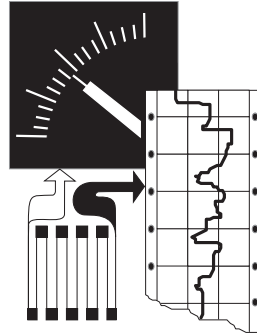


Höchstaflösender Drucksensor zur Leckagemessung pneumatischer Systeme



Von der Fakultät Maschinenbau
der Technischen Universität Dortmund
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Christof Dropalla

aus Strzelce Opolskie, Polen

Referent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Mathias Uhle
Korreferent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer
Tag der Einreichung: 15.03.2010
Tag der mündlichen Prüfung: 02.06.2010

2010

Danksagung

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Messtechnik der Technischen Universität Dortmund. Allen, die hierzu beigetragen haben, gilt mein persönlicher Dank.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Mathias Uhle, dem Leiter des Fachgebiets Messtechnik, der mich vom Beginn meiner Berufsausbildung an, über mein Studium bis zum Abschluss dieser Arbeit gefördert und unterstützt hat. Bereits in der Ausbildung wies er mir die Richtung für den Weg, den ich bis hierhin gegangen bin. Zudem danke ich ihm für den mir gewährten Freiraum, um mich mit seiner Unterstützung sowohl fachlich als auch persönlich weiterentwickeln zu können und für die geduldige, fachliche und menschliche Begleitung meiner wissenschaftlichen Tätigkeit bis hin zur Übernahme des Hauptreferats.

Dem Leiter des Fachgebiets Fluidtechnik, Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer, gilt mein Dank für sein Interesse an dieser Arbeit, die kritische Durchsicht und die Übernahme des Korreferats.

Herrn Wilhelm Cleves, der mich ebenfalls vom Beginn meiner Berufsausbildung bis zum Abschluss dieser Arbeit begleitet hat, danke ich für die Herstellung der elektronischen Komponenten, die vielen persönlichen Gespräche, die in schwierigen Phasen aufmunternden Worte und die gewissenhafte Durchsicht des Textes.

Dem Leiter der Zentralwerkstatt, Herrn Karl-Heinz Schübbe und seinen Mitarbeitern, danke ich für die Herstellung der mechanischen Komponenten. Nicht zuletzt bedanke ich mich bei den Studenten Patrick Wieland, Sebastian Pielken, Markus Grafen, Eugen Groh und David Amend für die vielfältige Unterstützung, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Abschließend danke ich meiner Familie, insbesondere meiner Ehefrau Johanna für die aufgebrachte Unterstützung, Geduld und Nachsicht, gerade in der Endphase dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Druckmessung	3
2.1	Druck	3
2.2	Messverfahren zur Druckbestimmung	4
2.2.1	Unmittelbar messende Sensoren	5
2.2.2	Mittelbar messende Sensoren	6
2.2.3	Vergleich und Wertung der Messverfahren	8
3	Leckageratemessung	11
3.1	Leckagerate	11
3.2	Messverfahren	12
4	Sensorkonzept	16
4.1	Mechanisches Konzept	17
4.2	Elektrisches Konzept	19
5	Mechanischer Sensorteil	20
5.1	Sensor-Aufbau	20
5.2	Druckaufnehmende Platte	24
5.2.1	Verformung mit kleiner Durchbiegung	25
5.2.2	Verformung mit großer Durchbiegung	30
5.2.3	Bestimmung der Plattenbeanspruchung	40
5.3	Temperatureinfluss	44
5.4	Schlussfolgerung zum mechanischen Sensorteil	45
6	Elektrischer Sensorteil	47
6.1	Oszillator	47
6.1.1	Oszillator-Schaltung	47
6.1.2	Schlussfolgerung zum Oszillator	57
6.2	Rauschverhalten	57
6.2.1	Elektronisches Rauschen	57
6.2.2	Oszillatorrauschen	58
6.2.3	Abschätzung des Phasenrauschens	61
6.2.4	Schlussfolgerung zum Rauschverhalten	70

6.3	Frequenzmessung	70
6.3.1	Messverfahren	71
6.3.2	Betrachtungen der Messgenauigkeit	74
6.3.3	Schlussfolgerung zur Frequenzmessung	77
6.4	Direkte Kapazität zu Digitalwert Umsetzung	78
6.4.1	Delta-Sigma-Umsetzer	78
6.4.2	C/D-Umsetzer	79
6.4.3	Technische Umsetzung des Sensorelements	80
6.5	Das Sensorelement: Kondensator	82
6.5.1	Der Kondensator	82
6.5.2	Berechnung der Kapazitäten	87
6.5.3	Schlussfolgerung zum Kondensator	103
6.6	Umgebungseinflüsse	104
6.7	Schlussfolgerung zum elektrischen Sensorteil	104
7	Aufbau der Prototypen	107
7.1	Aufbau der Oszillator-Schaltung	107
7.1.1	Aufbau des C/D-Umsetzers	109
7.2	Aufbau des Sensors	109
8	Messergebnisse der Sensor-Prototypen	112
8.1	Ermittlung des Sensor-Auflösevermögens	112
8.2	Messergebnisse	118
8.2.1	Lang- und Kurzzeitstabilität der Sensor-Prototypen	118
8.2.2	Druckverhalten der Sensor-Prototypen	122
8.3	Schlussfolgerung der Messergebnisse	132
9	Ausblick	133
10	Zusammenfassung	134
11	Abstract	136
A	Vergleich der relativen Größenänderungen	137
B	Konstantenbestimmung der Plattendgl.	139
B.1	Konstanten für linearen Fall	139
B.2	Konstanten für Reihenansatz	141
B.3	Konstanten für Näherungsansatz	143
B.3.1	Methode der Fehlerorthogonalisierung	143
B.3.2	Methode der virtuellen Verschiebung	144
C	Konstantenbestimmung der Potentialfkt.	146
C.1	Konstanten für Aufbau 1 im Bereich I	146
C.2	Konstanten für Aufbau 2 im Bereich I	151

C.3	Konstanten für Aufbau 2 im Bereich II	153
C.4	Ideale Kapazität von Aufbau 2 im Bereich II	154
C.4.1	Gerade Messelektrode	154
C.4.2	Angepasste Messelektrode	155
C.5	Gewichtungsfunktion des Phasenspektrums	158
Literaturverzeichnis		167

Abbildungsverzeichnis

3.1	Druckabfall	13
3.2	Druckabfall-Messung mittels eines Relativdrucksensors	13
3.3	Befüllung eines Prüflings zur Druckabfall-Messung mittels eines Differenzdrucksensors	13
3.4	Druckabfall-Messung mittels eines Differenzdrucksensors	14
4.1	Messkette einer Messeinrichtung	16
4.2	Messkette des vorgestellten Sensors	17
4.3	Schematischer Aufbau des Sensors (Aufbau 1)	18
4.4	Schematischer Aufbau des Sensors (Aufbau 2)	18
5.1	Schnittdarstellung des Sensoraufbaus 1	21
5.2	Ausschnitt aus der Schnittdarstellung des Sensoraufbaus 1	22
5.3	Schnittdarstellung des Sensoraufbaus 2	23
5.4	Kreisplatte in Zylinderkoordinaten	24
5.5	Schnittgrößen einer Platte in Zylinderkoordinaten	25
5.6	Normierter Verlauf der Plattenverformung in Abhängigkeit von ζ , c_D	28
5.7	Normierte Dehnungen an der Plattenoberfläche ($z = \frac{h}{2}$) in Abhängigkeit von ζ , c_D	29
5.8	Normierte Spannungen an der Plattenoberfläche ($z = \frac{h}{2}$) in Abhängigkeit von ζ , c_D	29
5.9	Normierte Auslenkung der Plattenmitte in Abhängigkeit einer normierten Belastung	40
5.10	Normierte Spannungen der Plattenoberfläche ($z = \frac{h}{2}$) in Abhängigkeit einer normierten Belastung	42
5.11	Vergleichsspannungen der eingespannten Platte	43
5.12	Vergleichsspannungen der elastisch eingespannten Platte	43
5.13	Vergleichsspannungen der momentfrei gelagerten Platte	44
6.1	Schematische Darstellung eines verlustbehafteten LC-Schwingkreises	48
6.2	Prinzipielle Schaltung des eingesetzten Franklin-Oszillators	51
6.3	Wechselspannungsmäßige Betrachtung des aktiven Schaltungsteils des Franklin-Oszillators	51
6.4	Wechselspannungsersatzschaltbild eines Feldeffekttransistors	52
6.5	Wechselspannungsersatzschaltbild zur Analyse der Verstärkerschaltung des Franklin-Oszillators	52

6.6	Resultierendes Ersatzschaltbild der Verstärkerschaltung des Franklin-Oszillators	53
6.7	Resultierendes Ersatzschaltbild des Franklin-Oszillators	54
6.8	Gesamtreaktanz der Verstärkerschaltung des untersuchten Franklin-Oszillators	56
6.9	Gesamtkapazität der Verstärkerschaltung des untersuchten Franklin-Oszillators	56
6.10	Gesamtsteilheit der Verstärkerschaltung des untersuchten Franklin-Oszillators	56
6.11	Zeitlicher Verlauf einer Oszillatorspannung	59
6.12	Spektrum einer Oszillatorspannung	60
6.13	Zeigerdarstellung von Signal-, Rausch-, und resultierender Spannung .	61
6.14	Ersatzschaltbild des Oszillators zur Beschreibung des Phasenrauschens	62
6.15	Phasenrauschspektrum zur Abschätzung der Frequenzschwankungen .	67
6.16	Entstehung des Zählimpulsfehlers	73
6.17	Vernier-Methode	73
6.18	Relativer Messfehler bei der Schwebungsfrequenzmessung in Abhängigkeit von der Torzeit und dem Verhältnis der Schwebungsfrequenz zur Messfrequenz	77
6.19	Blockschaltbild eines Delta-Sigma-Modulators erster Ordnung	78
6.20	Technische Realisierung eines Delta-Sigma-Umsetzers erster Ordnung	79
6.21	Technische Realisierung eines C/D-Umsetzers erster Ordnung	80
6.22	Kondensator	82
6.23	Plattenkondensator unter Vernachlässigung der Randeffekte	84
6.24	Zweidimensionaler Verlauf des elektrischen Potentials mit Linien konstanten Potentials eines Plattenkondensators	86
6.25	Zweidimensionaler Verlauf von Linien konstanten Potentials und Stromlinien des elektrischen Feldes eines Plattenkondensators	86
6.26	Angenäherter Aufbau 1 zur Untersuchung der Messkapazität	87
6.27	Angenäherte Elektrodenanordnung des Messkondensators für Aufbau 1	88
6.28	Bereich I des Aufbaus 1 der angenäherten Elektrodenanordnung des Messkondensators	90
6.29	Bereich II des Aufbaus 1 der angenäherten Elektrodenanordnung des Messkondensators	93
6.30	Verlauf der Kapazität von Aufbau 1 in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{1,0}$	95
6.31	Verlauf der Kapazitätsdifferenzen von Aufbau 1 in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{1,0}$	96
6.32	Angenäherter Aufbau 2 zur Untersuchung der Messkapazität	97
6.33	Angenäherte Elektrodenanordnung des Messkondensators für Aufbau 2	97
6.34	Bereich I des Aufbaus 2 der angenäherten Elektrodenanordnung des Messkondensators	98
6.35	Bereich II des Aufbaus 2 der angenäherten Elektrodenanordnung des Messkondensators	99

6.36	Verlauf der Kapazität von Aufbau 2 in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{2,0}$	100
6.37	Verlauf der Kapazitätsdifferenz von Aufbau 2 in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{2,0}$	101
6.38	Angenäherte Elektrodenanordnung des Messkondensators für Aufbau 2, Messelektrode optimal angepasst an Masselektrode	101
6.39	Angenäherte Elektrodenanordnung des Messkondensators für Aufbau 2 mit einfach angepasster Messelektrode	102
6.40	Verlauf der Kapazität von Aufbau 2 in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand der unterschiedlichen Messelektroden	102
6.41	Verlauf der angepassten Messelektroden (unterer Rand)	103
7.1	Platine der Oszillatorschaltung	108
7.2	Platine zur Auswertung des Sensorelements durch das IC <i>AD7747</i>	109
7.3	Aufbau 1 des Sensors mit Deckel	110
7.4	Aufbau 1 des Sensors ohne Deckel und Führungsmembran	110
7.5	Aufbau 2 des Sensors mit Deckel	111
7.6	Aufbau 2 des Sensors ohne Deckel	111
8.1	Schematischer Aufbau des Druckmodulators zur Erzeugung kleiner Druckänderungen	112
8.2	Modell des Druckmodulators zur Erzeugung kleiner Druckänderungen	113
8.3	Gemessener und gerechneter Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A zum Nachweis der Funktionalität des Druckmodulators	117
8.4	Gemessene Allan-Varianz bei $m = 50$ in Abhängigkeit der Messzeit T_a	119
8.5	Gemessene Langzeitstabilität in Form einer relativen Abweichung der Auslenkung der Plattenmitte	120
8.6	Gemessene Temperatur (Mittelwerte aus je 32 Messwerten)	120
8.7	Mittels eines induktiven Wegaufnehmers gemessene und aus den gemessenen Frequenzen der Oszillatoren 1 und 2 berechnete Auslenkung der Plattenmitte bei Aufprägung einer dreieckförmigen Druckbelastung, Aufbau 1	122
8.8	Auslenkung der Plattenmitte in Abhängigkeit vom Differenzdruck gegen Atmosphäre, Aufbau 1	123
8.9	Auslenkung der Plattenmitte in Abhängigkeit vom Differenzdruck gegen Atmosphäre, Aufbau 1	123
8.10	Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 100 Pa, Aufbau 1	124
8.11	Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 100 Pa: Ausschnitt, Aufbau 1	124
8.12	Auslenkung der Plattenmitte bei aufgeprägten Druckstufen von ca. 3 Pa, Aufbau 1	125

8.13	Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 3 Pa: Ausschnitt, Aufbau 1	125
8.14	Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 3 Pa, Aufbau 1 Ausschnitt zur Beurteilung des Sensorauflösevermögens	126
8.15	Mittels eines induktiven Wegaufnehmers gemessene, aus der gemessenen Frequenz des Oszillators und den Werten des CDUs berechnete Auslenkung der Plattenmitte bei Aufprägung einer dreieckförmigen Druckbelastung, Aufbau 2	127
8.16	Auslenkung der Plattenmitte in Abhängigkeit vom Differenzdruck gegen Atmosphäre, Aufbau 2	128
8.17	Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 100 Pa, Aufbau 2	128
8.18	Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 3 Pa, Aufbau 2	129
8.19	Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 3 Pa: Ausschnitt, Aufbau 2	130
8.20	Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 3 Pa, Aufbau 2 Ausschnitt zur Beurteilung des Sensorauflösevermögens	130
8.21	Vergleich der relativen Frequenzänderung bei Aufprägung einer dreieckförmigen Druckbelastung von $0,5 \cdot 10^5$ Pa . . . $8 \cdot 10^5$ Pa Differenzdruck gegen Atmosphäre	131
8.22	Vergleich der Frequenzänderung bei Aufprägung von Druckänderungen von 100 Pa	132

Tabellenverzeichnis

5.1	Vergleich des Faktors γ zur Anpassung des Verlaufs der Plattenverformung mit Werten aus der Literatur	39
6.1	Bauelementwerte der untersuchten Oszillatorschaltung	55
6.2	Bauelement- und Rauschwerte zur Abschätzung des Phasenrauschspektrums des verwendeten Oszillators	68
6.3	Geometrische Abmessungen zur mathematischen Bestimmung der Messkapazität des Aufbaus 1	94
6.4	Geometrische Abmessungen zur mathematischen Bestimmung der Messkapazität des Aufbaus 2	100
8.1	Daten des verwendeten Druckmodulators	116

Verzeichnis der verwendeten Symbole, Abkürzungen und Definitionen

Abkürzungen

ADU	Analog-Digital-Umsetzer
CDU	Kapazität-Digital-Umsetzer
DMS	Dehnungsmessstreifen
FDM	Finite-Differenzen-Methode
FEM	Finite-Elemente-Methode
FFT	Fast-Fourier-Transformation
HBM	Hottinger Baldwin Messtechnik
MELF	Metal Electrode Leadless Faces
OFW	Oberflächenwellen
PMMA	Polymethylmethacrylat
PVC	Polyvinylchlorid
SI	Système International d'unités
SMD	Surface Mounted Device

Lateinische Symbole

<i>A</i>	Fläche	[m ²]
<i>C</i>	Kondensator	[As V ⁻¹]
<i>c_D</i>	Drehfedersteifigkeit	[N]
<i>D</i>	Elektrische Flussdichte	[As m ⁻²]
<i>E</i>	E-Modul	[N m ⁻²]
<i>E</i>	Erwartungswert	[–]

E	Elektrische Feldstärke	$[\text{V m}^{-1}]$
F	Kraft	$[\text{N}]$
f	Frequenz	$[\text{s}^{-1}]$
G	Konduktanz	$[\text{A V}^{-1}]$
h	Plattenhöhe	$[\text{m}]$
I	Strom	$[\text{A}]$
K	Biegesteifigkeit	$[\text{Nm}]$
k	Boltzmann-Konstante	$[\text{J K}^{-1}]$
$A_{1\dots n}, B_{1\dots n}, \dots, Z_{1\dots n}$	Konstanten	$[\]$
L	Spule	$[\text{Vs A}^{-1}]$
l	Länge	$[\text{m}]$
m	Masse	$[\text{kg}]$
m	Biegemoment	$[\text{N}]$
n	Membranspannung	$[\text{N m}^{-1}]$
n	Zählimpuls	$[-]$
p	Druck	$[\text{Pa}]$
p_0	Druck gegen den gemessen wird	$[\text{Pa}]$
p_A	Arbeitsdruck	$[\text{Pa}]$
p_{atm}	Luftdruck der Atmosphäre	$[\text{Pa}]$
p_{mess}	Gemessener Druck	$[\text{Pa}]$
p_n	Normdruck	$[\text{Pa}]$
q_L	Leckagerate	$[\text{Pa m}^3 \text{s}^{-1}]$
q	Querkraft	$[\text{N m}^{-1}]$
q_V	Volumenstrom	$[\text{m}^3 \text{s}^{-1}]$
Q	Güte	$[-]$
Q	Elektrische Ladung	$[\text{As}]$
R	Plattenradius	$[\text{m}]$
$R_{\phi\phi}$	Autokorrelationsfunktion der Phase	$[\text{rad}^2]$
R_s	Spezifische Gaskonstante	$[\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}]$
R	Widerstand	$[\text{V A}^{-1}]$
S	Steilheit	$[\text{A V}^{-1}]$
S	Zweiseitiges Leistungsdichtespektrum	$[-]$
t	Zeit	$[\text{s}]$
T	Temperatur	$[\text{K}]$

T_n	Normtemperatur	[K]
T	Transistor	[–]
T	Periodendauer	[s]
u	Verschiebung der Plattenmittelfläche	[m]
U	Spannung	[V]
V	Volumen	[m ³]
w	Plattenauslenkung	[m]
W	Formänderungsenergie	[Nm]
W	Einseitiges Leistungsdichtespektrum	[–]
$W_{r,\phi}$	Einseitiges Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens	[rad ² Hz ⁻¹]
r, x, y, z	Koordinate	[m]
Y	Admittanz	[A V ⁻¹]
Z	Impedanz	[V A ⁻¹]

Griechische Symbole

α_{St}	Ausdehnungskoeffizient von Stahl	[K ⁻¹]
Δ	Änderung	[–]
ε	Dehnung	[–]
ρ	Dichte	[kg m ⁻³]
ν	Querkontraktionszahl	[–]
ω	Kreisfrequenz	[rad s ⁻¹]
φ	Koordinate	[rad]
φ	Elektrisches Potential	[V]
ϕ	Phasenwinkel	[rad]
Φ	Airysche Spannungsfunktion	[N]
Π	Elastisches Gesamtpotential	[Nm]
σ	Biegespannung	[N m ⁻²]
$\sigma_{\Delta\phi}^2$	Schwankungsquadrat der Phase	[rad ²]

Definitionen

$\alpha_w = \frac{5+\nu+c_D}{1+\nu+c_D} \frac{R}{K}$	Konstante zur Beschreibung der Plattenverformung	[-]
$H = \frac{h}{R}$	Normierte Plattenhöhe	[-]
$Q = \frac{p}{E}$	Normierter Druck	[-]
$S_{\varphi\varphi} = \frac{n_{\varphi\varphi}}{E h}$	Normierte tangentielle Membranspannung	[-]
$S_{rr} = \frac{n_{rr}}{E h}$	Normierte radiale Membranspannung	[-]
$w_B = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K}$	Verformung der Plattenmitte bei Einspannung	[m]
$\Theta R = \frac{dw}{dr}$	Plattenneigung	[-]
$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$	Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten	[m ⁻²]
$\Delta w_{0,\text{relativ}} = \frac{w_0 - \bar{w}_0}{\Delta w_{0,\text{max}}}$	Relative Auslenkung der Plattenmitte	[-]
$\Delta f_{\text{relativ}} = \frac{f_{\text{unbelastet}} - f}{f_{\text{unbelastet}}}$	Relative Frequenzänderung	[-]
$\varepsilon_B = \frac{3 R^2}{8 h^2} \frac{p}{E} \cdot (1 - \nu^2)$	Dehnung an der Plattenoberfläche ($z = \frac{h}{2}$), der Plattenmitte bei Einspannung	[-]
$\sigma_B = \frac{3 R^2}{8 h^2} p (1 + \nu)$	Spannung an der Plattenoberfläche ($z = \frac{h}{2}$), der Plattenmitte bei Einspannung	[N m ⁻²]
$\zeta = \frac{r}{R}$	Dimensionslose Koordinate	[-]

Idizes

C0	Schwingkreiskapazität
C1	Vollständiger Oszillator
D	Drain-Anschluss
DG	Drain zu Gate
DS	Drain zu Source
1/f,o	Obere Knickfrequenz des 1/f-Rauschens
1/f,u	Untere Knickfrequenz des 1/f-Rauschens
G	Gate-Anschluss
GS	Gate zu Source
im	Imaginärteil
in	Eingang
L0	Schwingkreisinduktivität
a	Außen
B	Biegemomente

D	Einspannung
h	Homogene Lösung
i	Innen
M	Membrankräfte
p	Partikuläre Lösung
$\varphi\varphi$	In tangentialer Richtung
rr	In radialer Richtung
out	Ausgang
ϕ	Phasenrauschen
r	Rauschanteil
re	Realteil
S	Source-Anschluss
s	Signalanteil
s	Schwingfrequenz
Tor	Torzeit
U	Amplitudenrauschen
V	Verstärker
VS	Verstärkerschaltung
0, 1, 2, ...	Fortlaufende Nummerierung

Kapitel 1

Einleitung

Die Verbindung zwischen den physikalischen Größen der Umwelt und der Informationsverarbeitung mittels elektronischer Geräte wird durch Sensoren hergestellt. Die Auswertung der Sensordaten erfolgt heutzutage digital unter Zuhilfenahme von Rechnern.

