

Erzeugung hierarchischer Gitter mittels globaler Parametrisierung von NURBS-Flächenverbänden

Dissertation

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dortmund

Der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Dortmund
vorgelegt von

Michael Scharfschwerdt

22. Februar 2010

1. Gutachter: Prof. Dr. Joachim Stöckler
2. Gutachter: Prof. Dr. Stefan Turek

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	vi
1 Numerische Simulation von Strömungsvorgängen	1
1.1 Notation	1
1.2 Computational Fluid Dynamics	1
1.3 FEATFLOW	2
1.4 Numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen	3
1.4.1 Diskretisierung in der Zeit	3
1.4.2 Gitter	5
1.4.3 Diskretisierung im Ort	9
1.4.4 Das in Zeit und Ort diskretisierte Problem	11
1.4.5 Mehrgitterverfahren	12
1.5 Gittererzeugung	18
1.5.1 Randanpassung	19
1.5.2 Randanpassung in 2D	19
1.5.3 Analytische Beschreibung und orthogonale Projektion	20
1.5.4 Sweeping	20
1.5.5 Triangulierung und iterierte Projektion	21
1.5.6 Triangulierung, Gitterdeformation und Projektion	21
1.5.7 Parametrisierte Flächen	24
2 Darstellung von Kurven und Flächen	26
2.1 Grundbegriffe aus der Differentialgeometrie	26
2.2 Triangulierungen	31
2.3 NURBS	33
2.3.1 B-Spline-Basis-Funktionen	34
2.3.2 NURBS-Kurven	37
2.3.3 NURBS-Flächen	38
2.3.4 Modellierung	39
2.3.5 Getrimmte Flächen	41
2.3.6 Visuelle Stetigkeit	44
2.3.7 Beschreibung eines Gebietes	46
3 Spezielle Verfahren der Gittergenerierung	53
3.1 Gittergenerierung in der Ebene	53
3.1.1 Delaunay-Verfahren	53
3.1.2 Advancing-Front-Verfahren	56

3.2	Gittergenerierung auf Oberflächen	56
3.2.1	Parameterraum-Verfahren	57
3.2.2	Direkte 3D-Verfahren	62
3.3	Umwandlung: Dreiecksnetz zu Vierecksnetz	65
3.4	Bewertung und Ausblick	66
4	Lineare Projektionsverfahren für Triangulierungen	68
4.1	Eigenschaften von linearen Projektionen	70
4.1.1	Beschreibung von linearen Projektionen	70
4.1.2	Isometrische Parametrisierungen von Triangulierungen	71
4.2	Konstruktion von linearen Projektionen	72
4.2.1	Projektion der Randecken	73
4.2.2	Projektion der inneren Ecken	82
5	Gittererzeugung mittels globaler Parametrisierung	97
5.1	Globale Parametrisierung eines NURBS-Flächenverbandes	97
5.1.1	Globale Parametrisierung mittels affiner Transformation	99
5.1.2	Globale Parametrisierung mittels stückweise linearer Projektion	100
5.2	Erzeugung einer Hierarchie von Hexaedergittern	106
5.2.1	Zerlegung der Geometrie in Flächenverbände	106
5.2.2	Gleichmäßige Unterteilung des Grobgitters im globalen Parameterbereich	107
5.3	Gitteranpassung an Kurven	109
5.3.1	Gittererzeugung ohne Anpassung an Kurven	109
5.3.2	Gittererzeugung mit Anpassung an Kurven	110
5.4	Globale Parametrisierung von NURBS-Flächenverbänden mit Löchern	115
5.4.1	Klassischer Ansatz: Zerschneiden	115
5.4.2	Neuer Ansatz: Löcher füllen	117
6	Numerische Ergebnisse	122
6.1	Der Löser PP3D	122
6.2	Die skalierte Jacobi-Determinante als Qualitätsmaß für Hexaeder	124
6.3	Beispiel 1: T-Stück	126
6.4	Beispiel 2: Schwebendes Kreuz im Windtunnel	137
7	Zusammenfassung	149
	Anhang	149

Symbolverzeichnis

\mathcal{T}	Triangulierung im \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3
T	Dreieck einer Triangulierung
\mathbf{v}	Ecke einer Triangulierung
$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$	Kante einer Triangulierung
$V(\mathcal{T})$	Menge aller Ecken der Triangulierung \mathcal{T}
$V_I(\mathcal{T})$	Menge aller innerer Ecken der Triangulierung \mathcal{T}
$V_B(\mathcal{T})$	Menge aller Randecken der Triangulierung \mathcal{T}
$E(\mathcal{T})$	Menge aller Kanten der Triangulierung \mathcal{T}
$E_I(\mathcal{T})$	Menge aller innerer Kanten der Triangulierung \mathcal{T}
$E_B(\mathcal{T})$	Menge aller Randkanten der Triangulierung \mathcal{T}
$N_{\mathbf{v}}$	Nachbarschaft der Ecke \mathbf{v}
$\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$	Oberfläche der Triangulierung \mathcal{T}
\mathcal{H}	Hexaedergitter
H	Hexaeder eines Hexaedergitters
\mathcal{Q}	Vierecksgitter
Q	Viereck eines Vierecksgitters
\mathcal{C}	Kurve im \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3
(I, \mathbf{C})	Parametrisierung einer Kurve
\mathcal{S}	Fläche
(D, \mathbf{S})	Parametrisierung der Fläche \mathcal{S}
\mathcal{G}	Geometrie
\mathcal{F}	Flächenverband
$\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$	Oberfläche des Flächenverbandes \mathcal{F}
(D_i, \mathbf{S}_i)	Parametrisierung der Fläche \mathcal{S}_i des Flächenverbandes \mathcal{F}
$(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$	Globale Parametrisierung des Flächenverbandes \mathcal{F}
$\hat{\mathcal{T}}$	Approximierende Triangulierung des Flächenverbandes \mathcal{F}
$\bar{\mathcal{T}}$	Globale Triangulierung des Flächenverbandes \mathcal{F}

Einleitung

In der Natur, der Technik und im Alltag gibt es zahlreiche Beispiele für Strömungsvorgänge:

- meteorologische Vorgänge wie Regen, Wind und Gezeiten,
- der Blutkreislauf im menschlichen Körper,
- Luftströme um ein Auto,
- Vorgänge in chemischen Reaktoren,
- Klimaanlage in Büros.

Die Untersuchung von Strömungsvorgängen spielt in vielen Bereichen von Wissenschaft und Industrie eine wichtige Rolle. So ist zum Beispiel beim Entwurf eines Autos der Luftwiderstand von besonderem Interesse, da dieser direkten Einfluss auf Geschwindigkeit und Verbrauch hat. Untersuchungen in Windtunnel sind jedoch sehr kostspielig. Um Kosten zu reduzieren, werden erste Prototypen in einem virtuellen Windkanal getestet. Die Luftströmung um das Auto wird numerisch simuliert. Abbildung 1 zeigt ein Beispiel für ein reales Experiment. Abbildung 2 zeigt eine Visualisierung einer 2-dimensionalen numerischen Simulation.

Allgemeine Strömungen lassen sich mathematisch durch die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben. Das Programmpaket FEATFLOW ermöglicht die numerische Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in 2D und 3D. Diese



Abbildung 1: Auto im Windtunnel. Quelle: WikiCommons [58]

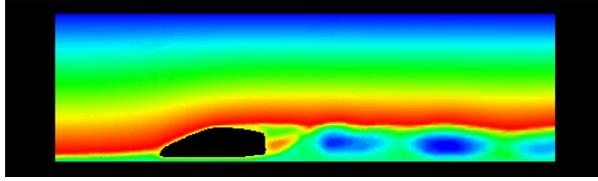


Abbildung 2: 2-dimensionale Simulation eines Autos im Windtunnel

werden in Zeit und Ort diskretisiert. Die Ortsdiskretisierung erfolgt mittels der Finite Elemente Methode. In FEATFLOW werden hierzu Vierecks- bzw. Hexaederelemente verwendet. Auftretende lineare Gleichungen werden mit Hilfe eines Mehrgitterverfahrens gelöst. Als Konsequenz ergibt sich, dass das Strömungsgebiet durch eine Hierarchie von Vierecks- bzw. Hexaedergittern diskretisiert werden muss. Um eine gute Approximation des Gebiets zu gewährleisten, müssen die Randecken der Gitter auf dem Rand des Gebiets liegen. In FEATFLOW wird eine Gitterhierarchie durch eine Kombination von gleichmäßiger Unterteilung und Randanpassung erzeugt. Zu einem gegebenem Gitter wird das nächst feinere Gitter konstruiert, indem jedes Element des Gitters gleichmäßig unterteilt wird. Neu erzeugte Randecken müssen auf dem Rand des Strömungsgebiets platziert werden. Durch mehrfache Wiederholung dieser Schritte erhält man eine Gitterhierarchie. Insbesondere für 3D-Geometrien stellt die Randanpassung eine große Herausforderung dar. Anfangs war es in FEATFLOW nur möglich, die Geometrie mittels einer Fortran-Funktion analytisch zu beschreiben. Entsprechendes galt für die Randanpassung. Neuere Entwicklungen [22], [38] ermöglichen es, die Geometrie durch eine Triangulierung zu beschreiben. Zwei verschiedene Verfahren zur Diskretisierung solcher Geometrien wurden implementiert. Das erste Verfahren beruht auf Projektionen. Das zweite Verfahren ist eine Kombination aus Gitterdeformation und Projektion.

Jedoch sind Triangulierungen lediglich Approximationen des Strömungsgebiets. Die Approximationsgüte der erzeugten Hexaedergitter ist maximal so gut wie die der Triangulierungen. In der Industrie werden als Standard zur Beschreibung von Geometrien die sogenannten NURBS-Flächen (Non Uniform Rational B-Splines) verwendet. Das Ziel meiner Arbeit ist die Entwicklung und Implementierung eines Verfahrens zur Erzeugung einer Hierarchie von Hexaeder-Gittern bezüglich einer durch NURBS-Flächen beschriebenen Geometrie. Hierbei werden Randpunkte exakt auf den NURBS-Flächen platziert. Die Grundlage hierfür bildet das Verfahren von Samareh-Abolhassani und Stewart [45] heraus. Der Rand des Strömungsgebiets wird durch mehrere parametrisierte Flächen beschrieben. Die Flächen werden zu einigen wenigen Flächenverbänden zusammengefasst. Zu jedem dieser Verbände wird jeweils eine globale Parametrisierung erzeugt. Die Unterteilung einer Randkante oder eines Randvierecks eines gegebenen Gitters erfolgt dann direkt im globalen Parameterbereich. Eine nachträgliche Randanpassung ist nicht mehr nötig. Jedoch werden bei diesem Verfahren stark einschränkende Bedingungen an die gegebenen Flächenverbände gestellt. Die Flächen eines Verbandes müssen wie in einem regelmäßigem Gitter angeordnet sein und jede einzelne Fläche muss die Form eines *gekrümmten Vierecks* haben. In der Regel genügen durch NURBS-Flächen beschriebene

Geometrien nicht diesen Bedingungen. Die Flächen sind getrimmt, d.h. sie enthalten Löcher und ihre Ränder sind beschnitten. Sie sind nicht in einem Gitter angeordnet. Das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren unterliegt diesen Einschränkungen nicht. Die einzelnen Flächen dürfen getrimmt sein und an die Topologie der Geometrie werden keine besonderen Bedingungen gestellt.

Im ersten Kapitel werden zunächst die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen kurz vorgestellt. Es folgt eine Erläuterung wie diese numerisch gelöst werden. Das in FEATFLOW favorisierte Zeitdiskretisierungsverfahren ist das sogenannte Zwischenschritt- θ -Verfahren. Die Diskretisierung im Ort erfolgt mit Hilfe der Finite Elemente Methode. Geschwindigkeit und Druck werden durch einen endlichdimensionalen Funktionenraum approximiert. Dazu wird das Rannacher-Turek-Element verwendet [44]. Nach erfolgter Diskretisierung erhält man ein gekoppeltes, nichtlineares Gleichungssystem. Da Mehrgitterverfahren eine wichtige Rolle zur Lösung dieses Gleichungssystems spielen, werden diese in einem eigenen Abschnitt ausführlich erläutert. Abschließend wird beschrieben, welche Verfahren zur Erzeugung von hierarchischen Hexaeder-Gittern in FEATFLOW bereits existieren. Hierbei wird insbesondere auf die Verfahren von Gödekke, Miemczyk eingegangen.

Kapitel 2 befasst sich mit der Darstellung von Kurven und Flächen. Zunächst werden einige elementare Begriffe der Differentialgeometrie, wie z.B. Isometrie, erläutert. Anschließend wird der Begriff der Triangulierung definiert, welcher in der gesamten Arbeit eine wichtige Rolle spielt. Es folgt die Definition von NURBS-Kurven und -Flächen. Es wird gezeigt, dass mit diesen beliebige Strömungsgebiete beschrieben werden können. Dies erfolgt mit Hilfe eines Boundary Representation Model. Abschließend werden die wichtigen Begriffe Geometrie und Flächenverband definiert.

Das dritte Kapitel gibt einen repräsentativen Überblick über Verfahren zur Erzeugung von Dreiecks- und Vierecksgittern auf parametrisierten Oberflächen. Die meisten dieser Verfahren sind Modifikationen bekannter Verfahren zur Gittererzeugung für planare Gebiete. Zwei wichtige Gruppen von planaren Gittergenerierungsverfahren sind Delaunay-Verfahren und Advancing-Front-Verfahren. Die Verfahren zur Erzeugung von Gittern auf Oberflächen lassen sich grob in zwei Kategorien einteilen. Parameterraumverfahren erzeugen zunächst ein Gitter im Parameterraum und bilden dieses, mit Hilfe der gegebenen Parametrisierung, auf die Oberfläche ab. Direkte 3D-Verfahren erzeugen das Gitter direkt auf der Oberfläche ohne den Umweg über den Parameterraum. Die meisten der untersuchten Verfahren erzeugen Dreiecksgitter. Es existieren Techniken zur Umwandlung eines Dreiecksgitters in ein Vierecksgitter, jedoch liefern diese in der Regel unbefriedigende Ergebnisse. Darüber hinaus ist fast keines der untersuchten Verfahren darauf ausgelegt eine Hierarchie von Gittern zu erzeugen. Die einzige Ausnahme bildet das bereits erwähnte Verfahren von Samareh-Abolhassani und Stewart [45].

Das neue Verfahren wird in Kapitel 5 vorgestellt. Es ist eine Erweiterung des Verfahrens von Samareh-Abolhassani und Stewart. Das Strömungsgebiet wird durch eine Menge von NURBS-Flächen beschrieben. Hierbei werden keine Bedingungen an die Flächen gestellt. Sie dürfen getrimmt sein und Löcher enthalten. Die Flächen werden zu Flächenverbänden zusammengefasst. Die Struktur eines Flächenverbandes muss dabei nicht

der eines regelmäßigem Gitters entsprechen. Zu jedem Verband wird eine globale Parametrisierung mit einem konvexen Parameterbereich erzeugt. Dazu wird dieser zunächst durch eine Triangulierung approximiert. Zu dieser wird eine Parametrisierung erzeugt. Durch Komposition der Parametrisierung der Triangulierung und der Parametrisierung der einzelnen NURBS-Flächen erhält man die globale Parametrisierung des Flächenverbandes. Die Verfeinerung von Randkanten und Randvierecken eines Gitters erfolgt dann im globalen Parameterbereich des entsprechenden Flächenverbandes. Dies ist problemlos möglich, da der Parameterbereich konvex ist. Um eine gute Approximation des Strömungsgebiets zu garantieren ist es nötig, die Ecken des Gitters nicht nur an die Flächen der Geometrie anzupassen, sondern auch an die Kanten der Flächen. In den bisher verwendeten Verfahren zur Randanpassung ist dies nicht möglich. Im neuen Verfahren werden dazu die Kanten der Geometrie zu Kurvenverbänden zusammengefasst und für jeden dieser Verbände eine globale Parametrisierung erzeugt. Liegt eine Hexaederkante auf einem Kurvenverband, dann wird diese im globalen Parameterbereich unterteilt und die neu erzeugte Ecke liegt ebenfalls auf dem Kurvenverband.

In Kapitel 4 wird erläutert wie eine Triangulierung im \mathbb{R}^3 auf eine planare Triangulierung im \mathbb{R}^2 projiziert wird. Dazu wird eine stückweise lineare Projektion konstruiert. Diese ist eindeutig durch die Projektion der Ecken der Triangulierung, den sogenannten Parameterwerten, bestimmt. Zuerst werden die Parameterwerte der Randecken bestimmt. Damit die Projektion garantiert injektiv ist, ist es notwendig, dass diese ein konvexes Polygon bilden. Üblicherweise werden die Randecken mittels des univariaten Federmodells auf den Rand eines Kreises oder Vierecks projiziert. Da diese Methode die Topologie der Triangulierung ignoriert, kann dies zu einer schlechten Parametrisierung führen. Für den speziellen Fall einer Triangulierung, welche einen Flächenverband approximiert, wurde von mir eine neue Form der Randparametrisierung entwickelt. Diese erzeugt garantiert ein konvexes Polygon und bezieht die Topologie des Flächenverbandes mit ein. In einem zweiten Schritt werden die Parameterwerte der inneren Ecken bestimmt. Dies erfolgt mit Hilfe der Mittelwert-Projektion. Diese gehört zu der Klasse der Konvex-Kombinations-Projektion. Unter der Voraussetzung, dass der Rand der Triangulierung auf ein konvexes Polygon projiziert wird, erzeugt die Mittelwert-Projektion garantiert eine injektive Projektion. Des Weiteren besitzt diese die sogenannte Reproduktionseigenschaft. Diese garantiert, dass eine planare Triangulierung durch die Projektion nicht geändert, sondern reproduziert wird. In der Regel werden nicht planare Triangulierungen durch Projektionen mit der Reproduktionseigenschaft wenig verzerrt. Dies führt im Allgemeinen zu guten Parametrisierungen. Zusätzlich werden das bivariate Federmodell und die harmonische Projektion vorgestellt. Beide sind Konvex-Kombinations-Projektionen. Die erste Projektion ist garantiert injektiv, aber besitzt nicht die Reproduktionseigenschaft. Die zweite Projektion besitzt die Reproduktionseigenschaft, ist aber nicht immer injektiv. Zum Abschluss werden in Kapitel 6 zwei numerische Experimente präsentiert. Im ersten Beispiel wird eine Strömung durch ein T-Stück simuliert. Das zweite Beispiel ist ein aus zwei Zylindern bestehendes, schwebendes Kreuz in einem Windtunnel. Mit dem neuen Verfahren wurde eine Hierarchie von vier bzw. fünf Gittern erzeugt. Es ergaben sich Gitter von sehr guter Qualität. Als Qualitätsmaß wurde die skalierte Jacobi-Determinante verwendet. Die hierfür benötigte Zeit betrug in beiden Fällen weniger als eine Minu-

Einleitung

te. Die Strömungssimulationen verliefen stabil und mit sehr guten Konvergenzraten des verwendeten Löses. Die erzielten Resultate stimmen mit den Erwartungen überein.

1 Numerische Simulation von Strömungsvorgängen

1.1 Notation

Im Folgenden werden noch einige grundlegende Definitionen eingeführt. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Die Elemente des \mathbb{R}^n werden als Spaltenvektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

aufgefasst. $\mathbf{0}$ steht für den Nullvektor $(0, \dots, 0)^T$. Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird das kanonische Skalarprodukt des \mathbb{R}^n bezeichnet. $\|\cdot\|_2$ steht für die zugehörige Norm.

Die Ableitung einer differenzierbaren, vektorwertigen Funktion

$$\mathbf{f} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \rightarrow \mathbf{f}(x) \end{cases}$$

wird mit $\dot{\mathbf{f}}$ bzw. $\frac{d}{dx} \mathbf{f}$ bezeichnet.

Die Komponenten einer Abbildung

$$\mathbf{f} : \begin{cases} \mathbb{R}^m & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T & \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

werden mit f_1, \dots, f_n gekennzeichnet. Mit $\mathbf{f}(t-)$ bzw. $\mathbf{f}(t+)$ wird der linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwert von \mathbf{f} in $t \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Ist \mathbf{f} differenzierbar, so stehen die Symbole

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{f}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{f} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f}_{x_1}, \dots, \mathbf{f}_{x_m}$$

für die partiellen Ableitungen von \mathbf{f} bzgl. x_1, \dots, x_m . Der Allquantor wird durch Klammern repräsentiert. Entsprechend bedeutet $(x \in \mathbb{R})$ für alle x aus \mathbb{R} .

1.2 Computational Fluid Dynamics

Um einen Strömungsvorgang durch ein mathematisches Modell zu beschreiben, wird zunächst das Gebiet, welches von dem Fluid durchströmt wird, definiert. Dies kann durch analytische Funktionen, parametrisierte Flächen oder Triangulierungen geschehen. Im

Beispiel eines Autos in einem Windtunnel wäre dieses Gebiet das Differenzvolumen zwischen Auto und Tunnel. Des Weiteren muss der Strömungsvorgang selbst mathematisch modelliert werden.

Das Verhalten von strömenden Fluiden (engl.: **Fluid Dynamics**) wird durch drei Gesetze bestimmt

- das Newtonsche Bewegungsgesetz,
- das Masseerhaltungsgesetz,
- das Energieerhaltungsgesetz.

Diese Gesetze lassen sich in einem System partieller Differentialgleichungen ausdrücken. In ihrer allgemeinsten Form bezeichnet man diese als **kompressible Navier-Stokes-Gleichungen**. Die analytische Lösung dieser Gleichungen ist in hohem Maße komplex und gelingt nur in wenigen Spezialfällen. Stattdessen diskretisiert man die Navier-Stokes-Gleichungen in Raum und Zeit und löst diese numerisch. In diesem Falle spricht man von **Numerischer Simulation von Strömungsvorgängen**. Der englische Begriff hierzu ist **Computational Fluid Dynamics** (kurz **CFD**). Der Vorteil des CFD ist, dass man kostengünstig und schnell eine **qualitative** Untersuchung von Strömungsphänomenen durchführen kann. Eine **quantitative** Bestimmung von Größen, wie z. B. dem Luftwiderstand, ist nur bedingt möglich. Um auch kleine Details des Strömungsgebietes in der Simulation zu erfassen, ist eine sehr feine Diskretisierung dieser Details notwendig. Die Leistungsfähigkeit heutiger Rechner reicht noch nicht aus, die zugehörigen numerischen Probleme in angemessener Zeit zu lösen. Es ist notwendig, neue numerische Verfahren zu entwickeln, um den Berechnungsprozess zu beschleunigen und die Qualität der Ergebnisse zu verbessern.

1.3 FEATFLOW

FEATFLOW [3] ist ein Programmpaket zur numerischen Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in 2D und 3D. FEATFLOW wurde unter der Leitung von Professor Turek entwickelt und wird ständig erweitert.

Um die Navier-Stokes-Gleichungen zu vereinfachen, wird das Energieerhaltungsgesetz in FEATFLOW nicht berücksichtigt. Zusätzlich wird angenommen, dass ein **inkompressibles** Fluid vorliegt, d. h. die Dichte des Fluids ändert sich unter Druckeinfluss nicht, sondern bleibt konstant. Gase bei niedriger Geschwindigkeit und die meisten Flüssigkeiten können als inkompressibel betrachtet werden. Diese Vereinfachungen führen zu den sogenannten **inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen**.

Der Bereich, in dem die Strömung untersucht wird, wird als Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, aufgefasst. Der Beobachtungszeitraum entspricht dem Zeitintervall $[0, T]$, $T \in \mathbb{R}^+$. Die zu bestimmenden Größen sind das Geschwindigkeitsfeld des Fluids

$$\mathbf{u} : \begin{cases} \Omega \times (0, T] & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n, t)^T & \rightarrow \mathbf{u}(x_1, \dots, x_n, t) \end{cases} ,$$

sowie die Druckverteilung

$$p : \begin{cases} \Omega \times (0, T] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n, t)^T & \rightarrow p(x_1, \dots, x_n, t) \end{cases} .$$

p entspricht hierbei dem bezüglich der Dichte ρ normalisierten Druck P , d. h. es gilt $p = \frac{P}{\rho}$. Die Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ bzw. t heißen im Weiteren **Ortskoordinaten** bzw. **Zeitparameter**.

Vorgegeben werden die kinematische Viskosität $\nu \in \mathbb{R}$ sowie ein Kraftfeld $\mathbf{f} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, welches die äußeren Kräfte beschreibt, denen das physikalische System unterliegt, wie z. B. die Erdanziehungskraft oder ein magnetisches Kraftfeld. Zusätzlich werden noch vom jeweiligen Strömungsproblem abhängige Anfangs- und Randbedingungen für \mathbf{u} bzw. p angegeben. Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen haben dann die Form

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{in } \Omega \times (0, T], \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, T], \quad (1.2)$$

und bilden ein gekoppeltes System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Gleichung (1.1) heißt **Impulsgleichung**. Gleichung (1.2) nennt man **Kontinuitätsgleichung**. Der Ausdruck $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ heißt **Konvektionsterm** und hat die Form

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{u}.$$

Den Ausdruck $-\nu \Delta \mathbf{u}$ nennt man **Diffusionsterm**. Im Folgenden wird erläutert, wie dieses System numerisch gelöst wird.

1.4 Numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

Um die Navier-Stokes-Gleichungen numerisch zu lösen, werden diese in der Zeit und im Ort diskretisiert.

1.4.1 Diskretisierung in der Zeit

Das in FEATFLOW favorisierte Zeitdiskretisierungsverfahren ist das sogenannte **Zwischenschritt- θ -Verfahren**, welches hier kurz vorgestellt wird. Eine detaillierte Beschreibung dieses Verfahrens findet sich in [43] und [59].

Gegeben seien ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, und ein Zeitintervall $[0, T]$, $T \in \mathbb{R}^+$, sowie Funktionen $\mathbf{f} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Weiter sei D ein Differentialoperator bezüglich der Ortskoordinaten x_1, \dots, x_n .

Gesucht ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + D \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \text{in } \Omega \times (0, T],$$

1 Numerische Simulation von Strömungsvorgängen

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \text{ für } t = 0,$$

sowie geeigneten Randbedingungen. Hierbei ist D nichtlinear, hängt insbesondere von \mathbf{u} ab.

Dazu wird der Operator D in eine Summe von zwei Differentialoperatoren D_1, D_2 zerlegt. Eine mögliche Zerlegung ist

$$D = D_1 + D_2 = \alpha D + \beta D,$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+, \alpha + \beta = 1$.

Das Zeitintervall $[0, T]$ wird in $N \in \mathbb{N}$ Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N - 1$, zerlegt, mit

$$\begin{aligned} t_i &< t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N - 1, \\ t_0 &= 0, t_N = T. \end{aligned}$$

Für ein $\theta \in (0, 0.5)$ und $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ bezeichne $\mathbf{u}^i, \mathbf{u}^{i+\theta}, \mathbf{u}^{i+1-\theta} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, N$, Funktionen, welche \mathbf{u} zu den Zeitpunkten $t_i, t_i + \theta \Delta t_i, t_i + (1 - \theta) \Delta t_i$ approximieren. Entsprechend steht $\mathbf{f}^i, \mathbf{f}^{i+\theta}, \mathbf{f}^{i+1-\theta}$ für die Funktion \mathbf{f} , ausgewertet in den Zeitpunkten $t_i, t_i + \theta \Delta t_i, t_i + (1 - \theta) \Delta t_i$.

Ist \mathbf{u}^i gegeben, so wird \mathbf{u}^{i+1} bestimmt, indem folgende drei Differentialgleichungen nacheinander gelöst werden

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{i+\theta} - \mathbf{u}^i}{\theta \Delta t_i} + \alpha D \mathbf{u}^{i+\theta} &= \mathbf{f}^i - \beta D \mathbf{u}^i, \\ \frac{\mathbf{u}^{i+1-\theta} - \mathbf{u}^{i+\theta}}{(1 - 2\theta) \Delta t_i} + \beta D \mathbf{u}^{i+1-\theta} &= \mathbf{f}^{i+1-\theta} - \alpha D \mathbf{u}^{i+\theta}, \\ \frac{\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^{i+1-\theta}}{\theta \Delta t_i} + \alpha D \mathbf{u}^{i+1} &= \mathbf{f}^{i+1-\theta} - \beta D \mathbf{u}^{i+1-\theta}. \end{aligned}$$

Fasst man die Zwischenschritte $t_i \rightarrow t_i + \theta \Delta t \dots$ als jeweils eigenständige Zeitschritte $t_i \rightarrow t_{i+1}$ auf, so ist in jedem Zeitschritt ein Problem der folgenden Form zu lösen.

Gegeben seien die Funktion $\mathbf{u}^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und Parameter $\gamma(t_{i+1}), \gamma_1(t_{i+1}), \gamma_2(t_{i+1}), \gamma_3(t_{i+1}) \in \mathbb{R}$. Bestimme die Lösung $\mathbf{u}^{i+1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung

$$(I + \gamma \Delta t_i D) \mathbf{u}^{i+1} = (I - \gamma_1 \Delta t_i D) \mathbf{u}^i + \gamma_2 \Delta t_i \mathbf{f}^i + \gamma_3 \Delta t_i \mathbf{f}^{i+1}.$$

Der zu betrachtende Differentialoperator D in der Navier-Stokes-Gleichung ist $D = N(\mathbf{u}) = -\nu \Delta + \mathbf{u} \cdot \nabla$. Die Zerlegung des Operators erfolgt in FEATFLOW durch

$$\begin{aligned} N(\mathbf{u}) &= \alpha N(\mathbf{u}) + \beta N(\mathbf{u}), \\ \theta &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha = \frac{1 - 2\theta}{1 - \theta} = 2\theta, \beta = 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Es bezeichne $p^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, N\}$, eine Funktion, welche den Druck p zum Zeitpunkt t_i approximiert. Für die zeitdiskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen ist dann zu jedem Zeitschritt $t_i \rightarrow t_{i+1}$ folgendes Problem zu lösen.

Gegeben seien die Funktion $\mathbf{u}^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und Parameter $\gamma(t_{i+1})$, $\gamma_1(t_{i+1})$, $\gamma_2(t_{i+1})$, $\gamma_3(t_{i+1}) \in \mathbb{R}$. Bestimme die Funktionen $\mathbf{u}^{i+1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p^{i+1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, welche folgende Differentialgleichungen lösen

$$\begin{aligned} (I + \gamma \Delta t_i N(\mathbf{u}^{i+1})) \mathbf{u}^{i+1} + \Delta t_i \nabla p^{i+1} = \\ (I - \gamma_1 \Delta t_i N(\mathbf{u}^i)) \mathbf{u}^i + \gamma_2 \Delta t_i \mathbf{f}^i + \gamma_3 \Delta t_i \mathbf{f}^{i+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{i+1} = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Wählt man θ, α, β wie in (1.3), so ist das Zwischenschritt- θ -Verfahren, angewandt auf die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, **stark A-stabil** und hat die **Fehlerordnung 2** (siehe Müller-Urbaniak [39]).

1.4.2 Gitter

In FEATFLOW werden für die Ortsdiskretisierung Vierecksgitter bzw. Hexaedergitter verwendet. Zunächst wird definiert, was unter einem Vierecksgitter zu verstehen ist. Dazu wird die klassische Definition des Vierecks verallgemeinert.

Viereck im \mathbb{R}^2

Es seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ Punkte im \mathbb{R}^2 . Bilden die Strecken $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2], [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3], [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4], [\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1]$ einen konvexen Polygonzug, so wird die vom Polygonzug eingeschlossene Fläche als **Viereck** $Q = \square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4}$ bezeichnet.

Viereck im \mathbb{R}^3

Seien nun $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$. Dann wird im Weiteren ein Viereck $Q = \square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4}$ als bilineare Interpolation der Punkte $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ interpretiert, d. h. es gilt $Q = \mathbf{S}([0,1] \times [0,1])$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : [0,1] \times [0,1] &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{S}(u, v) &= (1 - u)(1 - v)\mathbf{v}_1 + u(1 - v)\mathbf{v}_2 \\ &+ uv\mathbf{v}_3 + (1 - u)v\mathbf{v}_4. \end{aligned}$$

Zu beachten ist bei dieser erweiterten Definition, dass Vierecke im \mathbb{R}^3 nicht planar sein müssen. Stattdessen handelt es sich in der Regel um eine gekrümmte Fläche mit vier linearen Seiten. Abbildung 1.1 zeigt ein Beispiel für ein nicht planares Viereck.

Die Punkte $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ eines Vierecks Q werden auch als **Ecken** bezeichnet. Die vier Seiten eines Vierecks heißen **Kanten**.

Es folgt die Definition eines Vierecksgitters.

Vierecksgitter

Es sei $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, eine Menge von Vierecken im \mathbb{R}^n , $n \in \{2, 3\}$. \mathcal{Q} heißt **Vierecksgitter** oder auch **Vierecksnetz**, wenn für $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$, einer der drei folgenden Fälle erfüllt ist:

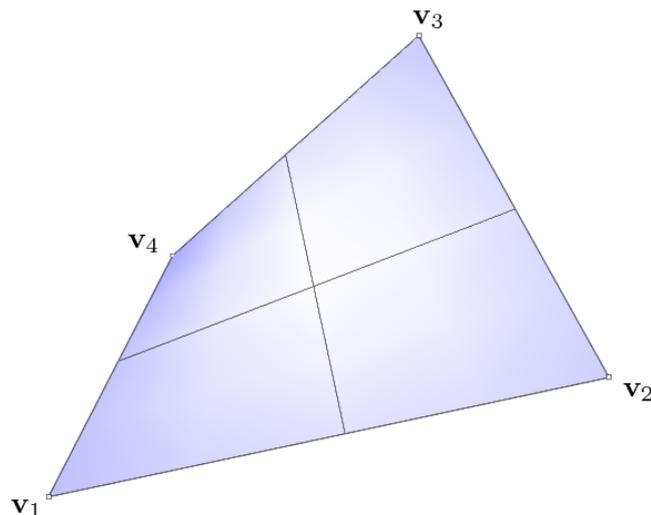


Abbildung 1.1: Ein Viereck im \mathbb{R}^3 mit den zugehörigen Ecken $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$

- $Q_i \cap Q_j = \emptyset$,
- $Q_i \cap Q_j$ ist eine gemeinsame Ecke,
- $Q_i \cap Q_j$ ist eine gemeinsame Kante.

Beispiel 1.1

Durch diese Forderungen sind sogenannte *hängende Ecken* ausgeschlossen. Abbildung 1.2 zeigt ein Beispiel für eine hängende Ecke. Zu sehen ist ein nicht korrektes Vierecksgitter, welches aus drei Vierecken besteht. Die hängende Ecke ist durch einen Kreis gekennzeichnet.

Sind die Ecken Elemente des \mathbb{R}^2 , so heißt \mathcal{Q} **planares Vierecksgitter** und $\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$ mit

$$\mathcal{S}_{\mathcal{Q}} := \bigcup_{i=1}^m Q_i,$$

bezeichnet die **Fläche** von \mathcal{Q} . Liegen die Punkte hingegen im \mathbb{R}^3 , so spricht man von einem **Oberflächengitter** und $\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$ ist eine Fläche im \mathbb{R}^3 . In beiden Fällen wird gefordert, dass $\mathcal{S}_{\mathcal{Q}} \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, zusammenhängend ist.

Des Weiteren bezeichnet $V(\mathcal{Q})$ die Menge der Ecken und $E(\mathcal{Q})$ die Menge der Kanten des Gitters. Zwei Ecken \mathbf{v}, \mathbf{w} sind **benachbart**, wenn $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ eine Kante des Gitters ist. Zwei Vierecke heißen **benachbart**, wenn sie eine gemeinsame Kante haben. Die **Nachbarschaft** einer Ecke $\mathbf{v} \in V(\mathcal{Q})$ ist definiert als

$$N_{\mathbf{v}} := \{\mathbf{w} \in V(\mathcal{Q}) \mid [\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E(\mathcal{Q})\}.$$

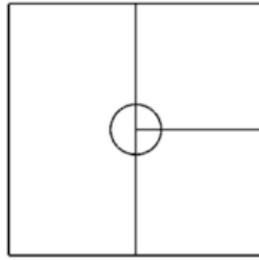


Abbildung 1.2: Ein Vierecksgitter mit einer hängenden Ecke.

Ein Gitter heißt **geschlossen**, wenn jede Kante der Schnitt von genau zwei Vierecken ist. Andernfalls spricht man von einem **offenen** Gitter und man unterscheidet zwischen **inneren Ecken** und **Randecken** bzw. zwischen **inneren Kanten** und **Randkanten**. Eine Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ ist eine innere Kante, wenn sie gleich der Schnittmenge zweier Vierecke ist. Andernfalls ist sie eine Randkante. $E_I(\mathcal{Q})$ bzw. $E_B(\mathcal{Q})$ bezeichnet die Menge aller inneren Kanten bzw. die Menge aller Randkanten. Eine Ecke \mathbf{v} ist eine Randecke, wenn sie gleich dem Schnitt zweier Randkanten ist. Andernfalls ist sie eine innere Ecke. $V_I(\mathcal{Q})$ bzw. $V_B(\mathcal{Q})$ bezeichnet die Menge aller inneren Ecken bzw. die Menge aller Randecken. In gleicher Weise wird nun das Hexaedergitter definiert.

Hexaeder

Es seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_8$ Punkte im \mathbb{R}^3 . Das durch die Vierecke

$$\begin{aligned} &\square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4}, \square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_6 \mathbf{v}_5}, \square_{\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_7 \mathbf{v}_6}, \\ &\square_{\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4 \mathbf{v}_8 \mathbf{v}_7}, \square_{\mathbf{v}_4 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_5 \mathbf{v}_8}, \square_{\mathbf{v}_5 \mathbf{v}_6 \mathbf{v}_7 \mathbf{v}_8} \end{aligned}$$

begrenzte Volumen wird als **Hexaeder**

$$H = \square_{\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_8}$$

bezeichnet. Die Nummerierung der Ecken ist in Abbildung 1.3 veranschaulicht.

Die Punkte eines Hexaeders werden wieder als **Ecken** bezeichnet. Die sechs Vierecke, welche den Hexaeder begrenzen, heißen **Seiten**. Die **Kanten** eines Hexaeders sind die Kanten seiner Begrenzungsvierecke.

Hexaedergitter

Es sei $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, eine Menge von Hexaedern. \mathcal{H} heißt **Hexaedergitter** oder auch **Hexaedernetz**, wenn für $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$, einer der vier folgenden Fälle erfüllt ist:

- $H_i \cap H_j = \emptyset$,
- $H_i \cap H_j$ ist eine gemeinsame Ecke,

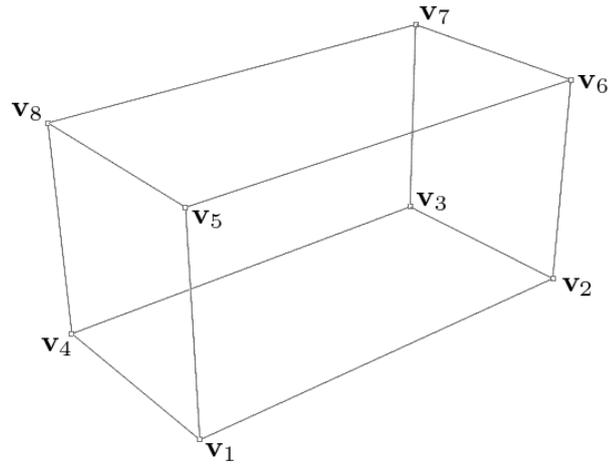


Abbildung 1.3: Ecken $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_8$ eines Hexaeders H .

- $H_i \cap H_j$ ist eine gemeinsame Kante,
- $H_i \cap H_j$ ist eine gemeinsame Seite.

Durch diese Bedingungen sind hängende Ecken und hängende Kanten ausgeschlossen. $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ bezeichnet das Volumen des Hexaedergitters, d. h. es gilt

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}} := \bigcup_{i=1}^m H_i.$$

Zusätzlich wird verlangt, dass $\mathcal{V}_{\mathcal{H}} \subset \mathbb{R}^3$ zusammenhängend ist.

Entsprechend zum Vierecksgitter bezeichnen $V(\mathcal{H})$, $V_I(\mathcal{H})$, $V_B(\mathcal{H})$ die Mengen der Ecken, der inneren Ecken und der Randecken des Hexaedergitters. $E(\mathcal{H})$, $E_I(\mathcal{H})$, $E_B(\mathcal{H})$ sind dann die Symbole für die jeweiligen Kantenmengen. Mit $F(\mathcal{H})$, $F_I(\mathcal{H})$, $F_B(\mathcal{H})$ werden die jeweiligen Mengen der Seiten bezeichnet. Die Menge der Randvierecke $F_B(\mathcal{H})$ bildet selbst wieder ein Oberflächengitter und wird im Weiteren mit $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$ bezeichnet. Der Begriff der **Nachbarschaft** ist analog zum Vierecksgitter zu verstehen. Zusätzlich heißen zwei Hexaeder **benachbart**, wenn sie eine gemeinsame Seite haben.

In vollkommen analoger Weise lassen sich **Dreiecksgitter** $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, definieren. Dreiecksgitter werden auch **Triangulierungen** genannt.

Ein wichtiger Aspekt der Gittererzeugung ist die Platzierung der Randecken des Gitters auf den Rand $\partial\Omega$ des zu diskretisierenden Gebiets Ω , um so eine gute Approximation von Ω zu gewährleisten. Dies führt zu der folgenden Definition.

Definition 1.2

Ein planares Vierecksgitter \mathcal{Q} wird als **zulässig** bezüglich eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bezeichnet, wenn gilt

$$V_B(\mathcal{Q}) \subset \partial\Omega.$$

Für ein Hexaedergitter \mathcal{H} wird dieser Begriff analog definiert.

1.4.3 Diskretisierung im Ort

Die Diskretisierung im Ort erfolgt mit Hilfe der **Finite Elemente Methode (FEM)**. Eine Referenz für dieses Verfahren ist [24]. Es folgt eine kurze Erläuterung der Anwendung der Finite Elemente Methode am Beispiel der **stationären Stokes Gleichungen** im \mathbb{R}^2 . Diese erhält man, wenn man auf die Zeitabhängigkeit und den konvektiven Term $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen verzichtet. Mit den stationären Stokes-Gleichungen lässt sich der Fluss eines sehr langsamen oder sehr viskosen Fluids beschreiben.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Kraftfeld. Gesucht sind Funktionen $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, welche das folgende System partieller Differentialgleichungen lösen

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega.$$

Um die folgenden Erläuterungen zu vereinfachen, wird als Randbedingung

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, p = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

gewählt und der Rand von Ω als konvexer Polygonzug vorausgesetzt.

Es seien nun $L := L^2(\Omega)$ (Lebesgue-Raum) und $H := H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ (Sobolew-Raum). (\cdot, \cdot) bezeichne das Standardskalarprodukt von $L^2(\Omega)$ bzw. $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H, q \in L$ werden folgende Bilinearformen definiert

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla v_i \cdot \nabla w_i \, dx,$$

$$b(q, \mathbf{w}) := - \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{w}) \, dx.$$

Die **schwache Formulierung** des Stokes-Problems lautet dann

Finde Funktionen $\mathbf{u} \in H, p \in L$, für die gilt

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) && (\mathbf{v} \in H), \\ b(q, \mathbf{u}) &= 0 && (q \in L). \end{aligned}$$

Als Approximation des Funktionenpaars (\mathbf{u}, p) wird ein endlichdimensionaler Funktionenraum verwendet. Dazu sei \mathcal{Q} ein zulässiges Vierecksgitter bezüglich Ω und $Q \in \mathcal{Q}$

ein beliebiges Viereck dieses Gitters. Als Finite Elemente Paar wird in FEATFLOW das **Rannacher-Turek Element** [44] \tilde{Q}_1/Q_0 verwendet. Hierbei handelt es sich um Viereckselemente. Die Geschwindigkeit \mathbf{u} wird auf Q durch eine rotiert bilineare Funktion approximiert. Die Freiheitsgrade sind entweder die Mittelwerte der Geschwindigkeit über den Kanten von Q oder der Wert der Geschwindigkeit in den Mittelpunkten der Kanten von Q . Je nach Wahl der Freiheitsgrade erhält man die endlichdimensionalen Funktionenräume \tilde{H}^a bzw. \tilde{H}^b . Im Weiteren sei \tilde{H} einer dieser beiden Räume. Der Druck p wird auf Q durch eine Konstante approximiert. Als Freiheitsgrad wird der Mittelwert des Drucks über das gesamte Viereck Q verwendet. Hierdurch ergibt sich der endlichdimensionale Funktionenraum \tilde{L} stückweise konstanter Elemente auf Q .

Im dreidimensionalen Fall werden entsprechende Hexaederelemente verwendet (siehe [56]). Eine Konvergenzanalyse des Elemente-Paars \tilde{Q}_1/Q_0 ist in [44] zu finden. Numerische Ergebnisse wurden in [47] vorgestellt. Äußerst effiziente und robuste Mehrgitterverfahren sind für dieses Finite-Elemente-Paar entwickelt worden (siehe [46] und Abschnitt 1.4.5).

Es gilt $\tilde{L} \subset L$, jedoch gilt auch $\tilde{H} \not\subset H$. \tilde{Q}_1 ist also ein **nichtkonformes** Element. Dies führt dazu, dass stückweise definierte Bilinearformen \tilde{a}, \tilde{b} verwendet werden müssen. Es ist also

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) &:= \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \sum_{i=1}^2 \int_Q \nabla \tilde{v}_i \cdot \nabla \tilde{w}_i \, dx, & (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}} \in \tilde{H}) \\ \tilde{b}(\tilde{q}, \tilde{\mathbf{w}}) &:= - \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \int_Q \tilde{q} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}) \, dx, & (\tilde{q} \in \tilde{L}, \tilde{\mathbf{w}} \in \tilde{H}). \end{aligned}$$

Die diskretisierte Version der schwachen Formulierung des Stokes-Problems lautet nun:

Finde Funktionen $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{H}$, $\tilde{p} \in \tilde{L}$, für die gilt

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{b}(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}}) &= (\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{v}}) \quad (\tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{H}), \\ \tilde{b}(\tilde{q}, \tilde{\mathbf{u}}) &= 0 \quad (\tilde{q} \in \tilde{L}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Es seien nun $\{\phi_1, \dots, \phi_{n_1}\}$, $n_1 \in \mathbb{N}$, bzw. $\{\psi_1, \dots, \psi_{n_2}\}$, $n_2 \in \mathbb{N}$, Basen der Funktionenräume \tilde{H} bzw. \tilde{L} . Die gesuchte Lösung $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}$ hat dann die Form

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n_1} y_i \phi_i, \quad \tilde{p} = \sum_{j=1}^{n_2} z_j \psi_j,$$

mit den Koeffizientenvektoren $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n_1})^T \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n_2})^T \in \mathbb{R}^{n_2}$. Weiter werden folgende Matrizen A, B und der Vektor \mathbf{c} definiert

$$A = (\tilde{a}(\phi_i, \phi_j))_{i,j=1}^{n_1}, \quad B = (\tilde{b}(\psi_i, \phi_j))_{i,j=1}^{n_1, n_2}, \quad \mathbf{c} = ((\mathbf{f}, \phi_j))_{j=1}^{n_1}.$$

Dann entspricht das diskretisierte Problem (1.5) dem Gleichungssystem

$$A\mathbf{y} + B\mathbf{z} = \mathbf{c},$$

welches mit bekannten numerischen Verfahren gelöst werden kann. Die Matrix A heißt **Steifigkeitsmatrix**. Die Matrix B nennt man **Gradientenmatrix** und $-B^T$ ist die **Divergenzmatrix**.

1.4.4 Das in Zeit und Ort diskretisierte Problem

Es seien nun \tilde{H}, \tilde{L} entsprechende Finite-Elemente-Räume für die zeitdiskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen (1.4). Die Funktionen $\mathbf{u}^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, p^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, N\}$, werden nun als Elemente von \tilde{H}, \tilde{L} aufgefasst, d. h. diese haben die Form

$$\mathbf{u}^i = \sum_{k=1}^{n_1} y_k^i \phi_k, p^i = \sum_{k=1}^{n_2} z_k^i \psi_k,$$

mit Basen $\{\phi_1, \dots, \phi_{n_1}\}$ von \tilde{H} bzw. $\{\psi_1, \dots, \psi_{n_2}\}$ \tilde{L} . Dann kann für jeden Zeitschritt $t_i \rightarrow t_{i+1}$ das Problem (1.4) folgendermaßen formuliert werden:

Gegeben seien Vektoren $\mathbf{y}^i, \mathbf{g}^i \in \mathbb{R}^{n_1}$. Bestimme Vektoren $\mathbf{y}^{i+1} \in \mathbb{R}^{n_1}, \mathbf{z}^{i+1} \in \mathbb{R}^{n_2}$, welche das folgende nichtlineare Gleichungssystem lösen

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}^{i+1})\mathbf{y}^{i+1} + \Delta t B \mathbf{z}^{i+1} &= \mathbf{g}^i, \\ B^T \mathbf{y}^{i+1} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Der Vektor \mathbf{g}^i ergibt sich aus der rechten Seite des Problems (1.4). Die Matrix $S(\mathbf{y}^{i+1})$ hat die Gestalt

$$S(\mathbf{y}^{i+1}) = (M + \gamma \Delta t (\nu A + C(\mathbf{y}^{i+1}))).$$

Die Matrizen $A, B, -B^T$ sind, wie im vorherigen Abschnitt, die Steifigkeitsmatrix, die Gradientenmatrix und die Divergenzmatrix. M ist die sogenannte **Massematrix** und es gilt

$$M = ((\phi_i, \phi_j))_{i,j=1}^{n_1}.$$

Die Matrix $C(\mathbf{y}^{i+1})$ ergibt sich aus dem konvektivem Term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. Durch

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H),$$

wird eine Trilinearform definiert. Der konvektive Term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ wird in der schwachen Form von (1.4) in

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (\mathbf{v} \in H),$$

überführt. Es sei \tilde{c} die diskretisierte Version der Trilinearform c bezüglich \tilde{H} . Dann ist die Matrix $C(\mathbf{y}^{i+1})$ definiert durch

$$C(\mathbf{y}^{i+1}) = \left(\sum_{k=1}^{n_1} y_k^{i+1} \tilde{c}(\phi_k, \phi_l, \phi_m) \right)_{l,m=1}^{n_1}.$$

Diese Form der Diskretisierung kann zu numerischer Instabilität führen, da die Matrix $S(\mathbf{y}^{i+1})$ weder symmetrisch ist noch **M-Matrix**-Eigenschaften besitzt. Durch **Upwind**-Verfahren oder **Streamline-Diffusion**-Techniken wird der konvektive Term stabilisiert. Bei beiden Methoden wird c durch eine andere Trilinearform ersetzt, um so eine *gutartige* Systemmatrix zu erhalten. Detaillierte Erläuterungen zu diesen Methoden finden sich in [56].

Es handelt sich bei (1.6) um ein gekoppeltes, nichtlineares Gleichungssystem. In FEATFLOW existieren zwei unterschiedliche Ansätze dieses System zu lösen.

1. Zunächst wird das System durch Extrapolation in der Zeit linearisiert oder es wird eine äußere nichtlineare Fixpunkt-Iteration ausgeführt. Dies führt zu einem linearen, gekoppelten Gleichungssystem, den sogenannten Oseen-Gleichungen. Diese Gleichungen können nun durch einen gekoppelten oder einen nicht gekoppelten Ansatz gelöst werden.
2. Das gekoppelte System wird mit Hilfe des sogenannten Schur-Komplements entkoppelt. Man erhält ein lineares Gleichungssystem für den Druck sowie nichtlineare Gleichungssysteme für die Geschwindigkeit. Die Gleichungssysteme für die Geschwindigkeit werden entweder linearisiert oder durch ein nichtlineares Iterationsverfahren gelöst.

Der erste Ansatz wird in den FEATFLOW-Lösern CC bzw. CP verwendet. CC löst die Oseen-Gleichungen mit einem gekoppelten Verfahren. CP benutzt eine nicht gekoppelte Methode. Der zweite Ansatz wird im Löser PP verwendet. Eine genauere Beschreibung und Analyse der Löser ist in [3] und [56] zu finden. Auf den Löser PP3D wird in Kapitel 6 genauer eingegangen.

1.4.5 Mehrgitterverfahren

Auftretende lineare Gleichungssysteme werden in allen FEATFLOW-Lösern mit Hilfe von **Mehrgitterverfahren** gelöst. Diese haben sich als sehr effiziente iterative Löser für Diskretisierungen elliptischer Differentialgleichungen erwiesen. Die Grundidee der Mehrgitter-Verfahren, kurz **MG-Verfahren**, wird im Folgenden an einer 1-dimensionalen Differentialgleichung erläutert, welche mit Hilfe eines Differenzenverfahrens diskretisiert wird. Alle im Weiteren erwähnten Eigenschaften der MG-Verfahren gelten im Wesentlichen auch für mehrdimensionale Fälle. Die entsprechenden Untersuchungen und Beweise sowie eine ausführliche Beschreibung der MG-Verfahren finden sich in [27].

1.4.5.1 Das Modellproblem

Gegeben seien das Intervall $\Omega = (0,1)$ und eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Lösung $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ der Dirichletschen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2}u &= f, \text{ in } \Omega, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Dieses Problem wird näherungsweise mit Hilfe eines Differenzenverfahren gelöst. Dazu wird zum Intervall Ω das Gitter

$$\Omega_l = \{x_i^l = ih_l | i = 1, \dots, n_l\},$$

$$h_l = \frac{1}{n_l + 1}, \quad n_l = 2^{l+1}, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

konstruiert. Hierbei werden x_i^l , $i = 1, \dots, n_l$, als **Gitterpunkte**, h_l als **Gitterweite** und l als **Stufe** des Gitters Ω_l bezeichnet. Bis auf Weiteres wird auf den Stufen-Index l verzichtet. In jedem Gitterpunkt x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, wird die zweite Ableitung durch die Differenz

$$\frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))$$

approximiert. Setzt man $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$, $u(x_0) = 0$, $u(x_{n+1}) = 0$, so führt dieser Ansatz auf das lineare Gleichungssystem

$$\frac{1}{h^2}(-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1})) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

In der Matrix-Vektor-Schreibweise hat es die Form

$$K\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

$$K = K_l = (k_{ij})_{i,j=1}^n, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_l = (u(x_i))_{i=1}^n, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_l = (f(x_i))_{i=1}^n. \quad (1.8)$$

Hierbei ist die Matrix K eine Tridiagonalmatrix. Die Einträge in der Hauptdiagonalen sind $\frac{2}{h^2}$, die Einträge in beiden Nebendiagonalen sind $-\frac{1}{h^2}$.

1.4.5.2 Konvergenzverhalten des gedämpften Jacobi-Verfahrens

Da die Matrix K des Gleichungssystems (1.8) tridiagonal ist, ist dieses leicht direkt zu lösen. Bei komplexeren Differentialgleichungen haben die Matrizen der zugehörigen Differenzgleichungen nicht solch eine einfache Gestalt. Hinzu kommt, dass im mehrdimensionalen Fall oft lineare Gleichungssystem mit mehreren Millionen Unbekannten zu lösen sind. Ein direktes Lösungsverfahren ist in solchen Fällen zu kostspielig. Stattdessen werden iterative Verfahren verwendet.

Es folgt nun eine Konvergenzanalyse des gedämpften Jacobi-Verfahrens bezüglich des linearen Gleichungssystems (1.8). Zunächst werden einige Definitionen und Eigenschaften von linearen Iterationsverfahren wiederholt. Eine Referenz hierfür ist [53].

Ein lineares Iterationsverfahren zur Lösung eines regulären $(n \times n)$ -Gleichungssystems $K\mathbf{u} = \mathbf{f}$ ist darstellbar in der Form

$$\mathbf{u}^0 \in \mathbb{R}^n, \quad M, N \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$\mathbf{u}^{j+1} = M\mathbf{u}^j + N\mathbf{f}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (1.9)$$

Die Matrix M wird als **Iterationsmatrix** bezeichnet. Die Matrizen M und N müssen so gewählt sein, dass

$$K\mathbf{u} = \mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{u} = M\mathbf{u} + N\mathbf{f}$$

gilt. Ausschlaggebend für die Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens ist der Spektralradius der Iterationsmatrix $\rho(M)$. Das Verfahren (1.9) konvergiert genau dann gegen die Lösung \mathbf{u} des Gleichungssystems $K\mathbf{u} = \mathbf{f}$, wenn $\rho(M) < 1$ gilt. Insbesondere gilt für den **Fehler**

$$\mathbf{z}^j = \mathbf{u}^j - \mathbf{u}$$

für jede beliebige Vektornorm $\|\cdot\|$ die Gleichung

$$\sup_{\mathbf{z}^0 \neq \mathbf{0}} \limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\frac{\|\mathbf{z}^j\|}{\|\mathbf{z}^0\|}} = \rho(M).$$

Somit konvergiert die Folge der Fehlernormen $(\|\mathbf{z}^j\|)_{j \in \mathbb{N}_0}$ so schnell gegen Null wie die geometrische Folge $(\rho(M)^j)_{j \in \mathbb{N}_0}$. Aufgrund dieser Eigenschaft heißt $\rho(M)$ auch **Konvergenzrate**.

Das gedämpfte Jacobi-Verfahren [53] zur Lösung eines linearen $(n \times n)$ -Gleichungssystems $K\mathbf{u} = \mathbf{f}$ hat die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^0 &\in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{u}^{j+1} &= (I - \omega D^{-1}K)\mathbf{u}^j + \omega D^{-1}\mathbf{f}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Hierbei ist I die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix, $D = \text{diag}(K)$ die Diagonalmatrix von K und $\omega \in (0,1)$ ein vorgegebener Dämpfungsfaktor. $\omega = 1$ ergibt das klassische Jacobi-Verfahren. Wendet man das gedämpfte Jacobi-Verfahren auf das Gleichungssystem (1.8) an, so hat die Iterationsmatrix $M = M(\omega) = (I - \omega D^{-1}K)$ die Eigenwerte

$$\mu_i = \mu_i(\omega) = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

und die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\boldsymbol{\psi}_i = \left(\sqrt{2h} \sin(i\pi x_j) \right)_{j=1}^n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Eigenvektoren werden in die **niederfrequenten** Vektoren $\boldsymbol{\psi}_i$, $1 \leq i < \frac{1}{2h}$, und die **hochfrequenten** Vektoren $\boldsymbol{\psi}_i$, $\frac{1}{2h} \leq i \leq n$, unterteilt.

Für $\omega = 1$ ergibt sich nun

$$\rho(M(1)) = \mu_1(1) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}h\right) = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 h^2 + \mathcal{O}(h^4).$$

Somit ist das klassische Jacobi-Verfahren konvergent, aber es konvergiert sehr langsam. Jede weitere Wahl von ω führt auf eine noch schlechtere Konvergenzrate. Für $\omega = \frac{1}{2}$ z. B. hat die Iterationsvorschrift zur Berechnung der Iterierten \mathbf{u}^{j+1} die Form

$$\mathbf{u}^{j+1} = \left(I - \frac{1}{2}D^{-1}K\right)\mathbf{u}^j + \frac{1}{2}D^{-1}\mathbf{f} \tag{1.11}$$

und die zugehörige Konvergenzrate ist

$$\rho\left(M\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \mu_1\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}h\right) = 1 - \frac{1}{4}\pi^2 h^2 + \mathcal{O}(h^4).$$

Schränkt man jedoch für $\omega = \frac{1}{2}$ das Iterationsverfahren (1.10) auf den durch die hochfrequenten Eigenvektoren $\boldsymbol{\psi}_i$, $\frac{1}{2h} \leq i \leq n$, aufgespannten Unterraum ein, so gilt mit $\frac{1}{2} \leq x_i < 1$ für die zugehörigen Eigenwerte

$$\mu_i(\omega) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2h} \leq i \leq n.$$

In diesem Falle ergibt sich eine Konvergenzrate von maximal $\frac{1}{2}$, was einer äußerst schnellen Konvergenz entspricht.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das gedämpfte Jacobi-Verfahren für $\omega = \frac{1}{2}$ die niederfrequenten Fehleranteile langsam reduziert. Die hochfrequenten Fehleranteile werden jedoch sehr schnell verkleinert. Bereits nach wenigen Iterationsschritten $j \in \mathbb{N}$ dominieren die niederfrequenten Fehleranteile und der Fehler \mathbf{z}^j ist somit *glatter* als der Fehler \mathbf{z}^0 . Ein Iterationsverfahren mit solchen Eigenschaften wird als **Glätter** bezeichnet.

Im Weiteren wird das gedämpfte Jacobi-Verfahren mit $\omega = \frac{1}{2}$ als Glätter verwendet. Eine Iteration des Verfahrens wird hierbei durch

$$\mathbf{u}_l^{j+1} = \mathcal{J}_l(\mathbf{u}_l^j, \mathbf{f}_l)$$

beschrieben. Der Ausdruck

$$\mathbf{u}_l^{j+\nu} = \mathcal{J}_l^\nu(\mathbf{u}_l^j, \mathbf{f}_l)$$

entspricht ν Iterationen.

1.4.5.3 Das Grobgitter-Korrektur-Verfahren

Es sei \mathbf{u}_l die exakte Lösung und $\mathbf{u}_l^{\text{alt}}$ eine Näherungslösung zum Gleichungssystem (1.8) bezüglich des Gitters Ω_l der Stufe l . Weiter sei $\bar{\mathbf{u}}_l$ eine Näherungslösung dieses Gleichungssystems, welche man durch wenige Anwendungen von \mathcal{J}_l auf $\mathbf{u}_l^{\text{alt}}$ erhält. Der Fehler $\mathbf{z}_l = \bar{\mathbf{u}}_l - \mathbf{u}_l$ ist bezüglich der hochfrequenten Anteile bereits klein. Es wird nun das **Grobgitter-Korrektur-Verfahren** beschrieben, mit dem auch der niederfrequenten Fehleranteil verkleinert werden kann. Wäre der Fehler \mathbf{z}_l bekannt, so ließe sich durch die **exakte Fehlerkorrektur** $\bar{\mathbf{u}}_l - \mathbf{z}_l = \mathbf{u}_l$ die exakte Lösung \mathbf{u}_l berechnen. Der **Defekt**

$$\mathbf{d}_l = K_l \bar{\mathbf{u}}_l - \mathbf{f}_l$$

erfüllt $K_l \mathbf{z}_l = K_l \bar{\mathbf{u}}_l - K_l \mathbf{u}_l = K_l \bar{\mathbf{u}}_l - \mathbf{f}_l = \mathbf{d}_l$. Durch Lösung des Gleichungssystems

$$K_l \mathbf{z}_l = \mathbf{d}_l, \tag{1.12}$$

wäre somit der Fehler \mathbf{z}_l bestimmt. Dieses Gleichungssystem hat aber die gleiche Komplexität wie das Gleichungssystem $K_l \mathbf{u} = \mathbf{f}_l$. Jedoch ist der Fehler \mathbf{z}_l *glatt* und lässt sich auf dem Gitter Ω_{l-1} mit der Gitterweite $2h_l$ gut approximieren. Es werden zwei lineare Abbildungen eingeführt, welche den Fehler und den Defekt zwischen den Gittern Ω_{l-1} und Ω_l **transferieren**. Die Definition dieser Abbildungen hängt vom gegebenen Problem

ab und muss *vernünftig* gewählt werden. Hackbusch empfiehlt hierbei die **Prolongation** des Fehlers

$$\mathbf{p} : \begin{cases} \mathbb{R}^{n_{l-1}} & \rightarrow \mathbb{R}^{n_l}, \\ \mathbf{z}_{l-1} & \rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{z}_{l-1}) = \mathbf{z}_l, \end{cases} \quad , \quad \mathbf{z}_{l-1} = (z_{l-1}^i)_{i=1}^{n_{l-1}}, \mathbf{z}_l = (z_l^i)_{i=1}^{n_l},$$

$$z_l^i = \begin{cases} z_{l-1}^{i/2} & \text{für } i \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2} (z_{l-1}^{(i-1)/2} + z_{l-1}^{(i+1)/2}) & \text{für } i \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und die **Restriktion** des Defekts

$$\mathbf{r} : \begin{cases} \mathbb{R}^{n_l} & \rightarrow \mathbb{R}^{n_{l-1}}, \\ \mathbf{d}_l & \rightarrow \mathbf{r}(\mathbf{d}_l) = \mathbf{z}_{l-1}, \end{cases} \quad , \quad \mathbf{d}_l = (d_l^i)_{i=1}^{n_l}, \mathbf{d}_{l-1} = (d_{l-1}^i)_{i=1}^{n_{l-1}},$$

$$d_{l-1}^i = \frac{1}{4} (d_l^{2i-1} + 2d_l^{2i} + d_l^{2i+1}).$$

Die Abbildungen \mathbf{p} und \mathbf{r} lassen sich durch einfache, dünn besetzte Matrizen P und R beschreiben (siehe [27]). Nach Berechnung von $\bar{\mathbf{u}}_l$ und \mathbf{d}_l mit wenigen Schritten des Jacobi-Verfahrens zur Stufe l wird das Gleichungssystem

$$K_{l-1} \mathbf{z}_{l-1} = \mathbf{r}(\mathbf{d}_l), \tag{1.13}$$

zur Stufe $l - 1$ gelöst. Die Prolongation der zugehörigen Lösung \mathbf{z}_{l-1} wird dann als Näherung für \mathbf{z}_l verwendet. Durch

$$\mathbf{u}_l^{\text{neu}} = \bar{\mathbf{u}}_l - PK_{l-1}^{-1}R(K_l \bar{\mathbf{u}}_l - \mathbf{f}_l) \tag{1.14}$$

erhält man schließlich die **Grobitter-Korrektur** von \mathbf{u}_l .

