

Theorie und Numerik
zur
freien Designoptimierung
mechanischer Strukturen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

Der Fakultät Mathematik der Technischen Universität Dortmund
vorgelegt von

Sven Grönwäller

Dortmund, August 2007

Vorwort

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. W. Achtziger, der mich zu Beginn der Promotion für das Aufgabenfeld der Topologieoptimierung begeisterte und in den folgenden Jahren stets mit Rat und Tat zur Seite stand. Er ermöglichte die Teilnahme an einigen Summer Schools, sowie den Austausch zwischen der Universität Dortmund und der UTIA in Prag. Die gemeinsame Zeit dort wird unvergessen bleiben.

Ein herzlicher Dank gilt Prof. Dr. H. Blum für die zusätzliche Betreuung dieser Arbeit. Die besondere Kombination aus Optimierung und Finite-Elemente-Methoden, die die Topologieoptimierung beschreibt, spiegelte sich somit in der Betreuung dieser Arbeit wider. Sowohl die Problemstellungen der Strukturmechanik als auch die Theorie der Finiten Elemente waren mir als Wirtschaftsmathematiker anfänglich noch fremd. Dies änderte sich durch seine Hilfe sehr schnell.

Überdies bedanke ich mich bei der Graduate School for Production Engineering and Logistics in Dortmund. Die Unterstützung in Form eines Stipendiums ermöglichte es mir, mich mit diesem spannenden Gebiet der Forschung zu beschäftigen.

Für die angenehme und freundschaftliche Zusammenarbeit am Lehrstuhl X für Wissenschaftliches Rechnen bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern. Insbesondere bei Dr. A. Schröder und A. Rademacher möchte ich mich für die Beantwortung vieler Fragen im Bereich der Finiten-Elemente-Methode und insbesondere zu „SOFAR“ bedanken.

Ganz besonderer Dank gebührt meiner Verlobten Marie-Therese Hau sowohl für die geduldige Korrektur der Arbeit als auch für die uneingeschränkte Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Einleitung	1
2 Das Minimum-Compliance-Problem	5
2.1 Lineare Elastizitätstheorie	5
2.2 Das Randwertproblem	7
2.3 Die variationelle Formulierung	8
2.4 Die Methode der finiten Elemente	10
2.5 Die Formulierung des Problems	11
2.6 Über die Existenz von Lösungen	14
2.6.1 Die Homogenisierungsmethode	16
2.6.2 Perimeter-Kontrolle	19
3 Die Formulierung als Sattelpunktproblem	21
3.1 Existenz und Eindeutigkeit	21
3.2 Optimalitätsbedingungen	27
3.3 Das Sattelpunktproblem (SP_j)	32
4 Das diskretisierte Problem	37
4.1 Die Problemstellung	37
4.2 Die Folge $u((\rho_j)_{j \in \mathbb{N}})$	39
5 Penalty-Funktionen und die Continuation-Methode	46
5.1 Penalty-Funktionen	46
5.1.1 Das SIMP-Modell	47

5.1.2	Ein expliziter Strafterm	48
5.1.3	Die alternative Interpolation von Stolpe und Svanberg	49
5.2	Der Pfad globaler Lösungen	51
6	Die Implementation eines Topologieoptimierungs-Algorithmus	54
6.1	Das FE-Paket SOFAR	54
6.2	Die Gleichungssystemlöser	56
6.3	SNOPT – ein SQP-Verfahren	57
6.4	Aufbau des Algorithmus	62
7	Numerische Beispiele	64
7.1	Beispiel: Cantilever Problem	64
7.2	Beispiel: MBB-Beam	70
7.3	Beispiel: Brücke	75
7.4	Beispiel: Rad	79
7.5	Beispiel: 3D-Cantilever	83
7.6	Beispiel: Hocker	88
8	Zusammenfassung und Ausblick	91
A	Überlegung zu Compliance Fehlerschätzern	93
A.1	Praxisrelevanz	93
A.2	Gütekriterium und Fehlerabschätzung	94
	Literaturverzeichnis	99

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Darstellung des Randwertproblems.	7
2.2	Darstellung der Designdomäne Ω links und eines lokal optimalen Designs für das Cantilever-Beispiel.	13
5.1	Darstellung des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Elastizitätsmodul $E_q(\rho)$ und Materialdichte ρ für unterschiedliche Werte q mittels SIMP-Interpolation.	47
5.2	Darstellung des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Elastizitätsmodul $E_q(\rho)$ und Materialdichte ρ für unterschiedliche Werte q anhand der von Stolpe & Svanberg vorgeschlagenen Interpolation mit $E_0 = 0.01$ und $E_1 = 1$	50
6.1	Darstellung der Netzstruktur für ein 2-dimensionales (links) bzw. 3-dimensionales Gebiet (rechts) mit teilweise runden Rändern.	55
6.2	Schematische Darstellung der Kommunikation zwischen SOFAR und TopOpt.	62
7.1	Darstellung der Domäne Ω des Cantileverproblems.	65
7.3	Compliance der optimalen Struktur des Cantileverproblems in Abhängigkeit der Gittergrösse (hier angegeben durch die Anzahl Elemente in x-Richtung).	65
7.2	Lösungen des Cantileverproblems aus Tabelle 7.1.	66
7.4	Lösungen des Cantileverproblems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.2.	67
7.5	Lösungen des Cantileverproblems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.2. Im direkten Vergleich mit Abbildung 7.4 erkennen wir bereits, dass die angewandte Continuation-Methode zu einer besseren Lösung führt. Dies bestätigt den Verdacht auf einen „Pfad“ von Lösungen (siehe Abschnitt 5.2).	68
7.6	Lösungen des Cantileverproblems mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.3.	69

7.7	Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung $-0,5$ bis $0,5$ oben links, -1 bis 1 oben rechts und -2 bis 2 unten.	70
7.8	Darstellung der Domäne Ω des MBB-Problems.	70
7.9	Lösungen des MBB-Problems aus Tabelle 7.4.	71
7.10	Lösungen des MBB-Problems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.5.	72
7.11	Lösungen des MBB-Problems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.5.	73
7.12	Lösungen des MBB-Problems mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.6.	74
7.13	Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung -10^{-5} bis 10^{-5} links, -10^{-4} bis 10^{-4} mitte und -10^{-3} bis 10^{-3} rechts.	75
7.14	Darstellung der Domäne Ω des Brücke-Problems.	75
7.15	Lösungen des Brücke-Problems aus Tabelle 7.3.	76
7.16	Lösungen des Brücke-Problems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.8.	77
7.17	Lösungen des Brücke-Problems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.8.	78
7.18	Lösungen des Brücke-Problems mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.9.	78
7.19	Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung $-0,0005$ bis $0,0005$ oben links, $-0,001$ bis $0,001$ oben rechts und $-0,005$ bis $0,005$ unten.	79
7.20	Darstellung der Domäne Ω des Rad-Problems.	80
7.21	Lösung des Rad-Problems aus Tabelle 7.10.	80
7.22	Lösungen des Rad-Problems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.11.	81
7.23	Lösungen des Rad-Problems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.11.	82
7.24	Lösungen des Rad-Problems mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.12.	82
7.25	Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung $-0,005$ bis $0,005$ links, $-0,01$ bis $0,01$ mitte und $-0,05$ bis $0,05$ rechts.	82
7.26	Darstellung der Domäne Ω des 3D-Cantilever-Problems.	83
7.27	Lösung des 3D-Cantilever-Problems in $e = 432$ Variablen aus Tabelle 7.13 aus drei unterschiedlichen Perspektiven.	84

7.28	Lösung des 3D-Cantilever-Problems in $e = 3456$ Variablen aus Tabelle 7.13, wobei links oben alle Elemente mit $\rho_h^* < 0.1$, rechts oben mit $\rho_h^* < 0.2$ und unten mit $\rho_h^* < 0.3$ ausgeblendet wurden.	85
7.29	Lösungen des 3D-Cantilever-Problems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.14.	85
7.30	Lösungen des 3D-Cantilever-Problems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.14.	86
7.31	Lösungen des 3D-Cantilever-Problems mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.15.	86
7.32	Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung $-0,1$ bis $0,1$ oben links, $-0,2$ bis $0,2$ oben rechts und $-0,5$ bis $0,5$ in drei Perspektiven unten.	87
7.33	Darstellung der Domäne Ω des Hocker-Problems.	88
7.34	Lösung des Hocker-Problems aus Tabelle 7.16.	88
7.35	Lösungen des Hocker-Problems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.17.	89
7.36	Lösungen des Hocker-Problems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.17.	90
7.37	Lösungen des Hocker-Problems mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.18.	90
7.38	Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung $-0,05$ bis $0,05$ links, $-0,1$ bis $0,1$ mitte und -1 bis 1 rechts.	90
A.1	Definition der Fehler $E1$ bis $E4$	95

Tabellenverzeichnis

7.1	Numerische Resultate für das Cantilever Problem.	65
7.2	Numerische Resultate für das Cantilever Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.	67
7.3	Numerische Resultate für das Cantilever Problem mit Continuation-Methode und P2-Ansatzfunktionen.	68
7.4	Numerische Resultate für das MBB-Problem.	71
7.5	Numerische Resultate für das MBB-Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.	72
7.6	Numerische Resultate für das MBB-Problem mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen.	73
7.7	Numerische Resultate für das Brücke-Problem.	76
7.8	Numerische Resultate für das Brücke-Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.	77
7.9	Numerische Resultate für das Brücke-Problem mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen.	78
7.10	Numerische Resultate für das Rad-Problem.	80
7.11	Numerische Resultate für das Rad-Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.	81
7.12	Numerische Resultate für das Rad-Problem mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen.	81
7.13	Numerische Resultate für das 3D-Cantilever-Problem.	83
7.14	Numerische Resultate für das 3D-Cantilever-Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.	83
7.15	Numerische Resultate für das 3D-Cantilever-Problem mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen.	84
7.16	Numerische Resultate für das Hocker-Problem.	88

7.17 Numerische Resultate für das Hocker-Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.	89
7.18 Numerische Resultate für das Hocker-Problem mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen.	89

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel der Optimierung mechanischer Strukturen ist es, ein Design zu entwerfen, das eine vorgegebene Last unter minimaler Nachgiebigkeit trägt. Die effiziente Nutzung von Material ist in vielen Anwendungsgebieten wie z.B. der Automobilindustrie oder der Luft- und Raumfahrttechnik von entscheidender Bedeutung. Die Verfahren der Strukturoptimierung dienen dort unter anderem der Reduzierung von Gewicht.

Je nach Art der Designvariablen unterteilt man die Strukturoptimierung in die drei Felder Size-, Shape- und Topologieoptimierung. Ein Size-Problem ist z.B. die Frage nach der optimalen Dicke einer linear elastischen Platte. Das Besondere an dieser Art des Problems ist die stets gleich bleibende Grundstruktur, die sogenannte Domäne. Ein Shape-Problem wiederum besteht darin, die optimale Form eben jener Domäne zu ermitteln. Dabei ist die Anzahl und die Position von Löchern schon vorgegeben. Daher stellen wir uns in der Topologieoptimierung letztendlich die Frage nach der optimalen Position und Form von Löchern sowie deren Anzahl und den daraus resultierenden Verbindungen einer Struktur. Das bedeutet insbesondere, dass auch in diesem Fall die Domäne die zu optimierende Designvariable darstellt.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Minimum-Compliance-Problem. Minimum Compliance bedeutet die Minimierung der Nachgiebigkeit einer Struktur unter vorgegebener Last und begrenzten Ressourcen. Dies entspricht einer Maximierung der Steifigkeit bei gleich bleibendem Gewicht. Dieses Problem wurde ursprünglich anhand des Beispiels der optimalen Dicke einer linear elastischen Platte untersucht (Variable Thickness Sheet). Die minimale Dicke dieser Platte wurde zunächst als positiv vorausgesetzt. Von daher handelt es sich somit genau genommen nicht um ein Topologieoptimierungsproblem. Die Domäne ist vorgegeben und verändert sich nicht. Es handelt sich um ein Size-Problem. Wenn man jedoch Platten der Dicke Null zulässt, dann handelt es sich um ein Problem der Topologieoptimierung. Es können beliebig viele Löcher an jedem beliebigen Ort innerhalb der Domäne auftreten.

Die Idee der Strukturoptimierung, wie wir sie heute kennen, geht auf eine Arbeit von Prager und Taylor von 1968 [24] zurück. Man ging dazu über, Strukturen mit Hilfe von Indikatorfunktionen zu beschreiben ([9] und [31]). Rossow und Taylor untersuchten im Jahr

1973 das Problem numerisch mit Hilfe der Methode der finiten Elemente [26]. Bendsøe und Kikuchi waren es 1988, die die sogenannte Material Distribution Methode erstmalig numerisch implementierten [4]. Im Jahr 1989 folgte Bendsøes Arbeit über die mittlerweile weit verbreitete SIMP-Interpolation (siehe Kapitel 5) zur Erzeugung von 0-1 Designs [5]. Die Existenz von Lösungen des Variable Thickness Sheet Problems mit positiver Dicke untersuchten Cea und Malanowski bereits 1970 [10]. Die Verallgemeinerung dieses Resultats auf das Variable Thickness Sheet Problem mit zulässigen Dicken von Null, sprich dem eigentlichen Topologieproblem, gelang Petersson 1996 [19]. Im Jahr 1998 folgte Petersson und Haslingers Arbeit zur (schwachen) Konvergenz einer Folge von Lösungen approximierender Probleme zu Lösungen des exakten Problems [22]. Jedoch war es nicht möglich, die starke Konvergenz einer solchen Folge zu beweisen. Dies gelang erst mit Hilfe weiterer Annahmen an das gestellte Problem. Damit war es Petersson 1999 möglich, die Eindeutigkeit der Lösung und die starke Konvergenz zu beweisen [20]. Diese Arbeiten stellen die theoretische Grundlage dar, auf der sämtliche numerische Resultate der Literatur basieren. Innerhalb dieser Arbeit untersuchen wir den Grenzübergang vom Size-Problem zu einem Topologieproblem. Wir führen eine positive untere Schranke ϵ für die Designvariable ein und betrachten den Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$. Dabei stellt sich die Frage nach der Konvergenz einer Folge von Lösungen für kleiner werdendes ϵ gegen die Lösung des wahren Topologieproblems. Des Weiteren untersuchen wir die Erweiterbarkeit der Konvergenzresultate von Petersson auf den Fall mit $\epsilon = 0$. Die von ihm hergeleiteten Optimalitätsbedingungen garantieren für $\epsilon > 0$ starke Konvergenz der FE-Lösungen gegen eine exakte Lösung auf einem Teilgebiet ohne zusätzliche Annahmen an das Problem.

Außerdem beschäftigen wir uns mit der Frage, was innerhalb des approximativen, numerisch handhabbaren Problems bei eben diesem Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ geschieht. Bisher angewandte Verfahren nutzen eine positive untere Schranke $\epsilon > 0$ zur Überwindung numerischer Schwierigkeiten. Dennoch werden so gewonnene Ergebnisse als Lösungen des Topologieoptimierungsproblems betrachtet und das Material der „Dicke“ ϵ als Loch interpretiert. Dies wirft die Frage nach der theoretischen Basis dieser Vermutung auf. In seiner Arbeit von 1998 untersuchte Achtziger diese Fragestellung, mit dem Ergebnis, dass optimale Designs stetig vom oben genannten Parameter ϵ abhängen [1]. Wir untersuchen hier nun die Folge von zugehörigen Verschiebungen der Struktur in Abhängigkeit der unteren Schranke.

Wir beginnen in Kapitel 2 mit der Erläuterung der zum Modellverständnis notwendigen Grundlagen der Strukturmechanik. Es wird ein Einblick in die lineare Elastizitätstheorie gegeben. Daraufhin wird die mathematische Formulierung des Problems erklärt. Die Methode der finiten Elemente wird in ihren Grundzügen dargestellt. Es folgt ein Abschnitt zur Existenz von Lösungen des Minimum Compliance Problems. Wir stellen zwei Ansätze vor, nämlich die Homogenisierungsmethode und die Perimeter-Kontrolle, die die Existenz von Lösungen garantieren.

Im dritten Kapitel wird die Formulierung des Minimum Compliance Problems als Sattelpunktproblem dargestellt. Es handelt sich dabei um einen häufig verwendeten, alternativen Ansatz, anhand dessen mit Hilfe der Sattelpunkttheorie Aussagen zur Existenz und Ein-

deutigkeit von Lösungen sowie zur Konvergenz einer Folge diskretisierter Lösungen möglich sind. Daraufhin untersuchen wir die Anwendbarkeit der von Petersson formulierten Optimalitätsbedingungen für das Variable Thickness Sheet Problem mit $\epsilon > 0$ auf das Topologieoptimierungsproblem mit $\epsilon = 0$. Es ist uns mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Maximumprinzips, welches für $\epsilon > 0$ bereits in [10] bewiesen wurde, gelungen, die Optimalitätsbedingungen auf den Fall $\epsilon = 0$ anzuwenden. Nach unserem Kenntnisstand sind wir die Ersten, die die drei aus den Optimalitätsbedingungen resultierenden Mengen graphisch darstellen und untersuchen (siehe Kapitel 7). Abschließend sind wir in der Lage, die Konvergenz einer Folge von Lösungen des Size-Problems gegen Lösungen des Topologieoptimierungsproblems für $\epsilon \rightarrow 0$ sowohl für das approximierte als auch das kontinuierliche Problem zu zeigen.

Das vierte Kapitel beinhaltet die Untersuchung der mit Hilfe der Methode der finiten Elemente diskretisierten Problemstellung. Auch an dieser Stelle widmen wir uns der Frage, welche Auswirkung der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ hat. Genauer gesagt untersuchen wir den Gradienten der Zielfunktion, welcher für $\epsilon > 0$ bekannt ist, jedoch für $\epsilon = 0$ nicht existiert. Dazu ist es notwendig, eine Folge von zugehörigen Verschiebungen zu betrachten, die dadurch entsteht, dass eine Folge von Designs ohne Löcher gegen ein Design konvergiert, das Löcher enthält. Es gelingt uns unter bestimmten Voraussetzungen, die Beschränktheit der Folge von zugehörigen Verschiebungen zu zeigen. Des Weiteren können wir zeigen, dass die so entstehende Folge von Gradienten der Zielfunktion gegen ein Element des Subdifferentials für $\epsilon \rightarrow 0$ konvergiert.

Im fünften Kapitel stellen wir unterschiedliche Penalty-Funktionen und ihre für die Topologieoptimierung nützlichen Eigenschaften vor. Dabei richten wir ein besonderes Augenmerk auf die Interpolationsmethode von Stolpe und Svanberg [28]. In diesem Zusammenhang erläutern wir ebenfalls eine Continuation-Methode. Diese dient der kontinuierlichen Steigerung eines Strafparameters mit der Zielsetzung, einen möglichen Pfad globaler Lösungen nicht zu verlassen. Es zeigt sich innerhalb der von uns durchgeführten numerischen Untersuchungen, dass diese Methode kombiniert mit der Interpolation von Stolpe und Svanberg zu deutlich besseren Ergebnissen führt (siehe Kapitel 7).

Das sechste Kapitel dient der Erläuterung des von uns entworfenen und in Kapitel 7 zur numerischen Untersuchung herangezogenen Topologieoptimierungs-Algorithmus. Wir stellen die wichtigsten Komponenten vor und beschreiben die Kommunikation dieser untereinander. Besonders hervorzuheben ist die für die FE-Methode zuständige Komponente namens SOFAR, welche am Lehrstuhl X für Wissenschaftliches Rechnen der Universität Dortmund ständig weiter entwickelt wird [27]. Eine weitere Komponente ist der verwendete Gleichungssystemlöser, welcher zur Lösung der FE-Gleichung herangezogen wird. Die letzte Komponente ist der Optimierungsalgorithmus selbst. Es handelt sich dabei um SNOPT, einen so genannten SQP-Algorithmus (SQP steht für sequentielle quadratische Optimierung). Wir erläutern daher kurz die Grundlagen eines SQP-Algorithmus und gehen auf die Voraussetzungen zur Anwendbarkeit ebendieses ein. Schließlich beschreiben wir den Aufbau sowie den Ablauf des von uns entworfenen Topologieoptimierungs-Algorithmus.

Im siebten Kapitel folgen eine Reihe numerischer Untersuchungen, die mit dem in Kapitel 6 beschriebenen Algorithmus durchgeführt wurden. Es werden sowohl eine Reihe von

Beispielen in 2D als auch in 3D betrachtet. Jedes Beispiel wurde auf unterschiedlichen Gittergrößen gerechnet und einer Reihe von Untersuchungen unterworfen. Dazu gehören die Verwendung einer Continuation-Methode sowie unterschiedliche Ansatzfunktionen für die Verschiebung. Des Weiteren sind wir in der Lage, die aus den Optimalitätsbedingungen resultierenden Mengen graphisch darzustellen. Zum Abschluss der Arbeit wird in Kapitel 8 ein kurzer Ausblick gegeben.

Kapitel 2

Das Minimum-Compliance-Problem

In diesem Kapitel werden zunächst in Abschnitt 2.1 einige grundlegende Begriffe aus der Elastizitätstheorie erklärt und definiert. Diese werden es uns ermöglichen, in 2.5 das Problem der *Minimum-Compliance* mathematisch zu fassen. Wir verzichten daher auf eine tiefgehende Betrachtung der Elastizitätstheorie und verweisen statt dessen auf die einschlägige Literatur in diesem Gebiet (siehe z.B. [18]).

2.1 Lineare Elastizitätstheorie

Wir betrachten einen Massekörper als ein deformierbares Kontinuum, welches sich in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ im zwei- bzw. dreidimensionalen Raum befindet. Wenn es nicht explizit erwähnt wird, behandeln wir im Folgenden den allgemeineren, dreidimensionalen Fall $d = 3$. Es soll nun untersucht werden, welchen Verformungen dieser Körper unter verschiedenen Belastungen, sprich Kräften, unterliegt. Ein elastischer Körper zeichnet sich dadurch aus, dass zum einen die auftretenden Verformungen, bei vom Betrag her endlichen Kräften, selber endlich sind. Zweitens verschwindet die Verformung nach der Entlastung des Körpers völlig.

Die Darstellung der Verformung kann je nach Standpunkt des Beobachters verschieden betrachtet werden. In diesem Zusammenhang unterscheidet man zwischen der Lagrangeschen und der Eulerschen Betrachtungsweise (siehe [18]). Unter der Annahme kleiner Verformungen ist es jedoch nicht notwendig zwischen diesen beiden Betrachtungsweisen zu unterscheiden. Sie werden als identisch angesehen.

Die Deformierung des Körpers unter Belastung kann durch eine Abbildung $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ beschrieben werden. Sie ordnet jedem Materiepunkt $x \in \Omega$ den räumlichen Punkt $\xi(x)$ zu, an dem sich der Materiepunkt x nach der Deformation befindet. Diese Abbildung ist bijektiv, wenn bei der Verformung des Körpers keine sogenannte Selbstdurchdringung auftritt. Mit ihrer Hilfe ist es möglich die Verschiebungsfunktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ zu definieren,

$$u(x) = \xi(x) - x .$$

Diese ist wie auch die Funktion ξ eine stetige Funktion unter der Voraussetzung, dass der Körper im verformten Zustand keine Fugen bzw. Risse aufweist.

Als nächstes definieren wir den linearen Verzerrungstensor¹. Unter der Voraussetzung differenzierbarer Verschiebungen u bezeichnen wir mit $\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ den linearen Verzerrungstensor zweiter Ordnung

$$\varepsilon(u(x)) = \frac{1}{2}(\nabla u(x) + \nabla u(x)^T) . \quad (2.1)$$

Die Diagonalelemente $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ und ε_{33} beschreiben die auftretenden Dehnungen. Die Außerdiagonalelemente ε_{ij} mit $i \neq j$ beschreiben die Winkeländerungen, sogenannte Scherungen im Material.

Des Weiteren wird der Spannungstensor eingeführt. Er beschreibt den Spannungszustand eines beliebigen Punktes x im verformten Körper. Dies geschieht mit Hilfe von drei (für $d = 3$) unterschiedlichen Spannungsvektoren, welche den drei Koordinatenebenen zugeordnet sind. Sie geben diejenige Flächenkraft an, welche durch die zugehörige Koordinatenebene durch den Punkt x im Inneren des verformten Körpers wirkt. Mit Hilfe dieser drei Spannungsvektoren, welche zum Spannungstensor zweiter Ordnung zusammengefasst werden, ist es möglich, für beliebig orientierte Flächenelemente die zugehörige Flächenkraft zu berechnen. Wir bezeichnen den Spannungstensor typischerweise mit

$$\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d} .$$

Den Zusammenhang zwischen der Verzerrung und der Spannung liefert das Stoffgesetz. Für elastische Körper gilt das Hookesche Gesetz:

$$\sigma(x) = E(x)\varepsilon(u(x)) , \quad (2.2)$$

ausgeschrieben hat es folgende Gestalt:

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, d\} . \quad (2.3)$$

Mit E ist der sogenannte Elastizitätstensor bezeichnet. Es handelt sich um einen Tensor vierter Stufe. Dieser besteht aus insgesamt $3^4 = 81$ Materialkonstanten. Auf Grund der Symmetrie des Spannungs- bzw. Verzerrungstensors reduziert sich die Anzahl der Materialkonstanten auf lediglich 36. Wir setzen außerdem einen isotropen², homogenen³ Körper voraus. Dies reduziert die Materialkonstanten auf genau zwei, die Laméschen Konstanten λ und μ . Damit vereinfacht sich das Hookesche Gesetz zu folgender Gleichung:

$$\sigma = \lambda \operatorname{spur}(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon$$

mit I der Einheitsmatrix und $\operatorname{spur}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}$.

¹„Unter Tensoren verstehen wir physikalische Größen, die bei Transformationen des Koordinatensystems ganz bestimmten Transformationsgesetzen gehorchen,...“ siehe [18]

²Ein Körper ist isotrop, wenn er sich in alle Richtungen gleich verhält.

³Ein Körper ist homogen, wenn sein Materialverhalten nicht vom Ort x abhängt.

2.2 Das Randwertproblem

Das Randwertproblem ist eine der Grundaufgaben der linearen Elastizitätstheorie und besteht darin, alle Verschiebungen, Verzerrungen und auftretenden Spannungen bei vorgegebenen Randdaten zu berechnen (siehe [18]). Dies geschieht mit Hilfe einiger Gleichungen, die das Verhalten eines Körpers unter Belastung beschreiben. Die auftretenden Spannungen innerhalb des Materials erfüllen stets die Gleichgewichtsbedingungen

$$\operatorname{div} \sigma = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = -b$$

mit b einer auf den gesamten Körper wirkenden Volumenkraft wie z.B. der Schwerkraft. Es handelt sich bei obiger Gleichung um eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in u . Dies ist leicht einzusehen, wenn man σ mittels Hookeschem Gesetz (2.2) und der Definition (2.1) ersetzt. Zusätzlich sind zwei Arten von Randbedingungen gegeben. Auf

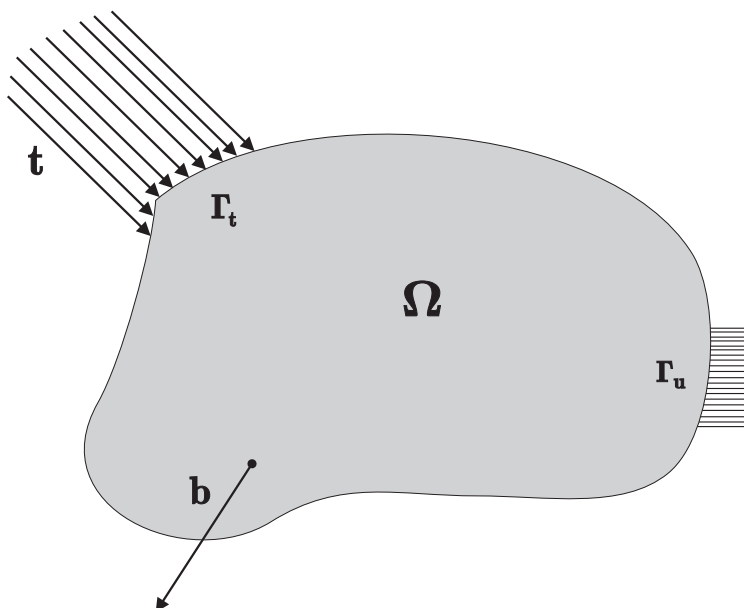


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung des Randwertproblems.

einen Teil des Randes $\Gamma_t \subset \partial\Omega$ (siehe Abbildung 2.1) wirkt eine Oberflächenkraft t . Es muss gelten:

$$\sigma n = t \quad \text{auf } \Gamma_t ,$$

mit $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ dem äusseren Normalenvektor $n(x)$ im Randpunkt x bezogen auf das Gebiet Ω . Diese Art der Randbedingungen werden Neumannsche Randbedingungen genannt. Ein anderer Teil des Randes $\Gamma_u \subset \partial\Omega$ wird fixiert:

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_u .$$

Die Fixierung führt dazu, dass sich der Körper unter den anliegenden Kräften verformt und nicht einfach verschoben wird. Hier handelt es sich um Dirichlet-Randwerte. Auf dem übrigen Teil des Randes gilt:

$$\sigma n = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \{\Gamma_u \cup \Gamma_t\}$$

Eine Verschiebungsfunktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$, welche den obigen Bedingungen genügt, bezeichnet man als klassische Lösung (siehe [8]). Eine Möglichkeit das Randwertproblem zu lösen, bietet der Zugang über die variationelle Formulierung.

2.3 Die variationelle Formulierung

Wir beginnen mit der Definition der Sobolev-Räume, welche bei der variationellen Formulierung des klassischen Randwertproblems benötigt werden. Ein Sobolev-Raum ist Teilmenge des Funktionenraums $L^2(\Omega)$.

Definition 2.3.1

Sei Ω eine offene Menge in \mathbb{R}^d . Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $L^p(\Omega)$ der Lebesgue-Raum aller messbaren Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit endlicher Norm definiert durch

$$\|u\|_p := \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{mit } 1 \leq p < \infty ,$$

und für $p = \infty$

$$\|u\|_{\infty} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \quad .$$

Wir definieren als Nächstes den Begriff der schwachen Konvergenz.

Definition 2.3.2

Eine Folge u_j konvergiert schwach gegen u in $L^p(\Omega)$ (für $1 \leq p < \infty$) genau dann, wenn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_j \phi dx = \int_{\Omega} u \phi dx \quad \forall \phi \in L^q(\Omega)$$

gilt, mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Kürzer schreibt man

$$u_j \rightharpoonup u \text{ in } L^p(\Omega) \quad .$$

Für $p = \infty$ betrachtet man häufig die sogenannte schwach*-Konvergenz, die wie folgt definiert ist.

Definition 2.3.3

Eine Folge u_j konvergiert schwach* gegen u in $L^\infty(\Omega)$ genau dann, wenn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_j \phi \, dx = \int_{\Omega} u \phi \, dx \quad \forall \phi \in L^1(\Omega)$$

gilt. Kürzer schreibt man

$$u_j \rightharpoonup^* u \text{ in } L^\infty(\Omega) .$$

Für schwach bzw. schwach* konvergente Folgen auf beschränkten Mengen lässt sich das folgende Lemma formulieren (siehe [2] Lemma 1.2.1).

Lemma 2.3.4

Sei $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $L^p(\Omega)$ mit $1 < p \leq \infty$. Dann existiert eine Teilfolge $(u_{j'})_{j' \in \mathbb{N}}$ und ein $u \in L^p(\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$u_{j'} \rightharpoonup u \text{ in } L^p(\Omega) ,$$

bzw.

$$u_{j'} \rightharpoonup^* u \text{ in } L^\infty(\Omega) .$$

Wir definieren nun die schwache Ableitung (siehe [8] 1.1).

Definition 2.3.5

Eine Funktion $u \in L^2(\Omega)$ besitzt die schwache Ableitung vom Grad α in $L^2(\Omega)$, bezeichnet mit $v = \partial^\alpha u$, falls $v \in L^2(\Omega)$ und

$$\int_{\Omega} \phi v \, dx = (-1)^\alpha \int_{\Omega} \partial^\alpha \phi u \, dx \quad (2.4)$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt.

Somit ist es uns nun möglich, die Sobolev-Räume einzuführen.

Definition 2.3.6

Der Sobolev-Raum $H^m(\Omega)$ bezeichne die Menge aller Funktionen u in $L^2(\Omega)$, deren sämtliche schwachen Ableitungen $\partial^\alpha u$ für alle $|\alpha| \leq m$ existieren. In $H^m(\Omega)$ wird durch

$$\langle u, v \rangle_m := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) \, dx$$

ein Skalarprodukt mit der zugehörigen Norm definiert

$$\|u\|_m := \sqrt{\langle u, u \rangle_m} .$$

Mit Hilfe des Sobolevraums gelingt es nun die variationelle Formulierung des Randwertproblems zu fassen.

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) E \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Gamma_t} tv \, d\Gamma + \int_{\Omega} bv \, dx \quad \forall v \in U \quad (2.5)$$

mit

$$u \in U := \{u \in (H^1(\Omega))^d \mid u = 0 \text{ auf } \Gamma_u\} . \quad (2.6)$$

Wenn eine klassische Lösung der Randwertaufgabe existiert, dann ist die Lösung u der variationellen Formulierung in $C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$ enthalten und beide Lösungen stimmen überein (siehe [8] S.43). Im weiteren Verlauf werden Volumenkräfte b keine Rolle mehr spielen, daher treffen wir folgende Annahme

$$\int_{\Omega} bv \, dx = 0 .$$

Das obige Integral kann somit aus Gleichung (2.5) entfernt werden. Man beachte, dass das Integral

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \varepsilon(u) E \varepsilon(v) \, dx$$

eine Bilinearform $a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ darstellt. Der Term $\frac{1}{2} a(u, u)$ beschreibt die interne virtuelle Arbeit eines elastischen Körpers unter der Annahme linearer Elastizität. Schließlich bezeichnen wir mit

$$l(v) = \int_{\Gamma_t} tv \, d\Gamma$$

die Linearform $l : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf der rechten Seite der Gleichung (2.5).

2.4 Die Methode der finiten Elemente

In diesem Abschnitt diskretisieren wir die Gleichung (2.5) mit Hilfe der Methode finiter Elemente. Die wesentliche Idee besteht darin, die Gleichung (2.5) nicht in U , sondern in einem passenden Unterraum endlicher Dimension zu lösen. Diesen Unterraum bezeichnen wir mit U_h . Sei $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ eine Basis von U_h . Dann lässt sich eine beliebige Funktion $v_h \in U_h$ darstellen in der Form

$$u_h = \sum_{j=1}^n [u_h]_j \phi_j .$$

Dabei bezeichne $[u_h]_j$ die j -te Komponente eines Vektors \vec{u}_h , welcher eindeutig der Verschiebung u_h zugeordnet wird. Unter Verwendung der Basisschreibweise, wird die Gleichung (2.5) zu

$$\int_{\Omega} \varepsilon \left(\sum_{j=1}^n [u_h]_j \phi_j \right) E \varepsilon(\phi_i) dx = \int_{\Gamma_t} t \phi_i d\Gamma \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

Wir nutzen die Linearität der Bilinearform $a(.,.)$ bezüglich des ersten Argumentes aus und erhalten auf diese Weise

$$\sum_{j=1}^n [u_h]_j \int_{\Omega} \varepsilon(\phi_j) E \varepsilon(\phi_i) dx = \int_{\Gamma_t} t \phi_i d\Gamma \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

Mit Hilfe der Kurzschreibweise erkennt man, dass es sich hierbei um eine Gleichung in Matrix-Vektor-Form handelt

$$\sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) [u_h]_j = l(\phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

mit $K_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$ und $f_i = l(\phi_i)$

$$K \vec{u}_h = \vec{f}$$

Die Matrix $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichnet man als Steifigkeitsmatrix, den Vektor $\vec{f} \in \mathbb{R}^n$ als Kraft- oder auch Lastvektor. Im Folgenden verzichten wir auf den Vektorpfeil zu Gunsten besserer Lesbarkeit. Nun sind wir in der Lage, das Minimum-Compliance-Problem zu formulieren.

2.5 Die Formulierung des Problems

Wir betrachten einen Massekörper, welcher sich in einem Gebiet Ω innerhalb des \mathbb{R}^d befindet. Das Gebiet Ω sollte so gewählt werden, dass es möglich ist, die angreifenden Kräfte und Randbedingungen zu definieren.