In der Industrie findet die Prüfung der Dichtigkeit diverser Geräte und Bauteile wie Kühlschränke, Gas- und Flüssigkeitsbehälter und Spezialteile häufigen Einsatz.

Eine der Vorgehensweisen zur Prüfung von Drucksystemen auf Leckagen besteht darin, dem Prüfling einen definierten Prüfdruck aufzuprägen, der im leckagefreien Fall und unter Vernachlässigung von Temperaturänderungen konstant bleibt. Weist der Prüfling eine Leckage auf, so kann das aufgeprägte Fluid entweichen und der Druck sinkt. Zur Messung dieses Druckabfalls werden meist Differenzdrucksensoren eingesetzt. Diese verfügen über zwei Anschlüsse zur Druckaufprägung und messen die Differenz der beiden eingepprägten Drücke. Einer der beiden Anschlüsse des Differenzdrucksensors wird ebenfalls mit dem Prüfdruck, der dem Prüfling zu Beginn der Messung eingepprägt wird, beaufschlagt und bleibt konstant, während der andere Anschluss mit dem Druck des Prüflings beaufschlagt wird. Die Messung des Druckabfalls im Prüfling erfolgt somit durch die Messung der Differenz zwischen dem eingepprägten Prüfdruck und dem abfallenden Druck des Prüflings. Geringe Leckagen sind mit einem Druckabfall verbunden, der um Größenordnungen geringer als der eingepprägte Prüfdruck ist. Deshalb wird der zu verwendende Differenzdrucksensor so ausgelegt, dass der geringe Druckabfall in der Größenordnung des Messbereichs liegt. Eine versehentliche Fehlbedienung, bei der der Sensor beispielsweise mit dem eingepprägten Prüfdruck gegen Atmosphärendruck beaufschlagt wird, kann je nach Bauart zur Zerstörung des Differenzdrucksensors führen. Dieses Problem tritt bei einem Relativ- bzw. Absolutdrucksensor nicht auf, da dieser mindestens für den einzupprägenden Prüfdruck ausgelegt sein sollte.

Die Verwendung eines Relativ- bzw. Absolutdrucksensors für die Leckageprüfung setzt voraus, dass der geringe Druckabfall, der durch die Leckage hervorgerufen wird, von dem Sensor aufgelöst werden kann. Soll eine üblicherweise kurze Messzeit eingehalten werden, so liegt die Auflösung des Drucks für Leckageratemessungen, wie in Kapitel 3 beschrieben, im Bereich von 1 Pa. Diese Druckauflösung entspricht bei einem Messbereich von 0 – 1 MPa Differenzdruck gegen Atmosphäre einer Aufteilung des Messbereichs in 10^6 Stufen.

Dadurch motiviert ist die Untersuchung von Druckmessverfahren, deren Auflösungsvermögen eine Aussage über Leckagen der genannten Größenordnung erlaubt, Gegenstand dieser Arbeit. Dabei gilt das Ziel, mit einem Sensor-Prototyp eine relative Auflösung des Drucks in der Größenordnung von 10^{-6} zu erreichen. Die absolute Genauigkeit des Prototyps ist dabei zweitrangig. Ferner liegt der Messbereich des Sensor-Prototyps bei 0 – 1 MPa Differenzdruck gegen Atmosphäre. Eine weitere Anforderung ist die kostengünstige Realisierung. Ein solch hochauflösender Sensor bietet sich für Dichtheitsprüfungen an, bei denen eine geringe Druckänderung in kurzer Zeit zu detektieren ist und überall dort, wo eine entsprechend hohe Auflösung des Drucks nötig ist.

Die Realisierung einer solchen Auflösung fordert zum einen, dass der Sensor sowohl elektrisch als auch mechanisch hinreichend stabil ist und zum anderen, die Darstellbarkeit des elektrischen Ausgangssignals. Die Darstellung des Messsignals kann bei der angestrebten Auflösung lediglich digital erfolgen, was bedeutet, dass der Sensor eine Digitalisierung des Messwerts vorzunehmen hat.

Die diversen Messverfahren zur Druckbestimmung, deren Vergleich und Wertung sind Teil des Kapitels 2. Sowohl die Definition der Leckagerate als auch ein Überblick der Messverfahren wird in Kapitel 3 gegeben. Das mechanische und elektrische Konzept wird in Kapitel 4 beschrieben, wobei die genauere Analyse des mechanischen Teils in Kapitel 5 und die des elektrischen Teils in Kapitel 6 erfolgt. Abschließend wird der Aufbau im Kapitel 7 dargestellt und das Verhalten des Sensor-Prototyps und dessen Funktionalität mit Hilfe von Messergebnissen in Kapitel 8 nachgewiesen.

Kapitel 2

Druckmessung

Eine der wichtigsten Zustandsgrößen von Fluiden ist neben Temperatur und Volumen der Druck [1]. Zur Messung der Zustandsgröße Druck sind in der Literatur diverse Verfahren zu finden [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Dabei können die Messverfahren in zwei Kategorien unterteilt werden. In der einen Kategorie wird die Messgröße Druck durch unmittelbar bzw. direkt messende Verfahren erfasst, während sie in der anderen Kategorie durch mittelbar bzw. indirekt messende Verfahren erfasst wird. Die meisten Drucksensoren basieren auf einem indirekt messenden Verfahren, wobei dann die Messgröße Druck über eine weitere physikalische Größe, wie z.B. mechanische Dehnung oder Wegänderung, bestimmt wird.

2.1 Druck

Betrachtet man ein geschlossenes System, welches mit einem Fluid gefüllt ist, so sind dessen Moleküle fortwährend in Bewegung ($T > 0$ K). Die sich bewegenden Moleküle stoßen an die umgebende Wand des Systems, was zu einer Impulsübertragung führt und letztlich in einer Kraft auf die Wand resultiert. Die physikalische Größe *Druck* beschreibt diese resultierende Kraft auf das umgebende Gefäß. Der Druck p ist definiert als eine Kraft F , die senkrecht auf eine Fläche A wirkt [2, 3, 4]. Diese Definition gilt für differentielle Kräfte und Flächen.

$$p = \frac{dF}{dA} \quad (2.1)$$

Praktisch kann nur ein mittlerer Druck aufgrund der Wirkung einer Gesamtkraft F auf eine endliche Fläche A messtechnisch erfasst werden.

$$\bar{p} = \frac{F}{A} \quad (2.2)$$

Dieser Definition und dem Système International d'unités (SI) entsprechend, lautet die Einheit des Drucks [$1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa}$]. In der Technik ist die Einheit [$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$] gebräuchlicher, auf die hier im weiteren Verlauf verzichtet wird, da sie nicht den SI-Einheiten angehört.

Bei der Messung eines Drucks sind grundsätzlich zwei Messarten zu unterscheiden. Abhängig von der Funktionsweise des verwendeten Drucksensors ist entweder eine Absolutdruckmessung und/oder eine Differenzdruckmessung möglich. Dabei ist der

gemessene Druck allgemein durch $p_{\text{mess}} = p - p_0$ beschrieben. Bei einer Absolutdruckmessung gilt $p_0 = 0$, also Vakuum. Im Gegensatz dazu kann im Fall der Differenzdruckmessung p_0 einen beliebigen Wert annehmen, wobei der spezielle Fall mit $p_0 = p_{\text{atm}}$, also Atmosphärendruck, häufigen Einsatz findet. Nachfolgend werden alle Druckwerte als Differenzdruck gegen Atmosphäre angegeben, es sei denn, dass es gesondert gekennzeichnet ist. Dabei wird der Druck der Atmosphäre vereinfacht zu $p_{\text{atm}} \approx 100 \text{ kPa}$ gesetzt.

2.2 Messverfahren zur Druckbestimmung

Unterschiedlichste Anforderungen bei der Druckmessung erfordern eine entsprechende Messtechnik, die wiederum mit unterschiedlichen Wirkungsprinzipien realisiert werden kann. Der Messbereich von Drucksensoren kann sich von wenigen Pascal bis zu einigen Hundert Mega Pascal erstrecken, wobei entscheidende Kriterien für die Auswahl z.B. die geforderte Auflösung, die Genauigkeit oder der Temperaturbereich sind.

Für eine Messung des Luftdrucks beispielsweise in einem Fahrzeugreifen sind die Anforderungen üblicherweise nicht hoch, weshalb dieser problemlos mit einem mechanischen Manometer erfasst werden kann. In den meisten Fällen wird auf eine Protokollierung des Reifenluftdrucks kein Wert gelegt. Anders sieht es in einem technischen Fertigungsprozess oder im Laborbetrieb aus. Hier werden unter Umständen hohe Anforderungen an die Auflösung und Genauigkeit des Drucksensors gestellt und eventuell wird auch eine Protokollierung der Messwerte benötigt. Die geforderte Genauigkeit könnte mit einem mechanischen Manometer erreicht werden, allerdings ist die Auflösung durch die Ablesegenauigkeit des Messinstruments und somit von der ablesenden Person bestimmt. Der zu messende Druck kann meist nur vor Ort erfasst und von Hand protokolliert werden.

Heutzutage besteht ein gewisses Interesse daran, die Messwerte aufgrund von Qualitätskontrollen automatisch zu protokollieren und eventuell zur Steuerung und Regelung eines Prozesses weiterzunutzen. Da dies nur elektronisch sinnvoll lösbar ist, wird auf mechanische Manometer nicht weiter eingegangen.

Elektronische Manometer werden in die beiden Kategorien der unmittelbar messenden und der mittelbar messenden Sensoren unterteilt. Unmittelbar messende Sensoren erfassen eine Veränderung der Eigenschaften des Sensorelements, welche durch den einwirkenden Druck hervorgerufen wird. Sensoren, die mittelbar einen Druck messen, weisen zunächst eine Umformung des Drucks in eine andere physikalische Größe wie z.B. eine Dehnung oder Wegänderung auf, die von einem Sensorelement erfasst wird [2, 3, 4].

Nachfolgend wird eine Auswahl der Mechanismen bzw. Eigenschaften von Sensorelementen aufgezeigt, die eine Druckabhängigkeit aufweisen. Wie diese Druckabhängigkeit auszuwerten ist, wird hier lediglich verkürzt dargestellt, da meist verschiedene

Möglichkeiten zur Auswertung einer entsprechenden Eigenschaft des Sensorelements bestehen.

2.2.1 Unmittelbar messende Sensoren

Sensoren, die der Kategorie der unmittelbar messenden Manometer angehören, können mit nachfolgenden Sensorelementen realisiert werden [3, 4].

Schwingquarz [3] Ein Quarzkristall kann durch ein elektrisches Wechselfeld zu Schwingungen mit der Eigenfrequenz angeregt werden. Die Eigen- bzw. Resonanzfrequenz ist dabei von der Geometrie des Quarzes abhängig. Durch die Aufprägung eines Drucks, der den Quarzkristall umgibt, wird das Kristallgefüge verändert, was in einer Verschiebung der Resonanzfrequenz des Schwingquarzes resultiert.

Widerstands-Druckaufnehmer (Widerstandsmanometer) [2, 4, 8] Das Wirkungsprinzip beruht auf der Änderung des elektrischen Widerstands von Metallen unter der Aufprägung von allseitigem Druck. Viele Metalle weisen einen negativen Druckkoeffizienten auf. Einen vergleichsweise hohen und positiven Druckkoeffizienten weisen Manganin-Legierungen auf. Zusätzlich ist der Temperaturkoeffizient von Manganin niedrig, was es für die Druckmessung interessant macht. Der Druckkoeffizient liegt im Bereich von $1...3 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\text{Pa}}$. Da der Druckkoeffizient sehr niedrig ist, wird das Prinzip des Widerstandsmanometers in Druckbereichen oberhalb von 100 MPa Differenzdruck gegen Atmosphäre eingesetzt.

Druckempfindliche Halbleiter-Bauelemente [2] Halbleiter-Bauelemente wie beispielsweise Transistoren (Pitrons) oder Tunnelioden können für den Gebrauch als Sensorelemente eingesetzt werden. Das Gefüge der Sperrschichten in Halbleiter-Bauelementen wird durch Aufprägung eines Drucks verändert, was zu einer Änderung des Stromflusses führt. Eine weitere Möglichkeit stellen Photowiderstände dar. Wenn Sie beleuchtet werden, führt die Einwirkung eines Drucks zu einer Veränderung des elektrischen Widerstands.

Oberflächenwellenfilter (OFW-Filter) Sowohl die Erzeugung als auch die Aufnahme von akustischen Oberflächenwellen (OFW) kann mit OFW-Filtern realisiert werden. Die Basis für den Aufbau eines OFW-Filters bilden piezoelektrische Materialien, da sie, wie das Beispiel des Schwingquarzes zeigt, durch ein elektrisches Feld verformt werden.

Ein OFW-Filter besteht aus zwei Kämmen, die auf einem piezoelektrischen Material aufgebracht sind. Dabei werden die Kämmen so angeordnet, dass die Zinken ineinandergreifen. Der geometrische Aufbau dieser planaren Elektrodenstruktur bestimmt die Mittenfrequenz des Filters. Ein das Filter umgebender Druck verändert die Dämpfung desselben und führt somit zu einer druckabhängigen Übertragungsfunktion im Frequenzbereich [9].

2.2.2 Mittelbar messende Sensoren

Eine häufigere Anwendung finden die mittelbar messenden Sensoren, da das Sensorelement bei diesen Sensortypen nicht mit dem beteiligten Fluid in Verbindung kommt. Sie lassen sich durch nachfolgende Sensorelemente [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] realisieren.

Sensoren mit Dehnungsmessstreifen (DMS) [2, 3, 4] Ein DMS ist eine auf Folie aufgebrachte mäanderförmige Anordnung eines metallischen Widerstandsdrahts, die in Dünn- oder Dickschichtausführung gefertigt werden. Eine Dehnung bzw. Stauchung des DMS führt zu einer Widerstandserhöhung bzw. -verringerung, die vorzugsweise mit einer Wheatstoneschen-Messbrücke (Vollbrücke) ausgewertet wird. Die DMS können zur Messung beispielsweise durch Kleben, Löten oder Aufdampfen auf das Messobjekt aufgebracht werden und erfahren somit idealerweise dieselben Verformungen wie das Messobjekt.

Piezoresistive Sensoren [2, 3, 6] Sensoren, die nach dem piezoresistiven Prinzip arbeiten, weisen als Sensorelement ebenfalls einen DMS auf. Hier besteht der DMS allerdings aus einem Halbleitermaterial wie z.B. Silizium. Neben dem anderen Material liegt der Unterschied zum metallischen DMS in der wesentlich höheren Empfindlichkeit. Sie ist um einen Faktor 50-80 höher als im metallischen Fall [10, 11].

Schwingquarz [3] Der direkte Kontakt von Messmedium und Schwingquarz ist zu vermeiden, da der Quarzkristall durch chemische Vorgänge mit dem Messmedium negativ beeinflusst werden kann. Erreicht wird dies dadurch, dass der Quarzkristall durch einen Biegebalken oder eine Platte verformt wird. Dadurch wird eine Verschiebung der auszuwertenden Schwingfrequenz erreicht. Dämpfungseffekte und die Absorption von Molekülen an der Oberfläche des Quarzes können durch ein evakuiertes Gehäuse vermieden werden.

Piezoelektrische Sensoren [2, 4, 8] Durch Aufprägen einer Kraft auf einen Piezokristall entstehen Verschiebungen im Kristallgefüge, was zu messbaren Ladungsverschiebungen führt. Die Erfassung dieser Ladungen erfolgt beispielsweise mit Hilfe von Ladungsverstärkern. Aufgrund von endlichen Isolationswiderständen und Eingangsströmen der Verstärker sind keine statischen Druckmessungen mit piezoelektrischen Sensoren möglich.

Oberflächenwellenfilter (OFW-Filter) Wird ein OFW-Filter auf dem Basismaterial verformt, so ändern sich dessen Filtereigenschaften. Eine spezielle geometrische Anordnung der Elektroden erlaubt die Beeinflussung der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich. Die mechanische Verformung des Filters ändert die Übertragungsfunktion, was durch die Messung derselben ausgewertet werden kann. Zudem besteht die Möglichkeit, ein OFW-Filter als frequenzbestimmendes Element in einem

Schwingkreis einzusetzen. Diese Möglichkeiten wurden in [9] untersucht. Der Oszillator wies zwar eine relative Frequenzstabilität von ca. $8 \cdot 10^{-8}$ auf, die aber aufgrund der Empfindlichkeit im Bereich $0 \dots 1$ MPa Differenzdruck gegen Atmosphäre in einer relativen Auflösung von $2,4 \cdot 10^{-5}$ resultierte.

Optische Verfahren Die Änderung des Brechungsverhaltens von Lichtleitern und das Interferenzverhalten von Licht können als Verfahren zur Druckmessung eingesetzt werden. Sensorelemente, die das Prinzip des Fabry-Pérot-Interferometers verwenden [12, 13], werten die durch Interferenz entstandene Lichtintensität aus. Eine Interferenz wird durch halbdurchlässige Spiegel, die ihren Abstand zueinander variieren können, realisiert. Die zwei notwendigen halbdurchlässigen Spiegel können in einer Einmoden-Faser integriert werden. Durch eine vorgespannte Lichtleitfaser und eine anschließende druckabhängige Entspannung der Faser wird in [14] eine Druckmessung realisiert. Eine weitere Möglichkeit wird in [7, 15] aufgezeigt. Das Interferometer wird hier direkt an einem Ende der Lichtleitfaser realisiert, an dem auch der zu messende Druck eingepreßt wird. Somit entfällt eine spezielle Anordnung für die notwendigen Spiegel.

Photoelastische Materialien weisen eine Veränderung des Brechungsindex auf, wenn sie eine Kraftaufprägung erfahren. Diese Eigenschaft wird in [16], unter Zuhilfenahme von Kompensationen von Leiterverlusten, Lichtquellen- und Kopplungsveränderungen und in [17] zur Druckmessung verwendet.

Die Abschattung eines Lichtempfängers, der durch ein moduliertes Signal beleuchtet wird, ist in [18] zur Wegmessung verwendet worden. Dieses Prinzip stellt ein weiteres Verfahren zur Messung druckabhängiger Wegänderungen dar.

Resonanzdraht Sensoren [2, 3, 4] Das Sensorelement wird durch einen gespannten Draht gebildet, der durch elektromagnetische Anregung zu Schwingungen in seiner Resonanzfrequenz gebracht wird. Eine weitere Dehnung bzw. eine Entspannung des Drahts führt zur Verschiebung der Resonanzfrequenz desselbigen. Die Messung der Resonanzfrequenz erlaubt eine Aussage über die mechanische Spannung im Draht und somit über den zu messenden Druck.

Induktive Sensoren [2, 3, 4, 8] Für die Erfassung eines druckabhängigen Verformungswegs kann ein induktives Sensorelement verwendet werden. Zwei Prinzipien kommen hierbei zum Einsatz. Zum einen verändert ein magnetisierbarer Körper durch örtliche Verschiebung den Induktivitätswert einer Spule und zum anderen verändert ein magnetisierbarer Körper die Kopplung zwischen der Primär- und der Sekundärspule eines Transformators. In vielen Fällen wird das induktive Sensorelement als Differential-Sensor aufgebaut. Dies bedeutet, dass im Fall von veränderlichen Induktivitäten eine gegenseitige Veränderung der Induktivitätswerte durch eine Wegänderung bewirkt wird, während im Fall des Transformators, die Kopplung zwischen der Primär- und zwei Sekundärspulen gegensinnig verändert wird. Die Auswertung der Differenzinduktivität erfolgt mittels einer Messbrücke in Verbindung

mit einer vorgegebenen Trägerfrequenz oder auch mittels eines LC-Oszillators, dessen Schwingfrequenz von den Induktivitäten abhängt. Transformatorisch arbeitende Sensorelemente werden beispielsweise durch die Messung der Ausgangsspannungsamplitude ausgewertet.