1.4.5.4 Das Zwei-Gitter-Verfahren

Die Kombination des gedämpften Jacobi-Verfahrens (1.11) als Glätter mit der Grobitterkorrektur (1.14) liefert das **Zwei-Gitter-Verfahren**, welches ebenfalls ein lineares Iterationsverfahren ist. Der Algorithmus 1.1 beschreibt eine Iteration $\mathbf{u}_l^j \rightarrow \mathbf{u}_l^{j+1}$ des Zwei-Gitter-Verfahrens zur Lösung des linearen Gleichungssystems $K_l \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l$.

Zwei-Gitter-Iteration $\mathbf{u}_l^j \rightarrow \mathbf{u}_l^{j+1}$	
$\bar{\mathbf{u}}_l \leftarrow \mathcal{J}^\nu(\mathbf{u}_l^j, \mathbf{f}_l)$	(ν Glättungsschritte)
$\mathbf{d}_l \leftarrow K_l \bar{\mathbf{u}}_l - \mathbf{f}_l$	(Berechnung des Defekts)
$\mathbf{d}_{l-1} \leftarrow \mathbf{r}(\mathbf{d}_l)$	(Restriktion des Defekts)
$\mathbf{z}_{l-1} \leftarrow K_{l-1}^{-1} \mathbf{d}_{l-1}$	(Berechnung des Fehlers auf Stufe $l - 1$)
$\mathbf{u}_l^{j+1} \leftarrow \bar{\mathbf{u}}_l - P(\mathbf{z}_{l-1})$	(Grobitterkorrektur)

Algorithmus 1.1: Eine Iteration des Zwei-Gitter-Verfahrens.

Die Zwei-Gitter-Iteration ist selbst darstellbar in der Form $\mathbf{u}_l^{j+1} = M_l \mathbf{u}_l^j + N_l \mathbf{f}_l$. Die Iterationsmatrix M_l ist abhängig von der Anzahl der Glättungsschritte $\nu \geq 1$ und hat die Form

$$M_l = M_l(\nu) = (I - PK_{l-1}^{-1}RK_l)J_l^\nu.$$

ν	1	2	3	4	5	10
ρ_ν	0.5	0.25	0.125	0.0832	0.0671	0.0350

Tabelle 1.1: Obere Schranken ρ_ν der Konvergenzrate des Zwei-Gitter-Verfahrens in Abhängigkeit von der Anzahl der Glättungsschritte ν

Hierbei bezeichnet J_l nun die Iterationsmatrix des Jacobi-Glätters zur Stufe l . Für die Konvergenzrate des Zwei-Gitter-Verfahrens gilt die Abschätzung

$$\rho(M_l) \leq \max\{x(1-x)^\nu + (1-x)x^\nu \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\} =: \rho_\nu < 1.$$

Wie der Tabelle 1.1 zu entnehmen ist, ergibt sich bereits für wenige Glättungsschritte ν eine sehr gute Konvergenzrate. Darüber hinaus ist die obere Schranke ρ_ν der Konvergenzrate unabhängig von der Gitterstufe l . Somit lässt sich eine vorgegebene Genauigkeit ϵ in $j = \mathcal{O}(\log \frac{1}{\epsilon})$ Iterationen erreichen, wobei j unabhängig von der Gitterweite h_l ist. Für klassische Iterationsverfahren gilt diese Aussage nicht. So gilt z. B. für das Jacobi-Verfahren $\rho(M_l) = 1 - \mathcal{O}(h_l^2)$.

1.4.5.5 Das Mehrgitterverfahren

Im vorigen Abschnitt zeigte sich, dass das Zwei-Gitter-Verfahren ein sehr schnelles Iterationsverfahren ist. Jedoch ist zu beachten, dass in jeder Iteration die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$K_{l-1}\mathbf{z}_{l-1} = \mathbf{d}_{l-1} \tag{1.15}$$

zu berechnen ist. Dies ist mit hohem Rechenaufwand verbunden. Da die Prolongation $\mathbf{p}(\mathbf{z}_{l-1})$ lediglich als Approximation von \mathbf{z}_l verwendet wird, reicht es aus \mathbf{z}_{l-1} mittels eines Iterationsverfahrens näherungsweise zu berechnen. Das Gleichungssystem (1.15) hat die gleiche Struktur wie das System (1.8). Somit kann auch hier das Zwei-Gitter-Verfahren als iterativer Löser verwendet werden. Statt der Gitter auf den Stufen $l, l-1$ werden nun die Gitter auf den Stufen $l-1, l-2$ verwendet. Jede Iteration zur Lösung von (1.15) benötigt die Lösung eines Gleichungssystems der Form

$$K_{l-2}\mathbf{z}_{l-2} = \mathbf{d}_{l-2}.$$

Auch hier kann wieder das Zwei-Gitter-Verfahren verwendet werden. Dieser rekursive Prozess wird fortgeführt, bis die Stufe 0 erreicht wird. Die zugehörigen Gleichungssysteme sind *klein* und können direkt oder durch ein alternatives Iterationsverfahren gelöst werden. Im vorgestellten Modellproblem ist auf Stufe 0 jeweils eine Gleichung mit einer Unbekannten zu lösen. Da bei dieser Vorgehensweise mehr als zwei Gitter benutzt werden, spricht man von einem Mehrgitterverfahren. Algorithmus 1.2 beschreibt eine Iteration des Mehrgitterverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems (1.8).

```

procedure MG( $l, \mathbf{u}, \mathbf{f}$ )
if  $l = 0$  then
   $\mathbf{u} \leftarrow K_0^{-1}\mathbf{f}$ 
else
   $\mathbf{u} \leftarrow \mathcal{J}^\nu(\mathbf{u}, \mathbf{f})$ 
   $\mathbf{d} \leftarrow K_l\mathbf{u} - \mathbf{f}$ 
   $\mathbf{d} \leftarrow R\mathbf{d}$ 
   $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{0}$ 
  for  $i = 1$  to  $\gamma$  do
    MG( $l - 1, \mathbf{z}, \mathbf{d}$ )
  end for
   $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} - P\mathbf{z}$ 
end if

```

Algorithmus 1.2: Ein Iterationsschritt des Mehrgitterverfahrens.

Im Schritt $\mathbf{u}_l^j \rightarrow \mathbf{u}_l^{j+1}$ erhält die Prozedur als Übergabeparameter die Stufe l , die Iterierte $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l^j$ sowie die rechte Seite $\mathbf{f} = \mathbf{f}_l$ des Systems (1.8). Nach Ausführung der Prozedur enthält \mathbf{u} die nächste Iterierte \mathbf{u}_l^{j+1} . Eine Iteration des Mehrgitterverfahrens wird auch als **Zyklus** bezeichnet. Weitere vorzugebende Parameter sind die Anzahl der Glättungsschritte ν sowie die Anzahl der rekursiven Aufrufe γ . Üblicherweise wird $1 \leq \nu \leq 4$ sowie $\gamma = 1$ (V-Zyklus) bzw. $\gamma = 2$ (W-Zyklus) gewählt. Das Konvergenzverhalten des Mehrgitterverfahrens entspricht im Wesentlichen dem des Zwei-Gitter-Verfahrens. Die oberen Schranken der Konvergenzraten sind unabhängig von den Gitterweiten h_l, \dots, h_0 und der Anzahl der Stufen $l + 1$. Eine genaue Konvergenzanalyse ist in [27] zu finden. Zu dem hier vorgestellten Mehrgitterverfahren existieren zahlreiche Variationen. Außer dem gedämpften Jacobi-Verfahren werden auch andere Iterationsverfahren, wie z. B. das Gauss-Seidel-Verfahren oder das CG-Verfahren, als Glätter verwendet. Auf die Grobgitterkorrektur kann noch eine weitere Glättung folgen. Man unterscheidet dann in Vor- und Nachglättung.

1.5 Gittererzeugung in Featflow

Nach erfolgter Zeit- und Ortsdiskretisierung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (1.1) und (1.2) erhält man das gekoppelte, nicht lineare Gleichungssystem (1.6). Die in Abschnitt 1.4.4 erläuterten Lösungsstrategien führen zu sehr großen linearen Gleichungssystemen. Diese werden in FEATFLOW mit Hilfe von Mehrgitterverfahren gelöst. Diese Verfahren folgen dem im vorigen Abschnitt erläuterten Prinzip. Statt eines Differenzenverfahrens wird hier die Finite Elemente Methode zur Ortsdiskretisierung verwendet. Da in FEATFLOW das Rannacher-Turek-Element für die FE-Methode verwendet wird, wird das Strömungsgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, durch eine endliche Folge von Vierecksgittern $\mathcal{Q}^0, \dots, \mathcal{Q}^N$ bzw. Hexaedergittern $\mathcal{H}^0, \dots, \mathcal{H}^N$ approximiert. Zunächst wird das Gitter \mathcal{Q}^0 bzw. \mathcal{H}^0 manuell mit Hilfe geeigneter Software wie DeVISO [40] oder ANSYS ICEM CFD [1] konstruiert. Dieses Gitter wird auch als **Grobgitter** bezeichnet.

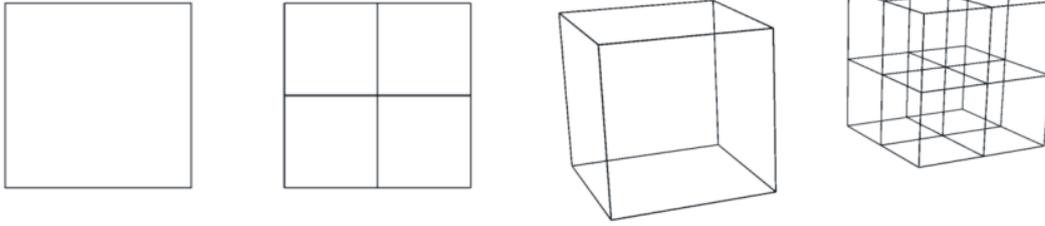


Abbildung 1.4: Uniforme Unterteilung eines Vierecks und eines Hexaeders.

net. Zu einem gegebenen Vierecksgitter \mathcal{Q}^i , $i \in \{0, \dots, N-1\}$, erhält man dann das nächste, feinere Gitter \mathcal{Q}^{i+1} , indem alle Vierecke des Gitters \mathcal{Q}^i gleichmäßig in vier Teilvierecke unterteilt werden. Analog erhält man das nächste feinere Hexaedergitter \mathcal{H}^{i+1} , indem jedes Hexaeder des Gitters \mathcal{H}^i gleichmäßig in acht Teilhexaeder unterteilt wird. In Abbildung 1.4 wird diese Unterteilung veranschaulicht. Im Weiteren wird eine Folge von Vierecksgittern bzw. Hexaedergittern, welche durch solch einen Unterteilungsprozess entstanden ist, als **hierarchisch** bezeichnet.

1.5.1 Randanpassung

Damit eine gute Approximation von Ω gewährleistet ist, muss sichergestellt werden, dass die Randpunkte aller Gitter \mathcal{Q}^i bzw. \mathcal{H}^i auf $\partial\Omega$ liegen. D. h. alle Gitter sollen zulässig bezüglich des Gebietes Ω sein (siehe Definition 1.2). Es wird davon ausgegangen, dass dies beim Grobgitter $\mathcal{Q}^0, \mathcal{H}^0$ bereits der Fall ist. Es sei nun $\mathcal{Q}^i, \mathcal{H}^i$, $i \in \{0, \dots, N-1\}$, ein zulässiges Gitter. Nach erfolgter Unterteilung liegen die neu entstanden Randpunkte $V_B(\mathcal{Q}^{i+1}) \setminus V_B(\mathcal{Q}^i)$, $V_B(\mathcal{H}^{i+1}) \setminus V_B(\mathcal{H}^i)$ des Gitters in der Regel nicht auf $\partial\Omega$. Durch geeignete Verfahren muss also eine **Randanpassung** durchgeführt werden. Es gibt verschiedene Methoden den Rand des Gebietes zu beschreiben: Explizite oder implizite Funktionen, parametrisierte Kurven und Flächen, Triangulierungen. Nun sind zwei Fragen zu klären.

1. Welche Methode wird zur Beschreibung des Randes $\partial\Omega$ verwendet?
2. Wie erfolgt die Randanpassung?

Im zweidimensionalen Fall ist diese Problematik in FEATFLOW bereits geklärt.

1.5.2 Randanpassung in 2D

Der Rand $\partial\Omega$ eines planaren Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wird in FEATFLOW mit Hilfe von parametrisierten Kurven beschrieben. Bei diesen Kurven handelt es sich um Strecken, Kreissegmente in Polarkoordinatenform oder kubische Spline-Kurven. Die Konstruktion des Randes sowie des Grobgitters \mathcal{Q}^0 erfolgt mit Hilfe des Programms DeVISO. Die Unterteilung von Randkanten geschieht dann innerhalb des Parameterraums der Kurven. So liegt jeder neue Randpunkt automatisch auf dem Rand $\partial\Omega$.

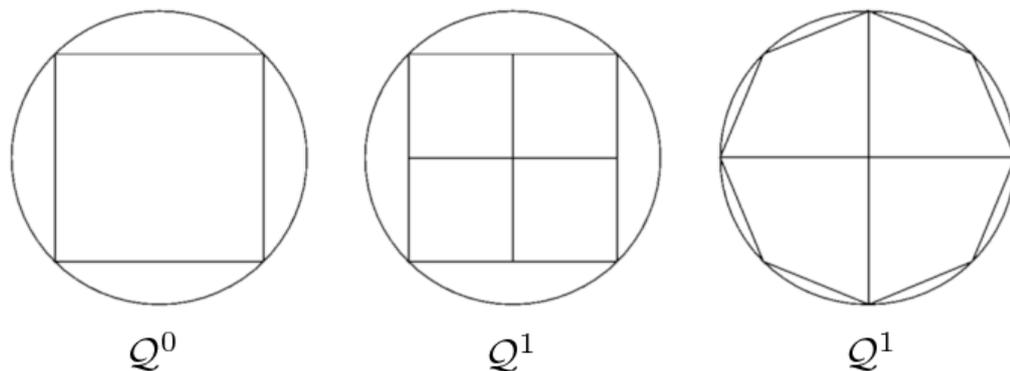


Abbildung 1.5: Verfeinerung eines Grogitters \mathcal{Q}^0 zum Gitter \mathcal{Q}^1 ohne und mit Randanpassung.

Beispiel 1.3

Als planares Gebiet Ω wird eine Kreisscheibe gewählt. In Abbildung 1.5 ist im linken Bild der Rand $\partial\Omega$ sowie ein approximierendes Grogitter \mathcal{Q}^0 zu sehen, welches nur aus einem Viereck besteht. Durch gleichmäßige Unterteilung erhält man das Gitter \mathcal{Q}^1 . Im mittleren Bild sieht man das Gitter \mathcal{Q}^1 ohne Randanpassung, im rechten Bild mit Randanpassung.

1.5.3 Analytische Beschreibung und orthogonale Projektion

Im dreidimensionalen Fall existieren in FEATFLOW bislang drei Methoden der Beschreibung von Ω und entsprechende Verfahren zur Randanpassung. Bei der ersten Methode wird das Gebiet Ω in einer FORTRAN-Prozedur analytisch beschrieben. Nach erfolgter Unterteilung des aktuellen Hexaedergitters \mathcal{H}^i werden die neuen Randpunkte orthogonal auf den Rand $\partial\Omega$ projiziert. Auch die Projektion muss hierbei manuell implementiert werden. Bereits bei einem einfachen Beispiel, wie mehreren Zylindern in einem Strömungskanal, ist dies mit großem Aufwand verbunden.

Beispiel 1.4

Als Gebiet Ω wird ein Zylinder gewählt. In Abbildung 1.6 sind dieser Zylinder und ein zugehöriges Grogitter \mathcal{H}^0 zu sehen. Durch gleichmäßige Unterteilung von \mathcal{H}^0 und anschließende orthogonale Projektion erhält man das Gitter \mathcal{H}^1 .

1.5.4 Sweeping

Diese Methode wird auch als $2\frac{1}{2}$ D-Gittererzeugung bezeichnet. Hierbei wird ein planares Vierecksgitter \mathcal{Q} entlang einer Kurve parallel verschoben. In regelmäßigen Abständen werden Kopien des planaren Gitters erzeugt und anschließend entsprechend miteinander verbunden. Als Resultat erhält man ein Hexaedergitter \mathcal{H} . Entsprechend kann man eine

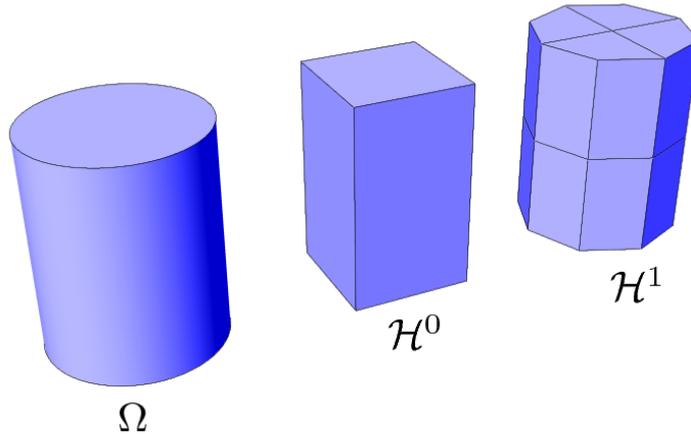


Abbildung 1.6: Verfeinerung eines Grobgitters \mathcal{H}^0 zum Gitter \mathcal{H}^1 mit Randanpassung.

Hierarchie von Vierecksgittern verwenden, um so eine Hierarchie von Hexaedergittern zu konstruieren. Sweeping ist bei FEATFLOW nur entlang der Z -Achse möglich. Insgesamt können mit dieser Technik bereits komplexere Gebiete und Gitter erzeugt werden, aber allgemeine 3D-Gitter sind so nicht realisierbar.

Beispiel 1.5

Um die Hexaedergitter $\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^1$ aus Abbildung 1.6 zu erhalten, kann man die Vierecksgitter $\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1$ aus Abbildung 1.5 verwenden und kopiert diese einmal bzw. zweimal entlang der Z -Achse. Dies ist in Abbildung 1.7 veranschaulicht.

1.5.5 Triangulierung und iterierte Projektion

Dominik Göddeke implementierte in seiner Diplomarbeit [22] ein Verfahren, bei dem die Oberfläche des Gebietes Ω durch eine Triangulierung \mathcal{T} approximiert wird. Hierbei beschränkte er sich auf den Fall von umströmten Objekten in einem Strömungskanal. Die Randanpassung eines Hexaedergitters \mathcal{H}^i erfolgt durch mehrfache Projektion der Randpunkte auf diese Triangulierung. Als Projektionsverfahren werden die orthogonale Projektion sowie die sogenannte Umbrellaprojektion verwendet. Mit diesem Verfahren ist es möglich, eine hierarchische Folge von Hexaedergittern für komplexe Geometrien zu erzeugen. Das komplexeste untersuchte Beispiel ist ein vereinfachtes Modell eines Autos (siehe Abbildung 1.8). Jedoch ist die Approximationsgüte eines Hexaedergitters \mathcal{H}^i maximal so gut wie die der Triangulierung \mathcal{T} . Die Randpunkte des Gitters \mathcal{H}^i liegen auf der Triangulierung \mathcal{T} , aber in der Regel nicht exakt auf dem Rand $\partial\Omega$.

1.5.6 Triangulierung, Gitterdeformation und Projektion

Eine ganz andere Form der Randanpassung ist die *Fictitious Boundary Methode*. Diese wurde von Turek, Wan und Rivkind [55] in FEATFLOW eingeführt. Hierbei werden

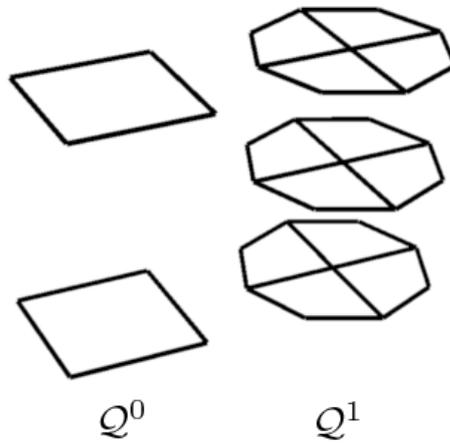


Abbildung 1.7: Die Gitter Q^0, Q^1 werden entlang der Z-Achse kopiert.

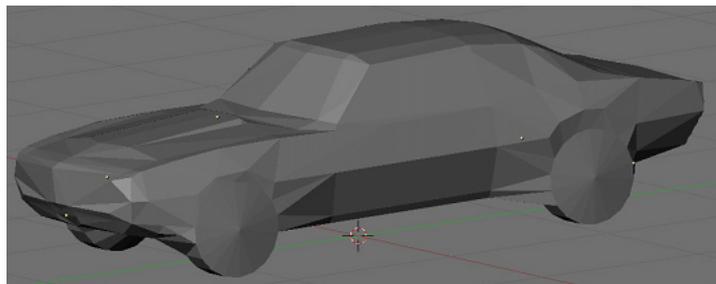


Abbildung 1.8: Geometrische Beschreibung eines Autos durch eine Triangulierung. Quelle: Göttsche [22]

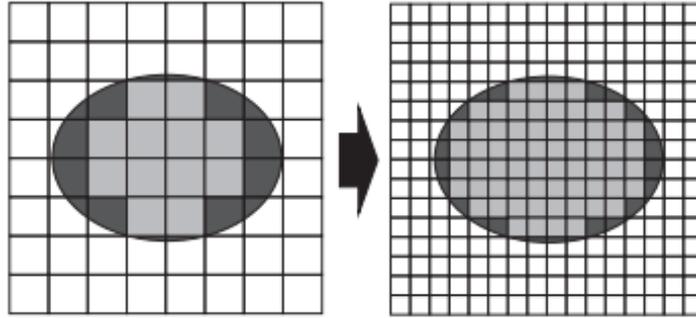


Abbildung 1.9: Definition eines Gitters mittels der Fictitious Boundary Methode. Die Approximation der Ellipse (dunkelgrau) entspricht dem Rand des Gitters, welches entsteht, wenn man die inneren Vierecke (hellgrau) entfernt. Quelle: Miemczyk [38]

Löcher des gegebenen Gebiets Ω ebenfalls diskretisiert. Gitterelemente innerhalb der Löcher werden verworfen. In Abbildung 1.9 ist das Gebiet Ω der Bereich zwischen dem Quadrat und der Ellipse. Dieses wird durch eine Hierarchie von zwei Vierecksgittern $\mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1$ diskretisiert. Der innere Bereich der Ellipse ist kein Teil des Gebietes Ω , wird aber ebenfalls diskretisiert. Die Approximation der Ellipse (dunkelgrau) entspricht dem Rand des Gitters, welches entsteht, wenn man die inneren Vierecke (hellgrau) entfernt. Hierbei kann nicht garantiert werden, dass die Randecken der Gitter auf dem Rand von Ω liegen. Dies führt zu einer entsprechend schlechten Approximation der Ellipse.

Um eine genauere Approximation des Randes $\partial\Omega$ zu erhalten, wurde von Grajewski [25] eine Methode der Gitterdeformation für den 2D-Fall eingeführt. Hierbei wird der Flächeninhalt der Vierecke des gegebenen Gitters durch eine *Monitorfunktion* gesteuert. Diese ist abhängig von der Entfernung der Ecken zum Rand des Gebiets. Je geringer der Abstand eines Vierecks zum Rand des Gebiets ist, desto kleiner soll der Flächeninhalt des Vierecks sein. Dies führt dazu, dass die Ecken des Gitters zum Rand des Gebiets verschoben werden. Dadurch erhält man eine bessere Approximation des Randes des Gebiets Ω und eine dichtere Diskretisierung im Bereich von $\partial\Omega$. Auch in diesem Fall ist nicht garantiert, dass Randecken des Gitters auf dem Rand des Gebiets liegen. Abbildung 1.10 zeigt ein Beispiel, in dem das Gebiet dem Bereich zwischen einem Quadrat und einem Kreis entspricht. Zu sehen ist das Gitter, welches mittels Fictitious Boundary Methode in Kombination mit der Deformationsmethode erzeugt wurde.

Miemczyk [38] setzte diese beiden Verfahren für den 3D-Fall um. Das Gebiet wird dabei durch eine Triangulierung beschrieben. Er erweiterte diesen Ansatz um ein Projektionsverfahren für die Randecken des erzeugten Gitters. Liegt eine Randecke in einem *Loch* des Gebiets und existiert genau eine Nachbarecke innerhalb des Gebiets, so wird die Randecke in Richtung der Nachbarecke auf die Triangulierung projiziert. Bei mehr als einer Nachbarecke werden die Richtungen gemittelt. Verschlechtert sich dabei die Qualität eines angrenzenden Hexaeders deutlich, so wird die Projektion rückgängig ge-

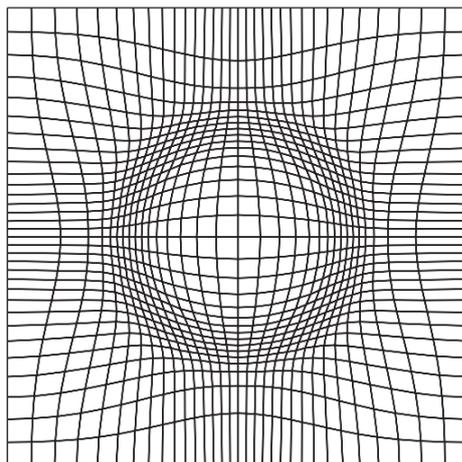


Abbildung 1.10: Definition eines Gitters mittels der Fictitious Boundary Methode mit anschließender Deformation. Quelle: Grajewski [25]

macht. Miemczyk untersuchte verschiedene Strömungssimulationen in einem Windkanal mit teilweise sehr komplexen Geometrien, wie z. B. einem VW Golf. Die Ergebnisse sind vielversprechend. Ein noch zu lösendes Problem sind künstliche Gräben, welche durch die Deformation des Gitters und anschließende Projektion der Randecken entstehen. Abbildung 1.11 zeigt dies am Beispiel eines Quaders. Das Strömungsgebiet verläuft um den Quader. Das obere Bild zeigt ein Gitter nach der Deformation. Das untere Bild veranschaulicht die anschließende Projektion der Randecken auf den Quader.

1.5.7 Parametrisierte Flächen

Das Ziel dieser Arbeit ist es, FEATFLOW so zu erweitern, dass Strömungssimulationen für **allgemeine** Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ durchgeführt werden können. Zur Beschreibung des Randes $\partial\Omega$ werden Parametrisierungen verwendet. Diese sind eine universale Methode zur Beschreibung von Flächen im \mathbb{R}^3 . Der Vorteil von parametrisierten Flächen ist, dass mit ihnen praxisbezogene Geometrien **exakt** beschrieben werden können. Die Unterteilung der Randkanten wird im Parameterbereich der Flächen erfolgen. Dadurch ist gewährleistet, dass die Randpunkte der Gitter \mathcal{H}^i , $i = 0, \dots, N$, **immer** auf dem Rand $\partial\Omega$ des Gebietes Ω liegen.

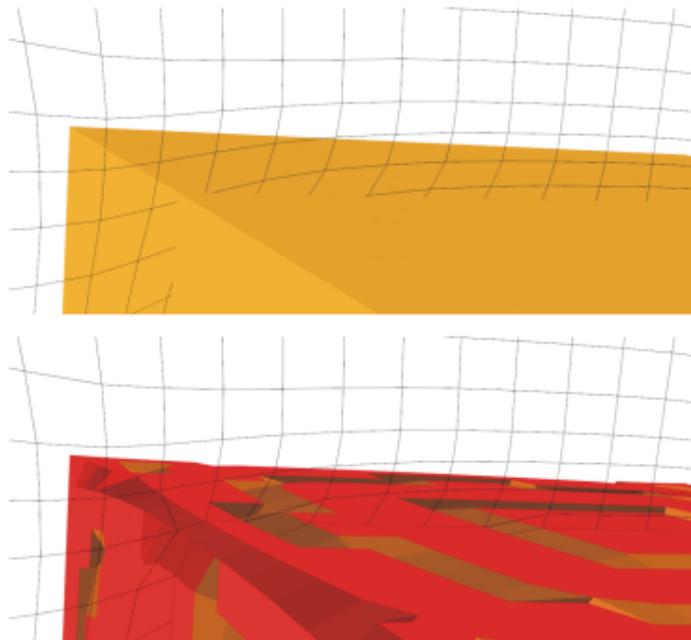


Abbildung 1.11: Das obere Bild zeigt einen Quader und ein deformiertes Gitter. Das untere Bild zeigt das Resultat der Projektion der Randecken des Gitters auf den Quader.

2 Darstellung von Kurven und Flächen

2.1 Grundbegriffe aus der Differentialgeometrie

Innerhalb von CAD-Systemen werden Kurven und Flächen größtenteils mit Hilfe von Parametrisierungen beschrieben. Es folgen dazu Grundbegriffe aus der Differentialgeometrie.

Definition 2.1

Eine Menge von Punkten $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, heißt **parametrisierte Kurve**, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit nicht leerem Inneren und eine stetige Abbildung

$$\mathbf{C} : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ t & \rightarrow \mathbf{C}(t) = (C_1(t), \dots, C_d(t))^T \end{cases}$$

gibt, so dass $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$ gilt.

Das Paar (I, \mathbf{C}) heißt **Parametrisierung** oder **Parameterdarstellung** von \mathcal{C} . Das Intervall $I = [a, b]$ nennt man **Parameterraum** oder **Parameterbereich** der Parametrisierung $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$. Gilt $\mathbf{C}(a) = \mathbf{C}(b)$, so heißt \mathcal{C} **geschlossen**, andernfalls **offen**. Durch die Parametrisierung (I, \mathbf{C}) erhält die Kurve \mathcal{C} eine **Orientierung**, indem die Punkte von \mathcal{C} im Sinne wachsender Werte des Parameters t durchlaufen werden. Ist die Abbildung \mathbf{C} stetig differenzierbar und gilt

$$\dot{\mathbf{C}}(t) \neq \mathbf{0}, \quad (t \in I),$$

so heißt die Parameterdarstellung (I, \mathbf{C}) **regulär**. Existiert zu \mathcal{C} eine Parametrisierung (I, \mathbf{C}) , die im Inneren von I injektiv ist, so heißt \mathcal{C} **selbstschnittfrei**. Existiert eine Parametrisierung, welche auf ganz I injektiv ist, so ist \mathcal{C} selbstschnittfrei und offen.

Definition 2.2

Eine Menge von Punkten $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **parametrisierte Oberfläche**, wenn es ein abgeschlossenes Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit nicht leerem Inneren und eine stetige Abbildung

$$\mathbf{S} : \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v)^T & \rightarrow \mathbf{S}(u, v) = (S_1(u, v), S_2(u, v), S_3(u, v))^T \end{cases}$$

gibt, so dass $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ gilt.

Das Paar (D, \mathbf{S}) heißt dann **Parametrisierung** oder **Parameterdarstellung** von \mathcal{S} . Das abgeschlossene Gebiet D wird als **Parameterraum** oder **Parameterbereich**

der Parametrisierung $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ bezeichnet. Ist die Abbildung \mathbf{S} stetig differenzierbar und gilt für das Vektorprodukt der partiellen Ableitungen $\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v$ von \mathbf{S}

$$\mathbf{S}_u(u, v) \times \mathbf{S}_v(u, v) \neq \mathbf{0}, \quad ((u, v) \in D),$$

so heißt die Parameterdarstellung (D, \mathbf{S}) **regulär**. Existiert zu \mathcal{S} eine injektive Parametrisierung, so heißt \mathcal{S} **selbstschnittfrei**.

Definition 2.3

Es sei $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ eine parametrisierte Oberfläche und $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$ eine parametrisierte Kurve im \mathbb{R}^3 . \mathcal{C} wird als **Flächenkurve** bezüglich \mathcal{S} bezeichnet, wenn es eine Kurve $\underline{\mathcal{C}} = \underline{\mathbf{C}}(I) \subset D$ gibt, so dass

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{S}(\underline{\mathbf{C}}(t)), \quad (t \in I).$$

gilt.

Die Flächenkurve \mathcal{C} ist also eine Teilmenge der Fläche \mathcal{S} . Die Kurve $\underline{\mathcal{C}} = \underline{\mathbf{C}}(I)$ heißt **Parameterraumkurve der Flächenkurve $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$ bezüglich der Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$** . Für eine Flächenkurve $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$ wird die zugehörige Parameterraumkurve nun stets mit $\underline{\mathcal{C}} = \underline{\mathbf{C}}(I)$ bezeichnet. Es seien $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Wählt man als Parameterraumkurve

$$\underline{\mathbf{C}}(t) = (t, v_0)^T, \quad (t \in I),$$

bzw.

$$\underline{\mathbf{C}}(t) = (u_0, t)^T, \quad (t \in I),$$

so nennt man die zugehörige Flächenkurve **Koordinatenkurve**.

Im restlichen Verlauf dieses Abschnitts seien alle Parametrisierungen von Kurven, Parameterraumkurven und Flächen regulär.

Abstände und Winkel auf einer parametrisierten Fläche können mit Hilfe der sogenannten 1. Fundamentalform berechnet werden.

Es sei (D, \mathbf{S}) eine Parametrisierung zur Fläche $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$. Weiter seien $(u_0, v_0)^T \in D, \mathbf{p} = \mathbf{S}(u_0, v_0)$. Der von $\mathbf{S}_u(u_0, v_0), \mathbf{S}_v(u_0, v_0)$ aufgespannte Raum $T_{\mathbf{p}}(\mathcal{S})$ heißt **Tangentenraum von \mathcal{S} in \mathbf{p}** . Durch Einschränkung des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ des \mathbb{R}^3 auf $T_{\mathbf{p}}(\mathcal{S}) \times T_{\mathbf{p}}(\mathcal{S})$ erhält man ein Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}(\mathcal{S}) \times T_{\mathbf{p}}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Definition 2.4

Die zum Skalarprodukt in (2.1) zugehörige quadratische Form

$$I_{\mathbf{p}} : \begin{cases} T_{\mathbf{p}}(\mathcal{S}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{w} & \rightarrow \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{p}} \end{cases}$$

heißt **1. Fundamentalform von \mathcal{S} in \mathbf{p}** .

2 Darstellung von Kurven und Flächen

Im Weiteren wird darauf verzichtet, die Abhängigkeit der partiellen Ableitungen $\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v$ von u_0, v_0 anzugeben, solange dies aus dem Zusammenhang hervorgeht. Die explizite Darstellung von $I_{\mathbf{p}}$ bezüglich der Basis $\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v$ von $T_{\mathbf{p}}(\mathcal{S})$ erhält man wie folgt. Es sei $\mathbf{w} = w_1\mathbf{S}_u + w_2\mathbf{S}_v \in T_{\mathbf{p}}(\mathcal{S})$, dann gilt

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle w_1\mathbf{S}_u + w_2\mathbf{S}_v, w_1\mathbf{S}_u + w_2\mathbf{S}_v \rangle \\ &= \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_u \rangle w_1^2 + 2\langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v \rangle w_1 w_2 + \langle \mathbf{S}_v, \mathbf{S}_v \rangle w_2^2 \\ &= g_{11}w_1^2 + 2g_{12}w_1 w_2 + g_{22}w_2^2 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{11}(u_0, v_0) = \langle \mathbf{S}_u(u_0, v_0), \mathbf{S}_u(u_0, v_0) \rangle, \\ g_{12} &= g_{12}(u_0, v_0) = \langle \mathbf{S}_u(u_0, v_0), \mathbf{S}_v(u_0, v_0) \rangle, \\ g_{22} &= g_{22}(u_0, v_0) = \langle \mathbf{S}_v(u_0, v_0), \mathbf{S}_v(u_0, v_0) \rangle. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Setzt man nun

$$G_{\mathbf{p}} := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix},$$

so lässt sich $I_{\mathbf{p}}$ auch darstellen als

$$I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, G_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Es sei nun $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$ eine Flächenkurve bezüglich der Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ mit der zugehörigen Parameterraumkurve $\underline{\mathcal{C}} = \underline{\mathbf{C}}(I)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{S}(\underline{\mathbf{C}}(t)) \\ &= \mathbf{S}_u(\underline{\mathbf{C}}(t)) \dot{\underline{\mathcal{C}}}_1(t) + \mathbf{S}_v(\underline{\mathbf{C}}(t)) \dot{\underline{\mathcal{C}}}_2(t), \end{aligned}$$

und insbesondere erhält man

$$I_{\mathbf{C}(t)}(\dot{\mathbf{C}}(t)) = \left\langle \dot{\underline{\mathcal{C}}}(t), G_{\mathbf{C}(t)} \dot{\underline{\mathcal{C}}}(t) \right\rangle.$$

Die 1. Fundamentalform beschreibt die Metrik der Oberfläche \mathcal{S} , d. h. Längen und Winkel auf \mathcal{S} können mit Hilfe von $I_{\mathbf{S}(u,v)}$ berechnet werden. Die folgenden Aussagen wurden in [16] bewiesen.

Länge einer Flächenkurve

Es sei $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$ eine Flächenkurve bezüglich der Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$. Die Bogenlänge der Flächenkurve \mathcal{C} zwischen den Punkten $\mathbf{C}(t_0), \mathbf{C}(t_1)$ mit $t_0, t_1 \in I$ ist dann

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \dot{\mathbf{C}}(t) \right\|_2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left\langle \dot{\underline{\mathcal{C}}}(t), G_{\mathbf{C}(t)} \dot{\underline{\mathcal{C}}}(t) \right\rangle} dt.$$

Schnittwinkel zweier Flächenkurven

Es seien $\mathcal{C}_1 = \mathbf{C}_1(I_1)$, $\mathcal{C}_2 = \mathbf{C}_2(I_2)$ zwei Flächenkurven bezüglich der Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$. Es seien weiterhin $\underline{\mathcal{C}}_1 = \underline{\mathbf{C}}_1(I_1)$, $\underline{\mathcal{C}}_2 = \underline{\mathbf{C}}_2(I_2)$ die entsprechenden Parameterraumkurven, welche sich im Punkt $\underline{\mathbf{C}}_1(s_0) = \underline{\mathbf{C}}_2(t_0) \in D$, $s_0 \in I_1, t_0 \in I_2$, schneiden. Entsprechend schneiden sich die Flächenkurven $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ im Punkt $\mathbf{p} := \mathbf{C}_1(s_0) = \mathbf{S}(\underline{\mathbf{C}}_1(s_0)) = \mathbf{C}_2(t_0) = \mathbf{S}(\underline{\mathbf{C}}_2(t_0))$. Für den Schnittwinkel α der Flächenkurven gilt dann

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle \dot{\mathbf{C}}_1(s_0), \dot{\mathbf{C}}_2(t_0) \rangle}{\left\| \dot{\mathbf{C}}_1(s_0) \right\|_2 \left\| \dot{\mathbf{C}}_2(t_0) \right\|_2} \\ &= \frac{\langle \underline{\dot{\mathbf{C}}}_1(s_0), G_{\mathbf{p}} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_2(t_0) \rangle}{\sqrt{\langle \underline{\dot{\mathbf{C}}}_1(s_0), G_{\mathbf{p}} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_1(s_0) \rangle} \sqrt{\langle \underline{\dot{\mathbf{C}}}_2(t_0), G_{\mathbf{p}} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_2(t_0) \rangle}}. \end{aligned}$$

Handelt es sich bei den Flächenkurven um zwei sich schneidende Koordinatenkurven zu unterschiedlichen Koordinatenrichtungen, so vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\cos \alpha = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}.$$

Isometrie

Gilt für eine Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$

$$G_{\mathbf{S}(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ((u,v)^T \in D),$$

so erhält man für die Bogenlänge einer Flächenkurve $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \dot{\mathbf{C}}(t) \right\|_2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \underline{\dot{\mathbf{C}}}(t) \right\|_2 dt$$

und für den Schnittwinkel α zweier Flächenkurven $\mathcal{C}_1 = \mathbf{C}_1(I_1)$, $\mathcal{C}_2 = \mathbf{C}_2(I_2)$ gilt dann

$$\cos \alpha = \frac{\langle \dot{\mathbf{C}}_1(s_0), \dot{\mathbf{C}}_2(t_0) \rangle}{\left\| \dot{\mathbf{C}}_1(s_0) \right\|_2 \left\| \dot{\mathbf{C}}_2(t_0) \right\|_2} = \frac{\langle \underline{\dot{\mathbf{C}}}_1(s_0), \underline{\dot{\mathbf{C}}}_2(t_0) \rangle}{\left\| \underline{\dot{\mathbf{C}}}_1(s_0) \right\|_2 \left\| \underline{\dot{\mathbf{C}}}_2(t_0) \right\|_2}.$$

In diesem Fall stimmen also Längen- und Winkelrechnung im Parameterraum D und auf der Oberfläche \mathcal{S} überein. Man sagt dann, die Fläche \mathcal{S} ist **isometrisch** zum Parameterbereich D . Die Parametrisierung (D, \mathbf{S}) wird dann als **Isometrie** bezeichnet.

Je mehr die Matrix $G_{\mathbf{S}(u,v)}$ für alle $(u,v)^T \in D$ von der Einheitsmatrix abweicht, desto stärker werden metrische Eigenschaften, wie Länge und Winkel, von der Abbildung \mathbf{S} verzerrt.

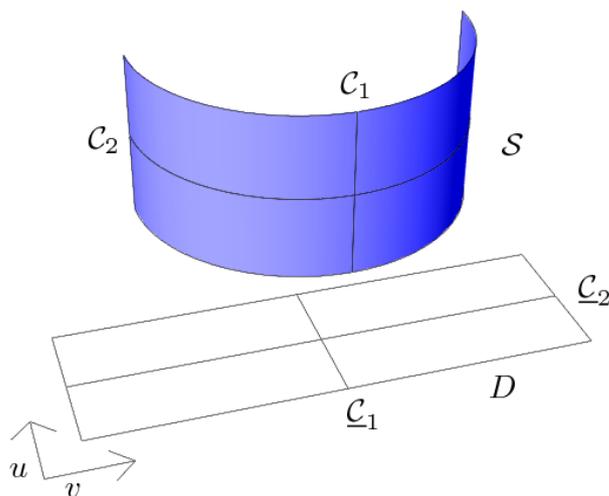


Abbildung 2.1: Isometrische Parametrisierung eines Halbzylinders.

Beispiel 2.5 Halbzylinder

Ein Beispiel für eine Isometrie ist die Parametrisierung (D, \mathbf{S}) des Mantels eines Halbzylinders mit Radius und Höhe 1:

$$D = \{(u, v)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \pi \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1\},$$

$$\mathbf{S}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)^T, (u, v)^T \in D.$$

Abbildung 2.1 zeigt zwei Koordinatenkurven $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ auf der Fläche \mathcal{S} des Halbzylinders, sowie die zugehörigen Parameterraumkurven $\underline{\mathcal{C}}_1, \underline{\mathcal{C}}_2$ im Parameterraum D . Die Parameterraumkurven und die Flächenkurven schneiden sich jeweils in einem Winkel von 90° . Die Bogenlänge der Parameterraumkurven stimmt mit der Bogenlänge der Flächenkurven überein.

Beispiel 2.6 Parallelogramm

Die Parametrisierung

$$D = \{(u, v)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u, v \leq 1\},$$

$$\mathbf{S}(u, v) = (u + v, v, 0)^T, (u, v)^T \in D,$$

des Parallelogramms \mathcal{S} in Abbildung 2.2 ist keine Isometrie, denn es gilt

$$G_{\mathbf{S}(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, ((u, v)^T \in D).$$

Die Flächenkurven $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ schneiden sich in einem Winkel von 45° , obwohl sich die zugehörigen Parameterraumkurven $\underline{\mathcal{C}}_1, \underline{\mathcal{C}}_2$ in einem Winkel von 90° schneiden. Die Bogenlänge von $\underline{\mathcal{C}}_1$ und \mathcal{C}_1 ist 1. Die Bogenlänge von $\underline{\mathcal{C}}_2$ bzw. \mathcal{C}_2 ist 1 bzw. $\sqrt{2}$.

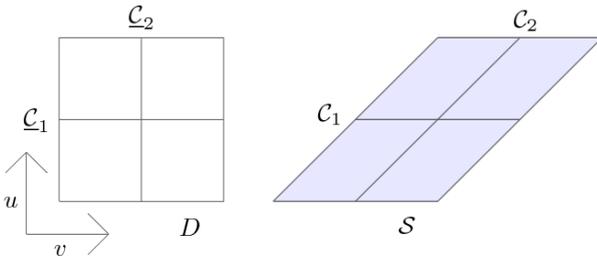


Abbildung 2.2: Nicht isometrische Parametrisierung eines Parallelogramms.

2.2 Triangulierungen

Eine sehr einfache Form zur Beschreibung von Oberflächen sind Triangulierungen. Diese sind in der Computerspieleindustrie weit verbreitet. Für das in den Kapiteln 4 und 5 beschriebene Verfahren zur Erzeugung von Gittern auf Oberflächen spielen Triangulierungen eine zentrale Rolle. Es folgen einige grundlegende Definitionen für Triangulierungen.

Dreieck

Es seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, drei beliebige, nicht kollineare Punkte. Die konvexe Hülle von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ heißt **Dreieck** und wird mit $T = \Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3$ bezeichnet. Die Punkte $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ nennt man auch **Ecken**. Als **Kante** $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ bezeichnet man die Verbindungsstrecken zweier Ecken \mathbf{v}, \mathbf{w} von T .

Triangulierung

Es sei $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, eine Menge von Dreiecken im \mathbb{R}^n , $n \in \{2, 3\}$. \mathcal{T} heißt **Triangulierung** oder auch **Dreiecksgitter**, wenn für $i \neq j, i, j \in \{1, \dots, m\}$, einer der drei folgenden Fälle gilt:

- $T_i \cap T_j = \emptyset$,
- $T_i \cap T_j$ ist eine gemeinsame Ecke,
- $T_i \cap T_j$ ist eine gemeinsame Kante.

Sind die Ecken Elemente des \mathbb{R}^2 , so heißt \mathcal{T} **planare Triangulierung** und $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ mit

$$\mathcal{S}_{\mathcal{T}} = \bigcup_{i=1}^m T_i,$$

bezeichnet die **Fläche** von \mathcal{T} . Liegen die Punkte hingegen im \mathbb{R}^3 , so spricht man von einer **Oberflächentriangulierung** und $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ ist eine Fläche im \mathbb{R}^3 . In beiden Fällen wird gefordert, dass $\mathcal{S}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist.

Des Weiteren bezeichnet $V(\mathcal{T})$ die Menge der Ecken und $E(\mathcal{T})$ die Menge der Kanten der Triangulierung. Zwei Ecken \mathbf{v}, \mathbf{w} sind **benachbart**, wenn $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ eine Kante der Triangulierung ist. Zwei Dreiecke heißen **benachbart**, wenn sie eine gemeinsame Kante haben. Die **Nachbarschaft** einer Ecke $\mathbf{v} \in V(\mathcal{T})$ ist definiert als

$$N_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{w} \in V(\mathcal{T}) \mid [\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E(\mathcal{T})\}.$$

Eine Triangulierung heißt **geschlossen**, wenn jede Kante der Schnitt von genau zwei Dreiecken ist. Andernfalls spricht man von einer **offenen** Triangulierung und man unterscheidet zwischen **inneren Kanten** und **Randkanten**, bzw. zwischen **inneren Ecken** und **Randecken**. Eine Kante $[v, w]$ ist eine innere Kante, wenn sie Schnittmenge zweier Dreiecke ist. Andernfalls ist sie eine Randkante. $E_I(\mathcal{T})$ bzw. $E_B(\mathcal{T})$ bezeichnet die Menge aller inneren Kanten bzw. die Menge aller Randkanten. Eine Ecke v ist eine Randecke, wenn sie gleich dem Schnitt zweier Randkanten ist. Andernfalls ist sie eine innere Ecke. $V_I(\mathcal{T})$ bzw. $V_B(\mathcal{T})$ bezeichnet die Menge aller inneren Ecken bzw. die Menge aller Randecken. Die Menge

$$\partial\mathcal{T} := \bigcup_{[v,w] \in E_B(\mathcal{T})} [v,w]$$

heißt **Rand von \mathcal{T}** .

Vergleicht man zwei Triangulierungen $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ miteinander, so sind sie im topologischen Sinne gleich, wenn sie die gleiche Konnektivität besitzen.

Konnektivität

Es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, die Menge aller Ecken der Triangulierung \mathcal{T} . Ein Dreieck $T = \Delta v_i v_j v_k$, $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, ist eindeutig durch die Angabe des **Index-Tripels** (i, j, k) der Ecken des Dreiecks definiert. Jede Permutation des Index-Tripels definiert das gleiche Dreieck. $[(i, j, k)]$ bezeichne die Menge aller Permutationen von (i, j, k) . Durch die Menge

$$C(\mathcal{T}) = \{[(i, j, k)] \mid T = \Delta v_i v_j v_k \in \mathcal{T}\}$$

wird die sogenannte **Konnektivität** der Triangulierung \mathcal{T} beschrieben. Gilt $C(\mathcal{T}_1) = C(\mathcal{T}_2)$ für zwei Triangulierungen $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, bei geeigneter Nummerierung der Ecken, so werden diese als **Triangulierungen mit identischer Konnektivität** bezeichnet.

Beispiel 2.7

In Abbildung 2.3 ist ein Beispiel für zwei planare Triangulierungen $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$, $\bar{\mathcal{T}} = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \bar{T}_4\}$ mit identischer Konnektivität zu sehen. Es seien v_1, \dots, v_6 bzw. $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_6$ die Ecken von \mathcal{T} bzw. $\bar{\mathcal{T}}$. Die Dreiecke T_1, \dots, T_4 bzw. $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_4$ werden eindeutig durch die Index-Tripel $(1, 2, 6)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 4, 6)$, $(4, 5, 6)$ definiert.

Ein weiterer, wichtiger Begriff in Bezug auf Triangulierungen sind die sogenannten **baryzentrischen Koordinaten**. Referenzen zu diesem Thema sind [17] und [4].

Baryzentrische Koordinaten

Es sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}(T)$ die durch das Dreieck $T = \Delta v_1 v_2 v_3 \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, definierte affine Ebene. Da v_1, v_2, v_3 ein Dreieck bilden, sind sie affin unabhängig. Zu jedem Punkt $v \in \mathcal{E}$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3, \\ 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

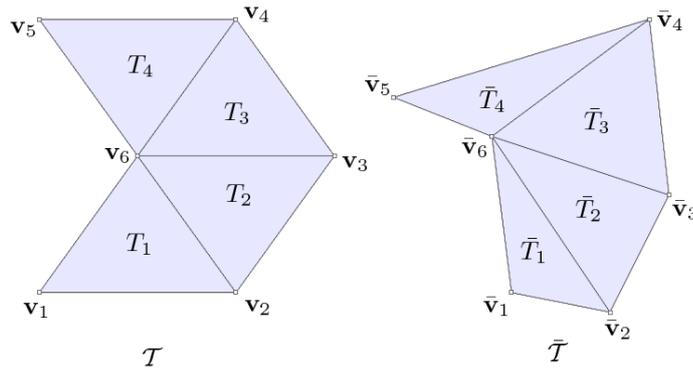


Abbildung 2.3: Zwei planare Triangulierungen $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$, $\bar{\mathcal{T}} = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \bar{T}_4\}$ mit identischer Konnektivität.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heißen **baryzentrische Koordinaten von \mathbf{v} bezüglich T** . Schließlich wird noch der Begriff der affinen Abbildung definiert.

Affine Abbildung

Es sei \mathbb{E}^n , $n \in \mathbb{N}$, der kanonische affine Raum bezüglich des Vektorraums \mathbb{R}^n . Weiter seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E}^n$ affine Unterräume von \mathbb{E}^n der Dimension $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Eine Abbildung $\mathbf{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **affin**, wenn für beliebige Punkte $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, und beliebige Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ gilt

$$\mathbf{f} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{f}(\mathbf{v}_i).$$

Ist \mathbf{f} affin und bijektiv, so bezeichnet man \mathbf{f} als **Affinität**.

2.3 NURBS

In der Industrie werden standardmäßig *NURBS (Non Uniform Rational B-Splines)* zur Parametrisierung von Kurven und Flächen verwendet. Einige Gründe für die weite Verbreitung von NURBS sind die Folgenden:

- Mit NURBS lassen sich sowohl analytische Kurven und Flächen, wie z. B. der Kreis oder der Zylinder, als auch Freiformflächen, wie z. B. ein Teil einer Gussform, beschreiben.
- Algorithmen für NURBS-Kurven und -Flächen sind schnell und numerisch stabil.
- NURBS-Kurven und -Flächen sind invariant bezüglich einiger geometrischer Transformationen, wie z. B. Drehung und Verschiebung.

Grundlage der NURBS sind die sogenannten *B-Spline-Basis-Funktionen*.

2.3.1 B-Spline-Basis-Funktionen

Es seien $n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}_0$, sowie $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Gilt dann

$$\begin{aligned} t_i &\leq t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1, \\ t_i &< t_{i+d+1}, \quad i = 0, \dots, n-d-1, \end{aligned}$$

so heißen die Zahlen t_0, \dots, t_n **Knoten vom Grad d** (kurz **Knoten**) und der Zeilenvektor $\mathbf{T} = (t_0, \dots, t_n)$ heißt **Knotenvektor vom Grad d** (kurz **Knotenvektor**).

Definition 2.8

Es seien $n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}_0, i \in \{0, \dots, n-d-1\}$. Weiter sei $\mathbf{T} = (t_0, \dots, t_n)$ ein Knotenvektor vom Grad d . Die i -te **B-Spline-Basis-Funktion vom Grad d** wird mit $N_{i,d}$ bezeichnet. Für den Grad $d = 0$ ist $N_{i,0}$ definiert als

$$\begin{aligned} N_{i,0} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ N_{i,0}(u) &:= \begin{cases} 1, & t_i \leq u < t_{i+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (u \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Zusätzlich sei $N_{n-1,0}(t_n) = 1$. Für den Grad $d \geq 1$ wird $N_{i,d}$ durch folgende Rekursion definiert

$$\begin{aligned} N_{i,d} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ N_{i,d}(u) &:= \frac{u - t_i}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(u) + \\ &\quad \frac{t_{i+d+1} - u}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(u), \quad (u \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Treten in der Rekursion Brüche der Form $\frac{0}{0}$ auf, so werden diese als 0 interpretiert. Eine B-Spline-Basis-Funktion $N_{i,d}$ vom Grad d wird auch kurz **B-Spline vom Grad d** genannt.

Setzt man

$$m := n - d - 1,$$

dann existieren zum Knotenvektor $\mathbf{T} = (t_0, \dots, t_n)$ genau $m+1$ B-Splines $N_{0,d}, \dots, N_{m,d}$ vom Grad d .

Beispiel 2.9

In Abbildung 2.4 wird die Rekursionsformel aus Definition 2.8 veranschaulicht. Es wird $\mathbf{T} = (0, 1, 2, 3)$ als Knotenvektor gewählt. Im unteren Bild sind die B-Splines $N_{0,0}, N_{1,0}, N_{2,0}$ vom Grad 0 zu sehen. Durch Anwendung der Rekursionsformel auf die B-Splines $N_{0,0}, N_{1,0}$ bzw. $N_{1,0}, N_{2,0}$ erhält man die B-Splines $N_{0,1}$ bzw. $N_{1,1}$ vom Grad 1 (mittleres Bild). Nochmalige Anwendung der Rekursionsformel auf die B-Splines $N_{0,1}, N_{1,1}$ liefert schließlich den B-Spline $N_{0,2}$ vom Grad 2, welcher im oberen Bild zu sehen ist.

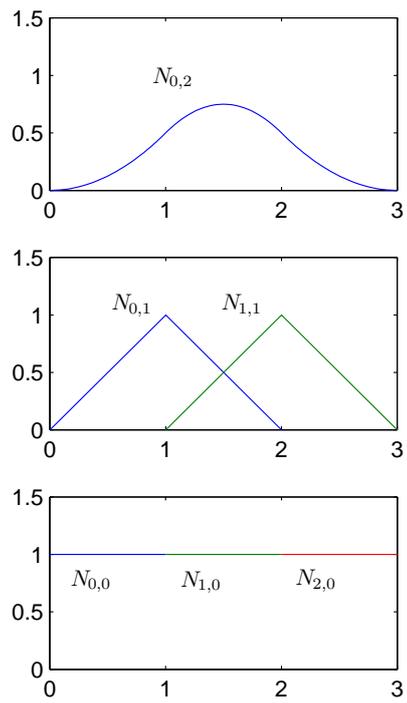


Abbildung 2.4: Die B-Splines $N_{0,0}, N_{1,0}, N_{2,0}, N_{0,1}, N_{1,1}, N_{0,2}$ über dem Knotenvektor $\mathbf{T} = (0, 1, 2, 3)$.

Eigenschaften der B-Splines

Die B-Splines verfügen über folgende Eigenschaften. Die entsprechenden Beweise dieser Aussagen finden sich in [41]. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}_0$, $m := n - d - 1$, $i \in \{0, \dots, m\}$.

B1 Der B-Spline $N_{i,d}$ ist auf ganz \mathbb{R} nicht negativ, d.h. es gilt

$$N_{i,d}(u) \geq 0 \quad (u \in \mathbb{R}).$$

Diese Eigenschaft wird als **Positivität** bezeichnet.

B2 Der B-Spline $N_{i,d}$ hat den **lokalen Träger** $[t_i, t_{i+d+1}]$.

B3 Es sei $j \in \{0, \dots, n - 1\}$. In dem Intervall $[t_j, t_{j+1})$ sind höchstens $d + 1$ B-Splines ungleich Null. Dies sind gerade $N_{j-d,d}, \dots, N_{j,d}$.

B4 Es liegt die sogenannte **Zerlegung der 1** vor, d.h. es gilt

$$\sum_{i=0}^m N_{i,d}(u) = 1, \quad (u \in [t_d, t_{m+1}]).$$

B5 Für $d > 0$ hat $N_{i,d}$ genau ein Maximum auf ganz \mathbb{R} .

Die B-Splines $N_{0,d}, \dots, N_{m,d}$ bilden eine Basis des Raums aller stückweisen Polynome vom Grad d . Diese Aussage wird im Folgenden präzisiert.

Es seien $l \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}_0$. Die Zahlen $\xi_0, \dots, \xi_l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\xi_i < \xi_{i+1}, \quad i = 0, \dots, l - 1,$$

werden als **Bruchstellen** bezeichnet.

Setzt man $\boldsymbol{\xi} := (\xi_0, \dots, \xi_l)$, so bezeichnet $\mathbb{P}_{d,\boldsymbol{\xi}}$ den Raum aller stückweisen Polynome vom Grad d über dem Intervall $[\xi_0, \xi_l]$. Eine Abbildung $p : [\xi_0, \xi_l] \rightarrow \mathbb{R}$ ist also ein Element von $\mathbb{P}_{d,\boldsymbol{\xi}}$, wenn p eingeschränkt auf das Intervall $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i \in \{1, \dots, l - 1\}$, ein Polynom vom Grad d ist.

Von besonderem Interesse sind die Übergänge in den Bruchstellen ξ_i , $i = 1, \dots, l - 1$. Es seien $\mu_1, \dots, \mu_{l-1} \in \mathbb{Z}$, mit

$$-1 \leq \mu_i \leq d, \quad i = 1, \dots, l - 1,$$

sowie $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{l-1})$. Dann bezeichnet $\mathbb{P}_{d,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu}}$ den Raum aller Abbildungen $p \in \mathbb{P}_{d,\boldsymbol{\xi}}$, welche in den Bruchstellen ξ_i , $i = 1, \dots, l - 1$, mindestens μ_i -mal stetig differenzierbar sind. Der Fall $\mu_i = 0$ bedeutet, dass p in ξ_i mindestens stetig ist und $\mu_i = -1$ bedeutet, dass in ξ_i keine Bedingung an p gestellt wird.

Mit Hilfe der B-Splines ist es nun möglich, eine Basis von $\mathbb{P}_{d,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu}}$ zu erzeugen. Dazu bildet man den sogenannten **erweiterten Knotenvektor** $\mathbf{T} = (t_0, \dots, t_n)$, welcher folgende Bedingungen erfüllt:

1. $n = 2 \cdot (d + 1) + \sum_{k=1}^{l-1} (d - \mu_k)$,

2. $t_{d+1}, \dots, t_{n-d-1} \in \{\xi_1, \dots, \xi_{l-1}\}$,
3. $t_0 \leq \dots \leq t_d = \xi_0$, $\xi_l = t_{n-d} \leq \dots \leq t_n$,
4. Für $i \in \{1, \dots, l-1\}$ ist ξ_i in \mathbf{T} exakt $v_i := (d - \mu_i)$ -mal enthalten.

Als Knotenvektor \mathbf{T} ergibt sich dann

$$\mathbf{T} = \left(\underbrace{t_0, \dots, t_{d-1}}_{\leq \xi_0}, \xi_0, \underbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}_{v_1\text{-mal}}, \dots \right. \\ \left. \dots, \underbrace{\xi_i, \dots, \xi_i}_{v_i\text{-mal}}, \dots \right. \\ \left. \dots, \underbrace{\xi_{l-1}, \dots, \xi_{l-1}}_{v_{l-1}\text{-mal}}, \xi_l, \underbrace{t_{m+2}, \dots, t_{m+d+1}}_{\geq \xi_l} \right).$$

Die Einschränkungen der zu diesem Knotenvektor \mathbf{T} zugehörigen B-Splines $N_{0,d}, \dots, N_{m,d}$ auf das Intervall $[\xi_0, \xi_l] = [t_d, t_{m+1}]$ bilden dann eine Basis von $\mathbb{P}_{d,\xi,\mu}$. Der Beweis der Basiseigenschaft wurde von Curry und Schoenberg erbracht [10].