Mit Hilfe einer Indikatorfunktion $\chi \in L^\infty(\Omega)$ wird die Lage des Materials im Gebiet Ω festgelegt. Diese nimmt abhängig vom Ort $x \in \mathbb{R}^d$ die Werte 0 oder 1 an:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin \Omega_{mat}; \\ 1, & \text{falls } x \in \Omega_{mat}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Die Menge Ω_{mat} bezeichnet die Teilmenge von Ω , in welcher sich Material befindet.

Nun ist es möglich eine Volumenrestriktion anzugeben. Diese begrenzt das vorhandene Material mit Hilfe einer vorgegebenen Konstante $V > 0$:

$$\int_{\Omega} \chi dx \leq V$$

Diese Bedingung soll das vorhandene Material verknappen. Dies ist der Fall, wenn für V gilt⁴

$$0 < V < \text{meas}(\Omega) . \quad (2.11)$$

Das Materialverhalten in jedem Punkt $x \in \Omega$ wird durch die folgende Funktion (vgl. (2.10)) modelliert

$$E(\chi) = \chi(x) E = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin \Omega_{mat}, \\ E, & \text{falls } x \in \Omega_{mat}, \end{cases} \quad (2.12)$$

mit 0 , dem Nulltensor und E dem Elastizitätstensor des verwendeten Materials.

Dies ermöglicht es uns, die variationelle Formulierung des Randwertproblems (vgl. (2.5)) für eine beliebige Materialverteilung χ anzugeben

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) E(\chi) \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Gamma_t} t v \, d\Gamma \quad \forall v \in U . \quad (2.13)$$

Die rechte Seite der Gleichung (2.13) ist die bereits in Abschnitt 2.3 beschriebene Linearform l . Eine physikalische Interpretation dieses Integrals ist es, den Wert $l(u)$ als Maß für die Nachgiebigkeit der Struktur bei wirkender Kraft t unter der zugehörigen Verschiebung u zu verstehen. Dieses Maß für Nachgiebigkeit (englisch: *Compliance*) gilt es zu minimieren. Das Optimierungsproblem kann somit vollständig beschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \min_{\chi, u} l(u) \\ \text{u.d.N.: } & a_{\chi}(u, v) = l(v) \quad \forall v \in U, \\ & \int_{\Omega} \chi \, dx \leq V, \\ & \chi(x) \in \{0, 1\} \quad \forall x \in \Omega . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Es lautet: Finde diejenige Struktur, beschrieben durch die Designfunktion χ , die bei gleichem Volumen die geringste Nachgiebigkeit aufweist. Es handelt sich bei Problem (2.14) um ein Topologieoptimierungsproblem, da das Material innerhalb der Designdomäne frei verteilbar ist. Die Designvariable χ bestimmt, an welchen Stellen Löcher auftreten und an welchen sich Material befindet.

Man beachte, dass die Zielfunktion lediglich von der Verschiebung u abhängt. Die erste Nebenbedingung sorgt jedoch dafür, dass nur solche Verschiebungen u in Frage kommen, welche sich in Abhängigkeit vom Design χ einstellen. In Anlehnung an die formelle Ähnlichkeit zu Problemen aus der Kontrolltheorie, spricht man auch hier von χ als *Design-Variable* (bzw. Kontrollvariable) und von u als die sich einstellende Zustandsvariable.

Analog zur Definition des Raumes U in (2.6) formulieren wir Problem (2.14), indem wir die Bedingungen an χ mit der Definition eines Unterraums $\mathcal{H} \subset L^{\infty}(\Omega)$ verknüpfen. Sei $\chi \in \mathcal{H}$ mit

$$\mathcal{H} = \left\{ \chi \in L^{\infty}(\Omega) \mid \int_{\Omega} \chi \, dx \leq V, \chi(x) \in \{0, 1\} \, \forall x \in \Omega \right\} . \quad (2.15)$$

Damit vereinfacht sich Problemstellung (2.14) folgendermaßen:

⁴für $V \geq \text{meas}(\Omega)$ ist die optimale Struktur in Problem (MC) (siehe (2.5.1)) die triviale Lösung $\chi \equiv 1$.

Problem 2.5.1 (Minimum Compliance (MC))

Finde $(\chi, u) \in \mathcal{H} \times U$ mit

$$\begin{aligned} & \min_{\chi \in \mathcal{H}, u \in U} l(u) \\ \text{u.d.N.: } & a_\chi(u, v) = l(v) \quad \forall v \in U. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Obiges Problem bezeichnen wir im Folgenden mit (MC) . Die FE-Methode erlaubt es uns Problem (MC) zu diskretisieren. Wir zerlegen das Gebiet Ω in e Teilgebiete T_1, \dots, T_e , den Elementen (siehe [8] S.57). Diese Elemente definieren das Gitter, mit dem sowohl die Verschiebungsfunktion u als auch die Designfunktion χ diskretisiert werden. Nun gilt es, günstige Unterräume $U_h \subset U$ bzw. $\mathcal{H}_h \subset \mathcal{H}$ und eine geeignete Basis dieses Unterraums, die sogenannten Ansatzfunktionen, zu wählen. Als Ansatzfunktionen für die Design-Funktion $\chi_h \in \mathcal{H}_h$ wählt man typischerweise den Raum der auf den Elementen stückweise konstanten Funktionen. Diese lassen sich in Form eines Vektors $\chi_h \in \mathbb{R}^e$ repräsentieren. Der Raum \mathcal{H}_h kann dann als Unterraum des \mathbb{R}^e aufgefasst werden

$$\mathcal{H}_h = \left\{ \chi_h \in \mathbb{R}^e \mid \sum_{i=1}^e [\chi_h]_i \leq V_0, [\chi_h]_i \in \{0, 1\} \forall i = 1, \dots, e \right\}. \quad (2.17)$$

Die Konstante $V_0 = \frac{V}{\text{meas } \Omega} e$ sollte für eine sinnvolle Problemstellung im offenen Intervall $]0, e[$ liegen⁵. Dividiert man durch die Anzahl der Elemente e , beschreibt sie den prozentualen Anteil vorhandenen Materials im Verhältnis zur vorgegebenen Gesamtfläche bzw. zum Volumen des Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Die Wahl der Ansatzfunktionen für die Verschiebung

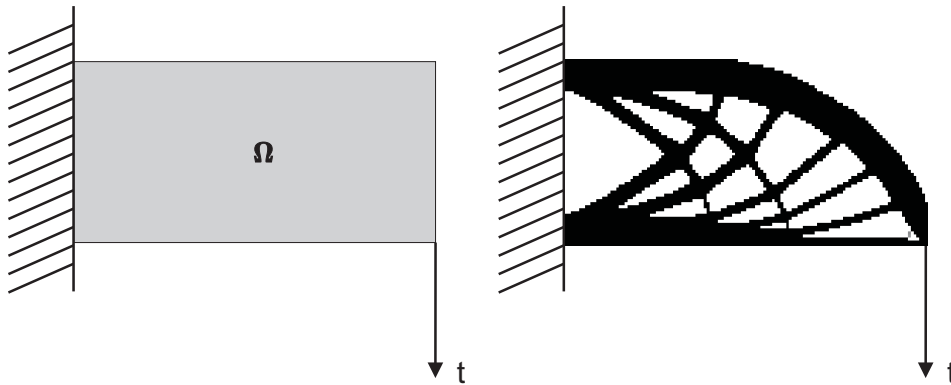


Abbildung 2.2: Darstellung der Designdomäne Ω links und eines lokal optimalen Designs für das Cantilever-Beispiel.

$u_h \in U_h$ fällt in der Praxis häufig auf die stückweise trilinearen bzw. bilinearen Funktionen. Jedoch ist es durchaus möglich, als Ansatzfunktionen für u stückweise polynomielle

⁵Der Einfachheit halber ist hier angenommen, dass es sich um stets gleich große Elemente handelt. Dies ist bei einigen Beispielen in Kapitel 7 nicht der Fall. Dort gilt es den Flächeninhalt des jeweiligen Elementes zu berücksichtigen.

Funktionen höheren Grades zu verwenden (siehe Kapitel 7). Daher verzichten wir an dieser Stelle auf eine genauere Beschreibung von U_h . Die Anzahl der Freiheitsgrade für die diskrete Verschiebungsfunktion u_h bezeichnen wir mit $n \in \mathbb{N}$ und fassen U_h ebenfalls als Unterraum des \mathbb{R}^n auf. Das Minimum-Compliance-Problem (MC_h) hat die Gestalt

Problem 2.5.2 (MC_h)

Finde $(\chi_h, u_h) \in \mathcal{H}_h \times U_h$ mit

$$\begin{aligned} \min_{\chi_h \in \mathcal{H}_h, u_h \in U_h} f^T u_h \\ \text{u.d.N.: } K(\chi_h) u_h &= f \\ K(\chi_h) &= \sum_{i=1}^e [\chi_h]_i K_i \end{aligned} \quad (2.18)$$

mit $K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ den globalen Elementsteifigkeitsmatrizen. Diese hängen lediglich von der Wahl des FE-Raums U_h und der Art des verwendeten Gitters ab. Sind sowohl das Gitter als auch die Art der finiten Elemente festgelegt worden, sind die lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen Konstanten in obigem Problem.

2.6 Über die Existenz von Lösungen

Wir werden in diesem Abschnitt zunächst zeigen, dass das Problem (MC) unter Umständen keine Lösung χ innerhalb des zugehörigen Raumes zulässiger Designfunktionen \mathcal{H} besitzt. Es werden dann zwei unterschiedliche Ansätze vorgestellt, dieses Problem zu beheben.

Sei $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von zulässigen Designs $\chi_j \in \mathcal{H} \forall j \in \mathbb{N}$. Des Weiteren sei $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von zugehörigen Verschiebungen $u_j \in U \forall j \in \mathbb{N}$, welche die Nebenbedingung von Problem (MC) erfüllt,

$$a_{\chi_j}(u_j, v) = l(v) \quad \forall v \in U \forall j \in \mathbb{N}.$$

Wir nehmen an, die Folge $(l(u_j))_{j \in \mathbb{N}}$ sei Minimalfolge des zu (MC) äquivalenten Minimierungsproblems

$$\lim_{j \rightarrow \infty} l(u_j) = \inf_{(\chi, u) \in \mathcal{A}} l(u) \quad (2.19)$$

mit $\mathcal{A} := \{(\chi, u) \in \mathcal{H} \times U \mid a_\chi(u, v) = l(v) \forall v \in U\}$. Es stellt sich nun die Frage, ob das Infimum in (2.19) in einem Punkt $(\chi^*, u^*) \in \mathcal{A}$ angenommen wird. An dieser Stelle interessieren wir uns lediglich für die Folge von Designfunktionen $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Die Beschränktheit folgt direkt aus der Definition des Raumes \mathcal{H} :

$$\|\chi_j\|_\infty \leq 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Mit Lemma 2.3.4 folgt die Existenz einer Teilfolge, wiederum bezeichnet mit $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und eines Designs $\chi^* \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$\chi_j \rightharpoonup^* \chi^* \text{ in } L^\infty(\Omega). \quad (2.21)$$

Dies sichert die Existenz eines Grenzwertes χ^* im Raum $L^\infty(\Omega)$. Es bleibt zu klären, ob χ^* eine zulässige Designfunktion ist, sprich: $\chi^* \in \mathcal{H}$? Dazu betrachten wir folgendes Lemma (siehe [30] Theorem 3).

Lemma 2.6.1

Sei $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $v_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$v_j \rightharpoonup^* v \text{ in } L^\infty(\Omega) \quad , \quad v_j(x) \in K \text{ f.ü. } \forall j \in \mathbb{N}$$

und $K \subset \mathbb{R}$ einer beliebigen Menge. Dann gilt

$$v(x) \in \overline{\text{conv}}(K) \text{ f.ü.}$$

mit $\overline{\text{conv}}(K)$, der abgeschlossenen konvexen Hülle von K .

Umgekehrt sei $v \in L^\infty(\Omega)$ mit $v(x) \in \overline{\text{conv}}(K)$ f.ü. . Dann existiert eine Folge $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft

$$v_j \rightharpoonup^* v \text{ in } L^\infty(\Omega) \quad , \quad v_j(x) \in K \text{ f.ü. } \forall j \in \mathbb{N}$$

In unserem Problem ist K die Menge $\{0, 1\}$ und es gilt für die abgeschlossene konvexe Hülle

$$\overline{\text{conv}}(K) = [0, 1] .$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Grenzwert χ^* von schwach* konvergenten Folgen von Designfunktionen $(\chi_{j'})_{j' \in \mathbb{N}}$ den Raum zulässiger Designs \mathcal{H} verlassen kann. Es handelt sich dann nicht mehr um eine charakteristische diskretwertige Funktion $\chi^* : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, welche angibt, an welcher Stelle sich Material befindet, sondern um eine Funktion $\rho^* : \Omega \rightarrow [0, 1]$. Diese wird häufig als Dichtefunktion bezeichnet.

Somit stellt sich heraus, dass das Problem (MC) schlecht gestellt ist, da es unter Umständen keine Lösung im Raum klassischer Designfunktionen \mathcal{H} besitzt. Einige Beispiele für Problemstellungen dieser Art finden sich in Kapitel 7 aber auch in [6]. Es gibt zwei unterschiedliche Ansätze, die Existenz einer Lösung zu sichern. Zum Einen kann man den Raum \mathcal{H} der zulässigen Designfunktionen durch zusätzliche Nebenbedingungen weiter einschränken. Dies kann z.B. durch Hinzufügen einer einzigen Nebenbedingung, einer so genannten Perimeter-Nebenbedingung, erreicht werden (siehe Abschnitt 2.6.2). Diese beschränkt den Rand der Struktur, sowohl den äußeren Rand als auch die inneren Ränder und sorgt so dafür, dass sich keine Mikrostrukturen in der Lösung ausbilden (siehe z.B. [21]). Oder aber es werden sogenannte Slope-Constraints eingeführt. Diese begrenzen die Norm des Gradienten der Designfunktion bezüglich des Ortes x . Dies verhindert ebenfalls eine Ausbildung von Mikrostrukturen, ist jedoch in der Praxis mit einer hohen Zahl zusätzlicher Nebenbedingungen verbunden (siehe z.B. [23] und [7]).

Diese Ansätze haben die Gemeinsamkeit, dass sie den Raum \mathcal{H} durch Restriktionen *verkleinern*. Die zunächst hier vorgestellte Homogenisierungsmethode jedoch *erweitert* den Raum um zusätzliche Lösungen. Dieses Vorgehen wird Relaxation genannt.

2.6.1 Die Homogenisierungsmethode

Wir führen zunächst einige Begrifflichkeiten ein, welche es uns ermöglichen werden, den Begriff der H-Konvergenz zu fassen (siehe [2] S.77). Sei $\mathcal{M}^2 \subset \mathbb{R}^{d \times d}$ der Raum der symmetrischen Tensoren zweiter Ordnung. Des Weiteren sei $\mathcal{M}^4 \subset \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$ der Raum der symmetrischen Tensoren vierter Ordnung

$$\mathcal{M}^4 = \{E = (E_{ijkl})_{1 \leq i,j,k,l \leq d} \mid E_{ijkl} = E_{klij} = E_{jikl} = E_{ijlk}\} . \quad (2.22)$$

Seien $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ und $\alpha\beta \leq 1$. Wir definieren den Raum \mathcal{E} wie folgt

$$\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{M}^4 \mid \xi E \xi \geq \alpha \|\xi\|^2 \text{ und } \xi E^{-1} \xi \geq \beta \|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in \mathcal{M}^2\} . \quad (2.23)$$

Man beachte, dass der Materialtensor E in (2.2) ebenfalls in diesem Raum liegt. Daher sprechen wir auch vom Raum zulässiger Materialtensoren \mathcal{E} . Die Bedingung $\xi E \xi \geq \alpha \|\xi\|^2$ mit $\alpha > 0$ entspricht der Koerzivität der Materialtensoren. Ein Materialtensor der Form $\chi(x)E$ wie in (2.12) ist jedoch nicht notwendigerweise koerziv. Die Koerzivität geht an den Stellen verloren, an denen Löcher in der Struktur auftauchen. Daher betrachtet man üblicherweise eine etwas abgewandelte Definition möglicher Materialtensoren $E(\chi)$ als in (2.12)

$$E(\chi) := \chi A + (1 - \chi)B . \quad (2.24)$$

Die Materialtensoren A und B sind zwei unterschiedlich elastischen Materialien zugehörig. Meist befindet sich an den Stellen x mit $\chi(x) = 0$ ein im Vergleich zu A sehr nachgiebiges Material B . Betrachtet man den Grenzfall eines unendlich nachgiebigen Materials, so stellt es weiterhin die Löcher in der Struktur dar.

Es folgt nun die Definition der H-Konvergenz, zugeschnitten auf das Randwertproblem (siehe [2] S.79).

Definition 2.6.2

Eine Folge $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ aus dem Raum zulässiger Materialtensoren \mathcal{E} konvergiert im homogenisierten Sinn, bzw. H-konvergiert in Zeichen $E_j \rightarrow^H E$, gegen einen homogenisierten Grenzwert $E \in \mathcal{E}$ genau dann, wenn für jede beliebige rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ die Folge u_j von Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} E_j \varepsilon(u_j) &= f && \text{in } \Omega \\ E_j \varepsilon(u_j) n &= t && \text{auf } \Gamma_t \\ u_j &= 0 && \text{auf } \Gamma_u \end{aligned}$$

folgende Bedingungen erfüllt:

- $u_j \rightharpoonup u$ schwach in U
- $E_j \varepsilon(u_j) \rightharpoonup E \varepsilon(u)$ schwach in $L^2(\Omega)^d$.

Dabei bezeichnet u die Lösung des homogenisierten Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} E\varepsilon(u) &= f && \text{in } \Omega \\ E\varepsilon(u)n &= t && \text{auf } \Gamma_t \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_u \end{aligned}$$

Die Definition der H-Konvergenz behandelt natürlich den allgemeinsten Fall mit beliebiger rechter Seite $f \in (L^2(\Omega))^d$. In unserer Problemstellung ist $f = 0$, da wir Volumenkräfte nicht berücksichtigen.

Der folgende Satz liefert die gewünschte Eigenschaft, die Kompaktheit des Raumes \mathcal{E} bezüglich H-konvergenter Folgen (siehe [2] S.33ff).

Satz 2.6.3

Sei $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Materialtensoren mit $E_j \in \mathcal{E}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Teilfolge, ebenfalls mit $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ bezeichnet, und ein homogenisierter Tensor $E \in \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft

$$E_j \rightarrow^H E$$

Auf Grund der Koerzitivität der zulässigen Materialtensoren $E \in \mathcal{E}$ besitzt die Gleichung

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) E(\chi) \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Gamma_t} tv \, d\Gamma \quad \forall v \in U$$

für alle $\chi \in \mathcal{H}$ genau eine Lösung $u(\chi) \in U$, welche lediglich vom Design abhängt (siehe Kapitel 3). Somit erhalten wir ein neues, allgemeineres Minimum-Compliance-Problem. Wir suchen nach einer optimalen Verteilung zweier Materialien mit den Tensoren A und B im Gebiet Ω

$$\inf_{\chi \in \mathcal{H}} l(u(\chi)) . \quad (2.25)$$

Auch dieses Problem besitzt im Raum \mathcal{H} in der Regel keine Lösung. Daher werden wir nun mit Hilfe der H-Konvergenz den Raum zulässiger Designs \mathcal{H} relaxieren. Mit \mathcal{CD} (siehe [2] S. 274) bezeichnen wir den Raum der sogenannten Komposit-Designs

$$\mathcal{CD} = \{(\rho, E) \in L^\infty(\Omega; [0, 1] \times \mathcal{M}^4) \mid \exists \chi_j \text{ mit } E(\chi_j) \rightarrow^H E \text{ und } \chi_j \rightharpoonup^* \rho\} . \quad (2.26)$$

Das Optimierungsproblem (2.25) wird zu

$$\inf_{(\rho, E) \in \mathcal{CD}} l(u(\rho, E)) , \quad (2.27)$$

mit $u(\rho, E)$ der Lösung der Gleichung

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) E \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Gamma_t} tv \, d\Gamma \quad \forall v \in U .$$

Der nun folgende Satz bestätigt, dass es sich bei Problem (2.27) um eine sinnvolle Relaxierung des Problems (2.25) handelt (siehe [2] S. 275 Theorem 4.1.7).

Satz 2.6.4

Das Minimierungsproblem (2.27) ist eine Relaxierung des Problems (2.25) im folgenden Sinne:

1. Es existiert mindestens ein Minimalpunkt des relaxierten Problems (2.27).
2. Jede Minimalfolge (bis auf eine Teilfolge) von klassischen Designs χ_j in (2.25) konvergiert schwach* in $L^\infty(\Omega)$ gegen eine Dichtefunktion ρ^* , und deren zugehörige Materialtensorfolge $E(\chi_j)$ H-konvergiert gegen einen Tensor E^* , so dass $(\rho^*, E^*) \in \mathcal{CD}$ ein Minimalpunkt von Problem (2.27) ist.
3. Umgekehrt gilt: Jeder Minimalpunkt $(\rho^*, E^*) \in \mathcal{CD}$ von (2.27) wird als Grenzwert einer Minimalfolge klassischer Designs χ_j angenommen, sprich

$$\chi_j \rightharpoonup^* \rho^* \text{ und } E(\chi_j) \rightarrow^H E^* .$$

Die Methode der Homogenisierung erlaubt es also, statt Problem (2.25) das Problem (2.27) zu betrachten. Letzteres besitzt stets eine Lösung in der erweiterten zulässigen Menge \mathcal{CD} . Jedes dieser Komposit-Designs kann als Grenzwert einer Folge von klassischen $\{0, 1\}$ -Designs verstanden werden. Sei ρ^* Lösung von (2.27). Aufgrund der H-Konvergenz der Folge von Materialtensoren $(E(\chi_j))_{j \in \mathbb{N}}$ existiert eine zugehörige Folge von Verschiebungen $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ (siehe Definition 2.6.2), für die gilt

$$u_j \rightharpoonup u \text{ schwach in } U \text{ und } E(\chi_j)\varepsilon(u_j) \rightharpoonup E\varepsilon(u) \text{ schwach in } L^2(\Omega)^d .$$

Da es sich bei $(E(\chi_j), u_j)$ um Lösungen der Randwertaufgabe handelt, gilt für den zugehörigen Zielfunktionswert

$$l(u_j) = \int_{\Omega} \varepsilon(u_j) E(\chi_j) \varepsilon(u_j) \, dx \quad \forall j \in \mathbb{N} .$$

Somit konvergiert die Folge von Zielfunktionswerten $(l(u_j))_{j \in \mathbb{N}}$ gegen den Zielfunktionswert des relaxierten Problems

$$l(u_j) \rightarrow l(u) ,$$

und wir können die Gleichheit der Optimalwerte von Problem (2.25) und (2.27) folgern:

$$l(u(\rho^*)) = \min_{(\rho, E) \in \mathcal{CD}} l(u(\rho, E)) = \inf_{\chi \in \mathcal{H}} l(u(\chi)) . \quad (2.28)$$

Für die in diesem Abschnitt vorgestellten Resultate ist es von entscheidender Bedeutung, dass mit $E(\chi)$ für alle $\chi \in \mathcal{H}$ stets ein koerziver Materialtensor definiert wird. Dies wird durch den Verzicht auf Löcher in den zulässigen Strukturen erreicht. Diese werden statt dessen mit einem sehr weichen (nachgiebigen) Material mit Tensor B gefüllt. Es muss darauf hingewiesen werden, dass die hier vorgestellten Aussagen für das ursprüngliche Problem (MC) (mit $B = 0$) nicht gelten, da diese die Voraussetzung der Koerzitivität nicht erfüllen.

2.6.2 Perimeter-Kontrolle

In diesem Abschnitt stellen wir die Perimeter-Kontrolle als ein Beispiel einer restriktiven Methode vor. Anstatt die Menge zulässiger Designfunktionen zu relaxieren, werden wir nun die Existenz einer Lösung durch Hinzufügen einer Perimeter-Nebenbedingung erzwingen. Wir definieren zunächst die totale Variation (siehe [21]) einer Funktion $\chi \in L^1(\Omega)$ als

$$TV(\chi) = \sup_{\varphi} \left\{ \int_{\Omega} \chi \operatorname{div} \varphi \, dx \mid \varphi \in C_0^1(\Omega), \varphi(x) \in B(1) \forall x \in \Omega \right\} ,$$

mit $B(1)$, der Einheitskugel. Der Perimeter, sprich der Umfang einer messbaren Menge Ω_{mat} ist dann (siehe [21])

$$P(\Omega_{mat}) := TV(\chi_{\Omega_{mat}}) .$$

Wir fügen nun Problem (MC) eine Perimeter-Nebenbedingung hinzu und legen eine strikt positive Untergrenze $\epsilon > 0$ fest.

Problem 2.6.5 (Minimum Compliance mit Perimeterkontrolle (MCP_{ϵ}))

Finde $(\chi, u) \in \mathcal{H}_{\epsilon} \times U$ mit

$$\begin{aligned} & \min_{\chi \in \mathcal{H}_{\epsilon}, u \in U} l(u) \\ \text{u.d.N.: } & a_{\chi}(u, v) = l(v) \quad \forall v \in U \\ & TV(\chi) \leq c , \end{aligned} \tag{2.29}$$

mit $c > 0$ hinreichend gross. Der Raum zulässiger Designfunktionen ist nunmehr

$$\mathcal{H}_{\epsilon} = \left\{ \chi \in L^{\infty}(\Omega) \mid \int_{\Omega} \chi \, dx \leq V, \chi(x) \in \{\epsilon, 1\} \forall x \in \Omega \right\} .$$

Die hier eingeführte Untergrenze $\epsilon > 0$ verhindert, dass zulässige Strukturen Löcher aufweisen können. Diese werden statt dessen mit einem sehr nachgiebigen Material mit zugehörigem Materialtensor ϵE (vgl. (2.24)) gefüllt. Der folgende Satz sichert die Existenz einer Lösung von (MCP_{ϵ}) (siehe [21]).

Satz 2.6.6

Sei $(\chi_j, u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für (MCP_{ϵ}) . Dann existiert ein $(\chi^*, u^*) \in \mathcal{H}_{\epsilon} \times U$ und eine Teilfolge wiederum bezeichnet mit $(\chi_j, u_j)_{j \in \mathbb{N}}$, so dass

$$\chi_j \rightarrow \chi^* \text{ in } L^1(\Omega)$$

und

$$u_j \rightarrow u^* \text{ in } U ,$$

und (χ^*, u^*) Minimalpunkt ist.

Bemerkung 2.6.7 Für die Beschränktheit der Folge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ wird die Koerzivität der Bilinearform $a_\chi(u, v)$ für alle χ benötigt. Aus diesem Grund kann auf die untere Schranke $\epsilon > 0$ für den Beweis von Satz 2.6.6 nicht verzichtet werden.

Wie Satz 2.6.6 zeigt, sichert die zusätzliche Perimeternebenbedingung nicht nur die Existenz einer Lösung $\chi^* \in \mathcal{H}_\epsilon$ sondern auch die starke Konvergenz einer Minimalfolge

$$\chi_j \rightarrow \chi^* \text{ in } L^1(\Omega) .$$

Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, ist es sonst nicht möglich, die starke Konvergenz einer Folge $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von relaxierten Designfunktionen zu beweisen ohne weitere Einschränkungen zu treffen.

Kapitel 3

Die Formulierung als Sattelpunktproblem

In diesem Kapitel stellen wir eine Sattelpunktformulierung des Problems (MCR) vor. Es handelt sich dabei um die relaxierte Version des Problems (MC). Wir werden sehen, dass dieses Problem stets eine Lösung besitzt. Des Weiteren zeigen wir, wann diese eindeutig ist. Letztlich wird die Konvergenz der FE-Methode für (MCR) bewiesen werden (siehe [19] und [22]). Außerdem werden wir Optimalitätsbedingungen an das Design ρ formulieren und den Zusammenhang der Probleme (MCR) und (MCR_ϵ) beleuchten.

3.1 Existenz und Eindeutigkeit

Wie bereits eingangs erwähnt, relaxieren wir das Problem (MC), indem wir den Raum zulässiger Designfunktionen \mathcal{H} wie folgt erweitern (vgl. (2.15))

$$\bar{\mathcal{H}} = \left\{ \rho \in L^\infty(\Omega) \mid \int_{\Omega} \rho \, dx \leq V, \rho(x) \in [0, 1] \forall x \in \Omega \right\}. \quad (3.1)$$

Man beachte, dass wir Designfunktionen aus dem Raum \mathcal{H} immer mit χ bezeichnen, da sie charakteristische Funktionen darstellen. Funktionen aus $\bar{\mathcal{H}}$ werden stets mit ρ bezeichnet, um zu verdeutlichen, dass es sich hierbei um eine Art Dichtefunktion handelt.

Der ρ zugeordnete Materialtensor $E(\rho)$ hat die Gestalt (vgl. (2.12))

$$E(\rho) = \rho(x) E. \quad (3.2)$$

Es ist uns nun möglich, das relaxierte Minimum-Compliance Problem (MCR) aufzustellen:

Problem 3.1.1 (MCR)

Finde $(\rho, u) \in \overline{\mathcal{H}} \times U$ mit

$$\begin{aligned} & \min_{\rho \in \overline{\mathcal{H}}, u \in U} l(u) \\ \text{u.d.N.: } & a_\rho(u, v) = l(v) \quad \forall v \in U, \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit $a_\rho(u, v) = \int_{\Omega} \varepsilon(u) \rho E \varepsilon(v) dx$. Die als nächstes vorgestellte Sattelpunktformulierung des Problems (MCR) beruht im Wesentlichen auf folgendem Charakterisierungssatz (siehe [8] S.34).

Satz 3.1.2

Sei $a_\rho : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ mit U aus (2.6) für alle $\rho \in \overline{\mathcal{H}}$ eine positiv semidefinite Bilinearform, sprich es sei $a_\rho(u, u) \geq 0$ für alle $\rho \in \overline{\mathcal{H}}$ und alle $u \in U$. Dann besitzt das Funktional

$$J(v) := \frac{1}{2} a_\rho(v, v) - l(v) \quad (3.4)$$

für festes ρ ein globales Minimum in u genau dann, wenn

$$a_\rho(u, v) = l(v) \quad \forall v \in U \quad (3.5)$$

gilt.

Falls $a_\rho(u, u) > 0$ für alle $u \in U, u \neq 0$ gilt, dann besitzt das Funktional J höchstens ein lokales Minimum.

Beweis: Es seien $u, v \in U$ und $t \in \mathbb{R}$. Des Weiteren sei $\rho \in \overline{\mathcal{H}}$ beliebig aber fest. Es gilt

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \frac{1}{2} a_\rho(u + tv, u + tv) - l(u + tv) \\ &= J(u) + t[a_\rho(u, v) - l(v)] + \frac{1}{2} t^2 a_\rho(v, v) \end{aligned} \quad (3.6)$$

aufgrund der Linearität in den Argumenten von $a(\cdot, \cdot)$ und $l(\cdot)$. Erfüllt u die Bedingung (3.5), dann folgt mit $t = 1$

$$\begin{aligned} J(u + v) &= J(u) + \frac{1}{2} a_\rho(v, v) \quad \forall v \in U \\ &\geq J(u). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Somit ist u ein globales Minimum des Funktionals J .

Umgekehrt sei u ein lokales Minimum des Funktionals J . Dann muss die Richtungsableitung¹ der Funktion J in beliebige Richtung v an der Stelle u verschwinden. Mit Hilfe von

¹Die Richtungsableitung einer Funktion F an der Stelle x in Richtung v ist (siehe [11])

$$F'(x; v) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{F(x + tv) - F(x)}{t}$$

(3.6) berechnen wir die Richtungsableitung $J'(u; v)$ an der Stelle u in Richtung v

$$J'(u; v) = a_\rho(u, v) - l(v)$$

und erkennen, dass u Bedingung (3.5) erfüllt.

Für den Fall, dass es sich bei a_ρ um eine positiv definite Bilinearform handelt, folgt aus (3.7)

$$\begin{aligned} J(u+v) &= J(u) + \frac{1}{2}a_\rho(v, v) \quad \forall v \in U \\ &> J(u) \quad \text{falls } v \neq 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Dann ist u also ein eindeutiges Minimum. ■

Bemerkung 3.1.3 Sei $u \in U$, und u erfülle Gleichung (3.5) für festes ρ . Dann gilt für den zugehörigen Funktionswert

$$J(u) = -\frac{1}{2} l(u) . \tag{3.8}$$

Dies entspricht also der negativen Compliance zur Struktur ρ .

Der Charakterisierungssatz 3.1.2 und obige Bemerkung ermöglichen es uns, Problem (MCR) umzuformulieren. Wir definieren das Funktional $J : \overline{\mathcal{H}} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ der totalen potentiellen Energie wie folgt:

$$J(\rho, u) = \frac{1}{2} a_\rho(u, u) - l(u) . \tag{3.9}$$

Des Weiteren definieren wir das Funktional $\Phi : \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R}$, das dem Design ρ die zugehörige halbe negative Compliance zuordnet (siehe Bemerkung 3.1.3)

$$\Phi(\rho) = \inf_{u \in U} J(\rho, u) .$$

Satz 3.1.4

Das Problem (MCR) ist äquivalent zu

$$\sup_{\rho \in \overline{\mathcal{H}}} \Phi(\rho) \tag{3.10}$$

im folgenden Sinne:

- $\inf (MCR) = \sup \Phi(\rho)$
- (ρ, u) ist Optimum in (MCR) $\Rightarrow \rho$ ist Optimum in (3.10)
- ρ ist Optimum in (3.10) $\Rightarrow \exists u : (\rho, u)$ Optimum in (MCR)

Beweis: Es sei die Hilfsfunktion $c : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wie folgt definiert:

$$c(\rho) := \inf_{u \in U(\rho)} l(u) \quad (3.11)$$

mit $U(\rho) = \{u \in U \mid a_\rho(u, v) = l(v) \quad \forall v \in U\}$, wobei nach Konvention der Funktionswert $c(\rho) = \infty$ ist falls $U(\rho) = \emptyset$ gilt. Man beachte, dass die Funktion c auf der Menge der in (MCR) zulässigen Punkte identisch ist mit l , denn für alle $u \in U(\rho)$ ist der Funktionswert $l(u)$ konstant und gleich dem Infimum aufgrund folgender Tatsache

$$l(u_1) = a_\rho(u_1, u_2) = a_\rho(u_2, u_1) = l(u_2) ,$$

mit $u_1, u_2 \in U(\rho)$. Lediglich den Designfunktionen ρ , für die keine zulässige Verschiebung u existiert, wird ein Zielfunktionswert von $c(\rho) = \infty$ zugewiesen. Somit ist folgendes Problem trivialerweise äquivalent zu (MCR) :

$$\min_{\rho \in \mathcal{H}} c(\rho) .$$

Zunächst sei $\hat{\rho}$ so gewählt, dass $U(\hat{\rho}) \neq \emptyset$, d.h. es existiere ein $\hat{u} \in U$ mit $a_{\hat{\rho}}(\hat{u}, v) = l(v) \quad \forall v \in U$. Dann folgt aufgrund des Charakterisierungssatzes und Bemerkung 3.1.3

$$\min_{u \in U} J(\hat{\rho}, u) = J(\hat{\rho}, \hat{u}) = -\frac{1}{2} l(\hat{u}) ,$$

und somit $c(\hat{\rho}) = -2\Phi(\hat{\rho})$.

Letztlich sei $\hat{\rho}$ ein Design, welches die vorgegebene Last t nicht tragen kann, sprich $U(\hat{\rho}) = \emptyset$. Dann gilt nach Konvention $c(\hat{\rho}) = \infty$.

Für eine solche Designfunktion $\hat{\rho}$ ist es stets möglich, eine Folge von Verschiebungen \hat{u}_j zu finden, für die

$$a_{\hat{\rho}}(\hat{u}_j, \hat{u}_j) = 0$$

ist und gleichzeitig

$$l(\hat{u}_j) \rightarrow \infty$$

für $j \rightarrow \infty$ gilt. Daher gilt für die Funktion Φ

$$\Phi(\hat{\rho}) = \inf_{u \in U} J(\hat{\rho}, u) = -\infty .$$

Dies zeigt, dass $c(\rho) = -2\Phi(\rho)$ gilt für alle $\rho \in \overline{\mathcal{H}}$. Zusammen mit der Tatsache, dass

$$\min c(\rho) = -\max -c(\rho) = -\max 2\Phi(\rho)$$

gilt die Aussage des obigen Satzes. ■

Betrachte nun

Problem 3.1.5 (Das Sattelpunktproblem (SP))

Finde $(\rho^*, u^*) \in \overline{\mathcal{H}} \times U$ mit

$$J(\rho, u^*) \leq J(\rho^*, u^*) \leq J(\rho^*, u) \quad \forall (\rho, u) \in \overline{\mathcal{H}} \times U . \quad (3.12)$$

Mit Hilfe der Dualitätstheorie (siehe [12] bzw. [19] Theorem 2.1) erhalten wir die gewünschte Sattelpunktformulierung.