Magnetoelastische Sensoren [4] Ein Transformator, der im unbelasteten Fall idealerweise keine Kopplung zwischen der Primär- und der Sekundärwicklung aufweist, stellt das Sensorelement dar. Zwei Transformatorwicklungen befinden sich in vier symmetrisch angeordneten Bohrungen eines Messkörpers aus geschichteten Transformatorblechen. Die Primärwicklung wird mit einer Wechselspannung gespeist. Durch die symmetrische und aufeinander senkrechte Anordnung der Wicklungen wird im unbelasteten Fall des Messkörpers keine Spannung in den Sekundärwicklungen induziert. Bei Druckbelastung des Messkörpers nimmt die Permeabilität der Transformatorbleche in Druckrichtung ab, während sie senkrecht zur Druckrichtung zunimmt. Dies führt aufgrund der geometrischen Anordnung der Wicklungen zu einer induzierten Spannung in der Sekundärwicklung, die proportional zur belastenden Kraft ist.

Kapazitive Sensoren [2, 3, 4, 8] Bei diesen Sensorelementen wird die Kapazität zwischen zwei Elektroden ausgewertet, deren Abstand sich druckabhängig ändert. Eine einfache und günstige Realisierung besteht darin, eine Platte als druckaufnehmendes Element und gleichzeitig als eine Elektrode zu verwenden, während die zweite Elektrode ortsfest in einem gewissen Abstand aufgebaut wird. Wie im Fall der induktiven Sensoren, so findet auch hier ein differentiell aufnehmendes Sensorelement häufigen Einsatz. Die Auswertung der Kapazität erfolgt durch Trägerfrequenz-Messbrücken, LC-Oszillatoren, als kapazitives Element in geschalteten Filtern (*Switched Capacitor Filter*) oder direkt mittels einer Kapazität zu Digitalwert Umsetzers, der auch hier aus Vergleichsgründen untersucht wird.

2.2.3 Vergleich und Wertung der Messverfahren

In einigen Fällen ist es nicht erwünscht, dass das druckerzeugende Fluid mit dem Sensorelement in Kontakt tritt. Abhängig vom Fluid können dadurch die elektrischen Eigenschaften nachteilig beeinflusst werden, sodass eine Messung mit der entsprechenden Kombination aus Sensorelement und Fluid nicht möglich ist. Der Kontakt zwischen dem druckerzeugenden Fluid und dem Sensorelement kann zudem zu einer Verringerung der Lebensdauer des Sensorelements führen. Aus diesen Gründen wird hier ein indirektes Messverfahren verwendet.

Eine kostengünstige Lösung schließt die Messverfahren, die ein spezielles Basismaterial wie z.B. piezoelektrische Materialien für das Sensorelement vorsehen, aus. Eine Leiterplatten-Lösung ist verglichen mit Verfahren, bei denen die Leiterbahnen bzw. Elektroden auf ein Substrat aufzubringen sind, mit weniger Aufwand verbunden und somit kostengünstiger.

Mittels optischer Sensoren ist es möglich, eine hohe Messempfindlichkeit zu erreichen. Im Falle von Interferenz-Verfahren können sehr kleine Wegänderungen im nm-Bereich detektiert werden. Allerdings werden für die Realisierung von Interferenzverfahren meist teure Spiegel und Prismen verwendet, was gegen die Verwendung eines solchen Sensorelements spricht.

In induktiven Sensorelementen wird ein magnetisierbarer Werkstoff, meist ein Ferritkern, eingesetzt, welcher die Streuung des Magnetfeldes reduziert. Der Einsatz eines Ferritkerns weist allerdings zwei Nachteile auf. Den ersten Nachteil stellen die magnetisierbaren Domänen (*Weissche Bezirke*) eines Ferritkerns dar, in denen eine homogene Magnetisierung auftritt. Sie bilden eine gewisse Körnung im Ferritkern, die zwangsläufig zu einer Beschränkung des Auflösungsvermögens eines induktiven Sensors führt [19]. Der zweite Nachteil ist die notwendige Magnetisierungsenergie. Die Magnetisierung, also Ausrichtung der Weisschen Bezirke bzw. Verschiebung der Blochwände, bedarf einer gewissen Energie, was mit einer Dämpfung gleichzusetzen ist. Eine Dämpfung muss mit entsprechender elektrischer Energie kompensiert werden, was zu höherem Energieverbrauch und erhöhtem Rauschen führt. Ein induktives Sensorelement, das keinen magnetisierbaren Körper verwendet und lediglich als Luftpule realisiert ist, wird in [20] vorgestellt. Da das magnetische Feld ein quellenfreies Feld ist, haben etwaige Veränderungen in der näheren Umgebung einen Einfluss auf den magnetischen Feldverlauf und somit auf die Induktivität. Eine magnetische Abschirmung ist sinnvoll nur mit ferromagnetischen Materialien (z.B. *Mu-Metall*) möglich und bei Weitem nicht so gut wie beim elektrischen Pendant, dem Kondensator, realisierbar.

Die Realisierung eines Sensorelements durch eine Kapazität führt bei Einsatz von dielektrischen oder ferroelektrischen Werkstoffen zu ähnlichen Effekten wie bei induktiven Sensorelementen. Die beschriebenen Probleme treten bei einem luftgefüllten Kondensator, abgesehen von Streufeldern, nicht auf. Aufgrund der guten elektrischen Leitfähigkeit von Metallen ist eine elektrische Abschirmung und somit ein Schutz vor elektrischen Störfeldern relativ einfach realisierbar. Mit Hilfe von Schirmelektroden und entsprechender elektronischer Steuerung ist es möglich elektrische Streufelder zu minimieren [21, 22].

Sensorelemente, die auf piezoresistiven DMS basieren, weisen eine ca. 50-80 fach höhere Empfindlichkeit als metallische DMS auf. Allerdings erlauben piezoresistive DMS nur eine um den Faktor 10 kleinere maximale Dehnung und weisen einen um den Faktor 10 höheren Temperaturkoeffizienten als metallische DMS auf. Die Widerstandsänderung von piezoelektrischen DMS, bezogen auf die Dehnung, ist zudem nichtlinear [10, 11].

Die Empfindlichkeit von kapazitiven Sensorelementen ist höher als die von resistiven Sensorelementen [5]. Der im **Anhang A** vereinfachte Vergleich der Empfindlichkeiten von resistiven/piezoresistiven und kapazitiven Sensorelementen zeigt dies auf und spricht für den Einsatz eines kapazitiven Messverfahrens. Die nichtlineare Beziehung, die je nach Ausführung eines kapazitiven Sensors auftritt, stellt kein Problem

dar. Zum einen zeigt die Arbeit [23], dass eine Linearisierung der Druckkurve eines kapazitiven Sensors durch eine geeignete Wahl der Elektrodenform oder auch durch den Einsatz eines dritten Kondensators realisiert werden kann. Zum anderen ist es keine Schwierigkeit eine bekannte nichtlineare Beziehung zwischen Kapazität und Druck mittels eines Digitalrechners von einer Größe in die andere zu überführen.

Die Funktionalität der aufgezeigten Messverfahren wird durch die entsprechenden Arbeiten bestätigt. Die erreichbare Auflösung der Drucksensoren wird dabei allerdings nicht betrachtet. In den meisten Fällen erzeugen die Sensoren eine druckabhängige Spannung, deren Auflösung letztlich durch das Spannungsrauschen bzw. den eingesetzten Analog-Digital-Umsetzer (ADU) beschränkt ist. Heute erreichbare Werte mit ADU liegen in der Größenordnung von < 20 Bit, was $> 10^{-6}$ entspricht. Das Auflösungsvermögen ist entscheidender Teil dieser Arbeit und wird in den nachfolgenden Kapiteln behandelt.

Kapitel 3

Leckageratemessung

Leckage- bzw. Dichtheitsprüfungen finden in der Industrie häufigen Einsatz. Eine Dichtheitsprüfung ist nicht nur in Vakuumanlagen aller Art, sondern auch für industrielle Fertigungsprodukte wie Kühlschränke, diverse Gas- und Flüssigkeitsbehälter und Spezialteile wie gasgefüllte Schalter oder Relais notwendig. Ein Leck wird beispielsweise durch eine Pore in einer Behälterwand, einen Haarriss oder einen durchgehenden Kratzer an einer Verbindungsstelle (Flansch) verursacht.

3.1 Leckagerate

Weist ein Gasbehälter einen Innendruck, der sich vom Außendruck unterscheidet, und ein Leck auf, so wird eine gewisse Leckagerate zum Druckausgleich führen. Zusätzlich zu den von Diffusionsvorgängen verursachten Leckagen, sind speziell in der Vakuumtechnik Desorptionseffekt, die eine scheinbare Leckage darstellen, zu berücksichtigen [24, 25]. Bei einer während des Messvorgangs konstanten Temperatur $T = \text{const.}$ und einem konstanten Volumen $V = \text{const.}$ des Prüfobjekts wird die Leckagerate q_L wie folgt durch eine zeitliche Druckänderung $\frac{dp}{dt}$ beschrieben

$$q_L(p, T) = V \cdot \frac{dp}{dt} .$$

Die hieraus resultierende Einheit der Leckagerate lautet $[q_L] = \text{Pa m}^3 \text{s}^{-1}$ [24, 25]. Diese Einheit ist eine Leistungsangabe, die bei einem bestimmten Leck eine Angabe über die nötige Leistung zur Aufrechterhaltung des Drucks bzw. Vakuums in einem pneumatischen System erlaubt.

Eine äquivalente Aussage kann durch den Volumenstrom q_V erfolgen. Mit der Annahme einer konstanten Temperatur $T = \text{const.}$, ist der Volumenstrom mit der allgemeine Gasgleichung $p \cdot V = m \cdot R_s \cdot T$ mit der spezifischen Gaskonstante R_s , der Gasmasse m und der Beziehung $m = \rho \cdot V$ mit der Gasdichte ρ durch

$$q_V(p, T) = \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho(p, T)} \frac{dm}{dt} = \frac{1}{\rho(p, T)} \frac{1}{R_s T} V \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho(p, T)} \frac{1}{R_s T} q_L(p, T)$$

und mit $\rho(p, T) = \frac{V}{m} = \frac{R_s T}{p}$ schließlich durch

$$q_V(p, T) = \frac{q_L(p, T)}{p} \tag{3.1}$$

bestimmt [1, 24, 26]. Der Volumenstrom wird meist auf das Normvolumen eines idealen Gases bei Normtemperatur $T_n = 273,15$ K und Normdruck $p_n = 101,325$ kPa umgerechnet. Dies resultiert in der Gleichung

$$q_V(p_n, T_n) = \frac{1}{p_n} \frac{T}{T_n} q_L(p, T) \quad (3.2)$$

mit der daraus folgenden Einheit $[q_V] = \text{m}^3 \text{s}^{-1}$ bzw. der Einheit $[q_V] = \text{Nml min}^{-1}$ (Normmilliliter pro Minute), die in der Technik üblich ist.

Abhängig von dem Messverfahren, mit dem die Leckagerate bestimmt wird, ist es möglich, diese zum Vergleich in eine Leckagerate umzurechnen, die mit einem anderen Verfahren ermittelt wurde. Hierbei sind die unterschiedlichen Testfluide mit entsprechender dynamischer Viskosität bzw. molarer Masse und die Größenordnung der Leckagerate, die eine Aussage zur Strömungsart erlaubt (laminare/molekulare Strömung, Gaspermeation), zu berücksichtigen. Darüber hinaus sind die Messbedingungen wie Temperatur und Druck im und außerhalb des Prüflings zu beachten [24, 25].

Als Beispiel für die Größenordnung einer Leckagerate wird ein Autoreifen betrachtet (195/65 R 15). Der Reifen weist ein Volumen von ca. $40 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ und einen Druckabfall von $2,2 \cdot 10^5$ Pa auf $2,0 \cdot 10^5$ Pa Differenzdruck gegen Atmosphäre in 6 Monaten bei Normtemperatur auf. Hieraus resultiert eine Leckagerate von $5,14 \cdot 10^{-5} \text{ Pa m}^3 \text{ s}^{-1}$ bzw. $5,07 \cdot 10^{-4} \text{ Nml s}^{-1}$. Diese Leckagerate bedeutet bezogen auf das Reifenvolumen einen Druckabfall von $1,29 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}^{-1}$.

3.2 Messverfahren

Leckagen können auf unterschiedliche Weisen ermittelt werden. Hierbei wird zwischen einer reinen Leckageerkennung und einer Leckageortung unterschieden. Der erste Fall, der reinen Leckageerkennung, findet Einsatz bei der Ausschusserkennung in der Massenproduktion. Die Leckageortung hingegen ist bei der Produktion geringerer Stückzahlen interessant, bei der die Möglichkeit besteht, die Leckage eines Produkts durch eine Instandsetzung zu beheben. Im Fall der reinen Leckageerkennung, kann die Leckagerate am einfachsten durch eine Druckanstieg- bzw. Druckabfall-Messung bestimmt werden. Beispielhaft wird nachfolgend die Druckabfall-Messung mit einem Relativ- und einem Differenzdrucksensor aufgezeigt und verglichen.

Abbildung 3.1 zeigt den schematischen Aufbau einer Leckage-Messung mittels eines Relativdrucksensors. Als Relativdrucksensor wird hier ein Drucksensor bezeichnet, der eine Druckdifferenz gegen Atmosphäre misst. Das Zuflussventil ist auf Durchfluss geschaltet und erlaubt den Prüfling mittels des Druckreglers mit Luft bis zu einem gewünschten Prüfdruck zu befüllen. Nach abgeschlossener Befüllung wird das Zuflussventil gesperrt und nach einer folgenden Stabilisierungsphase kann der zeitliche Druckverlauf im Prüfling gemessen werden (**Abbildung 3.2**). Der Relativdrucksensor misst in dieser Anordnung lediglich den Druck im Prüfling.

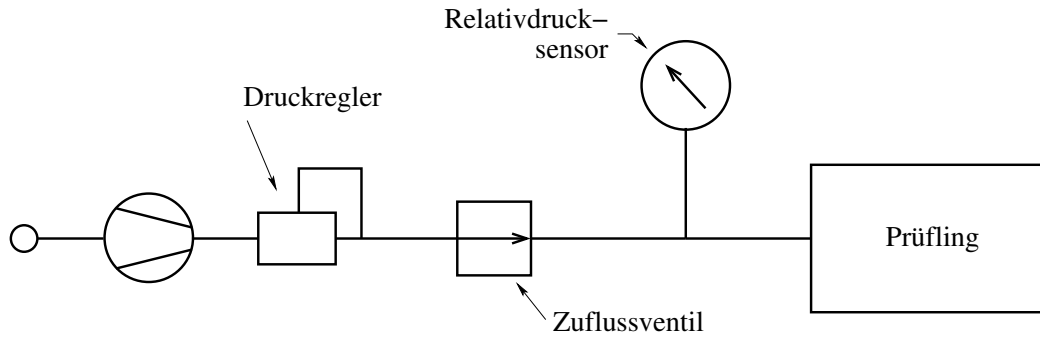


Abbildung 3.1: Befüllung eines Prüflings zur Druckabfall-Messung mittels eines Relativdrucksensors

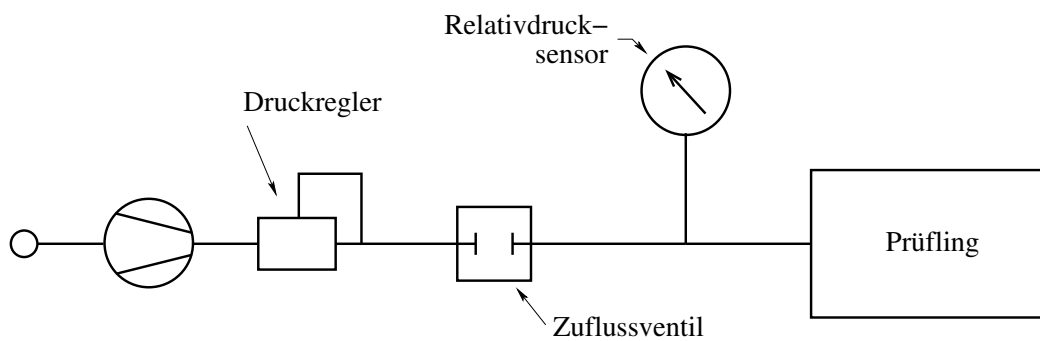


Abbildung 3.2: Druckabfall-Messung mittels eines Relativdrucksensors

Zum Vergleich ist in **Abbildung 3.3** die Leckageratemessung mittels eines Differenzdrucksensors schematisch dargestellt. Die auf Durchfluss geschalteten Zuflussventile erlauben die Befüllung des Prüflings und der Referenzseite des Drucksensors

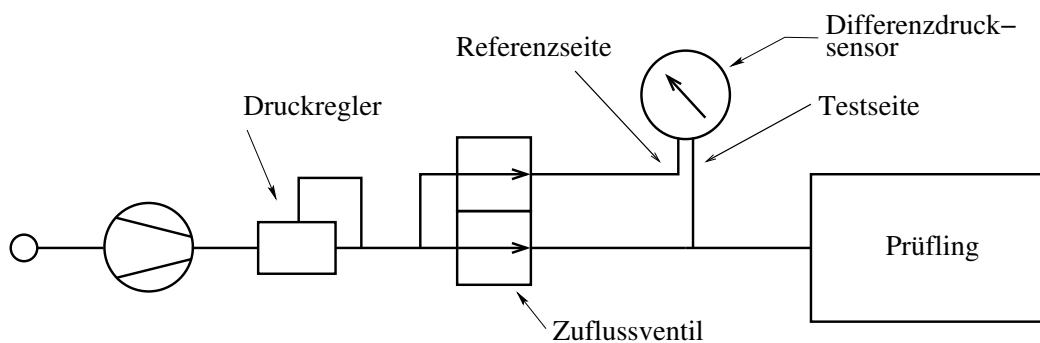


Abbildung 3.3: Befüllung eines Prüflings zur Druckabfall-Messung mittels eines Differenzdrucksensors

mit Luft. Der Druckregler gewährleistet dabei den gewünschten Prüfdruck. Auch hier werden die Zuflussventile nach erfolgter Befüllung geschlossen und nach einer Stabilisierungsphase erfolgt die Messung des zeitlichen Druckverlaufs (**Abbildung 3.4**). Der wesentliche Unterschied zum zuvor beschriebenen Verfahren liegt im verwendeten Drucksensor. Zusätzlich zum Druck des Prüflings (Testseite), wird hier dem Differenzdrucksensor der Prüfdruck (Referenzseite) eingepreßt, der im Idealfall (Sensor und Zuflussventil leakagefrei), bei konstanter Temperatur, keine Druckänderung aufweist.

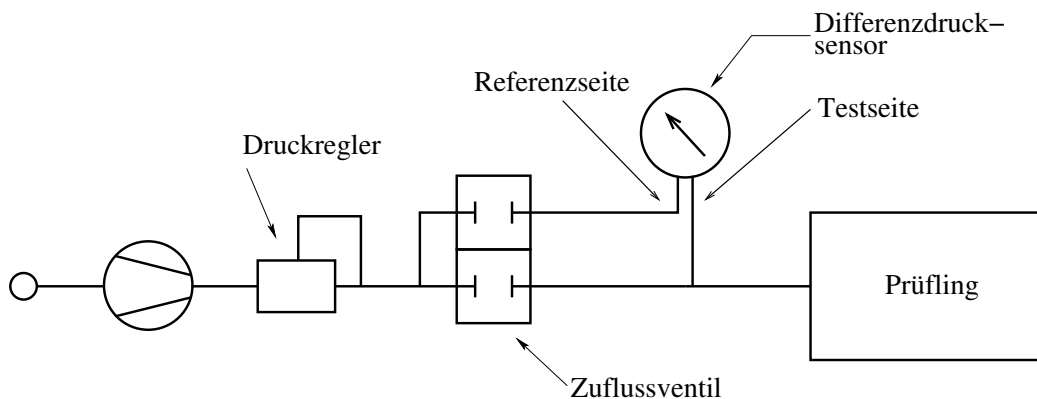


Abbildung 3.4: Druckabfall-Messung mittels eines Differenzdrucksensors

Beide Verfahren messen nach dem aufgezeigten Schema und bei konstanter Temperatur einen Druckabfall. Bleibt die Temperatur während des Messvorgangs nicht konstant, so kann fälschlicherweise eine zu hohe Leckagerate bei sinkender Temperatur oder gar ein falsches Vorzeichen der Leckagerate, wenn die Temperatur steigt, gemessen werden. Grundsätzlich erlauben diese Schemata mit entsprechender Modifikation auch eine Druckanstiegmessung, auf die nicht weiter eingegangen wird.

In den dargestellten Messschemata ist der Differenzdrucksensor in der Regel empfindlicher als der Relativdrucksensor, da dieser lediglich für einen bestimmten Differenzdruck ausgelegt wird, der deutlich geringer sein kann, als der Prüfdruck. Wohingegen der Relativdrucksensor mindestens für den Prüfdruck ausgelegt sein sollte. Somit ist das Schema mit Differenzdrucksensor prinzipiell besser für eine Leckageratenessung geeignet. Nachteilig ist jedoch, dass der Bauteilaufwand höher ist, der Differenzdrucksensor teurer ist und durch eine Falschbedienung zerstört werden kann. Da die während der Messung auftretenden Druckänderungen um Größenordnungen geringer sind als der maximale Prüfdruck, für den der Relativdrucksensor im ersten Messschema ausgelegt ist, muss dieser eine entsprechend hohe Auflösung aufweisen.

