Die Tits-Alternative für verallgemeinerte Tetraedergruppen

Volkmar große Rebel

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

Dem Fachbereich Mathematik der Universität Dortmund
vorgelegt im September 2006

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr. H. Blum
Erster Gutachter:	Prof. Dr. G. Rosenberger
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. B. Fine
zusätzlicher Prüfer:	Prof. Dr. K. Menke
Beisitzer:	Dr. F. Klinker

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Dezember 2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eine *verallgemeinerte Tetraedergruppe* ist gegeben durch folgende Präsentierung:

$$\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x, y) = W_2^q(y, z) = W_3^r(x, z) = 1 \rangle,$$

wobei $l, m, n, p, q, r \geq 2$ und jedes $W_i(a, b)$ ein zyklisch reduziertes Wort ist, welches sowohl a als auch b enthält.

Diese Gruppen können angesehen werden als Dreieck von Gruppen, deren Eckengruppen *verallgemeinerte Dreicksgruppen* sind, d.h. Gruppen mit einer Präsentierung der Form

$$\langle x, y \mid x^p = y^q = W^r(x, y) = 1 \rangle,$$

wobei $p, q, r \geq 2$ und $W(x, y)$ ein zyklisch reduziertes Wort in dem freien Produkt $\langle x \mid x^p = 1 \rangle * \langle y \mid y^q = 1 \rangle$ ist.

Ein wichtiger Bestandteil bei der Untersuchung dieser Gruppen sind wesentliche Darstellungen in die $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. In [9] geben Fine, Levin, Roehl und Rosenberger Bedingungen an, unter denen solche Darstellungen existieren.

In der Arbeit [6] zeigen Edjvet, Howie, Rosenberger und Thomas, dass eine endliche verallgemeinerte Tetraedergruppen -mit mindestens einer der p, q, r größer als 3- isomorph zu einer gewöhnlichen Tetraedergruppe ist. In [26] werden alle endlichen verallgemeinerten Tetraedergruppen mit einer Relation der Ordnung 3 klassifiziert und schließlich in [27] die Liste der endlichen verallgemeinerten Tetraedergruppen angegeben bis auf fünf bis heute ungeklärte Fälle.

Eine interessante Fragestellung ist neben der Endlichkeitsfrage die Untersuchung von verallgemeinerten Tetraedergruppen in Bezug auf lineare Eigenschaften, insbesondere die Tits-Alternative. Der Begriff *Tits-Alternative* geht auf ein Theorem von J. Tits [29] zurück, welches besagt, eine endlich erzeugte lineare Gruppe enthält eine nicht-abelsche freie Untergruppe ($F_2 < G$) oder ist virtuell auflösbar, d.h. sie enthält eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index.

Durch die bestmögliche Verbesserung des *Spelling Theorems* durch Kopteva in [17] ist eine Einteilung in hyperbolische, euklidische sowie sphärische Gruppendreiecke möglich. In der Arbeit [12] von Howie und Kopteva wird die Tits-Alternative für den nicht-sphärischen

Fall aufbauend auf die Gersten-Stallings Winkelmethode nachgewiesen.

In dieser Arbeit wird bewiesen, dass die Tits-Alternative auch für verallgemeinerte Tetraedergruppen im sphärischen Fall gilt, falls für die Ordnungen der Relationen gilt: $(p; q; r) \neq (2; 2; 2)$. Verwendet werden dabei -aufbauend auf zahlreiche vorhandene Ergebnisse- unter anderem folgende Methoden:

- Durch wesentliche Darstellungen in die $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ gelingt es mit dem *Fortsetzungssatz* [7][9] durch die Existenz eines nicht-elementaren Bildes die Existenz einer nicht-abelschen freien Untergruppe zu zeigen. Desweiteren können konstruktiv Elemente in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ berechnet werden, die ein nicht-elementares Bild liefern und somit die Existenz einer nicht-abelschen freien Untergruppe von G beweisen [25].

- Bei der Betrachtung von homomorphen Bildern wird als Resultat oft eine Gruppe vom *SN*-Typ stehen, für die die Tits-Alternative gilt [10]. In vielen Fällen wird eine verallgemeinerte Tetraedergruppe eine gewöhnliche Tetraedergruppe als homomorphes Bild besitzen, für die wir die Tits-Alternative explizit im 2. Kapitel beweisen werden.

- Wir verwenden bei der Suche nach geeigneten Untergruppen von endlichem Index einer Gruppe G das *Reidemeister-Schreier-Verfahren*, um Präsentierungen der Untergruppen zu erhalten, durch die wir entscheiden können, ob G eine freie Untergruppe vom Rang 2 enthält oder nicht.

- Als die schwierigste Gruppe erwies sich
$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^5 = z^2 = (xyx^2y^2)^2 = (y^2z)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$
Alle theoretischen Überlegungen schlugen fehl. Letztlich wurde mit Hilfe des algorithmischen Programms GAP [30] eine Liste von Untergruppen vom Index 13 erzeugt. Eine dieser Untergruppen lieferte das gewünschte Resultat.

Diese Arbeit baut sich auf wie folgt:
Im 2. Kapitel wird -aufbauend auf die im 1. Kapitel geschaffenen Grundlagen- die Tits-Alternative für gewöhnliche Tetraedergruppen in Abhängigkeit von den Ordnungen der Relationen mit Hilfe der Coxetermatrix nachgewiesen.

Im 3. bis 6. Kapitel wird schließlich die Tits-Alternative im sphärischen Fall nachgewiesen, sofern $(p; q; r) \neq (2; 2; 2)$. Durch die Einteilung in euklidische, hyperbolische und sphärische Gruppendreiecke bleiben (bis auf Isomorphie) für den sphärischen Fall 3 Gruppentypen übrig:

S.1. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x, y) = (y^\gamma z^\delta)^2 = (x^\varepsilon z^\zeta)^2 = 1\rangle$,
S.2. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^\alpha y^\beta)^p = (y^\gamma z^\delta)^2 = (x^\varepsilon z^\zeta)^3 = 1\rangle,\ p = 3, 4, 5$,
S.3. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (x^\varepsilon z^\zeta)^3 = 1\rangle$.

Im 7. Kapitel betrachten wir kurz den Ausnahmefall $(p; q; r) \neq (2; 2; 2)$ und weisen die Tits-Alternative unter besonderen Voraussetzungen nach.

An dieser Stelle möchte ich mich recht herzlich bei Herrn Prof. Dr. G. Rosenberger bedanken. Zum einen für die stets sehr freundliche Arbeitsatmosphäre am Lehrstuhl, zum anderen natürlich für die sehr gute Betreuung und Unterstützung durch zahlreiche interessante Gespräche.

Diese Arbeit widme ich Nina und Max, die mich in der arbeitsreichen Zeit stets unterstützend begleitet haben.

Kapitel 1

Grundlagen und Definitionen

1.1 Dreiecks- und Tetraedergruppen

Eine *gewöhnliche Dreiecksgruppe* ist eine Gruppe mit Präsentierung

$$\langle x, y \mid x^p = y^q = (xy)^r = 1 \rangle,$$

wobei p, q, und r ganze Zahlen größer 1 sind. Die Terminologie Dreiecksgruppe kommt von folgender Konstruktion:
Betrachte ein Dreieck $\triangle$ in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ mit Winkeln $\pi/_p$, $\pi/_q$ und $\pi/_r$. Solch ein Dreieck existiert in $\mathbb{H}^2$ genau dann, wenn $1/_p + 1/_q + 1/_r < 1$. Sind p, q, r ganzzahlig, so bilden die Spiegelungen R_1, R_2 und R_3 an den Seiten des $\triangle$ eine diskrete Untergruppe der Isometrien $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ mit Präsentierung

$$\triangle^*(p, q, r) = \langle R_1, R_2, R_3 \mid R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1R_2)^p = (R_2R_3)^q = (R_3R_1)^r = 1 \rangle.$$

Die orientierungstreue Untergruppe $\triangle(p, q, r)$ wird erzeugt durch $x = R_1R_2$ und $y = R_2R_3$ mit Präsentierung

$$\triangle(p, q, r) = \langle x, y \mid x^p = y^q = (xy)^r = 1 \rangle.$$

Die gleiche Konstruktion kann in der euklidischen oder sphärischen Ebene durchgeführt werden. In beiden Fällen sind die möglichen Tripel $(p; q; r)$ eingeschränkt. Für ein Dreieck $\triangle$ in der euklidischen Ebene erhalten wir $1/_p + 1/_q + 1/_r = 1$. Mit $2 \leq p \leq q \leq r$ erhalten wir genau drei mögliche Tripel: $(2; 3; 6), (2; 4; 4)$ und $(3; 3; 3)$. Zuletzt, falls $1/_p + 1/_q + 1/_r > 1$, dann erhalten wir ein Dreieck $\triangle$ im sphärischen Fall. Mit $2 \leq l \leq m \leq p$ erhalten wir die möglichen Tripel: $(2; 2; \varepsilon), (2; 3; 3), (2; 3; 4)$ und $(2; 3; 5)$. Die resultierenden Dreiecksgruppen können treu in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ dargestellt werden und beschreiben die endlichen Symmetriegruppen regulärer Körper im $\mathbb{R}^3$, dabei gilt $\triangle(2, 2, \varepsilon) \cong D_{2\varepsilon}$, $\triangle(2, 3, 3) \cong A_4$, $\triangle(2, 3, 4) \cong S_4$ und $\triangle(2, 3, 5) \cong A_5$.

Natürlicherweise stellt sich die Frage der Endlichkeit dieser Gruppen. Es gilt folgender Satz, der die Endlichkeit eindeutig klassifiziert:

Satz 1.1. *Eine gewöhnliche Dreiecksgruppe* $G = \langle x, y \mid x^p = y^q = (xy)^r = 1 \rangle$ *ist*

a) unendlich, falls $1/_p + 1/_q + 1/_r \leq 1$, *b) endlich, falls* $1/_p + 1/_q + 1/_r > 1$.

Eine *verallgemeinerte Dreiecksgruppe* ist eine Gruppe mit Präsentierung

$$\langle x, y \mid x^p = y^q = W^r(x, y) = 1 \rangle,$$

wobei $W(x, y)$ ein zyklisch reduziertes Wort (keine echte Potenz) der Form

$$x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \cdots x^{\alpha_k} y^{\beta_k}, \text{ mit } k \geq 1, \quad 0 < \alpha_i < p, \quad 0 < \beta_i < q \ \forall i.$$

Die Endlichkeitsfrage lässt sich hier nicht so leicht beantworten wie bei den gewöhnlichen Dreiecksgruppen, jedoch gelang es Howie, Levai, Metaftsis, Rosenberger, Souvignier und Thomas, vgl. [13] und [18] , eine vollständige Klassifizierung vorzunehmen, so dass eine endliche verallgemeinerte Dreiecksgruppe, die keine gewöhnlichen Dreiecksgruppe ist, bis auf Äquivalenz nur 14 verschiedene Präsentierungen besitzen kann.

Mit dem Begriff *Äquivalenz* sei hier folgendes gemeint:
Wir betrachten zwei zyklisch reduzierte Wörter $W, W' \in \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$ als *äquivalent*, falls wir eines auf das andere transformieren können durch eine Folge folgender Operationen:

1. zyklische Permutation
2. Invertierung
3. Automorphismen von $\mathbb{Z}_p$ oder $\mathbb{Z}_q$
4. Vertauschen der zwei freien Faktoren, falls $p = q$.

Sind zwei Wörter äquivalent, so nennen wir auch die zugehörigen verallgemeinerten Dreiecksgruppen äquivalent.

Die natürliche 3-dimensionale Analogie einer Dreiecksgruppe ist die *Tetraedergruppe*. Betrachte einen Tetraeder T im 3-dimensionalen hyperbolischen, euklidischen oder sphärischen Raum $\mathbb{X}$. Die Spiegelungen $R_i,\ i = 1, \ldots, 4$ an den Seitenflächen von T erzeugen eine diskrete Untergruppe der Isometrien $\mathrm{Isom}(\mathbb{X})$ und wir betrachten wieder die Untergruppe der orientierungstreuen Isometrien $\triangle(T)$ erzeugt durch die Drehungen $x = R_1R_2, y = R_1R_3$ und $z = R_1R_4$ mit Präsentierung

$$\triangle(T) = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (xy^{-1})^p = (yz^{-1})^q = (zx^{-1})^r = 1 \rangle.$$

Allgemein definieren wir:

Definition 1.2 (Coxeter). *[1],[2] und [3]*
Eine gewöhnliche Tetraedergruppe *ist eine Gruppe G mit einer Präsentierung der Form*

$$\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (xy^{-1})^p = (yz^{-1})^q = (zx^{-1})^r = 1 \rangle, \tag{1.1}$$

wobei $l, m, n, p, q, r \geq 2$.

Wir bilden das semi-direkte Produkt von G mit einer zyklischen Gruppe $\langle t\rangle$ der Ordnung 2 und erhalten

$$\langle t,x,y,z \mid t^2 = x^l = y^m = z^n = (xtyt)^p = (ytzt)^q = (ztxt)^r = (xt)^2 = (yt)^2 = (zt)^2 = 1\rangle.$$

Führen wir nun Erzeugende $u = xt, v = yt$ und $w = zt$ ein und eliminieren anschließend x, y und z, so erhalten wir die Präsentierung

$$\langle t,x,y,z \mid t^2 = u^2 = v^2 = w^2 = (tu)^l = (tv)^m = (tw)^n = (uv)^p = (vw)^q = (uw)^r = 1\rangle.$$

Diese Gruppe ist genau dann endlich, wenn die Coxeter Matrix C

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\frac{\pi}{l}) & -\cos(\frac{\pi}{m}) & -\cos(\frac{\pi}{n}) \\ -\cos(\frac{\pi}{l}) & 1 & -\cos(\frac{\pi}{p}) & -\cos(\frac{\pi}{r}) \\ -\cos(\frac{\pi}{m}) & -\cos(\frac{\pi}{p}) & 1 & -\cos(\frac{\pi}{q}) \\ -\cos(\frac{\pi}{n}) & -\cos(\frac{\pi}{r}) & -\cos(\frac{\pi}{q}) & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

positive Determinante hat.

Genau wie bei den Dreiecksgruppen liegt folgende Verallgemeinerung nahe:

Definition 1.3 (Vinberg).
Eine verallgemeinerte Tetraedergruppe *ist eine Gruppe G mit einer Präsentierung der Form*

$$\langle x,y,z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x,y) = W_2^q(y,z) = W_3^r(x,z) = 1\rangle \tag{1.3}$$

wobei $l,m,n,p,q,r \geq 2$ und $W_i(a,b),\ i = 1,2,3$ ein zyklisch reduziertes Wort (keine echte Potenz) in dem freien Produkt aus a und b ist, welches a und b enthält.

Diese Gruppen tauchen in vielen verschiedenen Zusammenhängen auf, nicht zuletzt als Untergruppen verallgemeinerter Dreiecksgruppen. Auch hier stellt sich ersteinmal die Frage der Endlichkeit. Viele Mathematiker, u.a. Edjvet, Fine, Howie, Kopteva, Maclachlan, Levin, Rosenberger, Scheer, Thomas, Williams, haben sich direkt oder indirekt mit der Frage der Endlichkeit beschäftigt. Jedoch steht eine vollständige Klassifizierung bis heute noch aus. Bei exakt 5 Gruppen (bis auf Äquivalenz) ist nocht nicht bekannt, ob sie endlich oder unendlich sind, vgl. [26],[27].
Auch hier gehen wir auf den Begriff *Äquivalenz* näher ein.
Einige Operationen, wie z. B. das Ersetzen eines Erzeugenden durch dessen Inverses, verändern die Gruppe -gegeben durch ihre Präsentierung- nicht. In diesem Sinne gelten zwei Präsentierungen P_1 und P_2 als *äquivalent*, falls P_2 als Folge folgender Operationen aus P_1 entstanden ist.

1. Ersetze einen Erzeuger a der Ordnung k durch einen neuen Erzeuger $d = a^\alpha$, wobei $\mathrm{ggT}(k,\alpha) = 1$, und verändere die Relationen dementsprechend.

2. Wende eine Permutation auf die Erzeuger x, y und z an.

3. Ist $V_i(a,b)$ ein zyklisch reduziertes Wort konjugiert zu $W_i(a,b)$ in dem freien Produkt von a und b, so ersetze die Relation $W_i^{k_i}(a,b)$ durch $V_i^{k_i}(a,b)$, wobei $k_i \in \{p,q,r\}$.

4. Ersetze die Relation $W_i^{k_i}(a,b)$ durch $V_i^{k_i}(a,b)$, wobei $V_i(a,b)$ das Inverse von $W_i(a,b)$ ist.

5. Ist a ein Erzeuger der Ordnung 2 und b ein Erzeuger der Ordnung k, gilt weiterhin $\mathrm{ggT}(k,\alpha) = 1$, $\mathrm{ggT}(k,\beta) = 1$ und $W(a,b) = (ab^{\alpha})^2$, so ersetze $W(a,b)$ durch $V(a,b) = (ab^{\beta})^2$.

Sind zwei Präsentierungen P_1 und P_2 äquivalent, so nennen wir auch die zugehörigen verallgemeinerten Tetraedergruppen äquivalent.

Da die Endlichkeit einer Gruppe eine wichtige Rolle spielt bei der Untersuchung der Tits-Alternative, sind die beiden folgenden Theoreme elementar, nachzulesen in [7]:

Theorem 1.4. *Eine verallgemeinerte Tetraedergruppe (1.3) ist unendlich, falls*

$$1/_p + 1/_q + 1/_r \leq 1.$$

Theorem 1.5. *Eine verallgemeinerte Tetraedergruppe (1.3) ist unendlich, falls*

$$1/_l + 1/_m + 1/_p < 1.$$

Natürlich gilt aus Symmetriegründen auch die Unendlichkeit für die Fälle
$1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ bzw. $1/_l + 1/_n + 1/_r < 1$.

1.2 Lineare Eigenschaften von Dreiecks- und Tetraedergruppen

Definition 1.6 (Tits). *[29]*
Eine Gruppe G erfüllt die Tits-Alternative, wenn G entweder eine nicht-abelsche freie Untergruppe vom Rang 2 besitzt oder virtuell auflösbar ist, das heisst, G enthält eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index.

Satz 1.7. *Eine endlich erzeugte Lineare Gruppe ist entweder virtuell auflösbar oder enthält eine nicht-abelsche freie Untergruppe.*

Unter einer *Linearen Gruppe* verstehen wir eine Untergruppe der $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Im gewissen Sinne verhalten sich Gruppen, die die Tits-Alternative erfüllen, wie Lineare Gruppen, obwohl sie nicht im direktem Zusammenhang zu ihnen stehen.
Die Tits-Alternative wurde zum Beispiel nachgewiesen für *Ein-Relator-Gruppen* (Karrass & Solitar), *Coxetergruppen* (Margulis & Vinberg, Noskov & Vinberg) und Untergruppen von *Gromov hyperbolischen Gruppen* (Gromov).

Vermutung 1.8 (Rosenberger).
Verallgemeinerte Dreieckgruppen erfüllen die Tits-Alternative.

Dieser Vermutung gehen seit Jahren namenhafte Mathematiker nach, so z.B. (in alphabetischer Reihenfolge):
Barkovich, Benyash-Krivets, Fine, Hennig, Howie, Kopteva, Levai, Levin, Metaftsis, Rosenberger, Souvignier, Stille, Thomas und Williams.
Diese Vermutung ist bis heute noch nicht vollständig bewiesen, es bleiben folgende (schwierige) Fälle zu betrachten:

$$(p;q;r) = (3;3;2),\ (3;5;2) \text{ und } (2;m;2) \text{ mit } m = 3, 4 \text{ oder } 5,$$

wobei $W(x,y)$ Blocklänge > 8 im freien Produkt $\langle x \rangle * \langle y \rangle$ hat.

Die gleiche Fragestellung stellt sich für Verallgemeinerte Tetraedergruppen.

Vermutung 1.9.
Verallgemeinerte Tetraedergruppen erfüllen die Tits-Alternative.

1.3 Methoden und bekannte Resultate

Die $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ ist definiert als Faktorgruppe der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$:

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1\},$$

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/_{\{-E,E\}}.$$

Bemerkung 1.10.
Wir verwenden trotz leichter Zweideutigkeit den Term der Spur einer Matrix $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ nach geeigneter Vorzeichenfestlegung auch für Elemente der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Folgender Satz ermöglicht es uns, leicht Elemente in der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ mit vorgegebenen Ordnungen zu konstruieren.

Satz 1.11.
Sei $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

$$A^m = 1 \Leftrightarrow \mathrm{tr}(A) = \pm 2\cos(\frac{r\pi}{m}),\ 1 \leq r < m,\ \mathrm{ggT}(r,m) = 1.$$

Bemerkung 1.12.
Für $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ gelten folgende Spurformeln:

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB^{-1})$$

und

$$\mathrm{tr}([A,B]) = \mathrm{tr}^2(A) + \mathrm{tr}^2(B) + \mathrm{tr}^2(AB) - \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(AB) - 2.$$

Definition 1.13.
Eine Untergruppe Γ der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *heißt* elementar*, falls der Kommutator für zwei Elemente unendlicher Ordnung stets Spur* 2 *hat.*

Bemerkungen 1.14.
Obige Definition ist äquivalent zu:
Besitzen je zwei Elemente unendlicher Ordnung einer Gruppe G mindestens einen gemeinsamen Fixpunkt, so ist G elementar*.*
Eine Untergruppe Γ der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *heißt* reduzibel *oder* streng elementar*, falls der Kommutator für je zwei Elemente Spur* 2 *besitzt. Eine reduzible Untergruppe der* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *ist metabelsch und damit insbesondere auflösbar. Wir nennen eine Untergruppe der* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *irreduzibel, falls sie nicht reduzibel ist. Eine irreduzible Untergruppe der* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *beinhaltet immer zwei Elemente A und B mit* $\mathrm{tr}([A,B]) \neq 2$.

Definition 1.15.
Sei G definiert durch die Präsentierung

$$\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x,y) = W_2^q(y,z) = W_3^r(x,z) = 1\rangle.$$

Eine Darstellung ρ von G in eine lineare Gruppe H heißt wesentliche Darstellung *von G, falls $\rho(x), \rho(y)$ und $\rho(z)$ Ordnungen l, m, n sowie $\rho(W_1(x,y)), \rho(W_2(y,z))$ und $\rho(W_3(x,z))$ Ordnungen p, q, r haben.*

Wesentliche Darstellungen in die Matrixgruppe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ spielen bei der Untersuchung von verallgemeinerten Tetraedergruppen eine wichtige Rolle. Besitzt G eine wesentliche Darstellung ρ in die $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ mit nicht-elementaren Bild, dann enthält $\rho(G)$ und somit auch G eine nicht-abelsche freie Untergruppe.
Natürlicherweise stellt sich die Frage nach der Existenz solch einer hilfreichen Darstellung; diese ist gesichert durch das folgende

Theorem 1.16. *[10]*
Sei G eine verallgemeinerte Tetraedergruppe mit Präsentierung

$$\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x,y) = W_2^q(y,z) = W_3^r(x,z) = 1\rangle.$$

Dann besitzt G eine wesentliche Darstellung in die $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Bemerkungen 1.17.
Es sei G eine verallgemeinerte Tetraedergruppe in obiger Notation gegeben. Weiter sei $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *eine wesentliche Darstellung von G. Betrachten wir die von $\rho(x) = X$ und $\rho(y) = Y$ erzeugte Untergruppe der* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$*, so können wir, eventuell nach geeigneter Konjugation, die beiden Erzeugenden wie folgt wählen:*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \nu \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y(w) = \begin{pmatrix} w & \mu w - w^2 - 1 \\ 1 & \mu - w \end{pmatrix} \quad \text{mit } w \in \mathbb{C}.$$

Dabei sind $X, Y(w) \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *und* $\nu = 2\cos\frac{\pi}{l},\ \mu = 2\cos\frac{\pi}{m}$.
Im folgenden werden wir häufiger mit Elementen der Ordnung 5 *in der* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *konfrontiert, deshalb sei* $\lambda := 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ *fixiert. Weitere Möglichkeiten für die Spur eines Elementes der Ordnung* 5 *in der* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *sind* $\lambda - 1$, $1 - \lambda$ *und* $-\lambda$. *Es gilt* $\lambda^2 = \lambda + 1$.
Genauso werden häufiger Elemente der Ordnung 3 *in der* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *auftauchen (also Elemente mit* $\mathrm{tr}(X) = \pm 1$*), dafür werden die komplexen dritten Einheitswurzeln benötigt:* $\rho := -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ *mit* $\rho + \dfrac{1}{\rho} = -1$.

Eine verallgemeinerte Tetraedergruppe

$$\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x,y) = W_2^q(y,z) = W_3^r(x,z) = 1\rangle$$

kann angesehen werden als ein *Gruppendreieck*, d.h. als Kolimes des Diagramms der Gruppen und der injektiven Gruppenhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
 & & G_1 & & \\
 & C \arrow[ur] \arrow[dl] & & A \arrow[ul] \arrow[dr] & \\
G_3 & & B \arrow[ll] \arrow[rr] & & G_2
\end{tikzcd}$$

wobei

$$\begin{aligned}
G_1 &= \langle x_1, y_1 \mid x_1^l = y_1^m = W_1^p(x_1,y_1) = 1\rangle,\\
G_2 &= \langle y_2, z_1 \mid y_2^m = z_1^n = W_2^q(y_2,z_1) = 1\rangle,\\
G_3 &= \langle z_2, x_2 \mid z_2^n = x_2^l = W_3^r(z_2,x_2) = 1\rangle.
\end{aligned}$$

$$A = \langle y_1\rangle \cong \langle y_2\rangle, \quad B = \langle z_1\rangle \cong \langle z_2\rangle, \quad C = \langle x_1\rangle \cong \langle x_2\rangle.$$

Wir bezeichnen die Gruppen G_1, G_2 und G_3 als *Eckengruppen* und die Gruppen A, B und C als *Kantengruppen*.

Definition 1.18 (Gersten-Stallings). *[28]*
Gegeben seinen zwei Untergruppen A *und* B *einer Gruppe* G. *Die Inklusionen* $A \hookrightarrow G$ *und* $B \hookrightarrow G$ *bestimmen einen Homomorphismus* $\phi : A * B \to G$.
Der Winkel $(G; A, B)$ *zwischen* A *und* B *ist wie folgt definiert: Ist* ϕ *injektiv, so setze* $(G; A, B) := 0$, *andernfalls sei* $(G, A, B) := \pi/n$, *wobei* $2n$ *die minimale Länge eines nicht-trivialen Elementes aus* $\ker(\phi)$.

Im Allgemeinen ist es nicht einfach, Winkel zwischen Untergruppen in einer Gruppe zu berechnen. Das folgende Theorem ist hierfür sehr geeignet im Falle von verallgemeinerten Dreiecksgruppen.

Theorem 1.19 (Spelling Theorem). *[6]*
Sei $H = \langle x, y \mid x^p = y^q = W^r(x, y) = 1 \rangle$ *verallgemeinerte Dreiecksgruppe mit*

$$W(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \dots x^{\alpha_k} y^{\beta_k}, \quad 0 < \alpha_i < p,\ 0 < \beta_i < q,\ i = 1, \dots, k$$

und sei

$$V(x, y) = x^{\gamma_1} y^{\delta_1} \dots x^{\gamma_l} y^{\delta_l}, \quad 0 < \gamma_i < p,\ 0 < \delta_i < q,\ i = 1, \dots, l$$

ein Wort, welches gleich 1 *ist in* H.
Dann gilt $l \geq k \cdot (r - 1) + 1$.

Im Jahr 2004 verschärften Howie und Kopteva in [12] die Wortlänge von V bestmöglichst.

Theorem 1.20 (Howie, Kopteva). *[12]*
Sei H *eine Gruppe mit folgender Präsentierung*

$$\langle x, y \mid x^p = y^q = W^r(x, y) = 1 \rangle,$$

mit

$$W(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \dots x^{\alpha_k} y^{\beta_k}, \quad 0 < \alpha_i < p,\ 0 < \beta_i < q,\ i = 1, \dots, k$$

und sei

$$V(x, y) = x^{\gamma_1} y^{\delta_1} \dots x^{\gamma_l} y^{\delta_l}, \quad 0 < \gamma_i < p,\ 0 < \delta_i < q,\ i = 1, \dots, l$$

ein nicht-triviales Wort, welches gleich 1 *ist in* H.
Dann gilt $l \geq kr$.