Satz 3.1.6

Es existiere eine Lösung des Sattelpunktproblems (SP). Dann gilt: Das Paar (ρ^, u^*) löst (SP) genau dann, wenn ρ^* eine Lösung von Problem (3.10) ist*

$$\sup_{\rho \in \overline{\mathcal{H}}} \Phi(\rho) ,$$

und u^* eine Lösung des dualen Problems ist

$$\inf_{u \in U} \Psi(u) ,$$

mit $\Psi(u) := \sup_{\rho \in \overline{\mathcal{H}}} J(\rho, u)$.

Man beachte, dass somit sämtliche Sätze in diesem Kapitel ebenso für das Problem (MCR) gelten. Der nächste Satz sichert die Existenz von Lösungen zu Problem (SP) (siehe [19]).

Satz 3.1.7

Es existiert mindestens eine Lösung $(\rho^, u^*) \in \overline{\mathcal{H}} \times U$ zu Problem (SP).*

Es stellt sich nun die Frage nach der Eindeutigkeit einer gefundenen Sattelpunktlösung. Aufgrund der Tatsache, dass die Funktion J bezüglich ρ lediglich linear und somit nicht strikt konkav ist, kann die Eindeutigkeit von ρ^* nicht erwartet werden. Es bleibt die Frage der Eindeutigkeit von u^* . Ungleichung (3.7) im Beweis des Satzes 3.1.2 hat bereits gezeigt, dass das Minimum ohne weitere Voraussetzungen an die Bilinearform a nicht notwendigerweise eindeutig sein wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn eine Richtung $v \neq 0$ existiert für die dennoch $a_\rho(v, v) = 0$ gilt. Entscheidend ist das Gebiet $\Omega \setminus \Omega_{mat}$. Mit Ω_{mat} bezeichnen wir auch hier das Teilgebiet von Ω , in dem Material vorhanden ist. Ein Punkt x liegt in Ω_{mat} , falls $\rho(x) > 0$ ist. Für $x \in \Omega \setminus \Omega_{mat}$ ist $E(\rho(x)) = \rho(x)E = 0 \cdot E = 0$ für alle $x \in \Omega \setminus \Omega_{mat}$. Somit kann v in $\Omega \setminus \Omega_{mat}$ beliebige Werte annehmen (solange v weiter in U liegt). Es genügt die Forderung $v(x) = 0$ in Ω_{mat} . Anschaulich bedeutet dies, dass an den Stellen, in denen Löcher in der Struktur ρ vorhanden sind, die Verschiebungsfunktion beliebig (solange $v \in U$) definiert sein kann. Aus diesem Grund wird stets eine Untergrenze $0 < \epsilon < 1$ eingeführt, um die Koerzitivität von a_ρ für alle zulässigen Strukturen zu gewährleisten. Der Raum zulässiger Dichtefunktionen ist nun (vgl. (3.1))

$$\overline{\mathcal{H}}_\epsilon = \left\{ \rho \in L^\infty(\Omega) \mid \int_{\Omega} \rho dx \leq V, \rho(x) \in [\epsilon, 1] \forall x \in \Omega \right\} . \quad (3.13)$$

Wir formulieren das zugehörige Sattelpunktproblem analog zu (SP)

Problem 3.1.8 (Das Sattelpunktproblem (SP_ϵ))

Finde $(\rho^*, u^*) \in \overline{\mathcal{H}}_\epsilon \times U$ mit

$$J(\rho, u^*) \leq J(\rho^*, u^*) \leq J(\rho^*, u) \quad \forall (\rho, u) \in \overline{\mathcal{H}}_\epsilon \times U . \quad (3.14)$$

Dies sichert uns die Koerzitivität von a_ρ für alle $\rho \in \overline{\mathcal{H}}_\epsilon$ und wir erhalten mit Satz 3.1.2 die gewünschte Eindeutigkeit der Lösung u^* , die wir im folgenden Satz formulieren (siehe [19]).

Satz 3.1.9

Es seien $(\rho_1^*, u_1^*) \in \overline{\mathcal{H}}_\epsilon \times U$ und $(\rho_2^*, u_2^*) \in \overline{\mathcal{H}}_\epsilon \times U$ Sattelpunkte von Problem (SP_ϵ). Dann gilt

$$u_1^* = u_2^* .$$

Der nächste Satz fasst die obigen Ergebnisse zusammen und beschreibt die Eigenschaften der Lösungsmenge von (SP) bzw. (SP_ϵ) (siehe [20] Theorem 2.1).

Satz 3.1.10

Die Lösungsmenge zu Problem (SP) hat die Gestalt $\overline{\mathcal{H}}^* \times U^* \subset \overline{\mathcal{H}} \times U$. Dabei sind die Mengen $\overline{\mathcal{H}}^*$ und U^* nichtleer, konvex, beschränkt und abgeschlossen in $L^\infty(\Omega)$ bzw. $(H^1(\Omega))^d$. Für das Problem (SP_ϵ) ist U^* eine einpunktige Menge $U^* = \{u^*\}$.

Mit Hilfe der FE-Methode (siehe Abschnitt 2.4) diskretisieren wir das Problem (SP). Es sei $\overline{\mathcal{H}}_h$, eine Teilmenge von $\overline{\mathcal{H}}$, wie folgt definiert (vgl. (2.17))

$$\overline{\mathcal{H}}_h = \left\{ \rho_h \in \mathbb{R}^e \mid \sum_{i=1}^e [\rho_h]_i \leq \frac{V}{\text{meas } \Omega} e, [\rho_h]_i \in [0, 1] \forall i = 1, \dots, e \right\} . \quad (3.15)$$

Sei ausserdem $U_h \subset U$ ein klassischer, konformer Ansatzraum (siehe [8] Kapitel 2) bezüglich den Verschiebungsfunktionen u , wie er üblicherweise zur Lösung des Randwertproblems herangezogen wird. Dann hat das diskretisierte Sattelpunktproblem (SP_h) die folgende Gestalt

Problem 3.1.11 (Das diskretisierte Sattelpunktproblem (SP_h))

Finde $(\rho_h^*, u_h^*) \in \overline{\mathcal{H}}_h \times U_h$ mit

$$J(\rho_h, u_h^*) \leq J(\rho_h^*, u_h^*) \leq J(\rho_h^*, u_h) \quad \forall (\rho_h, u_h) \in \overline{\mathcal{H}}_h \times U_h . \quad (3.16)$$

Wir erhalten folgendes Konvergenzresultat für eine Folge von diskreten Sattelpunkten (siehe [20] Theorem 3.1).

Satz 3.1.12

Sei $((\rho_h^*, u_h^*))_{h>0}$ eine Folge von Sattelpunkten mit $(\rho_h^*, u_h^*) \in \overline{\mathcal{H}}_h^* \times U_h^*$ für die Gitterweite $h > 0$ und $h \rightarrow 0^+$. Dann existiert eine Teilfolge, wiederum bezeichnet mit $((\rho_h^*, u_h^*))_{h>0}$, und ein Grenzwert $(\rho^*, u^*) \in \overline{\mathcal{H}}^* \times U^*$, so dass

$$\rho_h^* \rightharpoonup^* \rho^* \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad \text{und} \quad (3.17)$$

$$u_h^* \rightharpoonup u^* \quad \text{in } (H^1(\Omega))^d. \quad (3.18)$$

Für $\rho_h \in \overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon}$ konvergiert die gesamte Folge $(u_h^*)_{h>0}$ stark in $(H^1(\Omega))^d$ gegen den eindeutigen Grenzwert $u^* \in U^*$.

Bemerkung 3.1.13 Die Teilfolge der diskretisierten Dichtefunktionen $(\rho_h^*)_{h>0}$ konvergiert lediglich schwach* gegen ρ^*

$$\int_{\Omega} \varphi \rho_h^* dx \rightarrow \int_{\Omega} \varphi \rho^* dx \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega).$$

Sei $\varphi = \chi_D$ nun die charakteristische Funktion bezüglich einer messbaren Teilmenge $D \subset \Omega$. Dann folgt aus der obigen Konvergenz

$$\int \rho_h^* dD \rightarrow \int \rho^* dD.$$

Man spricht von einer Konvergenz im Mittel. In jeder messbaren Teilmenge $D \subset \Omega$ konvergiert also das Volumen des in dieser Menge verwendeten Materials. Dies kann allerdings durchaus bedeuten, dass eine Folge von immer heftiger oszillierenden Funktionen $(\rho_h^*)_{h>0}$ gegen eine glatte Dichtefunktion schwach* konvergiert.

3.2 Optimalitätsbedingungen

In diesem Abschnitt widmen wir uns Optimalitätsbedingungen, wie sie bereits in [20] für Problem (MCR_ϵ) bewiesen wurden, und erweitern das Resultat (siehe Satz 3.2.7) auf Problem (MCR) . Dazu werden wir zunächst das sogenannte Maximumprinzip für $\rho \in \overline{\mathcal{H}}$ beweisen, welches für $\rho \in \overline{\mathcal{H}}_\epsilon$ bereits in [10] gezeigt wurde. Daraufhin definieren wir drei Teilmengen von Ω . Mit ihnen wird es möglich sein, notwendige und sogar hinreichende Optimalitätsbedingungen formulieren zu können. Mit Hilfe dieser Bedingungen kann die starke Konvergenz der Folge $(\rho_h^*)_{h>0}$ auf einem Teilgebiet ohne weitere Voraussetzungen gezeigt werden.

Das Maximumprinzip beschäftigt sich ursprünglich mit einer Lösung des Problems (MCR_ϵ) für $\rho \in \overline{\mathcal{H}}_\epsilon$ (siehe [10]). Wir werden jedoch die in Satz 3.1.6 gezeigte Äquivalenz der Probleme (SP) und (MCR) ausnutzen, um das Maximumprinzip für $\rho \in \overline{\mathcal{H}}$ zu beweisen.

Satz 3.2.1

Sei $(\rho^*, u^*) \in \overline{\mathcal{H}} \times U$ ein Sattelpunkt von (SP) . Dann erfüllen ρ^* und u^* das folgende Maximumprinzip:

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u^*) \rho E \varepsilon(u^*) dx \leq \int_{\Omega} \varepsilon(u^*) \rho^* E \varepsilon(u^*) dx \quad \forall \rho \in \overline{\mathcal{H}},$$

oder, anders formuliert,

$$a_{\rho^*}(u^*, u^*) = \max_{\rho \in \overline{\mathcal{H}}} a_{\rho}(u^*, u^*) .$$

Beweis: Der Sattelpunkt (ρ^*, u^*) erfüllt laut Definition folgende Ungleichungen

$$J(\rho, u^*) \leq J(\rho^*, u^*) \leq J(\rho^*, u) \quad \forall (\rho, u) \in \overline{\mathcal{H}} \times U . \quad (3.19)$$

Aus der linken Ungleichung folgt direkt

$$\frac{1}{2} a_{\rho}(u^*, u^*) - l(u^*) \leq \frac{1}{2} a_{\rho^*}(u^*, u^*) - l(u^*) \quad \forall \rho \in \overline{\mathcal{H}} .$$

und damit die Behauptung des Satzes

$$a_{\rho}(u^*, u^*) \leq a_{\rho^*}(u^*, u^*) \quad \forall \rho \in \overline{\mathcal{H}} .$$

■

Der nächste Satz beinhaltet die Existenz eines Lagrange-Multiplikators. Dieser wird in der Definition der drei Teilmengen innerhalb der Optimalitätsbedingungen eine Rolle spielen. Wir geben den Beweis des folgenden Satzes daher kurz wieder (siehe [10]).

Satz 3.2.2

Falls das Maximum der Funktion

$$a_{\rho}(u^*, u^*) = \int_{\Omega} \varepsilon(u^*) E(\rho) \varepsilon(u^*) dx$$

in $\overline{\mathcal{H}}$ für festes $u^ \in U$ im Punkt ρ^* angenommen wird, dann existiert ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) E(\rho^*) \varepsilon(u) dx - \lambda \int_{\Omega} \rho^* dx \geq \int_{\Omega} \varepsilon(u) E(\rho) \varepsilon(u) dx - \lambda \int_{\Omega} \rho dx$$

für alle $\rho \in L^{\infty}(\Omega)$ mit $0 \leq \rho \leq 1$ gilt.

Beweis: Es folgt eine Beweisskizze. Wir definieren folgende Funktion

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) & : L^{\infty}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \Phi(\rho) & = \left(\int_{\Omega} \varepsilon(u^*) \rho E \varepsilon(u^*) dx, \int_{\Omega} \rho dx \right) . \end{aligned}$$

Sei G das Bild der Menge $\{\rho \in L^{\infty}(\Omega) \mid 0 \leq \rho(x) \leq 1 \forall x \in \Omega\}$ unter Φ . Dann ist G konvex, abgeschlossen und beschränkt in \mathbb{R}^2 . Zu ρ^* gehört der Punkt $P^0 = (a_{\rho^*}(u^*, u^*), \int_{\Omega} \rho^* dx)$. Wir wissen aufgrund des Maximumprinzips (Satz 3.2.1), dass $a_{\rho^*}(u^*, u^*)$ für alle Punkte ρ

mit $\int_{\Omega} \rho \, dx = V$ maximal ist. Somit liegt der Punkt P^0 auf dem Rand der Menge und es existiert eine Stützhyperebene an G durch P^0 . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei der Normalenvektor dieser Ebene $n = (1, -\lambda)^T$. Es folgt

$$P_1^0 - \lambda P_2^0 \geq P_1 - \lambda P_2 \quad \forall (P_1, P_2) \in G .$$

Durch Einsetzen der Definition der Punkte P und P^0 und Zusammenfassen der Integralterme erhalten wir

$$\int_{\Omega} \rho^* (\varepsilon(u) E \varepsilon(u) - \lambda) \, dx \geq \int_{\Omega} \rho (\varepsilon(u) E \varepsilon(u) - \lambda) \, dx \quad (3.20)$$

für alle $\rho \in L^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \rho(x) \leq 1$. ■

Bemerkung 3.2.3 Die Ungleichung (3.20) impliziert folgende Bedingungen an ein optimales ρ^* :

$$\begin{aligned} W(u^*(x)) < \lambda &\Rightarrow \rho^*(x) = 0 \\ W(u^*(x)) > \lambda &\Rightarrow \rho^*(x) = 1 \end{aligned}$$

mit $W(u^*(x)) = \varepsilon(u^*(x)) E \varepsilon(u^*(x))$. Diese Eigenschaft wird das lokale Maximumprinzip genannt.

Wir definieren nun drei Teilmengen von Ω , mit deren Hilfe wir den nächsten Satz formulieren werden (siehe [20]). Sei $u^* \in U^*$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\Omega_l(u^*, \lambda) := \{x \in \Omega \mid W(u^*) < \lambda\} , \quad (3.21)$$

$$\Omega_u(u^*, \lambda) := \{x \in \Omega \mid W(u^*) > \lambda\} , \quad (3.22)$$

und schließlich

$$\Omega_{oc}(u^*, \lambda) := \{x \in \Omega \mid W(u^*) = \lambda\} . \quad (3.23)$$

Satz 3.2.4

Ein Punkt $(\rho^*, u^*) \in \overline{\mathcal{H}} \times U$ ist genau dann eine Lösung von (SP), d.h. ein Sattelpunkt von J , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \rho^* = 0$ f.ü. in $\Omega_l(u^*, \lambda)$ und $\rho^* = 1$ f.ü. in $\Omega_u(u^*, \lambda)$ und
2. $a_{\rho^*}(u^*, v) = l(v) \quad \forall v \in U$.

Das nun folgende Lemma wurde für den Fall $\rho \in \overline{\mathcal{H}}_\epsilon$ erstmalig in [20] bewiesen. Wir werden zeigen, dass sich die Aussage des Lemmas verallgemeinern lässt auf das Problem (SP) mit $\rho \in \overline{\mathcal{H}}$.

Lemma 3.2.5

Sei $\overline{\mathcal{H}}^* \times U^*$ die Lösungsmenge zu Problem (SP). Dann ist entweder $\overline{\mathcal{H}}^* = \{\rho^*\}$ und $\rho^*(x) \in \{0, 1\}$ f.ü. in Ω , oder λ aus Satz 3.2.4 ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\overline{\mathcal{H}}^*$ eine Lösung ρ^* enthält, welche auf einer messbaren Menge M Zwischenwerte annimmt. Wir untersuchen nun die Eindeutigkeit von λ bezüglich zweier beliebiger Verschiebungen u_1^* und u_2^* aus U^* mit $u_2^* = u_1^* + \delta u$. Es gilt

$$J(\rho^*, u_2^*) = J(\rho^*, u_1^* + \delta u) = J(\rho^*, u_1^*) + \frac{1}{2} a_{\rho^*}(\delta u, \delta u) + a_{\rho^*}(u_1^*, \delta u) - l(\delta u) .$$

Dabei verschwindet der Term $a_{\rho^*}(u_1^*, \delta u) - l(\delta u)$ aufgrund des Charakterisierungssatzes 3.1.2 und der Tatsache, dass $\delta u = u_2^* - u_1^*$ in U liegt. Da sowohl (ρ^*, u_1^*) als auch (ρ^*, u_2^*) Sattelpunkte von Problem (SP) sind, gilt $J(\rho^*, u_1^*) = J(\rho^*, u_2^*)$. Wir können daher folgern, dass

$$a_{\rho^*}(\delta u, \delta u) = 0 \tag{3.24}$$

gelten muss. Für den Integralterm $a_{\rho}(u, u)$ gilt stets

$$\rho \varepsilon(u) E \varepsilon(u) \geq 0 \quad \text{f.ü. in } \Omega$$

Somit erhalten wir mit (3.24)

$$\rho^* \varepsilon(\delta u) E \varepsilon(\delta u) = 0 \quad \text{f.ü. in } \Omega$$

Sei $x_0 \in M$, dann folgt $\rho^*(x_0) > 0$ und somit

$$\varepsilon(\delta u(x_0)) E \varepsilon(\delta u(x_0)) = 0 .$$

Da der Materialtensor als positiv definit vorausgesetzt wurde, folgt

$$\varepsilon(\delta u) = 0 \quad \text{f.ü. in } M.$$

Somit gilt für das Funktional $W(u_2^*)$

$$W(u_2^*) = W(u_1^* + \delta u) = W(u_1^*) + W(\delta u) + 2\varepsilon(\delta u) E \varepsilon(u_1^*) = W(u_1^*) \quad \text{f.ü. in } M .$$

Satz 3.2.4 sichert die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft 1. Die Punkte $x \in M$ liegen notwendigerweise in Ω_{oc} , und daher ist

$$W(u_1^*) = W(u_2^*) = \lambda$$

und λ somit eindeutig (bezüglich $u^* \in U^*$) definiert.

Als Nächstes wird die Eindeutigkeit von λ bezüglich zweier Designfunktionen ρ_1^* und ρ_2^* aus $\overline{\mathcal{H}}^*$ gezeigt. Dazu sei $u^* \in U^*$ beliebig aber fest. Die Punkte (ρ_1^*, u^*) und (ρ_2^*, u^*) sind somit Sattelpunkte von (SP) (siehe Satz 3.1.10). Des Weiteren nehmen wir wiederum an, dass ρ_1^* auf einer messbaren Menge M Zwischenwerte annimmt. Es sei λ_1 der zum Sattelpunkt

(ρ_1^*, u^*) und λ_2 der zu (ρ_2^*, u^*) gehörige Multiplikator aus Satz 3.2.4. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda_2 < \lambda_1$. Die Volumina der Strukturen ρ_1^* und ρ_2^* lassen sich mit Hilfe der Mengen $\Omega_l(u^*, \lambda_1)$, $\Omega_u(u^*, \lambda_1)$ und $\Omega_{oc}(u^*, \lambda_1)$ folgendermaßen beschreiben:

$$\int \rho_1^* dx = \int 0 dx_l(u^*, \lambda_1) + \int 1 dx_u(u^*, \lambda_1) + \int \rho_1^* dx_{oc}(u^*, \lambda_1) \quad (3.25)$$

sowie

$$\int \rho_2^* dx = \int \rho_2^* dx_l(u^*, \lambda_1) + \int \rho_2^* dx_u(u^*, \lambda_1) + \int \rho_2^* dx_{oc}(u^*, \lambda_1) . \quad (3.26)$$

Nach Definition (3.21) bzw. (3.22) und wegen $\lambda_2 < \lambda_1$ gelten die folgenden Inklusionen

$$\Omega_u(u^*, \lambda_1) \subset \Omega_u(u^*, \lambda_2)$$

und

$$\Omega_{oc}(u^*, \lambda_1) \subset \Omega_{oc}(u^*, \lambda_2) .$$

Somit lässt sich (3.26) schreiben als

$$\int \rho_2^* dx = \int \rho_2^* dx_l(u^*, \lambda_1) + \int 1 dx_u(u^*, \lambda_1) + \int 1 dx_{oc}(u^*, \lambda_1) . \quad (3.27)$$

Wir ziehen (3.25) von (3.27) ab und erhalten

$$\int \rho_2^* dx - \int \rho_1^* dx = \int (\rho_2^* - 0) dx_l(u^*, \lambda_1) + \int 1 - \rho_1^* dx_{oc}(u^*, \lambda_1) \geq \int |1 - \rho_1^*| dx_{oc}(u^*, \lambda_1) . \quad (3.28)$$

Dabei ist der letzte Term strikt grösser als Null aufgrund der Widerspruchsannahme der Menge M . Daher folgt $\int \rho_2^* dx > V$. Dies ist ein Widerspruch zu $\rho_2^* \in \overline{\mathcal{H}}$, und somit ist $\lambda_1 = \lambda_2$.

Es bleibt nun noch der Fall, dass kein ρ^* existiert, welches Zwischenwerte annimmt. Dann gilt für alle $\rho^* \in \overline{\mathcal{H}}^*$, dass $\rho^*(x) \in \{0, 1\}$ f.ü. in Ω . Seien ρ_1^* und ρ_2^* aus $\overline{\mathcal{H}}^*$ beliebig. Dann gilt aufgrund der Konvexität der Menge $\overline{\mathcal{H}}^*$, dass der Punkt $\rho^* = \frac{1}{2}\rho_1^* + \frac{1}{2}\rho_2^*$ in $\overline{\mathcal{H}}^*$ liegt. Dies widerspricht der Annahme, dass $\overline{\mathcal{H}}^*$ kein solches Element besitzt. Daher muss in diesem Fall die Menge aus genau einem Punkt ρ^* bestehen, mit $\rho^*(x) \in \{0, 1\}$ f.ü. in Ω . ■

Bemerkung 3.2.6 *Das obige Lemma liefert die Eindeutigkeit der Mengen Ω_{oc} , Ω_u und Ω_l für alle $\rho^* \in \overline{\mathcal{H}}^*$. Für den Fall, dass die Menge $\overline{\mathcal{H}}^*$ lediglich aus einem Punkt ρ^* besteht mit $\rho^*(x) \in \{0, 1\}$ f.ü. in Ω , definieren wir die Mengen $\Omega_u = \{x \in \Omega \mid \rho^*(x) = 1\}$ und $\Omega_l = \{x \in \Omega \mid \rho^*(x) = 0\}$. Die Menge Ω_{oc} ist eine Nullmenge. Somit sind Ω_l und Ω_u beide eindeutig (bis auf Nullmengen).*

Falls $\overline{\mathcal{H}}^$ aus mehr als nur einem Punkt besteht, wissen wir mit Lemma 3.2.5, dass λ eindeutig ist. Somit sind die Mengen Ω_u sowie Ω_l wie in (3.21) bzw. (3.22) definiert, ebenfalls eindeutig. In beiden Fällen definieren wir Ω_b als*

$$\Omega_b = \Omega_u \cup \Omega_l .$$

Der nächste Satz verbessert die Konvergenzaussage von Satz 3.1.12 bezüglich der Folge von Dichtefunktionen auf der Menge Ω_b . Dieser Satz wurde ebenfalls in (siehe [20]) für (SP_ϵ) gezeigt. Auf Grund der Verallgemeinerung von Lemma 3.2.5 gilt dieses Resultat nun auch für Problem (SP) .

Satz 3.2.7

Es seien $(\rho_h^*, u_h^*) \in \overline{\mathcal{H}}_h^* \times U_h^*$ Lösungen des diskretisierten Sattelpunktproblems (SP_h) . Ausserdem sei $(\rho^*, u^*) \in \overline{\mathcal{H}}^* \times U^*$ ein Sattelpunkt von Problem (SP) . Dann folgt

$$\|\rho_h^* - \rho^*\|_{L^1(\Omega_b)} \rightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0^+$. Es konvergiert nunmehr die gesamte Folge $(\rho_h^* |_{\Omega_b})_{h>0}$ stark in $L^1(\Omega_b)$ gegen $\rho^* |_{\Omega_b}$ mit $\rho^* \in \overline{\mathcal{H}}^*$.

Bemerkung 3.2.8 Dies bedeutet für die Folge von optimalen FE-Dichtefunktionen $(\rho_h^*)_{h>0}$, dass lediglich im Gebiet Ω_{oc} starke Oszillationen auftreten können.

3.3 Das Sattelpunktproblem (SP_j)

Der letzte Abschnitt in diesem Kapitel beschäftigt sich mit dem Zusammenhang der artverwandten Probleme (SP) und (SP_j) . In der Praxis der Topologieoptimierung wird stets auf das Problem (SP_j) zurückgegriffen (siehe Kapitel 7). Dabei werden Lösungen dieses Problems, welches streng genommen kein Topologieproblem ist, da Löcher in der Struktur nicht auftreten können, als Lösungen des wahren Topologieproblems (SP) angesehen.

Es sei

$$\overline{\mathcal{H}}_j := \left\{ \rho \in L^\infty(\Omega) \mid \int_{\Omega} \rho \, dx \leq V, \rho(x) \in [L_j, 1] \quad \forall x \in \Omega \right\}$$

ein Unterraum von $\overline{\mathcal{H}}$ mit der positiven Untergrenze $L_j > 0 \forall j \in \mathbb{N}$. Für die Folge von Untergrenzen gelte $\lim_{j \rightarrow \infty} L_j = 0$. Man beachte, dass beide Räume $\overline{\mathcal{H}}$ und $\overline{\mathcal{H}}_j$ aufgrund ihrer Definition konvex, abgeschlossen beschränkt und (falls V sinnvoll gewählt wurde) nichtleer sind.

Analog zu Problem (SP) lässt sich das Sattelpunktproblem (SP_j) mit $\rho_j \in \overline{\mathcal{H}}_j$ formulieren.

Problem 3.3.1 (Das Sattelpunktproblem (SP_j))

Finde $\rho_j^* \in \overline{\mathcal{H}}_j$ und $u_j^* \in U$ mit

$$J(\rho, u^*) \leq J(\rho^*, u^*) \leq J(\rho^*, u)$$

für alle $\rho \in \overline{\mathcal{H}}_j$ und $u \in U$.

Der Unterschied zwischen Problem (SP) und (SP_j) besteht darin, dass wir im zweiten Fall eine strikt positive Untergrenze L_j einführen. Sie bewirkt, dass für jedes Design $\rho_j \in \overline{\mathcal{H}}_j$ die

zugehörige Bilinearform $a_{\rho_j}(u, v)$ positiv definit ist. Somit besitzt das Problem für festes $\bar{\rho}_j$

$$\min_{u \in U} J(\bar{\rho}_j, u)$$

stets eine eindeutige Lösung.

Man beachte, dass Satz 3.1.7 sowohl für Problem (SP) als auch für (SP_j) die Existenz eines Sattelpunkts sichert. Diese werden jedoch im allgemeinen nicht übereinstimmen.

Wir betrachten nun die Folge von Sattelpunkten $((\rho_j^*, u_j^*))_{j \in \mathbb{N}}$.

Satz 3.3.2

Sei $((\rho_j^*, u_j^*))_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Sattelpunkten des Problems (SP_j) mit strikt positiver unterer Schranke L_j . Für die Folge von unteren Schranken $(L_j)_{j \in \mathbb{N}}$ soll gelten $\lim_{j \rightarrow \infty} L_j = 0$.

Dann existiert eine Teilfolge $((\rho_{j'}^*, u_{j'}^*))_{j' \in \mathbb{N}}$ und $\rho^* \in \bar{\mathcal{H}}$, $u^* \in U$ mit der Eigenschaft, dass

$$\rho_{j'}^* \rightharpoonup^* \rho^* \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad \text{und} \quad (3.29)$$

$$u_{j'}^* \rightharpoonup u^* \quad \text{in } (H^1(\Omega))^d. \quad (3.30)$$

Des Weiteren erfüllt (ρ^*, u^*) die Sattelpunkteigenschaften, ist also eine Lösung von Problem (SP) . Es gilt

$$\lim_{j' \rightarrow \infty} J(\rho_{j'}^*, u_{j'}^*) = J(\rho^*, u^*)$$

Beweis: Die Folge der optimalen Designs $(\rho_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, da $\bar{\mathcal{H}}_j$ Unterraum von $\bar{\mathcal{H}}$ ist, und $\bar{\mathcal{H}}$ aufgrund seiner Definition beschränkt ist. Somit folgt mit Hilfe von Lemma 2.3.4 die Existenz einer Teilfolge $(\rho_{j''}^*)_{j'' \in \mathbb{N}}$ und eines Designs $\rho^* \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$\rho_{j''}^* \rightharpoonup^* \rho^* \quad \text{in } L^\infty(\Omega).$$

Es gilt $\rho^* \in \bar{\mathcal{H}}$, da $\bar{\mathcal{H}}$ abgeschlossen ist.

Sei $\bar{u} \in U$ ein beliebiges in der $H^1(\Omega)$ -Norm beschränktes Element. Für beliebiges $j \in \mathbb{N}$ existiert ein C , so dass für den zugehörigen Sattelpunkt gilt

$$J(\rho_j^*, u_j^*) \leq J(\rho_j^*, \bar{u}) \leq C \quad (3.31)$$

aufgrund der Beschränktheit von \bar{u} und der Folge $(\rho_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$.

Sei $(\bar{\rho}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von koerziven Designs mit $\bar{\rho}_j \in \bar{\mathcal{H}}_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$ (siehe Fußnote²). Das bedeutet, es existieren $M > 0, N > 0$ und $\alpha > 0$, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$ und $u \in U$ gilt

$$J(\bar{\rho}_j, u) \geq M \|u\|^\alpha - N.$$

²Sei z.B. $(\bar{\rho}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die konstante Folge $\bar{\rho}_j(x) = \frac{V}{\text{meas}(\Omega)}$ für alle $x \in \Omega$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Der Wert V sollte für eine sinnvolle Problemstellung so gewählt sein, dass der Bruch $\frac{V}{\text{meas}(\Omega)}$ im offenen Intervall $]0, 1[$ liegt und $\frac{V}{\text{meas}(\Omega)} > L_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Dies entspricht der Gleichverteilung des vorhandenen Materials im gesamten Gebiet Ω .

Mit obiger Ungleichung lässt sich Ungleichung (3.31) folgendermaßen abschätzen zu

$$M\|u_j^*\|^\alpha - N \leq J(\bar{\rho}_j, u_j^*) \leq J(\rho_j^*, u_j^*) \leq J(\rho_j^*, \bar{u}) \leq C . \quad (3.32)$$

Somit ist die Beschränktheit der Folge von Verschiebungen $(u_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$ gezeigt. Auf Grund der Reflexivität des Raumes U existiert eine konvergente Teilfolge $(u_{j''}^*)_{j'' \in \mathbb{N}}$ der Folge $(u_{j''}^*)_{j'' \in \mathbb{N}}$ und eine Verschiebung $u^* \in U$ mit

$$u_{j''}^* \rightharpoonup u^* \text{ in } (H^1(\Omega))^d .$$

Ungleichung (3.32) liefert zudem die Beschränktheit der Folge von Funktionswerten,

$$-N < J(\rho_{j''}^*, u_{j''}^*) < C .$$

Also folgt mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(J(\rho_{j'}^*, u_{j'}^*))_{j' \in \mathbb{N}}$ und eines $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$J(\rho_{j'}^*, u_{j'}^*) \rightarrow \beta . \quad (3.33)$$

Sei nun $\rho \in \bar{\mathcal{H}}$ und $u \in U$ beliebig aber fest gewählt. Dann existiert eine Folge $(\rho_{j'})_{j' \in \mathbb{N}}$ mit

$$\rho_{j'} \rightarrow \rho \text{ f.ü. in } \Omega .$$

Die folgende Projektion liefert beispielsweise eine solche Folge: $P_{\bar{\mathcal{H}}_j}(\rho) := \min_{\rho_j \in \bar{\mathcal{H}}_j} \|\rho - \rho_j\|$.

Da $(\rho_{j'}^*, u_{j'}^*)$ Sattelpunkt von Problem $(SP_{j'})$ für $j = j'$ ist, folgt:

$$J(\rho_{j'}^*, u_{j'}^*) \leq J(\rho_{j'}^*, u_{j'}^*) \leq J(\rho_{j'}^*, u) \quad (3.34)$$

Für die rechte Seite der Ungleichung (3.34) gilt (siehe [22], Lemma 3.1)

$$\lim_{j' \rightarrow \infty} J(\rho_{j'}^*, u) = J(\rho^*, u) . \quad (3.35)$$

Auf der linken Seite gilt folgende Abschätzung (siehe [22] Lemma 3.2)

$$\liminf_{j' \rightarrow \infty} J(\rho_{j'}^*, u_{j'}^*) \geq J(\rho, u^*) . \quad (3.36)$$

Betrachten wir nun den Grenzwert der Ungleichung (3.34) für $j' \rightarrow \infty$, so erhalten wir mittels (3.33), (3.35) und (3.36)

$$J(\rho, u^*) \leq \liminf_{j' \rightarrow \infty} J(\rho_{j'}^*, u_{j'}^*) \leq \beta \leq J(\rho^*, u) \quad \forall (\rho, u) \in \bar{\mathcal{H}} \times U . \quad (3.37)$$

Daraus folgt $\beta = J(\rho^*, u^*)$, und (ρ^*, u^*) ist daher Sattelpunkt von Problem (SP) . ■

Wir haben somit zeigen können, dass die Folge von Lösungen von Problem (SP_j) bei stets kleiner werdender unterer Schranke L_j eine schwach- bzw. schwach*-konvergente Teilfolge besitzt. Der Grenzwert dieser Teilfolge ist ein Sattelpunkt von Problem (SP) . Satz 3.3.2 lässt sich auch auf das diskretisierte Sattelpunktproblem anwenden:

Problem 3.3.3

Finde $\rho^* \in \overline{\mathcal{H}}_h$ und $u^* \in U_h$ mit

$$J(\rho, u^*) \leq J(\rho^*, u^*) \leq J(\rho^*, u)$$

für alle $\rho \in \overline{\mathcal{H}}_h$ und $u \in U_h$.

Wir verzichten aufgrund der Lesbarkeit auf die sonst übliche Schreibweise ρ_h bzw. u_h . Das Funktional J hat folgende Gestalt

$$J : \overline{\mathcal{H}}_h \times U_h \rightarrow \mathbb{R} \quad J(\rho, u) := \frac{1}{2} u^T K(\rho) u - f^T u .$$

Die Konvergenzaussage ist für diesen Fall noch etwas besser.

Satz 3.3.4

Sei $((\rho_j^*, u_j^*))_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Sattelpunkten des Problems 3.3.3 mit strikt positiver unterer Schranke L_j . Für die Folge von unteren Schranken $(L_j)_{j \in \mathbb{N}}$ gelte $\lim_{j \rightarrow \infty} L_j = 0$.

Dann existiert eine Teilfolge $((\rho_{j'}^*, u_{j'}^*))_{j' \in \mathbb{N}}$ und $\rho^* \in \overline{\mathcal{H}}$, $u^* \in U$ mit der Eigenschaft, dass

$$\rho_{j'}^* \rightarrow \rho^* \quad \text{in } \mathbb{R}^c \quad \text{und} \quad (3.38)$$

$$u_{j'}^* \rightarrow u^* \quad \text{in } \mathbb{R}^n . \quad (3.39)$$

Des Weiteren ist (ρ^*, u^*) ebenfalls Sattelpunkt. Es gilt

$$\lim_{j' \rightarrow \infty} J(\rho_{j'}^*, u_{j'}^*) = J(\rho^*, u^*)$$

Beweis: analog zum Beweis von Satz 3.3.2 ■

Die Konvergenzaussage des Satzes 3.3.2 kann auf dem Gebiet Ω_b erneut verbessert werden. Dies hängt direkt mit der Eindeutigkeit der Mengen Ω_u bzw. Ω_l für beliebige Dichtefunktionen $\rho^* \in \overline{\mathcal{H}}^*$ zusammen (siehe Lemma 3.2.5).

