ als auch auf $L^2(K)$.*

Bemerkung 5.24. Die Definition in [13] ist zwar für Ein-Parameter-*Gruppen* formuliert, lässt sich aber analog für Ein-Parameter-*Halbgruppen* (vgl. die Definition in [13]), speziell also für Kontraktionshalbgruppen der Klasse (C_0), treffen.

(3) Aus Satz 5.17 und Korollar 5.23 ergibt sich unmittelbar:

Korollar 5.25. *Ist $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$, so ist die Menge $\mathcal{A}$ der ganzen analytischen Vektoren für $(R_{\mu_t})_{t\geq 0}$ ein Kernbereich für den infinitesimalen Generator von $(R_{\mu_t})_{t\geq 0}$ (sowohl auf $C_0(K)$ als auch auf $L^2(K)$).*

Aus der Theorie der Ein-Parameter- (Halb-) Gruppen sind die folgenden Resultate bekannt: In Theorem 1.48 in [13] wird bewiesen, dass für Ein-Parameter-Gruppen $(T_t)_{t\geq 0}$ die Menge der ganzen analytischen Vektoren dicht im zugrunde liegenden Banachraum B und ein Kernbereich für den Generator von $(T_t)_{t\geq 0}$ ist. Für Halbgruppen muss der erste Teil dieser Aussage nicht erfüllt sein (vgl. Beispiel 1.50 in [13]), ist jedoch die Dichtheit der Menge der ganzen analytischen Vektoren gegeben, so folgt aus Theorem 1.9 in [13] oder auch Theorem 3.1 in [11] ebenfalls, dass diese ein Kernbereich für den Generator ist. Die Aussage von Korollar 5.25 erhält man somit auch mit der Dichtheit von D in $C_0(K)$ bzw. $L^2(K)$ und Korollar 5.23.

Im Zusammenhang mit Kernbereichen für den infinitesimalen Generator von Kontraktionshalbgruppen von Faltungsoperatoren wird nun abschließend gezeigt, dass sich der für lokalkompakte Gruppen gültige Satz von F. Hirsch (vgl. dazu [23], Satz 4.1) im Falle $\{e\}$-stetiger Faltungshalbgruppen auf Hypergruppen übertragen lässt. Dabei werden die Faltungsoperatoren als Operatoren auf $C_0(K)$ betrachtet, wobei K eine beliebige, nicht notwendig kommutative, Hypergruppe (mit abzählbarer Basis der Topologie) ist.

Satz 5.26 (F. Hirsch). *Es sei K eine Hypergruppe und $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine $\{e\}$-stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}^1(K)$. $(T_t)_{t\geq 0} = (R_{\mu_t})_{t\geq 0}$ sei die zugehörige Kontraktionshalbgruppe der Klasse (C_0) der Faltungsoperatoren (als Operatoren auf $C_0(K)$). A bezeichne den infinitesimalen Generator von $(T_t)_{t\geq 0}$. Es sei $D \subseteq D(A)$ ein dichter Unterraum von $C_0(K)$, und es gelten*

(i) $R_x D \subseteq D$ für alle $x \in K$ und

(ii) $S_x D \subseteq D$ für alle $x \in K$,

wobei $R_x := R_{\varepsilon_{x^-}}$, d.h. $R_x f(y) = f(x * y)$ für $f \in C_0(K)$ und $y \in K$, und $S_x f := f * \varepsilon_{x^-}$ für $f \in C_0(K)$, d.h. $S_x f(y) = f(y * x)$ für alle $y \in K$ (jeweils für $x \in K$).
Dann ist D ein Kernbereich für A.

Dem Beweis des Satzes, welcher analog zum Fall lokalkompakter Gruppen in [23] geführt wird, werden zunächst einige Bemerkungen über verwendete Notationen und Zusammenhänge vorangestellt.

Bemerkung 5.27. (a) Für $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$ bezeichne S_μ den (Rechts-) Faltungsoperator

$$\begin{aligned} S_\mu : C_0(K) &\rightarrow C_0(K) \\ f &\mapsto S_\mu f := f * \mu. \end{aligned}$$

Es ist dann $S_\mu \in L(C_0(K))$ mit $\|S_\mu\| \leq \|\mu\|$, und für $x \in K$ gilt $S_x = S_{\varepsilon_{x^-}}$ in der Notation aus Satz 5.26.