Marktübliche Auflösungen liegen im Fall von Differenzdrucksensoren bei ca. 1 Pa und im Fall von Relativdrucksensoren bei ca. 10 Pa. Eine Auflösung von 1 Pa erlaubt bei einem Prüflingsvolumen von $100 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ die Erkennung einer Leckagerate von $10^{-4} \text{ Pa m}^3 \text{ s}^{-1}$ bzw. $5,9 \cdot 10^{-2} \text{ Nml min}^{-1}$. Für das Beispiel des Autoreifens mit dem Volumen von $40 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ bedeutet die Auflösung von 1 Pa, dass bei konstanter Temperatur ca. 13 min lang gemessen werden muss, um einen Druckabfall zu detektieren.

Weitere Messverfahren, wie beispielsweise der Blasentest (Bubble-Test) oder Verfahren, die Testgase wie beispielsweise Helium einsetzen, bedeuten, dass der Prüfling einem Testfluid ausgesetzt wird, das zusätzliche Kosten und Aufwand verursacht. Der Blasentest ermöglicht zum einen die Messung einer ähnlichen Leckagerate wie die dargestellten Verfahren und zum anderen die Bestimmung des Leckageortes. Ist eine geringere Leckagerate als $10^{-4} \text{ Pa m}^3 \text{ s}^{-1}$ zu detektieren, so sind Messverfahren mit Testgasen zu verwenden, die ebenfalls eine Lokalisierung der Leckage erlauben. Dabei findet das Edelgas Helium sehr häufigen Einsatz.

Kapitel 4

Sensorkonzept

In Bereichen der industriellen Automatisierung, in denen eine Prozessregelung oder eine Messwertprotokollierung stattfinden soll, werden elektrische Sensoren zur Bestimmung von physikalischen Größen wie Temperatur, Massenfluss oder Druck eingesetzt. Die zu messende physikalische Größe wird durch einen entsprechenden Sensor in eine elektrische Größe umgesetzt. Bei der Ausgabe der elektrischen Größe ist zwischen analogen, also wert- und zeitkontinuierlichen oder digitalen, also wert- und zeitdiskreten Ausgangsgrößen zu unterscheiden. Eine moderne Prozessregelung kann sowohl digital als auch analog arbeitende Regler und somit auch Sensoren, die analoge bzw. digitale Messsignale erzeugen, beinhalten. Im Gegensatz dazu sind reine Datenverarbeitungsgeräte, wie sie beispielsweise zur Protokollierung von Messwerten verwendet werden, auf digitalisierte Messgrößen angewiesen.

Die Aufgabe, eine nichtelektrische Größe in eine irgendwie geartete elektrische Größe umzusetzen, kann unterschiedlich gelöst werden. Abhängig von der Art der elektrischen Ausgangsgröße des Sensors sind zusätzliche Zwischenschritte notwendig. Die sich aus den Anforderungen ergebende Messkette ist schematisch in **Abbildung 4.1** dargestellt.

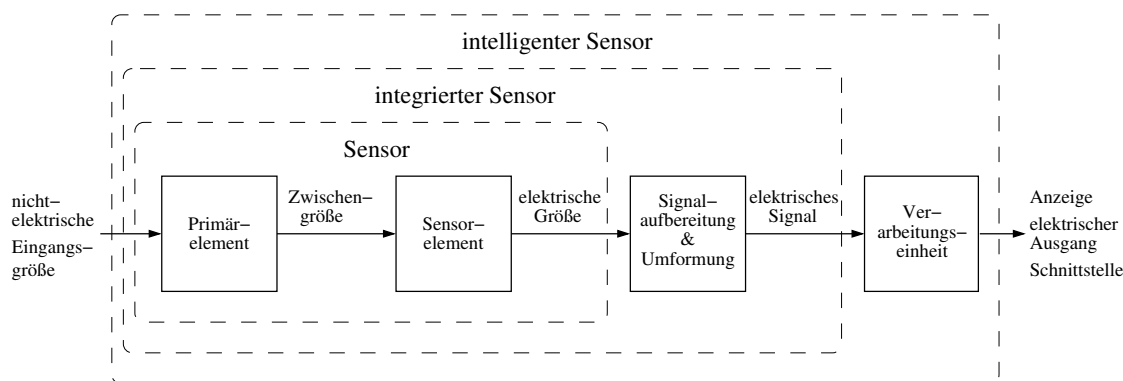


Abbildung 4.1: Messkette einer Messeinrichtung

Ein Sensor ist in einer Messeinrichtung zunächst nur bedingt aussagekräftig. Eine Signalaufbereitung, die die elektrische Größe in ein irgendwie geartetes elektrisches Signal umsetzt, ist nötig. Das elektrische Signal kann im einfachsten Fall direkt

durch eine skalierte Anzeige dargestellt werden oder durch eine weitere Verarbeitungseinheit (z.B. Mikroprozessor) in die gewünschte elektrische Größe überführt werden. Eine derartige Messkette wird durch einen intelligenten Sensor realisiert, der unter Umständen auch zusätzlich externe Störeinflüsse (z.B. Temperatur) kompensieren kann. An einen solchen intelligenten Sensor werden diverse Anforderungen gestellt. Hierzu gehören z.B. die Zuverlässigkeit, Störsicherheit, Genauigkeit, Temperaturbereich und Langzeitstabilität. Ferner sieht die Entwicklung eine ständige Miniaturisierung und Erweiterung der Anwendungsgebiete mit möglichst geringen Kosten vor.

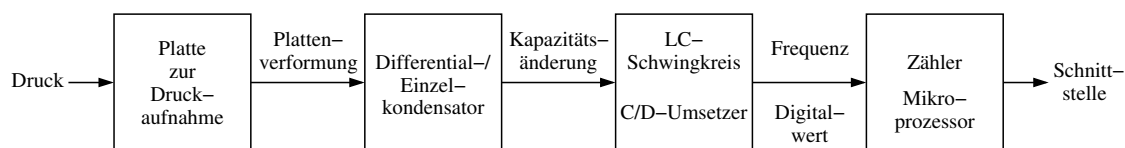


Abbildung 4.2: Messkette des vorgestellten Sensors

Der in dieser Arbeit vorgestellte intelligente Sensor weist die in **Abbildung 4.2** gezeigte Messkette auf, die nachfolgend, getrennt in mechanischen und elektrischen Aufbau, betrachtet wird.

4.1 Mechanisches Konzept

Der Sensor erfasst die physikalische Größe Druck als Differenzdruck gegen Atmosphäre. Dies geschieht mittels einer elastischen Platte, die das Primärelement des Sensors darstellt. Die Platte wird mit dem zu messenden Druck beaufschlagt, woraus eine Verformung resultiert. Die Verformung der Platte wird mit Hilfe eines Kondensators, der das Sensorelement darstellt, erfasst. Dies bedeutet, dass die Messgröße Druck durch die Verformung der Platte in eine Wegänderung überführt wird, deren Bestimmung wiederum durch eine Weg- bzw. Abstandsmessung erfolgt.

Die Basis für den mechanischen Aufbau 1 des Sensors zeigt **Abbildung 4.3**. Der dargestellte Differentialkondensator wird durch zwei ortsfeste Leiterplatten und eine sich zwischen den Leiterplatten befindende bewegliche Masseelektrode realisiert. Die Bewegung der Elektrode zwischen den Leiterplatten gibt den Verformungsweg des Mittelpunkts der Platte wieder. Die Verformung wird durch einen Stab an die Elektrode übertragen. Der Stab wird mechanisch durch zwei Führungsmembranen gegen seitliches Verschieben stabilisiert¹. Diese Konstruktion weist zwei Vorteile auf. Zum einen wird durch Vorspannen der zwei Führungsmembranen der Stab an die Platte gedrückt, was statisch gewährleistet, dass der Weg der beweglichen Elektrode dem Verformungsweg des Mittelpunkts der Platte entspricht. Zum anderen ist

¹Ergebnis eines persönlichen Gesprächs mit Prof. Dr.-Ing. Mathias Uhle

4.2 Elektrisches Konzept

Die Erfassung des Verformungswegs der Platte erfolgt kapazitiv. Im Falle des Aufbaus 1 ist hierzu ein Differentialkondensator realisiert. Dabei wird ein Kondensator durch die Elektrode der oberen Leiterplatte und der beweglichen Masseelektrode gebildet und der Zweite durch die Elektrode der unteren Leiterplatte und der beweglichen Masseelektrode. Während die eine Kapazität durch Wegänderung der beweglichen Masseelektrode größer wird, nimmt die andere Kapazität ab. Auftretende Temperaturänderungen führen zu thermischen Ausdehnungen der Elektroden und Verschiebungen des Arbeitspunkts der Schaltung. Da sich eine Temperaturänderung auf beide Elektroden und somit auch auf beide Schaltungen auswirkt, heben sich diese Effekte in erster Näherung auf.

Im Falle des Aufbaus 2 wird lediglich ein Kondensator, der durch die Elektrode der Leiterplatte und der druckaufnehmenden Platte gebildet wird, ausgewertet. Die Verformung der Platte erfolgt, wie in Kapitel 5.2 gezeigt ist, nicht ebenflächig, was mit einer geringeren Empfindlichkeit des Aufbaus 2 im Vergleich zum Aufbau 1 verbunden ist. Der Temperatureinfluss auf die elektrische Schaltung macht sich in diesem Aufbau voll bemerkbar und muss bei länger andauernden Messungen > 15 min, bei denen sich die Temperatur um einige Kelvin ändert, anderweitig kompensiert werden.

Sowohl im Aufbau 1 als auch im Aufbau 2 werden die Kapazitäten als frequenzbestimmende Glieder in LC-Oszillatoren eingesetzt. Die Änderung der Oszillatorfrequenzen, die durch Verformung der druckaufnehmenden Platte bestimmt sind, werden mit einem Zähler erfasst. Aus den Frequenzen wird über einen mathematischen Zusammenhang auf den zu messenden Druck geschlossen.

In einem zweiten Konzept wird ein Kapazität-Digital-Umsetzer (CDU) zur Erfassung der Plattenverformung eingesetzt. Hierzu bleibt der konstruktive mechanische Aufbau erhalten. Es werden lediglich die Kapazitäten sowohl im Aufbau 1, als auch im Aufbau 2 direkt mittels eines CDUs bestimmt. Der konstruktive Aufbau der Elektroden unterscheidet sich von dem des ersten Konzepts, was in Kapitel 6.5.2 näher betrachtet wird. Der CDU basiert auf einem Delta-Sigma-Umsetzer, der üblicherweise zur hochauflösenden A/D-Umsetzung verwendet wird. Das Prinzip des Delta-Sigma-Umsetzers und die zur C/D-Umsetzung nötige Modifikation wird in Kapitel 6.4 dargestellt.

Kapitel 5

Mechanischer Sensorteil

Neben der elektrischen Auswertung ist die mechanische Konstruktion eine der beiden tragenden Säulen eines funktionsfähigen Sensors. Der konstruktive Aufbau ist Inhalt des Kapitels 5.1, in dem zwei Varianten aufgezeigt werden, die sich in der Funktionalität und Lagerung der druckaufnehmenden Platte unterscheiden. Die druckaufnehmende elastische Platte stellt das Primärelement des Sensors dar und überführt den zu messenden Druck in eine Verformung. Deren analytische Beschreibung erfolgt in Kapitel 5.2, wobei zwischen kleinen und großen Durchbiegungen der Platte unterschieden wird. Aufgrund der hier angestrebten hohen Auflösung sind Temperaturänderungen nicht zu vernachlässigen und werden in Kapitel 5.3 aufgezeigt.

5.1 Sensor-Aufbau

Der konstruktive Aufbau des Sensors ist in zwei Varianten realisiert. Die erste Variante, der Aufbau 1, ist in **Abbildung 5.1** dargestellt. Sie beinhaltet einen Differentialkondensator, der von zwei Messelektroden und einer dazwischen angeordneten, beweglichen Masseelektrode gebildet wird und sich im Mittelteil des Sensors befindet. Die bewegliche Masseelektrode erfährt über einen Gewindestab dieselbe Wegänderung, die auch der Mittelpunkt der druckaufnehmenden Platte durch Druckbeanspruchung erfährt. Die Stabilisierung des Gewindestabs erfolgt wie bereits in Kapitel 4.1 beschrieben mit Hilfe von zwei Führungsmembranen, die wesentlich dünner als die druckaufnehmende Platte sind. Diese gewährleisten durch Vorspannen, dass der Verformungsweg des Plattenmittelpunkts reibfrei auf den Gewindestab übertragen wird. Der aus Anschaulichkeitsgründen höher dargestellte Distanzring stellt einen vorgegebenen Abstand der beiden Messelektroden 1 und 2 sicher, die durch zwei Schraubringe aneinander gedrückt werden. Die Einstellung des „Nullpunkts“, an dem die Masseelektrode gerade keinen Kontakt mehr mit der Elektrode 2 aufweist, wird mittels Arretierung des Gewindestabs im Justageblock vorgenommen.

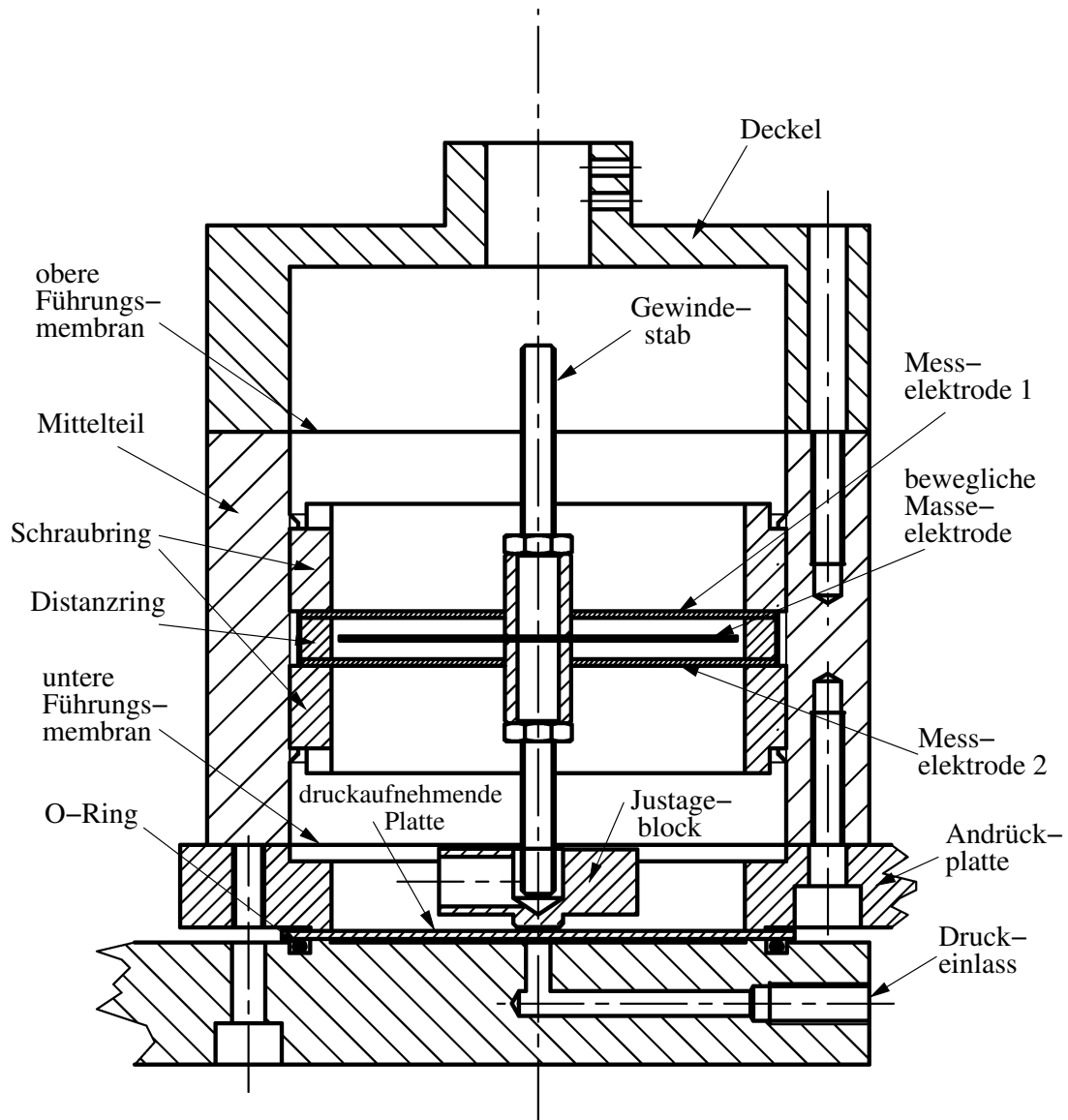


Abbildung 5.1: Schnittdarstellung des Sensoraufbaus 1

Die Lagerung der druckaufnehmenden Platte ist als Ausschnitt der Schnittdarstellung des Aufbaus 1 in **Abbildung 5.2** dargestellt. Sie erfolgt durch Klemmung mittels zweier 2,5 mm breiten und 0,2 mm hohen Klemmringe, die durch Abdrehen der entsprechenden Werkstücke hergestellt wurden. Sie sind zur Verdeutlichung in **Abbildung 5.2** höher als in der ursprünglichen Form, die in **Abbildung 5.1** gezeigt ist, dargestellt. Mit dieser Wahl der Lagerung wird zum einen das Totvolumen des Sensors gering gehalten und zum anderen eine definierte Klemmfläche der Platte erreicht. Die Dichtigkeit der Anordnung gewährleistet ein O-Ring, der in einer außen an den unteren Klemmring anliegenden Nut eingelassen ist und von der druckaufnehmenden Platte gequetscht wird.

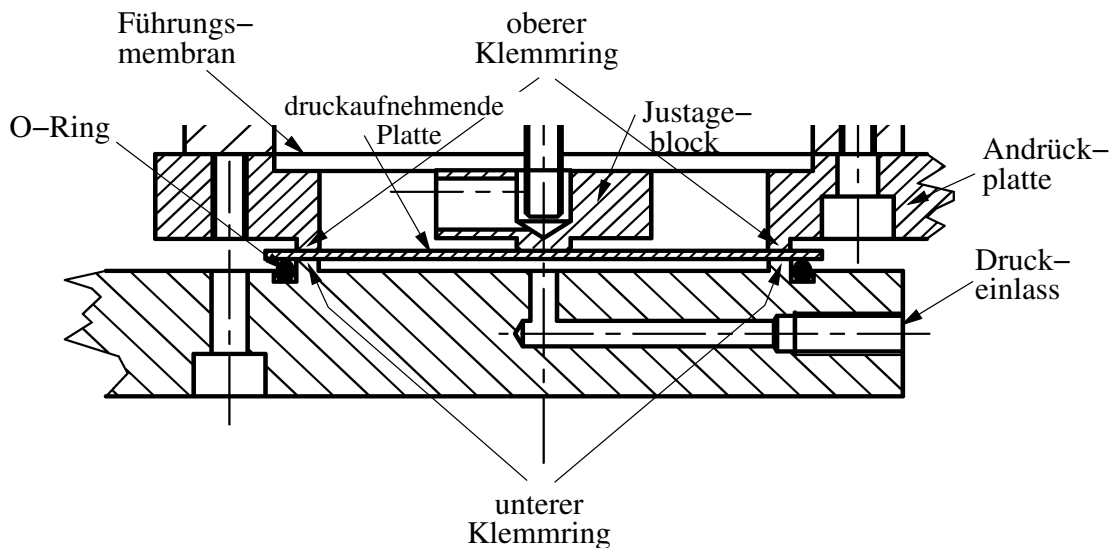


Abbildung 5.2: Ausschnitt aus der Schnittdarstellung des Sensoraufbaus 1

Ein wesentlich einfacherer Aufbau ist in **Abbildung 5.3** dargestellt. Der Aufbau 2 beinhaltet lediglich einen Kondensator. Dieser prinzipielle Unterschied zum Aufbau 1 reduziert den mechanischen Aufwand erheblich. Grund hierfür ist die direkte Verwendung der druckaufnehmenden Platte als Masseelektrode, welche die im Aufbau 1 äquivalente, bewegliche Masseelektrode ersetzt. Äquivalent zum Aufbau 1 wird die Dichtigkeit des Aufbaus 2 gewährleistet. Ein weiterer Unterschied liegt in der Klemmung der Platte. Diese erfolgt wie im Aufbau 1 mittels einer Andrückplatte, die hier aber zusätzlich die Messelektrode und einen Distanzring beinhaltet. Dabei stellt der Distanzring, wie im Aufbau 1, einen definierten Abstand von Messelektrode zur Masseelektrode sicher.