Sei nun eine verallgemeinerte Tetraedergruppe

$$G = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x, y) = W_2^q(y, z) = W_3^r(x, z) = 1 \rangle \tag{1.4}$$

gegeben durch den Kolimes der verallgemeinerten Dreiecksgruppen

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle x, y \mid x^l = y^m = W_1^p(x, y) = 1 \rangle, \\ G_2 &= \langle y, z \mid y^m = z^n = W_2^q(y, z) = 1 \rangle, \\ G_3 &= \langle x, z \mid z^n = x^l = W_3^r(x, z) = 1 \rangle, \end{aligned}$$

mit $X = \langle x \mid x^l = 1 \rangle$, $Y = \langle y \mid y^m = 1 \rangle$ und $Z = \langle z \mid z^n = 1 \rangle$. Sei

$$\begin{aligned} W_1(x, y) &= x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \dots x^{\alpha_{k_1}} y^{\beta_{k_1}}, \\ W_2(y, z) &= y^{\gamma_1} z^{\delta_1} \dots y^{\gamma_{k_2}} z^{\delta_{k_2}}, \\ W_3(x, z) &= x^{\varepsilon_1} z^{\zeta_1} \dots x^{\varepsilon_{k_3}} y^{\zeta_{k_3}}. \end{aligned}$$

Nach Theorem (1.20) gilt, falls ein nicht-triviales Wort mit $V(x, y) = 1$ in G_1 ist, dass $V(x, y)$ mindestens die Länge $2k_1$ hat. Der Winkel zwischen den beiden Eckengruppen in G_1 ist somit $(G_1; X, Y) = \pi/_{pk_1}$.

Genauso erhalten wir $(G_2; Y, Z) = \pi/_{qk_2}$ und $(G_3; X, Z) = \pi/_{rk_3}$.
Es folgt

$$(G_1; X, Y) + (G_2; Y, Z) + (G_3; X, Z) = \pi/_{pk_1} + \pi/_{qk_2} + \pi/_{rk_3}. \tag{1.5}$$

Somit erhalten wir eine Einteilung in hyperbolische, euklidische oder sphärische Gruppendreiecke durch

$$\pi/_{pk_1} + \pi/_{qk_2} + \pi/_{rk_3} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \pi.$$

Wir können nun p, q, r und k_i dementsprechend bestimmen, dass wir in der Lage sind, die Präsentierungen im euklidischen sowie sphärischen Fall (bis auf Isomorphie) aufzulisten:

Euklidisch.
E.1. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^\alpha y^\beta)^2 = (y^\gamma z^\delta)^3 = (x^\varepsilon z^\zeta)^6 = 1\rangle$
E.2. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^\alpha y^\beta)^2 = (y^\gamma z^\delta)^4 = (x^\varepsilon z^\zeta)^4 =\rangle$
E.3. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^\alpha y^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^3 = (x^\varepsilon z^\zeta)^3 = 1\rangle$
E.4. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^\alpha y^\beta)^2 = (y^\gamma z^\delta)^3 = (x^{\varepsilon_1} z^{\zeta_1} x^{\varepsilon_2} z^{\zeta_2})^3 = 1\rangle$
E.5. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^\alpha y^\beta)^2 = (y^\gamma z^\delta)^4 = (x^{\varepsilon_1} z^{\zeta_1} x^{\varepsilon_2} z^{\zeta_2})^2 = 1\rangle$
E.6. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^\alpha y^\beta)^2 = (y^{\gamma_1} z^{\delta_1} y^{\gamma_2} z^{\delta_2})^2 = (x^{\varepsilon_1} z^{\zeta_1} x^{\varepsilon_2} z^{\zeta_2})^2 = 1\rangle$
E.7. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^\alpha y^\beta)^2 = (y^\gamma z^\delta)^3 = (x^{\varepsilon_1} z^{\zeta_1} x^{\varepsilon_2} z^{\zeta_2} x^{\varepsilon_3} z^{\zeta_3})^2 = 1\rangle$

Sphärisch.
S.1. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x, y) = (y^\gamma z^\delta)^2 = (x^\varepsilon z^\zeta)^2 = 1\rangle$
S.2. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^\alpha y^\beta)^p = (y^\gamma z^\delta)^2 = (x^\varepsilon z^\zeta)^3 = 1\rangle,\ p = 3, 4, 5$
S.3. $\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (x^\varepsilon z^\zeta)^3 = 1\rangle$

Die Tits-Alternative wurde bereits nachgewiesen sowohl für den hyperbolischen als auch den euklidischen Fall, es gilt:

Theorem 1.21. *[12]*
Sei G eine verallgemeinerte Tetraedergruppe mit Präsentierung der Form

$$\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x, y) = W_2^q(y, z) = W_3^r(x, z) = 1\rangle.$$

a) Gilt $1/_{pk_1} + 1/_{qk_2} + 1/_{rk_3} < 1$, dann enthält G eine nicht-abelsche freie Untergruppe.

b) Gilt $1/_{pk_1} + 1/_{qk_2} + 1/_{rk_3} = 1$, dann enthält G eine nicht-abelsche freie Untergruppe außer im Fall

$$G \cong \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^p = (yz)^q = (zx)^r = 1\rangle$$

mit $1/_p + 1/_q + 1/_r = 1$, dann ist G virtuell auflösbar.

Bemerkung 1.22. *Viele Sätze, die in dieser Arbeit zitiert oder benutzt werden, gelten auch für den Fall, dass erzeugende Elemente unendliche Ordnungen haben. Da die Tits-Alternative für den hyperbolischen und euklidischen Fall bereits nachgewiesen ist, beschränken wir uns in dieser Arbeit auf erzeugende Elemente endlicher Ordnung.*

Im Verlauf dieser Arbeit werden die sehr viel komplizierteren sphärischen Fälle systematisch abgearbeitet, sofern $(p; q; r) \neq (2; 2; 2)$ ist. Der spezielle Fall $(p; q; r) = (2; 2; 2)$ wird in Kapitel 7 angerissen, aber leider nicht vollständig gelöst.

Es gilt folgendes wichtiges Theorem, welches uns erlaubt, mit einer Dreiecksgruppe unter bestimmten Bedingungen zu starten und dann auf den Fall einer Tetraedergruppe zu erweitern:

Theorem 1.23 (Fortsetzungssatz). *[7][9]*
Sei G verallgemeinerte Tetraedergruppe mit Präsentierung der Form

$$\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x, y) = W_2^q(y, z) = W_3^r(x, z) = 1 \rangle,$$

und sei G_1 verallgemeinerte Dreiecksgruppe mit Präsentierung der Form

$$G_1 = \langle x_1, y_1 \mid x_1^l = y_1^m = W_1^p(x_1, y_1) = 1 \rangle.$$

Sei $\rho : G_1 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ wesentliche Darstellung mit $x \mapsto X$, $y \mapsto Y$, und sei zusätzlich eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(1) $\mathrm{tr}([X, Y]) \neq 2$

(2) $\langle X, Y \rangle$ *ist unendliche metabelsche Untergruppe der* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ *und* $(n; q; r) \neq (2; 2; 2)$.

Dann existiert eine wesentliche Darstellung $\tilde{\rho} : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, so dass $\tilde{\rho}(x) = X$ und $\tilde{\rho}(y) = Y$. Insbesondere ist G unendlich, falls $\langle X, Y \rangle$ unendlich.

Bemerkung 1.24. *Ist im Fall (1) die Gruppe $\langle X, Y \rangle$ nicht-elementar, dann enthält G eine nicht abelsche freie Untergruppe.*

Das nachfolgende Theorem wird im Verlauf dieser Arbeit häufig verwendet.

Theorem 1.25. *[10]*
Sei G verallgemeinerte Tetraedergruppe mit Präsentierung der Form

$$\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x, y) = W_2^q(y, z) = W_3^r(x, z) = 1 \rangle.$$

Nehme an, dass $l \leq m$ und $W_1(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \ldots x^{\alpha_k} y^{\beta_k}$ mit $k \geq 1$ und $1 \leq \alpha_i < l$, $1 \leq \beta_i < m$. Nehme weiter an, dass eine der folgenden Bedingungen gelte:

(1) $k \geq 2$ *und eine der folgenden Bedingungen gelte:*

- *(i)* $m \geq 4$ *und* $p \geq 3$,
- *(ii)* $m \geq 3$ *und* $p \geq 4$,
- *(iii)* $l \geq 3$ *und* $p \geq 3$.

(2) $(n; q; r) \neq (2; 2; 2)$, $k \geq 1$ *sowie* $2 \leq l \leq m$ *und* $1/_l + 1/_m + 1/_p < 1$.

Dann enthält G eine nicht-abelsche freie Gruppe.
(Aus Symmetriegründen kann W_1 durch W_2 oder W_3 ersetzt werden.)

Ein wesentlicher Bestandteil für den Beweis von Theorem (1.16) ist das folgende Lemma, welches im Verlauf dieser Arbeit häufiger verwendet werden wird.

Lemma 1.26. *[25]*
Seien $A, B, C, D \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ mit $A \cdot B = C$.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

Setze

$$\vec{d} := \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} := \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(D) \\ \mathrm{tr}(AD) \\ \mathrm{tr}(BD) \\ \mathrm{tr}(CD) \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_3 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_2 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $M \cdot \vec{d} = \vec{r}$ und $\det(M) = \mathrm{tr}([A, B]) - 2$.

Lemma 1.27. *[25]*
Seien $A, B, C, D \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ mit $A \cdot B = C$ wie im obigen Lemma. Weiter sei $\mathrm{tr}([A, B]) \neq 2$ und sei $K = \mathbb{Q}(a_i, b_i, \mathrm{tr}(D), \mathrm{tr}(AD), \mathrm{tr}(BD))$ mit $i = 1, \ldots, 4$. Durch die Determinantenbedingung $\det D = d_1 d_4 - d_2 d_3 = 1$ wird ein quadratisches Polynom $f(t) \in K[t]$ definiert mit höchsten Koeffizient $\alpha_2 = -(\mathrm{tr}([A, B]) - 2)^{-1}$, welches sowohl $\mathrm{tr}(ABD)$, als auch $\mathrm{tr}(A^{-1}B^{-1}D^{-1}) = \mathrm{tr}(BAD)$ als Nullstelle hat.

Diese Lemmata ermöglichen es uns nun, bei vorgegebenen Spuren zweier Elemente sowie die Spur des Produktes (impliziet gegeben durch die zugehörige Relation), die Spuren (und somit die Ordnungen) der Dreierprodukte ABD sowie BAD zu bestimmen.

Ist mindestens einer dieser Spurwerte betragsmäßig echt größer 2, oder komplex, oder reell und betragsmäßig ungleich $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \lambda, \lambda - 1$ oder $1 - \lambda$, so hat das zugehörige Dreierprodukt unendliche Ordnung, vgl. (1.11), und wir erhalten ein nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ und somit folgt die Existenz einer freien Untergruppe vom Rang 2.

Bei der Betrachtung von homomorphen Bildern einer verallgemeinerten Tetraedergruppe G werden wir häufig mit Gruppen vom *SN-Typ* konfrontiert der Form

$$H = \langle a, b, c \mid a^{e_1} = b^{e_2} = c^{e_3} = R_1^{f_1}(a, b) = R_2^{f_2}(a, c) \rangle, \tag{1.6}$$

mit $2 \leq e_1, e_2, e_3, f_1, f_2$ und $R_i(x, y)$ ist ein zyklisch reduziertes Wort in x und y, welches sowohl x als auch y enthält, $i = 1, 2$. Diese Gruppen erfüllen die Tits-Alternative, denn es gilt der folgende

Satz 1.28. *[10]*
Sei H eine Gruppe (1.6) vom SN-Typ , dann erfüllt H die Tits-Alternative.

Da wir allerdings homomorphe Bilder von verallgemeinerten Tetraedergruppen betrachten, benötigen wir die folgende Verschärfung:

Korollar 1.29. *[10] Sei H eine Gruppe vom SN-Typ (1.6) und sei mindestens eines der e_2, e_3, f_1, f_2 echt größer als 2, dann enthält H eine freie Untergruppe vom Rang 2.*

Außerdem werden homomorphe Bilder von verallgemeinerten Tetraedergruppen der Form

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^n = (xy^\beta)^2 = W_2^q(y,z) = W_3^r(x,z) = 1 \rangle$$

mit $\mathrm{ggT}(m, \beta) \geq 2$ im Verlauf dieser Arbeit betrachtet werden. In diesem Fall betrachten wir häufig die Faktorgruppe

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^n = (xy)^2 = W_2^q(y,z) = W_3^r(x,z) = 1 \rangle$$

und weisen für $\bar{G}$ die Existenz einer nicht-abelschen freien Untergruppe nach. In diesem Fall enthält natürlich auch G eine solche.
Im Spezialfall erhalten wir gewöhnliche Tetraedergruppen als homomorphes Bild, die im 2. Kapitel explizit behandelt werden.

Kapitel 2

Die Tits-Alternative für gewöhnliche Tetraedergruppen

Um die Tits-Alternative letztlich für verallgemeinerte Teraedergruppen nachzuweisen, werden zahlreiche Fallunterscheidungen notwendig sein, bei denen teilweise eine Zurückführung auf gewöhnliche Tetraedergruppen erfolgt.
Es ist zwar bekannt, dass für gewöhnliche Tetraedergruppen die Tits-Alternative allgemein gilt, da sie als lineare Gruppen darstellbar sind [15]. Wir benötigen aber explizite Aussagen in Abhängigkeit von den Ordnungen der Relationen. Deshalb beweisen wir zunächst, dass die Tits-Alternative für gewöhnliche Tetraedergruppen erfüllt ist in Abhängigkeit von der Coxetermatrix (1.2):

Satz 2.30. *Sei G eine gewöhnliche Tetraedergruppe mit der Präsentierung*

$$G = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (xy^{-1})^p = (yz^{-1})^q = (zx^{-1})^r = 1 \rangle,$$

wobei $l, m, n \geq 2$ und $p, q, r \geq 2$. Sei C die Coxeter-Matrix (1.2).

(1) Ist $\det C < 0$, so besitzt G eine freie Untergruppe vom Rang 2 (Notation: $F_2 < G$).

(2) Ist $\det C = 0$, so besitzt G entweder eine freie Untergruppe vom Rang 2, oder G ist unendlich und besitzt eine abelsche Untergruppe von endlichem Index.

Im zweiten Fall ist G isomorph zu einer der euklidischen Gruppen

$$\langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^p = (yz)^q = (xz)^r = 1 \rangle \tag{2.1}$$

mit $1/_p + 1/_q + 1/_r = 1$.

Bemerkung 2.31. *Im Fall $\det C > 0$ ist G endlich, vgl. (1.2).*

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Vorarbeit. Es gilt folgendes

Lemma 2.32 (Darstellungssatz). *[10]*
Gegeben sei eine verallgemeinerte Tetraedergruppe (vgl. (1.3))

$$G = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x, y) = W_2^q(y, z) = W_3^r(x, z) = 1 \rangle,$$

mit $l, m, n, p, q, r \geq 2$ *und* $W_i(a, b)$, $i = 1, 2, 3$ *ein zyklisch reduziertes Wort (keine echte Potenz) in dem freien Produkt aus* a *und* b *ist, welches* a *und* b *enthält. Für eine wesentliche Darstellung* $\rho : G_1 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $x \mapsto X$, $y \mapsto Y$ *gelte* $\mathrm{tr}([X, Y]) = 2$ *und außerdem* $(n; q; r) \neq (2; 2; 2)$. *Dann existiert eine freie Untergruppe vom Rang* 2.

Beweis. Nehme an, $x \mapsto X$, $y \mapsto Y$ definiert eine wesentliche Darstellung von G_1 in die $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\mathrm{tr}[X, Y] = 2$. Œ $\langle X, Y\rangle$ sei eine unendliche metabelsche (nicht abelsche) Gruppe. Nach einer geeigneten Konjugation lässt sich folgende Gestalt für X und Y erreichen:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & y_1^{-1} \end{pmatrix}$$

mit $y_2 \neq 0$. Sei

$$Z = \pm \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}),$$

wir erhalten durch $\mathrm{tr}(W_2(Y, Z)) = -2\cos(\frac{\pi}{q})$ und $\mathrm{tr}(W_3(X, Z)) = -2\cos(\frac{\pi}{r})$ zwei nicht-konstante Polynome in $\mathrm{tr}(YZ)$ bzw. $\mathrm{tr}(XZ)$. Wähle Nullstellen dieser zwei Polynome. Nehme weiter an, dass $(\mathrm{tr}(Z), \mathrm{tr}(YZ), \mathrm{tr}(XZ)) \neq (0, 0, 0)$. Dies ist möglich wegen der Bedingung $(n; q; r) \neq (2; 2; 2)$. Wir erhalten ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} z_1 & & & + & z_4 & = & \mathrm{tr}(Z) \\ y_1 z_1 & + & y_2 z_3 & + & y_1^{-1} z_4 & = & \mathrm{tr}(YZ) \\ x_1 z_1 & & & + & x_1^{-1} z_4 & = & \mathrm{tr}(XZ) \end{array}$$

mit eindeutiger Lösung

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{tr}(Z) \cdot x_1^{-1}}{x_1 - x_1^{-1}} + \frac{\mathrm{tr}(XZ)}{x_1 - x_1^{-1}} \\ \frac{-x_1 y_1^{-1} + y_1 x_1^{-1}}{y_2(x_1 - x_1^{-1})} \cdot \mathrm{tr}(Z) + \frac{y_1^{-1} - y_1}{y_2(x_1 - x_1^{-1})} \cdot \mathrm{tr}(XZ) + y_2 \cdot \mathrm{tr}(YZ) \\ \frac{x_1 \cdot \mathrm{tr}(Z)}{x_1 - x_1^{-1}} - \frac{\mathrm{tr}(XZ)}{x_1 - x_1^{-1}} \end{pmatrix}$$

Wir können nun immer erreichen, dass $z_3 \neq 0$ ist. Denn: Ist $z_3 = 0$ und $q \geq 3$, so erhalten wir $z_3 \neq 0$ durch Ersetzen von $\mathrm{tr}(W_2(Y, Z)) = -2\cos(\frac{\pi}{q})$ durch $\mathrm{tr}(W_2(Y, Z)) = +2\cos(\frac{\pi}{q})$, denn die Polynome $\mathrm{tr}(W_2(Y, Z)) - 2\cos(\frac{\pi}{q})$ und $\mathrm{tr}(W_2(Y, Z)) + 2\cos(\frac{\pi}{q})$ haben keine gemeinsame Nullstelle. Analog erhalten wir $z_3 \neq 0$, falls $r \geq 3$.
Ist $q = r = 2$, so ist notwendig $n \geq 3$ wegen $(n; q; r) \neq (2; 2; 2)$. Ersetzen wir hier $\mathrm{tr}(Z)$ durch $-\mathrm{tr}(Z)$ (falls notwendig), so erhalten wir auch in diesem Fall $z_3 \neq 0$.
Damit ist stets $z_3 \neq 0$ erreichbar. Sei $z_3 \neq 0$. Wähle z_2 nun so, dass die Determinantenbedingung $z_1 z_4 - z_2 z_3 = 1$ erfüllt ist. Damit erhalten wir Z.
Wegen $z_3 \neq 0$ ist damit $\langle X, Y, Z\rangle$ nicht-elementar, denn z.B. haben Z und $[X, Y]$ keinen gemeinsamen Fixpunkt, d.h. $\mathrm{tr}(Z, [X, Y]) \neq 2$ und $[X, Y]$ ist (parabolisch) von unendlicher Ordnung. Damit gilt $F_2 < G$. □

Beweis des Satzes. Ist ${}^{1}\!/_{p} + {}^{1}\!/_{q} + {}^{1}\!/_{r} < 1$, so besitzt G eine freie Untergruppe vom Rang 2 (nach Howie, Kopteva, siehe [12]). Sei nun ${}^{1}\!/_{p} + {}^{1}\!/_{q} + {}^{1}\!/_{r} \geq 1$.
Wir setzen wie üblich

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle x, y \mid x^l = y^m = (xy^{-1})^p = 1 \rangle, \\ G_2 &= \langle y, z \mid y^m = z^n = (yz^{-1})^q = 1 \rangle, \\ G_3 &= \langle x, z \mid x^l = z^n = (zx^{-1})^r = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Wir betrachten den Fall ${}^{1}\!/_{l} + {}^{1}\!/_{m} + {}^{1}\!/_{p} < 1$. Dann ist G_1 eine gewöhnliche hyperbolische Dreiecksgruppe, besitzt also insbesondere eine freie Untergruppe vom Rang 2
$\Rightarrow$ G besitzt eine freie Untergruppe vom Rang 2 nach dem Fortsetzungssatz, vgl. (1.23) oder [10].
Sei nun ${}^{1}\!/_{l} + {}^{1}\!/_{m} + {}^{1}\!/_{p} = 1$. Dann ist G_1 eine euklidische Dreiecksgruppe, kann also angesehen werden als eine unendliche, metabelsche Untergruppe der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Nach Korollar 9.3.1 in [10] (vgl. auch (2.32)) besitzt damit G eine freie Untergruppe vom Rang 2, falls $(n; q; r) \neq (2; 2; 2)$. Ist nun ${}^{1}\!/_{l} + {}^{1}\!/_{m} + {}^{1}\!/_{p} = 1$ und $(n; q; r) = (2; 2; 2)$, so hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^2 = (xy^{-1})^p = (yz^{-1})^2 = (zx^{-1})^2 = 1 \rangle,$$

mit $\det C = 0$ und G ist isomorph zur (unendlichen, siehe (1.4)) euklidischen Gruppe

$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ac)^l = (bc)^m = (ab)^p = 1 \rangle.$$

$(x \mapsto ac,\ y \mapsto bc,\ z \mapsto c)$.
Also gilt der Satz für ${}^{1}\!/_{l} + {}^{1}\!/_{m} + {}^{1}\!/_{p} \leq 1$.
Analog gilt der Satz für ${}^{1}\!/_{m} + {}^{1}\!/_{n} + {}^{1}\!/_{q} \leq 1$ sowie für ${}^{1}\!/_{l} + {}^{1}\!/_{n} + {}^{1}\!/_{r} \leq 1$.
Seien nun ${}^{1}\!/_{l} + {}^{1}\!/_{m} + {}^{1}\!/_{p} > 1$, ${}^{1}\!/_{m} + {}^{1}\!/_{n} + {}^{1}\!/_{q} > 1$ und ${}^{1}\!/_{l} + {}^{1}\!/_{n} + {}^{1}\!/_{r} > 1$. Dann sind die gewöhnlichen Dreiecksgruppen G_1, G_2 und G_3 endlich, siehe (1.1).
Weiterhin gilt ${}^{1}\!/_{p} + {}^{1}\!/_{q} + {}^{1}\!/_{r} \geq 1$.
Ist nun ${}^{1}\!/_{p} + {}^{1}\!/_{q} + {}^{1}\!/_{r} = 1$, so enthält G nach Theorem 1 in [12] (Howie und Kopteva) eine freie Untergruppe vom Rang 2, falls $(l; m; n) \neq (2; 2; 2)$. Ist $(l; m; n) = (2; 2; 2)$, so ist $\det C = 0$ und G ist eine der genannten euklidischen Gruppen.
Sei also nun auch ${}^{1}\!/_{p} + {}^{1}\!/_{q} + {}^{1}\!/_{r} > 1$.
Nun werden die einzelnen verbleibenden Fälle der Reihe nach abgearbeitet.

2.1 Fall I: $(l; m) = (2; 2)$

Ist $q = r = 2$, so ist $\det C > 0$, also G endlich.
Sei nun $q \geq 3$ oder $r \geq 3$. Dann ist $2 \leq p \leq 5$ wegen ${}^{1}\!/_{p} + {}^{1}\!/_{q} + {}^{1}\!/_{r} > 1$.
Ist $n = 2$, so ist $\det C > 0$, also ist G endlich.
Sei nun $n \geq 3$:

(1) Sei $p = 5$:
Dann ist $(q;r) = (2;3)$ oder $(q;r) = (3;2)$.
Wegen $(l;m) = (2;2)$ können wir Œ $(q;r) = (2;3)$ annehmen.
Dann gilt $3 \leq n \leq 5$ wegen $1/_l + 1/_n + 1/_r > 1$ mit $(l;r) = (2;3)$ und es ist

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^n = (xy)^5 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Sei nun $3 \leq n \leq 5$:

a) $n = 5$:
Konstruktion einer wesentlichen Darstellung mit nicht-elementaren Bild:
Starte mit $X, Y \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit entsprechenden Ordnungen.
Es gilt $\mathrm{tr}(X) = 0,\ \mathrm{tr}(Y) = 0$.

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \sqrt{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \\ 1 & -\sqrt{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

mit $\mathrm{tr}(XY) = \lambda$.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Z) \\ \mathrm{tr}(XZ) \\ \mathrm{tr}(YZ) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\lambda; \pm(\lambda - 1) \\ \pm 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix};\ \text{wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\mathrm{tr}(XZ)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden)
Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = \frac{-5 + \sqrt{5} \pm \sqrt{1630 - 730\sqrt{5}}}{8\sqrt{5} - 20} \approx 1,309 \mp 0,723i\ \Rightarrow F_2 < G.$$

b) $n = 4$:
Dann hat G folgende Präsentierung,

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = (xy)^5 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Es gilt $F_2 < G$, denn es lässt sich eine wesentliche Darstellung
$\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ konstruieren mit $\rho(G)$ nicht-elementar. Die Möglichkeiten, dass $\rho(G)$ die A_4, A_5 oder S_4 beschreibt, entfällt, da in allen Fällen nicht gleichzeitig ein Element der Ordnung 4 und ein Element der Ordnung 5 auftreten kann. Die Diedergruppen $D_{2\varepsilon}$ kommen als Bild nicht in Frage, da alle Untergruppen von G wieder Diedergruppen darstellen müssen. Zyklische Gruppen kommen als Bild nicht in Frage, da zyklisch insbesondere abelsch impliziert, und wegen $n = 4$ wäre $\rho(G)$ trivial. Widerspruch!
$\Rightarrow\ \rho(G)$ nicht-elementar.

c) Für $n = 3$ ist $\det C > 0$, also G endlich.

(2) Sei $p = 4$:
Dann ist wieder $(q; r) = (2; 3)$ oder $(q; r) = (3; 2)$. Sei wie oben im Fall (1) Œ $(q; r) = (2; 3)$. Dann gilt wieder $3 \leq n \leq 5$ und G hat folgende Präsentierung:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^n = (xy)^4 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

a) $n = 5$:
Dann besitzt G eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G)$ nicht-elementar; insbesondere hat G eine freie Untergruppe vom Rang 2. Die Existenz einer solchen Darstellung ist hier schon deshalb klar, weil eine nicht-abelsche endliche Untergruppe der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, die gleichzeitig ein Element der Ordnung 5 und ein Element der Ordnung 4 enthält, eine Diedergruppe sein muss; und bei einer wesentlichen Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ kann hier $\rho(G)$ keine Diedergruppe sein.

b) Für $n = 4$ ist $\det C = 0$, und G besitzt eine freie Untergruppe vom Rang 2, denn: Sei

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = (xy)^4 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Wir setzen

$$a = x, \;\; b = yxy, \;\; c = z \text{ und } H_1 = \langle a, b, c\rangle.$$

Dann ist H_1 vom Index 2 und

$$H_1 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^4 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ac)^3 = 1\rangle \tag{2.2}$$

$$\cong H_2 = \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^4 = (ab)^2 = (bc^{-1})^2 = (ac)^2 = 1\rangle \tag{2.3}$$

$$\cong H_3 = \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^4 = (ab^{-1})^2 = (bc^{-1})^3 = (ca^{-1})^2 = 1\rangle \tag{2.4}$$

$$\cong H_4 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ac)^4 = 1\rangle. \tag{2.5}$$

Wir zeigen, dass (in der alten Notation)

$$H_2 = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^4 = (xy)^2 = (yz^{-1})^2 = (xz)^2 = 1\rangle$$

eine freie Untergruppe vom Rang 2 enthält. Damit enthalten auch (2.2), (2.4) und (2.5) eine freie Untergruppe vom Rang 2. Dies ist wichtig für die folgenden Überlegungen, da diese Gruppen sich bei den folgenden Rechnungen explizit ergeben. Sei also H_2 gegeben wie oben.
Wir setzen
$a = x, \quad b = zxz^{-1}, \quad c = y, \quad d = zyz^{-1}, \quad e = z^2,$

und $H_5 = \langle a, b, c, d, e\rangle$. Dann ist H_5 vom Index 2 und hat die Präsentierung

$$H_5 = \langle a, b, c, d, e \mid a^3 = b^3 = c^3 = d^3 = e^2 = (ac)^2 = (bd)^2 = abe = dce = 1\rangle.$$

Aus der Relation $abe = 1$ folgt $e = ab$ und somit gilt:

$$H_5 = \langle a, b, c, d \mid a^3 = b^3 = c^3 = d^3 = (ac)^2 = (bd)^2 = (ab)^2 = dcab = 1\rangle,$$

da nun $b = a^{-1}c^{-1}d^{-1}$ ist, folgt

$$H_5 = \langle a, c, d \mid a^3 = c^3 = d^3 = (ac)^2 = (cd)^2 = (dca)^3 = 1\rangle.$$

Setze $g = dc$, ersetze $d = gc^{-1}$ und erhalte in der alten Notation

$$H_5 = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^3 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle$$

mit $\det C = 0$. Wir setzen weiter

$$\begin{array}{lll} r = x, & s = yxy^{-1}, & t = y^{-1}xy, \\ u = zy, & v = yz, & w = y^{-1}zy^{-1}, \end{array}$$

und $H_6 = \langle r, s, t, u, v, w\rangle$. Es ist H_6 vom Index 3 mit Präsentierung

$$H_6 = \langle r, s, t, u, v, w \mid r^2 = s^2 = t^2 = u^2 = v^2 = w^2 = rst = rutwsv = 1\rangle,$$

wir ersetzen $t = rs$ und erhalten

$$H_6 = \langle r, s, u, v, w \mid r^2 = s^2 = u^2 = v^2 = w^2 = (rs)^2 = rurswsv = 1\rangle.$$

Ersetze in H_6 nun u durch das Konjugat rur und w durch das Konjugat sws. Dann folgt

$$H_6 = \langle r, s, u, v, w \mid r^2 = s^2 = u^2 = v^2 = w^2 = (rs)^2 = uwv = 1\rangle,$$

wir eleminieren nun $v = uw$ und erhalten

$$H_6 = \langle r, s \mid r^2 = s^2 = (rs)^2 = 1\rangle * \langle u, w \mid u^2 = w^2 = (uw)^2 = 1\rangle \cong V_4 * V_4.$$

Es gilt $F_2 < H_6$, also auch $F_2 < G$.

c) Für $n = 3$ ist $\det C > 0$, also G endlich.