(b) Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}^b(K)$ gilt die Vertauschungsrelation

$$R_\mu S_\nu = S_\nu R_\mu \tag{5.21}$$

(vgl. 1.2.18 in [10]).

(c) Der infinitesimale Generator A von $(T_t)_{t\geq 0}$ im obigen Satz ist *invariant* (vgl. Definition 4.1 in [23] für den Gruppenfall), d.h. es gelten

(i) $S_x D(A) \subseteq D(A)$ für alle $x \in K$ sowie

(ii) $S_x A = A S_x$ für alle $x \in K$,

denn:
Ist $x \in K$, so gilt für jedes $f \in D(A)$ und $h > 0$

$$\begin{aligned} \|h^{-1}(T_h S_x f - S_x f) - S_x A f\|_\infty &= \|h^{-1}(S_x T_h f - S_x f) - S_x A f\|_\infty \\ &\leq \|h^{-1}(T_h f - f) - A f\|_\infty \end{aligned}$$

wegen (5.21) und $\|S_x\| \leq 1$.

(d) Nach Hilfssatz 1.2 in [23] ist der infinitesimale Generator A von $(T_t)_{t\geq 0} \subseteq L(C_0(K))$ *dissipativ* (vgl. Definition 1.2 in [23]), d.h. für $f \in D(A)$ und $x \in K$ mit $f(x) = \|f\|_\infty$ folgt $\mathrm{Re}(Af(x)) \leq 0$.

Nach diesen Vorbereitungen wird nun der Satz von Hirsch bewiesen.

Beweis von Satz 5.26. D ist genau dann ein Kernbereich für A, wenn für ein (und damit für alle) $\lambda > 0$ $(\lambda I - A)D$ dicht in $C_0(K)$ ist. Diese Charakterisierung erhält man unmittelbar aus 6.3 bzw. 5.19 in Kapitel III in [36], wobei sich die Aussage aus 5.19 aus der Tatsache ergibt, dass D genau dann ein Kernbereich für A ist, wenn zu jedem $f \in D(A)$ eine Folge $(f_n) \subseteq D$ existiert, so dass $f_n \to f$ und $Af_n \to Af$.
Im Folgenden wird nun die Dichtheit von $(I - A)D$ in $C_0(K)$ gezeigt. Es sei $(\tilde{A}, D(\tilde{A}))$ der Abschluss von (A, D).
Ist $f \in D$, so besteht der erste Schritt des Beweises darin, nachzuweisen, dass $S_\nu f \in D(\tilde{A})$ und $\tilde{A}S_\nu f = S_\nu Af$ für alle $\nu \in \mathcal{M}^b(K)$ erfüllt sind, wobei dies ohne Einschränkung für $\nu \in \mathcal{M}^b_+(K)$ bewiesen wird.
Nach Satz 30.4 in [2] existiert zu jedem $\nu \in \mathcal{M}^b_+(K)$ eine Folge $(\nu_n) \subseteq \mathcal{M}^b_+(K)$ diskreter Radon-Maße (vgl. die Satz 30.4 vorangehende Definition in [2]), die vag gegen ν konvergiert. Dabei kann die Folge so gewählt werden, dass $\|\nu_n\| \leq \|\nu\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, womit man schwache Konvergenz erhält. Gilt

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} \varepsilon_{x_i^{(n)}}$$

für $n \in \mathbb{N}$, wobei $k_n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_{k_n}^{(n)} \geq 0$ und $x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)} \in K$, so ist für $x \in K$

$$\begin{aligned} S_{\nu_n} f(x) &= \int_K f(x * y^-)\, d\nu_n(y) \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} f(x * (x_i^{(n)})^-) \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} S_{(x_i^{(n)})^-} f(x), \end{aligned}$$

also

$$S_{\nu_n} f = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} S_{(x_i^{(n)})^-} f \in D$$

aufgrund der Voraussetzung (ii).
Man erhält nun für $n \in \mathbb{N}$ mit der Invarianz von A (vgl. Bemerkung 5.27(c))

$$\begin{aligned}\tilde{A}S_{\nu_n}f &= AS_{\nu_n}f\\ &= \sum_{i=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)}AS_{(x_i^{(n)})^-}f\\ &= \sum_{i=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)}S_{(x_i^{(n)})^-}Af\\ &= S_{\nu_n}Af.\end{aligned}$$