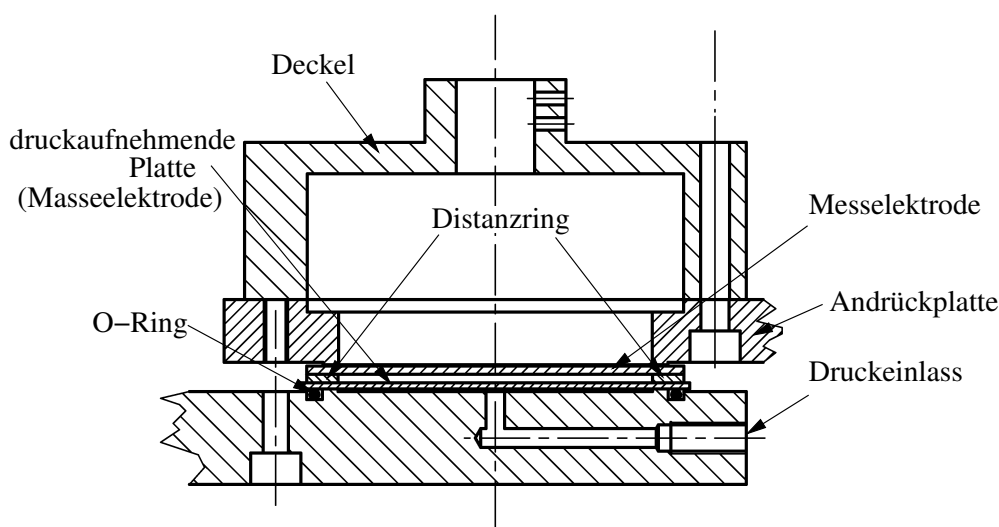


Abbildung 5.3: Schnittdarstellung des Sensoraufbaus 2

Sowohl der Aufbau 1 als auch der Aufbau 2 weisen aus Abschirmgründen einen Deckel auf. Dieser ist hier mit einer Öffnung versehen, die eine Wegmessung der Plattenverformung zur Kontrolle der Messergebnisse erlaubt. Im Aufbau 1 liegt die untere Führungsmembran auf der Andrückplatte auf, die mit dem Mittelteil verschraubt wird und die druckaufnehmende Platte klemmt. Dem daraus resultierenden, eingeschlossenen Luftvolumen muss eine Möglichkeit zum Druckausgleich gegeben werden, da es sonst als eine Luftfeder wirkt und die Messung nachteilig beeinflusst. Aus diesem Grund verfügen beide Aufbauten in der Andrückplatte und im Aufbau 2 zudem die Messelektrode über eine Druckausgleichsöffnung.

5.2 Druckaufnehmende Platte

Die Verformung der druckaufnehmenden Platte wird mit Hilfe der Plattentheorie beschrieben. Als Platte wird ein Flächentragwerk bezeichnet, dessen Mittelfläche eine Biegeverformung erfährt [29]. Die zu dieser Verformung notwendigen Kräfte wirken dabei vorrangig senkrecht zur Mittelfläche der Platte. Im Gegensatz hierzu steht die Scheibe, bei der die Kräfte vorrangig waagrecht zur Mittelfläche wirken und lediglich zu Verzerrungen derselben führen. Bei großen Verformungen des betrachteten Flächentragwerks ist eine strikte Trennung von Platte und Scheibe nicht mehr korrekt und ist entsprechend kombiniert anzusetzen. Voraussetzungen für die nachfolgenden Betrachtungen der Plattentheorie sind gegeben durch [29, 30]:

Für Platten gilt generell die Dünne-Hypothese $h \ll \text{Min}(\forall l_i)$. Die Plattenhöhe h ist wesentlich kleiner als alle weiteren geometrischen Abmessungen l_i der Platte. Für den Fall einer Kreisplatte, wie sie hier Verwendung findet, muss somit die Bedingung $h \ll 2R$, also die Plattenhöhe wesentlich kleiner als der Plattendurchmesser, erfüllt sein. Gilt ferner für die Plattenhöhe $h < 0,2R$, so ist eine schubstarre Modellierung der Platte zulässig, was hier erfüllt ist. Zudem weist die Platte einen homogenen und isotropen Werkstoff auf, dessen elastische Verformung dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz Folge leistet. Die hier betrachtete Platte wird durch Druck eines Fluids belastet. Wobei von einer gleichmäßigen Flächenlast ausgegangen und eine Rotationssymmetrie der Platte vorausgesetzt wird.

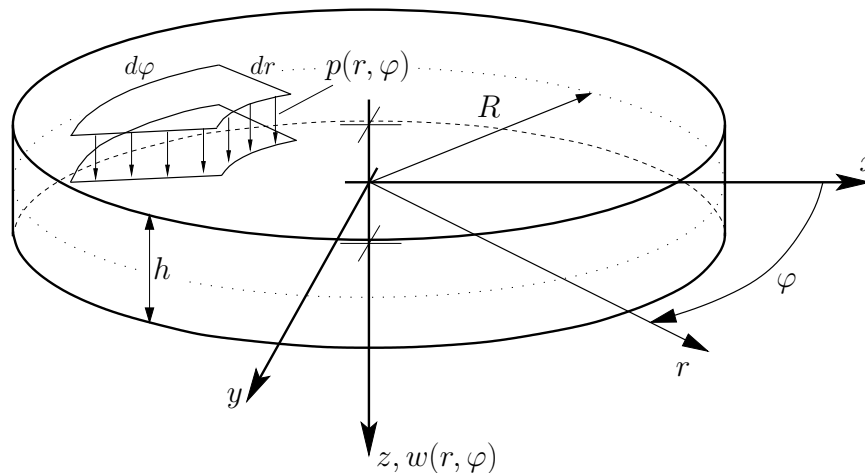


Abbildung 5.4: Kreisplatte in Zylinderkoordinaten

Die in **Abbildung 5.4** dargestellte Kreisplatte zeigt die zur Beschreibung der Plattenverformung notwendigen Größen und Koordinaten auf. Unter Bezug auf diese Abbildung wird die Plattenverformung bei konstanter Flächenlast $p(r, \varphi) = \text{const.} = p$ betrachtet. Es wird dabei in eine Verformung mit kleiner Durchbiegung w bezogen auf die Plattenhöhe h , mit $\frac{w}{h} < 0,2$ und in eine Verformung mit großer Durchbiegung mit $0,2 < \frac{w}{h} < 5$ unterschieden. Zur Bestimmung der Verformung sind die

Gleichgewichtsbedingungen an einem differentiell kleinen Plattenelement aufzustellen. Abhängig von der Stärke der Durchbiegung sind die Gleichgewichtsbedingungen, die zur Differentialgleichung der Plattenverformung führen, am unverformten bzw. verformten Plattenelement anzusetzen, was hier nicht näher betrachtet und der Literatur entnommen wird [29, 30, 31]. Das in **Abbildung 5.5** dargestellte differentielle Plattenelement der Größe $dr-rd\varphi-h$ dient zur Verdeutlichung der auftretenden Kräfte und Momente und zeigt die für die weiteren Betrachtungen nötigen Schnittgrößen auf.

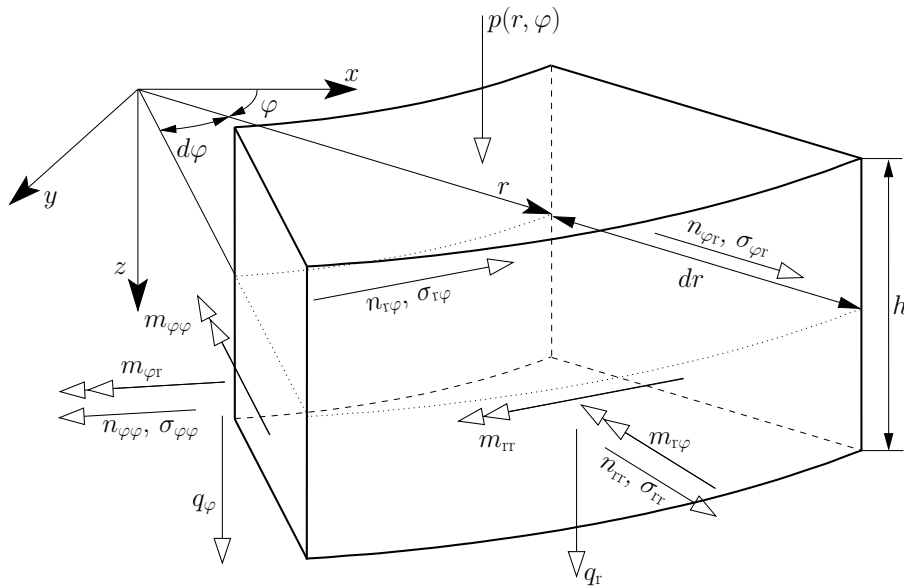


Abbildung 5.5: Schnittgrößen einer Platte in Zylinderkoordinaten

5.2.1 Verformung mit kleiner Durchbiegung

Außer den bereits genannten Voraussetzungen, werden bei der Betrachtung kleiner Verformungen weitere Annahmen getroffen. Aufgrund der geringen Verformung treten lediglich kleine Verzerrungen in der Mittelfläche der Platte auf, die vernachlässigt werden. Dies erlaubt die Betrachtung der Gleichgewichtsbedingungen am unverformten differentiellen Element. Es treten lediglich Belastungen senkrecht (normal) zur Mittelfläche der Platte und Biegemomentbelastungen auf. Dies lässt die Entkopplung von der Scheibentheorie zu, die nur Kräfte betrachtet, die parallel zur Mittelfläche wirken. Unter den gegebenen Annahmen und Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen resultiert die Plattendifferentialgleichung zu [29, 30, 31]:

$$\Delta\Delta w(r) = \frac{p}{K}. \quad (5.1)$$

Die Größe K entspricht dabei der Biegesteifigkeit

$$K = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}. \quad (5.2)$$

Sie setzt sich zusammen aus den werkstoffabhängigen Größen E-Modul E und Querkontraktionszahl (Poisson-Zahl) ν und der Plattenhöhe h . Die Größe p ist der eingeprägte Druck, der als konstante Flächenlast angesetzt wird. Der in (5.1) verwendete Laplace-Operator ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch:

$$\Delta w(r, \varphi) = \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}.$$

Aufgrund der Annahme einer Rotationssymmetrie beschränkt sich der Laplace-Operator auf:

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw(r)}{dr} \right).$$

Die Plattendifferentialgleichung (5.1) geht somit über in

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw(r)}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{K} \quad (5.3)$$

bzw. mit Einführung der dimensionslosen Koordinate $\zeta = \frac{r}{R}$ und Beachtung der Kettenregel, mit einem beliebigen, allerdings zweckmäßigen Bezugsradius R (hier Radius der Einspannung), in

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left\{ \zeta \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \right) \right] \right\} = \frac{p \cdot R^4}{K}. \quad (5.4)$$

Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (5.4) kann aus der Überlagerung der homogenen und der partikulären Lösung zu

$$w(\zeta) = w_h(\zeta) + w_p(\zeta)$$

bestimmt werden. Durch vierfache Integration ergibt sich die homogene Lösung zu

$$w_h(\zeta) = C_1 \cdot \zeta^2 \ln(\zeta) + C_2 \cdot \zeta^2 + C_3 \cdot \ln(\zeta) + C_4$$

und die partikuläre Lösung unter Annahme eines konstanten Drucks zu

$$w_p(\zeta) = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K} \zeta^4.$$

Somit lautet die allgemeine Lösung

$$w(\zeta) = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K} \zeta^4 + C_1 \cdot \zeta^2 \ln(\zeta) + C_2 \cdot \zeta^2 + C_3 \cdot \ln(\zeta) + C_4. \quad (5.5)$$

Die Konstanten C_1 bis C_4 sind durch Betrachtung der Randbedingungen zu bestimmen. Entscheidend für die Randbedingungen am Radius R ist die Art der Plattenlagerung. Dabei werden üblicherweise die zwei idealen Extremfälle, der momentfreien und der eingespannten Lagerung der Platte betrachtet. Da die technische Realisierung dieser Idealfälle schwierig ist, wird hier eine allgemeinere Lösung, die eine elastische Einspannung vorsieht, angestrebt. Eine elastische Einspannung der Platte wirkt sich auf das radiale Moment m_{rr} am Rand aus, was durch

$$m_{rr}(\zeta)\Big|_{\zeta=1} = c_D \cdot \frac{dw(\zeta)}{dr}\Big|_{\zeta=1} = \frac{c_D}{R} \cdot \frac{dw(\zeta)}{d\zeta}\Big|_{\zeta=1} \quad (5.6)$$

mit der Drehfedersteifigkeit c_D beschrieben wird [29]. Dabei gleicht eine verschwindende Drehfedersteifigkeit $c_D = 0$ einer momentfreien Lagerung, während eine unendliche Drehfedersteifigkeit $c_D \rightarrow \infty$, mit der Annahme eines endlichen radialen Moments $m_{rr} < \infty$, der eingespannten Lagerung entspricht. Somit werden die zwei idealen Lagerungsfälle durch geeignete Wahl der Drehfedersteifigkeit berücksichtigt. Am Rand der Platte ($\zeta = 1$) muss die Auslenkung verschwinden, was zu der Bedingung $w(1) = 0$ führt. Im Mittelpunkt der Platte ($\zeta = 0$) muss die Auslenkung ungleich null, aber endlich sein. Zudem darf hier aus Stetigkeitsgründen keine Neigung auftreten. Damit sind im Mittelpunkt der Platte die Randbedingungen $w(0) \neq 0, \infty$ und $\frac{dw(\zeta)}{d\zeta}\Big|_{\zeta=0} = 0$ einzuhalten. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen ergibt sich die Lösung nach Anhang B.1 zu

$$w(\zeta) = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K} (1 - \zeta^2) \cdot \left(\frac{5 + \nu + c_D \frac{R}{K}}{1 + \nu + c_D \frac{R}{K}} - \zeta^2 \right) \quad (5.7)$$

bzw.

$$w(\zeta) = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K} (1 - \zeta^2) \cdot (\alpha_w - \zeta^2) \quad (5.8)$$

mit

$$\alpha_w = \frac{5 + \nu + c_D \frac{R}{K}}{1 + \nu + c_D \frac{R}{K}}. \quad (5.9)$$

Die Werte von α_w können zwischen $\alpha_w = 1$ bei Einspannung (unendliche Drehfedersteifigkeit, $c_D \rightarrow \infty$) und $\alpha_w = \frac{5 + \nu}{1 + \nu}$ bei momentfreier Lagerung (verschwindende Drehfedersteifigkeit, $c_D = 0$), abhängig von dem realisierten Aufbau und den gewählten Materialien, liegen [9].

Die Verformung der Platte weist nach (5.7) ein Maximum im Mittelpunkt bei $\zeta = 0$ auf, was in **Abbildung 5.6**, die einen normierten Verlauf der Verformung in Abhängigkeit der einheitenlosen Koordinate ζ und der Drehfedersteifigkeit c_D aufzeigt, dargestellt ist. Die Verformung ist auf $w_B = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K}$, die Auslenkung der Plattenmitte bei Einspannung der Platte, normiert. Es ist zu erkennen, dass die Neigung der Auslenkung nur bei eingespannter Platte ($c_D \rightarrow \infty$), wie durch die Randbedingungen gefordert, am Rand null ist. Wird, wie hier angestrebt, eine Druckmessung über

eine Wegmessung durchgeführt, so ist diese aufgrund der höchsten Auslenkung in der Plattenmitte anzuordnen.

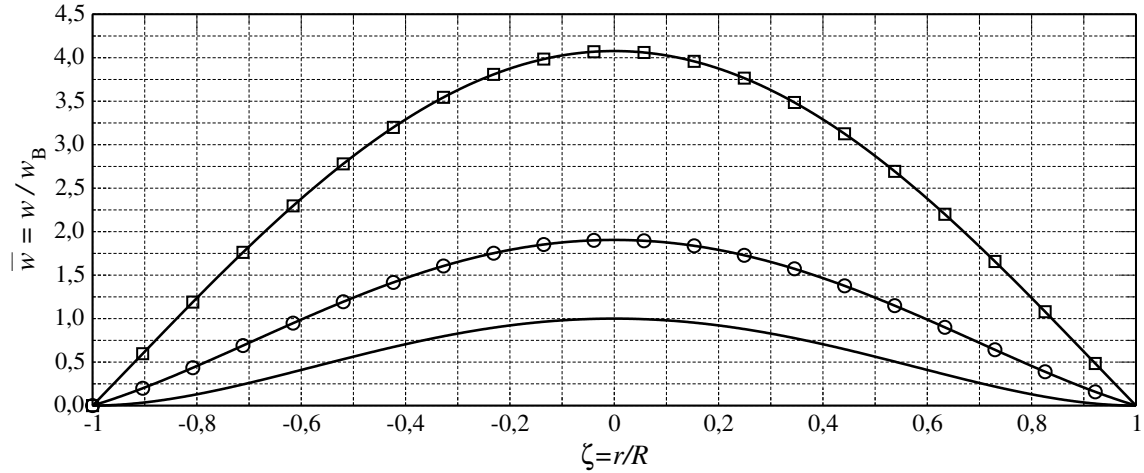


Abbildung 5.6: Normierter Verlauf der Plattenverformung in Abhängigkeit von ζ , c_D

- $c_D \rightarrow \infty$, $\alpha_w = 1$, Einspannung
- $c_D = 1500 \text{ N}$, $\alpha_w \approx 1,9$, elastische Einspannung
- $c_D = 0$, $\alpha_w \approx 4,08$, momentfreie Lagerung

Die mechanische Dehnung und Spannung in radialer, sowie tangentialer Richtung lässt sich aus der ermittelten Verformung bestimmen. Die Maximalwerte treten dabei an den Oberflächen der Platte auf. Die Dehnung und Spannung ist an der unteren Plattenoberfläche ($z = \frac{h}{2}$) gegeben durch [9, 29, 30, 31]:

$$\varepsilon_{rr}(\zeta) = -z \frac{d^2 w(\zeta)}{dr^2} = \frac{3 R^2 p}{16 h^2 E} \cdot (1 - \nu^2) (1 + \alpha_w - 6\zeta^2) \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}(\zeta) = -z \frac{1}{r} \frac{dw(\zeta)}{dr} = \frac{3 R^2 p}{16 h^2 E} (1 - \nu^2) (1 + \alpha_w - 2\zeta^2) \quad (5.11)$$

$$\sigma_{rr}(\zeta) = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{rr}(\zeta) + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}(\zeta)) = \frac{3 R^2 p}{16 h^2} \left[(1 + \nu)(1 + \alpha_w) - 2(3 + \nu)\zeta^2 \right] \quad (5.12)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\zeta) = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{\varphi\varphi}(\zeta) + \nu \varepsilon_{rr}(\zeta)) = \frac{3 R^2 p}{16 h^2} \left[(1 + \nu)(1 + \alpha_w) - 2(1 + 3\nu)\zeta^2 \right] \quad (5.13)$$

Die ermittelten Plattenzustände sind in den **Abbildungen 5.7** und **5.8** normiert dargestellt. Die Zustände der Platte sind im Fall der Dehnungen auf die Größe $\varepsilon_B = \frac{3 R^2 p}{8 h^2 E} \cdot (1 - \nu^2)$ und im Fall der Spannungen auf $\sigma_B = \frac{3 R^2 p}{8 h^2} (1 + \nu)$ normiert, was der Dehnung bzw. der Spannung in der Plattenmitte bei Einspannung

der Platte entspricht. In radialer Richtung weisen die Dehnungen und Spannungen am Rand die höchsten Werte auf, während das Maximum in tangentialer Richtung in der Plattenmitte liegt. Die Abbildung des Dehnungsverlaufs zeigt, dass bei Verwendung von Dehnungsmessstreifen, diese in der Plattenmitte und möglichst nah am Plattenrand, mit einer radialen Dehnrichtung, zu platzieren sind [9].

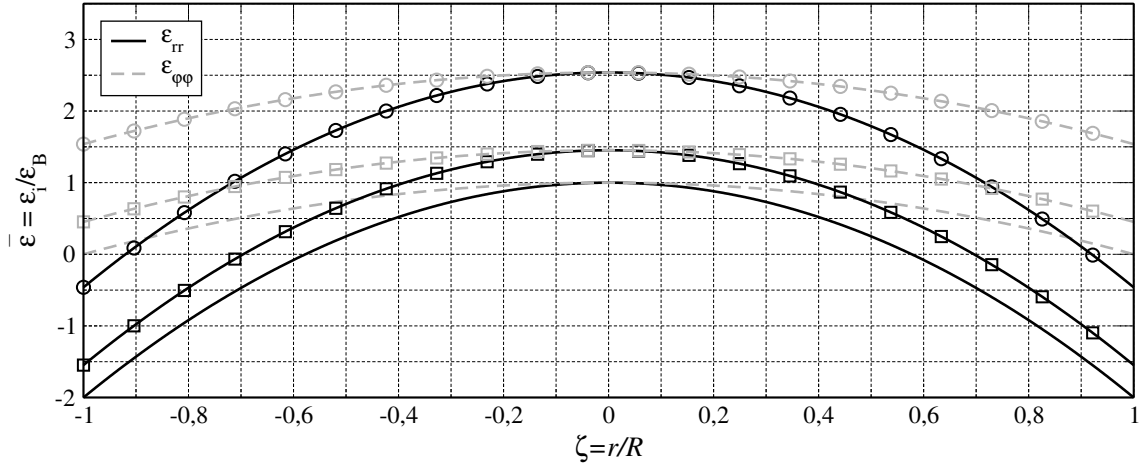


Abbildung 5.7: Normierte Dehnungen an der Plattenoberfläche ($z = \frac{h}{2}$) in Abhängigkeit von ζ , c_D

- $c_D \rightarrow \infty$, $\alpha_w = 1$, Einspannung
- $c_D = 1500 \text{ N}$, $\alpha_w \approx 1,9$, elastische Einspannung
- $c_D = 0$, $\alpha_w \approx 4,08$, momentfreie Lagerung

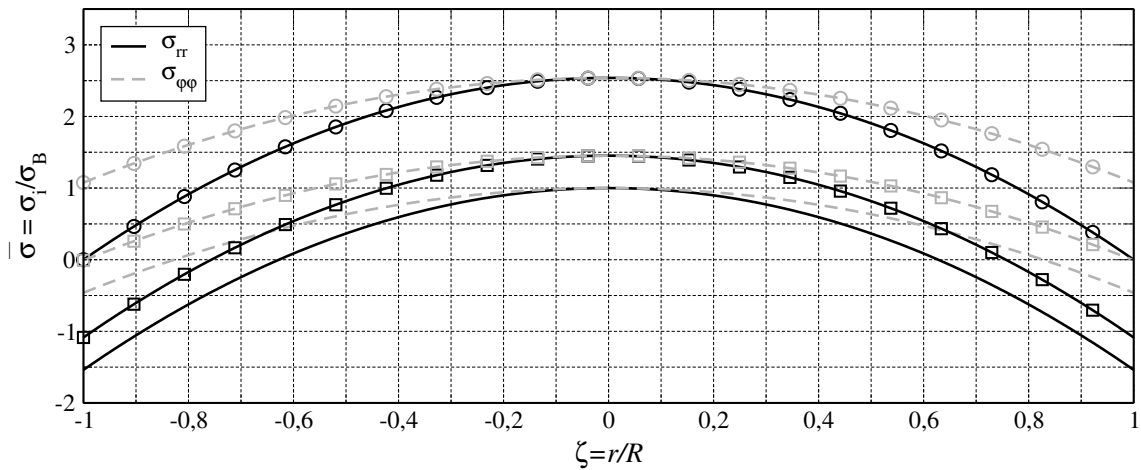


Abbildung 5.8: Normierte Spannungen an der Plattenoberfläche ($z = \frac{h}{2}$) in Abhängigkeit von ζ , c_D

- $c_D \rightarrow \infty$, $\alpha_w = 1$, Einspannung
- $c_D = 1500 \text{ N}$, $\alpha_w \approx 1,9$, elastische Einspannung
- $c_D = 0$, $\alpha_w \approx 4,08$, momentfreie Lagerung

Die aufgezeigten Ergebnisse dieses Kapitels haben eine Gültigkeit, die auf den Bereich $\frac{w}{h} < 0,2$ der Plattenverformung eingeschränkt ist. Für die hier verwendete Platte gelten die aufgezeigten Beziehungen damit lediglich bis zu einem Differenzdruck gegen Atmosphäre von ca. $3,5 \cdot 10^5$ Pa. Werden höhere Drücke und damit verbunden höhere Auslenkungen der Platte erwartet, so ist die Theorie für große Durchbiegungen anzusetzen, was im Folgenden betrachtet wird. Die Lösung der Plattendifferentialgleichung (5.1) dieses Kapitels findet als Lösungsansatz in den Näherungslösungen zur Beschreibung der großen Durchbiegung Verwendung.