(3) Sei $p = 3$:
Dann ist $q = 2$ und $3 \leq r \leq 5$ oder $r = 2$ und $3 \leq q \leq 5$.
Sei Œ $q = 2$ und $3 \leq r \leq 5$.

a) Ist $r = 5$, so ist $n = 3$, also

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz)^5 = 1\rangle,$$

und es besitzt G eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G)$ nicht-elementar, d.h. G besitzt eine freie Untergruppe vom Rang 2, es sei an dieser Stelle auf T_2 in Tabelle 1 in [21] von Maclachlan verwiesen.

b) Ist $r = 4$, so ist $n = 3$, und damit $\det C > 0$, d.h. G ist endlich.

c) Für $r = 3$ ist $3 \leq n \leq 5$ und $\det C > 0$, d.h. G ist wieder endlich.

(4) Sei $p = 2$:
Dann ist

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^n = (xy)^2 = (yz)^q = (xz)^r = 1 \rangle,$$

mit $n \geq 3$.
Sei Œ $q \leq r$. Dann ist $q = 2$ oder $q = 3$.

a) Sei $q = 2$:
Dann ist $r \geq 3$ wegen $(q; r) \neq (2; 2)$. Ferner ist $3 \leq r \leq 5$ wegen $n \geq 3$ und $1/_l + 1/_n + 1/_r > 1$ mit $l = 1$.
Dann haben wir für $(n; r)$ die Möglichkeiten $(3; 3), (4; 3), (5; 3), (3; 4)$ und $(3; 5)$.
In allen Fällen ist $\det C > 0$, d.h. G ist endlich.

b) Sei $q = 3$:
Wegen $n \geq 3$ ist $3 \leq r \leq 5$.
Ist $r = 5$, so ist $n = 3$, und

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = (xy)^2 = (yz)^3 = (xz)^5 = 1 \rangle.$$

Es lässt sich eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G)$ nicht-elementar konstruieren, d.h. G besitzt eine freie Untergruppe vom Rang 2, es sei an dieser Stelle auf T_1 in Tabelle 1 in [21] von Maclachlan verwiesen.
Ist $r = 4$, so ist wieder $n = 3$ und

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = (xy)^2 = (yz)^3 = (xz)^4 = 1 \rangle \cong H_4.$$

Es ist $\det C = 0$, aber G besitzt nach den Überlegungen in Fall I (2) (siehe (2.5)) eine freie Untergruppe vom Rang 2.
Sei nun $r = 3$:
Für $n = 5$ ist

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^5 = (xy)^2 = (yz)^3 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Diese Gruppe ist isomorph zu $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ac)^5 = 1 \rangle$, $(x \mapsto a,\ y \mapsto ba,\ z \mapsto ac)$. Also hat G eine freie Untergruppe vom Rang 2, siehe Fall (4) b) für $r = 5$ und $n = 3$.
Für $n = 4$ ist

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = (xy)^2 = (yz)^3 = (xz)^3 = 1 \rangle \cong H_1.$$

Es ist $\det C = 0$, aber G besitzt nach den Überlegungen in Fall (2) (siehe (2.2)) eine freie Untergruppe vom Rang 2.
Für $n = 3$ ist $\det C > 0$, d.h. G ist endlich.

In symmetrischer Weise werden die Fälle $(l; n) = (2; 2)$ und $(m; n) = (2; 2)$ behandelt.

Sei nun im folgenden genau eines der l, m, n gleich 2. Dabei gelte Œ $l < m, n$.

2.2 Fall II: $l = 2, 3 \leq m, n$

In diesem Fall gilt $q = 2$ wegen der Voraussetzung $1/_m + 1/_n + 1/_q > 1$.
Wieder ist $2 \leq p, r \leq 5$ wegen $m, n \geq 3$.

(1) Sei $p = r = 2$.
Wegen $1/_m + 1/_n + 1/_q > 1$ ist $3 \leq m, n \leq 5$.
Sei Œ $m \leq n$ (der andere Fall wird symmetrisch behandelt). Dann haben wir für $(m; n)$ die Möglichkeiten $(3; 3), (3; 4)$ und $(3; 5)$. In allen drei Fällen ist $\det C > 0$, d.h. G ist endlich.

(2) Sei $p = 2, r \geq 3$ oder $r = 2, p \geq 3$.
Sei Œ $p = 2$ und $r \geq 3$ (der andere Fall wird symmetrisch behandelt durch vertauschen der Rollen von y und z).
Dann ist $3 \leq m, n \leq 5$ und $3 \leq r \leq 5$ wegen $1/_l + 1/_n + 1/_r > 1$ mit $l = 2$, $1/_m + 1/_n + 1/_q > 1$ mit $q = 2$ und $3 \leq n, r$.
Es ist also

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^n = (xy)^2 = (yz)^2 = (xz)^r = 1 \rangle,$$

mit $3 \leq m, n \leq 5,\ 3 \leq r \leq 5$.
Sei zunächst $n = 3$.
Ist $4 \leq r$ und $m = 5$ oder $r = 5$ und $4 \leq m$, so gibt es eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G)$ nicht-elementar, und damit hat G eine freie Untergruppe vom Rang 2. Dies ist klar nach den obigen Argumenten für $(r; m) = (4; 5)$ und $(5; 4)$, vgl. z.B. Fall I (1). Für $(r; m) = (5; 5)$ ist aber

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^3 = (xy)^2 = (yz)^2 = (xz)^5 = 1 \rangle.$$

Diese Gruppe ist isomorph zu $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^5 = (ab)^5 = (bc)^2 = (ac)^3 = 1 \rangle$, $(x \mapsto a,\ y \mapsto ba,\ z \mapsto ac)$. Für diese Gruppe haben wir eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ konstruiert mit $\rho(G)$ nicht-elementar, siehe Fall I (1) a), also gilt auch in diesem Fall $F_2 < G$.
Für $(r; m) = (4; 4)$, d.h. für

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xy)^2 = (yz)^2 = (xz)^4 = 1 \rangle,$$

ist $\det C = 0$. Es ist G isomorph zu $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^4 = (ab)^4 = (bc)^2 = (ac)^3 = 1 \rangle$, betrachte wieder die Abbildung $(x \mapsto a,\ y \mapsto ba,\ z \mapsto ac)$. Damit enthält G nach den Überlegungen in Fall I (2) eine freie Untergruppe vom Rang 2.

Ist nun $r = 3$ oder $m = 3$ (und $n = 3$), so ist stets $\det C > 0$, d.h. G ist endlich. Damit ist der Fall $n = 3$ abgeschlossen.
Sei nun $n \geq 4$:
Dann ist $m = 3$ wegen $1/_m + 1/_n + 1/_q > 1$ mit $q = 2$ und

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^2 = (yz)^2 = (xz)^r = 1 \rangle,$$

mit $4 \leq n$.
Wegen $1/_l + 1/_n + 1/_r > 1$ mit $l = 2$ und $r \geq 3$ ist $r = 3$ und $4 \leq n \leq 5$.
Für $n = 5$ hat G folgende Präsentierung:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Diese Gruppe ist isomorph zu $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = (ab)^3 = (bc)^2 = (ac)^5 = 1 \rangle$, $(x \mapsto a,\ y \mapsto ba,\ z \mapsto ac)$, d.h. G hat auch eine freie Untergruppe vom Rang 2, siehe Fall I (3) a).
Für $n = 4$ ist $\det C > 0$, d.h. G ist endlich.

(3) Sei $p, r \geq 3$.
Aus $1/_p + 1/_q + 1/_r > 1$ mit $q = 2$ folgt $p = 3$ oder $r = 3$.
Sei Œ $p = 3 \Rightarrow 3 \leq r \leq 5$. Wegen $1/_m + 1/_n + 1/_q > 1$ mit $q = 2$ ist auch $3 \leq m, n \leq 5$, und es ist $m = 3$ oder $n = 3$. Wegen $1/_l + 1/_n + 1/_r > 1$ mit $l = 2$ ist ebenfalls $n = 3$ oder $r = 3$.
Ist entweder $r \geq 4$ oder $m \geq 4$ oder $n \geq 4$, so gibt es eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G)$ nicht-elementar, d.h. G hat eine freie Untergruppe vom Rang 2.
Dies ist nach den obigen Bemerkungen für den Fall klar, wenn unter den Exponenten m, n und r gleichzeitig eine 4 und eine 5 auftritt, vgl. z.B. Fall I (1) b).
Es bleiben also für

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^n = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz)^r = 1 \rangle$$

die möglichen Tripel:

$$(m; n; r) = \begin{array}{lll} \text{a) } (3;3;3) & \text{b) } (3;3;4) & \text{c) } (3;3;5) \\ \text{d) } (3;4;3) & \text{e) } (4;3;3) & \text{f) } (3;5;3) \\ \text{g) } (5;3;3) & \text{h) } (4;3;4) & \text{i) } (5;3;5) \end{array}$$

a) $(3; 3; 3)$:
Dann ist $\det C = 0$.

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^3 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle$$

enthält eine freie Untergruppe vom Rang 2, vgl. (2.1) (2) b).

Die restlichen Fälle werden alle mittels wesentlichen Darstellungen mit nicht-elementaren Bild behandelt:

b) $(3;3;4)$:
Starte mit $X, Y \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ mit entsprechenden Ordnungen.
Es gilt Œ $\mathrm{tr}(X) = 0,\ \mathrm{tr}(Y) = 1$.

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ -\frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix},\ XY = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} & 0 \\ -1 & -\rho \end{pmatrix},$$

mit $\mathrm{tr}(XY) = 1$.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Z) \\ \mathrm{tr}(XZ) \\ \mathrm{tr}(YZ) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ 0 \\ t \end{pmatrix};\ \text{wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\mathrm{tr}(XZ)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden)
Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1 + 2\sqrt{2}}$$

$t_1 \approx 1,883,\ t_2 \approx 0,531 \Rightarrow F_2 < G$.

c) $(3;3;5)$:
Starte mit $X, Y \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ aus Teil b) mit den entsprechenden Ordnungen.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Z) \\ \mathrm{tr}(XZ) \\ \mathrm{tr}(YZ) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm\lambda; \pm(\lambda - 1) \\ 0 \\ t \end{pmatrix};\ \text{wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\mathrm{tr}(XZ)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden)
Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-2 - 10\sqrt{5}} \approx 0,309 \pm 1,234i\ \Rightarrow F_2 < G.$$

d) $(3;4;3)$:
Starte mit $X, Y \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ aus Teil b) mit den entsprechenden Ordnungen.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Z) \\ \mathrm{tr}(XZ) \\ \mathrm{tr}(YZ) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} \\ \pm 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix};\ \text{wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\operatorname{tr}(XZ)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden)
Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1-2\sqrt{2}} \approx 0,207 \pm 0,978i \ \Rightarrow F_2 < G.$$

e) $(4;3;3)$:
Starte mit $X, Z \in \operatorname{PSL}(2,\mathbb{C})$ aus Teil b) (vertauschen der Rollen von Y und Z).

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \operatorname{tr}(Y) \\ \operatorname{tr}(XY) \\ \operatorname{tr}(ZY) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} \\ \pm 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}; \text{ wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\operatorname{tr}(XY)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden)
Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1+2\sqrt{2}}$$

$t_1 \approx 1,883$, $t_2 \approx 0,531 \Rightarrow F_2 < G$.

f) $(3;5;3)$:
Starte mit $X, Y \in \operatorname{PSL}(2,\mathbb{C})$ aus Teil b) mit den entsprechenden Ordnungen.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \operatorname{tr}(Z) \\ \operatorname{tr}(XZ) \\ \operatorname{tr}(YZ) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\lambda; \pm(\lambda-1) \\ \pm 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}; \text{ wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\operatorname{tr}(XZ)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden)
Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-2-10\sqrt{5}} \approx 0,309 \pm 1,234i \ \Rightarrow F_2 < G.$$

g) $(5;3;3)$:
Starte mit $X, Z \in \operatorname{PSL}(2,\mathbb{C})$ aus Teil b) (vertauschen der Rollen von Y und Z).

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \operatorname{tr}(Y) \\ \operatorname{tr}(XY) \\ \operatorname{tr}(ZY) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\lambda; \pm(\lambda-1) \\ \pm 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}; \text{ wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\operatorname{tr}(XY)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden)

Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-2 - 10\sqrt{5}} \approx 0,309 \pm 1,234i \;\Rightarrow F_2 < G.$$

h) $(4;3;4)$:
Starte mit $X, Z \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ mit entsprechenden Ordnungen.
Es gilt Œ $\mathrm{tr}(X) = 0,\ \mathrm{tr}(Z) = 1$.

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\nu & 1-\sqrt{2} \\ 1 & \frac{1}{2}-\nu \end{pmatrix},\ XZ = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\nu \\ -\frac{1}{2}-\nu & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix},$$

mit $\nu = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{7}{4}}$ und $\mathrm{tr}(XZ) = \sqrt{2}$.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Y) \\ \mathrm{tr}(XY) \\ \mathrm{tr}(ZY) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} \\ \pm 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix};\ \text{wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\mathrm{tr}(XY)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden)
Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = \frac{-3 + 2\sqrt{2} \pm i(2\sqrt{14} - 3\sqrt{7})}{-6 + 4\sqrt{2}} \approx 0,5 \pm 1,323i \;\Rightarrow F_2 < G.$$

i) $(5;3;5)$:
Starte mit $X, Y \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ mit entsprechenden Ordnungen.
Es gilt Œ $\mathrm{tr}(X) = 0,\ \mathrm{tr}(Y) = \lambda$.

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\nu & 0 \\ 1 & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\nu \end{pmatrix}$$

mit $\nu = \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}$ und $\mathrm{tr}(XY) = 1$.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Z) \\ \mathrm{tr}(XZ) \\ \mathrm{tr}(YZ) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm\lambda; \pm(\lambda - 1) \\ 0 \\ t \end{pmatrix};\ \text{wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\mathrm{tr}(XZ)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden)
Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = \frac{1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{70 - 34\sqrt{5}}}{-6 + 2\sqrt{5}} \approx 0,809 \mp 1,607i \;\Rightarrow F_2 < G.$$

Damit ist nun auch Fall II beendet.

2.3 Fall III: $3 \leq l, m, n$

Dann ist $p = q = r = 2$. Sei Œ $l \leq m \leq n$.
Wegen $1/_m + 1/_n + 1/_q > 1$ mit $q = 2$ gilt dann $m = 3$.
Seien also $l = m = 3$. Wegen $1/_l + 1/_n + 1/_r > 1$ mit $r = 2$ ist $3 \leq n \leq 5$.
Für $n = 5$ ist

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^5 = (xy^{-1})^2 = (yz^{-1})^2 = (zx^{-1})^2 = 1 \rangle.$$

Diese Gruppe ist isomorph zu $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ac)^5 = 1 \rangle$, $(x \mapsto bc,\ y \mapsto c,\ z \mapsto ac)$. Diese Gruppe haben wir im Fall I (4) b) behandelt, siehe auch [21] von Maclachlan, T_1 in Tabelle 1.
Sei nun $n = 4$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^4 = (xy^{-1})^2 = (zy^{-1})^2 = (zx^{-1})^2 = 1 \rangle \cong H_3.$$

Es ist $\det C = 0$, aber G besitzt nach den Überlegungen im Fall I (2) (vgl. (2.4)) eine freie Untergruppe vom Rang 2.
Für $n = 3$ ist $\det C > 0$, d.h. G ist endlich.

$\square$

Kapitel 3

Der Sphärische Fall S.1, $k_1 = 1$

In diesem Kapitel betrachten wir den sphärischen Fall S.1, wobei die Blocklänge der ersten Relation gleich eins ist. Sei nun Œ

$$G = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^\alpha y^\beta)^p = (y^\gamma z^\delta)^2 = (x^\varepsilon z^\zeta)^2 = 1\rangle, \quad p \geq 3,$$

mit $1 \leq \alpha, \varepsilon < l$, $1 \leq \beta, \gamma < m$, $1 \leq \delta, \zeta < n$.

Bemerkung 3.33. *Es werden nun einige Fallunterscheidungen notwendig sein. Bei einigen Fällen haben wir (eventuell durch Potenz- und Inversenbildung) Reduzierung auf die schon behandelten gewöhnlichen Tetraedergruppen, siehe Kapitel* 2.

Es gelte Œ $2 \leq l \leq m$. Für den Fall, dass $1/_l + 1/_m + 1/_p < 1$ und $n \geq 3$, besitzt G eine freie Untergruppe vom Rang 2, siehe Darstellungssatz (2.32), vgl. auch [10], Seite $269ff$.
Sei nun $1/_l + 1/_m + 1/_p < 1$ und $n = 2$

$$\Rightarrow \quad G = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^2 = (x^\alpha y^\beta)^p = (y^\gamma z)^2 = (x^\varepsilon z)^2 = 1\rangle.$$

Diese Gruppe enthält eine Faktorgruppe (über Diederrelation)

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^2 = (x^\alpha y^\beta)^p = (yz)^2 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Sei H die von x, y erzeugte Untergruppe von $\bar{G}$; es ist

$$H = \langle x, y \mid x^l = y^m = (x^\alpha y^\beta)^p = 1\rangle,$$

$F_2 < H$, also auch $F_2 < G$, vgl. [10], S.171 Theorem 7.3.2.1
Sei also nun $1/_l + 1/_m + 1/_p \geq 1$.
Betrachte folgende 3 Fälle:

I) $l = m = p = 3$

II) $l = 2, m \geq 3$ $(m \in 3, 4, 5, 6)$

III) $l = m = 2$

3.1 Fall I: $l = m = p = 3$

Damit hat G folgende Präsentierung,

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^n = (x^\alpha y^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (x^\varepsilon z^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

Œ sei $\alpha = \varepsilon = 1$, $\beta = \gamma = 1$, dies ist möglich, da $\mathrm{ggT}(3, \alpha) = \mathrm{ggT}(3, \beta) = 1$, gehe bei $W_2(y, z)$ und $W_3(x, z)$ eventuell zur inversen Relation über.

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^n = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

$n \geq 3$:
Dann gilt $1/_l + 1/_m + 1/_n \leq 1$ für $(l; m) = (3; 3)$ $\Rightarrow F_2 < G$ nach dem Darstellungssatz (2.32), vgl. [10], Seite $269ff$.
$n = 2$:

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^2 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

3.2 Fall II: $l = 2; m \geq 3$ und $1/_l + 1/_m + 1/_p \geq 1$

Damit hat G folgende Gestalt,

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^n = (xy^\beta)^p = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

Es bleiben folgende Möglichkeiten für das Tupel $(m; p)$:

a) $(3; 3)$ b) $(3; 4)$ c) $(3; 5)$ d) $(3; 6)$
e) $(4; 3)$ f) $(4; 4)$
g) $(5; 3)$
h) $(6; 3)$

Diese Fälle werden nun einzeln betrachtet:

a)
$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,\ n \geq 2.$$

Sei Œ $\beta = \gamma = 1$ (dies ist wieder möglich, da $\mathrm{ggT}(3, \beta) = 1$, gehe eventuell zur inversen Relation über).
$n \geq 7$:
Dann gilt: $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ für $m = 3$ und $q = 2$ $\Rightarrow$ es existiert ein Element der Ordnung ≥ 7 in der Gruppe, d.h. ein wesentliches Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ muss nicht-elementar sein, d.h es existiert eine nicht-abelsche freie Untergruppe vom Rang 2, also gilt auch $F_2 < G$, vgl. [15], Lemma (2.12).
$n = 6$:
$\Rightarrow F_2 < G$ mittels einer wesentlicher Darstellung in die $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ und da $p = 3 > 2$,

siehe Darstellungssatz (2.32), vgl. [10], S. $269ff$.
$n = 5$:
Œ $\zeta = 1$ (eventuell Übergang zu $\tilde{z} = z^\zeta$), $\delta = 1$ oder 2.
Für $\delta = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^3 = (yz^2)^2 = (xz)^2 = 1\rangle$$

$$\cong \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz^2)^2 = 1\rangle = G^*.$$

Betrachte die von $\langle x, z\rangle$ erzeugte Diedergruppe, aus der Relation $(xz^2)^2 = 1$ folgt, dass auch $(xz)^2 = 1 \Rightarrow G^*$ gewöhnliche Tetraedergruppe und es gilt

$$G \cong \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Für $\delta = 1$ ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 4$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^4 = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

Ist $\delta = 2$, so gibt es eine wesentliche Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $y \mapsto Y,\ z \mapsto Z$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar, denn:

$$G_2 = \langle y, z \mid y^3 = z^4 = (yz^2)^2 = 1\rangle,$$

und $\mathrm{tr}(Y) = \pm 1$; $\mathrm{tr}(Z) = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \mathrm{tr}(YZ) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Also folgt $F_2 < G_2$, also auch $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23), vgl. z.B. [27], Seite 45.
Sei nun $\delta \neq 2$, Œ $\delta = 1, \beta = \gamma = 1$.

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^4 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

Ist $\zeta = 2$, so betrachte die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $z^2 = 1$

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^2 = (xy)^3 = (yz)^2 = 1\rangle.$$

$\Rightarrow F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1
Ist nun $\zeta \neq 2$, so ist Œ $\zeta = 1$ und G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 3$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^3 = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

Œ gilt $\beta = \gamma = \delta = \zeta = 1$, also G gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^2 = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

Œ gilt wieder $\beta = \gamma = 1$, also G gewöhnliche Tetraedergruppe.

b)
$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy^\beta)^4 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,\ n \geq 2,$$

Œ gelte auch hier: $\beta = \gamma = 1$.
$n \geq 7$: Dann gilt: $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ für $m = 3$ und $q = 2$ $\Rightarrow$ es existiert ein Element der Ordnung ≥ 7 in der Gruppe, d.h. ein wesentliches Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ muss nicht-elementar sein, d.h es existiert eine nicht abelsche Untergruppe vom Rang 2, also gilt auch $F_2 < G$, vgl. [15].
$n = 6$: $\Rightarrow F_2 < G$ mittels einer wesentlicher Darstellung in die $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ und da $p = 4 > 2$ (siehe Fall a)).
$n = 5$:
$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^4 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

$\Rightarrow F_2 < G$ mittels einer wesentlichen Darstellung in die $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, weil die Symmetrische Gruppe S_4 und die Alternierenden Gruppen A_4 und A_5 nicht gleichzeitig ein Element der Ordnung 4 und 5 enthalten (sowohl zyklische Untergruppen als auch Diedergruppen kommen für das wesentliche Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ nicht in Frage).
$n = 4$:
$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^4 = (xy)^4 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

Ist $\delta = 2$, so ist $F_2 < G$, siehe Argumentation bei a) $(m; p) = (3; 3)$, $n = 4$.
Ist $\zeta = 2$, so ist $F_2 < G$ analog wie bei a) $(m; p) = (3; 3)$, $n = 4$ mittels Faktorgruppenbetrachtung.
Sei nun Œ $\delta = \zeta = 1$, also ist G gewöhnliche Tetraedergruppe.
$2 \leq n \leq 3$:
$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^4 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

Œ sei $G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^4 = (yz)^2 = (xz)^2 = 1\rangle$, also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

c)
$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy^\beta)^5 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,\ n \geq 2,$$

Œ gelte auch hier: $\beta = \gamma = 1$.