2.3.2 NURBS-Kurven

Mittels der B-Splines lassen sich nun die NURBS-Kurven und -Flächen definieren.

Definition 2.10

Es seien $n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}_0, m := n - d - 1$, sowie $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m \in \mathbb{R}^3, w_0, \dots, w_m \in \mathbb{R}^+$. Des Weiteren seien $\mathbf{T} = (t_0, \dots, t_n)$ ein Knotenvektor vom Grad d und $N_{0,d}, \dots, N_{m,d}$ die zugehörigen B-Splines vom Grad d . Eine **NURBS-Kurve \mathcal{C} vom Grad d** ist eine parametrisierte Kurve $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$, für die die Parametrisierung definiert ist durch

$$I := [t_d, t_{m+1}], \\ \mathbf{C} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{C}(u) := \frac{\sum_{i=0}^m w_i \mathbf{p}_i N_{i,d}(u)}{\sum_{i=0}^m w_i N_{i,d}(u)}, \quad (u \in I).$$

Die Punkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m \in \mathbb{R}^3$ werden als **Kontrollpunkte** bezeichnet. Der durch die Kontrollpunkte definierte Polygonzug heißt **Kontrollpolygon**. Die Zahlen $w_0, \dots, w_m \in \mathbb{R}^+$ nennt man **Gewichte**.

Eigenschaften der NURBS-Kurven

Es sei $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$ eine B-Spline-Kurve vom Grad d . Aus den Eigenschaften der B-Spline-Basis-Funktionen ergeben sich folgende Eigenschaften für \mathcal{C} . Die Beweise dieser Aussagen finden sich in [41].

C1 \mathcal{C} ist eine stückweise rationale Kurve im \mathbb{R}^3 .

2 Darstellung von Kurven und Flächen

C2 Verändert man den Kontrollpunkt \mathbf{p}_i oder das Gewicht w_i , so ändert sich \mathcal{C} nur auf dem Intervall $[t_i, t_{i+d+1})$. Hierbei spricht man von **lokaler Kontrolle**.

C3 \mathcal{C} verläuft in der konvexen Hülle der Punkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$. Genauer: Für $u \in [t_i, t_{i+1})$ liegt $\mathbf{C}(u)$ in der konvexen Hülle der Punkte $\mathbf{p}_{i-d}, \dots, \mathbf{p}_i$.

C4 Für eine affine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$\Phi(\mathbf{C}(u)) = \frac{\sum_{i=0}^m w_i \Phi(\mathbf{p}_i) N_{i,d}(u)}{\sum_{i=0}^m w_i N_{i,d}(u)}, \quad (u \in I)$$

Diese Eigenschaft wird als **affine Invarianz** bezeichnet.

C5 Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Wählt man als Knotenvektor

$$\mathbf{T} = (\underbrace{a, \dots, a}_{d+1}, t_d, \dots, t_{m+1}, \underbrace{b, \dots, b}_{d+1})$$

so gilt

$$\mathbf{C}(a) = \mathbf{p}_0, \mathbf{C}(b) = \mathbf{p}_m.$$

Es liegt also **Anfangs- und Endpunktinterpolation** vor.

C6 Kegelschnitte lassen sich mit NURBS-Kurven durch geeignete Wahl von Grad, Knoten, Kontrollpunkten und Gewichten exakt darstellen.

2.3.3 NURBS-Flächen

NURBS-Flächen sind eine direkte Verallgemeinerung von NURBS-Kurven.

Definition 2.11

Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, d_1, d_2 \in \mathbb{N}_0, m_1 := n_1 - d_1 - 1, m_2 := n_2 - d_2 - 1$, sowie $\mathbf{p}_{i,j} \in \mathbb{R}^3, w_{ij} \in \mathbb{R}^+, i = 0, \dots, m_1, j = 0, \dots, m_2$. Des Weiteren seien $\mathbf{U} = (u_0, \dots, u_{n_1}), \mathbf{V} = (v_0, \dots, v_{n_2})$ Knotenvektoren vom Grad d_1 bzw. d_2 und $N_{0,d_1}, \dots, N_{m_1,d_1}, N_{0,d_2}, \dots, N_{m_2,d_2}$ die zugehörigen B-Splines vom Grad d_1 bzw. d_2 . Eine **NURBS-Fläche \mathcal{S} vom Grad (d_1, d_2)** ist eine parametrisierte Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$, für die die Parametrisierung (D, \mathbf{S}) definiert ist durch

$$D := [u_{d_1}, u_{m_1+1}] \times [v_{d_2}, v_{m_2+1}],$$

$$\mathbf{S} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{S}(u, v) := \frac{\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} w_{ij} \mathbf{p}_{ij} N_{i,d_1}(u) N_{j,d_2}(v)}{\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} w_{ij} N_{i,d_1}(u) N_{j,d_2}(v)}, \quad ((u, v) \in D).$$

Die Punkte $\mathbf{p}_{ij} \in \mathbb{R}^3, i = 0, \dots, m_1, j = 0, \dots, m_2$ werden als **Kontrollpunkte** bezeichnet und bilden das **Kontrollnetz**. Die Zahlen $w_{ij} \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, m_1, j = 0, \dots, m_2$ heißen **Gewichte**.

Eigenschaften der NURBS-Flächen

Es sei $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ eine NURBS-Fläche. Dann hat \mathcal{S} folgende Eigenschaften [41].

- S1** \mathcal{S} ist eine stückweise rationale Fläche im \mathbb{R}^3 .
- S2** Verändert man den Kontrollpunkt \mathbf{p}_{ij} oder das Gewicht w_{ij} , so ändert sich \mathcal{S} nur für die Teilmenge $[u_i, u_{i+d_1+1}) \times [v_j, v_{j+d_2+1})$ des Parameterbereichs D .
- S3** \mathcal{S} verläuft in der konvexen Hülle der Punkte $\mathbf{p}_{00}, \dots, \mathbf{p}_{m_1 m_2}$. Genauer: Für $(u, v) \in [u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$ liegt $\mathbf{S}(u, v)$ in der konvexen Hülle der Punkte $\mathbf{p}_{ij}, i_0 - d \leq i \leq i_0, j_0 - d \leq j \leq j_0$.
- S4** Auch für Flächen liegt affine Invarianz vor. Für eine affine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt also

$$\Phi(\mathbf{S}(u, v)) = \frac{\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} w_{ij} \Phi(\mathbf{p}_{ij}) N_{i,d_1}(u) N_{j,d_2}(v)}{\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} w_{ij} N_{i,d_1}(u) N_{j,d_2}(v)}, \quad ((u, v) \in D).$$

- S5** Es seien $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}, a_1 < b_1, a_2 < b_2$. Wählt man als Knotenvektoren

$$U = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{d_1+1}, u_{d_1}, \dots, u_{m_1+1}, \underbrace{b_1, \dots, b_1}_{d_1+1})$$

$$V = (\underbrace{a_2, \dots, a_2}_{d_2+1}, v_{d_2}, \dots, v_{m_2+1}, \underbrace{b_2, \dots, b_2}_{d_2+1}),$$

so liegt Eckpunktinterpolation vor

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(a_1, a_2) &= \mathbf{p}_{00}, & \mathbf{S}(b_1, a_2) &= \mathbf{p}_{m_1 0}, \\ \mathbf{S}(a_1, b_2) &= \mathbf{p}_{0 m_2}, & \mathbf{S}(b_1, b_2) &= \mathbf{p}_{m_1 m_2}. \end{aligned}$$

- S6** Zylinder, Kegel und Ellipsoide lassen sich mit NURBS-Flächen exakt darstellen.

- S7** Jede Koordinatenkurve einer NURBS-Fläche ist eine NURBS-Kurve.

2.3.4 Modellierung

Mit Hilfe der Kontrollpunkte und Gewichte lässt sich der Verlauf von NURBS-Kurven und -Flächen intuitiv gestalten. Dies wird im Folgenden am Beispiel von NURBS-Kurven illustriert. Für NURBS-Flächen gelten entsprechende Aussagen.

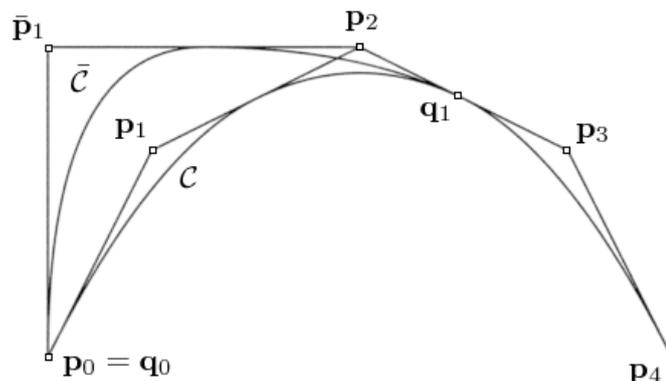


Abbildung 2.5: Zwei NURBS-Kurven \mathcal{C} und $\bar{\mathcal{C}}$ die bis auf den Kontrollpunkt \mathbf{p}_1 bzw. $\bar{\mathbf{p}}_1$ identische Kontrollpolygone besitzen.

Gemäß Eigenschaft **C3** verläuft eine NURBS-Kurve $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$ vom Grad d innerhalb der konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$. Das Teilstück $\mathbf{C}([t_i, t_{i+1}))$, $i \in \{d, \dots, m+1\}$, liegt innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte $\mathbf{p}_{i-d}, \dots, \mathbf{p}_i$. Gibt man die Kontrollpunkte $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$ vor, so wird die Kurve \mathcal{C} einen ähnlichen Verlauf wie ihr Kontrollpolygon haben. Hat die Kurve nicht die gewünschte Form, so lässt sich diese durch Verändern der Kontrollpunkte bzw. Gewichte korrigieren. Eigenschaft **C2** garantiert, dass die Änderung eines Kontrollpunktes \mathbf{p}_i , $i \in \{0, \dots, m\}$, oder eines Gewichtes w_i , $i \in \{0, \dots, m\}$, nur Einfluss auf das Kurvenstück $\mathbf{C}([t_i, t_{i+d+1}))$ hat.

Beispiel 2.12

Abbildung 2.5 zeigt eine NURBS-Kurve $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I)$ vom Grad 2. Als Knotenvektor wurde $\mathbf{T} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3)$ gewählt und die Kontrollpunkte sind $\mathbf{p}_0 = (0 \ 0 \ 0)^T$, $\mathbf{p}_1 = (5 \ 10 \ 0)^T$, $\mathbf{p}_2 = (15 \ 15 \ 0)^T$, $\mathbf{p}_3 = (25 \ 10 \ 0)^T$, $\mathbf{p}_4 = (30 \ 0 \ 0)^T$. Für die Gewichte gilt $w_i = 1$, $i = 0 \dots, m$. Es ist zu erkennen wie die Kurve \mathcal{C} einen ähnlichen Verlauf wie ihr Kontrollpolygon hat. Ändert man den Kontrollpunkt \mathbf{p}_1 zu $\bar{\mathbf{p}}_1 = (0 \ 15 \ 0)^T$, so ändert sich die Kurve \mathcal{C} nur für das Kurvensegment $\mathbf{C}([0, 2])$ und man erhält eine neue Kurve $\bar{\mathcal{C}}$. Die Endpunkte dieses Segmentes sind $\mathbf{q}_0 = \mathbf{C}(0)$, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{C}(2)$.

Beispiel 2.13

Abbildung 2.6 veranschaulicht den Einfluss der Gewichte w_0, \dots, w_m auf die zugehörige NURBS-Kurve \mathcal{C} . Kontrollpunkte können als Magnete interpretiert werden. Je größer ein Gewicht w_i , $i \in \{0, \dots, m\}$, ist, desto stärker wird die Kurve vom Kontrollpunkt \mathbf{p}_i , $i \in \{0, \dots, m\}$, angezogen. In Abbildung 2.6 ist Kurve \mathcal{C} aus dem vorherigen Beispiel zu sehen. Es wird das Gewicht w_1 von 1 auf 3 geändert. Die Kurve \mathcal{C} wird dann stärker von \mathbf{p}_1 angezogen. Man erhält die Kurve $\bar{\mathcal{C}}$. Die Änderung des Gewichtes wirkt sich nur auf das Kurvensegment $\mathbf{C}([0, 2])$ mit den Endpunkten $\mathbf{q}_0 = \mathbf{C}(0)$, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{C}(2)$ aus.

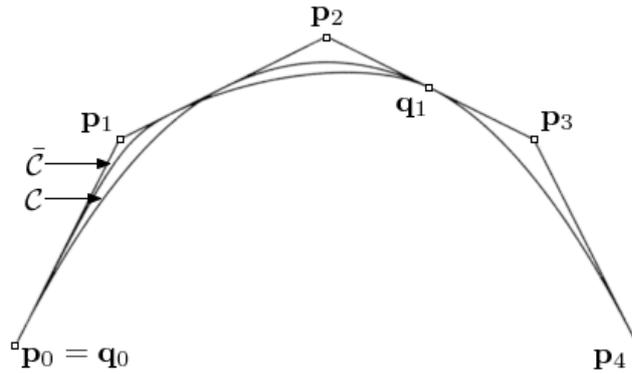


Abbildung 2.6: Zwei NURBS-Kurven \mathcal{C} und $\bar{\mathcal{C}}$ mit gleichen Kontrollpunkten, jedoch unterschiedlichen Gewichten. \mathcal{C} hat die Gewichte $w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 1$. $\bar{\mathcal{C}}$ hat die Gewichte $w_0 = w_2 = w_3 = w_4 = 1$ und $w_1 = 3$.

2.3.5 Getrimmte Flächen

Eine weitere Modellierungstechnik für NURBS-Flächen ist das sogenannte **Trimmen**. Bei diesem Verfahren werden Teile der Fläche mit Hilfe von Kurven *heraus geschnitten*. Es sei $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ eine NURBS-Fläche. Weiter seien

$$\underline{\mathcal{C}}_{1,1}, \dots, \underline{\mathcal{C}}_{1,k_1}, \dots, \underline{\mathcal{C}}_{l,1}, \dots, \underline{\mathcal{C}}_{l,k_l} \subset D, l, k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N},$$

reguläre, selbstschnittfreie Parameterraumkurven. Es sei $i \in \{1, \dots, l\}$. Die Parametrisierungen $(I_{i,j}, \underline{\mathcal{C}}_{i,j}), j = 1, \dots, k_i$, der Kurven $\underline{\mathcal{C}}_{i,j}, j = 1, \dots, k_i$, seien injektiv und es gelte

$$I_{i,j} = [a_{i,j}, b_{i,j}], a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, k_i,$$

$$\underline{\mathcal{C}}_{i,j}(b_{i,j}) = \underline{\mathcal{C}}_{i,j+1}(a_{i,j+1}), j = 1, \dots, k_i - 1,$$

$$\underline{\mathcal{C}}_{i,k_i}(b_{i,k_i}) = \underline{\mathcal{C}}_{i,1}(a_{i,1}).$$

Dann ist die Menge

$$\underline{\mathcal{C}}_i := \bigcup_{j=1}^{k_i} \underline{\mathcal{C}}_{i,j}$$

eine geschlossene Kurve, welche stückweise durch $(I_{i,j}, \underline{\mathcal{C}}_{i,j}), j = 1, \dots, k_i$ parametrisiert wird. Die Kurven $\underline{\mathcal{C}}_{i,1}, \dots, \underline{\mathcal{C}}_{i,k_i}$ seien so gegeben, dass $\underline{\mathcal{C}}_i$ selbstschnittfrei ist. Die Teilmenge $D' \subseteq D$, welche links von allen Kurven $\underline{\mathcal{C}}_1, \dots, \underline{\mathcal{C}}_l$ liegt, wird zum gültigen Parameterbereich D' erklärt. Der Begriff *links* bezieht sich hierbei auf die Orientierung der Parametrisierung der Parameterraumkurven $\underline{\mathcal{C}}_{i,j}, i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, k_i$. Die **getrimmte NURBS-Fläche** \mathcal{S}' ist dann die Teilmenge $\mathcal{S}' = \mathbf{S}(D') \subseteq \mathcal{S}$ von \mathcal{S} . Die Flächenkurven

$$\mathcal{C}_{i,j} = \mathbf{S}(\underline{\mathcal{C}}_{i,j}(I_{i,j})), i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, k_i$$

heißen **Kanten der Fläche \mathcal{S}'** . Für $i \in \{1, \dots, l\}$ ist die Menge

$$\mathcal{C}_i := \bigcup_{j=1}^{k_i} \mathcal{C}_{i,j}$$

eine geschlossene Flächenkurve, welche stückweise durch $(I_{i,j}, \mathbf{S} \circ \underline{\mathcal{C}}_{i,j})$, $j = 1, \dots, k_i$ parametrisiert wird. \mathcal{C}_i wird als **Trimmkurve von \mathcal{S}'** bezeichnet. Die Punkte

$$\mathbf{v}_{i,j} = \mathbf{S}(\underline{\mathcal{C}}_{i,j}(a_{i,j})), i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, k_i$$

werden **Ecken der Fläche \mathcal{S}'** genannt.

Innerhalb von CAD-Systemen werden NURBS-Kurven als Parameterraumkurven verwendet. Ist nun die Parameterraumkurve $\underline{\mathcal{C}} = \underline{\mathbf{C}}(I)$ eine NURBS-Kurve, so ist in der Regel die zugehörige Flächenkurve $\mathcal{C} = \mathbf{C}(I) = \mathbf{S}(\underline{\mathbf{C}}(I))$ keine NURBS-Kurve. Um ein einheitliches, auf NURBS-Kurven und -Flächen basierendes System beizubehalten, werden die Flächenkurven durch NURBS-Kurven approximiert. In diesem Fall ist zu beachten, dass in der Regel die Parameterintervalle der Parametrisierungen von \mathcal{C} und $\underline{\mathcal{C}}$ verschieden sind. Es seien (I, \mathbf{C}) bzw. $(\underline{I}, \underline{\mathbf{C}})$ die Parametrisierungen von \mathcal{C} bzw. $\underline{\mathcal{C}}$, dann gilt

$$\mathcal{C} = \mathbf{C}(I) = \mathbf{S}(\underline{\mathbf{C}}(\underline{I})).$$

Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass die Kanten einer NURBS-Fläche als auch die zugehörigen Parameterraumkurven NURBS-Kurven sind.

Wenn im Folgenden von einer NURBS-Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ die Rede ist, so kann es sich hierbei auch um eine getrimmte Fläche handeln. Das heißt der Parameterbereich D muss kein Rechteck bilden.

Beispiel 2.14

Abbildung 2.7 zeigt eine NURBS-Fläche \mathcal{S} mit zugehörigem Parameterbereich D und den Flächenkurven $\mathcal{C}_{1,1}, \mathcal{C}_{1,2}, \mathcal{C}_{1,3}, \mathcal{C}_{1,4}, \mathcal{C}_{2,1}, \mathcal{C}_{2,2}$. Innerhalb des Parameterbereichs D verlaufen die zugehörigen Parameterraumkurven $\underline{\mathcal{C}}_{1,1}, \underline{\mathcal{C}}_{1,2}, \underline{\mathcal{C}}_{1,3}, \underline{\mathcal{C}}_{1,4}, \underline{\mathcal{C}}_{2,1}, \underline{\mathcal{C}}_{2,2}$. Mit diesen lassen sich die stückweise parametrisierten Kurven

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \bigcup_{j=1}^4 \mathcal{C}_{1,j}, & \mathcal{C}_2 &= \bigcup_{j=1}^2 \mathcal{C}_{2,j}, \\ \underline{\mathcal{C}}_1 &= \bigcup_{j=1}^4 \underline{\mathcal{C}}_{1,j}, & \underline{\mathcal{C}}_2 &= \bigcup_{j=1}^2 \underline{\mathcal{C}}_{2,j} \end{aligned}$$

bilden. $\underline{\mathcal{C}}_1$ entspricht gerade dem Rand von D . Verwendet man nur \mathcal{C}_2 als Trimmkurve und ist diese gegen den Uhrzeigersinn orientiert, so erhält man die Fläche \mathcal{S}_1 , welche in Abbildung 2.8 dargestellt ist. Nutzt man $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ als Trimmkurven und ist $\underline{\mathcal{C}}_1$ gegen den Uhrzeigersinn und $\underline{\mathcal{C}}_2$ mit dem Uhrzeigersinn orientiert, so erhält man die Fläche \mathcal{S}_2 , welche in Abbildung 2.9 zu sehen ist.

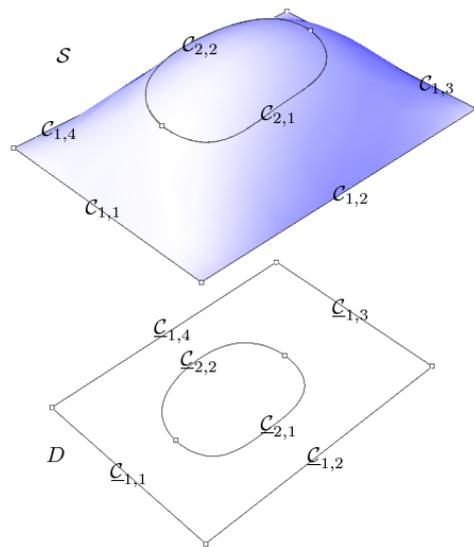


Abbildung 2.7: NURBS-Fläche S mit Flächenkurven $C_{1,1}, C_{1,2}, C_{1,3}, C_{1,4}, C_{2,1}, C_{2,2}$ und zugehörigen Parameterraumkurven $\underline{C}_{1,1}, \underline{C}_{1,2}, \underline{C}_{1,3}, \underline{C}_{1,4}, \underline{C}_{2,1}, \underline{C}_{2,2}$.

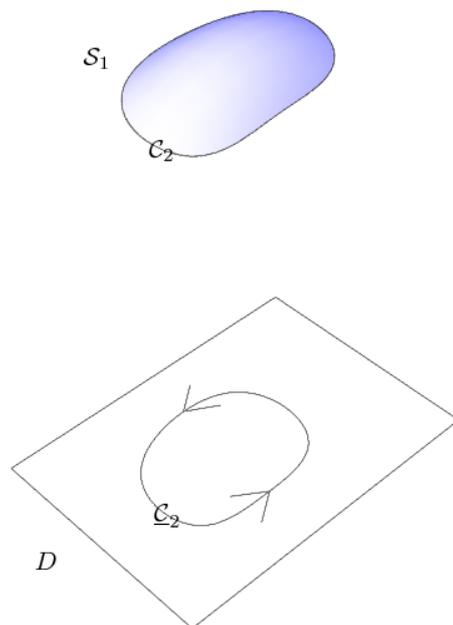


Abbildung 2.8: Getrimmte NURBS-Fläche S_1 mit Trimmkurve C_2 und zugehöriger Parameterraumkurve \underline{C}_2 .

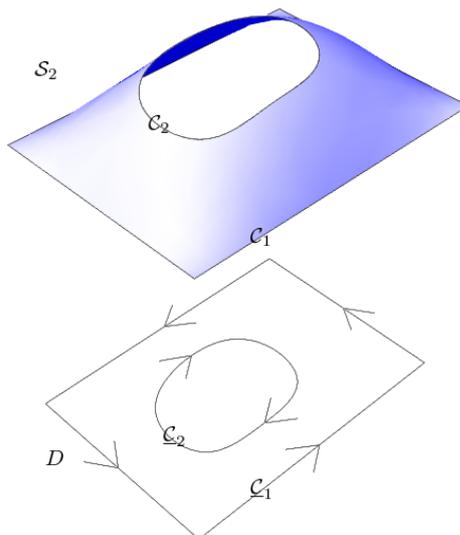


Abbildung 2.9: Getrimmte NURBS-Fläche S_2 mit den Trimmkurven C_1, C_2 und zugehörigen Parameterraumkurven $\underline{C}_1, \underline{C}_2$.

2.3.6 Visuelle Stetigkeit

In diesem Abschnitt wird der Begriff der *Glattheit* einer Kurve bzw. einer Fläche erläutert. Des Weiteren wird geklärt, wann der Übergang zwischen zwei Kurven bzw. zwischen zwei Flächen *glatt* ist. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von **Visueller Stetigkeit** bzw. **Geometrischer Stetigkeit**. Eine detaillierte Beschreibung dieser Thematik findet sich in [30].

Glattheit einer Kurve

Es sei \mathcal{C} eine Kurve mit stetig differenzierbarer Parametrisierung (I, \mathbf{C}) . Existiert ein Parameter $t_0 \in I$ mit $\dot{\mathbf{C}}(t_0) = \mathbf{0}$, so ist es möglich, dass die Kurve \mathcal{C} im Punkt $\mathbf{C}(t_0)$ *spitz* ist. Ist die Parametrisierung (I, \mathbf{C}) jedoch regulär, ist also $\dot{\mathbf{C}}(t) \neq \mathbf{0}$, $(t \in I)$, so erscheint die Kurve dem Betrachter *glatt*.

Beispiel 2.15

Die Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ mit der Parametrisierung

$$I = [-1, 1],$$

$$\mathbf{C} : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \rightarrow \mathbf{C}(t) = (t^3, t^2)^T \end{cases},$$

hat im Punkt $\mathbf{C}(0) = (0, 0)^T$ eine Spitze. Der Rest der Kurve verläuft *glatt*. Die Parametrisierung ist injektiv und stetig differenzierbar. Es gilt $\dot{\mathbf{C}}(0) = \mathbf{0}$, sowie $\dot{\mathbf{C}}(t) \neq \mathbf{0}$, $(t \in I, t \neq 0)$. Die Kurve \mathcal{C} ist in Abbildung 2.10 zu sehen.

Tangentenstetigkeit

Es seien C_1, C_2 Kurven mit regulären Parametrisierungen $([a_1, b_1], \mathbf{C}_1)$, $([a_2, b_2], \mathbf{C}_2)$ und

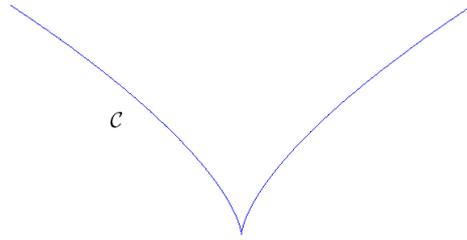


Abbildung 2.10: Ein Beispiel für eine Kurve \mathcal{C} mit einer Spitze. Die zugehörige Parametrisierung (I, \mathbf{C}) ist injektiv und stetig differenzierbar.

es gelte

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathbf{p} = \mathbf{C}_1(b_1) = \mathbf{C}_2(a_2).$$

Existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\dot{\mathbf{C}}_1(b_1) = \alpha \cdot \dot{\mathbf{C}}_2(a_2),$$

so sind die Kurven $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ **tangentenstetig** in \mathbf{p} . Dies wird auch als **visuelle Stetigkeit der Ordnung 1** bzw. **geometrische Stetigkeit der Ordnung 1** bezeichnet. In diesem Fall ist der Übergang von \mathcal{C}_1 zu \mathcal{C}_2 in \mathbf{p} glatt. Andernfalls liegt eine Spitze vor.

Glattheit einer Fläche

Entsprechend wird der Begriff *Glattheit* für Flächen interpretiert. Es sei \mathcal{S} eine Fläche mit stetig differenzierbarer Parametrisierung (D, \mathbf{S}) . Existieren Parameterwerte $(u_0, v_0) \in D$ mit $\mathbf{S}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{S}_v(u_0, v_0) = \mathbf{0}$, so kann die Fläche im Punkt $\mathbf{S}(u_0, v_0)$ eine *Spitze* haben oder es kann durch diesen Punkt ein *Knick* der Fläche verlaufen. Ist die Parametrisierung (D, \mathbf{S}) regulär, so ist die Fläche \mathcal{S} *glatt*.

Beispiel 2.16

Abbildung 2.11 zeigt eine NURBS-Flächen $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ mit einem *Knick*. Die Parametrisierung (D, \mathbf{S}) ist injektiv und stetig differenzierbar. Entlang des Knicks ist $\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v = \mathbf{0}$.

Normalenstetigkeit

Es seien $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ zwei Flächen mit den regulären Parametrisierungen $(D_1, \mathbf{S}_1), (D_2, \mathbf{S}_2)$ und $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \neq \emptyset$. Weiter seien $(u_1, v_1) \in D_1, (u_2, v_2) \in D_2$ mit $\mathbf{p} = \mathbf{S}_1(u_1, v_1) = \mathbf{S}_2(u_2, v_2)$ und $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ die Normalenvektoren von $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ in \mathbf{p} . Existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\mathbf{n}_1 = \alpha \cdot \mathbf{n}_2,$$

so sind \mathcal{S}_1 und \mathcal{S}_2 **normalenstetig** in \mathbf{p} . Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Tangentialebenen von \mathcal{S}_1 und \mathcal{S}_2 in \mathbf{p} übereinstimmen. Dies bezeichnet man auch als **visuelle Stetigkeit der Ordnung 1** bzw. **geometrische Stetigkeit der Ordnung 1**. In diesem Fall ist der Übergang von \mathcal{S}_1 zu \mathcal{S}_2 in \mathbf{p} glatt. Andernfalls liegt in \mathbf{p} eine Spitze vor. Es sei nun der Schnitt $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ der Flächen $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ eine offene Kurve \mathcal{C} . Ist der Übergang von \mathcal{S}_1 zu \mathcal{S}_2 in allen Punkten von \mathcal{C} nicht normalenstetig, so bilden \mathcal{S}_1 und \mathcal{S}_2 in \mathcal{C} einen Knick.

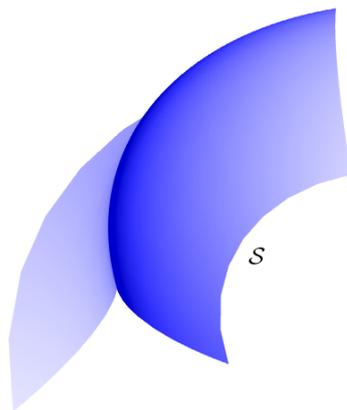


Abbildung 2.11: Ein Beispiel für eine Fläche S mit einem Knick. Die zugehörige Parametrisierung (D, \mathbf{S}) ist injektiv und stetig differenzierbar.

2.3.7 Beschreibung eines Gebietes

IGES (Initial Graphics Exchange Specification) [57] ist ein weit verbreiteter Datei-Standard, der den Austausch von Daten zwischen CAD-Systemen ermöglicht. Die Daten werden dabei in verschiedene Klassen, sogenannte **Entities** unterteilt. NURBS-Kurven werden z. B. in der **Rational B-Spline Curve Entity** beschrieben. Eine übliche Methode zur Beschreibung eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist das **Boundary Representation Model**. Hierbei wird das Gebiet Ω durch seinen Rand beschrieben. Dieses Modell wird in IGES durch die Klasse **Manifold Solid B-Rep Object Entity** realisiert. In dieser Klasse wird zwischen topologischen und geometrischen Elementen unterschieden.

2.3.7.1 Beschreibung der Topologie

Die topologischen Elemente sind: Manifold Solid, Closed Shell, Face, Loop, Edge, Vertex. Jede dieser Entitäten wird durch Elemente der nächsten unteren Ebene begrenzt und durch Aufzählung dieser Elemente definiert. Ein Solid SOLID wird somit durch eine äußere Shell OS und keine, eine oder mehrere innere Shells $IS_1, \dots, IS_{NS}, NS \in \mathbb{N}$, begrenzt. Eine Shell ist die Vereinigung miteinander verbundener Faces $F_1, \dots, F_{NF}, NF \in \mathbb{N}$. Ein Face F wird durch eine äußere Loop OL und keine, eine oder mehrere innere Loops $IL_1, \dots, IL_{NL}, NL \in \mathbb{N}$, begrenzt. Eine Loop L ist eine geschlossene Verbindung von Edges $E_1, \dots, E_{NE}, NE \in \mathbb{N}$. Jede Edge E wird durch zwei Vertices V, W begrenzt, welche als Start-Vertex V und End-Vertex W unterschieden werden. Dadurch erhält jede Edge E eine Orientierung. Jede Edge E ist immer Teil von genau zwei Loops. In einer Loop wird die Orientierung beibehalten, in der anderen Loop wird die Orientierung der Edge umgekehrt. Dies wird durch E+ bzw. E- gekennzeichnet.

Beispiel 2.17 Zylinder

In Abbildung 2.12 ist ein Zylinder zu sehen. Das vom Zylinder eingeschlossene Gebiet

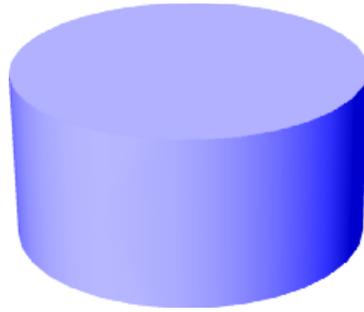


Abbildung 2.12: Zylinder als Beispiel für einen Solid. Die Oberfläche des Zylinders bildet die äußere Shell OS.

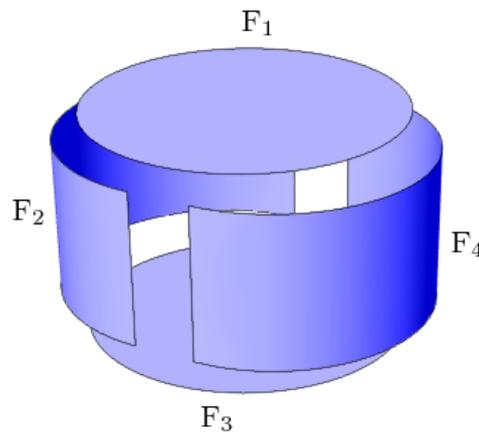


Abbildung 2.13: Zylinder aufgeteilt in Faces F_1, \dots, F_4 .

bildet den Solid SOLID. Die Oberfläche des Zylinders bildet die äußere Shell OS. Es existieren keine inneren Shells. Die äußere Shell OS besteht aus den Faces F_1, \dots, F_4 , welche in Abbildung 2.13 dargestellt sind. Diese werden jeweils durch die äußeren Loops OL_1, \dots, OL_4 begrenzt. Es existieren keine inneren Loops. Die äußeren Loops bestehen aus den Edges E_1, \dots, E_6 . Im einzelnen sind die Loops folgendermaßen definiert

$$OL_1 = E_{1+}, E_{2+},$$

$$OL_2 = E_{3+}, E_{5+}, E_{1-}, E_{6-},$$

$$OL_3 = E_{3+}, E_{4+},$$

$$OL_4 = E_{4+}, E_{6+}, E_{2-}, E_{5-}.$$

Die Edges werden durch die Vertices V_1, V_2, V_3, V_4 definiert. Die Loops und Vertices sind in Abbildung 2.14 zu sehen.

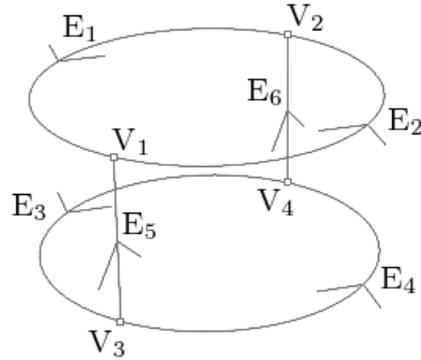


Abbildung 2.14: Zylinder aufgeteilt in Edges E_1, \dots, E_6 und Vertices V_1, \dots, V_4 .

2.3.7.2 Beschreibung der Geometrie

Die geometrische Beschreibung einer Vertex V erfolgt durch Angabe ihrer kartesischen Koordinaten $\mathbf{v} = (x \ y \ z)^T$, $x, y, z \in \mathbb{R}$. Ein Face F wird durch eine getrimmte NURBS-Fläche \mathcal{S}' geometrisch beschrieben. Als Grundlage dient eine nicht getrimmte NURBS-Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ (IGES: Rational B-Spline Surface Entity). Diese wird durch Angabe ihres Grades, ihrer Knotenvektoren, ihrer Kontrollpunkte und ihrer Gewichte definiert. Es sei nun L eine innere oder äußere Loop des Faces F . Weiter seien E_1, \dots, E_{NE} diejenigen Edges aus denen L zusammengesetzt ist. Jede Edge E_i , $i \in \{1, \dots, NE\}$, wird dann durch eine NURBS-Flächenkurve $\mathcal{C}_i = \mathbf{C}_i(I_i) \approx \mathbf{S}(\underline{\mathbf{C}}_i(\underline{I}_i))$ bezüglich der Fläche \mathcal{S} geometrisch beschrieben. Die Parametrisierungen (I_i, \mathbf{C}_i) , $(\underline{I}_i, \underline{\mathbf{C}}_i)$ werden durch Angabe ihrer Grade, Knoten, Kontrollpunkte und Gewichte definiert. Die Menge

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{NE} \mathcal{C}_i$$

ist dann die geometrische Beschreibung der Loop L . Im Sinne von Abschnitt 2.3.5 ist \mathcal{C} eine Trimmkurve bezüglich der Fläche \mathcal{S} . Jeder Loop L des Faces F beschreibt also eine Trimmkurve \mathcal{C} . Mit Hilfe dieser Trimmkurven wird dann die Fläche \mathcal{S} zur Fläche \mathcal{S}' getrimmt und man erhält so die endgültige geometrische Beschreibung des Faces F . Die Kurven, welche zur geometrischen Beschreibung der Edges einer Loop verwendet werden, sind dann Kanten der Fläche \mathcal{S}' .

Es werden nun die wichtigen Begriffe Geometrie und Flächenverband eingeführt.

Definition 2.18

Es seien $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$, $m \in \mathbb{N}$, alle getrimmten NURBS-Flächen, welche zur geometrischen Beschreibung der Faces eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, gemäß der IGES-Klasse Manifold Solid B-Rep Object Entity, verwendet werden. Es gelte für den Schnitt zweier beliebiger NURBS-Flächen $\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, immer einer der drei folgenden Fälle

- $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j = \emptyset$,

- $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j$ ist eine gemeinsame Ecke,
- $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j$ ist eine oder mehrere gemeinsame Kanten.

Die Menge $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m\}$ aller NURBS-Flächen $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ wird dann als **Geometrie von Ω** bezeichnet.

Ist $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m\}$ eine Geometrie bezüglich eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, so ist der Rand des Gebietes Ω gleich der Menge

$$\mathcal{S}_{\mathcal{G}} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{S}_i.$$

$\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ wird im Weiteren **Oberfläche von \mathcal{G}** genannt. Mit $V(\mathcal{G})$ bzw. $E(\mathcal{G})$ wird die Menge aller Ecken bzw. aller Kanten aller NURBS-Flächen von \mathcal{G} bezeichnet. Ein Element von $V(\mathcal{G})$ bzw. von $E(\mathcal{G})$ heißt dann **Ecke von \mathcal{G}** bzw. **Kante von \mathcal{G}** . Zwei NURBS-Flächen $\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j, i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j$, heißen **benachbart**, wenn sie mindestens eine gemeinsame Kante $\mathcal{C} \in E(\mathcal{G})$ haben.

Beispiel 2.19

Abbildung 2.15 zeigt zwei benachbarte NURBS-Flächen $\mathcal{S}_1 = \mathbf{S}_1(D_1), \mathcal{S}_2 = \mathbf{S}_2(D_2)$. Die Faces haben eine gemeinsame Kante $\mathcal{C} = \mathbf{C}([a, b])$. Da \mathcal{C} Flächenkurve bezüglich \mathcal{S}_1 und \mathcal{S}_2 ist, existieren zu \mathcal{C} zwei Parameterraumkurven $\underline{\mathcal{C}}_1 = \underline{\mathbf{C}}_1([a_1, b_1]), \underline{\mathcal{C}}_2 = \underline{\mathbf{C}}_2([a_2, b_2])$, so dass gilt

$$\mathcal{C} = \mathbf{S}_1(\underline{\mathbf{C}}_1([a_1, b_1])) = \mathbf{S}_2(\underline{\mathbf{C}}_2([a_2, b_2])).$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(a) &= \mathbf{S}_1(\underline{\mathbf{C}}_1(a_1)) = \underline{\mathbf{C}}_2(\underline{\mathbf{C}}_2(b_2)), \\ \mathbf{C}(b) &= \mathbf{S}_1(\underline{\mathbf{C}}_1(b_1)) = \underline{\mathbf{C}}_2(\underline{\mathbf{C}}_2(a_2)), \end{aligned}$$

d. h. die Orientierung von \mathcal{C} und $\underline{\mathcal{C}}_1$ sind gleich, die von \mathcal{C} und $\underline{\mathcal{C}}_2$ sind entgegengesetzt. Ein weiteres Beispiel ist in Abbildung 2.16 zu sehen. Die NURBS-Flächen $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ haben hier zwei gemeinsame Kanten $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

Zusatzbedingungen

Im Weiteren werden die folgenden Zusatzbedingungen an eine Geometrie \mathcal{G} gestellt:

- Die Parametrisierungen der Flächen und der Kanten sind injektiv und regulär.
- Zu zwei benachbarten Ecken $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V(\mathcal{G})$ existiert genau eine Kante $\mathcal{C} = \mathbf{C}([a, b]) \in E(\mathcal{G}), a, b \in \mathbb{R}$, mit

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(a) &= \mathbf{v}, \mathbf{C}(b) = \mathbf{w} \\ \text{oder } \mathbf{C}(b) &= \mathbf{v}, \mathbf{C}(a) = \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Diese Kante wird im Weiteren mit $\mathcal{C}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}$ bezeichnet.

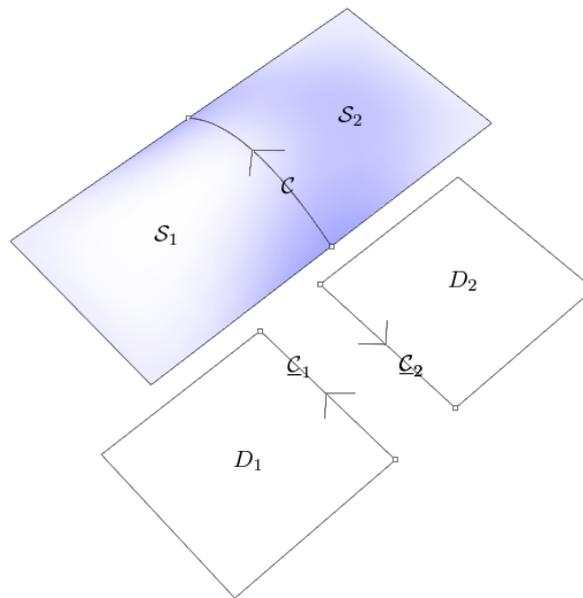


Abbildung 2.15: Zwei benachbarte NURBS-Flächen $S_1 = \mathbf{S}_1(D_1), S_2 = \mathbf{S}_2(D_2)$ mit der gemeinsamen Kante C und den zugehörigen Parameterraumkurven C_1, C_2

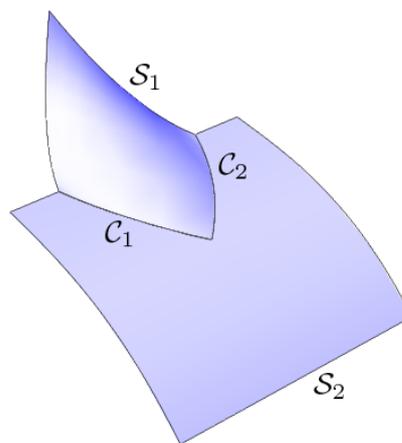


Abbildung 2.16: Zwei benachbarte NURBS-Flächen S_1, S_2 mit zwei gemeinsamen Kanten C_1, C_2 .

Aus der ersten Bedingung ergibt sich, dass alle Flächen und alle Kanten selbstschnittfrei und glatt sind. Enthält die Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ der Geometrie \mathcal{G} einen Knick, so muss dieser entlang einer Kante $\mathcal{C}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} \in E(\mathcal{G})$ verlaufen. Enthält eine Trimmkurve \mathcal{C} eine Spitze, so muss diese in einer Ecke $\mathbf{v} \in V(\mathcal{G})$ liegen.

Diese geforderten Zusatzbedingungen sind in der Praxis leicht umsetzbar und stellen keine wesentliche Einschränkung bezüglich der Geometrie dar.

Definition 2.20

Es sei $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, eine Geometrie bezüglich eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Die Menge $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_{i_1}, \dots, \mathcal{S}_{i_n}\} \subset \mathcal{G}$, $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$, heißt **Flächenverband von \mathcal{G}** , wenn die Menge

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{S}_{i_j}$$

einfach zusammenhängend ist.

Die Menge $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ eines Flächenverbandes \mathcal{F} heißt **Oberfläche** von \mathcal{F} . Analog zur Geometrie werden die Begriffe Ecke, Kante und Nachbarschaft definiert. Eine Kante $\mathcal{C} \in E(\mathcal{F})$ heißt **innere Kante**, wenn zwei benachbarte Flächen $\mathcal{S}_{i_j}, \mathcal{S}_{i_k}$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$ existieren mit

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{S}_{i_j} \cap \mathcal{S}_{i_k}.$$

Andernfalls wird \mathcal{C} als **äußere Kante** bzw. **Randkante** bezeichnet. Die Menge aller inneren Kanten von \mathcal{F} wird mit $E_I(\mathcal{F})$ bezeichnet. Entsprechend bezeichnet $E_B(\mathcal{F})$ die Menge aller Randkanten von \mathcal{F} . Gilt $E_B(\mathcal{F}) = \emptyset$, so heißt \mathcal{F} **geschlossen**, andernfalls heißt \mathcal{F} **offen**. Die Menge

$$\bigcup_{\mathcal{C} \in E_B(\mathcal{F})} \mathcal{C}$$

heißt **Rand von \mathcal{F}** und wird mit $\partial\mathcal{F}$ bezeichnet. Ist \mathcal{F} ein offener Flächenverband, so ist $\partial\mathcal{F}$ eine geschlossene, stückweise parametrisierte Kurve. Die Ecken der Randkanten heißen **äußere Ecken** oder **Randecken**. Die Menge aller Randecken wird mit $V_B(\mathcal{F})$ bezeichnet. Die Menge aller **inneren Ecken** ist $V_I(\mathcal{F}) = V(\mathcal{F}) \setminus V_B(\mathcal{F})$.

Beispiel 2.21

Abbildung 2.17 zeigt die Explosionsansicht der aus sechs NURBS-Flächen bestehenden Geometrie $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_6\}$ eines Zylinders. Die Mengen $\mathcal{F}_1 = \{\mathcal{S}_1\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4\}$, $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}$ sind Flächenverbände, da die Mengen $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{S}_{\mathcal{F}_2}, \mathcal{S}_{\mathcal{F}_3}$ einfach zusammenhängend sind. Die Menge $\mathcal{F}_4 = \{\mathcal{S}_3, \dots, \mathcal{S}_6\}$ ist kein Flächenverband, da die Menge $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_4}$ zwar zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend ist.

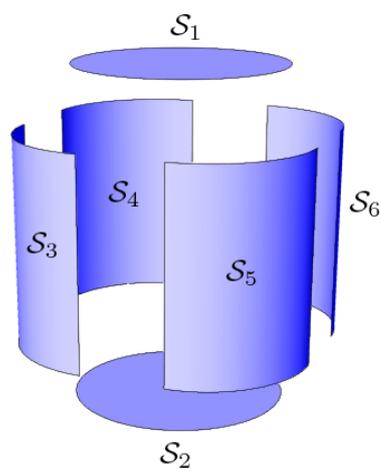


Abbildung 2.17: Explosionsansicht für Geometrie $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_6\}$ eines Zylinders bestehend aus sechs NURBS-Flächen. $\mathcal{F}_1 = \{\mathcal{S}_1\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4\}$, $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}$ sind Flächenverbände. $\mathcal{F}_4 = \{\mathcal{S}_3, \dots, \mathcal{S}_6\}$ ist kein Flächenverband.

3 Spezielle Verfahren der Gittergenerierung

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, dessen Rand $\partial\Omega$ durch eine Geometrie $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, beschrieben wird. Eine verbreitete Methode das Gebiet Ω durch ein Hexaedergitter \mathcal{H} zu diskretisieren, ist zuerst ein Vierecksgitter \mathcal{Q} auf der Oberfläche $\partial\Omega$ des Gebietes zu konstruieren und dieses dann ins Innere des Gebietes Ω zu einem Hexaedergitter zu erweitern. Der englische Begriff für Gittergenerierung auf Oberflächen ist **Surface-Meshing**. In diesem Kapitel wird ein Überblick über existierende Verfahren des Surface-Meshing geliefert. Mit Hilfe der untersuchten Verfahren soll dann eine Strategie zur Randanpassung (siehe Abschnitt 1.5.1) entwickelt werden. Alle hier untersuchten Verfahren beschränken sich bei der Erzeugung des Oberflächengitters \mathcal{Q} auf eine Fläche $\mathcal{S} \in \mathcal{G}$ oder auf einen Flächenverband $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

3.1 Gittergenerierung in der Ebene

Die meisten Surface-Meshing-Verfahren sind Modifikationen bekannter Verfahren zur Gittererzeugung für planare Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Zwei wichtige Gruppen von planaren Gittergenerierungsverfahren sind **Delaunay-Verfahren** und **Advancing-Front-Verfahren**.

3.1.1 Delaunay-Verfahren

Delaunay-Verfahren sind Verfahren, welche ein gegebenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ durch eine sogenannte **Delaunay-Triangulierung** approximieren. Diese Art von Triangulierung wurde 1934 von Delaunay [15] eingeführt. So weit nicht anders angegeben, können die Beweise der folgenden Aussagen den Vorlesungsunterlagen von Shewchuk [50] entnommen werden. Zunächst wird der Begriff Delaunay-Triangulierung definiert.

Delaunay-Triangulierung

Es sei $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset \mathbb{R}^2$, $m \in \mathbb{N}$, eine Menge von nicht kollinearen Punkten. Eine Triangulierung \mathcal{T} heißt **Delaunay-Triangulierung** bezüglich V , wenn gilt:

1. $V(\mathcal{T}) = V$,
2. für jedes Dreieck $T = \Delta \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \mathbf{v}_k \in \mathcal{T}$ enthält der Umkreis von T keinen Punkt aus $V \setminus \{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k\}$,
3. $\Omega(\mathcal{T})$ ist die konvexe Hülle von V .

Die zweite Bedingung wird **Delaunay-Bedingung** oder auch **empty circle property** genannt. Unter der Voraussetzung, dass V keine vier Punkte enthält, welche auf einem

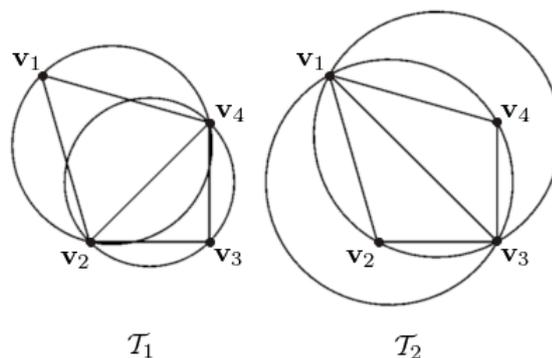


Abbildung 3.1: Zwei Triangulierungen $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ bezüglich der Punkte $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. \mathcal{T}_1 ist die Delaunay-Triangulierung von V . Die Dreiecke $\triangle v_1 v_2 v_3, \triangle v_3 v_4 v_1$ der Triangulierung \mathcal{T}_2 erfüllen die Delaunay-Bedingung nicht.

gemeinsamen Kreis liegen, existiert zu V genau eine Delaunay-Triangulierung \mathcal{T} . Diese Lage der Punkte wird als **allgemeine Lage** bezeichnet.

Beispiel 3.1

In Abbildung 3.1 sind die konvexen Triangulierungen $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ bezüglich der Punkte $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ zu sehen. Die Punkte V befinden sich in allgemeiner Lage. Triangulierung \mathcal{T}_1 besteht aus den Dreiecken $\triangle v_1 v_2 v_4, \triangle v_2 v_3 v_4$. Beide Dreiecke erfüllen die Delaunay-Bedingung. \mathcal{T}_1 ist also die Delaunay-Triangulierung von V . Triangulierung \mathcal{T}_2 besteht aus den Dreiecken $\triangle v_1 v_2 v_3, \triangle v_3 v_4 v_1$. Beide Dreiecke erfüllen die Delaunay-Bedingung nicht.

Eigenschaften von Delaunay-Triangulierungen

Im Folgenden werden kurz einige Vor- und Nachteile von Delaunay-Triangulierungen erläutert. Wird eine Triangulierung \mathcal{T} für einen Finite Elemente Ansatz verwendet, so spielt die Form der Dreiecke eine wichtige Rolle. Lässt man die Größe der Dreiecke gegen Null konvergieren, so erwartet man, dass die FE-Lösung gegen die exakte Lösung des Problems konvergiert. Entstehen dabei jedoch Winkel in der Triangulierung, welche gegen 180° Grad streben, so ist es möglich, dass die FE-Lösung nicht gegen die exakte Lösung konvergiert. Dies wurde in [2] gezeigt. Sehr große Winkel in einer Triangulierung können also zu schlechten numerischen Ergebnissen führen.

In [6] wurde gezeigt, dass auch sehr kleine Winkel in einer Triangulierung problematisch sind, da diese zu schlecht konditionierten Gleichungssystemen der FE-Diskretisierung führen können.

Da sowohl zu kleine als auch zu große Winkel von Dreiecken zu numerischer Instabilität bei FE-Verfahren führen können, werden **gleichwinklige Dreiecke**, oder entsprechend **gleichseitige Dreiecke**, bevorzugt.

Das Problem zu kleiner Winkel wird durch die Delaunay-Triangulierung gelöst. Zu ei-

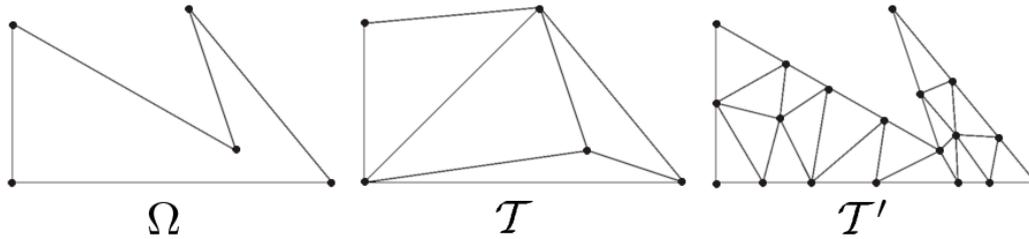


Abbildung 3.2: Die linke Abbildung zeigt ein Gebiet Ω sowie eine Menge von Punkten V auf $\partial\Omega$. Im mittleren Bild ist die Delaunay-Triangulierung \mathcal{T} von V zu sehen. \mathcal{T} enthält ein Dreieck mit einem großen Winkel. \mathcal{T} reproduziert den Rand von Ω nicht. Das rechte Bild zeigt eine Triangulierung \mathcal{T}' bezüglich der Punktmenge $V' \subset V$. \mathcal{T}' hat kleine Dreiecke mit kleinen Winkeln und reproduziert $\partial\Omega$.

ner gegebenen Menge von Punkten in allgemeiner Lage ist die zugehörige Delaunay-Triangulierung diejenige konvexe Triangulierung, welche den minimalen Winkel aller Dreiecke maximiert. Diese Eigenschaft wurde zuerst von Lawson [36] nachgewiesen. Eine entsprechende Aussage für Triangulierungen im \mathbb{R}^3 gilt jedoch nicht.

Für Delaunay-Triangulierungen ergeben sich zwei Nachteile. Sie sind immer konvex, d. h. diskretisiert man ein nicht konvexes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ durch eine Delaunay-Triangulierung so wird der Rand $\partial\Omega$ nicht *reproduziert*. Der zweite Nachteil ist, dass Delaunay-Triangulierungen Dreiecke mit sehr großen Winkeln enthalten können.

Diese Probleme können dadurch gelöst werden, dass zur Triangulierung weitere Punkte hinzu gefügt werden. Dreiecke mit zu großem Winkel werden durch *bessere* Dreiecke ersetzt. Dabei wird gewährleistet, dass die Delaunay-Bedingung für alle Dreiecke der Triangulierung erhalten bleibt. Gleichzeitig wird der Rand $\partial\Omega$ besser approximiert, indem *geeignete* Kanten entfernt werden. Nach welchen Kriterien neue Punkte hinzu gefügt werden und Kanten entfernt werden, hängt vom verwendeten Verfahren ab.

Beispiel 3.2

Abbildung 3.2 veranschaulicht den Prozess der Qualitätsverbesserung und Randanpassung. Im linken Bild ist der Rand $\partial\Omega$ eines Gebietes Ω zu sehen. Es wurde eine Menge von Punkten V erzeugt, welche auf dem Rand liegen. Im mittleren Bild ist die Delaunay-Triangulierung \mathcal{T} bezüglich V zu sehen. Der Rand von Ω wird durch \mathcal{T} nicht berücksichtigt und \mathcal{T} enthält ein Dreieck mit einem sehr großen Winkel. Das rechte Bild zeigt eine neue Punktmenge V' mit $V \subset V'$. Zu dieser wurde eine Delaunay-Triangulierung \mathcal{T}' mit kleineren Winkeln erzeugt. Nicht geeignete Kanten wurden entfernt und der Rand $\partial\Omega$ wird nun reproduziert.

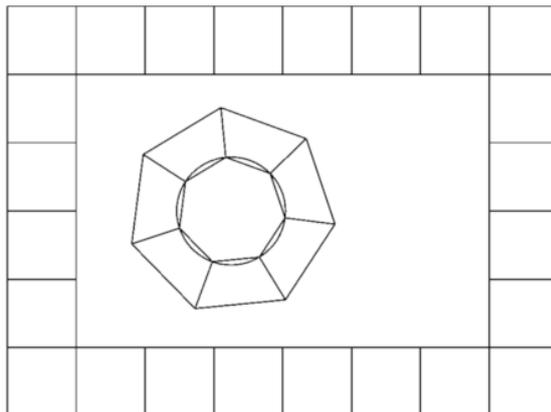


Abbildung 3.3: Veranschaulichung für Advancing Front Verfahren. Zu sehen ist ein Gebiet Ω mit rechteckigem äußerem Rand und einem Kreis als inneren Rand. Der Rand $\partial\Omega$ wurde durch Polygonzüge diskretisiert. Die Front wurde ins Innere von Ω verschoben.

3.1.2 Advancing-Front-Verfahren

Bei **Advancing-Front-Verfahren** wird zunächst der Rand $\partial\Omega$ des Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ durch Polygonzüge approximiert. Dadurch erhält man eine Menge von Kanten E , welche als **Startfront** bezeichnet wird. Ausgehend von der Startfront E wird das Gebiet Ω schrittweise durch ein Gitter diskretisiert. Wurde ein neues Dreieck bzw. Viereck erzeugt, so wird die Kantenmenge E aktualisiert und E wird im Weiteren als **aktuelle Front** bezeichnet. Die Front E wandert dabei ins Innere von Ω und bildet die Grenze zwischen diskretisiertem und nicht diskretisiertem Gebiet Ω . In Abbildung 3.3 ist dieser Prozess für die Erzeugung eines Vierecksgitters \mathcal{Q} veranschaulicht.

Die existierenden Advancing-Front-Verfahren unterscheiden sich in der Regel dadurch, wie sie

1. die aktuelle Front erzeugen,
2. aufeinander treffende Elemente einer Front miteinander verbinden.

3.2 Gittergenerierung auf Oberflächen

Surface-Meshing-Verfahren lassen sich grob in zwei Kategorien einteilen:

1. Parameterraum-Verfahren,
2. Direkte 3D-Verfahren.

Es folgt eine repräsentative Auswahl von Algorithmen zur Erzeugung von Gittern auf Oberflächen.

3.2.1 Parameterraum-Verfahren

Es sei (D, \mathbf{S}) eine Parametrisierung der Fläche $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$. Das Ziel ist die Erzeugung eines Dreiecks- oder Vierecksgitters auf \mathcal{S} . Im Folgenden wird die Vorgehensweise für ein Vierecksgitter $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, erläutert. Die Erzeugung einer Triangulierung \mathcal{T} erfolgt analog. Bei Parameterraum-Verfahren wird zunächst ein Gitter $\tilde{\mathcal{Q}} = \{\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_m\}$, im Parameterbereich D erzeugt. Es sei nun

$$\tilde{Q}_i = \square \tilde{\mathbf{v}}_{i_1} \tilde{\mathbf{v}}_{i_2} \tilde{\mathbf{v}}_{i_3} \tilde{\mathbf{v}}_{i_4}, \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

ein Viereck von $\tilde{\mathcal{Q}}$. Dann ist das Viereck Q_i des Gitters \mathcal{Q} definiert durch

$$Q_i = \square \mathbf{v}_{i_1} \mathbf{v}_{i_2} \mathbf{v}_{i_3} \mathbf{v}_{i_4} \text{ mit } \mathbf{v}_{i_j} = \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{v}}_{i_j}), \quad j = 1, \dots, 4.$$

Das Problem bei diesem Ansatz ist, dass eine *schlechte* Parametrisierung (D, \mathbf{S}) zu verzerrten Vierecken des Oberflächengitters \mathcal{Q} führen kann (siehe Abschnitt 2.1). Die meisten Verfahren verwenden eine der folgenden zwei Strategien um dieses Problem zu lösen.

1. Finde zu gegebener Fläche \mathcal{S} mit der Parametrisierung (D, \mathbf{S}) eine neue Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$, so dass $\tilde{\mathcal{Q}}$ unter $\bar{\mathbf{S}}$ nicht oder nur wenig verzerrt wird. Idealerweise ist $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ eine Isometrie.
2. Modifiziere den ebenen Gitteralgorithmus derart, dass im Parameterbereich D verzerrte Vierecke entstehen, welche auf gut geformte Vierecke auf der Oberfläche \mathcal{S} abgebildet werden.

Das von mir entwickelte Verfahren verfolgt die erste Strategie. Es ist eine Erweiterung des folgenden Verfahrens.

3.2.1.1 Erzeugung von Oberflächengittern im Parameterraum

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dessen Rand $\partial\Omega$ durch eine Geometrie $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, beschrieben wird. Es wird vorausgesetzt, dass es sich bei den parametrisierten Flächen $\mathcal{S}_i = \mathbf{S}_i(D_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, um nicht getrimmte NURBS-Flächen handelt. Somit ist der Parameterbereich D_i jeder Fläche \mathcal{S}_i ein Rechteck und \mathcal{S}_i hat genau vier Ecken und vier Kanten. Des Weiteren soll \mathcal{G} ein strukturiertes Gitter von Flächen bilden, d. h. jede Ecke $\mathbf{v} \in V(\mathcal{G})$ soll genau vier Nachbarn haben. Diese Forderung schränkt die Menge der beschreibbaren Gebiete sehr stark ein. Es sei nun

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_{i_1}, \dots, \mathcal{S}_{i_{m'}}\}, \quad m' \in \mathbb{N}, \quad i_1, \dots, i_{m'} \in \{1, \dots, m\},$$

ein Flächenverband bezüglich \mathcal{G} derart, dass die Flächen von \mathcal{F} ebenfalls ein strukturiertes Gitter bilden. Ziel des Verfahrens von Samareh-Abolhassani und Stewart [45] ist es, zur Gesamtfläche

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \bigcup_{j=1}^{m'} \mathcal{S}_{i_j},$$

eine globale Parametrisierung $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \bar{\mathbf{S}}(\bar{D})$ zu erzeugen. Die Autoren gehen dabei in den folgenden Teilschritten vor.