5.2.2 Verformung mit großer Durchbiegung

Treten bei einer Platte große Durchbiegungen im Sinne von $0,2 < \frac{w}{h} < 5$ auf, so sind geometrisch nichtlineare Terme der kinematischen Gleichungen nicht mehr vernachlässigbar. Die bisher vernachlässigten Scheibenschnittgrößen werden hier mitbetrachtet und führen zu einer Kopplung der Platten- und Scheibentheorie. Hierdurch resultiert eine wesentliche Beeinflussung des Gleichgewichtszustands der Platte, der bei den hier betrachteten großen Durchbiegungen am differentiellen **verformten** Plattenelement betrachtet wird. Die Verschiebung der Mittelfläche, die für die Betrachtung des Gleichgewichtszustands nötig ist, wird durch die Größe u beschrieben. Des Weiteren gelten die zuvor getroffenen Annahmen.

Zur Beschreibung der Scheibenschnittgrößen (Membranspannungen) wird die sogenannte Airysche Spannungsfunktion $\Phi(r, \varphi)$ eingeführt. Sie ist über

$$n_{rr}(r, \varphi) = h \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$n_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = h \cdot \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial r^2}$$

$$n_{r\varphi}(r, \varphi) = n_{\varphi r}(r, \varphi) = -h \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right) = -h \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right)$$

mit den Membranspannungen verknüpft [29, 30]. Was aufgrund der Rotationssymmetrie in

$$n_{rr}(r) = h \cdot \frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \quad (5.14)$$

$$n_{\varphi\varphi}(r) = h \cdot \frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} \quad (5.15)$$

$$n_{r\varphi}(r) = n_{\varphi r}(r) = 0 \quad (5.16)$$

übergeht. Die getroffenen Annahmen und die Gleichgewichtsbedingungen führen zu

dem Gleichungssystem

$$\Delta\Delta w(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw(r)}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{K} + \frac{h}{K} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{dw(r)}{dr} \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) \quad (5.17)$$

$$\Delta\Delta\Phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) \right] \right\} = -\frac{E}{2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\left(\frac{dw(r)}{dr} \right)^2 \right], \quad (5.18)$$

dessen Lösung die Plattenverformung beschreibt [29, 30, 32, 33]. Das Differentialgleichungssystem (5.17), (5.18) weist eine Kopplung der Scheibenschnittgrößen durch die Spannungsfunktion $\Phi(r)$ und der Plattengrößen auf. Dies ist ein Unterschied zum Fall der kleinen Verformungen (5.1). Zudem ist das Differentialgleichungssystem durch den Anteil $\left(\frac{dw(r)}{dr}\right)^2$ und $\left(\frac{dw(r)}{dr} \cdot \frac{d\Phi(r)}{dr}\right)$ nichtlinear. Die Dehnungen und Spannungen der Platte sind durch:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}(r) &= -z \frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{E} \left(\frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} - \nu \frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} \right) \\ &= \underbrace{-z \frac{d^2 w(r)}{dr^2}}_{\varepsilon_{rr,B}} + \underbrace{\frac{1}{Eh} (n_{rr}(r) - \nu n_{\varphi\varphi}(r))}_{\varepsilon_{rr,M}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi}(r) &= -z \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} + \frac{1}{E} \left(\frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) \\ &= \underbrace{-z \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr}}_{\varepsilon_{\varphi\varphi,B}} + \underbrace{\frac{1}{Eh} (n_{\varphi\varphi}(r) - \nu n_{rr}(r))}_{\varepsilon_{\varphi\varphi,M}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr}(r) + \nu \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi}(r)) \\ &= \underbrace{-z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right)}_{\sigma_{rr,B}} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr}}_{\sigma_{rr,M}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}(r) &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi\varphi}(r) + \nu \cdot \varepsilon_{rr}(r)) \\ &= \underbrace{-z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} + \nu \frac{d^2 w(r)}{dr^2} \right)}_{\sigma_{\varphi\varphi,B}} + \underbrace{\frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2}}_{\sigma_{\varphi\varphi,M}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

bestimmt [29, 30, 33]. In der Literatur werden die Platten- und Scheibenanteile in den Dehnungen und Spannungen häufig getrennt betrachtet, was hier durch die Indizes B und M für Biege- und Membrananteil angedeutet ist, aber nicht weiter betrachtet wird.

Eine geschlossene Lösung des Differentialgleichungssystems (5.17), (5.18) existiert nicht. Eine Reihenlösung ist in [31, 34] dargestellt und einige unter bestimmten An-

nahmen erhaltene Näherungslösungen sind in [29, 32, 33, 35] gegeben. Nachfolgend werden diese Lösungen unter Einbeziehung der eingeführten Drehfedersteifigkeit dargestellt und verglichen.

Reihenansatz

Die in [31, 34] dargestellte Reihenlösung wird hier mit anderen dimensionslosen Größen und daraus resultierenden anderen Ansätzen betrachtet. Zudem wird die bereits eingeführte Drehfedersteifigkeit berücksichtigt.

Eine Multiplikation der Gleichungen (5.17), (5.18) mit r gefolgt von einer Integration und anschließender Division durch r führt zu folgendem Differentialgleichungssystem:

$$K \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw(r)}{dr} \right) \right] = \frac{p r}{2} + \frac{h}{r} \frac{dw(r)}{dr} \frac{d\Phi(r)}{dr} \quad (5.23)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) \right] = -\frac{E}{2r} \left(\frac{dw(r)}{dr} \right)^2 \quad (5.24)$$

welches mit den Beziehungen (5.14), (5.15) in

$$K \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw(r)}{dr} \right) \right] = \frac{p r}{2} + n_{rr}(r) \frac{dw(r)}{dr} \quad (5.25)$$

$$r \frac{d}{dr} \left(n_{rr}(r) + n_{\varphi\varphi}(r) \right) = -\frac{E h}{2} \left(\frac{dw(r)}{dr} \right)^2 \quad (5.26)$$

übergeht. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden die folgenden dimensionslosen Größen

$$\zeta = \frac{r}{R}, \quad H = \frac{h}{R}, \quad Q = \frac{p}{E}, \quad \Theta R = \frac{dw}{dr}, \quad S_{rr} = \frac{n_{rr}}{E h}, \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{n_{\varphi\varphi}}{E h} \quad (5.27)$$

eingeführt. Die Auslenkung der Platte verhält sich axialsymmetrisch und muss demnach eine gerade Funktion sein. Die Ableitung nach r bzw. ζ führt zu einer ungeraden Funktion, weshalb für Θ ein ungerader Funktionsansatz gewählt wird. Der Ansatz für Θ muss die Randbedingung $\left. \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} = \Theta(\zeta) \right|_{\zeta=0} = 0$ erfüllen, woraus ersichtlich ist, dass der Ansatz keinen konstanten Anteil enthalten darf. Die Spannungsfunktion Φ verhält sich ebenfalls axialsymmetrisch, weshalb ein gerader Funktionsansatz gewählt wird.

$$\Theta(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \zeta^{2k-1}, \quad \Phi(\zeta) = E h R \sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta^{2k}. \quad (5.28)$$

Der Unterschied zu [31, 34] liegt in der Ortskoordinate ζ und daraus resultierend auch in den Lösungsansätzen.

Die Plattenverformung wird durch Integration von Θ bestimmt.

$$w(\zeta) = R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} A_k \zeta^{2k} + A_0. \quad (5.29)$$

Die Randbedingungen des Kapitels 5.2.1 gelten nach wie vor, womit sich die Konstante A_0 mit $w(\zeta) \Big|_{\zeta=1} = 0$ zu

$$A_0 = -R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} A_k. \quad (5.30)$$

ergibt und man für die Auslenkung

$$w(\zeta) = R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} A_k (\zeta^{2k} - 1) \quad (5.31)$$

erhält. Mit dem gewählten Ansatz für die Spannungsfunktion Φ erhält man mit

$$n_{rr}(\zeta) = \frac{h}{R^2} \frac{1}{\zeta} \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}, \quad n_{\varphi\varphi}(\zeta) = \frac{h}{R^2} \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} \quad (5.32)$$

für die normierten Membranspannungen S_{rr} , $S_{\varphi\varphi}$

$$S_{rr}(\zeta) = 2H \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \zeta^{2k-2}, \quad S_{\varphi\varphi}(\zeta) = 2H \sum_{k=1}^{\infty} k(2k-1) B_k \zeta^{2k-2}. \quad (5.33)$$

Somit geht das betrachtete Differentialgleichungssystem unter Einbeziehung der eingeführten dimensionslosen Größen in

$$\frac{H^2}{12(1-\nu^2)} \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} (\zeta \Theta(\zeta)) \right] = \frac{Q}{2H} \zeta + S_{rr}(\zeta) \Theta(\zeta) \quad (5.34)$$

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} (S_{rr}(\zeta) + S_{\varphi\varphi}(\zeta)) = -\frac{1}{2} (\Theta(\zeta))^2 \quad (5.35)$$

über. Zur vollständigen Lösung des Differentialgleichungssystems sind die Konstanten A_k , B_k der Reihenansätze zu bestimmen. Da die Erfüllung des Gleichungssystems für beliebige $\zeta \in [0 \dots 1]$ gegeben sein muss, sind die jeweiligen Potenzen von ζ auf der linken und rechten Seite der Gleichungen zu betrachten. Nach Anhang B.2 erhält man die folgenden rekursiven Beziehungen:

$$A_2 = \frac{3(1-\nu^2)}{2H^2} \left(\frac{Q}{2H} + 2HA_1B_1 \right) \quad (5.36)$$

$$A_k = \frac{6(1-\nu^2)}{k(k-1)H^2} \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m A_{k-m} B_m \quad \text{für } k > 2 \quad (5.37)$$

$$B_k = -\frac{1}{16H} \frac{1}{k^2(k-1)} \cdot \sum_{m=1}^{k-1} A_{k-m} A_m \quad \text{für } k > 1. \quad (5.38)$$

Die Konstanten A_1 und B_1 , von denen die gesamte Lösung abhängt, sind über die Randbedingungen zu bestimmen. Zu den bisher betrachteten Randbedingungen kommt eine weitere hinzu. Diese betrifft die Verschiebung der Mittelfläche, beschrieben durch die Größe u . Am Ort der Lagerung ($r = R$ bzw. $\zeta = 1$) kann aufgrund der nicht verschieblichen Lagerung keine Verschiebung auftreten. Somit lautet die weitere Randbedingung $u(\zeta)|_{\zeta=1} = 0$. Die Verschiebung u ist bei angenommener Rotationssymmetrie gegeben durch:

$$u(r) = r \cdot \varepsilon_\varphi(r) \Big|_{z=0}. \quad (5.39)$$

Mit $z = 0$ und den normierten Membranspannungen (5.27) folgt aus (5.20):

$$u(r) = r \cdot \left(S_{\varphi\varphi}(r) - \nu S_{rr}(r) \right) \quad (5.40)$$

bzw.

$$u(\zeta) = R \cdot \zeta \cdot \left(S_{\varphi\varphi}(\zeta) - \nu S_{rr}(\zeta) \right). \quad (5.41)$$

Aus der genannten Randbedingung $u(\zeta)|_{\zeta=1} = 0$ folgt:

$$\left(S_{\varphi\varphi}(\zeta) - \nu S_{rr}(\zeta) \right) \Big|_{\zeta=1} = 2H \left(\sum_{k=1}^{\infty} k(2k-1) B_k - \nu \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \right) = 0, \quad (5.42)$$

womit für die Konstanten B_k

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(2k-1-\nu) B_k = 0 \quad (5.43)$$

erfüllt sein muss. Die zweite Randbedingung ist aufgrund der elastischen Einspannung durch (5.6) zu

$$m_{rr}(\zeta) \Big|_{\zeta=1} = c_D \cdot \frac{dw(\zeta)}{dr} \Big|_{\zeta=1} = \frac{c_D}{R} \cdot \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=1} = \frac{c_D}{R} \cdot \Theta(\zeta) \Big|_{\zeta=1}$$

gegeben. Mit dem durch (B.4) gegebenen radialen Moment m_{rr}

$$\begin{aligned} m_{rr}(\zeta) &= -\frac{K}{R^2} \left(\frac{d^2w(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{\nu}{\zeta} \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \right) = -\frac{K}{R^2} \left(\frac{d\Theta(\zeta)}{d\zeta} + \frac{\nu}{\zeta} \Theta(\zeta) \right) \\ &= -\frac{K}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1+\nu) A_k \zeta^{2k-2} \end{aligned}$$

folgt für die Konstanten A_k :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(2k-1+\nu + c_D \frac{R}{K} \right) A_k = 0. \quad (5.44)$$

Da für die Konstanten A_k, B_k ein rekursiver Zusammenhang besteht, ist eine explizite analytische Bestimmung von A_1 und B_1 nicht möglich. Somit bietet sich zur Bestimmung der Konstanten nur eine numerische Lösung der Bedingungen (5.43, 5.44) an, was mittels des Newton-Verfahrens [36, 37], hier zweidimensional, gelöst wurde. Aus Gründen der numerischen Genauigkeit ist die Bedingung (5.44) bei hoher Drehfedersteifigkeit c_D in der Schreibweise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k-1+\nu}{c_D \frac{R}{K}} + 1 \right) A_k = 0 \quad (5.45)$$

anzuwenden. Für die numerische Lösung und Darstellung der Ergebnisse sind nur begrenzte Reihenglieder betrachtet worden. Bei $k_{\max} > 10$ Reihengliedern werden die Bedingungen analytisch sehr umfangreich und es ist sinnvoller, statt der nötigen Funktionsableitung im Newton-Verfahren, den entsprechenden Differenzenquotienten der Funktion zu nutzen. Für die Erstellung der **Abbildung 5.9** ist mit einem Differenzdruck gegen Atmosphäre von $p = 0$ Pa begonnen worden und als Anfangswerte für das Newton-Verfahren sehr kleine Werte $A_1 = 10^{-6}, B_1 = 10^{-6}$ gewählt worden. Für höhere Drücke sind jeweils die zuletzt bestimmten Konstanten A_1, B_1 als Anfangswerte gewählt worden.

Näherungsansatz

Die Lösung des dargestellten Reihenansatzes ist nur numerisch bestimmbar und lässt die wesentlichen Abhängigkeiten der Verformung nicht erkennen. Aus diesem Grund wird nachfolgend eine Näherungslösung aufgezeigt. Von den diversen Näherungsmethoden, die zur Bestimmung von Näherungslösungen nichtlinearer Differentialgleichungen dienen, wird hier die Methode der gewichteten Residuen bzw. Fehlerorthogonalisierungsmethode, speziell das Galerkin-Verfahren [29, 37], angewendet.

Die Idee der gewichteten Residuen besteht darin, mit Hilfe von Ansatzfunktionen, die die Randbedingungen erfüllen, eine Näherungslösung für das entsprechende Differentialgleichungssystem zu bestimmen. Da die Ansatzfunktionen im Allgemeinen nicht der richtigen Lösung entsprechen, führt das Einsetzen des Ansatzes in das Differentialgleichungssystem zu einer Fehlerfunktion bzw. einem Residuum ϵ . Die dann noch unbestimmten Konstanten können nach folgender Minimierungsvorschrift in dem betreffenden Gebiet Ω bestimmt werden:

$$\int_{\Omega} \epsilon W_i d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.46)$$

Mittels der Gewichtungsfunktionen W_i und der Minimierungsvorschrift sind die unbekannt Konstanten zu bestimmen. Das Galerkin-Verfahren sieht vor, die Ansatzfunktionen als Gewichtungsfunktionen zu verwenden.

Der Näherungsansatz basiert auf dem Ergebnis des linearen Ansatzes. Zur Lösung des Differentialgleichungssystems (5.17), (5.18), wird die in Kapitel 5.2.1 erhaltene

Lösung der Plattenverformung

$$w(\zeta) = w_0 \left(1 - \zeta^2\right) \cdot \left(\alpha_w - \zeta^2\right), \quad (5.47)$$

mit einer zu bestimmenden Auslenkung w_0 in Plattenmitte, als Ansatz für die Verformung gewählt. Die Verwendung dieses Ansatzes in (5.18) und vierfache Integration nach ζ führt zu der folgenden Gleichung für die Airysche Spannungsfunktion $\Phi(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) = -4E w_0^2 \left(\frac{\zeta^8}{192} - \frac{\zeta^6}{72}(1 + \alpha_w) + \frac{\zeta^4}{64}(1 + \alpha_w)^2 \right) + \frac{C_1}{2} \zeta^2 \left(\ln(\zeta) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4\zeta} \right) \\ + \frac{C_2}{4} \zeta^2 + C_3 \ln(\zeta). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Die Konstanten C_1 bis C_3 sind durch die bereits im Reihenansatz betrachteten Randbedingungen zu bestimmen. Unter Beachtung der Randbedingungen ergibt sich die Lösung der Spannungsfunktion nach Anhang B.3.1 zu

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) = -\frac{E w_0^2}{6} \left(\frac{\zeta^8}{8} - \frac{\zeta^6}{3}(1 + \alpha_w) + \frac{3}{8} \zeta^4 (1 + \alpha_w)^2 \right. \\ \left. - \frac{\zeta^2 (3 - \nu)(1 + 3\alpha_w^2) - 2\alpha_w(1 + \nu)}{4(1 - \nu)} \right). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Mit der Ansatzfunktion (5.47) und der damit erhaltenen Spannungsfunktion Φ , ist es möglich, die noch verbleibende Konstante w_0 mit Hilfe der Fehlerorthogonalisierung (5.46) zu bestimmen [29, 33]. Das Gebiet des Differentialgleichungssystems ist durch die Fläche der Platte begrenzt. Als Gewichtungsfunktion wird nach dem Galerkin-Verfahren die Ansatzfunktion verwendet, womit sich das Residuum aus der Differentialgleichung (5.17) mit der einheitenlosen Koordinate ζ zu

$$\begin{aligned} \epsilon(\zeta) &= K \Delta \Delta w(\zeta) - p R^4 - \frac{h}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} \right) \\ \epsilon(\zeta) &= 64 K w_0 - p R^4 + \frac{E h w_0^3}{3} \left(20 \zeta^8 - 40 (1 + \alpha_w) \zeta^6 + 30 (1 + \alpha_w)^2 \zeta^4 \right. \\ &\quad \left. - 6 (1 + \alpha_w)^3 \zeta^2 + \frac{(3 - \nu)(1 + \alpha_w^2) - 2\alpha_w(1 + \nu)}{1 - \nu} (1 + \alpha_w - 4\zeta^2) \right) \end{aligned} \quad (5.50)$$

ergibt. Resultierend ist aus der Gleichung der Fehlerorthogonalisierung

$$\int_A \epsilon(\zeta) \cdot w(\zeta) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \epsilon(\zeta) \cdot w(\zeta) \cdot \zeta d\varphi d\zeta = 0 \quad (5.51)$$

die Konstante w_0 zu bestimmen. Durch Integration erhält man die nachfolgende Gleichung

$$\frac{\pi K (3\alpha_w - 1) w_0}{169344} \left[-\frac{p R^4}{64 K} + w_0 + \frac{w_0^3}{h^2} \frac{1 + \nu}{112 (3\alpha_w - 1)} \left(8 - 56\alpha_w (1 - \alpha_w + 3\alpha_w^2) + (7 - \nu)(1 + 14\alpha_w^2 + 21\alpha_w^4) \right) \right] = 0,$$

die für den interessierenden Fall $w_0 \neq 0$ in die kubische Gleichung

$$\frac{p R^4}{64 K} = w_0 + \frac{w_0^3}{h^2} \frac{1 + \nu}{112 (3\alpha_w - 1)} \cdot \left(8 - 56\alpha_w (1 - \alpha_w + 3\alpha_w^2) + (7 - \nu)(1 + 14\alpha_w^2 + 21\alpha_w^4) \right) \quad (5.52)$$

übergeht. Zur Bestimmung der Auslenkung in der Plattenmitte ist die Gleichung (5.52) nach w_0 aufzulösen. Die reelle der drei Lösungen ist durch

$$w_0 = \sqrt[3]{a_0 + \sqrt{a_1^3 + a_0^2}} - \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0 + \sqrt{a_1^3 + a_0^2}}} \quad (5.53)$$

mit

$$a_0 = \frac{21 (1 - \nu)(3\alpha_w - 1) p R^4}{2 E h} \frac{1}{8 - 56\alpha_w (1 - \alpha_w + 3\alpha_w^2) + (7 - \nu)(1 + 14\alpha_w^2 + 21\alpha_w^4)}$$

$$a_1 = \frac{112 (3\alpha_w - 1) h^2}{3 (1 + \nu)} \frac{1}{8 - 56\alpha_w (1 - \alpha_w + 3\alpha_w^2) + (7 - \nu)(1 + 14\alpha_w^2 + 21\alpha_w^4)}$$

gegeben [36, 38].