Da $\nu_n \to \nu$, folgt $S_{\nu_n} \to S_\nu$ in der starken Operatortopologie, und wegen $(S_{\nu_n}f)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$, $S_{\nu_n}f \to S_\nu f$ und $\tilde{A}S_{\nu_n}f = S_{\nu_n}Af \to S_\nu Af$ folgt aus der Abgeschlossenheit von $\tilde{A}$ $\;S_\nu f \in D(\tilde{A})$ sowie $\tilde{A}S_\nu f = S_\nu Af$ und somit die Behauptung im ersten Schritt.
Als nächstes wird nun gezeigt, dass mit den Notationen

$$\langle f,\nu\rangle := \int_K f\,d\nu \quad \text{für } f \in C_0(K) \text{ und } \nu \in \mathcal{M}^b(K)$$

und

$$(I-A)D^\perp = \{\nu \in \mathcal{M}^b(K) : \langle f,\nu\rangle = 0 \text{ für alle } f \in (I-A)D\}$$

$(I-A)D^\perp = \{0\}$ gilt.
Sei dazu $\nu \in (I-A)D^\perp$. Sei weiterhin $f \in D$. Es existiert dann ein $x_0 \in K$ mit $|S_{\nu^-}f(x_0)| = \|S_{\nu^-}f\|_\infty$. Setzt man

$$c := \frac{\|S_{\nu^-}f\|_\infty}{S_{\nu^-}f(x_0)},$$

falls $\|S_{\nu^-}f\|_\infty \neq 0$, so gilt also $S_{\nu^-}(cf)(x_0) = cS_{\nu^-}f(x_0) = \|S_{\nu^-}f\|_\infty$. Ohne Einschränkung sei $c = 1$, ansonsten wird in der folgenden Rechnung anstelle der Funktion f die Funktion cf betrachtet. Mit $g := R_{x_0}f$ ist, da $f \in D$, nach Voraussetzung (i) auch $g \in D$. Man erhält nun wegen $\nu \in (I-A)D^\perp$, $\langle g,\nu\rangle = \langle S_{\nu^-}g,\varepsilon_e\rangle$, der Vertauschungsrelation (5.21) sowie $S_{\nu^-}g \in D(\tilde{A})$ mit $\tilde{A}S_{\nu^-}g = S_{\nu^-}Ag$ nach Schritt 1 und schließlich der Wahl von x_0

$$\begin{aligned}0 &= \langle R_{x_0}f,\nu\rangle - \langle AR_{x_0}f,\nu\rangle\\ &= \langle S_{\nu^-}R_{x_0}f,\varepsilon_e\rangle - \langle S_{\nu^-}AR_{x_0}f,\varepsilon_e\rangle\\ &= \langle R_{x_0}S_{\nu^-}f,\varepsilon_e\rangle - \langle \tilde{A}R_{x_0}S_{\nu^-}f,\varepsilon_e\rangle\\ &= \|S_{\nu^-}f\|_\infty - \langle \tilde{A}R_{x_0}S_{\nu^-}f,\varepsilon_e\rangle. \qquad (5.22)\end{aligned}$$

Da A dissipativ ist (vgl. Bemerkung 5.27(d)) und $(A, D(A))$ eine Erweiterung von $(\tilde{A}, D(\tilde{A}))$, ist auch $\tilde{A}$ dissipativ, und somit erhält man aufgrund von $R_{x_0}S_{\nu^-}f(e) = \|S_{\nu^-}f\|_\infty = \|R_{x_0}S_{\nu^-}f\|_\infty$

$$\mathrm{Re}\langle \tilde{A}R_{x_0}S_{\nu^-}f, \varepsilon_e\rangle \leq 0,$$

woraus mit (5.22) $\|S_{\nu^-}f\|_\infty = 0$ folgt.
Also gilt $S_{\nu^-}f = 0$ für alle $f \in D$, und die Dichtheit von D liefert dann $S_{\nu^-}f = 0$ für alle $f \in C_0(K)$. Dies impliziert $\nu^- = 0$ und folglich auch $\nu = 0$. Da $\nu \in (I - A)D^\perp$ beliebig war, ist somit

$$(I - A)D^\perp = \{0\}. \tag{5.23}$$

Wegen (5.23) gilt für den Annullator

$$F^\circ = \{\Phi \in C_0(K)' : \Phi(f) = 0 \text{ für alle } f \in (I - A)D\}$$

des Unterraumes $F := (I-A)D$ von $C_0(K)$, wobei $C_0(K)'$ den Dualraum von $C_0(K)$ bezeichnet, $F^\circ = \{0\}$, und mit einer Folgerung aus dem Bipolarensatz (vgl. Korollar 6.12 in [41]) ergibt sich die Dichtheit von F in $C_0(K)$. Dies liefert die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[1] H. Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4.Auflage, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1991.