3 Spezielle Verfahren der Gittergenerierung

- Interpretiert man die Flächen von \mathcal{F} als Vierecke, so bildet die Menge aller Ecken $V(\mathcal{F})$ von \mathcal{F} ein Vierecksgitter \mathcal{Q} . Dieses wird in die Ebene auf ein planares Gitter $\bar{\mathcal{Q}}$ projiziert. Als Projektionsverfahren untersuchten Samareh-Abolhassani und Stewart unter Anderem die uniforme, chordale und zentripetale Parametrisierung. Im Abschnitt 4 werden diese Projektionen für Triangulierungen erläutert.
- Zu jeder Fläche $\mathcal{S}_i, i \in \{i_1, \dots, i_{m'}\}$, existiert genau ein Viereck $Q_i \in \mathcal{Q}$ und somit genau ein Viereck $\bar{Q}_i \in \bar{\mathcal{Q}}$. \bar{Q}_i wird als neuer Parameterbereich \bar{D}_i von \mathcal{S}_i verwendet. Der neue zusammenhängende, globale Parameterbereich \bar{D} von $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ ist dann definiert durch

$$\bar{D} = \bigcup_{j=1}^{m'} \bar{D}_{i_j}.$$

- Es sei $B_i, i \in \{i_1, \dots, i_{m'}\}$, die eindeutig bestimmte bilineare Abbildung von \bar{D}_i auf D_i . Mit $\bar{\mathbf{S}}_i := \mathbf{S}_i \circ B_i$ erhält man eine neue Parametrisierung $(\bar{D}_i, \bar{\mathbf{S}}_i)$ von \mathcal{S}_i .
- Die globale Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ von $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ hat schließlich die Form

$$\bar{D} := \bigcup_{j=1}^{m'} \bar{D}_{i_j}, \quad \bar{\mathbf{S}} : \begin{cases} \bar{D} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\bar{u}, \bar{v}) & \rightarrow \bar{\mathbf{S}}_{i_j}(\bar{u}, \bar{v}), \text{ für } (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{D}_{i_j}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Mittels eines beliebigen, planaren Gitteralgorithmus kann nun ein Dreiecks- oder Vierecksgitter in \bar{D} erzeugt werden und mit $\bar{\mathbf{S}}$ auf $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ abgebildet werden.

Der wichtigste Teilschritt in diesem Verfahren ist die geeignete Projektion des Vierecksgitters \mathcal{Q} in die Ebene. In Versuchen lieferte die chordale Parametrisierung, laut Samareh-Abolhassani und Stewart [45], die besten Ergebnisse.

Beispiel 3.3

In Abbildung 3.4 ist eine Geometrie \mathcal{G} aus 294 bilinearen Flächen zu sehen. Die Geometrie bildet einen gekrümmten Würfel. Abbildung 3.5 zeigt einen Flächenverband $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, welcher aus 12 Flächen besteht. Die Flächen entsprechen der linken oberen Ecke der vorderen Seite des *Würfels*. Die Ecken und Kanten von \mathcal{F} bilden ein Vierecksgitter \mathcal{Q} . Durch uniforme Projektion dieses Gitters in die Ebene, erhält man den globalen Parameterbereich \bar{D} von $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$.

Als nächstes werden zwei Verfahren vorgestellt, welche im Parameterbereich D einer parametrisierten Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ arbeiten. Hierbei handelt es sich um modifizierte planare Delaunay- bzw. Advancing-Front-Verfahren.

3.2.1.2 Delaunay-Triangulierungen für gekrümmte Flächen

Gegeben sei eine Fläche \mathcal{S} mit zugehöriger Parametrisierung (D, \mathbf{S}) . Chen und Bishop [8] simulieren ein Delaunay-Verfahren auf der Oberfläche \mathcal{S} . Das resultierende Gitter wird somit eine Triangulierung \mathcal{T} im \mathbb{R}^3 sein.

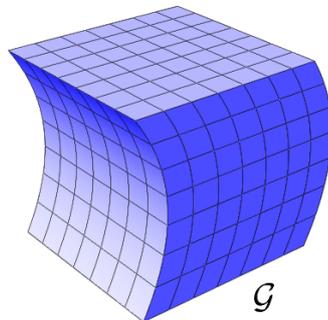


Abbildung 3.4: Eine Geometrie \mathcal{G} , welche aus 294 parametrisierten Flächen besteht.

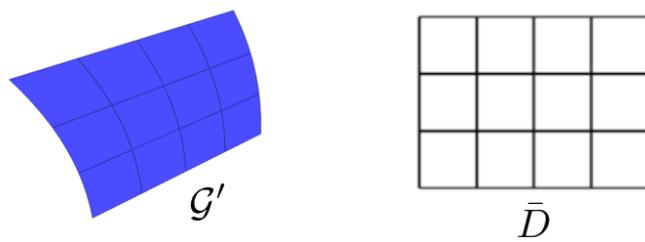


Abbildung 3.5: Ein Flächenverband $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, welcher aus 12 Flächen besteht und der globale Parameterbereich \bar{D} von $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$.

3 Spezielle Verfahren der Gittergenerierung

Zunächst wird der Rand $\partial\mathcal{S}$ der Oberfläche \mathcal{S} durch einen Polygonzug approximiert. Die Ecken des Polygonzuges werden zu einer groben Triangulierung \mathcal{T} verbunden. Vom Benutzer werden folgende Schranken für ein Dreieck $T \in \mathcal{T}$ vorgegeben

- maximaler Abstand ϵ von T zu \mathcal{S} ,
- minimaler Winkel α des kleinsten Winkels von T ,
- maximale Fläche A von T .

Ein Dreieck $T \in \mathcal{T}$ wird verfeinert, wenn eine der gegebenen Schranken überschritten bzw. unterschritten wird. Die Verfeinerung erfolgt im Parameterbereich D der Fläche \mathcal{S} unter Einhaltung des Delaunay-Kriteriums. Jedem Dreieck $T = \Delta\mathbf{uvw} \in \mathcal{T}$ wird das Dreieck $\tilde{T} = \Delta\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{u})\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{v})\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{w}) \subset \mathbb{R}^2$ zugewiesen. So erhält man eine neue Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{T} | T \in \mathcal{T}\}$. Zu jedem Dreieck aus \mathcal{T} existiert nun ein eindeutig bestimmtes Dreieck aus $\tilde{\mathcal{T}}$ und umgekehrt. Die Verfeinerung eines Dreiecks $T \in \mathcal{T}$ erfolgt nun folgendermaßen.

1. Berechne den Schwerpunkt $\hat{\mathbf{v}}$ des Dreiecks \tilde{T} .
2. Bestimme alle Dreiecke $\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_m, \in \tilde{\mathcal{T}}, m \in \mathbb{N}$, in deren Umkreis $\hat{\mathbf{v}}$ liegt.
3. Verbinde $\hat{\mathbf{v}}$ mit allen Ecken der Dreiecke $\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_m$. Kanten, die dabei geschnitten werden, werden entfernt.
4. Füge die Ecke $\mathbf{S}(\hat{\mathbf{v}})$ zu $V(\mathcal{T})$ hinzu und führe die *Kantenoperationen* aus Schritt 3 für die entsprechenden Kanten in \mathcal{T} aus.

Beispiel 3.4

In Abbildung 3.6 ist der Verfeinerungsprozess eines Dreiecks veranschaulicht. Das linke Bild zeigt ein Dreieck \tilde{T} mit Schwerpunkt $\hat{\mathbf{v}}$. Die umliegenden Dreiecke seien diejenigen Dreiecke, in deren Umkreis der Schwerpunkt $\hat{\mathbf{v}}$ liegt. Der Punkt $\hat{\mathbf{v}}$ wird mit den Ecken dieser Dreiecke verbunden, was im mittleren Bild gezeigt wird. Kanten die dabei gekreuzt werden, werden entfernt. Man erhält die Dreiecke, welche im rechten Bild zu sehen sind.

Das vorgestellte Verfahren liefert eine planare Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$, für die alle Dreiecke das *empty circle*-Kriterium erfüllen. Insgesamt erhält man so eine qualitativ gute Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$. Für die zugehörige Triangulierung \mathcal{T} gilt dies im Allgemeinen nicht. Es sei $T = \Delta\mathbf{uvw}$ ein Dreieck der Triangulierung \mathcal{T} . Zu diesem Dreieck existiert genau ein Dreieck $\tilde{T} = \Delta\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{w}}$ in $\tilde{\mathcal{T}}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{u}$, $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{v}$, $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{w}$. Das Dreieck \tilde{T} erfüllt die *empty circle*-Bedingung und ist von guter Qualität. Durch den Übergang von $\tilde{\mathcal{T}}$ zu \mathcal{T} mittels der Abbildung \mathbf{S} kann sich aber die Qualität des Dreiecks verschlechtern.

Um nun eine qualitativ gute Oberflächentriangulierung \mathcal{T} zu erhalten, führen Chen und Bishop in [8] ein *empty ellipse*-Kriterium ein. Es sei $K \subset \mathcal{S}$ der Umkreis des Dreiecks $T = \Delta\mathbf{uvw} \in \mathcal{T}$ im \mathbb{R}^3 . Zu diesem Kreis K wird das Urbild $\tilde{K} = \mathbf{S}^{-1}(K) \subset D$ unter \mathbf{S} betrachtet und durch eine Ellipse \tilde{E} approximiert. Weiter sei $\tilde{T} = \Delta\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{w}} \in \tilde{\mathcal{T}}$ das

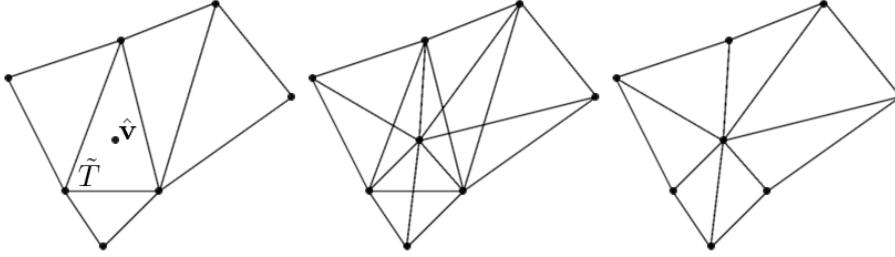


Abbildung 3.6: Verfeinerung eines Dreiecks \tilde{T} mit Schwerpunkt $\hat{\mathbf{v}}$. Zu sehen sind die Dreiecke, in deren Umkreis der Punkt $\hat{\mathbf{v}}$ liegt. $\hat{\mathbf{v}}$ wird mit den Ecken dieser Dreiecke verbunden. Kanten die geschnitten werden, werden entfernt.

eindeutig bestimmte Urbild von \mathcal{T} . Das Dreieck T erfüllt die *empty ellipse*-Bedingung, wenn die Ellipse \tilde{E} keine Ecke aus $V(\tilde{\mathcal{T}}) \setminus \{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}\}$ enthält. Entsprechend gilt dann, dass $\mathbf{S}(\tilde{E}) \approx K$ keine Ecke aus $V(\mathcal{T}) \setminus \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ enthält. Die *empty ellipse*-Bedingung kann also als eine *empty circle*-Bedingung für Oberflächentriangulierungen aufgefasst werden. Der endgültige Algorithmus zur Erzeugung einer Triangulierung \mathcal{T} auf der Oberfläche \mathcal{S} hat dieselbe Form wie das bereits beschriebene Verfahren. Es wird lediglich die Methode zur Verfeinerung eines Dreiecks $T \in \mathcal{T}$ modifiziert. In Schritt zwei der Verfeinerung werden nun nicht mehr die Umkreise der Dreiecke $\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_m \in \tilde{\mathcal{T}}$ betrachtet, sondern die entsprechenden Ellipsen aus der *empty ellipse*-Bedingung, bezogen auf die zugehörigen Dreiecke $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}$.

George und Borouchaki [23] verfolgen ebenfalls einen Delaunay-Ansatz im Parameterbereich. Auch hier wird die *empty-circle*-Bedingung durch eine *empty-ellipse*-Bedingung ersetzt.

3.2.1.3 Eine adaptive Methode zur automatischen Triangulierung von parametrisierten 3D-Flächen

Das Verfahren von Cuillière [9] ist ein Advancing-Front-Algorithmus zur Erzeugung von Triangulierungen auf parametrisierten Flächen. Es sei $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ eine parametrisierte Fläche. Zunächst wird eine planare Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$ im Parameterbereich D erzeugt. Die Ecken von $\tilde{\mathcal{T}}$ werden dann mittels \mathbf{S} auf \mathcal{S} abgebildet. Durch $\mathcal{T} = \{\Delta \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{v}})\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{w}}) | \Delta \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{w}}\}$ erhält man dann eine Triangulierung auf der Fläche \mathcal{S} . Bei der Erzeugung eines neuen Dreiecks \tilde{T} in der Ebene, bzw. dem entsprechenden Dreieck T auf der Fläche \mathcal{S} , werden zwei Aspekte besonders berücksichtigt.

1. T soll im besten Fall gleichseitig sein.
2. Der Abstand von T zur Fläche \mathcal{S} soll nicht größer als eine vorgegebene Toleranz ϵ sein.

3 Spezielle Verfahren der Gittergenerierung

Die zweite Bedingung wird realisiert, indem jede Kante eines Dreiecks eine gewisse Maximallänge nicht überschreiten darf. Hierzu wird eine sogenannte *Eckendichtefunktion* E_d verwendet, welche von den kartesischen Koordinaten einer Ecke \mathbf{v} abhängt. $E_d(\mathbf{v})$ gibt dann an, wie groß der Abstand einer Nachbarcke \mathbf{w} zur Ecke \mathbf{v} maximal sein darf. Die Eckendichtefunktion E_d wird mit Hilfe der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von \mathbf{S} bestimmt. Für Details wird hier auf [9] verwiesen.

Erzeugung einer planaren Triangulierung

Wie bereits erwähnt, handelt es sich bei diesem Verfahren um einen Advancing-Front-Algorithmus. Das Verfahren wird zunächst für ein planares Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ erläutert. Es sei E die aktuelle Front. Aus E wird eine Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ mit minimaler Länge ausgewählt. Zu dieser Kante wird die neue Ecke \mathbf{v}_N bestimmt, welche zu den Ecken \mathbf{v} und \mathbf{w} den Abstand

$$d = \alpha \frac{E_d(\mathbf{v}) + E_d(\mathbf{w})}{2} + (1 - \alpha) \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2, \quad \alpha \in [0, 1], \quad (3.2)$$

hat. Das Dreieck $\Delta \mathbf{v} \mathbf{w} \mathbf{v}_N$ ist gleichschenkelig. Für $\alpha = 0$ erhält man ein gleichseitiges Dreieck. Wählt man hingegen $\alpha = 1$, so wird nur berücksichtigt, ob die Abstandstoleranz ϵ eingehalten wird. Cuillère schlägt die Wahl $\alpha = 0.7$ vor, um beide Anforderungen gegeneinander abzuwägen. Existiert in der aktuellen Front eine weitere Ecke $\mathbf{v}_{N'}$, welche zu \mathbf{v}_N den Abstand $r \leq \frac{3}{4}d$ hat, so wird mit dieser Ecke das neue Dreieck erzeugt.

Neu erzeugte Kanten werden zu der Front E hinzugefügt. In einem Aktualisierungsprozess werden *geeignete* Kanten aus der Front E entfernt. Wie die Aktualisierung der Front realisiert wird, wird in [9] nicht erläutert. Das Verfahren stoppt, wenn die Front leer ist.

Erzeugung einer Triangulierung auf einer parametrisierten Fläche

Das beschriebene Verfahren zur Erzeugung einer planaren Triangulierung wird nun erweitert, um eine Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$ im Parameterbereich D der Fläche \mathcal{S} zu erzeugen.

Die Abstands- und Winkelmessung erfolgt dabei auf der Fläche \mathcal{S} . Zunächst wird der Abstand zwischen zwei Punkten $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}} \in D$ als die Bogenlänge der Kurve $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{w}}} = \mathbf{S} \circ \underline{\mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{w}}}(I)$ neu definiert. Hierbei ist $(I, \underline{\mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{w}}})$ eine Parametrisierung der Verbindungsstrecke von $\tilde{\mathbf{v}}$ nach $\tilde{\mathbf{w}}$ in D . Entsprechend wird die Länge einer Kante $[\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}]$ definiert. Es sei nun $[\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}]$ eine Kante aus der aktuellen Front E mit minimaler Länge. Es sei weiter $\tilde{\mathbf{v}}_M$ der Mittelpunkt dieser Strecke. Die neue Ecke $\tilde{\mathbf{v}}_N$ wird so gewählt, dass sich die Kurven $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{v}}_M \tilde{\mathbf{v}}_N}$ und $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{w}}}$ im Punkt $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{v}}_M)$ senkrecht schneiden und die Kante $[\mathbf{v}_M, \mathbf{v}_N]$ die Länge d gemäß Gleichung (3.2) hat.

Eine zum gerade vorgestellten Verfahren äquivalente Methode wurde von Tristano, Owen und Canann [54] entwickelt.

3.2.2 Direkte 3D-Verfahren

Bei der Gruppe der direkten 3D-Verfahren wird das Netz direkt, ohne Umweg über den Parameterbereich, auf der Oberfläche erzeugt.

3.2.2.1 Verallgemeinertes 3D-Paving: Ein Algorithmus zur Erzeugung von Vierecksgittern auf Oberflächen

Das Verfahren von Cass, Benzley, Meyers und Blacker [7] ist ein Advancing-Front-Verfahren zur Erzeugung eines Vierecksgitters \mathcal{Q} auf einer getrimmten parametrisierten Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$. In jeder Iteration dieses Verfahrens wird eine komplette Reihe von Vierecken entlang der aktuellen Front E erzeugt. Diese spezielle Klasse von Advancing-Front-Verfahren heißen **Paving-Verfahren**.

Konstruktion eines neuen Vierecks

Es seien $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2], [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] \in E$ zwei benachbarte Kanten aus der aktuellen Front E . Die Ecken $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathcal{S}$ werden orthogonal in die Tangentialebene der Fläche \mathcal{S} im Punkt \mathbf{v}_2 auf die Ecken $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{v}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3$ projiziert. Es seien d_1, d_2 die Längen der Kanten $[\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2], [\tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3]$ und α der eingeschlossene Winkel. Es gelte

$$\pi - \sigma_1 < \alpha \leq \pi + \sigma_2, \quad (3.3)$$

für vorgegebene Toleranzen $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$. Die Ecken $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3$ sind für kleine Toleranzen σ_1, σ_2 *fast kollinear*. Es wird nun

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_2 &= \tilde{\mathbf{v}}_2 + d \cdot \vec{\mathbf{v}}, \\ d &= \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{1}{\sin(\frac{\alpha}{2})}, \end{aligned}$$

gesetzt. Hierbei ist $\vec{\mathbf{v}}$ derjenige normierte Vektor, welcher den Winkel α zwischen den Kanten $[\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2], [\tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3]$ in $\tilde{\mathbf{v}}_2$ halbiert. Da die Ecke $\bar{\mathbf{v}}_2$ in der Regel nicht auf der Fläche \mathcal{S} liegt, erhält man schließlich $\hat{\mathbf{v}}_2 \in \mathcal{S}$ durch orthogonale Projektion auf \mathcal{S} .

Nach dem gleichen Prinzip wird für jede Ecke \mathbf{v} in der aktuellen Front E eine neue Ecke $\hat{\mathbf{v}}$ konstruiert. Hierbei wird jede Ecke \mathbf{v} in Abhängigkeit vom Winkel α der in \mathbf{v} benachbarten Kanten klassifiziert. Erfüllt α Bedingung (3.3), so wird, wie gerade beschrieben, vorgegangen. Für andere Fälle von α werden Variationen des beschriebenen Verfahrens durchgeführt. Genauere Details für die Fallunterscheidung finden sich in [5].

Mit der erzeugten Menge von neuen Ecken wird eine neue Reihe von Vierecken konstruiert. Ist $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ eine Kante der aktuellen Front und sind $\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2$ die entsprechenden neuen Ecken, so bildet $Q = \square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \hat{\mathbf{v}}_2 \hat{\mathbf{v}}_1}$ ein neues Viereck.

Kollisionsbestimmung

Wird ein neues Viereck Q erzeugt, so ist es möglich, dass es ein bereits existierendes Viereck \bar{Q} schneidet. Dies wird als **Kollision** bezeichnet. Im zweidimensionalen Fall ist die Kollisionsbestimmung zweier Vierecke einfach, da nur festgestellt werden muss ob sich zwei Kanten schneiden. Im dreidimensionalen Fall hingegen können sich Vierecke schneiden, ohne dass dies für ihre Kanten der Fall ist. Aufgrund dieser Tatsache wird ein **Nachbarschaftskriterium** für Kanten eingeführt. Es seien $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ bzw. $[\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2]$ Kanten der Vierecke Q bzw. \bar{Q} . Weiter seien $\vec{\mathbf{u}}$ bzw. $\vec{\mathbf{v}}$ normierte Richtungsvektoren dieser Kanten. $\vec{\mathbf{u}}$ und $\vec{\mathbf{v}}$ seien derart orientiert, dass $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \geq 0$ gilt. d_1, d_2 seien die Längen der Kanten $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2], [\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2]$ und d sei der Abstand zwischen den Kanten. Das Nachbarschaftskriterium ist eine Zahl $0 \leq F \in \mathbb{R}$, welche die Summe von drei Teilkriterien ist.

3 Spezielle Verfahren der Gittergenerierung

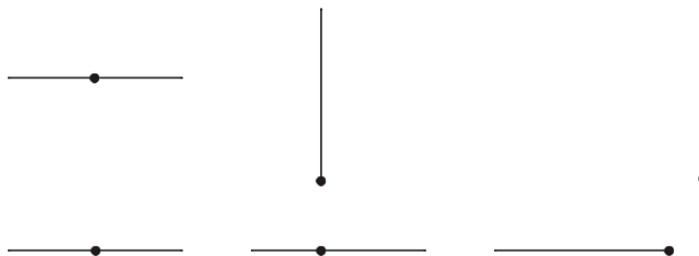


Abbildung 3.7: Zu sehen sind die drei möglichen Fälle, in welchen Punkten der Abstand zwischen zwei Kanten angenommen werden kann. Links: Innerer Punkt zu innerer Punkt. Mitte: Innerer Punkt zu Endpunkt. Rechts: Endpunkt zu Endpunkt.

Es gilt

$$F = F_D + F_A + F_C$$

$$F_D = f_D \cdot \frac{d}{s}, \quad F_A = f_A \cdot (1 - \vec{u} \cdot \vec{v}), \quad F_C = f_C \cdot C.$$

F_D bewertet den Abstand d der Kanten in Relation zum arithmetischen Mittel s ihrer Längen. F_A bestimmt den Grad der Parallelität der betrachteten Kanten. F_C gibt an, in welchen Punkten der Abstand zwischen den Kanten angenommen wird

$$C = \begin{cases} 0 & : \text{ innerer Punkt zu innerer Punkt} \\ 1 & : \text{ innerer Punkt zu Endpunkt} \\ 2 & : \text{ Endpunkt zu Endpunkt} \end{cases}.$$

Abbildung 3.7 veranschaulicht die drei möglichen Situationen. f_D, f_A, f_C sind Gewichte, die den einzelnen Kriterien eine Relevanz zuordnen. Bei dem vorliegenden Verfahren wurden die Gewichte folgendermaßen gewählt

$$f_D = \frac{1}{0.45}, \quad f_A = 0.25, \quad f_C = 0.1.$$

Ist $F < 1$, so werden die Kanten miteinander verbunden. Hierbei werden je nach Situation zwei verschiedene Methoden verwendet.

1. Beide Kanten werden zu einer Kante vereint. Es entsteht kein neues Viereck.
2. Es wird ein neues Viereck \hat{Q} erzeugt. Die untersuchten Kanten bilden zwei gegenüberliegende Kanten des neuen Vierecks.

Beispiel 3.5

Die erste Methode ist in Abbildung 3.8 illustriert. Die gegenüberliegenden Kanten der Vierecke Q_1, Q_2 werden zu einer Kante vereinigt. Die Form beider Vierecke ändert sich. In Abbildung 3.9 ist die zweite Vorgehensweise veranschaulicht. Die gegenüberliegenden Kanten der Vierecke Q_1, Q_2 werden zu einem dritten Viereck Q_3 verbunden.

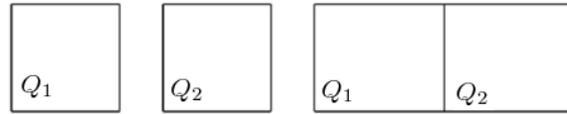


Abbildung 3.8: Die gegenüberliegenden Kanten der Vierecke Q_1, Q_2 werden zu einer Kante vereint.



Abbildung 3.9: Die gegenüberliegenden Kanten der Vierecke Q_1, Q_2 werden zu einem neuen Viereck Q_3 verbunden.

Ein weiteres Beispiel für ein direktes Verfahren wurde von Lau, Lo entwickelt [34]. Hierbei handelt es sich um ein Advancing-Front-Verfahren zur Erzeugung von Dreiecksnetzen. Aus der aktuellen Front wird eine Kante ausgewählt und ein neues Dreieck tangential zur Fläche konstruiert. Der neu erzeugte Punkt dieses Dreiecks wird dann auf die Fläche projiziert. Ein entsprechendes Verfahren für Vierecksnetze wurde ebenfalls entwickelt [35].

3.3 Umwandlung: Dreiecksnetz zu Vierecksnetz

Der größte Teil der hier vorgestellten Verfahren erzeugt nur Dreiecksnetze auf parametrisierten Oberflächen. Es gibt zwei Standardmethoden, um diese in Vierecksnetze umzuwandeln.

1. Vereinige zwei benachbarte Dreiecke zu einem Viereck.
2. Verbinde einen inneren Punkt eines Dreiecks mit den Seitenmitten. So werden aus einem Dreieck drei Vierecke.

Beispiel 3.6

Bei der ersten Methode bleiben meist sehr viele Dreiecke übrig, wie in Abbildung 3.10 zu sehen ist. In diesem Beispiel besteht die erzeugte Triangulierung aus vier Dreiecken $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$. Unabhängig davon, welche Dreiecke zu einem Viereck Q vereinigt werden, bleiben immer zwei Dreiecke übrig. Der zweite Ansatz ist in Abbildung 3.11 illustriert. Das Dreieck T wird in die Vierecke Q_1, Q_2, Q_3 zerlegt. Dieses Verfahren führt im Allgemeinen zu Vierecken von schlechter Qualität.

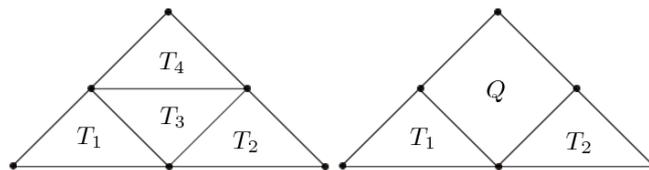


Abbildung 3.10: Egal welche Dreiecke der Triangulierung $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ zu einem Viereck Q vereint werden, es bleiben immer zwei Dreiecke übrig.

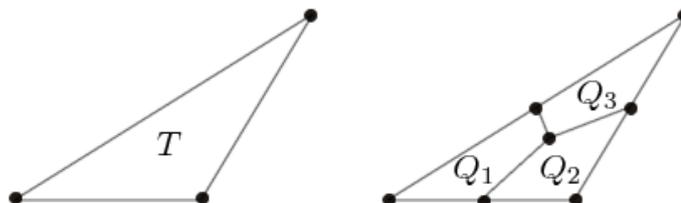


Abbildung 3.11: Das Dreieck T wird in die Vierecke Q_1, Q_2, Q_3 zerlegt.

3.4 Bewertung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit ist ein Verfahren zu entwickeln, welches ein gegebenes Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^3$ durch eine Hierarchie von Hexaedergittern $\mathcal{H}^0, \dots, \mathcal{H}^N$, $N \in \mathbb{N}$, diskretisiert. Der Rand des Gebietes wird durch eine Geometrie \mathcal{G} beschrieben. Die in FEATFLOW übliche Methode zur Erzeugung solch einer Hierarchie ist, das gegebene Grobgitter \mathcal{H}^0 schrittweise gleichmäßig zu unterteilen und in jedem Schritt eine Randanpassung durchzuführen. Dadurch entsteht auf dem Rand des Gebietes eine entsprechende Hierarchie von Vierecksgittern $\mathcal{Q}^0, \dots, \mathcal{Q}^N$. Die meisten der hier vorgestellten Verfahren erzeugen Dreiecksgitter und die beschriebenen Techniken zur Umwandlung eines Dreiecksgitters in ein Vierecksgitter liefern in der Regel unbefriedigende Ergebnisse. Darüber hinaus ist fast keines der untersuchten Verfahren darauf ausgelegt, eine Hierarchie von Gittern zu erzeugen. Eine sinnvolle Randanpassung ist mit diesen Verfahren nicht möglich.

Eine Ausnahme bildet hier das Verfahren von Samareh-Abolhassani und Stewart. Eine Hierarchie von zulässigen Hexaedergittern bezüglich Ω ist mit diesem Verfahren relativ einfach zu konstruieren. Die Grundidee ist hierbei, die gegebene Geometrie $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, in eine Menge von disjunkten Flächenverbänden $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, zu zerlegen und zu jedem dieser Flächenverbände eine globale Parametrisierung zu bestimmen. Anstatt nach der gleichmäßigen Unterteilung des Hexaedergitters \mathcal{H}^i zum Gitter \mathcal{H}^{i+1} eine Randanpassung durchzuführen, werden die Randvierecke von \mathcal{H}^i in den globalen Parameterbereichen der Flächenverbände gleichmäßig unterteilt. Es sei $Q = \square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4} \in F_B(\mathcal{H}^i)$ ein Randviereck des Hexaedergitters \mathcal{H}^i . Des Weiteren existiere ein Flächenverband $\mathcal{F}_j \in \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n\}$ mit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}_j}$. Schließlich

seien $\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \bar{\mathbf{v}}_3, \bar{\mathbf{v}}_4 \in D_j$ die Parameterwerte der Ecken $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ bezüglich der Parametrisierung $(\bar{D}_j, \bar{\mathbf{S}}_j)$ des Flächenverbandes \mathcal{F}_j . Das Viereck $\bar{\mathcal{Q}} = \square_{\bar{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_2 \bar{\mathbf{v}}_3 \bar{\mathbf{v}}_4}$ wird nun gleichmäßig unterteilt. Die neu entstandenen Ecken werden mittels $\bar{\mathbf{S}}_j$ auf $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_j} \subset \Omega$ abgebildet. Damit ist die Unterteilung des Randvierecks $\mathcal{Q} = \square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4}$ abgeschlossen. Eine anschließende Randanpassung ist nicht mehr nötig.

Zu beachten ist, dass das Verfahren von Samareh-Abolhassani und Stewart starke Bedingungen an die Geometrie \mathcal{G} stellt. Keine der NURBS-Flächen aus \mathcal{G} darf getrimmt sein und \mathcal{G} muss ein strukturiertes Gitter bilden. Die Menge der beschreibbaren Gebiete Ω wird so beträchtlich eingeschränkt. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird beschrieben, wie das Verfahren derart modifiziert wird, so dass es auch auf allgemeine Geometrien \mathcal{G} anwendbar ist. Der Kernpunkt des alten Verfahrens ist die Projektion der Ecken $V(\mathcal{F})$ eines gegebenen Flächenverbandes \mathcal{F} in die Ebene. Diese Ecken bilden ein strukturiertes Vierecksgitter \mathcal{Q} . Im modifizierten Verfahren wird der Flächenverband \mathcal{F} durch eine Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ approximiert und diese Triangulierung wird dann in die Ebene projiziert. Im nächsten Kapitel werden verschiedene Projektionsverfahren für Triangulierungen untersucht. Im darauf folgenden Kapitel wird dann das modifizierte Verfahren detailliert beschrieben.

4 Lineare Projektionsverfahren für Triangulierungen

In diesem Kapitel werden verschiedene lineare Projektionsverfahren für Triangulierungen vorgestellt. Hierbei werden nur offene Triangulierungen betrachtet. Zusätzlich wird verlangt, dass die Fläche $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ einer Triangulierung \mathcal{T} **einfach zusammenhängend** ist. In diesem Fall ist der Rand $\partial\mathcal{T}$ ein geschlossener Polygonzug. Im Weiteren wird vorausgesetzt, dass eine gegebene Triangulierung \mathcal{T} die genannten Bedingungen erfüllt. Eine Projektion ist folgendermaßen definiert.

Definition 4.1

Es sei $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine offene Triangulierung mit einfach zusammenhängender Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$. Eine **Projektion von \mathcal{T}** ist eine stetige Abbildung $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ist die Abbildung ψ stückweise affin, d. h. ist die Einschränkung $\psi|_{T}$ für jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}$ eine affine Abbildung, so wird ψ als **lineare Projektion von \mathcal{T}** bezeichnet.

Üblicherweise wird zusätzlich verlangt, dass die Abbildung ψ injektiv ist. Da nicht alle Verfahren, die hier vorgestellt werden, immer garantieren können, eine injektive Projektion zu liefern, wird in der Definition der Projektion auf die Eigenschaft *injektiv* verzichtet. Stattdessen wird ausdrücklich darauf hingewiesen, ob ein Verfahren Injektivität garantieren kann oder nicht.

Das eigentliche Ziel von Projektionsverfahren ist die Erzeugung einer Parametrisierung für die gegebene Triangulierung. Es sei $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Projektion der Triangulierung \mathcal{T} . Ist ψ ein Homöomorphismus, so erhält man mit $D = \psi(\mathcal{S}_{\mathcal{T}})$ und $\phi := \psi^{-1}$ eine Parametrisierung (D, ϕ) von $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$. Diese wird als **Parametrisierung von \mathcal{T} bezüglich ψ** bezeichnet. Eine typische Anwendung für solch eine Parametrisierung ist das sogenannte **Texture-Mapping**.

Texture-Mapping

Objekte in Computerspielen werden, unter anderem, durch Triangulierungen dargestellt. Um diese Objekte realistisch darzustellen, werden sie mit einer Textur *überzogen*. Dazu wird die Textur im Parameterbereich D *gezeichnet* und mit Hilfe der Abbildung ϕ auf die Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ der Triangulierung \mathcal{T} abgebildet. Idealerweise ist ϕ eine Isometrie, denn dann wird die Textur nicht verzerrt.

Beispiel 4.2

Abbildung 4.1 zeigt ein Beispiel für Texture-Mapping. Zu sehen ist eine Triangulierung \mathcal{T} (mittleres Bild). Zu dieser existiert eine Parametrisierung (D, ϕ) . Der Parameterbereich D wird durch das Logo der Technischen Universität Dortmund *ausgefüllt* (linkes Bild). Dieses Bild wird mittels der Abbildung ϕ auf die Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ der Triangulierung abgebildet. Das Resultat ist im rechten Bild zu sehen.

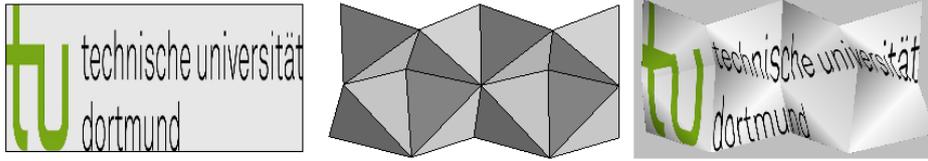


Abbildung 4.1: Auf die Oberfläche der Triangulierung \mathcal{T} (mittleres Bild) wird das Logo der Technischen Universität Dortmund aufgetragen. Dazu wird das Bild im Parameterbereich D gezeichnet (linkes Bild) und mittels der Abbildung ϕ auf die Triangulierung abgebildet (rechtes Bild).

Das Ziel dieser Arbeit ist es, mit Hilfe von linearen Projektionen für Triangulierungen zu einem gegebenem Flächenverband $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine globale Parametrisierung $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \bar{\mathbf{S}}(\bar{D})$ mit konvexem Parameterbereich \bar{D} zu erzeugen. Aus zwei wichtigen Gründen soll der Parameterbereich konvex sein. Die Klasse der Konvex-Kombinations-Projektionen (siehe Abschnitt 4.2.2.1) für Triangulierungen bildet eine wesentliche Grundlage des Verfahrens zur Konstruktion der globalen Parametrisierung. Projiziert man den Rand einer gegebenen Triangulierung auf ein konvexes Polygon, so ist es immer möglich, eine injektive Konvex-Kombinations-Projektion für die gesamte Triangulierung zu konstruieren. Die Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ kann dann zur Verfeinerung von Vierecks-Gittern auf der Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ verwendet werden. Die Unterteilung eines gegebenen Quadrates $Q = \square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4}$, dessen Ecken sich auf der Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ befinden, erfolgt im Parameterbereich \bar{D} . Dazu wird das Viereck $\bar{Q} = \square_{\bar{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_2 \bar{\mathbf{v}}_3 \bar{\mathbf{v}}_4}$, $\bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, \dots, 4$, im Parameterbereich \bar{D} unterteilt. Die neu erzeugten Parameterwerte werden dann mittels $\bar{\mathbf{S}}$ auf $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ abgebildet. So ist garantiert, dass neu erzeugte Gitterpunkte immer auf der Fläche $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ liegen. Da der Parameterbereich \bar{D} konvex ist, ist die Unterteilung von Strecken $[\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2]$ in \bar{D} problemlos möglich. Ein neu erzeugter Parameterwert $\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_2)$ liegt immer in \bar{D} . Ein spezieller zeitintensiver Test, ob $\bar{\mathbf{v}} \in \bar{D}$ gilt, entfällt. Des Weiteren wird die gegebenenfalls *schlechte* Parametrisierung (D, \mathbf{S}) einer NURBS-Fläche $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ *verbessert*. In den Artikeln der Projektionsverfahren, welche in diesem Kapitel noch vorgestellt werden, wurde lediglich die Qualität der Parametrisierungen von Triangulierungen untersucht. Eine entsprechende Untersuchung für NURBS-Flächen oder Flächenverbände fehlt.

Beispiel 4.3

Abbildung 4.2 zeigt zwei Vierecksgitter, welche durch mehrfache gleichmäßige Unterteilung des Vierecks $Q = \square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4}$, $\mathbf{v}_1 = (0 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{v}_2 = (50 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{v}_3 = (50 \ 50 \ 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0 \ 50 \ 0)$ entstanden sind. \hat{Q}^4 entstand durch Unterteilung im Parameterbereich einer *schlechten* NURBS-Parametrisierung $(\hat{D}, \hat{\mathbf{S}})$ von Q . \tilde{Q}^4 entstand durch Unterteilung im Parameterbereich der Parametrisierung $(\tilde{D}, \tilde{\mathbf{S}})$, welche eine Umparametrisierung von $(\hat{D}, \hat{\mathbf{S}})$ ist. Deutlich ist zu sehen, dass die schlechte Parametrisierung $(\hat{D}, \hat{\mathbf{S}})$ ein schlechtes, unregelmäßiges Gitter \hat{Q}^4 liefert. Mittels des in Kapitel 5 vorgestellten Verfahrens wird die Umparametrisierung $(\tilde{D}, \tilde{\mathbf{S}})$ erzeugt. Mit dieser ergibt sich ein gleichmäßiges

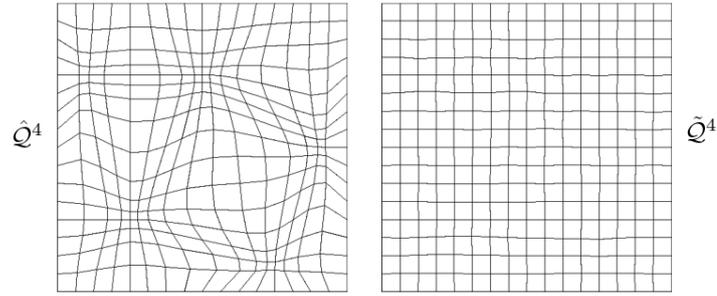


Abbildung 4.2: Zwei Vierecksgitter, welche durch mehrfache gleichmäßige Unterteilung des Vierecks $Q = \square_{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4}$, $\mathbf{v}_1 = (0 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{v}_2 = (50 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{v}_3 = (50 \ 50 \ 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0 \ 50 \ 0)$ entstanden sind. \hat{Q}^4 entstand durch Unterteilung im Parameterbereich einer schlechten NURBS-Parametrisierung (\hat{D}, \hat{S}) . \tilde{Q}^4 entstand durch Unterteilung im Parameterbereich der Parametrisierung (\tilde{D}, \tilde{S}) , welche eine Umparametrisierung von (\hat{D}, \hat{S}) ist.

Gitter \tilde{Q}^4 .

In Abbildung 4.3 ist ein Flächenverband \mathcal{F} zu sehen, welcher aus sechs Flächen besteht. Die Oberfläche von \mathcal{F} entspricht dem Viereck $Q = \square_{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4}$, $\mathbf{v}_1 = (0 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{v}_2 = (50 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{v}_3 = (50 \ 50 \ 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0 \ 50 \ 0)$. Zu \mathcal{F} wurde die globale Parametrisierung (\bar{D}, \bar{S}) gemäß dem Verfahren in Kapitel 5 erzeugt. Durch vierfache gleichmäßige Unterteilung von Q im Parameterbereich \bar{D} entstand das Gitter \tilde{Q}^4 . Wie klar zu erkennen ist, liegen alle Punkte von \tilde{Q}^4 auf der Oberfläche von \mathcal{F} . Eine Unterteilung von Viereckskanten über mehrere Flächen hinweg stellt kein Problem dar. Eine detaillierte Untersuchung der Parametrisierungen findet sich in den Beispielen 5.5 und 5.6 im folgendem Kapitel.

4.1 Eigenschaften von linearen Projektionen

4.1.1 Beschreibung von linearen Projektionen

Im Folgenden wird erläutert, wie eine lineare Projektion ψ und die zugehörige Parametrisierung ϕ mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten beschrieben werden können. Es sei also $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Projektion der Triangulierung $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Projektion ψ ist durch die Bilder der Ecken $\psi(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in V(\mathcal{T})$, eindeutig bestimmt. Im Weiteren wird $\bar{\mathbf{v}} = \psi(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in V(\mathcal{T})$, als **Parameterwert** der Ecke \mathbf{v} bezeichnet. Es sei nun $T_i = \triangle_{\mathbf{v}_1^i\mathbf{v}_2^i\mathbf{v}_3^i}$ ein Dreieck der Triangulierung \mathcal{T} . Die Einschränkung von ψ auf T_i hat dann die Form

$$\begin{aligned} \psi|_{T_i} : \begin{cases} T_i \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{v} \rightarrow \psi(\mathbf{v}) \end{cases}, \\ \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1^i + \lambda_2 \mathbf{v}_2^i + \lambda_3 \mathbf{v}_3^i, \\ \psi(\mathbf{v}) = \lambda_1 \bar{\mathbf{v}}_1^i + \lambda_2 \bar{\mathbf{v}}_2^i + \lambda_3 \bar{\mathbf{v}}_3^i. \end{aligned} \quad (4.1)$$

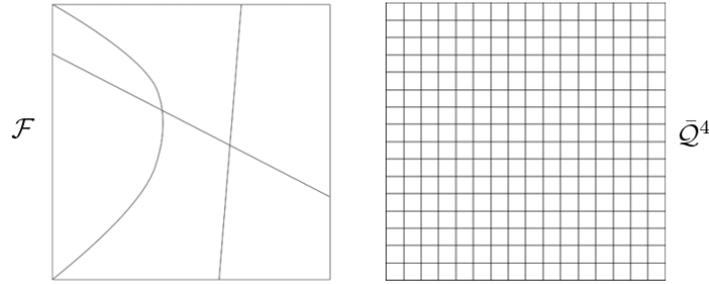


Abbildung 4.3: \mathcal{F} ist ein Flächenverband, welcher aus sechs Flächen besteht. Die Oberfläche von \mathcal{F} entspricht dem Viereck $Q = \square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4}$, $\mathbf{v}_1 = (0 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{v}_2 = (50 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{v}_3 = (50 \ 50 \ 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0 \ 50 \ 0)$. Zu \mathcal{F} wurde die globale Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ erzeugt. Durch vierfache gleichmäßige Unterteilung von Q im Parameterbereich \bar{D} entstand das Gitter \bar{Q}^4 .

Hierbei sind $\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{v}, T_i)$, $j = 1, 2, 3$, die baryzentrischen Koordinaten von \mathbf{v} bezüglich des Dreiecks T_i . Es sei nun

$$\bar{T}_i = \triangle \bar{\mathbf{v}}_1^i \bar{\mathbf{v}}_2^i \bar{\mathbf{v}}_3^i = \psi(T_i) \subset \mathbb{R}^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Falls ψ injektiv ist, ist der Schnitt zweier Dreiecke aus $\bar{\mathcal{T}}$ entweder die leere Menge oder eine Ecke oder eine Kante. Somit ist $\bar{\mathcal{T}} = \{\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_n\}$ eine Triangulierung. Diese hat die gleiche Konnektivität wie \mathcal{T} . Setzt man $D = \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{T}}}$ und $\phi = \psi^{-1}$ so ist, (D, ϕ) eine Parametrisierung der Oberfläche $\mathcal{S}_{\bar{\mathcal{T}}}$. Die Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ heißt **Parameterraumtriangulierung von \mathcal{T} bezüglich ψ** . Die Abbildung ϕ ist ebenfalls stückweise affin. Für ein Dreieck $\bar{T}_i \in \bar{\mathcal{T}}$ hat die Einschränkung von ϕ auf \bar{T}_i die Form

$$\begin{aligned} \phi|_{\bar{T}_i} : \begin{cases} \bar{T}_i \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \bar{\mathbf{v}} \rightarrow \phi(\bar{\mathbf{v}}) \end{cases}, \\ \bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}_1 \bar{\mathbf{v}}_1^i + \bar{\lambda}_2 \bar{\mathbf{v}}_2^i + \bar{\lambda}_3 \bar{\mathbf{v}}_3^i, \\ \phi(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\lambda}_1 \mathbf{v}_1^i + \bar{\lambda}_2 \mathbf{v}_2^i + \bar{\lambda}_3 \mathbf{v}_3^i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dabei sind $\bar{\lambda}_j = \bar{\lambda}_j(\bar{\mathbf{v}}, \bar{T}_i)$, $j = 1, 2, 3$, die Baryzentrischen Koordinaten von $\bar{\mathbf{v}}$ bezüglich des Dreiecks \bar{T}_i .

4.1.2 Isometrische Parametrisierungen von Triangulierungen

Es sei (D, ϕ) die Parametrisierung einer gegebenen Triangulierung \mathcal{T} bezüglich einer Projektion $\psi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Weiter seien T ein beliebiges Dreieck von \mathcal{T} und \bar{T} das entsprechende, eindeutig bestimmte Dreieck der Parameterraumtriangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ von \mathcal{T} bezüglich ψ . Die Einschränkung von ϕ auf \bar{T} ist genau dann ein Isometrie, wenn \bar{T} und T kongruent sind. Aufgrund dieser Tatsache ist es das Ziel der meisten Projektionsverfahren, die Form der Triangulierung \mathcal{T} bei der Projektion auf $\bar{\mathcal{T}}$ **so wenig wie möglich**

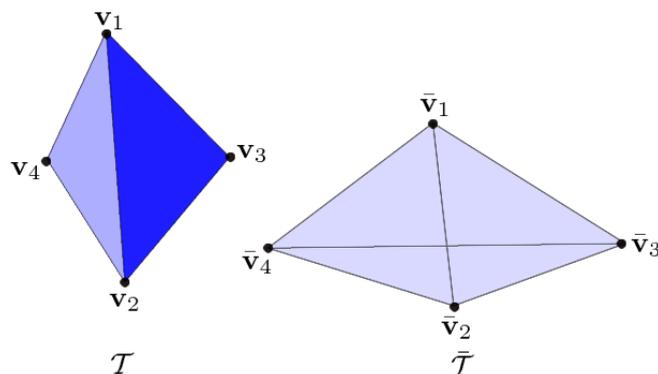


Abbildung 4.4: Zur Triangulierung $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3\}$, mit $T_1 = \Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3$, $T_2 = \Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4$, $T_3 = \Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_4 \mathbf{v}_2$, existiert keine planare Triangulierung $\bar{\mathcal{T}} = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3\}$, so dass alle Dreiecke von \mathcal{T} zu den entsprechenden Dreiecken von $\bar{\mathcal{T}}$ kongruent sind.

zu verändern. Es ist einfach, zu einem beliebigen Dreieck $T \in \mathcal{T}$ eine lineare Projektion ψ so zu definieren, dass die Dreiecke T und \bar{T} kongruent sind. Jedoch existiert in der Regel keine lineare Projektion ψ , so dass dies für alle Dreiecke $T \in \mathcal{T}$ gilt. Dies veranschaulicht das nächste Beispiel.

Beispiel 4.4

Dieses Beispiel wird in Abbildung 4.4 veranschaulicht. Es seien

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{5\pi}{6}) \\ \sin(\frac{5\pi}{6}) \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Die Triangulierung $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3\}$ mit $T_1 = \Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3$, $T_2 = \Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4$, $T_3 = \Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_4 \mathbf{v}_2$ hat die Form eines Tetraeders ohne Grundfläche. Die Dreiecke der Triangulierung \mathcal{T} sind paarweise kongruent. Konstruiert man die Dreiecke \bar{T}_1, \bar{T}_2 so, dass diese kongruent zu T_1, T_2 sind, sind bereits alle Ecken $\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \bar{\mathbf{v}}_3, \bar{\mathbf{v}}_4$ der Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ definiert. Das Dreieck \bar{T}_3 ist nicht kongruent zu T_3 . Außerdem gilt $\bar{T}_3 \subset \bar{T}_1 \cup \bar{T}_2$, also ist $\bar{\mathcal{T}} = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3\}$ keine zulässige Triangulierung.

4.2 Konstruktion von linearen Projektionen

Gegeben sei eine Triangulierung $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$. Dann besteht die allgemeine Vorgehensweise zur Erzeugung einer linearen Projektion $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ aus drei Schritten.

1. Bestimme Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}} = \psi(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2$ zu den Randecken $\mathbf{v} \in V_B(\mathcal{T})$.

2. Definiere für jede Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E(\mathcal{T})$ ein Gewicht $\lambda_{\mathbf{vw}} \in \mathbb{R}$ und erzeuge mit Hilfe dieser Gewichte ein lineares Gleichungssystem.
3. Durch Lösen des Gleichungssystems erhält man die Parameterwerte $\psi(\mathbf{v})$ der inneren Ecken $\mathbf{v} \in V_I(\mathcal{T})$.

Im nächsten Abschnitt werden verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Randparameterwerte $\psi(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in V_B$, erläutert.

4.2.1 Projektion der Randecken

Es sei $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, eine offene Triangulierung mit einfach zusammenhängender Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$. Der Rand $\partial\mathcal{T}$ bildet einen geschlossenen Polygonzug. Im Folgenden gelte für die Randecken $V_B(\mathcal{T})$ und Randkanten $E_B(\mathcal{T})$ der Triangulierung \mathcal{T}

$$\begin{aligned} V_B(\mathcal{T}) &= \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_1, \\ E_B(\mathcal{T}) &= \{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}] \mid i = 1, \dots, n\}, \\ \partial\mathcal{T} &= \bigcup_{i=1}^n [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}]. \end{aligned}$$

Für die Parameterraumtriangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ von \mathcal{T} bezüglich einer linearen Projektion $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist der Rand $\partial\bar{\mathcal{T}}$ ebenfalls ein geschlossener Polygonzug und es gilt entsprechend

$$\begin{aligned} V_B(\bar{\mathcal{T}}) &= \{\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n\}, \quad \bar{\mathbf{v}}_{n+1} = \bar{\mathbf{v}}_1, \\ E_B(\bar{\mathcal{T}}) &= \{[\bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{v}}_{i+1}] \mid i = 1, \dots, n\}, \\ \partial\bar{\mathcal{T}} &= \bigcup_{i=1}^n [\bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{v}}_{i+1}]. \end{aligned}$$

Die Einschränkung ϕ der Parametrisierung (D, ϕ) von \mathcal{T} bezüglich ψ auf den Rand $\partial\bar{\mathcal{T}}$ wird als **Randparametrisierung** $\chi : \partial\bar{\mathcal{T}} \rightarrow \partial\mathcal{T}$ von \mathcal{T} bezeichnet. Die Einschränkung von χ auf eine Kante $[\bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{v}}_{i+1}] \in E_B(\bar{\mathcal{T}})$ lässt sich beschreiben durch

$$\begin{aligned} \chi|_{[\bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{v}}_{i+1}]} &: \begin{cases} [\bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{v}}_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \bar{\mathbf{v}} \rightarrow \chi(\bar{\mathbf{v}}) \end{cases}, \\ \bar{\mathbf{v}} &= (1 - \alpha)\bar{\mathbf{v}}_i + \alpha\bar{\mathbf{v}}_{i+1}, \quad \alpha \in [0, 1], \\ \chi(\bar{\mathbf{v}}) &= (1 - \alpha)\mathbf{v}_i + \alpha\mathbf{v}_{i+1}. \end{aligned}$$

Wie sich im nächsten Abschnitt heraus stellen wird, ist eine wichtige Voraussetzung um die Injektivität der konstruierten Projektion zu garantieren, dass die Randparametrisierung $\partial\bar{\mathcal{T}}$ dem Rand einer konvexen Menge entspricht. Man spricht dann von einer **konvexen Randparametrisierung**. Um dies zu erreichen, wird zunächst eine Kurve $\bar{\mathcal{C}}$ vorgegeben, welche dem Rand einer konvexen Menge entspricht. Dann werden die Ecken $\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$ von $\bar{\mathcal{T}}$ auf der Kurve $\bar{\mathcal{C}}$ der Reihe nach gegen den Uhrzeigersinn angeordnet.

Üblicherweise wird als Kurve \bar{C} der Rand eines Kreises bzw. eines Vierecks gewählt. Zunächst wird erläutert, wie eine Menge von Ecken aus $V(\mathcal{T})$ über einem Intervall parametrisiert wird.

4.2.1.1 Das univariate Federmodell

Es seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V(\mathcal{T})$, $k \in \mathbb{N}$, mit $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}] \in E(\mathcal{T})$, $i = 1, \dots, k-1$. Diese Ecken sollen über das Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ parametrisiert werden. Dazu werden die Kanten $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}]$ als Federn mit den Federkonstanten $D_{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i+1}}$ interpretiert. Die Ecken \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_k werden fixiert, d. h. man setzt

$$\bar{v}_1 = a, \quad \bar{v}_k = b.$$

Die restlichen Ecken werden frei gegeben und das System der Federn sucht sich einen stabilen Zustand minimaler Energie. Die neuen Positionen der Ecken sind dann die Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}_i$. Man bezeichnet dieses Verfahren als **Univariates Federmodell**. Die Gesamtenergie des Federsystems ist

$$E = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} D_{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i+1}} (\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i)^2.$$

Minimierung der Gesamtenergie führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= a, \\ \frac{\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i}{\bar{v}_i - \bar{v}_{i-1}} &= \frac{D_{\mathbf{v}_{i-1} \mathbf{v}_i}}{D_{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i+1}}}, \quad i = 2, \dots, k-1, \\ \bar{v}_k &= b. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist für $D_{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i+1}} > 0$, $i = 1, \dots, k-1$, eindeutig lösbar mit der Lösung

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= a, \\ \bar{v}_i &= \bar{v}_{i-1} + \frac{1}{D_{\mathbf{v}_{i-1} \mathbf{v}_i}} \frac{b-a}{\sum_{j=1}^{k-1} D_{\mathbf{v}_j \mathbf{v}_{j+1}}^{-1}}, \quad i = 2, \dots, k-1, \\ \bar{v}_k &= b. \end{aligned}$$

Setzt man $D_{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i+1}} = \|\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i\|_2^{-p}$, mit $p \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, so erhält man die sogenannte **uniforme, zentripetale** bzw. **chordale** Parametrisierung.

Parametrisierung über eine Strecke

Die Parametrisierung der Ecken $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ über eine beliebige Strecke im \mathbb{R}^2 mit den Endpunkten $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ erfolgt ähnlich. Zunächst werden die Ecken über ein Intervall $[a, b]$ parametrisiert. In der Regel verwendet man die Chordale Parametrisierung mit dem Randwert $a = 0$ und b wird gleich der Gesamtlänge der Kanten gesetzt. Man erhält

entsprechende Parameterwerte t_1, \dots, t_k . Die Positionen auf der Geraden ergeben sich dann aus

$$\psi(\mathbf{v}_i) = \frac{b - t_i}{b - a} \mathbf{a} + \frac{t_i - a}{b - a} \mathbf{b}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Parametrisierung über ein Viereck

Gegeben sei ein Viereck $\mathcal{Q} = \square \mathbf{abcd} \subset \mathbb{R}^2$. Aus dem Rand $\partial \mathcal{T}$ werden vier verschiedene charakteristische Ecken $\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b \mathbf{v}_c \mathbf{v}_d$ ausgewählt. Üblicherweise sind dies Ecken, in denen ein besonders kleiner Winkel vorliegt. Es sei $\mathcal{C}_{ab} \subset \partial \mathcal{T}$ der Polygonzug mit den Endpunkten $\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b$. Entsprechend existieren drei weitere Polygonzüge $\mathcal{C}_{bc}, \mathcal{C}_{cd}, \mathcal{C}_{da}$ und es gilt

$$\partial \mathcal{T} = \mathcal{C}_{ab} \cup \mathcal{C}_{bc} \cup \mathcal{C}_{cd} \cup \mathcal{C}_{da}.$$

Die Ecken des Polygonzugs \mathcal{C}_{ab} werden über die Kante $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ des Vierecks \mathcal{Q} parametrisiert. Entsprechend wird mit den anderen drei Polygonzügen verfahren.

Parametrisierung über einen Kreis

Die Parametrisierung des Randes $\partial \mathcal{T}$ über einen Kreis mit Radius r und dem Mittelpunkt $\bar{\mathbf{v}}_M \in \mathbb{R}^2$ erfolgt folgendermaßen. Zunächst werden die Ecken $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1$ über das Intervall $[0, 2\pi]$ parametrisiert. In der Regel wird auch hier die chordale Parametrisierung gewählt. Dies liefert die Winkel $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in [0, 2\pi]$. Die Parameterwerte der Ecken ergeben sich dann durch

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{v}}_M + r \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

4.2.1.2 Randprojektion für Triangulierungen auf Flächenverbänden

Wird ein Flächenverband \mathcal{F} durch eine Triangulierung \mathcal{T} approximiert, so werden an diese besondere Bedingungen gestellt. Diese Klasse von Triangulierungen wird im nächsten Kapitel eine wichtige Rolle spielen.

Definition 4.5

Eine Triangulierung \mathcal{T} wird als **zulässig** bezüglich eines Flächenverbandes \mathcal{F} bezeichnet, wenn Folgendes gilt:

- $V(\mathcal{F}) \subset V(\mathcal{T}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$,
- Zu jedem Dreieck $T = \Delta \mathbf{uvw} \in \mathcal{T}$ existiert genau eine Fläche $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ mit $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}$.

Die Definition bewirkt folgende Eigenschaft.

Proposition 4.6

Es sei \mathcal{T} eine zulässige Triangulierung bezüglich eines Flächenverbandes \mathcal{F} . Existieren zu einer Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E(\mathcal{T})$ der Triangulierung \mathcal{T} zwei verschiedene Flächen $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathcal{F}$, mit $\mathbf{v} \in \mathcal{S}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}'$, so sind diese Flächen benachbart und es existiert eine Kante $\mathcal{C} \in E(\mathcal{F})$ des Flächenverbandes \mathcal{F} mit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$.

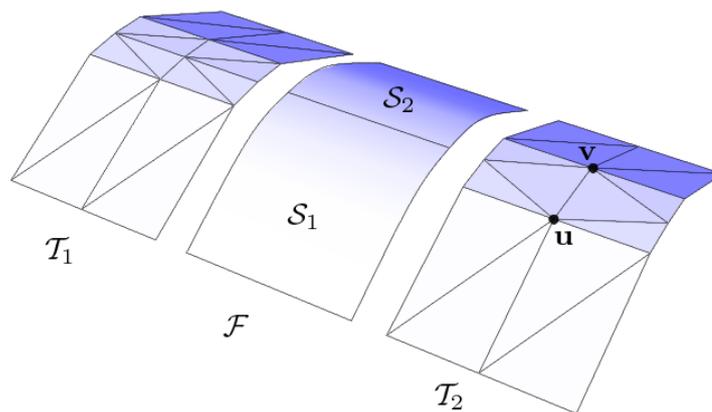


Abbildung 4.5: Der Flächenverband $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$ wird durch die Triangulierung $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ approximiert. \mathcal{T}_1 ist zulässig bezüglich \mathcal{F} . \mathcal{T}_2 ist nicht zulässig, da die Ecken der Kante $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ auf verschiedenen Flächen von \mathcal{F} liegen.

Beispiel 4.7

In Abbildung 4.5 ist ein Flächenverband $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$ zu sehen, welcher durch zwei Triangulierungen $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ approximiert wird. Beide Triangulierungen erfüllen die erste Bedingung aus Definition 4.5. Triangulierung \mathcal{T}_1 erfüllt auch die zweite Bedingung und ist somit zulässig bezüglich des Flächenverbands \mathcal{F} . Triangulierung \mathcal{T}_2 erfüllt die zweite Bedingung nicht. Die Ecke \mathbf{u} der Kante $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in E(\mathcal{T}_2)$ liegt auf der Fläche \mathcal{S}_1 , die Ecke \mathbf{v} hingegen liegt auf der Fläche \mathcal{S}_2 . Die an der Kante $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ angrenzenden Dreiecke erfüllen die zweite Bedingung aus Definition 4.5 nicht. Somit ist die Triangulierung \mathcal{T}_2 nicht zulässig bezüglich des Flächenverbandes \mathcal{F} .

Die Kreisbogen-Strecken-Projektion

Wie bereits erwähnt wurde, setzen die meisten Projektionsverfahren voraus, dass der Rand $\partial\bar{\mathcal{T}}$ einen geschlossenen, konvexen Polygonzug bildet. Gleichzeitig soll die Triangulierung \mathcal{T} durch die Projektion auf $\bar{\mathcal{T}}$ so wenig wie möglich verändert werden, um so eine möglichst isometrische Parametrisierung (D, ϕ) zu erhalten. Somit darf auch der Rand von \mathcal{T} durch die Projektion auf $\partial\bar{\mathcal{T}}$ nur so wenig wie möglich verändert werden. Gemäß Floater [21] ist keine Form der Randparametrisierung bekannt, welche beide Anforderungen zufriedenstellend erfüllt. Die Fragestellung der geeigneten Randparametrisierung ist ein **offenes Problem**. Es ist nicht sinnvoll, die Randecken einer beliebigen Triangulierung \mathcal{T} grundsätzlich über den Rand eines Vierecks oder eines Kreises zu parametrisieren, da so die tatsächliche Form des Randes $\partial\mathcal{T}$ der Triangulierung \mathcal{T} nicht berücksichtigt wird.

Im Folgenden wird eine neue Form der Randparametrisierung speziell für zulässige Flächenverband-Triangulierungen vorgestellt. Die Randecken $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ werden über eine geschlossene, konvexe Kurve $\bar{\mathcal{C}} \subset \mathbb{R}^2$, welche stückweise durch Strecken oder Kreisbögen definiert ist, parametrisiert werden. Diese Randparametrisierung wird die tatsächliche Form des Randes $\partial\mathcal{T}$ berücksichtigen. Es sei \mathcal{T} eine zulässige Triangulierung

bezüglich eines Flächenverbandes \mathcal{F} . Randecken und Randkurven von \mathcal{F} seien gegeben durch

$$V_B(\mathcal{F}) = \{\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_k^*\}, \mathbf{v}_{k+1}^* := \mathbf{v}_1^*, k \in \mathbb{N},$$

$$E_B(\mathcal{F}) = \{\mathcal{C}_{[\mathbf{v}_i^*, \mathbf{v}_{i+1}^*]} \mid i = 1, \dots, k\}.$$

Es sei $\mathcal{C}_i := \mathcal{C}_{[\mathbf{v}_i^*, \mathbf{v}_{i+1}^*]} \in E_B(\mathcal{F})$ eine Randkurve des Flächenverbandes \mathcal{F} . Diese ist Kante von genau einer Fläche $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$. Diese Fläche wird im Weiteren mit $\mathcal{S}_i = \mathbf{S}_i(D_i)$ bezeichnet. Somit existiert eine Parameterraumkurve $\underline{\mathcal{C}}_i = \underline{\mathcal{C}}_i(\underline{I}_i) \subset D_i$. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass $\underline{\mathcal{C}}_i$ entweder konvex oder linear oder konkav ist. Dies lässt sich gewährleisten, indem die Parameterraumkurven $\underline{\mathcal{C}}_1, \dots, \underline{\mathcal{C}}_k$ aller Randkurven des Flächenverbandes, in den Punkten, in denen sie ihr Krümmungsverhalten ändern, in Teilkurven zerlegt werden.

