Lazy Decision Making – Entscheiden durch zielgerichtetes Präzisieren der Wahrscheinlichkeitsinformation

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Dortmund
am Fachbereich Informatik

Gero Presser

Dortmund, 2002

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Juni 2002
Dekan: Prof. Dr. Thomas Herrmann
1. Gutachter: Prof. Dr. Bernd Reusch
2. Gutachter: Prof. Dr. Ingo Wegener

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Ziel der Arbeit

> *"Was nicht auf einer Manuskriptseite zusammengefaßt werden kann, ist weder durchdacht noch entscheidungsreif."*
>
> Dwight D. Eisenhower

Eine Hauptschwierigkeit bei der Lösung von Entscheidungsproblemen ist die Ungewissheit bezüglich der Entwicklung der Umwelt: Verlässliche Aussagen über die Zukunft sind zumeist nicht möglich. Demzufolge betrachtet man alternative denkbare Umweltzustände und versieht diese mit (subjektiven) Wahrscheinlichkeiten. Aber auch die präzise Angabe dieser Wahrscheinlichkeiten ist in aller Regel nicht möglich, daher erlaubt eine Verallgemeinerung – die sogenannte LPI-Theorie – etwas "gröbere" Wahrscheinlichkeitsinformationen. Für diese Theorie entwickeln wir ein neues, sehr kompaktes Modell und leiten in diesem grundlegende Resultate her.

Das Lazy Decision Making basiert auf diesem Modell und erweitert den statischen Entscheidungsprozess um eine *dynamische* Komponente: Der Agent spezifiziert zunächst nur sehr grob seine Zukunftserwartungen und kann im Laufe der Entscheidungsfindung diese Erwartungen zielgerichtet weiter präzisieren, bis er eine "gute" Alternative ausfindig gemacht hat.

"Zielgerichtet" meint dabei, dass der Agent mit Informationen darüber versorgt wird, welche Art von Präzisierung die noch verbleibende Alternativenmenge verkleinern könnte bzw. welche Art von Informationen einen besonders großen Beitrag zur Steigerung der Qualität der möglichen Entscheidung leistet.

Der Hauptvorzug des Verfahrens liegt darin, dass Informationen über die Zustandswahrscheinlichkeiten zielgerichtet erfragt werden: Informationen werden nur in dem Umfang und zu dem Zeitpunkt eingebracht, in dem sie auch tatsächlich benötigt werden. Trotz dieser "weichen" Aspekte des Modells basiert es auf einer wohlakzeptierten axiomatischen Grundlage, den Axiomen rationalen Handelns.

Wir werden am Schluss der Arbeit zeigen, dass sich das Verfahren nicht nur in Entscheidungsunterstützenden Systemen sondern auch in vollkommen anderen Entscheidungssituationen – etwa beim *Multiple Attribute Decision Making* – gewinnbringend einsetzen lässt und auch dort die Menge der einzubringenden Informationen zu reduzieren hilft.

1.2 Ergebnisse

Im Rahmen dieser Arbeit führen wir ein neues dynamisches Entscheidungsmodell – das Lazy Decision Making – ein. Diesem Modell liegt die Idee zu Grunde, dass einerseits die axiomatische Grundlage des klassischen Ansatzes Einzug finden soll, gleichzeitig aber die Ausdruckskraft vergrößert und insbesondere der Ansatz um dynamische Elemente erweitert wird.

Wichtig war uns, ein "weiches" Modell zu entwickeln, welches den Aufwand für das Lösen eines Entscheidungsproblems zu reduzieren hilft und dem Aspekt Rechnung trägt, dass in den meisten Fällen das Wissen des (mit einer Entscheidungssituation konfrontierten) Agenten bezüglich der zukünftigen Entwicklungen nicht exakt erfasst werden kann. Insofern präzisiert der Agent zielgerichtet seine Angaben (quasi im Dialog mit dem System), bis eine hinreichend gute Entscheidung gefunden ist. Das Verfahren berechnet dabei Kenngrößen, die es dem Agenten erlauben, tatsächlich an den "kritischen" Stellen präziser zu werden.

Neben dem eigentlichen Verfahren (und hier insbesondere dem prinzipiellen Ansatz bzw. der neuen Herangehensweise) werden in der vorliegenden Arbeit weitere neue Erkenntnisse bezüglich des Entscheidens bei unsicheren Erwartungen hergeleitet. Hier seien folgende Aspekte explizit erwähnt:

- Wir entwickeln ein neues mathematisches Modell für Entscheidungssituationen bei unsicheren Erwartungen, welches strukturelle Untersuchungen durch seine Simplizität wesentlich begünstigt, gleichzeitig aber sämtliche relevanten Aspekte des klassischen Modells abdeckt (Kapitel 3).

- Basierend auf dem von uns vorgeschlagenen *Dominanzaxiom* untersuchen wir, inwieweit formal auf die Präferenzen des Agenten geschlossen und damit die "Lösung" eingeschränkt werden kann (Kapitel 3).

- Für allgemeine Entscheidungsprobleme bei partieller Information werden wir neue Ergebnisse hinsichtlich der Struktur und der Lösbarkeit herleiten, welche insbesondere auch den Gesichtspunkt der Präzisierung (der Wahrscheinlichkeitsinformation) einschließen (Kapitel 4).

- Wir werden das Konzept der Heuristik im Rahmen unseres Modells formalisieren und etliche der klassischen Heuristiken systematisch einordnen; hierzu führen wir die Klasse der separablen sowie der nicht-separablen Heuristiken ein (Kapitel 5). Dies kann als Grundlage für eine weiterführende Theorie der Heuristiken dienen, die insbesondere auch axiomatisch begründbar wäre.

- Basierend auf einer aus dem Bereich der Fuzzy Aggregationsoperatoren stammenden Idee von Yager werden wir das Fundament für eine Theorie der OWA-Heuristiken legen. Diese Heuristiken lassen sich stark parametrisieren, berücksichtigen eine "breitere Basis" als herkömmliche Heuristiken und lassen sich insbesondere kombinieren, so dass hiermit die individuellen Präferenzen des Agenten besser erfasst werden können (Kapitel 5).

- Wir werden den Ansatz des *zielgerichteten Präzisierens* einführen, der auf Ergebnissen aus der Theorie der linearen Programmierung basiert und dem Agenten ermöglicht, die kritischen "Stellen" in der Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsinformation ausfindig zu machen, so dass er diese – sofern möglich – präzisieren und damit die Qualität der Entscheidung verbessern kann. Dieser Ansatz lässt sich unmittelbar auf andere Bereiche der Entscheidungstheorie übertragen (Kapitel 6 und 7).

1.3 Gliederung

Die eigentliche Arbeit beginnt mit einer knappen Übersicht über die für uns relevanten Ergebnisse aus der klassischen Entscheidungstheorie (Kapitel 2).[1] Sodann führen wir in Kapitel 3 eine Verallgemeinerung des klassischen Modells ein, in der anstelle von Punktwahrscheinlichkeiten allgemeine Wahrscheinlichkeitsinformationen verwendet werden. Das von uns entwickelte Modell erlaubt eine zugleich präzise wie kompakte Betrachtung der Sachverhalte und ist insbesondere in Hinblick auf das später einzuführende Lazy Decision Making ausgelegt. Nachfolgend untersuchen wir in Kapitel 4 die Lösbarkeit von Entscheidungsproblemen in unserem Modell und leiten diverse strukturelle Eigenschaften von Entscheidungsproblemen her. Da i.Allg. ein Entscheidungsproblem bei partieller Information nicht unmittelbar lösbar ist, werden wir in Kapitel 5 diverse Heuristiken einführen und diese nach der Art ihrer Erzeugung systematisch einordnen und untersuchen. Insbesondere gehen wir auf die vielversprechende neue Klasse der OWA-Heuristiken ein und beginnen hier mit dem Aufbau einer entsprechenden Theorie. Anschließend untersuchen wir in Kapitel 6 die wichtige Klasse der linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen näher und gehen dabei auf deren Repräsentation sowie Möglichkeiten der Präzisierung ein. Die zielgerichtete Präzisierung linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen wird nachfolgend in Kapitel 7 behandelt, hier werden insbesondere die notwendigen Grundlagen aus der Theorie der linearen Programmierung erörtert und geeignete Maße eingeführt.

Nach diesen Vorarbeiten werden wir in Kapitel 8 das eigentliche Lazy Decision Making sehr kompakt einführen. Im Idealfall sollte dies für den Leser wie eine fast offensichtliche Konsequenz der Vorüberlegungen wirken. Einen Hauptbestandteil des Kapitels nimmt die Besprechung der Annahmen und Eigenschaften des Lazy Decision Making ein.

Im nachfolgenden Kapitel 9 illustrieren wir anhand eines Beispiels, wie sich unser Verfahren konkret anwenden läßt und beschreiben zudem weitere Anwendungsfelder. Im abschließenden Kapitel 10 diskutieren wir einige Erweiterungsmöglichkeiten des

[1] Die Arbeit gliedert sich in *Kapitel*, welche wiederum aus *Abschnitten* bestehen, die ihrerseits *Unterabschnitte* beinhalten. Die Nummerierung von Definitionen, Anmerkungen etc. ist relativ zum Abschnitt, beispielsweise ist das 14. nummerierte Element in Abschnitt 7.2 mit der Nummer 7.2.14 versehen.

Neben Definitionen, Bemerkungen, Folgerungen etc. verwenden wir sehr exzessiv das (ebenfalls) nummerierte und damit strukturierende Element der *Anmerkung*. Dies erlaubt punktgenaue Querverweise und erhöht (zumindest unserer Meinung nach) die Lesbarkeit der Arbeit, da separate Gedanken deutlicher voneinander abgegrenzt werden.

Lazy Decision Making und zeigen damit Ansatzpunkte für weitere Forschungsarbeiten auf.

1.4 Notation und mathematische Grundlagen

Mengen

Es sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null, $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ die Menge der positiven natürlichen Zahlen, $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{R}^{>0} := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $|x|$ der Betrag von x (also x für $x \geq 0$ und $-x$ für $x < 0$). Für $l, u \in \mathbb{R}$ bezeichne $[l, u]$ das abgeschlossene Intervall $\{x \in \mathbb{R} \,|\, l \leq x \leq u\}$ und (l, u) das offene Intervall $\{x \in \mathbb{R} \,|\, l < x < u\}$.

Wir schreiben $X \subseteq M$, wenn X eine Teilmenge von M ist und $X \subset M$, falls X eine echte Teilmenge von M ist (d.h., es existiert mindestens ein $x \in M$ mit $x \notin X$). Ist X keine Teilmenge von M, so schreiben wir $X \nsubseteq M$ (d.h., es existiert mindestens ein $x \in X$ mit $x \notin M$).

Für eine Menge M sei $\mathcal{P}(M) = \{X \,|\, X \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M, also die Menge aller Teilmengen von M.

Für beliebige Mengen M und N bezeichne $M \times N$ das kartesische Produkt von M und N definiert durch $M \times N = \{(m, n) \,|\, m \in M, n \in N\}$. Es sei $M^1 = M$ und $M^{i+1} = M^i \times M$ für $i \in \mathbb{N}$.

Relationen und Funktionen

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M heisst asymmetrisch, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt $(x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \notin R$.

Eine schwache Halbordnung $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M ist eine irreflexive, asymmetrische, transitive Relation. Gilt für alle $x, y \in M$ mindestens eine der Beziehungen $(x, y) \in R$, $(y, x) \in R$, so heisst R schwache Totalordnung. Ist die Relation R reflexiv anstelle von irreflexiv, so sprechen wir von einer starken Halbordnung bzw. starken Totalordnung.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ordnet jedem $x \in X$ einen Wert $f(x) \in Y$ zu. Demgegenüber bezeichnen wir mit $f : X \dashrightarrow Y$ eine möglicherweise nur partiell definierte Abbildung. Ist der Wert $f(x)$ nicht definiert, so schreiben wir $f(x) = \perp$.

Sei R eine schwache Halbordnung auf M. Gilt $(x, y) \in R$ (für $x, y \in M$), so schreiben wir auch xRy (Infix Notation) und verwenden anstelle von Buchstaben zumeist die üblichen Symbole wie $\leq$ oder $\precsim$ für Ordnungsrelationen. Ist $\leq$ eine schwache Halbordnung auf M, so heisst $(M, \leq)$ geordnete Menge.

Seien $(X, \leq_X)$ und $(Y, \leq_Y)$ geordnete Mengen. Eine Abbildung $\iota : X \to Y$ heisst Homomorphismus von $(X, \leq_X)$ auf $(Y, \leq_Y)$, wenn für alle $x, y \in X$ gilt $x \leq_X y \Longleftrightarrow \iota(x) \leq_Y \iota(y)$.

Seien $f : X \to Y$ und $g : X' \to Y'$ Abbildungen und es gelte $g(X') = \{g(x) \,|\, x \in X'\} \subseteq X$. Dann ist die Komposition $f \circ g : X' \to Y$ von f und g definiert durch $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ für alle $x \in X'$.

Mächtigkeit von Mengen

Die Kardinalität einer endlichen Menge M bezeichnen wir durch $|M|$. Eine Menge M heisst abzählbar, wenn eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to M$ existiert und überabzählbar, falls dies nicht der Fall ist. Die Menge M heisst kontinuumsmächtig genau dann, wenn eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to M$ existiert.

Vektoren und Matrizen

Vektoren kennzeichnen wir durch kleine, fettgedruckte Buchstaben, also zum Beispiel $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Im Sinne einer kompakteren Notation schreiben wir $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ als Abkürzung für

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Mit $\boldsymbol{a}^T$ bezeichnen wir den zu $\boldsymbol{a}$ transponierten Vektor. Für Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

das Skalarprodukt von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$.

Matrizen kennzeichnen wir durch große, fettgedruckte Buchstaben (z.B. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$). Die Elemente einer $m \times n$ Matrix $\boldsymbol{A} = (A_{i,j})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$ bezeichnen wir wie folgt:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \ldots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

Mit $\boldsymbol{A}_{i,*}$ kennzeichnen wir die i-te Zeile der Matrix, mit $\boldsymbol{A}_{*,j}$ analog die j-te Spalte ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$).

Logik

Für Aussagen A und B bezeichne $\neg A$ die Negation von A (logisches "nicht"), $(A \wedge B)$ die Konjunktion von A und B (logisches "und") und $(A \vee B)$ die Disjunktion von A und B (logisches "oder").

Wir verwenden das Symbol $\forall$ für den Allquantor ("für alle") und entsprechend das Symbol $\exists$ für den Existenzquantor ("es existiert ein").

Extremwerte

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Mit $\max M$ bezeichnen wir das Maximum der Menge M (bezüglich der "normalen" Ordnungsrelation "$\leq$" auf M, wir beziehen uns hier also ausschließlich auf die Ordnungsstruktur $(M, \leq)$), mit $\sup M$ bezeichnen wir das Supremum (und analog mit $\min M$ das Minimum und mit $\inf M$ das Infimum). Wir vereinbaren folgende abkürzende Schreibweise:

$$\max_{x \in M} f(x) := \max\{f(x) \mid x \in M\}$$

sowie

$$\arg\max_{x \in M} f(x) := \{x^* \in M \mid f(x^*) = \max_{x \in M} f(x)\}.$$

Die Abkürzungen seien entsprechend für min, sup und inf anstelle von max definiert.

Danksagung

Ich bedanke mich herzlichst bei allen, die mir bei der Realisierung der vorliegenden Arbeit behilflich waren, allen voran Herrn Prof. Dr. Bernd Reusch für die vielen Freiräume, die er mir bei meiner Tätigkeit am Lehrstuhl Informatik I gelassen hat sowie dem damit einhergehenden Vertrauen.

Des Weiteren möchte ich mich explizit bei meinen Kollegen der QuinScape GmbH sowie den Mitarbeitern des Lehrstuhls Informatik I bedanken, die mir während des "Endspurts" den Rücken frei gehalten haben. Insbesondere danke ich Herrn Wolfgang Hunscher, der auch nach den krassesten Fehlbenutzungen noch geduldig meine Daten gerettet und die Funktionstüchtigkeit meines Systems hergestellt hat.[2]

Ein besonderer Dank gilt ferner Herrn Prof. Dr. Philippe Smets, der mich in einigen persönlichen Gesprächen erst (ungewollt) davon überzeugt hat, *nicht* einen evidenztheoretischen Ansatz zu wählen sondern nach einem mächtigeren Repräsentationsformalismus Ausschau zu halten.

Ich bedanke mich darüber hinaus bei Herrn Prof. Dr. Ingo Wegener, Herrn Prof. Dr. Volker Gruhn sowie Herrn Dr. Hubert Wagner für ihre freundliche Bereitschaft, die Arbeit zu begutachten bzw. in der Promotionskommission mitzuwirken. Ganz besonders möchte ich Herrn Dr. Hubert Wagner dafür danken, dass er mich mit dem Lehrstuhl Informatik I bekannt gemacht hat.

Vielen Dank auch an alle diejenigen, die ich hier namentlich nicht erwähne, damit die Danksagung signifikant kürzer als der Hauptteil der Arbeit bleibt.

Gero Presser
Im Herbst 2001

[2] Eindrucksvoll habe ich hierbei gelernt, dass Notebooks – zumindest handelsübliche – *nicht* wasserdicht sind. Die Daten auf der Festplatte hingegen scheinen glücklicherweise gegen fast alle Attacken resistent zu sein.

Kapitel 2

(Klassische) Entscheidungstheorie

In diesem Kapitel geben wir eine kurze Einführung in die klassische (präskriptive) Entscheidungstheorie. Basierend auf dem Standardmodell betrachten wir im Rahmen des Entscheidens unter Risiko das Konzept der BERNOULLI-Rationalität und stellen nachfolgend einige Heuristiken sowie den Dominanzbegriff für das Entscheiden unter Ungewissheit vor.

Wir orientieren uns vorwiegend an der Darstellung von HELMUT LAUX ([Lau98]).

"Der einzige Weg, Entscheidungen mit unangenehmen Konsequenzen zu vermeiden, ist es, das Leben eines Einsiedlers zu wählen. Dieser Schritt ist allerdings eine Entscheidung mit unangenehmen Konsequenzen."

RICHARD BACH

"Kein Problem wird gelöst, wenn wir träge darauf warten, daß Gott allein sich darum kümmert."

MARTIN LUTHER KING

2.1 Grundlegendes

2.1.1 Zielsetzung der Entscheidungstheorie

Im Rahmen der Entscheidungstheorie wird untersucht, welche Handlungsalternative ein Agent[1] in einer konkreten Situation – der *Entscheidungssituation* – auswählt beziehungsweise auswählen sollte.

[1] In der klassischen Literatur spricht man gewöhnlich von dem *Entscheidungssubjekt* oder *Entscheider* anstelle von einem Agenten. Wir verwenden dennoch den für die Informatik mittlerweile gebräuchlicheren Begriff des Agenten, wobei wir diesen sehr weit fassen: Im Sinne von STUART RUSSELL und PETER NORVIG verstehen wir unter einem Agenten ein "Etwas", das

Die **deskriptive** Entscheidungstheorie widmet sich der Fragestellung, welche Entscheidungen in der realen Welt tatsächlich getroffen werden und *warum* gerade diese Entscheidungen getroffen werden. Diese Theorie hat also *beschreibenden* Charakter. Untersucht wird die Entscheidungswahl bei Individuen (einzelnen Personen) ebenso wie bei Gruppen von Personen.

Die **präskriptive** (oder *normative*) Entscheidungstheorie hat eher einen *vorschlagenden* Charakter; ihr Untersuchungsgegenstand ist, wie Entscheidungen "*rational*"[2] getroffen werden können bzw. sollten. Grundgedanke ist, dass für einen rational agierenden Agenten bereits durch wenige Angaben bezüglich seiner subjektiven Präferenzen bestimmt ist, welche Alternative er in einer komplexeren Entscheidungssituation wählen sollte, damit er nicht irrational handelt. Um sich darunter überhaupt etwas vorstellen zu können, denke man an das Folgende:

> Wenn ein Agent besonders gerne Fruchteis mag, so sollte er auch Spaß an einem Eisbecher haben, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.3 aus Zitroneneis besteht und mit der Restwahrscheinlichkeit von 0.7 aus Erdbeereis. Dieser "Zufallsbecher" sollte ihm insbesondere lieber sein, als ein Eisbecher der mit Sicherheit nur aus Schokoladeneis besteht.

Wir werden uns im Folgenden ausschließlich der präskriptiven Entscheidungstheorie widmen. Ziel unserer Untersuchungen ist *nicht*, das reale Entscheidungsverhalten von Menschen nachzubilden, sondern vielmehr eine Unterstützung zur Findung rationaler Entscheidungen bereitzustellen.[3]

2.1.2 Das Standardmodell

Wir benötigen zunächst eine geeignete, abstrakte Sichtweise eines Entscheidungsproblems. Aus der Vielzahl vorgeschlagener Ansätze hat sich im Laufe der Zeit ein (abstraktes) Entscheidungsmodell gewissermaßen als *das* Standardmodell (auch Grundmodell genannt) herauskristallisiert (vgl. etwa [Sch66]).

Die Hauptbestandteile dieses Modells sind die Alternativenmenge $\mathcal{A}$, die Menge der Umweltzustände $\mathcal{S}$, die Ergebnisfunktion **erg** sowie die Zielvorstellungen des Agenten. Diese einzelnen Elemente beschreiben wir im Folgenden etwas detaillierter.

---

wahrnimmt und *handelt*:

> „An agent is anything that can be viewed as perceiving its environment through sensors and acting upon that environment through effectors.“ [RN95, Seite 31]

[2] Der Begriff des "rationalen" Entscheidens ist zweifelsohne problematisch. Wir werden später klären, wie genau dieser Begriff im Rahmen der Entscheidungstheorie geeignet operationalisiert wird; zuvor appellieren wir an die Intuition des Lesers.

[3] Es erscheint (zumindest auf den ersten Blick) wenig erstrebenswert, dass Agenten einmal in der Woche die Beine hochlegen, sich laut grunzend ein Fußballspiel anschauen und vorsätzlich ihre ohnehin schon nicht-perfekte Wahrnehmungsfähigkeit durch die Einnahme chemischer Substanzen weiter herabsetzen.

Einige systematische Fehler, die menschlichen Agenten beim Entscheiden (insbesondere in komplexen Handlungssituationen) unterlaufen, stellt Dietrich Dörner in [Dör92] auf sehr unterhaltsame Weise dar.

Der Agent kann und muss genau eine **Alternative** A aus einer (nicht leeren) **Alternativenmenge** $\mathcal{A}$ auswählen. Dabei wird unterstellt, dass sich die Alternativen wechselseitig ausschließen; dies ist unbedingt bei der Formulierung der Alternativenmenge zu beachten.[4]

Das Ergebnis, welches der Agent bei der Auswahl einer Alternative $A \in \mathcal{A}$ erzielt, hängt normalerweise auch von Faktoren ab, die der Agent nicht beeinflussen kann bzw. über die er nicht entscheiden kann. Solche Faktoren, man spricht hier zumeist von *Daten*, werden durch das Konzept des **Umweltzustands** (kurz: **Zustands**) erfasst. Ein Umweltzustand ist eine Konstellation...

> „...von Ausprägungen der entscheidungsrelevanten Daten“ (Helmut Laux, [Lau98, Seite 22]).[5]

Die (nicht leere) Menge aller zur Unterscheidung der Alternativen relevanten Umweltzustände bezeichnen wir mit $\mathcal{S}$; abkürzend nennen wir $\mathcal{S}$ die **Zustandsmenge**.[6] Wesentlich ist, dass die Umwelt nicht bewusst *gegen* den Agenten spielt, sondern sich stochastisch verhält.[7] Insbesondere setzen wir voraus, dass der tatsächlich eintretende Umweltzustand *unabhängig* von der durch den Agenten getroffenen Auswahl ist.

Gewöhnlich unterstellt man, dass sowohl die Alternativenmenge $\mathcal{A}$ als auch die Zustandsmenge $\mathcal{S}$ endlich sind (vgl. [Lau98]). Wir folgen zunächst dieser Annahme, werden aber im Rahmen unseres Modells – welches wir in Kapitel 3 einführen – diese Beschränkung wieder dahingehend aufweichen, dass wir zumindest nicht-endliche Alternativenmengen erlauben.

Wesentlich zur Bewertung der Alternativen sind deren Konsequenzen: Entscheidet sich der Agent für die Alternative $A \in \mathcal{A}$ und tritt der Umweltzustand $S \in \mathcal{S}$ ein, so erzielt der Agent das **Ergebnis** $\mathbf{erg}(A, S)$. Dabei versteht man unter einem Ergebnis eine Konstellation von Ausprägungen der entscheidungsrelevanten Zielgrö-

[4] Muss(?!) der Agent *entweder* einen Mercedes *oder* einen BMW kaufen, so entspricht dies einer zweielementigen Alternativenmenge. Besteht zudem die Möglichkeit, *beide* Autos oder aber *gar kein* Auto zu kaufen, so modelliert man dies durch eine vierelementige Alternativenmenge. In diesem Beispiel würde man die Alternative gar kein Auto zu kaufen als die **Unterlassensalternative** (manchmal auch liebevoll *Beamtenalternative* genannt) bezeichnen. Besteht also in irgendeiner Form die Möglichkeit nichts zu tun, so modelliert man dies explizit durch Aufnahme einer Unterlassensalternative in die Alternativenmenge.

[5] Entscheidet der Agent beispielsweise über die am nächsten Tag zu tragende Kleidung, so könnte ein Umweltzustand ein Tupel bestehend aus der Temperatur, der Niederschlagsmenge und der Windgeschwindigkeit am nächsten Tag sein (z.B. Durchschnittswerte). Diese Daten *sollten* entscheidungsrelevant sein und entziehen sich (vermutlich) der Kontrolle des Agenten.

[6] Gelegentlich findet man die Aussage, dass $\mathcal{S}$ aus der Menge *aller* denkbaren Umweltzustände besteht. Tatsächlich wird man jedoch nur die im Rahmen des Entscheidungsproblems für relevant erachteten Zustände aufnehmen und etwa den Zustand einer “kosmischen Katastrophe” ausschließen (da dieser – hoffentlich – überaus unwahrscheinlich ist und zur Unterscheidung zwischen den Alternativen keinen Beitrag leistet). Im Sinne der Vereinfachung eines Entscheidungsproblems kann es durchaus sinnvoll sein auf Zustände bewusst zu verzichten und/oder ähnliche Zustände zusammenzufassen.

[7] Der Fall einer dem Agenten bösartig gesonnenen Umwelt (in Form eines Gegenspielers) wird im Rahmen der *Spieltheorie* ausführlich untersucht (vgl. hierzu etwa [vNM43]).

ßen.[8]

Die **Zielvorstellungen** des Agenten werden mit Hilfe einer Nutzenfunktion erfasst. Diese ordnet (mindestens) jedem möglichen Ergebnis $\mathbf{erg}(A, S)$ ($A \in \mathcal{A}$, $S \in \mathcal{S}$) einen reellen (Nutzen-) Wert zu, wobei die Anordnung dieser Nutzenwerte die Präferenzen des Agenten widerspiegelt. Demzufolge ist – "grob" betrachtet – das Ziel des Agenten, eine Alternative $A \in \mathcal{A}$ auszuwählen, deren Ergebnis einen möglichst hohen Nutzen stiftet.[9]

2.1.3 Präferenzrelation und (ordinale) Nutzenfunktion

Wesentlich für einen sinnvollen Entscheidungsprozess ist, dass die individuellen Vorlieben des Agenten formal sauber erfasst werden. Dazu legen wir zunächst einen Wertebereich für mögliche Ergebnisse fest, auf dem wir anschließend Präferenzen ("Vorlieben") betrachten werden um dann letztendlich zu einer (zunächst ordinalen) Nutzenfunktion zu gelangen.

Definition 2.1.1 (Ergebnismenge) Im Folgenden sei $\mathbb{U}$ eine feste, nicht leere **Ergebnismenge**. Die Elemente von $\mathbb{U}$ bezeichnen wir als *Ergebnisse* und unterstellen $\mathbf{erg}(A, S) \in \mathbb{U}$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $S \in \mathcal{S}$. Aus technischen Gründen nehmen wir zudem an, dass die Menge $\mathbb{U}$ höchstens kontinuumsmächtig ist.[10]

Wir können jetzt **erg** formal als eine Abbildung $\mathbf{erg} : \mathcal{A} \times \mathcal{S} \to \mathbb{U}$ auffassen; die Abbildung **erg** weist der Alternative $A \in \mathcal{A}$ im Zustand $S \in \mathcal{S}$ das Ergebnis $\mathbf{erg}(A, S) \in \mathbb{U}$ zu.

Die Präferenzen des Agenten können nun als Relation auf der Menge $\mathbb{U}$ beschrieben werden. Allerdings erscheint umgekehrt nicht jede Relation auf $\mathbb{U}$ geeignet, um Präferenzen eines "rationalen" Agenten auszudrücken.[11]

Definition 2.1.2 (Präferenzrelation) Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ eine (für das Folgende) feste Relation auf der Menge $\mathbb{U}$. Wir vereinbaren zunächst einige Abkürzungen.

[8] Im Allgemeinen ist $\mathbf{erg}(A, S)$ ein Vektor $(z_1, \ldots, z_n)$, wobei z_i in irgendeiner Form misst, wie "gut" bei Alternative A im Zustand S das $i$te Ziel erfüllt wird. Beispielsweise könnte z_1 das Endvermögen des Agenten in DM sein, z_2 ein Maß für die Zufriedenheit der Einwohner von Italien und z_3 ein Maß für die Gesundheit des Agenten. (Dann ist "hoffentlich" Anliegen des Agenten, alle drei Zielerreichungsgrade zu maximieren.)

Sind die Alternativenmenge $\mathcal{A}$ und die Zustandsmenge $\mathcal{S}$ beide endlich, so unterstellt man häufig (und offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$ und $\mathcal{S} = \{1, \ldots, M\}$. Dann kann man sämtliche Ergebnisse in einer $N \times M$ Matrix $(E_{ij})_{i=1,\ldots,N,\, j=1,\ldots,M}$ mit $E_{ij} = \mathbf{erg}(i, j)$ zusammenfassen; man bezeichnet diese als die **Ergebnismatrix**.

[9] Wir sprechen hier von einer "*groben*" Betrachtung, da wir zunächst die Umweltzustände ausgeklammert haben. Genau diese machen aber letztendlich die Entscheidungsfindung kompliziert: Das konkrete Ergebnis einer Alternative ist abhängig von dem eintretenden Umweltzustand und dieser ist i.Allg. nicht bekannt.

[10] Die Menge $\mathbb{U}$ ist *kontinuumsmächtig*, wenn eine surjektive Abbildung von der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in $\mathbb{U}$ existiert. Durch die Forderung, dass $\mathbb{U}$ höchstens kontinuumsmächtig ist, können wir später die Existenz einer Nutzenfunktion garantieren. Diese Forderung ist keine echte Einschränkung, da sie bei realen Entscheidungsproblemen stets erfüllt ist.

[11] Beispielsweise wäre es verwunderlich, wenn der Agent das Ergebnis $A \in \mathbb{U}$ dem Ergebnis $B \in \mathbb{U}$ echt vorzieht, gleichzeitig aber auch B gegenüber A echt präferiert.

Für $A, B \in \mathbb{U}$ sei

$$\begin{aligned} A \succsim B &:\Longleftrightarrow \mathcal{R}(A,B) \\ A \succ B &:\Longleftrightarrow (\mathcal{R}(A,B) \wedge \neg\mathcal{R}(B,A)) \\ A \sim B &:\Longleftrightarrow (\mathcal{R}(A,B) \wedge \mathcal{R}(B,A)) \end{aligned}$$

Die Relation $\mathcal{R}$ heisst **Präferenzrelation** (auf $\mathbb{U}$), wenn sie den beiden folgenden Axiomen genügt:

- **Ordnungsaxiom:** Für beliebige Ergebnisse $A, B \in \mathbb{U}$ gilt genau eine der folgenden drei Beziehungen:

$$(1)\, A \succ B \qquad (2)\, A \sim B \qquad (3)\, B \succ A$$

- **Transitivitätsaxiom:** Für beliebige drei Ergebnisse $A, B, C \in \mathbb{U}$ gilt

$$(A \succsim B \wedge B \succsim C) \Longrightarrow A \succsim C.$$

Für eine Diskussion und Rechtfertigung der beiden Axiome verweisen wir auf [Lau98]. Wir unterstellen im Folgenden, dass sich die Vorlieben eines "rational" agierenden Agenten durch eine Präferenzrelation beschreiben lassen.

Anmerkung 2.1.3 Obwohl diese Axiome für die Präferenzen eines *rationalen* Agenten relativ plausibel erscheinen, findet man bei menschlichen Agenten manchmal eine Zuwiderhandlung. So hat beispielsweise Kenneth May in Experimenten gezeigt, dass das Transitivitätsaxiom durch beobachtete Zirkularitäten der Form "$A \succ B, B \succ C, C \succ A$" verletzt wird ([May54]). Unabhängig davon erscheint jedoch das Transitivitätsaxiom für *rationale* Präferenzen angemessen und wird als "Gebot der Rationalität" von niemandem bestritten ([KM76, S. 10]).

Anmerkung 2.1.4 In der Sprache der Mathematik ist eine Relation $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ eine Präferenzrelation genau dann, wenn die Relation $\mathcal{R}$ eine starke Totalordnung (also reflexiv, asymmetrisch und transitiv) ist.

Bemerkung 2.1.5 Eine Relation $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ ist genau dann eine Präferenzrelation, wenn eine Funktion $U : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ mit

$$A \succsim B \Longleftrightarrow U(A) \geq U(B)$$

für alle $A, B \in \mathbb{U}$ existiert. Eine solche Funktion U nennen wir eine **ordinale Nutzenfunktion** und den Wert $U(A)$ den **Nutzen** des Ergebnisses A (für $A \in \mathbb{U}$). Wir bezeichnen U auch als eine durch $\mathcal{R}$ **induzierte ordinale Nutzenfunktion**.[12]

[12] Der Begriff der *ordinalen* Nutzenfunktion leitet sich von dem Begriff der *ordinalen Messung* ab: Eine Messung ist ordinal, wenn sie bis auf eine monotone Transformation eindeutig ist. (Demgegenüber bezeichnet man sie als *kardinal*, wenn die Messung bis auf eine (positive) lineare Transformation eindeutig ist.) Vergleiche hierzu [KM76, S. 26].

Beweis. Zunächst interpretieren wir die Aussage etwas um: Die Behauptung ist, dass $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ dann und nur dann eine Präferenzrelation ist, wenn ein Homomorphismus $\iota : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ von $(\mathbb{U}, \precsim)$ auf $(\mathbb{R}, \leq)$ existiert. Beide Implikationen dieser Äquivalenz folgen aber bereits aus der Tatsache, dass $\precsim$ eine Totalordnung auf $\mathbb{U}$ ist und die Mächtigkeit von $\mathbb{U}$ höchstens derjenigen von $\mathbb{R}$ entspricht. □

Die durch eine Präferenzrelation $\mathcal{R}$ induzierte Nutzenfunktion U ist nur bis auf eine positive Transformation eindeutig bestimmt.

Bemerkung 2.1.6 Sei U eine Nutzenfunktion zu der Präferenzrelation $\mathcal{R}$. Eine Funktion $U' : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Nutzenfunktion zu der Präferenzrelation $\mathcal{R}$, wenn eine streng monoton steigende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $U' = g \circ U$ existiert.

Beweis.

- "$\Longrightarrow$": Sei U' eine Nutzenfunktion zu $\mathcal{R}$. Dann gilt

  $$U(A) > U(B) \Longleftrightarrow A \succ B \Longleftrightarrow U'(A) > U'(B)$$

  für alle $A, B \in \mathbb{U}$, da U und U' Nutzenfunktionen zur gleichen Präferenzrelation $\mathcal{R}$ sind. Insbesondere gilt also $U(A) \neq U(B) \Longleftrightarrow U'(A) \neq U'(B)$ und folglich existiert eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $U'(A) = g(U(A))$ für alle $A \in \mathbb{U}$. Zudem ist diese Funktion eingeschränkt auf $U(\mathbb{U}) = \{U(A) \,|\, A \in \mathbb{U}\}$ streng monoton steigend. Da g auf $\mathbb{R} \setminus U(\mathbb{U})$ beliebig festgelegt werden kann, lässt sich g auch als streng monoton steigende Funktion wählen.

- "$\Longleftarrow$": trivial, denn es gilt für alle $A, B \in \mathbb{U}$ aufgrund der Monotonie von g

  $$U(A) \geq U(B) \Longleftrightarrow (g \circ U)(A) \geq (g \circ U)(B) \Longleftrightarrow U'(A) \geq U'(B)$$

  und folglich ist auch U' eine Nutzenfunktion zu $\mathcal{R}$.

□

Die bisherigen Überlegungen erlauben es uns, *sichere* Ergebnisse miteinander zu vergleichen: Der Agent zieht das (sichere) Ergebnis $A \in \mathbb{U}$ gegenüber $B \in \mathbb{U}$ genau dann vor, wenn der Nutzen $U(A)$ höher als $U(B)$ ist, wobei U eine ordinale Nutzenfunktion bezeichnet, die durch die Präferenzrelation $\mathcal{R}$ des Agenten induziert wird.

Da wir somit feststellen können, was bei Sicherheit (aus Sicht des Agenten) besser ist, stellt zumindest die Entscheidungssituation ohne Unsicherheit kein großes Problem mehr dar.

2.1.4 Entscheiden bei sicheren Erwartungen

In der Entscheidungstheorie spricht man von *sicheren* Erwartungen (gelegentlich auch *Gewissheit*), wenn der Agent davon überzeugt ist, dass ein Zustand $S^* \in \mathcal{S}$ mit Sicherheit eintreten wird.[13]

[13] Dabei ist es für den Prozess der Entscheidungsfindung unerheblich, ob dieser Zustand auch wirklich eintritt; entscheidend ist, dass der Agent davon *überzeugt* ist.

Bei sicheren Erwartungen ist das Entscheidungsproblem nahezu trivial:[14] Wir haben unsere Betrachtungen ausdrücklich auf rational agierende Agenten beschränkt und gefordert, dass sich die Vorlieben eines solchen Agenten bezüglich der Elemente der Ergebnismenge $\mathbb{U}$ als Präferenzrelation $\mathcal{R}$ darstellen lassen. Gemäß unserer bisherigen Überlegungen existiert dann eine induzierte ordinale Nutzenfunktion U. Der rational agierende Agent sollte diejenige Alternative auswählen, welche im Zustand S^* den höchsten Nutzen stiftet. Wird dieser maximale Nutzen von mehreren Alternativen erreicht, so sollte der Agent bezüglich dieser indifferent sein.

Resultat 2.1.7 Ist der Agent davon überzeugt, dass der Zustand $S^* \in \mathcal{S}$ eintreten wird, so sollte er eine beliebige Alternative aus der Menge $\arg\max_{A \in \mathcal{A}} U(\mathbf{erg}(A, S^*))$ auswählen.

Leider ist die Welt zumeist nicht derartig gutartig, dass man von sicheren Erwartungen sprechen kann.

2.2 Entscheiden bei unsicheren Erwartungen

2.2.1 Rationalität und unsichere Erwartungen

Die Rationalität hat bei sicheren Erwartungen keinerlei Probleme bereitet; akzeptiert man das Konzept der Präferenzrelation (also das Ordnungs- und das Transitivitätsaxiom), so ist es für den Agenten zweifelsohne sinnvoll, eine nutzenmaximierende Alternative auszuwählen.

Bei nicht-sicheren Erwartungen (der Fachterminus ist **unsichere Erwartungen**) ist die Situation erheblich komplizierter; insbesondere ist hier die Bedeutung der Rationalität wesentlich weniger offensichtlich. Dennoch hat sich auch hier in der Entscheidungstheorie eine bestimmte Sichtweise der Dinge durchgesetzt, nämlich das sogenannte Konzept der BERNOULLI-*Rationalität*. Dieses werden wir nun (nach einigen Vorarbeiten) vorstellen.

Das Grundkonstrukt zur Behandlung von Unsicherheit ist die Lotterie.

Definition 2.2.1 (Lotterie) Die Menge aller **Lotterien** $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\mathbb{U})$ zu der Ergebnismenge $\mathbb{U}$ definieren wir rekursiv:

(1) Jedes Ergebnis $A \in \mathbb{U}$ ist eine Lotterie (eine entartete Lotterie mit dem sicheren Resultat A).

(2) Gilt $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ und sind $A_1, \ldots, A_n$ Lotterien, so ist auch $\langle A_1, p_1, \ldots, A_n, p_n \rangle$ eine Lotterie.

(3) (Nichts sonst ist eine Lotterie.)

[14] Hier sei relativierend angemerkt, dass die Trivialität des Entscheidens bei sicheren Erwartungen maßgeblich aus der Annahme resultiert, dass die BERNOULLI-Nutzenfunktion U gegeben ist. Verzichtet man auf diese Annahme und stellt das Abwägen zwischen verschiedenen Zielsetzungen in den Vordergrund, so kann auch das Entscheiden bei einem bekannten Umweltzustand (und folglich sicheren Erwartungen) problematisch werden (vgl. hierzu Abschnitt 9.3).

Die Interpretation einer Lotterie $\langle A_1, p_1, \ldots, A_n, p_n \rangle$ ist, dass der Agent mit der Wahrscheinlichkeit p_i das Resultat A_i (für alle $i = 1, \ldots, n$) erzielt. Dabei kann A_i selbst wieder eine Lotterie sein (dann setzt sich die Interpretation rekursiv fort) oder aber ein Ergebnis (also eine entartete Lotterie bzw. ein dieser entsprechendes sicheres Resultat). Im wesentlichen ist eine Lotterie also eine endliche Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ergebnissen, die allerdings geschachtelt notiert sein kann.

Anmerkung 2.2.2 Statt der kryptischen Notation einer Lotterie bietet sich insbesondere bei verschachtelten Lotterien eine grafische Darstellung als Baum an. Als Beispiel hierfür haben wir in Abbildung 2.1 die Lotterie

$$\langle \langle A_1, 1/2, A_2, 1/2 \rangle, 1/2, A_3, 1/4, \langle A_4, 2/3, A_5, 1/3 \rangle, 1/4 \rangle$$

in grafischer Form als Baum dargestellt. (Dabei sind die Kanten mit den Wahrscheinlichkeiten und die Blätter mit (sicheren) Ergebnissen markiert.)

1/2 1/4
1/4

1/2 1/2 A_3 2/3 1/3

A_1 A_2 A_4 A_5

Abbildung 2.1: Grafische Darstellung einer Lotterie

Die entscheidende Überlegung ist nun, wie eine Präferenzrelation $\mathcal{R}$ (welche wir bisher auf der Menge aller Ergebnisse $\mathbb{U}$ betrachtet haben) auf die Menge aller Lotterien $\mathbb{L}$ fortgesetzt werden kann. Eben hier kommt die bereits angesprochene Bernoulli-Rationalität ins Spiel; in der Entscheidungstheorie sieht man es als rational an, wenn ein Agent seine Präferenzrelation $\mathcal{R}$ in Einklang mit den folgenden Axiomen auf Lotterien fortsetzt.

Definition 2.2.3 (Axiome rationalen Verhaltens) Es sei $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L} \times \mathbb{L}$ eine Relation auf der Menge aller Lotterien. Wir verwenden wieder die Abkürzungen $A \succsim B$, $A \succ B$ und $A \sim B$ (vgl. Definition 2.1.2), wobei allerdings diesmal A, B Lotterien bezeichnen.

Die folgenden Axiome heissen in ihrer Gesamtheit die **Axiome rationalen Verhaltens** (vgl. [KM76, HR92, FH94, Lau98]):

- **Ordnungaxiom:** Für beliebige Ergebnisse A, B gilt genau eine der folgenden drei Beziehungen:

$$(1)\, A \succ B \qquad (2)\, A \sim B \qquad (3)\, B \succ A$$

- **Transitivitätsaxiom:** Für beliebige drei Ergebnisse A, B, C gilt

$$(A \succsim B \wedge B \succsim C) \Longrightarrow A \succsim C.$$

- **Stetigkeitsaxiom:** Für alle Ergebnisse A, B, C mit $A \succ B$ und $B \succ C$ existiert ein $p \in [0, 1]$, so dass $\langle A, p, C, 1-p \rangle \sim B$ gilt.
- **Substitutionsaxiom:** Für beliebige Lotterien A, B mit $A \sim B$ gilt $\langle A, p, C, 1-p \rangle \sim \langle B, p, C, 1-p \rangle$ für alle $p \in [0, 1]$ und jede Lotterie C.
- **Monotonieaxiom:** Für beliebige Lotterien A, B mit $A \succ B$ gilt

  $$\langle A, p, B, 1-p \rangle \succsim \langle A, q, B, 1-q \rangle \Longleftrightarrow p \geq q$$

  für alle $p, q \in [0, 1]$.
- **Dekompositionsaxiom:** Sei $L = \langle L_1, p_1, \ldots, L_n, p_n \rangle$ eine mehrstufige Lotterie, d.h. die L_i sind wiederum Lotterien der Form $L_i = \langle L_{i,1}, p_{i,1}, \ldots, L_{i,m_i}, p_{i,m_i} \rangle$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

  $$L \sim \langle L_{1,1}, p_1 p_{1,1}, \ldots, L_{1,m_1}, p_1 p_{1,m_1}, L_{2,1}, p_2 p_{2,1}, \ldots, L_{n,m_n}, p_n p_{n,m_n} \rangle.$$

  Dieses Axiom besagt, dass mehrstufige Lotterien zu einstufigen Lotterien "dekomponiert" werden können. Anschaulich bedeutet dies, dass der Agent "keinen Spaß" am Spielen (der Lotterie) hat (vgl. [LR57]).

Offenbar besagen die beiden ersten Axiome separat, dass $\mathcal{R}$ eingeschränkt auf die Menge aller Ergebnisse $\mathbb{U}$ eine Präferenzrelation ist (vgl. Definition 2.1.2). Insofern verallgemeinern die Axiome rationalen Verhaltens den Begriff der Präferenzrelation von der Menge der (sicheren) Ergebnisse $\mathbb{U}$ auf die Menge $\mathbb{L}$ aller Lotterien über $\mathbb{U}$ und damit auf eine Menge (potentiell) unsicherer Ergebnisse.

In der Literatur wurden eine Reihe verschiedener (aber dennoch äquivalenter) Axiomensysteme in diesem Zusammenhang vorgeschlagen, wobei das erste von John von Neumann und Oskar Morgenstern stammt (zu finden in [vNM43]). Das von uns ausgewählte Axiomensystem orientiert sich an Luce und Raiffa (vgl. [LR57]) und findet sich – teilweise leicht modifiziert – in den meisten "modernen" Lehrbüchern der Entscheidungstheorie (vgl. beispielsweise [BC92, Lau98]).

Obwohl diese Axiome relativ überzeugend wirken, beobachtet man dennoch in der Realität bei menschlichen Agenten gelegentlich eine Zuwiderhandlung. Unter dem Stichwort der *bounded rationality* wurden diese Zuwiderhandlungen im Rahmen der deskriptiven Entscheidungstheorie ausführlich untersucht (siehe etwa [TK81]).

Verhält sich ein Agent in Einklang mit den Axiomen rationalen Verhaltens, so hat dies weitreichende Konsequenzen. Dies drückt sich durch das folgende zentrale Theorem aus.

Theorem 2.2.4 (Bernoulli) Der Agent akzeptiere die Axiome rationalen Verhaltens. Dann existiert eine Funktion $U : \mathbb{L} \to \mathbb{R}$ derart, dass für jede Lotterie der Form $\langle A_1, p_1, \ldots, A_n, p_n \rangle$ gilt

$$U(\langle A_1, p_1, \ldots, A_n, p_n \rangle) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(A_i)$$

und zudem

$$A \succsim B \Longleftrightarrow U(A) \geq U(B)$$

für alle Lotterien $A, B \in \mathbb{L}$. Eine solche Funktion U bezeichnen wir als **Bernoulli-Nutzenfunktion** oder kurz als **Nutzenfunktion**.

Die entscheidende Konsequenz des Bernoulli-Theorems ist, dass – sofern die Bernoulli-Nutzenfunktion U bekannt ist – Lotterien anhand ihres *Erwartungsnutzens* bewertet werden können und die dadurch induzierte Anordnung exakt mit den Präferenzen des Agenten übereinstimmt. Als logische Konsequenz resultiert die *Erwartungsnutzenmaximierung* als Prinzip zur Entscheidungsfindung; dieses Vorgehen wird gelegentlich auch als Bernoulli-Prinzip bezeichnet.

Wir verzichten auf den etwas länglichen Beweis des Bernoulli-Theorems; der interessierte Leser findet diesen z.B. in [vNM43] oder [Weg95].

Bernoulli-Nutzenfunktionen wurden in der Literatur sehr umfangreich untersucht und für etliche Spezialfälle, z.B. monetäre Größen, haben sich spezielle Klassen wie die logarithmischen Nutzenfunktionen etabliert (vgl. z.B. [FH94, Lau98]). Allerdings existiert für den Nutzen keine einheitliche "Währung", was sich u.a. darin zeigt, dass die Bernoulli-Nutzenfunktion nur bis auf eine positive lineare Transformation eindeutig bestimmt ist (vgl. [HR92]). Aufgrund dieses Resultats bezeichnet man eine Bernoulli-Nutzenfunktion auch als *kardinale* Nutzenfunktion; im Gegensatz zur *ordinalen* Nutzenfunktion haben allgemeine monotone Transformationen einen Einfluss auf die Entscheidungsfindung und sind dementsprechend – sofern die zu Grunde liegenden Präferenzen nicht verändert werden sollen – i.Allg. unzulässig.

2.2.2 Entscheiden bei Risiko

Das Entscheiden bei Unsicherheit unterteilt man in der Entscheidungstheorie zumeist weiter in das Entscheiden bei *Risiko* und das Entscheiden bei *Ungewissheit im engeren Sinne*.

Man spricht vom Entscheiden bei **Risiko**, wenn der Agent allen Zuständen $S \in \mathcal{S}$ eine (subjektive) Wahrscheinlichkeit $p(S)$ zuordnen kann.[15] Die Erwartungen des Agenten bezüglich des tatsächlich eintretenden Umweltzustands lassen sich in diesem Fall also vollständig durch die Werte $p(S)$ einer *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $p : \mathcal{S} \to [0, 1]$ (mit $\sum_{S \in \mathcal{S}} p(S) = 1$) beschreiben.[16]

[15] Im Gegensatz zu den klassischen, intersubjektiv überprüfbaren Wahrscheinlichkeiten liegen in vielen realen Entscheidungssituationen nur auf persönlicher Erfahrung und Intuition beruhende Glaubwürdigkeitsvorstellungen des Agenten über die Zustände vor (vgl. [Lau98, S. 123]). Subjektive Wahrscheinlichkeiten dienen der quantitativen Abbildung dieser Vorstellung und verhalten sich – mit Ausnahme ihrer Interpretation – konform zu den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Es ist allerdings anzumerken, dass subjektive Wahrscheinlichkeiten durchaus nicht unumstritten sind (für eine relativ scharfe Kritik siehe [KM76, S. 54ff]), wenngleich sie sich mittlerweile in vielen Bereichen (z.B. der Finanzierungstheorie, siehe [FH94]) durchsetzen konnten. Eine eher psychologisch motivierte Darstellung subjektiver Wahrscheinlichkeiten findet sich in [Lee71].

[16] Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ordnet jeder möglichen Ausprägung einer diskreten Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens zu. Im Rahmen der Entscheidungstheorie

Ein Entscheidungsproblem unter Risiko ist nach unseren Vorarbeiten sehr einfach zu lösen. Der Agent sollte eine derjenigen Alternativen wählen, welche den höchsten *erwarteten Nutzen* versprechen.

Resultat 2.2.5 Lassen sich die Überzeugungen des Agenten bezüglich des eintretenden Umweltzustands vollständig durch eine Wahrscheinlichkeitszuweisung

$$p : \mathcal{S} \to [0,1]$$

beschreiben (und handelt der Agent nach dem BERNOULLI-Prinzip, d.h. er akzeptiert die Axiome rationalen Handelns), so sollte er eine beliebige Alternative aus der folgenden Menge auswählen:

$$\arg\max_{A \in \mathcal{A}} \left(\sum_{S \in \mathcal{S}} p(S) U(\mathbf{erg}(A,S)) \right)$$

Dabei haben wir stillschweigend angenommen, dass die BERNOULLI-Nutzenfunktion U des Agenten bekannt ist. Tatsächlich werden wir diese (übliche) Annahme für den Rest dieser Arbeit aufrecht erhalten: Im Folgenden setzen wir also voraus, dass der Agent die Axiome rationalen Handelns akzeptiert und dass U eine zu den Präferenzen des Agenten “passende” BERNOULLI-Nutzenfunktion im Sinn von Resultat 2.2.4 bezeichnet.

Anmerkung 2.2.6 Das Entscheiden bei sicheren Erwartungen kann als Spezialfall des Entscheidens bei Risiko angesehen werden. Ist der Agent davon überzeugt, dass der Umweltzustand $S^* \in \mathcal{S}$ eintritt, lässt sich dies durch die Wahrscheinlichkeitszuweisung $p : \mathcal{S} \to [0,1]$ mit $p(S^*) = 1$ (und $p(S) = 0$ für $S \in \mathcal{S} \setminus \{S^*\}$) modellieren.

2.2.3 Dominanz

Bevor wir auf das Entscheiden bei Ungewissheit (i.e.S.) eingehen, führen wir zunächst den Begriff der Dominanz ein. Dieser ist hilfreich um Alternativen auszusondern, welche ein rational agierender Agent *auf gar keinen Fall* wählen sollte.

Definition 2.2.7 (Dominanz) Eine Alternative $A \in \mathcal{A}$ wird von einer Alternative $A' \in \mathcal{A}$ **dominiert** genau dann, wenn für alle Zustände $S \in \mathcal{S}$ die Beziehung $U(\mathbf{erg}(A,S)) \leq U(\mathbf{erg}(A',S))$ gilt und für mindestens einen Zustand $S' \in \mathcal{S}$ die echte Ungleichung $U(\mathbf{erg}(A,S')) < U(\mathbf{erg}(A',S'))$ erfüllt ist.[17]

Dominierte Alternativen können aus der Alternativenmenge entfernt werden ohne dadurch das von dem Agenten maximal erzielbare Nutzenniveau zu reduzieren.[18]

bezeichnet man p üblicherweise als *Wahrscheinlichkeitsverteilung*, auch wenn dies im mathematischen Sinne nicht ganz korrekt ist.

[17] Unsere Definition stimmt mit derjenigen von LAUX überein (siehe [Lau98, S. 103]). Manche Autoren – z.B. SCHNEEWEISS – bezeichnen dies als *strikte Dominanz* und definieren den “normalen” Dominanzbegriff etwas anders (vgl. [Sch67]). Hier ist Vorsicht angebracht, da die unterschiedlichen Definitionen relativ leicht zu Missverständnissen führen können!

[18] Sind A und A' Alternativen und wird A von A' dominiert, so ist offenbar der Nutzen bei Wahl der Alternative A' für jeden möglichen Zustand S mindestens ebenso hoch wie derjenige bei Wahl von A. Folglich reduziert das Entfernen von A nicht das erreichbare Nutzenniveau.

Definition 2.2.8 (Effizienz einer Alternativenmenge) Eine Alternativenmenge $\mathcal{A}$ heisst **effizient** genau dann, wenn keine Alternative $A \in \mathcal{A}$ von einer anderen Alternative $A' \in \mathcal{A} \setminus \{A\}$ dominiert wird.

Anmerkung 2.2.9 Es lässt sich sehr leicht zeigen, dass zu jeder (endlichen) Alternativenmenge $\mathcal{A}$ eine eindeutig bestimmte (bezüglich Mengeninklusion) maximale effiziente Alternativenmenge $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}$ existiert. Diese kann zum Beispiel ermittelt werden indem sukzessive eine dominierte Alternative bestimmt und eliminiert wird bis keine dominierte Alternative mehr in der Alternativenmenge vorhanden ist.

Da ein rationaler Agent stets eine nicht-dominierte Alternative wählen sollte, kann man sich bei der Entscheidungsfindung offenbar ohne Einschränkung auf die angesprochene maximale effiziente Alternativenmenge $\mathcal{A}^*$ beschränken.

2.2.4 Entscheiden bei Ungewissheit (i.e.S.)

Bei **Ungewissheit i.e.S.** weiß der Agent lediglich, welche Umweltzustände prinzipiell auftreten können, d.h. er kennt die Zustandsmenge $\mathcal{S}$. Darüber hinaus kann er aber keine Angaben über die Wahrscheinlichkeiten der Zustände $S \in \mathcal{S}$ machen.

Im Gegensatz zu den beiden anderen Entscheidungssituationen (sichere Erwartungen, Risiko), kann bei Ungewissheit nur sehr wenig Definitives darüber ausgesagt werden, welche Alternative der Agent wählen sollte. Im wesentlichen beschränkt sich dies darauf, welche Alternativen der Agent aufgrund von Dominanzen *nicht* auswählen sollte. Für weitere Aussagen benötigt man detailliertere Kenntnisse über die Vorlieben des Agenten, welche etwa Ausdruck in der verwandten Heuristik finden (die wir sogleich vorstellen werden).

Resultat 2.2.10 Kennt der rational agierende Agent ausschließlich die Zustandsmenge $\mathcal{S}$ (hat aber keine weiteren Erwartungen bezüglich des tatsächlich eintretenden Zustands), so sollte die von ihm gewählte Alternative in der (eindeutig bestimmten) maximalen effizienten Alternativenmenge $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}$ liegen.

Tatsächlich kann jede Alternative $A \in \mathcal{A}^*$ potentiell die beste Wahl für den Agenten sein, insofern ist keine weitere Einschränkung möglich.

Es stellt sich dennoch die Frage, welche konkrete Alternative $A \in \mathcal{A}^*$ der Agent in einer realen Entscheidungssituation auswählen sollte. Denn in dieser Situation *muss* sich der Agent für *eine* Alternative entscheiden und es wäre durchaus denkbar, dass eine einfache Regel in *vielen* Fällen gute Arbeit leistet; mit anderen Worten, wir suchen eine *Heuristik*. Tatsächlich existieren etliche Heuristiken, welche als Vorschläge aufzufassen sind, wie man "in vielen Fällen eine gute Entscheidung treffen kann".[19] Da wir diese Heuristiken an späterer Stelle noch benötigen werden, stellen wir die bekanntesten nun der Reihe nach in Form von Definitionen vor.

[19] Wir haben diese Formulierung in Anführungszeichen gesetzt, da sie lediglich eine intuitive Motivation für die Heuristiken darstellt. Tatsächlich trifft jede Heuristik gewisse Annahmen über das Profil/die Präferenzen des Agenten. Der Agent sollte eine Heuristik auswählen, welche besonders gut mit seinen Vorstellungen übereinstimmt, zum Beispiel im Falle eines extrem pessimistischen Agenten die Maximin-Regel.

Definition 2.2.11 (Maximin-Regel) Der **Maximin-Regel** folgend sollte der Agent den Nutzen desjenigen Ergebnisses maximieren, welches er im *ungünstigsten* Fall erzielt. Er sollte also eine Alternative aus der folgenden Menge wählen:

$$\arg\max_{A\in\mathcal{A}}\left(\min_{S\in\mathcal{S}} U(\mathbf{erg}(A,S))\right)$$

(Einige Autoren sprechen von der WALD-Regel, da die Maximin-Regel im Zusammenhang mit Entscheidungsproblemen erstmalig von ABRAHAM WALD vorgeschlagen wurde (vgl. [Wal45, Wal50]).)

Definition 2.2.12 (Maximax-Regel) Bei der **Maximax-Regel** ist die Unterstellung, dass der Agent den Nutzen des Ergebnisses im *günstigsten* Fall maximieren will und damit eine Alternative der folgenden Menge wählen sollte:

$$\arg\max_{A\in\mathcal{A}}\left(\max_{S\in\mathcal{S}} U(\mathbf{erg}(A,S))\right)$$

Definition 2.2.13 (HURWICZ-Prinzip) Das HURWICZ-Prinzip[20] ist ein gewichteter Kompromiss zwischen der Maximin- und der Maximax-Regel (vgl. [Hur51]). Der Agent legt einen "Optimismusparameter" ([NM93, S. 736]) $\alpha \in [0,1]$ fest und die vorgeschlagene Alternativenmenge ist

$$\arg\max_{A\in\mathcal{A}}\left(\alpha \max_{S\in\mathcal{S}} U(\mathbf{erg}(A,S)) + (1-\alpha)\min_{S\in\mathcal{S}} U(\mathbf{erg}(A,S))\right).$$

Bemerkenswert ist, dass die Maximin- und Maximax-Regel sowie das HURWICZ-Prinzip für jede Alternative nur jeweils höchstens zwei der Zustände aus $\mathcal{S}$ in die Entscheidungsfindung einbeziehen; dies sind der günstigste und der ungünstigste Zustand für die jeweilige Alternative (gemessen am Nutzen des zugehörigen Ergebnisses).

Definition 2.2.14 (SAVAGE-NIEHANS-Regel) Bei der **SAVAGE-NIEHANS-Regel** – man spricht auch von der *Regel des kleinsten Bedauerns* (oder der *MinRegret*-Regel) – wählt man diejenige Alternative, welche das potentielle Bedauern minimiert (vgl. [Sav51, Nie48]). Idee ist, dass wenn bei Auswahl der Alternative $A \in \mathcal{A}$ der Zustand $S \in \mathcal{S}$ eintritt, der Wert

$$\mathrm{regret}(A,S) := \max_{A'\in\mathcal{A}} U(\mathbf{erg}(A',S)) - U(\mathbf{erg}(A,S))$$

ein Maß für das "Bedauern" darstellt. Dabei bezieht sich das Bedauern auf den entgangenen Nutzen, denn $\mathrm{regret}(A,S)$ entspricht der Differenz zwischen der im

[20] Im Gegensatz zu der Maximin- und Maximax-*Regel* spricht man hier von einem *Prinzip*, da das Verfahren parametrisiert ist und ohne konkreten Parameterwert α noch keine Entscheidungsregel liefert. Für gegebenes $\alpha \in [0,1]$ wird aus dem Prinzip eine Regel (vgl. [Lau98, S. 108]).

Zustand S besten Alternative und der gewählten Alternative A. Die Handlungsanweisung ist demzufolge, diejenige Alternative A^* zu wählen, welche das maximalmögliche Bedauern (über alle Zustände) minimiert. Wir erhalten damit als Vorschlag basierend auf der SAVAGE-NIEHANS-Regel die folgende Alternativenmenge:

$$\arg\min_{A \in \mathcal{A}} \left(\max_{S \in \mathcal{S}} \operatorname{regret}(A, S) \right)$$

Die nachfolgende Regel basiert auf der Idee, das gegebene Problem unter Ungewissheit auf eine Entscheidungssituation unter Risiko zurückführen indem eine Gleichverteilung der Zustände unterstellt wird.

Definition 2.2.15 (LAPLACE-Regel) Idee der **LAPLACE-Regel** ist anzunehmen, dass alle Zustände gleichwahrscheinlich sind. Grundlage für diese Annahme sind die "fehlenden anderslautenden Informationen" – dieses auf JACOB BERNOULLI und DE LAPLACE zurückgehende Prinzip wird gelegentlich als das *Prinzip des unzureichenden Grundes* bezeichnet (vgl. [dL14]). Demzufolge unterstellt man also für jeden Zustand $S \in \mathcal{S}$ die Wahrscheinlichkeit $p(S) = \frac{1}{|\mathcal{S}|}$ und hat damit das Entscheidungsproblem unter Ungewissheit auf ein Entscheidungsproblem unter Risiko zurückgeführt (welches wir bereits behandelt haben).

Der Agent sollte somit (sofern er der LAPLACE-Regel folgt) eine Alternative aus der folgenden Menge wählen:

$$\arg\max_{A \in \mathcal{A}} \left(\sum_{S \in \mathcal{S}} \frac{1}{|\mathcal{S}|} U(\mathbf{erg}(A, S)) \right)$$

Eine ausführlichere Besprechung der einzelnen Regeln und insbesondere deren kritische Beurteilung findet sich bei HELMUT LAUX ([Lau98]).

Kapitel 3

Entscheiden bei partieller Information

In diesem Kapitel führen wir das Entscheiden bei partieller Information ein, welches eine Verallgemeinerung des klassischen Entscheidungsmodells darstellt. Wir präsentieren alte sowie neue Aspekte dieser Theorie in einem sehr kompakten Modell, welches sich an unseren späteren Bedürfnissen orientiert. Von zentraler Wichtigkeit wird die Betrachtung sein, wie sich die Präferenzen des Agenten ("fast" ohne weitere Annahmen) auf das neue Modell fortsetzen lassen.

Grundlegend für dieses Kapitel ist das Buch [KM76] von Kofler und Menges.

"Vorhersagen sind besonders riskant, wenn sie sich auf die Zukunft beziehen."

Mark Twain

"Wer nicht auf seine Weise denkt, denkt überhaupt nicht."

Oscar Wilde

3.1 Motivation

In der klassischen Entscheidungstheorie betrachtet man die beiden Extremfälle des Entscheidens unter Risiko und des Entscheidens unter Ungewissheit (vgl. Kapitel 2). Demgegenüber scheinen die meisten realen Entscheidungssituationen eher "zwischen" diesen beiden Extremfällen zu liegen: Der Agent kennt keine *exakten* Zustandswahrscheinlichkeiten – beispielsweise wird er kaum eine exakte (subjektive) Regenwahrscheinlichkeit für den morgigen Tag angeben können – hat jedoch zumindest "gewisse" Vorstellungen bezüglich der Wahrscheinlichkeiten, weiss also mehr als "gar nichts" wie es beim Entscheiden unter Ungewissheit unterstellt wird.

Zwischen den beiden klassischen Extremfällen – dem Entscheiden unter Risiko und dem Entscheiden unter Ungewissheit – liegt das Entscheiden bei *partieller Information*. Hier besitzt der Agent zwar i.Allg. nicht die vollständige Information in Form einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, hat jedoch *partielle Kenntnis* über die Zustandswahrscheinlichkeiten. Dies können etwa *komparative* Wahrscheinlichkeitsinformationen (z.B. "Zustand S_1 ist wahrscheinlicher als Zustand S_2") oder Intervallwahrscheinlichkeiten (z.B. "Die Zustandswahrscheinlichkeit von S_1 liegt im Intervall $[0.2, 0.4]$") sein. Erstmalig untersucht wurde das Vorliegen partieller Wahrscheinlichkeitsinformationen in Modellen von Schneeweiss ([Sch64]) und Fishburn ([Fis64, Fis65]).

Diese ersten Ansätze verallgemeinernd versteht man unter einer partiellen Wahrscheinlichkeitsinformation eine *Menge* von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Zustandsmenge, also eine Teilmenge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p : \mathcal{S} \to [0,1]$ (mit $\sum_{S \in \mathcal{S}} p(S) = 1$). Das Entscheiden bei partieller Information beinhaltet damit als Spezialfälle das Entscheiden unter Risiko (für eine einelementige Wahrscheinlichkeitsinformation) und das Entscheiden unter Ungewissheit (für die Menge *aller* Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathcal{S}$). Darüber hinaus ermöglicht es aber auch eine Reihe wesentlich ausdrucksstärkerer Modellierungen: So lassen sich beispielsweise die oben angesprochenen komparativen Wahrscheinlichkeiten und Intervallwahrscheinlichkeiten durch partielle Wahrscheinlichkeitsinformationen beschreiben.[1]

In Abbildung 3.1 ist schematisch die Unterteilung der verschiedenen Entscheidungssituationen dargestellt (in Anlehnung an [KM76, S. 23]). In der klassischen Theorie betrachtet man neben dem Entscheiden unter *Sicherheit* das Entscheiden unter Risiko und das Entscheiden unter Ungewissheit als Spezialfälle der *unsicheren* Erwartungen. Das Entscheiden bei partieller Information beinhaltet all dies, erlaubt darüber hinaus aber noch die Modellierung weiterer Unsicherheitssituationen, welche sich – anschaulich gesprochen – zwischen Risiko und Ungewissheit befinden.[2] Sowohl im Risiko- als auch im Sicherheitsfall ist die partielle Information *vollständig* in dem Sinne, dass *genau eine* denkbare Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt. Demgegenüber liegt im Ungewissheitsfall *keine* Information vor, hier hält der Agent *alle* Wahrscheinlichkeitsverteilungen für möglich. Dazwischen finden sich die *echt partiellen* Informationen, hier sind *mehr als eine aber weniger als alle* Wahrscheinlichkeitsverteilungen denkbar.[3]

[1] Das Entscheiden bei partieller Information entspricht einem Entscheidungsproblem mit unscharfen ("*imprecise*") Wahrscheinlichkeiten. Peter Walley listet in [Wal91, S. 3ff] eine Reihe überzeugender Argumente auf, warum in realen Situationen (nicht notwendigerweise Entscheidungssituationen) unscharfe Wahrscheinlichkeiten wesentlich natürlicher als normale ("scharfe") Wahrscheinlichkeiten erscheinen.

[2] Der Sicherheitsfall entspricht einer Wahrscheinlichkeitsinformation bestehend aus genau einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $p : \mathcal{S} \to [0,1]$, welche dem als sicher angenommenen Zustand $S^* \in \mathcal{S}$ die Wahrscheinlichkeit Eins zuweist (d.h. $p(S^*) = 1$, $p(S) = 0$ für $S \in \mathcal{S} \setminus \{S^*\}$). Die anderen Fälle (Risiko und Ungewissheit) haben wir bereits oben diskutiert.

[3] Der Text erläutert wie die Pfeile zu verstehen sind. Anstelle einer klaren Semantik haben die Pfeile in dieser grafischen Einordnung die vage Bedeutung "gliedert sich in", wobei im Falle nur eines ausgehenden Pfeils dieser als "wird erfasst durch" interpretiert werden kann.

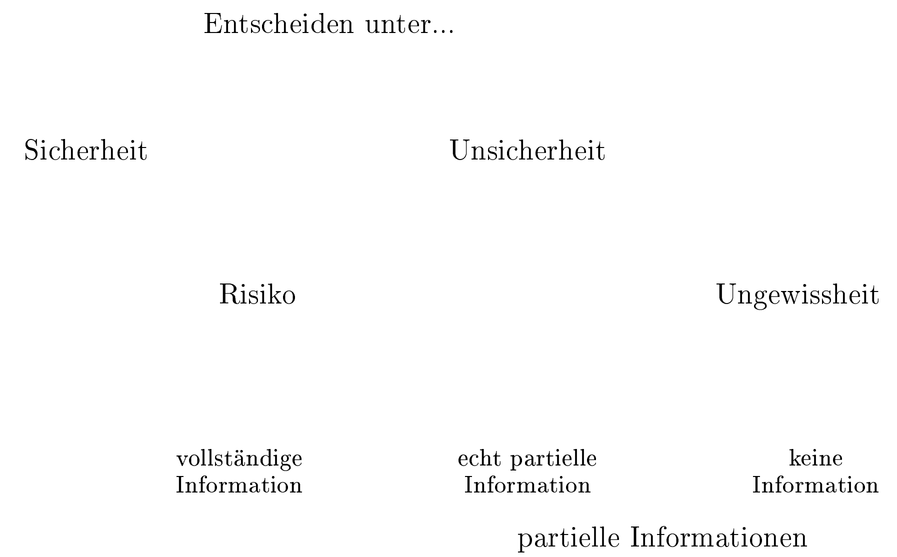

Abbildung 3.1: Grafische Einordnung der verschiedenen Entscheidungssituationen

3.2 Theorie der linearen partiellen Information

Dem klassischen Ansatz (vgl. Kapitel 2) folgend besteht ein Entscheidungsproblem bei partieller Information aus folgenden Komponenten:

- der (endlichen, nichtleeren) Alternativenmenge $\mathcal{A}$,
- der (endlichen, nichtleeren) Zustandsmenge $\mathcal{S}$,
- der Ergebnismenge $\mathbb{U}$
- der Ergebnisfunktion $\mathbf{erg} : \mathcal{A} \times \mathcal{S} \to \mathbb{U}$,
- sowie der Wahrscheinlichkeitsinformation W (einer Menge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathcal{S}$).