Satz 3.3.5

Es seien $(\rho_j^*, u_j^*) \in \overline{\mathcal{H}}_j \times U_j$ Lösungen des Sattelpunktproblems (SP_j) . Ausserdem sei $(\rho^*, u^*) \in \overline{\mathcal{H}}^* \times U^*$ ein Sattelpunkt von Problem (SP) . Dann folgt

$$\|\rho_j^* - \rho^*\|_{L^1(\Omega_b)} \rightarrow 0$$

für $j \rightarrow \infty$. Es konvergiert nunmehr die gesamte Folge $(\rho_j^* |_{\Omega_b})_{j \in \mathbb{N}}$ stark in $L^1(\Omega_b)$ gegen $\rho^* |_{\Omega_b}$ mit $\rho^* \in \overline{\mathcal{H}}^*$.

In Kapitel 7 werden einige Beispielrechnungen durchgeführt. Dort werden die hier gezeigten Resultate untersucht, indem für unterschiedliche Strukturen sowohl in 2D als auch 3D die Mengen Ω_{oc} , Ω_l und Ω_u graphisch dargestellt werden.

Nachdem wir uns in diesem Kapitel dem kontinuierlichen Problem und der Formulierung als äquivalentes Sattelpunktproblem gewidmet haben, werden wir nun das diskretisierte Problem beleuchten.

Kapitel 4

Das diskretisierte Problem

Wir werden uns in diesem Kapitel weiterhin mit der Frage beschäftigen, welche Auswirkungen die bereits beschriebene Einführung einer strikt positiven unteren Schranke ϵ für das diskretisierte Problem $(MC_{h,\epsilon})$ hat. Dabei ist von besonderem Interesse, wie sich der Gradient der Zielfunktion in der Nähe kritischer Punkte verhält.

4.1 Die Problemstellung

Ausgehend von Problem (MC_h) (siehe 2.5.2) werden wir zunächst die Menge zulässiger Designfunktionen relaxieren und, wie bereits eingangs erwähnt, eine strikt positive Untergrenze ϵ definieren. Somit erhalten wir folgende Problemstellung

Problem 4.1.1 $(MC_{h,\epsilon})$

Finde $(\rho_h, u_h) \in \overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon} \times U_h$ mit

$$\begin{aligned} & \min_{\rho_h \in \overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon}, u_h \in U_h} f^T u_h \\ \text{u.d.N.: } & K(\rho_h) u_h = f \\ & K(\rho_h) = \sum_{i=1}^e [\rho_h]_i K_i \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit $\overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon} = \left\{ \rho_h \in \mathbb{R}^e \mid \sum_{i=1}^e [\rho_h]_i \leq V_0, [\rho_h]_i \in [\epsilon, 1] \forall i = 1, \dots, e \right\}$. Problem $(MC_{h,\epsilon})$ ist wohl die gängigste Formulierung des Minimum-Compliance-Problems. Dies ist in der Tatsache begründet, dass obige Formulierung einige wesentliche Vorteile für die numerische Handhabung aufweist. Es handelt sich aufgrund der Relaxierung in ρ nicht mehr um ein diskretes Optimierungsproblem, sondern um ein kontinuierliches. Dies hat den Vorteil, dass gradientenbasierte und dadurch effiziente Verfahren verwendet werden können. Des Weiteren sorgt die Untergrenze ϵ für eine sehr entscheidende Vereinfachung. Sie garantiert die positive Definitheit der Matrix $K(\rho_h)$ für alle zulässigen Designfunktionen $\rho_h \in \overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon}$. Die

Steifigkeitsmatrix K ist somit für alle $\rho_h \in \overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon}$ invertierbar. Dies ermöglicht eine Problemformulierung des Minimum-Compliance-Problems ausschließlich in den Designfunktionen. Die Verschiebung u_h wird als Funktion in Abhängigkeit vom Design ρ_h angesehen,

$$u_h(\rho_h) = K^{-1}(\rho_h)f .$$

Sie ordnet jedem Design ρ_h die zugehörige, nun eindeutige, Verschiebung $u_h(\rho_h)$ zu. Problem $(MC_{h,\epsilon})$ ist daher äquivalent zu folgendem Problem:

$$\begin{aligned} & \min_{\rho_h \in \overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon}} f^T u_h(\rho_h) \\ \text{u.d.N.: } & u_h(\rho_h) = K^{-1}(\rho_h)f , \end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei $K(\rho_h) = \sum_{i=1}^e [\rho_h]_i K_i$ ist. Zur Erleichterung des Verständnisses der Notationen wiederholen wir im Folgenden den Satz über die implizite Funktion, zugeschnitten auf die hier relevante Situation.

Satz 4.1.2

Die Mengen $G \subset \overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon} \subset \mathbb{R}^e$ und $H \subset U_h \subset \mathbb{R}^n$ seien nichtleer und offen, und die Funktion $F : G \times H \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Ferner seien $\rho_h^0 \in G$ und $u_h^0 \in H$ Punkte, für die

$$F(\rho_h^0, u_h^0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial u_h}(\rho_h^0, u_h^0) \text{ invertierbar}$$

ist. Dann existiert eine δ -Umgebung $G^0 \subset G$ um ρ_h^0 , eine ϵ -Umgebung $H^0 \subset H$ um u_h^0 und genau eine stetige Funktion

$$f : G^0 \rightarrow H^0 \quad \text{mit} \quad f(\rho_h^0) = u_h^0 \quad \text{und} \quad F(\rho_h, f(\rho_h)) = 0 \quad \forall \rho_h \in G^0 .$$

Für jedes feste $\rho_h \in G^0$ ist $f(\rho_h)$ sogar die einzige in H^0 liegende Lösung der Gleichung $F(\rho_h, u_h) = 0$.

In unserem Fall betrachten wir die Funktion

$$F(\rho_h, u_h) = K(\rho_h)u_h - f = 0 .$$

und die implizite Funktion

$$u_h(\rho_h) = K^{-1}(\rho_h)f .$$

Sei $(\rho_h^0, u_h^0) \in \overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon} \times U_h$ ein Punkt, welcher obige Gleichung erfüllt. Dann muss für die Anwendung des Satzes $\frac{\partial F}{\partial u_h}(\rho_h^0, u_h^0) = K(\rho_h^0)$ invertierbar sein. Dies macht wiederum die Notwendigkeit einer strikt positiven unteren Schranke ϵ deutlich, welche die Invertierbarkeit der Matrix K stets garantiert.

Satz 4.1.3

Es gelte $K(\rho_h^0)u_h^0 = f$ und es sei $K(\rho_h^0)$ invertierbar. Dann ist die Funktion $\rho_h \mapsto u_h(\rho_h)$ differenzierbar, und der Gradient berechnet sich nach der Formel

$$-K(\rho_h^0)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \rho_h}(\rho_h^0, u_h^0) .$$

Die Ableitung der Funktion F bezüglich der Designfunktionskomponente $[\rho_h]_i$ mit $i \in \{1, \dots, e\}$ hat bei uns die einfache Gestalt

$$\frac{\partial F}{\partial [\rho_h]_i}(\rho_h^0, u_h^0) = K_i u_h^0 .$$

Somit ist die partielle Ableitung der impliziten Funktion $u_h(\rho_h)$ nach der Komponente i wie folgt

$$\frac{\partial u_h(\rho_h^0)}{[\rho_h]_i} = -K^{-1}(\rho_h^0) K_i u_h^0 .$$

Es ist uns nun möglich die Ableitung der Zielfunktion $c(\rho_h, u_h) = f^T u_h(\rho_h)$ von Problem $(MC_{h,\epsilon})$ anzugeben

$$\frac{\partial c}{\partial [\rho_h]_i}(\rho_h^0, u_h^0) = -f^T \frac{\partial u_h(\rho_h^0)}{\partial [\rho_h]_i} = -f^T K^{-1}(\rho_h^0) K_i u_h^0 = -(u_h^0)^T K_i u_h^0 . \quad (4.3)$$

Sie gilt für Punkte $(\rho_h^0, u_h^0) \in \bar{\mathcal{H}}_{h,\epsilon} \times U_h$, welche die Nebenbedingung

$$K(\rho_h)u_h = f$$

lösen und in denen die Steifigkeitsmatrix $K(\rho_h)$ invertierbar ist.

4.2 Die Folge $u((\rho_j)_{j \in \mathbb{N}})$

Aufgrund der Voraussetzungen des Satzes über die implizite Funktion ist Formel (4.3) für den Gradienten der Zielfunktion für alle Punkte ρ_h im Inneren der Menge $\bar{\mathcal{H}}_h$ korrekt. Für Designfunktionen $\bar{\rho} \in \bar{\mathcal{H}}_h$, die mindestens eine Nullkomponente enthalten, ist die Voraussetzung $-K(\bar{\rho})$ invertierbar – jedoch nicht mehr zwingend. Daher betrachten wir nun Folgen, welche einen eben solchen kritischen Punkt als Grenzwert besitzen.

Gegeben sei also eine Folge $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\rho_j \in \bar{\mathcal{H}}_h^+ := \left\{ \rho_h \in \mathbb{R}^e \mid \sum_{i=1}^e [\rho_h]_i \leq V_0 \quad , [\rho_h]_i \in]0, 1] \quad \forall i = 1, \dots, e \right\} ,$$

welche gegen einen Punkt $\bar{\rho} \in \bar{\mathcal{H}}_h$ konvergiert ($+$ steht für $[\rho_h]_i > 0 \quad \forall i$). Zur Erleichterung der Schreibweise wird in diesem Kapitel der Index h , welcher diskretisierte Lösungen ρ_h kennzeichnet, weggelassen. Für den Grenzwert $\bar{\rho}$ soll gelten, dass die Kraft $f \in \mathbb{R}^n$ im Bild von $K(\bar{\rho})$ liegt. Man beachte, dass $\bar{\rho} \geq 0$ gilt, und somit die zugehörige Steifigkeitsmatrix $K(\bar{\rho})$ möglicherweise singular ist, wohingegen $\rho_j > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ gilt und daher die zugehörigen Steifigkeitsmatrizen $K(\rho_j)$ invertierbar sind.

Wir können die Folge von zugehörigen Verschiebungen $u(\rho_j) \in \mathbb{R}^n$ wie folgt definieren:

$$u(\rho_j) := K^{-1}(\rho_j)f . \quad (4.4)$$

Wir zeigen nun die Beschränktheit der Folge $(u(\rho_j))_{j \in \mathbb{N}}$ unter gewissen Voraussetzungen an die Folge der $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Satz 4.2.1

Es sei $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Designfunktionen mit $\rho_j \in \overline{\mathcal{H}}_h^+ \forall j \in \mathbb{N}$, welche gegen $\bar{\rho} \in \overline{\mathcal{H}}_h$ konvergiert. Für den Kraftvektor f gelte

$$f \in \text{Bild } K(\bar{\rho})$$

und es existiere der Limes

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\rho_j - \bar{\rho}\|_\infty}{\min_{i \in \{1, \dots, e\}} [\rho_j]_i} = c. \quad (4.5)$$

Dann ist die Folge zugehöriger Verschiebungsfunktionen $(u(\rho_j))_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

Bevor wir zum Beweis von Satz 4.2.1 kommen, benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 4.2.2

Seien $\rho_j, u(\rho_j), K(\rho_j)$ und f wie oben definiert, dann gilt:

$$\|u(\rho_j)\|_{K(1)} \leq \frac{1}{\min_i [\rho_j]_i} \|f\|_{K(1)^{-1}}$$

mit $\|v\|_A = (v^T A v)^{\frac{1}{2}}$ der von A induzierten Norm (A positiv definit).

Beweis: Zunächst schätzen wir $u(\rho_j)^T K(\rho_j) u(\rho_j)$ nach unten ab. Als Vereinfachung schreiben wir u statt $u(\rho_j)$ und bezeichnen mit $\rho_{j, \min}$ das Minimum $\min_i [\rho_j]_i$:

$$u^T K(\rho_j) u = \rho_{j, \min} \sum_i \frac{[\rho_j]_i}{\rho_{j, \min}} (u^T K_i u)$$

mit $K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ den Elementsteifigkeitsmatrizen. Da $\frac{[\rho_j]_i}{\rho_{j, \min}} \geq 1$ und $u^T K_i u \geq 0 \forall i = 1, \dots, m$, erhalten wir folgende Abschätzung:

$$u^T K(\rho_j) u \geq \rho_{j, \min} u^T K(1) u = \rho_{j, \min} \|u(\rho_j)\|_{K(1)}^2 \quad (4.6)$$

mit $K(1) = \sum_i K_i$ Schließlich wird nun $u(\rho_j)^T K(\rho_j) u(\rho_j)$ nach oben abgeschätzt. Es gilt:

$$u(\rho_j)^T K(\rho_j) u(\rho_j) = f^T u(\rho_j) = f^T K(1)^{-\frac{1}{2}} K(1)^{\frac{1}{2}} u(\rho_j)$$

Unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung lässt sich der obige Term abschätzen.

$$f^T K(1)^{-\frac{1}{2}} K(1)^{\frac{1}{2}} u(\rho_j) = (K(1)^{-\frac{1}{2}} f)^T (K(1)^{\frac{1}{2}} u(\rho_j)) \quad (4.7)$$

$$\leq (f^T K(1)^{-\frac{1}{2}} K(1)^{-\frac{1}{2}} f)^{\frac{1}{2}} (u(\rho_j)^T K(1)^{\frac{1}{2}} K(1)^{\frac{1}{2}} u(\rho_j))^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

$$= (f^T K(1)^{-1} f)^{\frac{1}{2}} (u(\rho_j)^T K(1) u(\rho_j))^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

Somit erhalten wir folgende Abschätzung:

$$u(\rho_j)^T K(\rho_j) u(\rho_j) \leq \|f\|_{K(1)^{-1}} \|u(\rho_j)\|_{K(1)} \quad (4.10)$$

Ungleichung (4.6) zusammen mit (4.10) ergibt:

$$\rho_{j,\min} \|u(\rho_j)\|_{K(1)}^2 \leq \|f\|_{K(1)^{-1}} \|u(\rho_j)\|_{K(1)}, \quad (4.11)$$

und schließlich

$$\|u(\rho_j)\|_{K(1)} \leq \frac{1}{\rho_{j,\min}} \|f\|_{K(1)^{-1}} \quad (4.12) \quad \blacksquare$$

Nun zum Beweis von Satz 4.2.1.

Beweis: (von Satz 4.2.1) Es gilt aufgrund der Definition von $u(\rho_j)$:

$$\|u(\rho_j)\| = \|K^{-1}(\rho_j) f\| \quad (4.13)$$

Da $f \in \text{Bild } K(\bar{\rho})$ ist, existiert eine Verschiebung \hat{u} mit der Eigenschaft $K(\bar{\rho})\hat{u} = f$. Dies eingesetzt in (4.13) und die Verträglichkeit der Matrixnorm bezüglich der zugehörigen Vektornorm ausgenutzt erhalten wir:

$$\|K^{-1}(\rho_j) f\| = \|K^{-1}(\rho_j) K(\bar{\rho}) \hat{u}\| \leq \|K^{-1}(\rho_j) K(\bar{\rho})\| \|\hat{u}\| \quad (4.14)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir den Abstandsvektor zwischen ρ_j und $\bar{\rho}$ als δ_j ,

$$\delta_j := \rho_j - \bar{\rho} \quad (4.15)$$

bzw. $\bar{\rho} = \rho_j - \delta_j$. Setzt man diesen Ausdruck für $\bar{\rho}$ in (4.14) ein, so erhalten wir:

$$\|K^{-1}(\rho_j) K(\bar{\rho})\| \|\hat{u}\| = \|K^{-1}(\rho_j) K(\rho_j - \delta_j)\| \|\hat{u}\| \quad (4.16)$$

Durch Ausnutzung der Linearität von $K(x)$ wird obiger Term zu

$$\|K^{-1}(\rho_j) K(\rho_j - \delta_j)\| \|\hat{u}\| = \|I - K^{-1}(\rho_j) K(\delta_j)\| \|\hat{u}\| \quad (4.17)$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Submultiplikativität für Matrixnormen erhalten wir:

$$\|I - K^{-1}(\rho_j) K(\delta_j)\| \|\hat{u}\| \leq \|I\| \|\hat{u}\| + \|K^{-1}(\rho_j) K(\delta_j)\| \|\hat{u}\| \quad (4.18)$$

$$\leq \|I\| \|\hat{u}\| + \|K^{-1}(\rho_j)\| \|K(\delta_j)\| \|\hat{u}\| \quad (4.19)$$

Die weitere Abschätzung erfolgt nun in zwei Schritten. In Schritt 1 wird zunächst $\|K^{-1}(\rho_j)\|$ abgeschätzt, in Schritt 2 dann $\|K(\delta_j)\|$.

Schritt 1

Mit Hilfe von Lemma 4.2.2 können wir nun $\|K^{-1}(\rho_j)\|$ abschätzen.

$$\|K(\rho_j)^{-1}\| = \sup_f \frac{\|K^{-1}(\rho_j)f\|}{\|f\|} = \sup_f \frac{\|u(\rho_j)\|}{\|f\|}$$

Aufgrund der Äquivalenz der Normen gilt:

$$\sup_f \frac{\|u(\rho_j)\|}{\|f\|} \leq C \sup_f \frac{\|u(\rho_j)\|_{K(1)}}{\|f\|_{K(1)^{-1}}} \leq C \frac{1}{\rho_{j,\min}} \frac{\|f\|_{K(1)^{-1}}}{\|f\|_{K(1)^{-1}}}$$

mit einer Konstante $C > 0$, welche insbesondere unabhängig von u ist. Insgesamt also:

$$\|K(\rho_j)^{-1}\| \leq C \frac{1}{\rho_{j,\min}} \quad (4.20)$$

Schritt 2

Im zweiten Schritt wird nun $\|K(\delta_j)\|$ abgeschätzt.

$$\|K(\delta_j)\| = \left\| \sum_i [\delta_j]_i K_i \right\| = \|\delta_j\|_\infty \left\| \sum_i \frac{[\delta_j]_i}{\|\delta_j\|_\infty} K_i \right\|$$

Man beachte, dass aufgrund der Voraussetzung an die Folge $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ für die Norm $\|\delta_j\|_\infty > 0$ gilt für $j \in \mathbb{N}$.

Die Dreiecksungleichung angewandt auf die Summe der Elementsteifigkeitsmatrizen ergibt:

$$\|\delta_j\|_\infty \left\| \sum_i \frac{[\delta_j]_i}{\|\delta_j\|_\infty} K_i \right\| \leq \|\delta_j\|_\infty \sum_i \left\| \frac{[\delta_j]_i}{\|\delta_j\|_\infty} K_i \right\| = \|\delta_j\|_\infty \sum_i \frac{[\delta_j]_i}{\|\delta_j\|_\infty} \|K_i\|$$

Da $\frac{[\delta_j]_i}{\|\delta_j\|_\infty} \leq 1$ erhalten wir:

$$\|K(\delta_j)\| \leq \|\delta_j\|_\infty \sum_i \|K_i\| \quad (4.21)$$

Unter Verwendung der Ungleichung (4.20) aus Schritt 1 und Ungleichung (4.21) aus Schritt 2 können wir nun (4.13) bis (4.19) weiter abschätzen zu:

$$\|u(\rho_j)\| \leq \|I\| \|\hat{u}\| + \|K^{-1}(\rho_j)\| \|K(\delta_j)\| \|\hat{u}\| \quad (4.22)$$

$$\leq \|I\| \|\hat{u}\| + C \frac{1}{\min_i(\rho_j)_i} \|\delta_j\|_\infty \sum_i \|K_i\| \|\hat{u}\| \quad (4.23)$$

$$= \|I\| \|\hat{u}\| + C \frac{\|\rho_j - \bar{\rho}\|_\infty}{\min_i(\rho_j)_i} \sum_i \|K_i\| \|\hat{u}\| \quad (4.24)$$

■

Somit ist gezeigt, dass für Folgen, für die die kleinste Komponente nicht schneller gegen Null konvergiert als die maximale Differenzkomponente $\|\rho_j - \bar{\rho}\|_\infty$, die Folge der Verschiebungen $u(\rho_j)$ beschränkt ist. Wählt man beispielsweise $\rho_j = \bar{\rho} + \frac{1}{n}$ dann gilt für die Abschätzung:

$$\|u(\rho_j)\| \leq \|I\| \|\hat{u}\| + C \frac{1/n}{1/n} \sum_i \|K_i\| \|\hat{u}\| = \|I\| \|\hat{u}\| + C \sum_i \|K_i\| \|\hat{u}\|$$

mit \hat{u} einem beliebigen Element der Lösungsmenge der Gleichung $K(\bar{\rho})u = f$.

Folgerung 4.2.3

Es seien $\rho_j, u(\rho_j)$ und $K(\rho_j)$ wie in Satz 4.2.1. Dann existiert eine Teilfolge, wiederum bezeichnet mit $(u(\rho_j))_{j \in \mathbb{N}}$, und ein Verschiebungsvektor \bar{u} mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u(\rho_j) = \bar{u} ,$$

und der Grenzwert erfüllt die Gleichung

$$K(\bar{\rho})\bar{u} = f . \quad (4.25)$$

Beweis: Die Beschränktheit der Folge $(u(\rho_j))_{j \in \mathbb{N}}$ erlaubt die Anwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß, welcher die Existenz einer konvergenten Teilfolge sichert. Es bleibt zu zeigen, dass der Grenzwert \bar{u} einer konvergenten Teilfolge, die Gleichung (4.25) löst. Wir betrachten die folgende Norm

$$\|K(\bar{\rho})\bar{u} - f\| = \|K(\rho_j - \delta_j)\bar{u} - K(\rho_j)u_j\| ,$$

da $K(\rho_j)u_j = f$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung, Cauchy-Schwarz und der Linearität von K als Funktion von ρ schätzen wir obigen Term ab

$$\|K(\bar{\rho})\bar{u} - f\| \leq \|K(\rho_j)\| \|\bar{u} - u_j\| + \|K(\delta_j)\| \|\bar{u}\| \quad \forall j \in \mathbb{N} .$$

Für $j \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen Null, und wir erhalten die gewünschte Aussage. ■

Bemerkung 4.2.4 Der Grenzwert der Teilfolge $(u(\rho_j))_{j \in \mathbb{N}}$ hängt sowohl von $\bar{\rho}$ als auch von der Folge $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ab. Er kann also insbesondere nicht eindeutig sein als Funktion von $\bar{\rho}$.

Beispiel 4.2.5 Gegeben seien folgende Elementsteifigkeitsmatrizen:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} , \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 35 \end{pmatrix}$$

. Es gilt folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$K(\rho)u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

mit $K(\rho) = \rho_1 K_1 + \rho_2 K_2 + \rho_3 K_3$. Wir untersuchen nun zwei unterschiedliche Folgen (ρ_i) und (ρ_j) , welche gegen den selben Grenzwert $\rho = (1 \ 0 \ 0)^T$ konvergieren, die wie folgt definiert sind:

$$\rho_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/i \\ 1/i \\ 1/i \end{pmatrix}$$

sowie

$$\rho_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/j \\ 1/j^2 \\ 1/j \end{pmatrix} .$$

Die Folgen zugehöriger Verschiebungen (u_i) und (u_j) wiesen die folgenden Grenzwerte auf:

$$u_i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u_j \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Man beachte, dass in obigem Beispiel die Voraussetzung des Satzes 4.2.1 nicht erfüllt sind, und dennoch eine Konvergenz der Folge von Verschiebungen vorliegt.

An dieser Stelle folgt nun die Definition des Subdifferentials aus dem Gebiet der konvexen Analysis (siehe z.B. [16]) sowie ein Resultat von Clarke (siehe [11]), mit dessen Hilfe wir zeigen werden, dass der Grenzwert \bar{u} aus Folgerung 4.2.3 uns ermöglicht, einen Subgradienten anzugeben. Das Ziel ist die Anwendung von Algorithmen der nichtglatten Optimierung von c auf \mathbb{R}^d .

Definition 4.2.6

Es sei $f : \mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $x \in \mathbb{R}^e$. Die Menge $\partial f(x)$ heißt das Subdifferential von f an der Stelle x ,

$$\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^e \mid g^T(y - x) \leq f(y) - f(x) \ \forall y \in \mathbb{R}^e\} .$$

Ein Element $g \in \partial f(x)$ bezeichnen wir als Subgradienten von f in x .

Der nächste Satz stammt von Clarke (siehe [11] Theorem 2.5.1) und beschreibt eine alternative Definition des sogenannten Clarke'schen Subdifferentials. Letzteres ist für Lipschitz-stetige Funktionen definiert und entspricht für konvexe Funktionen dem oben definierten Subdifferential.

Definition 4.2.7

Sei f lokal Lipschitz-stetig. Sei Ω_f die Menge von Punkten, in denen die Funktion f nicht differenzierbar ist. Dann gilt

$$\partial f(x) = \text{conv}\{g \in \mathbb{R}^e \mid \exists (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^e : x_j \rightarrow x, x_j \notin \Omega_f, \lim_{j \rightarrow \infty} \nabla f(x_j) \text{ existiert}, g = \lim_{j \rightarrow \infty} \nabla f(x_j)\} .$$

Die zu differenzierende Zielfunktion $c(\rho) = f^T u(\rho)$ von Problem $(MC_{h,\epsilon})$ ist konvex. Dies wird deutlich, wenn man das äquivalente Problem (siehe Satz 3.1.4) ansieht

$$\inf_{\rho} \sup_u -J(\rho, u) .$$

Es handelt sich bei der Funktion $\rho \mapsto \sup_u -J(\rho, u)$ um das Supremum von linearen, sprich konvexen Funktionen in ρ , somit also um eine konvexe Funktion.

Satz 4.2.7 ist somit anwendbar auf den Gradienten der Zielfunktion (siehe (4.3)).

Folgerung 4.2.8

Es seien $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(u(\rho_j))_{j \in \mathbb{N}}$ definiert wie in Folgerung 4.2.3. Dann gilt für die zugehörige Folge von partiellen Ableitungen

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\partial c}{\partial [\rho]_i}(\rho_j, u_j) = -\bar{u}^T K_i \bar{u} .$$

Der Vektor $g = \begin{pmatrix} -\bar{u}^T K_1 \bar{u} \\ \vdots \\ -\bar{u}^T K_e \bar{u} \end{pmatrix}$ ist somit Subgradient der Zielfunktion im Punkt $\bar{\rho}$.

Kapitel 5

Penalty-Funktionen und die Continuation-Methode

In diesem Kapitel stellen wir verschiedene Methoden vor, wie trotz Relaxierung des Raums zulässiger Dichtefunktionen Lösungen gefunden werden können, welche fast ausschließlich die Werte Null oder Eins annehmen. Man spricht auch von sogenannten „Schwarz-Weiß“-Lösungen aufgrund der Art und Weise, optimale Designfunktionen zu visualisieren (siehe Kapitel 7). Das ursprüngliche Ziel der Topologieoptimierung (in unserem Fall des Minimum-Compliance-Problems) ist es, eine optimale charakteristische Funktion der Materialverteilung innerhalb der Domäne Ω zu finden. Penalty-Funktionen „bestrafen“ auf unterschiedliche Art und Weise sogenannte Grauwerte, Werte zwischen Null und Eins. Das Problem dieser Verfahrensweise der Relaxierung mit anschließender Bestrafung von Grauwerten ist stets die veränderte Zielfunktion, welche dann nicht mehr konvex ist. Dies kann zu einer möglicherweise grossen Anzahl lokaler Optima führen. Eine sogenannte „Continuation-Methode“ soll die Wahrscheinlichkeit, ein globales Optimum zu finden, verbessern. Dies geschieht durch mehrfaches Lösen des Optimierungsproblems bei kontinuierlich ansteigendem Bestrafungsterm.

5.1 Penalty-Funktionen

In diesem Abschnitt stellen wir drei unterschiedliche Verfahren vor, welche in der Lage sind, Schwarz-Weiß-Lösungen zu generieren. Zwei von den hier vorgestellten Verfahren, das SIMP¹-Modell und die von Stolpe und Svanberg vorgestellte Interpolation (s.u.), bestrafen Grauwerte, indem sie die zugehörige Elementsteifigkeit bei gleichem Volumen verringern.

¹SIMP: Solid Isotropic Material with Penalization

5.1.1 Das SIMP-Modell

Die Idee des SIMP-Ansatzes (siehe [5]) basiert auf einem nichtlinearen Zusammenhang zwischen verwendetem Materialvolumen und zugehöriger Steifigkeit. Dies führt dazu, dass Dichten im Graubereich nur wenig Steifigkeit aufweisen, dafür dennoch eine verhältnismässig grosse Menge Material innerhalb der Volumenrestriktion verbrauchen. Der Materialtensor als Funktion der Dichte (siehe (3.2)) hat nun die Gestalt

$$E_q(\rho) = \rho^q E ,$$

mit $q \geq 1$. Für $q = 1$ erhalten wir den linearen Zusammenhang zwischen Steifigkeit und

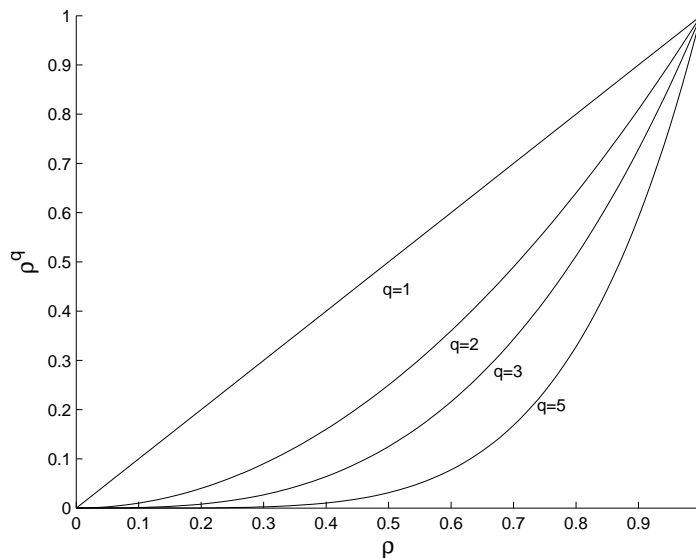


Abbildung 5.1: Darstellung des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Elastizitätsmodul $E_q(\rho)$ und Materialdichte ρ für unterschiedliche Werte q mittels SIMP-Interpolation.

Volumen, somit also keine Bestrafung. Es wurde gezeigt (siehe [25]), dass für hinreichend großes q , ein globales Optimum des Problems (MCR_h) existiert, welches nur Werte in $\{0, 1\}$ annimmt.

Der folgende Satz bezieht sich auf das Problem ($MCRP_\epsilon$) (vgl. (2.6.4)) kombiniert mit der SIMP-Interpolation und relaxiert bezüglich ρ .

Problem 5.1.1 ($MCRP_\epsilon$)

Finde $(\rho, u) \in \bar{\mathcal{H}}_\epsilon \times U$ mit

$$\begin{aligned} & \min_{\rho \in \mathcal{H}_\epsilon, u \in U} l(u) \\ \text{u.d.N.: } & a_\rho(u, v) = l(v) \quad \forall v \in U \\ & TV(\rho) \leq C , \end{aligned} \tag{5.1}$$

Petersson gelang es in [21], die Existenz einer Lösung dieses Problems zu beweisen.

Satz 5.1.2

Sei $(\rho_j, u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für das Problem $(MCRP_\epsilon)$ mit SIMP-Parameter $q \geq 1$. Dann existiert ein $(\rho^*, u^*) \in \overline{\mathcal{H}_\epsilon} \times U$ und eine Teilfolge wiederum bezeichnet mit $(\rho_j, u_j)_{j \in \mathbb{N}}$, so dass

$$\rho_j \rightarrow \rho^* \text{ in } L^p(\Omega), \quad \forall p \in [1, \infty[$$

und

$$u_j \rightarrow u^* \text{ in } U ,$$

und (ρ^*, u^*) ein Minimalpunkt ist.

Bemerkung 5.1.3 Satz 5.1.2 sichert lediglich die Existenz eines Minimums $(\rho^*, u^*) \in \overline{\mathcal{H}_\epsilon} \times U$ des Problems (MCP_ϵ) . Dieses wird im allgemeinen keine Schwarz-Weiss- Lösung sein.

5.1.2 Ein expliziter Strafterm

Im Gegensatz zum SIMP-Verfahren, welches Grauwerte implizit bestraft, gibt es statt dessen die Möglichkeit eine konkave Funktion auf die Zielfunktion zu addieren, welche Zwischenwerte explizit bestraft (siehe [21]). Diese Straffunktion hat folgende Gestalt

$$\mathcal{W}(\rho) = \int_{\Omega} \rho(x)(1 - \rho(x)) \, dx .$$

Der Strafparameter q taucht in diesem Fall als Vorfaktor auf

$$\tilde{c}(\rho) = c(\rho) + q\mathcal{W}(\rho) ,$$

mit $q \geq 0$. Auch in diesem Fall handelt es sich um eine konkave Zielfunktion falls q hinreichend gross gewählt wird (siehe [21]).

Problem 5.1.4 ($\widetilde{MCRP}_\epsilon$)

Finde $(\rho, u) \in \overline{\mathcal{H}_\epsilon} \times U$ mit

$$\begin{aligned} & \min_{\rho \in \mathcal{H}_\epsilon} \tilde{c}(\rho) \\ \text{u.d.N.: } & a_\rho(u, v) = l(v) \quad \forall v \in U \\ & TV(\rho) \leq C , \end{aligned} \tag{5.2}$$

Die Existenz einer Lösung von Problem $(\widetilde{MCRP}_\epsilon)$ sichert der folgende Satz (siehe [21]).

Satz 5.1.5

Sei $(\rho_j, u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für Problem $(\widetilde{MCRP}_\epsilon)$ mit Penalty-Parameter $q \geq 0$. Dann existiert ein $(\rho^*, u^*) \in \overline{\mathcal{H}}_\epsilon \times U$ und eine Teilfolge wiederum bezeichnet mit $(\rho_j, u_j)_{j \in \mathbb{N}}$, so dass

$$\rho_j \rightarrow \rho^* \text{ in } L^p(\Omega), \quad \forall p \in [1, \infty[$$

und

$$u_j \rightarrow u^* \text{ in } U ,$$

und (ρ^*, u^*) ein Minimalpunkt ist.

Der nun folgende Satz behandelt den Zusammenhang zwischen Problem (MCP_ϵ) und dem relaxierten Problem $(\widetilde{MCRP}_\epsilon)$ (siehe [21]).

Satz 5.1.6

Sei $(\rho_q, u_q)_{q \geq 0}$ eine Minimalfolge für Problem $(\widetilde{MCRP}_\epsilon)$ mit Penalty-Parameter $q \rightarrow \infty$. Dann existiert ein $(\chi^*, u^*) \in \mathcal{H}_\epsilon \times U$ und eine Teilfolge wiederum bezeichnet mit $(\rho_q, u_q)_{q \geq 0}$, so dass

$$\rho_q \rightarrow \chi^* \text{ in } L^p(\Omega), \quad \forall p \in [1, \infty[$$

und

$$u_j \rightarrow u^* \text{ in } U ,$$

und (χ^*, u^*) ein Minimalpunkt von (MCP_ϵ) ist. Insbesondere ist $\chi^* \in \mathcal{H}_\epsilon$, also eine Schwarz-Weiß-Lösung.

5.1.3 Die alternative Interpolation von Stolpe und Svanberg

Die folgende Variante, Zwischenwerte von ρ zu bestrafen, behandelt das Minimum-Compliance-Problem mit zwei Materialien (siehe (2.24)), deren Tensoren $E_0 > 0$ bzw. $E_1 > 0$ sind. Wir bezeichnen den Differenztensor mit $\Delta E = E_1 - E_0$ und erhalten folgende Tensorfunktion in Abhängigkeit von ρ

$$E(\rho) = E_0 + \rho \Delta E .$$

D.h., dass aufgrund der Problemstellung keine Löcher in der Struktur auftreten können, a_ρ somit stets koerziv ist. Ausserdem lässt sich das unrelaxierte Minimum-Compliance-Problem mit nur einem Materialtensor E und strikt positiver unterer Schranke ϵ leicht in obiges Problem äquivalent umformen. Dazu setze man $E_1 = E$ und $E_0 = \epsilon E$. Wiederum erhalten wir für $E_0 = 0$, dem Nulltensor, die ursprüngliche Funktion $E(\rho)$ zurück (siehe (3.2)).