[2] H. Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1992.

[3] C. Benson, J. Jenkins, G. Ratcliff, *Bounded K-spherical functions on Heisenberg groups*, J. Funct. Anal. **105** (1992), 409-443.

[4] C. Benson, J. Jenkins, G. Ratcliff, T. Worku, *Spectra for Gelfand pairs associated with the Heisenberg group*, Colloq. Math. **71** (1996), 305-328.

[5] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[6] N.H. Bingham, *Factorization theory and domains of attraction for generalized convolution algebras*, Proc. London Math. Soc. **23** (1971), 16-30.

[7] W.R. Bloom, *Infinitely divisible measures on hypergroups*, in: Probability measures on groups, Proceedings Oberwolfach (1981), Lecture Notes in Mathematics **928**, 1-15, Springer, 1982.

[8] W.R. Bloom, H. Heyer, *Convolution semigroups and resolvent families of measures on hypergroups*, Math. Z. **188** (1985), 449-474.

[9] W.R. Bloom, H. Heyer, *Continuity of convolution semigroups on hypergroups*, J. Theoret. Probab. **1** (1988), 271-286.

[10] W.R. Bloom, H. Heyer, *Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups*, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1995.

[11] P.R. Chernoff, *Some remarks on quasi-analytic vectors*, Trans. Amer. Math. Soc. **167** (1972), 105-113.

[12] H.L. Chow, *On compact affine semigroups*, Semigroup Forum **11** (1975), 146-152.

[13] E.B. Davies, *One-Parameter Semigroups*, Academic Press, London, 1980.

[14] R.M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, California, 1989.

[15] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston London Sydney Toronto, 1966.

[16] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. II, second edition, John Wiley & Sons, New York, 1971.

[17] U. Finckh, *Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie auf einer Kingman-Struktur*, Dissertation, Universität Tübingen, 1986.

[18] B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, Reading Mass, 1968.

[19] B.V. Gnedenko, G. Fahim, *On a transfer theorem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **187** (1969), 15-17.

[20] B.V. Gnedenko, *Limit theorems for sums of a random number of positive independent random variables*, Proceedings 6th Berkeley Symposion on Math. Stat. Prob. vol. 2 (1970), 537-549.

[21] B.V. Gnedenko, *On limit theorems for a random number of random variables*, in: Fourth USSR-Japan Symposion (1982), Lecture Notes in Mathematics **1021**, 167-176, Springer, 1983.

[22] P. Graczyk, C.R.E. Raja, *Classical theorems of probability on Gelfand pairs - Khinchin theorems and Cramer theorem*, Israel Journal of Mathematics **132** (2002), 61-107.

[23] W. Hazod, *Stetige Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen und erzeugende Distributionen*, Lecture Notes in Mathematics **595**, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1977.

[24] W. Hazod, *Stable probabilities on locally compact groups*, in: Probability measures on groups, Proceedings Oberwolfach (1981), Lecture Notes in Mathematics **928**, 183-211, Springer, 1982.

[25] W. Hazod, *Remarks on (semi-) stable probabilities*, in: Probability measures on groups, Proceedings Oberwolfach (1983), Lecture Notes in Mathematics **1064**, 182-203, Springer, 1984.

[26] W. Hazod, *On the limit behaviour of products of a random number of group-valued i.i.d. random variables*, Theory Prob. Appl. **39** (1994), 374-394.

[27] W. Hazod, *On geometric convolutions of distributions of group-valued random variables*, in: Probability measures on groups and related structures XI, Proceedings Oberwolfach (1994), 167-181, World Scientific, 1995.

[28] W. Hazod, E. Siebert, *Stable Probability Measures on Euclidean Spaces and on Locally Compact Groups*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 2001.

[29] H.V. Hebar, N.R. Mohan, R. Vasudeva, *On geometrically infinitely divisible laws and geometric domains of attraction*, Sankhya **55** (1993), 171-179.

[30] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer, Berlin Göttingen Heidelberg, 1963.