Zudem müssen die Präferenzen des Agenten modelliert werden. Hier unterstellt man zumeist, dass eine Bernoulli-Nutzenfunktion $U : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ auf der Ergebnismenge gegeben ist. Zusammenfassend besteht das Entscheidungsproblem somit aus dem Tupel $(\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathbb{U}, \mathbf{erg}, W, U)$.

Basierend auf diesen Elementen wurde von Eduard Kofler und Günter Menges eine umfassende *Theorie des Entscheidens bei unvollständiger Information* erarbeitet; einen hervorragenden Einstieg bieten das gleichnamige Buch [KM76] und die Monographie [Kof89].[4] Anzumerken ist, dass sich die Autoren fast ausschließlich auf *lineare* partielle Informationen beschränken (dazu später mehr), sie sprechen daher auch von der *Theorie der linearen partiellen Information* (kurz LPI-Theorie). Für diese Theorie leiten die Autoren ein axiomatisch begründetes Entscheidungsprinzip (das sogenannte $\mathrm{MaxE}_{\mathrm{min}}$-Prinzip, vgl. Abschnitt 5.3) her und zeigen dessen

[4] Ein etwas eingeschränkter, dafür aber sehr knapper Überblick findet sich in [Del97].

Anwendungsmöglichkeiten in verschiedenen Entscheidungssituationen auf (u.a. ein- und mehrstufige Entscheidungen, nicht-kooperative n-Personen Spiele, stochastische Spiele). Darüber hinaus definieren sie eine Reihe zentraler Begriffe (etwa den der LPI-Entropie und des LPI-Informationsgehalts) und betrachten etliche statistische Fragestellungen im Licht der LPI-Theorie (z.B. Verteilungs- und Entscheidungsprognosen).

Für unsere Anwendungen hat sich relativ schnell gezeigt, dass die Theorie der linearen partiellen Information eine geradezu optimale Mischung aus Ausdrucksfähigkeit einerseits und effizienten algorithmischen Behandlungsmöglichkeiten andererseits bietet.[5]

Wir möchten den klassischen Ansatz hier dennoch nicht näher vorstellen und verweisen den diesbezüglich interessierten Leser auf die exzellenten oben genannten Bücher. Stattdessen führen wir ein wesentlich kompakteres Modell für das Entscheiden bei partieller Information ein, welches sich in Hinblick auf das Lazy Decision Making besser eignet und insbesondere eine übersichtlichere Terminologie und Notation erlaubt. Einige der von uns eingeführten Begriffe gehen auf Kofler und Menges zurück ([KM76, Kof89]) und sind lediglich an unser Modell angepasst, diverse andere Definitionen und Resultate sind komplett neu und legen die Grundlagen für das später einzuführende Lazy Decision Making. Die meisten dieser Resultate betreffen strukturelle Eigenschaften von Entscheidungsproblemen bei partieller Information sowie Erkenntnisse hinsichtlich deren Lösbarkeit und können selbstverständlich auch unabhängig vom Lazy Decision Making allgemein verwendet werden.

3.3 Wahrscheinlichkeitsinformationen

Anmerkung 3.3.1 Wahrscheinlichkeitsinformationen sind im Rahmen des Entscheidens bei partieller Information *das* zentrale Element zur Modellierung des Wissens des Agenten bezüglich des eintretenden Umweltzustands. Wir führen nachfolgend die in diesem Zusammenhang wichtigsten Begriffe ein, diskutieren knapp die Standardinterpretation von Wahrscheinlichkeitsinformationen und sprechen abschließend einige elementare Eigenschaften an, auf die wir im weiteren Verlauf zurückgreifen werden.

[5] Tatsächlich basierte das Lazy Decision Making zunächst auf der Evidenztheorie, welche jedoch eine wesentlich geringere Ausdruckskraft besitzt (sie erlaubt beispielsweise keine komparativen Wahrscheinlichkeiten). Eine kurze Beschreibung dieses Ansatzes findet sich in [Pre00b], für eine Einführung in die Evidenztheorie siehe [Pre99] und [KM94]. Versuche einer Verallgemeinerung der Ausdruckskraft haben unmittelbar zu Ansätzen einer Theorie geführt, die der LPI-Theorie sehr nahe kam. Erst durch einen Zufall ist der Autor dann – erstaunlich spät – auf die LPI-Theorie gestoßen. Angesichts der sehr breiten Anwendungsmöglichkeiten ist ihre geringe Verbreitung geradezu erschreckend; keines der Standard-Lehrbücher (wie etwa [Lau98]) geht auf diese Theorie ein.

Definition 3.3.2 (Wahrscheinlichkeitssimplex) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{S}^{(n)} = \{\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

die Menge aller diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf n Zuständen.[6] $\mathbb{S}^{(n)}$ heisst **Wahrscheinlichkeitssimplex**.[7]

Definition 3.3.3 (Wahrscheinlichkeitsinformationen) Die Teilmengen von $\mathbb{S}^{(n)}$ heissen **Wahrscheinlichkeitsinformationen**. Die leere Menge bezeichnen wir als die **inkonsistente** Wahrscheinlichkeitsinformation.

Anmerkung 3.3.4 Im klassischen Sinn wird eine Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ wie folgt interpretiert: Jeder der Zustände $i = 1, \ldots, n$ hat eine – möglicherweise subjektive – Wahrscheinlichkeit ρ_i, es existiert eine "wahre" Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ welche die tatsächlichen Gegebenheiten (im Falle objektiver Wahrscheinlichkeiten) bzw. das Wissen des Agenten (im Falle subjektiver Wahrscheinlichkeiten) adäquat beschreibt.

Dem Agenten ist diese Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ allerdings nicht notwendigerweise bekannt, er weiss lediglich (bzw. denkt zu wissen), dass diese "wahre" Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ ein Element der Wahrscheinlichkeitsinformation W ist. Der Agent ist also davon überzeugt, dass $\boldsymbol{\rho} \in W$ gilt.[8]

Zur Illustration dieser Interpretation denke man wieder an die subjektive Wahrscheinlichkeit für Regen am morgigen Tag. Wenn sich das Wissen des Agenten tatsächlich durch eine subjektive Wahrscheinlichkeit beschreiben lässt, so impliziert dies *nicht*, dass der Agent die entsprechende Wahrscheinlichkeit auch exakt kennen muss. Viel realistischer scheint, dass er diese lediglich begrenzen kann, z.B. durch ein Intervall. Dieses Beispiel auf mehrere Zustände verallgemeinert (und um weitere, noch zu besprechende Ausdrucksmöglichkeiten angereichert, vgl. Abschnitt 6.5) führt zu dem Konzept der Wahrscheinlichkeitsinformation.

Dass es durchaus auch noch eine alternative Interpretation von Wahrscheinlichkeitsinformationen gibt, diskutieren wir in Unterabschnitt 8.4.2.

Anmerkung 3.3.5 In der Literatur werden häufig nur die *nicht-leeren* Teilmengen von $\mathbb{S}^{(n)}$ als Wahrscheinlichkeitsinformationen bezeichnet, die leere Menge also ausgeschlossen. Wir haben uns gegen dieses Vorgehen entschieden, da es in unserem Modell zu einigen Spezialfällen führen würde, die sich vermeiden lassen. (Ein

[6] Im Sinne der üblichen Definition ist ein Vektor $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n$ zwar *keine* Wahrscheinlichkeitsverteilung; diese Bezeichnung hat sich jedoch eingebürgert und die Interpretation ist naheliegend. Die Wahrscheinlichkeit des Zustands i beträgt p_i (für $i = 1, \ldots, n$).

[7] Manche Autoren bezeichnen $\mathbb{S}^{(n)}$ auch als *Verteilungssimplex* (siehe z.B. [KM76, S. 90] oder [Del97, S. 12]). Demgegenüber findet man – insbesondere in der Statistik-orientierten Literatur – überwiegend den Begriff des Wahrscheinlichkeitssimplex (englisch ***probability simplex***).

[8] Es ist dabei im Rahmen unserer Betrachtungen unerheblich, ob tatsächlich $\boldsymbol{\rho} \in W$ gilt; entscheidend ist, dass der Agent von der Gültigkeit dieser Beziehung überzeugt ist.

Ausschluss der leeren Menge bewirkt beispielsweise, dass der Durchschnitt zweier Wahrscheinlichkeitsinformationen im Allgemeinen *keine* Wahrscheinlichkeitsinformation ist und damit Wahrscheinlichkeitsverteilungen nicht unter der endlichen Durchschnittsbildung abgeschlossen sind.)

Anmerkung 3.3.6 Wir werden später von einigen einfachen topologischen Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsinformationen Gebrauch machen. Dazu führen wir hier eine Standard-Metrik auf dem n-dimensionalen EUKLIDischen Raum $\mathbb{R}^n$ ein. Für topologische Fragestellungen betreffende Details verweisen wir auf das exzellente Buch [Eng89] und die knappe Einführung [Fra60].

Definition 3.3.7 (Maximumsmetrik) Im Folgenden bezeichne dist : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die **Maximumsmetrik** auf $\mathbb{R}^n$, welche definiert ist durch

$$((p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n)) \mapsto \max\{|p_i - q_i| \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $X \neq \emptyset$ sei die Abstandsfunktion relativ zu X $\mathrm{dist}_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\boldsymbol{p} \mapsto \inf\{\mathrm{dist}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \mid \boldsymbol{q} \in X\}.$$

Bemerkung 3.3.8 Jede Wahrscheinlichkeitsinformation ist beschränkt.[9]

Beweis. Trivial, für jedes $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{S}^{(n)}$ und jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt $0 \leq p_i \leq 1$; d.h. $\mathrm{dist}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \leq 1$ für alle $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{S}^{(n)}$. □

Definition 3.3.9 (Lineare Wahrscheinlichkeitsinformation) Die Wahrscheinlichkeitsinformation W heisst **linear** genau dann, wenn $m \in \mathbb{N}$, eine Matrix $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ existieren mit $W = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{C}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{b}\}$.

Bemerkung 3.3.10 Lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen sind abgeschlossen unter der endlichen Durchschnittsbildung.

Beweis. (Fast offensichtlich:) Seien $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen, $m_i \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{C}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$, $\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ und $W_i = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{b}_i\}$ für $i = 1, 2$. Offenbar gilt dann für[10]

$$\boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{C}_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$$

$\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{C}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{b}\} = W_1 \cap W_2$, d.h. $W_1 \cap W_2$ ist eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation.[11] □

[9] Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst *beschränkt* genau dann, wenn ein $r \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2} \in X$ gilt $\mathrm{dist}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}) < r$.

[10] Die nachfolgend verwandte Schreibweise sollte selbsterklärend sein, wenngleich wir sie nicht explizit eingeführt haben. Die Matrix $\boldsymbol{C}$ entsteht indem – anschaulich gesprochen – die Matrizen $\boldsymbol{C}_1$ und $\boldsymbol{C}_2$ untereinander gesetzt werden. Analog ist der Vektor $\boldsymbol{b}$ eine Aneinanderreihung der Komponenten der Vektoren $\boldsymbol{b}_1$ und $\boldsymbol{b}_2$.

[11] Ergibt der Schnitt der W_i $(i = 1, 2)$ die inkonsistente Wahrscheinlichkeitsinformation (gilt also $W_1 \cap W_2 = \emptyset$), so sind die W_i $(i = 1, 2)$ *widersprüchlich* in dem Sinne, dass keine Wahrscheinlichkeitsverteilung Element von beiden Mengen ist.

Bemerkung 3.3.11 Lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen sind konvex.[12]

Beweis. Sei $W = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \,|\, \boldsymbol{C}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{b}\}$ eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation und $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in W$ beliebig. Aus $\boldsymbol{C}\boldsymbol{p}_1 \leq \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{C}\boldsymbol{p}_2 \leq \boldsymbol{b}$ folgt offenbar

$$\boldsymbol{C}(\lambda \boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{p}_2) = \lambda \boldsymbol{C}\boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{C}\boldsymbol{p}_2 \leq \lambda \boldsymbol{b} + (1-\lambda)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

für alle $\lambda \in [0,1]$. □

Bemerkung 3.3.12 Lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen sind im Allgemeinen weder bezüglich Vereinigung noch bezüglich Negation abgeschlossen.

Beweis. Vereinigung: Offenbar sind $W_1 = \{(1,0)\}$ und $W_2 = \{(0,1)\}$ lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen, $W_1 \cup W_2$ ist jedoch nicht konvex und folglich (vgl. Bemerkung 3.3.11) auch keine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation.[13]

Negation: Folgt unmittelbar aus den DE MORGAN'schen Gesetzen, da lineare Wahrscheinlichkeitsverteilungen abgeschlossen bezüglich der Durchschnittsbildung sind (Bemerkung 3.3.10). □

Anmerkung 3.3.13 EDUARD KOFLER weist darauf hin, dass der Begriff der linearen Wahrscheinlichkeitsinformation erweitert werden kann indem Vereinigungen von linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen (sogenannte *zusammengesetzte* Wahrscheinlichkeitsinformationen) betrachtet werden (vgl. [Kof89, S. 24]). Wir verzichten auf dieses Vorgehen, obwohl es zweifelsohne auch eine Erweiterungsmöglichkeit für unser Modell darstellt.

3.4 Ein kompaktes Modell für Entscheidungsprobleme bei partieller Information

3.4.1 Grundlegende Elemente des Modells

Anmerkung 3.4.1 Das klassische Modell – hier besteht ein Entscheidungsproblem bei partieller Information aus einem Tupel $(\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathbb{U}, \mathbf{erg}, W, U)$ – erweist sich für unsere Betrachtungen an vielen Stellen als sehr unhandlich. Da wir zudem etliche Komponenten für die folgenden Betrachtungen nicht mehr explizit benötigen werden (beispielsweise sind für uns die konkreten Ergebnisse unerheblich, lediglich deren Nutzen ist für uns relevant), führen wir ein wesentlich kompakteres Modell ein.

Definition 3.4.2 (Entscheidungsproblem (bei partieller Information))
Ein **Entscheidungsproblem bei partieller Information** mit n Zuständen – im Folgenden kurz **Entscheidungsproblem** – ist ein Paar (A, W) mit $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\emptyset \neq W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$. Die Menge A heisst **Alternativenmenge**, W **Wahrscheinlichkeitsinformation**.

[12] Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst *konvex* genau dann, wenn für alle $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in X$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt $\lambda \boldsymbol{p}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{p}_2 \in X$.

[13] Zum Beispiel gilt $\frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(0,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin W_1 \cup W_2 = \{(1,0),(0,1)\}$.

Definition 3.4.3 (Menge aller Entscheidungsprobleme $\mathbb{E}$) Sei $\mathbb{E}$ die Menge aller Entscheidungsprobleme (A, W) (mit n Zuständen).

Anmerkung 3.4.4 Die Definition 3.4.2 eines Entscheidungsproblems ist grundlegend für sämtliche Betrachtungen in dieser Arbeit. Ziel der Definition ist, eine möglichst kompakte Notation zu erlauben; daher verzichten wir auf eine explizite Aufnahme der in unserem Kontext nicht verwendeten Informationen. Es wird sich zeigen, dass mit Hilfe dieser kompakten Definition diverse Zusammenhänge und neue Resultate wesentlich einfacher notiert, nachvollzogen und hergeleitet werden können.[14]

Anmerkung 3.4.5 Wir illustrieren kurz, wie sich ein Entscheidungsproblem im Sinne der klassischen Theorie in unser Modell übersetzen lässt. Dazu seien die Alternativenmenge (im klassischen Sinne) $\mathcal{A}$, die Zustandsmenge $\mathcal{S}$, die Ergebnisfunktion $\mathbf{erg} : \mathcal{A} \times \mathcal{S} \to \mathbb{U}$, die Ergebnismenge $\mathbb{U}$ und die Nutzenfunktion $U : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ gegeben. Es sei $n := |\mathcal{S}|$ die Kardinalität der Zustandsmenge und wir unterstellen (o.E.) $\mathcal{S} = \{1, \ldots, n\}$. Für jede Alternative $X \in \mathcal{A}$ definieren wir dann einen n-komponentigen Vektor $\boldsymbol{a}_X \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\boldsymbol{a}_X := (U(\mathbf{erg}(X, 1)), U(\mathbf{erg}(X, 2)), \ldots, U(\mathbf{erg}(X, n))).$$

Die i-te Komponente einer Alternative $\boldsymbol{a}_X$ ist somit der Nutzen des Ergebnisses, welches bei der Auswahl von Alternative X im Zustand i realisiert wird.

Die “neue” Alternativenmenge ist $A := \{\boldsymbol{a}_X \,|\, X \in \mathcal{A}\}$. Zusammen mit einer Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ ergibt sich ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ in unserem Sinne.

Anmerkung 3.4.6 Offenbar wird bei unserem Modell implizit angenommen, dass die Zustandsmenge endlich ist.[15] Wir nehmen im Folgenden die Anzahl der Zustände n als konstant an und verzichten daher im Sinne einer besseren Lesbarkeit auf deren Aufnahme in die Notation. (Dies würde aber selbstverständlich kein Problem darstellen.)

Beispiel 3.4.7 (Lotterie mit Ungewissheit) Wir betrachten folgendes Entscheidungsproblem: Zunächst wird eine faire Münze geworfen.[16] Sollte diese Kopf

[14]Ein Beispiel sind die Untersuchungen zur Lösbarkeit von Entscheidungsproblemen bei partieller Information (Kapitel 4) sowie die Ausführungen zu Heuristiken (Kapitel 5). Die in unserem Modell benötigten Daten (im wesentlichen die Alternativenmenge A und die Wahrscheinlichkeitsinformation W) sind “gerade noch handhabbar”, so dass die Notation einen – in unseren Augen – vernünftigen Kompromiss aus Vollständigkeit und Übersichtlichkeit darstellt. Die strukturelle Einfachheit des Modells vereinfacht natürlich neben der Notation auch die Untersuchungen.

[15]Um beliebige Zustandsmengen zu erlauben, könnte man die Zustandsmenge $\mathcal{S}$ wieder explizit ins Modell aufnehmen und eine Alternative $\boldsymbol{a}_X$ als Funktion $\boldsymbol{a}_X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ definieren. Allerdings erscheinen nicht-endliche Zustandsmengen für das Lazy Decision Making aufgrund des explodierenden Modellierungsaufwands ungeeignet.

[16]Eine Münze heisst fair, wenn bei jedem Münzwurf die Wahrscheinlichkeit für Kopf gleich der Wahrscheinlichkeit für Zahl gleich 0.5 ist.

zeigen (Zustand 1), so muss der Agent 200 Euro bezahlen. Zeigt sie hingegen Zahl, so erhält er entweder 120 Euro (Zustand 2) oder aber 320 Euro (Zustand 3). Der Agent hat keinerlei Kenntnis, wie die Unterscheidung zwischen diesen beiden letzten Zuständen (2 und 3) stattfindet. Der Agent verfügt über 500 Euro und muss darüber entscheiden, ob er (einmalig) an dieser Lotterie teilnimmt.

Wir unterstellen für den Agenten die folgende (logarithmische) BERNOULLI-Nutzenfunktion $U : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ mit

$$U(x) = \ln(1 + \frac{x}{500})$$

für alle $x \in \mathbb{R}^{>0}$.[17] Somit erhalten wir für die Alternative des Teilnehmens an der Lotterie

$$\boldsymbol{a_1} = (U(500 - 200), U(500 + 120), U(500 + 320)) \approx (0.47, 0.83, 0.97)$$

und für die Unterlassensalternative

$$\boldsymbol{a_2} = (U(500), U(500), U(500)) \approx (0.69, 0.69, 0.69).$$

Die Wahrscheinlichkeitsinformation W ist gegeben durch

$$W = \{(p_1, p_2, p_3) \in [0,1]^3 \,|\, p_1 = p_2 + p_3 = 0.5\}.$$

Es resultiert im Sinne unseres Modells das Entscheidungsproblem $(\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}, W)$.

Anmerkung 3.4.8 Der Begriff des Entscheidungsproblems wie wir ihn fassen ist sehr allgemein. Insbesondere sind zunächst auch nicht-endliche (sogar im Prinzip überabzählbare) Alternativenmengen und beliebig geformte (beispielsweise nicht-konvexe) Wahrscheinlichkeitsinformationen erlaubt. Wir werden den Begriff später weiter einschränken; viele der Überlegungen lassen sich aber auch problemlos an den allgemeineren Objekten durchführen.

Beispiel 3.4.9 (Pathologisches Entscheidungsproblem) Ein etwas "pathologisches" Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ erhält man beispielsweise für $A = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{S}^{(n)}$. Als problematisch erweist sich hier, dass die Alternativenmenge A nicht beschränkt ist: Für jede Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ existieren beliebig viele Alternativen, die für jeden Zustand ein höheres Nutzenniveau erreichen (addiert man zu jeder Komponente von $\boldsymbol{a}$ eine beliebige positive reelle Zahl, so erhält man eine "bessere" Alternative $\boldsymbol{a'} \in A$, welche wiederum in A liegt); insofern kann man hier nicht erwarten, dass eine Lösung des Entscheidungsproblems im klassischen Sinn existiert (denn man findet stets "bessere" Alternativen). Um derartige Fälle auszuschließen werden wir später davon ausgehen, dass die Menge A endlich ist; diese Annahme ist zunächst aber nicht erforderlich.[18]

[17] Logarithmische Nutzenfunktionen sind im Zusammenhang mit monetären Größen durchaus üblich, da sie (1) streng monoton steigend sind, (2) einen abnehmenden Grenznutzen aufweisen und zugleich aber auch (3) analytisch einfach zu behandeln sind. Wir verzichten auf diesbezügliche Details und verweisen stattdessen auf die Lehrbücher [FH94] und [HR92].

[18] Für das hier skizzierte Problem hätte die Forderung, dass die Alternativenmenge A kompakt sein muss, ausgereicht. Wir werden dennoch später die Endlichkeit von A benötigen.

Anmerkung 3.4.10 Die Bezeichnungen suggerieren die – zunächst – intendierte Bedeutung der Elemente (A, W). Später werden wir jedoch auch eine komplett andere Interpretation des Modells betrachten; dann werden aus den Zuständen Ziele und aus den Wahrscheinlichkeitsverteilungen Prioritätenvektoren (im Kontext des *Multiple Attribute Decision Making (MADM)*, siehe Abschnitt 9.3).

Definition 3.4.11 (risiko(X), ungewissheit(X)**)** Für eine Menge $X \subseteq \mathbb{E}$ sei

$$\begin{aligned} \text{risiko(X)} &:= \{(A, W) \in X \mid |A| \in \mathbb{N} \text{ und } |W| = 1\}, \\ \text{ungewissheit(X)} &:= \{(A, W) \in X \mid |A| \in \mathbb{N} \text{ und } W = \mathbb{S}^{(n)}\}. \end{aligned}$$

Anmerkung 3.4.12 risiko($\mathbb{E}$) ist die Menge der klassischen Entscheidungsprobleme unter Risiko, ungewissheit($\mathbb{E}$) entsprechend die Menge der klassischen Entscheidungsprobleme unter Ungewissheit.

3.4.2 Zum Begriff der Heuristik

Anmerkung 3.4.13 Heuristiken sind uns bereits beim Entscheiden unter Ungewissheit begegnet. Im Rahmen unseres Modells können wir nun sauber definieren, was genau wir unter einer Heuristik verstehen wollen. Erst später gehen wir darauf ein, *wann* eine Heuristik anzuwenden ist, *welche* Heuristiken es gibt und wie diese systematisiert werden können (in Kapitel 5).

Definition 3.4.14 (Heuristik) Eine **Heuristik** $\mathcal{H}$ ist eine Abbildung

$$\mathcal{H} : \mathbb{E} \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),$$

mit $\mathcal{H}(A, W) \neq \perp \Longrightarrow \emptyset \neq \mathcal{H}(A, W) \subseteq A$ für alle $(A, W) \in \mathbb{E}$.

Anmerkung 3.4.15 Eine Heuristik $\mathcal{H}$ ist also eine Abbildung, die "manchen" Entscheidungsproblemen $(A, W) \in \mathbb{E}$ eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{H}(A, W) \subseteq A$ der Alternativenmenge A zuordnet und für die restlichen Entscheidungsprobleme (A, W) undefiniert ist. Wir verzichten auf die Forderung, dass $\mathcal{H}$ vollständig definiert ist, da diverse Heuristiken nur für gewisse (Klassen von) Entscheidungsprobleme – beispielsweise solche mit endlicher Alternativenmenge oder linearer Wahrscheinlichkeitsinformation – festgelegt werden können.[19]

Anmerkung 3.4.16 Ein klassisches Entscheidungsproblem $(A, \{\boldsymbol{p}\}) \in$ risiko($\mathbb{E}$) unter Risiko löst man durch Auswahl einer Alternative $\boldsymbol{a}$, die den Wert $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}$ maximiert. Im Prinzip ist dies die Anwendung des BERNOULLI-Prinzips, also der Erwartungsnutzenmaximierung.[20] Dieses Vorgehen lässt sich durch folgende Heuristik

[19] Die in Kapitel 5 behandelten OWA-Heuristiken sind beispielsweise nur für lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen definiert, die nachfolgend betrachtete Heuristik $\mathcal{H}_{\text{Bernoulli}}$ ist dagegen nur auf der Menge risiko($\mathbb{E}$) definiert.

[20] Allerdings ist dies im Rahmen unseres Modells nicht mehr so deutlich ersichtlich, da die BERNOULLI-Nutzenfunktion implizit in das Modell eingeht.

$\mathcal{H}_{\text{Bernoulli}}$ beschreiben, die auf der Menge aller $(A, W) \in \text{risiko}(\mathbb{E})$ definiert ist:

$$\mathcal{H}_{\text{Bernoulli}}(A, \{\boldsymbol{p}\}) = \left\{\overline{\boldsymbol{a}} \in A \,|\, \overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{p} = \max\{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{a} \in A\}\right\}.^{21}$$

Ein klassisches Entscheidungsproblem unter Ungewissheit $(A, \mathbb{S}^{(n)}) \in \text{ungewissheit}(\mathbb{E})$ löst man üblicherweise mit Hilfe einer (auf $(A, \mathbb{S}^{(n)})$ definierten) Heuristik $\mathcal{H}$ durch Wahl einer beliebigen Alternative aus $\mathcal{H}(A, \mathbb{S}^{(n)})$. Wir gehen später in Kapitel 5 detaillierter auf wichtige Heuristiken ein.

Zum Lösen allgemeiner Entscheidungsprobleme (bei partieller Information, vgl. Definition 3.4.2) werden wir später ebenfalls Heuristiken verwenden. Diese bewegen sich "zwischen" der Erwartungsnutzenmaximierung (dem Bernoulli-Prinzip) und einer klassischen Heuristik für das Entscheiden unter Ungewissheit. Dies ist letztendlich nicht überraschend, da sich auch die partiellen Informationen "zwischen" der Risiko- und der Ungewissheitssituation befinden (wobei diese beiden Situationen als Extremfälle beinhaltet sind, vgl. hierzu auch Abbildung 3.1).

3.4.3 Lösbarkeit / Fortsetzung der Präferenzrelation

Anmerkung 3.4.17 Ausgangspunkt für Präferenzen war die Präferenzrelation des Agenten auf der Ergebnismenge $\mathbb{U}$. Akzeptiert der Agent die Axiome rationalen Verhaltens (vgl. Definition 2.2.3), so konnte die Existenz einer Bernoulli-Nutzenfunktion nachgewiesen werden (vgl. Theorem 2.2.4), welche gewissermaßen die Präferenzrelation auf die Menge aller Lotterien fortgesetzt hat. Die Bewertungsgröße für eine Lotterie ist deren Erwartungsnutzen: Vergleicht man zwei Lotterien, so präferiert der rationale Agent die Lotterie mit dem höheren Erwartungsnutzen (und ist indifferent bei Gleichheit).

Eine Lotterie ist im Prinzip *eine* Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ergebnissen oder – näher an unserem Modell – eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über (Bernoulli-)Nutzenwerten. Demgegenüber ist eine Alternative nun (im Rahmen eines Entscheidungsproblems bei partieller Information) eine *Menge* von Wahrscheinlichkeitsverteilungen über denselben Nutzenwerten. Auf natürliche Weise stellt sich die Frage, inwieweit man die Präferenzrelation von Lotterien auf dieses Konstrukt fortsetzen kann. Tatsächlich lässt sich diese Fragestellung noch etwas einschränken, da wir nicht beliebige Mengen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Nutzenwerten miteinander vergleichen sondern beim Alternativenvergleich die spezielle Situation vorfinden, dass wir *eine* für alle Alternativen zutreffende Menge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen haben und sich die Alternativen nur bezüglich der zustandsabhängigen Nutzenwerte unterscheiden. Bevor wir diesen Gedanken präzise fassen können, benötigen wir einige Definitionen.

Definition 3.4.18 (Nutzen-Lotterie, NL-Menge) Sei $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{S}^{(n)}$. Mit $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p} \rangle$ bezeichnen wir eine **Nutzen-Lotterie**; der Agent erhält mit der Wahrscheinlichkeit p_i den Nutzen a_i $(i = 1, \ldots, n)$.[22]

[21] Da für $(A, W) \in \text{risiko}(\mathbb{E})$ die Alternativenmenge A endlich ist, existiert das Maximum.

[22] Streng genommen "erhält" der Agent nicht den Nutzen sondern es resultiert ein Ergebnis, welches für den Agenten einen Bernoulli-Nutzen der Höhe a_i aufweist.

Sei $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ eine Wahrscheinlichkeitsinformation. Mit $\langle \boldsymbol{a}, W\rangle$ bezeichnen wir die Menge

$$\{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}\rangle \mid \boldsymbol{p} \in W\}$$

von Nutzen-Lotterien (kurz **NL-Menge**).

Anmerkung 3.4.19 Gegeben sei ein Entscheidungproblem unter Risiko $(A, \{\boldsymbol{p}\}) \in$ risiko($\mathbb{E}$) mit $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Jede der Alternativen $\boldsymbol{a} \in A$ lässt sich als Nutzen-Lotterie $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}\rangle$ auffassen. Das BERNOULLI-Prinzip besagt, dass die relevante Bewertungsgröße für eine Alternative $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ gerade deren Erwartungsnutzen $\sum_{i=1}^{n} a_i p_i = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p}$ ist.[23]

Anmerkung 3.4.20 Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ ein beliebiges Entscheidungsproblem. Im Kontext dieses allgemeineren Falls steht eine Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ für die NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W\rangle$. Das Problem bei der Entscheidungsfindung besteht somit im Vergleich zweier NL-Mengen, also beispielsweise von

$$\langle \boldsymbol{a_1}, W\rangle = \{\langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{p}\rangle \mid \boldsymbol{p} \in W\} \quad \text{und} \quad \langle \boldsymbol{a_2}, W\rangle = \{\langle \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{p}\rangle \mid \boldsymbol{p} \in W\}$$

für $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in A$. Entscheidend ist, dass beide NL-Mengen über denselben Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\boldsymbol{p} \in W$ gebildet werden; den allgemeineren Fall des Vergleichs beliebiger NL-Mengen $\langle \boldsymbol{a_1}, W_1\rangle$, $\langle \boldsymbol{a_2}, W_2\rangle$ (mit $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$ und $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$) brauchen wir daher nicht zu betrachten.

Anmerkung 3.4.21 EDUARD KOFLER und GÜNTER MENGES lösen das Problem des Vergleiches zweier NL-Mengen (wie dies oben beschrieben ist) durch die folgende Annahme: Bei gegebener Wahrscheinlichkeitsinformation W wird einer Alternative $\boldsymbol{a}$ – also der NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W\rangle = \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}\rangle \mid \boldsymbol{p} \in W\}$ – eine Nutzen-Lotterie zugeordnet, die den Nutzenerwartungswert minimiert (vgl. [KM76, S. 140]).[24] Letztendlich wird damit der Wert

$$\inf\{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p} \in W\}$$

als Vergleichskriterium für NL-Mengen herangezogen, als Entscheidungsverfahren resultiert das sogenannte MaxE$_{\text{min}}$-Prinzip (siehe [KM79] und Abschnitt 5.3 in dieser Arbeit). Obwohl dieses Prinzip durchaus eine Reihe sehr wünschenswerter Eigenschaften besitzt, ist die dahinterliegende Annahme sehr schwerwiegend. Insofern verzichten wir zunächst auf dieses Vorgehen und leiten einige wichtige Resultate mit einer wesentlich schwächeren Annahme her.

Definition 3.4.22 ((starke) W-Dominanz) Sei W eine Wahrscheinlichkeitsinformation, $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2} \quad &:\Longleftrightarrow \quad (\forall \boldsymbol{p} \in W)\boldsymbol{a_1}^T \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{a_2}^T \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{a_1} \succ_W \boldsymbol{a_2} \quad &:\Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2}) \wedge (\exists \boldsymbol{p} \in W)\boldsymbol{a_1}^T \boldsymbol{p} > \boldsymbol{a_2}^T \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

[23] Das BERNOULLI-Prinzip besagt natürlich eigentlich noch wesentlich mehr: Der Erwartungsnutzen ist nur deshalb die relevante Bewertungsgröße, weil die a_i $(i = 1, \ldots, n)$ im Prinzip bereits den BERNOULLI-Nutzen der dahinterliegenden (und in unserem Modell unsichtbaren) Ergebnisse bezeichnen.

[24] Anzumerken ist allerdings, dass KOFLER und MENGES ein vollkommen anderes Modell verwenden und wir lediglich ihre Annahme in die Terminologie unseres Modells übersetzt haben.

Im Falle $\boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2}$ sagen wir, dass $\boldsymbol{a_2}$ **W-dominiert** wird von $\boldsymbol{a_1}$. Gilt sogar $\boldsymbol{a_1} \succ_W \boldsymbol{a_2}$ so sprechen wir von **starker W-Dominanz**.

Anmerkung 3.4.23 Offenbar gilt (für beliebige $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$)

$$\boldsymbol{a_1} \succ_W \boldsymbol{a_2} \Longleftrightarrow (\boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2}) \wedge \neg(\boldsymbol{a_2} \succsim_W \boldsymbol{a_1}).$$

Anmerkung 3.4.24 Es ist klar zu unterscheiden zwischen der W-Dominanz einerseits und dem klassischen Dominanzbegriff andererseits (vgl. Definition 2.2.7). Man kann sehr leicht zeigen, dass $\boldsymbol{a_1}$ die Alternative $\boldsymbol{a_2}$ im klassischen Sinne dominiert genau dann, wenn für alle Wahrscheinlichkeitsinformationen W gilt $\boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2}$. Wir verzichten hier aber auf einen Beweis (und das Aufzeigen weiterer Zusammenhänge), da dies für unsere folgenden Überlegungen nicht notwendig sein wird.

Anmerkung 3.4.25 Für festes $(A, W) \in \mathbb{E}$ definiert die Relation $\succsim_W$ eine starke Halbordnung auf A, die Relation $\succ_W$ eine schwache Halbordnung auf A. Dies folgt fast unmittelbar aus Definition 3.4.22 und Anmerkung 3.4.23; wir verzichten auf den (einfachen) Beweis.

Anmerkung 3.4.26 Mit diesen Dominanzbegriffen und einer zusätzlichen Forderungen schlagen wir nun gewissermaßen die "Brücke" zwischen dem Bernoulli-Prinzip und Entscheidungsproblemen im Rahmen unseres Modells. Diese Vorgehensweise ist unseres Wissens neu; in der uns bekannten Theorie *fehlt* eine axiomatische Betrachtung der Präferenzen des Agenten auf Entscheidungsproblemen bei partieller Information schlichtweg! Als einzige Ausnahme ist das $\mathrm{E}_{\mathrm{min}}$-Axiom zu nennen (vgl. Abschnitt 5.3), das allerdings unserer Meinung eine bereits viel zu starke Forderung für grundlegende Betrachtungen darstellt.

Entscheidend ist, dass wir mit nur einer sehr wenig einschränkenden Forderung auskommen werden, nämlich dem nachfolgenden (neuen) Axiom.

Definition 3.4.27 (Dominanzaxiom) Wir sagen, dass der Agent dem **Dominanzaxiom** zustimmt, wenn für jedes Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ und alle $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2} \in A$ folgendes gilt: Falls $\boldsymbol{a_1} \succ_W \boldsymbol{a_2}$, so präferiert der Agent die Alternative $\boldsymbol{a_1}$ gegenüber $\boldsymbol{a_2}$. Gilt $\boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2}$, so präferiert der Agent $\boldsymbol{a_2}$ *nicht* gegenüber $\boldsymbol{a_1}$.

Anmerkung 3.4.28 Das Dominanzaxiom – beziehungsweise dessen Gültigkeit – scheint auf den ersten Blick fast selbstverständlich zu sein. Dies ist allerdings nicht der Fall! Insbesondere da wir keine Semantik für Wahrscheinlichkeitsinformationen definiert haben, ist es unmöglich, von den Axiomen rationalen Handelns auf Entscheidungsprobleme mit partieller Information zu schließen! In diesem Sinne geht das Axiom als echte Forderung ein und ist keinesfalls eine notwendige Konsequenz der bisherigen Annahmen.[25]

[25] Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit $A = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$, $\boldsymbol{a_1} = (1, 2), \boldsymbol{a_2} = (2, 3)$ und $W = \mathbb{S}^{(n)}$ mit $n = 2$. Obwohl offenbar $\boldsymbol{a_2} \succ_W \boldsymbol{a_1}$ gilt und es "vernünftig" erscheint, dass der Agent $\boldsymbol{a_2}$ gegenüber $\boldsymbol{a_1}$ bevorzugen sollte, kann dies bislang noch nicht formal geschlossen werden! Ursache hierfür ist, dass wir bislang *keine* Voraussetzungen über die Präferenzen des Agenten in einem Entscheidungspro-

Anmerkung 3.4.29 Das Dominanzaxiom beinhaltet insbesondere eine Art Fortsetzung des BERNOULLI-Prinzips: Für Entscheidungsprobleme (A, W) mit $|W| = 1$ besagt das Dominanzaxiom gerade, dass der Agent die Alternativen anhand ihres Erwartungsnutzens bemisst. Konkret folgt für $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in A$ und $W = \{\boldsymbol{p}\}$, dass

- für $\boldsymbol{a_1}^T\boldsymbol{p} > \boldsymbol{a_2}^T\boldsymbol{p}$ (und damit $\boldsymbol{a_1} \succ_W \boldsymbol{a_2}$) der Agent $\boldsymbol{a_1}$ gegenüber $\boldsymbol{a_2}$ präferiert und

- für $\boldsymbol{a_1}^T\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a_2}^T\boldsymbol{p}$ (und damit $\boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2}$ *und* $\boldsymbol{a_2} \succsim_W \boldsymbol{a_1}$) der Agent indifferent bezüglich $\boldsymbol{a_1}$ und $\boldsymbol{a_2}$ ist (denn er präferiert weder $\boldsymbol{a_2}$ gegenüber $\boldsymbol{a_1}$ noch $\boldsymbol{a_1}$ gegenüber $\boldsymbol{a_2}$).

Anmerkung 3.4.30 Wir werden im Folgenden durchweg unterstellen, dass der Agent dem Dominanzaxiom zustimmt ohne dies explizit zu erwähnen. Insbesondere nehmen wir an, dass für jedes Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ eine Präferenzrelation auf der Alternativenmenge A existiert (welche die Präferenzen des Agenten abbildet). Wir nehmen aber *nicht* an, dass diese Präferenzrelation bekannt bzw. gegeben ist.

Anmerkung 3.4.31 Das Dominanzaxiom erlaubt uns nun eine teilweise Fortsetzung der Präferenzrelation des Agenten auf NL-Mengen. Gegeben seien $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$.

(1) Gilt $\boldsymbol{a_1} \succ_W \boldsymbol{a_2}$, so wird der Agent in jedem beliebigen Entscheidungsproblem (A, W) mit $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\} \subseteq A$ die Alternative $\boldsymbol{a_1}$ gegenüber $\boldsymbol{a_2}$ präferieren. Insofern können wir sagen, dass der Agent die NL-Menge $\langle \boldsymbol{a_1}, W\rangle$ gegenüber $\langle \boldsymbol{a_2}, W\rangle$ präferiert.

(2) Es gelte $\boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2}$. Gemäß dem Dominanzaxiom präferiert der Agent dann in keinem Entscheidungsproblem (A, W) mit $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\} \subseteq A$ die Alternative $\boldsymbol{a_2}$ gegenüber $\boldsymbol{a_1}$. Insofern können wir sagen, dass er die NL-Menge $\langle \boldsymbol{a_2}, W\rangle$ nicht gegenüber $\langle \boldsymbol{a_1}, W\rangle$ präferiert. Da die (als existent vorausgesetzte) Präferenzrelation vollständig ist, folgt hieraus mit demselben Argument, dass der Agent entweder $\langle \boldsymbol{a_1}, W\rangle$ gegenüber $\langle \boldsymbol{a_2}, W\rangle$ präferiert oder indifferent bezüglich dieser beiden NL-Mengen ist.

Anmerkung 3.4.32 Wichtig ist die Unterscheidung zwischen der Präferenzrelation des Agenten für ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ einerseits und den W-Dominanzbegriffen "$\succ_W$" und "$\succsim_W$" andererseits. Die W-Dominanzbegriffe erlauben uns – zusammen mit der Annahme des Dominanzaxioms – Rückschlüsse auf die Präferenzrelation. Im Allgemeinen ist es aber nicht möglich, diese dadurch exakt zu "rekonstruieren".

---

blem bei partieller Information getroffen haben. Bislang verbietet also noch keine Annahme, dass ein real agierender Agent tatsächlich $\boldsymbol{a_1}$ gegenüber $\boldsymbol{a_2}$ bevorzugt, was gegen das intuitive Verständnis von Rationalität in der vorliegenden Entscheidungssituation spricht.

Definition 3.4.33 (Lösung eines Entscheidungsproblems) Eine **Lösung** des Entscheidungsproblems $(A, W) \in \mathbb{E}$ ist eine Alternative $\boldsymbol{a} \in A$, so dass der Agent keine andere Alternative $\boldsymbol{a}' \in A$ gegenüber $\boldsymbol{a}$ echt präferiert. Anders ausgedrückt sind die Lösungen des Entscheidungsproblems (A, W) gerade die maximalen Elemente der geordneten Menge $(A, \precsim)$.

Anmerkung 3.4.34 Offenbar besitzt jedes Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit endlicher Alternativenmenge A mindestens eine Lösung.[26] Besitzt (A, W) mehrere Lösungen, so ist der Agent zwischen diesen indifferent.

Da für unendliches A ein Problem (A, W) im Allgemeinen *keine* Lösung besitzt (siehe etwa Beispiel 3.4.9), beschränken wir uns in den nachfolgenden Betrachtungen häufig auf den – wichtigen – Fall der endlichen Alternativenmenge.

Anmerkung 3.4.35 Das Hauptproblem besteht darin, dass wir i.Allg. zu wenig Wissen über die Präferenzrelation des Agenten besitzen bzw. diese nicht hinreichend genau "rekonstruieren" können (vergleiche Anmerkung 3.4.32), um eine Lösung des Entscheidungsproblems ausfindig machen zu können.

Anmerkung 3.4.36 Wir nutzen nun die Relationen "$\succ_W$" und "$\succsim_W$" um eine Reihe von Alternativen $\boldsymbol{a} \in A$ in einem gegebenen Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ auszuzeichnen. Dies erlaubt zumindest in gewissen Fällen das Bestimmen einer Lösung des Entscheidungsproblems (A, W).

Definition 3.4.37 ((A, W)-Effizienz, -Optimalität, -Verzichtbarkeit) Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ und $\overline{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$.[27]

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{a}} \text{ heisst } (A, W)\textbf{-optimal} \quad &:\Longleftrightarrow \quad (\forall \boldsymbol{a} \in A)\overline{\boldsymbol{a}} \succsim_W \boldsymbol{a} \\
\overline{\boldsymbol{a}} \text{ heisst } (A, W)\textbf{-effizient} \quad &:\Longleftrightarrow \quad (\forall \boldsymbol{a} \in A)\neg(\boldsymbol{a} \succ_W \overline{\boldsymbol{a}}) \\
\overline{\boldsymbol{a}} \text{ heisst } (A, W)\textbf{-verzichtbar} \quad &:\Longleftrightarrow \quad (\exists \boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\})\boldsymbol{a} \succsim_W \overline{\boldsymbol{a}}
\end{aligned}$$

Anmerkung 3.4.38 (1) Besitzt ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ eine (A, W)-optimale Alternative $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, so ist diese eine Lösung des Entscheidungsproblems.

(2) Ist eine Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ bezüglich eines Entscheidungsproblems (A, W) *nicht* (A, W)-effizient, so kommt sie als Lösung nicht in Betracht (da dann definitionsgemäß $\boldsymbol{a}$ von mindestens einer Alternative aus A dominiert wird und diese präferiert der Agent gegenüber $\boldsymbol{a}$).[28] Es können allerdings durchaus auch *alle* Alternativen nicht (A, W)-effizient sein, vgl. hierzu Bemerkung 3.4.39 und dort Punkt 4.

[26] Dies folgt unmittelbar aus der Transitivität und Asymmetrie der Präferenzrelation.

[27] In den allermeisten Fällen wird $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$ gelten; dennoch lassen wir explizit auch $\overline{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n \setminus A$ zu.

[28] Aufgrund dieser Beobachtung könnte man die (A, W)-effizienten Alternativen auch als (A, W)-*zulässige* Alternativen bezeichnen; dieser Begriff wird häufig in der Literatur (in einem geringfügig anderen Zusammenhang) verwandt. Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir auf die Verwendung dieses Begriffes im Folgenden verzichten.

(3) Sei $\boldsymbol{a} \in A$ mit $(A, W) \in \mathbb{E}$ eine (A, W)-verzichtbare Alternative. Dann findet der Agent eine von $\boldsymbol{a}$ verschiedene Alternative $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, so dass er $\boldsymbol{a}$ nicht gegenüber $\overline{\boldsymbol{a}}$ präferiert. Insofern schränkt das Ausschließen von $\boldsymbol{a}$ die Wahlmöglichkeiten des Agenten nicht wirklich ein. Anders ausgedrückt: Ist $\boldsymbol{a}$ eine Lösung des Entscheidungsproblems (A, W) und zudem (A, W)-verzichtbar, so existiert auch eine von $\boldsymbol{a}$ verschiedene Lösung $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$ von (A, W). Allerdings können durch das Ausschließen *sämtlicher* (A, W)-verzichtbarer Alternativen "en block" durchaus auch alle Lösungen eliminiert werden, vgl. Fußnote 30 und Abschnitt 4.6.

Bemerkung 3.4.39 Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ und $\overline{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$.

(1) $\overline{\boldsymbol{a}}$ (A, W)-optimal $\Longrightarrow$ $\overline{\boldsymbol{a}}$ (A, W)-effizient.

(2) Jede Alternative $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ist (A, W)-effizient oder (A, W)-verzichtbar (möglicherweise auch beides).

(3) Im Allgemeinen existieren Alternativen, die sowohl (A, W)-effizient als auch (A, W)-verzichtbar sind.

(4) (a) Für endliches A existieren stets (A, W)-effiziente Alternativen $\boldsymbol{a} \in A$.

(b) Für nicht-endliches A muss dies nicht der Fall sein.

(5) Im Allgemeinen existieren keine (A, W)-optimalen Alternativen $\boldsymbol{a} \in A$. (Dies gilt auch für endliches A.)

Beweis.

(1) trivial.

(2) Wir zeigen, dass jede nicht (A, W)-effiziente Alternative (A, W)-verzichtbar ist, woraus unmittelbar die Behauptung folgt. Sei also $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ nicht (A, W)-effizient. Dann existiert definitionsgemäß ein $\boldsymbol{a'} \in A$ mit $\boldsymbol{a'} \succ_W \boldsymbol{a}$. Insbesondere gilt damit $\boldsymbol{a'} \succsim_W \boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{a'}$, d.h. $\boldsymbol{a}$ ist (A, W)-verzichtbar.

(3) Sei $n = 2$, $\boldsymbol{a_1} = (0, 1)$, $\boldsymbol{a_2} = (0, 0)$, $A = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ und $W = \{(1, 0)\}$. Offenbar ist $\boldsymbol{a_1}$ sowohl (A, W)-effizient als auch (A, W)-verzichtbar.

(4) (a) Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit $|A| = \mathbb{N}$ und wir nehmen an, dass *keine* (A, W)-effiziente Alternative existiert. Dann existiert offenbar für jedes $\boldsymbol{a} \in A$ ein $\boldsymbol{a'} \in A$ mit $\boldsymbol{a'} \succ_W \boldsymbol{a}$. Da A endlich ist, lässt sich folglich ausgehend von einem $\boldsymbol{a_0} \in A$ eine Folge $\boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_m} \in A$ konstruieren mit $\boldsymbol{a_0} = \boldsymbol{a_m}$ und $\boldsymbol{a_{i+1}} \succ_W \boldsymbol{a_i}$ für alle $i = 0, \dots, m-1$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $\succ_W$ sowohl irreflexiv als auch transitiv ist.[29]

(b) Offenbar existieren keine $(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{(n)})$-effizienten Alternativen.

[29] Wir haben – insbesondere auch im Zusammenhang mit Anmerkung 3.4.25 – darauf verzichtet, diese trivialen Eigenschaften der Relation $\succ_W$ zu beweisen.

(5) Das Entscheidungsproblem (A, W) mit $W = \mathbb{S}^{(n)}$, $n = 2$ und $A = \{(1,0),(0,1)\}$ besitzt keine (A, W)-optimale Alternative. Gleiches gilt für das Entscheidungsproblem $(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{(n)})$.

□

Anmerkung 3.4.40 Wir betrachten kurz die Konsequenzen der bisherigen Überlegungen für ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit endlicher Alternativenmenge A. Existiert (mindestens eine) (A, W)-optimale Alternative $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, so ist diese eine Lösung des Entscheidungsproblems. Leider stellt dieser Fall gewissermaßen "die Ausnahme" dar, i.Allg. besitzt (A, W) keine (A, W)-optimalen Alternativen. Wir wissen, dass nur (A, W)-effiziente Alternativen für die Lösung in Frage kommen. Insofern können wir zunächst die Menge der (A, W)-effizienten Alternativen bestimmen, also alle nicht-(A, W)-effizienten Alternativen eliminieren. Aus dieser Rest-Alternativenmenge können dann noch sukzessive (A, W)-verzichtbare Alternativen entfernt werden.[30] Jede der verbleibenden Alternativen ist eine potenzielle Lösung des Entscheidungsproblems; eine weitere Eingrenzung ist ohne zusätzliche Annahmen nicht möglich. Dass eine genauere Einschränkung nicht möglich ist, liegt – wie bereits mehrfach betont (siehe Anmerkungen 3.4.32 und 3.4.35) – an der Tatsache, dass die Präferenzrelation des Agenten mit Hilfe der W-Dominanzen nicht hinreichend genau "rekonstruiert" werden kann, wir den Begriff der Lösung aber bzgl. der Präferenzrelation definiert haben (vgl. Definition 3.4.33).

Jede der verbleibenden Alternativen ist eine potenzielle Lösungen des Entscheidungsproblems; eine weitere Eingrenzung ist ohne zusätzliche Annahmen nicht möglich (siehe hierzu auch Anmerkung 3.4.41).

Diese zusätzlichen Annahmen werden letztendlich in die konkret verwendete Heuristik einfließen. Tatsächlich haben unsere bisherigen Ausführungen auch Auswirkungen auf die als "zulässig" (oder effizient) zu beurteilenden Heuristiken: Im Falle endlicher Alternativenmengen sollte für jede "vernünftige" Heuristik $\mathcal{H}$ jede Alternative $\boldsymbol{a}$ aus der Menge $\mathcal{H}(A, W)$ zumindest (A, W)-effizient sein. Wir greifen diesen Gedanken in Abschnitt 5.7 wieder auf.

Anmerkung 3.4.41 Wie bereits erwähnt, können ohne weitere Annahmen i.Allg. keine Aussagen über die Präferenzen des Agenten bezüglich zweier Alternativen getroffen werden. Wir möchten diesen Gedanken nun präzisieren. Dazu seien $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in A$ verschiedene (A, W)-effiziente Alternativen, die beide nicht (A, W)-verzichtbar sind. Das Problem besteht darin, dass weder $\boldsymbol{a_1} \succ_W \boldsymbol{a_2}$ noch $\boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2}$ (und entsprechend natürlich auch nicht $\boldsymbol{a_2} \succ_W \boldsymbol{a_1}$ oder $\boldsymbol{a_2} \succsim_W \boldsymbol{a_1}$) gelten kann. Da aber die W-Dominanzen für uns das (bisher) einzige Mittel sind, um auf die Präferenzrelation des Agenten zu schließen, kommen wir an dieser Stelle nicht ohne zusätzliche Annahmen weiter.

[30] Das *sukzessive* Vorgehen ist dabei entscheidend. Im Entscheidungsproblem (A, W) mit $n = 2$, $A = \{(1,0),(0,1)\}$, $W = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ sind beide Alternativen (A, W)-verzichtbar, das gleichzeitige Entfernen beider Alternativen eliminiert aber offenbar auch die Lösung des Problems (denn es verbleibt *keine* Alternative). Wir gehen hierauf detaillierter in Abschnitt 4.6 ein.

Die zusätzlich zu treffenden Annahmen können einerseits die Semantik einer Wahrscheinlichkeitsinformation betreffen oder andererseits das Verhalten bzw. die Neigungen des Agenten (seine "Ungewissheitspräferenz"). Diesbezügliche Annahmen schieben wir aber noch auf, da wir die nachfolgenden Ausführungen nicht unnötig in ihrer Allgemeinheit einschränken wollen. Im Kapitel über Heuristiken (Kapitel 5) werden wir dann mehrere alternative Annahmen ausführlicher darstellen. Wir möchten aber bereits hier anmerken, dass es eines der Hauptziele beim Lazy Decision Making ist, derartige Annahmen so weit wie möglich zu vermeiden.

3.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

In diesem Kapitel haben wir allgemein die Idee des Entscheidens bei partieller Information eingeführt und näher das Konzept der Wahrscheinlichkeitsinformation diskutiert.

Anschließend haben wir unseren Vorschlag für ein kompaktes Modell zur Untersuchung von Entscheidungssituationen bei partieller Information vorgestellt und dargelegt, wie sich allgemeine Entscheidungsprobleme in dieses Modell übersetzen lassen.

Wir haben formal definiert, was wir unter Heuristiken verstehen und mit Hilfe eines neuen Axioms – dem von uns vorgeschlagenen Dominanzaxiom – die Präferenzrelation des Agenten auf Entscheidungsprobleme in unserem Modell fortsetzen können. Hierzu haben wir als wichtige Hilfskonstrukte Nutzen-Lotterien und NL-Mengen eingeführt. Die Präferenzrelation lässt sich partiell aufgrund rein formaler Aspekte, der sogenannten W-Dominanzen, rekonstruieren und damit die Menge der potenziellen Lösungen zumindest eingrenzen.

Zuletzt haben wir für Entscheidungsprobleme $(A, W) \in \mathbb{E}$ die Begriffe der (A, W)-Optimalität, -Effizienz sowie -Verzichtbarkeit definiert und einige einfache Eigenschaften hergeleitet.

Kapitel 4

Lösbarkeit von Entscheidungsproblemen bei partieller Information

In diesem Kapitel untersuchen wir die Lösbarkeit von Entscheidungsproblemen bei partieller Information. Wir zeigen, dass sich lösbare Entscheidungsprobleme "robust" gegen eine Vergröberung der Wahrscheinlichkeitsinformation verhalten und dass jedes Entscheidungsproblem in lösbare Teilprobleme zerfällt. Zudem untersuchen wir, wie Alternativen als Lösung ausgeschlossen werden können und wie sich Schranken für den durch Auswahl einer "falschen" Alternative resultierenden Schaden berechnen lassen.

"Suche das Einfache und mißtraue ihm."

Alfred North Whitehead

"Erfahrene Propheten warten die Ereignisse ab."

Horace Walpole

4.1 Motivation

Entscheidungsprobleme unter Risiko lassen sich lösen in dem Sinne, dass eine klare Handlungsvorgabe für den rationalen Agenten angegeben werden kann: Er sollte die Menge der erwartungsnutzenmaximalen Alternativen bestimmen und eine beliebige Alternative aus dieser Menge wählen. (Denn bezüglich der Alternativen aus dieser Menge "sollte" der Agent indifferent sein.) Dies ist möglich, da Entscheidungsprobleme $(A, W) \in \text{risiko}(\mathbb{E})$ unter Risiko stets (A, W)-optimale Alternativen besitzen und jede solche Alternative eine Lösung des Entscheidungsproblems darstellt.

Demgegenüber lassen sich Entscheidungsprobleme unter Ungewissheit nicht derartig zufriedenstellend lösen. Es können lediglich die dominierten Alternativen ausgesondert werden, bezüglich der verbleibenden Alternativen ist jedoch jede weitere Auswahl schwierig.[1] Insbesondere lässt sich *nicht* folgern, dass der Agent bezüglich der nicht-dominierten Alternativen indifferent ist! Das Problem besteht darin, dass aufgrund der i.Allg. fehlenden W-Dominanzen keine Rückschlüsse auf die Präferenzen des Agenten möglich sind.

Insofern stellt sich die Frage, *welche* Entscheidungsprobleme lösbar sind beziehungsweise wie sich Entscheidungsprobleme derart *einschränken* lassen, dass sie lösbar werden. Zur Beantwortung dieser Frage ist es notwendig, die zunächst in intuitivem Sinne verwendeten Begriffe der Lösbarkeit und Einschränkung (Präzisierung) eines Entscheidungsproblems formal zu definieren.

4.2 Grundlagen

Definition 4.2.1 (Menge $\mathbb{E}_A$) Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A \neq \emptyset$ sei

$$\mathbb{E}_A := \{(A, W) \,|\, \emptyset \neq W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}\} \subseteq \mathbb{E}$$

die Menge aller Entscheidungsprobleme (A, W) mit der Alternativenmenge A (und n Zuständen).

Anmerkung 4.2.2 Wir werden im Folgenden insbesondere untersuchen, wie sich zu einem Entscheidungsproblem (A, W) die Wahrscheinlichkeitsinformation W bei festem A geeignet präzisieren lässt. Insofern werden wir uns – anschaulich gesprochen – "innerhalb" einer Menge $\mathbb{E}_A$ bewegen, wobei diese "Bewegung" in der nachfolgenden Definition näher spezifiziert wird.[2]

Definition 4.2.3 (Präzisierung, Vergröberung) (A, W) heisst **Präzisierung** von $(A, W') \in \mathbb{E}$, falls $W \subseteq W'$ gilt. (A, W') bezeichnen wir dann als eine **Vergröberung** von (A, W).[3] Gilt $W \subset W'$ so nennen wir (A, W) eine **echte Präzisierung** (und analog (A, W') eine **echte Vergröberung**).

Anmerkung 4.2.4 (Monotonie der W-Dominanz) Seien $(A, W) \in \mathbb{E}$, (A, W') eine Präzisierung von (A, W) und $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt offenbar

$$\boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2} \Longrightarrow \boldsymbol{a_1} \succsim_{W'} \boldsymbol{a_2}.$$

[1] Es können lediglich noch sukzessive die bezüglich des vorliegenden Entscheidungsproblems verzichtbaren Alternativen eliminiert werden, vgl. Anmerkung 3.4.40 und insbesondere Abschnitt 4.6.

[2] Demgegenüber hatten wir im Rahmen von Kapitel 3 untersucht, wie die Menge der als Lösung in Frage kommenden Alternativen eingeschränkt werden kann.

[3] Im Kontext unserer weiteren Untersuchungen sind ausschließlich Präzisierungen (bzw. Vergröberungen) in Hinblick auf die Wahrscheinlichkeitsinformationen relevant. Denkbar wären aber auch beispielsweise Präzisierungen bezüglich der Alternativenmenge oder gar der Zustandsmenge. Um Missverständnisse zu vermeiden, sollte man daher in einem allgemeineren Kontext exakter von W-Präzisierungen sprechen.

Folgerung 4.2.5 Seien $(A, W) \in \mathbb{E}$, (A, W') eine Präzisierung von (A, W) und $\overline{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

(1) $\overline{\boldsymbol{a}}$ (A, W)-optimal $\Longrightarrow$ $\overline{\boldsymbol{a}}$ (A, W')-optimal

(2) $\overline{\boldsymbol{a}}$ (A, W)-verzichtbar $\Longrightarrow$ $\overline{\boldsymbol{a}}$ (A, W')-verzichtbar

Beweis. Beide Behauptungen folgen mit Anmerkung 4.2.4 unmittelbar aus den Definitionen 3.4.22 und 3.4.37. □

Bemerkung 4.2.6 Seien $(A, W) \in \mathbb{E}$, (A, W') eine Präzisierung von (A, W) und $\overline{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\overline{\boldsymbol{a}} \text{ nicht } (A, W)\text{-effizient} \Longrightarrow \overline{\boldsymbol{a}} \ (A, W')\text{-verzichtbar.}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \overline{\boldsymbol{a}} \text{ nicht } (A, W)\text{-effizient} \\
\Longleftrightarrow\ & (\exists \boldsymbol{a} \in A)\boldsymbol{a} \succ_W \overline{\boldsymbol{a}} \\
\Longleftrightarrow\ & (\exists \boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\})\boldsymbol{a} \succ_W \overline{\boldsymbol{a}} \\
\Longleftrightarrow\ & (\exists \boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\})((\forall \boldsymbol{p} \in W)\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} \geq \overline{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{p} \wedge (\exists \boldsymbol{p} \in W)\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} > \overline{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{p}) \\
\Longrightarrow\ & (\exists \boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\})((\forall \boldsymbol{p} \in W')\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} \geq \overline{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{p}) \\
\Longleftrightarrow\ & (\exists \boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\})\boldsymbol{a} \succsim_{W'} \overline{\boldsymbol{a}} \\
\Longleftrightarrow\ & \overline{\boldsymbol{a}} \text{ ist } (A, W')\text{-verzichtbar}
\end{aligned}$$

□

Anmerkung 4.2.7 Anmerkung 4.2.4 zusammen mit Folgerung 4.2.5 und Bemerkung 4.2.6 stellen eine fundamentale Voraussetzung für das LAZY DECISION MAKING dar: Das Entscheidungsproblem wird bei unserem Verfahren (zielgerichtet) präzisiert und dabei werden sukzessive Alternativen aus den Betrachtungen eliminiert. Da in jedem Schritt nur nicht-effiziente Alternativen und ggf. sukzessive verzichtbare Alternativen ausgeschlossen werden, "überleben" optimale und nicht-verzichtbare Alternativen sämtliche Präzisierungsschritte. Denn aus Bemerkung 4.2.6 folgt unmittelbar, dass eine nicht (A, W')-verzichtbare Alternative für jede Vergröberung $(A, W) \in \mathbb{E}$ (A, W)-effizient ist und mit Folgerung 4.2.5 resultiert zudem, dass sie nicht (A, W)-verzichtbar ist.

Anmerkung 4.2.8 Die Relation "ist eine Präzisierung von" definiert für festes A eine starke Halbordnung auf $\mathbb{E}_A$. Für endliches A sind die maximalen Elemente bezüglich dieser Halbordnung gerade die Entscheidungsprobleme unter Risiko risiko($\mathbb{E}_\mathrm{A}$), das eindeutig bestimmte minimale Element ist "das" Entscheidungsproblem $(A, \mathbb{S}^{(n)})$ unter Ungewissheit.

Definition 4.2.9 (Überdeckung, Teilprobleme) Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ ein Entscheidungsproblem, M eine Menge und seien $(A, W_i), i \in M$ Präzisierungen von (A, W). Wir nennen $(A, W_i), i \in M$ eine **Überdeckung** von (A, W), wenn $W = \bigcup_{i \in M} W_i$ gilt. In diesem Zusammenhang nennen wir die Entscheidungsprobleme (A, W_i) auch **Teilprobleme**.

Anmerkung 4.2.10 Wir werden das Konzept der Überdeckung eines Entscheidungsproblems später verwenden um ein Entscheidungsproblem derart zu überdecken, dass jedes der Teilprobleme lösbar (in einem noch zu definierenden Sinne) ist.

Anmerkung 4.2.11 Trivialerweise lässt sich jedes Entscheidungsproblem (A, W) mit endlichem A überdecken durch Entscheidungsprobleme unter Risiko, nämlich durch $(A, \{\boldsymbol{p}\})$, $\boldsymbol{p} \in W$. Sofern W überabzählbar ist, beinhaltet diese triviale Überdeckung allerdings offenbar auch überabzählbar viele Entscheidungsprobleme.

4.3 Stabilitätslemma

Anmerkung 4.3.1 Mit dem nun folgenden Stabilitätslemma möchten wir zeigen, dass sich Entscheidungsprobleme gutartig ("robust") in folgendem Sinne verhalten: Wenn ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ eine eindeutige "beste" Alternative $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$ aufweist (und gewisse andere eher technische Bedingungen erfüllt), so existiert auch eine echte Vergröberung (A, W') von (A, W), für die immer noch $\overline{\boldsymbol{a}}$ eine "beste" Alternative ist.[4] Dabei werden wir W' aus W konstruieren, indem wir alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\boldsymbol{p}$ hinzunehmen, die in einer ε-Umgebung von W liegen (für ein geeignetes $\varepsilon > 0$).

Lemma 4.3.2 (Stabilitätslemma) Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$, W abgeschlossen, A endlich, $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$ und es gelte $\overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{p} > \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p}$ für alle $\boldsymbol{a} \in A' := A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$ und $\boldsymbol{p} \in W$.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p}$ für alle $\boldsymbol{a} \in A'$ und

$$\boldsymbol{p} \in W' := \{\boldsymbol{p}' \in \mathbb{S}^{(n)} \,|\, \mathrm{dist}_W(\boldsymbol{p}') \leq \varepsilon\}$$

gilt.

Beweis. Die Voraussetzungen seien erfüllt. Dann sind insbesondere die Mengen A und W kompakt (A ist endlich, W abgeschlossen und beschränkt).

Aufgrund der Kompaktheit von W existiert für jedes $\boldsymbol{a} \in A'$ der Wert

$$\delta_{\boldsymbol{a}} := \min\{\overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\}$$

und es gilt $\delta_{\boldsymbol{a}} > 0$.

[4] Entscheidend ist, dass die eindeutige "beste" Alternative einige *formale* Bedingungen erfüllt, welche sich überprüfen lassen, ohne die exakte Präferenzrelation des Agenten kennen zu müssen. Zwar ist die eindeutige "beste" Alternative automatisch auch die eindeutige Lösung des Entscheidungsproblems, umgekehrt muss aber nicht jede eindeutige Lösung eines Entscheidungsproblems diesen formalen Bedingungen genügen.

Aufgrund der Stetigkeit von $\overline{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}$ existiert somit auch für alle $\boldsymbol{a} \in A'$ ein $\varepsilon_{\boldsymbol{a}}$ mit

$$\forall \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n (d_W(\boldsymbol{p}) \leq \varepsilon_{\boldsymbol{a}} \Longrightarrow \overline{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}).$$

Offenbar folgt dann für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{\boldsymbol{a}} \,|\, \boldsymbol{a} \in A'\}$ die Behauptung. (Der Wert ε existiert aufgrund der Endlichkeit von A.) □

Anmerkung 4.3.3 Die Voraussetzung der Endlichkeit von A garantiert die Kompaktheit von A'. Tatsächlich hätte man auch direkt fordern können, dass A' (also $A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$) kompakt ist, was eine deutlich schwächere Annahme darstellt. Der Beweis kann für diesen Fall unverändert übernommen werden. Da in unseren späteren Betrachtungen die Menge A stets endlich sein wird, genügt uns aber auch der hier vorgestellte speziellere Fall.

Anmerkung 4.3.4 Das Stabilitätslemma hat auch unmittelbar Auswirkungen für das klassische Entscheiden unter Risiko; hier käme man "meistens" mit weniger Informationen in folgendem Sinne aus: Sei (A, W) ein Entscheidungsproblem unter Risiko (also A endlich, $W = \{\boldsymbol{p}\}$) und es existiere eine (A, W)-optimale Alternative $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$ mit $\overline{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{p} > \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}$ für alle $\boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$.[5] Um das Entscheidungsproblem (A, W) lösen zu können, hätte anstelle der exakten Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p}$ auch eine gröbere Wahrscheinlichkeitsinformation

$$W' = \{\boldsymbol{p}' \in \mathbb{S}^{(n)} \,|\, \mathrm{dist}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') \leq \varepsilon\}$$

für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ ausgereicht. (Die Vergröberung (A, W') hat dieselbe Lösung $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$ wie das Problem (A, W).)

Insofern unterstützt das Stabilitätslemma eine wesentliche, dem LAZY DECISION MAKING zu Grunde liegende Annahme: In vielen Entscheidungssituationen reicht schon die *ungenaue* Kenntnis der Zustandswahrscheinlichkeiten um eine gute – möglicherweise sogar die beste – Alternative ausfindig zu machen.[6]

4.4 Überdeckung durch lösbare Teilprobleme

Anmerkung 4.4.1 Wir werden nun den Begriff der Lösbarkeit eines Entscheidungsproblems geeignet formalisieren. Nachfolgend untersuchen wir dann, welche Art von Entscheidungsproblemen lösbar sind und werden zeigen, dass sich jedes allgemeine Entscheidungsprobleme (A, W) überdecken lässt durch lösbare Teilprobleme, welche wiederum eine sehr spezielle Struktur haben.

Definition 4.4.2 (Lösbarkeit eines Entscheidungsproblems) Wir nennen ein Entscheidungsproblem (A, W) **lösbar**, wenn es mindestens eine (A, W)-optimale Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ besitzt. Existiert genau eine solche Alternative, so nennen wir (A, W) **eindeutig lösbar**.

[5] Anders ausgedrückt, es existiert *genau* eine (A, W)-optimale Alternative bzw. das Entscheidungsproblem (A, W) ist *eindeutig* lösbar im Sinn von Definition 4.4.2.

[6] Für eine genauere Definition und Abgrenzung der Begriffe der Ungenauigkeit und Unsicherheit verweisen wir auf Unterabschnitt 8.4.1.

Anmerkung 4.4.3 Es ist ein erheblicher Unterschied, ob ein Entscheidungsproblem (A, W) *lösbar* ist oder eine *Lösung* besitzt! Der Begriff der Lösung zielt ausschließlich auf die Präferenzrelation des Agenten ab; insbesondere hatten wir festgehalten, dass *jedes* Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit endlicher Alternativenmenge mindestens eine Lösung besitzt (vgl. Anmerkung 3.4.34). Demgegenüber zielt der Begriff der Lösbarkeit darauf ab, ob sich eine Lösung des Entscheidungsproblems "formal" anhand von W-Dominanzen erkennen lässt (also ohne die exakte Präferenzrelation des Agenten kennen zu müssen). Jedes lösbare Entscheidungsproblem besitzt eine Lösung, wohingegen die Umkehrung i.Allg. falsch ist.

Trotz der sicherlich vorhandenen Gefahr von Missverständnissen haben wir hier dennoch an dem Begriffspaar ("Lösung" und "Lösbarkeit") festgehalten, da es relativ prägnant und treffend die jeweiligen Eigenschaften beschreibt.

Bemerkung 4.4.4 Jedes Entscheidungsproblem unter Risiko ist lösbar.

Beweis. Sei (A, W) mit $W = \{\boldsymbol{p}\}$ gegeben. Aufgrund der Endlichkeit von A existiert offenbar mindestens ein $\boldsymbol{a} \in A$ mit maximalem Wert $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}$ und es lässt sich sehr leicht zeigen, dass jedes solche $\boldsymbol{a}$ (A, W)-optimal ist. □

Folgerung 4.4.5 Jedes Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit endlicher Alternativenmenge lässt sich auf triviale Weise durch lösbare Teilprobleme überdecken, nämlich durch die Entscheidungsprobleme unter Risiko$(A, \{\boldsymbol{p}\})$, $\boldsymbol{p} \in W$ (vgl. Anmerkung 4.2.11).