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^5 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

$n \geq 6$: $\Rightarrow F_2 < G$ wie im Fall $p = 3, 4$.
$n = 5$:
$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^5 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$
Œ sei $\delta = 1$. Da $\langle x, z \mid x^2 = z^5 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle \cong \langle x, z \mid x^2 = z^5 = (xz)^2 = 1\rangle$ wegen der Diederrelation, gilt: $F_2 < G$, vgl. a) für $n = 5$.
$n = 4$:
$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^4 = (xy)^5 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

$\Rightarrow F_2 < G$, vgl. b) für $(m;p) = (3;4)$, $n = 5$.
$2 \leq n \leq 3$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^5 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

Œ sei $G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^5 = (yz)^2 = (xz)^2 = 1\rangle$, also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

d)

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy^\beta)^6 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,\ n \geq 2,$$

Œ gelte auch hier: $\beta = \gamma = 1$.
$n \geq 3$: $\Rightarrow F_2 < G$ mittels einer wesentlicher Darstellung in die $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ und da $n \geq 3 > 2$, siehe Darstellungssatz (2.32), vgl. [10], Seite $269ff$.
$n = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^2 = (xy^\beta)^6 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

Œ gilt wieder $\beta = \gamma = 1$, also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

e)

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,\ n \geq 2.$$

Für den Fall $\beta = 2$ gilt: $F_2 < G$, denn

$$G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^4 = (xy^2)^3 = 1\rangle$$

besitzt eine wesentliche Darstellung $\rho : G_1 \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, $x \mapsto X$, $y \mapsto Y$ mit $\rho(G_1)$ nicht-elementar, da $\mathrm{tr}(X) = 0$; $\mathrm{tr}(Y) = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \mathrm{tr}(XY) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Also gilt $F_2 < G_1$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23) und somit $F_2 < G$.
Sei nun Œ $\beta = 1$.
$n \geq 5$:
$\Rightarrow F_2 < G$, da $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ für $m = 4$ und $q = 2$.
$n = 4$: Ist $\gamma = 2$ oder $\delta = 2$, so betrachten wir die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $y^2 = 1$ oder $z^2 = 1$,

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Diese enthält eine freie Gruppe vom Rang 2, vgl. [10], S. 263, Korollar 9.2.1
Œ sei nun $\gamma = \delta = 1$.
Dann ist

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^4 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

$\Rightarrow F_2 < G$ mittels einer wesentlicher Darstellung in die $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ und da $p = 3 > 2$, siehe Darstellungssatz (2.32), vgl. [10], S. $269ff$.
$n = 3$: Œ setze $\zeta = 1$,

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Für $\gamma = 2$ betrachte eine wesentliche Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $y \mapsto Y,\ z \mapsto Z$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar, vgl. (3.2) im Fall a).
Ist $\gamma \neq 2$, so ist Œ $\gamma = 1$, also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 2$: Für $\gamma = 2$ ist

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xy)^3 = (y^2 z)^2 = (xz)^2 = 1 \rangle,$$

betrachte die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $y^2 = 1$

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle,$$

$\Rightarrow F_2 < \bar{G}$ und somit auch $F_2 < G$, siehe [10], S. 263, Korollar 9.2.1
Für $\gamma = 1$ erhalten wir, dass G eine gewöhnliche Tetraedergruppe ist.

f)
$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^n = (xy^\beta)^4 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1 \rangle,\ n \geq 2.$$

$n \geq 5$:
$\Rightarrow F_2 < G$, da $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ für $m = 4$ und $q = 2$.
$n = 4$:
Ist $\beta = 2$, so führe die Relation $y^2 = 1$ ein und erhalte die Faktorgruppe

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = (y^{\bar{\gamma}} z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1 \rangle,$$

so dass für den Fall $\gamma = \pm 1$ direkt folgt: $F_2 < \bar{G}$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1, und somit $F_2 < G$.
Sei also $\gamma = 2$:
$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = z^{2\delta} = (xz^\zeta)^2 = 1 \rangle$, führe die Relation $z^2 = 1$ ein und erhalte

$$\bar{\bar{G}} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xz^{\tilde{\zeta}})^2 = 1 \rangle,$$

$\tilde{\zeta} = 2 \Rightarrow \bar{\bar{G}} \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \Rightarrow F_2 < \bar{\bar{G}}$ und somit auch $F_2 < G$
$\tilde{\zeta} = 1 \Rightarrow \bar{\bar{G}} \cong \mathbb{Z}_2 * V_4 \Rightarrow F_2 < \bar{\bar{G}}$ und somit auch in diesem Fall $F_2 < G$.
Sei nun Œ $\beta = 1$: Ist $\gamma = 2$ oder $\delta = 2$ oder $\zeta = 2$, so betrachten wir die Faktorgruppe nach Einführen von sowohl $y^2 = 1$ als auch $z^2 = 1$, also

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^4 = (y^{\tilde{\gamma}} z^{\tilde{\delta}})^2 = (xz^{\tilde{\zeta}})^2 = 1 \rangle,$$

wobei $(y^{\tilde{\gamma}} z^{\tilde{\delta}})^2 = 1$ oder $(xz^{\tilde{\zeta}})^2 = 1$ überflüssig ist, also gilt $F_2 < \bar{G}$, siehe [10], S. 263, Korollar 9.2.1, und somit $F_2 < G$.
Für den Fall $\gamma = \delta = \zeta = 1$ folgt, dass G eine gewöhnliche Tetraedergruppe ist.
$n = 3$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xy^\beta)^4 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1 \rangle,$$

Œ setze $\delta = \zeta = 1$, also

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xy^\beta)^4 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Für $\gamma = 2$ haben wir eine wesentliche Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $y \mapsto Y$, $z \mapsto Z$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar, siehe Teil a), vgl. (3.2).
Sei also nun $\gamma = 1$. Für $\beta = 2$ betrachten wir die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $y^2 = 1$

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = (yz)^2 = (xz)^2 = 1 \rangle,$$

$\Rightarrow F_2 < \bar{G}$, siehe [10], S. 263, Korollar 9.2.1, und somit $F_2 < G$.
Für $\beta = 1$ ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 2$:
Dann ist

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xy^\beta)^4 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Ist $\gamma = 2$, so führen wir die Relation $y^2 = 1$ ein und erhalten eine Faktorgruppe $\bar{G}$, die eine freie Untergruppe vom Rang 2 enthält, also auch G, siehe [10], S. 263, Korollar 9.2.1.
Sei nun Œ $\gamma = 1$.
Sei $\beta = 2$. Wir betrachten die von

$$a = x, \quad b = yxy^{-1}, \quad c = y^2, \quad d = z, \quad e = yzy^{-1}.$$

erzeugte Untergruppe H vom Index 2. H hat eine Präsentierung

$$H = \langle a, b, c, d, e \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = (ac)^4 = (bc)^4 = ecd = (ad)^2 = (be)^2 = 1 \rangle.$$

Wir setzen $e = 1$ und $c = d$ und erhalten die Faktorgruppe

$$\bar{H} = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ac)^2 = (bc)^4 = 1 \rangle.$$

Es folgt $F_2 < \bar{H}$, da $|bc| = 4$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1, und somit gilt $F_2 < G$.
Sei nun Œ $\beta = \gamma = 1 \Rightarrow G$ ist eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

g)

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1 \rangle, \ n \geq 2.$$

$n \geq 4$:
Da $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ für $m = 5$ und $q = 2$, folgt: $F_2 < G$
$n = 3$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^3 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^2 = 1 \rangle,$$

mit $\gamma = 1$ oder $\gamma = 2$.
Sei nun $\gamma = 2 \Rightarrow |G| = 7200$, siehe [26], Seite 31, Theorem 3.1.
Ist $\gamma = 1$, so ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^2 = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^2 = 1 \rangle,$$

$\Rightarrow G$ ist eine gewöhnliche Tetraedergruppe wegen der Diederrelation; Œ sei $\beta = 1$, da $\mathrm{ggT}(\beta, 5) = 1$. Betrachte die von $\langle y, z\rangle$ erzeugte Diedergruppe, aus der Relation $(y^\gamma z)^2 = 1$ folgt, dass auch $(yz)^2 = 1$ ist.

$$\Rightarrow G \cong \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz)^2 = 1\rangle$$

ist eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

h)
$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,\ n \geq 2.$$

Œ sei $\beta = 1, 2$ oder 3 (für $\beta = 4, 5$ betrachte die inverse Relation; dies ist möglich der x Ordnung 2 hat).
Sei $\beta = 3$:
Betrachte die wesentliche Darstellung $\rho : G_1 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $x \mapsto X,\ y \mapsto Y$ mit $\rho(G_1)$ nicht-elementar, da $\mathrm{tr}(X) = 0;\ \mathrm{tr}(Y) = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \mathrm{tr}(XY) = \pm\frac{1}{2}$, also $F_2 < G_1$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23) und somit $F_2 < G$.
Für $\beta = 2$ betrachte ebenfalls die wesentliche Darstellung $\rho : G_1 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $x \mapsto X,\ y \mapsto Y$. Auch hier ist $\rho(G_1)$ nicht-elementar, da $\mathrm{tr}(X) = 0;\ \mathrm{tr}(Y) = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \mathrm{tr}(XY) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, also $F_2 < G_1$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23) und somit $F_2 < G$.
Sei $\beta = 1$:

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^n = (xy)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,\ n \geq 2.$$

Ist $n \geq 3$, so gilt $F_2 < G$ nach dem Darstellungssatz (2.32) für unendlich metabelsche Bilder, siehe [10], Seite $269ff$.
Sei $n = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^2 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

G hat die Faktorgruppe $\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^2 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz)^2 = 1\rangle$. Es ist $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, vgl. Kapitel 2.

Dies beendet Fall II.

3.3 Fall III: $l = m = 2$ und $p \geq 3$

In diesem Fall ist G gegeben durch

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^n = (xy)^p = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,\ n \geq 2.$$

Wir betrachten zwei Fälle:

1) Sei der $\mathrm{ggT}(\delta, n) = d_1 \geq 2$. Œ gelte $\delta | n$, $\delta \geq 2$ (dies ist möglich, verwende Linearkombination des ggT und gehe zu Potenzen über).

Führe nun die Relation $z^\delta = 1$ ein. Wir erhalten eine Faktorgruppe $\bar{G}$ mit Präsentierung

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^\delta = (xy)^p = (xz^{\tilde{\zeta}})^2 = 1 \rangle,$$

wobei eventuell auch $z^{\tilde{\zeta}} = 1$ gilt.
$\Rightarrow F_2 < \bar{G}$, da $p \geq 3$, siehe Darstellungssatz (2.32) und [10], Seite 263, Korollar 9.2.1, und somit $F_2 < G$.
Für den Fall, dass $\mathrm{ggT}(\zeta, n) = d_2 \geq 2$ verfahre analog.

2) Sei nun $\mathrm{ggT}(\delta, n) = \mathrm{ggT}(\zeta, n) = 1$. Gehe wieder zu einer geeigneten Potenz über mittels einer Linearkombination des ggT. Danach gilt Œ $\delta = \zeta = 1$, also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

Dies beendet Fall III.

Kapitel 4

Der Sphärische Fall S.1, $k_1 \geq 2$

In diesem Kapitel werden verallgemeinerte Tetraedergruppen der Form

$$G = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^p(x, y) = (y^\gamma z^\delta)^2 = (x^\varepsilon z^\zeta)^2 = 1 \rangle$$

mit $W_1(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \ldots x^{\alpha_k} y^{\beta_k}$ keine echte Potenz in x und y, $k \geq 1$ und $1 \leq \alpha_i < l$, $1 \leq \beta_i < l$ auf die Tits-Alternative untersucht. Da insgesamt der Fall $(p; q; r) \neq (2; 2; 2)$ untersucht wird, gilt in diesem Fall $p \geq 3$.
Der Fall $k = 1$ wurde dabei schon in Kapitel 3 ausführlich behandelt, sei deswegen nun $k \geq 2$.
Wir setzen wie üblich

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle x, y \mid x^l = y^m = W_1^p(x, y) = 1 \rangle, \\ G_2 &= \langle y, z \mid y^m = z^n = (y^\gamma z^\delta)^2 = 1 \rangle, \\ G_3 &= \langle x, z \mid x^l = z^n = (x^\varepsilon z^\zeta)^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Es gelte Œ $l \leq m$ (ansonsten vertausche die Rollen von x und y).
Dann besitzt G_1 eine wesentliche Darstellung $\rho : G_1 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_1)$ nicht-elementar und damit besitzt G eine freie Untergruppe vom Rang 2 nach dem Fortsetzungssatz, vgl. (1.23), außer den folgenden Fällen (bis auf Äquivalenz), vgl. [10], Seite $277f$ Lemma $9.3.2ff$ und [6], Seite $116f$ Fall (3)

(1) $l = 2$, $m = 6m_1 \geq 6$, $k = 2$, $p = 3$ und

$$G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^{6m_1} = (xy^{m_1}xy^{3m_1})^3 = 1 \rangle,$$

(2) $l = 2$, $m = 4m_1 \geq 4$, $k = 2$, $p = 4$ und

$$G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^{4m_1} = (xy^{m_1}xy^{2m_1})^4 = 1 \rangle,$$

(3) $l = 2$, $m = 6m_1 \geq 6$, $k = 2$, $p = 6$ und

$$G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^{6m_1} = (xy^{2m_1}xy^{3m_1})^6 = 1 \rangle,$$

(4) $l = m = p = 3$, $k = 2$ und

$$G_1 = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xyxy^2)^3 = 1 \rangle,$$

(5) $l = m = p = 4$, $k = 2$ und

$$G_1 = \langle x, y \mid x^4 = y^4 = (xy^2x^2y^2)^4 = 1 \rangle,$$

(6) $l = 2$, $m = p = k = 4$ und

$$G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^4 = (xyxy^2xy^2xy^2)^4 = 1 \rangle,$$

(7) $l = 2$, $m = p = 3$ und

$$G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = W_1^3(x, y) = 1 \rangle.$$

Die Fälle (1) für $m_1 = 1$, (2) für $m_1 = 1$, (4), (5) und (6) wurden ausführlich in [10], Seite $277f$, behandelt.
Die Fälle (1) und (2) für $m_1 \geq 2$ lassen sich zurückführen auf den Fall $m_1 = 1$ mittels Einführen der Relation $y^6 = 1$ bzw. $y^4 = 1$, denn:
Betrachte exemplarisch Fall (1) für $m_1 \geq 2$

$$G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^{6m_1} = (xy^{m_1}xy^{3m_1})^3 = 1 \rangle.$$

Es ergeben sich nach Einführen von $y^6 = 1$ vier Möglichkeiten:

a) $\bar{G}_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^6 = 1 \rangle$, falls m_1 gerade ist,

b) $\bar{G}_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^6 = (xyxy^3)^3 = 1 \rangle$, für $m_1 = 1 + 6\tilde{\alpha}$,

c) $\bar{G}_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^6 = (xy^3)^6 = 1 \rangle$, für $m_1 = 3 + 6\tilde{\alpha}$,

d) $\bar{G}_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^6 = (xyxy^3)^3 = 1 \rangle$, für $m_1 = 5 + 6\tilde{\alpha}$.

Wir zeigen $F_2 < \bar{G}_1$ in allen Fällen. Damit gilt dann $F_2 < G$. Sei nun erst $m_1 \geq 2$ und $n \geq 3$:
$\Rightarrow 1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ für $m \geq 12$ und $q = 2 \Rightarrow F_2 < G$.
Es bleibt der Fall $m_1 \geq 2$ und $n = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^{6m_1} = z^2 = (xy^{m_1}xy^{3m_1})^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Nach Einführen der Relation $y^6 = 1$ erhalten wir

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^2 = \tilde{W}_1(x, y) = (y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = (xz)^2 = 1 \rangle,$$

mit $\tilde{W}_1(x, y) = 1$, $\tilde{W}_1(x, y) = (xyxy^3)^3$ oder $\tilde{W}_1(x, y) = (xy^3)^6$, wobei eventuell die Relation $(y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = 1$ überflüssig ist. Ist $\tilde{W}_1(x, y) = 1$ oder ist die Relation $(y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = 1$ überflüssig, so gilt natürlich $F_2 < \bar{G}$, vgl. [10], Seite 263, Korollar 9.2.1. Ist $\tilde{W}_1(x, y) = (xyxy^3)^3 = 1$, so führen wir die Relation $y^3 = 1$ ein und erhalten eine Faktorgruppe $\bar{\bar{G}}$ mit $F_2 < \bar{\bar{G}}$, siehe [10], Seite $277f$. Ist schließlich $\tilde{W}_1(x, y) = (xy^3)^6 = 1$, so ist $F_2 < \bar{G}$ wegen $1/_2 + 1/_6 + 1/_6 < 1$.

Also gilt im Fall (1) stets $F_2 < G$.
Fall (2) geht analog.
Wir behandeln nun Fall (3), also

$$G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^{6m_1} = (xy^{2m_1}xy^{3m_1})^6 = 1 \rangle,$$

vgl. [6], Seite 118. Führe die Relation $(xy^{2m_1}xy^{3m_1})^3 = 1$ ein und erhalte

$$\bar{G_1} = \langle x, y \mid x^2 = y^{6m_1} = (xy^{2m_1}xy^{3m_1})^3 = 1 \rangle,$$

(wobei andere Relationen von G nicht beeinträchtigt werden).
Betrachte nun eine wesentliche Darstellung $\rho : \bar{G_1} \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(\bar{G_1})$ nicht-elementar (siehe [24], Seite 158, Lemma 3.3) $\Rightarrow F_2 < \bar{G_1}$ und somit $F_2 < G_1$, also auch $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Damit sind die Fälle (1) bis (6) für $k \geq 2$ behandelt, und G enthält stets eine freie Untergruppe vom Rang 2.
Es bleibt der Fall (7), also $G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = W_1^3(x, y) = 1 \rangle$, sowie $k \geq 2$.

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = W_1^3(x, y) = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^2 = 1 \rangle$$

mit Œ $\delta | n$, vgl. (3.3). Ebenfalls können wir Œ $\zeta = 1$ annehmen für $2 \leq n \leq 3$. Im Fall $n \geq 4$ betrachten wir stattdessen die Faktorgruppe, die wir erhalten, wenn wir die Relation $(xz)^2 = 1$ einführen (beachte: aus $(xz)^2 = 1$ folgt $(xz^\zeta)^2 = 1$). Sei in den folgenden Betrachtungen also Œ $\zeta = 1$.
Wir zeigen, dass in diesem Fall G (bzw. $\bar{G}$) eine freie Untergruppe vom Rang 2 enthält.
Besitzt G_1 eine wesentliche Darstellung $\rho : G_1 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_1)$ nicht-elementar, so enthält G eine freie Untergruppe vom Rang 2. Solch eine Darstellung (und da $W_1(x, y)$ keine echte Potenz) gibt es, bis auf Äquivalenz, nicht in den drei folgenden Fällen, vgl. [10], Seite 186 Theorem 7.3.2.4:

(i) $W_1(x, y) = xyxy^2$

(ii) $W_1(x, y) = xyxyxy^2$

(iii) $W_1(x, y) = xyxyxyxy^2$

Zunächst gilt wegen $m = 3$, $q = 2$ und $p = 3 > 2$ folgendes: $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ für $n \geq 7$, d.h. es gilt hier $F_2 < G$, siehe (1.25) und auch den Darstellungssatz (2.32).
Ab jetzt gelte $n \leq 6$, damit gilt Œ für n und δ:

$n = 6$	a) $\delta = 1$	b) $\delta = 2$	c) $\delta = 3$
$n = 4$	d) $\delta = 1$	e) $\delta = 2$	
$n = 2, 3$ oder 5	f) $\delta = 1$		

Wir betrachten zunächst die Fälle b), c) und e), also $\delta \geq 2$.
Dann besitzt G_2 eine wesentliche Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar $\Rightarrow$ $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz, vgl. (1.23):

Im Fall b) bzw. c) mit $\operatorname{tr}(Y) = \pm 1$ und $\operatorname{tr}(Z) = \pm\sqrt{3}$ ergibt sich $\operatorname{tr}(YZ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ bzw. $\operatorname{tr}(YZ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Im Fall e) mit $\operatorname{tr}(Y) = \pm 1$ und $\operatorname{tr}(Z) = \pm\sqrt{2}$ ergibt sich $\operatorname{tr}(YZ) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Ab jetzt sei $\delta = 1$, d.h. G habe folgende Gestalt

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = W_1^3(x, y) = (yz)^2 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

mit $2 \leq n \leq 6$ und $W_1(x, y)$ von der Gestalt (i), (ii) oder (iii).
Für $4 \leq n \leq 6$ hat G eine freie Untergruppe vom Rang 2, denn G besitzt die gewöhnliche Tetraedergruppe

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^\mu = (yz)^2 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

als Faktorgruppe mit $\mu = 4$ für $W_1(x, y) = xyxy^2$,
$\mu = 5$ für $W_1(x, y) = xyxyxy^2$,
und $\mu = 6$ für $W_1(x, y) = xyxyxyxy^2$,
vergleiche an dieser Stelle mit Kapitel 2.
Es bleibt also $2 \leq n \leq 3$ in Kombination von $W_1(x, y)$ zu betrachten:

(i) $W_1(x, y) = xyxy^2$
Starte mit der Untergruppe H mit den Erzeugenden:

$$a = y, \quad b = xyx^{-1}, \quad c = z.$$

Es ist $H = \langle a, b, c\rangle$ vom Index 2. Eine Präsentierung ist gegeben durch

$$H = \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^n = (ba^2)^3 = (ac)^2 = (bc^{-1})^2 = 1\rangle.$$

Für $n = 3$ folgt

$$\begin{aligned} H &= \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^3 = (ba^2)^3 = (ac)^2 = (bc^{-1})^2 = 1\rangle \\ &\cong \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^3 = (xy^{-1})^2 = (yz^{-1})^3 = (zx^{-1})^2 = 1\rangle. \end{aligned}$$

Diesen Fall haben wir im Kapitel 2 behandelt, also folgt $F_2 < H$, also auch $F_2 < G$.
Für $n = 2$ gilt

$$H \cong \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^3 = (xy^{-1})^2 = (yz^{-1})^3 = (zx^{-1})^2 = 1\rangle,$$

in diesem Fall hat H eine freie abelsche Untergruppe vom Index 6 und somit hat G eine vom Index 12, vgl. Kapitel 2.

(ii) $W_1(x, y) = xyxyxy^2$
In diesem Fall ist G jeweils endlich mit $|G| = 864000$ für $n = 3$, vgl. z.B. [28], Seite 11 und $|G| = 2880$ für $n = 2$, vgl. z.B. [26], Seite 12.

(iii) $W_1(x,y) = xyxyxyxy^2$
Für $n = 3$ hat G eine freie Untergruppe vom Rang 2, denn nach Einführen der Relation $(xy)^6 = 1$ erhalten wir als Faktorgruppe die gewöhnliche Tetraedergruppe

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^3 = (xy)^6 = (yz)^2 = (xz)^2 = 1 \rangle,$$

wo dieses bereits bewiesen wurde, vgl. auch hierzu Kapitel 2.
Sei nun $n = 2$, also

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^2 = (xyxyxyxy^2)^3 = (yz)^2 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Sei H die von x und y erzeugte Untergruppe von G mit Index 2.

$$\begin{aligned} H &= \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xyxyxyxy^2)^3 = (xy^{-1}xy^{-1}xy^{-1}xy^{-2})^3 = 1 \rangle \\ &\cong \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xyxyxyxy^2)^3 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Diese Gruppe ist unendlich auflösbar, und somit auch G, siehe [10], Seite 188.

Dies schließt den Fall $k \geq 2$ ab.

Kapitel 5

Der Sphärische Fall S.2

In diesem Kapitel betrachten wir verallgemeinerten Tetraedergruppen, bei denen 2 der zusätzlichen Relationen Ordnungen > 2 haben. Sei Œ

$$G = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^\alpha y^\beta)^p = (y^\gamma z^\delta)^q = (x^\varepsilon z^\zeta)^r = 1\rangle, \quad p \geq 3,$$

mit $1 \leq \alpha, \varepsilon < l$, $1 \leq \beta, \gamma < m$, $1 \leq \delta, \zeta < n$.
Weiter sei Œ $2 \leq l \leq m$ und $q = 2$ oder $r = 2$.

Betrachte folgende zwei Fälle:

I) $q = 2$ und $r \geq 3$

II) $q \geq 3$ und $r = 2$

5.1 Fall I: $q = 2$ und $r \geq 3$

Es gelte entweder $1/_l + 1/_m + 1/_p < 1$ oder $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$, dann gilt $F_2 < G$, siehe (1.25) und [10], Seite 277, Lemma 9.3.4 für den vollständigen Beweis.
Gilt $1/_p + 1/_q + 1/_r \leq 1 \Rightarrow$ Die Tits-Alternative gilt nach Howie und Kopteva, siehe [12].
Deshalb sei nun $1/_l + 1/_m + 1/_p \geq 1$, $1/_m + 1/_n + 1/_q \geq 1$ und $1/_p + 1/_q + 1/_r > 1$.
Ist $l = m = 3$, dann ist auch $p = 3$, oder $l = n = r = 3$, so besitzt G eine freie Untergruppe vom Rang 2. Dies folgt aus dem Darstellungssatz (2.32), vgl. auch [10], S. $269ff$, da $p = 3 > 2$ bzw. $r = 3 > 2$.
Wegen $l \leq m$ ist damit also ab jetzt $l = 2$, da $1/_l + 1/_m + 1/_p \geq 1$ mit $p \geq 3$. $\Rightarrow$ $\alpha = \varepsilon = 1$.
Somit hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^n = (xy^\beta)^p = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^r = 1\rangle, \quad p, r \geq 3.$$

Fallunterscheidung:

A) $m \geq 3$ oder $n \geq 3$.
Sei Œ $m \geq 3$.
Für das Tripel $(m; p; r)$ bleiben folgende Möglichkeiten:

a) $(3;3;3)$	b) $(3;3;4)$	c) $(3;3;5)$	d) $(3;4;3)$	e) $(3;5;3)$
f) $(4;3;3)$	g) $(4;3;4)$	h) $(4;3;5)$	i) $(4;4;3)$	
j) $(5;3;3)$	k) $(5;3;4)$	l) $(5;3;5)$		
m) $(6;3;3)$	n) $(6;3;4)$	o) $(6;3;5)$		

Diese Fälle werden nun einzeln abgearbeitet:
Für n brauchen wir uns nur die Fälle $2 \leq n \leq 6$ ansehen, da sonst sowieso $F_2 < G$ gilt, klar nach $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ für $q = 2$, $m \geq 3$ und $n \geq 7$, vgl. [15].

a) $(3;3;3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle.$$

Sei Œ $\beta = \gamma = 1$ (dies ist wieder möglich, da ggT $(3,\beta)$ = ggT $(3,\gamma) = 1$, verwende eventuell eine Linearkombination des ggT $(3,\beta)$ und gehe zu einer geeigneten Potenz von y über - da $W(y,z)$ Ordnung 2 hat ist dies keine Einschränkung).

$$\Rightarrow\ G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle.$$

$n = 6$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^6 = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle.$$

Sei ggT $(6,\delta) = 1 \ \Rightarrow\ \delta = 1$ oder $\delta = 5$. Für $\delta = 5$ gehe über zur Potenz $\tilde{z} := z^5$. Der Fall $\delta = 1$ wird unten behandelt.
Sei nun ggT $(6,\delta) = d > 1$. Betrachte eine Linearkombination des ggT und gehe zur geeigneten Potenz über $\Rightarrow \delta|6,\ 1 \leq \delta \leq 3$.
Das gleiche Resultat ergibt sich, falls man sich die Relationen ansieht und gegebenenfalls zur Inversen übergeht.
Ist $\delta = 2$ oder $\delta = 3$, so betrachte eine wesentliche Darstellung
$\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, $y \mapsto Y,\ z \mapsto Z$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar, denn:

1) Sei $\delta = 3$:
   $G_2 = \langle y, z \mid y^3 = z^6 = (yz^3)^2 = 1\rangle;\ \mathrm{tr}(Y) = \pm 1,\ \mathrm{tr}(Z) = \pm\sqrt{3}$
   $\Rightarrow \mathrm{tr}(YZ) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2) Sei $\delta = 2$:
   $G_2 = \langle y, z \mid y^3 = z^6 = (yz^2)^2 = 1\rangle;\ \mathrm{tr}(Y) = \pm 1,\ \mathrm{tr}(Z) = \pm\sqrt{3}$
   $\Rightarrow \mathrm{tr}(YZ) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Also $F_2 < G_2$, also auch $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Sei nun $\delta = 1$,

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^6 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle.$$

Œ $\zeta|6,\ 1 \leq \zeta \leq 3$, für $\zeta = 4$ oder $\zeta = 5$ gehe zur inversen Relation über.
Ist $\zeta = 2$ oder $\zeta = 3$, so betrachte eine wesentliche Darstellung
$\rho : G_3 \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, $x \mapsto X,\ z \mapsto Z$ mit $\rho(G_3)$ nicht-elementar, denn:

1) Sei $\zeta = 3$:
   $G_3 = \langle x, z \mid x^2 = z^6 = (xz^3)^3 = 1\rangle$; $\mathrm{tr}(X) = 0,\ \mathrm{tr}(Z) = \pm\sqrt{3}$
   $\Rightarrow \mathrm{tr}(XZ) = \pm\frac{1}{2}$, vgl. auch (3.2).
2) Sei $\zeta = 2$:
   $G_3 = \langle x, z \mid x^2 = z^6 = (xz^2)^3 = 1\rangle$; $\mathrm{tr}(X) = 0,\ \mathrm{tr}(Z) = \pm\sqrt{3}$
   $\Rightarrow \mathrm{tr}(XZ) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, vgl. auch (3.2).