Die von Stolpe und Svanberg [28] vorgeschlagene alternative Interpolation hat folgende Gestalt

$$E(\rho) = E_0 + \frac{\rho}{1 + q(1 - \rho)} \Delta E . \quad (5.3)$$

Wir betrachten die zugehörige, „bestrafte“ Zielfunktion $c_q(\rho)$ des Problems $(MCR_{h,\epsilon})$

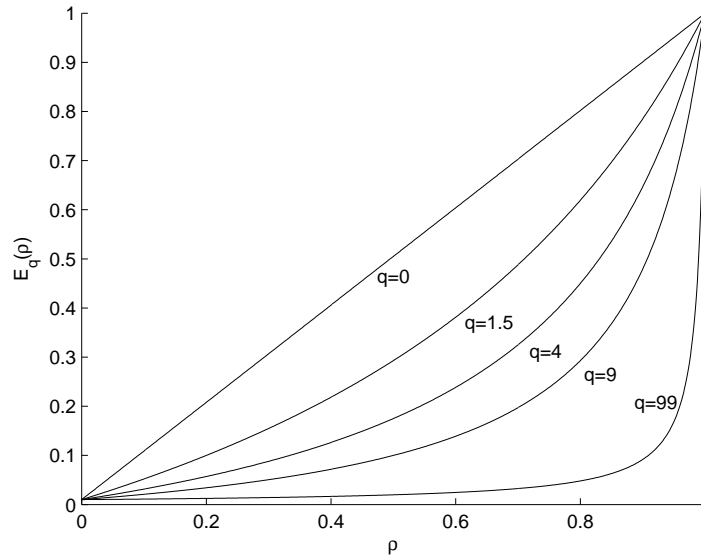


Abbildung 5.2: Darstellung des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Elastizitätsmodul $E_q(\rho)$ und Materialdichte ρ für unterschiedliche Werte q anhand der von Stolpe & Svanberg vorgeschlagenen Interpolation mit $E_0 = 0.01$ und $E_1 = 1$.

$$c_q(\rho) = f^T u(\rho) = f^T K_q^{-1}(\rho) f ,$$

mit $K_q(\rho) = \sum_{i=1}^e E([\rho]_i) K_i$. Über die Wahl des Strafparameters q gibt folgender Satz Auskunft (siehe [28] Prop. 7).

Satz 5.1.7

Die Zielfunktion $c_q(\rho)$ ist konkav auf $[0, 1]^e$ für alle $q \geq \Delta E / E_0$.

Diese Aussage ist für die kontinuierliche Methode besonders interessant, da sie eine Obergrenze für den Strafparameter q , den es zu steigern gilt, angibt. Diese Grenze garantiert die Ganzzahligkeit einer gefundenen Lösung aufgrund der Konkavität der Zielfunktion (siehe [28] Prop. 5 und Prop. 8).

Folgerung 5.1.8

Für alle $q \geq \Delta E / E_0$ existiert ein globales Minimum ρ^* des Problems

$$\min_{\rho \in \mathcal{H}} c_q(\rho)$$

mit $\rho^* \in \{0, 1\}^e$, d.h. ρ^* ist eine Schwarz-Weiß-Lösung.

Stolpe und Svanberg konnten zeigen (siehe [28] Prop. 11), dass auch für die SIMP-Methode eine solche Obergrenze für p existiert und wie groß diese ist. Es gelang ihnen weiterhin,

Beispiele zu finden, die zeigten, dass die durch SIMP-Methode erzeugte Zielfunktion keinen konkaven Verlauf aufwies.

Satz 5.1.9

Betrachte Problem $(MC_{h,\epsilon})$ mit SIMP-Interpolation. Dann existiert für alle $q \geq \Delta E/E_0 + 1 = E_1/E_0$ ein globales Minimum ρ^ des Problems mit $\rho^* \in \{0, 1\}^e$.*

Im Gegensatz zu dem alternativen Verfahren von Stolpe und Svanberg garantiert die SIMP-Methode für q hinreichend groß lediglich die Existenz eines globalen, ganzzahligen Minimums. Die zugehörige Zielfunktion $c_p(\rho) = f^T K_p^{-1}(\rho) f$ ist jedoch nicht notwendigerweise konkav. Es gelang Stolpe und Svanberg ein Beispiel zu finden, in dem die Zielfunktion für alle $q \geq 1$ einen stationären Punkt ρ^* aufwies, welcher nicht ganzzahlig war (siehe [29]). Dies bedeutet für gradientenbasierte Optimierungsverfahren, dass, trotz der kontinuierlichen Steigerung des Strafparameters q , diese in Abhängigkeit von der Wahl des Startpunktes unter Umständen lediglich ein lokales Minimum finden, welches nicht ganzzahlig ist. Dies ist aufgrund der garantierten Konkavität der Funktion $c_q(\rho)$ für $q \geq \Delta E/E_0$ nicht möglich. Daher ist die hier vorgestellte alternative Interpolation in Zusammenhang mit der Continuation-Methode besser geeignet.

5.2 Der Pfad globaler Lösungen

Der Erfolg einer Continuation-Methode hängt in erster Linie von der Existenz eines Pfades von globalen Lösungen in Abhängigkeit des Strafparameters ab. Wir betrachten somit die Funktion $\rho^*(q) : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_h$, welche jedem Strafparameter q die zugehörige Globallösung zuordnet. Da wir bereits gesehen haben, dass diese Globallösung nicht notwendigerweise eindeutig ist, handelt es sich bei $\rho^*(q)$ somit nicht um eine Funktion. Des Weiteren gelang es, Beispiele zu finden, welche die Unstetigkeit dieser „Pfadfunktion“ zeigten (siehe [29]). Daher ist es nicht möglich, ohne weitere Einschränkungen, die eben diese gefundenen Beispiele ausschließen, die Konvergenz einer solchen Continuation-Methode zu beweisen. Es handelt sich daher lediglich um einen heuristischen Ansatz, welcher, wie die praktischen Beispiele zeigen (siehe Kapitel 7), in der Lage ist, bessere (bezüglich des Zielfunktionswertes) Schwarz-Weiß-Lösungen zu generieren.

Wir betrachten Problem $(MC_{h,\epsilon})$ in der Form (4.2), d.h. nur in Abhängigkeit der Variablen ρ_h , wobei $u_h = u_h(\rho_h)$. Wir werden zunächst die zugehörige Lagrangefunktion $L_q : \mathbb{R}^{e+1+e+e} \rightarrow \mathbb{R}$ aufstellen (siehe [17] Def. 8.3.3). Dazu führen wir nichtnegative Lagrange-Multiplikatoren $\mu, \nu \in \mathbb{R}^e$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein und erhalten

$$L_q(\rho, \lambda, \mu, \nu) = c_q(\rho) + \lambda \left(\sum_{i=1}^e \rho_i - V_0 \right) + \mu^T (\epsilon - \rho) + \nu^T (\rho - 1) ,$$

mit $\rho \in L^\infty(\Omega)$. Gesucht ist ein Sattelpunkt $(\rho^*, \lambda^*, \mu^*, \nu^*)$ der Lagrangefunktion, denn aufgrund des Satzes von Karush, Kuhn und Tucker (siehe [17]) ist dieser hinreichend für

die Optimalität des Punktes ρ^* in Problem (4.2). Diese Punkte werden auch KKT-Punkte genannt, da sie die sogenannten KKT-Bedingungen erfüllen (siehe [17])²

$$\begin{aligned}
\nabla c_q(\rho) + \lambda \vec{1} - \mu + \nu &= \vec{0} \\
\lambda \left(\sum_{i=1}^e \rho_i - V_0 \right) &= 0 \\
\mu_i(\epsilon - \rho_i) &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, e \\
\nu_i(\rho_i - 1) &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, e \\
\sum_{i=1}^e \rho_i - V_0 &\leq 0 \\
\epsilon - \rho &\leq 0 \\
\rho - 1 &\leq 0 \\
\lambda, \mu, \nu &\geq 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Diese Bedingungen legen die Definition einer Funktion $\Phi_q : \mathbb{R}^{e+1+e+e} \rightarrow \mathbb{R}^{e+1+e+e}$ nahe, deren Nullstelle gesucht ist

$$\Phi_q(\rho, \lambda, \mu, \nu) = \begin{pmatrix} \nabla c_q(\rho) + \lambda \vec{1} - \mu + \nu \\ \lambda \left(\sum_{i=1}^e \rho_i - V_0 \right) \\ \mu_i(\epsilon - \rho_i) \\ \nu_i(\rho_i - 1) \end{pmatrix}.$$

Angenommen $(\rho^*, \lambda^*, \mu^*, \nu^*)^T$ ist KKT-Punkt und somit eine Nullstelle der Funktion Φ_q für festes $q_0 \geq 0$. Die zugehörige Jacobimatrix bezeichnen wir mit $D\Phi_q(\rho^*, \lambda^*, \mu^*, \nu^*) \in \mathbb{R}^{3e+1 \times 3e+1}$ und sei invertierbar. Dann existiert eine implizite Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3e+1}$ in der Umgebung von q_0 und der zugehörigen Nullstelle mit

$$g(q_0) = (\rho^*, \lambda^*, \mu^*, \nu^*)^T \quad \text{und} \quad \Phi_q(g(q)) = 0.$$

für alle q in einer Umgebung von q_0 (siehe Satz 4.1.2 über die implizite Funktion). Mit Hilfe von Folgerung 4.1.3 können wir eine Formel für den Gradienten der Funktion g angeben

$$\begin{aligned}
\nabla g(q) &= -D\Phi_{q_0}^{-1}(\rho^*, \lambda^*, \mu^*, \nu^*) \frac{\partial \Phi_q}{\partial q}(g(q)) \\
&= -D\Phi_{q_0}(\rho^*, \lambda^*, \mu^*, \nu^*)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q} c_q(\rho) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Invertierbarkeit der Jacobimatrix Voraussetzung ist für die Anwendung des Satzes über die implizite Funktion. Für den Fall des 2-Materialien-Problems mit

²Diese Äquivalenz gilt nur falls (wie hier der Fall) sämtliche im Problem auftretenden Funktionen konvex und differenzierbar sind.

$E_0, E_1 > 0$ oder aber einer strikt positiven unteren Schranke ϵ ist dies stets gewährleistet. Mit Hilfe des oben beschriebenen Gradienten ist man in der Lage für kleine Schrittweiten δq , den Pfad der globalen Lösungen näherungsweise entlang zuschreiten und somit einen besseren Startwert zu generieren

$$g(q + \Delta q) \approx g(q) + \nabla g(q)\Delta q .$$

Im Laufe numerischer Tests stellte sich heraus, dass dies nur für sehr kleine Schrittweiten Δq möglich war, und der Startwert $g(q + \Delta q)$ die nachfolgende Berechnung nicht wesentlich beschleunigte.

Kapitel 6

Die Implementation eines Topologieoptimierungs-Algorithmus

In diesem Kapitel werden der Optimierungsalgorithmus TopOpt sowie dessen wichtigste Komponenten erläutert. Wir werden das FE-Paket „SOFAR“ (siehe [27]) vorstellen. SOFAR wird seit einigen Jahren am Lehrstuhl X Wissenschaftliches Rechnen für FE-Berechnungen verwendet und weiterentwickelt.

Daraufhin gehen wir auf die von TopOpt verwendeten Gleichungssystemlöser ein. Es folgt ein Abschnitt, der die kommerzielle Optimierungssoftware „SNOPT“ behandelt. In diesem Zusammenhang werfen wir einen Blick auf den SNOPT zugrunde liegenden SQP-Algorithmus und seine Voraussetzungen an das Minimum-Compliance-Problem. Abschließend erläutern wir das Programm TopOpt, welches als Schnittstelle und Steuerungsmodul zwischen der FE-Software, dem Gleichungssystemlöser und SNOPT fungiert.

6.1 Das FE-Paket SOFAR

An dieser Stelle stellen wir das FE-Paket SOFAR vor, indem wir auf die für die Topologieoptimierung interessanten Aspekte eingehen. SOFAR [27] steht für „Small Object oriented Finite element library for Application and Research“. Es soll zu Beginn die Aufgabe der Vernetzung der Domäne Ω und später die Darstellung einer gefundenen Lösung übernehmen. Das Gleichungssystem

$$K(\rho_h)u_h = f$$

wird jedoch nicht von SOFAR gelöst. Dies geschieht mit Hilfe der später hier vorgestellten Gleichungssystemlöser innerhalb von TopOpt. Diese Maßnahme reduziert die Anzahl notwendiger Kommunikation der Programme SOFAR und TopOpt auf 2, einmal zu Beginn der Optimierung und einmal am Ende.

SOFAR ermöglicht die einfache Vernetzung von Gebieten Ω sowohl in 2 als auch 3 Dimen-

sionen. Die dazu notwendigen drei Dateien „connection“, „coordinates“ und „mesh“ lassen sich für einfache Beispiele schnell angeben. Für komplizierte Beispiele (siehe Kapitel 7) ist es sinnvoll, sogenannte Mesher zu erzeugen, welche diese drei Dateien automatisch generieren. Sie enthalten die notwendigen Informationen bezogen auf das gröbste Gitter. Diesem Gitter wird der Verfeinerungsgrad 0 zugewiesen. Die Art der Triangulierung des Gebiets Ω in disjunkte Teilgebiete (z.B. Tetraeder, Hexaeder, etc...) ist frei wählbar. Alle weiteren Verfeinerungen werden daraufhin von SOFAR automatisch vorgenommen. Dabei bedeutet jede zusätzliche Stufe eine Halbierung der Gitterweite. Das auf diese Weise erzeugte Gitter der Stufe 0 kann dann für die spätere Verwendung abgelegt werden. Es ist des Weiteren natürlich in der Lage, selbst stückweise nichtlinear berandete Gebiete zu vernetzen (siehe Abbildung 6.1). Handelt es sich z.B. um eine rund-berandete Struktur Ω , so sorgt SOFAR automatisch dafür, dass Randpunkte auch nach weiteren Verfeinerungen stets auf dem vorgegebenen Kreisbogen liegen (siehe Kapitel 7). Ein Hauptmerkmal von SOFAR ist die

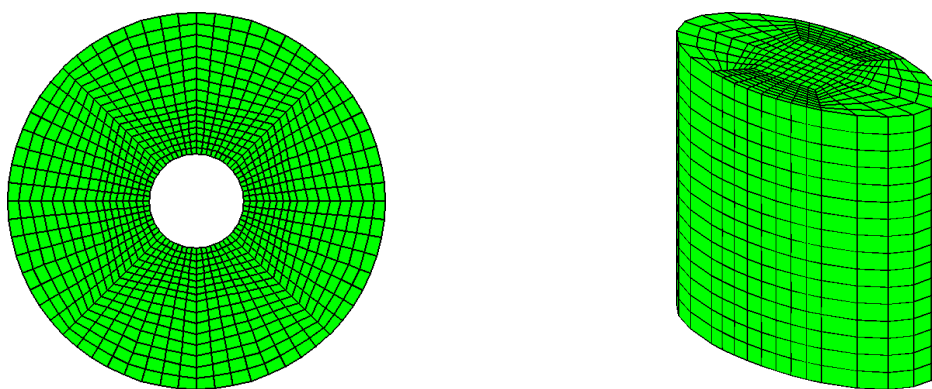


Abbildung 6.1: Darstellung der Netzstruktur für ein 2-dimensionales (links) bzw. 3-dimensionales Gebiet (rechts) mit teilweise runden Rändern.

Möglichkeit, jederzeit Ansatzfunktionen beliebigen Polynomgrades verwenden zu können, die mit Hilfe von Gegenbauerpolynomen realisiert werden (siehe [27]). Dies unterscheidet SOFAR stark von kommerziellen Produkten in diesem Bereich. Wir werden anhand einiger Beispiele in Kapitel 7 sehen, dass in Abhängigkeit des verwendeten Polynomgrades für die Ansatzfunktion der Verschiebung $u_h \in U_h$ sogenannte „Checkerboards“ vermieden werden können. Es handelt sich hierbei um Gebiete in Ω in denen die Designfunktion ρ_h abwechselnd die Werte Null (Weiss) und Eins (Schwarz) annimmt (siehe z.B. Abbildung 7.11). Dieses Phänomen kann für stückweise bilineare Ansatzfunktionen $\phi_h \in P_1$ beobachtet werden und verschwindet für biquadratische Ansatzfunktionen $\phi_h \in P_2$. In Kapitel 7 stellen wir die auf diese Weise erhaltenen unterschiedlichen Ergebnisse vor.

Ein weiterer großer Vorteil von SOFAR ist die Möglichkeit der adaptiven Gitterverfeinerung. Anhand von a posteriori/Fehlerschätzern bezogen auf die zu berechnende Verschiebung u_h kann das vorhandene Gitter an „kritischen“ Stellen, also Stellen in denen der

geschätzte Fehler zwischen kontinuierlicher Lösung u und diskreter Lösung u_h eine gewisse Toleranz überschreitet, weiter verfeinert werden, ohne das gesamte Gitter verfeinern zu müssen. Es ist somit möglich, eine zusätzliche Anzahl an Knoten (und somit Freiheitsgraden) in Gebieten, in denen der vorhandene Fehler bereits gering ist, einzusparen.

Die nach der Optimierung sich anschließende Visualisierung erfolgt mit Hilfe des General Mesh Viewers GMV [32]. GMV ermöglicht die Visualisierung sowohl in 2D als auch in 3D. Der Betrachtungswinkel ist einstellbar, sowie die Entfernung zur Struktur. Verschiebungen können farblich dargestellt werden. Das unter Umständen sehr komplexe Design von 3D-Strukturen kann schichtweise betrachtet werden. Zellen mit $\rho_h^*(x) = 0$ können ausgeblendet werden. Dies macht es uns erst möglich in dreidimensionale Strukturen von außen hineinzuschauen (siehe z.B. Abbildung 7.36). SOFAR ist in der Lage, sämtliche relevanten Daten in GMV-Format auszugeben. Dazu gehören natürlich die Lösung ρ_h^* aber auch die zugehörige Verschiebung u_h^* . Die Funktion $W(u_h^*)$ (siehe z.B. Abbildung 7.7) kann ebenfalls nach erfolgter Optimierung von SOFAR ausgewertet und mit GMV visualisiert werden. Für die Konvergenzuntersuchung der optimalen Compliance $l(u_h^*)$ für $h \rightarrow 0$ (siehe Abbildung 7.3) ist es notwendig, sämtliche optimalen Strukturen ρ_h^* auf der gleichen Gitterverfeinerungsstufe zu vergleichen. Dies liegt in der Tatsache begründet, dass die zugehörige Compliance auf größeren Gittern höher ist. Diese Aufgabe übernimmt ebenfalls SOFAR. SOFAR ist in der Lage, ein für die Gitterweite h_1 optimales Design $\rho_{h_1}^*$ auf das entsprechende feinere Gitter mit Weite h_2 zu übertragen.

6.2 Die Gleichungssystemlöser

Zur Lösung der FE-Gleichung stehen TopOpt zwei unterschiedliche Verfahren zur Verfügung. Für das Problem $(MCR_{h,\epsilon})$ kommt ein präkonditioniertes Verfahren der konjugierten Gradienten (siehe z.B. [17]) zum Einsatz. Die Präkonditionierung erfolgt mittels unvollständiger Cholesky-Zerlegung. Die untere Schranke $\epsilon > 0$ ist hier notwendig, um die Konvergenz dieses iterativen Löser zu garantieren. Das Problem (MCR_h) jedoch erfordert ein Verfahren, welches auch für nichtinvertierbare Matrizen $K(\rho_h)$ eine Lösung liefert, sofern diese existiert. Daher wird für diesen Fall ein „Least Square“-Löser verwendet. Dieser löst das folgende quadratische Minimierungsproblem in u_h

$$\min_{u_h \in U_h} \|K(\rho_h)u_h - f\|_2^2$$

Die verwendeten Lösungsverfahren stammen beide aus der NAG-Bibliothek [15], daher verweisen wir auf die Dokumentationen der jeweiligen Routine. Wir werden hier statt dessen auf die Besonderheiten der Implementierung im Zusammenhang mit den Gleichungssystemlösern eingehen.

Betrachten wir zunächst das präkonditionierte konjugierte Gradienten Verfahren. Die Präkonditionierungsmatrix wird durch eine unvollständige Cholesky-Zerlegung der Steifigkeitsmatrix K erzeugt. Dieses Verfahren verwendet zur Speicherung der Steifigkeitsmatrix ein

Sparse-Format. Dies ermöglicht die Berechnung von sehr großen Problemen, wie z.B. in der 3-dimensionalen Topologieoptimierung, mit vergleichbar geringem Speicherplatzbedarf. Dazu ist es notwendig, die Besetzungsstruktur der Matrix K unabhängig von ρ_h einmalig zu berechnen und zu speichern. Es werden diejenigen Positionen (i, j) ermittelt, an denen Nichtnulleinträge $K_{i,j} \neq 0$ vorhanden sind bzw. später vorkommen können. Die Assemblierung der Steifigkeitsmatrix erfolgt vollständig im Sparse-Format, da es zuviel Arbeitsspeicher erfordert, die Matrix K zunächst in vollem Umfang zu assemblieren und sie erst dann im Sparse-Format anzulegen.

Man beachte, dass die Assemblierung der Matrix $K(\rho_h)$ in jedem Iterationsschritt des Optimierungsalgorithmus für unterschiedliche Designvektoren ρ_h vorzunehmen ist. Daher ist es sinnvoll, die Belegungsstruktur einmalig zu speichern, um sie in den folgenden Schritten nicht immer neu berechnen zu müssen.

Das Least-Square-Verfahren hingegen benötigt keine assemblierte Steifigkeitsmatrix, sondern lediglich eine Routine, die das Matrix-Vektor-Produkt von $K(\rho_h)$ mit einem beliebigen Vektor u_h bestimmen kann. Dazu zerlegen wir das Produkt von Steifigkeitsmatrix $K(\rho_h)$ und Verschiebung u_h in eine Summe von Produkten von u_h mit den lokalen Steifigkeitsmatrizen:

$$K(\rho_h)u_h = \sum_{i=1}^e [\rho_h]_i K_i u_h \quad (6.1)$$

Die Einträge der lokalen Steifigkeitsmatrizen K_i mit $i = 1, \dots, e$ sind nicht identisch falls die Referenzelemente nicht vom gleichen Typ und daher für allgemeinste Triangulierungen untereinander verschieden sind.

Mit Hilfe des obigen Ansatzes ist es möglich, eine Lösung der Gleichung $K(\rho_h)u_h = f$ zu erhalten, ohne die Matrix $K(\rho_h)$ zu assemblieren und im Speicher ablegen zu müssen. Ein erheblicher Anteil des Arbeitsspeichers kann dadurch eingespart werden. Ein großer Nachteil dieser Methode sind jedoch die signifikant höheren Rechenzeiten bei der Lösung der Gleichung im Vergleich zum CG-Verfahren. Daher bevorzugen wir Letzteres, sofern die Problemstellung dieses erlaubt d.h., wenn die auftauchenden Steifigkeitsmatrizen stets positiv definit sind. In Kapitel 7 werden die mit diesen Verfahren gewonnenen Lösungen untereinander verglichen.

6.3 SNOPT – ein SQP-Verfahren

Das Software-Paket SNOPT (siehe [14]) ist eine Optimierungsroutine, speziell für Probleme mit vielen Variablen sowie Nebenbedingungen. SNOPT steht für „Sparse Nonlinear Optimizer“. Es ist in der Lage, eine nichtlineare Zielfunktion unter nichtlinearen Nebenbedingungen zu minimieren. Die allgemeine Form eines solchen nichtlinearen Optimierungsproblems ist folgende:

Problem 6.3.1 (NOPT)Finde $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ \text{u.d.N.: } & l \leq \begin{pmatrix} x \\ F(x) \\ Ax \end{pmatrix} \leq u, \end{aligned} \tag{6.2}$$

mit l und u einem Vektor von Unter- bzw. Oberschranken. A ist eine dünn besetzte Matrix und $F(x)$ eine Vektor glatter nichtlinearer Funktionen $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn möglich sollten die Gradienten von f und F bekannt sein und dem Programm vom Benutzer zur Verfügung gestellt werden. Andernfalls berechnet SNOPT die fehlenden Gradienten mittels finiter Differenzen. SNOPT basiert auf einem SQP Algorithmus, welcher unter bestimmten Voraussetzungen an das Problem lokale Optima bestimmt. Wir betrachten daher an dieser Stelle Grundlagen zu SQP-Verfahren, um typische mathematische Voraussetzungen für die Konvergenz des Algorithmus zu erläutern. Dann untersuchen wir, ob diese Voraussetzungen in unserem Fall erfüllt sind. SQP steht für „sequential quadratic programming“. SQP ist ein Verfahren zur Lösung nichtlinearer Probleme mit Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen der Form

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{u.d.N.: } & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ & h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Man beachte, dass es sich bei Problem (NOPT) um ein Problem obiger Gestalt handelt. Wir definieren nun eine Funktion $\Phi(x, \lambda)$, welche die Eigenschaft besitzt, dass ihre Nullstellen (x^*, λ^*, μ^*) die KKT-Bedingungen zu obigem Problem erfüllen (siehe [17]). Es gilt

$$\Phi(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \begin{pmatrix} \nabla f(x^*) + \lambda^{*T} \nabla g(x^*) + \mu^{*T} \nabla h(x^*) \\ \lambda_1^* g_1(x^*) \\ \vdots \\ \lambda_m^* g_m(x^*) \\ h_1(x^*) \\ \vdots \\ h_k(x^*) \end{pmatrix} = 0$$

mit $\lambda^* \geq 0$ und $g(x^*) \leq 0$. Unter der Voraussetzung, dass sämtliche Funktionen in (6.3) zweimal stetig differenzierbar sind, existiert die Jacobi-Matrix $\nabla \Phi(x, \lambda, \mu)$ von Φ . Unter den Voraussetzungen des Satzes 6.3.4 ist die Regularität dieser Matrix im Punkt (x^*, λ^*, μ^*) gesichert und wir können das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung von Φ anwenden. Wir bezeichnen mit (x^k, λ^k, μ^k) die aktuelle Iterierte und berechnen den Newton-Schritt

$(\Delta x^k, \Delta \lambda^k, \Delta \mu^k)$ anhand des Gleichungssystems

$$\nabla \Phi(x^k, \lambda^k, \mu^k) \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta \mu^k \end{pmatrix} = -\Phi(x^k, \lambda^k, \mu^k)$$

Aufgrund der speziellen Gestalt der Matrix $\nabla \Phi$ kann obiges Gleichungssystem auch folgendermaßen aufgeschrieben werden

$$\begin{aligned} \nabla f(x^k) + \nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k, \mu^k) \Delta x^k + \lambda^{kT} \nabla g(x^k) + \mu^{kT} \nabla h(x^k) &= 0 \\ \lambda_i^{k+1} \left(g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T \Delta x^k \right) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x^k) + \nabla h_j(x^k)^T \Delta x^k &= 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Fordern wir zusätzlich

$$\begin{aligned} \lambda_i^{k+1} &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \\ g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T \Delta x^k &\leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

dann handelt es sich genau um die KKT-Bedingungen zu folgendem quadratischen Optimierungsproblem

Problem 6.3.2 (QP)

Finde $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} \min_{\Delta x} \quad & \nabla f(x^k) \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k, \mu^k) \Delta x^k \\ \text{u. d. N.:} \quad & g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T \Delta x^k \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x^k) + \nabla h_j(x^k)^T \Delta x^k = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{6.4}$$

Dieses in jedem Iterationsschritt k zu lösende quadratische Unterproblem, welches als Lösung die Schrittweite Δx^k bestimmt, gibt dem Verfahren seinen Namen.

Wir stellen nun eine bestimmte Variante eines SQP-Verfahrens vor, für die daraufhin ein Konvergenzresultat folgt (siehe [13]).

Algorithmus 6.3.3 (SQP)

1. Wähle $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, und setze $k := 0$.
2. Ist (x^k, λ^k, μ^k) ein KKT-Punkt von (6.3): STOP.
3. Berechne einen KKT-Punkt $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ des quadratischen Teilproblems (QP). Besitzt dieses quadratische Teilproblem mehrere KKT-Punkte, so wähle den KKT-Punkt $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1})$ derart, dass der Abstand

$$\|(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (x^k, \lambda^k, \mu^k)\|$$

zu (x^k, λ^k, μ^k) minimal wird.

4. Setze $k:=k+1$, und gehe zu Schritt 1.

Der nun folgende lokale Konvergenzsatz (siehe [13]) enthält eine Reihe Voraussetzungen an das Problem (6.3). Wir werden sehen, dass diese von Problem (MCR_h) nicht erfüllt werden. Dies ist ein weiterer Grund, eine positive untere Schranke $\epsilon > 0$ einzuführen, die Verschiebung u als Funktion in ρ aufzufassen und somit Problem $(MCR_{h,\epsilon})$ zu betrachten.

Satz 6.3.4

Sei $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ ein KKT-Punkt von (6.3) der den folgenden Voraussetzungen genügen möge:

- Es ist $g_i(x^*) + \lambda_i^* \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ (sprich: strikte Komplementarität).
- Die Gradienten $\nabla h_j(x^*)$, $j = 1, \dots, p$ und $\nabla g_i(x^*)$, $i \in I(x^*) := \{i \mid g_i(x^*) = 0\}$ sind linear unabhängig.
- Es ist $d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0$ für alle $d \neq 0$ mit $\nabla h_j(x^*)^T d = 0$, $j = 1, \dots, p$ und $\nabla g_i(x^*)^T d = 0$, $i \in I(x^*)$.

Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass die folgenden Aussagen für jeden Startvektor $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathcal{U}_\epsilon(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ und jede durch den Algorithmus (SQP) erzeugte Folge $((x^k, \lambda^k, \mu^k))_{k \in \mathbb{N}}$ gelten:

- Der Algorithmus (SQP) ist wohldefiniert, und die Folge $((x^k, \lambda^k, \mu^k))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen (x^*, λ^*, μ^*) .
- Die Konvergenzrate ist superlinear.
- Sind $\nabla^2 f$, $\nabla^2 g_i$, $i = 1, \dots, m$ und $\nabla^2 h_j$, $j = 1, \dots, p$ lokal Lipschitz-stetig, so ist die Konvergenzrate sogar quadratisch.

Es bleibt zu sagen, dass moderne SQP-Verfahren in mehrerer Hinsicht von dem hier vorgestellten Algorithmus abweichen. Die aufwendige Berechnung der Matrix $\nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k, \mu^k)$ in jedem Iterationsschritt wird in der Regel eingespart und statt dessen eine Näherung H_k verwendet, welche durch Quasi-Newton Updates erzeugt wird.

Der nächste Satz beschreibt eine Eigenschaft aller lokalen Minima x^* , welche die Mangasarian-Fromovitz-Regularitätsbedingung (MFCQ) erfüllen (siehe [13]).

Satz 6.3.5

Sei x^* ein lokales Minimum des Optimierungsproblems (6.3) mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- MFCQ gilt in x^* .

- Die Menge der zu x^* gehörenden Lagrange-Multiplikatoren $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ ist nichtleer und beschränkt.

Voraussetzung 2 in Satz 6.3.4 ist als „linear independence constraint qualification“ (LICQ) bekannt, eine Regularitätsbedingung erster Ordnung. Es gilt stets

$$LICQ \Rightarrow MFCQ,$$

und für Probleme ohne Ungleichungsnebenbedingungen sind sie sogar identisch. Im folgenden werden wir sehen, dass selbst die schwächere Bedingung MFCQ in unserer Anwendung nicht erfüllt sein muss.

Wir betrachten nun die Problemformulierung (MCR_h) . Die zu optimierende Variable x besteht aus zwei Komponenten, die Verschiebungen $u_h \in \mathbb{R}^n$ und die relaxierte Designvariable $\rho_h \in \mathbb{R}^e$. Demzufolge hat die Lagrangefunktion die Gestalt

$$L((\rho_h, u_h), \lambda, \mu) = f^T u + \lambda(1^T \rho_h - V_0) - \mu^T (K(\rho_h)u_h - f),$$

wobei die Box-Constraints nicht berücksichtigt wurden. Der zugehörige Gradient $\nabla_x L(x, \lambda, \mu)$ ist

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_h^T K_1 \\ \vdots \\ u_h^T K_e \\ K(\rho_h) \end{pmatrix} \mu.$$

Es sei (ρ_h^*, u_h^*) ein KKT-Punkt. Dann muss gelten

$$\nabla_x L((\rho_h^*, u_h^*), \lambda^*, \mu^*) = 0$$

Wir betrachten die unteren n Zeilen und erhalten

$$f - K(\rho_h^*)\mu^* = 0.$$

Sei nun ρ_h^* eine optimale Struktur mit Löchern, welche die Kraft f tragen kann, sprich f liegt im Bild von $K(\rho_h^*)$ und $K(\rho_h^*)$ sei singular. Dann existiert eine Folge $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft

$$f - K(\rho_h^*)\mu_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und $\|\mu_k\| \rightarrow \infty$. Falls die restlichen Gleichungen und Ungleichungen der KKT-Bedingungen nicht die Beschränktheit dieser Folge $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ erzwingen, folgt, dass die Menge der zu $x^* = (\rho_h^*, u_h^*)$ gehörigen Lagrangemultiplikatoren $\mathcal{L}(x^*)$ unbeschränkt ist. Mit Satz 6.3.5 ist in diesem Fall die MFCQ-Bedingung in x^* nicht erfüllt und somit die LICQ-Bedingung ebenfalls nicht. Die Konvergenz eines SQP-Verfahrens kann dann anhand dieser Problemformulierung nicht bewiesen werden. Die numerische Praxis bestätigt diese Tatsache.

Es ist also notwendig, Problemformulierung $(MCR_{h,\epsilon})$ im Zusammenhang mit dem Algorithmus SQP zu betrachten. Wir fassen die Verschiebung u_h stets als Funktion in ρ_h auf. Die positive Untergrenze ϵ verhindert die Singularität der Matrix K in jedem Punkt ρ_h . Die Voraussetzungen an das SQP-Verfahren sind somit bis auf strikte Komplementarität erfüllt.

6.4 Aufbau des Algorithmus

In diesem Abschnitt stellen wir kurz das Programm TopOpt vor. Es dient als Schnittstelle zwischen SOFAR und SNOPT und übernimmt die Initialisierung einiger, vor der Optimierung festzulegender Parameter. Des Weiteren erläutern wir den Ablauf der Topologieoptimierung, das Zusammenwirken der einzeln bereits vorgestellten Komponenten (siehe Abbildung 6.4). Zu Beginn erzeugen wir mit Hilfe von SOFAR ein Gitter der zu optimierenden

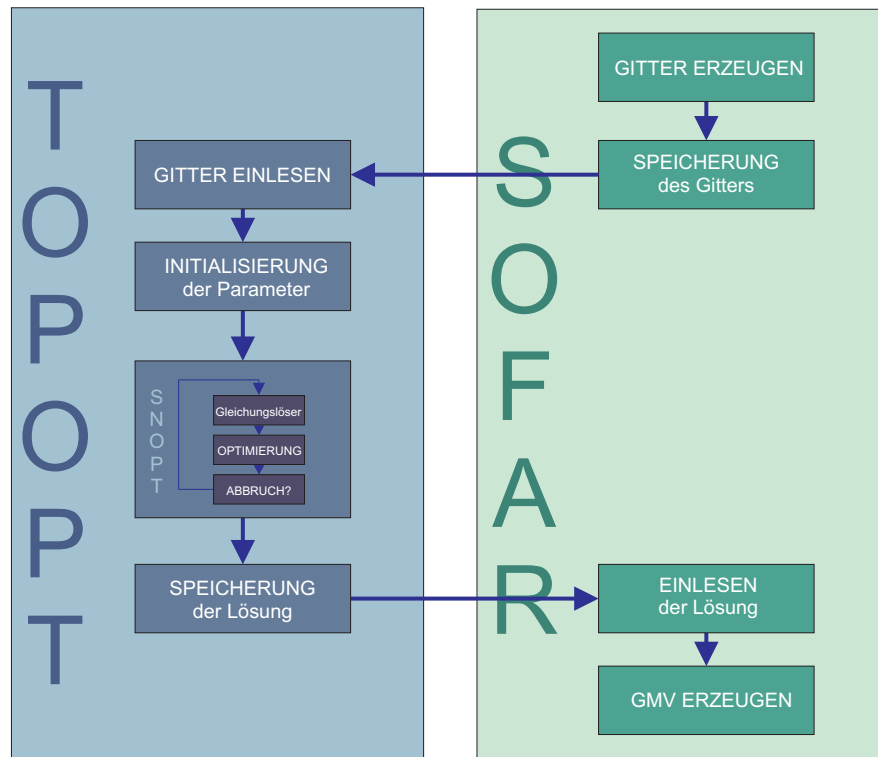


Abbildung 6.2: Schematische Darstellung der Kommunikation zwischen SOFAR und TopOpt.