Zunächst werden alle Kurven $\underline{\mathcal{C}}_1, \dots, \underline{\mathcal{C}}_k$ untersucht, ob sie entweder konvex oder linear oder konkav sind. Entsprechend wird jeder Kurve $\underline{\mathcal{C}}_i$ ein *Krümmungswert* K_i zugewiesen mit

$$K_i = \begin{cases} -1 & : \underline{\mathcal{C}}_i \text{ ist konvex} \\ 0 & : \underline{\mathcal{C}}_i \text{ ist eine Strecke} \\ 1 & : \underline{\mathcal{C}}_i \text{ ist konkav} \end{cases}.$$

Der Randkurve \mathcal{C}_i wird der Krümmungswert K_i ihrer Parameterraumkurve $\underline{\mathcal{C}}_i$ zugewiesen.

Im nächsten Schritt werden benachbarte Randkurven miteinander verglichen und gegebenenfalls zusammengefasst. Dieser Prozess wird als **Gruppierung** bezeichnet und verwendet die Tangentenstetigkeit der Übergänge zwischen den Kurven \mathcal{C}_i im \mathbb{R}^3 sowie das Krümmungsverhalten der Parameterraumkurven $\underline{\mathcal{C}}_i$ im \mathbb{R}^2 . Ist der Übergang von \mathcal{C}_1 zu \mathcal{C}_2 in \mathbf{v}_2^* tangentialstetig und gilt $K_1 = K_2$, d. h. haben $\underline{\mathcal{C}}_1$ und $\underline{\mathcal{C}}_2$ das gleiche Krümmungsverhalten, so werden \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 zur Kurve $\mathcal{C}_{1,2} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ zusammengefasst. Als nächstes werden dann die Kurven $\mathcal{C}_{1,2}$ und \mathcal{C}_3 miteinander verglichen. Gilt hingegen $K_1 \neq K_2$ oder ist der Übergang von \mathcal{C}_1 zu \mathcal{C}_2 in \mathbf{v}_2^* nicht tangentialstetig, so werden \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 nicht zusammengefasst und der nächste Vergleich erfolgt zwischen \mathcal{C}_2 und \mathcal{C}_3 . Als Letztes erfolgt ein Vergleich der entsprechenden Kurven in der Ecke \mathbf{v}_1^* . Insgesamt erhält man so l Kurven $\mathcal{C}_{i_1, i_2}, \dots, \mathcal{C}_{i_l, i_{l+1}}$ mit $l \in \mathbb{N}, l \leq k$, und

$$i_j \in \{1, \dots, k\}, j = 1, \dots, l+1,$$

$$i_j < i_{j+1}, j = 1, \dots, l-1, i_{l+1} = i_1.$$

Ist $i_1 > 1$, so wurden die Kurven $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{i_1}$ zur Kurve $\mathcal{C}_{i_1, i_{l+1}}$ zusammengefasst. Die Kurve $\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}}$ verbindet die Ecken $\mathbf{v}_{i_j}^*$ und $\mathbf{v}_{i_{j+1}}^*$. Sie wird als **Gruppierungskurve der Kurven** $\mathcal{C}_{i_j}, \dots, \mathcal{C}_{i_{j+1}}$ bezeichnet. Dieser Kurve wird der Krümmungswert $K_{i_j, i_{j+1}} = K_{i_j}$ zugewiesen.

Da \mathcal{T} eine zulässige Triangulierung bezüglich \mathcal{F} ist, liegen alle Randecken von \mathcal{T} auf dem Rand von \mathcal{F} . Des Weiteren gilt

$$V_B(\mathcal{F}) = \{\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_k^*\} \subset V_B(\mathcal{T}) = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}.$$

4 Lineare Projektionsverfahren für Triangulierungen

Somit existieren Indizes $s_1, \dots, s_l, s_{l+1} = s_1 \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mathbf{v}_{s_j} = \mathbf{v}_{i_j}^*$, $j = 1, \dots, l+1$. Die Menge der Randecken $V_B(\mathcal{T})$ von \mathcal{T} wird nun in l Teilmengen $V_B^1(\mathcal{T}), \dots, V_B^l(\mathcal{T})$ zerlegt, gemäß

$$V_B^j(\mathcal{T}) = \{\mathbf{v}_{s_j}, \dots, \mathbf{v}_{s_{j+1}}\}, j = 1, \dots, l.$$

Alle Ecken der Menge $V_B^j(\mathcal{T})$ liegen auf der Kurve $\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}}$, welche die Ecken $\mathbf{v}_{s_j} = \mathbf{v}_{i_j}^*$ und $\mathbf{v}_{s_{j+1}} = \mathbf{v}_{i_{j+1}}^*$ miteinander verbindet. Die Menge

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}}) = \bigcup_{i=s_j}^{s_{j+1}-1} [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}]$$

bildet einen die Randkurve $\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}}$ approximierenden Polygonzug. Die Bogenlänge von $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}})$ ist eine Näherung der Bogenlänge der Randkurve $\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}}$ und beträgt

$$|\mathcal{P}(\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}})| = \sum_{i=s_j}^{s_{j+1}-1} \|\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i\|_2.$$

Jeder Kurve $\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}}$ wird nun eine planare Kurve $\bar{\mathcal{C}}_{i_j, i_{j+1}} \subset \mathbb{R}^2$ zugewiesen. $\bar{\mathcal{C}}_{i_j, i_{j+1}}$ wird als **Projektion von** $\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}}$ bezeichnet. Die Konstruktion der Projektion erfolgt folgendermaßen. Es sei A der Flächeninhalt der Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ der Triangulierung \mathcal{T} . A ist somit ein Näherungswert für den Flächeninhalt der Oberfläche des Flächenverbandes \mathcal{F} . Die Ecken $\mathbf{v}_{i_1}^*, \dots, \mathbf{v}_{i_{l+1}}^*$ werden als Ecken eines Polygonzugs \mathcal{P} mit den Kanten $[\mathbf{v}_{i_j}^*, \mathbf{v}_{i_{j+1}}^*]$, $j = 1, \dots, l$, aufgefasst und über den Rand des Kreises K mit dem Mittelpunkt $\bar{\mathbf{v}}_M = (0, 0)^T$ und dem Radius $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ parametrisiert. Dazu werden die Ecken $\mathbf{v}_{i_1}^*, \dots, \mathbf{v}_{i_l}^*, \mathbf{v}_{i_{l+1}}^* = \mathbf{v}_{i_1}^*$ zunächst über das Intervall $[0, 2\pi]$ parametrisiert, wobei

$$D_{i_j, i_{j+1}} = |\mathcal{P}(\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}})|$$

als Federkonstante für die Kante $[\mathbf{v}_{i_j}^*, \mathbf{v}_{i_{j+1}}^*]$ gewählt wird. Man erhält die Winkel $\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1} \in [0, 2\pi]$. Die Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}_{i_1}^*, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{i_l}^*$ sind dann definiert durch

$$\bar{\mathbf{v}}_j^* = r \begin{pmatrix} \cos \alpha_j \\ \sin \alpha_j \end{pmatrix}, j = 1, \dots, l.$$

Die Definition der Projektion $\bar{\mathcal{C}}_{i_j, i_{j+1}}$ der Randkurve $\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}}$ erfolgt nun in Abhängigkeit vom Krümmungswert $K_{i_j, i_{j+1}}$. Für $K_{i_j, i_{j+1}} = -1$ wird $\bar{\mathcal{C}}_{i_j, i_{j+1}}$ gleich dem Kreisbogen des Kreises K gesetzt, welcher $\bar{\mathbf{v}}_{i_j}^*$ und $\bar{\mathbf{v}}_{i_{j+1}}^*$ gegen den Uhrzeigersinn miteinander verbindet. Für $K_{i_j, i_{j+1}} \in \{0, 1\}$ wird $\bar{\mathcal{C}}_{i_j, i_{j+1}}$ als Verbindungsstrecke von $\bar{\mathbf{v}}_{i_j}^*$ und $\bar{\mathbf{v}}_{i_{j+1}}^*$ definiert. Die Vereinigungsmenge

$$\bar{\mathcal{C}} = \bigcup_{j=1}^l \bar{\mathcal{C}}_{i_j, i_{j+1}}$$

bildet für $l \geq 3$ eine geschlossene, konvexe Kurve, welche stückweise durch Strecken und Kreisbögen definiert ist. Für $l \leq 2$ ergeben sich Sonderfälle. $\bar{\mathcal{C}}$ entspricht dann entweder dem gesamten Kreis K oder einem Kreisbogen, dessen Enden durch eine Strecke verbunden werden.

Die Randecken $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V_B$ der Triangulierung \mathcal{T} werden nun über die Kurve $\bar{\mathcal{C}}$ parametrisiert. Dazu werden die Ecken der Teilmenge $V_B^j(\mathcal{T}) \subset V_B(\mathcal{T})$ chordal über die Kurve $\bar{\mathcal{C}}_{i_j i_{j+1}}$ parametrisiert. Ist die Kurve $\bar{\mathcal{C}}_{i_j i_{j+1}}$ ein Kreisbogen, so erfolgt die Parametrisierung analog zur Parametrisierung über einen Kreis mit dem Unterschied, dass als *Winkelintervall* $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ statt $[0, 2\pi]$ gewählt wird.

Bemerkung 4.8

Die Kreisbogen-Strecken-Projektion kann als Verallgemeinerung der Randparametrisierung über einen Kreis bzw. über ein Rechteck aufgefasst werden. In dem Fall, dass sich genau eine Gruppierungskurve ergibt, wird der Rand der Triangulierung über einem Kreis parametrisiert. Ergeben sich genau vier Gruppierungskurven $\mathcal{C}_{i_1 i_2}, \mathcal{C}_{i_2 i_3}, \mathcal{C}_{i_3 i_4}, \mathcal{C}_{i_4 i_5}$, $i_5 = i_1$, mit Krümmungswerten $K_{i_j i_{j+1}} \geq 0$, so erfolgt die Parametrisierung über ein Viereck mit den Kantenlängen $|\mathcal{P}(\mathcal{C}_{i_j, i_{j+1}})|$. Es lässt sich leicht zeigen, dass für den Fall $|\mathcal{P}(\mathcal{C}_{i_1, i_2})| = |\mathcal{P}(\mathcal{C}_{i_3, i_4})|$, $|\mathcal{P}(\mathcal{C}_{i_2, i_3})| = |\mathcal{P}(\mathcal{C}_{i_4, i_5})|$ das Viereck ein Rechteck ist.

In den folgenden drei Beispielen wird jeweils die Projektion $\bar{\mathcal{C}}$ des Randes $\partial\mathcal{F}$ des gegebenen Flächenverbandes \mathcal{F} erzeugt.

Beispiel 4.9 Zwei getrimmte Flächen

In Abbildung 4.6 ist ein Flächenverband \mathcal{F} zu sehen, welcher aus zwei getrimmten NURBS-Flächen $\mathcal{S}_1 = \mathbf{S}_1(D_1), \mathcal{S}_2 = \mathbf{S}_2(D_2)$ besteht. $\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_6^* \in V_B(\mathcal{F})$ sind die Randecken von \mathcal{F} , $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_6 \in E_B(\mathcal{F})$ sind die Randkurven von \mathcal{F} .

Die Parameterbereiche D_1, D_2 der Flächen sowie die Parameterraumkurven $\underline{\mathcal{C}}_1, \dots, \underline{\mathcal{C}}_6$ der Randkurven sind in Abbildung 4.7 zu sehen. Die Kurven $\underline{\mathcal{C}}_3, \underline{\mathcal{C}}_6$ sind konvex, die restlichen Parameterraumkurven sind linear. Somit werden den Kurven $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_6$ die Krümmungswerte $K_3 = K_6 = -1$ zugewiesen. Für die Kurven $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ gilt dann $K_1 = K_2 = K_4 = K_5 = 0$. Die Übergänge von \mathcal{C}_1 zu \mathcal{C}_2 in \mathbf{v}_2^* sowie von \mathcal{C}_4 zu \mathcal{C}_5 in \mathbf{v}_5^* sind tangentialstetig und die zugehörigen Parameterraumkurven sind linear. Die Übergänge der benachbarten Randkurven in den restlichen Randecken sind nicht tangentialstetig. Somit werden $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ bzw. $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ zu den Kurven $\mathcal{C}_{1,2}$ bzw. $\mathcal{C}_{3,4}$ vereinigt. Die entsprechenden Krümmungswerte sind $K_{1,2} = K_{3,4} = 0$. Als weitere *Vereinigungskurven* erhält man dann $\mathcal{C}_{3,3} = \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{6,6} = \mathcal{C}_6$ mit den Krümmungswerten $K_{3,3} = K_{6,6} = -1$.

Die Ecken $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_3^*, \mathbf{v}_4^*, \mathbf{v}_6^*$ werden chordal über einen Kreis parametrisiert. Ihre Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}_1^*, \bar{\mathbf{v}}_3^*, \bar{\mathbf{v}}_4^*, \bar{\mathbf{v}}_6^*$ sind im rechten Teil der Abbildung 4.7 zu sehen. Die Kurven $\mathcal{C}_{1,2}$ bzw. $\mathcal{C}_{4,5}$ werden auf die Verbindungsstrecken der Ecken $\bar{\mathbf{v}}_1^*, \bar{\mathbf{v}}_3^*$ bzw. $\bar{\mathbf{v}}_4^*, \bar{\mathbf{v}}_6^*$ projiziert. Die Kurven $\mathcal{C}_{3,4}$ bzw. $\mathcal{C}_{6,6}$ werden auf die Verbindungsbögen der Ecken $\bar{\mathbf{v}}_3^*, \bar{\mathbf{v}}_4^*$ bzw. $\bar{\mathbf{v}}_6^*, \bar{\mathbf{v}}_1^*$ projiziert. Die entsprechenden Kurven $\bar{\mathcal{C}}_{1,2}, \bar{\mathcal{C}}_{3,3}, \bar{\mathcal{C}}_{4,5}, \bar{\mathcal{C}}_{6,6}$ sind ebenfalls im rechten Teil der Abbildung 4.7 zu sehen.

Beispiel 4.10 Vier ungetrimmte Flächen

Abbildung 4.8 zeigt einen Flächenverband \mathcal{F} , welcher aus vier ungetrimmten NURBS-

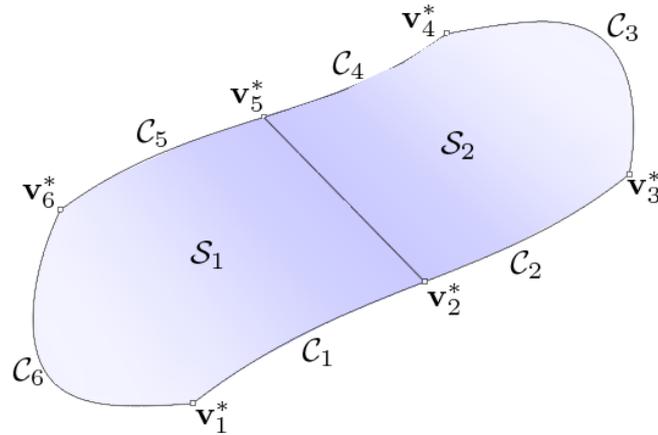


Abbildung 4.6: Ein Flächenverband \mathcal{F} , welcher aus zwei getrimmten NURBS-Flächen $\mathcal{S}_1 = \mathbf{S}_1(D_1), \mathcal{S}_2 = \mathbf{S}_2(D_2)$ besteht. $\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_6^* \in V_B(\mathcal{F})$ sind die Randecken von \mathcal{F} , $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_6 \in E_B(\mathcal{F})$ sind die Randkurven von \mathcal{F} .

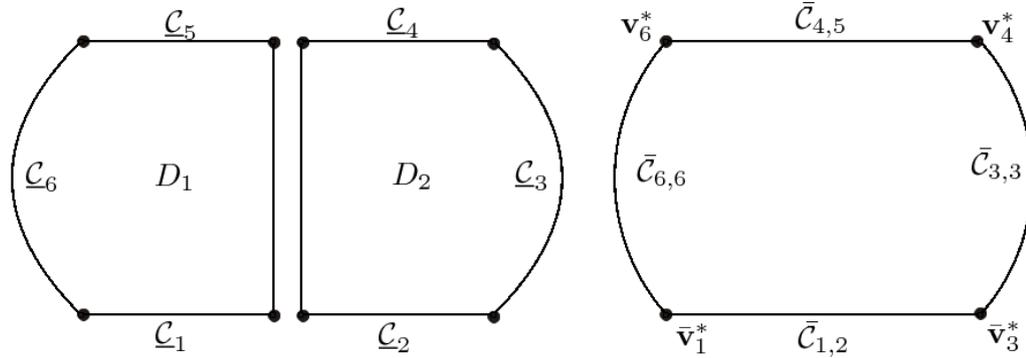


Abbildung 4.7: Im linken Teil der Abbildung sind die Parameterbereiche D_1, D_2 der entsprechenden Flächen des Flächenverbandes \mathcal{F} aus Abbildung 4.6 zu sehen. $\underline{C}_1, \dots, \underline{C}_6$ sind die Parameterraumkurven der Randkurven des Flächenverbandes \mathcal{F} . Die Ecken $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_3^*, \mathbf{v}_4^*, \mathbf{v}_6^*$ wurden über einen Kreis parametrisiert. $\bar{\mathbf{v}}_1^*, \bar{\mathbf{v}}_3^*, \bar{\mathbf{v}}_4^*, \bar{\mathbf{v}}_6^*$ sind die entsprechenden Parameterwerte. Die Kurven $\bar{C}_{1,2}, \bar{C}_{3,3}, \bar{C}_{4,5}, \bar{C}_{6,6}$ sind die Projektionen der Kurven $\mathcal{C}_{1,2}, \mathcal{C}_{3,3}, \mathcal{C}_{4,5}, \mathcal{C}_{6,6}$.

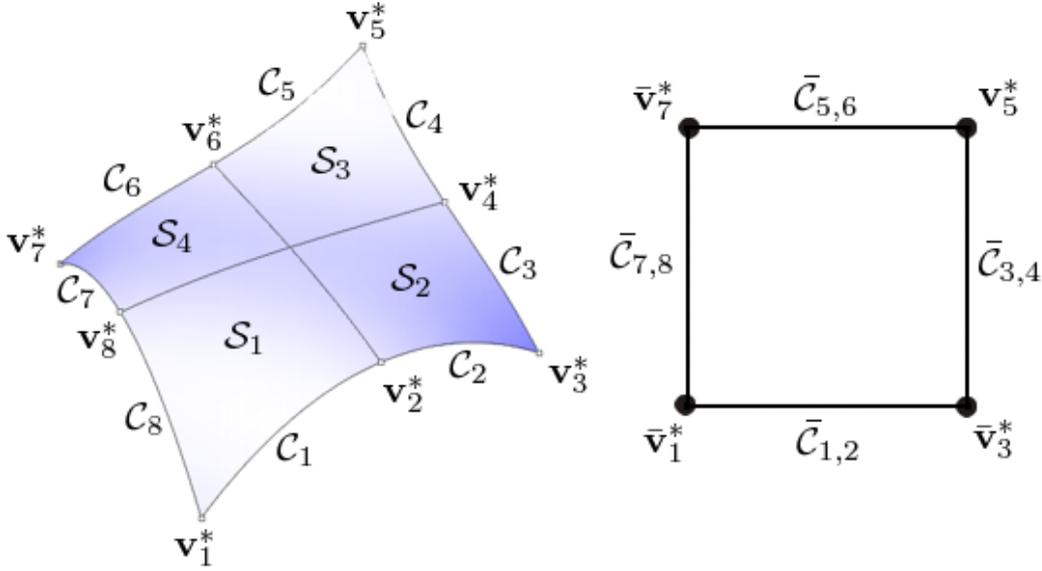


Abbildung 4.8: Ein Flächenverband \mathcal{F} , welcher aus vier ungetrimmten NURBS-Flächen S_1, \dots, S_4 besteht. Es ist $V_B(\mathcal{F}) = \{\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_8^*\}$ und $E_B(\mathcal{F}) = \{C_1, \dots, C_8\}$. In den Ecken $\mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_4^*, \mathbf{v}_6^*, \mathbf{v}_8^*$ liegt Tangentenstetigkeit vor, in den anderen Ecken nicht. Die Kurven $C_{1,2}, C_{3,4}, C_{5,6}, C_{7,8}$ werden jeweils auf die Verbindungsstrecken $\bar{C}_{1,2}, \bar{C}_{3,4}, \bar{C}_{5,6}, \bar{C}_{7,8}$ der Ecken $\bar{\mathbf{v}}_1^*, \bar{\mathbf{v}}_3^*, \bar{\mathbf{v}}_5^*, \bar{\mathbf{v}}_7^*$ projiziert. Es ergibt sich ein Quadrat.

Flächen $S_1 = \mathbf{S}_1(D_1), \dots, S_4 = \mathbf{S}_4(D_4)$ besteht. Die Randecken von \mathcal{F} sind $\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_8^*$ und die Randkurven von \mathcal{F} sind C_1, \dots, C_8 .

Da die Flächen ungetrimmte NURBS-Flächen sind, sind die Parameterraumkurven $\underline{C}_1, \dots, \underline{C}_8$ alle linear und für die Krümmungswerte der Kurven C_1, \dots, C_8 gilt somit $K_1 = \dots = K_8 = 0$. Der Übergang zwischen benachbarten Kurven in den Ecken $\mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_4^*, \mathbf{v}_6^*, \mathbf{v}_8^*$ ist jeweils tangentialstetig. In den restlichen Ecken liegt keine Tangentialstetigkeit vor. Es werden somit die folgenden Vereinigungskurven gebildet

$$C_{1,2} = C_1 \cup C_2, C_{3,4} = C_3 \cup C_4, C_{5,6} = C_5 \cup C_6, C_{7,8} = C_7 \cup C_8.$$

Für die Krümmungswerte dieser Kurven gilt $K_{1,2} = K_{3,4} = K_{5,6} = K_{7,8} = 0$. Der Flächenverband \mathcal{F} ist derart gegeben, dass die Bogenlänge der Vereinigungskurven übereinstimmt.

Die Ecken $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_3^*, \mathbf{v}_5^*, \mathbf{v}_7^*$ werden chordal über einen Kreis parametrisiert und man erhält die Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}_1^*, \bar{\mathbf{v}}_3^*, \bar{\mathbf{v}}_5^*, \bar{\mathbf{v}}_7^*$. Die Kurven $C_{1,2}, C_{3,4}, C_{5,6}, C_{7,8}$ werden jeweils auf die Verbindungsstrecken $\bar{C}_{1,2}, \bar{C}_{3,4}, \bar{C}_{5,6}, \bar{C}_{7,8}$ der Ecken $\bar{\mathbf{v}}_1^*, \bar{\mathbf{v}}_3^*, \bar{\mathbf{v}}_5^*, \bar{\mathbf{v}}_7^*$ projiziert. Diese Verbindungsstrecken bilden zusammen ein Quadrat.

Beispiel 4.11 Eine planare, getrimmte, nicht konvexe Fläche

Abbildung 4.9 zeigt einen Flächenverband \mathcal{F} , welcher aus einer planaren, getrimmten,

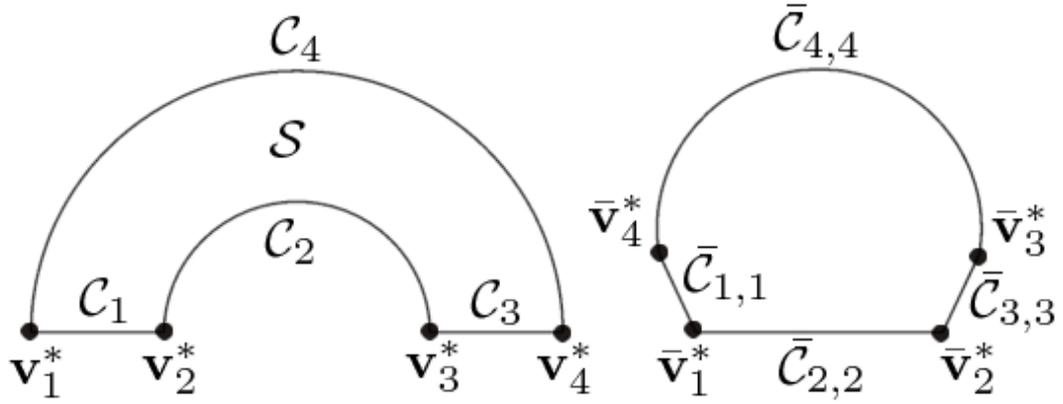


Abbildung 4.9: Ein Flächenverband \mathcal{F} , welcher aus einer planaren, getrimmten, nicht konvexen NURBS-Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ besteht. Es ist $V_B(\mathcal{F}) = \{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*, \mathbf{v}_4^*\}$, sowie $E_B(\mathcal{F}) = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4\}$. In keiner Ecke liegt Tangentenstetigkeit vor. Die Kurve $\mathcal{C}_{4,4}$ wird auf den Verbindungsbogen der Ecken $\bar{\mathbf{v}}_3^*, \bar{\mathbf{v}}_4^*$ projiziert. Die Kurven $\mathcal{C}_{1,1}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{3,3}$ werden jeweils auf die restlichen Verbindungsstrecken $\bar{\mathcal{C}}_{1,1}, \bar{\mathcal{C}}_{2,2}, \bar{\mathcal{C}}_{3,3}$ abgebildet.

nicht konvexen NURBS-Fläche $\mathcal{S} = \mathbf{S}(D)$ besteht. Hierbei entspricht der Parameterbereich D der Fläche \mathcal{S} . Es ist $V_B(\mathcal{F}) = \{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*, \mathbf{v}_4^*\}$, sowie $E_B(\mathcal{F}) = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4\}$. Die Fläche \mathcal{S} verläuft innerhalb der xy -Ebene des \mathbb{R}^3 . Die Randkurven stimmen mit ihren jeweiligen Parameterraumkurven $\underline{\mathcal{C}}_1, \underline{\mathcal{C}}_2, \underline{\mathcal{C}}_3, \underline{\mathcal{C}}_4$ überein. Die Kurven $\mathcal{C}_1 = \underline{\mathcal{C}}_1, \mathcal{C}_3 = \underline{\mathcal{C}}_3$ sind linear. Die Kurve $\mathcal{C}_2 = \underline{\mathcal{C}}_2$ ist konkav und die Kurve $\mathcal{C}_4 = \underline{\mathcal{C}}_4$ ist konvex. Es ergeben sich die Krümmungswerte $K_1 = K_3 = 0, K_2 = 1, K_4 = -1$. In keiner Randecke liegt Tangentenstetigkeit vor. Somit bestehen die Vereinigungskurven aus jeweils nur einer Kurve und es gilt $\mathcal{C}_{i,i} = \mathcal{C}_i, i = 1, 2, 3, 4$. Für die Krümmungswerte gilt entsprechend $K_{i,i} = K_i, i = 1, 2, 3, 4$.

Alle Randecken von \mathcal{F} werden chordal über einen Kreis parametrisiert und man erhält die Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}_1^*, \bar{\mathbf{v}}_2^*, \bar{\mathbf{v}}_3^*, \bar{\mathbf{v}}_4^*$. Die Kurve $\mathcal{C}_{4,4}$ wird auf den Verbindungsbogen der Ecken $\bar{\mathbf{v}}_3^*, \bar{\mathbf{v}}_4^*$ projiziert. Die Kurven $\mathcal{C}_{1,1}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{3,3}$ werden jeweils auf die restlichen Verbindungsstrecken $\bar{\mathcal{C}}_{1,1}, \bar{\mathcal{C}}_{2,2}, \bar{\mathcal{C}}_{3,3}$ abgebildet.

4.2.2 Projektion der inneren Ecken

Es sei $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_m\}, m \in \mathbb{N}$, eine gegebene Triangulierung. Für die zugehörige Menge $V(\mathcal{T})$ der Ecken gelte

$$V = V(\mathcal{T}) = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+k}\}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad (4.3)$$

$$V_I = V_I(\mathcal{T}) = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}, \quad V_B = V_B(\mathcal{T}) = \{\mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+k}\}. \quad (4.4)$$

Gesucht ist eine lineare Projektion $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Die Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}_{n+1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{n+k}$ der Randecken $\mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+k}$ bezüglich ψ seien bereits gegeben. Sind auch die Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$ der inneren Ecken bekannt, so ist die Projektion ψ eindeutig bestimmt.

Ein Verfahren, welches zu einer gegebenen Triangulierung \mathcal{T} und gegebenen Randparameterwerten die Parameterwerte der inneren Ecken bestimmt, heißt **Konstruktionsverfahren**.

Wie bereits erläutert wurde, ist es im Allgemeinen nicht möglich zu einer gegebenen Triangulierung \mathcal{T} eine isometrische Parametrisierung (D, ϕ) zu erzeugen. Ist die Triangulierung \mathcal{T} jedoch planar, so ist die identische Abbildung $\text{id} : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ offensichtlich eine Isometrie. Man sagt, dass ein Konstruktionsverfahren die **Reproduktionseigenschaft** besitzt, wenn es *erkennt*, dass die gegebene Triangulierung \mathcal{T} planar ist und als Projektion ψ die identische Abbildung liefert. In diesem Fall ist dann die Parametrisierung von \mathcal{T} bezüglich ψ ebenfalls gleich der identischen Abbildung und somit eine Isometrie. Eine etwas allgemeinere Definition ist die Folgende.

Definition 4.12 Reproduktionseigenschaft

*Es sei \mathcal{T} eine planare Triangulierung, welche in einer affinen Ebene $\mathcal{E} \subset \mathbb{E}^3$ enthalten ist. Weiter seien die Parameterwerte der Randecken von \mathcal{T} durch eine affine Abbildung $\mathbf{f} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}^2$ vorgegeben, d. h. es gelte $\psi|_{V_B(\mathcal{T})} \equiv \mathbf{f}|_{V_B(\mathcal{T})}$. Ein Konstruktionsverfahren besitzt die **Reproduktionseigenschaft**, wenn dann auch die inneren Ecken von \mathcal{T} durch die affine Abbildung \mathbf{f} bestimmt sind, also $\psi|_{V_I(\mathcal{T})} \equiv \mathbf{f}|_{V_I(\mathcal{T})}$ gilt.*

Es seien \mathcal{T} eine planare Triangulierung und $\mathbf{f} : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine affine Abbildung. Eine innere Ecke $\mathbf{v} \in V_I(\mathcal{T})$ ist im Inneren der konvexen Hülle ihrer Nachbarn enthalten. Somit existieren Zahlen $\lambda_{\mathbf{vw}} \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} = 1,$$

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} \mathbf{w}.$$

Da \mathbf{f} affin ist gilt dann

$$\psi(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} \psi(\mathbf{w}).$$

Diese Tatsache dient als Motivation für die sogenannten **Konvex-Kombinations-Projektionen**, welche von Floater in [19] eingeführt wurden.

4.2.2.1 Konvex-Kombinations-Projektion

Es sei $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Projektion bezüglich einer gegebenen Triangulierung \mathcal{T} . Existieren dann zu allen inneren Kanten $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_I(\mathcal{T})$ Zahlen $\lambda_{\mathbf{vw}}$, welche die Bedingungen

$$\lambda_{\mathbf{vw}} > 0, \quad ([\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_I(\mathcal{T})),$$

$$\sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} = 1, \quad (\mathbf{v} \in V_I(\mathcal{T})), \tag{4.5}$$

erfüllen und gilt dann

$$\psi(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} \psi(\mathbf{w}), \quad (\mathbf{v} \in V_I(\mathcal{T})), \quad (4.6)$$

so wird ψ als **Konvex-Kombinations-Projektion** bezeichnet. Die Zahlen $\lambda_{\mathbf{vw}}$, $\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}$, heißen **konvexe Gewichte von \mathbf{v}** .

Für eine Konvex-Kombinations-Projektion $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist also der Parameterwert $\psi(\mathbf{v})$ jeder inneren Ecke \mathbf{v} eine Konvex-Kombination der Parameterwerte ihrer benachbarten Ecken.

Zu jeder gegebenen Triangulierung \mathcal{T} lässt sich eine Konvex-Kombinations-Projektion $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ konstruieren. Im ersten Schritt werden die Randecken von \mathcal{T} mit einem der bekannten Verfahren parametrisiert und man erhält die zugehörigen Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}_{n+1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{n+k}$. Im zweiten Schritt werden dann für alle inneren Kanten $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_I(\mathcal{T})$ Zahlen $\lambda_{\mathbf{vw}}$ definiert, welche die Bedingungen (4.5) erfüllen. Die Kanten werden hierbei als gerichtete Kanten aufgefasst und somit gilt im Allgemeinen nicht $\lambda_{\mathbf{vw}} = \lambda_{\mathbf{wv}}$. Es seien nun $\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$ die gesuchten Parameterwerte der inneren Ecken $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ der Triangulierung \mathcal{T} . Für beliebige Ecken $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in V(\mathcal{T})$ sei dann $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda_{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j} & \text{für } [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] \in E_I(\mathcal{T}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Bedingung (4.6) lässt sich nun umformen zu

$$\bar{\mathbf{v}}_i - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \bar{\mathbf{v}}_j = \sum_{j=n+1}^{n+k} \lambda_{ij} \bar{\mathbf{v}}_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem $B\bar{\mathbf{v}}_I = \mathbf{c}$, wobei $B, \bar{\mathbf{v}}_I, \mathbf{c}$ wie folgt definiert sind

$$B = (b_{ij})_{i,j=1}^n, \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ -\lambda_{ij} & \text{für } i \neq j, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_I = (\bar{\mathbf{v}}_1 \dots \bar{\mathbf{v}}_n)^T,$$

$$\mathbf{c} = \left(\sum_{j=n+1}^{n+k} \lambda_{1j} \bar{\mathbf{v}}_j \dots \sum_{j=n+1}^{n+k} \lambda_{nj} \bar{\mathbf{v}}_j \right)^T.$$

Satz 4.13

Die in (4.8) definierte Matrix B ist regulär.

Beweis. Für die i -te Zeile der Matrix B gilt

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \|b_{ij}\| = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}_i} \cap V_I(\mathcal{T})} \lambda_{\mathbf{v}_i \mathbf{w}} \leq \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}_i}} \lambda_{\mathbf{v}_i \mathbf{w}} = 1. \quad (4.9)$$

Somit ist B schwach diagonaldominant. Da die Triangulierung \mathcal{T} stark zusammenhängend ist, existiert eine Ecke \mathbf{v}_{i_0} , die zu mindestens einer Randecke benachbart ist. Dann ist $N_{\mathbf{v}_{i_0}} \cap V_I(\mathcal{T}) \subset$ echt enthalten in $N_{\mathbf{v}_{i_0}}$ und in obiger Gleichung darf \leq durch $<$ ersetzt werden. Daraus folgt, dass die Zeile i_0 stark diagonaldominant ist.

Fasst man die Matrix $B - \text{diag}(B)$ als Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen G auf, so hat dieser die gleiche Struktur wie die Triangulierung \mathcal{T} . Da die Triangulierung stark zusammenhängend ist, gilt dies auch für den Graphen. Daraus folgt, dass die Matrix $B - \text{diag}(B)$ und somit auch B irreduzibel sind. Somit ist die Matrix B irreduzibel diagonaldominant und als solche regulär. \square

Ein Verfahren, welches der beschriebenen Vorgehensweise zur Konstruktion einer Konvex-Kombinations-Projektion folgt, wird **Konvex-Kombinations-Projektion-Konstruktionsverfahren** genannt. Für diese existiert eine einfache äquivalente Aussage zur Reproduktionseigenschaft.

Satz 4.14

Es sei \mathcal{T} eine beliebige planare Triangulierung. Ein Konvex-Kombinations-Projektions-Verfahren besitzt genau dann die Reproduktionseigenschaft, wenn für jede innere Ecke $\mathbf{v} \in V_I(\mathcal{T})$ der Triangulierung \mathcal{T} gilt

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} \mathbf{w}. \tag{4.10}$$

Beweis. Es gelte für jede innere Ecke $\mathbf{v} \in V_I(\mathcal{T})$ von \mathcal{T} die Bedingung (4.10). Es sei $\mathcal{E} \subset \mathbb{E}^3$ diejenige affine Ebene, für die $\mathcal{S}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{E}$ gilt, und weiter sei $\mathbf{f} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}^2$ eine Affinität. Für die Parameterwerte der Randecken $\mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+k}$ der Triangulierung \mathcal{T} bezüglich der zu konstruierenden Konvex-Kombinations-Projektion $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{E}^2$ gelte $\psi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{v}_i)$, $i = n + 1, \dots, n + k$. Es sei $\mathbf{v} \in V_I(\mathcal{T})$ eine innere Ecke von \mathcal{T} , dann gilt

$$\sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} = 1.$$

Da \mathbf{f} affin ist, folgt

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}\left(\sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} \mathbf{w}\right) = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} \mathbf{f}(\mathbf{w}).$$

Somit ist $(\mathbf{f}(\mathbf{v}_1), \dots, \mathbf{f}(\mathbf{v}_n))^T$ eine Lösung des eindeutig lösbaren linearen Gleichungssystems (4.7). Da auch $(\psi(\mathbf{v}_1), \dots, \psi(\mathbf{v}_n))^T$ eine Lösung von (4.7) ist, folgt also $\psi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, \dots, n$. Somit besitzt das Konvex-Kombination-Projektion-Verfahren die Reproduktionseigenschaft.

Es sei nun vorausgesetzt, dass das entsprechende Verfahren die Reproduktionseigenschaft besitzt. Wählt man als affine Abbildung $\mathbf{f} \equiv \text{id}$, so folgt

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} \psi(\mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} \mathbf{w}.$$

\square

Es sei $\mathbf{v} \in E_I(\mathcal{T})$ eine innere Ecke der Triangulierung \mathcal{T} und es gelte Gleichung (4.10). Dann heißen die konvexen Gewichte $\lambda_{\mathbf{v}\mathbf{w}}$, $\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}$, **Koordinaten von \mathbf{v} bezüglich $\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}$** . Für $l = 3$ entsprechen die Koordinaten den baryzentrischen Koordinaten.

Wurden nun zu einer gegebenen Triangulierung \mathcal{T} sowohl die Parameterwerte der Randecken als auch der inneren Ecken bestimmt, so ist die Projektion $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eindeutig definiert. Es bleibt die Frage, ob ψ bijektiv ist, ob also $\psi(T_1) \cap \psi(T_2) = \emptyset$ für $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, $T_1 \neq T_2$, gilt. Ist \mathcal{T} eine offene Triangulierung, so heißt eine Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E(\mathcal{T})$ **trennende Kante**, wenn sie eine innere Kante ist und die Ecken \mathbf{v}, \mathbf{w} Randecken sind. Die Antwort auf diese Frage gibt der folgende Satz. Der Beweis hierzu findet sich in [20].

Satz 4.15

Es sei $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Konvex-Kombinations-Projektion bezüglich einer gegebenen Triangulierung \mathcal{T} . Besitzt \mathcal{T} keine trennende Kante und ist das Polygon $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\bar{\mathbf{v}}_{n+1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{n+k})$ der Parameterwerte der Randecken $\mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+k}$ von \mathcal{T} konvex, so ist ψ injektiv.

Verwendet man eines der vorgestellten Verfahren zur Randparametrisierung, so ist immer gewährleistet, dass das Polygon $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\bar{\mathbf{v}}_{n+1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{n+k})$ konvex ist. Auch die Bedingung, dass die Triangulierung \mathcal{T} keine trennende Kante enthalten darf, ist leicht zu erfüllen, wie das gleich folgende Beispiel zeigen wird.

Beispiel 4.16

Abbildung 4.10 zeigt zwei planare Triangulierungen $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{\Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3, \Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4\}, \\ \mathcal{T}_2 &= \{\Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_5, \Delta \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_5, \Delta \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4 \mathbf{v}_5, \Delta \mathbf{v}_4 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_5\}. \end{aligned}$$

Triangulierung \mathcal{T}_1 enthält die trennende Kante $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3]$. Unterteilt man diese Kante in ihrem Mittelpunkt $\mathbf{v}_5 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3)$ in die zwei neuen Kanten $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_5], [\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_3]$ und fügt die Kanten $[\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5], [\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_2]$ zur Triangulierung \mathcal{T}_1 hinzu, so erhält man die Triangulierung \mathcal{T}_2 . Diese Triangulierung enthält keine trennende Kante und es gilt

$$\mathcal{S}_{\mathcal{T}_1} = \mathcal{S}_{\mathcal{T}_2}.$$

Im Folgenden werden drei Verfahren zur Konstruktion von Konvex-Kombinations-Projektionen vorgestellt. Das erste Verfahren garantiert die Injektivität der konstruierten Projektion, besitzt aber nicht die Reproduktionseigenschaft. Das zweite Verfahren kann keine injektive Projektion garantieren, besitzt aber die Reproduktionseigenschaft. Das dritte Verfahren besitzt beide gewünschten Eigenschaften.

4.2.2.2 Das bivariate Federmodell

Die Vorgehensweise beim bivariaten Federmodell ist analog zum univariaten Fall (siehe Abschnitt 4.2.1.1) und es ist ein Spezialfall einer Konvex-Kombinations-Projektion. Jede innere Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_I(\mathcal{T})$ der Triangulierung \mathcal{T} wird als Feder mit der gegebenen

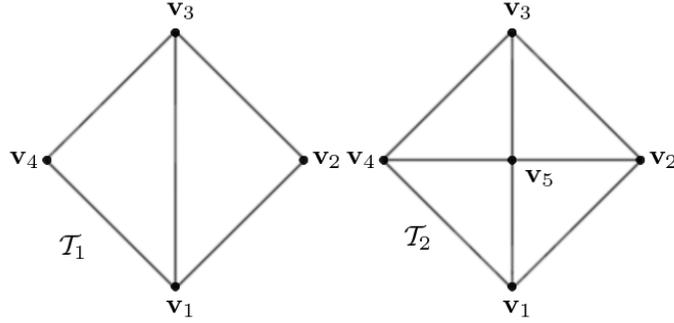


Abbildung 4.10: Zwei Triangulierungen $\mathcal{T}_1 = \{\Delta_{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3}, \Delta_{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\Delta_{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_5}, \Delta_{\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_5}, \Delta_{\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4\mathbf{v}_5}, \Delta_{\mathbf{v}_4\mathbf{v}_1\mathbf{v}_5}\}$. Die Triangulierung \mathcal{T}_1 enthält die trennende Kante $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3]$. Die Triangulierung \mathcal{T}_2 entsteht durch Unterteilung der Kante $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3]$ in ihrem Mittelpunkt \mathbf{v}_5 in die Kanten $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_5]$, $[\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_3]$ und hinzufügen der Kanten $[\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5]$, $[\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_2]$. Die Triangulierung \mathcal{T}_2 enthält keine trennende Kante und es gilt $\mathcal{S}_{\mathcal{T}_1} = \mathcal{S}_{\mathcal{T}_2}$.

Federkonstante $D_{\mathbf{v}\mathbf{w}} > 0$ interpretiert. Die Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}_{n+1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{n+k}$ der Randecken sind bereits gegeben, somit ist der Rand des Federsystems fixiert. Gibt man die restlichen Federn frei, so suchen sich diese ein stabiles Gleichgewicht minimaler Energie. Die neuen Positionen der inneren Ecken sind dann die Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$. Die Gesamtenergie E_F des Federsystems ist

$$E_F = E_F(\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n) = \frac{1}{2} \sum_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_I} \frac{1}{2} D_{\mathbf{v}\mathbf{w}} \|\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{w}}\|_2^2. \quad (4.11)$$

Für beliebige Ecken $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in V(\mathcal{T})$ sei nun $D_{ij} \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$D_{ij} = \begin{cases} D_{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j} & \text{für } [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] \in E_I(\mathcal{T}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus der Definition ergibt sich $D_{ij} = D_{ji}$. Die Gleichung (4.11) hat die Form

$$E_F = E_F(\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+k} \frac{1}{2} D_{ij} \|\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{v}}_j\|_2^2.$$

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichne

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{v}}_i} := \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i} \right)^T$$

die **partielle Ableitung von E_F bezüglich $\bar{\mathbf{v}}_i$** . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{v}}_i} E_F(\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n) &= \sum_{j=1}^{n+k} D_{ij}(\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{v}}_j) \\
 &= \bar{\mathbf{v}}_i \sum_{j=1}^{n+k} D_{ij} - \sum_{j=1}^{n+k} D_{ij} \bar{\mathbf{v}}_j \\
 &= \bar{\mathbf{v}}_i \sum_{j=1}^{n+k} D_{ij} - \sum_{j=1}^n D_{ij} \bar{\mathbf{v}}_j - \sum_{j=n+1}^{n+k} D_{ij} \bar{\mathbf{v}}_j.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Setzt man für $i = 1, \dots, n$ den Ausdruck (4.12) gleich $\mathbf{0}$, so erhält man das lineare Gleichungssystem $A\bar{\mathbf{v}}_I = \mathbf{b}$, wobei $A, \bar{\mathbf{v}}_I, \mathbf{b}$ wie folgt definiert sind

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+k} D_{ij} & \text{für } i = j \\ -D_{ij} & \text{sonst,} \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\bar{\mathbf{v}}_I = (\bar{\mathbf{v}}_1 \dots \bar{\mathbf{v}}_n)^T, \tag{4.14}$$

$$\mathbf{b} = \left(\sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}_1} \cap V_B} D_{\mathbf{v}_1 \mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} \quad \dots \quad \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}_n} \cap V_B} D_{\mathbf{v}_n \mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} \right)^T. \tag{4.15}$$

Die Matrix A ist symmetrisch und Hormann zeigte in [29], dass sie sogar positiv definit ist. Somit ist das zugehörige Gleichungssystem eindeutig lösbar. Da die Matrix A der Hessematrix von E_F entspricht, ist die Lösung des Gleichungssystems auch das Minimum der Energie E_F . Die zugehörige, eindeutig definierte lineare Projektion wird im weiteren mit $\boldsymbol{\psi}_F$ bezeichnet.

Definiert man nun für jede innere Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_I(\mathcal{T})$ die Zahl $\lambda_{\mathbf{vw}} \in \mathbb{R}$ durch

$$\lambda_{\mathbf{vw}} = \frac{D_{\mathbf{vw}}}{\sum_{\mathbf{u} \in N_{\mathbf{v}}} D_{\mathbf{vu}}},$$

so gilt Bedingung (4.5), denn es ist $D_{\mathbf{vw}} > 0$ für alle $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_I(\mathcal{T})$. Für jede innere Ecke $\mathbf{v}_i \in V_I(\mathcal{T}) = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{v}}_i} E_F(\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n) = \mathbf{0} \\
 \Leftrightarrow &\bar{\mathbf{v}}_i \sum_{j=1}^{n+k} D_{ij} - \sum_{j=1}^{n+k} D_{ij} \bar{\mathbf{v}}_j = \mathbf{0} \\
 \Leftrightarrow &\boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}_i) \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}_i}} D_{\mathbf{v}_i \mathbf{w}} - \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}_i}} D_{\mathbf{v}_i \mathbf{w}} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{w}) = \mathbf{0} \\
 \Leftrightarrow &\boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}_i) = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}_i}} \lambda_{\mathbf{v}_i \mathbf{w}} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{w}).
 \end{aligned}$$

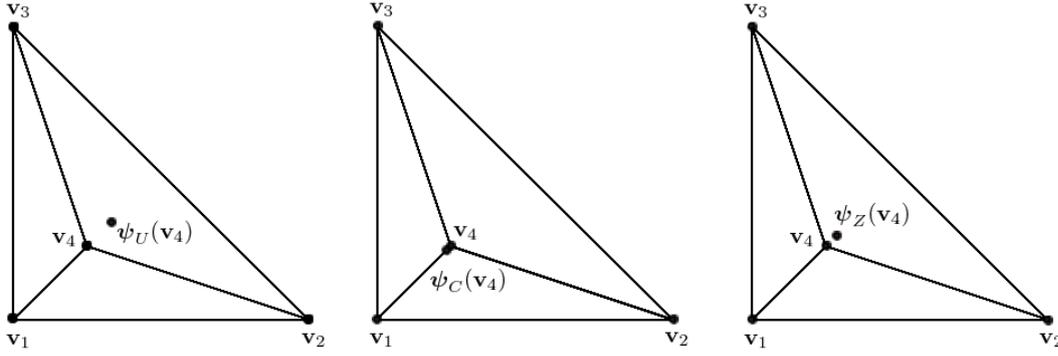


Abbildung 4.11: Auf die Triangulierung $\mathcal{T} = \{\Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_4, \Delta \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4, \Delta \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_4\}$ mit den Ecken $\mathbf{v}_1 = (0, 0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1)^T$, $\mathbf{v}_4 = (0.25, 0.25)^T$ wird die uniforme, chordale und Zentripetale Projektion angewendet. Als Randparametrisierung wird jeweils $\bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i, i = 1, 2, 3$, gesetzt. Als Projektion der inneren Ecke \mathbf{v}_4 ergibt sich dann $\psi_U(\mathbf{v}_4) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$, $\psi_C(\mathbf{v}_4) = (0.23, 0.23)^T$, $\psi_Z(\mathbf{v}_4) = (0.28, 0.28)^T$.

Somit ist auch Bedingung (4.6) erfüllt und die Projektion ψ_F ist eine Konvex-Kombinations-Projektion. Werden die Voraussetzungen von Satz 4.15 erfüllt, so ist die Projektion ψ injektiv.

Wählt man als Federkonstante $D_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}$, für alle inneren Kanten $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_I(\mathcal{T})$, jeweils

$$D_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} = 1 \text{ oder } D_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} = \frac{1}{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2} \text{ oder } D_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2}},$$

so erhält man die **Uniforme Projektion** ψ_U , die **Chordale Projektion** ψ_C oder die **Zentripetale Projektion** ψ_Z . Keine dieser Projektionen erfüllt die Reproduktionseigenschaft, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.17

In Abbildung 4.11 ist die Triangulierung $\mathcal{T} = \{\Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_4, \Delta \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4, \Delta \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_4\}$ mit den Ecken $\mathbf{v}_1 = (0, 0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1)^T$, $\mathbf{v}_4 = (0.25, 0.25)^T$ zu sehen. Als Parameterwerte für die Randecken wird $\psi_F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, $\psi_F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$, $\psi_F(\bar{\mathbf{v}}_3) = \mathbf{v}_3$ gewählt. Erfüllt die Projektion ψ_F die Reproduktionseigenschaft, so muss auch $\psi_F(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_4$ gelten. Für die Projektionen ψ_U, ψ_C, ψ_Z ergeben sich die folgenden Näherungswerte

$$\psi_U(\mathbf{v}_4) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T, \psi_C(\mathbf{v}_4) = (0.23, 0.23)^T, \psi_Z(\mathbf{v}_4) = (0.28, 0.28)^T.$$

Somit erfüllt keine der genannten Projektionen die Reproduktionseigenschaft.

4.2.2.3 Die harmonische Projektion

Die harmonische Projektion von Pinkall und Polthier [42] lässt sich durch die folgende Dirichletsche Randwertaufgabe motivieren.

4 Lineare Projektionsverfahren für Triangulierungen

Gegeben sei eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$ deren Rand ∂M einer Jordankurve entspricht, sowie ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und ein Homöomorphismus $g : \partial M \rightarrow \partial\Omega$. Gesucht ist eine Funktion $\mathbf{f} : M \rightarrow \Omega$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &\equiv g \quad \text{auf } \partial M, \\ \Delta f_i &\equiv 0 \quad \text{in } M, i = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Hierbei bezeichnet Δ den **Laplace-Beltrami-Operator** (siehe Kreyszig[33]). Eine Funktion $\mathbf{f} : M \rightarrow \Omega$, welche Gleichung (4.16) erfüllt, wird als **harmonische Abbildung** bezeichnet. Wie aus der Variationsrechnung bekannt ist, minimiert die Lösung von (4.16) die Dirichletsche Energie E_D von \mathbf{f} , welche definiert ist durch

$$E_D(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla \mathbf{f}|^2.$$

Hierbei ist $|\nabla \mathbf{f}|^2 := |\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2$ und

$$\|\nabla f_i\|^2 = g_{11} \left(\frac{\partial(f_i \circ \mathbf{S})}{\partial u} \right)^2 + 2g_{12} \frac{\partial(f_i \circ \mathbf{S})}{\partial u} \frac{\partial(f_i \circ \mathbf{S})}{\partial v} + g_{22} \left(\frac{\partial(f_i \circ \mathbf{S})}{\partial v} \right)^2 \quad i = 1, 2,$$

mit den Größen $g_{11} = \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_u \rangle$, $g_{12} = \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v \rangle$, $g_{22} = \langle \mathbf{S}_v, \mathbf{S}_v \rangle$ der 1. Fundamentalform.

Es sei nun \mathcal{T} eine offene Triangulierung, dann ist $M := \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, deren Rand einer Jordankurve entspricht. Um die Dirichletsche Randwertaufgabe (4.16) näherungsweise zu lösen, werden statt beliebiger Funktionen \mathbf{f} nur lineare Projektionen ψ zugelassen. Durch Vorgabe der Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}_{n+1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{n+k} \in \partial\Omega$ der Randecken von \mathcal{T} ergibt sich eine Approximation der Randbedingung von (4.16). Eine lineare Projektion $\psi : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche die Dirichletsche Energie E_D minimiert, wird als **harmonische Projektion** bezeichnet. Nach Pinkall und Polthier [42] hat die Dirichletsche Energie E_D einer linearen Projektion ψ die folgende Form

$$E_D = E_D(\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n) = \frac{1}{2} \sum_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_I} \frac{1}{2} (\cot(\alpha_{\mathbf{vw}}) + \cot(\beta_{\mathbf{vw}})) \|\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{w}}\|_2^2.$$

Die Winkel $\alpha_{\mathbf{vw}}, \beta_{\mathbf{vw}}$ entsprechen den der Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ gegenüberliegenden Winkeln der angrenzenden Dreiecke $\Delta \mathbf{vwv}_{i_1}$, $\Delta \mathbf{vv}_{i_2} \mathbf{w}$, $\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2} \in V(\mathcal{T})$ (siehe Abbildung 4.12) und werden im Weiteren als **harmonische Winkel** der Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ bezeichnet. Ist die Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ eine Randkante, so ist einer der beiden Terme $\cot(\alpha_{\mathbf{vw}}), \cot(\beta_{\mathbf{vw}})$ gleich Null.

Die Dirichletsche Energie E_D kann als Gesamtenergie E_F (4.11) des bivariaten Federmodells interpretiert werden. Dazu wählt man für jede Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ als Federkonstante

$$D_{\mathbf{vw}} = \cot(\alpha_{\mathbf{vw}}) + \cot(\beta_{\mathbf{vw}}), \tag{4.17}$$

wobei $\alpha_{\mathbf{vw}}$ und $\beta_{\mathbf{vw}}$ wieder die entsprechenden Winkel der an die Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ grenzenden Dreiecke sind. Bei Wahl dieser Federkonstanten ist die Matrix A des linearen

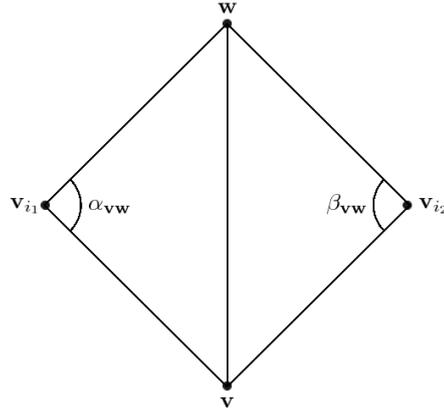


Abbildung 4.12: Die harmonischen Winkel $\alpha_{\mathbf{vw}}$, $\beta_{\mathbf{vw}}$ der Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ entsprechen den Winkel der Dreiecke $\Delta \mathbf{vwv}_{i_1}$, $\Delta \mathbf{vwv}_{i_2}$, $\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2} \in V(\mathcal{T})$, in den Ecken $\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}$.

Gleichungssystems (4.13) symmetrisch und sogar positiv definit [42]. Somit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und die durch diese Lösung definierte Projektion ψ_H ist das Minimum der Energie $E_F = E_D$. Hormann zeigte in [29], dass die Projektion ψ die Reproduktionseigenschaft besitzt. Jedoch ist die Projektion nicht immer injektiv, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.18

In Abbildung 4.13 ist die Triangulierung $\mathcal{T} = \{\Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_4, \Delta \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4, \Delta \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_4\}$ mit den Ecken $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{v}_4 = (-0.5, -0.5, 0.5)^T$ zu sehen. Als Randparameterwerte werden $\bar{\mathbf{v}}_1 = (0, 0)^T$, $\bar{\mathbf{v}}_2 = (0, 1)^T$, $\bar{\mathbf{v}}_3 = (1, 0)^T$ gewählt. Damit die harmonische Projektion $\psi_H : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow$ injektiv ist, dürfen sich die Dreiecke $\Delta \bar{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_2 \bar{\mathbf{v}}_4$, $\Delta \bar{\mathbf{v}}_2 \bar{\mathbf{v}}_3 \bar{\mathbf{v}}_4$, $\Delta \bar{\mathbf{v}}_3 \bar{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_4$ der Parameterraumtriangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ nur in ihren Kanten schneiden. Der Parameterwert von \mathbf{v}_4 bezüglich ψ_H beträgt $\bar{\mathbf{v}}_4 = \psi_H(\mathbf{v}_4) = (-0.0625, -0.0625)^T$. In diesem Fall gilt

$$\Delta \bar{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_2 \bar{\mathbf{v}}_4 \cup \Delta \bar{\mathbf{v}}_3 \bar{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_4 \subset \Delta \bar{\mathbf{v}}_2 \bar{\mathbf{v}}_3 \bar{\mathbf{v}}_4$$

und somit ist ψ_H nicht injektiv.

Unter gewissen Voraussetzungen ist die harmonische Projektion auch eine Konvex-Kombinations-Projektion. Definiert man, wie im Falle des bivariaten Federmodells, für jede innere Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_I(\mathcal{T})$ die Zahl $\lambda_{\mathbf{vw}}$ durch

$$\lambda_{\mathbf{vw}} = \frac{D_{\mathbf{vw}}}{\sum_{\mathbf{u} \in N_{\mathbf{v}}} D_{\mathbf{vu}}},$$

so gilt für jede innere Ecke $\mathbf{v} \in V_I(\mathcal{T})$

$$\psi_H(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} \psi_H(\mathbf{w}).$$

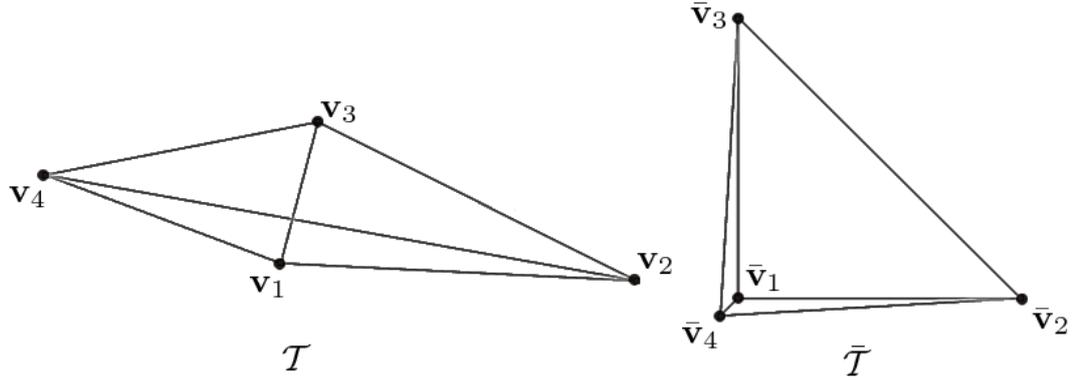


Abbildung 4.13: Die Triangulierung $\mathcal{T} = \{\Delta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_4, \Delta \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4, \Delta \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_4\}$ mit den Ecken $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{v}_4 = (-0.5, -0.5, 0.5)^T$ wurde mittels der Harmonischen Projektion ψ_H auf die Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ projiziert. Als Randparameterwerte wurden $\bar{\mathbf{v}}_1 = (0, 0)^T$, $\bar{\mathbf{v}}_2 = (0, 1)^T$, $\bar{\mathbf{v}}_3 = (1, 0)^T$ gewählt. Der Parameterwert von \mathbf{v}_4 bezüglich ψ_H beträgt $\bar{\mathbf{v}}_4 = \psi_H(\mathbf{v}_4) = (-0.0625, -0.0625)^T$. Da die Dreiecke der Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ sich überschneiden, ist ψ_H nicht injektiv.

Floater zeigte in [20], dass das Gewicht $\lambda_{\mathbf{v}\mathbf{w}}$ der Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ genau dann größer Null ist, wenn für die zugehörigen harmonischen Winkel die Bedingung $\alpha_{\mathbf{v}\mathbf{w}} + \beta_{\mathbf{v}\mathbf{w}} < \pi$ gilt. Gilt dies für alle inneren Kanten von \mathcal{T} , so ist die harmonische Projektion ψ_H eine Konvex-Kombinations-Projektion. Unter der Voraussetzung von Satz 4.15 ist sie dann auch injektiv.

4.2.2.4 Mittelwert-Projektion

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, besitzt die harmonische Projektion zwar die Reproduktionseigenschaft. Es existiert aber nicht zu jeder Triangulierung \mathcal{T} eine injektive harmonische Projektion $\psi_H : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Floater entwickelte in [18] die sogenannte Mittelwert-Projektion, welche sowohl die Reproduktionseigenschaft besitzt als auch, bei konvexer Randparametrisierung, für jede Triangulierung \mathcal{T} eine injektive Projektion liefert. Dieses Projektionsverfahren basiert auf der Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktionen.