Hilfsdefinition 4.4.1 ($W^*_{\boldsymbol{a}}$) Sei (A, W) ein Entscheidungsproblem. Für $\boldsymbol{a} \in A$ sei $W^*_{\boldsymbol{a}}$ definiert durch

$$W^*_{\boldsymbol{a}} := \{\boldsymbol{p} \in W \,|\, \boldsymbol{a} \text{ ist } (A, \{\boldsymbol{p}\})\text{-optimal}\}.$$

Anmerkung 4.4.6 Da im Folgenden die Alternativenmenge A stets eindeutig aus dem Kontext hervorgeht, haben wir diese im Sinne einer übersichtlichen Schreibweise nicht mit in die Notation aufgenommen. Ansonsten wäre die Bezeichnung $W^*_{\boldsymbol{a}}$ aber offenbar missverständlich, denn die Menge $W^*_{\boldsymbol{a}}$ ist abhängig von der Alternativenmenge A des zu Grunde liegenden Entscheidungsproblems (A, W).

Anmerkung 4.4.7 Definitionsgemäß ist jedes $\boldsymbol{a} \in A$, für das $W^*_{\boldsymbol{a}} \neq \emptyset$ gilt, $(A, W^*_{\boldsymbol{a}})$-optimal. Ist (A, W) eine Präzisierung von $(A, W^*_{\boldsymbol{a}})$, so ist $\boldsymbol{a}$ offenbar auch (A, W)-optimal (vgl. Folgerung 4.2.5).

Bemerkung 4.4.8 (1) Für $\boldsymbol{a} \in A$ und jede beliebige konvexe Linearkombination[7] $\boldsymbol{p}$ endlich vieler Punkte aus $W^*_{\boldsymbol{a}}$ gilt

$$\boldsymbol{p} \in W \Longrightarrow \boldsymbol{p} \in W^*_{\boldsymbol{a}}.$$

(2) Insbesondere sind für konvexes W auch die Mengen $W^*_{\boldsymbol{a}}$ konvex.

[7] Der Punkt $\boldsymbol{p}$ heisst *konvexe Linearkombination* von $\boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_l}$, $l \in \mathbb{N}$, wenn es $\lambda_i \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, l$ gibt mit $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1$ und $\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \boldsymbol{p_i}$.

Beweis.

(1) Sei $\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \boldsymbol{p}_i \in W$, $\lambda_i \in [0,1]$, $\boldsymbol{p}_i \in W^*_{\boldsymbol{a}}$ $(i = 1, \ldots, l)$, $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1$ und $\boldsymbol{a'} \in A$ beliebig. Da $\boldsymbol{a}$ für jedes $i = 1, \ldots, l$ $(A, \{\boldsymbol{p}_i\})$-optimal ist (siehe Anmerkung 4.4.7, $(A, \{\boldsymbol{p}_i\})$ ist eine Präzisierung von $(A, W^*_{\boldsymbol{a}})$), gilt $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p}_i \geq \boldsymbol{a'}^T \boldsymbol{p}_i$, also $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a'})^T \boldsymbol{p}_i \geq 0$. Folglich gilt auch

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a'})^T \boldsymbol{p}_i = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a'})^T \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \boldsymbol{p}_i = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a'})^T \boldsymbol{p} \geq 0$$

und da $\boldsymbol{a'} \in A$ beliebig gewählt war folgt die $(A, \{\boldsymbol{p}\})$-Optimalität von $\boldsymbol{a}$ und damit definitionsgemäß $\boldsymbol{p} \in W^*_{\boldsymbol{a}}$.

(2) Da W als konvex angenommen wird, gilt für jede konvexe Linearkombination $\boldsymbol{p}$ beliebig vieler Punkte aus $W^*_{\boldsymbol{a}} \subseteq W$ offenbar $\boldsymbol{p} \in W$ und mit (1) folgt $\boldsymbol{p} \in W^*_{\boldsymbol{a}}$.

□

Bemerkung 4.4.9 (1) Es gilt

$$W^*_{\boldsymbol{a}} = \{\boldsymbol{p} \in W \mid (\forall \boldsymbol{a'} \in A) \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{a'}^T \boldsymbol{p}\}$$

(2) Insbesondere lässt sich für endliches A somit $W^*_{\boldsymbol{a}}$ als Schnitt der Menge W mit einem konvexen Polytop darstellen.[8]

(3) Ist W eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation und A endlich, so ist auch $W^*_{\boldsymbol{a}}$ eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation.

Beweis.

(1) Dies folgt direkt aus den Definitionen der (A, W)-Optimalität (Definition 3.4.37) und W-Dominanz (Definition 3.4.22).

(2) Für endliches A ist die Menge $X := \mathbb{S}^{(n)} \cap \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \boldsymbol{a'} \in A) \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{a'}^T \boldsymbol{p}\}$ ein konvexes Polytop und es gilt $W^*_{\boldsymbol{a}} = W \cap X$.[9]

(3) Für endliches A ist X (siehe (2)) offenbar eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation. Damit ist auch $W^*_{\boldsymbol{a}} = W \cap X$ als Schnitt zweier linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen selbst eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation (Bemerkung 3.3.10).

□

Bemerkung 4.4.10 (1) Für endliches A gilt $W = \bigcup_{\boldsymbol{a} \in A} W^*_{\boldsymbol{a}}$. D.h., $(A, W^*_{\boldsymbol{a}})$, $\boldsymbol{a} \in A$ ist eine Überdeckung von (A, W).

[8] Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst *konvexes Polytop* genau dann, wenn sich M als Menge aller konvexer Linearkombinationen endlich vieler Punkte des $\mathbb{R}^n$ darstellen lässt (vgl. [NM93, S. 44]).

[9] Wir verzichten hier auf den einfachen Beweis, dass X tatsächlich ein konvexes Polytop ist.

(2) Bei unendlichem A ist $\bigcup_{\boldsymbol{a} \in A} W^*_{\boldsymbol{a}} \subset W$ möglich.

(3) Im Allgemeinen existieren nicht-(A, W)-verzichtbare Alternativen $\boldsymbol{a'} \in A$ mit $W^*_{a'} = \emptyset$. (Eine derartige Alternative ist also *nicht* (A, W')-optimal für jede Präzisierung (A, W') von (A, W), dennoch aber eine potenzielle Lösung von (A, W) und/oder (A, W').)

Beweis.

(1) Für jedes $\boldsymbol{p} \in W$ hat das Entscheidungsproblem $(A, \{\boldsymbol{p}\}) \in \text{risiko}(\mathbb{E})$ (mindestens) eine optimale Lösung (siehe Bemerkung 4.4.4). Entsprechend liegt $\boldsymbol{p}$ in mindestens einer der Mengen $W^*_{\boldsymbol{a}}$ und damit gilt $\bigcup_{\boldsymbol{a} \in A} W^*_{\boldsymbol{a}} = W$.

(2) Sei (A, W) definiert durch $n = 2$, $A = \mathbb{R}^2$ und $W = \{\boldsymbol{p}\}$ mit $\boldsymbol{p} = (1, 0)$. Offenbar existiert keine (A, W)-optimale Alternative und entsprechend gilt $W^*_{\boldsymbol{a}} = \emptyset$ für alle $\boldsymbol{a} \in A$, also $\bigcup_{\boldsymbol{a} \in A} W^*_{\boldsymbol{a}} = \emptyset \subset W$.

(3) Sei $n = 2$, $\boldsymbol{a_1} = (1, 1)$, $\boldsymbol{a_2} = (0, 3)$, $\boldsymbol{a_3} = (3, 0)$, $A = \{\boldsymbol{a_i} \,|\, i = 1, 2, 3\}$ und $W = \mathbb{S}^{(n)}$. Offenbar ist für kein $\boldsymbol{p} \in W$ die Alternative $\boldsymbol{a_1}$ optimal, dennoch existiert keine Alternative $\boldsymbol{a} \in \{\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}\}$ mit $\boldsymbol{a} \succsim_W \boldsymbol{a_1}$, d.h. $\boldsymbol{a_1}$ ist nicht (A, W)-verzichtbar.

□

Bemerkung 4.4.11 Sei (A, W) ein Entscheidungsproblem und (A, W') eine lösbare Präzisierung von (A, W). Dann gilt notwendigerweise $W' \subseteq W^*_{a'}$ für ein $\boldsymbol{a'} \in A$.

Beweis. Aus der Lösbarkeit von (A, W') folgt, dass ein $\boldsymbol{a'} \in A$ existiert mit $\boldsymbol{a'}^T \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p}$ für alle $\boldsymbol{a} \in A$ und $\boldsymbol{p} \in W'$. Mit Bemerkung 4.4.9 folgt unmittelbar $W' \subseteq W^*_{a'}$. □

Im Prinzip besteht die einzigste Möglichkeit der Auswahl einer wirklich "nachweislich" optimalen Alternative also darin, die Wahrscheinlichkeitsinformation W soweit zu präzisieren bis sie Teilmenge einer der Mengen $W^*_{\boldsymbol{a}}$ ist. Das wird im Allgemeinen allerdings nicht möglich sein, da dies eine sehr drastische Präzisierung erforderlich machen kann.

Selbst Alternativen, die für keine Präzisierung (A, W') des vorliegenden Entscheidungsproblems $(A, W) \in \mathbb{E}$ optimal sind, können *nicht* als Lösung ausgeschlossen werden (vgl. Bemerkung 4.4.10, Punkt (3)).

4.5 Ausschließen von Alternativen

Anmerkung 4.5.1 In dem vorhergehenden Abschnitt haben wir untersucht, welche Form die Wahrscheinlichkeitsinformation haben muss, damit nur noch eine Alternative als Lösung in Frage kommt. Zudem haben wir Entscheidungsprobleme derart überdeckt, dass jedes der Teilprobleme lösbar war.

In diesem Abschnitt werden wir nun gewissermaßen von der anderen Seite her das Problem angehen. Wir untersuchen, welche Form die Wahrscheinlichkeitsinformation haben muss, damit eine gewisse Alternative *nicht* als potenzielle Lösung betrachtet werden muss. Insofern steht hier die praktische Fragestellung im Vordergrund, wie ein Entscheidungsproblem derart präzisiert werden müsste, damit eine vorher festgelegte Alternative aus den weiteren Untersuchungen ausgeschlossen werden kann.

Anmerkung 4.5.2 Wir haben bisher auf eher intuitiver Ebene davon gesprochen, dass eine Alternative nicht mehr als potenzielle Lösung betrachtet werden muss. Diesen Begriff hatten wir bereits formalisiert, eine Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ muss nicht als potenzielle Lösung eines Entscheidungsproblems $(A, W) \in \mathbb{E}$ betrachtet werden, wenn $\boldsymbol{a}$ (A, W)-verzichtbar ist.[10] Wir führen nun noch einen neuen Begriff ein, der in engem Zusammenhang zu der Verzichtbarkeit steht.

Definition 4.5.3 (Zeuge (der Verzichtbarkeit)) Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$, $\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{a}} \in A$ und $\boldsymbol{a} \neq \overline{\boldsymbol{a}}$. Wir nennen $\boldsymbol{a}$ einen **Zeugen** für die (A, W)-Verzichtbarkeit von $\overline{\boldsymbol{a}}$, wenn $\boldsymbol{a} \succsim_W \overline{\boldsymbol{a}}$ gilt.

Hilfsdefinition 4.5.1 ($\widehat{W}_{\boldsymbol{a}}$) Gegeben sei ein Entscheidungsproblem (A, W) und es sei $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$ fest. Für alle $\boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$ sei

$$\widehat{W}_{\boldsymbol{a}} := \{\boldsymbol{p} \in W \mid \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p} \geq \overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{p}\}.$$

Anmerkung 4.5.4 Wie schon bei Hilfsdefinition 4.4.1 haben wir auch hier aus Gründen der Übersichtlichkeit darauf verzichtet, die Alternativenmenge A sowie die Bezugsalternative $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$ mit in die Notation aufzunehmen, obwohl dies im Prinzip notwendig wäre. Da jedoch A und $\overline{\boldsymbol{a}}$ im Folgenden stets klar aus dem Kontext hervorgehen, sind keine Missverständnisse zu befürchten.

Anmerkung 4.5.5 Die Motivation für diese Festlegung der Mengen $\widehat{W}_{\boldsymbol{a}}$ ist folgende: Für $\boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$ mit $\widehat{W}_{\boldsymbol{a}} \neq \emptyset$ ist $(A, \widehat{W}_{\boldsymbol{a}})$ eine Präzisierung von (A, W) derart, dass die Alternative $\boldsymbol{a}$ ein Zeuge für die $(A, \widehat{W}_{\boldsymbol{a}})$-Verzichtbarkeit von $\overline{\boldsymbol{a}}$ ist.

Bemerkung 4.5.6 Die Mengen $\widehat{W}_{\boldsymbol{a}}$ sind maximal in dem Sinne, dass für jedes $\boldsymbol{p} \in W \setminus \widehat{W}_{\boldsymbol{a}}$ gilt: Alternative $\boldsymbol{a}$ ist *kein* Zeuge für die $(A, \widehat{W}_{\boldsymbol{a}} \cup \{\boldsymbol{p}\})$-Verzichtbarkeit von $\overline{\boldsymbol{a}}$.

Beweis. Sei $\boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$ und $\boldsymbol{p} \in W \setminus \widehat{W}_{\boldsymbol{a}}$. Wegen $\boldsymbol{p} \notin \widehat{W}_{\boldsymbol{a}}$ gilt $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p} < \overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{p}$, also insbesondere *nicht* $\boldsymbol{a} \succsim_{\widehat{W}_{\boldsymbol{a}} \cup \{\boldsymbol{p}\}} \overline{\boldsymbol{a}}$, d.h. $\boldsymbol{a}$ ist kein Zeuge für die $(A, \widehat{W}_{\boldsymbol{a}} \cup \{\boldsymbol{p}\})$-Verzichtbarkeit von $\overline{\boldsymbol{a}}$. □

Lemma 4.5.7 Sei (A, W') eine Präzisierung von (A, W) derart, dass $\overline{\boldsymbol{a}}$ (A, W')-verzichtbar ist. Dann existiert ein $\boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$ mit $W' \subseteq \widehat{W}_{\boldsymbol{a}}$.

[10] Zwar kann eine (A, W)-verzichtbare Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ durchaus auch (A, W)-optimal sein; dann existiert aber mindestens eine von $\boldsymbol{a}$ verschiedene Alternative $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, welche ebenfalls (A, W)-optimal ist (vgl. Anmerkung 3.4.38). Insofern kann eine (A, W)-verzichtbare Alternative "gefahrlos" entfernt werden.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis

$$\begin{aligned}
& (\forall \boldsymbol{a} \in A)(W' \nsubseteq \widehat{W}_{\boldsymbol{a}}) \\
\iff & (\forall \boldsymbol{a} \in A)(\exists \boldsymbol{p} \in W')\boldsymbol{p} \notin \widehat{W}_{\boldsymbol{a}} \\
\iff & (\forall \boldsymbol{a} \in A)(\exists \boldsymbol{p} \in W')\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} < \overline{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{p} \\
\implies & (\forall \boldsymbol{a} \in A)\neg(\boldsymbol{a} \gtrsim_{W'} \overline{\boldsymbol{a}}) \\
\implies & \overline{\boldsymbol{a}} \text{ ist nicht } (A, W')\text{-verzichtbar.}
\end{aligned}$$

□

Anmerkung 4.5.8 Die Bedeutung dieses Resultats ist anschaulich gut nachvollziehbar: Wenn $\overline{\boldsymbol{a}}$ (A, W')-verzichtbar ist, so bedeutet dies, dass ein Zeuge für diese Verzichtbarkeit existieren muss. Da die Mengen $\widehat{W}_{\boldsymbol{a}}$ maximal sind (vgl. Bemerkung 4.5.6), folgt hieraus unmittelbar, dass $W' \subseteq \widehat{W}_{\boldsymbol{a}}$ für einen Zeugen $\boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$ gelten muss. Die praktischen Auswirkungen des Resultats erörtern wir nachfolgend.

Hilfsdefinition 4.5.2 (induzierte Ausschlussbedingung) Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$, $\overline{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{a} \in A$ und $\overline{\boldsymbol{a}} \neq \boldsymbol{a}$. Wir nennen die lineare Bedingung

$$(\boldsymbol{a} - \overline{\boldsymbol{a}})^T\boldsymbol{p} \geq 0$$

die durch $\boldsymbol{a}$ bezüglich $\overline{\boldsymbol{a}}$ **induzierte Ausschlussbedingung**.

Anmerkung 4.5.9 Möchten wir ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ so präzisieren, dass für die Präzisierung (A, W') eine Alternative $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$ nicht mehr betrachtet werden muss (also (A, W')-verzichtbar ist), so müssen für ein $\boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$ alle $\boldsymbol{p} \in W'$ die durch $\boldsymbol{a}$ bezüglich $\overline{\boldsymbol{a}}$ induzierte Ausschlussbedingung erfüllen. Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen 3.4.37 und 3.4.22.

Anmerkung 4.5.10 Wir werden später Wahrscheinlichkeitsinformationen durch lineare Ungleichungssysteme beschreiben (siehe Kapitel 6). Die o.g. Präzisierung (der “Ausschluss” von $\overline{\boldsymbol{a}}$) bedeutet in diesem Kontext, dass für $\boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$ die durch $\boldsymbol{a}$ bezüglich $\overline{\boldsymbol{a}}$ induzierte Ausschlussbedingung mit in das System der Ungleichungen aufgenommen wird.

Hilfsdefinition 4.5.3 (Verschärfung von linearen Bedingungen) Seien $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen die lineare Bedingung $\boldsymbol{a_1}^T\boldsymbol{p} \geq 0$ eine **Verschärfung** der linearen Bedingung $\boldsymbol{a_2}^T\boldsymbol{p} \geq 0$ in $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$, falls $\boldsymbol{a_1}^T\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{a_2}^T\boldsymbol{p}$ für alle $\boldsymbol{p} \in W$ gilt.

Anmerkung 4.5.11 Wir werden in Kapitel 6 den Begriff der ε-Verschärfung einer Nebenbedingung einführen (Definition 6.4.11), der nicht unmittelbar mit dem in Hilfsdefinition 4.5.3 festgelegten Konzept verwandt ist. Trotz der sehr ähnlichen Namen sind keine Verwechslungen zu befürchten, da wir den Begriff aus Hilfsdefinition 4.5.3 ausschließlich im Rahmen von Abschnitt 4.5 verwenden werden (daher sprechen wir von einer *Hilfs*definition).

Anmerkung 4.5.12 Zunächst wäre noch denkbar, dass gewisse Ausschlussbedingungen Verschärfungen anderer sind und damit gewissermaßen "beste" (mit der Bedeutung "am wenigstens scharfe") Ausschlussbedingungen existieren. Dass dem nicht so ist, zeigt nachfolgende Bemerkung.

Bemerkung 4.5.13 Seien $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ und für alle $\boldsymbol{p} \in W$ gelte

$$(\overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a_1})^T \boldsymbol{p} \leq (\overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a_2})^T \boldsymbol{p}$$

(d.h. $(\overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a_1})^T \boldsymbol{p} \geq 0$ ist eine Verschärfung von $(\overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a_2})^T \boldsymbol{p} \geq 0$ in W). Dann gilt $\boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2}$.

Beweis. Der Beweis ist sehr einfach, es gilt

$$\begin{aligned} & (\forall \boldsymbol{p} \in W)(\overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a_1})^T \boldsymbol{p} \leq (\overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a_2})^T \boldsymbol{p} \\ \iff & (\forall \boldsymbol{p} \in W)\overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a_1}^T \boldsymbol{p} \leq \overline{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a_2}^T \boldsymbol{p} \\ \iff & (\forall \boldsymbol{p} \in W)\boldsymbol{a_1}^T \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{a_2}^T \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

und die letzte Bedingung entspricht genau der Definition von $\boldsymbol{a_1} \succsim_W \boldsymbol{a_2}$ (vgl. Definition 3.4.22). □

Anmerkung 4.5.14 Die für praktische Anwendungen entscheidende Bedeutung dieser letzten Bemerkung ist, dass im Falle einer ausschließlich aus (A, W)-effizienten Alternativen bestehenden Menge A zum Ausschluss eines $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$ durch Präzisierung (d.h., durch Präzisieren von (A, W) zu (A, W') derart, dass $\overline{\boldsymbol{a}}$ (A, W')-verzichtbar ist) im Prinzip *jede* Alternative $\boldsymbol{a} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$ betrachtet werden muss um eine geeignete Ausschlussbedingung zu finden (es existieren keine "am wenigsten scharfe" Ausschlussbedingungen).

Der Grund hierfür ist, dass die durch ein $\boldsymbol{a_1} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}\}$ bezüglich $\overline{\boldsymbol{a}}$ induzierte Nebenbedingung

$$(\boldsymbol{a_1} - \overline{\boldsymbol{a}})^T \boldsymbol{p} \geq 0$$

keine Verschärfung der durch $\boldsymbol{a_2} \in A \setminus \{\overline{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{a_1}\}$ bezüglich $\overline{\boldsymbol{a}}$ induzierten Nebenbedingung

$$(\boldsymbol{a_2} - \overline{\boldsymbol{a}})^T \boldsymbol{p} \geq 0$$

in W sein kann. Denn hieraus würde aufgrund der vorhergehenden Bemerkung unmittelbar ein Widerspruch zu der Effizienzannahme folgen.

Anmerkung 4.5.15 Anzumerken ist, dass die induzierten Ausschlussbedingungen – also Bedingungen der Form $(\boldsymbol{a} - \overline{\boldsymbol{a}})^T \boldsymbol{p} \geq 0$ – zu erheblichen Interpretationsproblemen auf Seiten des Agenten führen können. Diesen Punkt können wir allerdings erst sinnvoll erörtern, wenn wir die Repräsentation von Wahrscheinlichkeitsinformationen (Kapitel 6) betrachtet haben. Intuitiv gesprochen besteht das Problem darin, dass der Agent im Allgemeinen zu einer Bedingung der Form $(\boldsymbol{a} - \overline{\boldsymbol{a}})^T \boldsymbol{p} \geq 0$ keine "Vorstellung" entwickeln und demzufolge nicht über ihre Gültigkeit entscheiden kann.

4.6 Eliminierung verzichtbarer Alternativen

Definition 4.6.1 (Sukzessive Eliminierung verzichtbarer Alternativen) Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ ein Entscheidungsproblem und A endlich. Unter der **sukzessiven Eliminierung verzichtbarer Alternativen** verstehen wir folgendes Vorgehen:

(1) Sei $i := 0$ und $A_0 = A$

(2) Solange noch (A_i, W)-verzichtbare Alternativen in A_i existieren

  (2.1) Wähle eine beliebige (A_i, W)-verzichtbare Alternative $\boldsymbol{a_i}$ aus A_i

  (2.2) Setze $A_{i+1} := A_i \setminus \{\boldsymbol{a_i}\}$

  (2.3) $i := i + 1$

(3) $i^* := i$

(4) Ausgabe ist (A_{i^*}, W)

Anmerkung 4.6.2 Aufgrund des nicht-deterministischen Auswahlschritts ist auch das Resultat des Verfahrens nicht-deterministisch. Beispielsweise kann für das Entscheidungsproblem (A, W) mit $A = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$, $\boldsymbol{a_1} = (1, 0)$, $\boldsymbol{a_2} = (0, 1)$, $W = \{\boldsymbol{p}\}$, $\boldsymbol{p} = (0.5, 0.5)$ je nach Auswahl sowohl $(\{\boldsymbol{a_1}\}, W)$ wie auch $(\{\boldsymbol{a_2}\}, W)$ resultieren.

Anmerkung 4.6.3 Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ ein Entscheidungsproblem, A endlich und (A', W) resultiere aus (A, W) indem sukzessive die verzichtbaren Alternativen eliminiert werden. Dann gilt $A' \neq \emptyset$.

Beweis. Angenommen es gilt $A_{i^*} = A' = \emptyset$ (für die Notation siehe Definition 4.6.1). Dann existiert wegen $A \neq \emptyset$ und $A_0 = A$ offenbar ein kleinstes $\hat{i} > 0$ mit $A_{\hat{i}} = \emptyset$. Aus dem Algorithmus folgt, dass dann $A_{\hat{i}-1} = \{\boldsymbol{a_{\hat{i}-1}}\}$ gelten muss und dass $\boldsymbol{a_{\hat{i}-1}}$ $(\{\boldsymbol{a_{\hat{i}-1}}\}, W)$-überflüssig ist. Dies ist aber trivialerweise nicht möglich, vgl. Definition 4.6.1. □

4.7 Schranken für das "potenzielle Bedauern" (Regret-Schranken)

Anmerkung 4.7.1 Die Ausführungen in diesem Abschnitt behandeln nun die Lösbarkeit eines Entscheidungsproblems in einem etwas "weicheren" Sinn. Wir haben bisher festgestellt, dass nur eine sehr eingeschränkte Klasse von Entscheidungsproblemen lösbar ist und daher kaum erwartet werden kann, dass sich ein allgemeines Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ vom Agenten derart präzisieren lässt, dass die Präzisierung (A, W') lösbar ist.[11]

[11] Grund hierfür ist, dass hinter den Wahrscheinlichkeitsinformationen eine Interpretation bzw. eine semantische Bedeutung steht, vgl. Anmerkung 3.3.4 und Unterabschnitt 8.4.2. Insofern kann eine Präzisierung dazu führen, dass die resultierende Wahrscheinlichkeitsinformation nicht mehr adäquat das Wissen des Agenten beschreibt. Präzisierungen werden daher beim Lazy Decision Making durchweg vom Agenten selbst durchgeführt und es erscheint nicht realistisch, dass stets ein beliebiger Präzisionsgrad erreicht werden kann.

Um diese "drastische" Präzisierung ein wenig zu lockern, kann man den Begriff der Lösbarkeit etwas aufweichen. Für genau diesen Aspekt möchten wir im Rahmen dieses Abschnitts die Grundlagen legen: Wir definieren und untersuchen Schranken, welche verwendet werden können, um den intuitiven Begriff einer "guten" (als Aufweichung von "besten") Alternative zu formalisieren.

Anmerkung 4.7.2 Bei der Savage-Niehans-Regel versucht man, das mögliche "Bedauern" zu minimieren (vgl. Definition 2.2.14). Unter diesem Bedauern versteht man dabei die Differenz zwischen demjenigen Nutzen, der in einem Umweltzustand maximal zu realisieren ist und dem tatsächlich erzielten Nutzen; das Bedauern misst somit den entgangenen Nutzen.

Wir werden in diesem Abschnitt nun basierend auf ähnlichen Überlegungen verschiedene *Regret-Schranken* einführen. Hierunter befindet sich beispielsweise eine Schranke für den entgangenen Erwartungsnutzen, der in einem Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ durch Wahl *irgendeiner* Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ anstelle der "besten" (aber unbekannten) Alternative resultieren kann.

Anmerkung 4.7.3 Die Motivation für derartige Regret-Schranken ist einfach erklärt: In praktischen Anwendungen ist es das Ziel des Agenten, mit vertretbarem Aufwand eine "gute" Alternative auszuwählen – dies muss nicht notwendigerweise die beste sein.[12] Eine sehr niedrige Regret-Schranke (was dies in absoluten Werten bedeutet hängt sowohl von der Nutzenfunktion als auch vom Entscheidungsproblem ab) bedeutet, dass sich die Alternativen nur geringfügig unterscheiden; insofern kann in diesem Fall möglicherweise ohne weitere Präzisierungen eine beliebige Alternative aus der Alternativenmenge "gefahrlos" ausgewählt werden.

Definition 4.7.4 (Regret-Schranken $\phi_W(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$, $\phi_{A,W}(\boldsymbol{a_1})$, $\phi_{A,W}$) Für ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ und $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\begin{aligned}
\phi_W(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) &:= \sup\{\boldsymbol{a_2}^T\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a_1}^T\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\}, \\
\phi_{A,W}(\boldsymbol{a_1}) &:= \sup\{\phi_W(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \,|\, \boldsymbol{a_2} \in A\}, \\
\phi_{A,W} &:= \sup\{\phi_{A,W}(\boldsymbol{a_1}) \,|\, \boldsymbol{a_1} \in A\}.
\end{aligned}$$

Anmerkung 4.7.5 Diesen Regret-Schranken liegt folgende Interpretation eines Entscheidungsproblems (A, W) zu Grunde: Es existiert eine wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$, von der jedoch lediglich $\boldsymbol{\rho} \in W$ bekannt ist. (Dies entspricht der in Anmerkung 3.3.4 angesprochenen Standardinterpretation von Wahrscheinlichkeitsinformationen; Vertreter dieser Interpretation sind beispielsweise Eduard Kofler und Günter Menges (vgl. [KM76]).)

Für ein beliebiges $\boldsymbol{p} \in W$ ist der entgangene Erwartungsnutzen (dies ist gemäß dem Bernoulli-Prinzip die relevante Bewertungsgröße) bei Wahl von $\boldsymbol{a_1}$ anstelle von $\boldsymbol{a_2}$ gerade

$$\boldsymbol{a_2}^T\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a_1}^T\boldsymbol{p}.$$

[12] Für diese Zielsetzungen spricht neben ökonomischen Gründen (der Agent verfügt nicht über beliebige Ressourcen für die Durchführung der Entscheidung) auch folgendes Argument: Da das Modell in nahezu allen praktischen Fällen ohnehin eine Idealisierung darstellt, kann eine im Modell optimale Alternative in der Realität lediglich "gut" sein und umgekehrt.

(Dieser Wert kann selbstverständlich auch negativ sein, in diesem Fall stellt sich der Agent bei Wahl von $\boldsymbol{a_1}$ anstelle von $\boldsymbol{a_2}$ *besser*, wiederum gemessen am Erwartungsnutzen bezüglich $\boldsymbol{p}$.) Insofern ist $\phi_W(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ eine *obere Schranke* für den bezüglich der wahren Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ entgangenen Nutzen (bei Wahl von $\boldsymbol{a_1}$ anstelle von $\boldsymbol{a_2}$), da lediglich $\boldsymbol{\rho} \in W$ bekannt ist.

Ähnlich lassen sich die anderen Regret-Schranken interpretieren: Der Wert $\phi_{A,W}(\boldsymbol{a_1})$ ist eine Schranke für den entgangenen Erwartungsnutzen bei Wahl von $\boldsymbol{a_1}$ anstelle der bezüglich $\boldsymbol{\rho}$ besten Alternative aus A (wiederum vorausgesetzt, dass lediglich $\boldsymbol{\rho} \in W$ bekannt ist). Die Regret-Schranke $\phi_{A,W}$ schließlich bemisst den maximalen Erwartungsnutzenunterschied zwischen Alternativen aus A über alle denkbaren Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\boldsymbol{p}$ aus W; dieser Wert ist somit eine obere Schranke für den Schaden, der durch die Auswahl *irgendeiner* Alternative aus A (anstelle der "besten") enstehen kann.

Anmerkung 4.7.6 Für $(A, W) \in \mathbb{E}$ und $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ ist definitionsgemäß $\phi_{A,W}(\boldsymbol{a})$ die *schärfste* Schranke für denjenigen Erwartungsnutzen, der dem Agenten bei Auswahl von $\boldsymbol{a}$ anstelle einer Erwartungsnutzen-maximalen Alternative $\boldsymbol{a^*} \in A$ entgeht, sofern die Standardinterpretation unterstellt wird, also eine "echte" Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ durch W ungenau beschrieben wird (also $\boldsymbol{\rho} \in W$ gilt, vgl. Anmerkung 3.3.4).

Analog gilt die Aussage für $\phi_{A,W}$ (bei Auswahl *irgendeiner* Alternative $\boldsymbol{a} \in A$) und $\phi_W(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ (bei Auswahl von $\boldsymbol{a_1}$ anstelle von $\boldsymbol{a_2}$).

Anmerkung 4.7.7 Die nachfolgenden beiden Resultate sind angesichts der Interpretation der Regret-Schranken nicht verwunderlich. Sie zeigen, dass genau im Falle eines Schrankenwertes von Null die jeweiligen Alternativen optimal sind.

Bemerkung 4.7.8 Für alle $(A, W) \in \mathbb{E}$, $\overline{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\phi_{A,W}(\overline{\boldsymbol{a}}) \leq 0 \iff \overline{\boldsymbol{a}} \text{ ist } (A, W)\text{-optimal.}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \phi_{A,W}(\overline{\boldsymbol{a}}) \leq 0 \\
\iff & (\forall \boldsymbol{a} \in A)\phi_W(\overline{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{a}) \leq 0 \\
\iff & (\forall \boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{p} \in W)\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} - \overline{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{p} \leq 0 \\
\iff & (\forall \boldsymbol{a} \in A)(\forall \boldsymbol{p} \in W)\overline{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} \\
\iff & (\forall \boldsymbol{a} \in A)\overline{\boldsymbol{a}} \succsim_W \boldsymbol{a} \\
\iff & \overline{\boldsymbol{a}} \text{ ist } (A, W)\text{-optimal.}
\end{aligned}$$

□

Folgerung 4.7.9 Für alle $(A, W) \in \mathbb{E}$ gilt

$$\phi_{A,W} = 0 \iff (\forall \boldsymbol{a} \in A)\boldsymbol{a} \text{ ist } (A, W)\text{-optimal}$$

Beweis. Die Folgerung ist fast trivial:

$$\begin{aligned} & \phi_{A,W} = 0 \\ \iff & \sup\{\phi_{A,W}(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{a} \in A\} = 0 \\ \iff & (\forall \boldsymbol{a} \in A)\phi_{A,W}(\boldsymbol{a}) \leq 0 \\ \iff & (\forall \boldsymbol{a} \in A)\boldsymbol{a} \text{ ist } (A,W)\text{-optimal} \end{aligned}$$

□

Anmerkung 4.7.10 Wir werden nun zeigen, dass für eine sehr zentrale Klasse von Wahrscheinlichkeitsinformationen die Regret-Schrankenwerte an “Extrempunkten” der Wahrscheinlichkeitsinformation angenommen werden. Dies ist insofern wichtig, als wir später durch Präzisierung des Entscheidungsproblems die Regret-Schrankenwerte “drücken” wollen. Die Lokalisierung der “Problemzonen” ist ein erster Schritt in Richtung der zielgerichteten Präzisierung.

Lemma 4.7.11 Sei $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ konvex und abgeschlossen, $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert ein Extrempunkt[13] $\overline{\boldsymbol{p}} \in W$ derart, dass

$$\phi_W(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) = \boldsymbol{a_2}^T\overline{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{a_1}^T\overline{\boldsymbol{p}}.$$

Beweis. Es lässt sich zeigen, dass sich jeder Punkt $\boldsymbol{p} \in W$ als konvexe Linearkombination von Extrempunkten aus W darstellen lässt (Satz von KREIN-MILMAN).[14] Sei $\boldsymbol{p}^* \in W$ derart, dass

$$\phi_W(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) = (\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})^T\boldsymbol{p}^*.$$

Ein solcher Wert $\boldsymbol{p}^* \in W$ existiert, da W als beschränkte und abgeschlossene Menge kompakt ist und daher der Wert $\phi_W(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ angenommen wird. Gemäß dem Satz von KREIN-MILMAN existieren $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ und Extrempunkte $\boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_N} \in W$ derart, dass

$$\boldsymbol{p}^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i \boldsymbol{p_i}.$$

Weiter gilt

$$(\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})^T\boldsymbol{p}^* = (\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})^T(\sum_{i=1}^N \lambda_i \boldsymbol{p_i}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i (\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})^T\boldsymbol{p_i}$$

[13] Ein Punkt $\boldsymbol{p} \in M$ einer konvexen Menge M heisst *Extrempunkt* von M, wenn sich $\boldsymbol{p}$ nicht als $\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, $\lambda \in (0,1)$ darstellen lässt. (D.h., ein Extrempunkt $\boldsymbol{p} \in M$ ist nicht als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte aus M darstellbar, vgl. etwa [NM93, S. 45])

[14] Der Satz von KREIN-MILMAN (nebst Folgerungen) wird in nahezu jedem grundlegenden Buch zur Funktionalanalysis erläutert, beispielsweise findet er sich (inklusive Beweis) in [TL80, S. 181ff].

und aufgrund der Maximalität von $(\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})^T \boldsymbol{p}^*$ folgt unmittelbar

$$(\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})^T \boldsymbol{p_i} = (\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})^T \boldsymbol{p}^*$$

für alle $i = 1, \dots, N$. Da die $\boldsymbol{p_i}$ annahmegemäß Extrempunkte sind, resultiert die Behauptung. □

Folgerung 4.7.12 Sei wiederum $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ konvex und abgeschlossen, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Falls die Werte $\phi_{A,W}(\boldsymbol{a})$ und $\phi_{A,W}$ angenommen werden (vgl. Definition 4.7.4), so werden sie auch an Extrempunkten von W angenommen.

Beweis. Wird $\phi_{A,W}(\boldsymbol{a})$ angenommen, so existiert ein $\boldsymbol{a_2} \in A$ mit $\phi_{A,W}(\boldsymbol{a}) = \phi_W(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a_2})$. Aufgrund von Lemma 4.7.11 wird dieser Wert dann auch an einem Extrempunkt von W angenommen. Wird $\phi_{A,W}$ angenommen, so existiert ein $\boldsymbol{a} \in A$ mit $\phi_{A,W} = \phi_{A,W}(\boldsymbol{a})$ und wir befinden uns damit wieder im vorangehenden Fall. □

Anmerkung 4.7.13 Wir werden später ausschließlich endliche Alternativenmengen A betrachten; für diese werden die Werte $\phi_{A,W}$ und $\phi_{A,W}(\boldsymbol{a})$ (für $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ konvex und abgeschlossen) trivialerweise angenommen. Etwas verallgemeinernd ist diese Aussagen offenbar für alle kompakte Mengen A zutreffend.

Folgerung 4.7.14 Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$, W konvex und abgeschlossen, A kompakt, (A, W') eine Präzisierung von (A, W) und $\phi_{A,W'} < \phi_{A,W}$. Dann existiert mindestens ein Extrempunkt $\overline{\boldsymbol{p}}$ von W und ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\boldsymbol{p} \in W$ mit $\operatorname{dist}(\boldsymbol{p}, \overline{\boldsymbol{p}}) < \varepsilon$ gilt $\boldsymbol{p} \notin W'$. (Mit anderen Worten, beim Übergang von W zu W' wurde mindestens ein Extrempunkt $\boldsymbol{p}$ von W samt seiner ε-Umgebung entfernt.)

Beweis. Die Existenz eines Extrempunkts $\overline{\boldsymbol{p}} \in W$, an dem der Wert $\phi_{A,W}$ angenommen wird, resultiert aus Folgerung 4.7.12 und der Kompaktheit von A. D.h., es existieren $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in A$ mit $\boldsymbol{a_2}^T \overline{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{a_1}^T \overline{\boldsymbol{p}} = \phi_{A,W}$. Wegen $\phi_{A,W'} < \phi_{A,W}$ gilt offenbar $\overline{\boldsymbol{p}} \notin W'$.

Da die Funktion $\boldsymbol{a_2}^T \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a_1}^T \boldsymbol{p}$ stetig in $\boldsymbol{p}$ ist und $\phi_{A,W'} < \phi_{A,W} = \boldsymbol{a_2}^T \overline{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{a_1}^T \overline{\boldsymbol{p}}$ gilt, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{p}, \overline{\boldsymbol{p}}) < \varepsilon \Longrightarrow \boldsymbol{a_2}^T \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a_1}^T \boldsymbol{p} > \phi_{A,W'}.$$

Demzufolge kann kein Punkt aus der ε-Umgebung von $\overline{\boldsymbol{p}}$ Element von W' sein. □

4.8 Zusammenfassung der Ergebnisse

Wir haben im Rahmen dieses Kapitels die Struktur von Entscheidungsproblemen bei partieller Information und dabei insbesondere die Lösbarkeit untersucht.

Das Stabilitätslemma hat uns einen ersten Hinweis darauf geliefert, dass sich Entscheidungsprobleme bei partieller Information gutartig in folgendem Sinne verhalten: Besitzt ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ eine eindeutige "beste" Alternative und erfüllt es zudem einige eher technische Bedingungen, so existiert auch eine Vergröberung von (A, W) mit derselben Lösung. Plakativ gesprochen bedeutet dies, dass in vielen Fällen die etwas ungenaue Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsinformation W keinen Einfluss auf die Lösung des Problems hat, bei Entscheidungsproblemen unter Risiko müssen beispielsweise häufig die Zustandswahrscheinlichkeiten nicht exakt bekannt sein.

Wir haben weiter festgestellt, dass sich jedes Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ durch lösbare Entscheidungsprobleme überdecken lässt. Die von uns angegebene Überdeckung hat dabei eine Eigenschaft mit weitreichenden Konsequenzen: Möchte man das Problem (A, W) derart präzisieren (in dem Sinne, dass man zu einer Wahrscheinlichkeitsinformation $W' \subseteq W$ übergeht), dass das resultierende Problem (A, W') lösbar ist, so ist W' zwangsläufig Teilmenge eines der an der Überdeckung beteiligten Teilprobleme. Des Weiteren haben wir festgestellt, dass für konvexes W auch die Wahrscheinlichkeitsinformationen der Teilprobleme konvex sind und – für unsere späteren Ausführungen noch wichtiger – diese Beziehung ebenso bezüglich der Linearität der Wahrscheinlichkeitsinformationen gilt.

Nachfolgend haben wir untersucht, wie eine Alternative aus der Lösungsfindung ausgeschlossen werden kann. Wir haben festgestellt, dass hierzu ein Zeuge der Verzichtbarkeit gefunden werden muss und dass dies potenziell jede andere Alternative sein kann. Um eine Alternative auszuschließen muss der Agent mindestens eine der induzierten Ausschlussbedingungen akzeptieren, potenziell müssen ihm allerdings alle präsentiert werden.

Als letzten Punkt haben wir die Lösbarkeit eines Entscheidungsproblems in einem "weicheren" Sinn betrachtet. Hier haben wir Maße eingeführt für den Schaden (angelehnt an die Savage-Niehans-Regel), der durch die Wahl einer potenziell sub-optimalen Alternative resultieren kann. In Vorgriff auf das Lazy Decision Making haben wir untersucht, wie diese Schadenschranken durch Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation (also Übergang von $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ zu $W' \subseteq W$) verbessert werden können und festgestellt, dass hierzu (sofern das Entscheidungsproblem einigen technischen Bedingungen genügt) mindestens ein Extrempunkt von W nebst ε-Umgebung entfernt werden muss.

Kapitel 5

Heuristiken

In diesem Kapitel untersuchen wir Heuristiken für das Entscheiden bei partieller Information. Neben den klassischen Heuristiken, die aus dem Entscheiden bei Ungewissheit stammen und lediglich angepasst werden müssen, betrachten wir die (in dieser Form neue) Klasse der stark parametrisierbaren OWA-Heuristiken, diskutieren die Effizienz von Heuristiken und erörtern knapp den Unterschied zwischen reinen und gemischten Strategien.

> *"Wenn wir auch nicht sicher wissen, wie eine Handlung ausgeht, so müssen wir doch handeln, denn sonst kommt es zu keiner Veränderung. Ein Fehlgreifen in der Wahl der Mittel ist besser, als nichts zu tun."*
>
> Clausewitz

> *"Optimisten halten diese Welt für die beste aller möglichen, Pessimisten befürchten es."*
>
> N.N.

5.1 Motivation

Das Lösen eines Entscheidungsproblems (bei partieller Information) "lebt" im wesentlichen von den Heuristiken.[1] Denn unabhängig vom speziellen Profil des Agenten (z.B. dessen Risikopräferenz) lassen sich lediglich die dominierten Alternativen

[1] Dies gilt allerdings nur für den statischen Fall, in dem die Wahrscheinlichkeitsinformation nicht verändert wird. Demgegenüber ist das Lazy Decision Making ein *dynamisches* Modell (hier wird die Wahrscheinlichkeitsinformation sukzessive präzisiert) und "lebt" als solches weniger stark von der verwandten Heuristik. (Soll heissen: Die verwandte Heuristik hat weniger Einfluss auf die Entscheidungsfindung als dies bei einem statischen Modell i.Allg. der Fall ist.)

eliminieren – jeder rationale Agent sollte eine effiziente Alternative auswählen. Die Frage, *welche* der effizienten Alternativen der Agent wählen sollte, ist hingegen nicht allgemein zu beantworten, da dies – wie bereits erwähnt – vom speziellen Profil des Agenten abhängt.

Hier werden nun die *Heuristiken* wichtig. Letztendlich steht jede einzelne Heuristik für ein spezielles Profil eines Agenten, parametrisierbare Heuristiken stehen sogar für eine Schar von Profilen. Zweckmäßigstes Vorgehen ist, eine Heuristik auszuwählen, die möglichst gut mit den eigenen Vorstellungen (des Agenten) übereinstimmt.[2]

Wir werden hier die gängigsten Heuristiken im Kontext unseres Modells knapp vorstellen und anschließend eine – unserer Meinung nach – sehr wichtige *neue Klasse* einführen, welche sich "stark" parametrisieren lässt und die wichtigsten klassischen Heuristiken als Spezialfall enthält.

Insbesondere werden wir hier die Heuristiken in Hinblick auf ihre "Erzeugung" betrachten. Uns geht es weniger darum, welche Heuristiken sich wie kritisieren lassen (dieses – zweifelsohne sehr wichtige – Thema wird ausreichend in der Literatur diskutiert, siehe etwa [Lau98] für eine knappe Übersicht der Standardkritikpunkte). Vielmehr werden wir feststellen, dass sich diverse Heuristiken als spezielle Optimierungsaufgabe formulieren lassen. Diesen Aspekt werden wir dann später für das LAZY DECISION MAKING nutzen; hier können wir aus vielen Heuristiken zusätzliche Kenngrößen gewinnen.

5.2 Separable Heuristiken

Anmerkung 5.2.1 Wir werden zunächst die Klasse der *separablen* Heuristiken betrachten. Diese bestechen durch ihre strukturelle Einfachheit einerseits, andererseits aber auch dadurch, dass die wichtigsten aus dem Kontext des Entscheidens unter Ungewissheit bekannten Heuristiken zu dieser Klasse gehören.

Anmerkung 5.2.2 Wir führen die Konzepte der separablen und nicht-separablen Heuristiken sowie den Begriff der induzierenden Funktionen ein, um die Vielzahl der existierenden Heuristiken systematischer einordnen und untersuchen zu können. Erstaunlicherweise finden sich in der (uns bekannten) Literatur keine vergleichbaren Untersuchungen.

Definition 5.2.3 (Separable Heuristik) Eine Heuristik $\mathcal{H}$ heisst **separabel** wenn eine Funktion $f_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)}) \dashrightarrow \mathbb{R}$ existiert mit folgender Eigenschaft: Für alle $(A, W) \in \mathbb{E}$ gilt

$$\mathcal{H}(A, W) = \{\boldsymbol{a} \in A \,|\, f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W) = \max\{f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a'}, W) \,|\, \boldsymbol{a'} \in A\}\}$$

falls $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a'}, W)$ für alle $\boldsymbol{a'} \in A$ definiert ist und $\mathcal{H}(A, W) = \perp$ sonst. Wir sagen, dass die Heuristik $\mathcal{H}$ durch $f_{\mathcal{H}}$ **induziert** wird; $f_{\mathcal{H}}$ nennen wir die **induzierende Funktion**.

[2] Allerdings ist dies "leichter gesagt als getan". Die Auswahl einer zum Profil des Agenten passenden Heuristik stellt ein hochgradig-nichttriviales Problem dar!

Anmerkung 5.2.4 Die induzierende Funktion $f_{\mathcal{H}}$ einer separablen Heuristik $\mathcal{H}$ weist also anschaulich gesprochen jeder Alternative $\boldsymbol{a}$ in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsinformation W (insgesamt also der NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W\rangle$) eine *Kenngröße* zu; Ergebnis der Heuristik $\mathcal{H}$ angewandt auf ein Entscheidungsproblem (A, W) ist die Menge derjenigen $\boldsymbol{a}$, die den höchsten Wert dieser Kenngröße $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W)$ aufweisen.

Anmerkung 5.2.5 Die entscheidende Eigenschaft separabler Heuristiken ist, dass einer Alternative $\boldsymbol{a}$ ein Wert ausschließlich in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeitsinformation W zugeordnet wird; die Alternativenmenge A beeinflusst diesen Wert nicht.

Definition 5.2.6 (Wichtige separable Heuristiken) Für alle $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ mit $W \neq \emptyset$ und alle $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ seien die folgenden Funktion wie angegeben definiert:

- $f_{\inf}(\boldsymbol{a}, W) := \inf\{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\}$,
- $f_{\sup}(\boldsymbol{a}, W) := \sup\{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\}$,
- $f_{\lambda}(\boldsymbol{a}, W) := (1-\lambda) f_{\inf}(\boldsymbol{a}, W) + \lambda f_{\sup}(\boldsymbol{a}, W)$ (für $\lambda \in [0, 1]$).

Es seien $\mathcal{H}_{\inf}$, $\mathcal{H}_{\sup}$ und $\mathcal{H}_{\lambda}$ die induzierten Heuristiken.

Anmerkung 5.2.7 Die Heuristik $\mathcal{H}_{\inf}$ wird in der Literatur als MaxE$_{\inf}$-Regel bezeichnet, $\mathcal{H}_{\sup}$ analog als MaxE$_{\sup}$-Regel. Für lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen spricht man auch von der MaxE$_{\min}$- und MaxE$_{\max}$-Regel (siehe [KM76, S. 136ff], [Kof89, S. 38-40], [Del97, 142-147]); allgemeiner kann man diese Begriffe für alle kompakten (d.h. abgeschlossenen[3]) Wahrscheinlichkeitsinformationen verwenden. Für diesen Fall schreiben wir statt $\mathcal{H}_{\inf}$ auch $\mathcal{H}_{\min}$ und entsprechend $\mathcal{H}_{\max}$ anstelle von $\mathcal{H}_{\sup}$.

Anmerkung 5.2.8 Grundidee dieser Heuristiken ist wiederum, dass eine wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ existiert, von der lediglich $\boldsymbol{\rho} \in W$ bekannt ist (vgl. Anmerkung 3.3.4). Bei der Heuristik $\mathcal{H}_{\inf}$ wird folgerichtig die klassische Maximin-Regel auf diesen Gedanken übertragen; Kenngröße $f_{\inf}(\boldsymbol{a}, W)$ ist der *schlechteste* mögliche Nutzenerwartungswert $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}$ über alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\boldsymbol{p} \in W$.[4] Insofern realisiert diese Heuristik die größtmögliche denkbare Aversion gegenüber der Ungewissheit, es wird der ungünstigste Fall unterstellt.

[3] Da Wahrscheinlichkeitsinformationen stets beschränkt sind (vgl. Bemerkung 3.3.8) und eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn diese sowohl beschränkt als auch abgeschlossen ist (vgl. [Fra60, S. 67]), fallen für Wahrscheinlichkeitsinformationen die Eigenschaften der Kompaktheit und der Abgeschlossenheit zusammen.

[4] Tatsächlich entspricht die Heuristik $\mathcal{H}_{\inf}$ eher einer *Mischung* aus dem Bernoulli-Prinzip und der Maximin-Regel: Die "Risiko-Komponenten" werden durch das Bernoulli-Prinzip erfasst (die Bildung des Erwartungsnutzen $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}$ als relevante Bewertung), die "Ungewissheits-Komponenten" durch das Maximin-Prinzip (die Maximierung des minimalen Erwartungsnutzens).

Im Sinne der NL-Mengen (vgl. Definition 3.4.18) lässt sich die Heuristik $\mathcal{H}_{\inf}$ wie folgt interpretieren: Der NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ wird der minimale Nutzenerwartungswert (genauer: das Infimum) über alle NL-Lotterien $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p} \rangle \in \langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ zugeordnet. Auf eine axiomatische Begründung dieses wichtigen Prinzips gehen wir im nächsten Abschnitt (Abschnitt 5.3) näher ein.

Anmerkung 5.2.9 Die Heuristik $\mathcal{H}_{\sup}$ ist analog motiviert wie $\mathcal{H}_{\inf}$, wiederum wird angenommen, dass eine wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho} \in W$ existiert. Im Gegensatz zu $\mathcal{H}_{\inf}$ – hier wurde vom ungünstigsten Fall ausgegangen – ist nun jedoch der *günstigste* Fall maßgebend für die Bewertung der Alternativen.[5] Dies entspricht einer Übertragung der klassischen Maximax-Regel. Der NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ wird der maximale Nutzenerwartungswert (genauer: das Supremum) über alle NL-Lotterien $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p} \rangle \in \langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ zugeordnet.

Anmerkung 5.2.10 Sei $\mathcal{H}$ eine durch $f_{\mathcal{H}}$ induzierte Heuristik, $(A, W) \in \mathbb{E}$ ein Entscheidungsproblem und $\boldsymbol{a} \in A$ eine Alternative. Der Wert $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W)$ kann als *ordinaler* Nutzenwert betrachtet werden, der bezüglich der Heuristik $\mathcal{H}$ der NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ (also der Alternative $\boldsymbol{a}$ basierend auf dem "Informationsstand" W) zugeordnet wird. Diese Nutzenwerte erlauben nun den Vergleich von NL-Mengen $\langle \boldsymbol{a_1}, W \rangle$, $\langle \boldsymbol{a_2}, W \rangle$ (mit $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in A$) und damit das Lösen des Entscheidungsproblems (A, W).

Zunächst stehen diese Nutzenwerte allerdings in *keinem* Zusammenhang zu den (Bernoulli-)Nutzenwerten, die auf den Ergebnissen definiert sind (und implizit in unser Modell eingehen) und den Erwartungsnutzenwerten $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}$ für NL-Lotterien $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p} \rangle$ (mit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}^{(n)}$). Demzufolge wir durch die Funktion $f_{\mathcal{H}}$ "nur" für festes $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ eine ordinale Nutzenfunktion (und damit eine Präferenzrelation) auf der Menge der Alternativen $\mathbb{R}^n$ definiert.

Natürlich wäre es im Prinzip wünschenswerter, die Präferenzen des Agenten von Ergebnissen und Lotterien jetzt auf NL-Mengen fortzusetzen. Durch einen axiomatischen Ansatz könnte die Menge der "rationalen" Funktionen $f_{\mathcal{H}}$ (unter der Voraussetzung, dass die Funktionswerte von $f_{\mathcal{H}}$ als Bernoulli-Nutzenwerte interpretiert werden) definiert werden. Wir möchten einen solchen Ansatz zwar nicht weiter verfolgen[6], jedoch kurz dieses Vorgehen aufgreifen um die besondere Relevanz der Funktionen $f_{\inf}$ und $f_{\sup}$ hervorzuheben. Wird der Funktionswert $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W)$ als Bernoulli-Nutzen der NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ interpretiert, so ist der Funktions-

[5] "Es war der populäre Leibniz, der die Lehre von der besten aller möglichen Welten erfand (die F.H. Bradley mit dem grimmigen Kommentar versah »und alles in ihr ist notwendig schlecht«)..." (Bertrand Russell).

[6] Wir möchten diesen Ansatz nicht weiter verfolgen, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde, gleichzeitig aber keinen integralen Bestandteil des Lazy Decision Making darstellt. Dennoch haben erste Schritte in diese Richtung gezeigt, dass hierdurch das Entscheiden unter Ungewissheit (und auch das Entscheiden bei partieller Information) auf ein wesentlich solider untermauerteres Fundament gestellt werden kann als dies in der klassischen Theorie möglich ist. Zwar müssen natürlich letztendlich ähnliche Voraussetzungen getroffen werden, diese erscheinen jedoch wesentlich klarer (in einer präzisen Formulierung als Axiome) und es lässt sich insbesondere leichter über alternative Voraussetzungen nachdenken (indem Axiome modifiziert werden).

wert $f_{\inf}(\boldsymbol{a}, W)$ eine *untere* Schranke für "sinnvolle" Werte $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W)$ und analog $f_{\sup}(\boldsymbol{a}, W)$ eine entsprechende *obere* Schranke. Es sollte also

$$f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W) \in [f_{\inf}(\boldsymbol{a}, W), f_{\sup}(\boldsymbol{a}, W)]$$

für alle $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ und alle $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ gelten (für die der Wert $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W)$ definiert ist). Die Begründung für diese Forderung liegt auf der Hand: Wird der Wert $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W)$ als Bernoulli-Nutzen interpretiert, so sollte dieser im Intervall der möglichen realisierten Erwartungsnutzen der Alternative $\boldsymbol{a}$ liegen. (Dies könnte als ein Axiom in die weiter oben angesprochene axiomatische Charakterisierung "rationaler" Funktionen $f_{\mathcal{H}}$ einfließen.)

Anmerkung 5.2.11 Die Heuristik $\mathcal{H}_\lambda$ ist an das Hurwicz-Prinzip angelehnt. Wie oben erwähnt, sollte die Nutzen-Bewertung $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W)$ einer Alternative $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ (sofern diese tatsächlich als Bernoulli-Nutzen interpretiert wird) im Intervall $[f_{\inf}(\boldsymbol{a}, W), f_{\sup}(\boldsymbol{a}, W)]$ liegen. Die Funktion f_λ realisiert gerade eine gewichtete Summe zwischen unterer und oberer Intervallgrenze, λ ist damit – wie auch im klassischen Fall – ein Optimismusparameter. Offenbar ergeben sich für $\lambda = 1$ gerade $f_{\sup}(\boldsymbol{a}, W)$ und für $\lambda = 0$ entsprechend $f_{\inf}(\boldsymbol{a}, W)$. Grundlage der Heuristik $\mathcal{H}_\lambda$ ist demzufolge eine gewichtete Summe des Erwartungsnutzen im *günstigsten Fall* (Gewicht λ) und des Erwartungsnutzens im *ungünstigsten Fall* (Gewicht $(1 - \lambda)$), sofern die Standardinterpretation "$\boldsymbol{\rho} \in W$" für Wahrscheinlichkeitsinformationen unterstellt wird (vgl. Anmerkung 3.3.4).[7]

Anmerkung 5.2.12 Für Entscheidungsprobleme unter Ungewissheit $(A, W) \in$ ungewissheit$(\mathbb{E})$ entsprechen $\mathcal{H}_{\inf}$ der Maximin-Regel, $\mathcal{H}_{\sup}$ der Maximax-Regel und $\mathcal{H}_\lambda$ dem Hurwicz-Prinzip.

5.3 Das MaxE$_{\text{min}}$-Prinzip

Anmerkung 5.3.1 Wir gehen hier etwas detaillierter auf das MaxE$_{\text{min}}$-Prinzip ein, da diesem im Rahmen der Theorie der linearen partiellen Information ein besonderer Stellenwert zukommt.

Definition 5.3.2 (E$_{\text{min}}$-Axiom) Folgende Annahme bezeichnen wir als **E$_{\text{min}}$-Axiom**:[8] Für eine beliebige NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ (mit $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$, W kompakt, $W \neq \emptyset$ und $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$) ist der Agent indifferent zwischen dieser NL-Menge und jeder NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, \{\boldsymbol{p}\} \rangle$ mit

$$\boldsymbol{p} \in \arg \inf_{\boldsymbol{p} \in W} \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p}.$$

[7] An dieser Stelle sei auf eine gewisse Gefahr hingewiesen: Mit dem günstigsten Fall (und analog auch dem ungünstigsten Fall) ist hier nicht der günstigste *Zustand* gemeint sondern die günstigste *Wahrscheinlichkeitsverteilung* auf der Zustandsmenge.

[8] In der uns bekannten Literatur hat dieses Axiom keinen Namen. Die Bezeichnung E$_{\text{min}}$ soll knapp die Bedeutung des Axioms zusammenfassen; der Agent bewertet eine NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ nach dem *minimalen Erwartungsnutzen* $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p}$, der bezüglich Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\boldsymbol{p} \in W$ resultieren kann. Sinngemäß findet sich das Axiom in [KM76, S. 140].

Anmerkung 5.3.3 Akzeptiert der Agent das $\mathrm{E_{min}}$-Axiom, so bewertet er offensichtlich in einem Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit kompaktem W die Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ gemäß dem Wert

$$f_{\text{inf}}(\boldsymbol{a}, W) = \inf\{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p} \in W\} = \min\{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p} \in W\}.$$

Demzufolge *muss* er dann – als Gebot der Rationalität[9] – eine der Alternativen aus $\mathcal{H}_{\min}(A, W)$ wählen und bezüglich derer indifferent sein. Insofern ist die $\mathrm{MaxE_{inf}}$-Regel (bzw. $\mathrm{MaxE_{min}}$-Regel) eine natürliche Konsequenz des $\mathrm{E_{min}}$-Axioms.

Anmerkung 5.3.4 Kofler und Menges belegen mit einigen Beispielen aus der Spieltheorie, der semantischen Informationstheorie und der Sensitivitätsanalyse, dass nur das $\mathrm{MaxE_{min}}$-Prinzip ...

> „... gewährleistet, wesentliche Begriffe wie den des Wertes der Entscheidungssituation und den des semantischen Informationswertes einzuführen. Auch Sensitivitätsanalysen sind unter LPI-Bedingungen nur aufgrund des $\mathrm{MaxE_{min}}$-Prinzips möglich.“ ([KM76, Seite 141])[10]

Wir möchten diese Behauptung nicht bewerten, da dies nicht Gegenstand unserer Arbeit sein soll und insbesondere nicht in knapper Form möglich scheint.

Dennoch sei zumindest darauf hingewiesen, dass andere Autoren für ähnliche Entscheidungssituationen die Sinnhaftigkeit *anderer* Heuristiken plausibilisiert haben – der Streit um die “wahre” Heuristik ist also alles andere als entschieden.[11] Insbesondere bleibt fraglich, ob eine solche “wahre” Heuristik wirklich existiert oder ob nicht vielmehr verschiedene Agenten aufgrund verschiedener Einstellungen zur Ungewissheit zu verschiedenen Heuristiken gelangen können, dabei aber alle “rational” handeln.

5.4 Das Prinzip der maximalen Entropie

Anmerkung 5.4.1 Der Begriff der *Entropie* wurde in der Informationstheorie von Claude Elwood Shannon eingeführt um ein Maß für die mit einer Nachricht übermittelte Information bereitzustellen (vgl. [SW49]).[12] Es sei $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in$

[9] Rationalität ist hier in dem Sinne zu verstehen, dass der Agent mit dem Akzeptieren eines Axioms auch alle daraus resultierenden Folgerungen anerkennen muss. Aus der Akzeptanz des $\mathrm{E_{min}}$-Axiom folgt die Bewertung von NL-Mengen gemäß f_{inf}.

[10] LPI-Bedingungen meint dabei (im Sinne unseres Modells), dass die Wahrscheinlichkeitsinformation W im Entscheidungsproblem (A, W) linear ist.

[11] Zum Beispiel verdeutlicht Paris auf einem soliden mathematischen Fundament die zentrale Bedeutung des Prinzips der maximalen Entropie (vgl. Abschnitt 5.4 sowie [Par94]). Allerdings bezieht sich seine Argumentation auf *Inferenzprozesse* und kann nur eingeschränkt auf Heuristiken übertragen werden (vgl. Anmerkung 5.4.6).

[12] Der Begriff der Entropie wurde 1850 von Rudolf Julius Emmanuel Clausius (1822-1888) als Zustandsgröße der Wärmelehre (2. Hauptsatz der Wärmelehre) eingeführt. Die statistische Interpretation der (thermodynamischen) Entropie S als $S = k \ln W$ (mit W: statistisches Gewicht eines makroskopischen Zustands, k: Boltzmann-Konstante) geht auf den Physiker Ludwig Boltzmann (1844-1906) zurück. Claude Elwood Shannon (1916-2001) hat das Konzept der Entropie in die Informationstheorie übertragen.

$\mathbb{S}^{(n)}$ eine (diskrete) Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dann ist die Entropie $\mathrm{H}(\boldsymbol{p})$ dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p}$ definiert durch

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{p}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i,$$

wobei log den Logarithmus zur Basis 2 bezeichnet und formal $0 \log 0 := 0$ gesetzt wird.

Im Prinzip misst die Entropie einer diskreten Zufallsvariablen (definiert als Entropie der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilung) die Information, welche die Beobachtung der Realisierung der Variablen dem Betrachter liefert.[13]

Anmerkung 5.4.2 Man kann die Entropie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung als ein Maß der Unsicherheit interpretieren: Die Entropie nimmt ihren maximalen Wert für eine Gleichverteilung an (absolute Unsicherheit bezüglich des Auskommens) und ist minimal für eine entartete Verteilung, bei der eine Realisierung die Wahrscheinlichkeit Eins hat (Sicherheit).

Anmerkung 5.4.3 Das Prinzip der maximalen Entropie stellt eine separable Heuristik dar. Die grundlegende Idee ist, bei einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsinformation W eine spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p} \in W$ auszuzeichnen und alle Alternativen anhand ihres Erwartungsnutzens bezüglich dieser Wahrscheinlichkeitsinformation $\boldsymbol{p}$ zu bewerten. Dabei wird gerade diejenige Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p} \in W$ ausgewählt, welche die maximale Entropie aufweist. Motivation für dieses Vorgehen ist, dass hierdurch die wenigsten zusätzlichen Annahmen eingebracht werden. Denn letztlich wird dem *Prinzip des unzureichenden Grundes* (vgl. [dL14]) folgend gerade die der Gleichverteilung $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ "nächstgelegene" Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p}$ aus der Wahrscheinlichkeitsinformation W ausgewählt und diese hat einen minimalen "Informationsgehalt".

Definition 5.4.4 (Prinzip der maximalen Entropie) Für alle $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ mit $W \neq \emptyset$ und alle $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ sei $f_{\mathrm{MaxEntropy}}$ definiert durch

$$f_{\mathrm{MaxEntropy}}(\boldsymbol{a}, W) := \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p}^*, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{p}^* \in \arg\max_{\boldsymbol{p} \in W} \mathrm{H}(\boldsymbol{p}).[14]$$

Es sei $\mathcal{H}_{\mathrm{MaxEntropy}}$ die durch $f_{\mathrm{MaxEntropy}}$ induzierte Heuristik.

[13] Eine ausführliche Diskussion verschiedener Maßgrößen für Unsicherheits-basierte Information findet sich in [KW98].

[14] Im Falle einer mehrelementigen Menge $P = \arg\max_{\boldsymbol{p} \in W} \mathrm{H}(\boldsymbol{p})$ muss durch eine geeignete Maßnahme für die Eindeutigkeit von $\boldsymbol{p}^*$ gesorgt werden, etwa durch Definition einer Ordnung auf der Menge $\mathbb{S}^{(n)}$ und Auswahl des bezüglich dieser Ordnung kleinsten $\boldsymbol{p}^*$ aus P. Alternativ kann die Definition wie folgt modifiziert werden:

$$f_{\mathrm{MaxEntropy}}(\boldsymbol{a}, W) := \sup\{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p}^* \mid \boldsymbol{p}^* \in \arg\max_{\boldsymbol{p} \in W} \mathrm{H}(\boldsymbol{p})\}.$$

Anmerkung 5.4.5 Auch das Prinzip der maximalen Entropie lässt sich natürlich basierend auf einem Axiom darstellen (vgl. Definition 5.3.2). Hier würde man unterstellen, dass der Agent einer Wahrscheinlichkeitsinformation W eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p}^* \in W$ maximaler Entropie zuordnet (siehe auch sinngemäß Fußnote 14) und alle NL-Mengen $\langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ bzw. Alternativen $\boldsymbol{a}$ gerade anhand ihres Erwartungsnutzens $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}^*$ bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p}^*$ bewertet.

Anmerkung 5.4.6 Den Heuristiken sehr ähnlich sind *Inferenzprozesse*, allerdings haben diese nicht den direkten Bezug zu einem entscheidenden Agenten sondern sollen eher allgemein anwendbar bleiben.[15] Jeffrey B. Paris definiert eine Reihe von Prinzipien, denen ein "vernünftiger" Inferenzprozess genügen sollte und zeigt, dass ausschließlich das Prinzip der maximalen Entropie diesem Anspruch gerecht wird (vgl. [Par94]). Dieses Resultat ist zwar ein *Hinweis* darauf, dass dem Prinzip der maximalen Entropie eine wichtige Bedeutung zukommt, kann jedoch nicht ohne weiteres auf Heuristiken übertragen werden!

Anmerkung 5.4.7 Obwohl das Prinzip der maximalen Entropie zweifelsohne einige Vorteile aufweist (siehe Anmerkung 5.4.6, wir verzichten auf deren Darstellung), finden sich auch etliche kritische Stimmen. So bezweifelt etwa Hartmut Wollenhaupt die Rationalität dieses Prinzips ([Wol82]), da nicht einzusehen sei, warum ein rationaler Agent gerade die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p}^* \in W$ mit der maximalen Entropie als Beurteilungsgrundlage verwenden sollte.

Anmerkung 5.4.8 Es gibt eine Reihe weiterer (separabler) Heuristiken, die sich analog zu dem Prinzip der maximalen Entropie definieren lassen (also durch Auszeichnung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung). Beispielsweise kann anstelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der maximalen Entropie das Massenzentrum der Wahrscheinlichkeitsinformation als Grundlage für die Bewertung der Alternativen ausgewählt werden. Die hinter diesem Verfahren liegende Idee ist, dass diese Wahrscheinlichkeitsverteilung möglicherweise besonders repräsentativ ist (vgl. [Par94, 69-76]). Eine echte Rechtfertigung dieses Ansatzes erscheint allerdings schwierig.

5.5 Nicht separable Heuristiken

Anmerkung 5.5.1 Im Gegensatz zu den separablen Heuristiken ist bei den *nicht separablen* Heuristiken die Kenngröße einer Alternative $\boldsymbol{a}$ nicht nur abhängig von der Wahrscheinlichkeitsinformation W sondern auch von der im aktuellen Entscheidungsproblem vorliegenden Alternativenmenge A. Insofern ist auch die einer NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ zur Beurteilung zugewiesene Kenngröße zusätzlich von der Alternativenmenge A abhängig und wir können nicht – zumindest nicht ohne weiteres – von dem "Nutzen" der NL-Menge sprechen (vgl. Anmerkung 5.2.10).[16]

[15] Wir belassen es bei dieser "schwammige" Abgrenzung, da wir Inferenzprozesse nicht näher betrachten. Wichtig ist, dass aufgrund des Bezugs zu einem handelnden Agenten das Konzept des Bernoulli-Nutzens nicht (zumindest nicht direkt) anwendbar ist.

[16] Wollte man dieses Konzept dennoch anwenden, so könnte man zumindest für *festes A* die Kenngröße als ordinales Nutzenmaß interpretieren.

Charakterisierend für die nicht separablen Heuristiken ist also, dass die Bewertung einer Alternative (genauer: einer NL-Menge) *relativ* zu den anderen vorliegenden Alternativen (der Alternativenmenge) geschieht.

Definition 5.5.2 (Induzierende einer nicht separablen Heuristik) Wir nennen $f_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \dashrightarrow \mathbb{R}$ eine **Induzierende** der nicht separablen Heuristik $\mathcal{H}$, wenn für alle $(A, W) \in \mathbb{E}$ gilt

$$\mathcal{H}(A, W) = \{\boldsymbol{a} \in A \,|\, f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W, A) = \max\{f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a'}, W, A) \,|\, \boldsymbol{a'} \in A\}\}$$

sofern $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W, A)$ für alle $\boldsymbol{a} \in A$ definiert ist und $\mathcal{H}(A, W) = \perp$ sonst.

Anmerkung 5.5.3 Trivialerweise existieren auch für separable Heuristiken Induzierende im Sinne von Definition 5.5.2. Dennoch werden wir diesen Typus von Induzierenden ausschließlich für nicht separable Heuristiken verwenden, da im Falle der separablen Heuristiken die Abhängigkeit von der Alternativenmenge entfällt und sich daher strukturell einfachere induzierende Funktionen ergeben (vgl. Definition 5.2.3).

Bemerkung 5.5.4 Für *jede* Heuristik $\mathcal{H}$ existiert eine Induzierende $f_{\mathcal{H}}$.