Mit Hilfe der Energiemethode [31] bzw. der Methode der virtuellen Verschiebung [29] (Verfahren nach Ritz) erhält man dasselbe Ergebnis. Die Variation des elastischen Gesamtpotentials Π mit der Bedingung $\delta\Pi = 0$ führt mit einem Näherungsansatz ebenfalls zu einer Näherungslösung. Das elastische Gesamtpotential ist durch den Anteil Π_a der äußeren Kräfte

$$\Pi_a(w) = \int_A p(r, \varphi) w(r, \varphi) dA \quad (5.54)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R p w_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \left(\alpha_w - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) r d\varphi dr = \frac{\pi}{6} p R^2 w_0 (3\alpha_w - 1) \quad (5.55)$$

und den Anteil Π_i der inneren Kräfte

$$\Pi_i(w) = W_B + W_M + W_D \quad (5.56)$$

zu

$$\Pi(w) = \Pi_a(w) - \Pi_i(w) \quad (5.57)$$

gegeben. Das Potential der inneren Kräfte setzt sich aus den Formänderungsenergien der Plattenmomente W_B , der Membrankräfte W_M und der elastischen Einspannung W_D zusammen. Die Formänderungsenergie W_D ist nach Einsetzen des Ansatzes (5.47) und Integration über den Plattenrand bei $r = R$ bestimmt durch [29]:

$$W_D = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} c_D \left(\frac{dw(r)}{dr} \right)^2 d\Gamma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} c_D \left(\frac{dw(r)}{dr} \Big|_{r=R} \right)^2 R d\varphi \quad (5.58)$$

$$= -4\pi \frac{K}{R^2} w_0^2 \left(4(1 - \alpha_w) + (1 + \nu)(1 - \alpha_w)^2 \right). \quad (5.59)$$

Dabei wurde für die Drehfedersteifigkeit c_D die Gleichung

$$c_D = -\frac{K(1 - \alpha_w)(1 + \nu) + 4}{R(1 - \alpha_w)} \quad (5.60)$$

aus (5.9) verwendet.

Die Formänderungsenergie der Platte $W_{pl} = W_B + W_M$ lässt sich aus den Spannungen und Dehnungen (5.19), (5.21) durch das Volumenintegral

$$W_{pl} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{rr} \cdot \varepsilon_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi}) dV = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{rr} \cdot \varepsilon_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi}) r d\varphi dr dz \quad (5.61)$$

bestimmen [29]. Bei der Integration über die Plattenhöhe verschwinden die ungeraden Anteile bezüglich der z -Richtung und das Volumenintegral reduziert sich auf die beiden nachfolgenden Anteile [29, 31].

$$W_B = \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dw(r)}{dr} \right)^2 + \frac{2\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \frac{d^2 w(r)}{dr^2} \right] r d\varphi dr \quad (5.62)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{K}{R^2} w_0^2 \left(8 + 3(1 + \nu)(1 - \alpha_w)^2 \right) \quad (5.63)$$

$$W_M = \frac{h}{2E} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\left(\frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\Phi(r)}{dr} \right)^2 - \frac{2\nu}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} \right] r d\varphi dr \quad (5.64)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{K}{R^2} \frac{1 + \nu}{56} \frac{w_0^4}{h^2} \left[8 - 56\alpha_w \left(1 - \alpha_w + 3\alpha_w^2 \right) + (7 - \nu) \left(1 + 14\alpha_w^2 + 21\alpha_w^4 \right) \right] \quad (5.65)$$

Die virtuelle Verschiebung wird auf das Gesamtpotential bezüglich der zu bestimmenden Konstante w_0 angewandt.

$$\frac{\partial \Pi(w)}{\partial w_0} \delta w_0 = 0$$

Damit ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial \Pi_a(w)}{\partial w_0} = \frac{\partial W_B(w)}{\partial w_0} + \frac{\partial W_M(w)}{\partial w_0} + \frac{\partial W_D(w)}{\partial w_0} \quad (5.66)$$

zur Bestimmung der Konstante w_0 . Nach Anhang B.3.2 ergibt sich nach der Differentiation und einigen Umformungen das bereits bekannte Ergebnis (5.52). Damit führt sowohl die Methode der virtuellen Verschiebung (Ritz-Verfahren) als auch die Methode der Fehlerorthogonalisierung (Galerkin-Verfahren) zum selben Ergebnis der Plattenverformung bei großen Durchbiegungen.

Zum Vergleich der erhaltenen Lösung mit der Literatur wird die üblich betrachtete Einspannung als Lagerung $\left(\lim_{c_D \rightarrow \infty} \Rightarrow \alpha_w = 1 \right)$ gewählt. Damit vereinfacht sich (5.52) zu

$$\frac{p R^4}{64 K} = w_0 + \frac{(1 + \nu)(23 - 9\nu) w_0^3}{56 h^2} = w_0 + \gamma \frac{w_0^3}{h^2}. \quad (5.67)$$

Die diversen Lösungen des Problems der Plattenauslenkung bei großer Durchbiegung unterscheiden sich in dem Faktor γ . Für $\nu = 0,3$ sind die nachfolgenden Faktoren in der Literatur zu finden.

	(5.67)	[8, 29, 33]	[31]	[32, 35]	A. Nádái ¹	angepasst an Reihenlösung
γ	0,471	0,471	0,483	0,546	0,583	0,561

Tabelle 5.1: Vergleich des Faktors γ zur Anpassung des Verlaufs der Plattenverformung mit Werten aus der Literatur

Die erhaltenen Ergebnisse des nichtlinearen Ansatzes für große Durchbiegungen sind in Abbildung 5.9 dargestellt. Abgebildet ist die normierte Auslenkung der Plattenmitte $\bar{w} = \frac{w_0}{h}$ in Abhängigkeit der normierten Belastung $\bar{p} = \frac{p R^4}{E h^4}$ für den linearen Ansatz, den Näherungsansatz und die exakte Lösung, den Reihenansatz.

Der lineare Ansatz führt, wie in Kapitel 5.2.1 beschrieben, lediglich für Durchbiegungen $\frac{w}{h} < 0,2$ zu akzeptablen Ergebnissen. Bei höheren Belastungen wird die Plattenverformung überschätzt, was aus der Abbildung 5.9 ersichtlich wird. Die Funktionsform des Reihenansatzes wird durch die hier bestimmte Näherungslösung gut wiedergegeben. Die Abweichungen, die bei Durchbiegungen $\frac{w}{h} > 0,5$ auftreten, können durch die Anpassung des Faktors γ korrigiert werden. In γ geht die Drehfedersteifigkeit der Lagerung ein, die hier unter anderem von der Kraft, mit der die Platte geklemmt wird, abhängt und dadurch gewisse Schwankungen aufweisen kann.

¹Nádái, A.: Elastische Platten, Verlag Julius Springer 1925

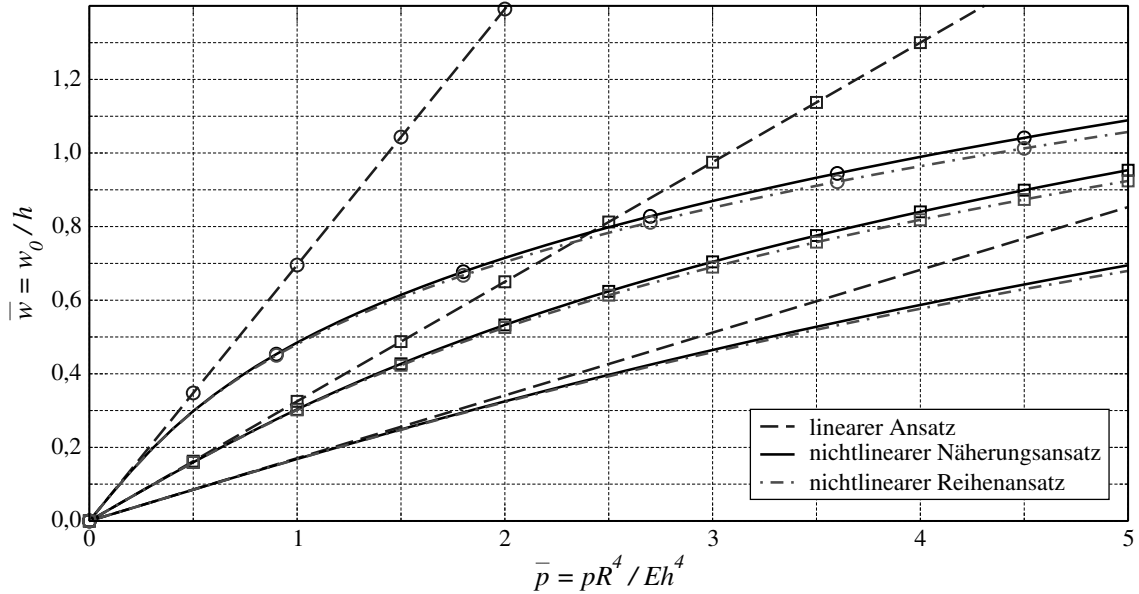


Abbildung 5.9: Normierte Auslenkung der Plattenmitte in Abhängigkeit einer normierten Belastung mit den Plattendaten:

$$h = 0,9 \text{ mm}, R = 25 \text{ mm}, E = 180 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}, \nu = 0,3$$

– $c_D \rightarrow \infty$, $\alpha_w = 1$, Einspannung

□ $c_D = 1500 \text{ N}$, $\alpha_w \approx 1,9$, elastische Einspannung

○ $c_D = 0$, $\alpha_w \approx 4,08$, momentfreie Lagerung

5.2.3 Bestimmung der Plattenbeanspruchung

Die ermittelte Näherungslösung und der Reihenansatz erlauben die Bestimmung der Plattenbeanspruchung durch (5.21),(5.22). Das Einsetzen der Näherungslösung führt zu den folgenden Beziehungen für die Plattenspannungen.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right) + \frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \\ &= -\frac{E w_0}{R^2} \left\{ \frac{2z}{1-\nu^2} \left[4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - (1 + \alpha_w) \right) (1 + \nu) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{w_0}{6} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^6 - 2(1 + \alpha_w) \left(\frac{r}{R} \right)^4 + \frac{3(1 + \alpha_w)^2}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{(3 - \nu)(1 + 3\alpha_w^2) - 2\alpha_w(1 + \nu)}{1 - \nu} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi\varphi}(r) &= -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} + \nu \frac{d^2 w(r)}{dr^2} \right) + \frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} \\
&= -\frac{E w_0}{R^2} \left\{ \frac{2z}{1-\nu^2} \left[\left(6 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - (1 + \alpha_w) \right) (1 + \nu) - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{w_0}{6} \left[7 \left(\frac{r}{R} \right)^6 - 10(1 + \alpha_w) \left(\frac{r}{R} \right)^4 + \frac{9(1 + \alpha_w)^2}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{(3 - \nu)(1 + 3\alpha_w^2) - 2\alpha_w(1 + \nu)}{1 - \nu} \right] \right\} \quad (5.69)
\end{aligned}$$

Mit dem Reihenansatz erhält man die folgenden Beziehungen für die Spannungen.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r) &= -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right) + \frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \\
&= -\frac{E}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1-\nu^2} (2k - 1 + \nu) A_k - 2hk B_k \right) \left(\frac{r}{R} \right)^{2k-2} \quad (5.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi\varphi}(r) &= -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} + \nu \frac{d^2 w(r)}{dr^2} \right) + \frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} \\
&= -\frac{E}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1-\nu^2} (1 + \nu(2k - 1)) A_k - 2hk(2k - 1) B_k \right) \left(\frac{r}{R} \right)^{2k-2} \quad (5.71)
\end{aligned}$$

Aus den Beziehungen für die Plattenspannungen ergeben sich die in **Abbildung 5.10** dargestellten normierten Spannungsverläufe $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_i R^2}{E h^2}$ in Abhängigkeit der normierten Belastung $\bar{p} = \frac{p R^4}{E h^4}$. Aufgezeigt sind jeweils die Spannungsverläufe σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ der Plattenoberfläche $z = \frac{h}{2}$ in der Plattenmitte $r = 0$ und am Plattenrand $r = R$.

Sowohl in radialer als auch in tangentialer Richtung weisen die Spannungen in der Plattenmitte dieselben Werte auf. Die Abweichungen zwischen dem Ergebnis der Näherungslösung und dem des Reihenansatzes sind für den hier interessierenden Bereich $\bar{p} < 3,5$ geringer als 5%. Für $\bar{p} > 3,5$ werden die Abweichungen deutlich höher, selbst wenn der Faktor γ in (5.67) an das Ergebnis des Reihenansatzes angepasst würde. Dies ist darin begründet, dass für die Auslenkung zwar ein nichtlineares Ergebnis erhalten worden ist, aber der Ansatz der Plattenverformung (5.47) lediglich einen linearen Zusammenhang zur Auslenkung der Plattenmitte w_0 aufweist. Ein erweiterter Ansatz, beispielsweise $w(\zeta) = g_1(\zeta) w_0 + g_2(\zeta) w_0^3$, würde sowohl für die Auslenkung als auch für die Spannungen bessere Ergebnissen liefern [35].

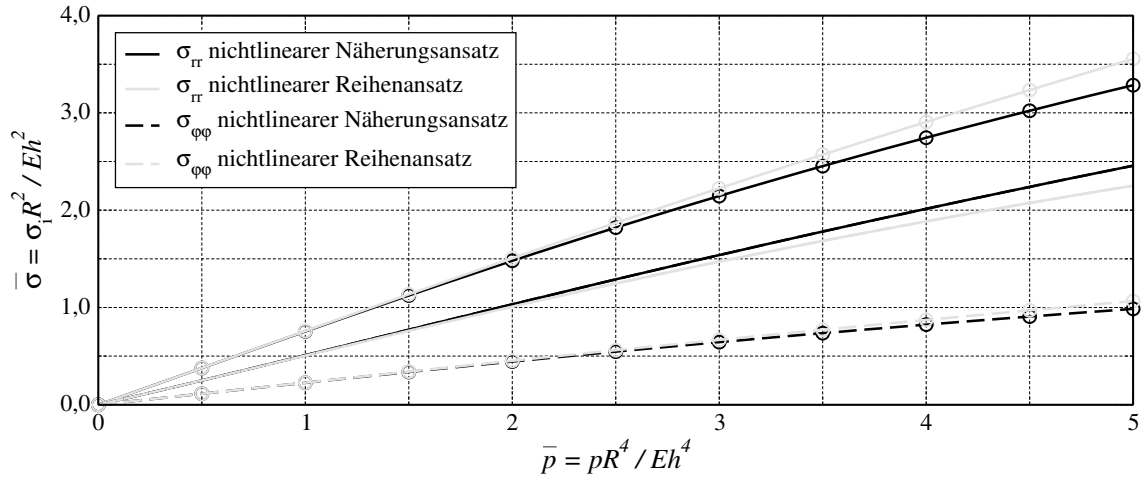


Abbildung 5.10: Normierte Spannungen der Plattenoberfläche ($z = \frac{h}{2}$) in Abhängigkeit einer normierten Belastung mit den Plattendaten:

$$h = 0,9 \text{ mm}, R = 25 \text{ mm}, E = 180 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}, \nu = 0,3$$

– Spannungen in der Plattenmitte $r = 0$

○ Spannungen am Plattenrand $r = R$

Zur Beurteilung der Plattenbeanspruchung sind die maximal auftretenden Spannungen zu betrachten. Der Anteil der Membranspannung in der Gesamtspannung ist für $0 \leq r \leq R$ positiv, während der Biegespannungsanteil, wie für den linearen Fall in Abbildung 5.8 gezeigt, auch negative Werte annehmen kann. Das Vorzeichen der Biegespannungen hängt von der betrachteten Plattenoberfläche ($z = \frac{h}{2}$ oder $z = -\frac{h}{2}$) ab. Somit ergeben sich aufgrund der immer positiven Membranspannung unterschiedliche Spannungen an der Plattenober- bzw. unterseite. Abbildung 5.10 stellt die hier interessierenden maximalen Spannungswerte ($|\sigma_i|_{\max}$) der Plattenoberfläche $z = \frac{h}{2}$ in der Plattenmitte und am Plattenrand dar.

Für die Auswahl des Plattenwerkstoffes wird die Gestaltänderungshypothese nach von Mises auf den ebenen Spannungszustand der Platte angewandt [39]. Die diversen Festigkeitshypothesen dienen der Bestimmung einer Vergleichsspannung. Sie stellt eine fiktive einachsige Spannung dar, die derselben Materialbeanspruchung entspricht, wie der reale mehrachsige Spannungszustand. Beschrieben durch

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2},$$

sagt die Gestaltänderungshypothese das Bauteilversagen bei Überschreitung eines Grenzwerts der Gestaltänderungsenergie voraus. Bei der hier betrachteten Platte mit vernachlässigten Schubspannungen resultiert für die Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\varphi\varphi}}. \quad (5.72)$$

Die sich aus den gewonnenen Ergebnissen ergebenden Vergleichsspannungen sind in den **Abbildungen 5.11 - 5.13**, mit $h = 0,9 \text{ mm}$, $R = 25 \text{ mm}$, $E = 180 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}$, $\nu = 0,3$ und $c_D = 1500 \text{ N}$ für die elastische Einspannung, dargestellt. Zum Vergleich sind die unterschiedlichen Lagerungsfälle, der Einspannung, der elastischen Einspannung und der momentfreien Lagerung, aufgezeigt. Es ist zu erkennen, dass sich die maximale Beanspruchung der Platte im Fall der Einspannung vom Rand hin zur Plattenmitte im Fall der momentfreien Lagerung verschiebt.