Mittelwerteigenschaft

Es sei $f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^2$ eine stetige, harmonische Funktion auf dem Kreis $B = B(\mathbf{v}, r) \subset \mathbb{R}^2$ mit dem Mittelpunkt \mathbf{v} und dem Radius r . Dann gilt

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B} f(\mathbf{w}) \, ds. \quad (4.18)$$

Es sei nun \mathcal{T} eine planare Triangulierung und $f : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, stückweise lineare Funktion. Weiter sei $\mathbf{v} \in V_I(\mathcal{T})$ eine innere Ecke von \mathcal{T} und es seien $T_{i_1}, \dots, T_{i_k}, k \in \mathbb{N}$,

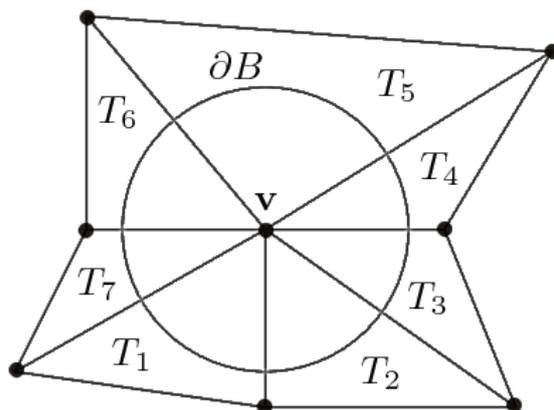


Abbildung 4.14: T_1, \dots, T_7 sind alle Dreiecke einer planaren Triangulierung \mathcal{T} , welche die Ecke \mathbf{v} enthalten. Der Radius r des Kreises $B = B(\mathbf{v}, r)$ mit Mittelpunkt \mathbf{v} ist so gewählt, dass der Kreis innerhalb der Vereinigung der Dreiecke T_1, \dots, T_7 liegt.

alle Dreiecke von \mathcal{T} , welche \mathbf{v} enthalten. Schließlich sei der Radius r so klein gewählt, dass

$$B(\mathbf{v}_0, r) \subset \bigcup_{j=1}^k T_{i_j}$$

gilt. Abbildung 4.14 veranschaulicht diese Situation. Floater zeigte in [18], dass unter diesen Voraussetzungen die Mittelwerteeigenschaft (4.18) äquivalent ist zu

$$\sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} D_{\mathbf{vw}} (f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w})) = 0. \quad (4.19)$$

Hierbei sind die Zahlen $D_{\mathbf{vw}}, \mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}$, definiert durch

$$D_{\mathbf{vw}} = \frac{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha_{\mathbf{vw}}\right) + \tan\left(\frac{1}{2}\beta_{\mathbf{vw}}\right)}{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2}, \quad (\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}). \quad (4.20)$$

Im Allgemeinen gilt $D_{\mathbf{vw}} = D_{\mathbf{wv}}$ nicht. Die Winkel $\alpha_{\mathbf{vw}}, \beta_{\mathbf{vw}}$ entsprechen den Winkeln in \mathbf{v} bezüglich der beiden Dreiecke, welche die Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ enthalten (siehe Abbildung 4.15). Für die Winkel gilt offensichtlich $0 < \alpha_{\mathbf{vw}}, \beta_{\mathbf{vw}} < \pi$. Somit sind die Zahlen $D_{\mathbf{vw}}, \mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}$, stets positiv. Definiert man nun

$$\lambda_{\mathbf{vw}} = \frac{D_{\mathbf{vw}}}{\sum_{\mathbf{u} \in N_{\mathbf{v}}} D_{\mathbf{vu}}}, \quad (\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}), \quad (4.21)$$

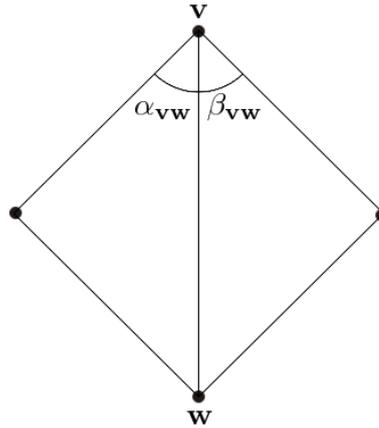


Abbildung 4.15: Die Winkel $\alpha_{\mathbf{vw}}, \beta_{\mathbf{vw}}$ entsprechen den Winkeln in \mathbf{v} bezüglich der beiden Dreiecke, welche die Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ enthalten.

so ist Gleichung (4.19) äquivalent zu

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}} \lambda_{\mathbf{vw}} f(\mathbf{w}). \quad (4.22)$$

Laut dem folgendem Satz sind die Zahlen $\lambda_{\mathbf{vw}}, \mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}$, Koordinaten von \mathbf{v} bezüglich der Ecken $\mathbf{w} \in N_{\mathbf{v}}$. Floater bezeichnete diese Koordinaten als **Mittelwert-Koordinaten**.

Satz 4.19

Es sei \mathcal{T} eine planare Triangulierung und $\mathbf{v} \in V_I(\mathcal{T})$ eine innere Ecke von \mathcal{T} . Dann sind die in Gleichung (4.21) definierten Zahlen $\lambda_{\mathbf{vw}}$ Koordinaten von \mathbf{v} bezüglich der Nachbarschaft $N_{\mathbf{v}}$ von \mathbf{v} .

Beweis [18]. Es sei $N_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\} \subset V(\mathcal{T})$, $l \in \mathbb{N}$, die Nachbarschaft von \mathbf{v} . Hierbei seien die Ecken $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ gegen den Uhrzeigersinn um \mathbf{v} angeordnet. Diese lassen sich mit Hilfe von Polarkoordinaten bezogen auf \mathbf{v} ausdrücken. Zu \mathbf{v}_i existiert ein Winkel $\theta_i \in [0, 2\pi)$ mit

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}\|_2 \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}\|_2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix}.$$

Setzt man $\mathbf{v}_{l+1} = \mathbf{v}_1$ und $\theta_{l+1} = \theta_1$, so entspricht $\alpha_i = \theta_{i+1} - \theta_i$ dem Winkel in \mathbf{v} , welcher durch die Kanten $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}], [\mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}]$ eingeschlossen wird. Gleichung (4.20) lautet dann

$$D_i := D_{\mathbf{vv}_i} = \frac{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha_{i-1}\right) + \tan\left(\frac{1}{2}\alpha_i\right)}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_i\|_2}.$$

Es gilt $0 < \frac{1}{2}\alpha_i < \frac{\pi}{2}$ und somit sind D_i als auch

$$\lambda_i := \lambda_{\mathbf{vv}_i} = \frac{D_i}{\sum_{i=1}^l D_i}$$

positiv. Aufgrund der Definition von λ_i gilt

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1.$$

Es verbleibt zu zeigen

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbf{v}_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^l \lambda_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^l D_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l D_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) &= \left(\tan \left(\frac{1}{2} \alpha_{i-1} \right) + \tan \left(\frac{1}{2} \alpha_i \right) \right) \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}\|_2} \\ &= \sum_{i=1}^l \left(\tan \left(\frac{1}{2} \alpha_{i-1} \right) + \tan \left(\frac{1}{2} \alpha_i \right) \right) \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1} \tan \left(\frac{1}{2} \alpha_i \right) \left(\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta_{i+1}) \\ \sin(\theta_{i+1}) \end{pmatrix} \right) \quad (4.23)$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1 - \cos(\alpha_i)}{\sin(\alpha_i)} \left(\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta_{i+1}) \\ \sin(\theta_{i+1}) \end{pmatrix} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{\sin(\alpha_i)} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left(\sin(\theta_{i+1} - \theta) \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix} + \sin(\theta - \theta_i) \begin{pmatrix} \cos(\theta_{i+1}) \\ \sin(\theta_{i+1}) \end{pmatrix} \right) d\theta \quad (4.24)$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} d\theta \quad (4.25)$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} d\theta$$

$$= \mathbf{0}.$$

Hierbei ergibt sich die Gleichung (4.23) durch Indexverschiebung und Verwendung von $\alpha_0 = \alpha_l, \theta_0 = \theta_l$. In Gleichung (4.24) und (4.25) wurden die Identitäten

$$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sin(\theta_{i+1} - \theta) d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sin(\theta - \theta_i) d\theta = 1 - \cos(\alpha_i).$$

und

$$\sin(\alpha_i) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \sin(\theta_{i+1} - \theta) \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix} + \sin(\theta - \theta_i) \begin{pmatrix} \cos(\theta_{i+1}) \\ \sin(\theta_{i+1}) \end{pmatrix}.$$

4 Lineare Projektionsverfahren für Triangulierungen

	Injektiv	Reproduktionseigenschaft	Symmetrie
Bivariates Federmodell	Ja	Nein	Ja
Harmonische Projektion	Nein	Ja	Ja
Mittelwert-Projektion	Ja	Ja	Nein

Tabelle 4.1: Zusammenfassung der Eigenschaften drei vorgestellten Projektionen.

verwendet. Letztere lässt sich leicht mit Hilfe des Additionstheorems des Sinus herleiten. \square

Es sei nun \mathcal{T} eine Oberflächentriangulierung, dann lässt sich mit Hilfe der Mittelwert-Koordinaten eine Konvex-Kombinations-Projektion konstruieren, welche als **Mittelwert-Projektion** $\psi_M : \mathcal{S}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ bezeichnet wird. Die Matrix (4.8) des zugehörigen Gleichungssystems ist im Allgemeinen nicht symmetrisch. Sind die Voraussetzungen von Satz 4.15 erfüllt, so ist die Mittelwert-Projektion injektiv. Da zur Konstruktion der Mittelwert-Projektion Koordinaten verwendet wurden, besitzt sie nach Satz 4.14 die Reproduktionseigenschaft.

Tabelle 4.1 fasst die Eigenschaften Injektivität, Reproduktionseigenschaft, symmetrische Matrix der vorgestellten Projektionen zusammen. Da die Mittelwert-Projektion sowohl injektiv ist als auch die Reproduktionseigenschaft besitzt, wird diese im Weiteren als Projektion verwendet werden.

5 Gittererzeugung mittels globaler Parametrisierung

In diesem Kapitel wird ein neues Verfahren zur Erzeugung einer Hierarchie von Hexaedergittern $\mathcal{H}^0, \dots, \mathcal{H}^N$, $N \in \mathbb{N}$, in einem durch eine NURBS-Geometrie \mathcal{G} definierten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ erläutert. Zunächst wird beschrieben, wie zu einem gegebenen Flächenverband eine globale Parametrisierung erzeugt wird.

5.1 Globale Parametrisierung eines NURBS-Flächenverbandes

Es sei $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ein Flächenverband bezüglich einer gegebenen Geometrie \mathcal{G} . Zu jeder Fläche \mathcal{S}_i sei eine Parametrisierung (D_i, \mathbf{S}_i) gegeben. Die einzelnen Flächen \mathcal{S}_i können ungetrimmt, getrimmt ohne Löcher oder auch getrimmt mit Löchern sein. Abbildung 5.1 zeigt drei NURBS-Flächen als Beispiel. Der Flächenverband \mathcal{F} darf keine Löcher enthalten, muss also einfach zusammenhängend sein (siehe Definition 2.20). Abbildung 5.2 zeigt ein Beispiel für einen Flächenverband. Ziel ist es zur Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ eine globale Parametrisierung $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \bar{\mathbf{S}}(\bar{D})$ zu erzeugen. Zunächst wird der globale Parameterbereich \bar{D} konstruiert. Hierbei wird jeder Fläche \mathcal{S}_i eine zusammenhängende Teilmenge $\bar{D}_i \subset \bar{D}$ zugewiesen. Die Teilmengen seien so gewählt, dass die Menge $\mathcal{F}_{\bar{D}} = \{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n\}$ einen *planaren Flächenverband* bildet. Anschließend wird eine stetige Bijektion $\mathbf{B}_i : \bar{D}_i \rightarrow D_i$ definiert. Damit lässt sich eine neue Parametrisierung $\mathcal{S}_i = \bar{\mathbf{S}}_i(\bar{D}_i)$, $\bar{\mathbf{S}}_i = \mathbf{S} \circ \mathbf{B}_i$, von \mathcal{S}_i erzeugen. Die Fläche \bar{D}_i , die Bijektion \mathbf{B}_i und die Parametrisierung $(\bar{D}_i, \bar{\mathbf{S}}_i)$ werden als **globaler Teilparameterbereich von \mathcal{S}_i** , **lokale Bijektion von \mathcal{S}_i** und **globale Parametrisierung von \mathcal{S}_i** bezeichnet. Die globale Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ von $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ hat dann die Form

$$\bar{D} = \bigcup_{i=1}^n \bar{D}_i,$$

$$\bar{\mathbf{S}} : \begin{cases} \bar{D} & \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \\ \bar{\mathbf{u}} & \rightarrow \bar{\mathbf{S}}_i(\bar{\mathbf{u}}), \text{ für } \bar{\mathbf{u}} \in \bar{D}_i \end{cases} .$$

Die Abbildung $\bar{\mathbf{S}}$ ist im Inneren jeder Teilmenge \bar{D}_i stetig, da die globalen Parametrisierungen als Kompositionen stetiger Abbildungen wieder stetig sind. Damit $\bar{\mathbf{S}}$ auf ganz \bar{D} stetig ist, müssen zwei globale Teilparameterbereiche \bar{D}_1, \bar{D}_2 genau dann benachbart sein, wenn ihre zugehörigen Flächen $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ benachbart sind. Präziser formuliert muss

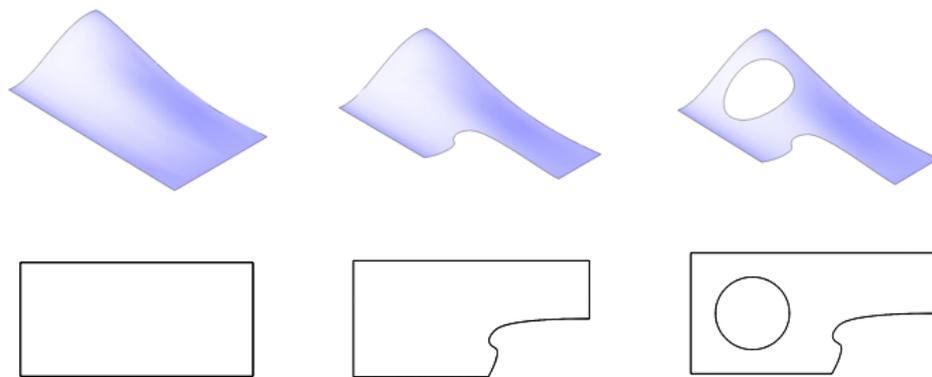


Abbildung 5.1: Beispiele für mögliche Flächen innerhalb eines Flächenverbandes. In der oberen Reihe sind eine ungetrimmte Fläche, eine getrimmte Fläche und eine getrimmte Fläche mit Loch zu sehen. Alle drei Flächen sind NURBS-Flächen. Die untere Reihe zeigt die zugehörigen Parameterbereiche.

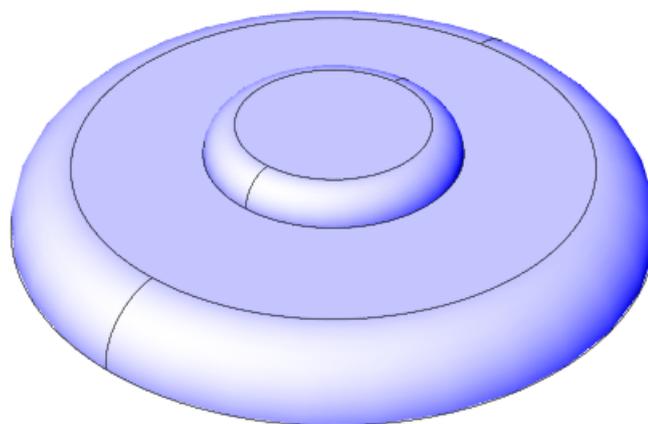


Abbildung 5.2: Beispiel für einen Flächenverband. Der Flächenverband besteht aus sechs Flächen. Vier Flächen sind nicht getrimmt. Eine Fläche ist getrimmt ohne Loch. Eine Fläche ist getrimmt mit Loch.

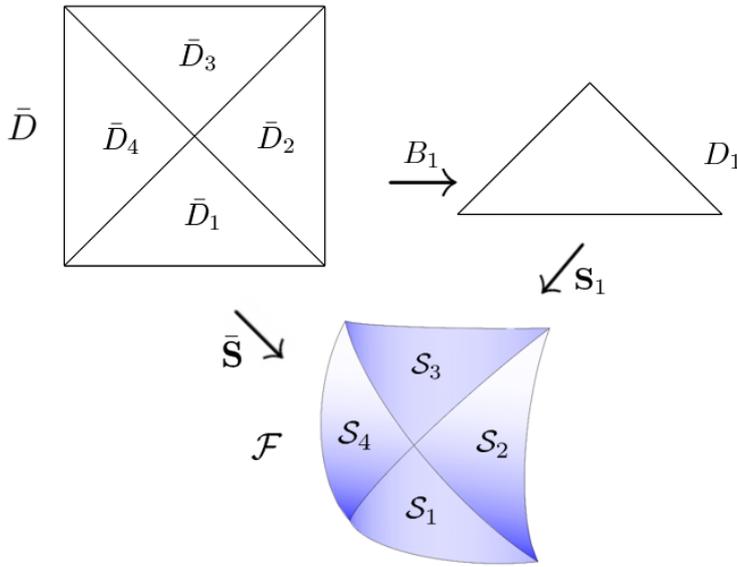


Abbildung 5.3: Schema zur Erzeugung einer globalen Parametrisierung $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \bar{\mathbf{S}}(\bar{D})$ eines Flächenverbandes $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4\}$.

gelten

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 &= \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} \in E(\mathcal{F}) \\ \Leftrightarrow \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 &= \underline{\mathcal{C}}, \quad \underline{\mathcal{C}} \in E(\mathcal{F}_{\bar{T}}), \quad \bar{\mathbf{S}}(\underline{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Abbildung 5.3 veranschaulicht die Konstruktion der globalen Parametrisierung am Beispiel eines Flächenverbandes von vier Flächen. Zwei zentrale Fragen sind nun offen:

1. Wie soll der globale Parameterbereich \bar{D} konstruiert werden?
2. Welche Art von lokaler Bijektion $B_i : \bar{D}_i \rightarrow D_i$ soll verwendet werden?

5.1.1 Globale Parametrisierung mittels affiner Transformation

Ein erster naiver Ansatz ist es, die lokalen Parameterbereiche D_i durch Verschieben zum globalen Parameterbereich \bar{D} zusammen zu fügen. Abbildung 5.4 zeigt dies an einem Beispiel von vier nicht getrimmten Flächen $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$. Diese sind in einem Flächenverband \mathcal{F} zueinander angeordnet, wie vier Vierecke in einem 2×2 -Gitter. Die lokalen Parameterbereiche D_1, D_2, D_3, D_4 sind gleich dem Einheitsquadrat. Rot hervor gehoben sind die Parameterkurven der Ränder der Flächen. Die lokalen Parameterbereiche lassen sich, analog zu den Flächen, zu einem 2×2 -Gitter anordnen. Hierbei müssen die rot markierten Kurven übereinstimmen. Die verschobenen und gedrehten lokalen Parameterbereiche entsprechen den globalen Teilparameterbereichen $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{D}_3, \bar{D}_4$. Ihre

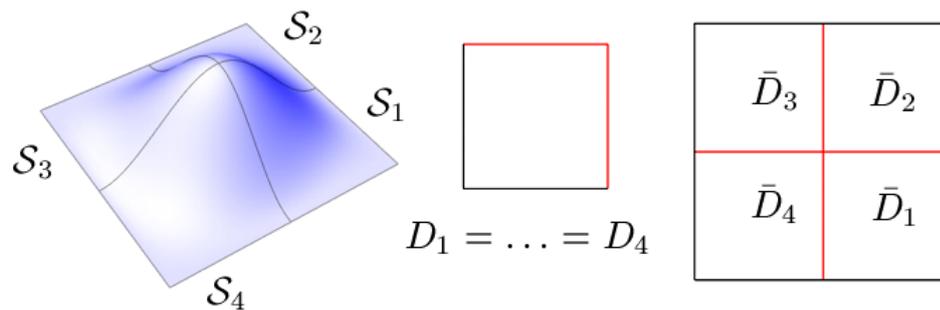


Abbildung 5.4: Der Flächenverband \mathcal{F} besteht aus den vier Flächen $\mathcal{S}_1 = \mathbf{S}(D_1), \mathcal{S}_2 = \mathbf{S}(D_2), \mathcal{S}_3 = \mathbf{S}(D_3), \mathcal{S}_4 = \mathbf{S}(D_4)$, welche gitterartig zueinander angeordnet sind. Rot hervorgehoben sind die Parameterkurven der Ränder der Flächen. Der globale Parameterbereich \bar{D} ergibt sich durch Vereinigung der verschobenen und gedrehten lokalen Parameterbereiche D_1, D_2, D_3, D_4 .

Vereinigung bildet dann den globalen Parameterbereich \bar{D} von \mathcal{F} . Als lokale Bijektionen werden affine Abbildungen verwendet.

Ein einfaches Verschieben von lokalen Parameterbereichen reicht in der Regel nicht aus, wie Abbildung 5.5 zeigt. Hier besteht der Flächenverband $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_5\}$ aus fünf Flächen, welche wie ein Fünfeck zueinander angeordnet sind. Die lokalen Parameterbereiche D_1, \dots, D_5 der Flächen sind gleich dem Einheitsquadrat, welche zum globalen Parameterbereich \bar{D} vereinigt werden sollen. Allein durch Drehungen und Verschiebungen lässt sich dies nicht realisieren. Zusätzlich muss auch eine Scherung angewendet werden. Als lokale Bijektionen werden affine Abbildungen verwendet.

Abbildung 5.6 zeigt schließlich ein Beispiel, in dem eine affine Transformation der lokalen Parameterbereiche nicht mehr zum Ziel führt. Der Flächenverband \mathcal{F} besteht aus zwei Flächen $\mathcal{S}_1 = \mathbf{S}_1(D_1), \mathcal{S}_2 = \mathbf{S}_2(D_2)$. Es existieren keine affinen Abbildungen, mit denen die lokalen Parameterbereiche D_1, D_2 in globale Teilparameterbereiche \bar{D}_1, \bar{D}_2 überführt werden können, so dass die rot markierten Parameterkurven der Ränder der Flächen übereinstimmen. Das dritte Bild zeigt einen möglichen globalen Parameterbereich \bar{D} . Hierzu wurde D_1 als globaler Teilparameterbereich \bar{D}_1 beibehalten. D_2 wurde auf einen *Halbkreisstreifen* abgebildet. Dies ist mit einer affinen Abbildung nicht realisierbar.

5.1.2 Globale Parametrisierung mittels stückweise linearer Projektion

Die Beispiele des vorherigen Abschnitts haben gezeigt, dass die Erzeugung einer globalen Parametrisierung $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \bar{\mathbf{S}}(\bar{D})$ eines Flächenverbandes \mathcal{F} schon in einfachen Fällen nicht mittels affiner Transformationen der lokalen Parameterbereiche der Flächen des Flächenverbandes realisierbar ist. Ein vollkommen anderer Ansatz ist nötig. Im Folgenden wird ein Verfahren vorgestellt, bei dem der globale Parameterbereich \bar{D} mittels einer

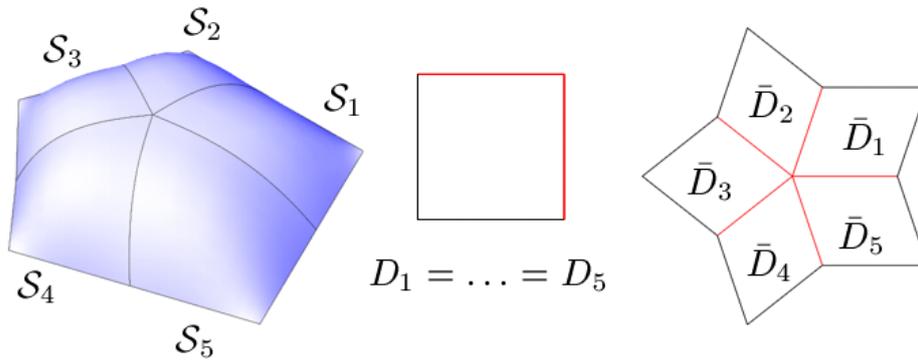


Abbildung 5.5: Der Flächenverband \mathcal{F} besteht aus fünf Flächen, welche wie ein Fünfeck zueinander angeordnet sind. Rot hervor gehoben sind die Parameterkurven der Ränder der Flächen. Der globale Parameterbereich \bar{D} ergibt sich durch Vereinigung der verschobenen, gedrehten und gescherten lokalen Parameterbereiche D_1, \dots, D_5 .

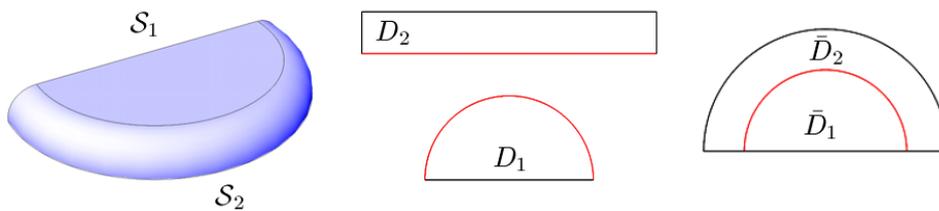


Abbildung 5.6: Der Flächenverband \mathcal{F} besteht aus zwei Flächen $\mathcal{S}_1 = \mathbf{S}_1(D_1), \mathcal{S}_2 = \mathbf{S}_2(D_2)$. Es existieren keine affinen Abbildungen mit denen die lokalen Parameterbereiche D_1, D_2 so in globale Teilparameterbereiche \bar{D}_1, \bar{D}_2 überführt werden können, so dass die rot markierten Parameterkurven der Ränder der Flächen übereinstimmen. Das dritte Bild zeigt einen möglichen globalen Parameterbereich \bar{D} . Hierzu wurde D_1 als globaler Teilparameterbereich \bar{D}_1 beibehalten. D_2 wurde auf einen *Halbkreisbogen* abgebildet. Dies ist mit einer affinen Abbildung nicht möglich.

stückweisen linearen Projektion einer approximierenden Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ von $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ erzeugt wird. Die lokalen Bijektionen der Flächen von \mathcal{F} werden durch stückweise lineare Abbildungen realisiert. Das Verfahren besteht im Wesentlichen aus drei Schritten:

1. Konstruktion einer approximierenden, zulässigen Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ bezüglich des Flächenverbandes \mathcal{F} .
2. Projektion der Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ auf eine konvexe Triangulierung $\bar{\mathcal{T}} \subset \mathbb{R}^2$.
3. Konstruktion einer globalen Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ bezüglich des Flächenverbandes \mathcal{F} .

Mit diesem Verfahren ist es möglich, für einen beliebigen Flächenverband \mathcal{F} eine globale Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ zu erzeugen. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Flächen des Flächenverbandes \mathcal{F} getrimmt sind oder nicht. Jede Fläche von \mathcal{F} darf beliebig viele Löcher enthalten.

5.1.2.1 Approximierende Triangulierung

Die approximierende Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ bezüglich des Flächenverbandes \mathcal{F} wird mit Hilfe der kommerziellen Software *Rhinoceros* [37] erzeugt. Das entsprechende Programmmodul läuft in zwei Phasen ab. Zunächst wird der Flächenverband \mathcal{F} grob durch ein Polyedernetz approximiert, welches aus Vierecken und Dreiecken besteht. Anschließend wird das Polyedernetz so lange verfeinert, bis es den vom Benutzer vorgegebenen Kriterien entspricht. Alle Vierecke des Netzes werden entlang einer ihrer Diagonalen zu zwei Dreiecken unterteilt. Dem Anwender stehen die folgenden Kriterien zur Auswahl.

Minimale Anzahl Vierecke

Hierbei wird vorgegeben, wie viele Vierecke pro Fläche $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ das Anfangsnetz mindestens haben muss. Dadurch hat man einen direkten Einfluss darauf, wie viele Dreiecke die endgültige Triangulierung mindestens enthält.

Maximales Seitenverhältnis

Es kann festgelegt werden, wie groß das maximale Verhältnis der Kantenlängen der im Anfangsnetz erzeugten Vierecke sein soll. Wird als Seitenverhältnis 1 vorgegeben, so erhält man ein sehr regelmäßiges Netz.

Minimale und maximale Kantenlänge

Durch diese beiden Werte wird festgelegt, wie lang eine Kante mindestens bzw. höchstens sein darf. Dadurch hat man einen direkten Einfluss auf die Anzahl der Dreiecke in der endgültigen Triangulierung.

Maximaler Abstand Kante zu Fläche

Das Polyedernetz wird so lange verfeinert, bis der Abstand aller Kantenmittelpunkte zur Fläche kleiner oder gleich dem angegebenen Wert ist.

Maximaler Winkel

Dieser Parameter legt fest, wie groß der Winkel zwischen den Flächennormalen zweier benachbarter Dreiecke maximal sein darf.

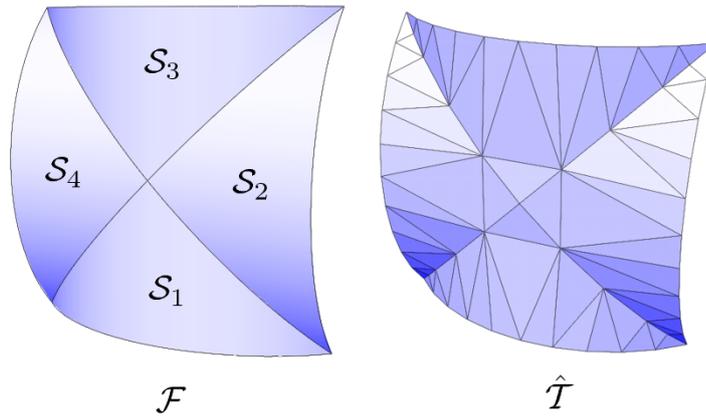


Abbildung 5.7: Beispiel für eine Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$, welche zum Flächenverband \mathcal{F} mit Hilfe der Software Rhinoceros erstellt wurde.

Nicht alle der angegebenen Parameter müssen vorgegeben werden. Die für diese Arbeit verwendeten Triangulierungen wurden alle mit den Parametern *maximaler Winkel* = 20 und *maximales Seitenverhältnis* = 1 erzeugt. Als weiterer Parameter wurde der maximale Abstand zur Fläche vorgegeben. Da diese Größe dimensionsabhängig ist, wurde sie in Abhängigkeit des gegebenen Flächenverbandes gewählt. Ein Wert von 0.1 bis 0.01 führte meist zu zufriedenstellenden Ergebnissen. Unabhängig von der Wahl der Parameter ergab sich immer eine zulässige Triangulierung im Sinne von Definition (4.5).

Beispiel 5.1

In Abbildung 5.7 ist links der Flächenverband $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4\}$ zu sehen. Zu diesem wurde mit Hilfe von Rhinoceros die Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ erzeugt, welche rechts im Bild zu sehen ist. Als Parameter wurden gewählt: Maximales Seitenverhältnis 1, Maximale Kantenlänge 1.5, Maximaler Abstand Kante zu Fläche 0.1, Maximaler Winkel 20. Die Länge der Diagonale der *Bounding-Box* des Flächenverbandes beträgt ungefähr 10.1 Maßeinheiten.

5.1.2.2 Projektion

Zu der approximierenden Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ wird nun durch Projektion eine planare Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ erzeugt. Als Randparametrisierung wird die im Abschnitt 4.2.1.2 vorgestellte **Kreis-Bogen-Strecken-Projektion** verwendet. Mit Hilfe der **Mittelwert-Projektion** (Abschnitt 4.2.2.4) werden die inneren Ecken der Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ in die Ebene projiziert. Die Matrix des hierbei zu lösenden Gleichungssystems ist in der Regel unsymmetrisch und dünn besetzt. Zur Lösung des Gleichungssystems wird die Bibliothek UMFPACK (Unsymmetric Multifrontal Package) verwendet, welche effiziente Löser für solche Probleme enthält. Wesentliche Referenzen für UMFPACK sind [12], [11], [14] und [13]. Insgesamt erhält man so eine planare, konvexe Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$. Diese wird im Weiteren als **globale Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ des Flächenverbandes \mathcal{F} bezüglich der**

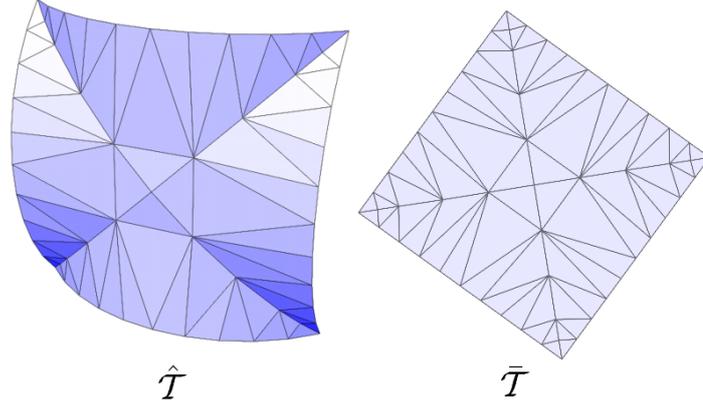


Abbildung 5.8: Zu sehen ist eine Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$, welche durch die Mittelwert-Projektion auf die Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ projiziert wurde.

approximierenden Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ bezeichnet.

Beispiel 5.2

Abbildung 5.8 zeigt die Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$, welche zum Flächenverband \mathcal{F} des vorherigen Beispiels erzeugt wurde. Die Kreis-Bogen-Strecken-Projektion liefert als Randparametrisierung ein Viereck. Mittels der Mittelwert-Projektion wird die Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ auf die Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ projiziert.

5.1.2.3 Globale Parametrisierung

Es sei $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n\}$ ein gegebener Flächenverband. Des Weiteren sei $\bar{\mathcal{T}}$ eine globale Triangulierung von \mathcal{F} bezüglich einer approximierenden Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$. Die Erzeugung einer globalen Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ des Flächenverbandes \mathcal{F} orientiert sich dabei an der im Anfang von Abschnitt 5.1 beschriebenen und in Abbildung 5.3 illustrierten Vorgehensweise. Als globaler Parameterbereich \bar{D} wird die Fläche der globalen Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$ gewählt, d. h. es gilt $\bar{D} = \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{T}}}$. Jeder Fläche $\mathcal{S}_i \in \mathcal{F}$ wird eine Teiltriangulierung $\bar{\mathcal{T}}_i \subset \bar{\mathcal{T}}$ zugewiesen. Diese ist definiert als

$$\bar{\mathcal{T}}_i = \{\Delta \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{w}} \mid \Delta \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}} \in \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}} \in \mathcal{S}_i, \bar{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{u}}), \bar{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{v}}), \bar{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{w}})\}.$$

Mit $\bar{D}_i = \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{T}}_i}$ erhält man den *globalen Teilparameterbereich* von \mathcal{S}_i . Analog wird eine Triangulierung innerhalb des lokalen Parameterbereichs D_i von \mathcal{S}_i definiert

$$\mathcal{T}_i = \{\Delta \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w} \mid \Delta \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}} \in \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{S}_i(\mathbf{u}), \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{S}_i(\mathbf{v}), \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{S}_i(\mathbf{w})\}.$$

Zu jedem Paar von Triangulierungen $\bar{\mathcal{T}}_i, \mathcal{T}_i$ existiert eine eindeutig bestimmte, stückweise lineare Bijektion $\mathbf{B}_i : \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{T}}_i} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{T}_i}$. Es sei $\bar{T} = \Delta \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{w}} \in \bar{\mathcal{T}}_i$. Dann existieren genau ein Dreieck $\hat{T} = \Delta \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{w}} \in \hat{\mathcal{T}}_i$ mit $\boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{w}}) = \bar{\mathbf{w}}$ und genau ein Dreieck $T = \Delta \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w} \in \mathcal{T}_i$ mit $\mathbf{S}_i(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{S}_i(\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{S}_i(\mathbf{w}) = \hat{\mathbf{w}}$. Die Einschränkung von

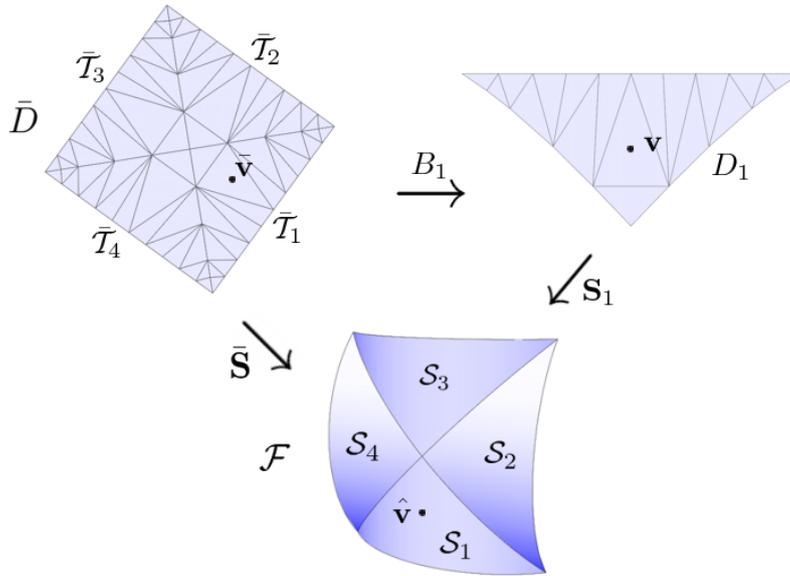


Abbildung 5.9: Veranschaulichung der globalen Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ eines Flächenverbandes \mathcal{F} .

\mathbf{B}_i auf \bar{T} ist dann definiert als die eindeutig bestimmte lineare Abbildung von \bar{T} nach T . \mathbf{B}_i ist die *lokale Bijektion* von \mathcal{S}_i . Setzt man nun $\bar{\mathbf{S}}_i = \mathbf{S}_i \circ \mathbf{B}_i$, so erhält man die *globale Parametrisierung* $(\bar{D}_i, \bar{\mathbf{S}}_i)$ der Fläche \mathcal{S}_i . Die globale Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ des Flächenverbandes \mathcal{F} ergibt sich dann durch

$$\bar{D} = \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{F}}} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{T}}_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{D}_i,$$

$$\bar{\mathbf{S}} : \begin{cases} \bar{D} & \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \\ \bar{\mathbf{u}} & \rightarrow \bar{\mathbf{S}}_i(\bar{\mathbf{u}}), \text{ für } \bar{\mathbf{u}} \in \bar{D}_i \end{cases} .$$

Beispiel 5.3

Abbildung 5.9 zeigt eine Veranschaulichung der Auswertung der globalen Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ des Flächenverbandes $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4\}$ im globalen Parameterpunkt $\bar{\mathbf{v}}$. Zum Punkt $\bar{\mathbf{v}}$ wird das Dreieck \bar{T} bestimmt, welches $\bar{\mathbf{v}}$ enthält. Das Dreieck \bar{T} ist in der Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}_1$ enthalten. Mittels der Bijektion \mathbf{B}_1 wird dieser Punkt auf den Punkt $\mathbf{v} = \mathbf{B}_1(\bar{\mathbf{v}})$ in das entsprechende Dreieck der lokalen Triangulierung \mathcal{T}_1 der Fläche \mathcal{S}_1 abgebildet. Schließlich erhält man durch die Abbildung \mathbf{S}_1 den Punkt $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{S}_1(\mathbf{v})$ auf der Fläche $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$.

5.2 Erzeugung einer Hierarchie von Hexaedergittern

Gegeben sei eine Geometrie $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, bezüglich eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Des Weiteren sei ein bezüglich Ω zulässiges Hexaeder-Grobgitter \mathcal{H}^0 gegeben. Im Folgenden wird erläutert, wie zu diesem Grobgitter eine Hierarchie von Hexaedergittern $\mathcal{H}^0, \dots, \mathcal{H}^N$, $N \in \mathbb{N}$, erzeugt wird, welche alle zulässig bezüglich Ω sind. Das Verfahren besteht aus den folgenden Schritten:

- Zerlegung der Geometrie \mathcal{G} in $m \in \mathbb{N}$ disjunkte Flächenverbände $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$.
- Berechnung der zugehörigen globalen Parametrisierungen $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_i} = \bar{\mathbf{S}}_i(\bar{D}_i)$ für $i = 1, \dots, m$.
- Mehrfache gleichmäßige Unterteilung des Grobgitters \mathcal{H}^0 . Die Unterteilung der Randvierecke von \mathcal{H}^0 erfolgt dabei in den globalen Parameterbereichen der Flächenverbände.

Der zweite Schritt wurde bereits im vorherigen Abschnitt erläutert. Im Folgenden werden die Schritte eins und drei beschrieben.

5.2.1 Zerlegung der Geometrie in Flächenverbände

Zunächst muss die Geometrie \mathcal{G} in $m \in \mathbb{N}$ Flächenverbände $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m\}$ zerlegt werden. Hierbei müssen die folgenden Bedingungen erfüllt werden

- $\bigcup_{i=1}^m \mathcal{S}_{\mathcal{F}_i} = \mathcal{S}_{\mathcal{G}}$,
- Die Zerlegung $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ ist *disjunkt*, d. h. zu jeder Fläche $\mathcal{S} \in \mathcal{G}$ existiert genau ein Flächenverband \mathcal{F}_i mit $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_i$.
- Zu jedem Randviereck $Q = \square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{H}^0}$ existiert genau ein Flächenverband $\mathcal{F}_i \in \mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ mit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}_i}$.

Die letzte Bedingung gewährleistet, dass die Unterteilung eines Randvierecks im globalen Parameterbereich des entsprechenden Flächenverbandes durchgeführt werden kann. Sind diese Bedingungen erfüllt, so heißt die Zerlegung $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m\}$ von \mathcal{G} **zulässig** bezüglich \mathcal{H}^0 . Die Erzeugung der Zerlegung der Geometrie erfolgt bisher manuell. Die geforderten Bedingungen konnten in allen berechneten Fällen problemlos erfüllt werden.

Beispiel 5.4

Abbildung 5.10 zeigt eine Geometrie \mathcal{G} , welche aus 28 Flächen $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{28}$ besteht. Diese Geometrie wurde in 14 Flächenverbände $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{14}\}$ zerlegt. Die entstandene Zerlegung ist zulässig bezüglich des Hexaedergitters \mathcal{H}^0 . 8 Flächenverbände bestehen jeweils aus einer Fläche. 4 Flächenverbände bestehen aus jeweils 2 Flächen. 2 Flächenverbände bestehen aus jeweils 6 Flächen.

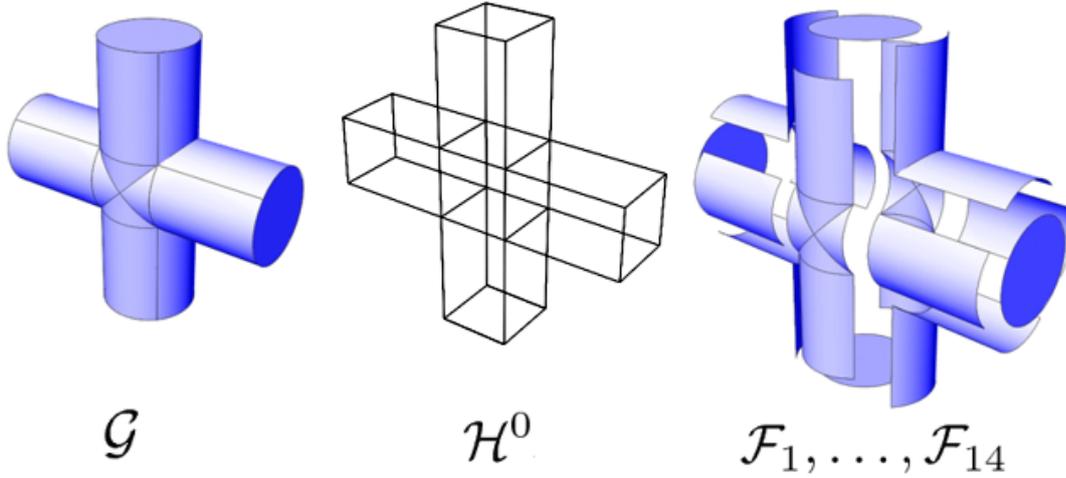


Abbildung 5.10: Beispiel für eine zulässige Zerlegung $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{14}\}$ einer Geometrie $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{28}\}$ bezüglich eines Hexaedergitters \mathcal{H}^0 .

5.2.2 Gleichmäßige Unterteilung des Grobgitters im globalen Parameterbereich

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein durch eine NURBS-Geometrie \mathcal{G} definiertes Gebiet. Des Weiteren sei \mathcal{H}^0 ein bezüglich Ω zulässiges Grobgitter, d. h. alle Randpunkte von \mathcal{H}^0 liegen auf $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$. Schließlich sei $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, eine zulässige Zerlegung von \mathcal{G} bezüglich \mathcal{H}^0 . Ziel ist es, durch mehrmalige gleichmäßige Unterteilung von \mathcal{H}^0 eine Hierarchie von Gittern $\mathcal{H}^0, \dots, \mathcal{H}^N$, $N \in \mathbb{N}$, zu erzeugen, welche alle zulässig bezüglich Ω sind.

Es seien $(\bar{D}_1, \bar{\mathbf{S}}_1), \dots, (\bar{D}_m, \bar{\mathbf{S}}_m)$ die globalen Parametrisierungen der Flächenverbände $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$. Zunächst werden für jeden Randpunkt $\hat{\mathbf{v}} \in V_B(\mathcal{H}^0)$ des Grobgitters \mathcal{H}^0 , welcher auf der Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_i}$ des Flächenverbandes \mathcal{F}_i liegt, die zugehörigen globalen Parameterwerte berechnet. Diese ergeben sich durch Anwendung der Inversen von $\bar{\mathbf{S}}$ auf $\hat{\mathbf{v}}$. Es sei $\mathcal{S}_{i_j} \in \mathcal{F}_i$ die Fläche aus dem Flächenverband \mathcal{F}_i , für die gilt $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{S}_{i_j}$ und $(D_{i_j}, \mathbf{S}_{i_j})$ die zugehörige Parametrisierung. Es sei weiter $(\bar{D}_{i_j}, \bar{\mathbf{S}}_{i_j})$, $\bar{\mathbf{S}}_{i_j} = \mathbf{S}_{i_j} \circ \mathbf{B}_{i_j}$ die in Abschnitt 5.1.2.3 beschriebene Umparametrisierung von \mathcal{S}_{i_j} . Für die Einschränkung von $\bar{\mathbf{S}}^{-1}$ auf \mathcal{S}_{i_j} gilt dann offensichtlich

$$\bar{\mathbf{S}}^{-1} = \bar{\mathbf{S}}_{i_j}^{-1} = (\mathbf{S}_{i_j} \circ \mathbf{B}_{i_j})^{-1} = \mathbf{B}_{i_j}^{-1} \circ \mathbf{S}_{i_j}^{-1}.$$

Entsprechend verläuft die Berechnung der globalen Parameterwerte von $\hat{\mathbf{v}}$ in zwei Schritten. Zunächst werden die Parameter $\mathbf{v} = \mathbf{S}_{i_j}^{-1}(\hat{\mathbf{v}})$ berechnet. Anschließend wird das Dreieck $T \in \mathcal{T}_{i_j}$ der lokalen Triangulierung \mathcal{T}_{i_j} von \mathcal{S}_{i_j} , in dem \mathbf{v} liegt, bestimmt. Durch das Dreieck T und das zugehörige Dreieck $\bar{T} \in \bar{\mathcal{T}}_i$ der globalen Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}_i$ des Flächenverbandes \mathcal{F}_i ist die Einschränkung von $\mathbf{B}_{i_j}^{-1}$ auf T eindeutig bestimmt. Somit lassen sich schließlich die gesuchten globalen Parameterwerte $\bar{\mathbf{v}}$ von $\hat{\mathbf{v}}$ durch $\bar{\mathbf{v}} = \bar{B}_{i_j}^{-1}(\mathbf{v})$ bestimmen.

Es sei nun das Hexaedergitter \mathcal{H}^l gegeben und die globalen Parameterwerte der Rand-

punkte von \mathcal{H}^l bezüglich der Flächenverbände, auf denen sie liegen, seien bekannt. Die gleichmäßige Unterteilung von \mathcal{H}^l zum Hexaedergitter \mathcal{H}^{l+1} erfolgt, wie im Abschnitt 1.5 beschrieben. Die Unterteilung eines Randvierecks $Q = \square \hat{\mathbf{v}}_1 \hat{\mathbf{v}}_2 \hat{\mathbf{v}}_3 \hat{\mathbf{v}}_4 \in F_B(\mathcal{H}^l)$ erfolgt im globalen Parameterbereich. Die Zerlegung $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$ von \mathcal{G} ist zulässig bezüglich \mathcal{H}^0 . Diese Eigenschaft überträgt sich auf alle weiteren Gitter $\mathcal{H}^1, \dots, \mathcal{H}^N$. Somit existiert zum Randviereck Q genau ein Flächenverband \mathcal{F}_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, mit $\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\mathbf{v}}_3, \hat{\mathbf{v}}_4 \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}_i}$. Es seien nun $\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \bar{\mathbf{v}}_3, \bar{\mathbf{v}}_4$ die entsprechenden Parameterwerte der Ecken von Q bezüglich der globalen Parametrisierung $(\bar{D}_i, \bar{\mathbf{S}}_i)$ des Flächenverbandes \mathcal{F}_i . Diese definieren das Viereck $\bar{Q} = \square \bar{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_2 \bar{\mathbf{v}}_3 \bar{\mathbf{v}}_4$ im globalen Parameterbereich \bar{D}_i . Durch gleichmäßige Unterteilung von \bar{Q} in vier Teilvierecke erhält man die fünf neuen Ecken

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_5 &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_2), \bar{\mathbf{v}}_6 = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_2 + \bar{\mathbf{v}}_3), \bar{\mathbf{v}}_7 = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_3 + \bar{\mathbf{v}}_4), \bar{\mathbf{v}}_8 = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_4 + \bar{\mathbf{v}}_1), \\ \bar{\mathbf{v}}_9 &= \frac{1}{4}(\bar{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_2 + \bar{\mathbf{v}}_3 + \bar{\mathbf{v}}_4). \end{aligned}$$

Durch Auswertung der globalen Parametrisierung in den neuen Parameterwerten erhält man die Ecken $\hat{\mathbf{v}}_j = \bar{\mathbf{S}}_i(\hat{\mathbf{v}}_j)$, $j = 5, \dots, 9$. Diese definieren die gleichmäßige Unterteilung von Q in vier Teilvierecke.

Beispiel 5.5

Das folgende Beispiel soll veranschaulichen, dass es mit Hilfe des hier vorgestellten Verfahrens möglich ist, eine *schlechte* Parametrisierung einer Fläche *auszugleichen*. Dieses Beispiel wurde bereits in Kapitel 4 kurz vorgestellt. Es folgt nun eine detaillierte Analyse. Es sei \mathcal{S} die durch das Viereck $Q = \square \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_1 = (0 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{v}_2 = (50 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{v}_3 = (50 \ 50 \ 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0 \ 50 \ 0)$ beschriebene Fläche. Durch $\mathcal{Q}^0 = Q$ wird ein Vierecksgitter definiert, welches offensichtlich die Fläche \mathcal{S} approximiert. Durch viermaliges gleichmäßiges unterteilen von \mathcal{Q}^0 erhält man das uniforme Gitter \mathcal{Q}^4 . Für die Menge der Punkte gilt

$$V(\mathcal{Q}^4) = \left\{ \mathbf{v}_{ij} = \left(i \frac{50}{2^4}, j \frac{50}{2^4}, 0 \right), i, j = 0, \dots, 2^4 \right\}.$$

Es seien nun (D, \mathbf{S}) eine Parametrisierung von \mathcal{S} und $\underline{\mathcal{Q}}^4$ das Vierecksgitter, welches man durch viermalige gleichmäßige Unterteilung von \mathcal{Q}^0 im Parameterbereich von (D, \mathbf{S}) erhält. Weiter sei $V(\underline{\mathcal{Q}}^4) = \{ \underline{\mathbf{v}}_{ij}, i, j = 0, \dots, 2^4 \}$. Bei einer *guten* Parametrisierung (D, \mathbf{S}) erwartet man, dass $\underline{\mathcal{Q}}^4$ mit dem uniformen Gitter \mathcal{Q}^4 übereinstimmt. D. h. der **relative Fehler**

$$f_{ij} = \frac{\| \mathbf{v}_{ij} - \underline{\mathbf{v}}_{ij} \|}{50}$$

soll möglichst klein sein. Dieser entspricht dem absoluten Fehler geteilt durch die Breite des Vierecks Q . In Abbildung 4.2 ist links ein Gitter $\hat{\mathcal{Q}}^4$ zu sehen, welches sich durch gleichmäßige Unterteilung von \mathcal{Q}^0 im Parameterbereich einer NURBS-Parametrisierung $(\hat{D}, \hat{\mathbf{S}})$ ergeben hat. Der maximale relative Fehler beträgt 8.14%. Tabelle 5.1 zeigt einen Überblick über die Verteilung der relativen Fehler. In fast 30% der Gitterpunkte liegt

rel. Fehler f_{ij}	[0%, 1%]	(1%, 2%]	(2%, 3%]	(3%, 4%]	(4%, 5%]	(5%, 9%]
\hat{Q}^4	26.3%	3.8%	9.69%	17.65%	13.49%	29.07%
rel. Fehler f_{ij}	[0%, 0.1%]	(0.1%, 0.2%]	(0.2%, 0.3%]	(0.3%, 0.9%]		
\tilde{Q}^4	62.3%	21.8%	9%	6.57%		

Tabelle 5.1: Die erste Tabelle gibt einen Überblick über die Verteilung des relativen Fehlers für das Gitter \hat{Q}^4 . Die zweite gibt einen entsprechenden Überblick für das Gitter \tilde{Q}^4 .

ein relativer Fehler von 5 bis zu 8.14 Prozent vor. Offensichtlich handelt es sich hier um eine schlechte Parametrisierung.

Fasst man \mathcal{S} als einen aus einer Fläche bestehenden Flächenverband auf, so lässt sich auch auf \mathcal{S} das in Abschnitt 5.1.2.3 beschriebene Verfahren anwenden. Es ergibt sich eine neue Parametrisierung $(\tilde{D}, \tilde{\mathbf{S}})$. Die verwendete approximierende Triangulierung besteht aus 1889 Dreiecken. Die in Abschnitt 4.2.1.2 beschriebene Kreis-Bogen-Projektion liefert als Randparametrisierung des globalen Parameterbereichs \tilde{D} ein Quadrat. Durch vierfache gleichmäßige Unterteilung von \mathcal{Q}^0 im Parameterbereich von $(\tilde{D}, \tilde{\mathbf{S}})$ ergibt sich das Vierecksgitter \tilde{Q}^4 , welches rechts in Abbildung 4.2 zu sehen ist. In Tabelle 5.1 ist ein Überblick über die Verteilung des relativen Fehlers zu sehen. In allen Gitterpunkten liegt ein Fehler von maximal 0.9 Prozent vor. In 85 Prozent der Gitterpunkte liegt maximal ein Fehler von 0.2 Prozent vor. $(\tilde{D}, \tilde{\mathbf{S}})$ ist offenbar eine gute Parametrisierung der Fläche \mathcal{S} . Dieses Beispiel zeigt, dass das Verfahren zur Erzeugung einer Hierarchie von Hexaedergittern mittels globaler Parametrisierungen von Flächenverbänden robust ist gegenüber schlecht parametrisierten Flächen.

Beispiel 5.6

Im nächsten Beispiel wurde das Viereck Q in sechs Teilflächen zerschnitten. Diese werden zu einem Flächenverband $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_6\}$ zusammengefasst. In Abbildung 4.3 ist dieser Flächenverband zu sehen. Jede Teilfläche \mathcal{S}_i wird durch eine getrimmte bilineare Parametrisierung (D_i, \mathbf{S}_i) beschrieben. Zum Flächenverband \mathcal{F} wurde eine globale Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ erzeugt. Die hierzu verwendete approximierende Triangulierung besteht aus 923 Dreiecken. Als globaler Parameterbereich ergab sich wieder ein Quadrat. Durch vierfache, gleichmäßige Unterteilung von Q im Parameterbereich \bar{D} erhält man das Gitter \bar{Q}^4 , welches in Abbildung 4.3 zu sehen ist. Der maximale relative Fehler beträgt $9.9 \cdot 10^{-16}$, also faktisch Null.

5.3 Gitteranpassung an Kurven

5.3.1 Gittererzeugung ohne Anpassung an Kurven

Bis jetzt erfolgt innerhalb von FEATFLOW bei der Unterteilung von Hexaedergittern lediglich eine Anpassung an Flächen, nicht jedoch an Kurven. Dies kann dazu führen,

dass die erzeugten Gitter wesentliche Teile der gegebenen Geometrie nicht erfassen. In Abbildung 5.11 ist eine Geometrie $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4\}$ zu sehen, welche einen Zylinder beschreibt. Die Flächen \mathcal{S}_1 und \mathcal{S}_2 repräsentieren Boden und Decke des Zylinders. Die Flächen \mathcal{S}_3 und \mathcal{S}_4 sind jeweils eine Hälfte des Zylindermantels. Das Grobgitter \mathcal{H}^0 besteht aus einem Hexaeder, dessen Ecken auf dem Rand der Deckel- bzw. Bodenfläche liegen. Durch gleichmäßige Unterteilung erhält man das Gitter \mathcal{H}^1 , welches aus acht Hexaedern besteht. Dieses neue Gitter muss nun an die Geometrie angepasst werden, so dass alle Randecken von \mathcal{H}^1 auf der Oberfläche der Geometrie \mathcal{G} liegen. Das obere Viereck Q des Grobgitters \mathcal{H}^0 kann als Approximation des Deckels des Zylinders aufgefasst werden. Bei der gleichmäßigen Unterteilung von \mathcal{H}^0 werden auch die Kanten von Q unterteilt. Damit das Gitter \mathcal{H}^1 eine gute Approximation des Zylinders ist, müssen die neu entstandenen Mittelpunkte bei der Randanpassung auf den Rand der Fläche \mathcal{S}_2 verschoben werden. Entsprechendes gilt für den Boden des Zylinders. Offensichtlich erwartet man nach erfolgter Randanpassung das Gitter $\hat{\mathcal{H}}^1$, welches in Abbildung 5.11 zu sehen ist. Verfahren, welche nur eine Anpassung an die Flächen der Geometrie \mathcal{G} vornehmen, führen in der Regel nicht zu diesem Ergebnis. Verwendet man zur Randanpassung zum Beispiel die orthogonale Projektion auf die nächst liegende Fläche, so ergibt sich das Gitter $\tilde{\mathcal{H}}^1$ aus Abbildung 5.11. Nach Unterteilung des oberen Vierecks von \mathcal{H}^0 liegen alle neu erzeugten Punkte auf dem Deckel des Zylinders. Eine orthogonale Projektion dieser Punkte führt zu keiner Veränderung. Das gleiche Problem tritt bei dem auf Projektionen basierenden Verfahren von Dominik Göddeke auf [22]. Dies gilt auch für die Randanpassung mittels globaler Parametrisierung. Es sei (\bar{D}, \bar{S}) die globale Parametrisierung des Flächenverbandes $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_2\}$. Im ersten Bild von Abbildung 5.12 sind die Deckelfläche \mathcal{S}_2 und das Viereck Q zu sehen. Das zweite Bild zeigt den globalen Parameterbereich \bar{D} und das Viereck \bar{Q} , welches durch die globalen Parameterwerte der Ecken von Q gebildet wird. Bild 3 zeigt die gleichmäßige Unterteilung von \bar{Q} . Durch Abbilden der neuen Ecken mittels \bar{S} auf \mathcal{S}_2 erhält man die Unterteilung von Q . Wie zu sehen ist, erfolgt hierbei keine Anpassung an den Rand von \mathcal{S}_2 . Dieses einfache Beispiel zeigt, dass es nicht ausreicht, die erzeugten Gitter lediglich an die Flächen einer Geometrie anzupassen. Eine weitere Anpassung an die Kurven ist nötig.

5.3.2 Gittererzeugung mit Anpassung an Kurven

Die Anpassung des Gitters an Kurven der Geometrie \mathcal{G} erfolgt analog zur Anpassung an Flächen von \mathcal{G} . Einzelne Kurven der Geometrie \mathcal{G} werden zu *Kurvenverbänden* zusammengefasst. Für jeden dieser Verbände wird jeweils eine globale Parametrisierung erzeugt. Kanten, welche auf einem dieser Kurvenverbände liegen, werden dann innerhalb des globalen Parameterbereichs unterteilt. Zunächst wird der Begriff Kurvenverband definiert.

Definition 5.7

Gegeben sei eine Menge von dreidimensionalen NURBS-Kurven $\hat{\mathcal{C}} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Weiter seien (I_i, \mathbf{C}_i) , $I_i = [a_i, b_i]$, $a_i < b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, Parametrisierungen der Kurven. Gilt nun $\mathbf{C}_i(b_i) = \mathbf{C}_{i+1}(a_{i+1})$, $i = 1, \dots, m - 1$, so heißt $\hat{\mathcal{C}}$ **NURBS-**

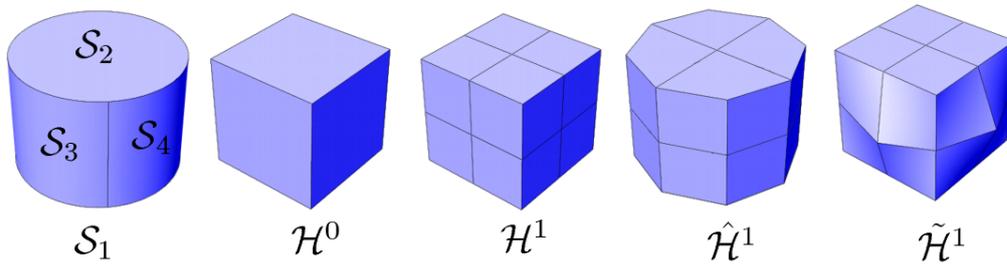


Abbildung 5.11: Zu sehen ist eine Geometrie \mathcal{G} , welche einen Zylinder beschreibt, sowie ein Hexaedergitter \mathcal{H}^0 , welches die Geometrie approximiert. Die Hexaedergitter $\hat{\mathcal{H}}^1, \tilde{\mathcal{H}}^1$ entstehen durch gleichmäßige Unterteilung von \mathcal{H}^0 . Bei $\hat{\mathcal{H}}^1$ erfolgt lediglich eine Randanpassung an die Fläche von \mathcal{G} , bei $\tilde{\mathcal{H}}^1$ erfolgt zusätzlich eine Anpassung an die Randkurven der Boden- und Deckelfläche des Zylinders.

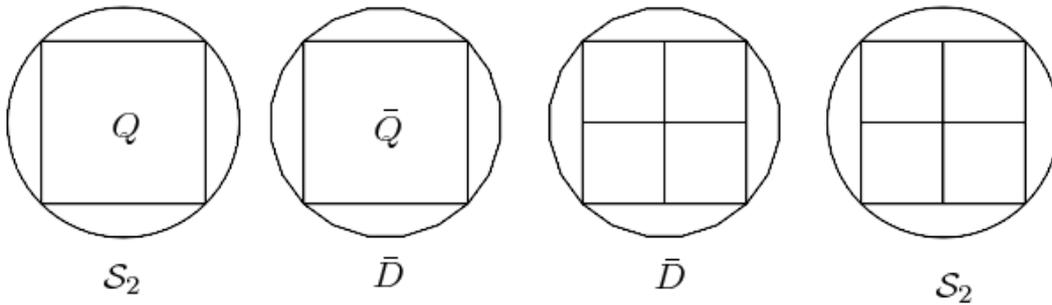


Abbildung 5.12: \mathcal{S}_2 ist die Deckelfläche des Zylinders, welcher durch die Geometrie \mathcal{G} beschrieben wird. Q ist das obere Viereck des Grobgitters \mathcal{H}^0 . \bar{Q} ist das Viereck im globalen Parameterbereich \bar{D} , welches durch die globalen Parameterwerte der Ecken von Q gebildet wird. Die gleichmäßige Unterteilung von \bar{Q} ist in Bild 3 zu sehen. Durch Abbilden der neuen Ecken mittels $\tilde{\mathbf{S}}$ auf \mathcal{S}_2 erhält man die Unterteilung von Q .

Kurvenverband oder kurz **Kurvenverband**.

Die Erzeugung einer globalen Parametrisierung eines Kurvenverbandes $\hat{\mathcal{C}} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, verläuft nach dem gleichen Prinzip wie die Erzeugung einer globalen Parametrisierung eines Flächenverbandes \mathcal{F} . Abbildung 5.13 veranschaulicht das Vorgehen für einen Kurvenverband, welcher aus zwei Kurven besteht. Es folgt die Erläuterung für den allgemeinen Fall.