Beweis. Sei $\mathcal{H}$ eine beliebige Heuristik. Für jedes $(A, W) \in \mathbb{E}$ und $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ sei

$$f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{a}, W, A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathcal{H}(A, W) \neq \perp \text{ und } \boldsymbol{a} \notin \mathcal{H}(A, W) \\ 1 & \text{falls } \boldsymbol{a} \in \mathcal{H}(A, W) \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}.$$

Diese Funktion $f_{\mathcal{H}}$ ist eine Induzierende der Heuristik $\mathcal{H}$. $\square$

Definition 5.5.5 (Verallgemeinerte Savage-Niehans-Regel) Es sei die Funktion $f_{\text{MinRegret}}$ für alle $(A, W) \in \mathbb{E}$ und alle $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f_{\text{MinRegret}}(\boldsymbol{a}, W, A) := -\sup\{\boldsymbol{a'}^T \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W, \boldsymbol{a'} \in A\}.$$

Die durch $f_{\text{MinRegret}}$ induzierte Heuristik sei $\mathcal{H}_{\text{MinRegret}}$.

Anmerkung 5.5.6 Auch dieser Heuristik liegt die Annahme zu Grunde, dass eine wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ existiert, von der lediglich $\boldsymbol{\rho} \in W$ bekannt ist (vgl. Annahme 3.3.4). Der "Wert des Bedauerns" bei Wahl von Alternative $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ misst sich am entgangenen maximal erzielbaren Erwartungsnutzen und damit als

$$\sup\{\boldsymbol{a'}^T \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{\rho} \,|\, \boldsymbol{a'} \in A\}.$$

Da jedoch von der wahren Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ nur $\boldsymbol{\rho} \in W$ bekannt ist, wird zudem das Supremum über alle $\boldsymbol{p} \in W$ gebildet. Auszuwählen ist eine derjenigen Alternativen, die das Bedauern *minimieren.*

Sowohl in Definition 5.2.3 als auch in Definition 5.5.2 bestimmt sich das Ergebnis $\mathcal{H}(A, W)$ einer Heuristik $\mathcal{H}$ als Menge derjenigen Alternativen $\boldsymbol{a} \in A$, welche eine

Kenngröße $f_{\mathcal{H}}$ *maximieren*. Insofern negieren wir das Maß des Bedauerns um zu einem ordinalen Nutzenmaß $f_{\text{MinRegret}}(\boldsymbol{a}, W, A)$ zu gelangen, das es zu maximieren gilt.[17]

Die Heuristik $\mathcal{H}_{\text{MinRegret}}$ basiert auf der Idee, das mögliche Bedauern über alle zu Verfügung stehenden Alternativen $\boldsymbol{a} \in A$ zu minimieren, verallgemeinert also den Ansatz der SAVAGE-NIEHANS-Regel. Insbesondere stimmt sie (erwartungsgemäß) für Entscheidungsprobleme unter Ungewissheit $(A, W) \in \text{ungewissheit}(\mathbb{E})$ mit dieser überein.

Bemerkung 5.5.7 Die verallgemeinerte SAVAGE-NIEHANS-Regel ist *nicht* separabel.

Beweis. Wir nehmen an, $\mathcal{H}_{\text{MinRegret}}$ wäre separabel. Dann existiert definitionsgemäß eine induzierende Funktion $f_{\text{MinRegret}} : \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)}) \dashrightarrow \mathbb{R}$ für $\mathcal{H}_{\text{MinRegret}}$ mit den in Definition 5.2.3 dargelegten Eigenschaften.

Wir betrachten nun das Entscheidungsproblem $(A_1, W) \in \mathbb{E}$ mit $W = \mathbb{S}^{(n)}$ und $n = 2$. Die Alternativenmenge A_1 sei gegeben durch $A_1 = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ mit $\boldsymbol{a_1} = (10, 10)$ und $\boldsymbol{a_2} = (15, 6)$. Es lässt sich sehr leicht zeigen, dass $\mathcal{H}_{\text{MinRegret}}(A_1, W) = \{\boldsymbol{a_2}\}$ gilt, also

$$f_{\text{MinRegret}}(\boldsymbol{a_2}, W) > f_{\text{MinRegret}}(\boldsymbol{a_1}, W).$$[18]

Wir gehen nun über zu dem Entscheidungsproblem (A_2, W) mit $A_2 = A_1 \cup \{\boldsymbol{a_3}\}$ und $\boldsymbol{a_3} = (0, 12)$. Wiederum lässt sich sehr leicht zeigen, dass jetzt $\mathcal{H}_{\text{MinRegret}}(A_2, W) = \{\boldsymbol{a_1}\}$ gilt, woraus unmittelbar

$$f_{\text{MinRegret}}(\boldsymbol{a_1}, W) > f_{\text{MinRegret}}(\boldsymbol{a_2}, W)$$

folgt.[19]

Aufgrund der sich widersprechenden beiden Ungleichungen können wir schließen, dass die Annahme falsch war, $\mathcal{H}_{\text{MinRegret}}$ also nicht separabel ist. □

5.6 Ordered Weighted Average (OWA) Heuristiken

Anmerkung 5.6.1 Wir möchten nun noch eine ganze Klasse von Heuristiken vorschlagen, welche auf einer ursprünglich von RONALD YAGER stammenden Idee basiert. Vorgeschlagen wurden die sogenannten *Ordered Weighted Averages* (bzw. Ordered Weighted Averaging Operators) zunächst in einem anderen Zusammenhang, nämlich als Aggregationsoperatoren im Bereich der Fuzzy Mengen.[20] Bereits YAGER selbst hat jedoch ihr Potenzial für die Entscheidungsfindung unter Unsicherheit erkannt (vgl. [YK97]).

[17] Das negierte Maß des Bedauerns stellt ein Maß der "Freude" dar.

[18] Der maximale entgangene Erwartungsnutzen bei Auswahl von $\boldsymbol{a_2}$ (im Entscheidungsproblem (A_1, W)) beträgt 4 Nutzeneinheiten verglichen mit 5 Nutzeneinheiten im Falle von $\boldsymbol{a_1}$.

[19] Der maximale entgangene Erwartungsnutzen bei Auswahl von $\boldsymbol{a_1}$ (im Entscheidungsproblem (A_2, W)) beträgt 5 Nutzeneinheiten verglichen mit 6 Nutzeneinheiten im Falle von $\boldsymbol{a_2}$.

[20] Mit Hilfe eines Fuzzy-Aggregationsoperators kann aus n gegebenen Zugehörigkeitswerten ein aggregierter Zugehörigkeitswert (z.B. eine Art Mittelwert) berechnet werden (vgl. [KY95]).

Allerdings beschränken sich seine diesbezüglichen Ausführung auf die Verwendung von geordneten gewichteten Summen (OWAs) für das Entscheiden im Rahmen der Evidenztheorie ([YK97, 123-138]) wohingegen wir eine wesentlich natürlichere Anwendung beim *Entscheiden bei partieller Information* sehen.[21] Des Weiteren belassen wir es nicht bei der reinen Definition einer durch ein OWA-Kriterium induzierten Heuristik, sondern formalisieren die Konzepte und beginnen mit dem Aufbau einer Theorie, welche wesentlich weiterreichende Ideen verwirklicht wie etwa die Verknüpfung von OWA-Kriterien oder das – zumindest angedacht – Konzept der uniformen Erzeugung.[22]

Anmerkung 5.6.2 Für die nachfolgenden Ausführungen ist essentiell, dass W eine endliche Anzahl von Extrempunkten hat. Insofern müssen wir die Menge der zu betrachtenden Wahrscheinlichkeitsinformationen auf eine echte Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)})$ einschränken. Da *lineare* Wahrscheinlichkeitsinformationen die Grundlage des gesamten LAZY DECISION MAKING bilden (und offenbar der Forderung endlich vieler Extrempunkte genügen), befassen wir uns im Rahmen dieses Abschnitts ausschließlich mit dieser wichtigen Klasse.[23]

Anmerkung 5.6.3 Man kann die Idee der OWAs relativ einfach ausgehend von den klassischen Heuristiken für das Entscheiden unter Ungewissheit nachvollziehen. Idee der Maximin-Regel ist, für jede Alternative ausschließlich das *schlechteste* Ergebnis zu berücksichtigen. Demgegenüber betrachtet man bei Anwendung der Maximax-Regel alleinig das *beste* Ergebnis. Das HURWICZ-Kriterium verallgemeinert beide Ansätze indem die gewichtete Summe aus *beiden* Maßen gebildet wird.

Idee der OWAs ist, noch stärker zu verallgemeinern und damit die Bewertung auf eine "noch breitere Basis" zu stellen. Anstatt nur das beste und schlechteste Ergebnis zu betrachten, werden *mehrere* (dazu später mehr) Ergebnisse einbezogen. Diese werden zunächst gemäß der Präferenzordnung sortiert (in der Reihenfolge aufsteigender Nutzenwerte) und dann in Form einer gewichteten Summe zusammengefasst. Jene gewichtete Summe ist letztendlich die Bewertung einer Alternative (genauer: einer NL-Menge); ausgewählt wird eine derjenigen Alternativen mit dem maximalen Summenwert.

[21] Wir werden im Unterabschnitt 6.5.3 von Kapitel 6 zeigen, dass der evidenztheoretische Ansatz zur quantitativen Modellierung des dem Agenten vorliegenden Wissens über den eintretenden Umweltzustand ein Spezialfall unseres Modells darstellt.

[22] Die Ausführungen von YAGER in [YK97, 123-138] beschränken sich auf die Definition der OWA-Heuristik für die Evidenztheorie; dies entspricht von der Idee her ungefähr Definition 5.6.5 zusammen mit Definition 5.6.7 in unserer Arbeit. Allerdings zielen unsere Definitionen auf Entscheidungsprobleme bei *partieller Information* ab und wir nehmen zudem N (siehe dazu die entsprechenden Definitionen) nicht als konstant an, wodurch die Darstellung etwas umständlicher (wir benötigen eine Funktionen*folge*), gleichzeitig aber auch wesentlich allgemeiner wird. Wir haben dennoch den auf YAGER zurückgehenden Namen OWA (für *ordered weighted average*) aufgegriffen, da zumindest die Kernidee dieselbe ist.

[23] Eine Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ mit endlich vielen Extrempunkten ist genau dann linear, wenn W abgeschlossen und konvex ist. Wir verzichten auf den relativ einfachen Beweis dieser Charakterisierung, da wir sie im Folgenden nicht benötigen werden.

Anmerkung 5.6.4 Wir stellen nun Ansätze einer Theorie der OWA-Kriterien für das Entscheiden bei linearer partieller Information vor, ohne diese jedoch bis ins Detail ausführen zu wollen.[24] Die dabei eingeführten OWA-Heuristiken können im Rahmen des LAZY DECISION MAKING eingesetzt werden, sind dort allerdings nicht von derart zentraler Bedeutung wie dies beim einstufigen (nicht dynamischen) Entscheiden der Fall ist.

Definition 5.6.5 (OWA-Kriterium, Normalität) Ein **OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi}$** ist eine Funktionenfolge $\boldsymbol{\phi} = (\phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ mit $\phi_N : \{1,\ldots,N\} \to \mathbb{R}$ für alle $N \in \mathbb{N}$.[25] Wir nennen **$\boldsymbol{\phi}$ normal**, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{N} \phi_N(j) = 1 \quad \text{und} \quad \phi_N(j) \in [0,1] \text{ für } j = 1,\ldots,N.$$

Anmerkung 5.6.6 Wir werden den Begriff der Normalität eines OWA-Kriteriums im Folgenden nicht weiter benötigen. Es sei jedoch darauf hingewiesen (und deshalb haben wir die Definition überhaupt aufgenommen), dass *alle* nachfolgend eingeführten OWA-Kriterien normal sind. Die Sinnhaftigkeit nicht-normaler OWA-Kriterien liegt zumindest nicht unmittelbar auf der Hand und wir verzichten auf eine Diskussion dieser Fragestellung.

Definition 5.6.7 (OWA-Induzierende, OWA-Heuristik) Sei $\boldsymbol{\phi} = (\phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ein OWA-Kriterium. Die Funktion $f_{\boldsymbol{\phi}} : \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)}) \dashrightarrow \mathbb{R}$ sei für $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ und lineares $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ (zu interpretieren als NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W\rangle$) definiert durch

$$f_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{a}, W) := \sum_{i=1}^{N} \phi_N(i)\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\pi(i)}}. \tag{5.1}$$

Dabei seien $\boldsymbol{p_1},\ldots,\boldsymbol{p_N}$ die Extrempunkte von W und $\pi : \{1,\ldots,N\} \to \{1,\ldots,N\}$ eine Permutation, so dass

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}_{\pi(1)} \leq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}_{\pi(2)} \leq \ldots \leq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}_{\pi(N)}$$

gilt.[26] Die Funktion $f_{\boldsymbol{\phi}}$ bezeichnen wir als **OWA-Induzierende**, die induzierte (separable) Heuristik $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\phi}}$ als **OWA-Heuristik** (vgl. Definition 5.2.3).

Anmerkung 5.6.8 Obwohl diese Definition einer OWA-Heuristik zunächst etwas unhandlich wirken mag, ist die Grundidee doch sehr einfach. Zunächst werden

[24] Im Prinzip könnte man mit dem Aufbau einer Theorie der OWA-Kriterien vermutlich ein komplettes Buch füllen. Da jedoch im Rahmen des LAZY DECISION MAKING Heuristiken nur eines von mehreren beteiligten Elementen darstellen, haben wir die Entwicklung der Theorie auf einen uns angemessen erscheinenden Umfang beschränkt.

[25] Wir weichen hier formal sehr stark von den Ausführungen von YAGER ab um das Konzept der ordered weighted averages allgemein (nicht nur für festes N) behandeln zu können.

[26] Die "sortierende" Permutation π ist nicht notwendigerweise eindeutig bestimmt. Dennoch ist aber der Wert $f_{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{a}, W)$ wohldefiniert, denn für jede "sortierende" Permutation π resultiert offenbar derselbe Wert in der definierenden Gleichung (5.1).

die Extrempunkte der linearen Wahrscheinlichkeitsinformation bestimmt. Grundlegende Idee ist, dass diesen Extrempunkten ein besonderer Stellenwert zukommt.[27] Soll nun eine Alternative $\boldsymbol{a}$ bewertet werden, so werden zunächst die Extrempunkte in der Reihenfolge aufsteigender Nutzenerwartungswerte (bezüglich $\boldsymbol{a}$) sortiert. (Technisch wird dies mit einer geeigneten Permutation π realisiert.) Schließlich wird die gewichtete Summe dieser N Nutzenerwartungswerte gebildet, wobei die dazu notwendigen Gewichte aus dem OWA-Kriterium stammen. Da die Anzahl N der Extrempunkte abhängig von der linearen Wahrscheinlichkeitsinformation W ist (und beliebig groß werden kann), wurde das OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi}$ als Funktionenfolge $(\phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eingeführt, welche für *jedes* N eine entsprechende Gewichtungsfunktion ϕ_N bereit stellt.

Beispiel 5.6.9 Sei $\boldsymbol{\phi}^{\min} = (\phi_N^{\min})_{N\in\mathbb{N}}$ definiert durch $\phi_N^{\min}(1) = 1$ und $\phi_N^{\min}(i) = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und $i = 2, \ldots, N$. Die induzierte Heuristik $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\phi}^{\min}}$ entspricht dem MaxE$_{\min}$-Prinzip bzw. der zugehörigen Heuristik $\mathcal{H}_{\min}$ (eingeschränkt auf die Menge der linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen).[28]

Analog erhält man für $\boldsymbol{\phi}^{\max} = (\phi_N^{\max})_{N\in\mathbb{N}}$, definiert durch $\phi_N^{\max}(N) = 1$ und $\phi_N^{\max}(i) = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, N-1$, als induzierte Heuristik $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\phi}^{\max}}$ die zur MaxE$_{\max}$-Regel gehörende Heuristik $\mathcal{H}_{\max}$.

Eine $\mathcal{H}_\lambda$ entsprechende Heuristik (wiederum eingeschränkt auf die Menge der linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen) lässt sich durch das OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi}^\lambda = (\phi_N^\lambda)_{N\in\mathbb{N}}$ induzieren, wobei $\phi_1^\lambda(1) = 1$ und

$$\phi_N^\lambda(i) = \begin{cases} (1-\lambda) & \text{falls } i = 1 \\ 0 & \text{falls } 1 < i < N \\ \lambda & \text{falls } i = N \end{cases}$$

für alle $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $i = 1, \ldots, N$. Der Parameter $\lambda \in [0,1]$ spiegelt wie üblich den Optimismus des Agenten wider; für $\lambda = 1$ ergibt sich das OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi}^{\max}$ und für $\lambda = 0$ das OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi}^{\min}$.

Anmerkung 5.6.10 Obwohl die Definition im Grunde vollkommen voneinander unabhängige Funktionen ϕ_i, ϕ_j, $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ für ein OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi} = (\phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ erlauben würde, sollten diese dennoch "normalerweise" in einem engen Zusammenhang stehen, wie dies etwa in allen Beispielen der Fall war (und auch sein wird). Ein besonders enger Zusammenhang wird durch die in Anmerkung 5.6.24 vorgeschlagene *uniforme Erzeugung* hergestellt.

[27] Dieser Gedanke liegt beispielsweise auch der verallgemeinerten LAPLACE-Regel zu Grunde, bei der man nicht über *alle* Punkte der Wahrscheinlichkeitsinformation mittelt sondern die *Extrempunkte* als gleichwahrscheinlich annimmt (vgl. [Del97, S. 149-150]).
Die besondere Bedeutung der Extrempunkte liegt darin, dass sich die gesamte Wahrscheinlichkeitsinformation gerade als konvexe Hülle der Extrempunktemenge ergibt. Insofern spielen die Extrempunkte gewissermaßen als "Erzeugende" der Wahrscheinlichkeitsinformation eine zentrale Rolle.

[28] Dies ist eine Konsequenz aus Resultat 7.2.5: Der minimale und der maximale Erwartungsnutzen werden im Falle linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen (auch) an Extrempunkten angenommen.

Anmerkung 5.6.11 Der wesentliche Vorteil der OWAs liegt in ihrer Flexibilität einerseits und andererseits darin, dass sich die herkömmlichen Heuristiken für das Entscheiden unter Ungewissheit verallgemeinern und – in Hinblick auf einen "Standardkritikpunkt" – wesentlich verbessern lassen.

Dieser Standardkritikpunkt, illustriert an der klassischen Maximin-Regel, ist, dass *ausschließlich* das schlechteste Ergebnis einer Alternative in deren Bewertung einfließt. Eine natürliche "Verbesserung" dieser Regel lässt sich durch ein OWA-Kriterium erreichen, welches zwar dem schlechtesten Ergebnis ein relativ hohes Gewicht zuweist, die anderen Ergebnisse jedoch ebenfalls mitberücksichtigt und damit insgesamt eine wesentlich breitere Basis für die Bewertung erreicht. Wir besprechen später (in Anmerkung 5.6.22) knapp ein Verfahren, um eine verallgemeinerte Maximin-Regel mit einer breiteren Basis zu gewinnen.

Anmerkung 5.6.12 Bei der Verwendung von OWA-Heuristiken ist es offenbar notwendig, die Menge der Extrempunkte einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation zu bestimmen. In Kapitel 6 werden wir näher auf die *Darstellung* linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen eingehen und dort im Rahmen von Unterabschnitt 6.3.3 die Eckpunktdarstellung einführen. Diese Darstellung macht sich zu Nutze, dass eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation durch die Menge ihrer Eckpunkte (Extrempunkte) eindeutig definiert ist (sie ist gerade die konvexe Hülle der Eckpunktmenge). Verwendet man diese Darstellung, so liegen die Extrempunkte also "automatisch" vor und müssen nicht berechnet werden. Insofern eignet sich die Eckpunktdarstellung hervorragend für die Verwendung von OWA-Heuristiken.

Definition 5.6.13 (Duales OWA-Kriterium) Gegeben sei ein OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi} = (\phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$. Das zu $\boldsymbol{\phi}$ **duale** OWA-Kriterium $\overline{\boldsymbol{\phi}}$ ist definiert durch $\overline{\boldsymbol{\phi}} = (\overline{\phi_N})_{N\in\mathbb{N}}$ mit

$$\overline{\phi_N}(i) = \phi_N(N+1-i)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, N$.

Bemerkung 5.6.14 Für jedes OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi}$ gilt $\overline{\overline{\boldsymbol{\phi}}} = \boldsymbol{\phi}$.

Beweis. trivial, da $N+1-(N+1-i) = i$ und folglich $\overline{\overline{\phi_N}} = \phi_N$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. □

Anmerkung 5.6.15 Beim Dualisieren werden gewissermaßen die Optimismus/Pessimismus-Tendenzen umgedreht: Werden im primalen OWA-Kriterium relativ schlechten Ergebnissen hohe Gewichte zugewiesen, so ordnet das duale OWA-Kriterium diese Gewichte den relativ guten Ergebnissen zu.[29] Es gilt $\overline{\boldsymbol{\phi}^{\min}} = \boldsymbol{\phi}^{\max}$ und dual dazu $\overline{\boldsymbol{\phi}^{\max}} = \boldsymbol{\phi}^{\min}$.

[29] Hierbei meint "relativ schlechte Ergebnisse", dass diese in der sortierten Folge der Erwartungsnutzen an den Extrempunkt-Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}_{\pi(1)} \leq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}_{\pi(2)} \leq \ldots \leq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}_{\pi(N)}$$

(vgl. Definition 5.6.7) einen niedrigen Rang haben. Analog haben "relativ gute Ergebnisse" einen hohen Rang.

Definition 5.6.16 (Gewichtete Summe von OWA-Kriterien) Gegeben seien $m \in \mathbb{N}$, OWA-Kriterien $\boldsymbol{\phi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\phi}^{(m)}$ mit $\boldsymbol{\phi}^{(i)} = (\phi_N^{(i)})_{N \in \mathbb{N}}$ für $i = 1, \ldots, m$, sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Die **gewichtete Summe**

$$\boldsymbol{\phi} = \lambda_1 \boldsymbol{\phi}^{(1)} + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{\phi}^{(m)}$$

ist definiert durch $\boldsymbol{\phi} = (\phi_N)_{N \in \mathbb{N}}$ mit

$$\phi_N(i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \phi_N^{(j)}(i)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, N$.

Bemerkung 5.6.17 Die gewichtete Summe normaler OWA-Kriterien ist selbst normal.

Beweis. Die Bezeichnungen seien wie in Definition 5.6.16 und die OWA-Kriterien $\boldsymbol{\phi}^{(j)}$, $j = 1, \ldots, m$ seien normal. Dann gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$ und alle $i = 1, \ldots, N$ trivialerweise $\phi_N(i) \in [0, 1]$ sowie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \phi_N(i) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \lambda_j \phi_N^{(j)}(i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^N \phi_N^{(j)}(i) \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1, \end{aligned}$$

folglich ist $\boldsymbol{\phi}$ normal. □

Anmerkung 5.6.18 Das Verfahren der Bildung gemischter Summen kann angewandt werden um aus gegebenen OWA-Kriterien neue zu gewinnen. Zusammen mit der Dualität ergibt sich bereits ein relativ mächtiges Werkzeug. So lässt sich beispielsweise die dem HURWICZ-Prinzip nachempfundene Heuristik $\mathcal{H}_\lambda$ durch das OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi}^{\min}$ und Anwendung dieser Operatoren erzeugen:

$$\boldsymbol{\phi}^\lambda = (1 - \lambda)\boldsymbol{\phi}^{\min} + \lambda \overline{\boldsymbol{\phi}^{\min}}.$$

Beispiel 5.6.19 Das OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi}^{\text{Laplace}} = (\phi_N^{\text{Laplace}})_{N \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch $\phi_N^{\text{Laplace}}(i) = 1/N$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $i = 1, \ldots, N$. Die induzierte Heuristik $\mathcal{H}_{\text{Laplace}}$ kann als Verallgemeinerung der LAPLACE-Regel aufgefasst werden: Hier werden die Extrempunkte der Wahrscheinlichkeitsinformation als gleichwahrscheinlich angenommen. Für Entscheidungsprobleme unter Ungewissheit $(A, W) \in$ ungewissheit$(\mathbb{E})$ ergibt sich die klassische LAPLACE-Regel.[30]

[30] Für ein Entscheidungsproblem (A, W) unter Ungewissheit gilt $W = \mathbb{S}^{(n)}$ und die Extrempunkte von $\mathbb{S}^{(n)}$ sind gerade die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ (die i-te Komponente von $\boldsymbol{e_i}$ ist Eins, alle restlichen Komponenten sind Null, $i = 1, \ldots, n$). Insofern entspricht die Annahme, dass alle Extrempunkte gleichwahrscheinlich sind hier der Annahme, dass alle Zustände gleichwahrscheinlich sind.

Beispiel 5.6.20 Wir möchten nun zumindest noch ein Beispiel für eine "Nicht-Standard" Heuristik angeben. Es sei das OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi}^{\text{Median}} = (\phi_N^{\text{Median}})_{N\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$\phi_N^{\text{Median}}(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } N \text{ ungerade und } i = \frac{N+1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } N \text{ gerade und } i \in \{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, N$. Die induzierte Heuristik $\mathcal{H}_{\text{Median}}$ nennen wir die **Median-Heuristik**. Idee dieser Heuristik ist, die ein oder zwei "mittleren" Bewertungen herauszugreifen, da diese möglicherweise einen guten Durchschnittswert darstellen.[31] Insofern ist die Median-Heuristik vom Ansatz her verwandt mit der Maximin- und Maximax-Regel; anstelle der schlechtesten oder besten Bewertung wird jedoch der Median der Bewertungen zur Beurteilung herangezogen. Anwendung kann $\boldsymbol{\phi}^{\text{Median}}$ insbesondere als "Baustein" zur Generierung neuer Heuristiken finden (vgl. Definition 5.6.16).

Anmerkung 5.6.21 Die letzten beiden OWA-Kriterien, $\boldsymbol{\phi}^{\text{Laplace}}$ und $\boldsymbol{\phi}^{\text{Median}}$, sind *autodual* in dem Sinne, dass für sie $\overline{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi}$ gilt.[32] Anschaulich könnte man dies als "Neutralität" gegenüber der Ungewissheit interpretieren; es wird weder den relativ guten noch den relativ schlechten Ergebnissen ein Vorzug gegeben.

Anmerkung 5.6.22 Mit diesen einfachen Mitteln kann man bereits "wirkungsvolle" Heuristiken zusammenstellen. Ist etwa dem Agenten die Maximin-Regel zu pessimistisch, die LAPLACE-Regel zu optimistisch und das HURWICZ-Kriterium zu wenig repräsentativ (es werden nur zwei Ergebnisse pro Alternative in die Bewertung einbezogen), so könnte er die durch folgendes OWA-Kriterium induzierte Heuristik verwenden:

$$\lambda\boldsymbol{\phi}^{\min} + (1-\lambda)\boldsymbol{\phi}^{\text{Laplace}}.$$

Diese Heuristik kombiniert die "breite Basis" der LAPLACE-Regel mit der Pessimismus-Tendenz der Maximin-Regel, wobei $\lambda \in [0,1]$ den Pessimismus-Anteil bestimmt.

Anmerkung 5.6.23 Wir bewegen uns hier fernab jeder axiomatischen Begründung der durch die OWA-Heuristiken bedingten Handlungsvorschriften. Auf der anderen Seite kann man zumindest darüber nachdenken, ob Axiome wie das $\text{E}_{\min}$-Axiom wirklich von jedem rationalen Agenten akzeptiert würden und damit eine echte Grundlage für die Definition rationalen Verhaltens unter Ungewissheit erlauben.

Unser Ziel war es hier aufzuzeigen, dass es einen ganzen "Zoo" von Heuristiken gibt und dass dieser Zoo praktisch beliebig erweitert werden kann. Die Theorie

[31] Wir möchten nicht den hoffnungslosen Versuch unternehmen, die Median-Heuristik in irgendeiner Form zu rechtfertigen. Sie ist eine von vielen denkbaren Heuristiken und in etlichen Punkten angreifbar – wie dies allerdings auch fast(?) alle, selbst die etablierten anderen Heuristiken sind.

[32] Anders ausgedrückt: Ein OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi} = (\phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ heisst autodual, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $i = 1, \ldots, N$ gilt $\phi_N(i) = \phi_N(N+1-i)$.

der OWA-Heuristiken liefert Werkzeuge, um aus vorhandenen Heuristiken neue zu gewinnen.

Wir brechen die Entwicklung dieser Theorie hier ab, da sie nicht an zentraler Stelle für das LAZY DECISION MAKING steht. Zwar benötigen wir zur Entscheidungsfindung eine Heuristik (und dort können auch die OWA-Heuristiken Anwendung finden), dieser kommt aber nicht der zentrale Stellenwert zu wie dies bei einem statischen Modell der Fall ist.

Anmerkung 5.6.24 Obwohl dies für die folgenden Ausführungen unerheblich sein wird, möchten wir dennoch zumindest auf zwei Dinge hinweisen, die sich bei einer tiefergehenden Entwicklung einer Theorie der OWA-Heuristiken als hilfreich erweisen dürften:

(1) *Uniforme Erzeugung:* Etwas gewöhnungsbedürftig an unserer Definition eines OWA-Kriteriums $\boldsymbol{\phi} = (\phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ist, dass die verschiedenen Funktionen ϕ_i, ϕ_j, $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ im Prinzip nichts verbinden muss. Demgegenüber werden in praktischen Anwendungen – und auch in allen von uns besprochenen Beispielen – diese Funktionen zumeist sogar sehr eng miteinander verwandt sein.[33] Ein Konzept, um dies zu garantieren und nebenbei die gesamte Funktionenfolge aus nur einer Funktion zu erzeugen, ist die *uniforme Erzeugung.* Idee ist, eine auf dem Einheitsintervall definierte, integrierbare reelle Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ als "Erzeuger" zu verwenden. Naheliegend ist dann folgende Festlegung für das durch f induzierte OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi}^f = (\phi_N^f)_{N\in\mathbb{N}}$:

$$\phi_N^f(i) = \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} f(x)dx$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, N$. Will man zudem die Normalität von $\boldsymbol{\phi}^f$ gewährleisten, so muss zusätzlich $\int_0^1 f(x)dx = 1$ gefordert werden.

(2) *Vergleich von OWA-Kriterien:* Auf der Menge der OWA-Kriterien lassen sich diverse Ordnungsstrukturen definieren. Ein Beispiel hierfür ist die starke Halbordnung "ist pessimistischer als". Wir sagen, das OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi} = (\phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *ist pessimistischer als* das OWA-Kriterium $\boldsymbol{\phi}' = (\phi'_N)_{N\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $m = 1, \ldots, N$ gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \phi_N(i) \geq \sum_{i=1}^{m} \phi'_N(i).$$

[33] Es lassen sich aber selbstverständlich auch OWA-Kriterien finden, für die dies nicht gilt. Sei etwa ϕ_N definiert durch

$$\phi_N(i) = \frac{1}{N}\phi_N^{\min}(i) + \frac{N-1}{N}\phi_N^{\text{Laplace}}(i)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, N$. Bei der induzierten Heuristik ist die Pessimismustendenz umso größer, desto weniger Extrempunkte die Wahrscheinlichkeitsinformation hat. Ob ein solches Vorgehen allerdings sinnvoll ist, sei dahin gestellt.

5.7 Effizienz einer Heuristik

Anmerkung 5.7.1 Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ ein Entscheidungsproblem bei partieller Information. Bei unseren Betrachtungen zur Lösbarkeit von Entscheidungsproblemen (in Unterabschnitt 3.4.3) haben wir festgehalten, dass – zumindest im Falle einer endlichen Alternativenmenge A – kein rationaler Agent jemals eine nicht-(A, W)-effiziente Alternative auswählen sollte. Wir haben in Anmerkung 3.4.40 bereits auf die Konsequenzen für Heuristiken hingewiesen: Jede "vernünftige" Heuristik sollte dem Agenten ausschließlich (A, W)-effiziente Alternativen vorschlagen.

Anmerkung 5.7.2 Naheliegend wäre nun folgende Definition: Eine Heuristik $\mathcal{H}$ heisst *effizient*, wenn für alle $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit endlichem A und $\mathcal{H}(A, W) \neq \perp$ gilt, dass jedes $\boldsymbol{a} \in \mathcal{H}(A, W)$ (A, W)-effizient ist.[34] Konsequenterweise sollten wir dann im Weiteren ausschließlich effiziente Heuristiken betrachten.

Wir haben uns dennoch gegen dieses Vorgehen entschieden, da es gewisse Probleme nach sich zieht. Und zwar sind die meisten der klassischen Heuristiken, wie beispielsweise das $\mathrm{MaxE}_{\mathrm{min}}$-Prinzip (vgl. Abschnitt 5.3) bzw. die resultierende Heuristik $\mathcal{H}_{\mathrm{min}}$, *nicht* effizient in dem angegebenen Sinn: Im Entscheidungsproblem (A, W) mit $n = 2$, $A = \{(1, 0), (2, 0)\}$ und $W = \mathbb{S}^{(n)}$ gilt $\mathcal{H}_{\mathrm{min}}(A, W) = A$ obwohl die Alternative $(1, 0)$ offenkundig nicht (A, W)-effizient ist.

Es würde zwar im Prinzip kein wirkliches Problem darstellen, die Heuristiken entsprechend zu modifizieren; jedoch führt dies zu erheblich komplizierteren und unübersichtlicheren Definitionen. Insbesondere würden durch dieses Vorgehen einige Heuristiken ihre einfache axiomatische Grundlage verlieren; zum Beispiel würde sich das "effiziente" $\mathrm{MaxE}_{\mathrm{min}}$-Prinzip nicht mehr als zwingende Konsequenz des normalen $\mathrm{E}_{\mathrm{min}}$-Axioms ergeben. Hier müssten also ggf. auch die Grundlagen angepasst werden, denkbar wäre etwa ein "effizientes" $\mathrm{E}_{\mathrm{min}}$-Axiom.

Anmerkung 5.7.3 Die in Anmerkung 5.7.2 angesprochenen Probleme lassen sich durch ein eher pragmatisches Vorgehen sehr einfach lösen. Entweder

(1) es wird $\mathcal{H}(A, W)$ (für eine Heuristik $\mathcal{H}$ und ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit $|A| \in \mathbb{N}$) ermittelt und dann eine (A, W)-effiziente Alternative aus $\mathcal{H}(A, W)$ gewählt oder

(2) es wird zunächst die maximale Teilmenge (A, W)-effizienter Alternativen $A^* \subseteq A$ bestimmt (vgl. Anmerkung 2.2.9) und dann erst die Heuristik $\mathcal{H}$ auf (A^*, W) angewandt.

Im Rahmen des Lazy Decision Making werden wir die Vorgehensweise (2) aufgreifen, da wir nicht-(A, W)-effiziente Alternativen stets aus den weiteren Betrachtungen eliminieren können (vgl. hierzu Bemerkung 4.2.6 und Anmerkung 4.2.7).

[34] Wir beschränken uns hier auf *endliche* Alternativenmengen, da für diesen Fall stets effiziente Alternativen existieren wohingegen dies für nicht-endliches A nicht der Fall sein muss (vgl. Bemerkung 3.4.39 und dort Punkt 4); die Definition könnte aber offenbar unverändert auch auf beliebige Alternativenmengen ausgedehnt werden.

5.8 Exkurs: Gemischte Strategien

Anmerkung 5.8.1 Wir haben bisher in allen Betrachtungen unterstellt, dass der Agent *deterministisch* genau *eine* Alternative auswählen muss. Hatten wir eine größere zur Auswahl verbleibende Menge von Alternativen (zum Beispiel bei Anwendung des BERNOULLI-Prinzips, wenn mehrere Alternativen den maximal erzielbaren Erwartungsnutzen realisieren), so hatten wir stets gesagt, dass der Agent *irgendeine* dieser Alternativen wählen kann, sind aber nicht auf die Frage eingegangen, *wie* er die Auswahl treffen kann bzw. sollte. Derartige Fragestellungen untersuchen wir knapp in diesem Abschnitt.

Anmerkung 5.8.2 In Abwandlung der normalen Annahmen könnte man die aus der Spieltheorie bekannten *gemischten Strategien* zulassen (vgl. [KM76, S. 31], [Fis65]). Demzufolge wäre die Lösung eines Entscheidungsproblems $(A, W) \in \mathbb{E}$ nicht *eine* Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ (vgl. Definition 3.4.33) sondern eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung* auf der Alternativenmenge A. Die Handlungsanweisung an den Agenten lautet dann, gemäß dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung zufällig eine Alternative auszuwählen.

Im Falle der Spieltheorie sind gemischte Strategien insbesondere wichtig um dem (zumeist als bösartig und "allmächtig" unterstellten) Gegenspieler möglichst wenig über die eigene Strategie mitzuteilen.[35] Demgegenüber ist *dieses* Argument im Kontext der Entscheidungsprobleme unzutreffend, da die Natur nicht bewusst gegen den Agenten handelt.

Anmerkung 5.8.3 Gemische Strategien können dennoch auch im Rahmen von Entscheidungsproblemen (bei partieller Information) gewisse Vorteile haben; wir möchten dies nachfolgend an einem kurzen Beispiel illustrieren.

Beispiel 5.8.4 Sei (A, W) mit $A = \{\boldsymbol{a_1} = (1, 0), \boldsymbol{a_2} = (0, 1)\}$, $W = \mathbb{S}^{(n)}$ und $n = 2$ ein Entscheidungsproblem unter Ungewissheit. Für jede der *reinen* Strategien $\boldsymbol{a_i}$ $(i = 1, 2)$ gilt $f_{\inf}(\boldsymbol{a_i}, W) = 0$. Folgt der Agent dem $\mathrm{E}_{\min}$-Axiom (vgl. Abschnitt 5.3 und insbesondere Definition 5.3.2), so müsste er jede der NL-Mengen $\langle \boldsymbol{a_i}, W \rangle$ mit 0 bewerten und entsprechend indifferent bezüglich der $\boldsymbol{a_i}$, $i = 1, 2$ sein. Insbesondere lässt sich durch eine reine Strategie (im Sinne von Anmerkung 5.2.10) lediglich der Erwartungsnutzen 0 garantieren.

Demgegenüber sei nun die *gemischte* Strategie $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ definiert durch $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$. (Dabei ist die Interpretation der gemischten Strategie $\boldsymbol{\alpha}$, dass der Agent die Alternative $\boldsymbol{a_i}$ mit der Wahrscheinlichkeit α_i auswählt, $i = 1, 2$.) Hier stellt sich nun die entscheidende Frage, wie $f_{\inf}$ auf eine gemischte Strategie $\boldsymbol{\alpha}$

[35] Ein geradezu klassisches Beispiel ist das Stein-Schere-Papier Spiel. Hier ist die optimale (gemischte) Strategie, jedes der Symbole gleichwahrscheinlich (also mit der Wahrscheinlichkeit 1/3) zu wählen. Insbesondere ist diese gemischte Strategie jeder reinen Strategie überlegen. Für Details verweisen wir auf das grundlegende Buch [vNM43] von JOHN VON NEUMANN und OSKAR MORGENSTERN.

fortzusetzen ist. Prinzipiell sind die beiden folgenden Möglichkeiten denkbar:

$$f_{\inf}(\boldsymbol{\alpha}, W) = \inf\{\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \boldsymbol{a_i}^T \boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\} \tag{5.2}$$

$$\text{oder} \quad f_{\inf}(\boldsymbol{\alpha}, W) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \inf\{\boldsymbol{a_i}^T \boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\} \tag{5.3}$$

Mit Gleichung 5.3 gilt $f_{\inf}(\boldsymbol{\alpha}, W) = 0.5 f_{\inf}(\boldsymbol{a_1}, W) + 0.5 f_{\inf}(\boldsymbol{a_2}, W) = 0$. Demgegenüber liefert Gleichung 5.2 den Wert $f_{\inf}(\boldsymbol{\alpha}, W) = 0.5$!

Anmerkung 5.8.5 Wir betrachten nun die in Beispiel 5.8.4 (implizit) aufgeworfene Frage etwas genauer: Welche der Gleichungen 5.2, 5.3 ist "richtig"?

(1) Die Motivation für Gleichung 5.2 ist die folgende: Es gibt eine wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ von der lediglich $\boldsymbol{\rho} \in W$ bekannt ist (vgl. Anmerkung 3.3.4). Bezüglich der gemischten Strategie $\boldsymbol{\alpha}$ wird die *ungünstigste* Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p} \in W$ ausfindig gemacht (formal durch Bildung des Infimums) und bezüglich dieser die gemischte Strategie $\boldsymbol{\alpha}$ bewertet. Dieses Vorgehen wäre die korrekte Verallgemeinerung der Maximin-Regel, wenn "Bruchteile" einer Alternative ausgewählt werden könnten oder die gleiche Entscheidungssituation sehr häufig wiederholt wird. Bei diesem Vorgehen kann die Bewertung einer gemischten Strategie durchaus höher sein als diejenige der höchstbewerteten reinen Strategie (vgl. hierzu auch Beispiel 5.8.4).

(2) Demgegenüber liegt Gleichung 5.3 ein etwas anderer Gedanke zu Grunde: Hier wird für jede in der gemischten Strategie beteiligte Alternative $\boldsymbol{a_i}$ die *ungünstigste* Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p_i} \in W$ bestimmt und diese als Bewertungsgrundlage verwendet. Idee ist also, dass *nach* der konkreten Wahl einer Alternative durch den Agenten die Umwelt die hierfür ungünstigste Wahrscheinlichkeitsverteilung aus W "wählt". Bei diesem extrem pessimistischen Vorgehen ist die Bewertung einer gemischten Strategie niemals besser als die maximale Bewertung der beteiligten Alternativen. Insofern kann hier auf die Betrachtung gemischter Strategien komplett verzichtet werden.

Die Beurteilung sollte gezeigt haben, dass beide Vorgehensweisen zu verschiedenen Heuristiken bzw. Bewertungen führen und dass ohne weitere Annahmen nicht von einer "korrekten" oder "falschen" Vorgehensweise gesprochen werden kann.

Anmerkung 5.8.6 Es lässt sich sehr leicht einsehen, dass für ein Entscheidungsproblem (A, W) eine "vernünftige" gemischte Strategie stets aus (A, W)-effizienten Alternativen besteht und dass (A, W)-verzichtbare Alternativen weiterhin verzichtbar sind in dem Sinne, dass sie durch eine andere Alternative aus A "ersetzt" werden können. Insofern beeinflusst eine Ausdehnung auf gemischte Strategien nicht unsere Überlegungen zur Lösbarkeit von Entscheidungsproblemen und zur Einschränkung der Alternativenmenge (vgl. Kapitel 4). Daher wäre es durchaus denkbar, gemischte

Strategien im Rahmen des LAZY DECISION MAKING zu verwenden, wir gehen auf diesen Fall nachfolgend jedoch nicht mehr explizit ein.[36]

Anmerkung 5.8.7 Die Bewertung einer gemischten Strategie ist erst dann möglich, wenn zusätzliche Annahmen über die Präferenzen des Agenten wie das $\mathrm{E}_{\min}$-Axiom (vgl. Definition 5.3.2) getroffen wurden. Sie basiert damit ebenso auf einer induzierenden Funktion wie dies bei "normalen" separablen oder auch nicht separablen Heuristiken der Fall ist (vgl. Abschnitte 5.2 und 5.5). Dies ist der Grund dafür, dass wir gemischte Strategien im Rahmen des Kapitels über Heuristiken angesprochen haben.

5.9 Zusammenfassung der Ergebnisse

In diesem Kapitel haben wir Heuristiken für das Entscheiden bei partieller Information untersucht, wobei wir unsere Betrachtungen nach der Art der Erzeugung der Heuristiken strukturiert haben.

Wir haben mit der strukturell sehr einfachen Klasse der separablen Heuristiken begonnen. Die grundlegende Eigenschaft dieser Art von Heuristiken ist, dass jeder NL-Menge eine Bewertung zugeordnet wird (durch die induzierende Funktion) und diejenige Alternative mit der höchsten Bewertung vorgeschlagen wird. In diese Klasse fallen die Verallgemeinerungen der Maximin- und Maximax-Regel und des HURWICZ-Prinzips ebenso wie das Prinzip der maximalen Entropie. Wir haben das $\mathrm{MaxE}_{\min}$-Prinzip etwas näher betrachtet, da es von KOFLER und MENGES als *das* Entscheidungsprinzip vorgestellt wird (vgl. [KM76]).

Die nachfolgend betrachteten nicht separablen Heuristiken zeichnen sich dadurch aus, dass die Bewertung einer Alternative auch von der Alternativenmenge abhängen kann. Als prominenten Vertreter dieser Klasse haben wir die verallgemeinerte SAVAGE-NIEHANS-Regel betrachtet.

Anschließend haben wir OWA-Heuristiken eingeführt und damit begonnen, eine Theorie der OWA-Heuristiken zu entwickeln. Grob gesprochen ist die Idee dieser Heuristiken, für jede Alternative als Kenngröße eine gewichtete Summe aus den Erwartungsnutzenwerten an den Extrempunkten der Wahrscheinlichkeitsinformation zu bilden. Entscheidende Vorteile dieser Klasse von Heuristiken sind, dass (1) viele der klassischen Heuristiken als Spezialfälle enthalten sind, (2) die Klasse sehr stark parametrisierbar ist und damit eine breite Schar von Heuristiken/Profilen abdeckt, (3) Heuristiken zu neuen Heuristiken verknüpft werden können, (4) die Heuristiken dennoch effizient ausgewertet werden können.

Die durch eine Heuristik vorgeschlagene Alternativenmenge ist i.Allg. nicht effizient. Um diesem unschönen Problem zu entgegnen haben wir uns für ein relativ pragmatisches Vorgehen entschieden; beim LAZY DECISION MAKING eliminieren wir stets alle nicht effizienten Alternativen aus den Betrachtungen.

Zuletzt sind wir knapp auf den Unterschied zwischen reinen und gemischten

[36] Dennoch wollten wir zumindest die "Existenz" dieses Punktes betonen, da er in vielen anderen Arbeiten komplett ignoriert wird.

Strategien für Entscheidungsprobleme eingegangen und haben angedeutet, wie die Untersuchungen auf gemischte Strategien ausgedehnt werden können.

Kapitel 6

Lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen: Repräsentationen und Präzisierungen

Nachdem wir Wahrscheinlichkeitsinformationen bisher als abstrakte mathematische Objekte angesehen haben, werden wir nun detaillierter deren Repräsentation ("Darstellung auf einem Rechner") untersuchen, beschränken uns dabei jedoch auf lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen. Basierend auf konkreten Repräsentationen betrachten wir deren Präzisierung und beenden das Kapitel mit kurzen Ausführungen zu einigen wichtigen Klassen linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen, wodurch insbesondere deren Ausdruckskraft illustriert werden soll.

> *"Beschreibt man die Bedeutung der Worte so genau wie möglich, und man wird die Menschheit von der Hälfte ihrer Irrtümer befreien."*
>
> René Descartes

> *"Wir müssen den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als Folge eines vorangegangenen und Ursache seines nachfolgenden Zustands betrachten."*
>
> Pierre-Simon de Laplace

6.1 Motivation

Bisher waren wir bemüht, unsere Überlegungen möglichst allgemein zu halten und insbesondere die betrachteten Wahrscheinlichkeitsinformationen nur selten weiter einzuschränken (dennoch ließ sich dies teilweise nicht vermeiden, z.B. konnten wir das Stabilitätslemma 4.3.2 nur für *kompakte* Wahrscheinlichkeitsinformationen beweisen). Wir haben Wahrscheinlichkeitsinformationen stets als gegebene, mathematische Objekte angesehen und sind nicht auf deren konkrete Beschreibung eingegangen.

Demgegenüber wird im Folgenden der Gedanke wichtig, in welcher Form mit dem Agenten über Wahrscheinlichkeitsinformationen "kommuniziert" werden kann – etwa, wie dieser Präzisierungen vornehmen kann. Insofern betrachten wir hier die konkrete *Repräsentation* von Wahrscheinlichkeitsinformationen und wie, basierend auf einer solchen Repräsentation, Präzisierungen vorgenommen werden können. Da diese Untersuchungen hochgradig abhängig vom speziellen Typus der betrachteten Wahrscheinlichkeitsinformationen sind, werden wir uns nun auf die gleichermaßen ausdrucksstarken wie gutartigen *linearen* Wahrscheinlichkeitsinformationen festlegen.

In Vorarbeit für das LAZY DECISION MAKING werden wir insbesondere untersuchen, wie sich eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation konkret durch den Agenten präzisieren lässt.

6.2 Grundlagen

Anmerkung 6.2.1 Definitionsgemäß ist eine Wahrscheinlichkeitsinformation W eine Teilmenge des Wahrscheinlichkeitssimplex $\mathbb{S}^{(n)}$ (vgl. Definition 3.3.3). Im Prinzip kann W folglich beliebige Formen annehmen, was allerdings nur für die theoretischen Betrachtungen von Interesse war. Denn sobald das mathematische Konstrukt der Wahrscheinlichkeitsinformation in einem Computer-Programm verwendet wird, muss eine endliche Beschreibung der zu verarbeitenden Wahrscheinlichkeitsinformationen vorliegen. Dies ist aber nur möglich, wenn wir uns auf eine spezielle Klasse von Wahrscheinlichkeitsinformationen beschränken (denn die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)})$ ist offenbar überabzählbar[1]).

Anmerkung 6.2.2 Die Beschränkung auf darstellbare Wahrscheinlichkeitsinformationen ist eine notwendige Voraussetzung für unsere Verfahren. Allerdings gibt es einen zusätzlichen, wesentlich subtileren Punkt, welcher die zu betrachtende Klasse weiter einschränkt und sehr entscheidend für unser Vorgehen sein wird: *In irgendeiner Form muss der Benutzer Wahrscheinlichkeitsinformationen "eingeben" und "präzisieren".* Dies beinhaltet, dass er eine *Vorstellung* von der Wahrscheinlichkeitsinformation entwickeln muss, diese also gewissermaßen "greifen" können muss.

Nicht jede Darstellung von Wahrscheinlichkeitsinformationen eignet sich hierzu

[1] Die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)})$ ist überabzählbar, da bereits $\mathbb{S}^{(n)}$ dies ist. Folglich existiert keine surjektive Abbildung $\nu : \mathbb{N}_0 \dashrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)})$ und entsprechend kann nicht für jede Wahrscheinlichkeitsinformation ein endlicher Name existieren. Zwar gibt es auch Möglichkeiten, überabzählbare Mengen mit Bezeichnungssystemen zu versehen; diese sind aber von eher theoretischem Interesse und finden im Bereich der Berechenbarkeitstheorie Anwendung (siehe [Wei00]). Für eine ausführliche Diskussion der Darstellungsmöglichkeiten von *Teilmengen* einer überabzählbaren Menge – genau diese Situation ist im Falle von $\mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)})$ gegeben – siehe [BP02].

in gleicher Weise. Wir möchten kurz ein Beispiel für eine Darstellung aufzeigen, welche – unserer Meinung nach – für einen (menschlichen) Agenten nur sehr schwierig zugänglich sein wird:[2] Dazu sei eine Wahrscheinlichkeitsinformation W als Aufzählung von Punkten $\boldsymbol{p_i} \in \mathbb{S}^{(n)}$ und Radien $r_i \in \mathbb{R}^{>0}$ mit $i = 1, \ldots, N$ dargestellt, so dass

$$W = \bigcup_{i=1}^{N} \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}^{(n)} \mid \mathrm{dist}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p_i}) < \varepsilon\}$$

gilt. (Die Menge W wird als Vereinigung von offenen Kugeln dargestellt; diese Darstellung ist durchaus nicht unüblich, vgl. etwa [Wei00] oder [BP02].)

Letztlich "sprengt" allerdings die Frage, welche Darstellungen der Agent "versteht", den Rahmen dieser Arbeit.[3] Insofern ist es lediglich unser Ziel darauf *hinzuweisen*, dass wir hier starke – allerdings auch durchaus übliche – Annahmen treffen werden:

> *Wir beschränken uns auf lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen und verwenden eine spezielle Repräsentation sowie ein darauf basierendes, spezielles Präzisierungskonzept. Diesem Vorgehen liegt die "Hoffnung" zu Grunde, dass die gewählte Repräsentation für menschliche Agenten gut geeignet ist um eine "Vorstellung" von der Wahrscheinlichkeitsinformation zu entwickeln.*

Leider ist die dahinterliegende Motivation, dass der Agent die Darstellung und die Bedeutung der Präzisierungen "gut verstehen können soll", nur sehr schwierig greifbar (operationalisierbar). Insofern verzichten wir auf den Versuch, diese Annahme stichhaltig zu rechtfertigen.

Anmerkung 6.2.3 Wir nehmen nun wieder an, dass eine wahre (aber potenziell unbekannte) Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{S}^{(n)}$ existiert. Nebenbedingungen der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i \leq \beta$$

mit $\beta, \alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ erscheinen uns sehr gut geeignet um das in realen Anwendungen auftretende Wissen über $\boldsymbol{\rho}$ zu beschreiben. Insbesondere zeigt die Erfahrung vieler Praxisbeispiele, dass sich das dort auftretende Wissen durch derartige Nebenbedingungen beschreiben lässt (vgl. hierzu auch Abschnitt 6.5). Zweifelsohne gibt es auch Gegenbeispiele, diese *scheinen* jedoch in den meisten praktischen Anwendungen von eher untergeordneter Bedeutung zu sein.[4]

---

[2] Betrachtet man hingegen Computerprogramme (welche auch Agenten darstellen können), so ist die konkrete Darstellung abgesehen von Effizienzaspekten nahezu unerheblich; "vernünftige" Darstellungen lassen sich ineinander umrechnen (vgl. hierzu auch Unterabschnitt 6.3.4).

[3] Erschwerend kommt noch hinzu, dass der Autor dieser Arbeit keinerlei sinnvolle Ansatzpunkte sieht, um diese Begriffe zu operationalisieren.

[4] Eine sehr wichtige Klasse von Gegenbeispielen erhält man durch lineare Gleichungen, in denen mehr als eine *bedingte* Wahrscheinlichkeit auftritt. So steht etwa $\Pr(X_1 \mid X_2) = \Pr(X_3 \mid X_4)$ für $\Pr(X_1 \cap X_2) \Pr(X_4) = \Pr(X_3 \cap X_4) \Pr(X_2)$, welches sich nicht als lineare Gleichung der

Kombiniert man endlich viele solcher Nebenbedingungen zur “Eingrenzung” der wahren Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ (d.h., $\boldsymbol{\rho}$ genügt *allen* Nebenbedingungen), so gelangt man unmittelbar zu der Klasse der linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen. Diese ist Grundlage für fast alle folgenden Ausführungen und insbesondere auch das LAZY DECISION MAKING.[5]

Wir werden später (in Abschnitt 6.5) zeigen, dass viele der aus der Literatur bekannten Unsicherheitsformalismen durch lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen erfasst werden.

Anmerkung 6.2.4 Nachdem wir nun zumindest ansatzweise motiviert haben, warum lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen über eine relativ starke Ausdruckskraft verfügen (wir verfolgen diesen Aspekt detaillierter in Abschnitt 6.5), möchten wir noch deren “Gutartigkeit” bei Entscheidungsproblemen demonstrieren.

Will der Agent ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ lösen, so wird er die Alternativen in irgendeiner geeigneten Form (zumeist implizit in die von ihm verwandte Heuristik eingehend) bewerten. Diese Bewertung basiert in der Regel auf dem Ansatz, dass eine gewisse Kenngröße (diese hängt von der jeweiligen Heuristik ab, vgl. zu den nachfolgenden Ausführungen Kapitel 5), die von der Wahrscheinlichkeitsinformation W abhängig ist, über alle $\boldsymbol{p} \in W$ maximiert (oder minimiert) wird. Bezeichnet $f_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{S}^{(n)} \to \mathbb{R}$ diese “Kenngrößenfunktion” zur Alternative $\boldsymbol{a}$[6], so ergibt sich nachfolgendes Optimierungsproblem:

$$\max f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{p}) \quad \text{u.d.N.} \quad \boldsymbol{p} \in W.$$

Um derartige Optimierungsprobleme effizient lösen zu können, ist die konkrete Gestalt der Funktion $f_{\boldsymbol{a}}$ sowie die Beschreibung des zulässigen Bereichs W entscheidend. Für lineare Funktionen $f_{\boldsymbol{a}}$ (diese liegen bei sehr vielen Heuristiken vor, vgl. Kapitel 5) ergibt sich im Falle einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation W ein lineares Optimierungsproblem; dieses lässt sich effizient lösen (vgl. Abschnitt 7.2). Dahingegen wird die Optimierungsaufgabe für nicht-lineares W relativ schnell sehr schwierig.[7] Ein weiterer Vorzug linearer Optimierungsprobleme sind deren “nützliche” Dualitätseigenschaften, welche wir später massiv verwenden werden.[8]

Zustandswahrscheinlichkeiten ausdrücken lässt. (Hier gilt $X_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $i = 1, \ldots, 4$ und $\Pr(\{i\})$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des Zustands i, $i = 1, \ldots, n$.) In Unterabschnitt 6.5.5 gehen wir näher auf bedingte Wahrscheinlichkeiten ein.

[5] Streng genommen müssen wir allerdings noch fordern, dass die Koeffizienten α_i $(i = 1, \ldots, n)$ und die “rechte Seite” β *rational* sind. Grund hierfür ist, dass die allgemeine Klasse aller linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen nicht abzählbar ist (da bereits die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dies nicht ist).

[6] Wir gehen hier im Sinne eines einfachen Beispiels von einer *separablen* Heuristik aus und können daher unterstellen, dass die Bewertung unabhängig von der Alternativenmenge ist (vgl. Abschnitt 5.2).

[7] Eine gute Einführung in *exakte* Lösungsmethoden für nicht-lineare Optimierungsprobleme sowie die bekanntesten theoretischen Resultate finden sich in [NM93, Kapitel 4]. Darüber hinaus existieren diverse Näherungsverfahren, welche für unsere Zwecke allerdings ungeeignet erscheinen.

[8] Zwar gibt es auch für nicht-lineare Optimierungsprobleme ein Dualitätstheorem (siehe etwa [NM93, S. 581]), dieses erlaubt jedoch nicht – oder zumindest nicht direkt – die für uns zentralen Folgerungen.

6.3 Die Repräsentation einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation

6.3.1 Grundsätzliches

Anmerkung 6.3.1 Bisher waren unsere Überlegungen bezüglich eines Entscheidungsproblems $(A, W) \in \mathbb{E}$ stets unabhängig von der konkreten *Repräsentation* der Wahrscheinlichkeitsinformation W. Zwar waren die Eigenschaften von W – beispielsweise ob es sich um eine *lineare* Wahrscheinlichkeitsinformation handelte – durchaus gelegentlich wichtig; in welcher Form W *dargestellt* wurde, hatte aber keinen Einfluss auf die Überlegungen. Demgegenüber basierend viele der nun folgenden Ausführungen und Ideen zentral auf dem Begriff der Repräsentation.

Anmerkung 6.3.2 Wir starten zunächst ein wenig formaler, als wir es später benötigen werden. Dies garantiert aber zumindest Klarheit in dem Sinne, dass an einer Stelle explizit definiert ist wovon wir überhaupt reden.

Definition 6.3.3 (Notation, Repräsentation) Sei Σ eine endliche Menge (das Alphabet) und Σ^* die Menge aller Worte über Σ. Eine **Notation** ν einer Menge M ist eine surjektive Abbildung $\nu : \Sigma^* \dashrightarrow M$. Gilt $\nu(w) = x$ (für $w \in \Sigma^*$ und $x \in M$), so ist w eine **Repräsentation** (ein ν-Name) von x.[9]

Anmerkung 6.3.4 Um möglichen Unklarheiten bereits vorzeitig vorzubeugen, möchten wir im Folgenden klar zwischen einigen sehr eng miteinander verwandten Begriffen unterscheiden: Unter einer *Wahrscheinlichkeitsinformation* verstehen wir eine Teilmenge von $\mathbb{S}^{(n)}$ – und zwar diese Menge als mathematisches Objekt (eine Ansammlung von – potenziell unendlich vielen – Wahrscheinlichkeitsverteilungen).

Demgegenüber ist eine *Repräsentation* einer Wahrscheinlichkeitsinformation eine endliche Beschreibung (ein Wort über einem endlichen Alphabet, vgl. Definition 6.3.3). Einerseits benötigen wir *interne* Repräsentationen, um Wahrscheinlichkeitsinformationen auf einem Rechner darstellen zu können. Andererseits benötigen wir *externe* Repräsentationen, um Wahrscheinlichkeitsinformationen dem Benutzer präsentieren und von ihm erfragen zu können.

Sowohl interne als auch externe Repräsentationen sind endliche Beschreibungen, wir werden daher im Folgenden zumeist nicht zwischen diesen beiden Repräsentationsarten unterscheiden. Denkbar aber nicht zwingend ist, dass hier dieselben Notationen verwendet werden. (In jedem Fall sollten aber die Repräsentationen ineinander übersetzbar sein.[10])

Anmerkung 6.3.5 Eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation ist ein konvexes Polytop (vgl. Fußnote 8 in Kapitel 4 sowie [NM93, S. 45ff]). Um dieses Gebilde

[9] Die Abbildung ν muss nicht injektiv sein, d.h. es dürfen durchaus verschiedene ν-Namen für ein $x \in M$ existieren.

[10] Dabei heisst ein Notation $\nu_1 : \Sigma^* \dashrightarrow M$ einer Menge M *übersetzbar* in eine zweite Notation $\nu_2 : \Sigma^* \dashrightarrow M$ dieser Menge, falls eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \dashrightarrow \Sigma^*$ existiert, so dass für alle $w \in \Sigma^*$ mit $\nu_1(w) = x \in M$ gilt $\nu_2(f(w)) = x$. Anschaulich gesprochen kann aus jedem ν_1-Namen ein korrespondierender ν_2-Name berechnet werden.

darzustellen (zu repräsentieren), gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, die durch die *geometrische* Vorstellung motiviert sind.

So ist etwa eine Möglichkeit die *Eckpunktdarstellung* (vgl. Unterabschnitt 6.3.3). Durch die Aufzählung der Koordinaten der (endlich vielen) Ecken des Objektes, lässt sich dieses eindeutig bestimmen.[11] (Das fragliche Polytop ist gerade die konvexe Hülle der Eckpunktmenge.)

Eine weitere Darstellung orientiert sich an einem verwandten Gedanken: Das (konvexe) Polytop lässt sich als Schnittmenge endlich vieler Halbräume des $\mathbb{R}^n$ definieren. Jeder der Halbräume ist seinerseits durch einen Orthogonalenvektor und den Abstand vom Ursprung eindeutig bestimmt. Insofern lässt sich das Polytop durch diese Angaben rekonstruieren. Dies ist die Grundlage der in Unterabschnitt 6.3.2 besprochenen *Standardrepräsentation* (die sich allerdings auch nicht-geometrisch direkt ausgehend von den Nebenbedingungen her motivieren lässt).

Darüber hinaus gibt es diverse andere Ansatzpunkte um das Polytop zu bestimmen. Wir haben uns für die Standardrepräsentation entschieden, da diese unserer Meinung nach die am ehesten der Intuition des Agenten entsprechende Darstellung ist. (Das heisst aber nicht, dass nicht möglicherweise doch wesentlich bessere Repräsentationen existieren – wenngleich wir dies für eher unwahrscheinlich halten.)

Da in der Literatur sehr häufig die Eckpunktdarstellung verwandt wird, werden wir zudem unsere Betrachtungen auf diese Art der Repräsentation ausweiten.[12]

6.3.2 Standardrepräsentation

Definition 6.3.6 (Standardrepräsentation, Nebenbedingung) Wir nennen $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ mit $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ eine **Standardrepräsentation** einer Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ genau dann, wenn

$$W = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \,|\, \boldsymbol{C}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{b}\}$$

gilt. Eine Ungleichung der Form $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p} \leq b$ oder $\boldsymbol{C}_{i,*}\boldsymbol{p} \leq b_i$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$ bezeichnen wir im Folgenden als **Nebenbedingung**.[13]

Anmerkung 6.3.7 Wir verzichten darauf, explizit eine Notation im Sinne von Definition 6.3.3 (mit einem Alphabet Σ etc.) zu definieren. Tatsächlich wäre dies ohne weiteres auch gar nicht möglich (vgl. Anmerkung 6.3.9).

[11] Die Extrempunkte eines konvexen Polytops werden als *Eckpunkte* bezeichnet (vgl. [NM93, S. 46]).

[12] Grund für die häufige Verwendung der Eckpunktdarstellung ist allerdings nicht, dass der Agent diese besonders gut verstehen kann, sondern der Folgende: Die Eckpunktdarstellung eignet sich sehr gut für die *interne* Repräsentation, da einige Heuristiken – beispielsweise die verallgemeinerte LAPLACE-Regel (vgl. Beispiel 5.6.19 oder [Del97, S. 151]) – basierend auf dieser Repräsentation sehr effizient berechnet werden können. Dies gilt insbesondere auch für die in Abschnitt 5.6 behandelten OWA-Heuristiken.

[13] An späterer Stelle wird erst die Bedeutung dieser Bezeichnung wirklich klar, hier würde ansonsten zunächst die Bezeichnung *Bedingung* oder *Beschränkung* sinnvoller erscheinen.

Anmerkung 6.3.8 Die Standardrepräsentation ist vollständig in dem Sinne, dass jede lineare Wahrscheinlichkeitsinformation eine Repräsentation besitzt (vgl. Definition 3.3.9). Diese ist aber offenbar nicht eindeutig bestimmt; jede lineare Wahrscheinlichkeitsinformation besitzt sogar unendlich viele Repräsentationen.

Anmerkung 6.3.9 Die Standardrepräsentation ist *keine* Notation im Sinne unserer Definition (vgl. Definition 6.3.3); um zu einer Notation überzugehen, müsste zusätzlich zum Beispiel gefordert werden, dass sämtliche in der Repräsentation auftretenden Zahlen *rational* sind (vgl. auch Anmerkung 6.2.3). Die aus dieser zusätzlichen Forderung resultierende Notation bezeichnet eine *Teilmenge* der linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen, genauer die Menge aller konvexen Polytope mit rationalen Eckpunkten.[14]

Wir verzichten in den nachfolgenden Ausführungen auf diese zusätzliche Annahme und betrachten idealisiert die Menge *aller* linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen. (Selbstverständlich wird jedoch in jeder konkreten Implementierung der vorgestellten Konzepte notgedrungen eine Beschränkung auf eine endliche Teilmenge der Wahrscheinlichkeitsinformationen stattfinden.)

Anmerkung 6.3.10 Es können beliebig viele Nebenbedingungen notwendig sein um eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation zu beschreiben (anschaulich resultiert dies aus der Tatsache, dass ein konvexes Polytop im $\mathbb{R}^n$ beliebig viele Flächen haben kann). Demzufolge kann die Standardrepräsentation einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation beliebig "lang" werden.

Anmerkung 6.3.11 Auch in der Literatur werden lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen zumeist durch ein lineares Ungleichungssystem der Form $\boldsymbol{Cp} \leq \boldsymbol{b}$ beschrieben. Abweichend von unserer Notation wird dabei teilweise die Gültigkeit von $p_i \geq 0$ (für $i = 1, \ldots, n$) sowie $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (zusammen also die Bedingungen, die garantieren, dass $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist) *separat* gefordert und nicht als Bestandteil in die Repräsentation $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ aufgenommen (siehe etwa [Del97, S. 12]).

Wir haben uns gegen diese Vorgehensweise entschieden, da sich unsere Notation – im Rahmen unserer Untersuchungen – durchweg als kompakter erwiesen hat. (Es ist nicht nötig, jeweils gesondert auf die speziellen Bedingungen einzugehen.)

Beispiel 6.3.12 (Nebenbedingungen) Wir möchten nun beispielhaft die Ausdruckskraft linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen illustrieren. Im Sinne der Standardinterpretation (Anmerkung 3.3.4) existiert eine potenziell unbekannte, wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$; ρ_i bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des i-ten Zustands.

Sehr natürlich sind Beschränkungen der Form $\rho_1 \leq 0.3$ oder allgemeiner $\rho_i \leq \beta$ bzw. $\rho_i \geq \beta$ (mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\beta \in [0, 1]$). Hiermit lassen sich für die Zustände *Intervallwahrscheinlichkeiten* definieren (vgl. Unterabschnitt 6.5.2).

[14] Dabei bezeichnen wir einen Eckpunkt als rational, wenn seine Koordinaten dies sind. Wir verzichten auf den einfachen Beweis der behaupteten Mengenäquivalenz, da das Resultat für die nachfolgenden Ausführungen nicht weiter benötigt wird.

Diesen Gedanken verallgemeinern Bedingungen wie $\rho_1 + \rho_3 + \rho_5 \leq 0.7$ oder allgemeiner $\sum_{i \in I} \rho_i \leq \beta$ bzw. $\sum_{i \in I} \rho_i \geq \beta$ (mit $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und $\beta \in [0, 1]$). Dieser Typ von Nebenbedingungen erlaubt die Definition von Intervallwahrscheinlichkeiten für Zustands*mengen* (also nicht nur einzelne Zustände) und entspricht von der Ausdruckskraft genau der Dempster-Shafer Evidenztheorie (vgl. Unterabschnitt 6.5.3).

Eine weitere Verallgemeinerung kann erzielt werden, wenn zudem *komparative Wahrscheinlichkeiten* (z.B. $\rho_1 \geq \rho_5$, vgl. Unterabschnitt 6.5.4) und *bedingte Wahrscheinlichkeiten* (vgl. Unterabschnitt 6.5.5) erlaubt werden.

Die allgemeinste (lineare) Form schließlich erlaubt beliebige Bedingungen der Form $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i \leq \beta$ (mit $\alpha_i, \beta \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$). Diese Form haben die Nebenbedingungen, die in der Standardrepräsentation einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation (vgl. Definition 6.3.6) auftreten, und sie beinhaltet offenbar alle aufgeführten Beispiele als Spezialfälle.

6.3.3 Eckpunktdarstellung

Anmerkung 6.3.13 Die geometrische Motivation für die Eckpunktdarstellung lässt sich bereits aus ihrem Namen erahnen; ein konvexes Polytop lässt sich eindeutig durch die Menge seiner Eckpunkte beschreiben. Wir stellen dieses anschauliche Argument zunächst auf ein abgesicherteres mathematisches Fundament.

Bemerkung 6.3.14 Sei W eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation. Dann existiert eine eindeutig bestimmte, kleinste Menge $\text{eck}(W) = \{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N\} \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$, so dass W gerade die konvexe Hülle von $\text{eck}(W)$ ist.[15]

Beweis. Es ist $\text{eck}(W)$ gerade die Menge der Extrempunkte von W. Dies lässt sich folgendermaßen sehr einfach einsehen. Auf der einen Seite besagt der Satz von Krein-Milman (vgl. [TL80, S. 181ff]), dass W die konvexe Hülle der Extrempunkte von W ist. Auf der anderen Seite kann offenbar definitionsgemäß kein Extrempunkt von W als Linearkombination anderer Punkte aus W dargestellt werden (vgl. Fußnote 13 in Kapitel 4), so dass die Minimalität folgt und damit $\text{eck}(W)$ tatsächlich gerade die Menge der Extrempunkte von W sein *muss*. $\square$

Definition 6.3.15 (Eckpunktdarstellung) Sei W eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation. Wir bezeichnen $\text{eck}(W)$ als die **Eckpunktdarstellung** von W.

Anmerkung 6.3.16 Wiederum verzichten wir auf eine explizite Definition der entsprechenden Notation und auf die dafür notwendige Beschränkung auf lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen mit (z.B.) *rationalen* Eckpunkten (vgl. Anmerkung 6.3.9).

[15] Die *konvexe Hülle* einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert als Durchschnitt aller X enthaltenden konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Man kann zeigen, dass die konvexe Hülle von X genau der Menge aller konvexen Linearkombinationen von Punkten aus X entspricht (siehe beispielsweise [NM93, S. 531] oder [Weg95, S. 9]).

Anmerkung 6.3.17 Die Anzahl der Eckpunkte einer Wahrscheinlichkeitsinformation ist nicht beschränkt, d.h., auch die Eckpunktaufzählung kann erwartungsgemäß beliebig “lang” werden (vgl. Anmerkung 6.3.10).