Struktur Ω in der gewünschten Verfeinerungsstufe. An dieser Stelle legen wir uns ebenfalls bereits hinsichtlich des Ansatzraums $U_h \subset U$ fest. Die von SOFAR erzeugten Gitterdaten bestehen unter anderem aus den Elementsteifigkeitsmatrizen K_i für $i = 1, \dots, e$. Diese sind abhängig von der Art des zugehörigen finiten Elements. Ihre Einträge sind im Allgemeinen nicht gleich, sondern abhängig vom zugehörigen Referenzelement. Es werden lediglich Nichtnulleinträge übergeben. Daraufhin wartet SOFAR auf die Übermittlung der Lösungsvektoren ρ_h^* und u_h^* . Somit kann an dieser Stelle TopOpt gestartet werden. TopOpt verlangt die Eingabe des Parameters V_0 des maximal zu verwendenden Volumens, des Strafparameters q , und es wird abgefragt, ob eine Continuation-Methode zur automatischen Steigerung des Parameters q durchgeführt werden soll. In diesem Zusammenhang besteht außerdem

die Möglichkeit zwischen der Interpolation nach SIMP oder nach Stolpe und Svanberg zu wählen. Für das Problem $(MCR_{h,\epsilon})$ benutzt TopOpt ein präkonditioniertes CG-Verfahren, welches an dieser Stelle die Erzeugung und Speicherung der Belegungsstruktur einer jeden Steifigkeitsmatrix $K(\rho_h)$ für $\rho_h \in \overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon}$ erzwingt. Dies ist für Problem (MCR_h) mit Least-Square-Solver nicht notwendig. Dort müssen Steifigkeitsmatrizen nicht assembliert werden. In jedem Fall folgt nun der Aufruf des Optimierungsalgorithmus SNOPT. Es werden alle nötigen Daten übergeben sowie der Name einer Subroutine „usrfun“. Diese verlangt die Auswertung sämtlicher Funktionen innerhalb des Problems sowie Gradienteninformationen ebendieser an einem Punkt $\bar{\rho}_h$, der der Routine übergeben wird. Dazu muss zunächst das Gleichungssystem $K(\bar{\rho}_h)u_h = f$ gelöst werden. Es erfolgt somit pro Funktionsauswertung innerhalb von SNOPT ein Aufruf des Gleichungssystemlösers, welcher stets sehr zeitaufwendig ist. Diese Tatsache haben alle Algorithmen der Topologie Optimierung gemein, die auf der Berechnung von Verschiebungen beruhen. Der Gleichungssystemlöser sollte daher in der Lage sein, die Lösung der FE-Gleichung zügig zu berechnen. Des Weiteren sind gradientenbasierte Optimierungsalgorithmen vorzuziehen, da sie in der Regel mit nur wenig Funktionsauswertungen ein Optimum berechnen können.

Letztendlich wird die Lösung gespeichert und SOFAR übergeben. In einem letzten Bearbeitungsschritt erfolgt nun die Aufbereitung der Lösung zur visuellen Darstellung innerhalb GMVs. Die optimale Designfunktion ρ_h^* sowie die zugehörige Verschiebung u_h^* werden im GMV-Format angelegt. Die „Strainenergy-Density-function“ $W(u_h^*)$ kann nun von SOFAR ermittelt werden. Falls ρ_h^* auf ein feineres Gitter übertragen werden soll, so ist dies ebenfalls möglich.

Kapitel 7

Numerische Beispiele

Es folgen nun eine Reihe von numerischen Resultaten für klassische Testbeispiele sowohl in 2D als auch 3D. Es handelt sich dabei z.B. um das Cantileverproblem, den MBB-Beam und einige weitere. Dies ermöglicht uns, die Resultate mit denen anderer Topologieoptimierungsalgorithmen zu vergleichen (siehe z.B. [6], [7]).

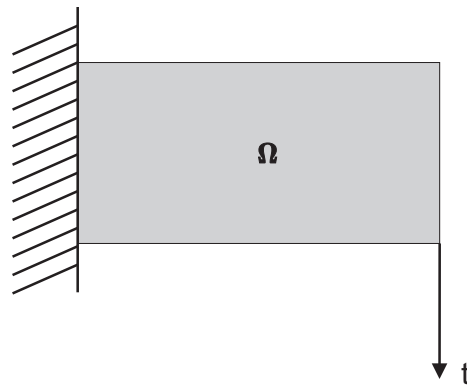
Die nachfolgenden Tabellen enthalten folgende Abkürzungen:

e	Anzahl Designvariablen $\rho_h \in \mathbb{R}^e$
n	Dimension des Verschiebungsvektors $u_h \in \mathbb{R}^n$
E_0	minimaler Elastizitätstensor (siehe (5.3))
ϵ	Intervalluntergrenze $[\rho_h]_i \in [\epsilon, 1] \quad \forall i = 1, \dots, e$
q	Bestrafungsparameter
V_0	Volumengrenze in Prozent
$\#I$	Anzahl Iterationen
$\#F$	Anzahl Funktionsauswertungen
C	Compliance, sprich Zielfunktionswert
cont.?	Continuation-Methode ja/nein
$u_h?$	Ansatzfunktionen für u_h : bilinear oder P2

7.1 Beispiel: Cantilever Problem

Wir beginnen unsere Untersuchung mit dem Kragarm-Problem (englisch: Cantilever Problem). Die Domäne Ω , die angreifende Kraft f sowie die Dirichlet-Randbedingungen sind in Abbildung 7.1 dargestellt. Zunächst berechneten wir die Lösung des Problems $MCR_{h,\epsilon}$ auf drei unterschiedlich grossen Gitterstrukturen (siehe Tabelle 7.1 und Abbildungen 7.2).

Man erkennt, dass grosse Bereiche grau sind, und ρ_h^* daher dort Werte zwischen Null und Eins annimmt. Des Weiteren fällt auf, dass der Zielfunktionswert trotz der jeweiligen Halbierung der Gitterweite grösser statt kleiner wird. Dies liegt an der abnehmenden Steifigkeit einer stets gleichen Struktur auf einem feiner werdenden Gitter. Daher ist es notwendig,

Abbildung 7.1: Darstellung der Domäne Ω des Cantileverproblems.

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
512	1122	0,01	0	0	50	109	128	nein	bil.	264,9988
2048	4290	0,01	0	0	50	219	243	nein	bil.	271,5237
8192	16770	0,01	0	0	50	224	258	nein	bil.	278,0668

Tabelle 7.1: Numerische Resultate für das Cantilever Problem.

die optimalen Designvektoren ρ_h^* auf das feinste vorliegende Gitter zu projizieren und auf diesem die zugehörige Verschiebung u_h^* zu berechnen, damit diese vergleichbar werden. Abbildung 7.3 zeigt den graphischen Verlauf der Zielfunktionswerte des Cantileverproblems ausgewertet auf einem stets gleich großen Gitter mit 256×128 Elementen.

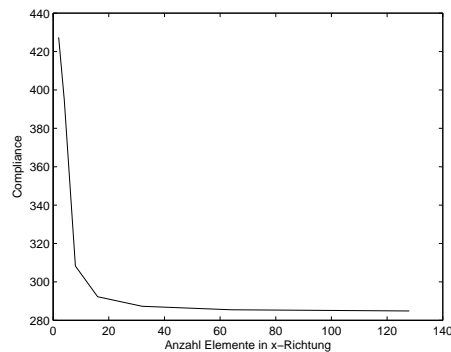


Abbildung 7.3: Compliance der optimalen Struktur des Cantileverproblems in Abhängigkeit der Gittergröße (hier angegeben durch die Anzahl Elemente in x-Richtung).

Die nächste Testreihe vergleicht die Continuation-Methode, in der der Strafparameter von

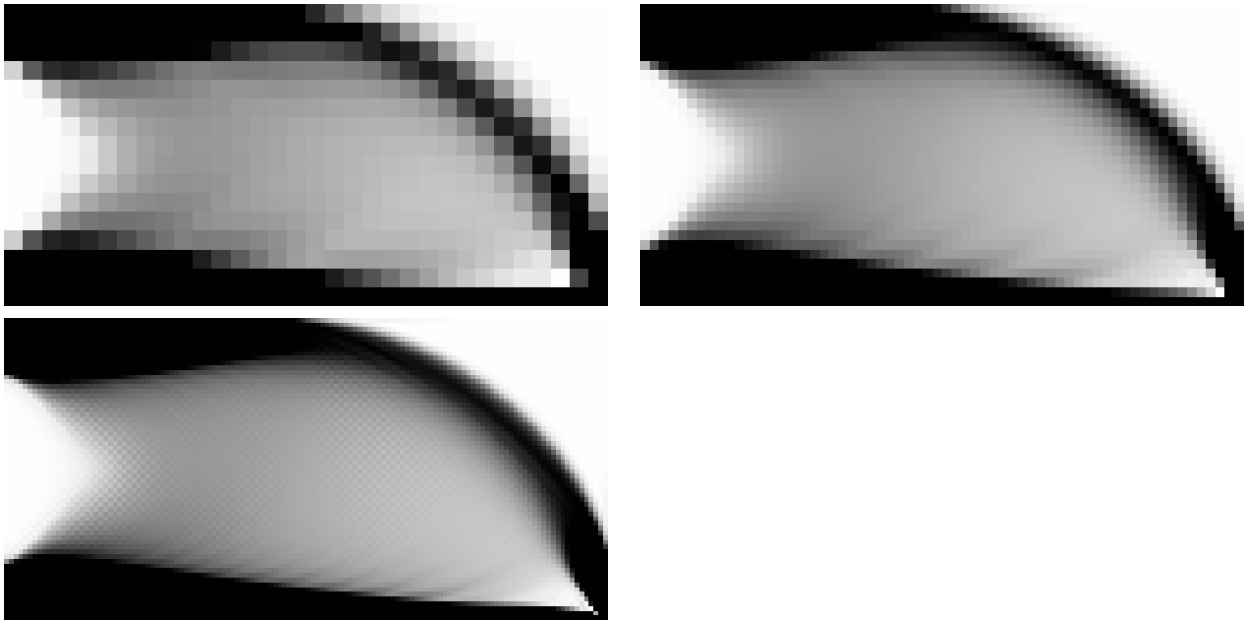


Abbildung 7.2: Lösungen des Cantileverproblems aus Tabelle 7.1.

Null beginnend kontinuierlich in 6 Schritten erhöht wird bis er den Wert $q = \Delta E/E_0 = 99$ erreicht hat (siehe Abb. 7.5), mit einer unmittelbaren Bestrafung von $q = 99$ (siehe Abb. 7.4). Dies entspricht der Stolpe-Svanberg-Interpolation. Der Bestrafungsparameter $q = 99$ entspricht der in Satz 5.1.7 angegebenen Grenze, ab der die zugehörige Zielfunktion nachweislich konkav ist.

Die in Tabelle 7.2 angegebene Zahl an Iterationen bzw. Funktionsauswertungen für die Continuation-Methode summiert die Zahl der Iterationen der sieben Durchläufe von SNOPT auf und sollte daher größer sein als bei der direkten Bestrafung mit $q = 99$, wo nur ein Durchlauf stattfindet. Dies ist jedoch nicht der Fall. Die Testergebnisse zeigen, dass sich die Anzahl benötigter Iterationen von einem Durchlauf zum nächsten ungefähr halbiert, mit dem Resultat, dass die beiden letzten Durchläufe z.B. keine Iterationen mehr benötigen. Wir vergleichen die Zielfunktionswerte mit und ohne Continuation-Methode und erkennen, dass sich der zusätzliche Aufwand von weiteren 6 Durchläufen in einem besseren Compliance-Wert niederschlägt.

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
512	1122	0,01	0	99	50	210	318	nein	bil.	330,4874
512	1122	0,01	0	0	50	272	340	ja	bil.	284,1078
2048	4290	0,01	0	99	50	721	1065	nein	bil.	330,2866
2048	4290	0,01	0	0	50	492	576	ja	bil.	288,0890
8192	16770	0,01	0	99	50	2618	3286	nein	bil.	342,4214
8192	16770	0,01	0	0	50	890	1020	ja	bil.	289,7362

Tabelle 7.2: Numerische Resultate für das Cantilever Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.

Man beachte des Weiteren, dass es sich bei den in Abbildung 7.4 und 7.5 dargestellten Lösungen lediglich um lokale Optima handelt. Das zugrunde liegende Problem ist nicht konvex und kann daher mittels SQP nicht global gelöst werden. Man erkennt sehr deutlich die so genannten Checkerboard-Bereiche. Sie sind der Ausdruck der H-Konvergenz einer Folge von diskreten Lösungen für immer kleiner werdende Gitterweite h gegen die kontinuierliche Lösung ρ^* .

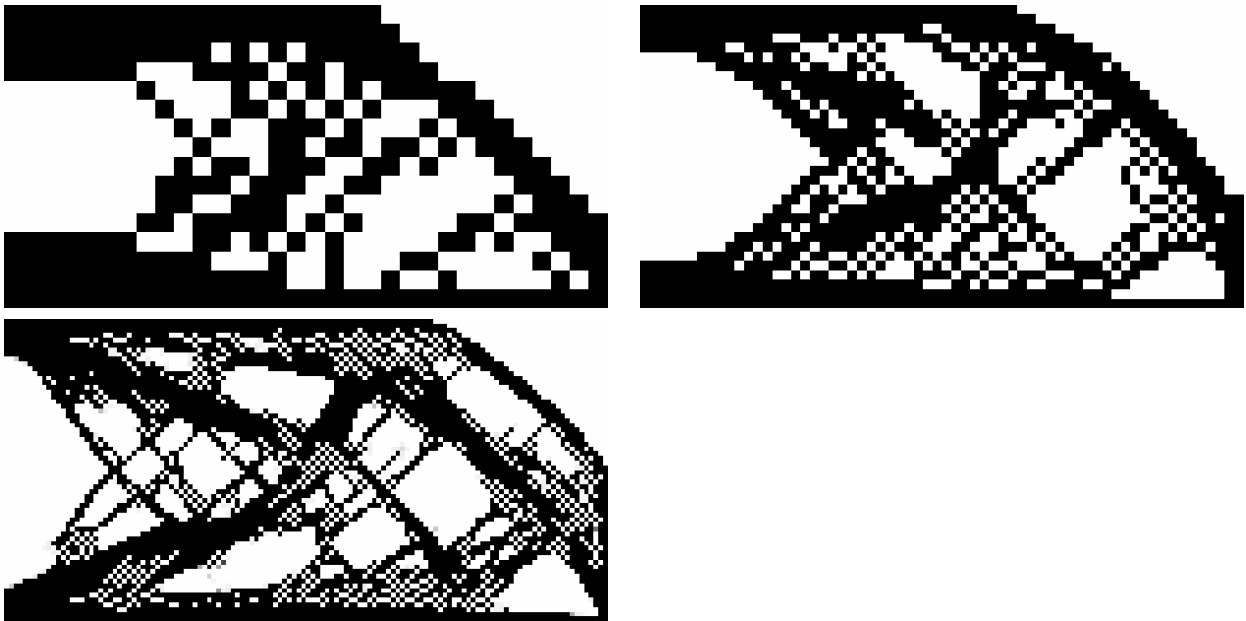


Abbildung 7.4: Lösungen des Cantileverproblems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.2.

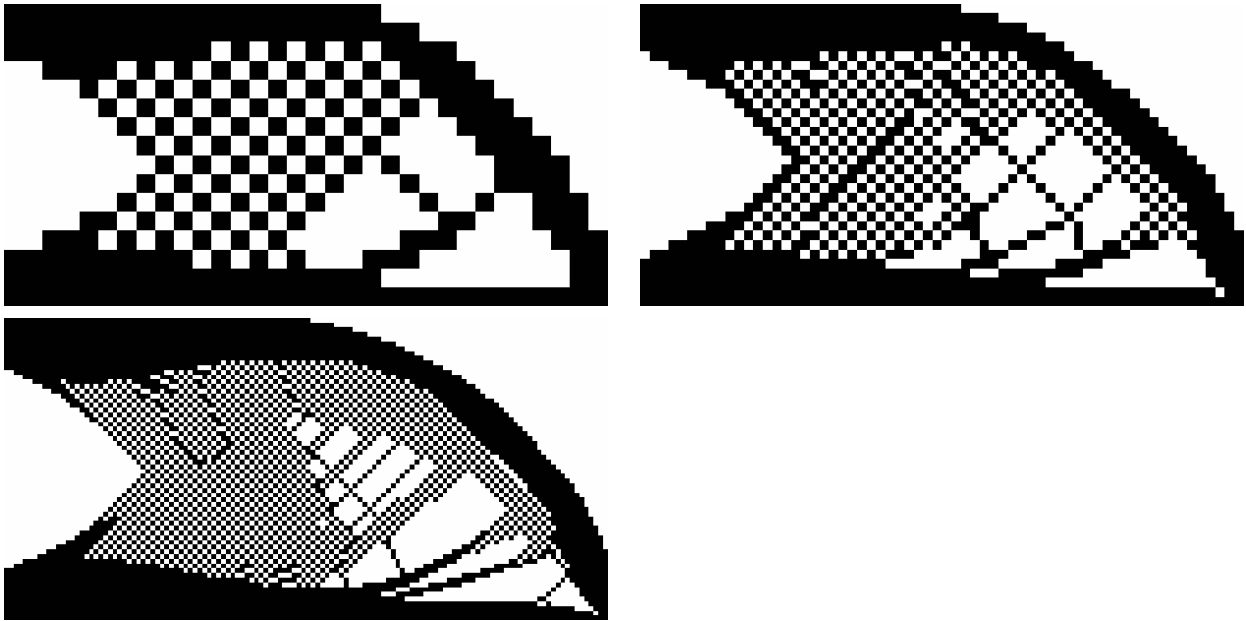


Abbildung 7.5: Lösungen des Cantileverproblems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.2. Im direkten Vergleich mit Abbildung 7.4 erkennen wir bereits, dass die angewandte Continuation-Methode zu einer besseren Lösung führt. Dies bestätigt den Verdacht auf einen „Pfad“ von Lösungen (siehe Abschnitt 5.2).

Aus praktischer Sicht ist es dennoch interessant, dass mittels Ansatzfunktionen eines höheren Polynomgrades (hier P2) für die Verschiebungen u_h die Checkerboard-Strukturen vermieden werden können, ohne dass eine so genannte Filtertechnik¹ zum Einsatz kommt. Diese Techniken werden ursprünglich in der digitalen Bildverarbeitung eingesetzt. Der Preis dafür ist die Vergrößerung der Dimension der Verschiebungen bei gleicher Anzahl der Elemente des Gitters. Dies hat die Vergrößerung der Dimension der Steifigkeitsmatrix zur Folge und somit die des Gleichungssystems $K(\rho_h)u_u = f$, welches es in jedem Iterationsschritt zu lösen gilt (siehe Tabelle 7.3 und Abb. 7.6).

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
512	3266	0,01	0	0	50	299	551	ja	P2	324,3909
2048	12674	0,01	0	0	50	646	1030	ja	P2	314,7531
8192	49922	0,01	0	0	50	1035	1233	ja	P2	314,8087

Tabelle 7.3: Numerische Resultate für das Cantilever Problem mit Continuation-Methode und P2-Ansatzfunktionen.

¹In der Topologieoptimierung bezeichnet ein Filter eine Methode, die innerhalb eines Filterradius alle umliegenden ρ -Werte zu einem Mittelwert „verschmiert“ (siehe z.B. [6]).

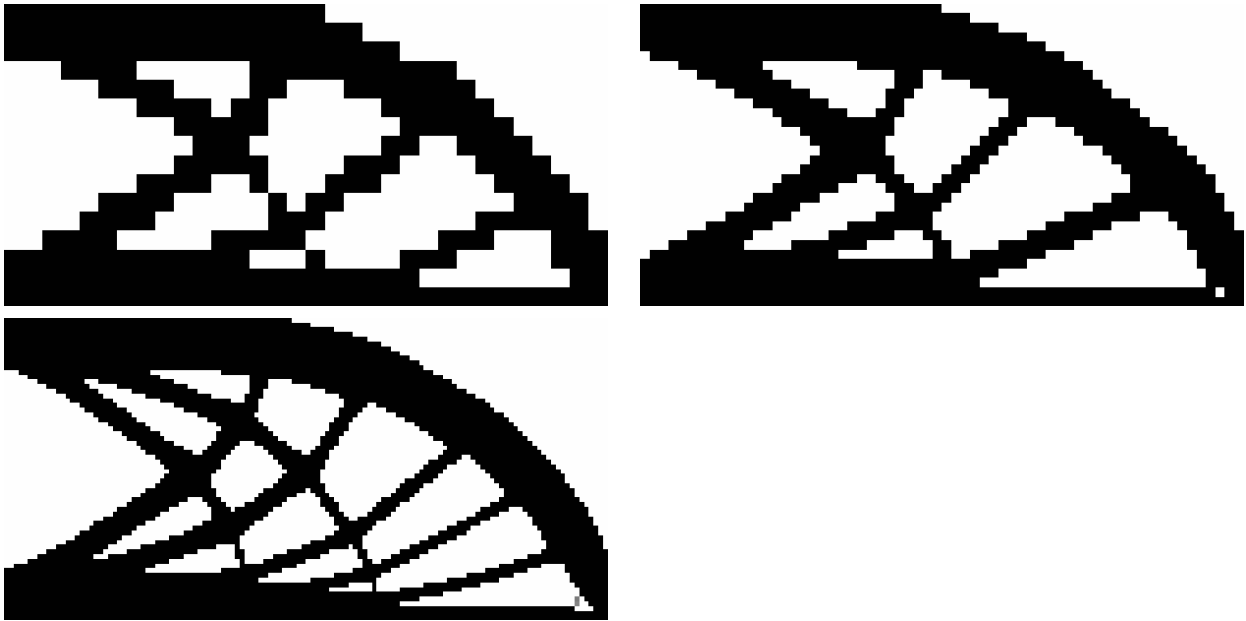


Abbildung 7.6: Lösungen des Cantileverproblems mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.3.

In Abbildung 7.7 ist die Differenz der Energiedichtefunktion W zum Lagrange-Multiplikator λ anhand drei unterschiedlicher Skalierungen dargestellt (vgl. Theorem 3.2.7). Die Skalierung dient dem Zweck, sowohl die grobe Aufteilung der drei sich ergebenden Flächen als auch den genauen Verlauf des Randes zu erkennen. Es handelt sich um die dritte Lösung aus Tabelle 7.1. Rote Bereiche kennzeichnen eine positive Differenz und somit die Menge Ω_u , während blaue Bereiche eine negative Differenz anzeigen und somit die Menge Ω_l darstellen (siehe (3.21) bzw. (3.22)). Grün eingefärbte Bereiche stellen somit eine verhältnismäßig kleine Differenz dar. Es handelt sich daher numerisch um die Menge Ω_{oc} . In den roten sowie in den blau dargestellten Gebieten konvergiert die diskrete Lösung ρ_h^* für kleiner werdende Gitterweite h stark gegen die kontinuierliche Lösung $\rho^* \in \overline{\mathcal{H}}$. Innerhalb des grünen Bereichs konvergiert die Folge diskreter Lösungen lediglich schwach. Dies ist der Bereich, in dem bei Bestrafung und der Wahl bilinearer Ansatzfunktionen für u_h Checkerboards auftreten können.

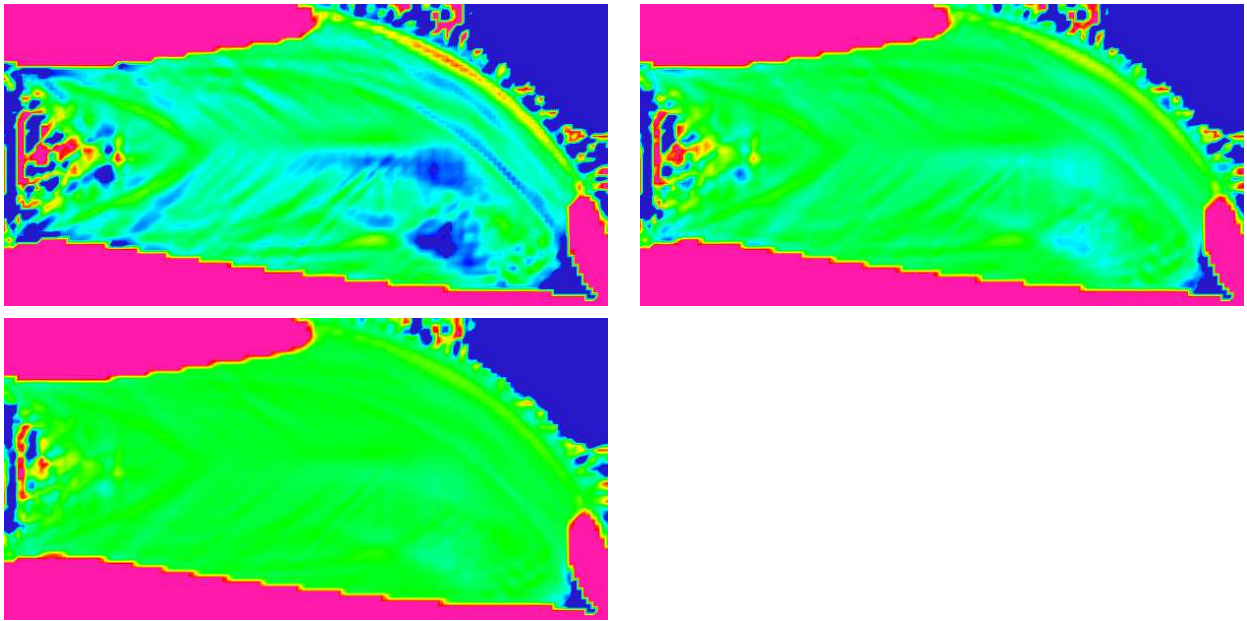


Abbildung 7.7: Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung $-0,5$ bis $0,5$ oben links, -1 bis 1 oben rechts und -2 bis 2 unten.

7.2 Beispiel: MBB-Beam

In diesem Abschnitt testen wir unseren Algorithmus am Beispiel des MBB-Stahlträgers (engl.: beam). Es handelt sich dabei um ein bekanntes Benchmark-Beispiel aus dem Flugzeugbau. MBB steht für Messerschmidt-Bölkow-Blohm, einen heute nicht mehr existierenden Flugzeughersteller. Das zu diskretisierende Gebiet, die angreifende Kraft sowie die Randbedingungen zeigt Abbildung 7.8.

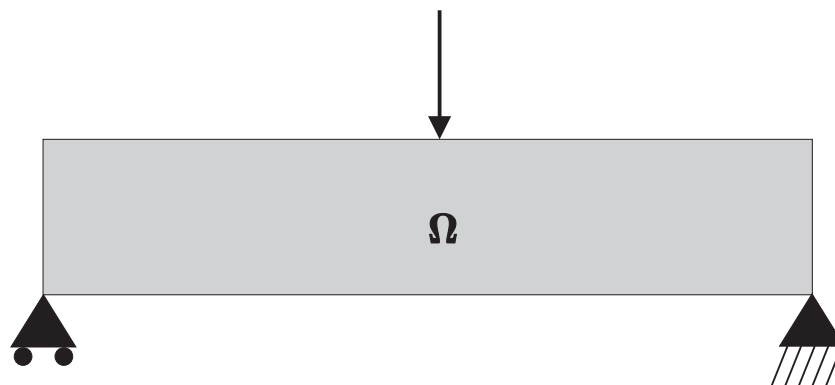


Abbildung 7.8: Darstellung der Domäne Ω des MBB-Problems.

Als Erstes wurde die Lösung ρ_h^* des Problems $(MCR_h\epsilon)$ für drei unterschiedlich grosse Gitterweiten h berechnet (siehe Abbildung 7.9 und Tabelle 7.4).

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
1350	2912	0,01	0	0	50	97	109	nein	bil.	357,7658
3750	7852	0,01	0	0	50	161	181	nein	bil.	361,3390
5400	11222	0,01	0	0	50	235	258	nein	bil.	362,6427

Tabelle 7.4: Numerische Resultate für das MBB-Problem.

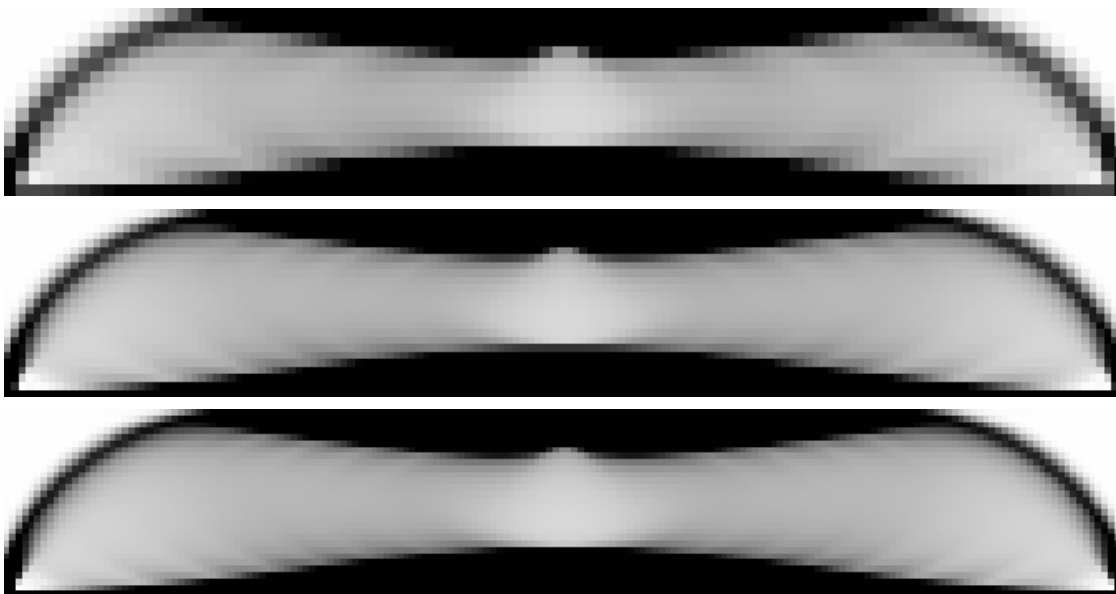


Abbildung 7.9: Lösungen des MBB-Problems aus Tabelle 7.4.

Man erkennt ähnlich wie im Fall des Cantilever-Problems einen grossen Bereich, in dem die Lösung Grauwerte annimmt. Im Vergleich zu den im Anschluss folgenden Testreihen mit Bestrafung von Grauwerten ist das Abbruchkriterium bereits nach ca. 100 bis 200 Iterationen erfüllt. Als Obergrenze des zu verwendenden Materialvolumens wurde auch hier 50% der Gesamtfläche gewählt (siehe Tabelle 7.5).

Es folgt ein Vergleich der Continuation-Methode (siehe Abb. 7.11) und der unmittelbaren Bestrafung von Grauwerten (siehe Abb. 7.10) anhand der berechneten Lösungen des MBB-Problems.

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
1350	2912	0,01	0	99	50	333	436	nein	bil.	464,7765
1350	2912	0,01	0	0	50	366	450	ja	bil.	391,1246
3750	7852	0,01	0	99	50	1014	1301	nein	bil.	467,6284
3750	7852	0,01	0	0	50	750	864	ja	bil.	387,9536
5400	11222	0,01	0	99	50	1203	1456	nein	bil.	468,9024
5400	11222	0,01	0	0	50	783	895	ja	bil.	390,7629

Tabelle 7.5: Numerische Resultate für das MBB-Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.

Der Vergleich zeigt (siehe Tabelle 7.5), dass sich die kontinuierliche Steigerung des Bestrafungsparameters q stets in einem besseren Zielfunktionswert niederschlägt. Globale Optimalität kann hier nicht garantiert werden im Gegensatz zu den Ergebnissen in Tabelle 7.4. Aus der Theorie ist bekannt (falls das begrenzende Volumen und die Diskretisierung so gewählt wird, dass sich eine symmetrische Lösung ergeben kann), dass eine optimale Struktur des MBB-Problems stets symmetrisch bezüglich einer durch die Mitte verlaufenden Längsachse ist. Bemerke: In den Rechnungen wurde Symmetrie nicht erzwungen (siehe Abbildungen 7.10 und 7.11). Die Strukturen aus Abbildung 7.11 sind der Forderung nach Symmetrie allerdings einiges näher.

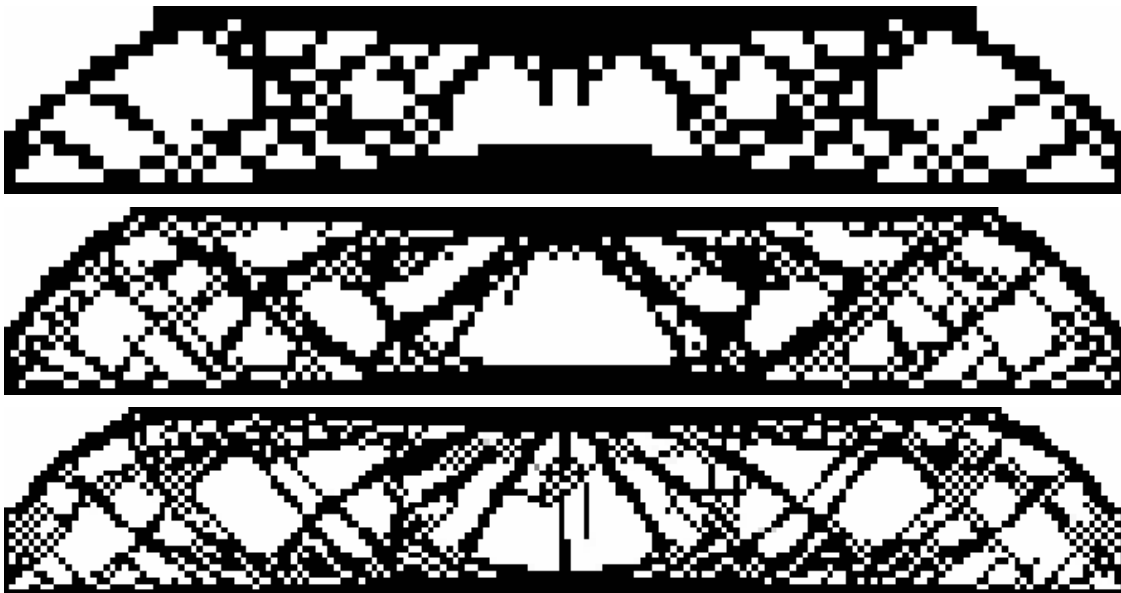


Abbildung 7.10: Lösungen des MBB-Problems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.5.

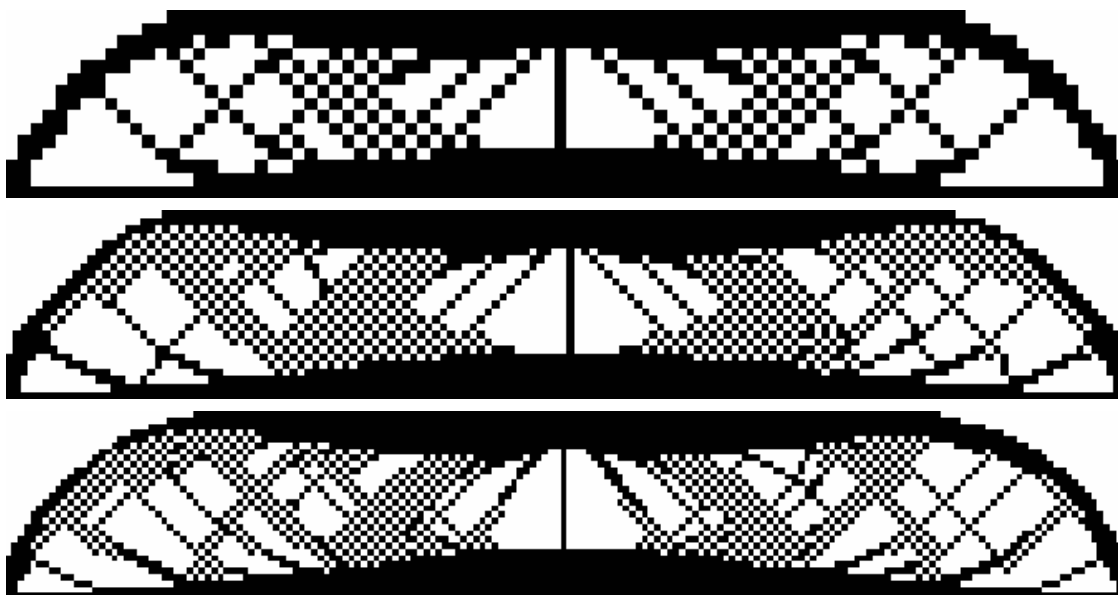


Abbildung 7.11: Lösungen des MBB-Problems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.5.