Zunächst wird jede Kurve \mathcal{C}_i des Kurvenverbandes $\hat{\mathcal{C}}$ durch einen Polygonzug \mathcal{P}_i approximiert. Es seien $\hat{\mathbf{v}}_1^i, \dots, \hat{\mathbf{v}}_{n_i}^i \in \mathcal{C}_i$, $n_i \in \mathbb{N}$, die Ecken des Polygonzugs \mathcal{P}_i und $[\hat{\mathbf{v}}_j^i, \hat{\mathbf{v}}_{j+1}^i]$, $j = 1, \dots, n_i - 1$ seien die Kanten von \mathcal{P}_i . Durch Verkettung dieser lokalen Polygonzüge erhält man einen globalen Polygonzug \mathcal{P} , welcher den Kurvenverband $\hat{\mathcal{C}}$ approximiert. Die Ecken des Polygonzugs \mathcal{P} sind

$$\hat{\mathbf{v}}_1^1, \dots, \hat{\mathbf{v}}_{n_1}^1 = \hat{\mathbf{v}}_1^2, \dots, \hat{\mathbf{v}}_{n_{m-1}}^{m-1} = \hat{\mathbf{v}}_1^m, \dots, \hat{\mathbf{v}}_{n_m}^m.$$

Für jeden lokalen Polygonzug \mathcal{P}_i werden die lokalen Parameterwerte $a_i = \tilde{v}_1^i < \dots < \tilde{v}_{n_i}^i = b_i$ der Ecken von \mathcal{P}_i bezüglich der Parametrisierung (I_i, \mathbf{C}_i) der Kurve \mathcal{C}_i bestimmt. Wie in Abschnitt 4.2.1.1 beschrieben wurde, werden die Ecken des Polygonzugs \mathcal{P} über ein Intervall $\bar{I} = [\bar{a}, \bar{b}]$ parametrisiert und man erhält die globalen Parameterwerte $\bar{a} = \bar{v}_1^1 < \dots < \bar{v}_{n_1}^1 = \bar{v}_1^2 < \dots < \bar{v}_{n_{m-1}}^{m-1} = \bar{v}_1^m < \dots < \bar{v}_{n_m}^m = \bar{b}$. Das Intervall \bar{I} lässt sich folgendermaßen zerlegen

$$\bar{I} = \bigcup_{i=1}^m \bar{I}_i, \quad \bar{I}_i = [\bar{v}_1^i, \bar{v}_{n_i}^i], \quad i = 1, \dots, m.$$

Zu jedem Paar von Intervallen \bar{I}_i, I_i wird eine stückweise, lineare Bijektion $B_i : \bar{I}_i \rightarrow I_i$ definiert. Für die Teilintervalle $\bar{I}_{i,j} = [\bar{v}_j^i, \bar{v}_{j+1}^i] \subset \bar{I}_i$, $I_{i,j} = [\tilde{v}_j^i, \tilde{v}_{j+1}^i] \subset I_i$ ist die Einschränkung von B_i auf $\bar{I}_{i,j}$ definiert als die eindeutig bestimmte lineare Abbildung von $\bar{I}_{i,j}$ nach $I_{i,j}$. Setzt man $\bar{\mathbf{C}}_i = \mathbf{C}_i \circ B_i$, so erhält man mit $(\bar{I}_i, \bar{\mathbf{C}}_i)$ eine neue Parametrisierung von \mathcal{C}_i . Definiert man

$$\bar{\mathbf{C}} : \begin{cases} \bar{I} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \bar{v} & \rightarrow \bar{\mathbf{C}}_i(\bar{v}), \text{ für } \bar{v} \in \bar{I}_i, \end{cases}$$

so ist $(\bar{I}, \bar{\mathbf{C}})$ die globale Parametrisierung von $\hat{\mathcal{C}}$.

Es sei \mathcal{G} eine Geometrie, welche ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definiert. Weiter seien \mathcal{H}^0 ein bezüglich Ω zulässiges Hexaedergitter und $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m\}$ eine zulässige Zerlegung von \mathcal{G} in Flächenverbände. Die Menge der Kanten $E(\mathcal{Z}_{\mathcal{F}})$ von $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ ist definiert durch

$$E(\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}) = \{\mathcal{C} \in E(\mathcal{G}) \mid \exists \mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j \in \mathcal{Z}_{\mathcal{F}}, i \neq j \mathcal{C} \subset \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j\}.$$

Die Kantenmenge $E(\mathcal{Z}_{\mathcal{F}})$ wird nun so in Kurvenverbände $\mathcal{Z}_{\hat{\mathcal{C}}} = \{\hat{\mathcal{C}}_1, \dots, \hat{\mathcal{C}}_n\}$ zerlegt, dass gilt

$$\bullet \bigcup_{i=1}^n E(\hat{\mathcal{C}}_i) = E(\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}),$$

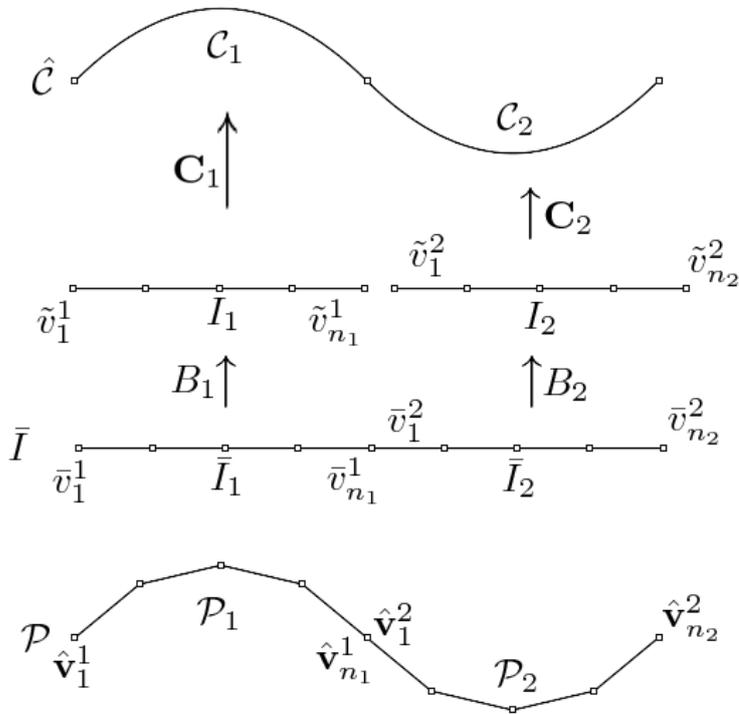


Abbildung 5.13: Zu sehen ist der Kurvenverband $\hat{C} = \{C_1, C_2\}$. Die Kurven $C_1 = C_1(I_1), C_2 = C_2(I_2)$ werden jeweils durch die Polygonzüge $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ approximiert. Die Verkettung von $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ ergibt den Polygonzug \mathcal{P} . Dieser wird über das Intervall $\bar{I} = [\bar{a}, \bar{b}]$ parametrisiert. B_1, B_2 sind stückweise lineare Bijektionen zwischen den Teilintervallen $\bar{I}_1, \bar{I}_2 \subset \bar{I}$ und den Intervallen I_1, I_2 . Setzt man $\bar{C}_1 = C_1 \circ B_1, \bar{C}_2 = C_2 \circ B_2$, so erhält man neue Parametrisierungen $(\bar{I}_1, \bar{C}_1), (\bar{I}_2, \bar{C}_2)$ der Kurven C_1, C_2 . Die globale Parametrisierung (\bar{I}, \bar{C}) von \hat{C} ist stückweise definiert als \bar{C}_1 bzw. \bar{C}_2 .

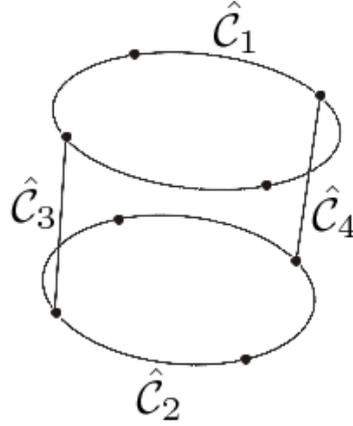


Abbildung 5.14: Die Kantenmenge $E(\mathcal{Z}_{\mathcal{F}})$ der Flächenverbandzerlegung $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ der Geometrie \mathcal{G} aus Beispiel 5.13 wird in vier Kurvenverbände $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3, \hat{C}_4$ zerlegt.

- Die Zerlegung $\mathcal{Z}_{\hat{C}}$ ist *disjunkt*, d. h. zu jeder Kante $C \in E(\mathcal{Z}_{\mathcal{F}})$ existiert genau ein Kurvenverband \hat{C}_i mit $C \in \hat{C}_i$.
- Zu jeder Randkante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_B(\mathcal{H}^0)$ mit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$, $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j \in \mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ existiert genau ein Kurvenverband $\hat{C} \in \mathcal{Z}_{\hat{C}}$ mit $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in \hat{C}$.

Zu jedem Kurvenverband \hat{C} wird, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, eine globale Parametrisierung (\bar{I}, \bar{C}) erzeugt. Die gleichmäßige Unterteilung einer Kante $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in E_B(\mathcal{H}^0)$ mit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$, $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j \in \mathcal{Z}_{\hat{C}}$, erfolgt nun analog zur Unterteilung eines Randvierecks $Q = \square_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{H}^0}$ im globalen Parameterbereich des Flächenverbandes $\mathcal{F} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ mit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. Zu den Ecken \mathbf{v}, \mathbf{w} existiert genau ein Kurvenverband $\hat{C}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}$ mit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \hat{C}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}$. Dann erfolgt die gleichmäßige Unterteilung von $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ im globalen Parameterbereich \bar{I} von $\hat{C}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}$.

Beispiel 5.8

Im vorigen Beispiel (siehe Abbildung 5.13) wurde die Geometrie \mathcal{G} des Zylinders in vier Flächenverbände $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} = \{\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4\}$ zerlegt. Nun wird die Kantenmenge $E(\mathcal{Z}_{\mathcal{F}})$ in vier Kurvenverbände zerlegt (siehe Abbildung 5.14). Die Kurvenverbände \hat{C}_1 und \hat{C}_2 bestehen aus jeweils vier Kurven und entsprechen den Rändern der Flächenverbände \hat{S}_1 und \hat{S}_2 . Die Kurvenverbände \hat{C}_3 und \hat{C}_4 bestehen jeweils nur aus einer Kurve, welche den gemeinsamen Rändern der Flächenverbände \hat{S}_3, \hat{S}_4 entsprechen. Unterteilt man nun Kanten, welche auf den Rändern von Flächenverbänden liegen, in den globalen Parameterbereichen der entsprechenden Kurvenverbände, so ergibt sich nach einer Unterteilung des Gitters \mathcal{H}^0 das Gitter $\hat{\mathcal{H}}^1$ (siehe Abbildung 5.11).

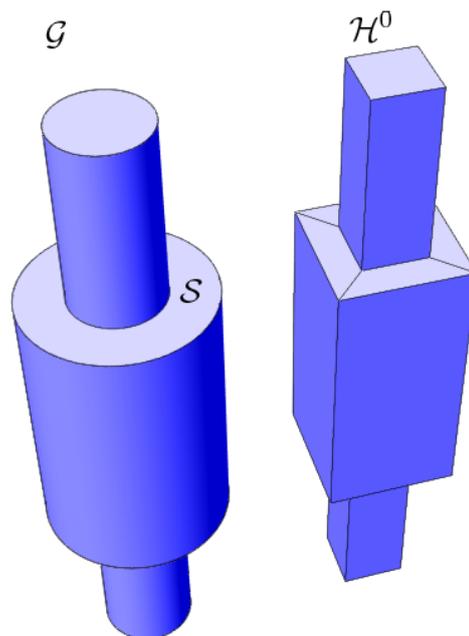


Abbildung 5.15: Zu sehen ist eine Geometrie \mathcal{G} , welche eine Fläche \mathcal{S} enthält, die nicht einfach zusammenhängend ist. Das Grogitter \mathcal{H}^0 ist zulässig bezüglich \mathcal{G} .

5.4 Globale Parametrisierung von NURBS-Flächenverbänden mit Löchern

Laut Definition 2.20 muss die Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ eines Flächenverbandes $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, einfach zusammenhängend sein. Der Hauptgrund für diese Forderung ist, dass die in Kapitel 4 beschriebenen linearen Projektionsverfahren nur auf eine Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ anwendbar sind, deren Oberfläche $\mathcal{S}_{\hat{\mathcal{T}}}$ ebenfalls einfach zusammenhängend ist. Die Software *Rhinoceros* liefert nur dann eine einfach zusammenhängende, approximierende Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$, wenn auch der zu approximierende Flächenverband \mathcal{F} einfach zusammenhängend ist. Ein anderes Ergebnis wäre auch nicht sinnvoll. Zu Flächenverbänden mit *Löchern* kann dementsprechend mit dem neuen Verfahren nicht direkt eine globale Parametrisierung erzeugt werden. Solche Flächenverbände müssen zunächst *zerschnitten* werden. Dies ist allgemeine Praxis bei der Parametrisierung von Triangulierungen (siehe hierzu [26] und [48]).

5.4.1 Klassischer Ansatz: Zerschneiden

Abbildung 5.15 zeigt eine Geometrie \mathcal{G} , welche eine Fläche \mathcal{S} enthält, die nicht einfach zusammenhängend ist. Des Weiteren ist ein Grogitter \mathcal{H}^0 zu sehen, welches zulässig bezüglich des durch \mathcal{G} beschriebenen Gebietes Ω ist. $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}\}$ ist kein gültiger Flächenverband, da die Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ nicht einfach zusammenhängend ist. Durch Hinzunehmen

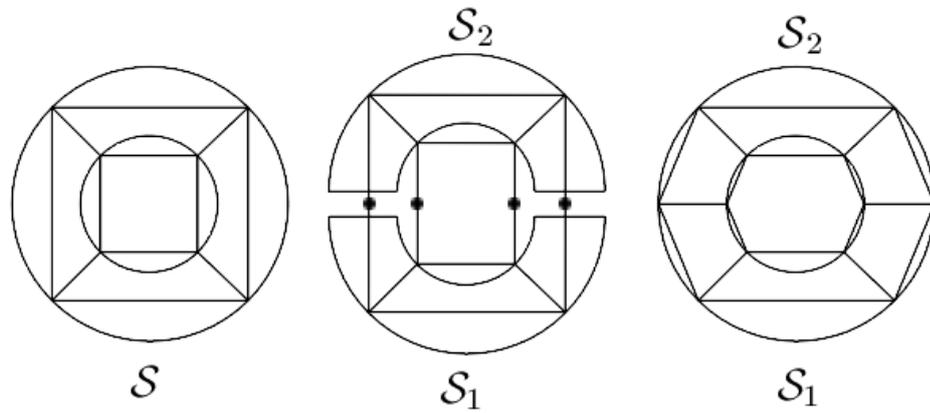


Abbildung 5.16: Im ersten Bild ist in einer Draufsicht die Fläche \mathcal{S} der Geometrie \mathcal{G} aus Abbildung 5.15 zu sehen. Des Weiteren werden die Randvierecke des Grobgitters \mathcal{H}^0 gezeigt, welche auf der Fläche \mathcal{S} liegen. Daneben ist zu sehen, wie die Fläche \mathcal{S} in zwei Teilflächen $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ horizontal zerschnitten wurde. Eine Flächenverbandzerlegung $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ von \mathcal{G} mit $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ ist nicht zulässig bezüglich \mathcal{H}^0 . Die durch Punkte markierten Kanten lassen sich nicht in den globalen Parameterbereichen der Flächenverbände unterteilen. Das Grobgitter \mathcal{H}^0 muss an den gleichen Stellen wie die Fläche \mathcal{S} zerschnitten werden.

der Flächen des *oberen Zylinders* von \mathcal{G} ergibt sich zwar ein gültiger Flächenverband, aber da der Übergang zwischen diesen Flächen in starkem Maße nicht tangentialstetig ist, führt dies aus meiner Erfahrung zu einer sehr schlechten Parametrisierung. Stattdessen wird die Fläche \mathcal{S} in zwei Teilflächen $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ zerschnitten. Mit $\mathcal{F}_1 = \{\mathcal{S}_1\}, \mathcal{F}_2 = \{\mathcal{S}_2\}$ erhält man so zwei gültige Flächenverbände. Abbildung 5.16 veranschaulicht den Schnitt. Im ersten Bild ist eine Draufsicht der Fläche \mathcal{S} zu sehen. Die vier Randvierecke des Grobgitters \mathcal{H}^0 , welche auf der Fläche \mathcal{S} liegen, sind ebenfalls zu erkennen. Das zweite Bild zeigt einen horizontalen Schnitt durch \mathcal{S} , welcher \mathcal{S} in die zwei Teilflächen $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ zerlegt. Eine Flächenverbandzerlegung $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ von \mathcal{G} mit $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ ist jedoch nicht zulässig bezüglich \mathcal{H}^0 . Das linke und das rechte Viereck liegen weder komplett auf der Oberfläche von \mathcal{F}_1 noch auf der Oberfläche von \mathcal{F}_2 . Dies steht im Widerspruch zur dritten Bedingung für eine Flächenverbandzerlegung. Somit lassen sich nicht alle Kanten innerhalb eines globalen Parameterbereichs unterteilen. Diese Kanten sind in Bild 2 durch Punkte markiert. Um nun doch eine gültige Flächenverbandzerlegung zu erhalten, muss das Grobgitter \mathcal{H}^0 an den gleichen Stellen zerschnitten werden wie die Fläche \mathcal{S} (Bild 3). Entsprechend verfährt man mit der *unteren Kreisfläche* der Geometrie \mathcal{G} . Mit dieser Strategie lässt sich eine gültige Flächenverbandzerlegung von \mathcal{G} erzeugen. Alle beschriebenen Schritte erfolgen hierbei manuell.

Nachteile

Zwar ist die im vorigen Beispiel beschriebene Strategie grundsätzlich durchführbar, doch es ergeben sich einige Nachteile:

- Die Geometrie \mathcal{G} wie auch das Grobgitter \mathcal{H}^0 müssen verändert werden. Insbesondere erhöht sich die Anzahl der Hexaeder des Grobgitters, was einen negativen Einfluss auf das Mehrgitterverfahren hat.
- Eine große Anzahl von manuellen Schritten ist nötig.
- Mit steigender Anzahl von Löchern pro Fläche wird das Anpassen der Geometrie und des Grobgitters zunehmend komplexer.

5.4.2 Neuer Ansatz: Löcher füllen

Im Folgenden wird eine Vorgehensweise vorgestellt, die diese Nachteile nicht aufweist. Mir ist kein wissenschaftlicher Artikel bekannt, in dem diese Vorgehensweise bereits beschrieben wurde. Das bisherige Verfahren wird um einen wesentlichen Punkt erweitert. Es sei \mathcal{H}^0 ein Hexaedergitter, welches zulässig ist bezüglich eines durch die Geometrie \mathcal{G} beschriebene Gebietes Ω . Weiter sei $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ eine zulässige Flächenverbandzerlegung bezüglich \mathcal{H}^0 . Hierbei sind nun Flächenverbände mit Löchern ausdrücklich erlaubt. Es sei nun $\mathcal{F} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ ein Flächenverband mit einem Loch. Der Rand dieses Lochs wird durch eine Menge von Kurven $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_l\} \subset E_B(\mathcal{F}), l \in \mathbb{N}$, beschrieben. Diese werden zu einem Kurvenverband $\hat{\mathcal{C}}$ zusammengefasst. Des Weiteren sei $\hat{\mathcal{T}}$ eine zulässige, approximierende Triangulierung bezüglich des Flächenverbandes \mathcal{F} . Auch die Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ hat ein Loch. Die Kanten der Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$, welche auf dem Kurvenverband $\hat{\mathcal{C}}$ liegen,

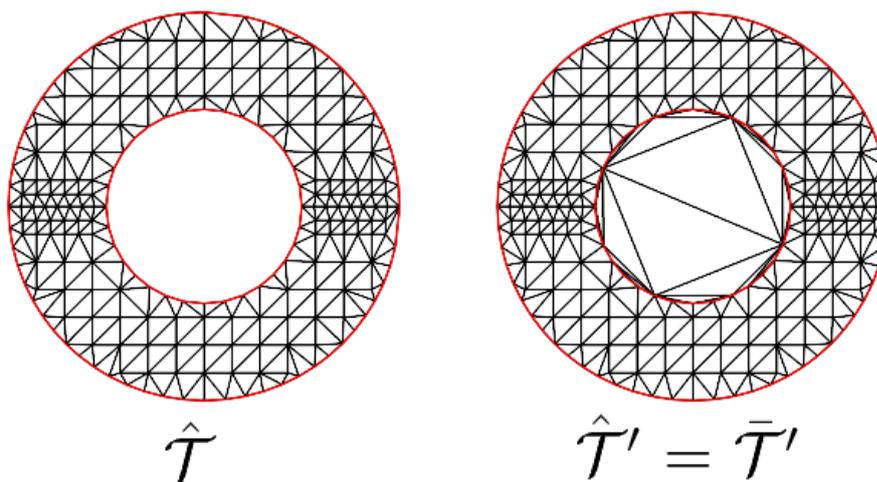


Abbildung 5.17: Zu sehen ist die Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$, welche die Fläche \mathcal{S} aus Abbildung 5.15 approximiert. Durch schließen des Lochs von $\hat{\mathcal{T}}$ ergibt sich die Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}'$. Projektion von $\hat{\mathcal{T}}'$ liefert die Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}'$. $\bar{\mathcal{T}}'$ ist im konkreten Fall kongruent zu $\hat{\mathcal{T}}'$ und wird in diesem Beispiel mit $\hat{\mathcal{T}}'$ gleich gesetzt.

bilden einen geschlossenen Polygonzug \mathcal{P} , der den Rand des Lochs der Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ beschreibt. Das Loch der Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ wird geschlossen, indem der Polygonzug \mathcal{P} trianguliert wird. Dies erfolgt momentan mit Hilfe des Programms Rhinoceros. Das Resultat ist die Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}'$. Schließlich wird zum Flächenverband \mathcal{F} eine globale Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathbf{S}})$ mittels des in Abschnitt 5.1.2.3 beschriebenen Verfahrens erzeugt. Als approximierende Triangulierung wird die Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}'$ verwendet. Diese Triangulierung hat kein Loch und somit kann auf diese eines der beschriebenen linearen Projektionsverfahren angewendet werden. Dadurch wird eine Projektion $\psi : \mathcal{S}_{\hat{\mathcal{T}}'} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert, welche die Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}'$ auf eine planare Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}'$ projiziert. Offensichtlich gilt $\mathcal{S}_{\hat{\mathcal{T}}} \subset \mathcal{S}_{\hat{\mathcal{T}}'}$. Somit lässt sich die Projektion auf die Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ anwenden und man erhält die globale Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$. Als globaler Parameterbereich wird nun $\bar{D} := \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{T}}} \subset \mathcal{S}_{\hat{\mathcal{T}}'}$ gewählt. Auch dieser hat ein Loch. Die Abbildung $\bar{\mathbf{S}}$ ergibt sich wie in Abschnitt 5.1.2.3 beschrieben.

Beispiel 5.9

Abbildung 5.17 zeigt eine Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$, welche die Fläche \mathcal{S} aus dem vorherigen Beispiel approximiert. Durch Schließen des Lochs ergibt sich die Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}'$. Diese wurde auf die Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}'$ projiziert. Der Rand wurde mit Hilfe der Kreisbogen-Strecken-Projektion auf einen Kreis projiziert. Die inneren Ecken wurden mit Hilfe der Mittelwert-Projektion projiziert. In diesem konkreten Beispiel entspricht die Randparametrisierung einer Drehung und Verschiebung der zu projizierenden Ecken. Die Projektion der Randecken ist also eine Kongruenzabbildung und somit eine affine Abbildung. Da $\hat{\mathcal{T}}'$ planar ist, gilt aufgrund der Reproduktionseigenschaft der Mittelwert-Projektion

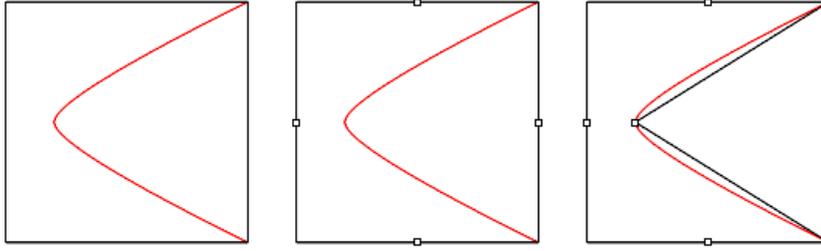


Abbildung 5.18: Zu sehen ist ein Quadrat (schwarz) in einem globalen Parameterbereich, dessen rechte Kante auf dem Teil eines Randes eines Lochs (rot) liegt. Der gültige Teil des Parameterbereichs liegt links vom Rand. Wird die Kante halbiert, so liegt der neu entstandene Punkt außerhalb des gültigen Parameterbereichs (Bild 2). Wird die Kante im globalen Parameterbereich des Randes unterteilt, so liegt der neue Punkt ebenfalls auf dem Rand und somit innerhalb des gültigen Parameterbereichs (Bild 3).

dies auch für die inneren Ecken von $\hat{\mathcal{T}}'$. Entsprechend kann man $\bar{\mathcal{T}}'$ mit $\hat{\mathcal{T}}'$ gleichsetzen. Der äußere Rand der approximierenden Triangulierung sowie der Rand des Lochs sind rot markiert. Entsprechend wurden diese Ränder auch in den Triangulierungen $\hat{\mathcal{T}}' = \bar{\mathcal{T}}'$ hervor gehoben. Die globale Triangulierung $\bar{\mathcal{T}}$, welche den globalen Parameterbereich $\bar{D} := \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{T}}}$ des Flächenverbandes $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}\}$ definiert, liegt zwischen den rot markierten Rändern.

Vergleich zum klassischen Verfahren

Im Vergleich zum klassischen Verfahren ist bei meinem Ansatz kein Verändern der Geometrie nötig. Momentan werden die Erzeugung der Approximationen der Flächenverbände und das Füllen der Löcher halbautomatisch mit Hilfe des Programms Rhinoceros durchgeführt. In Kapitel 3 wurden einige Verfahren zur Approximation von Flächen vorgestellt. Des Weiteren existieren zahlreiche Verfahren zur Triangulierung von Polygonzügen. Referenzen hierfür sind [49] und [28]. Durch Implementierung solcher Verfahren lassen sich auch diese Prozesse automatisieren. Die Anzahl der Löcher in einem Flächenverband spielt dabei keine Rolle. Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass der neue Ansatz keinen der erwähnten Nachteile des klassischen Verfahrens aufweist.

5.4.2.1 Gleichmäßige Unterteilung im globalen Parameterbereich

Die gleichmäßige Unterteilung des Grobgitters \mathcal{H}^0 erfolgt nun genauso wie im Abschnitt 5.2.2 beschrieben. Es sei \mathcal{F} ein Flächenverband mit Loch, zu dem nach dem gerade erläuterten Verfahren eine globale Parametrisierung $(\bar{D}, \bar{\mathcal{S}})$ erzeugt wurde. Weiter sei $Q \in \mathcal{F}_B(\mathcal{H}^0)$ ein Randviereck von \mathcal{H}^0 , dessen Ecken auf der Oberfläche $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ von \mathcal{F} liegen. Die gleichmäßige Unterteilung von Q erfolgt dann im globalen Parameterbereich von \mathcal{F} . Es sei \bar{Q} der entsprechende Repräsentant von Q im globalen Parameterbereich \bar{D} . Hierbei muss nun beachtet werden, dass neue Punkte, welche durch Unterteilung von \bar{Q} entstehen, auch wieder innerhalb von \bar{D} liegen. Vierecke, für die mindestens eine Kante

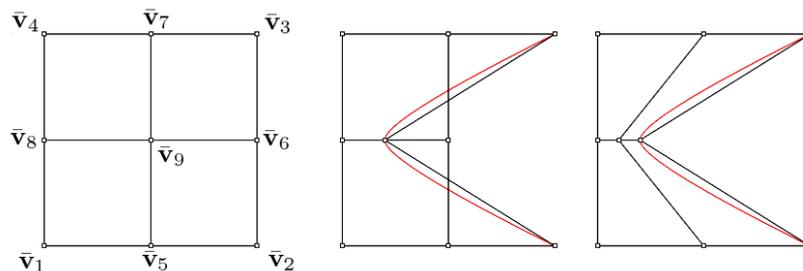


Abbildung 5.19: Im ersten Bild ist zu sehen wie ein Viereck $\bar{Q} = \square_{\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{v}_3\bar{v}_4}$ im globalen Parameterbereich \bar{D} eines Flächenverbandes \mathcal{F} nach der klassischen Methode unterteilt wird. Das zweite Bild zeigt ein Beispiel, bei dem die rechte Kante auf dem Rand eines Lochs liegt. Die Kante wird im globalen Parameterbereich des Randes unterteilt. Das klassische Unterteilungsverfahren führt dazu, dass der Unterteilungsmittelpunkt nicht mehr im globalen Parameterbereich des Flächenverbandes \mathcal{F} liegt. Bild 3 veranschaulicht das modifizierte Unterteilungsverfahren. Der Unterteilungsmittelpunkt liegt im globalen Parameterbereich \bar{D} .

auf dem Rand eines Lochs liegt, müssen besonders behandelt werden. Im linken Bild von Abbildung 5.18 ist ein Quadrat \bar{Q} zu sehen, welches im globalen Parameterbereich eines Flächenverbandes \mathcal{F} mit Loch liegt. Ein Teil des Randes des Lochs ist rot hervorgehoben. Der gültige Teil des Parameterbereichs liegt links vom Rand. Die rechte Kante des Vierecks liegt auf dem Rand. Wird die Kante halbiert, so liegt der neu entstandene Punkt außerhalb des gültigen Parameterbereichs (mittleres Bild). Um das zu verhindern wird der Rand des Lochs zu einem Kurvenverband \hat{C} zusammengefasst und zu diesem wird eine globale Parametrisierung (\bar{I}, \bar{C}) erzeugt. Wird nun die rechte Kante im globalen Parameterbereich des Kurvenverbandes \hat{C} unterteilt, dann liegt der neu erzeugte Punkt ebenfalls auf dem Rand des Lochs und somit im gültigen Parameterbereich (rechtes Bild). Damit auch der Mittelpunkt der gleichmäßigen Unterteilung eines Vierecks innerhalb des globalen Parameterbereichs liegt, muss das in 5.2.2 beschriebene Unterteilungsverfahren modifiziert werden.

Klassische Unterteilung

Es sei $\bar{Q} = \square_{\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{v}_3\bar{v}_4}$ ein zu unterteilendes Viereck im globalen Parameterbereich \bar{D} eines Flächenverbandes \mathcal{F} . Bei der *klassischen* gleichmäßigen Unterteilung werden zunächst die Seiten $[\bar{v}_1, \bar{v}_2]$, $[\bar{v}_2, \bar{v}_3]$, $[\bar{v}_4, \bar{v}_2]$, $[\bar{v}_1, \bar{v}_2]$, halbiert, wodurch man die Ecken $\bar{v}_5, \bar{v}_6, \bar{v}_7, \bar{v}_8$ erhält. Der Mittelwert $\frac{1}{4}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4)$ der vier Ecken von \bar{Q} bildet den Mittelpunkt \bar{v}_9 der Unterteilung. Durch geeignetes Verbinden dieser Ecken erhält man die vier neuen Vierecke (siehe erstes Bild in Abbildung 5.19). Liegt nun eine der Kanten auf dem Rand eines Lochs, so ist es möglich, dass der Unterteilungsmittelpunkt außerhalb des globalen Parameterbereichs \bar{D} liegt. Ein entsprechendes Beispiel ist im zweiten Bild von Abbildung 5.19 zu sehen. Hier liegt die rechte Kante des Vierecks auf dem Rand eines Lochs und wird im globalen Parameterbereich des Randes unterteilt.

Der Unterteilungsmittelpunkt liegt außerhalb des globalen Parameterbereichs \bar{D} von \mathcal{F} . Darüber hinaus sind die beiden rechten Unterteilungsvierecke *verdreht*. Die Ursache für die negativen Effekte des klassischen Verfahrens liegt darin, dass die Mittelpunkte der Kanten nicht in die Berechnung des Unterteilungsmittelpunktes mit einbezogen werden.

Modifizierte Unterteilung

Für jedes planare Viereck gilt, dass der Mittelwert der Eckpunkte gleich dem Schnittpunkt der beiden Verbindungsstrecken der gegenüberliegenden Mittelpunkte der Kanten ist. Der Schnittpunkt unterteilt die Verbindungsstrecken in einem Verhältnis von 1 : 1. Unterteilt man die Kanten des Vierecks \bar{Q} mit Hilfe der klassischen Unterteilung, so ergibt sich für den Unterteilungsmittelpunkt

$$\bar{\mathbf{v}}_9 = \frac{1}{4}(\bar{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_2 + \bar{\mathbf{v}}_3 + \bar{\mathbf{v}}_4) \quad (5.1)$$

$$= \frac{1}{4}(\bar{\mathbf{v}}_5 + \bar{\mathbf{v}}_6 + \bar{\mathbf{v}}_7 + \bar{\mathbf{v}}_8) \quad (5.2)$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_5 + \bar{\mathbf{v}}_7) \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_6 + \bar{\mathbf{v}}_8). \quad (5.4)$$

Diese Identitäten dienen als Motivation für das modifizierte Unterteilungsverfahren. Liegen nur eine Kante oder zwei gegenüberliegende Kanten auf dem Rand des globalen Parameterbereichs \bar{D} , dann werden die Gleichungen (5.3) oder (5.4) angewendet. In allen anderen Fällen wird Gleichung (5.2) benutzt. Liegt z. B. nur die Kante $[\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2]$ auf dem Rand von \bar{D} , so wird Gleichung (5.3) angewendet. Im Weiteren wird dieses Verfahren als **modifiziertes Unterteilungsverfahren** bezeichnet. Das dritte Bild von Abbildung 5.19 veranschaulicht das modifizierte Unterteilungsverfahren. Nur die Kante $[\bar{\mathbf{v}}_2, \bar{\mathbf{v}}_3]$ des Vierecks \bar{Q} liegt auf dem Rand von \bar{D} . Somit wird der Unterteilungsmittelpunkt $\bar{\mathbf{v}}_9$ als Mittelwert der Punkte $\bar{\mathbf{v}}_6, \bar{\mathbf{v}}_8$ gebildet. Der Mittelpunkt liegt nun innerhalb des globalen Parameterbereichs von \mathcal{F} und keines der neu entstandenen Vierecke ist verdreht. In keinem meiner berechneten Beispiele hat das modifizierte Unterteilungsverfahren zu Problemen geführt. Alle Unterteilungsmittelpunkte lagen stets im globalen Parameterbereich des entsprechenden Flächenverbandes und es entstanden nie verzerrte Vierecke.

6 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden zwei numerische Experimente vorgestellt, welche mit Hilfe von FEATFLOW und dem neuen Unterteilungsverfahren durchgeführt wurden. Es wird sich zeigen, dass mit diesem Verfahren Gitter von sehr guter Qualität erzeugt werden. Dies führt zu sehr guten Konvergenzraten des Featflowlösers.

6.1 Der Löser PP3D

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über den Ablauf des Lösers PP3D gegeben. Dieser zeichnet sich durch eine besondere Robustheit bei nicht stationären Problemen aus. Eine detaillierte Beschreibung des Verfahrens findet sich in [3] und [56]. Wie bereits in Abschnitt 1.4.4 erläutert wurde, ist nach erfolgter Zeit- und Ortsdiskretisierung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen im Zeitschritt $t_i \rightarrow t_{i+1}$ das folgende gekoppelte nichtlineare Gleichungssystem zu lösen

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}^{i+1})\mathbf{y}^{i+1} + \Delta t B \mathbf{z}^{i+1} &= \mathbf{g}^i, \\ B^T \mathbf{y}^{i+1} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Hierbei sind \mathbf{y}^{i+1} und \mathbf{z}^{i+1} die nodalen Koeffizientenvektoren des gesuchten Geschwindigkeitsfelds \mathbf{u}^{i+1} und des Drucks p^{i+1} zum Zeitpunkt t_{i+1} . Das gekoppelte Problem wird mit Hilfe des Schur-Komplements entkoppelt. Man erhält eine nichtlineare *Burgersgleichung* für die Geschwindigkeit und eine lineare *Druckkorrekturgleichung*. Diese werden getrennt voneinander gelöst.

Es seien nun die Koeffizientenvektoren \mathbf{y}^i und \mathbf{z}^i gegeben. Dann werden \mathbf{y}^{i+1} und \mathbf{z}^{i+1} in drei Schritten bestimmt:

1. Löse die nichtlineare Burgersgleichung

$$S(\tilde{\mathbf{y}}^{i+1})\tilde{\mathbf{y}}^{i+1} = \mathbf{g}^i - \Delta t B \mathbf{z}^i.$$

Man erhält eine vorläufige Lösung $\tilde{\mathbf{y}}^{i+1}$. Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld sei $\tilde{\mathbf{u}}^{i+1}$.

2. Löse die Druckkorrekturgleichung

$$Rq = \frac{1}{\Delta t} B^T \tilde{\mathbf{y}}^{i+1}.$$

Hierbei ist $R = B^T M_l^{-1} B$. M_l ergibt sich aus der Massematrix M durch sogenanntes *lumping*. $B^T \tilde{\mathbf{y}}^{i+1}$ entspricht der diskreten Divergenz der Zwischenlösung $\tilde{\mathbf{u}}^{i+1}$.

3. Die Lösungen \mathbf{y}^{i+1} und \mathbf{z}^{i+1} zum Zeitpunkt t_{i+1} erhält man durch Durchführung der Korrektur

$$\mathbf{z}^{i+1} = \mathbf{z}^i + q, \quad \mathbf{y}^{i+1} = \tilde{\mathbf{y}}^{i+1} - \Delta t M_l^{-1} B q.$$

Die nichtlineare Gleichung im ersten Schritt wird mit Hilfe eines Fixpunkt-Defektkorrektur-Iterationsverfahrens gelöst. In jedem Iterationsschritt ist dabei ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Dies erfolgt mit einem Mehrgitter-Verfahren. Die lineare Druckkorrekturgleichung wird ebenfalls mit einem Mehrgitter-Verfahren gelöst.

Verschiedene Kenngrößen werden von dem Programm PP3D protokolliert. Anhand dieser Kenngrößen kann die Robustheit und die Geschwindigkeit des Löser untersucht werden. Es seien $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine $n \times n$ -Matrix, sowie $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3)$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3)$, mit $\mathbf{x}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, 3$. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ werden als 1., 2., 3. Komponente von \mathbf{x} bezeichnet. Durch $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ werden drei lineare Gleichungssysteme beschrieben, welche durch ein iteratives Verfahren gelöst werden. Hierbei seien $\mathbf{x}^k = (\mathbf{x}_1^k \ \mathbf{x}_2^k \ \mathbf{x}_3^k)$, $k \in \mathbb{N}$ die zugehörigen Iterierten mit gegebenem Startwert \mathbf{x}^0 . Dann heißen

$$\frac{\|A\mathbf{x}_i^k - \mathbf{b}_i\|_2}{\max_{i=1,2,3} \|\mathbf{b}_i\|_2}, \quad \frac{\|\mathbf{x}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k\|_\infty}{\max_{i=1,2,3} \|\mathbf{x}_i^k\|_\infty}$$

relativer Fehler und **relative Änderung der i -ten Komponente der Iterierten \mathbf{x}^k** und

$$\left(\frac{\|A\mathbf{x}_i^k - \mathbf{b}_i\|_2}{\|A\mathbf{x}_i^0 - \mathbf{b}_i\|_2} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad \left(\frac{\max_{i=1,2,3} \|A\mathbf{x}_i^k - \mathbf{b}_i\|_2}{\max_{i=1,2,3} \|A\mathbf{x}_i^0 - \mathbf{b}_i\|_2} \right)^{\frac{1}{k}}$$

heißen **numerische Konvergenzrate der i -ten Komponente der Iterierten \mathbf{x}^k** und **numerische Konvergenzrate der Iterierten \mathbf{x}^k** . Für nichtlineare Gleichungssysteme lassen sich diese Begriffe analog definieren. Bezogen auf die iterative Lösung der nichtlinearen Burgersgleichung werden die relativen Fehler der einzelnen Komponenten mit DEF-U1, DEF-U2, DEF-U3, die relativen Änderungen mit REL-U1, REL-U2, REL-U3 bezeichnet. Die Konvergenzrate des Fixpunkt-Defektkorrektur-Iterationsverfahrens zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen wird mit RHONL bezeichnet. Die Konvergenzraten der Mehrgitterverfahren zur Lösung der linearen Teilprobleme werden komponentenweise mit RHOMG1, RHOMG2, RHOMG3 bezeichnet.

Für das nichtlineare Iterationsverfahren können verschiedene Abbruchkriterien vorgegeben werden. Für beide numerischen Experimente wurden die folgenden Werte festgelegt. Die maximale Anzahl an Iterationen beträgt 5. Ein vorzeitiger Abbruch erfolgt, wenn gilt

$$\begin{aligned} \text{DEF} &:= \max(\text{DEF-U1}, \text{DEF-U2}, \text{DEF-U3}) \leq 10^{-5}, \\ \text{REL} &:= \max(\text{REL-U1}, \text{REL-U2}, \text{REL-U3}) \leq 10^{-4}, \\ \text{DEF} &\leq 10^{-1} \text{DEFOLD}. \end{aligned}$$

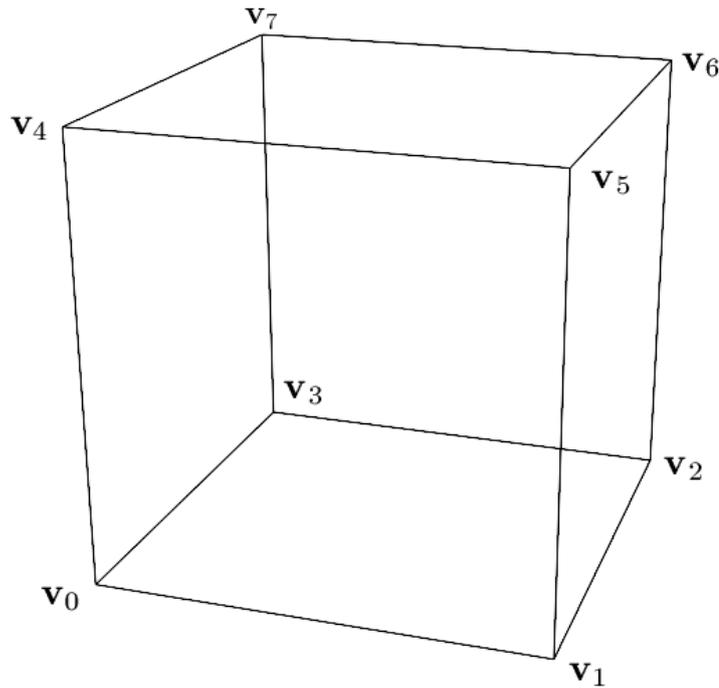


Abbildung 6.1: Bezeichnung der Ecken am Einheitsquader.

DEFOLD bezeichnet den relativen Fehler des Startvektors. Für einen vorzeitigen Abbruch müssen alle diese Kriterien gleichzeitig gegeben sein.

Die Qualität der Hexaedergitter, welche zur Ortsdiskretisierung verwendet werden, hat einen großen Einfluss auf die Konvergenzrate der verwendeten Iterationsverfahren, insbesondere der Mehrgitterverfahren. Bereits ein *schlechtes* Hexaederelement kann auf ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem führen und die Konvergenzrate negativ beeinflussen.

6.2 Die skalierte Jacobi-Determinante als Qualitätsmaß für Hexaeder

Es sei H der Einheitsquader (siehe Abbildung 6.1). Die Ecken der unteren Seite werden beginnend mit der Ecke $\mathbf{v}_0 = (0\ 0\ 0)^T$, gegen den Uhrzeigersinn mit $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bezeichnet. Entsprechend werden die Ecken der oberen Seite von H , beginnend bei $\mathbf{v}_4 = (0\ 0\ 1)^T$, mit $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7$ bezeichnet. In jeder Ecke \mathbf{v}_i des Einheitsquaders werden ein Tetraeder $T_i = \Delta \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \mathbf{v}_k \mathbf{v}_l$ und ein positiv orientiertes, orthonormales Koordinatensystem $\mathbb{O}_i = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_i)$ definiert. Die Indizes haben hierbei die Form

$$\begin{aligned} j &= i + 1 \pmod{4}, \quad k = i - 1 \pmod{4}, \quad l = i + 4, \quad i = 0, \dots, 3, \\ j &= i - 1 \pmod{4}, \quad k = i + 1 \pmod{4}, \quad l = i - 4, \quad i = 4, \dots, 7. \end{aligned}$$

Des Weiteren sei \bar{H} ein allgemeiner Hexaeder. Die Ecken von \bar{H} werden in analoger Weise mit $\bar{\mathbf{v}}_0, \dots, \bar{\mathbf{v}}_7$ bezeichnet. D. h. zwei gegenüberliegende Seiten werden als obere bzw. untere Seite aufgefasst und die Ecken dieser Seiten werden gegen den Uhrzeigersinn nummeriert. Ebenfalls analog werden das Tetraeder $\bar{\Delta}_i$ und das Koordinatensystem $\bar{\mathbb{O}}_i$ in der Ecke $\bar{\mathbf{v}}_i$ definiert. Das Koordinatensystem $\bar{\mathbb{O}}_i$ kann hierbei positiv orientiert, negativ orientiert oder entartet sein. Durch

$$\mathbf{f}_i : \begin{cases} \Delta_0 & \rightarrow \bar{\Delta}_i \\ \mathbf{v} & \rightarrow \bar{\mathbf{v}}_i + J_i \mathbf{v} \end{cases}$$

mit

$$J_i = (\bar{\mathbf{v}}_j - \bar{\mathbf{v}}_i \quad \bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i \quad \bar{\mathbf{v}}_l - \bar{\mathbf{v}}_i)$$

erhält man eine affine Abbildung von Δ_0 auf $\bar{\Delta}_i$. Gleichzeitig beschreibt \mathbf{f}_i eine affine Koordinatentransformation von \mathbb{O}_0 auf $\bar{\mathbb{O}}_i$. J_i ist hierbei die **Jacobimatrix** der Abbildung \mathbf{f}_i .

Setzt man nun

$$Q_i = \left(\frac{\bar{\mathbf{v}}_j - \bar{\mathbf{v}}_i}{\|\bar{\mathbf{v}}_j - \bar{\mathbf{v}}_i\|_2} \quad \frac{\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i}{\|\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}_i\|_2} \quad \frac{\bar{\mathbf{v}}_l - \bar{\mathbf{v}}_i}{\|\bar{\mathbf{v}}_l - \bar{\mathbf{v}}_i\|_2} \right),$$

so bezeichnet man $\det(Q_i)$ als **skalierte Jacobi-Determinante von \bar{H} in $\bar{\mathbf{v}}_i$** . Dieses Maß ist ein Standardqualitätsmaß für Hexaeder und ist in der Literatur weit verbreitet. Referenzen hierfür sind [32] und [31]. Die folgenden Aussagen sind diesen Referenzen entnommen. Der Wertebereich von $\det(Q_i)$ ist $[-1, 1]$. Ist $\det(Q_i) \leq 0$, so ist das Koordinatensystem $\bar{\mathbb{O}}_i$ negativ orientiert. Dies gilt als nicht akzeptabel. In diesem Fall bezeichnet man das Hexaeder \bar{H} als invertiert. Für $\det(Q) = 1$ ist $\bar{\mathbb{O}}_i$ ein positiv orientiertes orthonormales Koordinatensystem. Dies wird als optimal angesehen. Die **skalierte Jacobi-Determinante von \bar{H}** ist definiert als das Minimum aller Skalierten Jacobi-Determinanten in den Ecken des Hexaeders und wird im Weiteren mit $\text{SJD}(\bar{H})$ bezeichnet. Der Wertebereich dieses Qualitätsmaßes ist ebenfalls $[-1, 1]$. Um invertierte Hexaeder zu vermeiden, wird vorausgesetzt, dass mindestens $\text{SJD}(\bar{H}) > 0$ gilt. Als allgemein akzeptabel gilt ein Hexaeder \bar{H} mit einem Wert von $\text{SJD}(\bar{H}) \geq 0.2$. Für $\text{SJD}(\bar{H}) = 1$ liegt ein Quader vor. Dies wird als Optimum betrachtet. Bei diesen Werten handelt es sich lediglich um Richtwerte. Welche Qualität ein Gitter haben muss, hängt von der jeweiligen Anwendung ab.

Beispiel 6.1

Abbildung 6.2 zeigt fünf Hexaeder. Die Länge und Breite des ersten Hexaeders betragen fünf Längeneinheiten. Die Höhe ist 1.25 Längeneinheiten. Bei den vier folgenden Hexaedern wird die obere, rechte Kante der Reihe nach auf sechs bis neun Längeneinheiten verlängert. Dabei wird die vordere Ecke dieser Kante fixiert. Die skalierte Jacobi-Determinante der Hexaeder beträgt von links nach rechts: 1, 0.766, 0.492, 0.329, 0.233.

Verwendete Hardware

Sämtliche Berechnungen wurden auf einem 64-Bit-Linux-System durchgeführt. Die CPU war ein AMD Opteron 844 mit 1793 Mhz. Der zur Verfügung stehende Speicher betrug 15561 MB.

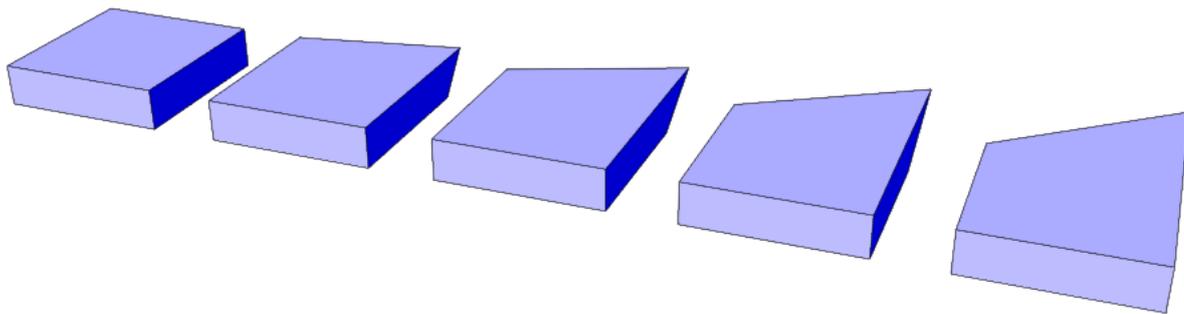


Abbildung 6.2: Zu sehen sind fünf Hexaeder. Der Wert der Skalierten Jacobi-Determinante dieser Hexaeder beträgt von links nach rechts: 1, 0.766, 0.492, 0.329, 0.233.

6.3 Beispiel 1: T-Stück

Geometrie

Im ersten Beispiel wird der Fluss durch ein sogenanntes *T-Stück* simuliert. Die zugehörige Geometrie ist in Abbildung 6.3 zu sehen. Als Längeneinheit wird Meter gewählt. Dies erleichtert einige Berechnungen. Zwar ergibt dies ein ungewöhnlich großes T-Stück, jedoch hat dies keinen Einfluss auf die Bewertung des neuen Verfahrens. Das T-Stück besteht aus einem Hauptteil sowie zwei Zuflüssen und einem Abfluss. Das Hauptteil ist ein Zylinder mit einem Durchmesser von 20 m und einer Länge von 30 m. Die Zu- und Abflüsse sind Zylinder mit einem Durchmesser von 10 m und einer Länge von 20 m. Die Länge des rechten Zylinders bezieht sich auf die kürzeste Länge auf der Zylinderfläche entlang der Zylinderachse.

Zerlegung in Flächenverbände

Die Geometrie \mathcal{G} des T-Stücks wird durch 16 NURBS-Flächen beschrieben. Die Ränder der Flächen sind in der Abbildung schwarz hervor gehoben. Die Geometrie wird in 13 Flächenverbände $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{13}\}$ zerlegt, von denen drei aus zwei Flächen bestehen und die restlichen aus je einer Fläche. Abbildung 6.4 zeigt die Flächenverbände, welche aus je zwei Flächen bestehen. Zwei dieser Flächenverbände haben jeweils ein Loch. Als charakteristische Kurven wurden alle Kurven ausgewählt, welche nur einen G^0 -stetigen Übergang zwischen zwei Flächen bilden.

Approximierende und globale Triangulierung

Die 13 Flächenverbände des T-Stücks wurden mit Hilfe des Programms Rhinoceros durch entsprechende Triangulierungen $\hat{\mathcal{T}}_1, \dots, \hat{\mathcal{T}}_{13}$ approximiert. Dabei wurden die folgenden Kriterien vorgegeben (siehe Abschnitt 5.1.2.1): Maximaler Winkel 20, Maximales Seitenverhältnis 1, Maximale Kantenlänge 1.5, Maximaler Abstand Kante zu Fläche 0.1. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.5 zu sehen. Alle Triangulierungen zusammen bestehen aus insgesamt 14620 Dreiecken.

Mit Hilfe der Mittelwert-Projektion werden zu den approximierenden Triangulierun-

gen entsprechende globale Triangulierungen erzeugt. Als Randparametrisierung wird die Kreis-Bogen-Strecken-Projektion verwendet. Beispielhaft werden die globalen Triangulierungen zweier Flächenverbände in Abbildung 6.6 gezeigt. In der ersten Zeile sind die beiden Flächenverbände zu sehen. In der mittleren und unteren Zeile werden die approximierenden bzw. globalen Triangulierungen gezeigt. Der Flächenverband oben links hat ein Loch. Das Loch der zugehörigen, approximierenden Triangulierung wurde, wie in Abschnitt 5.4.2 beschrieben, gefüllt.

Hexaedergitter

Mit Hilfe des Programms ICEM CFD wird zuerst ein Grobgitter \mathcal{H}^0 erzeugt. Mit dem in Abschnitt 5.2.2 vorgestellten Algorithmus wird dieses Gitter insgesamt drei mal unterteilt und man erhält die Gitter $\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^3$. Alle diese Gitter sind zulässig bezüglich der Geometrie \mathcal{G} des T-Stücks. Die Gitter $\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^1$ bzw. $\mathcal{H}^2, \mathcal{H}^3$ sind in den Abbildungen 6.7 bzw. 6.8 zu sehen. Einen Überblick über die Anzahl der Ecken und Hexaeder der Gitter gibt Tabelle 6.1. Die Tabellen 6.2 und 6.3 enthalten genaue Angaben zur Qualität der Gitter, bezogen auf die skalierte Jacobi-Determinante. Tabelle 6.2 gibt eine Übersicht über die Qualität aller Hexaeder. Tabelle 6.3 zeigt einen entsprechenden Überblick für alle Hexaeder, für die mindestens eine Ecke auf dem Rand des Gebiets Ω liegt. Diese Hexaeder heißen im Weiteren Randhexaeder. Wie den Tabellen zu entnehmen ist, enthält bereits das Grobgitter vier Hexaederelemente mit einer skalierten Jacobi-Determinante von ungefähr 0.28. Diese sind keine Randhexaeder, sondern innere Elemente. Bei der Unterteilung hat die Randanpassung keinen Einfluss auf die Qualität dieser Elemente. Eine Verbesserung dieser unteren Schranke ist also nicht möglich. Der Großteil der Hexaeder hat eine skalierte Jacobi-Determinante (SJD) von 0.5 oder größer. Bei den Randhexaedern gilt dies sogar für alle Elemente. Auf der feinsten Stufe haben lediglich 16 Elemente einen Wert der SJD zwischen 0.28 und 0.3. Insgesamt haben alle vier Gitter eine gute Qualität. Bei besserer Konstruktion des Grobgitters wäre eine noch höhere Qualität möglich gewesen.

Reynoldszahl

Mit Hilfe der sogenannten *Reynoldszahl* Re lassen sich Strömungen klassifizieren. Diese ist eine dimensionslose Größe und definiert als $Re = \frac{vl}{\nu}$. Hierbei sind v, l, ν die *charakteristische Geschwindigkeit*, die *charakteristische Länge* und die kinematische Viskosität. Die Wahl der charakteristischen Größen hängt vom jeweiligen Anwendungsfall ab. Für Rohrströmungen wählt man üblicherweise den Durchmesser des Rohrs als charakteristische Länge und die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit des Zuflusses als charakteristische Geschwindigkeit. Bei einem Wert von $Re \approx 2300$ geht die Strömung von einem laminaren in einen turbulenten Zustand über. Bei umströmten Objekten wählt man in der Regel den Durchmesser als charakteristische Länge und ebenfalls die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit des Zuflusses als charakteristische Geschwindigkeit. Ein klassisches Beispiel für ein umströmtes Objekt ist ein Zylinder. Für $Re < 10$ liegt eine laminare Strömung vor. Im Bereich von $10 < Re < 40$ bilden sich direkt hinter dem Zylinder zwei separate Wirbel. Bei einem Wert von $40 < Re < 200000$ lösen sich periodisch *Von Kármán Wirbelstraßen*. Bei noch größeren Reynoldszahlen geht die Strömung in einen chaotischen Zustand über.

Numerische Simulation

Es wurde folgendes numerisches Experiment durchgeführt. Durch den unteren und rechten Zylinder des T-Stücks erfolgt der Zufluss und durch den oberen Zylinder der Abfluss des Fluids. Der Zufluss durch den rechten Zylinder zum Zeitpunkt 0 hat eine Geschwindigkeit von $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Geschwindigkeit des Zuflusses durch den unteren Zylinder zum Zeitpunkt 0 beträgt $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Dichte des Fluids beträgt $1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und entspricht in etwa der Dichte von Wasser bei Raumtemperatur. Die kinematische Viskosität beträgt $0.1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. Daraus ergibt sich eine dynamische Viskosität von 100 mPas. Dies entspricht ungefähr der dynamischen Viskosität von Olivenöl bei 20°C . Es ergeben sich für den rechten Zufluss eine Reynoldszahl von $\text{Re} = \frac{3 \cdot 10}{0.1} = 300$ und für den unteren Zufluss von $\text{Re} = \frac{5 \cdot 10}{0.1} = 500$. Es handelt sich somit um laminare Strömungen. Die Strömung wurde über ein Zeitintervall von 9 Sekunden simuliert. Als Löser wurde PP3D verwendet.

Die Berechnung der Simulation benötigte insgesamt 8 Stunden, 13 Minuten und 56 Sekunden. Die dreimalige Unterteilung des Grobgitters, inklusive der Randanpassung, dauerte 22 Sekunden. Dies entspricht einem Anteil an der Gesamtzeit von weniger als einem Promille. Somit ist die verbrauchte Zeit zur Randanpassung gegenüber der Gesamtlaufzeit vernachlässigbar.

Abbildung 6.9 zeigt einen Auszug aus dem Protokoll des Lösert zum Zeitpunkt 4.2 im 13. Makrozeitschritt und des ersten von drei Teilzeitschritten. Dieser Auszug ist repräsentativ für das gesamte Protokoll. Es erfolgt kein vorzeitiger Abbruch, somit werden 5 Iterationen durchgeführt. Zu erkennen ist, dass der relative Fehler wie auch die relative Veränderung sich gleichmäßig und konstant verringern. Keine der drei Komponenten konvergiert deutlich schneller oder langsamer als die anderen zwei. Auch die Konvergenzraten des Mehrgitterverfahrens der einzelnen Komponenten entwickeln sich gleichmäßig. Im fünften Iterationsschritt ist der maximale Relative Fehler $\text{DEF} = 0.810^{-5}$. Die maximale relative Veränderung REL beträgt 0.2810^{-3} . Die maximale Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens ist 0.8810^{-6} und die Konvergenzrate des nichtlinearen Iterationsverfahrens beträgt 0.24. Insgesamt lassen diese Kennzahlen auf eine sehr schnelle und robuste Konvergenz schließen. Insbesondere die Konvergenzraten des Mehrgitterverfahrens sind außerordentlich gut.

Abbildung 6.10 zeigt eine Visualisierung der euklidischen Norm des Geschwindigkeitsfelds der Strömung nach neun Sekunden. Die Bilder zeigen den Schnitt des Strömungsfelds mit der xz -Ebene bzw. der yz -Ebene im Nullpunkt. Eine quantitative Überprüfung des Ergebnisses ist nicht möglich, da die exakte Lösung zum Vergleich nicht vorhanden ist. Jedoch stimmt die Visualisierung in Abbildung 6.10 mit den Erwartungen überein. In der Hauptkammer des T-Stücks entsteht ein Wirbel. Der rechte Zufluss hat aufgrund der höheren Geschwindigkeit einen überwiegenden Einfluss auf die Strömung. Eine nachträgliche Berechnung mittels des Programms ParaView [52] ergibt als mittlere Gesamtgeschwindigkeit über der Fläche des Abflusses einen Wert von $3.74 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Summe der mittleren Geschwindigkeiten der Zuflüsse beträgt $3.82 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dies ergibt einen relativen Fehler von 0.02 und ist ein klares Indiz dafür, dass die berechnete Lösung divergenzfrei ist.

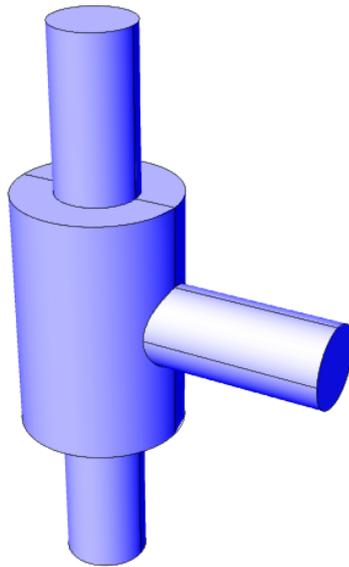


Abbildung 6.3: Zu sehen ist ein T-Stück. Das Hauptteil ist ein Zylinder mit einem Durchmesser von 20 Metern und einer Länge von 30 Metern. Die Zu- und Abflüsse sind Zylinder mit einem Durchmesser von 10 Metern und einer Länge von 20 Metern.

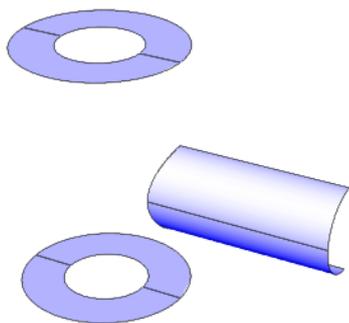


Abbildung 6.4: Zu sehen sind drei Flächenverbände der Geometrie \mathcal{G} des T-Stücks, welche aus je zwei Flächen bestehen.

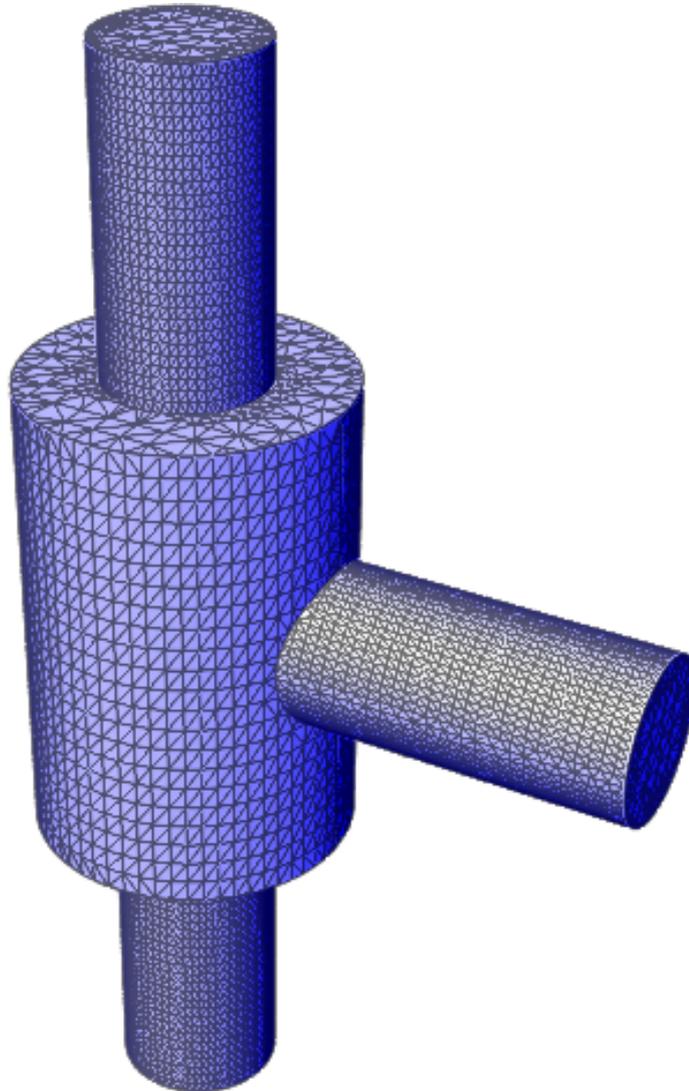


Abbildung 6.5: Zu sehen ist die Vereinigung der approximierenden Triangulierungen $\hat{\mathcal{T}}_1, \dots, \hat{\mathcal{T}}_{13}$ der Flächenverbände $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{13}\}$.