Anmerkung 6.3.18 Etliche Heuristiken lassen sich basierend auf der Eckpunktdarstellung sehr effizient berechnen. Grund hierfür ist, dass sich viele der in Heuristiken verwandten Kenngrößen als Optimierungsproblem

$$\max f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{p}) \quad \text{u.d.N.} \quad \boldsymbol{p} \in W$$

auffassen lassen (siehe hierzu auch Anmerkung 6.2.4 und Kapitel 5). Ein Satz aus der linearen Programmierung (vgl. Resultat 7.2.5) besagt, dass im Falle linearer Optimierungsprobleme (d.h., die Funktion $f_{\boldsymbol{a}}$ ist linear und W eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation) das Optimum an einem Extrempunkt (Eckpunkt) angenommen wird (und möglicherweise noch an weiteren Punkten).

Insofern müssen zur Lösung derartiger Optimierungsprobleme ausschließlich die Funktionswerte an den Eckpunkten von W berechnet werden (was – sofern die Eckpunkte vorliegen – sehr effizient möglich ist) und anschließend das Maximum der Funktionswerte ermittelt werden.

Darüber hinaus unterstützt die Eckpunktdarstellung optimal die in Abschnitt 5.6 behandelten OWA-Heuristiken. Deren Kernidee ist gerade, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen an den Eckpunkten von W als Grundlage zur Berechnung einer Kenngröße zu verwenden.

Anmerkung 6.3.19 Zweifelsohne ist die Aussage von Anmerkung 6.3.18 Grund genug, dass der Eckpunktdarstellung ein wichtiger Stellenwert als *interne* Repräsentation zukommt.

Auf der anderen Seite sind wir allerdings der Meinung, dass sie sich *nicht* – zumindest nicht besonders gut – als *externe* Repräsentation eignet. Unserer Meinung nach ist es für einen menschlichen Agenten relativ umständlich, aus den Eckpunkten auf die entsprechende Wahrscheinlichkeitsinformation zu schließen. Zudem halten wir es für eher unrealistisch, dass ein Agent aufgrund der ihm vorliegenden Informationen die Eckpunkte der linearen Wahrscheinlichkeitsinformation angeben kann. (Vergleiche zu diesen Ausführungen jedoch die in Anmerkung 6.2.2 erwähnten Einschränkungen.)

6.3.4 Umrechnung zwischen den Darstellungen

Anmerkung 6.3.20 Nachdem wir nun zwei verschiedene Darstellungen linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen – die Standardrepräsentation (Unterabschnitt 6.3.2) und die Eckpunktdarstellung (Unterabschnitt 6.3.3) – eingeführt haben, stellt sich auf natürliche Weise die Frage, wie man die Repräsentationen ineinander übersetzen kann (vgl. auch Fußnote 10).

Hierzu erweist sich das nachfolgende Resultat als sehr hilfreich.

Resultat 6.3.21 Sei $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ eine Standardrepräsentation einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation W. Ein Punkt $\boldsymbol{p} \in W$ ist genau dann ein Extrempunkt von W, wenn er n linear unabhängige Nebenbedingungen aus $\boldsymbol{Cp} \leq \boldsymbol{b}$ *als Gleichung* erfüllt (siehe beispielsweise [NM93, S. 49-51]).[16]

Anmerkung 6.3.22 Sowohl Dellmann (vgl. [Del97, S. 129ff]) als auch Kofler und Menges (vgl. [KM76, S. 95ff]) behaupten, dass ein Punkt $\boldsymbol{p} \in W$ genau dann ein Extrempunkt von W ist, wenn (bezüglich einer Standardrepräsentation $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ von W) n Nebenbedingungen mit Gleichheit erfüllt sind. Zwar ist diese Bedingung tatsächlich notwendig (vgl. Resultat 6.3.21), sie ist jedoch *nicht* hinreichend und insofern gilt die genau-dann-wenn Beziehung *nicht*![17] Das Problem besteht darin, dass die Nebenbedingungen nicht linear unabhängig sein müssen, dies jedoch für die behauptete Charakterisierung von Extrempunkten vorausgesetzt werden müsste!

Anmerkung 6.3.23 Sei eine Standardrepräsentation $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation W gegeben. Um die Eckpunkte von W zu bestimmen, kann wie folgt vorgegangen werden:

(1) Eliminiere sukzessive linear abhängige Ungleichungen bis ein (maximales) System $(\boldsymbol{C'}, \boldsymbol{b'})$ linear unabhängiger Ungleichungen resultiert.

(2) Wähle jede mögliche Kombination aus n Ungleichungen aus $(\boldsymbol{C'}, \boldsymbol{b'})$. Löse die entsprechenden Gleichungen (d.h. behandle die n gewählten Ungleichungen als Gleichungen) und teste, ob die restlichen Ungleichungen erfüllt sind (die Lösung $\boldsymbol{p}$ also zu W gehört). Ist dies der Fall, so gehört $\boldsymbol{p}$ zu der Eckpunktemenge.

Dieses Verfahren wird (allerdings ohne Schritt (1)) u.a. in [KM76], [Kof89] und [Del97] vorgeschlagen.

Anmerkung 6.3.24 Das angegebene Verfahren hat einen beträchtlichen Zeitaufwand, aufgrund von Schritt (2) müssen $\binom{m'}{n}$ lineare Gleichungssysteme gelöst werden (wobei m' die Anzahl der Nebenbedingungen in $(\boldsymbol{C'}, \boldsymbol{b'})$ bezeichnet).

Anmerkung 6.3.25 Eine Umrechnung ist selbstverständlich auch in die andere Richtung möglich (also die Berechnung einer Standardrepräsentation aus einer gegebenen Eckpunktdarstellung), wenngleich dieser Fall weitaus seltener betrachtet wird.[18] Wir verzichten auf diesbezügliche Details, da wir die Umrechnung im Folgenden nicht benötigen werden.

[16] Die lineare Unabhängigkeit bezieht sich dabei auf die als Gleichung formulierten Nebenbedingungen, d.h., ein Extrempunkt $\boldsymbol{p} \in W$ liegt auf n linear unabhängigen Hyperebenen.

[17] Ein triviales Gegenbeispiel erhält man für den Fall $n = 3$ und die Nebenbedingungen $p_1+p_2+p_3 \leq 1$, $-p_1 - p_2 - p_3 \leq -1$, $-p_i \leq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $-2p_1 \leq 0$ und $-3p_1 \leq 0$. Offenbar erfüllt der Punkt $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3) = (0, 0.5, 0.5)$ drei (nicht linear unabhängige) Nebenbedingungen als Gleichung, ist aber dennoch kein Extrempunkt der durch die Nebenbedingungen beschriebenen Wahrscheinlichkeitsinformation. (Das Problem ist offenkundig, dass die entsprechenden Nebenbedingungen nicht linear unabhängig sind, der Punkt $\boldsymbol{p}$ liegt auf nur *zwei* linear unabhängigen Hyperebenen.)

[18] Grund hierfür ist vermutlich, dass sich die Standardrepräsentation zumeist auf sehr natürliche Weise ergibt (z.B. weil sie als externe Repräsentation verwandt wird). Hieraus wird dann mit dem in Anmerkung 6.3.23 angesprochenen Verfahren die Eckpunktdarstellung als *zusätzliche* interne Repräsentation berechnet um die Auswertung einiger Heuristiken zu optimieren (vgl. Anmerkung 6.3.18).

6.4 Die Präzisierung einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation

6.4.1 Grundsätzliches

Anmerkung 6.4.1 Wir hatten bisher die Präzisierung von *Entscheidungsproblemen* betrachtet. Dabei ist $(A, W') \in \mathbb{E}$ eine Präzisierung von $(A, W) \in \mathbb{E}$, wenn $W' \subseteq W$ gilt (vgl. Definition 4.2.3). Tatsächlich haben wir also eher Präzisierungen der *Wahrscheinlichkeitsinformation* behandelt, diesen Begriff aber noch nicht explizit festgelegt. Dies holen wir nun nach.

Definition 6.4.2 (Präzisierung einer Wahrscheinlichkeitsinformation)
Seien $W, W' \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen. Wir nennen W eine **Präzisierung** von W', wenn $W \subseteq W'$ gilt. (W' bezeichnen wir dann auch als **Vergröberung** von W.) Gilt $W \subset W'$ so nennen wir W eine **echte Präzisierung** (und analog W' eine **echte Vergröberung**).

Anmerkung 6.4.3 Der Begriff der Präzisierung bezieht sich zunächst auf die mathematischen Objekte: Entfernt man beispielsweise aus einer Wahrscheinlichkeitsinformation W einen beliebigen Punkt $\boldsymbol{p} \in W$ samt seiner ε-Umgebung (für ein $\varepsilon > 0$), so gelangt man zu einer echten Präzisierung W' von W.

Demgegenüber muss man bei der Präzisierung wie wir sie später verwenden werden zwei weitere Dinge beachten. Zum einen beschränken wir uns – wie gesagt – auf lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen. Demzufolge muss die Präzisierung derart erfolgen, dass ausgehend von einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation W wieder eine *lineare* Wahrscheinlichkeitsinformation $W' \subseteq W$ resultiert. Beim Entfernen eines Punktes (möglicherweise samt seiner ε-Umgebung) würde diese Bedingung i.Allg. verletzt. Zum zweiten muss sich die Präzisierung an der Repräsentation orientieren. Denn letztendlich wird beim LAZY DECISION MAKING der Agent "gebeten", die vorliegende Wahrscheinlichkeitsinformation zu präzisieren und dies geschieht basierend auf deren Repräsentation.[19]

6.4.2 Standardrepräsentation

Anmerkung 6.4.4 Wir werden nun untersuchen, wie sich anhand der Standardrepräsentation eine Präzisierung durchführen lässt. Genauer: Gegeben ist eine Standardrepräsentation $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation W und wir möchten von $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ übergehen zu einer Repräsentation $(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{b}')$ einer Präzisierung W' von W. Dabei soll natürlich ein Zusammenhang zwischen den Repräsentationen $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ und $(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{b}')$ bestehen. Dies wird sich dadurch äussern, dass wir entweder neue Nebenbedingungen hinzufügen oder bestehende Nebenbedingung "verschärfen".

[19]Die Präzisierung wird dabei allerdings nicht willkürlich sondern zielgerichtet sein. Zielgerichtet meint dabei, dass der Agent mit Informationen unterstützt wird, die ihm anzeigen, welche Präzisierungen besonders aussichtsreich (in Hinblick auf eine festzulegende Zielsetzung) erscheinen.

Anmerkung 6.4.5 Um besser zwischen den tatsächlich in der Standardrepräsentation einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation auftretenden Nebenbedingungen und solchen, die nur indirekt (implizit) vorhanden sind, zu unterscheiden, benötigen wir zunächst zwei geeignete Begriffe.

Definition 6.4.6 (Explizite Nebenbedingungen) Eine Nebenbedingung der Form $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p} \leq b$ heisst **explizit** bezüglich der Repräsentation $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ genau dann, wenn ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ existiert mit $(\boldsymbol{C}_{i,*})^T = \boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{b}_i = b$.

Definition 6.4.7 (Implizite Nebenbedingungen, minimale Schranke) Sei $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ und W eine nichtleere lineare Wahrscheinlichkeitsinformation. Die implizite Nebenbedingung bezüglich W und $\boldsymbol{c}$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p} \leq b$$

mit $b := \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\}$.[20] Den Wert b bezeichnen wir als **minimale Schranke** der impliziten Nebenbedingung.[21]

Anmerkung 6.4.8 Offenbar verändert das Hinzufügen impliziter Nebenbedingungen nicht die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems.

Anmerkung 6.4.9 Wir können nun grundsätzlich eine Nebenbedingung der Form $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p} \leq b$ dadurch verändern, dass wir entweder an $\boldsymbol{c}$ oder an b (oder an beiden Elementen) “drehen”. Grafisch lässt sich sich dies wie folgt interpretieren: Die Gleichung $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p} = b$ definiert eine *Hyperebene* im $\mathbb{R}^n$, entsprechend ist die Menge $\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \,|\, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p} \leq b\}$ gerade ein durch diese Hyperebene definierter Halbraum. Verändern wir b, so verschieben wir die Hyperebene orthogonal. Eine Veränderung von $\boldsymbol{c}$ hingegen dreht die Hyperebene im Raum.

Für das *Präzisieren* erscheint unserer Meinung nach das “Verschärfen” der Nebenbedingung im Sinne einer Veränderung von b das geeignete Vorgehen zu sein. Grund hierfür ist, dass der Agent mit Hilfe des Vektors $\boldsymbol{c}$ die Zustandswahrscheinlichkeiten zueinander in Beziehung setzt (in Form einer gewichteten Summe) und diese nach oben durch b beschränkt. Es erscheint durchaus plausibel, dass die Schranke b verschärft werden kann, denn letztendlich ist b in den allermeisten Fällen keine “Naturkonstante” sondern lediglich ein Maß für ein subjektives Empfinden oder Zutrauen. Demgegenüber ist die Zusammensetzung der Zustandswahrscheinlichkeiten – also der Vektor $\boldsymbol{c}$ – häufig *exakt* durch die hinter der Nebenbedingung stehende Überlegung determiniert. Wir versuchen dieses Argument im nachfolgenden Beispiel 6.4.10 zu illustrieren. Darüber hinaus untermauern die in Abschnitt 6.5 zu betrachtenden speziellen Klassen linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen unsere Meinung, denn auch dort wird $\boldsymbol{c}$ zumeist eine spezielle Gestalt haben (z.B. $\boldsymbol{c} \in \{-1, 0, 1\}^n$) wohingegen b frei gewählt werden kann.[22]

[20] Die Existenz von b ist aufgrund der Kompaktheit von W garantiert.

[21] Die Minimalität (und damit die Bezeichnung) resultiert aus der Tatsache, dass b die kleinste Schranke für die Nebenbedingung $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p} \leq b$ darstellt, so dass durch deren Hinzufügen kein $\boldsymbol{p} \in W$ ausgeschlossen wird.

[22] Wiederum lässt sich hier aber keine wirklich zufriedenstellende Begründung für unser Vorgehen angeben, da wir die dazu notwendigen Begriffe nicht geeignet operationalisieren können.

Beispiel 6.4.10 Die Zustandsmenge sei $\{1, \ldots, 5\}$. Ist der Agent der Meinung, dass die Zustände 1, 2 und 3 zusammen höchstens eine Wahrscheinlichkeit von 0.4 haben, so lässt sich dies offenbar durch folgende Nebenbedingung ausdrücken:

$$(1, 1, 1, 0, 0)^T \boldsymbol{p} \leq 0.4.$$

Es erscheint plausibel, dass der Agent in vielen Fällen die Schranke von 0.4 verschärfen kann, z.B. auf 0.38. Dies verschärft offenbar die Nebenbedingung in dem Sinne, dass die Einschränkung stärker wird und entsprechend die resultierende Wahrscheinlichkeitsinformation präzisiert wird (im Sinne von Definition 6.4.2).

Demgegenüber hat der Vektor $\boldsymbol{c} = (1, 1, 1, 0, 0)$ eine klare Semantik (er steht für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der eintretende Zustand 1, 2 oder 3 ist) und ein "Drehen" an den Komponenten des Vektors erscheint kaum nachvollziehbar für den Agenten. Plakativ formuliert halten wir es für fraglich, ob der Agent etwa die Nebenbedingung

$$(0.98, 1.02, 1.005, 0.01, 0.01)^T \boldsymbol{p} \leq 0.4$$

in irgendeiner Form sinnvoll interpretieren kann.[23]

Definition 6.4.11 (ε-Verschärfung einer Nebenbedingung) Unter der **ε-Verschärfung** einer Nebenbedingung der Form $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{p} \leq b$ verstehen wir die Nebenbedingung $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{p} \leq b - \varepsilon$ (mit $\varepsilon \geq 0$).

Anmerkung 6.4.12 Wir haben nun die notwendigen Begrifflichkeiten um zu diskutieren, wie wir basierend auf der Standardrepräsentation eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation W präzisieren können. Gegeben sei also eine Standardrepräsentation $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ von W und Ziel ist, hieraus die Standardrepräsentation $(\boldsymbol{C'}, \boldsymbol{b'})$ einer Präzisierung W' von W zu bestimmen (wobei W' wiederum eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation ist). Dazu verwenden wir die beiden folgenden Methoden (ggf. mehrfach):

(1) *ε-Verschärfung einer expliziten Nebenbedingung:* Der Agent wählt eine *explizite* Nebenbedingung $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{p} \leq b$ aus der Standardrepräsentation $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ und gewinnt die neue Standardrepräsentation $(\boldsymbol{C'}, \boldsymbol{b'})$ indem er $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{p} \leq b$ um $\varepsilon > 0$ verschärft und alle anderen Nebenbedingungen unverändert übernimmt.

(2) *ε-Verschärfung einer impliziten Nebenbedingung:* Der Agent "überlegt" sich zunächst einen Vektor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. Nun entstehe $(\boldsymbol{C'}, \boldsymbol{b'})$ indem zu $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b})$ eine ε-Verschärfung der *impliziten* Nebenbedingung bezüglich W und $\boldsymbol{c}$ hinzugefügt wird.

Anmerkung 6.4.13 Bei der ε-Verschärfung einer impliziten Nebenbedingung wird im "realen" Verfahren (in unserer Implementierung) zunächst die minimale Schranke der impliziten Nebenbedingung berechnet und dem Agenten als Grundlage zur

[23] Neben der Verschärfung bestehender Nebenbedingung kann der Agent beim Lazy Decision Making jederzeit *neue* Nebenbedingungen einbringen, so dass er die letztgenannte Ungleichung – sofern diese eine nachvollziehbare Bedeutung für ihn hat – *explizit* einbringen kann.

Verfügung gestellt (vgl. Definition 6.4.7). Insofern entspricht das Vorgehen dann exakt der Vorgehensweise beim Verschärfen einer expliziten Nebenbedingung (da die Nebenbedingung durch die Berechnung der minimalen Schranke gewissermaßen zunächst explizit gemacht wird).

Anmerkung 6.4.14 Es mag auf den ersten Blick befremdlich erscheinen, dass sich (bei der Verschärfung einer impliziten Nebenbedingungen) der Agent einen Vektor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ "*überlegt*". Tatsächlich wird $\boldsymbol{c}$ zumeist eine sehr einfache Form haben (zum Beispiel $\boldsymbol{c} \in \{-1, 0, 1\}^n$) mit dem Hintergrund, dass dann für den Agenten eine sinnvolle Interpretation möglich ist (vgl. auch Beispiel 6.4.10). Wir gehen auf diesbezüglich Aspekte näher im Rahmen der speziellen Klassen linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen ein (in Abschnitt 6.5).

6.4.3 Eckpunktdarstellung

Anmerkung 6.4.15 Wir halten – wie bereits in Anmerkung 6.3.19 erwähnt – die Eckpunktdarstellung einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation für ungeeignet für die Kommunikation mit dem Agenten. Insofern dient dieser Unterabschnitt eher der Vollständigkeit und beschränkt sich auf eine sehr kurze Diskussion denkbarer Operationen, mit denen eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation basierend auf ihrer Eckpunktdarstellung präzisiert werden kann.

Anmerkung 6.4.16 Gegeben sei die Eckpunktdarstellung $\mathrm{eck}(W) = \{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N\}$ einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation W. Folgende Methoden können (z.B.) zur Präzisierung von W (basierend auf $\mathrm{eck}(W)$) angewendet werden:

(1) *Entfernen einer Ecke:* Durch das Entfernen einer Ecke, also den Übergang zu $\mathrm{eck}(W) \backslash \{\boldsymbol{p_k}\}$ für ein $k \in \{1, \ldots, N\}$ erhalten wir die Eckpunktdarstellung einer präzisierten linearen Wahrscheinlichkeitsinformation.[24]

(2) *Verschieben einer Ecke:* Des Weiteren kann ein Eckpunkt $\boldsymbol{p_i}$ innerhalb von W "verschoben" werden. D.h., anstelle von $\boldsymbol{p_i}$ wird ein neuer Eckpunkt $\boldsymbol{p'_i} \in W$ ausgewählt.[25]

6.4.4 Informationsgehalt einer Präzisierung

Anmerkung 6.4.17 Kofler und Menges definieren die *relative LPI-Entropie* $\mathrm{H}(W)$ einer Wahrscheinlichkeitsinformation als Quotienten aus dem Volumen des

[24] Offenbar ist die konvexe Hülle einer Teilmenge von X stets eine Teilmenge der konvexen Hülle von X (mit $X \subseteq \mathbb{R}^n$). Insofern führt das Entfernen einer Ecke tatsächlich zu einer Präzisierung der (linearen) Wahrscheinlichkeitsinformation.

[25] Da der neue Eckpunkt in W liegt, kann die konvexe Hülle der Eckpunktmenge nicht größer werden; insofern liegt wieder eine Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation vor. Vermutlich würde man in konkreten Anwendungen den neuen Eckpunkt aus dem *Inneren* von W wählen (und dieser neue Eckpunkt bezüglich einer geeigneten Metrik "nahe" bei dem alten Eckpunkt liegen).

W entsprechenden Polytops und dem Volumen des Wahrscheinlichkeitssimplexes (vgl. [KM76, S. 129]):

$$\mathrm{H}(W) = \frac{\mathrm{Vol}(W)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{(n)})}.$$ [26]

Basierend auf diesem Begriff lässt sich der *Informationsgehalt* einer Präzisierung festlegen. Wird die lineare Wahrscheinlichkeitsinformation W zu W' präzisiert, so entspricht die Entropiedifferenz

$$\mathrm{H}(W) - \mathrm{H}(W') = \frac{\mathrm{Vol}(W) - \mathrm{Vol}(W')}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{(n)})}$$

gerade dem Informationsgehalt der Präzisierung.

Anmerkung 6.4.18 Wenngleich das Konzept des Informationsgehalts einer Präzisierung zunächst auch für das Lazy Decision Making vielversprechend erscheint, lässt es sich dennoch dort kaum gewinnbringend anwenden. Das Hauptproblem besteht darin, dass der Informationsgehalt lediglich die Entropieabnahme misst, also letztendlich "nur" misst, wie viele zuvor denkbare Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch die Präzisierung ausgeschlossen werden. Demgegenüber ist beim Lazy Decision Making der entscheidende Gesichtspunkt, *zielgerichtet* zu präzisieren in dem Sinne, dass sich die "Qualität" der Entscheidung (gemessen durch die Verwendung geeigneter Maße) verbessert. Demzufolge sind diese Maße jedoch vom *gesamten* Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ abhängig und können nicht ausschließlich an der Wahrscheinlichkeitsinformation W festgemacht werden. Der "Nutzen" einer Präzisierung hängt maßgeblich von der Alternativenmenge A ab!

Wir werden daher im Folgenden das Entropiemaß für Wahrscheinlichkeitsinformationen sowie das Konzept des Informationsgehalts einer Präzisierung *nicht* weiter verwenden.

6.5 Spezielle Klassen linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen

6.5.1 Motivation

Anmerkung 6.5.1 Im Rahmen der Entscheidungstheorie und der quantitativen Modellierung von nicht-perfekten Informationen wurden eine Reihe verschiedener Ansätze vorgeschlagen und diskutiert, welche die herkömmlichen Punktwahrscheinlichkeiten entweder direkt verallgemeinern (siehe z.B. [HP99]) oder zumindest eine derartige Interpretation erlauben.[27] Wir behandeln hier einige dieser Ansätze, die

[26] Die Definition der relativen LPI-Entropie basiert nicht auf dem klassischen Entropiemaß nach Shannon (vgl. [SW49] und Abschnitt 5.4) sondern auf einer *geometrischen* Wahrscheinlichkeit.

[27] Die Evidenztheorie ist ein Beispiel für eine Theorie, die – zumindest in den Augen einiger namhafter Verfechter wie Philippe Smets – *keine* Verallgemeinerung von Punktwahrscheinlichkeiten sondern ein anderes Konzept darstellt. Trotzdem ist die wahrscheinlichkeitsbasierte Interpretation der Evidenztheorie absolut konsistent mit dem Modell und andere Autoren verfechten tatsächlich diese Deutung (vgl. [KM94]).

sich als Spezialfälle linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen auffassen lassen.

Anmerkung 6.5.2 Die Betrachtung dieser speziellen Klassen linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen hat zwei wesentliche Hintergründe. Zum einen verdeutlicht sie beispielhaft die Ausdrucksfähigkeit linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen (indem gezeigt wird, welche (zum Teil) bekannteren Theorien subsumiert werden). Zum anderen liefert sie einen wichtigen Anhaltspunkt dafür, welche Art von Nebenbedingungen ein Agent möglicherweise "gut interpretieren kann" (diese können dann beispielsweise zur ε-Verschärfung impliziter Nebenbedingungen verwandt werden, vgl. Anmerkung 6.4.14). Denn letztendlich ist ein Vorteil aller hier zu behandelnden spezielleren Klassen, dass die dort verwandten Nebenbedingungen aufgrund ihrer speziellen Struktur eine einfachere Interpretation als allgemeine Nebenbedingungen besitzen.

Anmerkung 6.5.3 Allen nachfolgenden Ausführungen liegt die Standardinterpretation aus Anmerkung 3.3.4 zu Grunde. Wir nehmen also an, dass eine wahre aber potenziell unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \mathbb{S}^{(n)}$ existiert.

6.5.2 Intervallwahrscheinlichkeiten

Anmerkung 6.5.4 Intervallwahrscheinlichkeiten sind die wohl naheliegendste Verallgemeinerung von Punktwahrscheinlichkeiten. Die einfach anmutende Idee ist, anstelle von reellen Wahrscheinlichkeiten diese "nur" durch Intervalle zu begrenzen. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ werden geeignete $0 \leq \alpha_i \leq \beta_i \leq 1$ gewählt, so dass diese die Punktwahrscheinlichkeit ρ_i als Intervall begrenzen, also $\rho_i \in [\alpha_i, \beta_i]$ gilt. Dieser Ansatz wurde bereits von Fishburn in [Fis65] untersucht.

Anmerkung 6.5.5 Betrachtet man ausschließlich die Intervallschranken, so erhält man als geometrisches Objekt einen achsenparallelen Hyperquader. Die zusätzliche Bedingung $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1$ "schneidet" dieses Objekt gewissermaßen ab.

Anmerkung 6.5.6 Eine Intervallschranke der Form $\rho_i \in [\alpha_i, \beta_i]$ lässt sich offenbar in die beiden folgenden Nebenbedingungen übersetzen:

$$-\rho_i \leq -\alpha_i \quad \text{und} \quad \rho_i \leq \beta_i.$$

Für die Intervallschranken entsprechenden Nebenbedingungen $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{p} \leq b$ gilt daher $\boldsymbol{c} \in \{-1, 0, 1\}^n$ und $c_i \neq 0$ für *genau* ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Anmerkung 6.5.7 Im Rahmen der Mathematik gibt es einen ganzen Zweig – die sogenannte *Intervallmathematik* – der sich mit der Entwicklung und Untersuchung von Rechenmethoden für Intervalle beschäftigt. Unter anderem existiert eine Intervall*arithmetik*, die bezüglich ihrer Eigenschaften nicht unerheblich von der "normalen" Arithmetik auf den reellen Zahlen abweicht. Durch Anwendung der Methoden aus der Intervallmathematik lässt sich mit Intervallwahrscheinlichkeiten "rechnen" (vgl. [Moo79, AH83]).[28]

6.5.3 Dempster-Shafer Evidenztheorie

Anmerkung 6.5.8 Die DEMPSTER-SHAFER Evidenztheorie[29] ist – zumindest wenn man eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation wählt, für einen anderen Ansatz siehe [SK94] – eine "natürliche" Fortsetzung des klassischen Intervallansatzes. Wurden dort lediglich *einzelne* Wahrscheinlichkeiten durch Intervalle beschränkt, so erlaubt die Evidenztheorie auch die Beschränkung von *Summen* von Wahrscheinlichkeiten. Die Motivation für dieses Vorgehen ist, dass man jeden einzelnen Zustand als *atomares Ereignis* (oder Elementarereignis), eine Menge von Zuständen hingegen als (allgemeines) *Ereignis* auffassen kann. Insofern werden bei den Intervallwahrscheinlichkeiten Intervalle für die atomaren Ereignisse, bei der Evidenztheorie hingegen für beliebige Ereignisse zugelassen.

Anmerkung 6.5.9 Es ist $\rho_i = \Pr(\{i\})$ die Wahrscheinlichkeit des i-ten Zustands. Für das Folgende sei $\Theta := \{1, \dots, n\}$ die Zustandsmenge, wobei man im Rahmen der Evidenztheorie zumeist von dem *Universum* spricht. Eine Teilmenge X von Θ bezeichnet ein Ereignis, nämlich das Eintreten eines der Zustände aus X. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist offenbar $\Pr(X) = \sum_{i \in X} \rho_i$.

Anmerkung 6.5.10 Charakterisierend für die Evidenztheorie ist, dass für jedes Ereignis $X \subseteq \Theta$ *zwei* Maße $\mathrm{Bel}(X)$ und $\mathrm{Pl}(X)$ definiert sind. Dabei bezeichnet $\mathrm{Bel}(X)$ das *Zutrauen* (belief) in X und ist ein Maß für die Summe der Gründe, die für X sprechen. Dual dazu ist $\mathrm{Pl}(X)$ die *Plausibilität* von X, ein Maß für die Summe der Gründe, die nicht gegen X sprechen. Dem wahrscheinlichkeitsorientierten Ansatz folgend liegt die Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses X innerhalb dieser Grenzen, es gilt $\Pr(X) \in [\mathrm{Bel}(X), \mathrm{Pl}(X)]$ für alle $X \subseteq \Theta$. In der Evidenztheorie müssen die Maße Bel und Pl einigen zusätzlichen Eigenschaften genügen, z.B. $\mathrm{Bel}(\emptyset) = 0$ und $\mathrm{Pl}(\Theta) = 1$. Unter Ausnutzung dieser Eigenschaften lässt sich zeigen, dass

$$\mathrm{Bel}(X) = 1 - \mathrm{Pl}(\Theta \setminus X) \quad (\forall X \subseteq \Theta)$$

gilt, sich die Maße also in diesem Sinne dual zueinander verhalten.

Die Maße Bel und Pl verhalten sich im Allgemeinen *nicht* additiv, d.h. für $X, Y \subseteq \Theta$ mit $X \cap Y = \emptyset$ gilt *nicht* notwendigerweise $\mathrm{Bel}(X \cup Y) = \mathrm{Bel}(X) + \mathrm{Bel}(Y)$ (und

[28] Diese Arithmetik weicht in ihren Eigenschaften deutlich von der normalen Arithmetik auf $\mathbb{R}$ ab, beispielsweise gilt *nicht* das Distributivgesetz sondern nur noch $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$ (für beliebige Intervalle $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ und die übliche Intervalladdition "+" sowie Intervallmultiplikation "·", siehe z.B. [Ban97, S58ff]).

[29] Die vermutlich beste Einführung in die Evidenztheorie findet sich nach wie vor in dem grundlegenden Buch von SHAFER ([Sha76]). Einen exzellenten Überblick über die vielen Aspekte und insbesondere auch Interpretationen der Theorie beinhaltet der Artikel [KM94] von KOHLAS und MONNEY, eine knappe Einführung findet sich in [Pre99].

analog für Pl).[30]

Für diverse Berechnungen (insbesondere die Kombination von Evidenzmaßen) ist ein weiteres Maß (vgl. die nachfolgende Definition 6.5.11), aus dem sich sowohl Bel als auch Pl bestimmen lassen, geeigneter.

Definition 6.5.11 (bpa) Eine Funktion $m : \mathcal{P}(\Theta) \to [0,1]$ mit $\sum_{X\subseteq\Theta} m(X) = 1$ und $m(\emptyset) = 0$ heisst **basic probability assignment** (kurz **bpa**).[31]

Anmerkung 6.5.12 Anschaulich lässt sich der Wert $m(X)$ interpretieren als diejenige Wahrscheinlichkeitsmasse (im Sinne einer einfacheren Beschreibung verzichten wir hier *nicht* auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit), die *genau* dem Ereignis bzw. der Menge X zugeordnet wird und nicht weiter auf die Elemente von X verteilt werden kann (vgl. [Pre99]).

Definition 6.5.13 (Induzierte Maße Bel und Pl) Die durch ein bpa m auf Θ induzierten Belief- und Plausibilitätsmaße $\mathrm{Bel}, \mathrm{Pl} : \mathcal{P}(\Theta) \to [0,1]$ sind definiert durch

$$\mathrm{Bel}(X) := \sum_{Y\subseteq X} m(Y) \quad \text{und} \quad \mathrm{Pl}(X) := \sum_{Y\subseteq\Theta\,|\,Y\cap X\neq\emptyset} m(Y).$$

Anmerkung 6.5.14 Entsprechend der inhaltlichen Motivation für die beiden Maße Bel und Pl (Anmerkungen 6.5.10) sowie der Interpretation des bpa m (Anmerkung 6.5.12) stellt Definition 6.5.13 die folgerichtige Festlegung dar: Beispielsweise wird auf $\mathrm{Pl}(X)$ die "Wahrscheinlichkeitsmasse" $m(Y)$ aller (Ereignisse) Y verteilt, die nicht gegen X sprechen, für die also $Y \cap X \neq \emptyset$ gilt.

Definition 6.5.15 (Wahrscheinlichkeitsinformation $\mathbb{P}$) Zu einem bpa m sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ definiert durch

$$\mathbb{P} := \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{S}^{(n)} \,|\, (\forall X \subseteq \Theta) \sum_{i\in X} p_i \in [\mathrm{Bel}(X), \mathrm{Pl}(X)]\}$$

Anmerkung 6.5.16 Es ist $\mathbb{P}$ also gerade die durch ein bpa m erzeugte lineare Wahrscheinlichkeitsinformation, wobei wir im Sinne einer besseren Lesbarkeit in der Definition 6.5.15 das durch m induzierte Belief- und Plausibilitätsmaß (vgl. Definition 6.5.13) verwendet haben und bei der Bezeichnung $\mathbb{P}$ auf das Kennzeichnen des zu Grunde liegenden bpa m verzichten.

Nachfolgend sehen wir, dass die erzeugte lineare Wahrscheinlichkeitsinformation $\mathbb{P}$ eine sehr spezielle Struktur aufweist.

[30] Zum Beispiel ist Bel mit $\mathrm{Bel}(\Theta) = 1$ und $\mathrm{Bel}(X) = 0$ für alle $X \subset \Theta$ ein Belief-Maß, das sich offenbar für $|\Theta| > 1$ nicht additiv verhält. Gleiches gilt für das zugehörige Plausibilitätsmaß (es folgt $\mathrm{Pl}(X) = 1$ für $X \neq \emptyset$ und $\mathrm{Pl}(\emptyset) = 0$).

[31] In der deutschsprachigen Literatur findet man gelegentlich den Begriff der *grundlegenden Wahrscheinlichkeitszuweisung* (siehe z.B. [Ban97]) als Übersetzung. Im Prinzip sind allerdings beide Begriffe eher unglücklich gewählt, denn in etlichen Interpretation der Evidenztheorie hat ein bpa de facto *nichts* mit Wahrscheinlichkeiten zu tun (vgl. [KM94]), obwohl die Bezeichnungen dies natürlich suggerieren.

Bemerkung 6.5.17 Sei $\mathbb{P}$ durch das bpa m erzeugt. Dann existieren $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{C} \in \{-1,0,1\}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in [0,1]^m$, so dass $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{b})$ eine Standardrepräsentation von $\mathbb{P}$ ist. Insbesondere lässt sich dabei $\boldsymbol{C}$ so wählen, dass jede Zeile entweder nur aus den Elementen 0 und 1 oder nur den Elementen 0 und -1 besteht.

Beweis. Die Behauptung folgt fast unmittelbar aus Definition 6.5.15. □

Anmerkung 6.5.18 Erstaunlicherweise scheint sich wesentlich mehr Literatur der Evidenztheorie zu widmen als dass (lineare) Wahrscheinlichkeitsinformationen untersucht werden. Dies ist bemerkenswert, da – aufgrund von Bemerkung 6.5.17 – die Maße aus der Evidenztheorie einen *Spezialfall* linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen darstellen, gleichzeitig aber (zumindest unserer Meinung nach) die wichtigsten Ergebnisse der Evidenztheorie auch für die allgemeinere Theorie der (linearen) Wahrscheinlichkeitsinformationen gelten.

Angemerkt sei allerdings, dass es keine Entsprechung für das bpa (in der Theorie der Wahrscheinlichkeitsinformationen) gibt und dass in der Evidenztheorie insbesondere die *Kombination* von Evidenzmaßen (DEMPSTER's rule of combination, vgl. [Sha76]) betrachtet wird, auf die wir hier nicht eingehen.

6.5.4 Komparative Wahrscheinlichkeiten

Anmerkung 6.5.19 In der Literatur – beispielsweise bei FISHBURN ([Fis65]) – wird relativ häufig der Fall betrachtet, dass bezüglich der Wahrscheinlichkeiten ein *ordinales* Maß gegeben ist. Hierunter versteht man den Fall, dass sich die Wahrscheinlichkeiten *anordnen* lassen und damit durch geeignetes Nummerieren der Zustände $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \ldots \leq \rho_n$ gilt. Bezüglich dieses Spezialfalls lassen sich einige Aussagen herleiten, die wir hier allerdings nicht näher betrachten wollen (da dieser Fall für unsere Anwendungen unnötig speziell ist).

Anmerkung 6.5.20 Den Ansatz von ordinalen Maßen etwas verallgemeinernd könnte man unter komparativen Wahrscheinlichkeiten Aussagen der Form $\rho_i \leq \rho_j$ (mit $i,j \in \{1,\ldots,n\}$) verstehen oder – noch einen Schritt weiter – Aussagen wie

$$\sum_{i\in I}\rho_i \leq \sum_{j\in J}\rho_j$$

mit $I,J \subseteq \{1,\ldots,n\}$. Dieses Vorgehen führt offenbar zu Nebenbedingungen der Form $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p} \leq 0$ mit $\boldsymbol{c} \in \{-1,0,1\}^n$.

6.5.5 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Anmerkung 6.5.21 Wir haben bisher ausschließlich die *unbedingten* (oder *a priori*) Wahrscheinlichkeiten $\Pr(I)$ mit $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$ betrachtet. Demgegenüber ist es denkbar, dass in einigen Anwendungen eher Aussagen über *bedingte* (oder *a posterio*) Wahrscheinlichkeiten der Form $\Pr(I \mid J)$ $(I,J \subseteq \{1,\ldots,n\})$ getroffen werden können.[32]

[32] Es bezeichnet $\Pr(I \mid J)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses I unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass das Ereignis J bereits eingetroffen ist (vgl. etwa [Gne97, S. 54ff]).

Anmerkung 6.5.22 Wir möchten nachfolgend zeigen, dass sich jede lineare Beschränkung *einer* bedingten Wahrscheinlichkeit – also eine Beschränkung der Form

$$\alpha \Pr(I \mid J) \leq \beta \tag{6.1}$$

(mit $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$) – in eine "normale" lineare Nebenbedingung übersetzen lässt. Dazu verwenden wir das Multiplikationstheorem[33]

$$\Pr(I \mid J) \Pr(J) = \Pr(I \cap J)$$

und erhalten aus Gleichung (6.1) durch das Multiplizieren beider Seiten mit $\Pr(J)$

$$\begin{aligned}
& \alpha \Pr(I \mid J) \Pr(J) \leq \beta \Pr(J) \\
\iff \quad & \alpha \Pr(I \cap J) \leq \beta \Pr(J) \\
\iff \quad & \alpha \sum_{i \in (I \cap J)} p_i - \beta \sum_{i \in J} p_i \leq 0 \\
\iff \quad & \sum_{i \in (I \cap J)} (\alpha - \beta) p_i + \sum_{i \in (J \setminus I)} (-\beta) p_i \leq 0.
\end{aligned}$$

Diese letzte Ungleichung ist offenbar bereits eine lineare Nebenbedingung. Insgesamt resultiert also aus der linearen Beschränkungen *einer* bedingten Wahrscheinlichkeit eine lineare Nebenbedingung der Form $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{p} \leq 0$ mit $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.[34]

6.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

In der Literatur wird erstaunlich selten auf die *Darstellung* von Wahrscheinlichkeitsinformationen eingegangen, obwohl diese zentral für die Kommunikation mit dem Agenten ist. Insofern haben wir im Rahmen dieses Kapitels näher untersucht, wie *lineare* Wahrscheinlichkeitsinformationen (für interne und externe Zwecke) dargestellt werden können, was uns zu der Standard- und der Eckpunktdarstellung geführt hat.

Wir beschränken uns auf lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen, da diese (1) sehr natürliche Repräsentationen besitzen, (2) von dem Agenten unserer Meinung

---

Ein "Paradebeispiel" für die Anwendung von bedingten Wahrscheinlichkeiten in der Entscheidungstheorie resultiert aus zusammengesetzten Zustandsmengen. So könnte sich beispielsweise jeder Zustand S als Vektor $(S^{(1)}, S^{(2)})$ ergeben, wobei $S^{(1)}$ ein Maß für die Temperatur und $S^{(2)}$ ein Maß für die Windstärke am morgigen Tag ist. Hier wäre es nun denkbar, dass der Agent präzisere Aussagen über die Temperatur treffen kann, unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass der Wind sehr stark ist. Dies führt unmittelbar zu bedingten Wahrscheinlichkeiten.

[33] Im Prinzip resultiert das Multiplikationstheorem unmittelbar aus der definierenden Gleichung $\Pr(I \mid J) = \frac{\Pr(I \cap J)}{\Pr(J)}$ $(\Pr(J) \neq 0)$ für bedingte Wahrscheinlichkeiten (vgl. [Gne97, S. 56]). Es hat jedoch den zusätzlichen Vorteil, dass es auch für $\Pr(J) = 0$ anwendbar ist und damit eine Fallunterscheidung erspart.

[34] Entscheidend ist, dass nur *eine* bedingte Wahrscheinlichkeit in die Gleichung eingeht. Der allgemeinere Fall beliebiger linearer Kombinationen von bedingten Wahrscheinlichkeiten lässt sich i.Allg. nicht mehr durch lineare Ungleichungen in den Zustandswahrscheinlichkeiten erfassen (vgl. Fußnote 4 in diesem Kapitel für ein dies belegendes Gegenbeispiel).

gut verstanden (im Sinne von intuitiv erfasst) werden können, (3) eine für nahezu alle Anwendungen ausreichende Ausdruckskraft besitzen und (4) zu effizienten Algorithmen führen.

Insbesondere für die Standardrepräsentation haben wir untersucht, wie sich eine gegebene Wahrscheinlichkeitsinformation präzisieren lässt, was zu dem Konzept der ε-Verschärfung einer impliziten oder expliziten Nebenbedingung geführt hat.

Zuletzt haben wir die hohe Ausdruckskraft linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen illustriert indem wir gezeigt haben, dass wesentlich bekanntere Theorien bzw. Repräsentationsformalismen wie beispielsweise Intervallwahrscheinlichkeiten oder die Dempster-Shafer Evidenztheorie subsumiert werden. Deren Ausdruckskraft stehen demzufolge auch beim Lazy Decision Making voll zur Verfügung.

Kapitel 7

Zielgerichtetes Präzisieren: Aspekte der linearen Programmierung

In diesem Kapitel untersuchen wir, wie basierend auf der Standardrepräsentation lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen zielgerichtet präzisiert werden können. Einige Resultate aus der linearen Programmierung erlauben uns, Kenngrößen für Nebenbedingungen zu berechnen. Diese Kenngrößen geben Auskunft darüber, welche Auswirkungen eine Verschärfung der entsprechenden Nebenbedingung auf gewisse Qualitätsmaße haben, welche wir ebenfalls in diesem Kapitel einführen.

"Man muß es so einrichten, daß einem das Ziel entgegenkommt."

Theodor Fontane

"Alle Information dient gegenwärtig dazu, Antworten auf nicht gestellte Fragen zu geben und Angst zu machen vor zu stellenden."

Helmut Arntzen

7.1 Motivation

Wir haben bereits mehrfach darauf hingewiesen, dass die Hauptidee des Lazy Decision Making darin besteht, die lineare Wahrscheinlichkeitsinformation sukzessive *zielgerichtet* soweit zu präzisieren, dass eine "gute" Entscheidung getroffen werden kann. Durch dieses Vorgehen werden mehr Informationen direkt von dem Agenten eingebracht und die verwendete Heuristik hat dadurch weniger Einfluss. Die dahinterliegende Vermutung ist, dass der Agent – selbst wenn er sich nicht vollständig sicher ist – bessere Entscheidungen treffen kann, als dies durch eine Heuristik möglich ist. Eine genauere Erörterung der Vorzüge unseres Verfahrens findet sich in Kapitel 8.

Geklärt haben wir bereits, wie die *Präzisierung* stattfindet: Es werden implizite oder explizite Nebenbedingungen basierend auf der Standardrepräsentation verschärft (vgl. Kapitel 6). Bisher haben wir jedoch nicht betrachtet, wie diese Präzisierung *zielgerichtet* stattfinden kann. Die Kernidee hierbei ist, für jede explizite (und auf Anfrage auch für jede implizite) Nebenbedingung Kenngrößen zu Verfügung zu stellen. Diese sollen dem Agenten ein Maß dafür bereitstellen, welchen Einfluss eine ε-Verschärfung der jeweiligen Nebenbedingung auf noch festzulegende Qualitätsmaße hat und ihn somit bei der Auswahl "kritischer" Nebenbedingungen unterstützen.[1] In diesem Kapitel werden wir die Berechnung dieser Maße näher erläutern (Abschnitt 7.3) und insbesondere auch darauf eingehen, welche Maße wir als geeignet erachten (Abschnitt 7.4).

Die Berechnung der Maße basiert wesentlich auf Erkenntnissen und Resultaten aus dem Bereich der linearen Programmierung. Wir beginnen daher dieses Kapitel mit einem kleinen Exkurs (Abschnitt 7.2), in dem wir die für uns relevanten Ergebnisse aus diesem Bereich kurz vorstellen.

7.2 Exkurs: Lineare Programmierung

7.2.1 Motivation

Anmerkung 7.2.1 In der Theorie der linearen Programmierung werden lineare Optimierungsprobleme untersucht.[2] Für eine feste Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist eine lineare Zielfunktion in dem reellen Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ zu optimieren (maximieren oder minimieren), wobei $\boldsymbol{x}$ zusätzlich endlich ($m \in \mathbb{N}_0$) vielen linearen Nebenbedingungen gehorchen muss (also einem Ungleichungssystem der Form

$$C_{j,1}x_1 + C_{j,2}x_2 + \ldots + C_{j,n}x_n \leq b_j$$

mit $C_{j,i}, b_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, m$ und $i = 1, \ldots, n$) sowie der *Nichtnegativitätsbedingung* $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ (im Folgenden kurz $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$).[3]

[1] "Kritisch" meint hier, dass eine ε-Verschärfung der entsprechenden Nebenbedingung unmittelbaren Einfluss auf die Qualität der Lösung hat.

[2] "Der – überkommene – Name ist irreführend; es geht nicht in erster Linie ums Programmieren. Eine zutreffende Bezeichnung wäre 'Optimierung linearer Probleme'. Häufig wird sie interpretiert als die Kunst, knappe Ressourcen in optimaler Weise wirtschaftlichen Aktivitäten zuzuordnen. Sie ist heute Standardwerkzeug zur Lösung von Planungsproblemen bei Fluggesellschaften, Ölraffinerien, Banken, Autoherstellern und vielen anderen Firmen." [GP99]

[3] Da die Nichtnegativitätsbedingung insbesondere bei der in Unterabschnitt 7.2.3 zu besprechenden Dualisierung eine "Sonderrolle" spielt, haben wir sie nicht in die normalen Nebenbedingungen integriert sondern führen sie jeweils explizit auf. (Dies entspricht der gängigen Praxis im Bereich der linearen Programmierung, vgl. hierzu etwa [Dan66] oder [NM93].)

Üblicherweise fasst man die Nebenbedingungen in einer $m \times n$ Matrix

$$\boldsymbol{C} = (C_{j,i})_{j=1,\dots,m,i=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m,1} & C_{m,2} & \dots & C_{m,n} \end{pmatrix}$$

zusammen, so dass man zusammen mit dem Vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ kurz die Forderung $\boldsymbol{Cx} \leq \boldsymbol{b}$ (und $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$) erhält.

Anmerkung 7.2.2 Der Bezug zwischen den Entscheidungsproblemen einerseits und der linearen Programmierung andererseits ergibt sich durch die folgende (noch zu konkretisierende) Beobachtung: Viele der für ein Entscheidungsproblem bei partiellen Informationen relevanten Kenngrößen lassen sich als Ergebnis eines linearen Optimierungsproblems definieren (siehe hierzu auch Anmerkung 6.2.4 und allgemein Kapitel 5). Die Theorie der linearen Programmierung erlaubt neben der reinen *Berechnung* dieser Kenngrößen noch wesentlich mehr: Es lassen sich (z.B.) Daten gewinnen, die ein direktes Maß für die *Sensitivität* der Kenngrößen darstellen.[4]

Wir machen uns also gewissermaßen den "Werkzeugkasten" lineare Programmierung zu Nutze, um neben den reinen Kenngrößen weitere für uns wichtige Größen zu berechnen. Tatsächlich wird sich zeigen, dass genau diese Größen später die bereits angedeutete *zielgerichtete* Präzisierung der linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen ermöglichen.

7.2.2 Standardform und Lösungsverfahren

Definition 7.2.3 (Lineares Optimierungsproblem) Unter einem **linearen Optimierungsproblem** in Standardform verstehen wir eine Optimierungsaufgabe der Form

$$\max \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{p} \quad \text{u.d.N.} \quad \boldsymbol{Cp} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$$

mit $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ und $m \in \mathbb{N}_0$.[5]

Ein Punkt $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ heisst **zulässig**, wenn er die Nebenbedingungen $\boldsymbol{Cp} \leq \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$ erfüllt. Ein zulässiger Punkt $\boldsymbol{p}^*$ heisst (eine) **Lösung** des Optimierungsproblems, wenn $\boldsymbol{p}^*$ die Zielfunktion bezüglich aller zulässigen Punkte maximiert.

Anmerkung 7.2.4 Im Allgemeinen muss ein lineares Optimierungsproblem keine Lösung besitzen, da die Menge der zulässigen Punkte möglicherweise unbeschränkt oder leer ist.

[4]Man kann hier ohne Übertreibung von einer Art mitgelieferten Sensitivitätsanalyse sprechen. (Unter *Sensitivitätsanalyse* versteht man die Analyse der Wirkung von Veränderungen in den Eingangsdaten auf die Lösung, vgl. [Dan66, S. 305-317], [FH94, S. 245-254] und insbesondere [Din69].)

[5]Dabei ist "u.d.N." eine Abkürzung für "unter der Nebenbedingung". Gesucht ist also ein Vektor $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, der die Zielfunktion $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{p}$ maximiert und gleichzeitig den Nebenbedingungen $\boldsymbol{Cp} \leq \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$ genügt.

Demgegenüber ist im Falle einer nichtleeren, beschränkten zulässigen Menge

$$M = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \,|\, \boldsymbol{Cp} \leq \boldsymbol{b} \text{ und } \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}\}$$

diese (als abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$) auch kompakt und damit nimmt die (stetige) lineare Zielfunktion ihr Maximum an, es existiert also eine Lösung.

Resultat 7.2.5 Besitzt ein lineares Optimierungsproblem eine Lösung, so existiert auch ein Extrempunkt des zulässigen Bereichs (also der Menge der zulässigen Punkte), welcher ebenfalls eine Lösung des Optimierungsproblems ist.

Anmerkung 7.2.6 Der Beweis des Resultats 7.2.5 ist relativ einfach, wir möchten ihn aber dennoch nicht detailliert erläutern. Grob verläuft er wie folgt: Angenommen, $\boldsymbol{p}^*$ ist Lösung des linearen Optimierungsproblems aber kein Extrempunkt der zulässigen Menge M. Dann lässt sich $\boldsymbol{p}^*$ als konvexe Linearkombination aus Punkten von M darstellen (Satz von Krein-Milman, vgl. [TL80, S. 181ff]) und man kann zudem erreichen, dass mindestens ein Extrempunkt von M mit positivem Gewicht in diese Darstellung eingeht. Aufgrund der Linearität der Zielfunktion und der Optimalität von $\boldsymbol{p}^*$ folgt hieraus unmittelbar, dass auch der Zielfunktionswert am Extrempunkt optimal sein muss. Für einen ausführlichen Beweis verweisen wir auf [NM93, S. 48-49].

Anmerkung 7.2.7 Lineare Optimierungsprobleme lassen sich mit dem von George Dantzig 1947 vorgestellten *Simplex-Verfahren* lösen ([Dan66]). Der Algorithmus hat zwar eine exponentielle (worst-case) Laufzeit, erweist sich in der Praxis aber (nicht zuletzt durch diverse Effizienz-steigernde Modifikationen) als äusserst schnell.

Es sind jedoch auch polynomielle Algorithmen für die lineare Optimierung bekannt, beispielsweise das Verfahren von Karmarkar (vgl. [Kar84]). Dennoch hat sich das Simplex-Verfahren in den allermeisten praktischen Anwendungen als (noch?) überlegen erwiesen.

Erst neuere *Interior Point* Methoden scheinen ab einer gewissen Problemgröße mit dem Simplex-Verfahren konkurrieren und teilweise dieses auch "schlagen" zu können. (Eine gute, mathematisch orientierte Erläuterung dieser Methoden findet sich in dem Buch [Wri96].) Ebenfalls vielversprechend scheinen *randomisierte* Verfahren, welche in vielen Fällen einfach zu verstehen, gleichzeitig aber mit einer extrem hohen Wahrscheinlichkeit sehr performant sind (vgl. [MR95, S. 262ff]).

Effiziente Algorithmen für die lineare Programmierung sind weiterhin ein vieluntersuchter Forschungsgegenstand.

Anmerkung 7.2.8 Für unsere Belange ist entscheidend, dass für das Lösen von linearen Optimierungsproblemen sehr effiziente Algorithmen zu Verfügung stehen. Für die in unserem Kontext typischen Problemgrößen (weniger als 100 Variablen) liegt die Laufzeit zumeist deutlich unter einer Sekunde, aber auch sehr große Probleme mit 500 Variablen und mehr lassen sich mit einer Laufzeit im Bereich von etwa 10 Sekunden lösen.[6]

[6]Diese Werte ergaben sich aus Beispielläufen und können natürlich allenfalls als grobe Richtschnur

7.2.3 Dualität

Definition 7.2.9 (Duales Optimierungsproblem) Gegeben sei ein lineares Optimierungsproblem LP in Standardform:

$$\max \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{p} \quad \text{u.d.N.} \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}.$$

Das zu LP **duale Optimierungsproblem** $\overline{LP}$ ist definiert durch[7]

$$\min \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} \quad \text{u.d.N.} \quad \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}.$$

Bemerkung 7.2.10 Es gilt $\overline{\overline{\mathrm{LP}}} = \mathrm{LP}$.

Beweis. Zunächst formen wir das duale Problem $\overline{\mathrm{LP}}$ in die Standardform um:

$$\max -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} \quad \text{u.d.N.} \quad -\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}.$$

Erneutes Dualisieren liefert

$$\min -\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{p} \quad \text{u.d.N.} \quad -\boldsymbol{C}\boldsymbol{p} \geq -\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$$

und dies entspricht dem primalen Problem LP. □

Resultat 7.2.11 (Dualitätstheorem) Sei LP ein lineares Optimierungsproblem. Besitzen LP und $\overline{\mathrm{LP}}$ zulässige Punkte, so besitzen beide Probleme Lösungen und die optimalen Zielfunktionswerte von LP und $\overline{\mathrm{LP}}$ sind gleich.

Anmerkung 7.2.12 Dieses Theorem findet sich in nahezu jeder Abhandlung der linearen Programmierung (z.B. in [NM93, S. 79]). Neben dem "Haupt"-Dualitätstheorem existieren eine Reihe von Folgerungen sowie weitere Sätze, welche Zusammenhänge zwischen den Problemen LP und $\overline{\mathrm{LP}}$ (sowie deren Lösungen) herstellen.

7.2.4 Schattenpreise

Anmerkung 7.2.13 Die Dualitätseigenschaften linearer Programme haben eine Reihe wichtiger Konsequenzen, welche beispielsweise Anwendung in den Optimierungsalgorithmen finden.[8] Darüber hinaus erlaubt die duale Lösung aber auch eine

---

dienen. Insbesondere ist darauf hinzuweisen, dass nicht ausschließlich die Anzahl der Variablen, sondern auch die der Nebenbedingungen großen Einfluss auf die Laufzeit hat. An dieser Stelle möchte ich Herrn Reimar Grasbon dafür danken, dass er mir seine Implementierung des Simplex-Algorithmus für die Integration in den Prototypen des Lazy Decision Making bereitwillig zur Verfügung gestellt hat.

Wir wollten hier lediglich einen groben Anhaltspunkt für die auftretenden Laufzeiten vermitteln, möchten diesen Aspekt aber nicht näher ausführen.

[7] Zur deutlicheren Abgrenzung verwenden wir für das duale Optimierungsproblem die Variable $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ (und für das primale Problem die Variable $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$).

[8] Die sogenannten "*Primal-Dual Interior-Point Methods*" machen zum Beispiel massiv davon Gebrauch, sowohl das primale als auch das duale Problem in der Optimierung zu verwenden (vgl. [Wri96]).

ökonomische Interpretation, welche für uns von zentraler Bedeutung ist. Diese Interpretation – man spricht in diesem Zusammenhang häufig von den *Schattenpreisen* – möchten wir nachfolgend vorstellen.

Anmerkung 7.2.14 Es sei LP ein lineares Optimierungsproblem in Standardform (vgl. Definition 7.2.3), $\boldsymbol{p^*}$ eine Lösung von LP und $\boldsymbol{x^*} = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ eine Lösung des dualen Problems $\overline{\text{LP}}$ (vgl. Definition 7.2.9).

Wir betrachten nun für ein festes $i \in \{1, \ldots, m\}$ die Nebenbedingung

$$\boldsymbol{C_{i,*}p} \leq b_i$$

etwas näher. Durch den konkreten Wert $b_i \in \mathbb{R}$ wird eine gewisse *Beschränkung* der $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ verursacht. Die "Gesamtheit" dieser Beschränkungen – also die Menge *aller* Nebenbedingungen – erzeugt gerade die Menge der zulässigen Punkte.[9]

Was geschieht nun, wenn man die i-te Nebenbedingung etwas "verschärft" (im Sinne von Definition 6.4.11)? Hier stelle man sich vor, dass wir übergehen zu der um ein "kleines" $\varepsilon > 0$ verschärften Nebenbedingung

$$\boldsymbol{C_{i,*}p} \leq b_i - \varepsilon.$$

Diese Verschärfung *kann* Konsequenzen für den maximalen Zielfunktionswert haben, muss allerdings nicht. In jedem Fall kann der maximale Zielfunktionswert aber nicht größer werden (da die neue Beschränkung restriktiver ist und folglich die Menge der zulässigen Punkte nicht größer werden kann).

Wir nehmen nun an, die neue Lösung (des verschärften Problems) habe dieselbe Basis wie die Lösung von LP. (Diese eher technische Annahme diskutieren wir in der nachfolgenden Anmerkung 7.2.15 detaillierter.) Dann lässt sich unter Anwendung des Dualitätstheorems (Resultat 7.2.11) zeigen, dass der optimale Zielfunktionswert gerade

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}^* - \varepsilon x_i^* = \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{p^*} - \varepsilon x_i^*$$

ist; dieser hat sich also im Vergleich zu LP um εx_i^* verringert (siehe hierzu auch [Dan66, 292-317] und [NM93, 84-86]).

Insofern lässt sich x_i^* als *Schattenpreis*, *Knappheitspreis* oder *Opportunitätskosten* für die Nebenbedingung Nr. i interpretieren. Anschaulich ist x_i^* die Verringerung des Zielfunktionswertes im Maximum, wenn die i-te Nebenbedingung um eine Einheit "verschärft" wird.[10]

[9] Genau genommen wird durch die Bedingung $\boldsymbol{C_{i,*}p} \leq b_i$ der Halbraum $H_i = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{C_{i,*}p} \leq b_i\}$ festgelegt und die Menge der zulässigen Punkte M ergibt sich als Durchschnitt der Halbräume, wobei zusätzlich noch die Nichtnegativitätsbedingungen zu beachten sind, welche sich jedoch auch entsprechend als Halbräume darstellen lassen. Ingesamt gilt

$$M = \bigcap_{i=1}^{m} H_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid p_i \geq 0\}.$$

[10] Schattenpreise sind in der Ökonomie ein sehr wichtiges Konzept, welches nicht nur im Kontext *linearer* Optimierungsprobleme definiert ist. Die Schattenpreise ergeben sich für allgemeinere

Anmerkung 7.2.15 Im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen ist der Begriff der *Basislösung* definiert (vgl. etwa [NM93, S. 51-52]). Wir verzichten auf eine umfassende Erläuterung der entsprechenden Konzepte, da diese für das Verständnis der vorliegenden Arbeit verzichtbar sind. Insofern begnügen wir uns hier mit einer eher anschaulich motivierten Erläuterung.

Wir haben bereits festgehalten, dass, sofern ein lineares Optimierungsproblem überhaupt eine Lösung besitzt, auch mindestens ein Extrempunkt eine Lösung darstellt (vgl. Resultat 7.2.5). Eine Basislösung ist stets ein Extrempunkt der Menge der zulässigen Punkte.

Verschärft man nun eine Nebenbedingung, so verkleinert sich (anschaulich gesprochen) die Menge der zulässigen Punkte wobei einige Extrempunkte entlang des Rands wandern können (nämlich gerade diejenigen Extrempunkte, die auf der durch die verschärften Nebenbedingung definierten Hyperebene liegen).

Ist nun derjenige Extrempunkt, der Lösung des ursprünglichen Problems war, auch Lösung des neuen Problems, so hat die Lösung des verschärften Problems dieselbe Basis wie das ursprüngliche Problem. Dabei kann der Extrempunkt als Folge der Verschärfung der Nebenbedingung durchaus verschoben worden sein, es ist ausschließlich entscheidend, dass es sich um denselben Extrempunkt handelt.[11]

Ungeachtet dieser eher technischen Forderung bezeichnet man die (Komponenten der) Lösung des dualen Problems *stets* als Schattenpreise mit der Interpretation aus Anmerkung 7.2.14.

7.3 Zielgerichtetes Präzisieren und LOP-Maße

7.3.1 Diskussion des Ansatzes

Anmerkung 7.3.1 Wir haben uns im vorangehenden Kapitel 6 Gedanken über die Präzisierung von Wahrscheinlichkeitsinformationen basierend auf der Standardrepräsentation gemacht. Als Ergebnis sind wir zu den ε-Verschärfungen von impliziten und expliziten Nebenbedingungen als Grundelement der Präzisierung gelangt (vgl. Unterabschnitt 6.4.2).

Die Ausführungen in diesem Kapitel – und insbesondere die Interpretation der Schattenpreise (vgl. Anmerkung 7.2.14) – erlauben uns nun endlich, von einer *willkürlichen* zu einer *zielgerichteten* Präzisierung überzugehen.

Anmerkung 7.3.2 Kernidee des LAZY DECISION MAKING ist, dass sukzessive *zielgerichtet* die Wahrscheinlichkeitsinformation präzisiert wird, bis eine *gute* Entscheidung möglich ist. Zielgerichtet meint dabei, dass die Qualität der Entscheidung

Optimierungsprobleme als Wert der LAGRANGE-Multiplikatoren und stellen ein numerisches Maß für den Trade-Off zwischen Nebenbedingungen und der Zielfunktion dar (vgl. [Dix76, 13-23]). Für Nebenbedingungen, die nicht "greifen" (also nicht mit Gleichheit erfüllt sind), resultiert ein Schattenpreis von Null, da offenbar ein weiteres Verschärfen der Nebenbedingung (um ein genügend kleines $\varepsilon > 0$) keine Auswirkung auf den realisierbaren Zielfunktionswert hat.

[11] Ein Extrempunkt wird hier identifiziert durch die Menge derjenigen Nebenbedingungen, die er mit Gleichheit erfüllt (also durch die Menge der ihn determinierenden Hyperebenen).

durch die Präzisierung besser wird. Offenbar ist es für das inhaltliche Ausfüllen der Begriffe *zielgerichtet* und *gut* entscheidend, dass die Qualität einer Entscheidung gemessen werden kann. Da das Verfahren selbst Orientierungshilfen für "aussichtsreiche" Nebenbedingungen (im Sinne einer zielgerichteten Präzisierung) liefern soll, müssen diese Qualitätsmaße nicht nur dem Agenten bekannt sein sondern – zumindest in Teilen[12] – auch dem System bekannt gemacht und daher formal erfasst werden.

Anmerkung 7.3.3 Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit endlicher Alternativenmenge A und der Agent habe sich für die Alternative $\hat{\boldsymbol{a}} \in A$ entschieden. Aufgrund der vorangehenden Überlegungen stellt sich die Frage, wie "gut" diese Entscheidung $\hat{\boldsymbol{a}}$ im Kontext des Entscheidungsproblems (A, W) ist. Wir unterstellen die Standardinterpretation (vgl. Anmerkung 3.3.4). Dann existiert eine "wahre" Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho} \in W$, die allerdings dem Agent (zumindest im Falle $|W| > 1$) nicht genau bekannt ist sondern lediglich ungenau in Form von $\boldsymbol{\rho} \in W$. Bezüglich der "wahren" Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ gibt es mindestens eine "optimale" Alternative $\boldsymbol{a^*}$, die den Erwartungsnutzen maximiert, es gilt also

$$\boldsymbol{a^*} \in \arg\max_{\boldsymbol{a} \in A} \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{\rho}.$$

Wählt der Agent die Alternative $\hat{\boldsymbol{a}}$ anstelle einer (bezüglich $\boldsymbol{\rho}$) optimalen Alternative $\boldsymbol{a^*}$, so entsteht ihm ein "Schaden" im Sinne von entgangenem Erwartungsnutzen in Höhe von

$$\Delta = \boldsymbol{a^*}^T \boldsymbol{\rho} - \hat{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{a}^* - \hat{\boldsymbol{a}})^T \boldsymbol{\rho}$$

Nutzeneinheiten.

Anmerkung 7.3.4 In Abschnitt 4.7 haben wir bereits untersucht, inwieweit sich der "Schaden" Δ begrenzen lässt. Wir haben dort festgestellt, dass $\phi_{A,W}(\hat{\boldsymbol{a}})$, definiert durch

$$\phi_{A,W}(\hat{\boldsymbol{a}}) = \sup\{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{p} - \hat{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{p} \in W\},$$

die bestmögliche obere Schranke für den Schaden darstellt sofern $\boldsymbol{\rho}$ nur ungenau in Form von $\boldsymbol{\rho} \in W$ bekannt ist (vgl. Definition 4.7.4 und Anmerkung 4.7.6).

Anmerkung 7.3.5 Aufgrund der vorangehenden Anmerkungen 7.3.3 und 7.3.4 ist $\phi_{A,W}(\hat{\boldsymbol{a}})$ ein "natürliches" Maß für die Bewertung der Qualität einer Entscheidung (genauer: der Entscheidung $\hat{\boldsymbol{a}}$ im Kontext des Entscheidungsproblems $(A, W) \in \mathbb{E}$). Insbesondere würde demzufolge ein Maß, das für eine gegebene Nebenbedingung Auskunft darüber gibt, welchen Einfluss deren ε-Verschärfung auf $\phi_{A,W}(\hat{\boldsymbol{a}})$ hat, eine natürliche Orientierungshilfe bezüglich der durchzuführenden Präzisierung für den Agenten darstellen. Ein solches Maß werden wir in Unterabschnitt 7.4.3 einführen.[13]

[12]Das konkrete Verfahren wird nicht direkt über die zu präzisierende Nebenbedingung entscheiden sondern lediglich den Agenten dabei unterstützen indem Kenngrößen berechnet werden, aus denen der Agent ablesen kann, ob eine Nebenbedingung (bzw. deren Verschärfung) ein aussichtsreicher Kandidat für die Verbesserung der Qualität der Entscheidung darstellt.

[13]Wir werden dort allerdings einen neuen Namen vergeben, da das Maß in einer speziellen Form als LOP-Maß dargestellt wird.

Anmerkung 7.3.6 Nach den Vorüberlegungen (insb. Anmerkung 7.3.5) stellt sich die Frage, warum das auf $\phi_{A,W}(\hat{\boldsymbol{a}})$ basierende Maß nicht ausreicht um dem Agenten die notwendige Orientierung für das zielgerichtete Präzisieren zu bieten. (Diese Frage stellt sich angesichts der Tatsache, dass wir wesentlich *mehr* Maße einführen und uns nicht auf $\phi_{A,W}(\hat{\boldsymbol{a}})$ beschränken.) Plakativer formuliert, warum verschärft der Agent nicht *stets* diejenigen Nebenbedingung mit dem größtmöglichen Einfluss auf $\phi_{A,W}(\hat{\boldsymbol{a}})$?

Eine Antwort auf diese Frage ist, dass der Agent in manchen Fällen keine Nebenbedingung verschärfen kann, die direkten Einfluss auf das Maß $\phi_{A,W}(\hat{\boldsymbol{a}})$ hat. Dieser Fall tritt ein, wenn der Agent der aus einer entsprechenden ε-Verschärfung resultierenden Wahrscheinlichkeitsinformation $W' \subseteq W$ nicht mehr "vertrauen" würde, also kein hinreichendes Zutrauen mehr in die Aussage $\boldsymbol{\rho} \in W'$ hätte (wobei wir wiederum die Standardinterpretation unterstellen). Es darf nicht vergessen werden, dass die Nebenbedingungen eine Repräsentation einer linearen Wahrscheinlichkeitsinformation sind und diese das Wissen des Agenten um die "wahre" Wahrscheinlicheitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ beschreiben. Insofern ist es i.Allg. nicht möglich, eine beliebige Nebenbedingung auszuwählen und diese weiter zu verschärfen.

Eine weitere Antwort ist, dass der Agent durchaus auch andere Ziele verfolgen kann. Denkbar wäre z.B., dass er einen größtmöglichen garantierten minimalen Erwartungsnutzen anstrebt. Auch für diese Zielsetzung führen wir ein passendes Maß (in Unterabschnitt 7.4.4) ein. Unser grundsätzlicher Ansatz ist, dass wir dem Agenten eine überschaubare Orientierungshilfe bieten, ihn jedoch nicht bezüglich aller entscheidungsrelevanter Aspekte exakt modellieren möchten. Demzufolge entscheidet der Agent selbständig über die durchzuführende Präzisierung basierend auf den bereitgestellten Kenngrößen. Insofern ist es nicht notwendig, *die* Zielsetzung des Agenten hinsichtlich der Präzisierung formal zu erfassen. (Wir erörtern in Kapitel 8 genauer, warum wir dies nicht für praktikabel halten.)

Anmerkung 7.3.7 Die grundlegende *technische* Idee für die Berechnung der Kenngrößen ist, dass sich ein relevantes "Qualitätsmaß" (z.B. $\phi_{A,W}(\hat{\boldsymbol{a}})$, dazu mehr in Unterabschnitt 7.3.2 sowie Abschnitt 7.4) als Lösung eines linearen Optimierungsproblems beschreiben lässt, wobei die Nebenbedingungen gerade den expliziten Nebenbedingungen aus der Standardrepräsentation der linearen Wahrscheinlichkeitsinformation entsprechen. Dann geben die *Schattenpreise* (vgl. Unterabschnitt 7.2.3) – also letztendlich die Lösung des dualen Optimierungsproblems – Auskunft darüber, was eine ε-Verschärfung einer (expliziten) Nebenbedingungen in Hinblick auf das Qualitätsmaß für einen Einfluss hätte.