Wir wählen nun biquadratische Ansatzfunktionen und erhalten eine Checkerboard-freie Lösung (siehe Abbildung 7.12 und Tabelle 7.6). Man erkennt, wie sich die Anzahl der Verstrebungen und somit die Anzahl der Löcher mit feiner werdendem Gitter vergrößert. Dieser Effekt, der bereits beim Cantilever-Problem zu beobachten war, wird englisch „mesh-dependency“, also Gitterabhängigkeit der Lösung genannt. Diese ist in der H -Konvergenz begründet. Sie beschreibt die Konvergenz einer Folge von diskreten Lösungen χ_h^* gegen die globale Lösung ρ^* für h gegen Null. Somit ist eine Folge von immer feiner werdenden Verstrebungsstrukturen an den Stellen zu erwarten, an denen in dem globalen Optimum von Problem $(MCR_{h,\epsilon})$ Graubereiche auftauchen.

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
1350	8522	0,01	0	0	50	323	413	ja	P2	429,3190
3750	23202	0,01	0	0	50	821	1046	ja	P2	416,9498
5400	33242	0,01	0	0	50	996	1156	ja	P2	412,7965

Tabelle 7.6: Numerische Resultate für das MBB-Problem mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen.

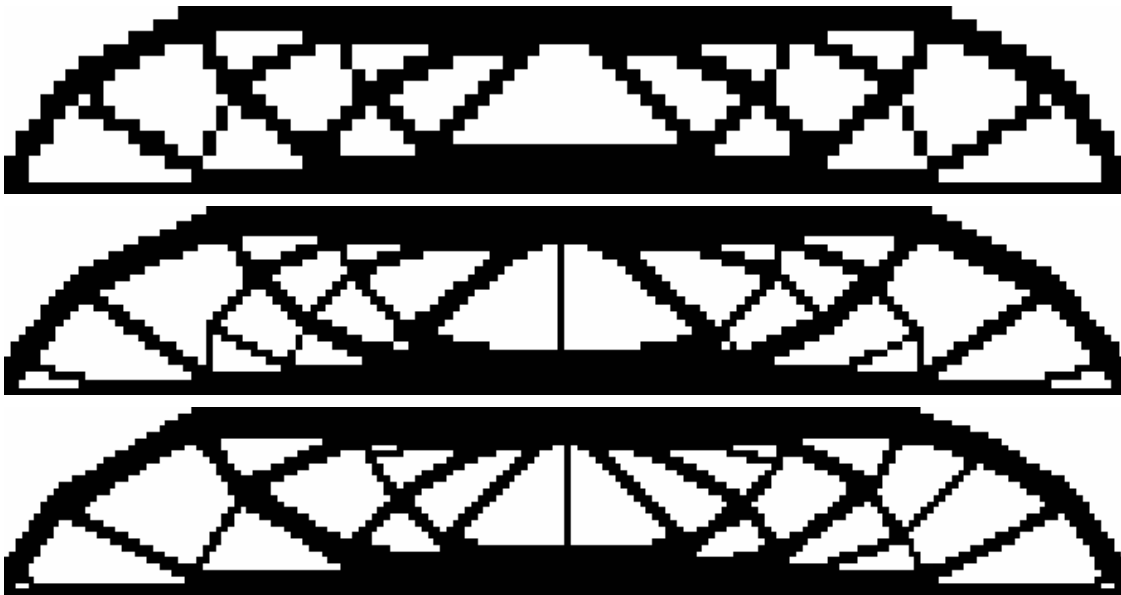


Abbildung 7.12: Lösungen des MBB-Problems mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.6.

Wir schliessen die Untersuchung des MBB-Beams mit der Darstellung der Gebiete Ω_{oc} , Ω_u und Ω_l ab (siehe Abb. 7.13). Diese Abbildungen wurden anhand der Lösung bezüglich der feinsten Gitterstruktur aus Tabelle 7.4 erzeugt. Man erkennt deutlich, dass die Gebiete Ω_u und Ω_l diejenigen sind, in denen die Lösung aufgrund der vorherrschenden starken Konvergenz stets eindeutig ist, während der grüne Bereich derjenige ist, in dem bei Bestrafung von Grauwerten Checkerboards auftauchen können bzw. gitterabhängige Lösungen entstehen.

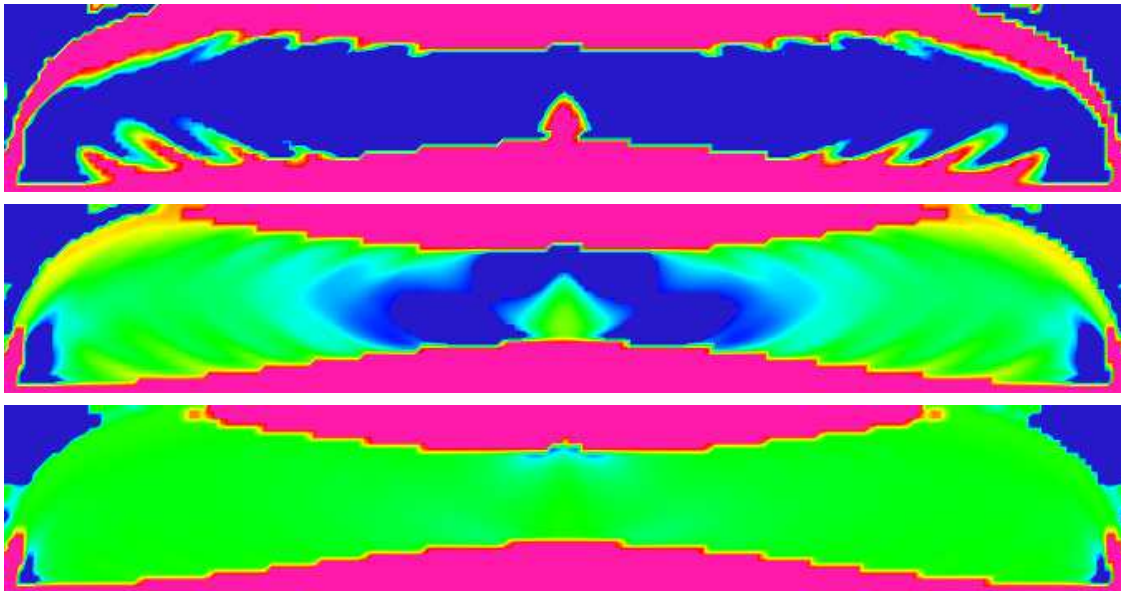


Abbildung 7.13: Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung -10^{-5} bis 10^{-5} links, -10^{-4} bis 10^{-4} mitte und -10^{-3} bis 10^{-3} rechts.

7.3 Beispiel: Brücke

In diesem Abschnitt untersuchen wir die in Abbildung 7.14 dargestellte Problemstellung. Die angreifenden Kräfte wirken auf den oberen Rand und zwar in jedem Punkt gleichzeitig. Am unteren Rand befinden sich drei Stellen, an denen die Struktur sowohl in x - als auch in y -Richtung gehalten wird. Wir beginnen die Untersuchungen erneut, in dem wir die globale

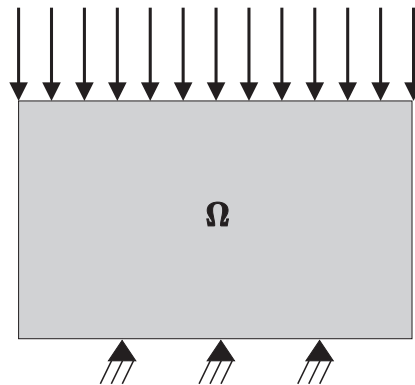


Abbildung 7.14: Darstellung der Domäne Ω des Brücke-Problems.

Lösung ρ_h^* des Problems $(MCR_{h,\epsilon})$ berechnen (siehe Abb. 7.15 und Tabelle 7.7). Die drei

betrachteten Gitter enthalten 24×16 , 48×32 und 96×64 Elemente. Das zur Verfügung stehende Material wurde in diesem Fall auf 30% der Gesamtfläche von Ω begrenzt. Als

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
384	850	0,01	0	0	30	81	101	nein	bil.	11,012418
1536	3234	0,01	0	0	30	224	249	nein	bil.	10,968736
6144	12610	0,01	0	0	30	382	399	nein	bil.	11,302810

Tabelle 7.7: Numerische Resultate für das Brücke-Problem.

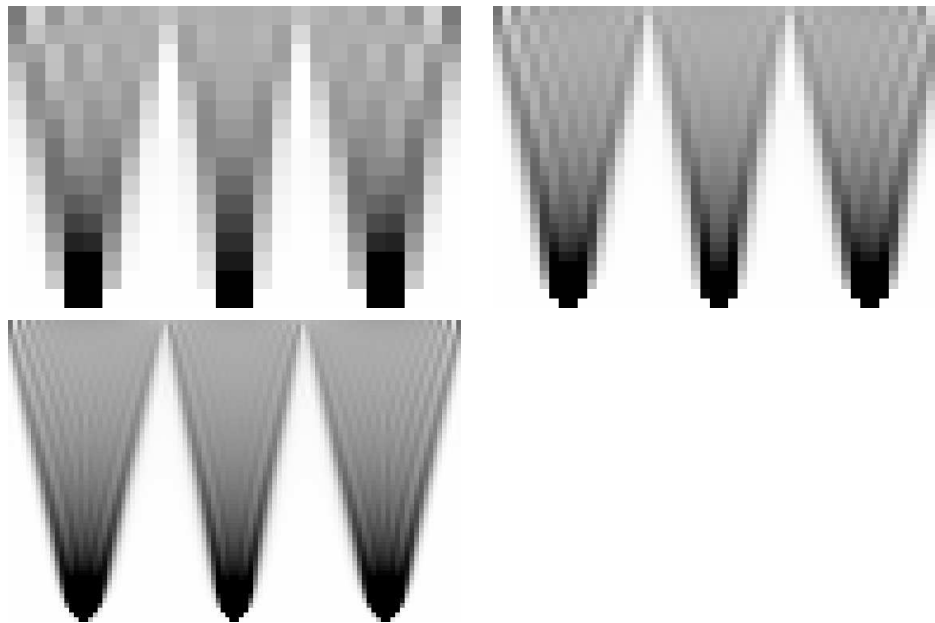


Abbildung 7.15: Lösungen des Brücke-Problems aus Tabelle 7.3.

Nächstes testen wir die Auswirkung der direkten Bestrafung (siehe Abb. 7.16) und die einer kontinuierlich vergrößerten Bestrafung (siehe Abb. 7.17) auf die von SNOPT gefundene lokale Lösung (siehe Tabelle 7.8). Es zeigt sich, dass für kleinere Gitter die Anzahl benötigter Iterationen für die Continuation-Methode deutlich höher liegt als bei direkter Bestrafung. Für das Gitter mit 96×64 Elementen benötigt der Algorithmus bei direkter Bestrafung mehr Iterationen und das, obwohl innerhalb der Continuation-Methode SNOPT 7 mal aufgerufen wird. Den erhaltenen Strukturen sind bei direkter Bestrafung bereits anzusehen, dass es sich um schlechte lokale Optima handelt (siehe Abbildung 7.16). Man würde von einer optimalen Struktur erwarten, dass sie dort, wo die Kräfte angreifen (sprich am oberen Rand), keine Löcher besitzt.

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
384	850	0,01	0	99	30	57	97	nein	bil.	21,640311
384	850	0,01	0	0	30	296	339	ja	bil.	14,448072
1536	3234	0,01	0	99	30	126	169	nein	bil.	16,926863
1536	3234	0,01	0	0	30	547	605	ja	bil.	13,028762
6144	12610	0,01	0	99	30	1188	1522	nein	bil.	16,360742
6144	12610	0,01	0	0	30	867	947	ja	bil.	12,566069

Tabelle 7.8: Numerische Resultate für das Brücke-Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.



Abbildung 7.16: Lösungen des Brücke-Problems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.8.

Die Strukturen aus Abbildung 7.17 sind diesbezüglich bereits ab der 2. Verfeinerungsstufe besser. Sie weisen jedoch wie erwartet im oberen Teil Checkerboard-Bereiche auf. Wir verwendeten daher erneut biquadratischen Ansatzfunktionen und erhalten checkerboard-freie Lösungen (siehe Abb. 7.18 und Tabelle 7.9).

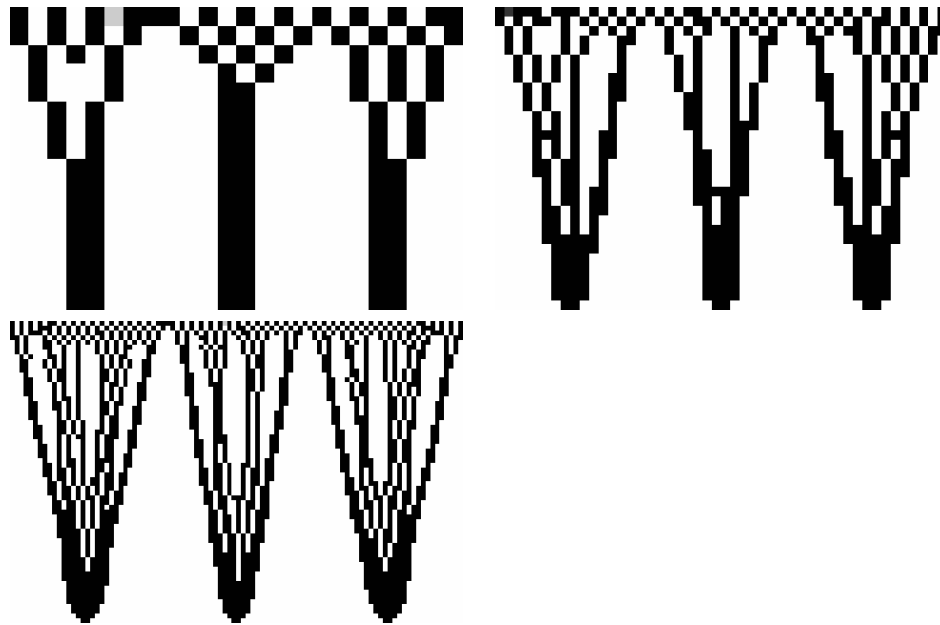


Abbildung 7.17: Lösungen des Brücke-Problems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.8.

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
384	2466	0,01	0	0	30	327	375	ja	P2	6,452741
1536	9538	0,01	0	0	30	718	818	ja	P2	5,333048
6144	37506	0,01	0	0	30	1126	1206	ja	P2	5,084245

Tabelle 7.9: Numerische Resultate für das Brücke-Problem mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen.

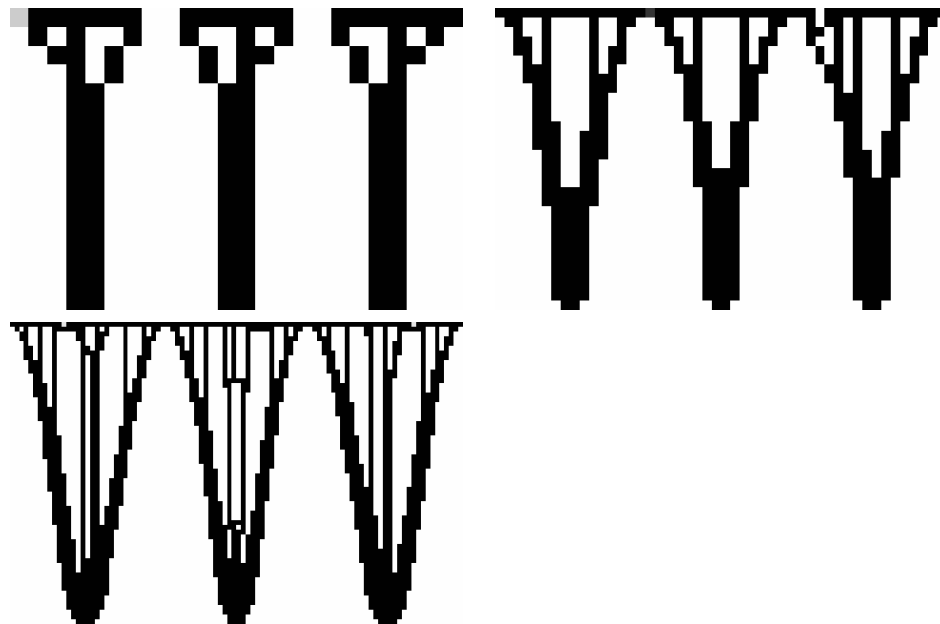


Abbildung 7.18: Lösungen des Brücke-Problems mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.9.

Am Ende der Untersuchungen zu diesem Problem betrachten wir die Differenz zwischen der Energiedichtefunktion W und dem Lagrange-Multiplikator λ (siehe Abbildung 7.19). Man erkennt, dass der obere Rand zur Menge Ω_{oc} gehört, obwohl auf diesen Teil des Randes Kräfte wirken. Somit ist es möglich, dass an dieser Stelle Checkerboards auftreten können, was unsere Beobachtungen bestätigen (siehe Abbildung 7.17).

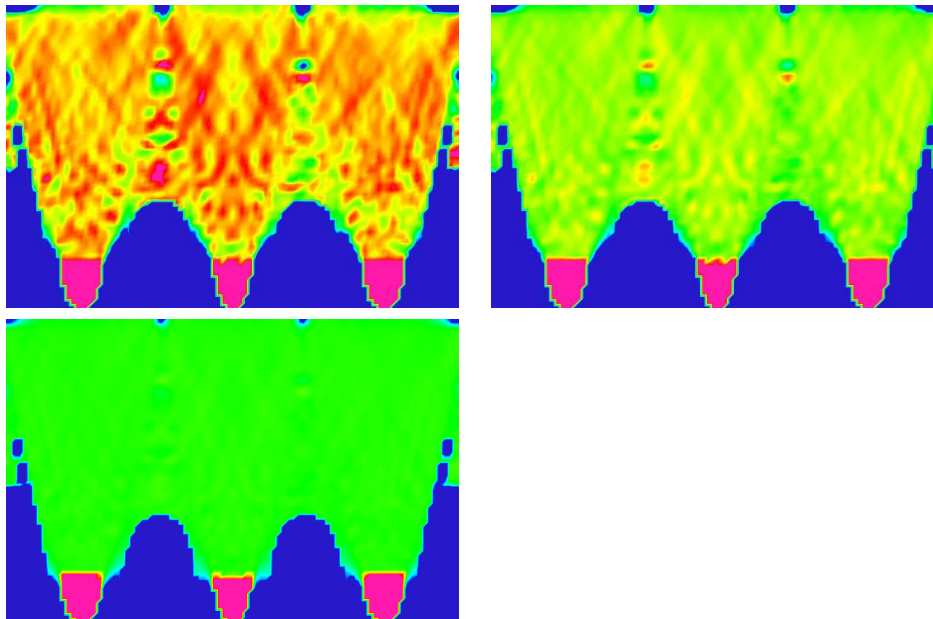
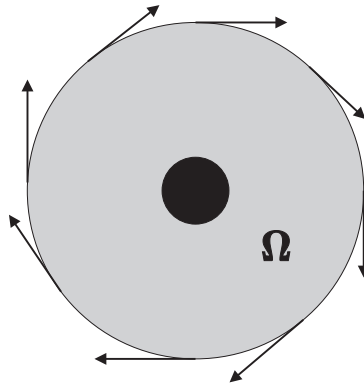


Abbildung 7.19: Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung $-0,0005$ bis $0,0005$ oben links, $-0,001$ bis $0,001$ oben rechts und $-0,005$ bis $0,005$ unten.

7.4 Beispiel: Rad

Die Domäne zu diesem Beispiel ist eine Kreisscheibe mit rundem Loch in der Mitte. Am Rand dieses Loches wird die Struktur sowohl in x - als auch y -Richtung fixiert. Die Kräfte wiederum wirken tangential auf den gesamten äusseren Rand der Scheibe im Uhrzeigersinn (siehe Abbildung 7.20). Dieses Beispiel veranschaulicht das Problem der Nichtexistenz von Lösungen zu Problem (MC) . Es stellt sich heraus, dass dies die Ursache dafür ist, dass die Lösung des diskretisierten Problems stark gitterabhängig ist (mesh dependent).

Alle nun folgenden Berechnungen werden auf drei unterschiedlich feinen Gittern durchgeführt. Zunächst bestimmen wir die Globallösung ρ_h^* zu Problem $(MCR)_{h,\epsilon}$ (siehe Tabelle 7.10 und Abbildung 7.21). Man erkennt, dass die Optimallösungen stets aus konzentrischen Kreisen besteht. Die Materialdichte ρ_h^* nimmt mit zunehmenden Radius ab. Dadurch entsteht ein grosser Graubereich, indem, wie wir als Nächstes sehen werden, Checkerboards

Abbildung 7.20: Darstellung der Domäne Ω des Rad-Problems.

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
256	576	0,01	0	0	50	37	40	nein	bil.	9,247019
1024	2176	0,01	0	0	50	48	50	nein	bil.	9,377113
4096	8448	0,01	0	0	50	60	63	nein	bil.	9,410052

Tabelle 7.10: Numerische Resultate für das Rad-Problem.

auftreten können und die Lösung stets stark gitterabhängig sein wird. Wir vergleichen erneut lokale Lösungen, die mit Hilfe einer direkten Bestrafung bestimmt werden (siehe Abb. 7.22), mit solchen, die mit Hilfe der Continuation-Methode berechnet werden (siehe Tabelle 7.11 und Abbildung 7.23). Die zugehörigen Zielfunktionswerte sind bei Anwendung einer Continuation-Methode wiederum deutlich besser. Schliesslich verwenden wir P2-Ansatzfunktionen und berechnen erneut eine lokale Lösung mit Hilfe der Continuation-Methode (siehe Tabelle 7.12). Dabei stellt sich heraus, dass bei diesem Beispiel trotz Verwendung von Ansatzfunktionen höheren Grades, die Lösung nicht frei von Checkerboards ist (siehe Abbildung 7.24). In Abbildung 7.25 sind die Bereiche Ω_{oc} , Ω_u und Ω_l farblich

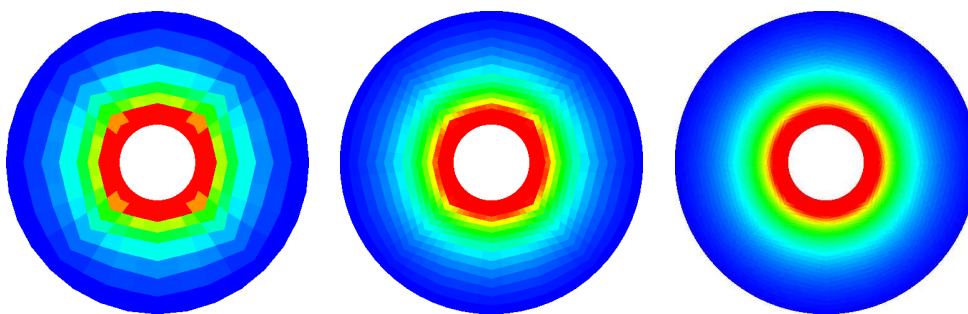


Abbildung 7.21: Lösung des Rad-Problems aus Tabelle 7.10.

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
256	576	0,01	0	99	50	20	25	nein	bil.	43,709537
256	576	0,01	0	0	50	373	415	ja	bil.	22,429246
1024	2176	0,01	0	99	50	50	64	nein	bil.	30,352651
1024	2176	0,01	0	0	50	573	674	ja	bil.	16,495986
4096	8448	0,01	0	99	50	93	120	nein	bil.	22,355731
4096	8448	0,01	0	0	50	802	913	ja	bil.	14,820816

Tabelle 7.11: Numerische Resultate für das Rad-Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.

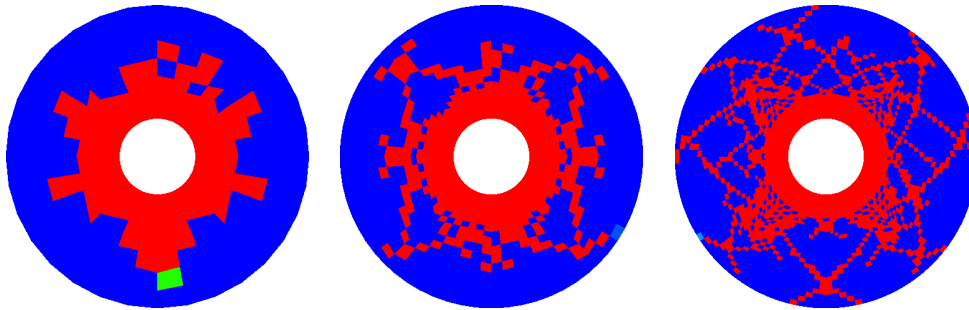


Abbildung 7.22: Lösungen des Rad-Problems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.11.

dargestellt. Das in grün dargestellte Gebiet Ω_{oc} nimmt bis auf einen kleinen Ring im Inneren die gesamte Kreisscheibe ein. Dies ist der Bereich, in dem die Lösung stark gegen 1 konvergiert. Der Bereich Ω_l fehlt. Es ist somit nicht möglich (wie das noch z.B. beim Cantilever-Problem der Fall war) Bereiche anzugeben, in denen weniger Material benötigt wird oder Löcher in der Struktur auftreten dürfen.

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
256	1664	0,01	0	0	50	341	418	ja	P2	31,643812
1024	6400	0,01	0	0	50	486	575	ja	P2	26,356896
4096	25088	0,01	0	0	50	891	1034	ja	P2	20,086484

Tabelle 7.12: Numerische Resultate für das Rad-Problem mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen.

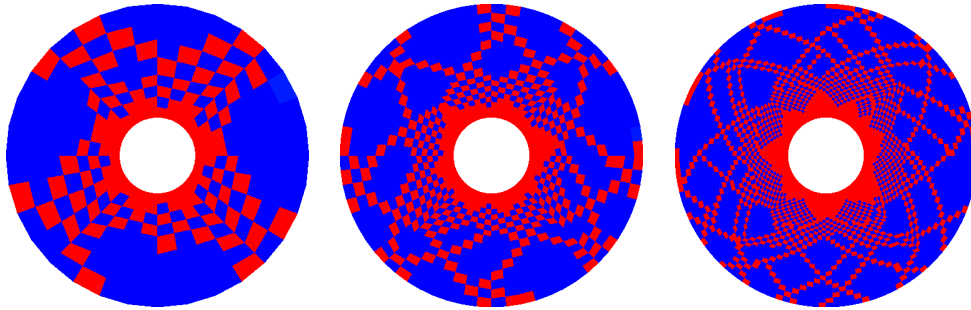


Abbildung 7.23: Lösungen des Rad-Problems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.11.

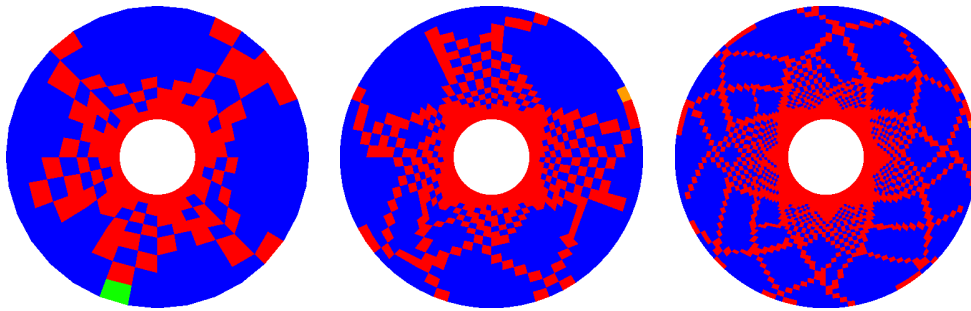


Abbildung 7.24: Lösungen des Rad-Problems mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.12.

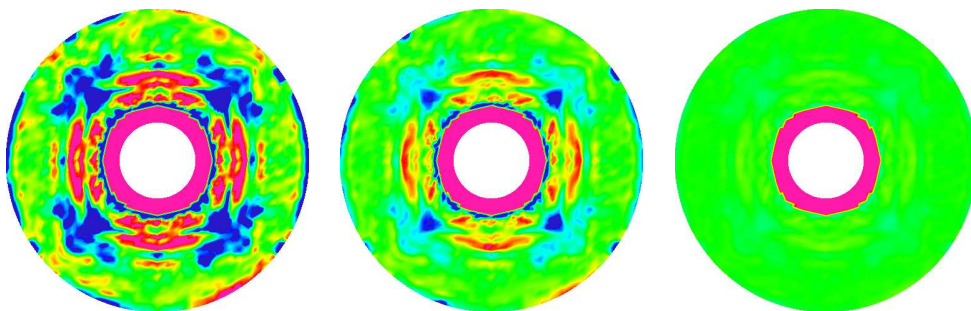


Abbildung 7.25: Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung $-0,005$ bis $0,005$ links, $-0,01$ bis $0,01$ mitte und $-0,05$ bis $0,05$ rechts.

7.5 Beispiel: 3D-Cantilever

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem 3D-Cantilever-Problem (siehe auch [2]). Es handelt sich dabei um eine quaderförmige Domäne, die am (im Bild) hinteren Ende in alle drei Richtungen fixiert wird. Am vorderen Ende wirkt auf den grau dargestellten Bereich eine Flächenkraft. Die nun folgenden Untersuchungen wurden auf jeweils zwei unterschiedlich

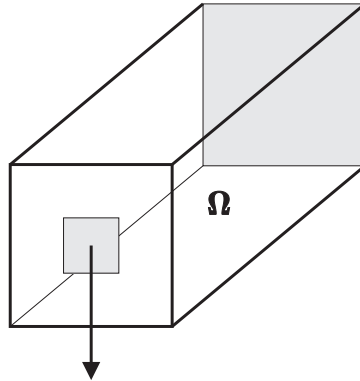


Abbildung 7.26: Darstellung der Domäne Ω des 3D-Cantilever-Problems.

feinen Gitterstrukturen durchgeführt. Wir beginnen die Testreihen mit der Lösung zu Problem $(MCR_{h,\epsilon})$ (siehe Tabelle 7.13 und Abbildung 7.27 bzw. 7.28). In den hier dargestellten

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
432	1911	0,01	0	0	30	65	77	nein	bil.	126,641417
3456	12675	0,01	0	0	30	113	117	nein	bil.	126,811486

Tabelle 7.13: Numerische Resultate für das 3D-Cantilever-Problem.

Abbildungen wurden stets diejenigen Elemente ausgeblendet, deren zugehörige Dichte ρ_h^* kleiner als 0.1 ist. Dies ermöglicht uns, durch etwaige Löcher in der Struktur durchschauen zu können und vermittelt einen besseren Eindruck der gewonnenen Lösungen. Es folgt der

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
432	1911	0,01	0	99	30	32	46	nein	bil.	294,575828
432	1911	0,01	0	0	30	203	239	ja	bil.	142,001781
3456	12675	0,01	0	99	30	227	268	nein	bil.	163,177648
3456	12675	0,01	0	0	30	391	431	ja	bil.	136,010783

Tabelle 7.14: Numerische Resultate für das 3D-Cantilever-Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.

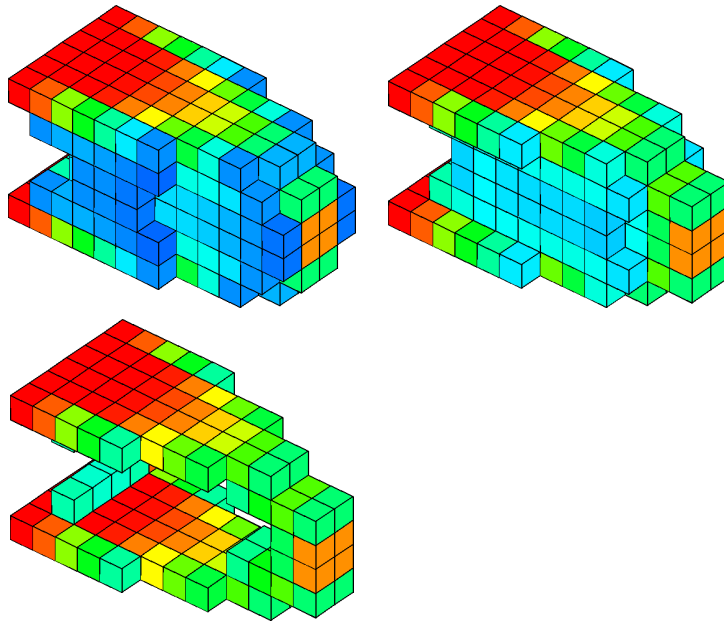


Abbildung 7.27: Lösung des 3D-Cantilever-Problems in $e = 432$ Variablen aus Tabelle 7.13 aus drei unterschiedlichen Perspektiven.

übliche Vergleich der direkten Bestrafung und der Continuation-Methode in Tabelle 7.14. Die zugehörigen Abbildungen 7.29 und 7.30 zeigen, dass auch in 3D-Strukturen Checkerboards auftreten können und dass diese wie üblich in den Bereichen auftreten, in denen die kontinuierliche Lösung Grauwerte annimmt. Wir verwenden daher P2-Ansatzfunktionen für die Verschiebung und erhalten wiederum Checkerboard-freie Lösungen (siehe Tabelle 7.15 und Abbildung 7.31). Zum Schluss stellen wir die drei Gebiete Ω_{oc} , Ω_u und Ω_l gra-

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
432	6951	0,01	0	0	30	345	381	ja	P2	152,196400
3456	48243	0,01	0	0	30	396	422	ja	P2	138,168060

Tabelle 7.15: Numerische Resultate für das 3D-Cantilever-Problem mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen.

phisch dar (siehe Abb. 7.32). Die blauen Kanten treten an den Stellen auf, an denen die Nachbarelemente blau sind. Da diese aber ausgeblendet werden ($\rho_h^* < 0.1$), ist der Bereich Ω_l auf den Abbildungen nicht dargestellt.

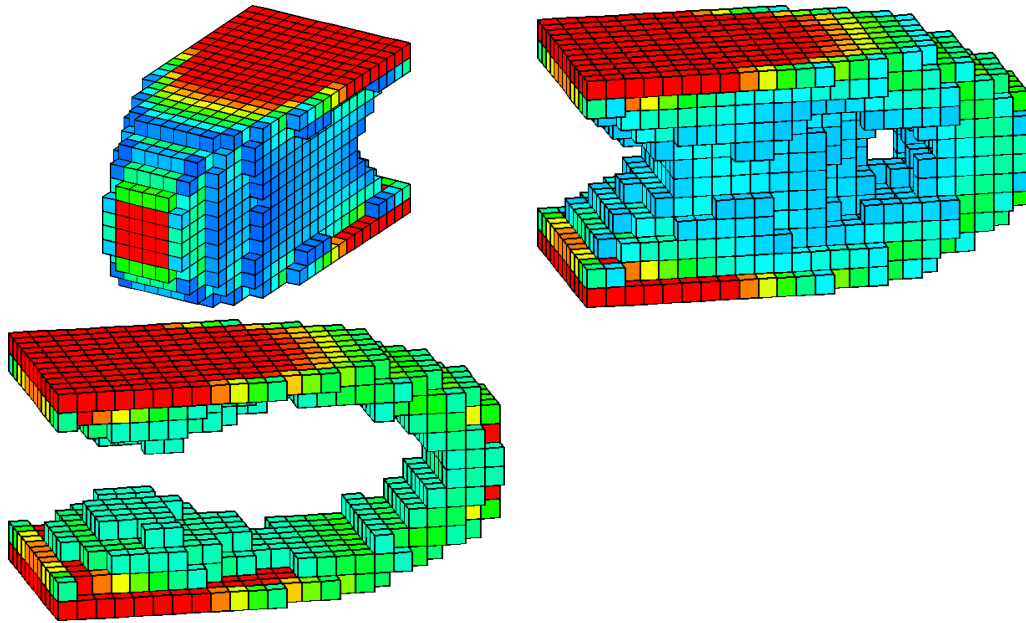


Abbildung 7.28: Lösung des 3D-Cantilever-Problems in $e = 3456$ Variablen aus Tabelle 7.13, wobei links oben alle Elemente mit $\rho_h^* < 0.1$, rechts oben mit $\rho_h^* < 0.2$ und unten mit $\rho_h^* < 0.3$ ausgeblendet wurden.