Also $F_2 < G_3$, also auch $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Sei nun auch $\zeta = 1$,

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^6 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle,$$

also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 5$:
Œ habe G folgende Präsentierung ($\beta = \gamma = 1$)

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle,$$

weiter sei Œ $\delta = 1$, da ggT $(5, \delta) = 1$, sonst gehe zur geeigneten Potenz über. Es bleiben die Fälle $1 \leq \zeta \leq 2$ (betrachte eventuell inverse Relation, falls notwendig).
$\zeta = 2$:

$$\Rightarrow\ G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz^2)^3 = 1\rangle.$$

Konstruktion einer wesentlichen Darstellung mit nicht-elementaren Bild:
Starte mit $X, Z \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit entsprechenden Ordnungen.
Œ seien $\mathrm{tr}(X) = 0,\ \mathrm{tr}(Z) = \lambda$,

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5} + \nu) & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 1 & \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5} - \nu) \end{pmatrix},$$

mit $\nu = \sqrt{-34 + 10\sqrt{5}}$ und $\mathrm{tr}(XZ) = (\lambda - 1)$.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Y) \\ \mathrm{tr}(XY) \\ \mathrm{tr}(ZY) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix};\ \text{wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = \frac{\sqrt{5} - 3 \pm i(\sqrt{15} - 3\sqrt{3})}{2\sqrt{5} - 6} \approx 0,5 \pm 1,937i\ \Rightarrow F_2 < G.$$

$\zeta = 1$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle,$$

also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 4$:
Œ habe G folgende Präsentierung ($\beta = \gamma = 1$)

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^4 = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle,$$

mit $1 \le \delta, \zeta \le 2$, gehe eventuell zur inversen Relation über.
Ist $\delta = 2$, so gilt $F_2 < G$ mittels einer wesentlicher Darstellung
$\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}),\ y \mapsto Y,\ z \mapsto Z$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar, vgl. (3.2).
Sei nun $\delta = 1$:
Ist $\zeta = 2$, so betrachte eine wesentliche Darstellung
$\rho : G_3 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}), x \mapsto X,\ z \mapsto Z$ mit $\rho(G_3)$ nicht-elementar, vgl. (3.2).
Ist nun auch $\zeta = 1$, so ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$2 \le n \le 3$:
Œ habe G folgende Präsentierung ($\beta = \gamma = 1$)

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle.$$

Weiter können wir Œ $\delta = \zeta = 1$ annehmen, also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

b) $(3; 3; 4)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^4 = 1\rangle.$$

Sei Œ $\beta = \gamma = 1$ (vgl. a)),

$$\Rightarrow\ G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^4 = 1\rangle.$$

Für den Fall $1/_l + 1/_n + 1/_r < 1$ folgt $F_2 < G$. Da $l = 2$ und $r = 4$ bleiben also die Fälle $2 \le n \le 4$ zu untersuchen.
$n = 4$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^4 = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^4 = 1\rangle,$$

mit $1 \le \delta, \zeta \le 2$.
Ist $\delta = 2$, so betrachte eine wesentliche Darstellung
$\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}),\ y \mapsto Y,\ z \mapsto Z$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar, siehe (3.2), vgl. auch [27], Seite 45.
Sei nun Œ $\delta = 1$, gehe eventuell zu einer geeigneten Potenz über.
Ist $\zeta = 2$, so ist

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^4 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz^2)^4 = 1\rangle$$

und wir betrachten die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $z^2 = 1$:

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^2 = (xy)^3 = (yz)^2 = 1\rangle;$$

es ist $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Ist nun $\zeta = 1$, so ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$2 \leq n \leq 3$:
Œ habe G folgende Präsentierung ($\beta = \gamma = 1$)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^4 = 1 \rangle.$$

Weiter können wir Œ $\delta = \zeta = 1$ annehmen, also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

c) $(3; 3; 5)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^5 = 1 \rangle.$$

Sei Œ $\beta = \gamma = 1$ (vgl. a)),

$$\Rightarrow \; G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^5 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $1/_l + 1/_n + 1/_r < 1$ folgt $F_2 < G$. Da $l = 2$ und $r = 5$ bleiben also die Fälle $2 \leq n \leq 3$ zu untersuchen.
$2 \leq n \leq 3$:
Œ habe G folgende Präsentierung ($\beta = \gamma = 1$)

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^5 = 1 \rangle.$$

Weiter können wir Œ $\delta = \zeta = 1$ annehmen, also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

d) $(3; 4; 3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy^\beta)^4 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Sei Œ $\beta = \gamma = 1$ (vgl. a)),

$$\Rightarrow \; G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^4 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $1/_l + 1/_n + 1/_r < 1$ folgt $F_2 < G$. Da $l = 2$ und $r = 3$ bleiben also die Fälle $2 \leq n \leq 6$ zu untersuchen.
$n = 6$:
Œ $\delta | 6$, $\zeta | 6$, also $1 \leq \delta, \zeta \leq 3$.

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^6 = (xy)^4 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Es gelte zunächst $2 \leq \delta \leq 3$ oder $2 \leq \zeta \leq 3$: Betrachte wieder wesentliche Darstellungen entweder startend von G_2 oder G_3 und verfahre exakt so wie in Fall a) $\Rightarrow F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).

Sei nun $\delta = \zeta = 1$, also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 5$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^4 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle,$$

dann gilt $F_2 < G$, denn es lässt sich eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ konstruieren mit $\rho(G)$ nicht-elementar. Die Möglichkeiten, dass $\rho(G)$ die A_4, A_5 oder S_4 beschreibt, entfällt, da in allen Fällen nicht gleichzeitig ein Element der Ordnung 4 und ein Element der Ordnung 5 auftreten kann. Die Diedergruppen $D_{2\varepsilon}$ kommen als Bild nicht in Frage, da alle Untergruppen von G (insbesondere auch G_1, G_2, G_3) wieder Diedergruppen darstellen müssen. Zyklische Gruppen kommen als Bild nicht in Frage, da zyklisch insbesondere abelsch impliziert $\Rightarrow \rho(G)$ ist trivial, was einen Widerspruch ergibt.
$n = 4$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^4 = (xy)^4 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle,$$

mit $1 \leq \delta, \zeta \leq 2$.
Wie z.B. im Fall $n = 6$ betrachte für $\delta = 2$ oder $\zeta = 2$ wesentliche Darstellungen mit nicht-elementaren Bild $\Rightarrow F_2 < G$.
Sei nun $\delta = \zeta = 1$, so erhalten wir G gewöhnliche Tetraedergruppe.
$2 \leq n \leq 3$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^4 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Weiter können wir Œ $\delta = \zeta = 1$ annehmen, also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

e) $(3; 5; 3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy^\beta)^5 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Sei Œ $\beta = \gamma = 1$ (vgl. a)),

$$\Rightarrow \; G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^5 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $1/l + 1/n + 1/r < 1$ folgt $F_2 < G$. Da $l = 2$ und $r = 3$ bleiben also die Fälle $2 \leq n \leq 6$ zu untersuchen.
$n = 6$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^6 = (xy)^5 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Es gilt $F_2 < G$ mit der gleichen Argumentation wie im Fall d) für $n = 6$.
$n = 5$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = (xy)^5 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Da $\mathrm{ggT}(5,\delta)=1$ setze $\tilde{z}:=z^{\delta}$ und erhalte

$$G=\langle x,y,\tilde{z}\mid x^2=y^3=\tilde{z}^5=(xy)^5=(y\tilde{z})^2=(x\tilde{z}^{\tilde{\zeta}})^3=1\rangle,$$

mit $1\leq\tilde{\zeta}\leq 2$, gehe eventuell zur inversen Relation über.
Fahre in der alten Notation fort:
Sei $\zeta=2$:

$$G=\langle x,y,z\mid x^2=y^3=z^5=(xy)^5=(yz)^2=(xz^2)^3=1\rangle.$$

Konstruktion einer wesentlichen Darstellung mit nicht-elementaren Bild, vgl. Fall a) für $n=5$:
Starte mit $X,Z\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ mit entsprechenden Ordnungen.
Œ seien $\mathrm{tr}(X)=0,\ \mathrm{tr}(Z)=\lambda$.

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}+\nu)&\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\\1&\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}-\nu)\end{pmatrix}$$

mit $\nu=\sqrt{-34+10\sqrt{5}}$ und $\mathrm{tr}(XZ)=(\lambda-1)$.

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}\mathrm{tr}(Y)\\\mathrm{tr}(XY)\\\mathrm{tr}(ZY)\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm1\\\pm\lambda;\pm(\lambda-1)\\0\\t\end{pmatrix};\ \text{wähle } \vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\\lambda\\0\\t\end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\mathrm{tr}(XY)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden)
Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2}=\frac{\sqrt{5}-3\pm\sqrt{2-\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-3}\approx 1\mp 1,272i\ \Rightarrow F_2<G.$$

Sei nun auch $\zeta=1$:
Damit ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n=4$:

$$G=\langle x,y,z\mid x^2=y^3=z^4=(xy)^5=(yz^{\delta})^2=(xz^{\zeta})^3=1\rangle.$$

$F_2<G$ vgl. Fall d) für $n=5$.
$2\leq n\leq 3$:

$$G=\langle x,y,z\mid x^2=y^3=z^n=(xy)^5=(yz^{\delta})^2=(xz^{\zeta})^3=1\rangle.$$

Weiter können wir Œ $\delta=\zeta=1$ annehmen, also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

f) $(4;3;3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle.$$

Für den Fall $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ folgt $F_2 < G$. Da $m = 4$ und $q = 2$ bleiben also die Fälle $2 \leq n \leq 4$ zu untersuchen.
Œ sei $1 \leq \beta \leq 2$, gehe eventuell zur inversen Relation über.
Sei $\beta = 2$:
Es folgt $F_2 < G$ mittels einer wesentlicher Darstellung
$\rho : G_1 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $x \mapsto X,\ y \mapsto Y$ mit $\rho(G_1)$ nicht-elementar, siehe (3.2).
Sei ab jetzt also $\beta = 1$:
$n = 4$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^4 = (xy)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle,$$

mit $1 \leq \zeta \leq 2$, gehe eventuell zur inversen Relation über.
Sei $\zeta = 2$:
Es folgt $F_2 < G$ mittels einer wesentlicher Darstellung
$\rho : G_3 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $x \mapsto X,\ z \mapsto Z$ mit $\rho(G_3)$ nicht-elementar, s.o. im Fall $\beta = 2$ (tausche die Rollen von y und z).
Sei ab jetzt also $\zeta = 1$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^4 = (xy)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Seien nun $\gamma = 2$ oder $\delta = 2$:
Betrachte die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $y^2 = 1$ und $z^2 = 1$:

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (xz)^3 = 1\rangle;$$

es ist $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Für den Fall $\gamma = \delta = 1$ ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 3$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xy)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz)^3 = 1\rangle,$$

weiter gelte Œ $\delta = 1$, betrachte eventuell inverse Relation

$$\Rightarrow\ G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Ist $\gamma = 2$, so folgt $F_2 < G$ mittels einer wesentlichen Darstellung
$\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $y \mapsto Y,\ z \mapsto Z$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar, denn:
$G_2 = \langle y, z \mid y^4 = z^3 = (y^2 z)^2 = 1\rangle;\ \mathrm{tr}(Y) = \pm\sqrt{2},\ \mathrm{tr}(Z) = \pm 1$
$\Rightarrow \mathrm{tr}(YZ) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Also $F_2 < G_2$, damit auch $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).

Sei nun Œ $\gamma = 1 \Rightarrow G$ gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

mit $1 \leq \gamma \leq 2$. Ist $\gamma = 2$, so betrachte die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $y^2 = 1$:

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (xz)^3 = 1 \rangle;$$

es ist $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Ist $\gamma = 1$, so ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

g) $(4; 3; 4)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^4 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ folgt $F_2 < G$. Da $m = 4$ und $q = 2$ bleiben also die Fälle $2 \leq n \leq 4$ zu untersuchen.
Œ sei $1 \leq \beta \leq 2$, gehe eventuell zur inversen Relation über.
Sei $\beta = 2$:
Es folgt $F_2 < G$ mittels einer wesentlichen Darstellung mit nicht-elementaren Bild, vgl. f), sei also nun Œ $\beta = 1$.
$n = 4$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^4 = (xy)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^4 = 1 \rangle.$$

Ist $\gamma = 2$ oder $\delta = 2$ oder $\zeta = 2$, so betrachte jeweils die Faktorgruppe nach Einführen folgender Relationen, $y^2 = 1$ und $z^2 = 1$:

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (y^{\tilde{\gamma}} z^{\tilde{\delta}})^2 = (xz^{\tilde{\zeta}})^4 = 1 \rangle;$$

wobei mindestens eine der Relationen $(y^{\tilde{\gamma}} z^{\tilde{\delta}})^2 = 1$ oder $(xz^{\tilde{\zeta}})^4 = 1$ überflüssig ist. Es gilt $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Für den Fall $\gamma \neq 2$ und $\delta \neq 2$ und $\zeta \neq 2$ erhalten wir jeweils, dass G eine gewöhnliche Tetraedergruppe ist, denn die Möglichkeiten für $(\gamma; \delta; \zeta)$ sind:
$(1; 1; 1), (3; 3; 3),\ (1; 3; 1), (1; 3; 3),\ (3; 1; 1), (3; 1; 3)$.
Führe den $2., 4., 6.$ Fall auf den jeweils Vorherigen zurück mittels inverse Relationen und definiere $\tilde{z} := z^3$. Der Rest verläuft kanonisch.
$n = 3$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xy)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^4 = 1 \rangle.$$

Weiter gelte Œ $\delta = 1$, gehe eventuell zur inversen Relation über. Ist $\zeta = 2$, so setze $\tilde{z} := z^2$ und gehe gegebenenfalls bei $W_2(y, z)$ zur inversen Relation über, also auch $\zeta = 1$

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^4 = 1 \rangle,$$

mit $1 \leq \gamma \leq 2$.
Ist $\gamma = 2$, so folgt $F_2 < G$ mittels einer wesentlichen Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $y \mapsto Y,\ z \mapsto Z$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar, vgl. f) für $n = 3$.
Sei nun Œ $\gamma = 1 \Rightarrow G$ gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^4 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $\gamma = 2$ betrachte die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $y^2 = 1$:

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (xz)^4 = 1 \rangle;$$

es ist $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Ist $\gamma = 1$, so ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

h) $(4; 3; 5)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^5 = 1 \rangle.$$

In allen Fällen folgt $F_2 < G$, vgl. Fall d) für $n = 5$.

i) $(4; 4; 3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^n = (xy^\beta)^4 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ folgt $F_2 < G$. Da $m = 4$ und $q = 2$ bleiben also die Fälle $2 \leq n \leq 4$ zu untersuchen.
$n = 4$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^4 = (xy^\beta)^4 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle,$$

mit $1 \leq \beta, \gamma, \delta, \zeta \leq 2$, betrachte gegebenenfalls inverse Relationen.
Ist $\zeta = 2$, so folgt $F_2 < G$ mittels einer wesentlichen Darstellung $\rho : G_3 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_3)$ nicht-elementar, vgl. Fall f) für $n = 4$.
Sei ab jetzt Œ $\zeta = 1$.
Ist $\beta = 2$ oder $\gamma = 2$ oder $\delta = 2$, so betrachte jeweils die Faktorgruppe nach Einführen der Relationen $y^2 = 1$ und $z^2 = 1$:

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy^{\tilde{\beta}})^4 = (y^{\tilde{\gamma}} z^{\tilde{\delta}})^2 = (xz)^3 = 1 \rangle;$$

wobei mindestens eine der Relationen $(xy^{\tilde{\beta}})^4 = 1$ oder $(y^{\tilde{\gamma}} z^{\tilde{\delta}})^2 = 1$ überflüssig ist. Es gilt $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Für den Fall $\beta \neq 2$ und $\gamma \neq 2$ und $\delta \neq 2$ erhalten wir jeweils, dass G eine gewöhnliche Tetraedergruppe ist, vgl. Fall g) für $n = 4$ (vertauschen der Rollen von y und z).
$n = 3$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xy^\beta)^4 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle,$$

mit $1 \leq \beta, \gamma, \delta, \zeta \leq 2$, betrachte gegebenenfalls inverse Relationen.
Ist $\delta = 2$, so setze $\tilde{z} := z^2$. Ist $\zeta = 1$, gehe zur inversen Relation über, also gilt Œ (in der alten Notation)

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xy^\beta)^4 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $\gamma = 2$ betrachte eine wesentliche Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar, vgl. Fall f) für $n = 3$.
Sei nun Œ $\gamma = 1$.
Sei $\beta = 2$, betrachte die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $y^2 = 1$:

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle;$$

Es gilt $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Also auch hier Œ $\beta = 1$, d.h G ist eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xy^\beta)^4 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

mit $1 \leq \beta, \gamma \leq 2$, gehe eventuell zur inversen Relation über.
Für $\beta = 2$ oder $\gamma = 2$ betrachte die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $y^2 = 1$:

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy^{\tilde{\beta}})^4 = (y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle;$$

wobei mindestens eine der Relationen $(xy^{\tilde{\beta}})^4 = 1$ oder $(y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = 1$ überflüssig ist. Es gilt $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Sei nun $\beta \neq 2$ und $\gamma \neq 2$, dann ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

j) $(5; 3; 3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ folgt $F_2 < G$. Da $m = 5$ und $q = 2$ bleiben also die Fälle $2 \leq n \leq 3$ zu untersuchen.
Damit hat G (Œ $\delta = 1$) folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^n = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle,$$

mit $1 \leq \gamma \leq 4$ und $1 \leq \zeta \leq 2$.
$n = 3$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^3 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle,$$

Œ sei $\zeta = 1$ (für $\zeta = 2$ setze $\tilde{z} := z^2$ und gehe bei $W_2(y, z)$ zur inversen Relation über)

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^3 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

mit $1 \leq \gamma \leq 2$, gehe eventuell zur inversen Relation über.
Sei $\gamma = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^3 = (xy)^3 = (y^2 z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Konstruktion einer wesentlichen Darstellung mit nicht-elementaren Bild:
Starte mit $X, Z \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit entsprechenden Ordnungen.
Œ seien $\mathrm{tr}(X) = 0,\ \mathrm{tr}(Z) = 1$,

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ -\frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix},\ XZ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} & 0 \\ -1 & -\rho \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Y) \\ \mathrm{tr}(XY) \\ \mathrm{tr}(ZY) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\lambda; \pm(\lambda - 1) \\ \pm 1 \\ \pm(\lambda - 1); \pm\lambda \\ t \end{pmatrix};\ \text{wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \\ \lambda - 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\mathrm{tr}(XY)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden, hingegen $\mathrm{tr}(ZY)$ folgt direkt aus den Werten für $\mathrm{tr}(Y)$ und $\mathrm{tr}(Z)$)
Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} \pm i(\sqrt{15} - \sqrt{3})) \approx 0,309 \pm 2,141i \ \Rightarrow F_2 < G.$$

Sei nun auch $\gamma = 1$:
Damit ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^2 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Betrachte die von y und z erzeugte Diedergruppe. Wegen der Diederrelation gilt: $(y^\gamma z)^2 = 1 \Leftrightarrow (yz)^2 = 1 \ \Rightarrow$ Œ $\gamma = 1 \Rightarrow G$ gewöhnliche Tetraedergruppe.

k) $(5; 3; 4)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^4 = 1 \rangle.$$

In allen Fällen folgt $F_2 < G$, vgl. Fall d) für $n = 5$.

l) $(5; 3; 5)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^5 = 1 \rangle.$$

Weiter gelte Œ $\beta = 1$.
Für den Fall $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ folgt $F_2 < G$. Da $m = 5$ und $q = 2$ bleiben

also die Fälle $2 \leq n \leq 3$ zu untersuchen.
$n = 3$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^3 = (xy)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^5 = 1 \rangle,$$

mit $1 \leq \gamma, \delta, \zeta \leq 2$, betrachte eventuell inverse Relationen.
Œ gelte auch hier $\delta = \zeta = 1$, vgl. Fall i) für $n = 3$.
Sei $\gamma = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^3 = (xy)^3 = (y^2 z)^2 = (xz)^5 = 1 \rangle.$$

Konstruktion einer wesentlichen Darstellung mit nicht-elementaren Bild:
Starte mit $X, Y \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit entsprechenden Ordnungen.
Œ seien $\mathrm{tr}(X) = 0,\ \mathrm{tr}(Y) = \lambda$,

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5} + \nu) & 0 \\ 1 & \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5} - \nu) \end{pmatrix}$$

mit $\nu = \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}$ und $\mathrm{tr}(XY) = 1$.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Z) \\ \mathrm{tr}(XZ) \\ \mathrm{tr}(YZ) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm(\lambda); \pm(\lambda - 1) \\ \pm(\lambda - 1) \\ t \end{pmatrix};\ \text{wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda - 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\mathrm{tr}(XZ)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden, hingegen $\mathrm{tr}(YZ)$ folgt direkt aus den Werten für $\mathrm{tr}(Y)$ und $\mathrm{tr}(Z)$).
Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = \frac{-5 + \sqrt{5} \pm \sqrt{-50 + 22\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5} - 3)} \approx 1,809 \mp 0,588i \Rightarrow F_2 < G.$$

Sei nun auch $\gamma = 1 \Rightarrow G$ gewöhnliche Tetraedergruppe.
$n = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^2 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^5 = 1 \rangle,$$

vgl. Fall j) für $n = 2$., also Œ $\gamma = 1 \Rightarrow G$ gewöhnliche Tetraedergruppe.

m) $(6; 3; 3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ folgt $F_2 < G$. Da $m = 6$ und $q = 2$ bleiben also die Fälle $2 \leq n \leq 3$ zu untersuchen.

$2 \leq n \leq 3$:
Œ sei $\delta = \zeta = 1$ (im Fall $n = 2$ trivial), vgl. Fall i) für $n = 3$.

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

mit $1 \leq \beta \leq 3$, betrachte eventuell inverse Relation.
Im Fall $\beta = 3$ oder $\beta = 2$ gilt $F_2 < G$:
Es lässt sich eine wesentliche Darstellung konstruieren mit nicht-elementaren Bild, vgl. Fall a) für $n = 6$ (vertausche die Rollen von y und z), also folgt die Behauptung nach dem Fortsetzungssatz (1.23). Nun sei $\beta = 1$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^n = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

so besitzt G eine freie Untergruppe vom Rang 2. Dies folgt aus dem Darstellungssatz (2.32), siehe [10], S. $269ff$, da $r = 3 > 2$.

n)+o) $(6; 3; r)$ mit $4 \leq r \leq 5$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^r = 1 \rangle.$$

Für den Fall $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ folgt $F_2 < G$. Da $m = 6$ und $q = 2$ bleiben also die Fälle $2 \leq n \leq 3$ zu untersuchen.
$2 \leq n \leq 3$:
Wie in den Fällen zuvor gelte Œ $\delta = \zeta = 1$, vgl. Fall i) für $n = 3$.

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^n = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^r = 1 \rangle,$$

mit $1 \leq \beta, \gamma \leq 3$. Diese Fälle verlaufen vollkommen analog zu Fall m).

B) $m = 2$ und $n = 2$:

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^p = (yz)^q = (xz)^r = 1 \rangle.$$

Damit ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

Damit ist Der Fall I mit $q = 2$ und $r \geq 3$ abgeschlossen.

5.2 Fall II: $q \geq 3$ und $r = 2$

Es gelte $1/_l + 1/_m + 1/_p < 1$ oder $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ oder $1/_l + 1/_n + 1/_r < 1$, dann gilt $F_2 < G$, siehe (1.25) oder [10], S. 277, Lemma 9.3.4.
Gilt $1/_p + 1/_q + 1/_r \leq 1 \Rightarrow$ Die Tits-Alternative gilt nach Howie und Kopteva, siehe [12].
Deshalb sei nun $1/_l + 1/_m + 1/_p \geq 1$, $1/_m + 1/_n + 1/_q \geq 1$, $1/_l + 1/_n + 1/_r \geq 1$ und $1/_p + 1/_q + 1/_r > 1$.

Ist $l = m = 3$, dann ist auch $p = 3$ oder $m = n = q = 3$, so gilt $F_2 < G$. Dies folgt aus dem Darstellungssatz (2.32, siehe [10], S. $269ff$, da $p = 3 > 2$ bzw. $q = 3 > 2$, vgl. Argumentation in Fall I Teil A).
Damit folgt aus $1/_l + 1/_m + 1/_p \geq 1$, $p \geq 3$ und $l \leq m$, dass $l = 2$. Somit hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^n = (xy^\beta)^p = (y^\gamma z^\delta)^q = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

Ferner ist $m = 2$ oder $n = 2$

Fallunterscheidung:

A) $m = 2$

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^n = (xy)^p = (yz^\delta)^q = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

Ist auch $n = 2$, so ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.
Sei also $n \geq 3$, es gilt $3 \leq n \leq 6$, da $1/_m + 1/_n + 1/_q \geq 1$.
Für das Tripel $(n; p; q)$ bleiben folgende Möglichkeiten:

a) $(3; 3; q)$,	$3 \leq q \leq 5$	b) $(3; p; 3)$,	$4 \leq p \leq 5$
c) $(4; 3; 3)$	d) $(4; 3; 4)$	e) $(4; 4; 3)$	f) $(4; 5; 3)$
g) $(5; p; 3)$,	$p = 3$ oder $p = 5$	h) $(5; 4; 3)$	
i) $(6; p; 3)$,	$3 \leq p \leq 5$		

Diese Fälle werden nun einzeln abgearbeitet:

a) $(3; 3; q)$ mit $3 \leq q \leq 5$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = (xy)^3 = (yz^\delta)^q = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

mit $1 \leq \delta, \zeta \leq 2$. Œ (vgl. Fall I Teil A) i)) seien $\delta = \zeta = 1$.

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = (xy)^3 = (yz)^q = (xz)^2 = 1\rangle,$$

also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

b) $(3; p; 3)$ mit $4 \leq p \leq 5$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = (xy)^p = (yz^\delta)^3 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

mit $1 \leq \delta, \zeta \leq 2$. Œ (vgl. Fall I Teil A) i)) seien $\delta = \zeta = 1$.

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = (xy)^p = (yz)^3 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

c) $(4;3;3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = (xy)^3 = (yz^\delta)^3 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

Ist $\delta = 2$, so betrachte eine wesentliche Darstellung mit nicht-elementaren Bild, vgl. Fall I Teil A) a) für $n = 4$ (vertausche die Rollen von x und y). Also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Sei nun Œ $\delta = 1$:

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = (xy)^3 = (yz)^3 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

mit $1 \leq \zeta \leq 2$, betrachte gegebenenfalls die inverse Relation.
Ist $\zeta = 2$, so betrachten wir die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $z^2 = 1$:

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (yz)^3 = 1\rangle;$$

es gilt $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Ist $\zeta = 1$, so ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

d) $(4;3;4)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = (xy)^3 = (yz^\delta)^4 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

Ist $\delta = 2$ oder $\zeta = 2$, so betrachte jeweils die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $z^2 = 1$:

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (yz^{\tilde{\delta}})^4 = (xz^{\tilde{\zeta}})^2 = 1\rangle;$$

wobei mindestens eine der Relationen $(yz^{\tilde{\delta}})^4 = 1$ oder $(xz^{\tilde{\zeta}})^2 = 1$ überflüssig ist.
Also gilt $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Sind sowohl $\delta \neq 2$ und $\zeta \neq 2$, so gilt wieder Œ $\delta = \zeta = 1$.

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = (xy)^3 = (yz)^4 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

also ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

e) $(4;4;3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = (xy)^4 = (yz^\delta)^3 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

mit $1 \leq \delta, \zeta \leq 2$, betrachte eventuell inverse Relationen.
Ist $\delta = 2$, so verfahre wie im Fall c) mittels einer wesentlichen Darstellung mit nicht-elementaren Bild und dem Fortsetzungssatz (1.23).
Sei nun Œ $\delta = 1$, d.h.

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = (xy)^4 = (yz)^3 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

Ist $\zeta = 2$, so führen wir die Relation $z^2 = 1$ ein und erhalten $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Ist $\zeta = 1$, so ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

f) $(4; 5; 3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = (xy)^5 = (yz^\delta)^3 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

Es glt $F_2 < G$:
Es lässt sich eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ konstruieren mit $\rho(G)$ nicht-elementar, vgl. Fall I Teil A) d) für $n = 5 \Rightarrow$ die Behauptung.

g) $(5; p; 3)$ mit $p = 3$ oder $p = 5$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^5 = (xy)^p = (yz^\delta)^3 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

Es sei Œ $\delta = 1$ ($\mathrm{ggT}(5, \delta) = 1$).
Betrachte die von x und z erzeugte Diedergruppe.
Es ist $(xz^\zeta)^2 = 1 \Leftrightarrow (xz)^2 = 1 \Rightarrow$ Œ $\zeta = 1 \Rightarrow G$ ist eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

h) $(5; 4; 3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^5 = (xy)^4 = (yz^\delta)^3 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

Es gilt $F_2 < G$:
Es lässt sich eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ konstruieren mit $\rho(G)$ nicht-elementar, vgl. Fall I Teil A) d) für $n = 5 \Rightarrow$ die Behauptung.

i) $(6; p; 3)$ mit $3 \le p \le 5$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^6 = (xy)^p = (yz^\delta)^3 = (xz^\zeta)^2 = 1\rangle,$$

mit Œ $1 \le \delta, \zeta \le 3$, gehe eventuell zur inversen Relation über.
Es gilt $F_2 < G$. Dies folgt für $\delta = 2$ oder $\delta = 3$ über eine wesentliche Darstellung mit nicht-elementaren Bild und dem Fortsetzungssatz (1.23) und im Fall $\delta = 1$ aus dem Darstellungssatz (2.32), siehe [10], S. $269ff$, da $p > 2$, vgl. Argumentation in Fall I Teil A) m), vertausche dabei die Rollen von y und z.

Dies beendet den Fall $m = 2$.