Hierdurch ist der Agent in der Lage, (in Hinblick auf das Qualitätsmaß) "kritische" Nebenbedingungen zu erkennen und diese möglicherweise zu verschärfen.[14] Darüber hinaus kann er für "neue" Nebenbedingungen gewissermaßen "antesten",

[14] Ob er diese wirklich verschärfen kann, hängt von seinem Wissen über die "wahre" Wahrscheinlichkeitsinformation $\boldsymbol{\rho}$ ab (vgl. Anmerkung 3.3.4). Idee unseres Vorgehens ist, dass der Agent die notwendigen Informationen zu Verfügung gestellt bekommt, dann aber *selbst* entscheidet, wie er weiterverfährt, da nur er weiss, wie "schwierig" bzw. "glaubwürdig" eine Verschärfung der Nebenbedingung ist. Wir diskutieren diesen Aspekt wesentlich ausführlicher in Kapitel 8 (dort inbesondere in Unterabschnitt 8.4.7).

ob sich diese hinsichtlich einer weiteren Präzisierung eignen. Hierzu werden diese Nebenbedingungen als explizite Nebenbedingungen mit in das Ungleichungssystem aufgenommen (mit der minimalen Schranke, vgl. Definition 6.4.7) und durch Lösen des dualen Optimierungsproblems deren Schattenpreis bezüglich eines Qualitätsmaßes ermittelt, so dass dieser – wie schon bei den expliziten Nebenbedingungen – zur Orientierung herangezogen werden kann.

Anmerkung 7.3.8 Voraussetzung für das zielgerichtete Präzisieren der linearen Wahrscheinlichkeitsinformation ist, dass (mindestens) ein gewisses *Qualitätsmaß* gegeben ist (das "Ziel") und sich dieses als *lineares Optimierungsproblem* mit der linearen Wahrscheinlichkeitsinformation als Menge zulässiger Punkte formulieren lässt.[15] In Unterabschnitt 7.4.3 werden wir unter Verwendung eines technischen Tricks zeigen, dass das Maß $\phi_{A,W}(\hat{\boldsymbol{a}})$ diesen Anforderungen genügt.

Die Schattenpreise des Optimierungsproblems geben dann Auskunft darüber, welche Wirkung eine ε-Verschärfung einer Nebenbedingung auf dieses Qualitätsmaß hätte (vgl. Anmerkung 7.2.14). Die konkret aus diesen Schattenpreisen abzuleitende Handlungsvorschrift ist abhängig von dem verwendeten Maß (bzw. den verwendeten Maßen, denn i.Allg. wird man mehrere Maße heranziehen, vgl. Anmerkung 7.3.6), so dass wir nachfolgend verschiedene Vorschläge für Qualitätsmaße zusammen mit deren Interpretation und den daraus zu gewinnenden Handlungsanweisungen diskutieren.

Es sei aber bereits jetzt betont, dass $\phi_{A,W}(\hat{\boldsymbol{a}})$ das unserer Meinung nach wichtigste solche Maß darstellt (vgl. Anmerkung 7.4.22).

7.3.2 LOP-Maße

Anmerkung 7.3.9 Wir werden in Abschnitt 7.4 einige durch lineare Optimierungsprobleme darstellbare Qualitätsmaße vorstellen, wobei wir zwischen Maßen für *einzelne* Alternativen, Maßen für *zwei* Alternativen und Maßen für die *gesamte* Alternativenmenge unterscheiden werden. Die meisten der Qualitätsmaße sind nur geringfügig erklärungsbedürftig, da sie unmittelbar aus den in Abschnitt 4.7 eingeführten Regret-Maßen resultieren oder aus bekannten Heuristiken entliehen sind. (Hier nutzen wir die in Kapitel 5 behandelte spezielle Darstellung der Heuristiken als Optimierungsprobleme.)

Zunächst präzisieren wir jedoch in diesem Unterabschnitt, was wir unter den durch Optimierungsprobleme darstellbaren Qualitätsmaßen verstehen wollen.

Definition 7.3.10 (LOP-Maß) Unter einem **LOP-Maß**[16] verstehen wir eine

[15] Die letzte Forderung bezieht sich auf das von uns im Rahmen des LAZY DECISION MAKING vorgeschlagene Verfahren, welches gerade auf dieser Art von Qualitätsmaßen basiert. Natürlich ist prinzipiell ein zielgerichtetes Präzisieren aber auch denkbar, wenn das "Ziel" in einer anderen Form vorliegt – hier hilft jedoch unser Verfahren nicht unmittelbar weiter (vgl. Unterabschnitt 10.2.3).

[16] Die Bezeichnung ist zugegebenermaßen nicht besonders originell. LOP steht für **l**ineares **O**ptimierungs**p**roblem und soll anzeigen, dass das entsprechende Maß durch ein lineares Optimierungsproblem dargestellt wird (bzw. werden kann).

Funktion $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)}) \dashrightarrow \mathbb{R}^n$, welche für ein geeignetes $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ und ein opt $\in \{\min, \max\}$ jeder nichtleeren linearen Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ als Funktionswert $\psi(W)$ die Lösung des Optimierungsproblems

$$\text{opt}\, \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{p} \quad \text{u.d.N.} \quad \boldsymbol{p} \in W$$

zuweist (d.h., $\psi(W) = \text{opt}\,\{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\}$).[17]

Anmerkung 7.3.11 Bei der Definition (bzw. Interpretation) konkreter LOP-Maße werden wir Gebrauch von den Konzepten der Nutzen-Lotterie und NL-Menge machen. Dazu sei an die entsprechende Definition 3.4.18 erinnert; mit einer Alternative $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ assoziieren wir bei gegebener Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ die NL-Menge

$$\langle \boldsymbol{a}, W \rangle = \{ \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p} \rangle \,|\, \boldsymbol{p} \in W \}$$

bestehend aus allen Nutzen-Lotterien $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p} \rangle$ mit $\boldsymbol{p} \in W$.

7.4 Ausgewählte LOP-Maße

7.4.1 LOP-Maße für einzelne Alternativen

Anmerkung 7.4.1 Die strukturell einfachsten LOP-Maße beziehen sich auf nur *eine* Alternative. Es handelt sich um Maße, die für eine gegebene Alternative "messen", wie gut diese ein gewisses Qualitätsmerkmal erfüllt, dabei aber unabhängig von der im Kontext des Entscheidungsproblems vorliegenden Alternativenmenge sind. Insofern ist dieser Typ von LOP-Maßen eng verwandt mit den induzierenden Funktionen bei *separablen* Heuristiken (vgl. Abschnitt 5.2): Es werden NL-Mengen $\langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ bewertet.

Tatsächlich kann jedes LOP-Maß, welches für einzelne Alternativen definiert ist, als induzierende Funktion für eine separable Heuristik dienen. Auf der anderen Seite gewinnt man aus jeder induzierenden Funktion einer separablen Heuristik ein LOP-Maß, *sofern* sich die induzierende Funktion als lineares Optimierungsproblem mit zulässigem Bereich W darstellen lässt (vgl. Definition 7.3.10).

Definition 7.4.2 (LOP-Maße $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$ und $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}$) Sei $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ eine Alternative. Die LOP-Maße $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}, \psi_{\boldsymbol{a}}^{\max} : \mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)}) \dashrightarrow \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} \psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}(W) &:= \min\{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\}, \\ \psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}(W) &:= \max\{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\} \end{aligned}$$

für alle nichtleeren linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$.

[17] Wir führen hier nun – im Gegensatz zu der in Definition 7.2.3 vorgestellten Standardform – die Nichtnegativitätsbedingung $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$ nicht mehr explizit auf, da diese stets Bestandteil der Nebenbedingungen einer Wahrscheinlichkeitsinformation ist.

Anmerkung 7.4.3 Das Maß $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$ ordnet der Alternative $\boldsymbol{a}$ bei gegebener Wahrscheinlichkeitsinformation W den *minimalen* Erwartungsnutzen über alle Nutzen-Lotterien $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p} \rangle$ aus der NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ zu. Für lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen stimmt $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}(W)$ mit dem Maß $f_{\inf}(\boldsymbol{a}, W)$ überein, welches in Definition 5.2.6 eingeführt wurde. Entsprechend den Ausführungen aus Abschnitt 5.3 basiert die Motivation für $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$ auf dem $\mathrm{E}_{\min}$-Axiom; würde der Agent *ausschließlich* aufgrund des Maßes $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$ entscheiden, so resultiert das $\mathrm{MaxE}_{\min}$-Prinzip.

Im Kontext der LOP-Maße ist $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$ allerdings i.Allg. nur eines von *mehreren* Kriterien, die zur weiteren Präzisierung herangezogen werden. Ausserdem verwenden wir das Maß hier nicht zur eigentlichen Bewertung von Alternativen, sondern als Grundlage für die zielgerichtete Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation, also die Auswahl einer geeigneten zu verschärfenden Nebenbedingung.

Analog gelten obige Ausführungen für das Maß $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}$; hier würde das $\mathrm{MaxE}_{\max}$-Prinzip resultieren (entsprechend der induzierenden Funktion $f_{\sup}$ aus Definition 5.2.6).

Anmerkung 7.4.4 Die beiden Werte $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}(W)$, $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}(W)$ bilden für eine Alternative $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ die Grenzen des Intervalls

$$[\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}(W), \psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}(W)],$$

in dem eine BERNOULLI-Nutzenbewertung der mit der Alternative $\boldsymbol{a}$ bezüglich der Wahrscheinlichkeitsinformation W assoziierten NL-Menge $\langle \boldsymbol{a}, W \rangle$ liegen "sollte" (vgl. Anmerkung 5.2.10). Dieses Intervall ist die bestmögliche Beschränkung des Erwartungsnutzens der Alternative $\boldsymbol{a}$, sofern genau die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\boldsymbol{p} \in W$ für denkbar gehalten werden und die Standardinterpretation von Wahrscheinlichkeitsinformationen zu Grunde liegt (vgl. Anmerkung 3.3.4).

Anmerkung 7.4.5 Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$. Bezüglich des ausgewählten LOP-Maßes $\psi \in \{\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}, \psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}\}$ ergibt sich für jede Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ und jede (explizite oder implizite) Nebenbedingung ein Schattenpreis. Dieser gibt Auskunft darüber, um wieviel sich der Wert $\psi(W)$ bei einer ε-Verschärfung der entsprechenden Nebenbedingung verschlechtern wird.[18]

Wir besprechen nachfolgend die Interpretation der Schattenpreise getrennt nach dem verwendeten LOP-Maß:

- $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$: Sei s der Schattenpreis einer expliziten oder impliziten Nebenbedingung bezüglich einer Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ und des Maßes $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$. Dann führt für $s > 0$ eine ε-Verschärfung jener Nebenbedingung zu einer Erhöhung der unteren Schranke des durch Alternative $\boldsymbol{a}$ erzielten Erwartungsnutzens und s ist ein Maß für die Zuwachs*rate*.[19]

[18]Im Falle eines durch ein Maximierungsproblem erzeugten LOP-Maß steht dabei die Verschlechterung für eine Verminderung des Maßes, andernfalls (ein durch ein Minimierungsproblem erzeugtes LOP-Maß) ergibt sich eine Erhöhung.

[19]Die genauere Interpretation der Schattenpreise in Hinblick auf die Veränderung des Zielfunktionswertes haben wir in Anmerkung 7.2.14 besprochen. Eine praktische Konsequenz ist etwa,

- $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}$: Wiederum sei s der Schattenpreis einer expliziten oder impliziten Nebenbedingung bezüglich einer Alternative $\boldsymbol{a} \in A$, diesmal jedoch bezüglich des Maßes $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}$. Nun führt für $s > 0$ eine ε-Verschärfung der entsprechenden Nebenbedingung zu einer Verminderung der oberen Schranke des durch Alternative $\boldsymbol{a}$ erzielten Erwartungsnutzens, wobei s ein Maß für die Verminderungs*rate* darstellt.

Anmerkung 7.4.6 Dem HURWICZ-Prinzip entsprechend (vgl. Anmerkung 5.2.11) könnte eine gewichtete Kombination der Schattenpreise bezüglich der Maße $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$ und $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}$ berechnet werden. Alternativ können dem Agenten (für eine Nebenbedingung) *beide* Schattenpreise zur Verfügung gestellt werden, so dass dieser eine Abwägung *selbst* vornehmen kann. Diese Vorgehensweise bietet offenbar mehr Flexibilität und entspricht besser unserer Zielsetzung, den Agenten mit Informationen für die zielgerichtete Präzisierung zu versorgen (da differenzierter der Einfluss einer Verschärfung festgestellt werden kann).

Anmerkung 7.4.7 Wir untersuchen jetzt, nachdem wir die Interpretation der Schattenpreise bezüglich der LOP-Maße in Anmerkung 7.4.9 besprochen haben, die daraus abzuleitende Handlungsanweisung.

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ sowie eine Alternative $\boldsymbol{a} \in A$. Der Agent weiss, dass die BERNOULLI-Nutzen Bewertung von $\boldsymbol{a}$ im Intervall

$$[\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}(W), \psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}(W)]$$

liegt (vgl. Anmerkung 5.2.10), kann aber aufgrund der durch W ausgedrückten Unsicherheit keine exakteren Schranken angeben.

Möchte der Agent nun zum besseren Vergleich der Alternativen dieses Intervall durch eine Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation W verkleinern, so helfen ihm dabei die Schattenpreise: Durch die ε-Verschärfung einer Nebenbedingung mit einem größtmöglichen Schattenpreis bezüglich des LOP-Maßes $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$ lässt sich die untere Schranke bestmöglich verbessern, Gleiches gilt im Falle des LOP-Maßes $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}$ bezüglich der oberen Schranke.

Letztendlich ist es Ziel des Agenten, eine möglichst "gute" Alternative ausfindig zu machen. Zu jeder Alternative $\boldsymbol{a}$ kennt der Agent das Intervall der möglichen BERNOULLI-Nutzen Bewertungen und er hat in Form der Schattenpreise für jede Nebenbedingung ein Maß für die Wirkung deren Verschärfung auf die Intervallgrenzen.

Wie der Agent konkret vorgehen sollte, hängt stark davon ab, wie leicht es ihm fällt, die vorliegenden expliziten Nebenbedingungen zu verschärfen bzw. neue implizite Nebenbedingungen hinzuzufügen. Letztendlich muss hier ein Trade-Off

dass eine ε-Verschärfung derjenigen Nebenbedingung, welche bezüglich $\boldsymbol{a}$ und dem LOP-Maß $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$ den höchsten Schattenpreis aufweist, zu der größtmöglichen Erhöhung der unteren Schranke des durch $\boldsymbol{a}$ erzielten Erwartungsnutzens führt. Streng genommen gilt dies allerdings nur für "kleines" $\varepsilon > 0$, da es sich bei den Schattenpreisen um eine *marginale* Betrachtung handelt. (Präziser formuliert behält die Aussage zumindest solange ihre Gültigkeit wie die ε-Verschärfung nicht die Basis der Lösung verändert, vgl. Anmerkung 7.2.15.)

zwischen der Einfachheit, mit der der Agent die Nebenbedingung verschärfen kann einerseits, und deren Einfluss gemessen an den Schattenpreisen andererseits stattfinden. Besonders geeignet sind demzufolge Nebenbedingung mit durchweg hohen Schattenpreisen, die aber gleichzeitig dem Agenten als relativ "locker" und damit einfach verschärfbar erscheinen. Auf der anderen Seite sind Nebenbedingungen, welche bezüglich aller Alternativen und beider LOP-Maße den Schattenpreis Null aufweisen, ungeeignete Kandidaten für eine weitere Verschärfung. Je nach dem konkreten Entscheidungsproblem – genauer je nach dem Verhältnis zwischen der Anzahl der Alternativen und der Anzahl der Nebenbedingung – stellen derartige Nebenbedingung eher die Regel als die Ausnahme dar! (Dies gilt insbesondere im Falle weniger Alternativen und vieler Nebenbedingungen. Da die Menge der Alternativen beim Lazy Decision Making sukzessive verkleinert wird, kann diese Situation aber auch erreicht werden, wenn die Alternativenmenge zunächst groß war.)

Anmerkung 7.4.8 Zweifelsohne kommt den "Schrankenwerten" $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}(W)$ und $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}(W)$ aufgrund ihrer klaren Interpretation (vgl. Anmerkung 7.4.4) eine herausragende Bedeutung bei der Bewertung einer Alternative $\boldsymbol{a}$ und gegebener Wahrscheinlichkeitsinformation W zu.

Wir möchten nachfolgend darlegen, warum wir die gleichzeitige Betrachtung dieser beiden LOP-Maße sogar für die einzige "vernünftige" Vorgehensweise zur zielgerichteten Präzisierung basierend auf der Bewertung *einzelner* Alternativen halten.

Der Hauptgrund für unsere Einschätzung ist, dass jedes andere (eine Bernoulli-Nutzenbewertung realisierende) Maß durch zusätzliche Annahmen einen Wert *innerhalb* der Intervallschranken $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}(W)$ und $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}(W)$ auszeichnet (vgl. Anmerkung 5.2.10). Diese zusätzlichen Annahmen lassen sich also als eine Art *Abwägung* zwischen einer extrem optimistischen und einer extrem pessimistischen Einschätzung interpretieren. Am deutlichsten wird diese Abwägung wohl beim Hurwicz-Prinzip, wo unmittelbar eine gewichtete Summe zwischen den "Extremwerten" gebildet wird, vgl. hierzu Anmerkungen 5.2.11 und 7.4.6.

Nun wird dem Agenten aber wesentlich mehr Flexibilität geboten, wenn ihm das Werte*paar* $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}(W)$ und $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}(W)$ – bzw. die hieraus für jede Nebenbedingung resultierenden Schattenpreise – als Kenngröße bereitgestellt und *ihm* die weitere Abwägung überlassen wird. Wichtig für diese Aussage ist allerdings, dass wir hier beide Schrankenwerte (bzw. die entsprechenden Schattenpreise) wirklich *gemeinsam* betrachten (und nicht, wie dies bei der Maximin- und Maximax-Regel der Fall ist, *einen* Wert herausgreifen). Da die Abwägung komplett dem Agenten überlassen wird, kann diese dann sogar situativ angepasst werden.

Im Gegensatz zu der Vorgehensweise bei den Heuristiken (vgl. Kapitel 5) ist es für das zielgerichtete Präzisieren sogar empfehlenswert, gleichzeitig *mehrere* Maße zu verwenden, da diese lediglich zur Orientierung dienen um dem Agenten das zielgerichtete Präzisieren zu ermöglichen (vgl. Anmerkung 7.3.6).

Anmerkung 7.4.9 Neben der inhaltlich motivierten Begründung in Anmerkung 7.4.8 gibt es ein eher technisches Argument, welches ebenfalls die Bedeutung der Maße $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$ und $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}$ unterstreicht. Aufgrund von Definition 7.3.10 wissen wir, dass sich jedes LOP-Maß als lineares Optimierungsproblem mit der Wahrscheinlichkeitsinformation W als zulässigem Bereich darstellen lässt. Der einzige Freiheitsgrad ist somit die Festlegung des Vektors $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ (vgl. Definition 7.3.10) sowie die Auswahl zwischen Minimierung und Maximierung. Da wir im Rahmen dieses Unterabschnitts zunächst nur LOP-Maße für *einzelne* Alternativen betrachten, darf die konkrete Festlegung des Vektors $\boldsymbol{d}$ ausschließlich von der jeweiligen Alternative $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ abhängen.

Natürlich sind nun im Prinzip eine Reihe von LOP-Maßen denkbar. Dennoch scheint in der Zielfunktion

$$\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} d_i p_i$$

unter der Voraussetzung, dass $\boldsymbol{p}$ als Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten interpretiert wird (vgl. Anmerkung 3.3.4) und der Zielfunktionswert $\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{p}$ einen BERNOULLI-Nutzen darstellt (vgl. Anmerkung 5.2.10), letztendlich nur $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}$ als sinnvolle Wahl zu verbleiben.[20]

7.4.2 Regret LOP-Maß für zwei Alternativen

Anmerkung 7.4.10 Wir betrachten nun den Fall, dass genau *zwei* Alternativen $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$ verglichen werden sollen. Dies ist einerseits für sich genommen interessant (die Motivation ist in diesem Fall, dass der Agent durch Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation die Diskrepanz zwischen den Alternativen verringern will), andererseits aber auch der Ausgangspunkt für zwei auf der gesamten Alternativenmenge definierte Maße (vgl. Unterabschnitt 7.4.3).

Definition 7.4.11 (LOP-Maß $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}}$) Seien $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$ Alternativen. Das LOP-Maß $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}} : \mathcal{P}(\mathbb{S}^{(n)}) \dashrightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}}(W) := \max\{(\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})^T \boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\}$$

für alle nichtleeren linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$.

Anmerkung 7.4.12 Das Maß $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}}(W)$ entspricht (für lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen) der Regret-Schranke $\phi_W(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ (vgl. Definition 4.7.4). Es stellt insofern eine obere Schranke für den entgangenen Erwartungsnutzen dar, der bei Wahl von $\boldsymbol{a_1}$ anstelle von $\boldsymbol{a_2}$ resultieren kann (vgl. Anmerkung 4.7.5).

Anmerkung 7.4.13 Im Gegensatz zu den LOP-Maßen für einzelne Alternativen (vgl. Definition 7.4.2) ist es für den Vergleich zweier Alternativen *nicht* notwendig, in der Definition 7.4.11 zusätzlich ein LOP-Maß basierend auf der Minimierung einzuführen. Grund hierfür ist, dass der Wert

$$\min\{(\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})^T \boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W\}$$

[20] Es erscheint schwierig oder sogar unmöglich, eine vernünftige Begründung für eine Abweichung von $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}$ zu finden.

Wir wollten mit diesen Ausführungen zwar nicht die Existenz weiterer sinnhaftiger LOP-Maße für einzelne Alternativen vollkommen ausschließen, zumindest aber berechtigte Zweifel an deren Existenz zum Ausdruck bringen.

(für Alternativen $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$ und eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$) gerade dem Wert $-\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_1}}(W)$ entspricht (dies folgt unmittelbar aus Definition 7.4.11).[21]

Aus der inhaltlichen Interpretation des Maßes $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}}(W)$ (vgl. die vorangehende Anmerkung 7.4.12) resultiert unmittelbar, dass für den wirklichen Vergleich der Alternativen $\boldsymbol{a_1}$ und $\boldsymbol{a_2}$ stets auch das Maß $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_1}}$ heranzuziehen ist (siehe hierzu auch nachfolgende Anmerkung 7.4.14).

Anmerkung 7.4.14 Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ und $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in A$. Sind beide Werte $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}}(W)$, $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_1}}(W)$ relativ hoch[22], so ist die Auswahl einer der beiden Alternativen $\boldsymbol{a_i}$ $(i \in \{1, 2\})$ gefährlich in dem Sinne, dass eine potenziell wesentlich bessere Alternative (nämlich die jeweils andere Alternative, also $\boldsymbol{a_{3-i}}$) existiert. Hohe Regret-Schranken sind Ausdruck für die Verschiedenartigkeit der Alternativen $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ (gemessen an den zustandsabhängigen Ergebnisnutzen) bei gleichzeitig mangelnder Kenntnis über die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Da die Verschiedenartigkeit der Alternativen offenbar nicht beeinflusst werden kann, erscheint es in einer solchen Situation wünschenswert, durch eine weitere Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation W die Regret-Schranken zu vermindern und damit die Gefahr einer Fehlentscheidung zu reduzieren.[23]

Der Agent sollte dann (explizite oder implizite) Nebenbedingungen verschärfen, die bezüglich eines der beiden LOP-Maße $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}}, \psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_1}}$ einen möglichst hohen Schattenpreis aufweisen. Genau diese Nebenbedingungen leisten einen bestmöglichen Beitrag zur Reduzierung der Regret-Schranken bezüglich der beiden Alternativen $\boldsymbol{a_1}$ und $\boldsymbol{a_2}$.

Anmerkung 7.4.15 Analog zu den Anmerkungen 7.4.8 und 7.4.9 lässt sich sowohl mit eher inhaltlichen wie auch eher technischen Argumenten untermauern, dass $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}}$ *das* LOP-Maß für den Vergleich zweier Alternativen darstellt. Wir verzichten auf eine ausführliche Erörterung der Argumente, da die inhaltliche Bedeutung des LOP-Maßes als Regret-Schranke offenkundig ist und insofern keiner weiteren Rechtfertigung bedarf.

7.4.3 Regret LOP-Maße für die Alternativenmenge

Anmerkung 7.4.16 Wir hatten in Anmerkung 7.4.10 bereits darauf hingewiesen, dass das für zwei Alternativen $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n$ definierte LOP-Maß $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}}$ als Ausgangspunkt für zwei LOP-Maße auf der gesamten Alternativenmenge dient. Wir werden diese Überlegungen nun konkretisieren.

[21] Für beliebige Mengen M und $f : M \to \mathbb{R}$ gilt $\max_{x \in M} f(x) = -\min_{x \in M} -f(x)$.

[22] Die konkrete Bedeutung von “hoch” ist kontextabhängig. Beide Werte sind Schranken für einen möglicherweise entgangenen BERNOULLI-Nutzen und stellen somit selbst BERNOULLI-Nutzen dar.

[23] Hierbei verstehen wir unter einer *Fehlentscheidung* nicht die Auswahl einer suboptimalen Alternative per se sondern spezieller die Auswahl einer wirklich *schlechten* Alternative, also einer Alternative, durch die gemessen an der optimalen (aber unbekannten) Alternative “viel” erzielbarer Erwartungsnutzen “verschenkt” wird. Die konkrete Bedeutung von “viel” ist offenbar wiederum kontextabhängig (vgl. Fußnote 22).

Zur Bewertung der noch vorliegenden Diskrepanz zwischen Alternativen aus der *gesamten* Alternativenmenge möchten wir wiederum eine Regret-Schranke verwenden; wir greifen demzufolge auf das zu diesem Zweck definierte Maß $\phi_{A,W}$ zurück (vgl. Definition 4.7.4). Allerdings ist dieses Maß in seiner ursprünglichen Definition *kein* LOP-Maß, so dass wir hier eine kleine Modifikation vornehmen müssen.

Die Grundidee ist dabei sehr einfach: Da A endlich ist, existieren Alternativen $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in A$ mit $\phi_{A,W} = \phi_W(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ (vgl. Definition 4.7.4). Insofern ist $\phi_{A,W}$ also "darstellbar" durch $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}}(W)$ (wobei allerdings zuvor die "passenden" Alternativen $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in A$ bestimmt werden müssen).

Definition 7.4.17 (LOP-Maß $\psi^{\text{diff}}_{A,W}$) Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ ein Entscheidungsproblem mit endlicher Alternativenmenge A und linearer Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$. Das LOP-Maß $\psi^{\text{diff}}_{A,W}$ ist wie folgt definiert: Es seien $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in A$ derart, dass $\phi_{A,W} = \phi_W(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$.[24] Dann definieren wir

$$\psi^{\text{diff}}_{A,W}(W') := \max\{(\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})^T \boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W'\}$$

für alle linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen $W' \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$.[25]

Anmerkung 7.4.18 Das Maß $\psi^{\text{diff}}_{A,W}$ ist – zumindest im Rahmen des Lazy Decision Making – von entscheidender Bedeutung, da es den noch denkbaren Schaden bei Wahl "irgendeiner" Alternative aus A misst. Grund für die zentrale Bedeutung ist, dass unser Verfahren sukzessive die noch zur Auswahl verbleibende Menge von Alternativen verkleinert. Kann bzw. möchte der Agent keine weitere Präzisierung vornehmen, so wird aus der verbleibenden Alternativenmenge mit Hilfe einer Heuristik ausgewählt. Das Maß $\psi^{\text{diff}}_{A,W}$ stellt eine obere Schadensschranke für diese Heuristik-basierte Auswahl dar und gibt dem Agenten insbesondere einen guten Anhaltspunkt über die Verschiedenartigkeit der noch verbleibenden Alternativen (wiederum gemessen an den denkbaren realisierten Erwartungsnutzen). Es kann als grobe Orientierung dienen, ob eine weitere Präzisierung überhaupt notwendig erscheint.

Anmerkung 7.4.19 Die konkrete Verwendung des Maßes $\psi^{\text{diff}}_{A,W}$ zur zielgerichteten Präzisierung entspricht in etwa den Ausführungen in Anmerkung 7.4.14: Durch die bevorzugte ε-Verschärfung von Nebenbedingungen mit hohen Schattenpreisen bezüglich $\psi^{\text{diff}}_{A,W}$ lässt sich die Diskrepanz der noch zur Auswahl verbleibenden Alternativen vermindern und damit die Gefahr einer Fehlentscheidung (im Sinne von Fußnote 23) reduzieren.

[24] Sollten die Alternativen $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ nicht eindeutig bestimmt sein, so ist deren Eindeutigkeit durch eine geeignete zusätzliche Maßnahme zu garantieren. Beispielsweise kann eine Ordnung auf der Alternativenmenge definiert und dann das bezüglich dieser Ordnung kleinste Paar gewählt werden.

[25] Da die Alternativen $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ abhängig von dem Entscheidungsproblem (A, W) sind, ergeben sich tatsächlich die durch die Bezeichnung $\psi^{\text{diff}}_{A,W}$ zum Ausdruck gebrachten Abhängigkeiten des LOP-Maßes.

Anmerkung 7.4.20 Beim LAZY DECISION MAKING wird iterativ die Wahrscheinlichkeitsinformation W des betrachteten Entscheidungsproblems $(A, W) \in \mathbb{E}$ präzisiert. In jedem Durchlauf wird zudem ein "Vorschlag" in Form einer Alternative $\boldsymbol{a}^* \in A$ basierend auf dem aktuellen Kenntnisstand W mit Hilfe einer Heuristik ermittelt. Insofern ist es eine sehr naheliegende Fragestellung, was der höchstmögliche entgangene Erwartungsnutzen bei Wahl des Vorschlags $\boldsymbol{a}^*$ anstelle der optimalen (aber unbekannten) Alternative aus A ist (vgl. Anmerkung 7.3.3).

Diese Fragestellung führt unmittelbar zu dem Maß $\phi_{A,W}(\boldsymbol{a}^*)$ (vgl. Definition 4.7.4 und insbesondere auch die weiteren Ausführungen in Abschnitt 4.7 sowie Anmerkungen 7.3.4 und 7.3.5), welches exakt die angesprochene Regret-Schranke darstellt. Wir definieren dieses Maß nun mit Hilfe des in Anmerkung 7.4.16 erörterten "Tricks" als LOP-Maß.

Definition 7.4.21 (LOP-Maß $\psi_{A,W}^{\text{reldiff},\boldsymbol{a}^*}$) Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ ein Entscheidungsproblem mit endlicher Alternativenmenge A sowie linearer Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ und sei $\boldsymbol{a}^* \in \mathbb{R}^n$ eine Alternative. Das LOP-Maß $\psi_{A,W}^{\text{reldiff},\boldsymbol{a}^*}$ ist wie folgt definiert: Es sei $\boldsymbol{a} \in A$ derart, dass $\phi_{A,W}(\boldsymbol{a}^*) = \phi_W(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{a})$.[26] Dann definieren wir

$$\psi_{A,W}^{\text{reldiff},\boldsymbol{a}^*}(W') := \max\{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^*)^T \boldsymbol{p} \,|\, \boldsymbol{p} \in W'\}$$

für alle linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen $W' \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$.

Anmerkung 7.4.22 Um die Wichtigkeit der folgenden Aussage zu unterstreichen möchten wir diese explizit hervorheben (vgl. Anmerkung 7.3.5):

> Aufgrund der in Unterabschnitt 7.3.1 sowie in Anmerkung 7.4.20 erläuterten Interpretation stellt das LOP-Maß $\psi_{A,W}^{\text{reldiff},\boldsymbol{a}^*}$ das unserer Meinung nach im Rahmen des LAZY DECISION MAKING *wichtigste LOP-Maß* dar.

Sobald der mögliche "Schaden" bei Auswahl des Vorschlags $\boldsymbol{a}^*$ nur noch "gering" ist, kann die Präzisierung abgebrochen werden.[27] Das LOP-Maß $\psi_{A,W}^{\text{reldiff},\boldsymbol{a}^*}$ liefert einerseits eine Schranke für den möglichen Schaden (Regret) und zeigt damit dem Agenten an, wann die Präzisierung beendet werden kann.

Andererseits – fast noch wichtiger – erlauben gerade die Schattenpreise bezüglich dieses LOP-Maßes das zielgerichtete Präzisieren mit der Zielsetzung, den möglichen Schaden zu minimieren. Wir halten dies für die naheliegendste und wichtigste Zielsetzung bei der Präzisierung!

Insofern sollte – sofern möglich – stets eine Nebenbedingung mit einem möglichst hohen Schattenpreis bezüglich des LOP-Maßes $\psi_{A,W}^{\text{reldiff},\boldsymbol{a}^*}$ ausgewählt und verschärft werden. Erst wenn eine solche nicht mehr existiert (bzw. nicht mehr verschärft werden kann), sind die anderen LOP-Maße (bzw. die entsprechenden Schattenpreise)

[26] Ein entsprechender Wert $\boldsymbol{a}$ existiert, da die Alternativenmenge als endlich angenommen wurde. Falls $\boldsymbol{a}$ nicht eindeutig bestimmt ist, muss die Eindeutigkeit durch eine geeignete Maßnahme garantiert werden (vgl. Fußnote 24).

[27] Ein weiterer Grund für den Abbruch der Präzisierung wäre selbstverständlich, dass der Agent keine präziseren Angaben mehr machen kann.

zu konsultieren. Auf diese gleichzeitige Betrachtung mehrerer LOP-Maße gehen wir in Unterabschnitt 7.4.5 näher ein.

Es sei deutlich darauf hingewiesen, dass wir hier eine subjektive *Empfehlung* für das Vorgehen bei der konkreten Präzisierung ausgesprochen haben, dies aber in keinster Weise in das LAZY DECISION MAKING-Verfahren eingeht sondern lediglich einen Vorschlag für das Verhalten des Agenten darstellt. Wie konkret der Agent die Kenngrößen zur Orientierung verwendet, wird bewusst *nicht* durch das Verfahren festgelegt (vgl. Abschnitt 8.4).

7.4.4 Weitere LOP-Maße

Anmerkung 7.4.23 In einem gegebenen Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ sind die LOP-Maße $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}$ und $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$ (vgl. Unterabschnitt 7.4.1) zweifelsohne zentral zur Bewertung der Qualität *einer* gegebenen Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ (für eine Begründung siehe Anmerkung 5.2.10 und die entsprechende Anmerkung 7.4.4) sowie als Grundlage zur Berechnung von Schattenpreisen, welche eine zielgerichtete Präzisierung in Hinblick auf *die* Alternative $\boldsymbol{a}$ erlauben.

Da diese LOP-Maße unabhängig von der Alternativenmenge A definiert sind, hatten wir A zunächst (in Unterabschnitt 7.4.1) ausser Acht gelassen. Demgegenüber ist die konkrete Alternativenmenge A sehr zentral zur Beurteilung, *welche* Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ (hinsichtlich der LOP-Maße $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}$ und $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$) betrachtet werden soll. Denn eine erschöpfende Betrachtung aller Alternativen führt schnell zu einer unüberschaubaren Flut an Daten und einem immensen Rechenaufwand: Es wird für jede Kombination aus Alternative, Nebenbedingung und LOP-Maß ein Schattenpreis berechnet.[28]

Nachfolgend zeichnen wir bezüglich beider LOP-Maße je zwei Alternativen aus, die besonders geeignet zur Beurteilung der *gesamten* Alternativenmenge scheinen und "natürlich" (dies ist gerade die charakterisierende Eigenschaft von LOP-Maßen) als Grundlage für eine zielgerichtete Präzisierung eben dieser Maße dienen können.

Definition 7.4.24 Für ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit endlicher Alternativenmenge A und linearer Wahrscheinlichkeitsinformation W seien

$$\mathrm{bestmax}(A, W), \mathrm{bestmin}(A, W), \mathrm{worstmax}(A, W), \mathrm{worstmin}(A, W) \in A$$

[28] Hierzu ist für jedes LOP-Maß und jede Alternative ein lineares Optimierungsproblem zu lösen. Schlimmer als der Rechenaufwand – der sich aufgrund der zumeist eher "kleinen" Alternativenmenge sowie der wenig engen Zeitrestriktionen im Dialog mit dem Agenten als nicht kritisch erweist – ist aber tatsächlich die angesprochene Datenflut! In dem von uns realisierten Prototypen können neben den automatisch bereitgestellten Daten weitere Kenngrößen *auf Anfrage* zusätzlich berechnet werden.

definiert durch[29]

$$\begin{aligned}
\mathrm{bestmax}(A,W) &\in \arg\max\{\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}(W) \mid \boldsymbol{a} \in A\},\\
\mathrm{worstmax}(A,W) &\in \arg\min\{\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}(W) \mid \boldsymbol{a} \in A\},\\
\mathrm{bestmin}(A,W) &\in \arg\max\{\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}(W) \mid \boldsymbol{a} \in A\},\\
\mathrm{worstmin}(A,W) &\in \arg\min\{\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}(W) \mid \boldsymbol{a} \in A\}.
\end{aligned}$$

Anmerkung 7.4.25 Die Motivation für diese Definition ist einfach erklärt: Interessant zur bzw. besonders charakterisierend für die Bewertung der gesamten Alternativenmenge ist, welche *untere* Nutzenerwartungswertschranke sich *mindestens* erzielen lässt (diese wird durch $\mathrm{worstmin}(A,W)$ realisiert) und was die *beste* erreichbare untere Schranke ist ($\mathrm{bestmin}(A,W)$).

Die Interpretation der Alternativen $\mathrm{worstmax}(A,W)$ (mindestens erzielbare obere Schranke) und $\mathrm{bestmax}(A,W)$ (höchste erzielbare obere Schranke) ist offenbar vollkommen analog.

Die ausgezeichnete Bedeutung der vier Alternativen bezüglich der Alternativenmenge A hinsichtlich der beiden LOP-Maße $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}, \psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}$ besteht also darin, dass diese Alternativen gerade die erzielbaren Grenzwerte der Schranken (jeweils sowohl nach oben als auch nach unten) darstellen.

Die konkrete Interpretation der LOP-Maße bzw. der Schattenpreise bezüglich dieser LOP-Maße wurde in Abschnitt 7.4.1 ausführlich erörtert. Auf die spezielle Interpretation, bedingt durch die Verwendung dieser Maße bezüglich der ausgezeichneten Alternativen, gehen wir im nachfolgenden Abschnitt 7.4.5 näher ein.

7.4.5 Gesamtheitliche Verwendung der LOP-Maße

Anmerkung 7.4.26 Zur Abhilfe hinsichtlich des in Anmerkung 7.4.23 angesprochenen Problems (eine Berechnung aller besprochenen Schattenpreise bezüglich aller Alternativen führt zu einem nicht zu bewältigendem "Datenzoo") schlagen wir vor, für jede Nebenbedingung die Schattenpreise bezüglich der vier LOP-Maße

$$\psi^{\max}_{\mathrm{bestmax}(A,W)},\quad \psi^{\max}_{\mathrm{worstmax}(A,W)},\quad \psi^{\min}_{\mathrm{bestmin}(A,W)},\quad \psi^{\min}_{\mathrm{worstmin}(A,W)}$$

zu bestimmen. Zentraler noch zur Beurteilung des weiteren Vorgehens sind jedoch die Schattenpreise bezüglich der LOP-Maße $\psi^{\mathrm{diff}}_{A,W}$ und $\psi^{\mathrm{reldiff},\boldsymbol{a}^*}_{A,W}$ (wobei $\boldsymbol{a}^* \in A$ ein im Rahmen des LAZY DECISION MAKING vorliegender "Vorschlag" ist), welche daher "natürlich" ebenfalls berechnet werden sollten (vgl. insbesondere Anmerkung 7.4.22). Dieses *Schattenpreis-6-Tupel*

$$(s_{\mathrm{bestmax}}, s_{\mathrm{worstmax}}, s_{\mathrm{bestmin}}, s_{\mathrm{worstmin}}, s_{\mathrm{diff}}, s_{\mathrm{reldiff}})$$

liefert eine solide Grundlage für die zielgerichtete Präzisierung, da differenziert (siehe dazu die Interpretation der 6 Schattenpreise bzw. der zu Grunde liegenden LOP-Maße) der Einfluss einer Verschärfung für jede Nebenbedingung beurteilt werden

[29] Sollte ein Maximum oder Minimum von *mehreren* Alternativen angenommen werden, so kann eine beliebige dieser Alternativen – z.B. zufällig – ausgewählt werden. Um das Verfahren deterministisch zu halten kann anstelle der zufälligen Auswahl eine Ordnung auf der Alternativenmenge definiert und die gemäß dieser Ordnung kleinste Alternative ausgewählt werden.

kann.[30] Gleichzeitig ist die Menge der Informationen hinreichend beschränkt um von einem menschlichen Agenten noch gut verarbeitet oder zumindest wahrgenommen zu werden.

Anmerkung 7.4.27 In konkreten Anwendungen kann es vorteilhaft sein, das Schattenpreis-6-Tupel in grafischer Form darzustellen um dem Agenten die Beurteilung zu erleichtern. Wir halten hier beispielsweise *Radardiagramme* für geeignet (siehe Abbildung 7.1 für ein Beispiel), welche unserer Erfahrung nach einen sehr übersichtlichen Vergleich der verschiedener Nebenbedingungen (basierend auf den Diagrammen der zugehörigen Schattenpreis-6-Tupel) erlauben. Durch die Verwendung verschiedener Farben in der Darstellung kann die Übersichtlichkeit weiter verbessert und die Vergleichbarkeit damit weiter begünstigt werden.

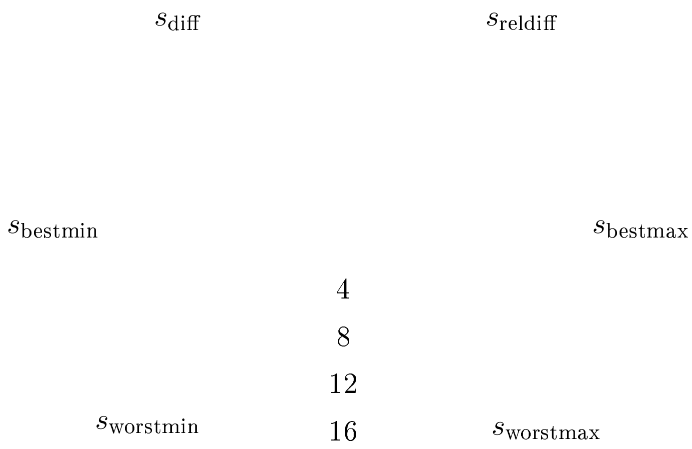

Abbildung 7.1: Beispielhafte Darstellung eines Schattenpreis-6-Tupels als Radardiagramm

Anmerkung 7.4.28 Der konkrete Handlungsvorschlag – basierend auf dem Schattenpreis-6-Tupel – hängt weitestgehend davon ab, was das primäre Interesse des Agenten ist. Die Interpretation der *einzelnen* Komponenten hatten wir bereits in den vorhergehenden Unterabschnitten diskutiert. Wir empfehlen, wenn immer möglich, eine Nebenbedingung mit einem möglichst hohen Schattenpreis s_{reldiff} herauszugreifen und diese zu verschärfen, denn genau durch dieses Vorgehen wird der mögliche Schaden schnellstmöglich begrenzt. Existiert keine solche Nebenbedingung mehr, so können die anderen Schattenpreise als Orientierung im Sinne der bereits erörterten Interpretation herangezogen werden.

[30] Im Sinne einer etwas übersichtlicheren Notation verzichten wir bei der Bezeichnung der Schattenpreise auf die Angabe des zu Grunde liegenden Entscheidungsproblems (A, W) und LOP-Maßes; diese gehen aus dem Kontext stets klar hervor. Zudem haben wir hier auf die Angabe einer Nebenbedingung verzichtet, obwohl der Schattenpreis nur für eine solche (explizite oder implizite Nebenbedingung) definiert ist.

Bei der eher *gesamtheitlichen* Betrachtung *aller* 6 Schattenpreise ist ein etwas differenzierteres Vorgehen möglich und, je nach Ziel, auch nötig. Hier muss im konkreten Fall die Bedeutung der einzelnen Schattenpreise (und der entsprechenden Zielsetzungen) gegeneinander abgewogen werden, was wir *bewusst* dem Agenten überlassen.[31]

Anmerkung 7.4.29 Das Schattenpreis-6-Tupel beinhaltet offenbar nicht *alle* Informationen, die sich für das zielgerichtete Präzisieren basierend auf den Schattenpreisen bezüglich eines LOP-Maßes heranziehen lassen. So wird beispielsweise das in Unterabschnitt 7.4.2 besprochene LOP-Maß $\psi^{\text{diff}}_{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}}$ zumindest nicht direkt für alle Alternativenpaare $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in A$ berücksichtigt und auch die Maße $\psi^{\min}_{\boldsymbol{a}}$ und $\psi^{\max}_{\boldsymbol{a}}$ werden nicht für alle Alternativen $\boldsymbol{a} \in A$ berechnet.

Natürlich könnten weitere Maße in speziellen Situationen herangezogen werden und es kann auch durchaus ein berechtigter Grund für deren Heranziehung vorliegen.[32] Die Berechnung *aller* denkbarer Maße in allen Situationen würde jedoch zu einer nicht zu bewältigenden Datenflut für den Agenten führen, so dass wir versucht haben, die wichtigsten universell einsetzbaren Schattenpreise (bzw. LOP-Maße) herauszugreifen. Auf "Anforderung" können weitere Maße zur Orientierung berechnet werden, z.B. die Schattenpreise bezüglich der Maße $\psi^{\min}_{\boldsymbol{a}}$ und $\psi^{\max}_{\boldsymbol{a}}$ für eine vom Agenten ausgewählte Alternative $\boldsymbol{a} \in A$.

7.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Im Rahmen dieses Kapitels haben wir untersucht, wie der Agent *zielgerichtet* Nebenbedingungen verschärfen kann. Grundsätzliche Idee hierbei ist, dass für jede Nebenbedingung Kenngrößen berechnet werden, aus denen der Agent ersehen kann, welchen Einfluss eine ε-Verschärfung der jeweiligen Nebenbedingung auf die Qualität der Entscheidung hätte. Letztendlich bleibt die Auswahl sowie die konkrete Präzisierung (also Bestimmung einer expliziten oder impliziten Nebenbedingung und Wahl eines geeigneten $\varepsilon > 0$, um das die gewählte Nebenbedingung verschärft wird) Aufgabe des Agenten, da – zumindest in unserem Modell – nur dieser die Glaubwürdigkeit einer Verschärfung beurteilen kann.

Demzufolge ist es nötig, Maße für die Qualität der Entscheidung und damit die Zielsetzung(en) des Agenten formal zu erfassen. Das natürlichste solche Maße ist

[31] Der Grund hierfür ist, dass für eine automatisierte Aggregation exakt erfasst werden müsste, welche Zielsetzung der Agent bei der Präzisierung verfolgt, was wir für nicht praktikabel halten (vgl. auch Unterabschnitt 8.4.7). Wir halten es für zweckmäßiger, dass der Agent *mehrere* Kriterien zur Beurteilung der Nebenbedingungen präsentiert bekommt und dann selbst eine Abwägung vornimmt.

[32] Ein solcher Grund könnte beispielsweise vorliegen, wenn das Lazy Decision Making im Rahmen eines Entscheidungsunterstützenden Systems angewendet wird (vgl. Abschnitt 9.2) und der die Entscheidung treffende Agent "ausprobieren" möchte, unter welchen Bedingungen eine spezielle Alternative aus dem Entscheidungsfindungsprozess ausgeschlossen werden kann.

In diese Kategorie der als Spezialfall anzuwendenden Maße und Verfahren fällt im Übrigen auch das in Abschnitt 4.5 besprochene Vorgehen zum Ausschließen einer Alternative durch das Hinzufügen einer induzierten Ausschlussbedingung.

ein Regret-Maß, welches wir bereits in Kapitel 4 untersucht haben. Darüber hinaus haben wir weitere Maße eingeführt (die sich im wesentlichen aus den Heuristiken ableiten, vgl. Kapitel 5), da der Agent durch die Kombination der Maße eine bessere Orientierung über die Nebenbedingungen erhält.

Tatsächlich lassen sich diese Maße als *LOP-Maße* darstellen, was eine eher technische Eigenschaft ist. Die wichtige Konsequenz hiervon ist, dass sich in Form von Schattenpreisen die gewünschten Kenngrößen für die Nebenbedingungen berechnen lassen. Die zu Grunde liegenden Resultate aus der Theorie der linearen Programmierung haben wir zu Beginn des Kapitels kurz zusammengefasst.

Um die Menge der dazustellenden Informationen beschränkt zu halten, gleichzeitig aber dem Agenten eine gute Orientierungsmöglichkeit zu bieten, haben wir vorgeschlagen, die Schattenpreise bezüglich der wichtigsten sechs Maße als Kombination z.B. in einem Radardiagramm darzustellen. Auf “Anforderung” können darüber hinaus explizit weitere Größen berechnet werden.

Kapitel 8

Lazy Decision Making

Nachdem wir alle notwendigen Grundlagen entwickelt und diskutiert haben, können wir in diesem Kapitel das Lazy Decision Making in sehr kompakter Weise einführen. Wir präsentieren zunächst das grobe Gerüst des Algorithmus um dann anschließend die verschiedenen Freiheitsgrade detaillierter auszufüllen. Es folgt eine ausführliche Diskussion der zu Grunde liegenden Annahmen und eine kurze Abgrenzung des Lazy Decision Making zu anderen Verfahren.

"Steter Tropfen höhlt den Stein."

Titus Lucretius Carus (Lukrez)

"Zu glauben ist schwer. Nichts zu glauben ist unmöglich."

Victor Hugo

8.1 Motivation

Die bisherigen Vorarbeiten münden jetzt in einem Rahmenwerk zur Entscheidungsfindung, dem Lazy Decision Making.[1] Bestenfalls sollte das Verfahren wie eine nahezu zwingende Konsequenz unserer bisherigen Ausführungen wirken, denn im Prinzip haben wir den Hauptteil der Arbeit bereits im Rahmen der Vorarbeiten geleistet.

Voraussetzung für das Lazy Decision Making sind einige relativ einfach wirkende Annahmen, die in Abschnitt 8.4 detaillierter erörtert werden und hier nur

[1] Erste Ansätze für das Lazy Decision Making finden sich in [Pre00a, Pre00b, Pre00c], diese basierten allerdings noch auf der Evidenztheorie als Repräsentationsformalismus.

grob angesprochen werden sollen.[2]

(1) Es war unser erklärtes Ziel, möglichst viel von der *klassischen Entscheidungstheorie* übernehmen zu können, da diese eine breite Akzeptanz (auch von Praktikern!) vorweisen kann und sich in diversen Gebieten bewährt hat. Insbesondere übernehmen wir den Ansatz, die (quantitative) Modellierung der Unsicherheit durch *Wahrscheinlichkeiten* vorzunehmen.

(2) Es sollte aber dennoch eine *differenziertere Ausdrucksfähigkeit* möglich sein, als dies durch das klassische Entscheiden unter Risiko und das Entscheiden unter Ungewissheit gegeben ist (gewissermaßen die "alles oder nichts" Spezialfälle). Hier haben wir uns für das Entscheiden basierend auf *linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen* entschieden.

(3) Das Modell sollte *dynamisch* sein, also nicht unmittelbar basierend auf der Modellierung des Problems zu einer Entscheidung führen sondern Überarbeitungen der Modellierung in Form von Präzisierungen der Wahrscheinlichkeitsinformation erlauben. Hierdurch wird die Abhängigkeit von der verwendeten Heuristik reduziert, da diese gerade für das "Auflösen" der noch vorhandenen "Rest-Ungewissheit" zuständig ist. Jene Rest-Ungewissheit kann durch das Präzisieren schrittweise auf ein für den Agenten erträgliches Niveau vermindert werden.

    Insbesondere ist anzunehmen, dass die vom Agenten eingebrachten Informationen aufgrund seines Problemwissens zumeist besser sind als allgemeine Annahmen wie sie von Heuristiken (zumeist implizit) unterstellt werden müssen.

(4) Wir wollten das *zielgerichtete Präzisieren* unterstützen indem wir den Agenten mit den dazu notwendigen Informationen versorgen. Hierdurch "weiss" der Agent, wie er den Einfluss der Heuristiken reduzieren und die Qualität der Entscheidung steigern kann indem er die notwendigen Informationen (in Form von Präzisierungen) in das Problem einbringt.

    Das zielgerichtete Präzisieren verhindert zudem, dass für den Entscheidungsprozess unnötige Informationen eingebracht werden.

(5) Wir gehen von einem *"weichen" Modell* in folgendem Sinn aus: Der Agent möchte mit vertretbarem Aufwand eine möglichst gute Alternative ausfindig machen. Es ist jedoch nicht sein Ziel, eine exakte Alternativenbewertung basierend auf einem exakten Modell zu bestimmen, da aufgrund seiner partiellen Unkenntnis sämtliche Informationen potenziell fehlerbehaftet sein können.

    Insbesondere ist der Agent – so unsere Unterstellung – nicht an einer quantitativen Bewertung *aller* Alternativen interessiert (wie sie beim klassischen Entscheiden unter Risiko in Form der Nutzenerwartungswerte vorliegt), sondern möchte lediglich eine "gute" Alternative ausfindig machen.

[2]Etliche dieser Annahmen haben wir im Verlauf der Arbeit bereits implizit getroffen, jedoch noch nicht näher erörtert. Tatsächlich haben wir diese Diskussion "stillschweigend" aufgeschoben, um hier eine ganzheitliche Betrachtung der Voraussetzungen vornehmen zu können. Bei der detaillierteren Betrachtung in Abschnitt 8.4 wird deutlich werden, dass die Annahmen teilweise wesentlich mehr beinhalten als dies zunächst erscheinen mag.

(6) Wir unterstellen einen *"faulen"* (bzw. ökonomisch denkenden) Agenten[3], der nicht *mehr* Informationen in die Entscheidungsfindung einbringen möchte als tatsächlich notwendig sind. Insbesondere sollen die eingebrachten Informationen nur zur Bestimmung einer "guten" Alternative ausreichen und nicht zur exakten Bewertung aller Alternativen. (So sind etwa die exakten Unterschiede zwischen sub-optimalen Alternativen für den Agenten nicht von Interesse.)

(7) Der Agent entscheidet *selbständig* (allerdings basierend auf den entsprechenden Informationen), welche Präzisierungen er durchführen will, d.h., welche Nebenbedingung er in welcher Form verschärft (oder neu einbringt).[4] Insbesondere verzichten wir darauf, den Aufwand für die Präzisierungen zu erfassen und konstruieren demzufolge *kein Entscheidungsproblem höherer Ordnung.*

8.2 Grobbeschreibung des Algorithmus

8.2.1 Rahmen

Anmerkung 8.2.1 Bei der Beschreibung des Lazy Decision Making werden wir – wie bereits angekündigt – zweistufig vorgehen. Wir geben zunächst einen groben Rahmen vor, der die Struktur der Verfahrens erläutert, dabei aber noch eine Reihe von Lücken bzw. Freiheitsgraden offen lässt. Deren Ausfüllung werden wir nachfolgend in Abschnitt 8.3 diskutieren.

Der Hauptgrund für das zweistufige Vorgehen ist, dass eine derartige Darstellung insgesamt nachvollziehbarer sein sollte. Die Kenntnis der groben Struktur des Verfahrens soll die Diskussion der Details dahingehend vereinfachen, dass deren Rolle im Gesamtkontext als bereits bekannt angenommen werden kann.

Definition 8.2.2 (Lazy Decision Making – Schema) Das Verfahren Lazy Decision Making basiert auf folgendem Schema (wobei die Details in Abschnitt 8.3 besprochen bzw. ausgefüllt werden):

(1) Erfrage die initiale (endliche) Alternativenmenge A_0*.*

[3] Die Verwendung von "bzw." mag an dieser Stelle etwas missverständlich sein. Natürlich möchten wir damit *nicht* ausdrücken, dass "faul" mit "ökonomisch denkend" gleichzusetzen ist! Vielmehr verwenden wir hier *faul* als eher plakative Umschreibung des Vorgehens in Abgrenzung zum klassischen Modell, in dem *alle* Daten – und damit in den allermeisten Fällen auch sehr viele überflüssige Informationen – erhoben werden. (Die englische Bezeichnung "lazy" hat sich im Zusammenhang mit derartigen Methoden gewissermaßen eingebürgert, für ein Beispiel siehe etwa den Algorithmus *LazySelect* in [MR95, S. 47ff].)

[4] Interessant ist dieser Gedanke in Hinblick auf die *Systemgrenzen*: Beim klassischen Ansatz wird ein Modell der Entscheidungssituation konstruiert, innerhalb dieses Modells automatisch eine Entscheidung ausgewählt und diese anschließend auf das reale System übertragen. Beim Lazy Decision Making findet demgegenüber bei der Präzisierung eine Interaktion zwischen dem Modell und dem realen System – vertreten durch den Agenten – statt. Wir modellieren den Agenten also nicht hinsichtlich aller entscheidungsrelevanter Eigenschaften sondern belassen einige Entscheidungen (hinsichtlich der Präzisierung) beim Agenten.

(2) *Erfrage eine Standardrepräsentation* $(\boldsymbol{C}_0, \boldsymbol{b}_0)$ *der initialen (linearen) Wahrscheinlichkeitsinformation* W_0.

(3) *Setze* $i := 0$.

(4) *LOOP*

 (4.1) *Eliminiere im Entscheidungsproblem* (A_i, W_i) *alle nicht-*(A_i, W_i)*-effizienten Alternativen. Die resultierende Menge effizienter Alternativen sei* A'_i.

 (4.2) *Eliminiere im Entscheidungsproblem* (A'_i, W_i) *sukzessive die verzichtbaren Alternativen. Die resultierende Alternativenmenge sei* A^*_i.[5]

 (4.3) *Bestimme ein* $\boldsymbol{a}^*_i \in \mathcal{H}(A^*_i, W_i)$ *nebst einigen Kenngrößen zur Beurteilung der Alternative* $\boldsymbol{a}^*_i$ *(im Kontext des Entscheidungsproblems* (A^*_i, W_i)*). Präsentiere dem Agenten diese Daten.*

 (4.4) *Falls der Agent den Vorschlag* $\boldsymbol{a}^*_i$ *akzeptiert, verlasse die LOOP-Schleife.*[6]

 (4.5) *Präzisiere im Dialog mit dem Agenten die Wahrscheinlichkeitsinformation* W_i *basierend auf deren Repräsentation* $(\boldsymbol{C}_i, \boldsymbol{b}_i)$. *Hieraus resultiert eine Standardrepräsentation* $(\boldsymbol{C}_{i+1}, \boldsymbol{b}_{i+1})$ *der präzisierten Wahrscheinlichkeitsinformation* $W_{i+1} \subseteq W_i$.

 (4.6) *Sollte keine weitere Präzisierung möglich gewesen sein (d.h.,* $W_{i+1} = W_i$*), verlasse die LOOP-Schleife.*

 (4.7) *Setze* $A_{i+1} := A^*_i$ *und* $i := i + 1$.

(5) *Setze* $M := i$.[7] *Vorschlag ist die Alternative* $\boldsymbol{a}^*_M$ *(welche basierend auf dem Entscheidungsproblem* (A^*_M, W_M) *bestimmt wurde).*

8.2.2 Erläuterung

Anmerkung 8.2.3 Angesichts der in den vorangehenden Kapiteln geleisteten Vorarbeiten sollte der grobe Rahmen des LAZY DECISION MAKING sehr einfach zu verstehen sein. Dennoch möchten wir hier die einzelnen Schritte etwas detaillierter beschreiben als dies im Schema (in Definition 8.2.2) der Fall ist. Es sei jedoch explizit darauf hingewiesen, dass in der Beschreibung noch massive Lücken bleiben, die wir – wie bereits mehrfach angekündigt – in Abschnitt 8.3 füllen.

---

[5] Dieser Schritt ist optional und kann genutzt werden um die Menge der zu betrachtenden Alternativen weiter zu verkleinern. Ist dies nicht gewünscht, kann anstatt dessen $A^*_i = A'_i$ gesetzt werden.

[6] Wir bezeichnen im Folgenden die Menge $\mathcal{H}(A^*_i, W_i)$ als *Vorschlagsmenge* und $\boldsymbol{a}^*_i$ als *Vorschlag*. Die Bezeichnung ist selbsterklärend; das Verfahren schlägt dem Agenten im Falle eines Abbruchs im i-ten Iterationsschritt die Alternative $\boldsymbol{a}^*_i$ als Lösung des Entscheidungsproblems vor.

[7] Diese Festsetzung wäre für den Algorithmus offenkundig entbehrlich und dient lediglich zur einfacheren Bezugnahme auf die Anzahl der Schleifendurchläufe bzw. das "präziseste" Entscheidungsproblem (A^*_M, W_M).

Ausgangspunkt ist ein Entscheidungsproblem $(A_0, W_0) \in \mathbb{E}$ bei partieller Information. Die Komponenten dieses Problems werden in den Schritten (1) (Alternativenmenge) und (2) (Wahrscheinlichkeitsinformation dargestellt durch Standardrepräsentation) vom Agenten erfragt.

Im Rahmen der Hauptschleife des Verfahrens (Schritt (4)) wird das vorliegende Entscheidungsproblem sukzessive im Dialog mit dem Agenten präzisiert, wobei die Variable i die Schleifendurchläufe zählt (und in Schritt (3) mit Null initialisiert wird).

Die Hauptschleife gestaltet sich wie folgt: Da für ein Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit endlicher Alternativenmenge nicht-(A, W)-effiziente Alternativen nicht als Lösung in Frage kommen (vgl. Anmerkung 3.4.38), wird zunächst die Menge A'_i der (A_i, W_i)-effizienten Alternativen bestimmt. Dadurch wird insbesondere die Effizienz des durch eine Heuristik ermittelten Vorschlags garantiert (vgl. Abschnitt 5.7).

Im nächsten optionalen Schritt werden sukzessive die verzichtbaren Alternativen eliminiert (vgl. Abschnitt 4.6). Zwar sind diese Alternativen effizient (da sie zu A'_i gehören) und kommen damit auch als Lösung des Entscheidungsproblems in Betracht, auf der anderen Seite folgt aber aus der Verzichtbarkeit, dass mindestens eine anderer Alternative existiert, bei deren Wahl sich der Agent mindestens genauso gut stellt (vgl. Anmerkung 3.4.38). Möchte der Agent die Alternativenmenge so stark wie möglich einschränken, so sollte er diesen Schritt durchführen. Ist er hingegen an der Menge *aller* Alternativen interessiert, die als Lösung denkbar sind (um beispielsweise die letztendliche Auswahl *selbst* aufgrund von nicht formal erfassten Kriterien zu treffen), kann er auf diesen Schritt verzichten.[8]

Basierend auf einer Heuristik $\mathcal{H}$ wird nachfolgend ein Vorschlag $\boldsymbol{a}_i^* \in \mathcal{H}(A_i^*, W_i)$ für die Lösung des Entscheidungsproblems bestimmt, welcher auf dem "Informationsstand" (bezüglich des eintretenden Umweltzustands) W_i basiert. Zudem werden Kenngrößen zur Beurteilung dieses Vorschlags – beispielsweise der maximal zu erwartende Schaden $\phi_{A_i^*, W_i}(\boldsymbol{a}_i^*)$ bei Auswahl von $\boldsymbol{a}_i^*$ (vgl. Abschnitt 4.7) – bestimmt und dem Agenten in geeigneter Form präsentiert.

Der Agent kann jetzt aufgrund der Kenngrößen entscheiden, ob er den Vorschlag ohne weitere Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation annehmen möchte. Dieser Fall könnte beispielsweise vorliegen, wenn sich die verbleibenden Alternativen A_i^* hinsichtlich ihrer Bewertungen nur noch "wenig" unterscheiden und insoweit der Vorschlag $\boldsymbol{a}_i^*$ eine "gute" Wahl darstellt, die auch im schlechtesten Fall nur "wenig" Schaden anrichten könnte.

Hat sich der Agent hingegen dazu entschlossen die Wahrscheinlichkeitsinformation W_i weiter zu präzisieren, so wird er bei diesem Vorgang durch die Berechnung und Präsentation der für die zielgerichtete Präzisierung gedachten Kenngrößen unterstützt (zum Beispiel das Schattenpreis-6-Tupel für jede der Nebenbedingungen, vgl. Anmerkung 7.4.26). Neben der Verschärfung expliziter Nebenbedingungen kann der Agent neue Nebenbedingungen einbringen, diese gewissermaßen "antesten" (durch die Berechnung der minimalen Schranke, vgl. Anmerkung 6.4.7) und dann ggf. auch

[8] In jedem Fall hat dieser Schritt keinen Einfluss auf die "Qualität" der Lösung gemessen an deren realisierbarem Erwartungsnutzen(intervall).

verschärfen. Hierzu werden die neuen Nebenbedingungen explizit gemacht (vgl. Anmerkung 6.4.13) und die zugehörigen Kenngrößen berechnet (sowie ausgegeben).

Sollte der Agent eine echte Präzisierung vorgenommen haben (also mindestens eine implizite oder explizite Nebenbedingung verschärft haben), beginnt die nächste Iteration der Hauptschleife. Ansonsten wird die Präzisierung als beendet angesehen und es wird dem Agenten der Vorschlag $\boldsymbol{a}_i^*$ unterbreitet.

Anmerkung 8.2.4 Zusammenfassend wird also eine Folge von jeweils präzisierteren Entscheidungsproblemen $(A_0, W_0), \ldots, (A_M, W_M) \in \mathbb{E}$, $M \in \mathbb{N}_0$ mit

$$W_0 \supseteq W_1 \supseteq \ldots \supseteq W_M,$$

konstruiert, wobei die eigentliche Entscheidung schlussendlich aufgrund von (A_M, W_M) (dem "präzisesten" Problem) vorgenommen wird.

Die letztendliche Entscheidung wird – wie im statischen Modell üblich – mit Hilfe einer Heuristik $\mathcal{H}$ getroffen, es wird eine Alternative $\boldsymbol{a}_M^*$ aus $\mathcal{H}(A_M^*, W_M)$ ausgewählt.[9]

Anmerkung 8.2.5 (Korrektheit) Sei $(A_0, W_0) \in \mathbb{E}$, $W_1, \ldots, W_M \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$, $M \in \mathbb{N}_0$, $W_0 \supseteq W_1 \supseteq \ldots \supseteq W_M \neq \emptyset$, A_0 endlich und es entstehe A_{i+1} aus A_i indem alle nicht (A_i, W_i)-effizienten Alternativen sowie sukzessive (in einer beliebigen Reihenfolge) verzichtbare Alternativen aus (A_i, W_i) eliminiert werden.[10] Dann gilt (1) $A_M \neq \emptyset$ und (2) jede eliminierte Alternative $\boldsymbol{a} \in A_0 \setminus A_M$ ist (A_M, W_M)-verzichtbar.

Beweis. (1) Angenommen es gilt $A_M = \emptyset$. Dann existiert wegen $A_0 \neq \emptyset$ ein kleinstes $i^* > 0$ mit $A_{i^*} = \emptyset$. Aufgrund von Bemerkung 3.4.39 (Punkt 4) existieren (A_{i^*-1}, W_{i^*-1})-effiziente Alternativen (in A_{i^*-1}). Beim sukzessiven Eliminieren verzichtbarer Alternativen muss aber mindestens eine Alternative "überlebt" haben (vgl. Anmerkung 4.6.3), so dass wir den gewünschten Widerspruch haben.

(2) Dies folgt unmittelbar aus Folgerung 4.2.5 sowie Bemerkung 4.2.6, da (A_M, W_M) eine Präzisierung aller (A_M, W_i) mit $i \in \{0, 1, \ldots, M\}$ ist. $\square$

Anmerkung 8.2.6 Die prinzipielle Vorgehensweise beim Lazy Decision Making lässt sich besonders einfach anhand eines Extremfalls illustrieren: In diesem Extremfall würden wir mit einem Entscheidungsproblem unter Ungewissheit $(A_0, W_0) \in \text{ungewissheit}(\mathbb{E})$ starten (also $W_0 = \mathbb{S}^{(n)}$) und dieses präzisieren bis ein Entscheidungsproblem unter Risiko $(A_M, W_M) \in \text{risiko}(\mathbb{E})$ (also $|W_M| = 1$) erreicht wird. Dieses lässt sich mit Hilfe des Bernoulli-Prinzips – also durch Auswahl einer erwartungsnutzenmaximalen Alternative – lösen.

Allerdings ist es in praktischen Anwendungen durchaus nicht notwendig, das Problem derart zu spezifizieren, dass nur noch *eine* Wahrscheinlichkeitsverteilung

[9] Wir erörtern in Unterabschnitt 8.3.4, *wie* aus der Menge $\mathcal{H}(A_M^*, W_M)$ ein Vorschlag ausgewählt wird. (Tatsächlich kann dieser im Prinzip beliebig gewählt werden.)

[10] Exakter: Es entstehe A_i' aus A_i indem alle nicht (A_i, W_i)-effizienten Alternativen eliminiert werden. Dann ist A_{i+1} das Resultat der sukzessiven Eliminierung der verzichtbaren Alternativen aus (A_i', W_i).

(und damit ein Entscheidungsproblem unter Risiko) verbleibt. Grund hierfür ist einerseits, dass nicht notwendigerweise die *genaue* Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Entscheidungsfindung notwendig ist (dies ist gerade die Aussage des Stabilitätslemmas 4.3.2) und andererseits, dass dem Agenten möglicherweise eine "gute" Alternative (im Gegensatz zu der "besten" Alternative) ausreicht. Dies kann die Menge der einzubringenden Informationen – oder anders ausgedrückt die erforderliche Genauigkeit – erheblich reduzieren!

Zudem wird man in praktischen Anwendungen kaum mit absoluter Ungewissheit (also $W_0 = \mathbb{S}^{(n)}$) starten sondern zumeist eine wesentlich präzisere Anfangs-Wahrscheinlichkeitsinformation W_0 spezifizieren können.

8.2.3 Freiheitsgrade

Anmerkung 8.2.7 Der in Definition 8.2.2 festgelegte Rahmen für das Lazy Decision Making lässt, wie auch bereits in Anmerkung 8.2.1 angedeutet, eine Reihe entscheidender Punkte noch offen. Im einzelnen sind dies die nachfolgenden Punkte, jeweils als Frage formuliert:

(1) Wie wird die initiale Alternativenmenge konkret eingegeben?

(2) Wie wird die initiale Wahrscheinlichkeitsinformation konkret eingegeben?

(3) Mit welcher Heuristik $\mathcal{H}$ soll eine "Vorschlagsmenge" $\mathcal{H}(A_i^*, W_i)$ bestimmt werden?

(4) Wie wird die Alternative $\boldsymbol{a}_i^*$ aus der Menge $\mathcal{H}(A_i^*, W_i)$ ausgewählt?

(5) Wie lässt sich bestimmen, ob der Vorschlag $\boldsymbol{a}_i^*$ "gut genug" ist oder ob das Entscheidungsproblem weiter präzisiert werden sollte? (Was sind die in diesem Kontext relevanten Kenngrößen?)

(6) Wie findet konkret die "Präzisierung im Dialog" statt?

Wir werden diese Fragen (bzw. die Ausfüllung der entsprechenden Freiheitsgrade) im nachfolgenden Abschnitt 8.3 detailliert erörtern.

8.3 Ausfüllung der Freiheitsgrade

8.3.1 Eingabe der initialen Alternativenmenge

Der Agent muss zunächst die zur Auswahl stehenden Alternativen, also die Alternativenmenge A_0, spezifizieren. Dies wird in den allermeisten Fällen durch die Eingabe der aus der klassischen Entscheidungstheorie bekannten *Entscheidungsmatrix* erfolgen, in der jedem Paar bestehend aus einer Alternative und einem Zustand ein Ergebnis zugeordnet wird.[11]

Nachfolgend muss eine BERNOULLI-Nutzenfunktion festgelegt (oder ausgewählt) werden, mit deren Hilfe die Ergebnisse auf Nutzenwerte abgebildet werden können. Alternativ ist möglich, dass die konkreten Ergebnisse nicht spezifiziert werden sondern der Agent in der Entscheidungsmatrix unmittelbar die Nutzen der entsprechenden Ergebnisse angibt.