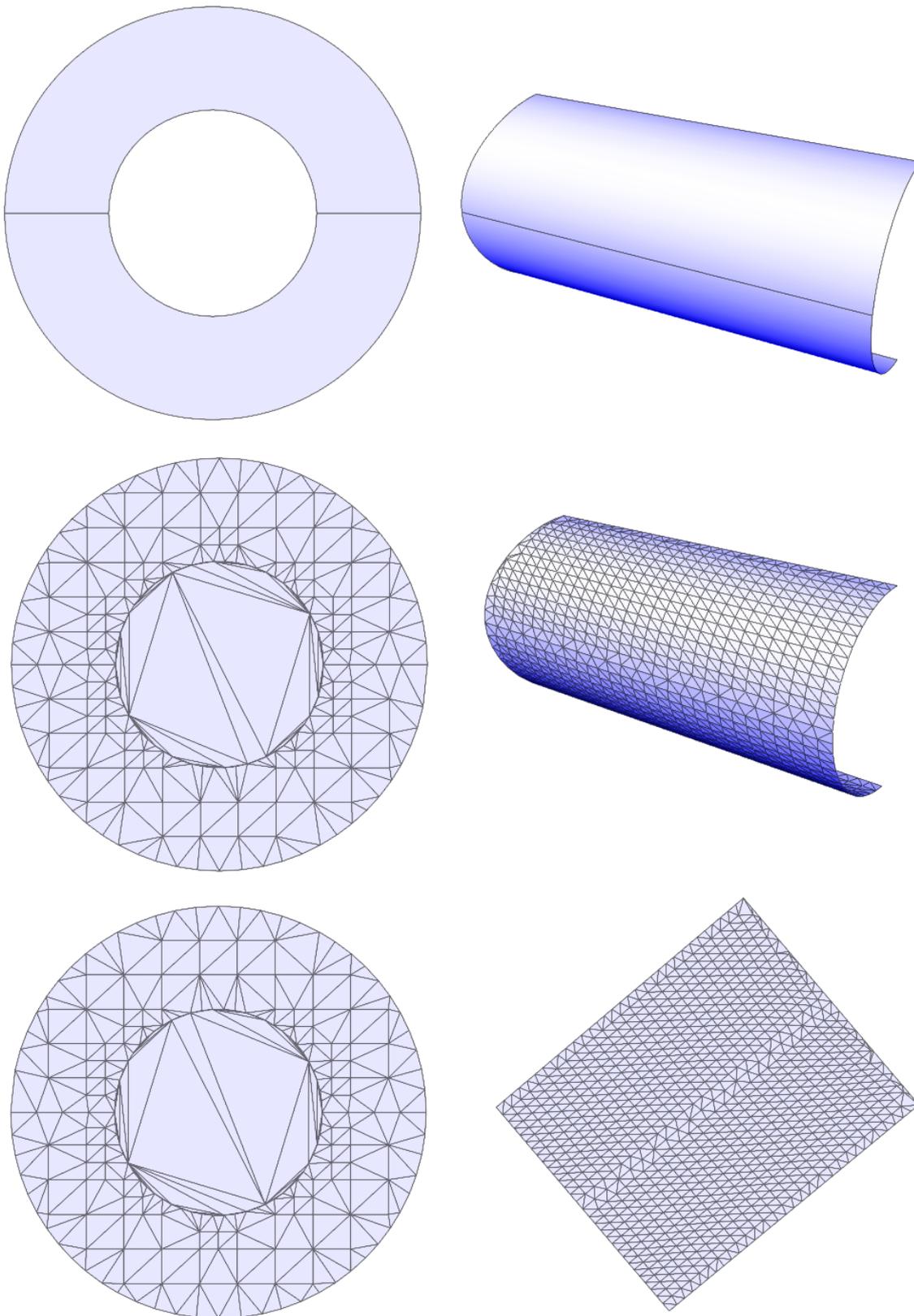


Abbildung 6.6: In der ersten Zeile sind zwei Flächenverbände des T- Stücks zu sehen. In der mittleren und unteren Zeile werden die zugehörigen, approximierenden bzw. globalen Triangulierungen gezeigt.

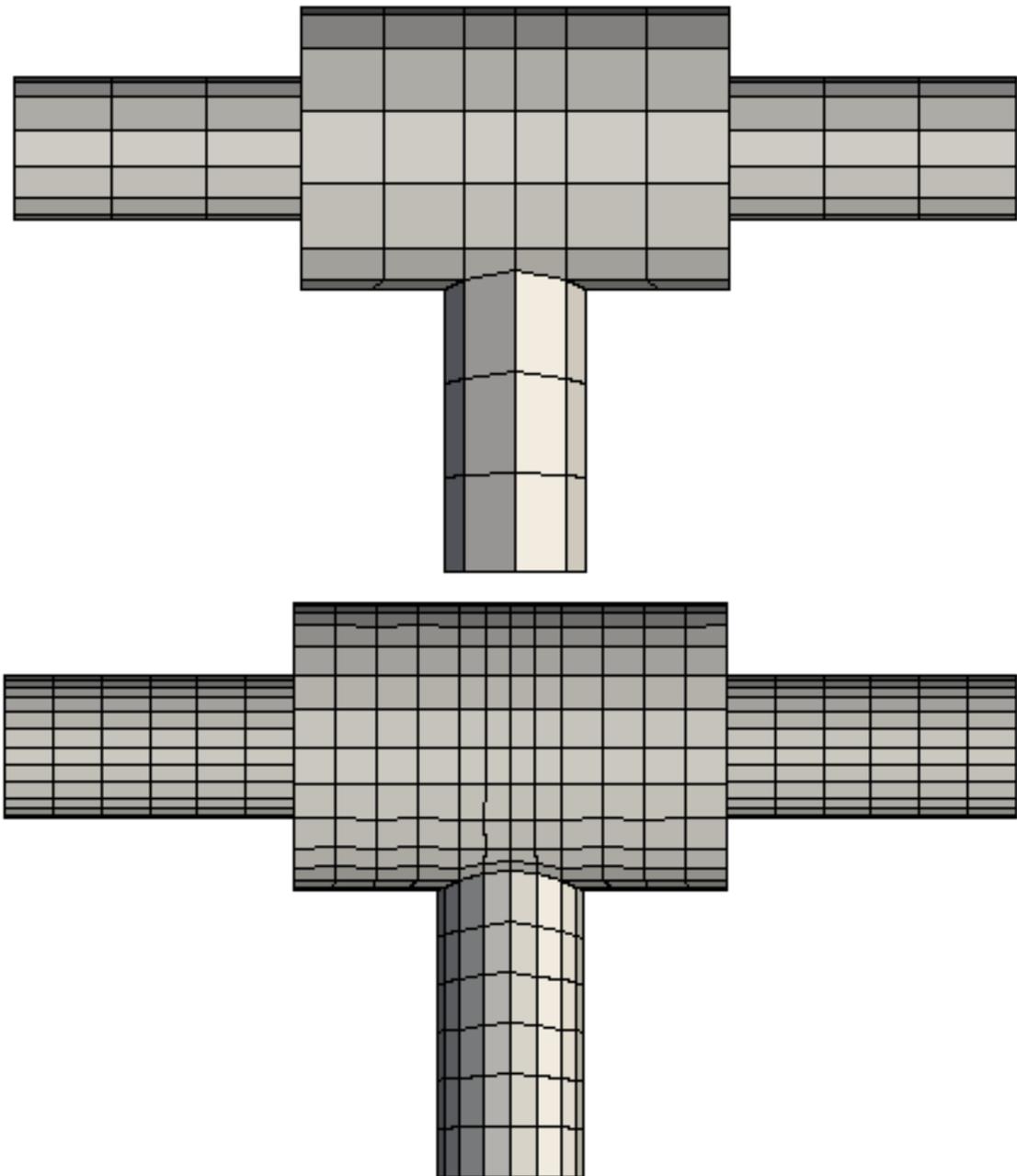


Abbildung 6.7: Die bezüglich der Geometrie \mathcal{G} des T-Stücks zulässigen Hexaedergitter \mathcal{H}^0 (oben) und \mathcal{H}^1 .

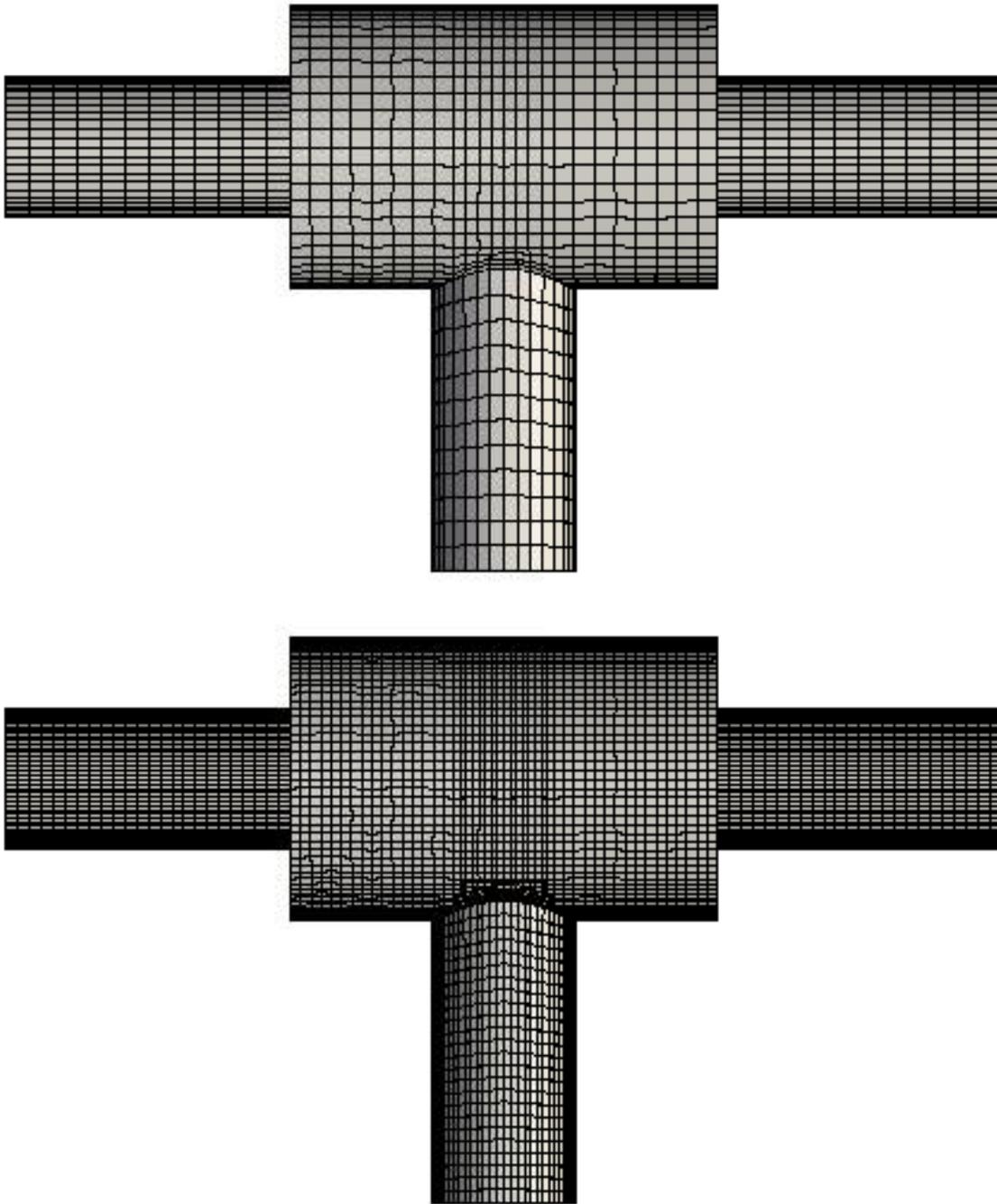


Abbildung 6.8: Die bezüglich der Geometrie \mathcal{G} des T-Stücks zulässigen Hexaedergitter \mathcal{H}^2 (oben) und \mathcal{H}^3 .

	Ecken	Hexaeder
Stufe 0	608	444
Stufe 1	4159	3552
Stufe 2	30749	28416
Stufe 3	236473	227328

Tabelle 6.1: Die Tabelle enthält die Anzahl der Ecken und Hexaeder der Gitter $\mathcal{H}^0, \dots, \mathcal{H}^3$.

	Minimum	Maximum	Mittel
Stufe 0	0.28	1.00	0.88
Stufe 1	0.28	1.00	0.94
Stufe 2	0.28	1.00	0.96
Stufe 3	0.28	1.00	0.97

	[0.0,0.1)	[0.1,0.2)	[0.2,0.3)	[0.3,0.4)	[0.4,0.5)	total
Stufe 0	0	0	4	0	2	444
Stufe 1	0	0	4	20	10	3552
Stufe 2	0	0	6	124	78	28416
Stufe 3	0	0	16	766	695	227328

	[0.5,0.6)	[0.6,0.7)	[0.7,0.8)	[0.8,0.9)	[0.9,1.0]	total
Stufe 0	2	4	136	20	276	444
Stufe 1	10	4	326	406	2772	3552
Stufe 2	56	60	1089	2350	24653	28416
Stufe 3	411	374	5561	14266	205239	227328

Tabelle 6.2: Die erste Tabelle zeigt das Minimum, das Maximum und das Mittel der skalierten Jacobi-Determinante aller Hexaeder der Hexaedergitter $\mathcal{H}^0, \dots, \mathcal{H}^3$ bezüglich der Geometrie des T-Stücks. Die zweite und dritte Tabelle zeigen die Häufigkeitsverteilung der skalierten Jacobi-Determinante, bezogen auf die Intervalle $[0.0, 0.1), \dots, [0.9, 1]$.

	Minimum	Maximum	Mittel
Stufe 0	0.50	1.00	0.85
Stufe 1	0.71	1.00	0.95
Stufe 2	0.71	1.00	0.98
Stufe 3	0.68	1.00	0.99

	[0.0,0.1)	[0.1,0.2)	[0.2,0.3)	[0.3,0.4)	[0.4,0.5)	total
Stufe 0	0	0	0	0	2	252
Stufe 1	0	0	0	0	0	1064
Stufe 2	0	0	0	0	0	4368
Stufe 3	0	0	0	0	0	17696

	[0.5,0.6)	[0.6,0.7)	[0.7,0.8)	[0.8,0.9)	[0.9,1.0]	total
Stufe 0	2	4	104	16	124	252
Stufe 1	0	0	34	150	880	1064
Stufe 2	0	0	30	121	4217	4368
Stufe 3	0	4	76	292	17324	17696

Tabelle 6.3: Die erste Tabelle zeigt das Minimum, das Maximum und das Mittel der skalierten Jacobi-Determinante aller Randhexaeder der Hexaedergitter $\mathcal{H}^0, \dots, \mathcal{H}^3$ bezüglich der Geometrie des T-Stücks. Die zweite und dritte Tabelle zeigen die Häufigkeitsverteilung der skalierten Jacobi-Determinante, bezogen auf die Intervalle $[0.0, 0.1), \dots, [0.9, 1]$.

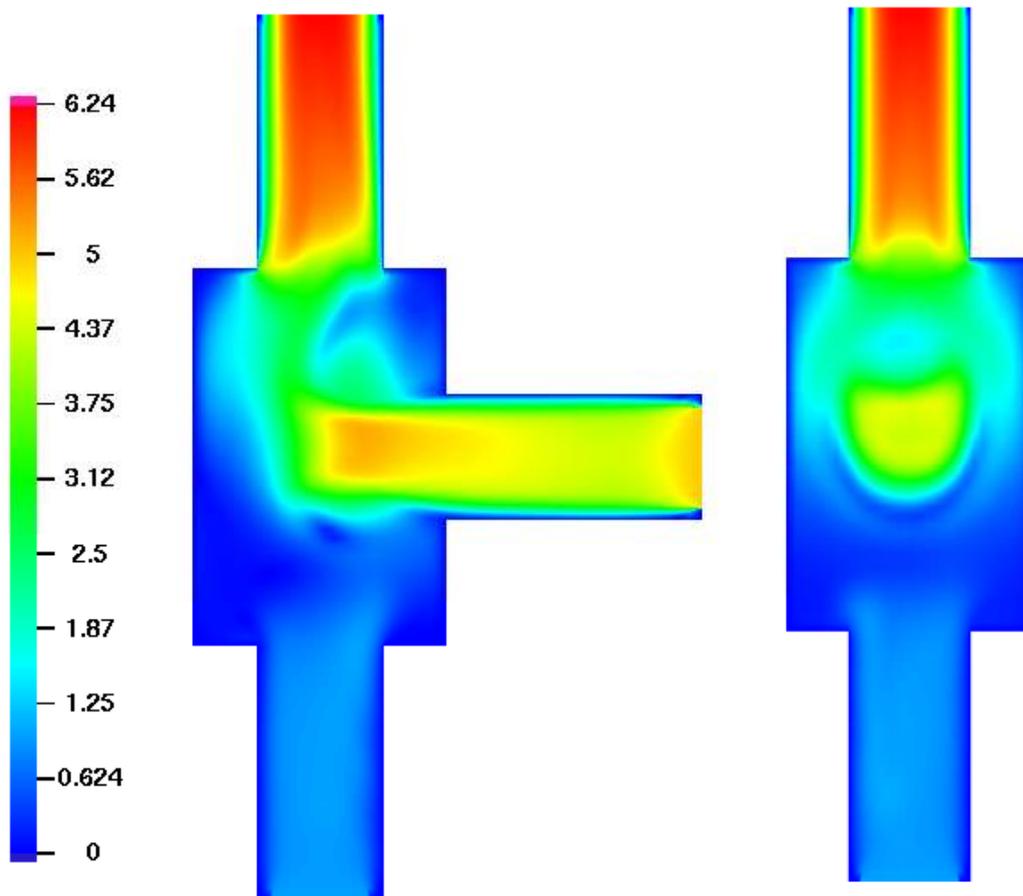


Abbildung 6.10: Visualisierung der euklidischen Norm des Geschwindigkeitsfelds der Strömung durch das T-Stück. Das linke Bild zeigt den Schnitt mit der xz -Ebene im Nullpunkt. Das rechte Bild zeigt den Schnitt mit der yz -Ebene im Nullpunkt.

6.4 Beispiel 2: Schwebendes Kreuz im Windtunnel

Geometrie

Im zweiten Beispiel wird der Fluss um ein schwebendes Objekt in einem Windtunnel simuliert. Länge, Breite und Höhe des Tunnels betragen jeweils 100, 50 und 50 Meter. Das schwebende Objekt ist eine Vereinigung zweier Zylinder, welche sich in einem rechten Winkel zueinander schneiden. Die Zylinderachsen sind parallel zur y -Achse bzw. z -Achse des Einheitskoordinatensystems ausgerichtet. Der Schnittpunkt der Zylinderachsen hat die Koordinaten $(30\ 25\ 25)$. Der Radius und die Länge beider Zylinder betragen 5 bzw. 30 Meter. Abbildung 6.11 zeigt eine perspektivische Ansicht dieser Konstellation. Der Zufluss und Abfluss liegen bei $x = 0$ bzw. $x = 100$.

Zerlegung in Flächenverbände

Die Geometrie \mathcal{G} , welche das Zylinderkreuz und den Tunnel beschreibt, besteht aus 34 Flächen. Der Tunnel wird durch sechs Vierecksflächen beschrieben. Das Zylinderkreuz besteht aus 28 Flächen. Der vordere, mittlere Bereich des Kreuzes besteht aus vier dreiecksförmigen Flächen, welche zu einem Flächenverband zusammengefasst werden (siehe Abbildung 6.12). Entsprechend werden vier Flächen auf der Rückseite zu einem Verband zusammengefasst. Die restlichen Flächen der Geometrie bilden einelementige Flächenverbände. Insgesamt erhält man so eine aus 28 Flächenverbänden bestehende Flächenverbandzerlegung $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{28}\}$. Als charakteristische Kurven wurden wieder alle Kurven gewählt, welche nur einen stetigen Übergang zwischen zwei Flächen bilden.

Approximierende und globale Triangulierung

Zu den einzelnen Flächenverbänden der Flächenverbandzerlegung $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ der Geometrie \mathcal{G} werden mit Hilfe des Programms Rhinoceros approximierende Triangulierungen erzeugt. Die approximierenden Triangulierungen der Tunnelseiten entsprechen jeweils einem Viereck, welches durch eine Diagonale geteilt wurde. Die approximierenden Triangulierungen des Zylinderkreuzes bestehen insgesamt aus 2406 Dreiecken und ihre Vereinigung ist in Abbildung 6.13 zu sehen.

Wie auch im ersten Beispiel werden mit Hilfe der Mittelwert-Projektion zu den approximierenden Triangulierungen entsprechende globale Triangulierungen erzeugt. Als Randparametrisierung wird die Kreis-Bogen-Strecken-Projektion verwendet. Abbildung 6.14 zeigt zwei Beispiele. In der ersten Zeile sind zwei Flächenverbände zu sehen. In der mittleren und unteren Zeile werden die approximierenden bzw. globalen Triangulierungen gezeigt. Der Flächenverband oben links besteht aus vier Flächen und repräsentiert den mittleren vorderen Bereich des Zylinderkreuzes. Der zweite Flächenverband besteht aus einer Fläche und entspricht einem Teil der Oberseite des horizontalen Zylinders.

Hexaedergitter

Analog zum ersten Beispiel wird mit Hilfe des Programms ICEM CFD zuerst ein Grobgitter \mathcal{H}^0 erzeugt. Mit dem in Abschnitt 5.2.2 vorgestellten Algorithmus wird dieses Gitter insgesamt vier mal unterteilt. Man erhält die Gitter $\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^3, \mathcal{H}^4$. Alle diese Gitter sind zulässig bezüglich der Geometrie \mathcal{G} des Zylinderkreuzes. Die Gitter $\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^1$ bzw. $\mathcal{H}^2, \mathcal{H}^3$ sind in den Abbildungen 6.15 bzw. 6.16 zu sehen. Einen Überblick über die Anzahl der Ecken und Hexaeder der Gitter gibt Tabelle 6.4. Die Tabellen 6.5 und 6.6 enthalten genaue Angaben zur Qualität der Gitter, bezogen auf die skalierte Jacobi-Determinante. Kein Gitter enthält einen Hexaeder mit einer SJD von weniger als 0.5. Die Gitter haben somit alle eine sehr gute Qualität.

Numerische Simulation

In diesem numerischen Experiment hat der Zufluss durch die linke Seite des Windtunnels zum Zeitpunkt 0 eine Geschwindigkeit von $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Das Fluid hat die gleichen Eigenschaften wie im ersten Experiment, d. h. die Dichte beträgt $1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und die kinematische Viskosität ist $0.1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. In diesem Fall wird als charakteristische Länge der Durchmesser des umströmten Objektes gewählt. Die charakteristische Geschwindigkeit entspricht wieder der über den Querschnitt gemittelten Geschwindigkeit des Zuflusses. Dies führt zu der Reynoldszahl $\text{Re} = \frac{3 \cdot 10}{0.1} = 300$. Auch in diesem Fall handelt es sich um eine laminare Strömung.

Die Strömung wurde wieder über ein Zeitintervall von 9 Sekunden simuliert und als Löser wurde PP3D verwendet.

Die Berechnung der Simulation benötigte insgesamt 11 Stunden, 33 Minuten und 55 Sekunden. Die viermalige Unterteilung des Grobgitters inklusive der Randanpassung dauerte 35 Sekunden. Auch hier ist der Anteil der Zeit für die Randanpassung, gemessen an der Gesamtzeit, verschwindend gering.

Abbildung 6.17 zeigt einen repräsentativen Auszug aus dem Protokoll des Löser zum Zeitpunkt 3.03 im 16. Makrozeitschritt und des ersten von drei Teilzeitschritten. Es erfolgt kein vorzeitiger Abbruch, somit werden 5 Iterationen durchgeführt. Wie auch im ersten Beispiel entwickeln sich die Werte der Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens, des relativen Fehlers und der relativen Veränderung komponentenweise gleichmäßig. Der relative Fehler verringert sich deutlich. Im fünften Iterationsschritt ist der maximale relative Fehler $DEF = 0.7310^{-5}$. Die maximale relative Veränderung REL beträgt 0.1110^{-2} . Die maximale Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens ist 0.6810^{-4} und die Konvergenzrate des nichtlinearen Iterationsverfahrens beträgt 0.32. Auch hier liegt eine robuste und schnelle Konvergenz vor und die Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens ist außerordentlich gut.

Die Abbildungen 6.18 und 6.19 zeigen Visualisierungen der euklidischen Norm des Geschwindigkeitsfelds der Strömung nach neun Sekunden. Die Bilder zeigen den Schnitt des Strömungsfeldes mit der xz -Ebene bzw. der yz -Ebene im Punkt $(0\ 25\ 0)$ bzw. $(30\ 0\ 0)$. Eine quantitative Überprüfung des Ergebnisses ist nicht möglich, da die exakte Lösung zum Vergleich nicht vorhanden ist. Die Visualisierungen stimmen jedoch mit den Erwartungen überein. Seitlich des Kreuzes ergeben sich höhere Geschwindigkeiten. Hinter dem Kreuz entstehen Verwirbelungen mit geringeren Geschwindigkeiten. Die mittlere Gesamtgeschwindigkeit über der Fläche des Abflusses hat einen Wert von $2.93\frac{m}{s}$. Für den Zufluss ergibt sich ein Wert von $3.00\frac{m}{s}$. Dies ergibt einen relativen Fehler von 0.02 und ist ein klares Indiz dafür, dass die berechnete Lösung divergenzfrei ist.

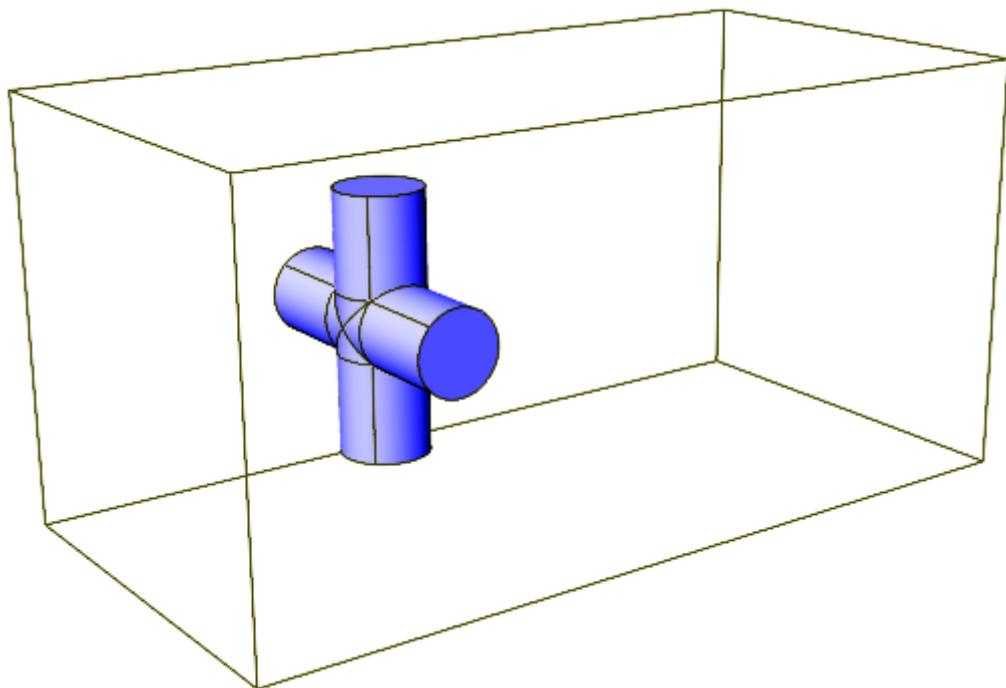


Abbildung 6.11: Zu sehen ist eine perspektivische Ansicht des schwebenden Zylinderkreuzes in einem Windtunnel.

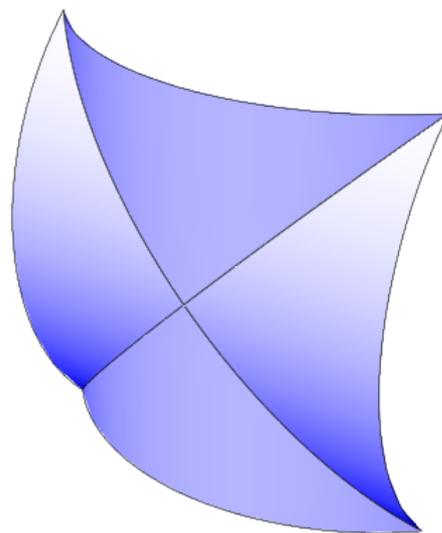


Abbildung 6.12: Gezeigt wird ein Flächenverband, bestehend aus vier Flächen, welcher den vorderen, mittleren Bereich des Zylinderkreuzes beschreibt.

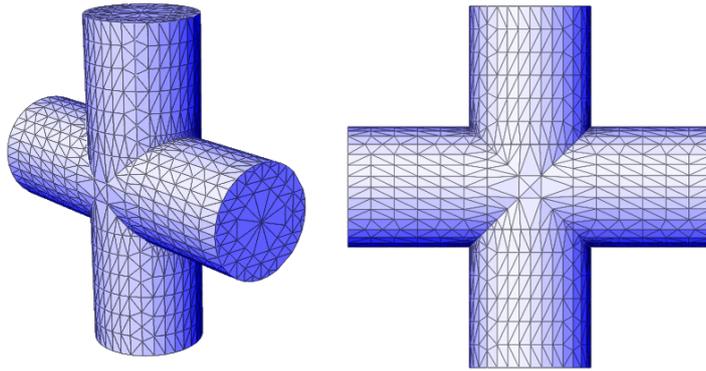


Abbildung 6.13: Zu sehen sind eine perspektivische Ansicht und eine Vorderansicht der Vereinigung der approximierenden Triangulierungen der Flächenverbände des Zylinderkreuzes. Die Gesamtzahl der Dreiecke beträgt 2406.

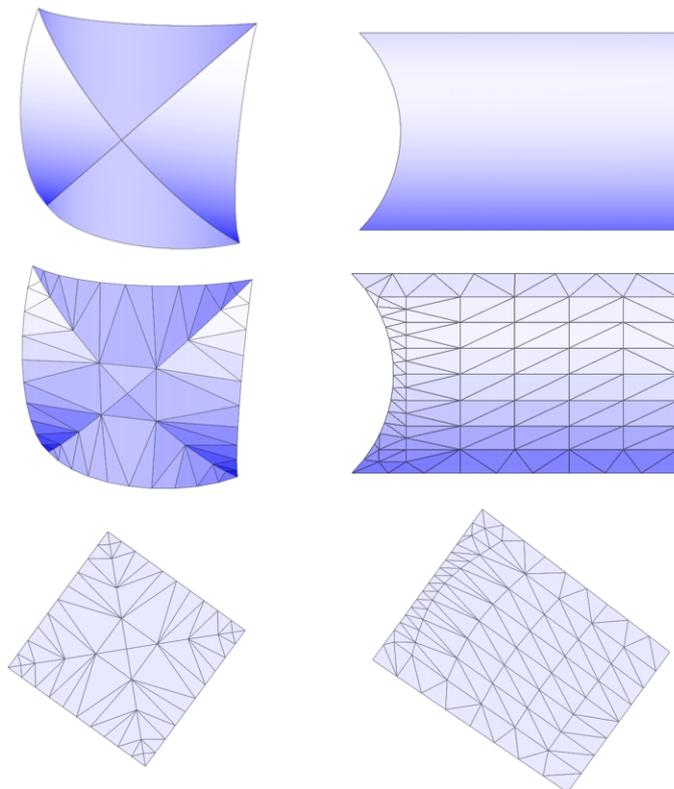


Abbildung 6.14: In der ersten Zeile sind zwei Flächenverbände des Zylinderkreuzes zu sehen. In der mittleren und unteren Zeile werden die zugehörigen approximierenden bzw. globalen Triangulierungen gezeigt.

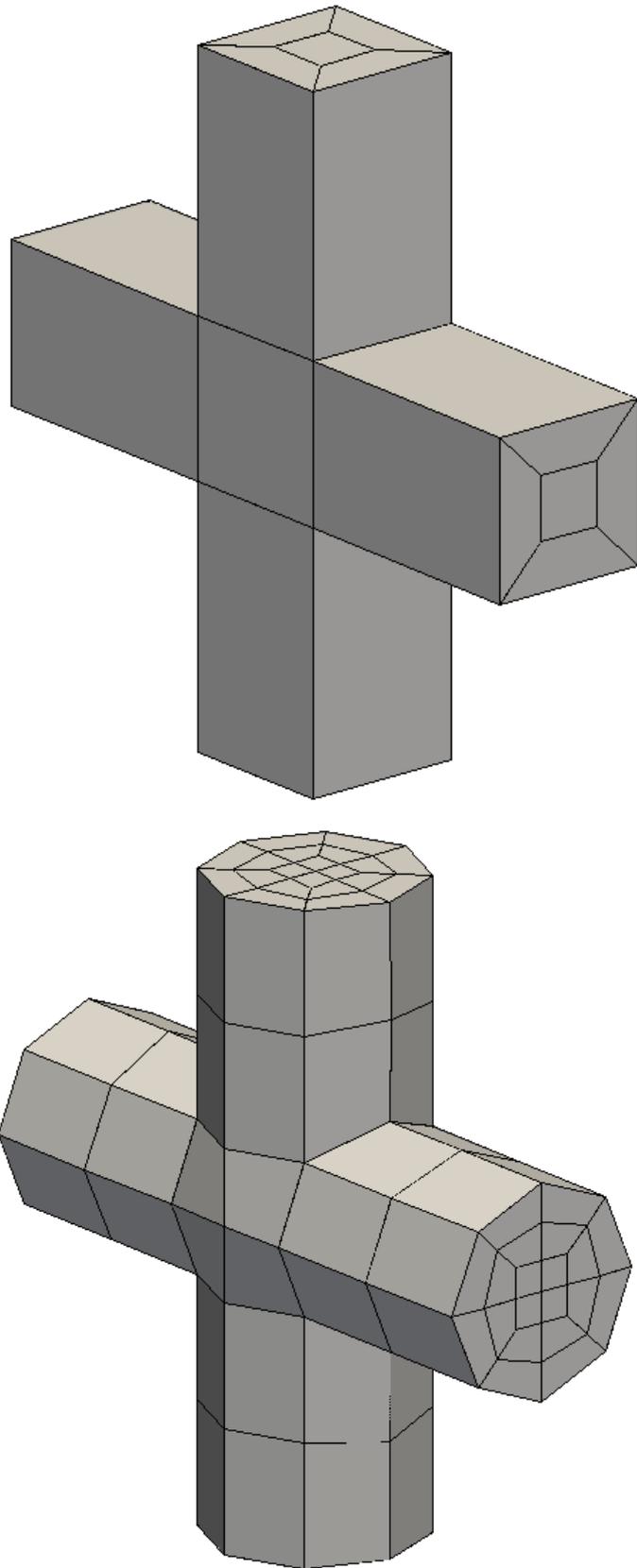


Abbildung 6.15: Die bezüglich der Geometrie \mathcal{G} des Zylinderkreuzes zulässigen Hexaedergitter \mathcal{H}^0 (oben) und \mathcal{H}^1 .

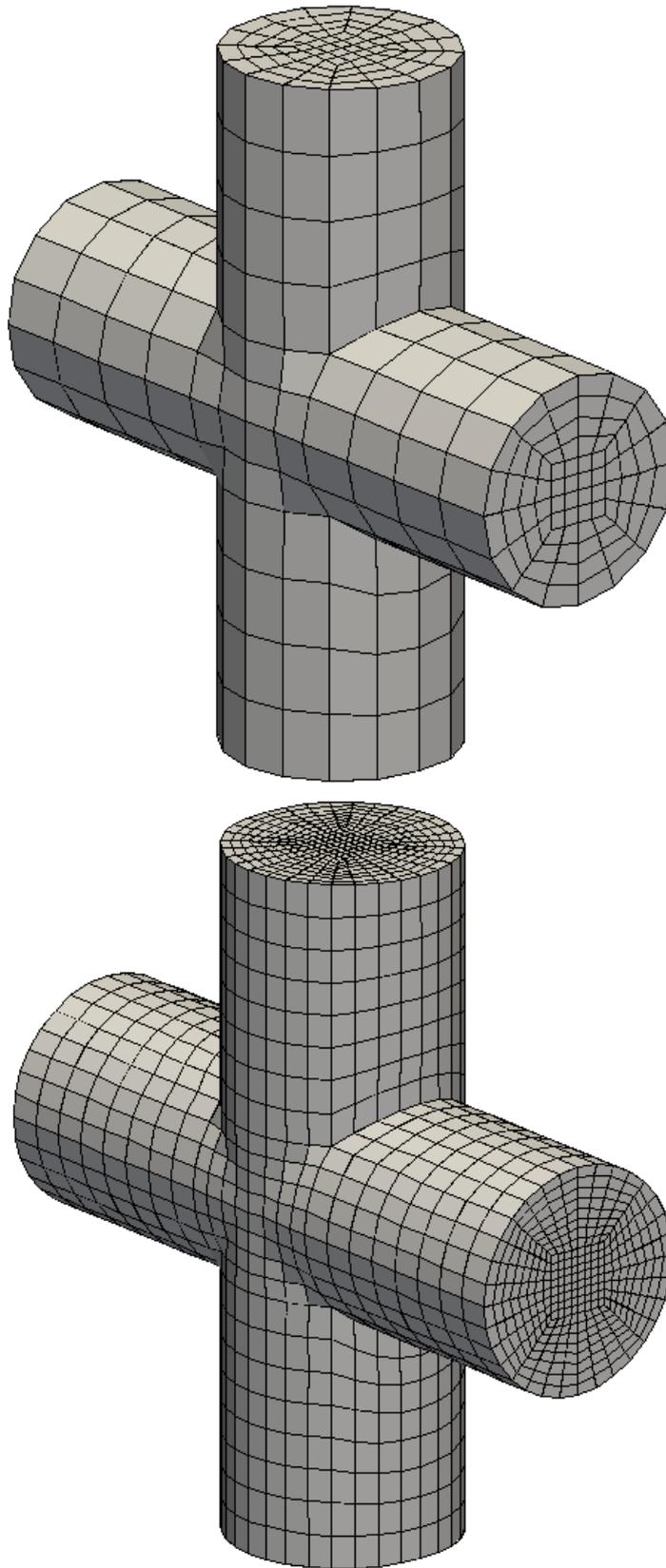


Abbildung 6.16: Die bezüglich der Geometrie \mathcal{G} des Zylinderkreuzes zulässigen Hexaedergitter \mathcal{H}^2 (oben) und \mathcal{H}^3 .

	Ecken	Hexaeder
Stufe 0	248	136
Stufe 1	1514	1088
Stufe 2	10370	8704
Stufe 3	76226	69632
Stufe 4	583298	557056

Tabelle 6.4: Die Tabelle enthält die Anzahl der Ecken und Hexaeder der Gitter $\mathcal{H}^0, \dots, \mathcal{H}^4$ bezüglich des Zylinderkreuzes.

	Minimum	Maximum	Mittel
Stufe 0	0.71	1.00	0.97
Stufe 1	0.71	1.00	0.96
Stufe 2	0.69	1.00	0.97
Stufe 3	0.60	1.00	0.98
Stufe 4	0.55	1.00	0.98

	[0.0,0.1)	[0.1,0.2)	[0.2,0.3)	[0.3,0.4)	[0.4,0.5)	total
Stufe 0	0	0	0	0	0	136
Stufe 1	0	0	0	0	0	1088
Stufe 2	0	0	0	0	0	8704
Stufe 3	0	0	0	0	0	69632
Stufe 4	0	0	0	0	0	557056

	[0.5,0.6)	[0.6,0.7)	[0.7,0.8)	[0.8,0.9)	[0.9,1.0]	total
Stufe 0	0	0	16	0	120	136
Stufe 1	0	0	128	48	912	1088
Stufe 2	0	16	528	520	7640	8704
Stufe 3	8	60	2952	2916	63696	69632
Stufe 4	24	336	17085	20993	518618	557056

Tabelle 6.5: Die erste Tabelle zeigt das Minimum, das Maximum und das Mittel der skalierten Jacobi-Determinante aller Hexaeder der Hexaedergitter $\mathcal{H}^0, \dots, \mathcal{H}^4$ bezüglich der Geometrie des Zylinderkreuzes. Die zweite und dritte Tabelle zeigen die Häufigkeitsverteilung der skalierten Jacobi-Determinante, bezogen auf die Intervalle $[0.0, 0.1), \dots, [0.9, 1]$.

	Minimum	Maximum	Mittel
Stufe 0	0.71	1.00	0.96
Stufe 1	0.71	1.00	0.94
Stufe 2	0.69	1.00	0.96
Stufe 3	0.60	1.00	0.97
Stufe 4	0.55	1.00	0.97

	[0.0,0.1)	[0.1,0.2)	[0.2,0.3)	[0.3,0.4)	[0.4,0.5)	total
Stufe 0	0	0	0	0	0	127
Stufe 1	0	0	0	0	0	768
Stufe 2	0	0	0	0	0	3152
Stufe 3	0	0	0	0	0	12816
Stufe 4	0	0	0	0	0	51728

	[0.5,0.6)	[0.6,0.7)	[0.7,0.8)	[0.8,0.9)	[0.9,1.0]	total
Stufe 0	0	0	16	0	111	127
Stufe 1	0	0	128	48	592	768
Stufe 2	0	16	272	264	2600	3152
Stufe 3	8	60	776	844	11128	12816
Stufe 4	24	320	2604	2746	46034	51728

Tabelle 6.6: Die erste Tabelle zeigt das Minimum, das Maximum und das Mittel der skalierten Jacobi-Determinante aller Randhexaeder der Hexaedergitter $\mathcal{H}^0, \dots, \mathcal{H}^4$ bezüglich der Geometrie des Zylinderkreuzes. Die zweite und dritte Tabelle zeigen die Häufigkeitsverteilung der skalierten Jacobi-Determinante, bezogen auf die Intervalle $[0.0, 0.1), \dots, [0.9, 1]$.

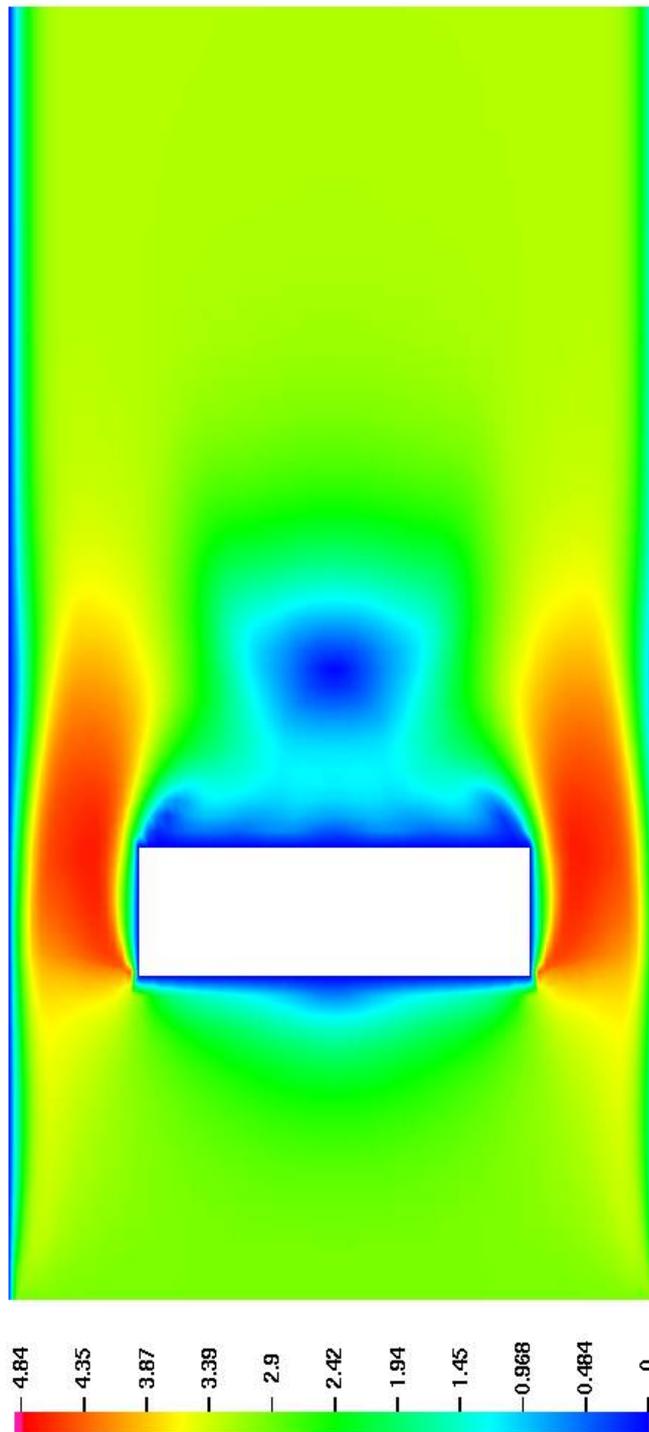


Abbildung 6.18: Visualisierung der euklidischen Norm des Geschwindigkeitsfelds der Strömung um das Zylinderkreuz. Zu sehen ist der Schnitt des Strömungsfeldes mit der xz -Ebene im Punkt $(0 \ 25 \ 0)$.

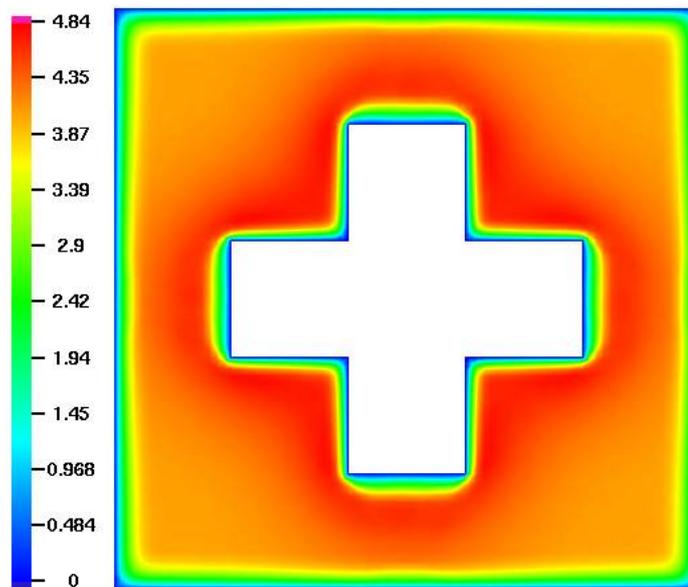


Abbildung 6.19: Visualisierung der euklidischen Norm des Geschwindigkeitsfeldes der Strömung um das Zylinderkreuz. Zu sehen ist der Schnitt des Strömungsfeldes mit der yz -Ebene im Punkt $(30\ 0\ 0)$.

7 Zusammenfassung

Die beiden, im vorherigen Kapitel vorgestellten Beispiele haben gezeigt, dass es mit dem neuen Unterteilungsverfahren möglich ist, zu komplexen Geometrien Gitter von sehr guter Qualität zu erzeugen. Die Konstruktion erfolgt sehr schnell und die benötigte Zeit fällt gegenüber der Gesamtzeit des numerischen Experimentes nicht ins Gewicht. Die gute Qualität der Hexaeder zeigt sich in der berechneten skalierten Jacobi-Determinante. Ein weiteres Indiz für die gute Qualität ist der robuste und schnelle Ablauf des Lösers PP3D mit sehr guten Konvergenzraten der Mehrgitterverfahren und des nichtlinearen Iterationsverfahrens. Die berechneten Strömungen stimmen mit den Erwartungen überein. Zum größten Teil läuft das Verfahren automatisch ab. Interaktionen des Anwenders sind bei der Zerlegung der gegebenen Geometrie in Flächenverbände nötig. Diese müssen geeignet auf das Grobgitter abgestimmt werden. Auch das Grobgitter selbst muss manuell konstruiert werden. Für kommerzielle Gittergeneratoren gelten jedoch die gleichen Einschränkungen. So muss beim Programm ICEM CFD der Anwender die gegebene Geometrie in Hexaederblöcke zerlegen. Randvierecke der Blöcke müssen dem Rand der Geometrie manuell zugewiesen werden. Meines Erachtens ist ein vollautomatisches Verfahren für komplexe Geometrien nicht realisierbar.

Anhang

Implementierte Software

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren zur Erzeugung einer Hierarchie von Hexaedergittern wurde als eine eigene Bibliothek in die Software FEATFLOW eingebunden. Insgesamt wurden über 150 Funktionen implementiert. Die folgende Tabelle gibt einen kurzen Überblick über die wichtigsten Funktionen zur Konstruktion der globalen Parametrisierungen der Kurven- und Flächenverbände:

BRIGES	Einlesen der Geometrie im IGES-Format.
BFPCM	Bestimmung der Kurven- und Flächenparameter der Ecken des Grobgitters.
BTRWAV	Einlesen der approximierenden Triangulierungen der Flächenverbände.
BTFPT	Bestimmung der Kurven- und Flächenparameter der Ecken der approximierenden Triangulierungen.
BTCPB	Berechnung der Randparametrisierung.
BTCIP	Berechnung der Parameterwerte der inneren Ecken.
BTCGP	Berechnung der Parameterwerte der Ecken des Grobgitters bezogen auf die Flächenverbände.
BGCCPD	Bestimmung der globalen Parametrisierungen der Kurvenverbände.
BFCGP	Berechnung der Parameterwerte der Ecken des Grobgitters bezogen auf die Kurvenverbände.

Die Funktion BTSEBV führt die gleichmäßige Unterteilung des aktuellen Hexaedergitters aus. Die Unterteilung von Randkanten und Randvierecken werden von den folgenden Funktionen durchgeführt:

BFSE	Unterteilung einer Kante im globalen Parameterbereich eines Kurvenverbandes.
BTSE	Unterteilung einer Kante im globalen Parameterbereich eines Flächenverbandes.
BTSF	Unterteilung eines Vierecks im globalen Parameterbereich eines Flächenverbandes.

Der gesamte Source-Code ist auf der beigelegten DVD im Verzeichnis *featflow* enthalten. Im Unterverzeichnis *nurbs* befinden sich alle neu geschriebenen Funktionen. In den Unterverzeichnissen *pp3dcross* und *pp3dtjunction* sind die numerischen Experimente enthalten. Die benötigten Eingabedaten befinden sich jeweils im Verzeichnis *#adc*. Die nächste Tabelle gibt einen Überblick welche Datei was enthält:

geometry.igs Geometriedaten im IGES-Format.
mesh.tri Grobgitter.
cluster.obj Approximation der Flächenverbände.

Eine Beschreibung der berechneten Strömung zu verschiedenen Zeitpunkten ist im Verzeichnis *#gmv* im GMV-Format zu finden.

Verwendete Software

Zur Erstellung der Geometrie sowie der approximierenden Triangulierung der Flächenverbände wurde die Software Rhinoceros [37] verwendet. Die Grobgitter wurden mit Hilfe des Programms ANSYS ICEM CFD [1] erstellt. Die Auswertung der NURBS-Kurven und -Flächen erfolgten mit dem Programmpaket SISL (Sintef Spline Library) [51]. Die verwendeten Funktionen waren im Einzelnen:

- s1221 Auswertung einer NURBS-Kurve in einem Parameterwert t .
- s1957 Bestimmung des Parameterwertes t eines Punktes $\mathbf{p} \in C$ auf einer NURBS-Kurve C .
- s1988 Bestimmung der Bounding-Box einer NURBS-Kurve.
- s1421 Auswertung einer NURBS-Fläche in einem Parameterwertepaar (u, v) .
- s1958 Bestimmung des Parameterwertepaares (u, v) eines Punktes $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$ auf einer NURBS-Fläche \mathcal{S} .
- s1989 Bestimmung der Bounding-Box einer NURBS-Fläche.

Das Gleichungssystem der Mittelwert-Projektion wurde mit Hilfe der Bibliothek UMF-PACK [12] gelöst. Mit der Funktion UM2DFA erzeugt man eine LU-Zerlegung der Matrix des Gleichungssystems. Mit der Funktion UMD2SO kann man dann das Gleichungssystem lösen.

Literaturverzeichnis

- [1] ANSYS INC.: *ICEM CFD*. <http://www.ansys.com/products/icemcfd.asp>, 2005. – Version 10.0
- [2] BABUSKA, I. ; AZIZ, A.: On the angle condition in the finite element method. In: *SIAM J. Numer. Analysis* 13 (1976), S. 214–227
- [3] BECKER, Christian ; TUREK, Stefan: FEATFLOW – Finite element software for the incompressible Navier–Stokes equations / Universität Dortmund. 1999. – User Manual
- [4] BERGER, M.: *Geometry I*. Academic Press, Inc, 1987
- [5] BLACKER, T. D. ; STEPHENSON, M. B.: Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32 (1991), S. 811–847
- [6] CAREY, G. F. ; ODEN, J. T.: *Finite Elements: Computational Aspects*. Prentice-Hall, 1984
- [7] CASS, R. J. ; BENZLEY, S. E. ; MEYERS, R. J. ; BLACKER, T. D.: Generalized 3D paving: An automated quadrilateral surface mesh generation algorithm. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (1996), S. 1475–1489
- [8] CHEN, H. ; BISHOP, J.: Delaunay Triangulation for Curved Surfaces. In: *6th International Meshing Roundtable*, 1997, S. 115–127
- [9] CUILIERE, J. C.: An adaptive method for the automatic triangulation of 3D parametric surfaces. In: *Computer Aided Design* 30 (1998), Nr. 2, S. 139–149
- [10] CURRY, H. B. ; SCHOENBERG, I. J.: On Pólya frequency functions IV: the fundamental spline functions and their limits. In: *Journal d'analyse mathématique* 17 (1966), S. 71–107
- [11] DAVIS, Timothy A.: Algorithm 832: UMFPACK V4.3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 30 (2004), Nr. 2, S. 196–199. – ISSN 0098–3500
- [12] DAVIS, Timothy A.: A column pre-ordering strategy for the unsymmetric-pattern multifrontal method. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 30 (2004), Nr. 2, S. 165–195. – ISSN 0098–3500

- [13] DAVIS, Timothy A. ; DUFF, Iain S.: An Unsymmetric-Pattern Multifrontal Method for Sparse LU Factorization. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 18 (1997), Nr. 1, S. 140–158
- [14] DAVIS, Timothy A. ; DUFF, Iain S.: A combined unifrontal/multifrontal method for unsymmetric sparse matrices. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 25 (1999), Nr. 1, S. 1–20. – ISSN 0098–3500
- [15] DELAUNAY, B.: Sur la sphere vide. In: *Izvestija Akademii Nauk Sojuza Sovetskich Socialisticeskich Respublik, Otdelenie Matematiceskich i Estestvennych Nauk* 7 (1934), S. 793–800
- [16] DO CARMO, M.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice–Hall, Inc., 1976
- [17] FARIN, Gerald: *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design*. Academic Press, 1997
- [18] FLOATER, M.: Mean value coordinates. In: *Computer Aided Geometric Design* 20 (2003), S. 19–27
- [19] FLOATER, M. S.: Parameterization and smooth approximation of surface triangulations. In: *Computer Aided Geometric Design* 14 (1997), S. 231 – 250
- [20] FLOATER, M. S.: One-to-one piecewise linear mapping over triangulations. In: *Math. Comp.* (2003), S. 685 – 696
- [21] FLOATER, M. S. ; HORMANN, K.: Surface Parameterization: a Tutorial and Survey. In: DODGSON, N. A. (Hrsg.) ; FLOATER, M. S. (Hrsg.) ; A., Sabin M. (Hrsg.): *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, Springer-Verlag, 2005
- [22] GÖDDEKE, Dominik: *Geometrische Projektionstechniken auf Oberflächentriangulierungen zur numerischen Strömungssimulation mit hierarchischen Mehrgitterverfahren*, Universität Dortmund, Diplomarbeit, 2004
- [23] GEORGE, Paul-Louis ; BOROUCAKI, Houman: *Delaunay Triangulation and Meshing : Application to Finite Elements*. Hermes, 1998
- [24] GOERING, Herbert ; ROOS, Hans-Görg ; TOBISKA, Lutz: *Finite-Element-Methode*. Akademie-Verlag, 1993
- [25] GRAJEWSKI, M. ; KÖSTER, M. ; TUREK, S.: Mathematical and numerical analysis of a robust and efficient grid deformation method in the finite element context / Fakultät für Mathematik, TU Dortmund. 2008. – Forschungsbericht. – Ergebnisberichte des Instituts für Angewandte Mathematik, Nummer 365
- [26] GU, Xianfeng ; GORTLER, Steven J. ; HOPPE, Hugues: Geometry images. In: *ACM Trans. Graph.* 21 (2002), Nr. 3, S. 355–361. – ISSN 0730–0301

- [27] HACKBUSCH, Wolfgang: *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer-Verlag, 1985
- [28] HELD, Martin: FIST: Fast Industrial-Strength Triangulation of Polygons. In: *Algorithmica* 30 (2001), Nr. 4, S. 563–596
- [29] HORMANN, K.: *Theory and Applications of Parameterizing Triangulations*, Department of Computer Science, University of Erlangen, Diss., 2001
- [30] HOSCHEK, Josef ; LASSER, Dieter: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner Verlag, 1989
- [31] KNUPP, P.: The Verdict Geometric Quality Library / Sandia National Laboratories. 2007 (SAND2007-1751). – Forschungsbericht
- [32] KNUPP, Patrick: Achieving Finite Element Mesh Quality via Optimization of the Jacobian Matrix Norm and Associated Quantities. Part II - A Framework for Volume Mesh Optimization and the condition number of the Jacobian matrix. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), Nr. 8, S. 1165 – 1185
- [33] KREYSZIG, E.: *Differentialgeometrie*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1968
- [34] LAU, T. S. ; LO, S. H.: Finite Element Mesh Generation Over Analytical Surfaces. In: *Computers and Structures* 59 (1996), Nr. 2, S. 301–309
- [35] LAU, T. S. ; LO, S. H. ; LEE, C. K.: Generation of quadrilateral mesh over analytical curved surfaces. In: *Finite Elem. Anal. Des.* 27 (1997), Nr. 3, S. 251–272
- [36] LAWSON, Charles L.: *Mathematical Software III: Proceedings of a Symposium Conducted by the Mathematics Research Center, the University of Wisconsin–Madison, March 28-30, 1977*, Academic Press, Inc., 1977
- [37] MCNEEL: *Rhinoceros 3.0*. <http://www.rhino3d.com/>, 2006
- [38] MIEMCZYK, M.: *Hexaeder-Gittergenerierung durch Kombination von Gitterdeformations-, Randadaptions- und Fictitious-Boundary-Techniken zur Strömungssimulation um komplexe dreidimensionale Objekte*, Technische Universität Dortmund, Diplomarbeit, 2007
- [39] MÜLLER-URBANIAK, S.: *Eine Analyse des Zwischenschritt- θ -Verfahrens zur Lösung der instationären Navier-Stokes Gleichungen*, Universität Heidelberg, Diss., 1993
- [40] PG DeVISO: Endbericht der Projektgruppe DeVISO / FB Mathematik, Universität Dortmund. 2003. – Forschungsbericht. – Ergebnisberichte des Instituts für Angewandte Mathematik, Nummer 240T

- [41] PIEGL, L. ; TILLER, W.: *The NURBS Book*. Springer-Verlag, 1997
- [42] PINKALL, U. ; POLTHIER, K.: Computing Discrete Minimal Surfaces and Their Conjugates. In: *Experim. Math.* 2 (1993), Nr. 1, S. 15–36
- [43] QUARTERONI, Alfio ; VALLI, Alberto: *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1994
- [44] RANNACHER, R. ; TUREK, S.: A simple nonconforming quadrilateral Stokes Element. In: *Numer. Meth. PDEs* 8 (1992), Nr. 2, S. 97–111
- [45] SAMAREH-ABOLHASSANI, J. ; STEWART, J. E.: Surface Grid Generation in a Parameter Space. In: *Journal of Computational Physics* 113 (1994), Juli, Nr. 1, S. 112–121
- [46] SCHMACHTEL, R.: *Robuste lineare und nichtlineare Lösungsverfahren für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen*, Universität Dortmund, Diss., 2003
- [47] SCHREIBER, P.: *A new finite element solver for the nonstationary incompressible Navier-Stokes equations in three dimensions*, Universität Heidelberg, Diss., 1996
- [48] SHEFFER, Alla: Spanning Tree Seams for Reducing Parameterization Distortion of Triangulated Surfaces (figures 4, 5, and 6). In: *SMI '02: Proceedings of the Shape Modeling International 2002 (SMI'02)*. Washington, DC, USA : IEEE Computer Society, 2002. – ISBN 0–7695–1546–0, S. 272
- [49] SHEWCHUK, Jonathan R.: Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. In: LIN, Ming C. (Hrsg.) ; MANOCHA, Dinesh (Hrsg.): *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering* Bd. 1148. Springer-Verlag, 1996, S. 203–222
- [50] SHEWCHUK, Richard Jonathan: Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation / University of California at Berkeley. 1999. – Forschungsbericht
- [51] SINTEF ICT: *Sintef Spline Library*. http://www.sintef.no/math_software, 2005
- [52] SQUILLACOTE, Amy: *The Paraview Guide*. Kitware, Inc., 2008
- [53] STOER ; BULIRSCH: *Einführung in die Numerische Mathematik II*. Springer-Verlag, 1973
- [54] TRISTANO, Joseph R. ; OWEN, Steven J. ; CANANN, Scott A.: Advancing Front Surface Mesh Generation in Parametric Space Using a Riemannian Surface Definition. In: *7th International Meshing Roundtable*, 1998, S. 429–445

- [55] TUREK, S. ; WAN, D. ; RIVKIND, L.: The fictitious boundary method for the implicit treatment of Dirichlet boundary conditions with applications to incompressible flow simulations / Fakultät für Mathematik, TU Dortmund. 2003. – Forschungsbericht. – Ergebnisberichte des Instituts für Angewandte Mathematik, Nummer 236
- [56] TUREK, Stefan: *Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems*. Springer-Verlag, 1999
- [57] U. S. PRO: *IGES 5.2 An American National Standard*. U. S. Product Data Association, 1993
- [58] WIKIMEDIA COMMONS: *Main Page — Wikimedia Commons*. <http://commons.wikimedia.org>, 2010
- [59] YANENKO, Nicolas N.: *The Method of Fractional Steps*. Springer-Verlag, 1971