[31] H. Heyer, *Probability Measures on Locally Compact Groups*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1977.

[32] H. Heyer, *Einführung in die Theorie Markoffscher Prozesse*, Bibliographisches Institut, Mannheim Wien Zürich, 1979.

[33] H. Heyer, *Functional limit theorems for random walks on one-dimensional hypergroups*, in: Stability problems for stochastic models, Proceedings of the 14th international seminar (1991), Lecture Notes in Mathematics **1546**, 45-57, Springer, 1993.

[34] R. Jajte, *Semistable probability measures on* $\mathbb{R}^N$, Studia Math. **61** (1977), 29-39.

[35] R.I. Jewett, *Spaces with an abstract convolution of measures*, Adv. in Math. **18** (1975), 1-101.

[36] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, second edition, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1976.

[37] J.F.C. Kingman, *Random walks with spherical symmetry*, Acta Math. **109** (1963), 11-53.

[38] L.B. Klebanov, G.M. Maniga, J.A. Melamed, *A problem of Zolotarev and analogs of infinitely divisible and stable distributions in a schema for summing a random number of random variables*, Theory Prob. Appl. **29** (1984), 791-794.

[39] C. Mayer, *Processus de Markov non stationnaires et espace-temps*, Annales de l'Institut Henri Poincaré **4** (1968), 165-177.

[40] M.M. Meerschaert, H.-P. Scheffler, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors*, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[41] R. Meise, D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg, Braunschweig Wiesbaden, 1992.

[42] E.A. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1955), 152-182.

[43] A. Mukherjea, *Limit theorems for probability measures on non-compact groups and semigroups*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **33** (1976), 273-284.

[44] S. Nobel, *Grenzwertsätze für Wahrscheinlichkeitsmaße auf einfach zusammenhängenden nilpotenten Liegruppen*, Dissertation, Universität Dortmund, 1989.

[45] B.v. Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, 2. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1979.

[46] C. Rentzsch, *Stetige Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einer kommutativen Hypergruppe und ihre kanonische Darstellung*, Dissertation, Universität Tübingen, 1997.

[47] C. Rentzsch, M. Voit, *Lévy processes on commutative hypergroups*, Contemp. Math. **261** (2000), 83-105.

[48] H.-P. Scheffler, Hm. Zeuner, *Domains of attraction on Sturm-Liouville hypergroups of polynomial growth*, J. Applied Analysis **5** (1999), 153-170.

[49] M. Sharpe, *Operator stable probability measures on vector groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **136** (1969), 51-65.

[50] R. Spector, *Mesures invariantes sur les hypergroupes*, Trans. Amer. Math. Soc. **239** (1978), 147-165.

[51] K. Telöken, *Grenzwertsätze für Wahrscheinlichkeitsmaße auf total unzusammenhängenden Gruppen*, Dissertation, Universität Dortmund, 1996.

[52] K. Telöken, *Limit theorems for probability measures on totally disconnected groups*, Semigroup Forum **58** (1999), 69-84.

[53] K. Urbanik, *Generalized convolutions*, Studia Math. **23** (1964), 217-245.

[54] M. Voit, *Positive und negative definite functions on the dual space of a commutative hypergroup*, Analysis **9** (1989), 371-387.

[55] K. Yosida, *Functional Analysis*, third edition, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[56] Hm. Zeuner, *One-dimensional hypergroups*, Adv. in Math. **76** (1989), 1-18.

[57] Hm. Zeuner, *Laws of large numbers for hypergroups on* $\mathbb{R}_+$, Math. Ann. **283** (1989), 657-678.

[58] Hm. Zeuner, *Limit theorems for one-dimensional hypergroups*, Habilitationsschrift, Universität Tübingen, 1990.

[59] Hm. Zeuner, *Moment functions and laws of large numbers on hypergroups*, Math. Z. **211** (1992), 369-407.

[60] Hm. Zeuner, *Invariance principles for random walks on hypergroups on* $\mathbb{R}_+$ *and on* $\mathbb{N}$, J. Theoret. Probab. **7** (1994), 225-245.

[61] Hm. Zeuner, *Domains of attraction with inner norming on Sturm-Liouville hypergroups*, J. Applied Analysis **1** (1995), 213-221.

[62] Hm. Zeuner, *Structural properties of hypergroups admitting domains of attraction*, Manuskript, 1997.