In jedem Fall resultiert aus der Eingabe die (endliche) Alternativenmenge $A_0 = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_l\}$ und definitionsgemäß gibt für jede Alternative $\boldsymbol{a} \in A_0$ der Vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ die Nutzen der zustandsabhängigen Ergebnisse an (d.h., a_i ist der im Zustand i realisierte Nutzen, $i = 1, \dots, n$).

8.3.2 Eingabe der initialen Wahrscheinlichkeitsinformation

Für die Kommunikation mit dem Agenten bezüglich der (linearen) Wahrscheinlichkeitsinformationen greifen wir auf die Standardrepräsentation (vgl. Unterabschnitt 6.3.2) zurück. Abgesehen von den "Standard"-Nebenbedingungen

$$p_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n), \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

muss jede weitere Nebenbedingung explizit vom Agenten eingegeben werden.

Bei der Spezifizierung der Nebenbedingungen ist es empfehlenswert, den Agenten dadurch zu unterstützen, dass verschiedene *spezielle Typen* von Nebenbedingungen vereinfacht eingegeben werden können. Dies betrifft insbesondere die in Abschnitt 6.5 behandelten speziellen Klassen linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen. So ist beispielsweise für eine *bedingte* Wahrscheinlichkeit (vgl. Unterabschnitt 6.5.5, insbesondere auch bezüglich der Notation) die Form

$$\Pr(\{1, 2\} \,|\, \{1, 2, 3, 4, 5\}) \leq 0.3$$

wesentlich natürlicher als deren Übersetzung

$$0.7p_1 + 0.7p_2 - 0.3p_3 - 0.3p_4 - 0.3p_5 \leq 0$$

in eine lineare Ungleichung (vgl. Anmerkung 6.5.22).[12]

Anzumerken ist zudem, dass in einer Implementierung des Verfahrens der spezielle Typ einer Nebenbedingung (also zum Beispiel "bedingte Wahrscheinlichkeit") gespeichert werden sollte. Dadurch kann dem Agenten diese im Verlauf des Algorithmus stets in der entsprechenden Form präsentiert werden, wodurch vermutlich das Verständnis des Agenten unterstützt und demzufolge Verschärfungen vereinfacht werden. Offenbar stellt dies rein technisch kein Problem dar, da es sich lediglich um eine andere externe Repräsentation der Nebenbedingung handelt.

[11] In einer prototypischen Implementierung des LAZY DECISION MAKING erfragen wir von dem Agenten zunächst die Anzahl der Zustände und nachfolgend die Alternativen. Jede Alternative wird dabei als Vektor der zustandsabhängigen Ergebnisse eingegeben, wobei entweder die Ergebnisse mittels einer vorher festgelegten Nutzenfunktion auf Nutzenwerte abgebildet, oder aber direkt Nutzenwerte anstelle der Ergebnisse eingegeben werden.

[12] Wegen $\Pr(\{1,2\} \,|\, \{1,2,3,4,5\}) = \frac{\Pr(\{1,2\} \cap \{1,2,3,4,5\})}{\Pr(\{1,2,3,4,5\})} = \frac{p_1 + p_2}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5}$ erhalten wir $p_1 + p_2 \leq 0.3(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)$ und damit die angegebene lineare Ungleichung.

8.3.3 Heuristik zur Bestimmung einer Vorschlagsmenge

Mit Hilfe einer Heuristik $\mathcal{H}$ lässt sich zu einem Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ eine nichtleere Vorschlagsmenge $\mathcal{H}(A, W) \subseteq A$ bestimmen (sofern $\mathcal{H}$ auf der Eingabe (A, W) definiert ist). In Kapitel 5 haben wir Heuristiken sehr ausführlich untersucht.

Da wir beim Lazy Decision Making ausschließlich lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen und endliche Alternativenmengen verwenden, genügt es, wenn die gewählte Heuristik $\mathcal{H}$ für diese Art von Entscheidungsproblemen definiert ist.

Im Prinzip lässt sich *jede* Heuristik für unsere Zwecke im Rahmen des Lazy Decision Making einsetzen. Sinnvollerweise sollten jedoch die der Heuristik zu Grunde liegenden Annahmen (zum Beispiel extreme Aversion gegenüber Ungewissheit, ausgedrückt etwa durch das $\mathrm{E}_{\mathrm{min}}$-Axiom, vgl. Abschnitt 5.3) mit den Vorstellungen des Agenten bestmöglich übereinstimmen. Dies gilt jedoch stets beim Einsatz von Heuristiken und beschränkt sich nicht auf deren Verwendung beim Lazy Decision Making.

Ein gangbarer Weg (gewissermaßen die Standardvorgehensweise) ist diesen Überlegungen entsprechend, dass der Agent im Vorfeld eine seinem Profil bestmöglich angepasste Heuristik $\mathcal{H}$ spezifiziert und diese für das gesamte Verfahren fest bleibt.

Auf der anderen Seite ist es durchaus denkbar, *mehrere* Heuristiken parallel zu verwenden[13] und möglicherweise sogar während der Iterationsschritte die Heuristik(en) zu wechseln.[14]

8.3.4 Auswahl eines Vorschlags

Unsere allgemeine Definition (Definition 3.4.14) einer Heuristik sieht vor, dass die Menge $\mathcal{H}(A, W)$ (mit $(A, W) \in \mathbb{E}$) potenziell mehr als ein Element enthält, im Extremfall kann sogar $\mathcal{H}(A, W) = A$ gelten.

Da wir jedoch als Vorschlag genau *eine* Alternative $\boldsymbol{a} \in A$ auszeichnen möchten[15], *wählen* wir eine Alternative $\boldsymbol{a} \in \mathcal{H}(A, W)$, haben uns jedoch über das konkrete

[13] Dies führt dazu, dass anstelle *eines* Vorschlags *mehrere* Vorschläge generiert werden (je einer pro gewählter Heuristik). Da einige Kenngrößen relativ zu dem Vorschlag definiert sind (vgl. Unterabschnitte 8.3.5 und 7.4.3), sollten auch hier entsprechend die Kenngrößen bezüglich *jedes* Vorschlags bestimmt werden. Insgesamt könnte dieses "Mehr an Informationen" dem Agenten in einigen Fällen eine bessere Orientierungshilfe im Entscheidungsprozess liefern, gleichzeitig steigt allerdings mit der anwachsenden Datenmenge auch die Gefahr der Unübersichtlichkeit.

[14] Es wäre durchaus denkbar, dass die verwendete Heuristik situativ an das vorliegende Entscheidungsproblem angepasst wird. So könnte sich beispielsweise bei Verwendung der Hurwicz-Heuristik (vgl. Anmerkung 5.2.11) der Optimismusparameter durch die Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation ändern. (Es fällt allerdings sehr schwer, einen wirklich überzeugenden Grund hierfür anzugeben. Insofern wollten wir lediglich auf die Möglichkeit hinweisen ohne Aussagen über die Sinnhaftigkeit dieser Vorgehensweise zu treffen.)

[15] Die Beschränkung auf *genau eine* Alternative hat eher pragmatische Gründe, sie vereinfacht im wesentlichen die Kommunikation mit dem Agenten, da er dann genau einen Vorschlag präsentiert bekommt (letztendlich muss er sich für genau eine Alternative entscheiden) und die Anzahl der zur Beurteilung der Nebenbedingung bereitgestellten Schattenpreise konstant ist. (Der von uns zur Beurteilung favorisierte Schattenpreis s_{reldiff} ist abhängig von der vorgeschlagenen Alternative; im Falle einer mehrelementigen Vorschlagsmenge würden sich demzufolge

Vorgehen bei dieser Auswahl nicht näher geäussert.

Tatsächlich erscheint uns hier jedes beliebige Vorgehen unproblematisch. Grund hierfür ist, dass die grundsätzliche Haltung des Agenten durch die Heuristik erfasst wird und der Agent insofern keine unmittelbaren Vorlieben bezüglich der Elemente aus $\mathcal{H}(A, W)$ haben sollte.

Um das Verfahren reproduzierbar zu halten, schlagen wir vor, eine Ordnung auf der Alternativenmenge zu definieren und im Falle einer mehrelementigen Menge $\mathcal{H}(A, W)$ die bezüglich dieser Ordnung kleinste Alternative $\boldsymbol{a} \in \mathcal{H}(A, W)$ als Vorschlag auszuzeichnen. Sollte die Reproduzierbarkeit nicht erforderlich sein, kann auch eine randomisierte Auswahl vorgenommen werden, welche ebenfalls gewisse Vorzüge hat (vgl. Abschnitt 5.8).

8.3.5 Kenngrößen zur Beurteilung des Vorschlags

Der Agent wird das iterative Präzisieren (also die Hauptschleife des Lazy Decision Making, vgl. Schritt (4) im Schema aus Definition 8.2.2) abbrechen, wenn ein in seinen Augen "gesunder" Kompromiss zwischen den beiden folgenden (hier relativ "extrem" formulierten) Eigenschaften vorliegt:

(1) Die verschiedenen, noch zur Auswahl verbleibenden Alternativen unterscheiden sich nur noch marginal.[16]

(2) Weiteres Präzisieren ist kaum noch möglich, da das Zutrauen in das resultierende Modell stark sinken würde.

Ein "gesunder" Kompromiss liegt vor, wenn der Aufwand für das weitere Präzisieren in keinem vernünftigen Verhältnis mehr zu dem Unterschied zwischen den noch verbleibenden Alternativen steht.

Bezüglich des zweiten Punktes lassen sich in unserem Modell keine Maße angeben, da wir den für den Agenten entstehenden Aufwand (bzw. den Verlust an Zutrauen in das Modell) nicht erfassen. Warum wir diesen Aufwand nicht in unser Modell mit einbeziehen, erläutern wir in Unterabschnitt 8.4.7 detaillierter.

Demgegenüber kann der Agent bei der Beurteilung des ersten Punktes durch geeignete Maße unterstützt werden. Obwohl, wie schon bei den LOP-Maßen, eine Vielzahl denkbarer Kenngrößen existiert, halten wir an dieser Stelle die in Abschnitt 4.7 besprochenen Regret-Schranken für die geeigneteste Wahl.[17]

---

auch mehrere Schattenpreise s_{reldiff} ergeben, was wiederum zu gewisser Verwirrung seitens des Agenten führen könnte.)

[16] An dieser Stelle sei explizit darauf hingewiesen, dass die Alternativen durch das iterative Präzisieren der Wahrscheinlichkeitsinformation natürlich *nicht* einander angeglichen werden! Der Grund dafür, dass dennoch die verbleibenden Alternativen immer ähnlicher werden, ist, dass aufgrund der genaueren Informationen mehr Alternativen ausgeschlossen werden können und tendenziell ähnliche Alternativen verbleiben (gerade die bezüglich der wahren Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ erwartungsnutzenmaximalen Alternativen, vgl. Anmerkung 3.3.4).

Das Kriterium zum Vergleich der verbleibenden Alternativen ist deren Erwartungsnutzen, und bezüglich dieses Kriteriums werden bei einer Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation die verbleibenden Alternativen immer ähnlicher.

[17] Grund hierfür ist, dass jene Regret-Schranken die schärfsten Schranken für den durch eine "Fehlentscheidung" entgangenen Erwartungsnutzen liefern und dieser die Bewertungsgrundlage für

Eine obere Schranke für die möglichen Unterschiede der noch verbleibenden Alternativen (gemessen als Differenz der Erwartungsnutzen) liefert das Maß $\phi_{A_i^*,W_i}$ (vgl. Definition 4.7.4).[18] Das Maß $\phi_{A_i^*,W_i}(\boldsymbol{a}_i^*)$ beschränkt den maximalen “Schaden” (in Form von entgangenem Erwartungsnutzen), der bei Auswahl des Vorschlags $\boldsymbol{a}_i^*$ anstelle der optimalen (aber unbekannten) Alternative aus A_i^* resultieren kann.

Im Falle eines “kleinen” Wertes $\phi_{A_i^*,W_i}(\boldsymbol{a}_i^*)$ kann die vorgeschlagene Alternative $\boldsymbol{a}_i^*$ relativ “gefahrlos” angenommen werden, insofern stellt dies unserer Auffassung nach das wichtigste Instrument zur Beurteilung des Vorschlags dar. Zudem vermittelt das Maß $\phi_{A_i^*,W_i}$ einen Eindruck über die noch verbleibende Verschiedenartigkeit der Alternativen (siehe auch Abschnitt 4.7).

8.3.6 Zielgerichtete Präzisierung im Dialog

Wir haben bereits in Kapitel 7 relativ ausführlich das zielgerichtete Präzisieren behandelt und dabei insbesondere das zu Grunde liegende Prinzip (die Ermittlung von Schattenpreisen) sowie die Bedeutung der LOP-Maße diskutiert.

Von zentraler Wichtigkeit ist die Frage, welche implizite oder explizite Nebenbedingung der Agent in einem Iterationsschritt (der Hauptschleife des Lazy Decision Making) verschärft.

In unserem Ansatz überlassen wir die Auswahl einer geeigneten Nebenbedingung komplett dem Agenten, unterstützen ihn dabei jedoch durch die Schattenpreise bezüglich der LOP-Maße. Konkret verwenden wir in einer prototypischen Implementierung des Verfahrens die Darstellung des Schattenpreis-6-Tupels (vgl. Anmerkung 7.4.26) als Radardiagramm.[19] Dass die Auswahl der zu verschärfenden Nebenbedingung nicht automatisch vollzogen werden kann liegt einerseits daran, dass wir keinen Präzisierungsaufwand modellieren (siehe hierzu auch Unterabschnitt 8.3.5 sowie vor allem Unterabschnitt 8.4.7), andererseits an der Möglichkeit neue Nebenbedingungen hinzuzufügen (hier gibt es beliebig viele Möglichkeiten, so dass dieser Prozess nicht – oder zumindest nicht unmittelbar – automatisiert werden kann).

Bisher mag die Bezeichnung “Zielgerichtete Präzisierung *im Dialog*” etwas obskur erscheinen, da wir die Bedeutung des Dialoges noch nicht angesprochen haben. Dieser bezieht sich vor allem auf die Möglichkeit neue Nebenbedingungen hinzuzufügen (also vormals implizite Nebenbedingungen in verschärfter Form explizit zu machen).

Nachfolgend möchten wir kurz darlegen, warum wir es für essentiell halten, dass

die Alternativen ist (vgl. Anmerkung 4.7.6). Zwar wäre auch denkbar, etwa den “durchschnittlichen” oder “erwarteten” entgangenen Erwartungsnutzen zu berechnen, hierzu müssten aber zwangsläufig die einzelnen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Wahrscheinlichkeitsinformation gewichtet werden, was wir – aufgrund der fehlenden diesbezüglichen Informationen – für nicht sinnvoll erachten.

[18] Wir haben in Rahmen von Abschnitt 7.3.2 ein entsprechendes LOP-Maß definiert, verwenden jedoch hier – da wir keinen Bezug auf die Schattenpreise nehmen – das ursprüngliche Maß. Gleiches gilt für das Maß $\phi_{A_i^*,W_i}(\boldsymbol{a}_i^*)$.

[19] Wir möchten an dieser Stelle nochmals unsere Empfehlung unterstreichen, dem Schattenpreis s_{reldiff} (vgl. Anmerkung 7.4.26) das höchste Gewicht bei der Beurteilung der Nebenbedingungen zu geben (vgl. Anmerkung 7.4.22).

die zu betrachtenden Nebenbedingungen von dem Agenten selbst formuliert werden, also entweder unmittelbar zu Anfang eingebracht oder aber im Dialog formuliert wurden.

Eine zentrale Prämisse unserer Vorgehensweise ist, dass der Agent bezüglich der von ihm formulierten Nebenbedingungen eine konkrete Vorstellung über deren inhaltliche Bedeutung hat und daher diese "am ehesten" verschärfen kann. Demgegenüber ist es unserer Meinung nach für den Agenten zumeist problematisch, über die Gültigkeit einer Nebenbedingung mit (für ihn) quasi willkürlichen Koeffizienten (die also nicht von ihm selbst festgelegt wurden) wie

$$1.431p_1 - 99.52p_2 + 434.12p_3 + 123.55p_4 - 0.009p_5 \leq 0.82222$$

zu entscheiden, da er kaum eine Vorstellung von der inhaltlichen Bedeutung solcher Bedingungen entwickeln wird bzw. kann (vgl. auch Beispiel 6.4.10).

Es folgen zwei Anmerkungen, welche die praktische Realisierung der zielgerichteten Präzisierung betreffen.

Anmerkung 8.3.1 Bei der Darstellung der Nebenbedingungen für den Agenten sollte die spezielle Klasse der jeweiligen Nebenbedingung beachtet werden. Hat der Agent eine Nebenbedingung als Beschränkung einer *bedingten* Wahrscheinlichkeit formuliert, so sollte diese auch stets in entsprechender Form dargestellt werden um dadurch die Interpretation durch den Agenten möglichst gut zu unterstützen (vgl. hierzu auch die Ausführungen in Unterabschnitt 8.3.2).

Anmerkung 8.3.2 Zweifelsohne wird es explizite Nebenbedingungen geben, die der Agent *nicht* mehr verschärfen kann. In der prototypischen Implementierung des Lazy Decision Making ist es aus diesem Grund möglich, derartige Nebenbedingungen als "*final*" zu markieren und sie dann in allen nachfolgenden Schritten aus den Präzisierungs-Betrachtungen auszuschließen.[20] Diese Vorgehensweise kann zu einer erheblichen Reduzierung der für den Agenten anfallenden Informationen führen und damit insgesamt den Entscheidungsfindungsprozess beschleunigen.

Anmerkung 8.3.3 Die zielgerichtete Präzisierung stellt gewissermaßen die "weiche" Komponente des Lazy Decision Making dar, da hier diverse Orientierungsgrößen und Anhaltspunkte verwandt werden, diese jedoch nicht auf einem axiomatisch begründbaren Vorgehen beruhen sondern lediglich "Richtwerte" für den Agenten darstellen (vgl. hierzu insbesondere die LOP-Maße aus Abschnitt 7.3). Dies ist durchaus gewollt und quasi das zentrale Element des Dialogs – die Entscheidungen hinsichtlich der Präzisierung werden bewusst dem Agenten überlassen, der nicht komplett in allen entscheidungsrelevanten Eigenschaften durch das System modelliert werden muss. Gleiches gilt für den durch Anwendung einer Heuristik bestimmten Vorschlag.

[20] Wir bezeichnen dies als *Finalisierung* einer Nebenbedingung. Die Nebenbedingung erhält hierdurch ihren endgültigen (finalen) Zustand und wird nicht weiter als Ansatzpunkt für eine Verschärfung betrachtet.

Demgegenüber sind die restlichen Komponenten des Lazy Decision Making wohlbegründet und basierend auf etablierten Modellen und Axiomen (klassischer Ansatz, Axiome rationalen Handelns, Entscheiden bei linearer Information, vgl. hierzu die Ausführungen in Abschnitt 8.4) oder lassen sich hieraus ableiten und beweisen (z.B. Verzicht auf nicht-effiziente Alternativen). Die nicht-axiomatische Begründung des Dialogs beeinträchtigt aber in keinster Weise die Begründung des Modells, da hier (im Dialog) die Entscheidung gerade durch *den Agenten* getroffen wird.

8.4 Diskussion der Annahmen

8.4.1 Erweiterung des klassischen Modells

Unser Ansatz basiert auf dem Standardmodell der klassischen Entscheidungstheorie und verwendet insbesondere die entsprechenden Konzepte wie Zustände, Alternativen und Ergebnisse (vgl. Kapitel 2). Sämtliche Resultate aus der klassischen Entscheidungstheorie – beispielsweise die axiomatische Begründung des Bernoulli-Prinzips – finden sich dadurch in unserem Modell wieder (allerdings gelten sie dort zunächst nur für die der klassischen Entscheidungssituation entsprechenden Spezialfälle). Durch die Erweiterung des klassischen Modells ist der Ansatz relativ einfach zu verstehen und könnte – so unsere Hoffnung – von der breiten Akzeptanz des klassischen Modells profitieren (also möglicherweise eher akzeptiert werden als komplett neue Modelle).[21] Als einzige weitergehende Forderung unterstellen wir das Dominanzaxiom (Definition 3.4.27), das unserer Meinung als Gebot der Rationalität akzeptiert werden sollte.

Etwas weniger offensichtlich (als dies auf den ersten Blick erscheinen mag) ist die verwendete Methode zur Repräsentation des Wissens des Agenten bezüglich des "wahren" Umweltzustands. Um diesen Aspekt angemessener diskutieren zu können, präzisieren wir zunächst in Anlehnung an Philippe Smets die Bedeutung der Begriffe "Unsicherheit" und "Ungenauigkeit" (vgl. [Sme97]).

Es sei θ eine Variable, die einen Wert aus dem Universum Θ annimmt. Wir nennen eine Information *ungenau*, wenn sie den Wert von θ nicht mit der notwendigen Genauigkeit spezifiziert; also beispielsweise eine Information der Form "$\theta \in M$" mit $M \subseteq \Theta$ und $|M| > 1$. Wir nennen eine Information *unsicher*, wenn der Agent bezüglich ihrer Gültigkeit Zweifel hat; beispielsweise könnte der Agent *vermuten*, dass $\theta = x$ (für ein $x \in \Theta$) gilt. Da "$\theta = x$" in diesem Zusammenhang nur eine Vermutung darstellt, ist die Information "$\theta = x$" unsicher. Vermutet der Agent $\theta \in M$ mit $|M| > 1$, so stellt dies eine unsichere ungenaue Information dar. Wir verwenden "*exakt*" als Synonym für "genau".

Beim klassischen Entscheiden unter Risiko ist der "wahre" Umweltzustand *un-*

[21] Diese Hoffnung basiert u.a. auf der Beobachtung, dass die Axiome rationalen Verhaltens (vgl. Definition 2.2.3) über Jahrzehnte hinweg heftig diskutiert wurden, mittlerweile jedoch von den meisten Theoretikern wie Praktikern akzeptiert werden. Aufgrund dieses langen "Reifeprozesses" halten wir es für sehr zentral, möglichst viele der bereits "gereiften" Resultate zu übernehmen.

sicher. Diese Unsicherheit wird durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Zustandsmenge modelliert. Tatsächlich kann man zeigen, dass zum Zwecke des Entscheidens ein "Maß für das Vertrauen" (welches die unsicheren Informationen quantitativ beschreiben soll) stets den Axiomen eines Wahrscheinlichkeitsmaßes genügen sollte, da sich ansonsten "*dutch books*" konstruieren lassen.[22]

Wir (und viele andere Autoren, z.B. Menges und Kofler in [KM76] oder Walley in [Wal91]) erweitern diesen Ansatz dahingehend, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht *genau* bekannt sein muss. Zusammenfassend unterstellen wir also, dass der Agent potenziell ungenaue Kenntnis bezüglich des potenziell unsicheren eintretenden Umweltzustands hat. Es sei darauf hingewiesen, dass in der Literatur erstaunlich selten strikt zwischen den Konzepten Ungenauigkeit und Unsicherheit unterschieden wird und dass diese Begriffe zumeist eher in intuitivem Sinn ohne eine vorherige Definition verwendet werden.

Im nachfolgenden Abschnitt 8.4.2 gehen wir näher auf die zur Modellierung dieser Kenntnis verwandten *Wahrscheinlichkeitsinformationen* ein.

8.4.2 Lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen

Das dem Lazy Decision Making zu Grunde liegende Modell orientiert sich in einigen grundlegenden Aspekten am Entscheiden bei partieller linearer Information nach Kofler und Menges ([KM76]).

Wie wir in Kapitel 6 und dort insbesondere in Abschnitt 6.5 gezeigt haben, beinhalten die linearen Wahrscheinlichkeitsinformationen eine Reihe sehr ausdrucksstarker Modellierungsmöglichkeiten für das Wissen des Agenten über den eintretenden Umweltzustand. Insofern stellt das Entscheiden bei partieller linearer Information eine deutliche Erweiterung des klassischen Entscheidens unter Risiko (und unter Ungewissheit) dar.

[22] Das folgenschwere *Dutch Book Theorem* von Frank P. Ramsey besagt in knapper Zusammenfassung, dass sich gegen jedes Vertrauensmaß, welches *nicht* den Axiomen eines Wahrscheinlichkeitsmaßes genügt, ein *dutch book* konstruieren lässt, das basierend auf dem Vertrauensmaß akzeptiert werden muss (vgl. [Ram31]). Ein dutch book ist eine Wette, die für den Gegner zu einem sicheren Verlust führt. Insofern kann jeder Agent, dessen Handlungen auf einem Vertrauensmaß beruhen, welches kein Wahrscheinlichkeitsmaß darstellt, von einem cleveren Gegner ausgenutzt werden.

Erstaunlicherweise findet man in der Literatur kaum Hinweise auf die Herkunft der Bezeichnung "*dutch-book*". Peter P. Wakker hat den Ursprung des Begriffes untersucht und zumindest drei plausible Erklärungen gefunden, die er auf der Web-Seite `http://www.kub.nl/~few5/center/staff/wakker/miscella/Dutchbk.htm` präsentiert.

(1) Holländische Versicherungsgesellschaften haben angeblich während des 19. Jahrhunderts Versicherungen für Schiffe derart organisiert und kombiniert, dass sie selbst dabei, unabhängig vom eintretenden Schadensfall, immer verdienten.

(2) Der Ausdruck stammt möglicherweise auch aus dem 17. Jahrhundert, als Holland und England stark rivalisierende Flotten unterhielten. Aus dieser Zeit stammen eine Reihe negativer Ausdrücke beginnend mit "dutch", beispielsweise "dutch uncle" und "dutch treat".

(3) Denkbar ist auch, dass der Begriff aus dem Umfeld der Pferderennen stammt; dort spricht man noch heute von dem "bookmaker" und "making a book".

Es ließe sich durch *allgemeinere* Wahrscheinlichkeitsinformationen zwar eine noch größere Allgemeinheit erreichen, wir halten diese jedoch in den meisten praktischen Anwendungen für verzichtbar. Nichtsdestotrotz ist dies definitiv ein Ansatzpunkt für Erweiterungs- bzw. Verallgemeinerungsmöglichkeiten des LAZY DECISION MAKING (vgl. Unterabschnitt 10.2.1).

Es mag überraschend erscheinen, dass wir bisher kaum Worte über die *Interpretation* der Wahrscheinlichkeitsinformationen verloren haben. Wir haben zwar sehr häufig auf die Standardinterpretation 3.3.4 hingewiesen, diese aber nie explizit für die Ausführungen unterstellt (höchstens für einige Teilresultate). Der Grund hierfür ist, dass es verschiedene plausible Interpretationen der Wahrscheinlichkeitsinformationen (und damit des LAZY DECISION MAKING) gibt, welche dasselbe Modell teilen. Hier wollten wir also die Allgemeinheit nicht unnötig einschränken.

Wir möchten zumindest zwei Interpretationen kurz vorstellen, wobei allerdings die vermutlich "zugänglichere" Variante die Standardinterpretation bleiben wird:[23]

(1) *Standardinterpretation*: Die Standardinterpretation können wir nun mithilfe der Wortpaare sicher/unsicher und genau/ungenau etwas einfacher erläutern: Idee ist, dass der eintretende Umweltzustand unsicher ist und sich diese Unsicherheit durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ auf der Zustandsmenge beschreiben lässt. Allerdings ist dem Agenten diese Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{\rho}$ nicht notwendigerweise genau bekannt, er kann sie lediglich durch eine Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ "eingrenzen" (im Sinne von $\boldsymbol{\rho} \in W$). Um den wichtigsten Punkt klar herauszustellen: Im Prinzip würde das Wissen des Agenten am exaktesten durch $\boldsymbol{\rho}$ beschrieben, die Verwendung von W ist lediglich eine "Notlösung". Plakativ gesprochen lässt sich beispielsweise das Zutrauen des Agenten in Regen am nächsten Kalendertag durch eine subjektive Wahrscheinlichkeit $r \in [0, 1]$ exakt beschreiben, diese ist ihm jedoch i.Allg. nur ungenau bekannt (er kann sie zum Beispiel durch ein Intervall $[\underline{r}, \overline{r}] \subseteq [0, 1]$ eingrenzen).

(2) *Alternative Interpretation*: Eine sehr ähnlich anmutende, dennoch aber grundverschiedene Interpretation erhält man durch die Annahme, dass das Wissen des Agenten am exaktesten durch eine nichtleere, potenziell mehrelementige Wahrscheinlichkeitsinformation $W^* \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ beschrieben wird. Dem Agenten ist W^* nicht notwendigerweise genau bekannt, er kann W^* i.Allg. nur durch Wahrscheinlichkeitsinformationen W "eingrenzen" (im Sinne von $W^* \subseteq W$).

Der entscheidende Unterschied zwischen beiden Interpretationen ist, dass gemäß der Standardinterpretation das Wissen im Prinzip durch exakte (subjektive) Wahrscheinlichkeiten darstellbar ist, wohingegen die alternative Interpretation i.Allg. zu ungenauen Wahrscheinlichkeiten (im Sinne von WALLEY, [Wal91]) führt.

Anzumerken ist, dass die Standardinterpretation offenbar einen Spezialfall der alternativen Interpretation darstellt und insofern von dieser subsumiert wird.

[23] Erstaunlicherweise haben wir in keiner Arbeit einen Hinweis auf die Existenz verschiedener Interpretationen gefunden; alle Autoren gehen (unseres Wissens nach) von der Standardinterpretation aus. Dies steht vermutlich in engem Zusammenhang zu der wenig klaren Unterscheidung zwischen den Konzepten der Unsicherheit und der Ungenauigkeit.

Da beide Interpretationen dasselbe formale Modell teilen, möchten wir uns nicht weiter festlegen, verwenden bei konkreten Beispielen jedoch stets die Standardinterpretation. Der in unseren Augen entscheidende Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass wir näher am klassischen Modell bleiben.

8.4.3 Dynamisches Modell

In einem statischen Entscheidungsmodell – etwa den klassischen Ansätzen – wird eine Entscheidungssituation zunächst modelliert und dann, basierend auf dem Modell, eine Alternative ausgewählt (also entschieden). Im Prinzip ist der Einfluss des Agenten bei diesem zweistufigen Vorgehen mit der Modellierung beendet, den Rest der "Arbeit" übernimmt das jeweils verwandte Verfahren zur Entscheidungsfindung (z.B. eine Heuristik oder das Bernoulli-Prinzip). Beide Schritte (Modellierung und Entscheidung) sind klar voneinander abgegrenzt, und es müssen alle entscheidungsrelevanten Aspekte des Agenten modelliert werden damit sie adäquat berücksichtigt werden können.

Offenbar kann das Entscheiden bei partieller Information ebenfalls als statisches Modell verwandt werden; die Entscheidung wird dann mittels einer der in Kapitel 5 besprochenen Heuristiken vollzogen. Diesen Ansatz wählen beispielsweise Kofler und Menges in [KM76], wobei sie für die eigentliche Auswahl stets das $\mathrm{MaxE_{min}}$-Prinzip (vgl. Abschnitt 5.3) heranziehen.

Das statische Vorgehen zur Lösung eines Entscheidungsproblems bei partieller Information hat jedoch (mindestens) einen – in unseren Augen gravierenden – Nachteil: Im Gegensatz zu dem Entscheiden unter Risiko ist im Falle einer mehrelementigen Wahrscheinlichkeitsinformation i.Allg. aufgrund der nur ungenau bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilung keine wirklich zufriedenstellende Entscheidung möglich.

Warum dies der Fall ist, möchten wir nachfolgend etwas detaillierter erörtern: Das Bernoulli-Prinzip für das Entscheiden unter Risiko basiert auf den Axiomen rationalen Handelns (vgl. Definition 2.2.3) und wird allgemein anerkannt (da es sich als logische Konsequenz aus den Axiomen ergibt und diese mittlerweile allgemein anerkannt werden). Demgegenüber existiert *keine* Heuristik für das Entscheiden bei partieller Information (oder das Entscheiden unter Ungewissheit), die eine vergleichbare Akzeptanz aufweisen kann. Zwar verfechten etwa Kofler und Menges vehement das $\mathrm{MaxE_{min}}$-Prinzip (vgl. Abschnitt 5.3), dennoch erscheint das diesem Prinzip zu Grunde liegende $\mathrm{E_{min}}$-Axiom nicht ansatzweise so gerechtfertigt und unumstritten zu sein wie die Axiome rationalen Verhaltens. Plakativ gesprochen ist das Axiom zwar unter Umständen plausibel, keineswegs aber natürlich oder zwingend.

Dieses Problem wird wesentlich dadurch verschärft, dass es in den allermeisten Fällen *keine eindeutig bestimmte* Wahrscheinlichkeitsinformation gibt, welche das Wissen des Agenten bezüglich des eintretenden Umweltzustands exakt beschreibt.[24]

[24] Tatsächlich wäre es zwar denkbar, dass eine solche Wahrscheinlichkeitsinformation existiert (vgl. hierzu Unterabschnitt 8.4.2 und insbesondere die alternative Interpretation von Wahrscheinlichkeitsinformationen), jedoch würde auch in diesem Fall der Agent die entsprechende Wahrscheinlichkeitsinformation zumeist nur ungenau kennen.

Wiederum plakativ gesprochen kann eine Ungleichung der Form “$p_i \leq 0.3$” häufig zu “$p_i \leq 0.299$” verschärft werden, ohne dass der Agent dadurch die resultierende Wahrscheinlichkeitsinformation für weniger angemessen (zur Beschreibung seiner Kenntnis) hält. Auf diesen Punkt werden wir nachfolgend etwas genauer eingehen.

Durch die verwendete Heuristik müssen zwangsläufig zusätzliche Annahmen über die Präferenzen des Agenten getroffen werden, mit deren Hilfe die Ungenauigkeit aufgelöst werden kann, eine solche Annahme ist etwa das $\mathrm{E}_{\min}$-Axiom (vgl. Definition 5.3.2).

Jedoch halten wir es für wesentlich wahrscheinlicher, dass der Agent diese impliziten Entscheidungen bezüglich der Auflösung der Ungenauigkeit – die beim statischen Modell von der Heuristik übernommen werden – *selbst* besser treffen kann! Wir illustrieren dies zunächst anhand eines einfachen Beispiels: In vielen Fällen wird der Agent die Wahrscheinlichkeit eines Zustands durch ein Intervall eingrenzen können. Es ist anzunehmen, dass die Intervallgrenzen dabei reine “Schätzwerte”, zumeist aber keine besonderen Konstanten darstellen. Insofern erscheint es zumindest denkbar (eher sogar wahrscheinlich), dass der Agent einige der Schranken “verschärfen” und damit die Ungenauigkeit reduzieren kann. Obwohl seine Überzeugung bezüglich der Gültigkeit der verschärften Schranken möglicherweise abnimmt, ist dennoch zu vermuten, dass der Agent aufgrund seines Problemwissens Präzisierungen finden kann, die ihm plausibler erscheinen als die durch eine Heuristik getroffenen Annahmen.[25]

Insofern reduziert also das Präzisieren der Wahrscheinlichkeitsinformation den Einfluss der verwendeten Heuristik; diese löst dann gewissermaßen nur noch die verbleibende “Rest-Ungenauigkeit” auf. Dass eine solche teilweise verbleiben wird, steht ausser Frage. Jedoch wird dieser Zustand, in dem keine weitere Präzisierung mehr möglich ist, vermutlich erst nach einer Reihe von Präzisierungsschritten erreicht.

8.4.4 Zielgerichtetes Präzisieren

Beim Lazy Decision Making präzisiert der Agent das Entscheidungsproblem sukzessive bis eine “gute” Entscheidung möglich ist.

Im Prinzip wäre es denkbar, dass der Agent in jedem Schritt *irgendeine* Nebenbedingung auswählt, die er noch für “verschärfbar” hält, und diese dann entsprechend präzisiert. Allerdings wäre dieses Vorgehen in den meisten Fällen verschwenderisch: Der Agent würde (zumeist) etliche Schranken präzisieren, die keinen Einfluss auf die eigentliche Entscheidungsfindung haben! Das wiederum bedeutet, dass der Agent zum einen Ressourcen (z.B. Zeit) verschwendet, auf der anderen Seite sein Zutrauen in das Modell möglicherweise unnötig abnimmt (da er verschärften Schranken

[25] Tatsächlich wird in vielen praktischen Anwendungen (z.B. aus dem Umfeld der Investitions- und Finanzierungstheorie, vgl. [FH94]) ein Entscheidungsmodell unter Risiko verwendet *obwohl* keine exakten Wahrscheinlichkeiten vorliegen. Dennoch ist anzunehmen, dass grobe Schätzwerte dieser Wahrscheinlichkeiten zumindest besser sind, als ein Entscheidungsmodell unter Ungewissheit anzuwenden und den Rest einer Heuristik zu überlassen. Unser Ansatz erweitert die Ausdrucksmöglichkeiten dahingehend, dass auch Situationen zwischen Risiko und Ungewissheit modelliert werden können. Noch zentraler erscheint uns aber, dass der Agent dann “ermutigt” wird, die Ungenauigkeit sukzessive zielgerichtet zu vermindern, bis eine “gute” Entscheidung möglich ist. Insofern wird der Einfluss der verwendeten Heuristik auf ein Minimum reduziert.

tendenziell eher weniger Vertrauen beimessen wird).

Insofern versucht das Lazy Decision Making, den Agenten durch die Bereitstellung von dazu notwendigen Informationen bei der *zielgerichteten* Präzisierung zu unterstützen. Konkret bedeutet dies, dass die Präzisierungen im Dialog vorgenommen werden, wobei für jede zu präzisierende (implizite oder explizite) Nebenbedingung die Schattenpreise für "gewisse" LOP-Maße ausgegeben werden und diese einen Hinweis auf die Relevanz der Nebenbedingung bezüglich der Entscheidungsfindung liefern. Wir empfehlen hier die Verwendung des Schattenpreise-6-Tupels (vgl. Anmerkung 7.4.26), welches, zumindest in seiner grafischen Darstellung als Radardiagramm, eine sehr übersichtliche Bewertung der Nebenbedingung hinsichtlich ihres Beitrags zur Entscheidungsfindung erlaubt.

Es sei aber nochmals betont, dass es sich bei diesen Kenngrößen lediglich um einen Vorschlag handelt, der nicht formal bewiesen werden kann. Grund hierfür ist, dass wir nicht alle entscheidungsrelevanten Eigenschaften des Agenten formal erfassen und anstatt dessen die Entscheidung über die Präzisierung bewusst *ihm* (oder *ihr*) überlassen. Die Kenngrößen dienen also lediglich als Richtwerte, anhand derer der Agent aussichtsreiche Nebenbedingungen auswählen kann.

8.4.5 Weiches Modell

Exakte Lösungsverfahren liefern basierend auf exakten Eingangsdaten eine exakte Lösung. In diese Kategorie fällt beispielsweise das klassische Entscheiden unter Risiko: Basierend auf dem Modell der Entscheidungssituation, den Präferenzen des Agenten in Form der *Bernoulli*-Nutzenfunktion und der (exakten!) Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich eine Lösung des Entscheidungsproblems (in Form einer Alternative mit maximalem Nutzenerwartungswert) bestimmen. Möchte man nachträglich die in den meisten Fällen nur vorgetäuschte Exaktheit aufweichen, so bedient man sich zumeist der Sensitivitätsanalyse, auf die wir – mit besonderer Betonung ihrer Probleme – in Unterabschnitt 8.5.4 näher eingehen.

In vielen praktischen Anwendungen ist die von exakten Verfahren vorgespiegelte Sicherheit eine reine Illusion, da die Eingangsdaten z.B. aufgrund von Messungenauigkeiten oder mangelnder Kenntnis nicht hinreichend exakt bestimmt werden können. Die Lösung ist dann zwar exakt bezüglich der Eingangsdaten, jedoch nicht notwendigerweise bezüglich der wirklich vorherrschenden Zustände.

Diese Probleme sind der Ausgangspunkt für sogenannte "*weiche*" Modelle (vgl. beispielsweise [Men81]). Hier geht bereits in den Entwurf des Modells die Annahme ein, dass die Daten *nicht* exakt vorliegen.

Das Lazy Decision Making ist in mehreren Punkten ein Verfahren basierend auf der "weichen" Modellbildung. Dies drückt sich vermutlich am deutlichsten in der Zielsetzung aus: Ziel des Lazy Decision Making ist, den Agenten dabei zu unterstützen, mit *vertretbarem* Aufwand eine *möglichst gute* Alternative ausfindig zu machen. Demgegenüber ist es Zielsetzung des "harten" klassischen Modells, basierend auf exakten Daten die "beste" Alternative zu bestimmen, wobei im Falle des Entscheidens unter Risiko jeder Alternative sogar ein exakter Erwartungsnutzen zugeordnet werden kann und somit eine vollständige Ordnung der Alternativenmenge möglich ist.

Des Weiteren ist bereits die Verwendung von Wahrscheinlichkeitsinformationen Ausdruck der weichen Modellbildung (siehe etwa [Kof89, S. 19ff]). Dies gilt insbesondere beim Lazy Decision Making, da die *Dynamik* des Modells gerade auf der Annahme basiert, dass die Wahrscheinlichkeitsinformation das Wissen des Agenten *nicht* exakt (genau) beschreibt und noch präzisiert werden kann.[26]

Besonders deutlich wird der "weiche" Charakter des Modells auch bei der zielgerichteten Präzisierung im Dialog. Hier werden bewusst Entscheidungen dem Agenten überlassen und dieser lediglich unterstützt. Dies hat den entscheidenden Vorteil, dass der Agent nicht hinsichtlich aller entscheidungsrelevanter Eigenschaften modelliert werden muss sondern insbesondere das Wissen hinsichtlich Präzisierungen der Wahrscheinlichkeitsinformation direkt erfragt wird. Dieser Punkt betrifft offenbar die Systemgrenzen, die wir derart gezogen haben, dass die schlecht fassbaren Konzepte beim Agenten belassen werden.

8.4.6 Fauler Agent

Wir unterstellen beim Lazy Decision Making einen "faulen" (*lazy*) Agenten, der in den Entscheidungsprozess nicht mehr Daten einbringen will als tatsächlich für die Ermittlung einer "guten" Alternative notwendig sind.[27] Das Stabilitätslemma (vgl. Abschnitt 4.3) hat in sehr deutlicher Weise gezeigt, dass für viele Entscheidungsprobleme die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht exakt bekannt sein muss. Insofern werden beim klassischen Entscheiden unter Risiko zumeist mehr bzw. genauere Informationen eingebracht, als dies eigentlich notwendig wäre. Wir möchten diesen Sachverhalt anhand eines kurzen Beispiels illustrieren.

Beispiel 8.4.1 Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ ein Entscheidungsproblem mit $n = 3$ und $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, wobei

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, 5, 5), \quad \boldsymbol{a}_2 = (10, 5, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (3, 3, 10).$$

Zunächst betrachten wir den Fall einer Entscheidungsproblems unter Risiko mit $W = \{\boldsymbol{p}\}$ und

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3) = (0.6, 0.2, 0.2).$$

Eine Berechnung der Erwartungsnutzen $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{p}$ (für $i = 1, 2, 3$) zeigt, dass $\boldsymbol{a}_2$ die optimale Alternative ist.

Tatsächlich sind aber die *exakten* Wahrscheinlichkeiten zur Entscheidungsfindung nicht notwendig, wie die folgenden Überlegungen zeigen:

(1) Der Erwartungsnutzen von Alternative $\boldsymbol{a}_1$ ist offenbar unabhängig von der vorliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung stets 5. Somit kann diese Alternative als "Messlatte" für die Bewertung der anderen Alternativen verwandt werden.

[26] Exakter basiert das Verfahren auf der Annahme, dass dieses Vorgehen (Beginnen mit einer groben Approximation und sukzessives zielgerichtetes Präzisieren) für den Agenten einfacher ist bzw. weniger Aufwand verursacht.

[27] Insofern trifft "ökonomisch denkend" den Sachverhalt etwas präziser als "faul". Siehe hierzu auch Fußnote 3.

(2) Alternative $\boldsymbol{a}_3$ hat einen Erwartungsnutzen von $3(1 - p_3) + 10p_3 = 3 + 7p_3$. Genau im Falle $p_3 > 2/7$ ist somit $\boldsymbol{a}_3$ gegenüber $\boldsymbol{a}_1$ (echt) zu bevorzugen.

(3) Der Erwartungsnutzen von Alternative $\boldsymbol{a}_2$ beträgt $10p_1 + 5p_2$. Für $p_1 > 0.5$ ist $\boldsymbol{a}_2$ gegenüber $\boldsymbol{a}_1$ vorzuziehen (wobei dies allgemeiner für $10p_1 + 5p_2 > 5$, also $2p_1 + p_2 > 1$ zutrifft).

Die Kenntnis von $p_1 > 0.5$ hätte also bereits ausgereicht, um Alternative $\boldsymbol{a}_1$ als optimale Wahl auszuschließen.[28] Mit einer zusätzlichen Information wie $p_3 \leq 0.25$ ergibt sich unmittelbar $\boldsymbol{a}_2$ als optimale Alternative, also Lösung des Entscheidungsproblems. Diese ungenaue Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p}$ ($p_1 > 0.5$ und $p_3 \leq 0.25$) wäre zur Lösung des vorliegenden Problems also vollkommen ausreichend gewesen.

Tatsächlich geht unsere Auffassung von "Faulheit" im Rahmen des Lazy Decision Making noch weiter: Denkbar ist, dass der Agent mit einem Entscheidungsproblem unter *Ungewissheit* startet, zunächst also gar keine nicht-trivialen Informationen einbringt. Nun kann er sukzessive dem Entscheidungsproblem "grobe" Nebenbedingungen hinzufügen und diese dann zielgerichtet verschärfen bis eine "gute" Entscheidung möglich wird. Durch diese Vorgehensweise wird das Einbringen von (für die Entscheidungsfindung) verzichtbaren Informationen vermieden.

8.4.7 Keine Modellierung des Spezifizierungsaufwands

Eine idealisierte Version des Lazy Decision Making würde dem Agenten stets genau sagen, welche Nebenbedingung es zu verschärfen gilt. Insofern stellt sich die Frage, wieso das tatsächliche Verfahren hierzu nicht in der Lage ist.

Das Kernproblem besteht darin, dass bei der Beurteilung einer Nebenbedingung (hinsichtlich ihrer Eignung zur weiteren Präzisierung) *zwei* "Größen" berücksichtigt werden müssen, von denen in unserem Modell nur eine ansatzweise bekannt ist. Zu berücksichtigen ist einerseits der Einfluss, den eine Verschärfung der entsprechenden Nebenbedingung auf die Entscheidungsfindung hat (z.B. gemessen an einem der in Unterabschnitt 7.3.2 vorgestellten LOP-Maße bzw. den entsprechenden Schattenpreisen). Diesem Punkt versuchen wir zumindest ansatzweise gerecht zu werden, etwa in Form des Schattenpreis-6-Tupels (vgl. Anmerkung 7.4.26).

Andererseits muss aber auch der *"Aufwand"* für eine Verschärfung der Nebenbedingung einbezogen werden, welcher insbesondere die Glaubwürdigkeitsreduzierung beinhalten muss, die durch die Verschärfung entsteht.[29] Da wir diesen Aspekt in keinster Weise modellieren, ist eine *beiden* "Größen" gerecht werdende Bewertung der

[28] Lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen erlauben *nicht* die Einbeziehung von *echten* Ungleichungen wie $p_1 > 0.5$. Allerdings können diese in praktischen Anwendungen stets durch eine Ungleichung der Form $p_1 \geq 0.5 + \varepsilon$ für ein sehr kleines $\varepsilon > 0$ (z.B. $\varepsilon = 10^{-10}$) ersetzt werden.

[29] Wird eine Nebenbedingung verschärft, so wird dies i.Allg. das Vertrauen des Agenten vermindern, dass die entsprechende Wahrscheinlichkeitsinformation die sein Wissen adäquat beschreibende (aber zumeist nicht exakt bekannte) Wahrscheinlichkeitsinformation (oder Wahrscheinlichkeitsverteilung) beinhaltet (vgl. Unterabschnitt 8.4.2).

Nebenbedingungen offenkundig nicht möglich und folglich muss der Agent *selbst* über die vorzunehmende Präzisierung entscheiden (wird dabei allerdings unterstützt).

Wir möchten nun etwas detaillierter darauf eingehen, warum wir den Präzisierungsaufwand nicht modellieren. An dieser Stelle sei zunächst betont, dass die Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation *nicht* die Beschaffung neuer Informationen bedeutet sondern lediglich die präzisere (mit weniger Ungenauigkeit versehene) Modellierung der vorliegenden Informationen (vgl. hierzu auch Unterabschnitt 8.4.2).

Diese Abgrenzung ist sehr wichtig, da in der klassischen Entscheidungstheorie häufig der Fall untersucht wir, dass der Agent *neue Informationen* beschaffen kann (siehe beispielsweise [HR92, Part II], [Lau98, S. 333-368]). Im Prinzip stellt die Informationsbeschaffung ein separates Entscheidungsproblem dar, so dass sich insgesamt ein mehrstufiges Problem ergibt (welches jedoch durch eine geeignete Erweiterung der Alternativenmenge in ein normales einstufiges Entscheidungsproblem überführt werden kann). Die Möglichkeit der Informationsbeschaffung kann auch in unserem Verfahren berücksichtigt werden, betrifft jedoch – wie bereits erwähnt – *nicht* die Modellierung des Präzisierungsaufwands um die es uns hier geht.

Es wäre zumindest prinzipiell denkbar, die möglichen Präzisierungen zu modellieren und den entsprechenden Aufwand zu erfassen. Es würde, wie im Falle der Informationsbeschaffung, ein mehrstufiges Entscheidungsproblem resultieren, welches in ein einstufiges Problem überführt werden könnte. Bei der Erfassung des Aufwands müsste für jede mögliche (bzw. zu betrachtende) Präzisierung der Aufwand, der sich aus der Verminderung des Zutrauens in die präzisierte Wahrscheinlichkeitsinformation ergibt sowie der tatsächlich durch die Präzisierung entstehende Aufwand[30] numerisch erfasst werden, was alles andere als trivial ist. Tatsächlich wäre aber auch hier noch keine vollständige Modellierung erreicht: Durch die Modellierung des Aufwands entsteht wiederum Aufwand, so dass dieser Prozess offenbar *ad infinitum* getrieben werden könnte. Im Prinzip können also Entscheidungsprobleme beliebiger Ordnung entstehen.

Zusammenfassend sei festgehalten, dass der Hauptgrund für unseren Verzicht auf die (explizite) Modellierung des Präzisierungsaufwands neben der Problematik, wie dies überhaupt unter Berücksichtigung aller Präzisierungsmöglichkeiten sinnvoll möglich ist, in dem hierdurch resultierenden Zusatzaufwand liegt, den wir für nicht gerechtfertigt halten.[31] Andererseits ist es technisch aber durchaus möglich, den Präzisierungsaufwand zu erfassen (Gleiches gilt für die Möglichkeit der weiteren Informationsbeschaffung). Hieraus resultieren Entscheidungsprobleme höherer Ordnung, die auf ein "gewöhnliches" Problem reduziert und dann mit unserem Verfahren

[30] Im Falle eines Softwareagenten könnte die Präzisierung Resultat einer genaueren Berechnung sein, welche Ressourcen wie Rechenzeit und Speicherplatz "verbraucht".

[31] Unsere praktischen Erfahrungen – insbesondere mit der prototypischen Implementierung – belegen, dass der Agent sehr einfach anhand der beim LAZY DECISION MAKING zur Verfügung gestellten Informationen zielgerichtet Nebenbedingungen zur weiteren Verschärfung auswählen kann. Demgegenüber scheint eine Spezifizierung des Präzisierungsaufwands für konkrete Nebenbedingungen eher schwierig zu sein. Das Problem mag darin bestehen, dass an dieser Stelle sehr viel "Gespür" und "Intuition" gefragt sind, sich derartige Konzepte aber nur sehr schwierig modellieren oder gar numerisch erfassen lassen.

behandelt (gelöst) werden können.

8.5 Positionierung des Lazy Decision Making

8.5.1 Einbettung in die klassische Entscheidungstheorie

Im Rahmen von Unterabschnitt 8.4.1 haben wir detailliert ausgeführt, dass wir das Lazy Decision Making als unmittelbare Erweiterung des klassischen Modells der Entscheidungstheorie verstehen.

8.5.2 Bezug zur LPI-Theorie

Grundlage für das Lazy Decision Making sind Entscheidungsprobleme bei partieller Information wie sie von Kofler und Menges eingeführt und in Teilen untersucht wurden (vgl. [KM76]). Wir haben diesen prinzipiellen Ansatz formalisiert und hieraus ein mathematisches Modell entwickelt, welches insbesondere eine vereinfachte Darstellung sowie die formal korrekte Herleitung zusätzlicher Resultate erlaubt hat.

Das Lazy Decision Making erweitert das statische Modell um Dynamik in Form der zielgerichteten Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation. Insofern stellen die diesbezüglichen Ausführungen, welche letztendlich durch die Betrachtungen zur Lösbarkeit von Entscheidungsproblemen bei partieller Information motiviert sind, die inhaltlichen Hauptneuerungen dar.

Weiterhin nehmen wir das $\mathrm{MaxE_{min}}$-Prinzip nicht als zwingendes Entscheidungsprinzip an, sondern haben beliebige Heuristiken in das Modell eingebettet und insbesondere auch eine sehr breite, in diesem Zusammenhang neue Klasse (die OWA-Heuristiken) vorgestellt.

8.5.3 Bezug zu weiteren Theorien

Trotz des gewählten Repräsentationsformalismus (lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen) bestehen durchaus auch Bezüge zu Theorien, die auf anderen Repräsentationsformalismen basieren.

So kann etwa durch eine spezielle Beschränkung der verwendeten Nebenbedingungen erreicht werden, dass unmittelbar "ein" Lazy Decision Making basierend auf Maßen der *Evidenztheorie* resultiert (vgl. Unterabschnitt 6.5.3). Allerdings ist das allgemeine Lazy Decision Making nicht auf diese Maße zugeschnitten und es wäre denkbar, dass für derartige Spezialfälle geeignetere Kenngrößen (etwa anstelle des Schattenpreis-6-Tupels) existieren (vgl. hierzu auch [Pre00b] und Abschnitt 10.4).

Ein weiterer möglicher Anknüpfungspunkt wäre die von Walley entwickelte Theorie der *ungenauen Wahrscheinlichkeiten* (vgl. [Wal91]). Diese erlaubt – allerdings im Rahmen eines stark abweichenden Modells – die Beschreibung von Wahrscheinlichkeitsinformationen und es sollte insofern möglich sein, das Lazy Decision Making als Entscheidungsverfahren auf diese Theorie zu übertragen.

Es sei hier abschließend angemerkt, dass sich zumindest die Grundideen des LAZY DECISION MAKING – also das "faule", zielgerichtete Entscheiden im Rahmen "weicher" Annahmen – auf fast jedes Modell, welches die Modellierung der Kenntnisse des Agenten bezüglich eines unsicheren Umweltzustands erlaubt, in geeigneter Form übertragen lassen sollten.

8.5.4 Abgrenzung zur Sensitivitätsanalyse

Dem klassischen Ansatz folgend modelliert man eine Entscheidungssituation durch ein Entscheidungsproblem unter Risiko und löst dies mit Hilfe des BERNOULLI-Prinzips.

Natürlich ist dabei jedem Praktiker klar, dass durch die exakten Werte eine in Wahrheit zumeist nicht vorliegende Genauigkeit "vorgetäuscht" wird und diese zu erheblichen Problemen – nämlich Fehlentscheidungen basierend auf unzutreffenden Informationen – führen kann.

Um hier Abhilfe zu schaffen bedient man sich zumeist der *Sensitivitätsanalyse* ([Din69, FH94, NM93]). Deren Grundprinzip besteht darin, die Sensitivität der Ausgangsdaten (in unserem Fall die BERNOULLI-Nutzen der Alternativen) in Abhängigkeit von "kleinen" Schwankungen in den Eingangsdaten (Entscheidungsmatrix, Zustandswahrscheinlichkeiten) zu untersuchen. Im Prinzip werden dazu verschiedene Variationen der Eingangsdaten "ausprobiert" und die entsprechenden Probleme (mit dem BERNOULLI-Prinzip) gelöst.

Problematisch an diesem Vorgehen ist jedoch, dass es jeglicher axiomatischer Rechtfertigung entbehrt (vgl. [Wal91, S. 7]). Denn der klassische (BAYES'sche) Ansatz basiert zentral auf der Annahme, dass exakte Wahrscheinlichkeiten existieren und vorliegen. Die Annahme, dass der Agent verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen für möglich hält und diese *einzeln* ausprobiert ist absolut inkonsistent zu dieser Annahme und kann zu zweifelhaften Resultaten führen wie wir im nachfolgenden Beispiel 8.5.1 illustrieren.[32]

Beispiel 8.5.1 Sei $(A, W) \in \mathbb{E}$ mit $n = 2$ gegeben durch $A = \{(0,9), (9,0), (4,4)\}$ und $W = \mathbb{S}^{(n)}$. Je nach der Einstellung des Agenten wäre es denkbar, dass die Alternative $(4,4)$ die beste Wahl darstellt, da diese unabhängig von dem eintretenden Umweltzustand einen Nutzen von 4 liefert. Diese Alternative würde sich beispielsweise bei Anwendung des MaxE_{min}-Prinzips als Lösung ergeben (siehe Abschnitt 5.3).

Demgegenüber betrachten wir nun den Fall, dass der Agent eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p}^* \in W$ herausgreift und dann eine Sensitivitätsanalyse durchführt. Da dies stets zur Anwendung des BERNOULLI-Prinzips führt, kommen nur

[32]Das zentrale Problem besteht in dem *einzelnen* Ausprobieren der für möglich gehaltenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Wird unterstellt, dass der Agent mehrere Wahrscheinlichkeitsverteilungen für möglich erachtet, so kann nicht unmittelbar das klassische Modell verwendet werden sondern es muss eine geeignete Theorie auf Grundlage dieser Annahme entwickelt werden, wie wir es in den Kapiteln 3 und 4 getan haben. Diese ist zwar stark verwandt mit der klassischen Theorie, weicht aber dennoch hinsichtlich der Lösung von Entscheidungsproblemen z.T. signifikant von dieser ab (siehe Beispiel 8.5.1).

die Alternativen $(0, 9)$ und $(9, 0)$ in Betracht! Grund hierfür ist, dass *keine* Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p} \in W$ derart existiert, dass $(4, 4)$ Lösung des Entscheidungsproblems $(A, \{\boldsymbol{p}\})$ ist.

Demzufolge würden in unserem Beispiel bei Anwendung der Sensitivitätsanalyse für manche Agenten (mindestens diejenigen, die das $\mathrm{E}_{\mathrm{min}}$-Axiom akzeptieren) falsche Schlussfolgerungen gezogen bzw. falsche Entscheidungen getroffen.

Ein zentrales Problem der Sensitivitätsanalyse besteht also darin, dass gewissermaßen anstelle *einer* Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ die *einzelnen* Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\boldsymbol{p} \in W$ betrachtet werden, was zu Fehlschlüssen führen kann (vgl. Beispiel 8.5.1). Im Rahmen unserer Ausführungen zu der Lösbarkeit von Entscheidungsproblemen bei partieller Information (Kapitel 4) haben wir festgestellt, dass durchaus die Lösung eines Problems $(A, W) \in \mathbb{E}$ für *kein* (Teil-)Problem $(A, \{\boldsymbol{p}\})$ (mit $\boldsymbol{p} \in W$) optimal sein kann (vgl. Bemerkung 4.4.10). Insofern ist die Betrachtung des Problems (A, W) qualitativ etwas anderes als die "Summe" der Einzelbetrachtungen der Entscheidungsprobleme unter Risiko $(A, \{\boldsymbol{p}\})$ (mit $\boldsymbol{p} \in W$).

8.5.5 Aspekte der Computational Intelligence

Im Bereich der Computational Intelligence – zu dem insbesondere auch die Fuzzy Logik zählt – zeichnet sich immer deutlicher der Trend ab, dass in vielen Anwendungsfeldern die Systeme nicht mehr autonom (möglicherweise nach einer Phase der Dateneingabe) ablaufen sondern das gesamte Verfahren durch die Interaktion mit dem (menschlichen) Benutzer geprägt ist. Anders ausgedrückt wird die "Funktionsweise" des menschlichen Agenten nicht mehr im System nachgebildet sondern der Benutzer wird explizit quasi als *black box* in das System eingebettet (vgl. [Tak01]). In diesem Zusammenhang spricht Takagi von *Humanized Computational Intelligence*. Auch die von Zadeh vorgeschlagene *Computational Theory of Perceptions* zielt in eine ähnliche Richtung wie es durch das folgende Zitat gut zum Ausdruck kommt:

> „The computational theory of perceptions suggests a new direction in AI – a direction that may enhance the ability of AI to deal with real-world problems in which decision-relevant information is a mixture of measurements and perceptions.“ [Zad01, Seite 628]

Das Lazy Decision Making basiert auf einem absolut vergleichbaren Ansatz: Basierend auf einer Erweiterung des klassischen Ansatzes wird in den dynamischen Komponenten die Präzisierung *dem Agenten* überlassen, das System *lebt* von diesem Dialog und wir versuchen bewusst nicht, die "Funktionsweise" des Agenten dahingehend nachzubilden, dass sein gesamtes entscheidungsrelevantes Wissen in das Modell eingebracht wird.

Zweifelsohne könnten weitere für die Entscheidungsfindung relevante Aspekte wie beispielsweise die Präferenzrelation – die wir in Form einer Nutzenfunktion realisieren – aus dem Modell hin zum Agenten "ausgelagert" werden. Auf einige diesbezügliche Aspekte gehen wir im Rahmen eines kurzen Ausblicks in Kapitel 10 ein.

8.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

In diesem Kapitel haben wir das eigentliche Lazy Decision Making eingeführt indem wir den Rahmenalgorithmus beschrieben und für das Ausfüllen der verbleibenden Freiheitsgrade im Wesentlichen auf die Ergebnisse der vorherigen Kapitel zurückgegriffen haben. Grundsätzliche Idee ist, dass der Agent mit einer sehr ungenauen Wahrscheinlichkeitsinformation beginnt und diese sukzessive zielgerichtet präzisiert bis keine weitere Präzisierung mehr möglich ist bzw. der Aufwand (im Sinne der verminderten Glaubwürdigkeit) in keinem vernünftigen Verhältnis mehr zu dem Einfluss auf die Qualität der Entscheidung steht.

Beim Aufbau des Verfahren haben wir diverse "Entwurfsentscheidungen" treffen müssen oder bewusst getroffen, die von der axiomatischen Grundlage (insbesondere das Dominanzaxiom) über den Repräsentationsformalismus (also lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen) bis zu den Systemgrenzen (was macht der Agent und was ist Bestandteil des Algorithmus?) reichen. Diese haben wir detailliert dargelegt und zu rechtfertigen versucht.

Zuletzt haben wir knapp versucht, das Lazy Decision Making gegenüber verwandten Theorien und Ansätzen mit ähnlichen Zielen zu positionieren. Insbesondere haben wir klar gezeigt, dass das Lazy Decision Making einen qualitativ anderen Ansatz als die Sensitivitätsanalyse darstellt, wenngleich die zu Grunde liegende Idee – zumindest im Kontext von Entscheidungsproblemen – ähnlich ist.

Kapitel 9

Anwendungen

In diesem Kapitel diskutieren wir weitere Einsatzmöglichkeiten für das LAZY DECISION MAKING. Neben der relativ naheliegenden Verwendung in Entscheidungsunterstützenden Systemen beschreiben wir eine Anwendung im Bereich des multikriteriellen Entscheidens und skizzieren eine Einsatzmöglichkeit bei der Entscheidungsfindung von Software-Agenten.

Anhand eines "Spielzeugbeispiels" demonstrieren wir knapp das konkrete Vorgehen bei der Verwendung des LAZY DECISION MAKING.

"Ideen halten sich nicht. Es muß etwas mit ihnen getan werden."

ALFRED NORTH WHITEHEAD

"Praktisch entstehen alle allgemeinen Theorien aus der Betrachtung von Spezialproblemen. Sie haben keinen Sinn, wenn sie nicht der Erklärung spezieller Probleme und der Induktion in ihrem Rahmen dienen."

RICHARD COURANT

9.1 Motivation

Wir haben zunächst die relativ umfangreichen Grundlagen des LAZY DECISION MAKING entwickelt (Kapitel 3 bis 7) um dann im vorangehenden Kapitel 8 das eigentliche Verfahren vorzustellen. Die Beschreibung ist dabei aber nicht bis in die Details einer konkreten Implementierung gegangen, das relativ allgemeine Schema kann und muss auf die jeweiligen Bedürfnisse eines konkreten Anwendungsfelds angepasst werden.

Im Prinzip können mit dem LAZY DECISION MAKING-Verfahren *beliebige* Entscheidungsprobleme behandelt werden, die sich mit den Mitteln des klassischen Modells – möglicherweise erweitert um die Ausdrucksfähigkeit linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen – beschreiben lassen (vgl. Kapitel 2). Demzufolge ergibt sich eine sehr breite Palette von potenziellen Anwendungsmöglichkeiten, dennoch kann das Verfahren aber nicht in allen Fällen wirklich sinnvoll und gewinnbringend eingesetzt werden. Beispielsweise basiert das LAZY DECISION MAKING sehr wesentlich auf dem *Dialog mit dem Agenten*; die Möglichkeit hierzu variiert jedoch stark zwischen verschiedenen Entscheidungssituationen.

Die vermutlich naheliegendste Anwendung des LAZY DECISION MAKING ist der Einsatz in Entscheidungsunterstützenden Systemen; wir gehen auf diesen Aspekt etwas ausführlicher in Abschnitt 9.2 ein. LAZY DECISION MAKING kann in diesem Anwendungsfeld in den meisten Fällen problemlos eingesetzt werden und es kommen insbesondere alle Vorteile des Verfahrens in optimaler Form zum Tragen.

Daneben existieren aber auch etliche andere Anwendungsfelder, die teilweise weit weniger offensichtlich sind wie beispielsweise das in Abschnitt 9.3 betrachtete multikriterielle Entscheiden.

Wir werden ausserdem eine Anwendungsmöglichkeiten aufzeigen, in der der Agent durch Software realisiert wird und insofern kein menschlicher Aktor an der Entscheidungsfindung beteiligt ist. Die diesbezüglichen Ausführungen in Abschnitt 9.4 sind allerdings eher als Ausblick zu verstehen und nicht als eine Beschreibung eines konkreten Systems. Sie dienen einer Illustration der gleichsam vielfältigen wie wichtigen Einsatzfelder unseres Verfahrens.

Abschließend möchten wir in Abschnitt 9.5 das konkrete Vorgehen bei der Verwendung des LAZY DECISION MAKING anhand eines Beispiel-Entscheidungsproblems aufzeigen. Notgedrungen beschränken wir uns dabei allerdings auf ein Problem, welches eher "Spielzeugcharakter" aufweist als die real auftretende Komplexität aufweist.

9.2 Entscheidungsunterstützende Systeme (EUS)

9.2.1 Was ist ein EUS?

Unter einem *Entscheidungsunterstützenden System*[1] (EUS, bzw. englisch *decision support system*, DSS) verstehen wir ein System, welches menschlichen Entscheidern beim Umgang mit semistrukturierten Problemen hilft. Wir orientieren uns dabei an der klassischen Definition von KEEN und MORTON (vgl. [KM78, S. 97]):

> "DSS are computer-based support for management decisionmakers who are dealing with semistructured problems."

Diese Definition ist zwar nicht unproblematisch, genügt für unsere Zwecke aber vollkommen. Tatsächlich wird der Begriff des EUS in vielen Fällen sehr breit verstanden, was durch folgende Bemerkung von DANIEL J. POWER besonders gut zum Ausdruck kommt:

> "If a software program runs on a PC and can help a manager make a decision then someone will likely refer to it as a DSS."[2]

[1] In der deutschsprachigen Literatur hat sich die Schreibweise "Entscheidungsunterstützendes Systems" mit einem großen "E" durchgesetzt.

[2] Diese Aussage findet sich in einem einführenden Foliensatz zum Thema DSS, der von der Web-

9.2.2 EUS, partielle Information und Lazy Decision Making

Frank Dellmann untersucht in [Del97] wie im Rahmen von Entscheidungsunterstützenden Systemen Wahrscheinlichkeitsinformationen als Repräsentationsformalismus für das Wissen des Agenten verarbeitet werden können. Er illustriert die Anwendungsmöglichkeiten anhand eines Prototyps zur Entscheidung über Realinvestitionen.[3] Derartige Entscheidungen haben häufig den Charakter der *Einmaligkeit*, so dass keine (oder kaum) empirische Daten zur Beurteilung der Zustandswahrscheinlichkeiten vorliegen. Insofern ist hier eine Modellierung des Wissens durch exakte Wahrscheinlichkeiten sehr schwierig: Aufgrund der fehlenden Erfahrungen lassen sich objektive Wahrscheinlichkeiten gar nicht und subjektive Wahrscheinlichkeiten zumeist nur "ungefähr" angeben. Es bietet sich demzufolge die Verwendung von Wahrscheinlichkeits*informationen* geradezu an.

Der von Dellmann beschriebene Prototyp realisiert das *statische* Entscheiden bei partieller Information unter Verwendung einer Heuristik. Der Agent spezifiziert zunächst die Alternativen sowie die Wahrscheinlichkeitsinformation, wählt eine Heuristik aus, und basierend auf dieser wird dann ein Vorschlag berechnet.[4]

Eine Ergänzung des von Dellmann beschriebenen Prototyps um das dynamische Lazy Decision Making könnte auf sehr einfache Weise realisiert werden. Anstatt dass gemäß dem klassischen zweistufigen Verfahren nach der Modellierung die Resultate basierend auf der festgelegten Heuristik berechnet und dann dem Agenten präsentiert werden, würde die Entscheidungsfindung durch das in Definition 8.2.2 eingeführte Schema des Lazy Decision Making ersetzt.

Der Agent präzisiert zielgerichtet die Wahrscheinlichkeitsinformation und "nähert" sich damit sukzessive einer für die Entscheidungsfindung hinreichend genauen Beschreibung seiner Kenntnis bezüglich des eintretenden Umweltzustands. Es greifen die "üblichen" (bereits diskutierten) Vorteile unseres Verfahrens: Es werden nur die tatsächlich für die Entscheidungsfindung relevanten Präzisierungen durchgeführt, wodurch einerseits Aufwand eingespart und andererseits das Vertrauen des Agenten in das Modell verbessert wird.

9.2.3 Einsatz des Lazy Decision Making in allgemeinen EUS

Viele Entscheidungsunterstützende Systeme sind nach einem ähnlichen Prinzip aufgebaut wie der knapp skizzierte Prototyp von Dellmann. Selbstverständlich kön-

Seite `http://dssresources.com/papers/whatisadss/index.html` heruntergeladen werden kann.

[3] Im Wesentlichen geht es bei der Beurteilung von Realinvestitionen um die Bewertung zukünftiger und damit i.Allg. unsicherer Zahlungsströme. Man bedient sich in diesem Zusammenhang häufig der Kapitalwertmethode bei der sich der Kapitalwert einer Investitionsalternative als Summe der um den Kalkulationszinssatz abdiskontierten Zahlungen berechnet (vgl. [Del97, FH94]).

[4] Tatsächlich realisiert der Prototyp etwas mehr: Der Agent kann nachträglich die Heuristik wechseln und damit zumindest "ausprobieren", welcher Effekt bezüglich der Entscheidung resultiert. Trotz dieser ansatzweisen Dialogmöglichkeit bleibt das beschriebene Verfahren *statisch*, es findet keine sukzessive Präzisierung der Wahrscheinlichkeitsinformation statt. Des Weiteren verfügt der Prototyp über ein nur sehr begrenztes Repertoire an Heuristiken.

nen *alle* diese Systeme um das Lazy Decision Making erweitert werden, einzige zusätzliche Voraussetzung ist, dass die Dialogmöglichkeit mit dem Agenten gegeben ist und insofern ein dynamisches Entscheidungsverfahren überhaupt Sinn macht.[5]

Tatsächlich ist das Lazy Decision Making geradezu prädestiniert für den Einsatz im Rahmen derartiger EUS. Hierfür sprechen drei wesentliche Faktoren:

(1) *Dialogmöglichkeit:* Zumindest im Rahmen von "normalen" EUS (siehe hierzu auch Fußnote 5) ist ein Dialog mit dem die Entscheidung fällenden Agenten möglich und es steht die hierzu notwendige Zeit zu Verfügung (die Entscheidung ist nicht zeitkritisch).[6] Insofern ist das Lazy Decision Making zumindest prinzipiell anwendbar.