B) $n = 2$

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^2 = (xy^\beta)^p = (y^\gamma z)^q = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Für $m = 2$ oder $m = 3$ (vgl. Fall A)) erhalten wir, dass G eine gewöhnliche Tetraedergruppe ist.
Sei nun $m \ge 4$. Es ist $4 \le m \le 6$, da $1/_m + 1/_n + 1/_q \ge 1$.
Für das Tripel $(m; p; q)$ bleiben folgende Möglichkeiten:

a) $(4; 3; 3)$ b) $(4; 3; 4)$ c) $(4; 3; 5)$
d) $(4; 4; 3)$ e) $(4; 5; 3)$
f) $(5; 3; 3)$
g) $(6; 3; 3)$

Auch diese Fälle werden nun einzeln abgearbeitet:
Sowohl im Fall c) als auch im Fall e) gilt $F_2 < G$,denn es lässt sich eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ konstruieren mit $\rho(G)$ nicht-elementar, vgl. Fall I Teil A) d) für $n = 5$.

a) $(4; 3; 3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

mit $1 \leq \beta, \gamma \leq 2$, gehe eventuell zur inversen Relation über.
Sei $\beta = 2$:
Es folgt $F_2 < G$ mittels einer wesentlichen Darstellung mit nicht-elementaren Bild und dem Fortsetzungssatz (1.23), vgl. Fall I Teil A) f).
Ist $\gamma = 2$, dann folgt die Existenz einer freien Untergruppe vom Rang 2 ebenfalls mittels einer wesentlichen Darstellung und dem Fortsetzungssatz (1.23), vgl. Teil A) c) mit getauschten Rollen von y und z.
Für den Fall $\beta = \gamma = 1$ erhalten wir, dass G eine gewöhnliche Tetraedergruppe ist.

b) $(4; 3; 4)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z)^4 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

mit $1 \leq \beta, \gamma \leq 2$, gehe eventuell zur inversen Relation über.
Der Fall $\beta = 2$ wird genauso behandelt wie im Fall a).
Sei also Œ $\beta = 1$.
Ist $\gamma = 2$, so betrachten wir die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $y^2 = 1$:

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (xz)^2 = 1\rangle;$$

also gilt $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Sei nun Œ $\gamma = 1$, so ist G eine gewöhnliche Tetraedergruppe.

In symmetrischer Weise wird der Fall d) behandelt.

f) $(5; 3; 3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^2 = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

mit Œ $\beta = 1$ ($\mathrm{ggT}(5, \beta) = 1$). Weiter sei Œ $1 \leq \gamma \leq 2$, gehe eventuell zur inversen Relation über.
Sei nun $\gamma = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^2 = (xy)^3 = (y^2 z)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Starte mit der Untergruppe H mit folgenden Erzeugenden:

$$\begin{array}{lllll} a = x, & b = yxy^3, & c = y^3xy, & d = y^2xy^4, & e = y^4xy^2, \\ u = z, & v = y^2zy, & w = yzy^2, & r = y^4zy^3, & s = y^3zy^4. \end{array}$$

Sei $H = \langle a, b, c, d, e, u, v, w, r, s \rangle$. H hat Index 5 in G. Wir bestimmen die definierenden Relationen für H:

Aus $x^2 = 1$ folgt: $a^2 = bd = ce = 1$,
aus $z^2 = 1$ folgt: $u^2 = ws = vr = 1$,
aus $(xy)^3 = 1$ folgt: $abc = d^3 = e^3 = 1$,
aus $(y^2z)^3 = 1$ folgt: $vwu = r^3 = s^3 = 1$,
aus $(xz)^2 = 1$ folgt: $bves = dwcr = 1$.

Es ist also

$$H = \langle a, b, c, d, e, u, v, w, r, s \mid a^2 = bd = ce = u^2 = ws = vr = abc = d^3 = e^3 = vwu = r^3 = s^3 = bves = dwcr = 1 \rangle$$

Untergruppe von G vom Index 5.
Mit $b = d^{-1},\ c = e^{-1},\ v = r^{-1},\ w = s^{-1}$ folgt

$$H = \langle a, d, e, u, r, s \mid a^2 = u^2 = ad^{-1}e^{-1} = d^3 = e^3 = ur^{-1}s^{-1} = r^3 = s^3 = d^{-1}r^{-1}es = ds^{-1}e^{-1}r = 1 \rangle,$$

da $d = r^{-1}es$, ist $ds^{-1}e^{-1}r = 1$ eine Folgerelation, also

$$H = \langle a, d, e, u, r, s \mid a^2 = u^2 = eda = d^3 = e^3 = sru = r^3 = s^3 = d^{-1}r^{-1}es = 1 \rangle,$$

wir nutzen nun die Beziehungen $eda = 1$ und $sru = 1$ aus und ersetzen a und u

$$\Rightarrow H = \langle d, e, r, s \mid (ed)^2 = (rs)^2 = d^3 = e^3 = r^3 = s^3 = d^{-1}r^{-1}es = 1 \rangle,$$

ersetze nun $d = r^{-1}es$ und erhalte

$$H = \langle e, r, s \mid e^3 = r^3 = s^3 = (r^{-1}es)^3 = (rs)^2 = (er^{-1}es)^2 = 1 \rangle.$$

Betrachte die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $(es)^2 = 1$:

$$\bar{H} = \langle e, r, s \mid e^3 = r^3 = s^3 = (rs)^2 = (es)^2 = (esr)^3 = 1 \rangle,$$

setze $g = es$, dann ist $e = gs^{-1}$. Für $\bar{H}$ folgt nun

$$\bar{H} = \langle g, r, s \mid g^2 = r^3 = s^3 = (gs)^3 = (gr)^3 = (rs)^2 = 1 \rangle.$$

Diese gewöhnliche Tetraedergruppe haben wir in (2.1) behandelt.
Damit ist $F_2 < \bar{H}$, also auch $F_2 < G$.
Für den Fall $\gamma = 1$ erhalten wir, dass G eine gewöhnliche Tetraedergruppe ist.

g) $(6;3;3)$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^2 = (xy^\beta)^3 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle,$$

so gilt $F_2 < G$. Dies folgt aus dem Darstellungssatz (2.32), siehe [10], S. $269ff$, da $p = 3 > 2$ bzw. $q = 3 > 2$, vgl. Argumentation in Fall I.

Damit ist dieses Kapitel, indem 2 Exponenten der Relationen echt größer 2 sind, abgeschlossen und die Tits-Alternative im sphärischen Fall S.2 nachgewiesen.

Kapitel 6

Der Sphärische Fall S.3

In diesem Kapitel betrachten wir verallgemeinerte Tetraedergruppen, bei denen die Blocklänge der Œ ersten Relation $W_1(x, y)$ gleich zwei ist. Sei nun

$$G = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = (x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z^\delta)^q = (x^\varepsilon z^\zeta)^r = 1 \rangle,$$

mit $(q; r) \neq (2; 2)$. Für den Fall, dass $1/_{pk_1} + 1/_q + 1/_r \leq 1$ mit $p = k_1 = 2 \Rightarrow$ Die Tits-Alternative gilt nach Howie und Kopteva, siehe [12].
Betrachte folgende zwei Fälle:

I) $q = 2$ und $r = 3$

II) $q = 3$ und $r = 2$

Sei weiter Œ $2 \leq l \leq m$. Setze wie üblich

$$G_1 = \langle x, y \mid x^l = y^m = (x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2})^2 = 1 \rangle,$$

$$G_2 = \langle y, z \mid y^m = z^n = (y^\gamma z^\delta)^q = 1 \rangle,$$
$$G_3 = \langle x, z \mid x^l = z^n = (x^\varepsilon z^\zeta)^r = 1 \rangle.$$

Sei im Folgenden $x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2}$ keine echte Potenz im freien Produkt $\langle x \rangle * \langle y \rangle$ (sonst gilt die Tits-Alternative, da dann $(x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2})^2 = (x^{\alpha_1} y^{\beta_1})^4$.
Damit ist $m \geq 3$, da sonst $l = m = \alpha_i = \beta_i = 1$ für $i = 1, 2$.

Es gebe eine wesentliche Darstellung $\rho_1 : G_1 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho_1(G_1)$ unendlich metabelsch (ist $\rho_1(G_1)$ abelsch, so gibt es auch eine Darstellung ρ_1' mit $\rho_1'(G_1)$ unendlich metabelsch). Wegen $(q; r) \neq (2; 2)$ gibt es damit eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G)$ nicht-elementar, vgl. Korollar 9.3.1 in [10] oder (2.32)). In diesem Fall enthält G eine freie Untergruppe vom Rang 2.

Im Folgenden gelte:
Es gebe keine wesentliche Darstellung $\rho_1 : G_1 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho_1(G_1)$ abelsch oder unendlich metabelsch.

6.1 Fall I: $q = 2$ und $r = 3$

Wie in den Kapiteln zuvor werden wir die einzelnen Fälle abarbeiten

A) Sei $l = 2$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^n = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle.$$

Gibt es eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G)$ eine Diedergruppe, so ist notwendigerweise $n = 2$ wegen der Relation $(xz^\zeta)^3 = 1$ und $m \geq 3$ (wäre $n \geq 3$, so wäre $\langle\rho(y), \rho(z)\rangle$ notwendigerweise zyklisch). Wir betrachten damit zunächst den Fall $n \geq 3$ und anschließend den Fall $n = 2$.

a) Sei $n \geq 3$:
Dann gibt es keine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G)$ eine Diedergruppe. Insbesondere gilt damit: Ist $m \geq 6$, so gilt $F_2 < G$ (für $m \geq 7$ wegen $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ und für $m = 6$ mittels des Darstellungssatzes (2.32) mit $r = 3 > 2$). Wir brauchen uns also nur den Fall

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^n = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle,$$

mit $3 \leq m \leq 5$, $n \geq 3$ ansehen. Da die A_4, A_5 und S_4 keine Elemente der Ordnung $n \geq 6$ besitzt, gilt auch $F_2 < G$ für $n \geq 6$. Sei nun auch $3 \leq n \leq 5$.

(1) $m = 5$:

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^n = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle.$$

Für den Fall $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ mit $m = 5$ und $q = 2$ folgt $F_2 < G$ für $n \geq 4$. Damit bleibt nur der Fall $n = 3$ offen:
$n = 3$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^3 = (xyxy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1\rangle,$$

mit $2 \leq \beta_2 \leq 4$ und $1 \leq \gamma \leq 2$, (betrachte sonst die inverse Relation von $(y^\gamma z)^2$).
Für $\beta_2 = 4$ besitzt G_1 eine wesentliche Darstellung $\rho : G_1 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_1)$ nicht-elementar, vgl. [24], Seite 158 Prop. 7, also $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Sei nun $\beta_2 = 3$: Wir ersetzen $\tilde{y} := y^3$ und erhalten $(xyxy^3)^2 = (x\tilde{y}^2x\tilde{y})^2 = 1$, also die Relation $(x\tilde{y}x\tilde{y}^2)^2 = 1$ durch Konjugation, es bleibt also der Fall $\beta_2 = 2$: Wir betrachten die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $(xy)^3 = 1$ und erhalten

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^3 = (xy)^3 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Es folgt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, nach (5.1).

(2) $m = 4$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^n = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle.$$

Für den Fall $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ mit $m = 4$ und $q = 2$ folgt $F_2 < G$ für $n \geq 5$. Damit bleiben nur die Fälle $3 \leq n \leq 4$ zu betrachten:
$n = 4$:
Für den Fall $\zeta = 2$ folgt $F_2 < G$ mittels einer wesentlichen Darstellung $\rho : G_3 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_3)$ nicht-elementar, vgl. Kapitel 5 Fall I A) f).
Sei nun Œ $\zeta = 1$, gehe eventuell zur Potenz $\tilde{z} = z^3$ über. Damit hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^4 = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Ist $\beta_1 = 2$ oder $\beta_2 = 2$ oder $\gamma = 2$ oder $\delta = 2$, so betrachte die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relationen $y^2 = z^2 = 1$

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy^{\tilde{\beta}_1}xy^{\tilde{\beta}_2})^2 = (y^{\tilde{\gamma}} z^{\tilde{\delta}})^2 = (xz)^3 = 1\rangle,$$

wobei mindestens eine der Relationen $(xy^{\tilde{\beta}_1}xy^{\tilde{\beta}_2})^2 = 1$ oder $(y^{\tilde{\gamma}} z^{\tilde{\delta}})^2 = 1$ überflüssig ist, also ist $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Seien nun Œ $\beta_1 = \gamma = \delta = 1$ und $\beta_2 = 3 \equiv -1 \mod 4$ (beachte $xy^{\beta_1}xy^{\beta_2}$ ist keine echte Potenz). Dann ist

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^4 = (xyxy^{-1})^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Die euklidische Gruppe $G_2 = \langle y, z \mid y^4 = z^4 = (yz)^2 = 1\rangle$ hat ein unendliches metabelsches Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, nach Korollar 9.3.1 in [10] (vgl. auch (2.32)) besitzt damit G eine freie Untergruppe vom Rang 2, da $r = 3 > 2$.
$n = 3$:
Dann hat G Œ folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Ist nun $\gamma = 2$, so betrachte eine wesentliche Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar $\Rightarrow F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23), vgl. (5.1).
Sei nun Œ $\gamma = 1$ (gehe eventuell zur Potenz y^3 über).
Ist $\beta_1 = 2$ oder $\beta_2 = 2$, so betrachte die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $y^2 = 1$ und erhalte

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle,$$

und es gilt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1. Seien nun Œ $\beta_1 = 1$ und $\beta_2 = 3 \equiv -1 \mod 4$ (beachte $xy^{\beta_1}xy^{\beta_2}$ ist keine echte Potenz). Dann ist

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^3 = (xyxy^{-1})^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Starte mit einer Untergruppe H mit folgenden Erzeugenden:

$$a = x, \quad b = yxy^3, \quad c = y^2, \quad d = z, \quad e = yzy^3.$$

Dann ist H vom Index 2 und hat eine Präsentierung

$$H = \langle a, b, c, d, e \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^3 = e^3 = (ab)^2 = (ad)^3 = (be)^3 = (bcac)^2 = ecd = 1 \rangle.$$

Ersetze nun $c = de$ und erhalte

$$H = \langle a, b, d, e \mid a^2 = b^2 = d^3 = e^3 = (ab)^2 = (ad)^3 = (be)^3 = (bdeade)^2 = (de)^2 = 1 \rangle.$$

Setze nun $b = 1$ und erhalte die Faktorgruppe

$$\bar{H} = \langle a, d, e \mid a^2 = d^3 = e^3 = (ad)^3 = (de)^2 = 1 \rangle.$$

Es gilt $F_2 < \bar{H}$ und somit $F_2 < G$, vgl. [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.

(3) $m = 3$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xyxy^2)^2 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle,$$

beachte auch hier: $xy^{\beta_1}xy^{\beta_2}$ ist keine echte Potenz. Betrachte eventuell statt $W_2(y, z)$ die inverse Relation.
Wir betrachten die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $(xy)^3 = 1$

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^n = (xy)^3 = (yz^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1 \rangle, \ n \geq 3,$$

es gilt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, vgl. (5.1).

b) Sei $n = 2$:
Dann besitzt G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^2 = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Sei zunächst $m \geq 6$:
Wir betrachten die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $(yz)^2 = 1$

(beachte: $(yz)^2 = 1 \Rightarrow (y^\gamma z)^2 = 1$). Hat $\bar{G}$ eine freie Untergruppe vom Rang 2, so auch G.
Sei Œ $\beta_2 > \beta_1$, $1 \leq \beta_1 < \beta_2 < m$.
Es gebe eine wesentliche Darstellung $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ derart, dass $\rho(G)$ eine Diedergruppe ist.
Aus der Relation $(xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = 1$ folgt $2\beta_2 - 2\beta_1 = m$. Damit ist m insbesondere gerade $\Rightarrow$ Für m ungerade gilt: $F_2 < G$
Für den Fall β_1 gerade oder β_2 gerade führen wir die Relation $y^2 = 1$ ein und erhalten die Faktorgruppe

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle$$

und es ist $F_2 < \bar{G}$, also auch $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Seien nun β_1 und β_2 ungerade.
Ist $m \geq 12$, $m = 2m_1$, so führen wir die Relation $y^{m_1} = 1$ ein und erhalten eine Faktorgruppe

$$\bar{\bar{G}} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^{m_1} = z^2 = (xy^{\tilde{\beta}_1}xy^{\tilde{\beta}_2})^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Wegen $\beta_2 - \beta_1 \equiv 0 \mod m_1$, d.h. $\beta_2 \equiv \beta_1 \mod m_1$, ist $xy^{\tilde{\beta}_1}xy^{\tilde{\beta}_2}$ eine echte Potenz in $\langle x\rangle * \langle y\rangle$, also gilt $F_2 < \bar{\bar{G}}$ und somit $F_2 < G$ nach Kapitel (5.1).
Für $m \geq 6$ bleiben also die Fälle

i) $m = 10$ $\quad 2\beta_2 - 2\beta_1 = 10$,
ii) $m = 8$ $\quad 2\beta_2 - 2\beta_1 = 8$,
iii) $m = 6$ $\quad 2\beta_2 - 2\beta_1 = 6$,

wobei sowohl β_2 und β_1 ungerade sind, zu betrachten.

i) $m = 10$, Kombinationsmöglichkeiten für $(\beta_1; \beta_2)$ sind:
   $(1; 6)$, $(2; 7)$, $(3; 8)$, $(4; 9)$.
   Also ist notwendigerweise β_1 oder β_2 gerade $\Rightarrow F_2 < G$ nach obiger Argumentation mittels Faktorgruppenbildung.
ii) $m = 8$: Dann gilt $\beta_2 - \beta_1 = 4$, also bleiben die beiden Fälle
   $(1; 5)$, $(3; 7)$.
   In beiden Fällen erhalten wir nach Einfühen der Relation $y^4 = 1$ die Faktorgruppe

   $$\bar{\bar{\bar{G}}} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xy)^4 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

   Diese enthält F_2 nach den Überlegungen im Kapitel 2, starte mit der euklidischen Dreiecksgruppe $\bar{\bar{\bar{G}}}_1 = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = (xy)^4 = 1\rangle$, diese kann via einer wesentlichen Darstellung ρ_1' angesehen werden als eine unendliche metabelsche Untergruppe der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Nach dem Fortsetzungssatz (1.23) gibt es wegen $(q; r) \neq (2; 2)$ eine Darstellung ρ' mit $\rho'(\bar{\bar{\bar{G}}})$ nicht-elementar. Also folgt $F_2 < \bar{\bar{\bar{G}}}$ und somit $F_2 < G$.

iii) $m = 6$, Kombinationsmöglichkeiten für $(\beta_1; \beta_2)$ sind:
$(1; 4)$, $(2; 5)$.
Also ist notwendigerweise β_1 oder β_2 gerade $\Rightarrow F_2 < G$ nach obiger Argumentation mittels Faktorgruppenbildung.

Damit ist der Fall $m \geq 6$ abgeschlossen.
Sei im Folgenden $3 \leq m \leq 5$

(1) $m = 5$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^2 = (xyxy^{\beta_2})^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

mit $2 \leq \beta_2 \leq 4$, benutzt wird auch hier die Diederreletion $(y^\gamma z)^2 = 1 \Rightarrow (yz)^2 = 1$ und eventuell der Übergang zur geeigneten Potenz y^{β_1}.
Der Fall $\beta_2 = 4$ verläuft vollkommen analog wie der Fall a) (1).
Der Fall $\beta_2 = 3$ ist damit isomorph zum Fall $\beta_2 = 2$.
Im Fall $\beta_2 = 2$ gilt: $|G| = 43200$, vgl. [26], Proposition 2.7.

(2) $m = 4$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $\beta_1 = 2$ oder $\beta_2 = 2$ oder $\gamma = 2$ betrachten wir die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $y^2 = 1$

$$\Rightarrow \bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy^{\tilde{\beta}_1}xy^{\tilde{\beta}_2})^2 = (y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

wobei mindestens eine der Relationen $(xy^{\tilde{\beta}_1}xy^{\tilde{\beta}_2})^2 = 1$ oder $(y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = 1$ überflüssig ist. Damit folgt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Ab nun gelte $\beta_1 \neq 2$ und $\beta_2 \neq 2$ und $\gamma \neq 2$.
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xyxy^3)^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Konstruktion einer wesentlichen Darstellung mit nicht-elementaren Bild:
Starte mit $X, Y \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit entsprechenden Ordnungen.
Œ seien $\mathrm{tr}(X) = 0$, $\mathrm{tr}(Y) = \sqrt{2}$,

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\sqrt{3}) & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

mit $\mathrm{tr}(XY) = 0$.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Z) \\ \mathrm{tr}(XZ) \\ \mathrm{tr}(YZ) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}; \text{ wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

(Beachte: $\operatorname{tr}(XZ)$ kann unabhängig von den anderen Spurwerten gewählt werden). Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} \pm \sqrt{6})$$

$t_1 \approx 1{,}932,\ \ t_2 \approx -0{,}518 \ \Rightarrow F_2 < G$.

(3) $m = 3$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^2 = (xyxy^3)^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Es gilt: $|G| = 360$, vgl. [26], Theorem 2.9.

B) Sei nun $l = 3$:
Œ hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^m = z^n = (xy^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz^\zeta)^3 = 1\rangle.$$

(Für den Fall $\varepsilon = 2$ gehe über zur Potenz x^2, da $x^{\alpha_1}y^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2}$ keine echte Potenz in $\langle x\rangle * \langle y\rangle$ folgt $\alpha_1 = 1$ oder $\alpha_2 = 1$, Œ sei $\alpha_1 = 1$).
Für den Fall $m \geq 7$ gilt $F_2 < G$ wegen $1/l + 1/m + 1/p < 1$ mit $l = 3$ und $p = 2$. Es bleiben also die Fälle $3 \leq m \leq 6$ für die weiteren Betrachtungen.
Für den Fall $n \geq 4$ gilt $F_2 < G$ wegen $1/l + 1/n + 1/r < 1$ mit $l = 3$ und $r = 3$. Sei also $2 \leq n \leq 3$

a) $n = 3$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^m = z^3 = (xy^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Die Gruppe $G_3 = \langle x, z \mid x^3 = z^3 = (xz)^3 = 1\rangle$ hat ein wesentliches unendlich metabelsches Bild in der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, also folgt $F_2 < G$ wegen $m \geq 3$ und dem Fortsetzungssatz (1.23), vgl. auch Darstellungssatz (2.32).

b) $n = 2$:

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^m = z^2 = (xy^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1\rangle,$$

mit $3 \leq m \leq 6$.

(1) $m = 6$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^6 = z^2 = (xy^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle i) $\alpha_2 = 2$ und ii) $\alpha_2 = 1$.

i) Sei nun $\alpha_2 = 2$:
Œ sei β_1 ein Teiler von 6 (sonst gehe zur Potenz y^5 über), d.h. $\beta_1 = 1, 2$ oder 3.
Es bleiben folgende Kombinationsmöglichkeiten für $(\beta_1; \beta_2)$ zu betrachten:

$$\begin{array}{llllll} (\beta_1;\beta_2) = & \text{a) } (1;1) & \text{b) } (1;2) & \text{c) } (1;3) & \text{d) } (1;4) & \text{e) } (1;5) \\ & \text{f) } (2;1) & \text{g) } (2;2) & \text{h) } (2;3) & \text{i) } (2;4) & \text{j) } (2;5) \\ & \text{k) } (3;1) & \text{l) } (3;2) & \text{m) } (3;3) & \text{n) } (3;4) & \text{o) } (3;5) \end{array}$$

In den Fällen a), c), e), h), l) und n) besitzt G_1 ein wesentliches, nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (vgl. [24], Seite 157 Prop. 4), also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
In den Fällen b), d), g) und i) betrachten wir die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $y^2 = 1$, also

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^3 = y^2 = z^2 = (y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

wobei eventuell die Relation $(y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = 1$ überflüssig ist. Damit folgt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Der Fall m) verläuft vollkommen analog nach Einführen der zusätzlichen Relation $y^3 = 1$.
Die Fälle f), j), k) und o) lassen sich durch äquivalente Umformungen (Inversenbildung) zurückführen auf die Fälle $\beta_1 = 1$.

ii) Sei nun $\alpha_2 = 1$:
Wieder gelte Œ $\beta_1 | 6$, d.h. $\beta_1 = 1, 2$ oder 3.
Ist $\beta_1 = 1$, so hat G_1 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (vgl. [24], Seite 157 Prop. 4), also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23). Analoges gilt damit für $\beta_2 \equiv \pm 1 \mod 6$ nach äquivalenter Umformung. Die verbleibenden Fälle lauten - beachte $xy^{\beta_1} xy^{\beta_2}$ ist keine echte Potenz:

$$\begin{array}{llll} (\beta_1;\beta_2) = & & \text{a) } (2;3) & \text{b) } (2;4) \\ & \text{c) } (3;2) & & \text{d) } (3;4) \end{array}$$

Die Fälle c) und d) ergeben sich durch äquivalente Umformungen aus Fall a).
In den Fällen a) und b) hat G_1 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (vgl. [24], Seite 157 Prop. 4), also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).

(2) $m = 5$:
Dann hat G Œ folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^5 = z^2 = (xyx^{\alpha_2} y^{\beta_2})^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Alle Kombinationsmöglichkeiten für $(\alpha_2;\beta_2)$ lauten:

$$(\alpha_2;\beta_2) = \begin{array}{cccc} & \text{a) } (1;2) & \text{b) } (1;3) & \text{c) } (1;4) \\ \text{d) } (2;1) & \text{e) } (2;2) & \text{f) } (2;3) & \text{g) } (2;4) \end{array}$$

In den Fällen a), b), c), d) und g) hat G_1 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ (vgl. [24], Seite 156 Prop. 4), also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Wir zeigen: Fall e) $\cong$ f)
Starte mit Fall f)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^5 = z^2 = (xyx^2y^3)^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Setze $\tilde{y} = y^3$. Dann gilt $\tilde{y}^5 = 1$ und weiter $(xyx^2y^3)^2 = (x\tilde{y}^2x^2\tilde{y})^2 = 1$ und $(\tilde{y}^2z)^2 = 1$. Wegen der Diederrelation ($\langle \tilde{y}, z\rangle = \langle y, z\rangle \cong D_{10}$) gilt $(\tilde{y}^2z)^2 = 1 \Leftrightarrow (\tilde{y}z)^2 = 1$. Damit hat G (in der alten Notation) folgende Gestalt

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^5 = z^2 = (xy^2x^2y)^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Ersetzen wir den Erzeugenden x durch x^2, so erhalten wir $(x^2z)^3 = (zx)^3 = (xz)^3 = 1$, da $z^2 = 1$ ist. Insgesamt folgt

$$G \cong \langle x, y, z \mid x^3 = y^5 = z^2 = (xyx^2y^2)^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Dies ist Gruppe e).
Für diese Gruppe starte mit einer Untergruppe H vom Index 5 mit folgenden Erzeugenden:

$$\begin{array}{lllll} a = xy, & b = yxy^4, & c = y^3xy^2, & d = y^2x, & e = y^4xy^3, \\ u = z, & v = yz, & w = y^2z, & r = y^3z, & s = y^4z. \end{array}$$

Für die definierenden Relationen für H erhalten wir:
Aus $x^3 = 1$ folgt: $aed = b^3 = c^3 = 1$,
aus $(xyx^2y^2)^2 = 1$ folgt: $a^2e^2c^2 = (bda)^2 = ced^2b^2 = 1$,
aus $z^2 = 1$ folgt: $u^2 = 1$,
aus $(yz)^2 = 1$ folgt: $v^2 = w^2 = r^2 = s^2 = 1$,
aus $(xz)^3 = 1$ folgt: $(as)^3 = (bw)^3 = (dw)^3 = (cv)^3 = (ev)^3 = 1$.
Setze $a = b = c = d = e$ und $v = w = s$ und erhalte die Faktorgruppe

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \langle a, u, r, s \mid a^3 = s^2 = (as)^3 = u^2 = r^2 = 1\rangle \\ &\cong A_4 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Also folgt auch in diesem Fall $F_2 < \bar{H}$ und somit $F_2 < G$.