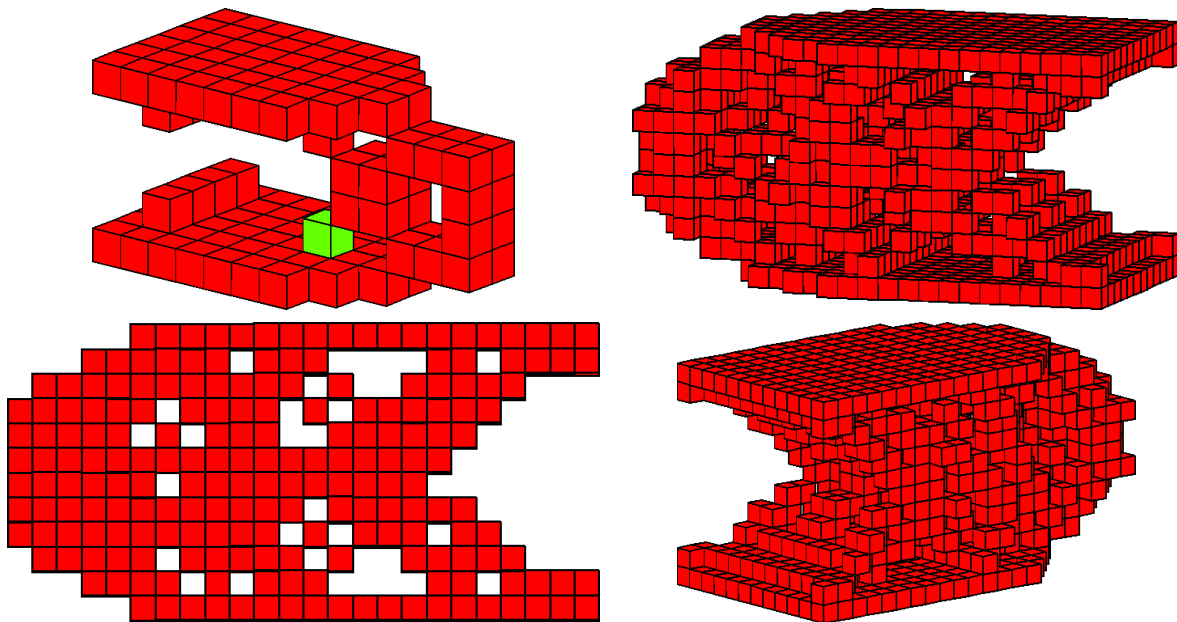


Abbildung 7.29: Lösungen des 3D-Cantilever-Problems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.14.

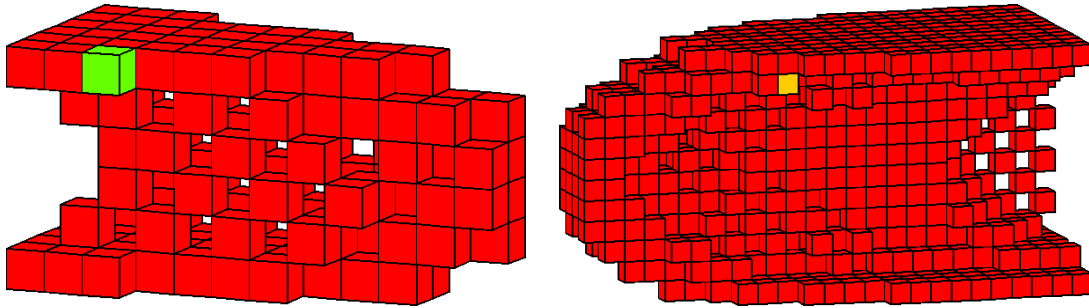


Abbildung 7.30: Lösungen des 3D-Cantilever-Problems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.14.

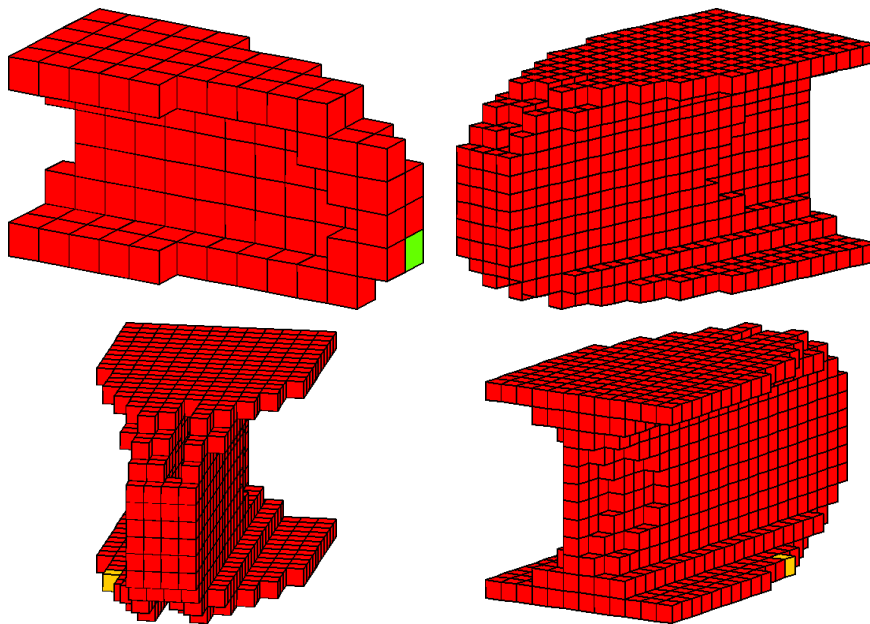


Abbildung 7.31: Lösungen des 3D-Cantilever-Problems mit Continuation-Methode und bi-quadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.15.

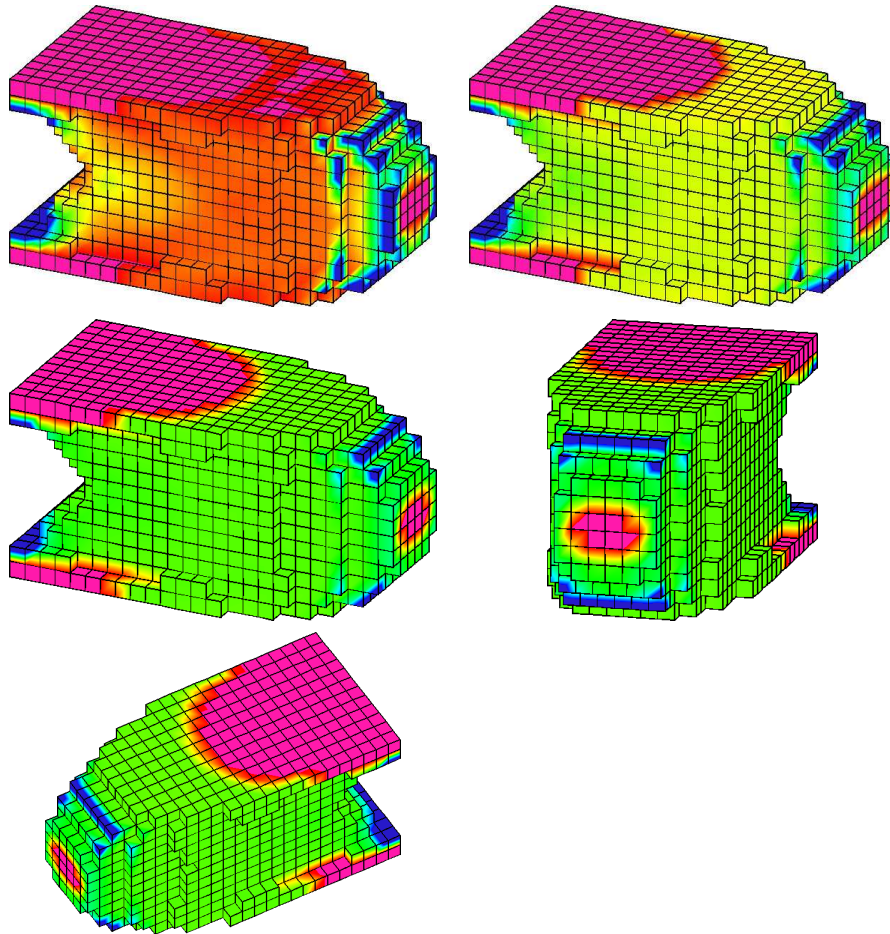


Abbildung 7.32: Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung $-0,1$ bis $0,1$ oben links, $-0,2$ bis $0,2$ oben rechts und $-0,5$ bis $0,5$ in drei Perspektiven unten.

7.6 Beispiel: Hocker

Bei unserem letzten hier untersuchten Problem handelt es sich wiederum um ein Problem in 3D. Die Domäne Ω ist ein Würfel. Dieser ist in den 4 unteren Ecken jeweils in z -Richtung fixiert und erfährt von oben in dem grau dargestellten Bereich eine in negativer z -Richtung zeigende Flächenkraft (siehe Abbildung 7.33). Dieses Beispiel wurde bereits in [7] betrachtet, jedoch setzen wir im Gegensatz zu [7] keine Symmetrie der Lösung voraus. Wir berechnen zunächst die Lösung des Problems ($MCR_{h,\epsilon}$) (siehe Tabelle 7.16 und

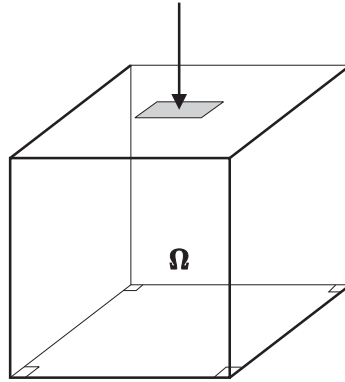


Abbildung 7.33: Darstellung der Domäne Ω des Hocker-Problems.

Abbildung 7.34). Daraufhin vergleichen wir die direkte Bestrafung mit $q = 99$ mit der

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
729	3000	0,01	0	0	20	45	47	nein	bil.	41,223323
1728	6591	0,01	0	0	20	60	65	nein	bil.	50,574893

Tabelle 7.16: Numerische Resultate für das Hocker-Problem.

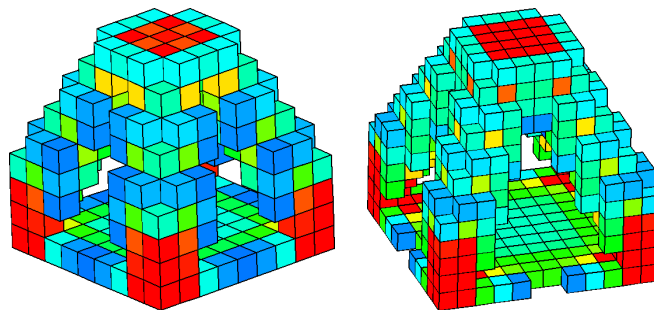


Abbildung 7.34: Lösung des Hocker-Problems aus Tabelle 7.16.

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
729	3000	0,01	0	99	20	252	424	nein	bil.	51,852157
729	3000	0,01	0	0	20	99	146	ja	bil.	44,779797
1728	6591	0,01	0	99	20	517	760	nein	bil.	59,951470
1728	6591	0,01	0	0	20	166	193	ja	bil.	52,403704

Tabelle 7.17: Numerische Resultate für das Hocker-Problem unter Bestrafung von Grauwerten mit und ohne Continuation-Methode.

Continuation-Methode (siehe Tabelle 7.17 und Abbildungen 7.35 und 7.36). Man erkennt, dass innerhalb der Bodenplatte des Hockers ein Schachbrettmuster zu sehen ist. Mit Hilfe

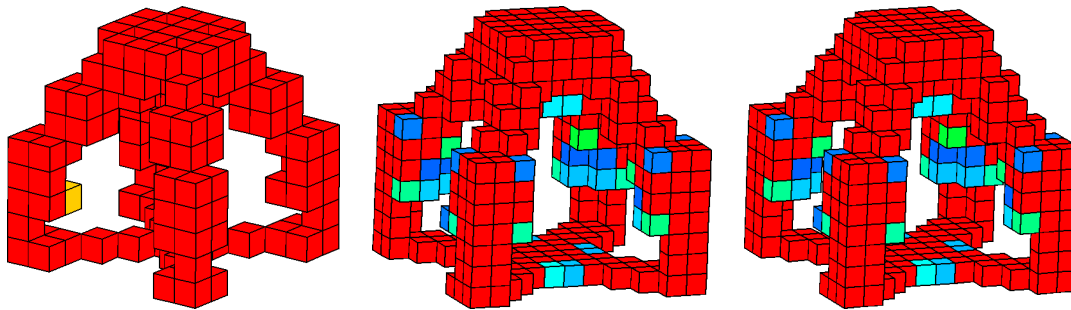


Abbildung 7.35: Lösungen des Hocker-Problems mit Bestrafungsparameter $q = 99$ aus Tabelle 7.17.

der P2-Ansatzfunktionen erhalten wir Strukturen, die keine Checkerboards mehr enthalten (siehe Tabelle 7.18 und Abbildung 7.37). Abschliessend betrachten wir die Gebiete Ω_{oc}, Ω_u

e	n	E_0	ϵ	q	V_0	$\#I$	$\#F$	cont.?	$u_h?$	C
729	11100	0,01	0	0	20	119	157	ja	P2	97,513501
1728	24843	0,01	0	0	20	153	191	ja	P2	118,544758

Tabelle 7.18: Numerische Resultate für das Hocker-Problem mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen.

und Ω_l für das Hocker-Problem (siehe Abbildung 7.38).

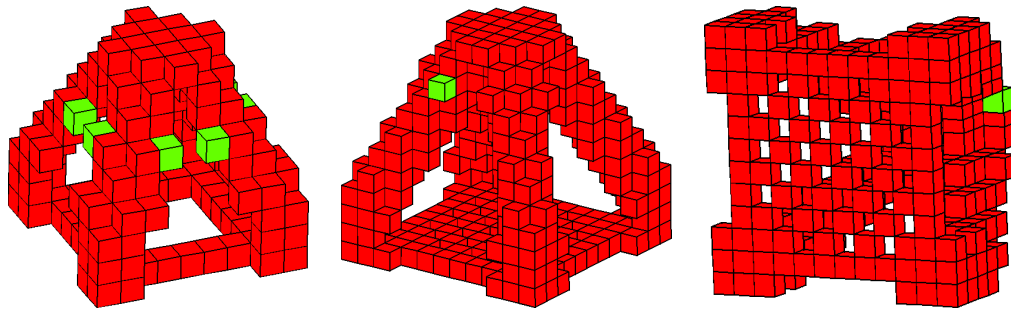


Abbildung 7.36: Lösungen des Hocker-Problems mit Continuation-Methode aus Tabelle 7.17.

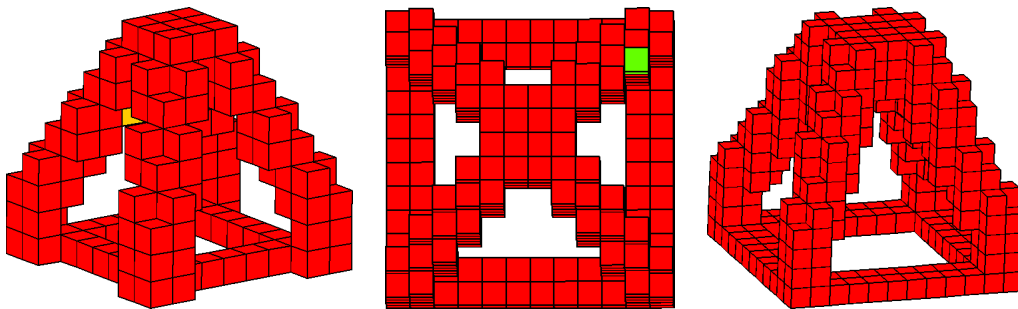


Abbildung 7.37: Lösungen des Hocker-Problems mit Continuation-Methode und biquadratischen Ansatzfunktionen aus Tabelle 7.18.

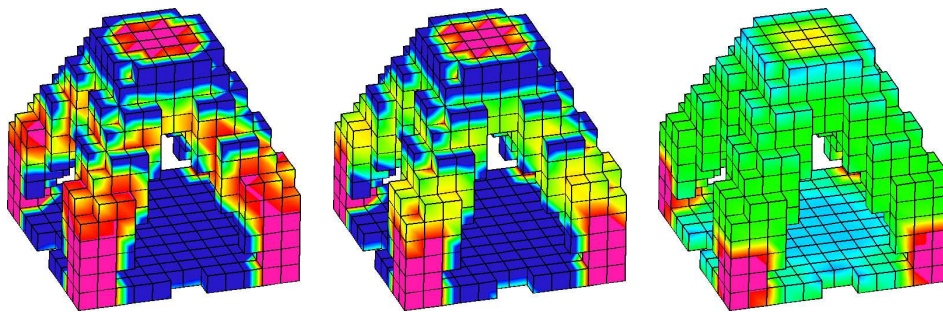


Abbildung 7.38: Darstellung der Differenz der Energiedichtefunktion W und λ mit Skalierung $-0,05$ bis $0,05$ links, $-0,1$ bis $0,1$ mitte und -1 bis 1 rechts.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war zum einen die Untersuchung der mathematischen und den daraus resultierenden numerischen Schwierigkeiten, die auftreten, sobald die Designvariable eingrenzende untere Schranke ϵ gegen Null konvergiert. Wir konnten zeigen (siehe Satz 4.2.1), dass für eine Folge von Designvektoren $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\rho_j \in \overline{\mathcal{H}}_h^+$, welche gegen ein Design $\bar{\rho} \in \overline{\mathcal{H}}_h$ konvergiert, die zugehörige Folge von Verschiebungen $(u(\rho_j))_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Es bleibt die Frage, ob die Voraussetzungen in Satz 4.2.1, die aus der Beweistechnik stammen, abgeschwächt werden können. Die Konvergenz einer Teilfolge dieser Verschiebungen ermöglicht es uns, ein Element des Subdifferentials der Zielfunktion im Punkt $\bar{\rho}$ angeben zu können. Somit sollte es möglich sein, Methoden der nichtglatten Optimierung auf das Problem (MCR_h) anwenden zu können, die im Gegensatz zu z.B. SQP-Verfahren keine Gradienteninformation zwingend benötigen. Die numerische Untersuchung zeigte, dass trotz Verwendung des Least Square Solvers zur Lösung der FE-Gleichung und bei gleich bleibendem „Gradienten“, das SQP-Verfahren nicht mehr konvergiert. In Abschnitt 6.3 konnten wir zeigen, dass für $\epsilon = 0$ die Voraussetzungen des Satzes 6.3.4 über die Konvergenz eines SQP-Verfahrens nicht erfüllt werden.

Zum anderen gelang es, die von Petersson für das Sattelpunktproblem (SP_ϵ) erstmalig bewiesene starke Konvergenz einer Folge von approximativen Lösungen ρ_h^* gegen eine exakte Lösung ρ^* auf einem Teilbereich Ω_b auf das Problem (SP) zu erweitern (siehe Satz 3.2.7). Dies führte zu der Idee, die Unterteilung der Domäne Ω in die drei Teilgebiete Ω_u, Ω_l und Ω_{oc} auch graphisch anhand der in Kapitel 7 betrachteten Beispiele darzustellen und zu untersuchen. Somit ist es nun möglich, Gebiete starker Konvergenz direkt zu benennen.

Wir konnten die von Petersson verwendete Beweistechnik in Satz 3.1.12 zur Konvergenz einer Folge approximativer Lösungen des Problems (SP_h) gegen eine exakte Lösung des Problems (SP) auf die Konvergenz von Lösungen des Problems (SP_j) mit positiver unterer Schranke L_j gegen eine Lösung des Problems (SP) für $L_j \rightarrow 0$ (siehe Satz 3.3.2) anwenden. Innerhalb der numerischen Untersuchungen der Testbeispiele in Kapitel 7 stellte sich die Continuation-Methode, also die kontinuierliche Steigerung des Strafparameters, in Kombination mit der Interpolationsmethode von Stolpe und Svanberg als ein der direkten unmittelbaren Bestrafung überlegenes Verfahren heraus. Die alternative Interpolation garan-

tierte unterdessen die Konkavität der Zielfunktion ab einem festen Wert (hier $q = 99$) und erzwang somit reine Schwarz-Weiß-Lösungen. Die Verwendung des FE-Tools SOFAR ermöglichte es uns, Ansatzfunktionen höheren Grades zu verwenden. Es gelang mit Hilfe von biquadratischen Ansatzfunktionen, das Phänomen der Checkerboard-Strukturen zu beseitigen, ohne dass heuristisch geprägte Filtertechniken hinzugezogen werden mussten. Die Beispiele in 3D zeigen, dass das Checkerboard-Phänomen auch dort auftauchen kann (siehe Hocker-Beispiel, Abbildung 7.36).

Ansatzpunkte für die weitere Arbeit sind zum einen die bereits oben genannte Anwendung der Methoden der nichtglatten Optimierung in Zusammenhang mit dem in dieser Arbeit gefundenen Subgradienten. Dabei gilt es zu klären, inwiefern die „Güte“ des Verfahrens von der Wahl der Folge von Designvektoren $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in Satz 4.2.1 abhängt. Denn davon wird der Grenzwert u der Teilfolge von zugehörigen Verschiebungsvektoren $(u(\rho_j))_{j \in \mathbb{N}}$ abhängen. Schließlich bestimmt dieser den zu verwendenden Subgradienten. Zum anderen besteht der durch numerische Tests begründete Verdacht, dass die Voraussetzungen in Satz 4.2.1 nur innerhalb der gewählten Beweistechnik benötigt werden. Das Beispiel 4.2.5 zeigt, dass selbst Folgen, die die Voraussetzung des Satzes nicht erfüllen, eine beschränkte Folge von zugehörigen Verschiebungen erzeugen können.

Die Ergebnisse zeigen, dass das Minimum-Compliance-Problem als Grundproblem der Topologieoptimierung auch in der Praxis in guten Designs resultiert, zumindest in einer frühen Designphase. Die weitere Erforschung dieses Problems ist daher durchaus sinnvoll, vor allem, wenn es gelingt weitere praxisrelevante Nebenbedingungen in das Problem zu integrieren.

Anhang A

Überlegung zu Compliance Fehlerschätzern

Dieser Abschnitt geht näher auf die in der Arbeit verfolgte Fragestellung der Güte und der Praxisrelevanz berechneter Strukturen ein. Wir werden zunächst die gesuchte Fehlergröße vorstellen. Es folgt eine Zerlegung dieses Fehlers in verschiedene bekannte und unbekannte Anteile. Dabei werden wir auf Schwierigkeiten hinweisen, die dem Minimum-Compliance-Problem innewohnen, welche es unmöglich machen, diese Fehlergrösse sinnvoll (z.B. in Form von a posteriori Fehlerschätzern) abschätzen zu können.

A.1 Praxisrelevanz

Zunächst erläutern wir, welche der bisher vorgestellten Probleme in der Praxis überhaupt von Relevanz sind. Mit anderen Worten: Welches dieser Probleme und dessen Lösung kann als Design-Werkzeug dienen? Hier interessiert man sich für die Lösung von Problem (MC_h) für kleine, aber nicht zu kleine Gittergröße h . Zum einen darf h aus fertigungstechnischen Gründen eine gewisse Mindestgröße nicht unterschreiten, da es nicht möglich ist bzw. zu kostenintensiv, eine berechnete Mikrostruktur χ_h^* zu realisieren, auch wenn diese nah an der Lösung χ^* des theoretisch interessanten Problems (MC) liegt. Zum anderen interessieren aus dem Blickwinkel des Designers genau genommen nur „reine“ $\{0, 1\}$ -Lösungen des Problems, da die Grauwerte im relaxierten Problem (MCR) materialtechnisch nicht interpretierbar sind (Bemerke: Es geht schließlich um die Frage: Soll an Stelle x Material verwendet werden oder nicht? Ein Grauwert von $\rho(x) = 0.5$ kann diese Frage nicht beantworten). Zusammenfassend ist also eine Lösung χ_h^* von Problem (MC_h) von Interesse, wobei die Frage nach der Größe von h noch mathematisch zu klären ist.

Auf der anderen Seite ist eine numerische Behandlung von Problem (MC_h) , selbst für ein relativ großes h , nicht möglich. Der Grund liegt in der riesigen Zahl diskreter Variablen. Die numerische Realisation verlangt damit eine Relaxierung der Indikatorfunktion und wir

sind gezwungen, das diskretisierte relaxierte Problem $(MC_{h,\epsilon})$ zu lösen. Es sei außerdem bemerkt, dass dieses Problem konvex und damit gut behandelbar ist. Der Preis ist die Anwendung geeigneter Approximationsschemata, wie z.B. das SIMP-Modell oder die von Stolpe & Svanberg vorgeschlagene Interpolation. Hier stellt sich die Frage nach der Genauigkeit und damit nach der Wahl einer geeigneten Methode. Wie bereits in Kapitel 5 erläutert, gibt es viele unterschiedliche Methoden, Schwarz-Weiß-Lösungen zu erzeugen, welche jedoch nicht untereinander verglichen werden können. Sie lösen jeweils ein anderes mathematisches bzw. physikalisches Modell. Die Wahl eines geeigneten Bestrafungsterms bzw. einer geeigneten Interpolation ist jedoch entscheidend für die Güte der resultierenden Struktur.

A.2 Gütekriterium und Fehlerabschätzung

Als Gütekriterium einer berechneten Struktur ziehen wir stets den zugehörigen Zielfunktionswert $c(\rho)$ bzw. $c(\chi)$ der Nachgiebigkeit (compliance) heran (siehe (3.11)).

Satz A.2.1

Wir bezeichnen nun mit $(\rho^*, u^*) \in \overline{\mathcal{H}}_\epsilon \times U$ eine Lösung des Problems $(MCR)_\epsilon$. Des Weiteren sei $(\rho_h^*, u_h^*) \in \overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon} \times U_h$ Lösung des Problems $(MCR)_{h,\epsilon}$. Mit $(\chi_h^*, \tilde{u}_h^*) \in \mathcal{H}_{h,\epsilon} \times U_h$ bezeichnen wir die Lösung von $(MC)_{h,\epsilon}$. Es gilt folgende Abschätzung (siehe Abbildung A.1) zwischen den Optima der Probleme $(MC)_\epsilon$, $(MCR)_\epsilon$, $(MC)_{h,\epsilon}$ und $(MCR)_{h,\epsilon}$

$$c(\rho^*) \leq c(\rho_h^*) \leq c(\chi_h^*)$$

für $h > 0$ beliebig aber fest.

Beweis: Aufgrund der Mengeninklusion

$$\overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon} \subset \overline{\mathcal{H}}_\epsilon \quad \forall h > 0$$

gilt für die zugehörigen Compliance Werte

$$c(\rho_h^*) \geq c(\rho^*) \quad \forall h > 0 .$$

Für $h > 0$ beliebig aber fest gilt zudem

$$\mathcal{H}_{h,\epsilon} \subset \overline{\mathcal{H}}_{h,\epsilon}$$

und daher analog für die Zielfunktionswerte

$$c(\chi_h^*) \geq c(\rho_h^*) .$$

Das Minimum von Problem $(MCR)_\epsilon$ und das Infimum von Problem $(MC)_\epsilon$ erfüllen folgende Gleichung (siehe dazu Satz 2.6.4)

$$c(\rho^*) = l(u^*) = \min_{\rho \in \overline{\mathcal{H}}_\epsilon, u \in U} l(u) = \inf_{\chi \in \mathcal{H}_\epsilon, u \in U} l(u) .$$

Insgesamt erhalten wir somit den gewünschten Zusammenhang zwischen den Optima der Probleme $(MC)_\epsilon$, $(MCR)_\epsilon$, $(MC_{h,\epsilon})$ und $(MCR_{h,\epsilon})$

$$c(\rho^*) \leq c(\rho_h^*) \leq c(\chi_h^*)$$

für $h > 0$ beliebig aber fest. ■

Zunächst bezeichnen wir den Fehler zwischen dem optimalen Zielfunktionswert $c(\rho_h^*)$ von Problem $(MCR_{h,\epsilon})$ und dem Wert von Problem (MCR_ϵ) für fest vorgegebenes h mit $E1$,

$$E1 := c(\rho_h^*) - c(\rho^*) \quad (\geq 0).$$

Des Weiteren definieren wir folgende Differenz als $E2$

$$E2 := c(\rho_h^{sw}) - c(\rho_h^*) \quad (\geq 0),$$

mit $\rho_h^{sw} \in \mathcal{H}_\epsilon$ einer beliebigen Schwarz-Weiß-Lösung, welche z.B. durch Anwendung der Continuation-Methode gefunden wurde. Man bemerke, dass dieser Fehler bekannt ist, da die Lösungen in der Praxis beide vorliegen.

Mit $E4$ sei der Fehler in den Lösungen bezeichnet, der durch den Übergang von Problem (MC_ϵ) zu seinem diskretisierten Pendant $(MC_{h,\epsilon})$ entsteht,

$$E4 := c(\chi_h^*) - \inf_{\chi \in \mathcal{H}_\epsilon, u \in U} l(u) = c(\chi_h^*) - c(\rho^*) \quad (\geq 0).$$

Schließlich benennen wir die Compliance-Differenz zwischen der optimalen Lösung χ_h^* von Problem $(MC_{h,\epsilon})$ und der ggfs. durch Heuristik berechneten realisierbaren Struktur ρ_h^{sw} mit $E3$,

$$E3 := c(\rho_h^{sw}) - c(\chi_h^*) \quad (\geq 0).$$

Wie in Abschnitt A.1 bereits erwähnt, ist dieser Fehler $E3$ für die Praxis von Interesse, da er die Güte der tatsächlich berechneten Struktur gegenüber der aus praxisrelevanter Sicht interessanten Struktur angibt. Mit den obigen Überlegungen ist es nun möglich, eine

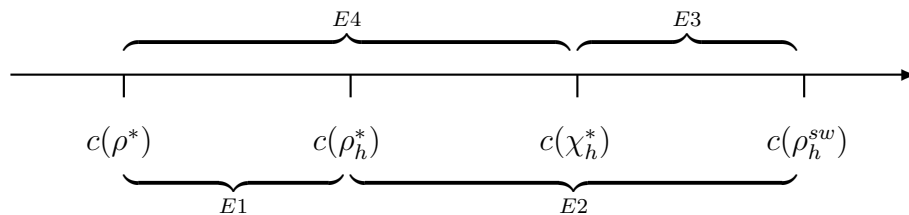


Abbildung A.1: Definition der Fehler $E1$ bis $E4$.

Abschätzung für den Fehler $E3$ anzugeben.

Satz A.2.2

Es seien $E1, E2, E3, E4 \geq 0$ wie oben definiert. Dann gilt:

$$E3 \leq E1 + E2$$

Beweis: Es gilt folgende Gleichung (siehe Abbildung A.1):

$$E1 + E2 = c(\rho_h^{sw}) - c(\rho^*) = E3 + E4, \quad (1.1)$$

und daher

$$E3 = E1 + E2 - E4 \stackrel{E4 \geq 0}{\leq} E1 + E2. \quad (1.2) \quad \blacksquare$$

Die Genauigkeit der Schranke $E1 + E2$ für $E3$ hängt also von $E4$ ab. Satz 2.6.4 sichert die Konvergenz von $E4$ mit h gegen Null. Satz 3.1.12 sichert die Konvergenz des Fehlers $E1$ für h gegen Null. Aufgrund der fehlenden Regularitätsvoraussetzungen an Lösungen $\rho^* \in \overline{\mathcal{H}}^*$ ist es nicht möglich, a posteriori Fehlerschätzer für $E1$ anzugeben. Jedoch weisen unsere numerischen Resultate (siehe Kapitel 7) stets ein gutes Konvergenzverhalten des Fehlers $E1$ auf. Der Fehler $E2$ ist in unseren Untersuchungen daher dominant und von einer Grössenordnung, die es unmöglich macht, ohne Kenntnis des Fehlers $E4$ eine sinnvolle Fehlerabschätzung für $E3$ vorzunehmen. Der Fehlerterm $E4$ enthält den Zielfunktionswert $c(\chi_h^*)$ des globalen Optimums eines diskretwertigen Problems und ist daher für kleine Gitterweiten h bereits nicht berechenbar.

Literaturverzeichnis

- [1] W. Achtziger. Multiple-load truss topology and sizing optimization: some properties of minimax compliance. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 98(2):255–280, 1998.
- [2] G. Allaire. *Shape Optimization by the Homogenization Method*. Springer-Verlag New York, Inc., 2002.
- [3] M. P. Bendsøe, A. R. Díaz, and N. Kikuchi. Topology and generalized layout optimization of elastic structures. *Topology Design of Structures*, pages 159–206, 1993.
- [4] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2):197–224, 1988.
- [5] M.P. Bendsøe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, 1, 1989.
- [6] M.P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology Optimization*. Springer-Verlag Berlin, 2003.
- [7] T. Borrvall. Topology optimization of elastic continua using restriction. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 8(4):351–385, 2001.
- [8] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. 3. Auflage.
- [9] J. Cea, A. Gioan, and J. Michel. Quelques resultat sur l’identification de domaines. *Calcolo III/ IV*, 1973.
- [10] J. Cea and K. Malanowski. An example of a max-min problem in partial differential equations. *SIAM J. Control*, 8(3):305–316, 1970.
- [11] F.H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Number 5. SIAM, Classics In Applied Mathematics, 1990.
- [12] I. Ekeland and R. Témam. *Convex Analysis and Variational Problems*. Number 28. SIAM, Classics In Applied Mathematics, 1999.

-
- [13] C. Geiger and C. Kanzow. *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer-Verlag Berlin, 2002.
- [14] P.E. Gill, W. Murray, and M. A. Saunders. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM J. Optim.*, 12:979–1006, 2002.
- [15] Numerical Algorithms Group. <http://www.nag.co.uk/>.
- [16] J.B. Hiriart Urruty and C. Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms Part 1*. Springer-Verlag Berlin, 1993.
- [17] F. Jarre and J. Stoer. *Optimierung*. Springer-Verlag Berlin, 2004.
- [18] H. Leipholz. *Einführung in die Elastizitätstheorie*. G.Braun Karlsruhe, 1968.
- [19] J. Petersson. On stiffness maximization of variable thickness sheet with unilateral contact. *Quarterly of Applied Mathematics*, 54(3):541–550, 1996.
- [20] J. Petersson. A finite element analysis of optimal variable thickness sheets. *SIAM J. Num. Anal.*, 36(6):1759–1778, 1999.
- [21] J. Petersson. Some convergence results in perimeter-controlled topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171:123–140, 1999.
- [22] J. Petersson and J. Haslinger. An approximation theory for optimum sheets in unilateral contact. *Quarterly of Applied Mathematics*, 56(2):309–325, 1998.
- [23] J. Petersson and O. Sigmund. Slope constrained topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41(8):1417–1434, 1998.
- [24] W. Prager and J.E. Taylor. Problems of optimal structural design. *J. Applied Mechs.*, 35:102–106, 1968.
- [25] A. Rietz. Sufficiency of a finite exponent in simp (power law) methods. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21:159–163, 2001.
- [26] M. P. Rossow and J. E. Taylor. A finite element method for the optimal desing of variable thickness sheets. *AIAA Journal*, 11:1566–1569, 1973.
- [27] A. Schröder. *Fehlerkontrollierte adaptive h- und hp-Finite-Elemente-Methoden für Kontaktprobleme*. Dissertation, Fachbereich Mathematik, Universität Dortmund, 2005.
- [28] M. Stolpe and K. Svanberg. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22:116–124, 2001.

-
- [29] M. Stolpe and K. Svanberg. On the trajectories of penalization methods for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21:128–139, 2001.
- [30] L. Tartar. Compensated compactness and partial differential equations. *Nonlinear Analysis and Mechanics: Herriot-Watt Symposium*, IV:136–212, 1979.
- [31] L. Tartar. Estimation de coefficients homogénéisés. *Computing Methods in applied sciences and engineering*, 1979.
- [32] General Mesh Viewer. <http://www-xdiv.lanl.gov/xcm/gmv/gmvhome.html>.