(2) *Einmaligkeitscharakter:* Die Entscheidung hat den Charakter eines einmaligen Entschlusses, es liegt daher kein für statistische Auswertungen geeignetes Datenmaterial über vergleichbare Entscheidungssituationen vor. Demzufolge erscheint die Verwendung exakter Wahrscheinlichkeiten kritisch und Wahrscheinlichkeitsinformationen bieten sich angesichts der höheren Ausdruckskraft an. Vor allem erscheint es attraktiv, die "wahre" Wahrscheinlichkeitsinformation zunächst nur grob, dann zielgerichtet präziser einzugrenzen.

(3) *Signifikante Bedeutung:* Die Entscheidung hat eine signifikante Bedeutung was insbesondere dazu führt, dass der Aufwand für eine detaillierte Modellierung und Betrachtung der Entscheidungssituation zu rechtfertigen ist (also in einem "vernünftigen" Verhältnis zu den Konsequenzen der Entscheidung steht).

Zusammenfassend sind EUS ein hervorragend geeignetes Anwendungsfeld für das Lazy Decision Making, wobei die wirklichen Vorteile eines Einsatzes im Einzelfall zu überprüfen sind.

9.3 Multikriterielle Entscheidungsprobleme

9.3.1 Abgrenzung MADM/MODM

Wir sind bisher stets davon ausgegangen, dass sich ein Ergebnis (also das zustandsabhängige Resultat einer Alternative) mit Hilfe einer Nutzenfunktion auf einen reellen Nutzenwert abbilden lässt (vgl. Kapitel 2).[7] Insofern war das Entscheiden bei

[5] Da wir den Begriff des EUS sehr weit gefasst haben (vgl. Unterabschnitt 9.2.1), ergibt sich die Möglichkeit des Dialogs mit dem Agenten nicht zwangsläufig. Dennoch ist dies charakterisierend für "normale" EUS (vgl. hierzu etwa [Ern88, Hol89]).

[6] Zeitkritisch bezieht sich hier auf den für die Durchführung der Präzisierungsschritte notwendigen Zeitbedarf, der im Bereich von Minuten bis Stunden liegt. Selbstverständlich darf die Entscheidung zeitkritisch sein in dem Sinn, dass sie alsbald als möglich gefällt werden sollte. Jedoch liegen i.Allg. keine wirklich kritischen Zeitschranken vor, wie dies etwa beim Einsatz eines Entscheidungsverfahrens zur Steuerung einer laufenden Produktionsanlage der Fall sein könnte.

[7] Tatsächlich haben wir "sogar" vorausgesetzt, dass eine Bernoulli-Nutzenfunktion gegeben ist, was eine wesentlich stärkere Forderung darstellt.

sicheren Erwartungen – also bei einem als sicher bekannten Umweltzustand – trivial: Der Agent musste lediglich eine Alternative auswählen, die für den als sicher erachteten Zustand einen maximalen Ergebnisnutzen aufweist (vgl. Unterabschnitt 2.1.4).

Demgegenüber werden im Rahmen des sogenannten *Multi-Criteria Decision Making* (kurz MCDM) Entscheidungsprobleme untersucht, bei denen die *multikriterielle* Bewertung der Alternativen im Vordergrund steht (vgl. [ZG91]). Hier liegt – teilweise durch eine idealisierte Annahme – keinerlei Unkenntnis bezüglich des Umweltzustands vor; das Ergebnis jeder Alternative ist eindeutig gegeben. Anstelle der Unsicherheit bereitet hier das Abwägen zwischen *mehreren Zielen* das Problem in der Entscheidungsfindung.[8]

Es wird (beim MCDM) weiter unterschieden zwischen:

(1) *Multiple Objective Decision Making* (MODM): Kennzeichnend für das MODM ist, dass die Alternativenmenge einen *kontinuierlichen* Raum darstellt (den kontinuierlichen Entscheidungsraum), der zumeist durch Beschränkungen in Form von Nebenbedingungen definiert ist. Zudem sind mehrere auf dem Entscheidungsraum definierte Zielfunktionen gegeben, die es zu optimieren gilt. Ein "typisches" MODM-Problem hat folgende Gestalt:[9]

$$\max f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_t(\boldsymbol{x}) \quad \text{u.d.N.} \quad g_1(\boldsymbol{x}) \leq 0, \ldots g_s(\boldsymbol{x}) \leq 0.$$

MODM-Probleme löst man typischerweise durch Verfahren der Vektoroptimierung oder durch das *Goal Programming* (siehe beispielsweise [NM93, S. 135ff]), zunehmend werden allerdings auch neuere Methoden wie etwa Evolutionäre Algorithmen verwandt.

(2) *Multiple Attribute Decision Making* (MADM): Beim MADM ist der Entscheidungsraum *diskret*, es liegt eine (zumeist) endliche Menge von Alternativen vor. Zudem sind eine endliche Anzahl von Attributen gegeben sowie für jede Alternative ein Vektor mit den Ausprägungen der Attribute (also gewissermaßen das multi-attributive, sichere Ergebnis der Alternativen).

Sehr häufig werden die Ausprägungen der Attribute auf einer ordinalen Skala gemessen und liegen in Form von numerischen Werten vor. Isoliert betrachtet möchte der Agent bezüglich jedes Attributs eine höchstmögliche Ausprägung erreichen. Problematisch bei der Entscheidung ist, dass notgedrungen die verschiedenen Attribute bzw. deren Wichtigkeit gegeneinander abgewogen werden müssen.

[8] Beim MCDM wird von der Unsicherheit abstrahiert um sich ausschließlich dem Problem der mehrfachen Zielsetzung widmen zu können. Dennoch treten in realen Anwendungen durchaus beide Problemstellungen (mehrfache Zielsetzung und Unsicherheit) kombiniert auf, es resultieren multikriterielle Entscheidungsprobleme unter Unsicherheit.

[9] Die Funktionen $f_1, \ldots, f_t$ stellen die Zielfunktionen dar, die Funktionen g_i definieren durch $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ die Nebenbedingungen. Zumeist ist $\boldsymbol{x}$ ein Vektor mit reellwertigen Komponenten, also $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$. Der Entscheidungsraum ergibt sich demzufolge als $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, s\}$. Das angegebene Problem soll das intuitive Verständnis erleichtern, hat aber keinerlei weitere Bedeutung für unsere Arbeit. Insofern verzichten wir auf eine genauere Erörterung der Bedeutung der Komponenten.

9.3.2 MADM in unserem Modell

Durch eine zunächst etwas obskur anmutende Uminterpretation unseres Modells lassen sich ein sehr wichtiger Ansatz des MADM erfassen und inbesondere eine Reihe von Resultaten direkt – mit der entsprechend angepassten Interpretation – auf diesen Fall übertragen. Nähere Informationen zu dieser Übertragung finden sich in [Pre01b].

Die grundlegende Idee ist, dass wir die Zustände $i = 1, \ldots, n$ als *Attribute* und entsprechend für eine Alternative $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ die i-te Komponente a_i als Ausprägung des Attributs i (ggf. gemessen in Nutzeneinheiten) interpretieren.

Ein Standardansatz im Bereich MADM ist, die Gesamtbewertung einer Alternative als gewichtete Summe aus den Einzelbewertungen (bezüglich der Attribute) zu berechnen und die Alternativen entsprechend ihrer Gesamtbewertung anzuordnen (vgl. etwa [ZG91]). Wesentlich für die praktische Durchführung dieses Ansatzes ist, dass die einzelnen Attribute auf Skalen (z.B. Nutzen) gemessen werden, welche eine sinnvolle Aufsummierung erlauben; ggf. lässt sich dies durch geeignete Transformationen erreichen. Auf derartige Details möchten wir hier jedoch nicht näher eingehen, da sie primär eine Voraussetzung für das Verfahren darstellen und nicht speziell im Zusammenhang mit dem Lazy Decision Making auftreten (vgl. [Pre01b]).

Zur Bildung einer gewichteten Summe müssen offenbar zunächst Gewichte (manche Autoren sprechen von Prioritäten) festgelegt werden, was ein Problem des Ansatzes darstellt: Es wird im Allgemeinen sehr schwierig sein, die einzelnen Attribute *exakt* bezüglich ihrer Wichtigkeit gegeneinander abzuwägen. Genau hier kommen die Ansätze des Lazy Decision Making (und insbesondere auch die Verwendung partieller Informationen[10]) ins Spiel, denn zur reinen Entscheidungsfindung (Ermittlung einer besten – oder möglicherweise nur einer "guten" – Alternative), sind exakte Gewichte zumeist nicht notwendig.

Insofern sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen (im ursprünglichen Sinn) ein optimal geeigneter Anknüpfungspunkt für die Gewichte: Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ wird als normierter Gewichtungsvektor interpretiert, es ist p_i die Gewichtung des Ziels i. Die Normierung des Gewichtsvektors ist durch $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ und $p_i \in [0, 1]$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gegeben.

Demzufolge ist $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}$ für eine Alternative $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ und einen Gewichtungsvektor $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ die gewichtete Summe der Zielerreichungsgrade und damit *die* Gesamtbewertung für die Alternative $\boldsymbol{a}$ (bezüglich des Gewichtungsvektors $\boldsymbol{p}$).

Bei einem Entscheidungsproblem unter Risiko (im ursprünglichen Sinn) sind nun die Gewichte (entsprechend der MADM-Interpretation) exakt bekannt. Demgegenüber hat der Agent bei einem Entscheidungsproblem unter Ungewissheit keinerlei Vorstellung bezüglich der Gewichte; insofern können im Prinzip nur die nicht-effizienten Alternativen ausgeschlossen werden.

Bei einem allgemeinen Entscheidungsproblem $(A, W) \in \mathbb{E}$ verfügt der Agent über partielle Informationen bezüglich der Zielgewichtungen, er hält alle Gewichts-

[10] Obwohl sich bereits das statische Entscheiden bei partieller Information auf diesen Fall (MADM) übertragen lässt, wurde dies in der uns bekannten Literatur noch nicht vorgeschlagen oder untersucht.

vektoren $\boldsymbol{p} \in W$ für möglich.

9.3.3 Verwendung des Lazy Decision Making

Das Lazy Decision Making kann verwandt werden, um trotz Unklarheit bezüglich der exakten Gewichtung der Ziele mit möglichst minimaler weiterer Präzisierung eine "gute" (oder sogar die beste) Alternative auszuwählen. Die Präzisierung besteht nun (im Gegensatz zur originär intendierten Verwendung des Verfahrens) darin, dass der Agent den Raum der denkbaren Gewichtevektoren einschränken muss.

Insbesondere bei *Gruppenentscheidungen* erscheint die Anwendung des Lazy Decision Making im Kontext der MADM-Probleme vielversprechend. So könnte etwa jeder an der Entscheidung Beteiligte zunächst bezüglich jedes Attributs eine Ober- und Untergrenze für dessen Gewicht festlegen. In das eigentliche Entscheidungsverfahren könnten dann zunächst die jeweils am wenigsten restriktive untere und obere Schranke eingebracht werden. Sollte basierend auf diesen sehr ungenauen Informationen noch keine zufriedenstellende Entscheidung möglich sein, können die Gewichtsschranken sukzessive verfeinert werden oder es können zusätzliche Angaben – beispielsweise "Attribut 1 ist mindestens genauso wichtig wie Attribut 2" – eingebracht werden.

Zwar wird durch das Lazy Decision Making natürlich nicht das Problem gelöst, dass *gewisse* Kompromisse bezüglich der Gewichte in der Gruppe getroffen werden müssen. Dennoch hilft unser Verfahren, *diese Kompromisse auf ein Minimum zu beschränken und insbesondere unnötige Festlegungen* (die keinen Beitrag zur Entscheidungsfindung leisten, gleichzeitig aber Abstimmungsbedarf und damit Aufwand innerhalb der Gruppe erfordern) *zu vermeiden.*[11]

9.4 Software-Agenten

Obwohl prinzipiell beim Lazy Decision Making *nicht* die Beteiligung eines menschlichen Agenten vorausgesetzt wird, scheint dies aufgrund des notwendigen Dialogs der naheliegende Fall zu sein. Tatsächlich kann der Dialog aber auch mit einem Software-Agenten realisiert werden (und sinnvoll sein) – wir werden im Folgenden versuchen, ein Szenario für eine solche Einsatzmöglichkeit des Lazy Decision Making aufzuzeigen.

Für einen Software-Agenten ist charakterisierend, dass er mit seiner Umwelt *interagiert*; er nimmt wahr und handelt (vgl. Fußnote 1 in Kapitel 2 sowie [RN95, S. 31-52] und [GRS00, 941-1018]). Dabei werden in den meisten Fällen die konkreten Handlungen von den vorangehenden Wahrnehmungen abhängen und dem Agenten zu einem Handlungszeitpunkt mehrere Alternativen zur Auswahl stehen. Insofern muss ein Software-Agent andauernd Entscheidungsprobleme lösen; im einfachsten Fall kann sich ein solches Problem aber bereits durch eine IF-THEN-ELSE

[11] Um eine bessere Vorstellung von der Vorgehensweise bei einer Lazy Decision Making-Gruppenentscheidung zu erhalten, kann das in Abschnitt 9.5 dargelegte Anwendungsbeispiel entsprechend uminterpretiert werden (d.h., die Wahrscheinlichkeiten sind gedanklich durch Prioritäten zu ersetzen).

Anweisung behandeln lassen. In Abbildung 9.1 ist die Funktionsweise eines nutzenbasierten Agenten schematisch dargestellt (vgl. [RN95, S. 45]).[12]

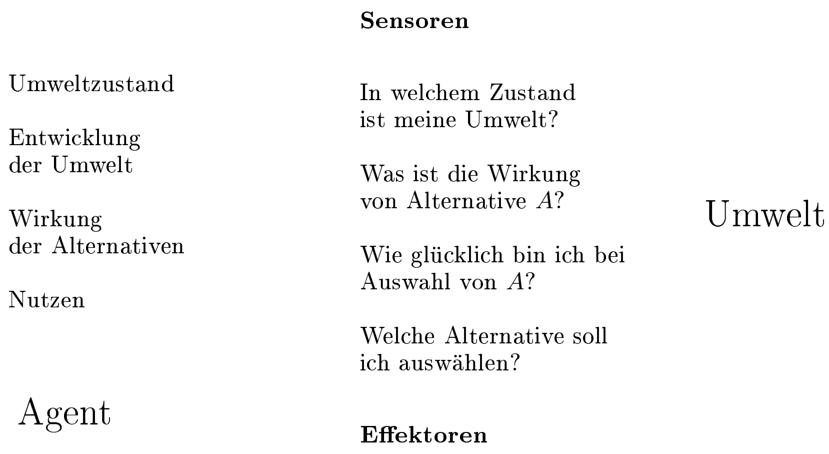

Abbildung 9.1: Schematische Darstellung eines nutzenbasierten Software-Agenten nach Russell und Norvig (vgl. [RN95, S. 45])

Die Wahrnehmungen des Agenten sind – insbesondere wenn Hardware involviert ist, der Agent beispielsweise die Software-Steuerung eines Roboters realisiert – in vielen Fällen nicht perfekt: Sensoren können ausfallen, weisen nur eine begrenzte Genauigkeit auf oder werden möglicherweise durch Störquellen beeinflusst. Es ist denkbar, dass gewisse Sensoren mit einem Mehraufwand ein genaueres oder vertrauenswürdigeres Signal liefern können, im einfachsten Fall wird das Signal von einem zweiten Sensor (oder zu einem zweiten Zeitpunkt) überprüft.[13]

Das vom Sensor übermittelte Signal wird in vielen Fällen zunächst in geeigneter Form (vor-)verarbeitet, bevor es in Form zumeist wesentlich aggregierterer Informationen in den Entscheidungsprozess einfließt. So wird etwa im Fall eines optischen Sensors kaum das gesamte Kamerasignal zur Entscheidung herangezogen werden, sondern hieraus werden zunächst die relevanten Kenngrößen (etwa Kanten oder die Position bestimmter Gegenstände) extrahiert. Diese Vorverarbeitung bzw. Aggregation der Daten kann einen erheblichen Aufwand in Form von Rechenzeit erfordern. Denkbar ist aber, dass ungenauere (bzw. weniger vertrauenswürdigere) aggregierte Daten mit weniger Aufwand berechnet werden können.[14]

[12] Russel und Norvig sprechen von einem *nutzenbasierten* Agenten, wenn dieser zur Bewertung der verfügbaren Alternativen das Konzept der Nutzenfunktion verwendet.

[13] Interessanterweise kann bei Web-Agenten eine ähnliche Situation vorliegen, da im Internet verfügbare Informationen i.Allg. nicht vertrauenswürdig sind. Beispielsweise kann die Anzahl unabhängiger Stellen, die eine Information verbreiten, als Anhaltspunkt für deren Glaubwürdigkeit verwendet werden. In diesem Fall kann die Vertrauenswürdigkeit durch Mehraufwand gesteigert werden. Ähnliche Situation finden sich im *Semantischen Web* (vgl. [Hje01]).

[14] Gute Beispiele für solche Verfahren sind nahezu alle Berechnungsmethoden aus der Typ 2 Theorie der Effektivität (TTE) (vgl. [Wei00]). Diese sind gerade dadurch charakterisiert, dass sie das Ergebnis im Prinzip beliebig genau berechnen können, jedoch in praktischen Anwendungen mit einer vorzugebenden Genauigkeit abgebrochen werden.

Aufgrund der beiden vorgenannten Punkte und der allgemeinen Entscheidungssituation, mit der sich der skizzierte Typ von Software-Agent konfrontiert sieht, ist das Lazy Decision Making unmittelbar anwendbar. Basierend auf zunächst sehr ungenauen Daten kann grob die Qualität einer Heuristik-basierten Entscheidung überprüft werden. Sollte diese nicht zufriedenstellend sein, so können möglicherweise zielgerichtet die eingehenden Daten präzisiert werden – dies entspricht einer genaueren Rechnung und/oder der Anforderung genauerer oder vertrauenswürdigerer Sensordaten.

Bemerkenswert ist, dass in diesem Zusammenhang eine Modellierung des Präzisierungsaufwands möglich scheint (vgl. Unterabschnitte 8.4.7 und 10.3.1).[15]

9.5 Anwendungsbeispiel

9.5.1 Vorbemerkungen

Bei der Auswahl eines konkreten Beispiels standen wir vor einem nicht unerheblichen Problem: In einem für diese Arbeit vertretbaren Rahmen lässt sich allenfalls ein "Spielzeugbeispiel" mit einer sehr beschränkten Anzahl von Zuständen, Alternativen und Nebenbedingungen angeben. Ein solches Beispiel lässt sich zwar zudem recht gut verstehen, ihm fehlen allerdings – und hierin besteht das Problem – eine Reihe von Eigenschaften, die erst in größeren Entscheidungsproblemen zu Tage kommen. So ist etwa im Spielzeugbeispiel die Bedeutung der Nebenbedingungen und deren "Wirkung" im Rahmen des Gesamtproblems noch relativ einfach zu durchschauen. Demgegenüber ist in einem Problem mit über 10 Zuständen die Wechselwirkung der Nebenbedingungen kaum fassbar. Ein menschlicher Entscheider wird hier nicht ohne weiteres beurteilen können, ob eine Nebenbedingung überflüssig ist oder nicht.

Insofern sollte bei der Betrachtung des Spielzeugbeispiels stets bedacht werden, dass einige Aspekte – insbesondere die Orientierung anhand der Schattenpreise zur zielgerichteten Präzisierung – erst bei größeren Problemen ihre wirkliche Stärke zeigen können. So erscheinen in unserem Beispiel etwa die Schattenpreis-6-Tupel zur Beurteilung der Nebenbedingungen sowie die 4 ausgezeichneten Alternativen (bestmax, worstmax, bestmin, worstmin) angesichts einer nur vierelementigen Alternativenmenge wie ein "Information-Overkill". Nichtsdestotrotz erweisen sich aber auch schon in dem betrachteten Spielzeugbeispiel die Kenngrößen als überaus hilfreich, und dies gilt umso mehr für größere Entscheidungsprobleme.

Trotz der angesprochenen Probleme halten wir die Angabe eines Beispiels für gerechtfertigt, denn letztlich wird zumindest die prinzipielle Vorgehensweise dadurch gut illustriert.[16]

[15] Dies liegt darin begründet, dass sich im Falle eines Software-Agenten der Aufwand einer Präzisierung im Wesentlichen durch die dadurch gebundenen Ressourcen (in vielen Fällen inbesondere den Zeitaufwand einer exakteren Berechnung) ergibt und sich dieser ggf. abschätzen lässt.

[16] Besonders aussichtsreich schien uns zunächst, neben einem Spielzeugbeispiel zumindest *Auszüge* eines größeren Entscheidungsproblems anzugeben. Leider hat sich dies als Irrglaube erwiesen, da die (notwendigerweise) unzureichend erklärte Darstellung weniger Iterationsschritte mehr Fragen aufwirft als hierdurch beantwortet werden.

9.5.2 Problembeschreibung und Modell

Wir verzichten auf eine inhaltliche Motivierung des Beispiels, da diese für das konkrete Verfahren belanglos ist.[17]

Die Alternativen $A_1, \ldots, A_4$ des Beispielproblems seien durch folgende Entscheidungsmatrix (mit den Zuständen S_1, S_2, S_3) definiert, wobei unmittelbar der BERNOULLI-Nutzen der entsprechenden Ergebnisse angegeben ist:[18]

$U(\mathbf{erg}(A_i, S_j))$	S_1	S_2	S_3
A_1	5	7	4
A_2	11	5	0
A_3	4	6	7
A_4	5	4.5	6

Hieraus resultiert unmittelbar – im Sinne unseres Modells, vgl. Kapitel 3 – die Alternativenmenge $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ mit

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, 7, 4), \quad \boldsymbol{a}_2 = (11, 5, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (4, 6, 7), \quad \boldsymbol{a}_4 = (5, 4.5, 6).$$

Die Zustände werden kanonisch durchnummeriert, Zustand i entspricht dem Zustand S_i (für $i = 1, 2, 3$).

Der Agent sei von folgenden Intervallschranken für die Zustandswahrscheinlichkeiten $(p_1, p_2, p_3) = \boldsymbol{p} \in \mathbb{S}^{(n)}$ (mit $n = 3$) überzeugt:

$$p_1 \in [0.2, 0.6], \quad p_2 \in [0.3, 0.7], \quad p_3 \in [0.25, 0.7].$$

Zudem halte der Agent den Zustand 2 für mindestens ebenso wahrscheinlich wie den Zustand 3 (d.h., $p_2 \geq p_3$).

9.5.3 Lazy Decision Making

Wir nehmen an, dass der Agent während des gesamten Verfahrens die MaxE_{min}-Regel als Heuristik zur Bestimmung eines Vorschlags verwendet.

1. Schleifendurchlauf

Wir stellen zunächst in tabellarischer Form die wichtigsten Daten dar und erörtern nachfolgend detailliert deren Bedeutung.

[17] Gewissermaßen eine "Standardinterpretation" ist, die Alternativen als mögliche Investitionen und die Zustände als denkbare Konjunkturentwicklungen zu interpretieren.

[18] Der Wert $U(\mathbf{erg}(A_i, S_j))$ steht für den BERNOULLI-Nutzen des Ergebnisses, welches bei Auswahl von Alternative A_i und eintretendem Umweltzustand S_j realisiert wird (vgl. Kapitel 2). Auf die Angabe der konkreten Ergebnisse verzichten wir, da in unserem Modell ausschließlich deren Nutzen verwandt wird.

Nebenbedingung	s_{bestmax}	s_{worstmax}	s_{bestmin}	s_{worstmin}	s_{diff}	s_{reldiff}
$p_1 \geq 0.2$	0	2	0	8.5	11	0
$p_2 \geq 0.3$	6	0	2	0	0	8
$p_3 \geq 0.25$	11	3	3	0	0	14
$p_2 \geq p_3$	0	0	0	2.5	3	0
$p_1 \leq 0.6$	0	0	0	0	0	0
$p_2 \leq 0.7$	0	0	0	0	0	0
$p_3 \leq 0.7$	0	0	0	0	0	0

$$\boldsymbol{a}_1 : [5.3, 5.85], \quad \boldsymbol{a}_2 : [4.2, 6.45], \quad \boldsymbol{a}_3 : [5.35, 6], \quad \boldsymbol{a}_4 : [4.975, 5.2]$$

$$\text{Eliminierte Alternative(n): } \boldsymbol{a}_4, \quad A_1^* = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$$

$$\text{bestmax} = \boldsymbol{a}_2, \quad \text{worstmax} = \boldsymbol{a}_1, \quad \text{bestmin} = \boldsymbol{a}_3, \quad \text{worstmin} = \boldsymbol{a}_2$$

$$\boldsymbol{a}_1^* = \boldsymbol{a}_3, \quad \phi_{A_1^*, W_1} = 1.8, \quad \phi_{A_1^*, W_1}(\boldsymbol{a}_1^*) = 1.1$$

Interpretation (1. Schleifendurchlauf)

In der ersten Iteration wurden zunächst die Nebenbedingungen entsprechend der Problemstellung unverändert eingebracht.[19]

Unmittelbar unterhalb der Nebenbedingungen sind für sämtliche Alternativen die (kleinstmöglichen) Intervalle angegeben, in denen der BERNOULLI-Erwartungsnutzen liegen kann (vgl. Anmerkung 7.4.4). Die untere Intervallschranke ergibt sich für eine Alternative $\boldsymbol{a}$ bezüglich der Wahrscheinlichkeitsinformation W durch $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\min}(W)$, die obere entsprechend durch $\psi_{\boldsymbol{a}}^{\max}(W)$ (vgl. Definition 7.4.2). Wir bezeichnen nachfolgend die untere Schranke kurz als $\mathrm{E}_{\min}$-Schranke, die obere entsprechend als $\mathrm{E}_{\max}$-Schranke.

Es zeigt sich, dass Alternative $\boldsymbol{a}_4$ aus den Betrachtungen eliminiert werden kann, da diese von $\boldsymbol{a}_1$ (und auch $\boldsymbol{a}_3$) dominiert wird. Es resultiert als Menge effektiver Alternativen $A_1^* = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$.

Gemäß des $\mathrm{MaxE}_{\min}$-Prinzips ergibt sich $\boldsymbol{a}_3$ als vorgeschlagene Alternative (d.h. $\boldsymbol{a}_1^* = \boldsymbol{a}_3$), bei Auswahl dieser kann dem Agenten ein maximaler Schaden von $\phi_{A_1^*, W_1}(\boldsymbol{a}_1^*) = 1.1$ Erwartungsnutzen-Einheiten entstehen.[20] Demgegenüber ist der Schaden bei Auswahl einer beliebigen effektiven Alternative (also $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ oder $\boldsymbol{a}_3$) durch $\phi_{A_1^*, W_1} = 1.8$ (Erwartungsnutzen-Einheiten) beschränkt. Wir bezeichnen $\phi_{A_i^*, W_i}(\boldsymbol{a}_i^*)$ im Folgenden als *relative Regret-Schranke* und entsprechend $\phi_{A_i^*, W_i}$ als *absolute Regret-Schranke*.

Erklärungsbedürftig sind nun insbesondere die in der Tabelle dargestellten Schattenpreise bezüglich der Nebenbedingungen und der angegebenen LOP-Maße (die Angaben entsprechen gerade dem in Anmerkung 7.4.26 erwähnten Schattenpreis-6-Tupel).

[19] Dabei haben wir die Intervallschranken für die Zustandswahrscheinlichkeiten in "normale" Nebenbedingungen konvertiert und behandeln diesen Typ von Nebenbedingungen im Folgenden nicht gesondert (vgl. Unterabschnitt 8.3.2).

[20] An dieser Stelle sei auf eine gewisse Gefahr in der Notation hingewiesen: Der Index i bei einer Alternative $\boldsymbol{a}_i$ bezeichnet deren Nummer wohingegen beim Vorschlag $\boldsymbol{a}_i^*$ der Index i für die Iteration steht. Insbesondere hat der Vorschlag $\boldsymbol{a}_1^*$ demzufolge nichts (direkt) mit der Alternative $\boldsymbol{a}_1$ zu tun (im Beispiel gilt etwa $\boldsymbol{a}_1^* = \boldsymbol{a}_3$).

Es zeigt sich, dass alle oberen Schranken ($p_1 \leq 0.6$, $p_2 \leq 0.7$, $p_3 \leq 0.7$) durchweg Schattenpreise von Null aufweisen. Die einfache Begründung hierfür ist, dass die entsprechenden Nebenbedingungen tatsächlich überflüssig sind: Die Forderung $p_1 \leq 0.6$ ergibt sich beispielsweise aufgrund von $p_2 \geq 0.3$, $p_3 \geq 0.25$ und $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ bereits zwangsläufig. Im Rahmen unseres Spielzeugbeispiels ist dieser Sachverhalt noch relativ einfach zu erkennen, bei komplizierteren (linearen) Nebenbedingungen und mehr Zuständen kann dies jedoch erheblich schwieriger (oder – mit Ausnahme von Sonderfällen – sogar nahezu unmöglich) sein. Wir verzichten in den nachfolgenden Iterationen auf eine weitere Erwähnung dieser Nebenbedingungen.

Nebenbedingungen, die nicht "greifen", können im Prinzip eliminiert werden, ohne dadurch die Lösung zu beeinträchtigen. Alternativ können sie auch automatisch bis zur minimalen Schranke (vgl. Definition 6.4.7) verschärft werden. Im Beispiel ist etwa die minimale Schranke der Nebenbedingung $p_1 \leq 0.6$ der Wert 0.45, so dass die Nebenbedingung zu $p_1 \leq 0.45$ verschärft werden könnte ohne dass hierdurch neue Informationen in die Wahrscheinlichkeitsinformation eingehen.

Entsprechend unserer Empfehlung (vgl. Anmerkung 7.4.28) betrachten wir zunächst die Nebenbedingungen mit einem möglichst hohen Schattenpreis s_{reldiff} – also $x_2 \geq 0.3$ und $x_3 \geq 0.25$. Im Beispiel haben wir angenommen, dass der Agent die Nebenbedingung $p_3 \geq 0.25$ zu $p_3 \geq 0.3$ verschärfen kann. Da diese Nebenbedingung den höchsten Wert s_{reldiff} (nämlich 14) aufweist, sollte ihre Verschärfung einen größtmöglichen Einfluss auf die relative Regret-Schranke – also die Schadensschranke für den entgangenen Erwartungsnutzen bei Auswahl des Vorschlags – haben.

Da die Nebenbedingung $p_3 \geq 0.25$ zudem von Null verschiedene Schattenpreise s_{bestmax}, s_{worstmax} und s_{bestmin} aufweist, ist auch hier mit einer entsprechenden Verschärfung der Schranken zu rechnen.[21]

Anzumerken ist, dass im Beispiel jeder Schattenpreis stets nur für zwei Nebenbedingungen einen von Null verschiedenen (positiven) Wert aufweist.[22]

2. Schleifendurchlauf

Präzisierung: $p_3 \geq 0.25$ zu $p_3 \geq 0.3$

[21] Im Falle von s_{bestmax} bedeutet dies beispielsweise das Folgende: Momentan (in der ersten Iteration) gilt bestmax $= \boldsymbol{a}_2$ und die entsprechende $\mathrm{E}_{\max}$-Schranke ist 6.45. Aufgrund von $s_{\text{bestmax}} > 0$ ist zu erwarten, dass die $\mathrm{E}_{\max}$-Schranke von bestmax in der nächsten Iteration schärfer – also kleiner – werden sollte.

[22] Im Prinzip ist dies eine Konsequenz aus den Resultaten 6.3.21 und 7.2.5: Die "Lösung" des für die Berechnung der Schattenpreise zu Grunde liegenden Optimierungsproblems ist stets ein Eckpunkt und dieser liegt auf drei (der Dimension des Problems) linear unabhängigen Hyperebenen. Die diesen Hyperebenen entsprechenden Nebenbedingungen "greifen" und weisen daher einen positiven Schattenpreis auf. (Dabei betrachten wir die aus den Forderungen $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ sowie $p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ resultierenden Hyperebenen nicht explizit, da die entsprechenden Nebenbedingungen offenbar nicht verschärft werden können.) Im Falle einer höheren Dimension des Problems (d.h. einer größeren Zustandsmenge) weisen demzufolge auch (absolut) mehr Nebenbedingungen einen von Null verschiedenen Schattenpreis auf.

Nebenbedingung	s_{bestmax}	s_{worstmax}	s_{bestmin}	s_{worstmin}	s_{diff}	s_{reldiff}
$p_1 \geq 0.2$	2.5	2	0	8.5	11	0
$p_2 \geq 0.3$	0	0	0	0	0	0
$p_3 \geq 0.3$	0	3	3	0	0	22
$p_2 \geq p_3$	0.5	0	2	2.5	3	8

$$\boldsymbol{a}_1 : [5.3, 5.7], \quad \boldsymbol{a}_2 : [4.2, 5.9], \quad \boldsymbol{a}_3 : [5.5, 6]$$

$$\text{Eliminierte Alternative(n): } -, \quad A_2^* = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$$

$$\text{bestmax} = \boldsymbol{a}_3, \quad \text{worstmax} = \boldsymbol{a}_1, \quad \text{bestmin} = \boldsymbol{a}_3, \quad \text{worstmin} = \boldsymbol{a}_2$$

$$\boldsymbol{a}_2^* = \boldsymbol{a}_3, \quad \phi_{A_2^*, W_2} = 1.8, \quad \phi_{A_2^*, W_2}(\boldsymbol{a}_2^*) = 0.4$$

Interpretation (2. Schleifendurchlauf)

Aus der Verschärfung der Nebenbedingung $p_3 \geq 0.25$ resultieren bessere E_{max}-Schranken für die Alternativen $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ sowie eine bessere E_{min}-Schranke für die Alternative $\boldsymbol{a}_3$. Es liegen keine Dominanzen vor, so dass keine Alternative eliminiert werden kann.

Vorschlag (bezüglich der Heuristik MaxE_{min}) ist weiterhin die Alternative $\boldsymbol{a}_3$, ansonsten hat sich lediglich bestmax von vormals $\boldsymbol{a}_2$ zu nun $\boldsymbol{a}_3$ verändert (d.h., $\boldsymbol{a}_3$ wäre auch Vorschlag gemäß der MaxE_{max}-Regel). Der maximale Schaden bei Auswahl des Vorschlags hat sich von vormals 1.1 auf nun 0.4 reduziert, die Schadensschranke bei Auswahl einer beliebigen Alternative bleibt unverändert bei 1.8.

Auf die einzelnen Schattenpreise möchten wir nicht im Detail eingehen. Etliche Werte entsprechen denjenigen der vorhergehenden Iteration, bei anderen haben sich zwangsläufig Änderungen ergeben (so etwa im Falle von s_{bestmax} aufgrund einer Veränderung von bestmax). Bemerkenswert ist, dass die Nebenbedingung $p_2 \geq 0.3$ nun durchweg den Schattenpreis Null aufweist. Wiederum ist die Begründung sehr einfach: Aufgrund der Nebenbedingungen $p_3 \geq 0.3$ und $p_2 \geq p_3$ ergibt sich $p_2 \geq 0.3$ als direkte Konsequenz und ist demzufolge als separate Nebenbedingung überflüssig.

Unserer Empfehlung (vgl. Anmerkung 7.4.28) folgend, müsste der Agent zunächst versuchen, eine der Nebenbedingungen $p_3 \geq 0.3$ oder $p_2 \geq p_3$ zu verschärfen, da nur diese einen positiven Schattenpreis s_{reldiff} aufweisen. Wir unterstellen an dieser Stelle, dass der Agent beide Nebenbedingungen *nicht* weiter verschärfen kann bzw. will und anstatt dessen $p_1 \geq 0.2$ zu $p_1 \geq 0.3$ verschärft. Aufgrund der Schattenpreise dieser Nebenbedingung ist zu erwarten, dass die E_{max}-Schranken von $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_3$, die E_{min}-Schranke von $\boldsymbol{a}_2$ sowie die absolute Regret-Schranke in der nächsten Iteration schärfer sein sollten. Insbesondere wird also das Intervall, in dem der Erwartungsnutzen des Vorschlags $\boldsymbol{a}_3$ liegt, kleiner (da die entsprechende E_{min}-Schranke verbessert wird).

3. Schleifendurchlauf

$$\text{Präzisierung: } p_1 \geq 0.2 \text{ zu } p_1 \geq 0.3$$

Nebenbedingung	s_{bestmax}	s_{worstmax}	s_{bestmin}	s_{worstmin}	s_{diff}	s_{reldiff}
$p_1 \geq 0.3$	0	2.5	0	8.5	11	0
$p_2 \geq 0.3$	0	0	0	0	0	0
$p_3 \geq 0.3$	17	0	5	0	0	22
$p_2 \geq p_3$	6	0.5	2	2.5	3	8

$$\boldsymbol{a}_1 : [5.3, 5.5], \quad \boldsymbol{a}_2 : [5.05, 5.9], \quad \boldsymbol{a}_3 : [5.5, 5.75]$$

$$\text{Eliminierte Alternative(n): } \boldsymbol{a}_1, \quad A_3^* = \{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$$

$$\text{bestmax} = \boldsymbol{a}_2, \quad \text{worstmax} = \boldsymbol{a}_3, \quad \text{bestmin} = \boldsymbol{a}_3, \quad \text{worstmin} = \boldsymbol{a}_2$$

$$\boldsymbol{a}_3^* = \boldsymbol{a}_3, \quad \phi_{A_3^*,W_3} = 0.7, \quad \phi_{A_3^*,W_3}(\boldsymbol{a}_3^*) = 0.4$$

Interpretation (3. Schleifendurchlauf)

Die Präzisierung hat dazu geführt, dass Alternative $\boldsymbol{a}_1$ von Alternative $\boldsymbol{a}_3$ dominiert wird und entsprechend eliminiert werden kann.

Es hat sich bestmax von $\boldsymbol{a}_3$ auf nun $\boldsymbol{a}_2$ und worstmax von vormals $\boldsymbol{a}_1$ auf jetzt $\boldsymbol{a}_3$ verändert. Vorschlag ist weiterhin $\boldsymbol{a}_3$, die entsprechende Schadensschranke bei Wahl des Vorschlags bleibt unverändert 0.4 wohingegen die Schadensschranke bei Wahl einer beliebigen Alternative auf nun 0.7 abgesunken ist.[23] (Konkret heisst das aufgrund der nur zweielementigen Alternativenmenge, dass bei Wahl von Alternative $\boldsymbol{a}_2$ – also gerade der *nicht* vorgeschlagenen Alternative $\boldsymbol{a}_1$ – ein maximaler Schaden von 0.7 Erwartungsnutzen-Einheiten entstehen kann.)

Auf die resultierenden Schattenpreise der Nebenbedingungen gehen wir nicht mehr ein. Wir unterstellen, dass der Agent das Verfahren an dieser Stelle abbricht und dem Vorschlag $\boldsymbol{a}_3$ folgt.

Grund für einen Abbruch des Verfahrens könnte sein, dass die folgenden Punkte zumindest zu einem "gewissen Grad" erfüllt sind:

(1) Die Menge der noch verbleibenden Alternativen ist sehr klein, die Alternativen unterscheiden sich nur noch relativ wenig (festgemacht an der relativ "kleinen" Schadensschranke 0.7 bei Wahl einer beliebigen Alternative).

(2) Der mögliche Schaden bei Wahl des Vorschlags ist mit 0.4 "sehr klein", die Gefahr einer Fehlentscheidung entsprechend gering.

(3) Die $\mathrm{E}_{\min}$- und $\mathrm{E}_{\max}$-Schranken des Vorschlags (5.5 und 5.75) liegen sehr dicht zusammen; bei Wahl des Vorschlags hat der Agent also eine gute Vorstellung von dem entsprechenden Erwartungsnutzen der Alternative (der gerade im Intervall [5.5, 5.75] liegt).

[23] Dieser Wert 0.7 ergibt sich als Differenz der $\mathrm{E}_{\max}$-Schranke 5.75 von $\boldsymbol{a}_3$ und der $\mathrm{E}_{\min}$-Schranke 5.05 von $\boldsymbol{a}_2$. Dass sich die absolute Regret-Schranke als eine solche Differenz von $\mathrm{E}_{\max}$- und $\mathrm{E}_{\min}$-Schranke darstellen lässt ist aber i.Allg. *nicht* der Fall sondern liegt daran, dass im Beispiel beide Schrankenwerte für dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung (nämlich $(p_1, p_2, p_3) = (0.3, 0.35, 0.35)$) angenommen werden.

(4) Die Nebenbedingungen sind bereits relativ restriktiv und können nicht problemlos weiter verschärft werden.[24] (Zumindest steht der Präzisierungsaufwand in keinem gesunden Verhältnis mehr zu den noch zu erwarteten Verbesserungen in der Entscheidung.)

9.5.4 Abschließende Bemerkungen zum Beispiel

Das Beispiel sollte gezeigt haben, wie der Ablauf des Lazy Decision Making konkret vollzogen wird, wobei wir allerdings auch hier nicht bis ins letzte Detail der Benutzerführung sowie der grafischen Darstellung der Schattenpreise gegangen sind. Es sollte klar geworden sein, dass durch das Lazy Decision Making eine "gewisse" Unterstützung geliefert wird, letztendlich aber die eigentliche Beurteilung der Nebenbedingungen und entsprechend die Auswahl der durchzuführenden Verschärfung einer expliziten oder neu hinzugefügten impliziten Nebenbedingung, Aufgabe des Agenten ist.[25]

Aufgrund des Spielzeugcharakters des Beispiels mag der Wert einiger Konzepte nur bedingt zum Vorschein gekommen sein. Hier sei aber nochmals betont, dass bei größeren Entscheidungsproblemen (es genügen bereits 5-10 Zustände) die Nebenbedingungen und insbesondere deren Wechselwirkungen wesentlich schwieriger zu überschauen sind und erst dann der wahre Nutzen der "Orientierungshilfen" deutlich wird.

[24] Ob dies tatsächlich der Fall ist, lässt sich im Beispiel offenbar nicht nachvollziehen, da keinerlei Angaben über das Wissen des Agenten getroffen wurden. Dennoch stellt dieser Punkt – insbesondere im Zusammenhang mit Punkt (2) – einen sehr wesentlichen Grund für den Abbruch des Verfahrens dar.

[25] In Unterabschnitt 8.4.7 haben wir näher dargelegt, warum wir dies für notwendig halten.

Kapitel 10

Ausblick

Ziel dieses Kapitels ist, vielversprechende Erweiterungsmöglichkeiten des LAZY DECISION MAKING und damit Anknüpfungspunkte für weitere Forschungsarbeiten aufzuzeigen.

Neben relativ direkten Erweiterungen wie der Verwendung nicht-linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen könnte das Verfahren insbesondere durch eine weitere Aufweichung des zu Grunde liegenden Modells profitieren: Hier ist eine Fuzzifizierung der Wahrscheinlichkeitsinformationen ebenso denkbar wie eine zielgerichtete Anpassung der Granularität der Modellierung.

"Vorstellungskraft ist wichtiger als Wissen."

ALBERT EINSTEIN

"Wenn Dreiecke einen Gott hätten, würden sie ihn mit drei Ecken ausstatten."

CHARLES-LOUIS BARON DE MONTESQUIEU

10.1 Motivation

Das LAZY DECISION MAKING wie wir es im Rahmen dieser Arbeit entwickelt haben kann in etlichen Anwendungsfeldern unmittelbar eingesetzt werden, ohne dass noch fundamentale Fragen offen blieben. Insbesondere im Bereich der Entscheidungsunterstützenden Systeme (vgl. Abschnitt 9.2) ist eine direkte Integration des Verfahrens in vielen Fällen problemlos möglich.

Dennoch ist die Entwicklung des Verfahrens mit dieser Arbeit zweifelsohne nicht beendet. Tatsächlich haben wir an diversen Stellen Entwurfsentscheidungen getroffen, die sich möglicherweise "aufweichen" lassen und damit das Verfahren weiter verallgemeinern würden. Wir gehen auf einige solcher Anknüpfungspunkte, die eine *unmittelbare* Erweiterung des Lazy Decision Making erlauben, in Abschnitt 10.2 ein.

Als besonders folgenschwer erweist sich unsere Voraussetzung, dass wir den Präzisierungsaufwand nicht modellieren und demzufolge der Agent selbst über die zu verschärfende Nebenbedingung entscheidet. Eine "Aufweichung" dieser Voraussetzung ist ein Ansatzpunkt für eine *weitreichende* Verallgemeinerung des Verfahrens. Ebenso gilt dies für die Verwendung von Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsinformationen oder die adaptive Veränderung der Modellierungsgranularität während des Verfahrens. Auf diese Aspekte gehen wir in Abschnitt 10.3 näher ein.

Die Möglichkeit der Spezialisierung des Lazy Decision Making – insbesondere hinsichtlich der Evidenztheorie – betrachten wir in Abschnitt 10.4 etwas näher.

Letztendlich ist aber zu erwarten, dass erst vermehrte Erfahrungen aus praktischen Anwendungen die wirklich verbesserungs- oder erweiterungsbedürftigen Stellen des Verfahrens aufzeigen werden. Es bleibt abzuwarten, bis das Lazy Decision Making in ein reales Entscheidungsunterstützendes System integriert wird und hierdurch die notwendigen praktischen Erfahrungen gesammelt werden können.

10.2 Direkte Erweiterungsmöglichkeiten

10.2.1 Nicht-lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen

Zur Modellierung der Kenntnisse des Agenten bezüglich des eintretenden Umweltzustands haben wir *lineare* Wahrscheinlichkeitsinformationen verwandt; eine lineare Wahrscheinlichkeitsinformation $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$ beschreibt die Menge derjenigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}^{(n)}$, die der Agent für denkbar hält (vgl. Definition 3.3.3 und Anmerkung 3.3.4).

Wir haben wesentlich davon Gebrauch gemacht, dass sich W mit Hilfe der Standardrepräsentation durch lineare Nebenbedingungen darstellen lässt. (Dies ist der Ausgangspunkt für die zielgerichtete Präzisierung basierend auf den Schattenpreisen, welche ihrerseits aus dem dualen linearen Problem resultieren.)

Eine naheliegende Verallgemeinerung unseres Verfahrens wäre, auch nicht-lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen zu erlauben. In diesem Zusammenhang erscheint es sinnvoll, weiterhin Nebenbedingungen zur Repräsentation der (potenziell nicht-linearen) Wahrscheinlichkeitsinformation einzusetzen, nur müssten hier auch gewisse nicht-lineare Nebenbedingungen zugelassen werden. Hierdurch könnten z.B. auch lineare Ungleichungen mit *mehreren* bedingten Wahrscheinlichkeiten ermöglicht werden (vgl. Fußnote 4 in Kapitel 6).

Etwas problematisch an dieser Vorgehensweise ist, dass die resultierenden Optimierungsprobleme nun nicht mehr linear sind und demzufolge die Schattenpreise nicht mehr nach unserem Verfahren berechnet werden können. Allerdings sollten sich zumindest für gewisse Typen nicht-linearer Wahrscheinlichkeitsinformationen geeignete Verallgemeinerungen finden lassen: So existieren auch für allgemeinere Optimierungsprobleme Dualitätseigenschaften und es lassen sich auch für nicht-lineare Probleme Schattenpreise bestimmen, etwa in Form der Lagrange-Multiplikatoren (vgl. [Dix76, 13-23], [NM93]).

Es bleibt anzumerken, dass diese Verallgemeinerung aus rein mathematischer Sichtweise zwar sehr naheliegend ist, ihre praktische Relevanz aber unklar ist, da sich die real auftretenden Bedingungen fast ausnahmslos durch lineare Bedingungen darstellen lassen (vgl. Abschnitt 6.5).

10.2.2 Weitere Untersuchungen zur zielgerichteten Präzisierung

Zwar haben wir etliche LOP-Maße angesprochen und eine konkrete Empfehlung für ein Vorgehen abgegeben (vgl. Anmerkung 7.4.28), trotzdem ließe sich dieser Punkt noch wesentlich detaillierter untersuchen. Wir haben hier gewissermaßen den Werkzeugkasten vorgestellt, jedoch keinesfalls erschöpfend das Wechselspiel der verschiedenen Werkzeuge analysiert.

Das unserer Meinung nach zentralste LOP-Maß $\psi_{A,W}^{\text{reldiff},\boldsymbol{a}^*}$ (vgl. Anmerkung 7.4.22) ist abhängig von dem Vorschlag $\boldsymbol{a}^*$ und damit der gewählten Heuristik $\mathcal{H}$. Es erscheint vielversprechend, mehrere Heuristiken gleichzeitig einzusetzen und basierend auf diesen *mehrere* LOP-Maße $\psi_{A,W}^{\text{reldiff},\boldsymbol{a}^*}$ (für jede Heuristik eines) zu verwenden. Hier wäre das konkrete Zusammenwirken der verschiedenen Größen (Schattenpreise) von Interesse: Wie sollte man in welcher Situation vorgehen? Welches Maß dient wann und wie zur Orientierung? Diese Fragen lassen sich vermutlich nicht ohne eine exzessive Betrachtung konkreter Anwendungsbeispiele zufriedenstellend beantworten.

Für Anwendungen in der Praxis könnte in diesem Zusammenhang eine geeignete (grafische oder textuelle) Darstellungsweise der Kenngrößen untersucht werden und wie möglichst effektiv im Dialog mit dem Agenten die Wahrscheinlichkeitsinformation präzisiert werden kann.

10.2.3 Nicht-lineare (L)OP-Maße

Wir haben die Schattenpreise, die zur zielgerichteten Präzisierung dienen, basierend auf einer *linearen* Zielfunktion berechnet; genau dies war die Motivation für die LOP-Maße (vgl. Abschnitt 7.4).

Prinzipiell könnten anstelle der linearen Zielfunktion auch beliebige Funktionen zugelassen werden. Allerdings kann dann unser Verfahren zur Berechnung der Schattenpreise nicht mehr angewandt werden und es muss nach Alternativen gesucht werden (hier sind die in Unterabschnitt 10.2.1 angesprochenen LAGRANGE-Multiplikatoren wiederum aussichtsreiche Kandidaten, vgl. [Dix76, 13-23], [NM93]).

Obwohl hier zumindest ein Anknüpfungspunkt für weitere Verallgemeinerungen besteht, stellt sich dennoch die Frage der Sinnhaftigkeit. Wir können keinen unmittelbaren Nutzen nicht-linearer Maße erkennen, was aber selbstverständlich auch in unserer beschränkten Sichtweise begründet liegen mag.[1]

[1]Das Problem einer beschränkten Sichtweise wird besonders schön durch historische Irrtümer wie beispielsweise die Aussage "Ich denke, es gibt weltweit einen Markt für vielleicht fünf Computer" (THOMAS WATSON, Vorsitzender von IBM, 1943) illustriert (siehe z.B.

10.3 Allgemeine Erweiterungsmöglichkeiten

10.3.1 Modellierung des Präzisierungsaufwands

Bei unserem Ansatz haben wir explizit darauf verzichtet, den Aufwand zu modellieren, der durch die Präzisierung entsteht. Wir haben in Unterabschnitt 8.4.7 genauer die Gründe dargelegt, warum wir diesen Ansatz gewählt haben und welche Bedenken wir bezüglich der Modellierung des Präzisierungsaufwands haben.

Dennoch ist hier zweifelsohne ein Ansatzpunkt für weitere Untersuchungen: Möglicherweise lassen sich zumindest Teile des Aufwands modellieren und damit das Verfahren noch weiter automatisieren.

Wir halten in diesem Zusammenhang das konsequente Weiterführen der Idee des *weichen* Modells – möglicherweise unter Verwendung von Fuzzy-Mengen – für vielversprechend, da sich der Präzisierungsaufwand nur schwerlich exakt erfassen lassen wird.[2] Ein Vorschlag wäre, dass der Agent den Nebenbedingungen linguistische Terme wie "schwierig", "sehr leicht" oder "nahezu unmöglich" zuordnen kann (vgl. [KY95]), welche seine Einschätzung bezüglich des Aufwands einer weiteren Verschärfung angeben. (Der Aufwand betrifft insbesondere das verminderte Vertrauen des Agenten, dass die präzisierte Wahrscheinlichkeitsinformation die "wahre" Wahrscheinlichkeitsverteilung beinhaltet, vgl. Unterabschnitt 8.4.7.) Zu beachten ist, dass dieser Aufwand in Beziehung zu dem konkreten Ausmaß der Verschärfung gesetzt werden muss (also dem $\varepsilon > 0$ mit dem eine ε-Verschärfung durchgeführt wird).

Möglicherweise kann durch dieses Vorgehen zumindest die Anzahl der in einem Iterationsschritt zu betrachteten Nebenbedingungen reduziert werden. Sobald eine Nebenbedingung verschärft wird, müsste der Agent seine neue Einschätzung bezüglich des Aufwands weiterer Verschärfungen dieser Nebenbedingung abgeben. (Der Aufwand bezüglich anderer Nebenbedingungen sollte davon aber *nicht* betroffen sein und entsprechend unverändert bleiben.)

10.3.2 Fuzzifizierung der Wahrscheinlichkeitsinformation

Eine (lineare) Wahrscheinlichkeitsinformation W ist eine Menge $W \subseteq \mathbb{S}^{(n)}$, welche – zumindest gemäß der Standardinterpretation – die "wahre" Wahrscheinlichkeitsinformation $\boldsymbol{\rho}$ beinhaltet, es gilt also $\boldsymbol{\rho} \in W$ (vgl. Definition 3.3.3 und Anmerkung 3.3.4).

`http://www.raffiniert.ch/zhisti.html`).

[2] Man könnte an dieser Stelle einwenden, dass ein ähnliches Argument auch bezüglich der Ergebnisnutzen greifen müsste und entsprechend die Existenz einer (exakten) Nutzenfunktion fraglich ist. Hier ist allerdings einzuwenden, dass die Nutzenfunktion *unabhängig* vom Entscheidungsproblem ist und insofern wesentlich mehr Modellierungsaufwand rechtfertigt. Zudem gibt es gewisse "Standard-Ergebnisse" wie beispielsweise monetäre Größen. Für derartige Fälle existieren weitreichend untersuchte Familien von Nutzenfunktionen, die sich mit Hilfe nur weniger Parameter entsprechend den Präferenzen des Agenten anpassen lassen (vgl. etwa [FH94]). Demgegenüber ist die Modellierung des Präzisierungsaufwands maßgeschneidert für das vorliegende Entscheidungsproblem und entsprechend nur einmalig anwendbar; hier wird der dazu notwendige Aufwand folglich wesentlich schwieriger zu vertreten sein.

Im Prinzip erscheint die scharfe Menge W geradezu prädestiniert für eine Fuzzifizierung, denn vermutlich wird der Agent nicht bezüglich jedem Vertreter $\boldsymbol{p} \in W$ der Aussage $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{p}$ dieselbe Glaubwürdigkeit zusprechen. Insofern wäre es denkbar, eine Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsinformation W (definiert als Fuzzy-Menge $W : \mathbb{S}^{(n)} \to [0,1]$) anstelle der "scharfen" Wahrscheinlichkeitsinformationen in unserem Modell zu verwenden. Dann misst $W(\boldsymbol{p})$ (für $\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}^{(n)}$) in "geeigneter" Weise das Zutrauen des Agenten in die Aussage $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{p}$.

Es wäre offenbar notwendig, einige Begriffe geeignet anzupassen, etwa denjenigen der Präzisierung. Dies stellt allerdings kein wirkliches Problem dar, da die hierfür notwendigen Verallgemeinerungen der klassischen Konzepte (wie etwa der Mengeninklusion) im Rahmen der Fuzzy-Logik bereits weitreichend untersucht wurden (vgl. [KY95]).

Wesentlich problematischer erweist sich jedoch die konkrete Interpretation der Zugehörigkeitsgrade $W(\boldsymbol{p})$ (mit $\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}^{(n)}$) und demzufolge auch die darauf basierende Vorgehensweise beim Lazy Decision Making. Unsere Befürchtung bezüglich dieses Ansatzes war, dass er wesentlich mehr Angriffspunkte bietet und demzufolge wesentlich schwieriger (oder gar unmöglich) solide zu begründen ist. Insofern scheint uns hier ein zweistufiges Vorgehen vielversprechender; basierend auf dem "scharfen" Lazy Decision Making wie wir es in der vorliegenden Arbeit eingeführt und zu rechtfertigen versucht haben könnte in einer separaten Arbeit ein Fuzzy-Lazy Decision Making entwickelt und analysiert werden.

10.3.3 Granularitätsveränderungen

Vielversprechend aufgrund eines sehr großen Potenzials zur Verbesserung der Übersichtlichkeit sowie zur Einsparung vermeidbaren Aufwands erscheinen adaptive Granularitätsveränderungen bezüglich der Zustands- und Alternativenmenge.

So könnte dem Agenten erlaubt werden, während des iterativen Entscheidungsprozesses im Lazy Decision Making, Zustände und/oder Alternativen zu "splitten". Denkbar wäre etwa, dass ein Zustand S_2 zunächst für eine "schlechte Konjunkturentwicklung" steht, sich im Verlauf der Präzisierungen jedoch zeigt, dass diese Granularität (der Zustandsmenge) nicht für eine solide Entscheidungsfindung ausreicht. Dann sollte der Agent die Möglichkeit haben, den Zustand S_2 in – zum Beispiel – Zustände $S_{2,1}, S_{2,2}, S_{2,3}$ zu "splitten", welche die "schlechte Konjunkturentwicklung" (entsprechend S_2) weiter aufteilen. In absolut analoger Form gilt das Gesagte bezüglich der Alternativen(menge).

Diese Art des Vorgehens bietet sich im Rahmen des Lazy Decision Making geradezu an, da es sich um ein *dynamisches* Verfahren handelt, in dessen Verlauf erst die Notwendigkeit einer "feinkörnigeren" Modellierung dem Agenten bewusst werden kann. Insbesondere sollte die zielorientierte Präzisierung dazu führen, dass nur die wirklich relevanten Alternativen und/oder Zustände weiter aufgesplittet werden müssen.

Insgesamt erscheint ein dynamisches Anpassen der Granularität der Zustands- und/oder Alternativenmenge ein hervorragend in das Gesamtbild des Lazy Decision Making zu integrierendes Verfahren, welches vor allem die vorhandenen Vorteile noch verstärken sollte. Denkbar wäre, mit einer extrem groben Modellierung zu starten und sich auch hier zielgerichtet einer adäquaten Granularität anzunähern (entsprechend der Vorgehensweise, die beim LAZY DECISION MAKING bezüglich der Wahrscheinlichkeitsinformation bereits praktiziert wird).

10.4 Spezialisiertes Lazy Decision Making

Wir hatten in Abschnitt 6.5 gezeigt, dass durch lineare Wahrscheinlichkeitsinformationen einige speziellere Theorien wie beispielsweise die DEMPSTER-SHAFER Evidenztheorie abgedeckt werden. Insofern beinhaltet das LAZY DECISION MAKING ein dynamisches Entscheidungsverfahren für die Evidenztheorie.

Dennoch ist das Verfahren selbstverständlich nicht auf die speziellen Gegebenheiten dieser Theorie angepasst sondern orientiert sich an der allgemeineren Theorie der partiellen Information, die wir als Grundlage verwenden.

Es erscheint jedoch plausibel, dass für einen spezielleren Repräsentationsmechanismus wie etwa die Evidenztheorie, spezialisiertere Maße (z.B. als Grundlage für die Schattenpreise) entwickelt werden können und diese den Agenten im Rahmen der spezielleren Theorie besser unterstützen. Zudem ist nur ein eingeschränkteres Repertoire an Verschärfungen bzw. neuer impliziter Nebenbedingungen denkbar, so dass auch hier möglicherweise der Agent besser unterstützt werden kann. Tatsächlich haben erste Untersuchungen in diese Richtung gezeigt (vgl. [Pre00b]), dass etwa basierend auf dem *basic probability assignment* (vgl. Unterabschnitt 6.5.3 und insbesondere Definition 6.5.11) spezielle Maße zur Unterstützung des Agenten berechnet werden könnten, welche in unserem allgemeineren Modell kein adäquates Analogon besitzen (da sich eine Wahrscheinlichkeitsinformation i.Allg. nicht durch ein bpa beschreiben lässt).

Konkret halten wir hier allerdings die Evidenztheorie für den einzigen vielversprechenden Ansatz, da die anderen Theorien isoliert betrachtet wohl eine zu geringe Ausdruckskraft aufweisen.

Denkbar ist, dass auch das allgemeine LAZY DECISION MAKING von diesen Resultaten profitieren könnte; möglicherweise könnten für spezielle Typen von Nebenbedingungen und/oder Wahrscheinlichkeitsinformationen die neuen, spezialisierteren Maße integriert werden und damit den Agenten auf eine “maßgeschneidertere” Weise unterstützen. Allerdings resultieren hieraus neue Probleme beim Vergleich von Nebenbedingungen verschiedenen Typs.

Literaturverzeichnis

> *"Treffe nie eine Entscheidung, wenn Du einen anderen dafür finden kannst!"*
>
> N.N.

[AH83] Götz Alefeld and Jürgen Herzberger. *Introduction to interval computations.* Academic Press, New York, 1983.

[Ban97] Hans Bandemer. *Ratschläge zum mathematischen Umgang mit Ungewißheit.* Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1997.

[BC92] Günter Bamberg and Adolf Gerhard Coenenberg. *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre.* Vahlen, München, 1992. 7. Auflage.

[BP02] Vasco Brattka and Gero Presser. Computability on subsets of metric spaces. *Theoretical Computer Science*, 2002. Accepted for publication.

[CM59] Herman Chernoff and Lincoln E. Moses. *Elementary Decision Theory.* John Wiley & Sons, New York, 1959.

[Dan66] George Dantzig. *Lineare Optimierung und Erweiterungen.* Springer, Heidelberg, 1966.

[Del97] Frank Dellmann. *Verarbeitung von partiellen Wahrscheinlichkeitsinformationen in Entscheidungsunterstützenden Systemen.* Josef Eul, Köln, 1997.

[Din69] Werner Dinkelbach. *Sensitivitätsanalysen und parametrische Programmierung.* Springer, Berlin, 1969.

[Dix76] Avinash K. Dixit. *Optimization in Economic Theory.* Oxford University Press, London, 1976.

[dL14] Pierre-Simon de Laplace. *Essai philosophique sur les probabilités.* Courcier, Paris, 1814.

[Dör92] Dietrich Dörner. *Die Logik des Mißlingens.* Rowohlt, Reinbek, 1992.

[Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology.* Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[Ern88] Christian J. Ernst, editor. *Management Expert Systems.* Addison-Wesley, Reading, 1988.

[FH94] Günter Franke and Herbert Hax. *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt.* Springer, Berlin, 1994. 3. Auflage.

[Fis64] Peter C. Fishburn. *Decision and Value Theory. Publications in Operations Research.* John Wiley & Sons, New York, 1964.

[Fis65] Peter C. Fishburn. Analysis of decisions with incomplete knowledge of probabilities. *Operations Research*, 13:217–237, 1965.

[Fra60] Wolfgang Franz. *Topologie I: Allgemeine Topologie.* de Gruyter, Berlin, 1960.

[Gne97] Boris Wladimirowitsch Gnedenko. *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie.* Verlag Harri Deutsch, Thun, 1997. 10. Auflage.

[GP99] Martin Grötschel and Manfred Padberg. Die optimierte Odyssee. *Spektrum der Wissenschaft*, (4):76–85, 1999.

[GRS00] Günther Görz, Claus-Rainer Rollinger, and Josef Schneeberger, editors. *Handbuch der Künstlichen Intelligenz.* Oldenbourg, München, 2000. 3. Auflage.

[Hje01] Johan Hjelm. *Creating the Semantic Web with RDF.* John Wiley & Sons, New York, 2001.

[Hol89] Samuel Holtzman. *Intelligent Decision Systems.* Addison-Wesley, Reading, 1989.

[HP99] Anthony Hunter and Simon Parsons, editors. *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, Berlin, 1999. Springer-Verlag.

[HR92] Jack Hirshleifer and John G. Riley. *The analytics of uncertainty and information.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Hur51] Leonid Hurwicz. Optimality criteria for decision making under ignorance. *Cowles Commission discussion paper, Statistics*, No. 370, 1951.

[Hus85] S. Huschens. *Entscheiden bei Unsicherheit: Die Berücksichtigung inferentieller und struktureller Information.* Fischer, Frankfurt a.M., 1985.

[Joy99] James M. Joyce. *The foundations of causal decision theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Kar84] Narendra Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.

[KM76] Eduard Kofler and Günter Menges. *Entscheiden bei unvollständiger Information.* Springer, Berlin, 1976.

[KM78] Peter G.W. Keen and Michael S. Scott Morton. *Decision Support Systems: An Organizational Perspective.* Addison-Wesley, Reading, 1978.

[KM79] Eduard Kofler and Günter Menges. The structuring of uncertainty and the MaxE$_{min}$-Principle. *Operations Research Verfahren*, 34:223–234, 1979.

[KM94] Jürg Kohlas and Paul-André Monney. Theory of evidence. A survey of its mathematical foundations, applications and computational aspects. *ZOR – Mathematical Methods of Operations Research*, 39:35–68, 1994.

[Kof89] Eduard Kofler. *Prognosen und Stabilität bei unvollständiger Information.* Campus, Frankfurt a.M., 1989.

[KW98] George J. Klir and Mark J. Wierman. *Uncertainty-Based Information.* Physica-Verlag, Heidelberg, 1998.

[KY95] George J. Klir and Bo Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

[Lau98] Helmut Laux. *Entscheidungstheorie.* Springer-Verlag, Berlin, 1998. 4. Auflage.

[Lee71] Wayne Lee. *Decision Theory and Human Behavior.* John Wiley & Sons, New York, 1971.

[LR57] Robert Duncan Luce and Howard Raiffa. *Games and Decisions: Introduction and critical survey.* John Wiley & Sons, New York, 1957.

[May54] Kenneth O. May. Intransitivity, utility, and the aggregation of preference patterns. *Econometrica*, 22:1–13, 1954.

[Men81] Günter Menges. Weiche Modellbildung und LPI. In Günter Menges, Heidi Schelbert, and Peter Zweifel, editors, *Stochastische Unschärfe in den Wirtschaftswissenschaften*, Frankfurt a.M., 1981. Haag & Heerchen.

[Moo79] Ramon E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis.* SIAM, Philadelphia, 1979.

[MR95] Rajeev Motwani and Prabhakar Raghavan. *Randomized Algorithms.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Nie48] Jürg Niehans. Zur Preisbildung bei ungewissen Erwartungen. *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik*, Jg. 84:433–456, 1948.

[NM93] Klaus Neumann and Martin Morlock. *Operations Research.* Hanser, München, 1993.

[Par94] Jeffrey B. Paris. *The Uncertain Reasoner's Companion: A Mathematical Perspective.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Pre99] Gero Presser. Dempster-Shafer Evidenztheorie – Versuch einer anschaulichen Einführung. In Bernd Reusch, editor, *19. Workshop: Interdisziplinäre Methoden in der Informatik*, 1999. Forschungsberichte der Universität Dortmund.

[Pre00a] Gero Presser. Entscheiden zwischen Ungewissheit und Risiko. In *Informatiktage 1999 der Gesellschaft für Informatik*, Leinfelden-Echterdingen, 2000. Konradin Verlag.

[Pre00b] Gero Presser. Lazy Decision Making. In *Proceedings of the Eight International Conference IPMU*, pages 807–812, 2000.

[Pre00c] Gero Presser. Lazy Decision Making. In Bernd Reusch, editor, *20. Workshop: Interdisziplinäre Methoden in der Informatik*, 2000. Forschungsberichte der Universität Dortmund.

[Pre01a] Gero Presser. Dynamic decision making based on partial probability information. In *Computational Intelligence – Proceedings of the Seventh Fuzzy Days*, pages 930–936. Springer, 2001.

[Pre01b] Gero Presser. Lazy Decision Making and Multicriteria Analysis. In *Proceedings of the Fifth World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics (SCI)*, pages 427–431, 2001.

[PRS96] John W. Pratt, Howard Raiffa, and Robert Schlaifer. *Introduction to Statistical Decision Theory.* MIT Press, Cambridge, 1996. Second Printing.

[Ram31] Frank P. Ramsey. Truth and probability. In Richard B. Braithwaite, editor, *The Foundations of Probability and other Logical Essays*, New York, 1931. Harcourt Brace.

[RN95] Stuart Russell and Peter Norvig. *Artifical Intelligence: A Modern Approach.* Prentice-Hall, London, 1995.

[Sav51] Leonard J. Savage. The theory of statistical decision. *Journal of the American Statistical Association*, 46:55–67, 1951.

[Sch64] Hans Schneeweiß. Eine Entscheidungsregel für den Fall partiell bekannter Wahrscheinlichkeiten. *Unternehmensforschung*, Jg. 8:86–95, 1964.

[Sch66] Hans Schneeweiß. Das Grundmodell der Entscheidungstheorie. *Statistische Hefte*, Jg. 7:125–137, 1966.

[Sch67] Hans Schneeweiß. *Entscheidungskriterien bei Risiko.* Springer, Berlin, 1967.

[Sha76] Glenn Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.

[SK94] Philippe Smets and Robert Kennes. The transferable belief model. *Artificial Intelligence*, 66:191–234, 1994.

[Sme97] Philippe Smets. Imperfect information: Imprecision and uncertainty. In Amihai Motro and Philippe Smets, editors, *Uncertainty Management in Information Systems*, pages 225–254, Boston, 1997. Kluwer Academic Publishers.

[SW49] Claude Elwood Shannon and Warren Weaver. *The Mathematical Theory of Communications*. University of Illinois Press, Urbana, 1949.

[Tak01] Hideyuki Takagi. Interactive evolutionary computation as humanized computational intelligence technology. In *Computational Intelligence – Proceedings of the Seventh Fuzzy Days*, pages 629–636. Springer, 2001.

[TK81] Amos Tversky and Daniel Kahneman. The framing of decisions and the psychology of choice. *Science*, 211:453–458, 1981.

[TL80] Angus E. Taylor and David C. Lay. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1980. Second Edition.

[vNM43] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1943.

[Wal45] Abraham Wald. Statistical decision functions which minimize the maximum risk. *Annals of Mathematics*, 46:265–280, 1945.

[Wal50] Abraham Wald. *Statistical Decision Functions*. John Wiley & Sons, New York, 1950.

[Wal91] Peter Walley. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman and Hall, London, 1991.

[Weg95] Ingo Wegener. Skriptum zur Vorlesung 'Operations Research', 1995. Fachbereich Informatik, Universität Dortmund.

[Wei00] Klaus Weihrauch. *Computable Analysis*. Springer, Berlin, 2000.

[WF82] Peter Walley and Terrence L. Fine. Towards a frequentist theory of upper and lower probability. *The Annals of Statistics*, 3:741–761, 1982.

[Wol82] Hartmut Wollenhaupt. *Rationale Enscheidungen bei unscharfen Wahrscheinlichkeiten*. Harri Deutsch, Thun, 1982.

[Wri96] Stephen J. Wright. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. SIAM Publications, Philadelphia, 1996.

[YK97] Ronald R. Yager and Janusz Kacprzyk. *The Ordered Weighted Averaging Operators*. Kluwer, Boston, 1997.

[Zad01] Lotfi A. Zadeh. A new direction in AI – towards a computational theory of perceptions. In *Computational Intelligence – Proceedings of the Seventh Fuzzy Days*, pages 629–636. Springer, 2001.

[ZG91] Hans-Jürgen Zimmermann and Lothar Gutsche. *Multi-Criteria Analyse. Einführung in die Theorie der Entscheidungen bei Mehrfachzielsetzungen.* Springer, Berlin, 1991.