Ein zweiter Beweis ist gegeben über Darstellungen:
Starte zunächst mit einer Untergruppe H mit folgenden Erzeugenden:

$$\begin{aligned} a &= y, \quad b = xyx^2, \quad c = x^2yx, \\ u &= z, \quad v = xzx^2, \quad w = x^2zx. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} H = \langle a, b, c, u, v, w \mid a^5 = b^5 = c^5 = u^2 = v^2 = w^2 = (cb^2)^2 = (ac^2)^2 = \\ (ba^2)^2 = vwu = (au)^2 = (bv)^2 = (cw)^2 = 1 \rangle, \end{aligned}$$

ersetze nun $w = uv = vu$ und erhalte

$$\begin{aligned} H = \langle a, b, c, u, v \mid a^5 = b^5 = c^5 = u^2 = v^2 = (cb^2)^2 = (ac^2)^2 = \\ (ba^2)^2 = (au)^2 = (bv)^2 = (cuv)^2 = (uv)^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Konstruktion einer wesentlichen Darstellung $\rho : H \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit nicht-elementaren Bild $\rho(H)$:
Starte mit einem wesentlichen nicht-elementaren Bild von $\langle a, b, c \rangle$ in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, $a \mapsto A,\ b \mapsto B,\ c \mapsto C$, vgl. [24], Seite 157 Prop. 4.
Konstruiere nun Matrizen $U, V \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ passend dazu, so dass $\langle A, B, C, U, V \rangle$ homomorphes Bild von H ist. Dies ist möglich, da jeweils $\langle A, B \rangle$, $\langle B, C \rangle$ und $\langle A, C \rangle$ nicht abelsch oder metabelsch sind $\Rightarrow \langle A, B \rangle \cong \langle B, C \rangle \cong \langle A, C \rangle \cong A_5$.
Starte nach Lemma (1.26) zur Kostruktion von U mit fest vorgegebenen A, B, wobei $\mathrm{tr}(BU)$ und $\mathrm{tr}(ABU)$ als variabel betrachtet werden; diese hängen über die Determinantenbedingung zusammen.
Konstruiere genauso V aus A und B, wobei $\mathrm{tr}(AV)$ und $\mathrm{tr}(ABV)$ variabel sind (auch diese hängen über die Determinantenbedingung zusammen).
Insgesamt erhalten wir acht Gleichungen, und somit sind U, V aus A, B und C konstruierbar.

(3) $m = 4$:
Dann hat G Œ folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4 = z^2 = (xy^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (y^{\gamma}z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Falls $\beta_1 = \beta_2 = 2$, so ist auch $\alpha_2 = 2$, da $xy^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2}$ keine echte Potenz ist. In diesem Fall betrachte die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $y^2 = 1$ und erhalte

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^3 = y^2 = z^2 = (y^{\tilde{\gamma}}z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

wobei eventuell die Relation $(y^{\tilde{\gamma}}z)^2 = 1$ überflüssig ist. Damit folgt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.

Sei nun Œ $\beta_1 = 1$ (sonst gehe zur Potenz y^3 über und konjugiere, wenn nötig)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4 = z^2 = (xyx^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Für den Fall $\gamma = 2$ betrachte wieder die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $y^2 = 1$ und erhalte

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^3 = y^2 = z^2 = (xyx^{\alpha_2}y^{\tilde{\beta}_2})^2 = (xz)^3 = 1\rangle,$$

wobei eventuell die Relation $(xyx^{\alpha_2}y^{\tilde{\beta}_2})^2 = 1$ überflüssig ist. Damit folgt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1. Sei ab jetzt Œ $\gamma = 1$ (betrachte eventuell statt $W_2(y, z)$ die inverse Relation).

Die verbleibenden Kombinationsmöglichkeiten für $(\alpha_2; \beta_2)$ lauten nun:

$$\begin{array}{llll} (\alpha_2;\beta_2) = & & \text{a) } (1;2) & \text{b) } (1;3) \\ & \text{c) } (2;1) & \text{d) } (2;2) & \text{e) } (2;3) \end{array}$$

In den Fällen a) und e) hat G_1 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (vgl. [24], Seite 156 Prop. 4), also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Behandle Fall b)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4 = z^2 = (xyxy^3)^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Starte mit der Untergruppe H mit folgenden Erzeugenden:

$$a = x, \quad b = yxy^3, \quad c = y^2, \quad d = z, \quad e = yzy^3.$$

H hat Index 2 und es ist

$$H = \langle a, b, c, d, e \mid a^3 = b^3 = c^2 = d^2 = e^2 = cde = (ab)^2 = \\ (bcac)^2 = (ad)^3 = (be)^3 = 1\rangle.$$

Ersetze nun $c = de$ und erhalte

$$H = \langle a, b, d, e \mid a^3 = b^3 = d^2 = e^2 = (de)^2 = (ab)^2 = \\ (bdeade)^2 = (ad)^3 = (be)^3 = 1\rangle.$$

Schreibe die Relation $(bdeade)^2 = 1$ um in

$$bdeade \sim_* (ebe)(dad) =_\dagger (b^{-1}eb^{-1})(a^{-1}da^{-1}) \sim a^{-1}b^{-1}eb^{-1}a^{-1}d =_\ddagger baeabd.$$

* $de = ed$
† $(be)^3 = (ad)^3 = 1$
‡ $(ab)^2 = 1$

$$\Rightarrow H = \langle a, b, d, e \mid a^3 = b^3 = d^2 = e^2 = (de)^2 = (ab)^2 = (baeabd)^2 = (ad)^3 = (be)^3 = 1\rangle.$$

Setze nun $d = e = ab = 1$ und betrachte den Kern K dieser Abbildung, Erzeugende von K sind:

$$\begin{array}{lll} r = d, & s = ada^2, & t = a^2da, \\ u = e, & v = aea^2, & w = a^2ea, \\ g = ba, & h = ab, & k = a^2ba^2. \end{array}$$

K hat Index 3 und die Präsentierung

$$K = \langle r, s, t, u, v, w, g, h, k \mid r^2 = s^2 = t^2 = u^2 = v^2 = w^2 = g^2 = h^2 = k^2 = (guhr)^2 = (hvks)^2 = (kwgt)^2 = str = (gwk)(vhu) = 1\rangle.$$

Mittels der letzten Relation folgt

$$K = \langle r, s, t, u, v, w, g, h, k \mid r^2 = s^2 = t^2 = u^2 = v^2 = w^2 = g^2 = h^2 = k^2 = rst = (wkvr)^2 = (ugws)^2 = (vhut)^2 = gwkvhu = 1\rangle.$$

Setze nun $kv = gw = hu = 1$ und ersetze $t = rs$. Dann erhalten wir die Faktorgruppe

$$\bar{K} = \langle r, s, u, v, w \mid r^2 = s^2 = u^2 = v^2 = w^2 = (rs)^2 = (wr)^2 = (us)^2 = (vrs)^2 = 1\rangle.$$

Nun führe die Relation $r = s$ ein und erhalte die Faktorgruppe

$$\begin{aligned} \bar{\bar{K}} &= \langle r, u, v, w \mid r^2 = u^2 = v^2 = w^2 = (wr)^2 = (ur)^2 = 1\rangle \\ &\cong \langle r, u, w \mid r^2 = u^2 = w^2 = (wr)^2 = (ur)^2 = 1\rangle * \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow F_2 < \bar{\bar{K}}$ und somit $F_2 < G$.

Behandle Fall c)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4 = z^2 = (xyx^2y)^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Starte mit der Untergruppe H mit folgenden Erzeugenden:

$$a = x, \quad b = yxy^3, \quad c = y^2, \quad d = z, \quad e = yzy^3.$$

H hat Index 2 und

$$H = \langle a, b, c, d, e \mid a^3 = b^3 = c^2 = d^2 = e^2 = (ab^2c)^2 = (bca^2)^2 = ecd = (ad)^3 = (be)^3 = 1\rangle.$$

Setze nun $c = 1$. Dann folgt $e = d$. Ersetze b durch b^2 und erhalte

$$\bar{H} = \langle a, b, d \mid a^3 = b^3 = d^2 = (ab)^2 = (ad)^3 = (bd)^3 = 1 \rangle,$$

beachte: d hat Ordnung zwei.

$$\bar{H} \cong \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^3 = (xy)^3 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Diese Gruppe entspricht genau der aus Fall (2.1) (2) a), es gilt also $F_2 < \bar{H}$ und somit $F_2 < G$.
Im Fall d) betrachten wir wieder die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $y^2 = 1$ und erhalten

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^3 = y^2 = z^2 = (y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

wobei eventuell die Relation $(y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = 1$ überflüssig ist. Damit folgt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1. Dies beendet den Fall $m = 4$.

(4) $m = 3$:
Dann hat G Œ folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^2 = (xyx^{\alpha_2} y^{\beta_2})^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Alle Kombinationsmöglichkeiten für $(\alpha_2; \beta_2)$ lauten:

$$(\alpha_2; \beta_2) = \begin{array}{cc} & \text{a) } (1;2) \\ \text{b) } (2;1) & \text{c) } (2;2) \end{array}$$

Im Fall a) gilt $|G| = 7200$.
Betrachte nun den Fall b)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^2 = (xyx^2y)^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle. \quad (6.1)$$

Starte mit der Untergruppe K vom Index 3 mit folgenden Erzeugenden:

$$\begin{array}{lll} a = y, & b = xyx^2, & c = x^2yx, \\ u = z, & v = xzx^2, & w = x^2zx. \end{array}$$

$K = \langle a, b, c, u, v, w \rangle$ hat die Präsentierung

$$K = \langle a, b, c, u, v, w \mid a^3 = b^3 = c^3 = u^2 = v^2 = w^2 = uvw = (ab)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = (au)^2 = (bv)^2 = (cw)^2 = 1 \rangle,$$

ersetze $w = uv$ und erhalte

$$K = \langle a, b, c, u, v \mid a^3 = b^3 = c^3 = u^2 = v^2 = (uv)^2 = (ab)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = (au)^2 = (bv)^2 = (cuv)^2 = 1 \rangle.$$

Setze weiter

$$\begin{array}{llll} a_1 = a, & a_2 = uau, & a_3 = vav, & a_4 = uvauv, \\ b_1 = b, & b_2 = ubu, & b_3 = vbv, & b_4 = uvbuv, \\ c_1 = c, & c_2 = ucu, & c_3 = vcv, & c_4 = uvcuv, \end{array}$$

und $H = \langle a_i, b_i, c_i \mid i = 1, \ldots, 4\rangle$. H hat Index 4 in K und eine Präsentierung

$$H = \langle a_i, b_i, c_i \mid a_i^3 = b_i^3 = c_i^3 = (a_ib_i)^2 = (b_ic_i)^2 = (a_ic_i)^2 = a_1a_2 = a_3a_4 = b_1b_3 = b_2b_4 = c_1c_4 = c_2c_3 = 1, i = 1, \ldots, 4\rangle.$$

Aufgrund der letzten 6 Relationen lässt sich H umschreiben zu

$$\begin{aligned} H = \langle a_1, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2 \mid a_1^3 = a_3^3 = b_1^3 = b_2^3 = c_1^3 = c_2^3 = (a_1b_1)^2 = (a_1^2b_2)^2 = \\ (a_3b_1^2)^2 = (a_3b_2)^2 = (b_1c_1)^2 = (b_2c_2)^2 = (b_1c_2)^2 = \\ (b_2c_1)^2 = (a_1c_1)^2 = (a_1^2c_2)^2 = (a_3c_2^2)^2 = (a_3c_1)^2 = 1\rangle \\ \cong H_1 *_{A_1} H_2 \end{aligned}$$

mit

$$H_1 = \langle a_1, b_1, b_2, c_1, c_2 \mid a_1^3 = b_1^3 = b_2^3 = c_1^3 = c_2^3 = (a_1b_1)^2 = (a_1^2b_2)^2 = (b_1c_1)^2 = (b_2c_2)^2 = (b_1c_2)^2 = (b_2c_1)^2 = (a_1c_1)^2 = (a_1^2c_2)^2 = 1\rangle,$$

$$H_2 = \langle a_3, b_1, b_2, c_1, c_2 \mid a_3^3 = b_1^3 = b_2^3 = c_1^3 = c_2^3 = (a_3b_1^2)^2 = (a_3b_2)^2 = (b_1c_1)^2 = (b_2c_2)^2 = (b_1c_2)^2 = (b_2c_1)^2 = (a_3c_2^2)^2 = (a_3c_1)^2 = 1\rangle,$$

und

$$A_1 = \langle b_1, b_2, c_1, c_2 \mid b_1^3 = b_2^3 = c_1^3 = c_2^3 = (b_1c_1)^2 = (b_2c_2)^2 = (b_1c_2)^2 = (b_2c_1)^2 = 1\rangle.$$

Es gilt $F_2 < H$, da $|H_1 : A_1| \geq 3$, also folgt $F_2 < G$.
Es bleibt noch Fall c), also

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^2 = (xyx^2y^2)^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Diese Gruppe ist isomorph zu

$$\tilde{G} = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^2 = (xyx^2y^2)^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1\rangle, \qquad (6.2)$$

tausche dabei die Rollen von x und y und gehe anschließend von x zur Potenz x^2 über. Statt $W_3(x, z)$ betrachte die inverse Relation.
Starte mit der Untergruppe H von $\tilde{G}$ vom Index 3 mit folgenden Erzeugenden:

$$\begin{array}{lll} a = x, & b = yxy^2, & c = y^2xy, \\ d = z, & e = yzy^2, & f = y^2zy. \end{array}$$

H hat die Präsentierung

$$H = \langle a, b, c, d, e, f \mid a^3 = b^3 = c^3 = d^2 = e^2 = f^2 = efd = (ab^2)^2 = \\ (bc^2)^2 = (ca^2)^2 = (ad)^2 = (be)^2 = (cf)^2 = 1 \rangle,$$

ersetze $f = de$ und erhalte

$$H = \langle a, b, c, d, e \mid a^3 = b^3 = c^3 = d^2 = e^2 = (de)^2 = (ab^2)^2 = \\ (bc^2)^2 = (ca^2)^2 = (ad)^2 = (be)^2 = (cde)^2 = 1 \rangle.$$

Wir steigen weiter ab und betrachten die Untergruppe K von H vom Index 3 mit den Erzeugenden:

$$\begin{array}{lll} x = ba^2, & y = aba, & z = a^2b, \\ u = ca^2, & v = aca, & w = a^2c, \\ r = d, & s = ad, & t = a^2d, \\ g = e, & p = ae, & q = a^2e. \end{array}$$

K hat die Präsentierung

$$K = \langle x, y, z, u, v, w, r, s, t, g, p, q \mid xyz = uvw = r^2 = s^2 = t^2 = g^2 = p^2 = \\ q^2 = x^2 = y^2 = z^2 = u^2 = v^2 = w^2 = (xu)^2 = \\ (yv)^2 = (zw)^2 = (xp)^2 = (yg)^2 = (zq)^2 = (upr)^2 = \\ (vqs)^2 = (wgt)^2 = (rg)^2 = (sp)^2 = (tq)^2 = 1 \rangle.$$

Ersetze $w = uv$, setze $x = y = z = 1$ und außerdem $p = r$, $q = s$, $g = t$ und betrachte die Faktorgruppe

$$\bar{K} = \langle u, v, g, p, q \mid g^2 = p^2 = q^2 = u^2 = v^2 = (uv)^2 = \\ (pg)^2 = (qp)^2 = (gq)^2 = 1 \rangle \\ \cong \bar{K}_1 * \bar{K}_2$$

mit

$$\bar{K}_1 = \langle u, v \mid u^2 = v^2 = (uv)^2 = 1 \rangle$$

und

$$\bar{K}_2 = \langle g, p, q \mid g^2 = p^2 = q^2 = (pg)^2 = (qp)^2 = (gq)^2 = 1 \rangle.$$

$\Rightarrow$ $F_2 < \bar{K}$, also auch $F_2 < G$.

Das schließt den Fall B) $l = 3$.

C) Sei nun $l = 4$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^4 = y^m = z^n = (x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z^\delta)^2 = (x^\varepsilon z^\zeta)^3 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $m \geq 5$ gilt $F_2 < G$ wegen $1/_l + 1/_m + 1/_p < 1$ mit $l = 4$ und $p = 2$. Wegen $l \leq m$ bleibt also der Fall $m = 4$.
Für den Fall $n \geq 3$ gilt $F_2 < G$ wegen $1/_l + 1/_n + 1/_r < 1$ mit $l = 4$ und $r = 3$. Sei also $n = 2$.

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^4 = y^4 = z^2 = (x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^2 = (x^\varepsilon z)^3 = 1 \rangle. \qquad (6.3)$$

Ist $\varepsilon = 2$, so betrachte eine wesentliche Darstellung $\rho : G_3 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_3)$ nicht-elementar $\Rightarrow$ $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz, vgl. (1.23) und (3.2).
Sei ab jetzt $\varepsilon = 1$, sonst gehe zur Potenz x^3 über.
Für die beiden Fälle $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ oder $\beta_1 = \beta_2 = 2$ führe die Relationen $x^2 = y^2 = 1$ ein und betrachte die resultierende Faktorgruppe

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

wobei eventuell auch $(y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = 1$ überflüssig ist. Damit folgt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Ab jetzt gelte $\alpha_1 \neq 2$ oder $\alpha_2 \neq 2$ und $\beta_1 \neq 2$ oder $\beta_2 \neq 2$, weiter sei Œ $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ (durch Konjugation möglich). Dann gilt

$$G = \langle x, y, z \mid x^4 = y^4 = z^2 = (xyx^{\alpha_2} y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Es bleiben folgende Möglichkeiten für das Tupel $(\alpha_2; \beta_2)$:

$$\begin{array}{llll} (\alpha_2;\beta_2) = & & \text{a) } (1;2) & \text{b) } (1;3) \\ & \text{c) } (2;1) & \text{d) } (2;2) & \text{e) } (2;3) \\ & \text{f) } (3;1) & \text{g) } (3;2) & \text{h) } (3;3) \end{array}$$

Für die Fälle a), c), d) und h) besitzt G_1 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (vgl. [24], Seite 155 Prop. 2), also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Weiterhin halten wir fest: Fall f) folgt aus b)
Fall g) folgt aus e), jeweils durch Konjugation in $W_1(x, y)$.
Behandle Fall b)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^4 = y^4 = z^2 = (xyxy^3)^2 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle.$$

Führe die Relation $y^2 = 1$ ein und erhalte die Faktorgruppe

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^4 = y^2 = z^2 = (xy)^4 = (y^{\tilde{\gamma}} z)^2 = (xz)^3 = 1 \rangle,$$

wobei $\bar{G}_1 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = (xy)^4 = 1\rangle$ ein unendliches metabelsches Bild in der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ besitzt, also gilt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, da $r = 3 > 2$, vgl. Darstellungssatz (2.32).
Betrachte nun den Fall e)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^4 = y^4 = z^2 = (xyx^2y^3)^2 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Führe die Relation $x^2 = 1$ ein und erhalte die Faktorgruppe

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (y^\gamma z)^2 = (xz)^3 = 1\rangle.$$

Damit folgt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Damit ist der Fall C) $l = 4$ abgeschlossen.

D) Sei nun $l \geq 5$:
Es folgt $5 \leq l \leq m$, also gilt $F_2 < G$ wegen $1/_l + 1/_m + 1/_p < 1$ mit $p = 2$.
Damit ist der Fall $q = 2$ und $r = 3$ abgeschlossen.

6.2 Fall II: $q = 3$ und $r = 2$

A) Sei zunächst $n \geq 3$:
Für den Fall $n \geq 4$ folgt direkt $F_2 < G$, da $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ mit $q = 3$ und $m \leq n$.
Ab jetzt sei $n = 3$:
Für den Fall $m \geq 4$ folgt ebenfalls $F_2 < G$, da $1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ mit $q = 3$ und $m \leq n$.
Sei also ab jetzt auch $m = 3$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^l = y^3 = z^3 = (x^{\alpha_1}y^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (yz)^3 = (x^\varepsilon z^\zeta)^2 = 1\rangle.$$

Die Gruppe $G_2 = \langle y, z\rangle$ hat ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23), falls $l \geq 3$, vgl. (2.32).
Damit bleibt der Fall $l = 2$. Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^3 = (xyxy^2)^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

eventuell nach äquivalenten Umformungen.
Starte mit $Y, Z \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ mit $\mathrm{tr}(Y) = 1$, $\mathrm{tr}(Z) = 1$ und $\mathrm{tr}(YZ) = -1$, so dass $\langle Y, Z\rangle$ unendlich metabelsch; das liefert ein wesentliches Bild von $G_2 = \langle y, z\rangle$. Konstruiere $X \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ mit $\mathrm{tr}(X) = 0$, $\mathrm{tr}(XZ) = 0$. Setze $t := \mathrm{tr}(XY)$, es gilt $0 = \mathrm{tr}(XYXY^2) = t^2 - 1$ mit den Lösungen $t_1 = 1$ und $t_2 = -1$. Wegen $q > 2$ liefert mindestens eine der Nullstellen ein wesentliches nicht-elementares Bild von G in der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, also gilt $F_2 < G$, vgl. (2.32).

Sei also ab jetzt $n = 2$.
Dann folgt direkt $3 \leq m \leq 6$, denn für $m \geq 7$ gilt:
$1/_m + 1/_n + 1/_q < 1$ mit $n = 2$ und $q = 3$, also gilt hier sowieso $F_2 < G$.

B) $n = 2$ und $l = 2$:
Dann besitzt G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^m = z^2 = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

(1) $m = 6$:

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^6 = z^2 = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Œ gelte $\gamma = 1, 2, 3$ (sonst gehe zur Potenz y^5 über).
Für die Fälle $\gamma = 2, 3$ hat G_2 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, also gilt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23), vgl. (3.2).
Sei nun $\gamma = 1$. Weiterhin gelte $\beta_1 < \beta_2$, dies kann durch Konjugation erreicht werden.
Es bleiben folgende Möglichkeiten für das Tupel $(\beta_1; \beta_2)$:

$(\beta_1; \beta_2) =$	a) $(1; 2)$	b) $(1; 3)$	c) $(1; 4)$	d) $(1; 5)$
		e) $(2; 3)$	f) $(2; 4)$	g) $(2; 5)$
			h) $(3; 4)$	i) $(3; 5)$
				j) $(4; 5)$

Die Fälle g), h), i) und j) lassen sich zurückführen auf die Fälle c), e), b) und a), gehe dabei zur Potenz y^5 über und permutiere innerhalb der Relation $W_1(x, y)$.
Behandle die Fälle a), c) und f) gleichzeitig:
Betrachte die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $y^2 = 1$ und erhalte

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Damit folgt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Für die Fälle b), d) und e) besitzt G_1 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (vgl. [24], Seite 159 Prop. 8), also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).

(2) $m = 5$:

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^2 = (xyxy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

mit $\beta_2 = 2, 3$ oder 4.
Für den Fall $\beta_2 = 4$ hat G_1 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (vgl. [24], Seite 158 Prop. 7), also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23), da $q = 3 > 2$.

Der Fall $\beta_2 = 3$ folgt direkt aus dem Fall $\beta_2 = 2$ (gehe zur Potenz y^3 über). Sei also $\beta_2 = 2$

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^2 = (xyxy^2)^2 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle,$$

mit Œ $\gamma = 1, 2$. Zunächst sei $\gamma = 1$.
Konstruktion einer wesentlichen Darstellung mit nicht-elementaren Bild:
Starte mit $X, Z \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit entsprechenden Ordnungen.
Es gilt $\mathrm{tr}(X) = 0,\ \mathrm{tr}(Z) = 0$. Nehme etwa

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} \sqrt{2}i & 1 \\ 1 & -\sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

mit $\mathrm{tr}(XZ) = 0$.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(Y) \\ \mathrm{tr}(XY) \\ \mathrm{tr}(ZY) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\lambda; \pm(\lambda - 1) \\ \pm 1 \\ \pm 1 \\ t \end{pmatrix};\ \text{wähle } \vec{r} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Aus der Determinantengleichung folgt:

$$t_{1/2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{5}}$$

$t_{1/2} \approx \pm 0{,}786i\ \Rightarrow F_2 < G$.
Der Fall $\gamma = 2$ wird auf den vorherigen zurückgeführt. Wir zeigen, dass die beiden Gruppen $G_{\gamma=1}$ und $G_{\gamma=2}$ isomorphe Untergruppen besitzen, die eine freie Untergruppe vom Rang 2 beinhalten. Starte hierzu mit dem Fall $\gamma = 2$, also

$$G_{\gamma=2} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^2 = (xyxy^2)^2 = (y^2 z)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Starte mit der Untergruppe H vom Index 2 mit folgenden Erzeugenden:

$$a = y, \quad b = xyx, \quad c = z,$$

und $H = \langle a, b, c \rangle$, beachte hier: $xzx = z$. Eine Präsentierung von H ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= \langle a, b, c \mid a^5 = b^5 = c^2 = (ab^2)^2 = (ba^2)^2 = (a^2 c)^3 = (b^2 c)^3 = 1 \rangle \\ &\cong_{\S} \langle \tilde{a}, \tilde{b}, c \mid \tilde{a}^5 = \tilde{b}^5 = c^2 = (\tilde{b}^3 \tilde{a}^4)^2 = (\tilde{a}^2 \tilde{b})^2 = (\tilde{a}^4 c)^3 = (\tilde{b} c)^3 = 1 \rangle \end{aligned}$$

§ $\tilde{a} = a^3;\ \tilde{b} = b^2$

$$\cong \langle \tilde{a}, \tilde{b}, c \mid \tilde{a}^5 = \tilde{b}^5 = c^2 = (\tilde{a}\tilde{b}^2)^2 = (\tilde{a}^2\tilde{b})^2 = (\tilde{a}c)^3 = (\tilde{b}c)^3 = 1 \rangle.$$

Betrachte parallel hierzu den Fall $\gamma = 1$, also

$$G_{\gamma=1} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^5 = z^2 = (xyxy^2)^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Bekannt ist, dass $G_{\gamma=1}$ eine freie Untergruppe vom Rang 2 enthält.
Betrachte in $G_{\gamma=1}$ die Untergruppe K vom Index 2 erzeugt durch:

$$a_1 = y, \quad b_1 = xyx, \quad c_1 = z.$$

Es ist

$$K = \langle a_1, b_1, c_1 \mid a_1^5 = b_1^5 = c_1^2 = (a_1 b_1^2)^2 = (b_1 a_1^2)^2 = (a_1 c_1)^3 = (b_1 c_1)^3 = 1 \rangle,$$

also gilt $K \cong H$. Mit $G_{\gamma=1}$ hat auch K eine freie Untergruppe vom Rang 2, also auch H und somit $G_{\gamma=2}$.

(3) $m = 4$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $\gamma = 2$ betrachte eine wesentliche Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G)$ nicht-elementar, vgl. (3.2). Also gilt $F_2 < G_2$ und somit $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Sei nun Œ $\gamma = 1$ (sonst gehe zur Potenz y^3 über)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xy^{\beta_1}xy^{\beta_2})^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $\beta_1 = 2$ oder $\beta_2 = 2$ betrachte die Faktorgruppe $\bar{G}$ nach Einführen der Relation $y^2 = 1$ und erhalte

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Damit folgt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.
Seien nun $\beta_1 \neq 2$ und $\beta_2 \neq 2$.
Es bleibt (bis auf Isomorphie) der Fall $(\beta_1; \beta_2) = (1; 3)$, also

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = (xyxy^3)^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Starte mit der Untergruppe H vom Index 2 mit folgenden Erzeugenden:

$$a = y, \quad b = xyx, \quad c = z,$$

und $H = \langle a, b, c \rangle$, beachte auch hier: $xzx = z$. Eine Präsentierung von H ist gegeben durch

$$H = \langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ac)^3 = 1 \rangle.$$

Starte wie in (2.32) mit einer wesentlichen Darstellung $\rho : \langle a, b \rangle \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit unendlichem metabelschen Bild. Nach dem Fortsetzungssatz (1.23) folgt $F_2 < H$ wegen $|ac| = 3 > 2$.

(4) $m = 3$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^2 = (xyxy^2)^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Starte mit einer Untergruppe H vom Index 3 mit folgenden Erzeugenden:

$$\begin{aligned} &a = x, \quad b = yxy^2, \quad c = y^2xy, \\ &u = z, \quad v = yzy^2, \quad w = y^2zy, \end{aligned}$$

und $H = \langle a, b, c, u, v, w \rangle$. Eine Präsentierung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H = \langle a, b, c, u, v, w \mid a^2 = b^2 = c^2 = u^2 = v^2 = w^2 = (ab)^2 = (bc)^2 = \\ (ca)^2 = (au)^2 = (bv)^2 = (cw)^2 = uvw = 1 \rangle, \end{aligned}$$

ersetze $w = uv$ und erhalte

$$\begin{aligned} H = \langle a, b, c, u, v \mid a^2 = b^2 = c^2 = u^2 = v^2 = (ab)^2 = (bc)^2 = \\ (ca)^2 = (au)^2 = (bv)^2 = (cuv)^2 = (uv)^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Starte erneut mit einer Untergruppe K vom Index 2 mit den Erzeugenden:

$$r = b, \quad s = c, \quad t = u, \quad q = v, \quad p = ava.$$

und $K = \langle r, s, t, p, q \rangle$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow K = \langle r, s, t, p, q \mid r^2 = s^2 = t^2 = p^2 = q^2 = (rs)^2 = (rq)^2 = \\ (rp)^2 = (stq)^2 = (stp)^2 = (pt)^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Führe die Relationen $r = 1$ und $s = t$ ein und erhalte die Faktorgruppe

$$\bar{K} = \langle s, p, q \mid s^2 = p^2 = q^2 = (ps)^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * V_4.$$

Es ist $F_2 < \bar{K}$, also auch $F_2 < G$.

Damit ist der Fall $n = 2$ und $l = 2$ abgeschlossen.

C) $n = 2$ und $l = 3$:
Dann besitzt G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^m = z^2 = (xy^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Wie im Fall B) bleiben die Fälle $3 \leq m \leq 6$ zu betrachten.

(1) $m = 6$:
Wir können Œ annehmen, dass $\gamma = 1, 2$ oder 3, für die Fälle $\gamma = 4$ oder 5 gehen wir zur Potenz y^5 über.
In den Fällen $\gamma = 2, 3$ gibt es eine wesentliche Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar, vgl. (3.2). Also gilt $F_2 < G_2$ und somit $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Sei nun $\gamma = 1$, also

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^6 = z^2 = (xy^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Es gibt eine wesentliche Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_2)$ unendlich metabelsch, also gilt $F_2 < G_2$ und somit $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23), da $l = 3 > 2$.

(2) $m = 5$:

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^5 = z^2 = (xyx^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Alle Kombinationsmöglichkeiten für $(\alpha_2; \beta_2)$ lauten:

$$(\alpha_2; \beta_2) = \begin{array}{llll} & \text{a) } (1;2) & \text{b) } (1;3) & \text{c) } (1;4) \\ \text{d) } (2;1) & \text{e) } (2;2) & \text{f) } (2;3) & \text{g) } (2;4) \end{array}$$

In den Fällen a), b), c), d) und g) hat G_1 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (vgl. [24], Seite 156 Prop. 4), also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Wir zeigen: Fall e) $\cong$ f)
Starte mit Fall f)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^5 = z^2 = (xyx^2y^3)^2 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

mit Œ $1 \leq \gamma \leq 2$. Setze $\tilde{y} = y^3$. Dann ist $\tilde{y}^5 = 1$ und $(xyx^2y^3)^2 = (x\tilde{y}^2x^2\tilde{y})^2 = 1$ und $(\tilde{y}^{\tilde{\gamma}}z)^3 = 1$ mit Œ $1 \leq \tilde{\gamma} \leq 2$. Ersetzen wir den Erzeugenden x durch x^2, so erhalten wir wegen der Diederrelation $(x^2z)^2 = 1 \Leftrightarrow (xz)^2 = 1$ ($\langle x^2, z\rangle = \langle x, z\rangle \cong D_4$). Insgesamt -in der alten Notation- folgt

$$G \cong \langle x, y, z \mid x^3 = y^5 = z^2 = (xyx^2y^2)^2 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1\rangle,$$

mit $1 \leq \gamma \leq 2$. Dies entspricht Fall e), der nun behandelt wird.
Sei nun $\gamma = 2$:

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^5 = z^2 = (xyx^2y^2)^2 = (y^2z)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Vorbemerkung:
Diese Gruppe erwies sich als besonders schwierig. Sämtliche Darstellungen in die $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ ergaben ein endliches Bild, da die A_5 sowohl Faktorgruppe als auch Untergruppe ist.
Der Nachteil von Untergruppenkonstruktionen sind die sich mit steigendem Index aufblähenden Präsentierungen mit großen Erzeugenden- und Relationenzahlen.

Diese Gruppe wurde letztlich unter Zuhilfenahme des algorithmischen Programmes GAP [30](Version 4.4.6 (2005)) untersucht.
Als erstes wurden alle Untergruppen bis zum Index 13 aufgelistet mittels des Befehls `LowIndexSubgroups`, vgl. hierzu [8], Section 5.4. Diese Anwendung hat eine Laufzeit, die sich exponentiell zum gewählten Index verhält.
Das Resultat sind 28 Untergruppen, deren Präsentierung wie folgt bestimmt werden.
Benutze den Befehl `IsomorphismFpGroup`. Dieser berechnet eine Präsentierung mittels *Reidemeister-Schreier Verfahren* und wendet anschließend heuristisch eine Folge von *Tietze Transformationen* an, solange die Länge der Präsentierung reduziert wird, vgl. [8], Section 5.3.
Die erste Untergruppe in dieser Liste vom Index 13 wird erzeugt durch:

$$\begin{aligned} &a = x, \\ &b = zy^{-1}xz^{-1}y^{-1}z^{-1}, \\ &c = zyxyzx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}z^{-1}, \\ &d = y^2zy^2x^2z^{-1}y^{-1}z^{-1}, \\ &e = zyzx^{-1}yz^{-1}y^{-2}. \end{aligned}$$

Mit $H = \langle a, b, c, d, e \rangle$ ergibt sich folgende Präsentierung:

$$\begin{aligned} H = \langle a, b, c, d, e \mid a^3 = c^2 = (da)^2 = (be^{-1}c)^3 = (b^{-1}a^{-1}bd^{-1}e^{-1})^2 = (eb^{-1})^5 = \\ (eb)^5 = (ed^{-1}e^{-1}b^{-1}d)^2 = b^{-1}d^{-1}e^{-1}b^{-1}d^{-1}ebd^{-1}bd^{-1}e^{-2} = (dbede^{-1})^3 = \\ (d^{-1}bd^{-1}e^{-2})^3 = (cebceb^{-1}eb^{-1})^2 = (abebea^{-1}e^{-1}b^{-1})^2 = \\ ebced^{-1}e^{-1}b^{-1}\underline{d^{-1}e^2db^{-1}d}ceb = ede^{-1}d^{-2}e^2db^{-1}dc\underline{b^{-1}e^{-1}b^{-1}e^{-1}b^{-1}e^{-1}}cd^{-1}b = 1 \rangle, \end{aligned}$$

wobei die letzte Relation eine Folgerelation der vorherigen ist, denn es gilt: $b^{-1}e^{-1}b^{-1}e^{-1}b^{-1}e^{-1} = ebeb$ wegen der Relation $(eb)^5 = 1$. Damit folgt aus den letzten beiden Relationen

$$c(eb)^{-2}c = d^{-1}bede^{-1}d^{-2}e^2db^{-1}d = ed^{-1}e^{-1}b^{-1}d^{-1}e^2db^{-1}d$$

$$\Rightarrow d^{-1}bede^{-1} = ed^{-1}e^{-1}b^{-1}d.$$

Diese Gleichung ist automatisch erfüllt wegen $(ed^{-1}e^{-1}b^{-1}d)^2 = 1$.
Somit hat H folgende Präsentierung

$$\begin{aligned} H = \langle a,b,c,d,e \mid a^3 = c^2 = (da)^2 = (be^{-1}c)^3 = (b^{-1}a^{-1}bd^{-1}e^{-1})^2 = (eb^{-1})^5 = \\ (eb)^5 = (ed^{-1}e^{-1}b^{-1}d)^2 = b^{-1}d^{-1}e^{-1}b^{-1}d^{-1}ebd^{-1}bd^{-1}e^{-2} = \\ (dbede^{-1})^3 = (d^{-1}bd^{-1}e^{-2})^3 = (\underline{cebc}eb^{-1}eb^{-1})^2 = \\ (abebea^{-1}e^{-1}b^{-1})^2 = \underline{ebc}ed^{-1}e^{-1}b^{-1}d^{-1}e^2db^{-1}d\underline{ceb} = 1\rangle. \end{aligned}$$

Nach der letzten Relation ist $cebc = (ed^{-1}e^{-1}b^{-1}d^{-1}e^2db^{-1}d)^2$ wegen $(eb)^5 = 1$. Setzen wir das in $(cebceb^{-1}eb^{-1})^2 = 1$ ein, so erhalten wir hier die Relation $((ed^{-1}e^{-1}b^{-1}d^{-1}e^2db^{-1}d)^2eb^{-1}eb^{-1})^2 = 1$. Damit erhalten wir für H die Präsentierung

$$\begin{aligned} H = \langle a,b,c,d,e \mid a^3 = c^2 = (da)^2 = (be^{-1}c)^3 = (b^{-1}a^{-1}bd^{-1}e^{-1})^2 = (eb^{-1})^5 = \\ (eb)^5 = (ed^{-1}e^{-1}b^{-1}d)^2 = b^{-1}d^{-1}e^{-1}b^{-1}d^{-1}ebd^{-1}bd^{-1}e^{-2} = \\ (dbede^{-1})^3 = (d^{-1}bd^{-1}e^{-2})^3 = ((ed^{-1}e^{-1}b^{-1}d^{-1}e^2db^{-1}d)^2eb^{-1}eb^{-1})^2 = \\ (abebea^{-1}e^{-1}b^{-1})^2 = ebced^{-1}e^{-1}b^{-1}d^{-1}e^2db^{-1}dceb = 1\rangle. \end{aligned}$$

Sei nun $H_1 = \langle a,b,d,e\rangle < H$, $H_2 = \langle c,b,d,e\rangle < H$
und $A = \langle b,d,e\rangle < H_1 \cap H_2 < H$.
Es gilt $a,c \notin A$. Dies sieht man am etwa folgendermaßen:
Die Gruppe H besitzt als Faktorgruppe $\bar{H} = \langle a,d \mid a^3 = d^2 = (da)^2 = 1\rangle \cong S_3$.
Die Abbildung $\Theta : H \to S_3$ induziert uns eine Abbildung $\tilde{\Theta} : G \to S_{39}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} x &\mapsto (1,2,3)(4,6,5)(7,10,19)(8,11,20)(9,12,21)(13,25,16)(14,27,18) \\ &\quad (15,26,17)(22,31,34)(23,32,35)(24,33,36) \\ y &\mapsto (4,7,13,19,25)(5,8,14,21,26)(6,9,15,20,27)(10,22,16,28,37) \\ &\quad (11,23,17,29,38)(12,24,18,30,39) \\ z &\mapsto (1,4)(2,5)(3,6)(7,16)(8,17)(9,18)(10,25)(11,26)(12,27)(13,19) \\ &\quad (14,21)(15,20)(22,34)(23,35)(24,36)(28,37)(29,38)(30,39) \end{aligned}$$

(Bei der Produktbildung wird hier von links nach rechts gelesen.)
Benutzt man diese Darstellung für die Erzeugenden von H ausgedrückt als Worte in x, y und z, so erhält man, dass $\tilde{\Theta}(a), \tilde{\Theta}(c) \notin \tilde{\Theta}(A)$, da sie den Fixpunkt 1 von $\tilde{\Theta}(A)$ bewegen. Es ist nämlich $\tilde{\Theta}(a)(1) = 2$ und $\tilde{\Theta}(c)(1) = 25$. Damit ist gezeigt, $a,c \notin A$.
Somit erhalten wir $H = H_1 *_A H_2$ mit $|H_1 : A| \geq 3$. Also gilt $F_2 < H$ und somit $F_2 < G$.
Sei nun $\gamma = 1$:

$$\Rightarrow G = \langle x,y,z \mid x^3 = y^5 = z^2 = (xyx^2y^2)^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Das Spurpolynom von $W_1(x, y)$ in der Unbestimmten $t := \mathrm{tr}(XY)$ in Abhängigkeit von $\mathrm{tr}(X) = 1$ und $\mathrm{tr}(Y) = \lambda$ ist $t(t - \lambda)$. Führe daher die Relation $(xy)^2 = 1$ ein und erhalte als Faktorgruppe die gewöhnliche Tetraedergruppe

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^3 = y^5 = z^2 = (xy)^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Für die Coxeterdeterminante von $\bar{G}$ gilt:

$$\det C = \frac{1}{16}(5 - 4\lambda) < 0,$$

also gilt $F_2 < \bar{G}$ und somit auch $F_2 < G$, vgl. (2.30).

(3) $m = 4$:
Dann hat G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4 = z^2 = (xy^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Für den Fall $\gamma = 2$ betrachte eine wesentliche Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar, vgl. (3.2). Also gilt $F_2 < G_2$ und somit $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Ab jetzt sei Œ $\gamma = 1$ (sonst gehe über zur Potenz y^3)
Wir unterscheiden die zwei Fälle i) $\alpha_2 = 2$ und ii) $\alpha_2 = 1$

i) Sei nun $\alpha_2 = 2$:
Es bleiben folgende Kombinationsmöglichkeiten für $(\beta_1; \beta_2)$ zu betrachten:

$(\beta_1; \beta_2) =$	a) $(1; 1)$	b) $(1; 2)$	c) $(1; 3)$
	d) $(2; 1)$	e) $(2; 2)$	f) $(2; 3)$
	g) $(3; 1)$	h) $(3; 2)$	i) $(3; 3)$

Für die Fälle a) und c) besitzt G_1 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (vgl. [24], Seite 156 Prop. 4), also folgt $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Weiterhin halten wir fest: die Fälle d), h) und f) folgen aus b)
Fall g) folgt aus c)
Fall i) folgt aus a)
jeweils mittels inverser Relation von $W_1(x, y)$ und (oder) Übergang zu x^2.
Behandle nun die Fälle b) und e)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4 = z^2 = (xy^{\beta_1}x^2y^2)^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle,$$

mit $1 \le \beta_1 \le 2$. Betrachte die Faktorgruppe nach Einführen der Relation $y^2 = 1$ und erhalte in beiden Fällen

$$\bar{G} = \langle x, y, z \mid x^3 = y^2 = z^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Damit folgt $F_2 < \bar{G}$ und somit $F_2 < G$, siehe [10], Seite 263, Korollar 9.2.1.

ii) Sei nun $\alpha_2 = 1$:
Es bleiben folgende Kombinationsmöglichkeiten für $(\beta_1; \beta_2)$ zu betrachten:

$$\begin{array}{llll} (\beta_1;\beta_2) = & & \text{a) } (1;2) & \text{b) } (1;3) \\ & \text{c) } (2;1) & & \text{d) } (2;3) \\ & \text{e) } (3;1) & \text{f) } (3;2) & \end{array}$$

Wir halten fest: die Fälle c), d) und f) folgen aus a)
Fall e) folgt aus b)
jeweils mittels inverser Relation von $W_1(x,y)$ und Übergang zu x^2.
Betrachte zuerst Fall a)

$$\Rightarrow G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4 = z^2 = (xyxy^2)^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Dann besitzt G_1 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (vgl. [24], Seite 156 Prop. 4), also folgt auch hier $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz (1.23).
Betrachte nun Fall b), also

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4 = z^2 = (xyxy^3)^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1 \rangle.$$

Starte mit der Untergruppe H vom Index 2 mit folgenden Erzeugenden:

$$a = x, \quad b = zxz, \quad c = y^2, \quad d = yz, \quad e = zy,$$

und $H = \langle a, b, c, d, e \rangle$. Eine Präsentierung von H ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H = \langle a, b, c, d, e \mid a^3 = b^3 = d^3 = e^3 = c^2 = ab = \\ (adbec)^2 = (beacd)^2 = (de)^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Führe die Relation $c = 1$ ein, ersetze $a = b^{-1}$ und erhalte die Faktorgruppe

$$\bar{H} = \langle b, d, e \mid b^3 = d^3 = e^3 = (beb^{-1}d)^2 = (de)^2 = 1 \rangle.$$

Bekannt ist, dass $\langle b \mid b^3 = 1 \rangle$ und $\langle d, e \mid d^3 = e^3 = (de)^2 = 1 \rangle \cong A_4$ eine treue Darstellung in die $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ besitzen. Damit besitzt auch $\bar{H}$ eine wesentliche Darstellung in die $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, vgl. [10], Seite 144, Theorem 6.3.1. Die Dimension des Charakterraums für $\bar{H}$ in der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ setzt sich zusammen aus der Anzahl der Freiheitsgrade ($\sharp fg$) der Erzeugenden und deren Relationen. Durch das Festlegen der Erzeugenden auf

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } E = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

ergibt sich für die Dimension des Charakterraums

$$\begin{aligned} \sharp fg(D) - 2 + \sharp fg(E) - 1 + \sharp fg(B) - 1 - 1 = \\ 2 - 2 + 2 - 1 + 2 - 1 - 1 = 1 > 0. \end{aligned}$$

Nach der Arbeit von Culler und Shalen [4] zerlegt sich $\bar{H}$ in ein nicht-triviales freies Produkt mit Amalgam $\bar{H} = H_1 *_{H_3} H_2$ oder lässt sich als HNN-Erweiterung auffassen. Die 2. Möglichkeit entfällt, da $\bar{H}$ von Elementen endlicher Ordnung erzeugt wird.
In $\bar{H} = H_1 *_{H_3} H_2$ ist wegen $b^3 = d^3 = e^3 = 1$ notwendig $|H_1 : H_3| \geq 3$ oder $|H_2 : H_3| \geq 3$, und damit besitzt $\bar{H}$ eine freie Untergruppe vom Rang 2 und somit auch G.

(4) $m = 3$:
Dann hat G Œ folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^2 = (xyx^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Es bleiben folgende Kombinationsmöglichkeiten für $(\alpha_2; \beta_2)$ zu betrachten:

$$(\alpha_2; \beta_2) = \quad \begin{array}{ll} & \text{a) } (1; 2) \\ \text{b) } (2; 1) & \text{c) } (2; 2) \end{array}$$

Betrachte Fall a), also

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^2 = (xyxy^2)^2 = (yz)^3 = (xz)^2 = 1\rangle.$$

Diese Gruppe ist isomorph zu (6.1), Fall I B) (4) (vertausche die Rollen von x und y), also folgt auch hier: $F_2 < G$.
Im Fall b) gilt: $|G| = 7200$, vgl. [26], S. 30, Theorem 2.9 (vertausche dabei die Rollen von x und y).
Der Fall c) wurde in (6.2), Fall I B) (4) behandelt (vertausche auch hier die Rollen von x und y), also gilt in diesem Fall $F_2 < G$.

D) $n = 2$ und $l = 4$:
Dann besitzt G folgende Präsentierung

$$G = \langle x, y, z \mid x^4 = y^m = z^2 = (x^{\alpha_1}y^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^3 = (x^\varepsilon z)^2 = 1\rangle.$$

Im Fall $m \geq 5$ bleibt nichts zu zeigen, da $1/_l + 1/_m + 1/_p < 1$ erfüllt ist mit $l = 4$ und $p = 2$.
Wegen $l \leq m$ verbleibt somit $m = 4$, also

$$G = \langle x, y, z \mid x^4 = y^4 = z^2 = (x^{\alpha_1}y^{\beta_1}x^{\alpha_2}y^{\beta_2})^2 = (y^\gamma z)^3 = (x^\varepsilon z)^2 = 1\rangle.$$

Ist $\gamma = 2$, so betrachte eine wesentliche Darstellung $\rho : G_2 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ mit $\rho(G_2)$ nicht-elementar $\Rightarrow$ $F_2 < G$ nach dem Fortsetzungssatz, vgl. (1.23) und (3.2).
Sei ab jetzt $\gamma = 1$, sonst gehe zur Potenz y^3 über.
Der Rest des Beweises verläuft wie in (6.3), Fall I C) in symmetrischer Weise, da die Argumentation dort nur auf $W_1(x, y)$ basiert.

E) $l \geq 5$:
In diesem Fall gilt immer $F_2 < G$, da aus $5 \leq l \leq m$ mit $p = 2$ direkt folgt:
$1/_l + 1/_m + 1/_p < 1$.

Damit ist auch der Fall $q = 3$ und $r = 2$ abgeschlossen und die Tits-Alternative nachgewiesen.

Kapitel 7

Spezialfälle der Form $(p; q; r) = (2; 2; 2)$

In den vorherigen Kapitel haben wir die Tits-Alternative für den sphärischen Fall mit $(p; q; r) \neq (2; 2; 2)$ nachgewiesen.
Doch auch für den Fall $(p; q; r) = (2; 2; 2)$ kann man in besonderen Fällen die Existenz einer freien Untergruppe vom Rang 2 zeigen. Es gilt der folgende

Satz 7.34. *Sei*

$$G = \langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = W_1^2(x, y) = (y^\gamma z^\delta)^2 = (x^\varepsilon z^\zeta)^2 = 1 \rangle,$$

mit $W_1(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \dots x^{\alpha_k} y^{\beta_k}$, $k \geq 1$, $l, m, n \geq 2$, *Œ* $l \leq m$, $1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon < l$, $1 \leq \beta_1, \dots, \beta_k, \gamma < m$ *und* $1 \leq \delta, \zeta < n$.
Es trete einer der folgenden Fälle auf:

(1) $1/_l + 1/_n < 1/_2$

(2) $1/_m + 1/_n < 1/_2$

(3) $1/_l + 1/_m < 1/_2$ *und* $n \geq 3$

(4) $1/_l + 1/_m < 1/_2$ *und* $k = 1$

(5) $1/_l + 1/_m < 1/_2$, $n = 2$, $k \geq 2$ *und* $(l; m) \neq (3; 8), (3; 10), (4; 5), (4; 6), (4; 8), (5; 6)$

Dann enthält G eine freie Untergruppe vom Rang 2. Insbesondere erfüllt G die Tits-Alternative.

Beweis.

(1) Sei also $1/_l + 1/_n < 1/_2$. Wegen $l \leq m$ ist dann $m \geq 3$ und G hat eine freie Untergruppe vom Rang 2 nach dem Fortsetzungssatz (1.23).

(2) Sei nun $1/_m + 1/_n < 1/_2$. Ist $l \geq 3$, so hat G eine freie Untergruppe vom Rang 2 wie in (1).
Sei nun $l = 2$: Sei $G_2 = \langle y, z \mid y^m = z^n = (y^\gamma z^\delta)^2 = 1 \rangle$. Wegen $1/_m + 1/_n < 1/_2$ gilt:

i) $m \geq 6$ und $n \geq 4$ oder $m \geq 4$ und $n \geq 6$

ii) $(m;n) = (4;5), (5;4), (5;5)$

Insbesondere gilt $m, n \geq 3$.
Für den Fall ii) besitzt G_2 ein wesentliches nicht-elementares Bild in der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, also hat G eine freie Untergruppe nach dem Fortsetzungssatz, (1.23).
Betrachte nun den Fall i). Sei $G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^m = W_1^2(x,y) = 1 \rangle$.
Sei $\rho_1 : G_1 \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ eine wesentliche Darstellung. Sei $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ eine wesentliche Fortsetzung. Für den Fall $\rho_1(G_1)$ nicht-elementar besitzt G eine freie Untergruppe vom Rang 2 nach dem Fortsetzungssatz (1.23). Ist $\rho_1(G_1)$ endlich und nicht zyklisch, so muss $\rho(G)$ nicht-elementar sein, denn es kommt wegen $m, n \geq 3$ die Diedergruppe als Bild nicht in Frage und wegen $m \geq 6$ oder $n \geq 6$ kann das Bild nicht isomorph zu A_4, A_5 oder S_4 sein; insbesondere ist $\rho(G)$ nicht zyklisch oder unendlich metabelsch.
Ist $\rho_1(G_1)$ zyklisch oder unendlich metabelsch, so ist $\rho(G)$ nicht-elementar wählbar nach dem Fortsetzungssatz (1.23) wegen $n \geq 3$.
In jedem Fall enthält G eine freie Untergruppe vom Rang 2.

(3) Sei $1/_l + 1/_m < 1/_2$ und $n \geq 3$. Hier folgt die Behauptung direkt aus [10], Seite 276, Theorem 9.3.4 und dem Fortsetzungssatz (1.23), da $n \geq 3$ (siehe (1.25)).

(4) Sei nun $1/_l + 1/_m < 1/_2$ und $k = 1$. Hier folgt die Behauptung analog wie im Fall (2).

(5) Nun gelte $1/_l + 1/_m < 1/_2$, $n = 2$, $k \geq 2$ und
$(l;m) \neq (3;8), (3;10), (4;5), (4;6), (4;8), (5;6)$.
In diesem Fall folgt die Behauptung aus [10], Seite 283, Theorem 9.3.5.

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] H.S.M. Coxeter, The polytopes with regular-prismatic vertex figures (part 2), *Proc. London Math. Soc.* **34**, (1932), 126-189.

[2] H.S.M. Coxeter, Discrete groups generated by reflections, *Ann. Math.* **35**, (1934), 588-621.

[3] H.S.M. Coxeter, The complete enumeration of finite groups from the form $R_i^2 = (R_i, R_j)^{k_{ij}}$, *J. London Math. Soc.* **10**, (1935), 21-25.

[4] M. Culler & P. Shalen, Varieties of Group Representations and Splittings of Three Manifolds, *Ann. of Math.* **117 (1)**, (1983), 109-147.

[5] M. Edjvet, On a certain class of group presentations, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **105**, (1989), 25-35.

[6] M. Edjvet, J. Howie, G. Rosenberger & R. Thomas, Finite generalized tetrahedron groups with a high-power relator, *Geometriae Dedicata* **94**, (2002), 111-139.

[7] M. Edjvet, G. Rosenberger, M. Stille & R. Thomas, On certain finite generalized tetrahedron groups, *in* M. D. Atkinson, N. D. Gilbert, J. Howie, S. A. Linton and E. F. Robertson (eds.), *Computational and Geometric Aspects of Modern Algebra*, London Math. Soc. Lecture Note Series **275**, Cambridge University Press (2000), 54-65.

[8] B. Eick, D. F. Holt & E. A. O'Brien, Handbook of Computational Group Theory, *Discrete Mathematics and its Applications* (2005).

[9] B. Fine, F. Levin, F. Roehl & G. Rosenberger, The generalized tetrahedron groups, *in* R. Charney, M. Davis & M. Shapiro (eds.), *Geometric Group Theory*, Ohio State University, Mathematical Research Institute Publications **3**, de Gruyter (1995), 99-119.

[10] B. Fine & G. Rosenberger, Algebraic Generalizations Of Discrete Groups, Marcel Dekker Inc., (1999).

[11] D. Hennig, Die Titsalternative für verallgemeinerte Dreiecksgruppen, Diplomarbeit (1999).

[12] J. Howie & N. Kopteva, The Tits alternative for generalised tetrahedron groups, *J. Group Theory* **9**, (2006), 173-189.

[13] J. Howie, V. Metaftsis & R. Thomas, Finite generalized triangle groups, *Trans. American Math. Soc.* **347**, (1995), 2613-3623.

[14] J. Howie & G. Williams, Free subgroups in certain generalized triangle groups of type $(2, m, 2)$, *Geometriae Dedicata* **119**, (2006), 181-197.

[15] James E. Humphreys, Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **29**, (1990).

[16] A. Karrass & D. Solitar, Subgroups of HNN Groups and Groups with One Defining Relation, *Can. J. Math.* **23**, (1971), 627-643.

[17] N. Kopteva, Generalised Tetrahedron Groups and Groups Uniformising Hyperbolic Orbifolds, Dissertation (2003).

[18] L. Levai, G. Rosenberger & B. Souvignier, All finite generalized triangle groups, *Trans. American Math. Soc.* **347**, (1995), 3625-3627.

[19] K. I. Lossov, *SQ*-Universality of Free Products with Amalgamated Finite Subgroups, *Journal Sib. Math.* **27**, (1986).

[20] R. C. Lyndon und P. E. Schupp, Combinatorial group theory, Berlin, Springer (1977).

[21] C. Maclachlan, Triangle Subgroups of Hyperbolic Tetrahedral Groups, preprint.

[22] W. Plesken & G. Rosenberger, Simultaneous conjugation in quaternion algebras, *Results in Mathematics*, **25**, (1994), 120-124.

[23] S. J. Pride, The (co)-homology of groups given by presentations in which each defining relator involves at most two types of generators, *J. Austral. Math. Soc.*, **52**, (1992), 205-218.

[24] G. Rosenberger, On free subgroups of generalized triangle groups, Algebra i Logika, **28 (2)** (1989), 227-240.

[25] G. Rosenberger, Some remarks on a paper of A. F. Beardon and P.L. Waterman about strongly discrete subgroups of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, *Journal London Math. Soc.*, **27**, (1983), 39-42.

[26] G. Rosenberger, M. Scheer & R. Thomas, Finite Generalized Tetrahedron Groups with a Cubic Relator, *Mathematics & Computer Science* **20**, (2003).

[27] M. Scheer, Klassifizierung verallgemeinerter Tetraedergruppen, Dissertation (2001).

[28] J. Stallings, Non-positively curved triangles of groups, *in* E. Ghys, A. Haefliger & A. Verjovsky (eds.), *Group theory from a geometrical viewpoint*, World Scientific, (1991), 491-503.

[29] J. Tits, Free subgroups in linear groups, *J. Algebra* **20**, (1972), 250-270.

[30] GAP - Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra, *University of St. Andrews*, `www.gap-system.org`, version 4.4.6 (2005).