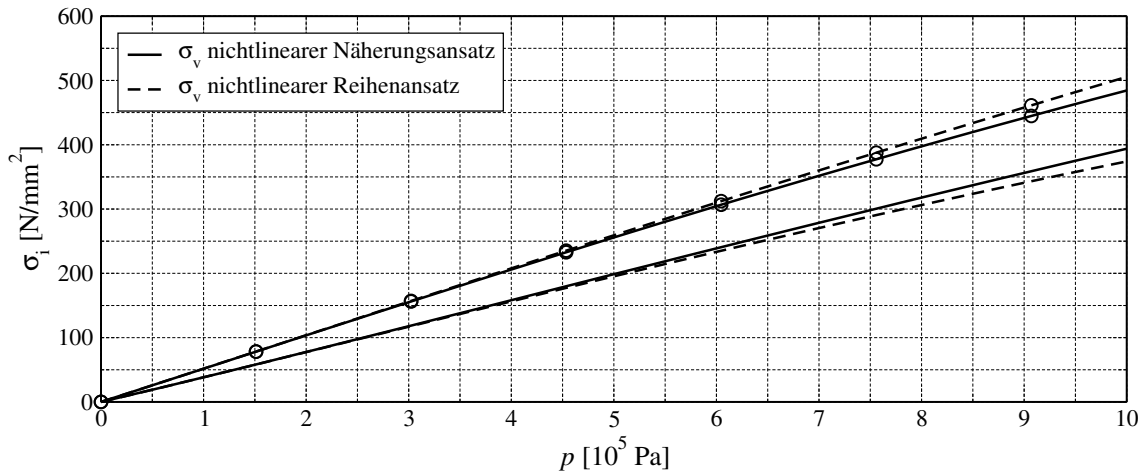


Abbildung 5.11: Vergleichsspannungen der eingespannten Platte

- Vergleichsspannungen in der Plattenmitte $r = 0$
- Vergleichsspannungen am Plattenrand $r = R$

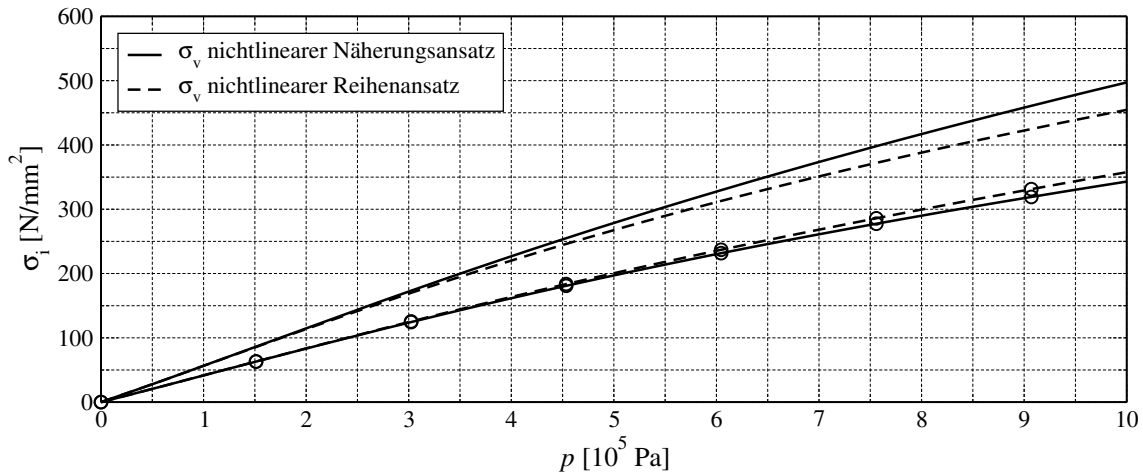


Abbildung 5.12: Vergleichsspannungen der elastisch eingespannten Platte

- Vergleichsspannungen in der Plattenmitte $r = 0$
- Vergleichsspannungen am Plattenrand $r = R$

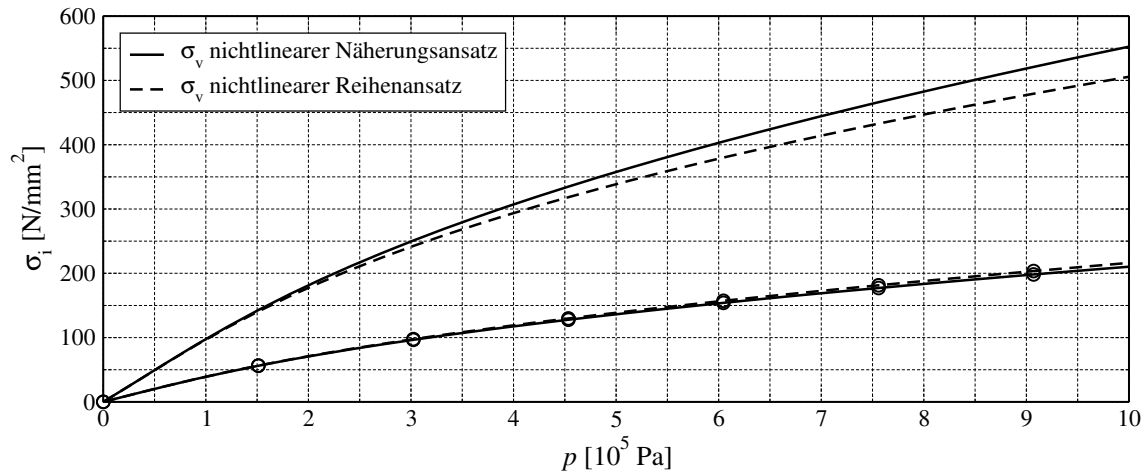


Abbildung 5.13: Vergleichsspannungen der momentfrei gelagerten Platte
 – Vergleichsspannungen in der Plattenmitte $r = 0$
 ○ Vergleichsspannungen am Plattenrand $r = R$

Für den hier interessierenden Bereich von $0 \dots 10 \cdot 10^5$ Pa Differenzdruck gegen Atmosphäre bleibt die Vergleichsspannung unterhalb von $600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Der Plattenwerkstoff sollte sich somit bis zu dieser Belastung linearelastisch Verhalten. Hier wird der Werkstoff X10CrNi18-8 (1.4310) verwendet. Dieser weist eine 0,2%-Dehngrenze von $R_{p0,2} \approx 1600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ auf und ist nach den Kraft-Weg-Diagrammen in [40] und den Angaben der 0,01%-Dehngrenze von $R_{p0,01} \approx 1000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ in [41] in dem geforderten Bereich linearelastisch. Der Werkstoff erfüllt in dem hier auftretenden Belastungsbereich das Kriterium des linearelastischen Verhaltens und eignet sich demnach für den Einsatz als linearelastische druckaufnehmende Platte.

5.3 Temperatureinfluss

Eine Temperaturänderung des mechanischen Aufbaus führt zu diversen Einflüssen. Einer der Einflüsse, der bei Temperaturänderungen auftritt, ist die thermische Ausdehnung. Wird beispielweise die druckaufnehmende Platte diesbezüglich betrachtet, so ist nach der Art der Temperaturänderung zu differenzieren. Während eine Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite der Platte zu zusätzlichen Biegemomenten führt, treten bei einer eingespannten Platte (Einspannung ist temperaturabhängig), deren Temperatur sich gleichmäßig ändert, zusätzliche Membranspannungen auf [30].

Aufgrund von thermischen Geometrieausdehnungen ist im Aufbau 1 ein relativ großer Temperatureinfluss zu erwarten. Hier trägt der Gewindestab, der die Plattenverformung auf die bewegliche Masseelektrode überträgt, wesentlich zu einer Temperaturabhängigkeit bei. Der Temperatureausdehnungskoeffizient von Stahl ist zwar mit $\alpha_{\text{St}} \approx 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$ gering [42], allerdings wird dieser durch die Länge bis zur beweglichen Elektrode bezogen auf die maximale Auslenkung der Platte „hochgesetzt“. Dies ergibt bei einem Verhältnis von 25 mm (Länge von Platte bis zur Elektrode) zu 0,5 mm (maximale Plattenauslenkung) einen um den Faktor 50 höheren, nicht mehr vernachlässigbaren Wert von $0,6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$.

Ein weiterer Einfluss ist die Temperaturabhängigkeit des E-Modul. Diese Abhängigkeit geht direkt in die Höhe der Plattenauslenkung ein. Der E-Modul weist bei dem verwendeten Material eine Temperaturabhängigkeit auf, die in der Größenordnung von $\approx -0,15 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2 \text{K}}$ liegt und somit eine relative Temperaturänderung von ca. $-0,7 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$ resultiert [41]. Auch dieser Anteil ist in der Betrachtung der Temperaturabhängigkeit nicht zu vernachlässigen.

5.4 Schlussfolgerung zum mechanischen Sensorteil

Das Kapitel 5 beschreibt den mechanischen Aufbau und das mechanische Verhalten des Sensors. Zwei unterschiedliche mechanische Konstruktionen, die sich in der Funktionalität und Lagerung der druckaufnehmenden Platte unterscheiden, sind aufgezeigt. Während der mechanisch wesentlich aufwändigere Aufbau 1 elektrisch Vorteile gegenüber dem Aufbau 2 aufweist, die in den Kapiteln 4.2 und 6.5.3 beschrieben sind, zieht dieser eine höhere Temperaturabhängigkeit nach sich.

Die Verformung einer durch Druck gleichmäßig belasteten Platte ist ab einem gewissen Verformungsgrad durch nichtlineare Zusammenhänge zu beschreiben. Die Näherungslösung dieser Beschreibung liefert in dem hier relevanten Bereich eine hinreichend gute Übereinstimmung mit dem exakten Reihenansatz. Da die Werkstoffeigenschaften der Platte und vor allem die Drehfedersteifigkeit der Plattenlagerung einer gewissen Toleranz unterliegen, ist eine Kalibrierung des Sensors notwendig. Die verformungsbeschreibende Gleichung (5.52) enthält zusammengefasst, zwei Parameter, die gewissen Toleranzen unterliegen. Der eine Parameter stellt die Steigung für kleine Verformungen dar, während der zweite den Verlauf für große Verformungen bestimmt. Für eine Parameteranpassung durch eine Kalibrierung, sind demnach mehrere Kalibrierungspunkte nötig.

Die Führungsmembranen weisen eine wesentlich geringere Höhe als die druckaufnehmende Platte auf $h_{\text{Platte}} \approx 6 h_{\text{Membran}}$. Sie geht mit der dritten Potenz in die Biegesteifigkeit der Platte ein (5.2). Aus diesem Grund ist der Einfluss der Führungsmembranen auf die Verformung der druckaufnehmenden Platte vernachlässigbar und wird bei einer Kalibrierung des Sensors berücksichtigt.

Schließlich gilt es, ein geeignetes Material für die druckaufnehmende Platte auszuwählen. Hierzu sind die auftretenden Belastungen betrachtet und ein sich in dem relevanten Belastungsbereich linearelastisch verhaltendes Material gewählt worden. Ein kaltverformter Plattenwerkstoff, wie er hier verwendet wird, weist einen richtungsabhängigen E-Modul auf [18, 41]. Dabei ist der Wert des E-Moduls quer zur Walzrichtung um 10...15% höher als längs zur Walzrichtung [40, 41]. Die Verformung einer orthotropen Platte unterscheidet sich vom funktionalen Verlauf her nicht von dem einer isotropen Platte. Der Unterschied liegt in den Absolutwerten der Verformung und den auftretenden Momenten und Spannungen [31]. Dieser Einfluss wird ebenfalls in einer Kalibrierung berücksichtigt.

Kapitel 6

Elektrischer Sensorteil

Das Sensorelement, welches durch einen Messkondensator realisiert ist, wird zum einen als frequenzbestimmendes Glied in einem LC-Oszillator eingesetzt und zum anderen direkt durch einen C/D-Umsetzer ausgewertet. Die Aufprägung eines Drucks p führt, nach den in Kapitel 5.1 beschriebenen Aufbauten, zu einer Verformung der druckaufnehmenden Platte und damit zu einer Veränderung der Kapazität. Die Abhängigkeit der Kapazität von der Verformung der druckaufnehmenden Platte wird in Kapitel 6.5 untersucht und ein funktionaler Zusammenhang bestimmt. Im Fall des LC-Oszillators verändert sich die Schwingfrequenz f_s . Der Oszillator wird in Kapitel 6.1 analysiert und ein Zusammenhang zwischen Sensorkapazität und Schwingfrequenz dargestellt. Die Frequenz steht somit im direkten Zusammenhang mit dem zu erfassenden Druck, was gewisse Anforderungen an die Auflösung und Messdauer der Frequenzmessung stellt und in Kapitel 6.3 betrachtet wird. Nicht nur die Frequenzmessung hat gewisse Anforderungen zu erfüllen. Viel entscheidender ist das Frequenz- bzw. Phasenverhalten des Oszillators, durch die das Auflösungsvermögen des Sensors bestimmt ist. Sowohl das Rauschverhalten von Oszillatoren und deren Beschreibung als auch Maßnahmen zur Optimierung des Rauschverhaltens werden in Kapitel 6.2 untersucht.

6.1 Oszillator

Das aus einem Kondensator bestehende Sensorelement kann auf unterschiedlichste Weise ausgewertet werden. Üblicherweise werden Verfahren verwendet, die abhängig von der zu messenden Kapazität eine elektrische Spannung generieren, die wiederum mittels eines ADUs diskretisiert wird [7, 21, 43, 44]. Für die eingangs geforderte relative Ausflösung von 10^{-6} , müssten diese Verfahren einen ADU mit einer Auflösung von 20 Bit aufweisen. Da es nur sehr schwer möglich ist, am Ende der Messkette ($p \rightarrow C \rightarrow U \rightarrow U/D$) diese hohe Auflösung zu erreichen, wird hier ein Oszillator, mit der Messkette ($p \rightarrow C \rightarrow f \rightarrow f/D$), zur Auswertung des Kondensators untersucht. Die zu messende Kapazität beeinflusst die Resonanzfrequenz des Oszillators, der hier auf einem Franklin-Oszillator basiert und nachfolgend analysiert wird.

6.1.1 Oszillator-Schaltung

In der Elektrotechnik dienen Oszillatoren vorrangig zur Schwingungserzeugung. Je nach Aufgabenstellung und Anforderung können unterschiedliche Oszillatoren ein-

gesetzt werden. Bei höheren Anforderungen an die Frequenzstabilität werden LC-Oszillatoren bzw. Quarzoszillatoren zur Schwingungserzeugung eingesetzt. Unter Frequenzstabilität ist hier nicht die Stabilität im regelungstechnischen Sinne, sondern die Einhaltung einer definierten Frequenz bzw. die Abweichung von der definierten Frequenz zu verstehen. Quarzoszillatoren, die eine sehr hohe Frequenzstabilität aufweisen können, sind hier auszuschließen. Da die Resonanzfrequenz von Quarzoszillatoren nur in einem kleinen Bereich $< 1\%$ durch externe Beeinflussung verändert werden kann, sind diese für den Einsatz als Messoszillatoren nicht zu favorisieren [45, 46].

Eine Anforderung an den Oszillator ist die Anschlussmöglichkeit eines einseitig geerdeten Messkondensators. Dadurch vereinfacht sich die Konstruktion des Sensors wesentlich im Vergleich zu der Variante eines Kondensators mit zwei isolierten Kondensatorelektroden. Damit scheidet der Einsatz eines Serienschwingkreises, der zwischen zwei von null verschiedenen Potentialen verschaltet sein muss, aus. Des Weiteren ist eine möglichst große Frequenzänderung durch den Messkondensator erstrebenswert. Die üblichen Oszillatorschaltungen wie Meißner-, Colpitts-, Hartley- bzw. Clapp-Oszillator kommen nicht in die nähere Auswahl [47, 48]. Die Resonanzfrequenz dieser Oszillatoren ist von mehr als zwei Bauteilen abhängig, die zudem aufwendig in der Herstellung sind (Transformator, Spule mit Anzapfung). Je mehr frequenzbestimmende Bauteile in der Schaltung vorhanden sind, umso größer sind die möglichen Störeinflüsse. Aus den genannten Gründen wird hier ein Franklin-Oszillator mit einem Parallelschwingkreis als frequenzbestimmendes Glied eingesetzt [20, 45, 47, 49, 50, 51]. Diese Oszillatorschaltung zeichnet sich durch eine hohe Frequenzstabilität aus [20, 45].

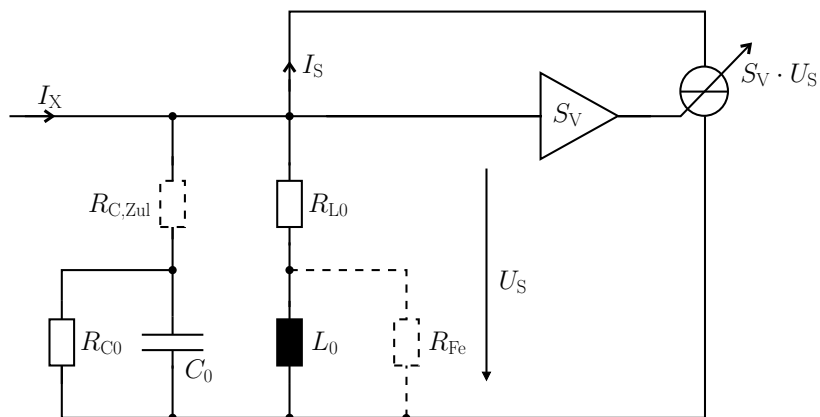


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung eines verlustbehafteten LC-Schwingkreises

Die Untersuchung des Franklin-Oszillators erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird ein allgemeiner, verlustbehafteter Parallelschwingkreis mit einer spannungsgesteuerten Stromquelle, wie sie in **Abbildung 6.1** dargestellt ist, als Zweipol (Van der

Pol-Oszillator) betrachtet und anschließend wird die schwingkreisbetreibende Verstärkerschaltung betrachtet. Eine beliebige Verstärkerschaltung, die zum Schwingungserhalt verwendet wird, kann auf eine spannungsgesteuerte Stromquelle mit parallelgeschaltetem Widerstand reduziert werden. Diese Aufteilung ermöglicht eine übersichtlichere Untersuchung des Franklin-Oszillators.

Die Verluste des Schwingkreises der Abbildung 6.1, sind durch den Widerstand R_{C0} , der die Verluste im Dielektrikum und den Isolationswiderstand des Kondensators C_0 modelliert und den Widerstand R_{L0} , der die ohmschen Verluste der Windungen der Spule L_0 modelliert, berücksichtigt. Der Zuleitungswiderstand $R_{C,Zul}$ des Kondensators wird vernachlässigt $R_{C,Zul} \rightarrow 0$. Aufgrund des Einsatzes einer eisenkernlosen Spule, ist auch die Vernachlässigung des zur Spule parallelgeschalteten Widerstands R_{Fe} zulässig $R_{Fe} \rightarrow \infty$. Die spannungsgesteuerte Stromquelle wird durch die Beziehung $I_S = S_V \cdot U_S$, mit S_V der Steilheit der Stromquelle, beschrieben. Zur Untersuchung des Parallelschwingkreises wird der Strom I_x betrachtet, der sich in der Laplace-Ebene s durch Aufstellen einer Knotengleichung zu

$$I_x(s) = U_S(s) \left(\frac{1}{R_{C0}} + s C_0 + \frac{1}{R_{L0} + s L_0} \right) + I_S(s) = U_S(s) \left(\frac{1}{R_{C0}} + S_V + s C_0 + \frac{1}{R_{L0} + s L_0} \right)$$

bestimmen lässt. Nach Umstellung ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$\frac{U_S(s)}{I_x(s)} = \frac{R_{L0} + s L_0}{1 + R_{L0} \left(\frac{1}{R_{C0}} + S_V \right) + s \left(L_0 \left(\frac{1}{R_{C0}} + S_V \right) + C_0 R_{L0} \right) + s^2 C_0 L_0} \quad (6.1)$$

Eine ungedämpfte, harmonische Schwingung ist gegeben, wenn die Übertragungsfunktion $\frac{U_S(s)}{I_x(s)}$ zwei rein imaginäre Pole besitzt. Dies hat zur Folge, dass der Strom I_x verschwindet und lediglich die spannungsgesteuerte Stromquelle zum Schwingungserhalt dient. Die Pole der Übertragungsfunktion sind aus der quadratischen Gleichung

$$s^2 + s \underbrace{\frac{1}{C_0} \left(\frac{1}{R_{C0}} + S_V + R_{L0} \frac{C_0}{L_0} \right)}_a + \frac{1}{L_0 C_0} \left[1 + R_{L0} \left(\frac{1}{R_{C0}} + S_V \right) \right] = 0$$

zu bestimmen, womit die zwei Pole der Übertragungsfunktion bei

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{1}{L_0 C_0} \left[1 + R_{L0} \left(\frac{1}{R_{C0}} + S_V \right) \right]}$$

liegen. Die Forderung rein imaginärer Pole für eine ungedämpfte Schwingung führt mit $a = 0$ zu

$$\frac{1}{R_{C0}} + S_V + R_{L0} \frac{C_0}{L_0} = 0,$$

womit für die Steilheit der Stromquelle die Schwingbedingung

$$S_V = -\frac{1}{R_{C0}} - R_{L0} \frac{C_0}{L_0}$$

folgt. Mit der Steilheit S_V ergeben sich die Pole der Übertragungsfunktion zu

$$s_{1,2} = \pm \frac{j}{\sqrt{L_0 C_0}} \sqrt{1 - R_{L0}^2 \frac{C_0}{L_0}} \quad ,$$

womit die Resonanzfrequenz des verlustbehafteten Parallelschwingkreises in

$$\omega^2 = \frac{1}{L_0 C_0} \left(1 - R_{L0}^2 \frac{C_0}{L_0}\right) = \omega_0^2 \left(1 - R_{L0}^2 \frac{C_0}{L_0}\right) \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C_0}$$

resultiert. Mit Einführung der Spulengüte

$$Q_L = \frac{\omega_0 L_0}{R_{L0}}$$

und der Güte des Kondensators

$$Q_C = \omega_0 C_0 R_{C0}$$

können die Schwingbedingung und die Resonanzfrequenz auch durch

$$S_V = -\frac{1}{R_{C0}} - \frac{1}{R_{L0} Q_L^2} = -\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \left(\frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C}\right) \quad , \quad \omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{Q_L^2}\right) \quad (6.2)$$

angegeben werden.

Die Schwingbedingung für die Steilheit S_V der spannungsgesteuerten Stromquelle ergibt eine konstante Schwingamplitude. Mit diesem Wert der Steilheit werden die, durch die Widerstände R_{C0} und R_{L0} , verursachten Verluste gerade ausgeglichen. Für den Aufbau einer Schwingung ist es nötig, die Übertragungsfunktion $\frac{U_S(s)}{I_x(s)}$ „instabil“ werden zu lassen, was bei einer Pollage in der positiven s -Halbebene gegeben ist. Hierzu muss die Steilheit S_V die Bedingung $S_V < -\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \left(\frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C}\right)$ erfüllen. Für die Steilheit S_V bedeutet dies, dass sie sinnvollerweise geregelt werden sollte. Abgesehen von einer verschwindenden Regelabweichung der Schwingungsamplitude, die durch einen I-Regler gewährleistet wird, werden keine weiteren Ansprüche an die Regelung gestellt. Aus diesem Grund wird nicht näher auf die Regelung der Schwingungsamplitude durch die Anpassung der Steilheit eingegangen.

Die prinzipielle Schaltung des eingesetzten Franklin-Oszillators ist in der **Abbildung 6.2** dargestellt. Zu erkennen ist der LC-Schwingkreis, der über den Koppelkondensator C_{01} und einen Sourcefolger T_0 (Buffer-Stufe) hochohmig an einen Differenzverstärker geschaltet ist. Diese Buffer-Stufe erlaubt den Abgriff der Spannung des Schwingkreises durch weitere Stufen mit nur geringem Einfluss auf den Schwingkreis selbst. Der auf die Buffer-Stufe folgende Differenzverstärker kann auch als ein erneuter Sourcefolger T_1 , der mit einer Gate-Schaltung T_2 über den Widerstand R_{12} gekoppelt ist, betrachtet werden. Die Stromquelle im Kreis des Differenzverstärkers dient zur Regelung der Steilheit der Feldeffekttransistoren T_1 und T_2 . Sie wird wechsellspannungsmäßig über den Kondensator C_{12} kurzgeschlossen. Das Ziel

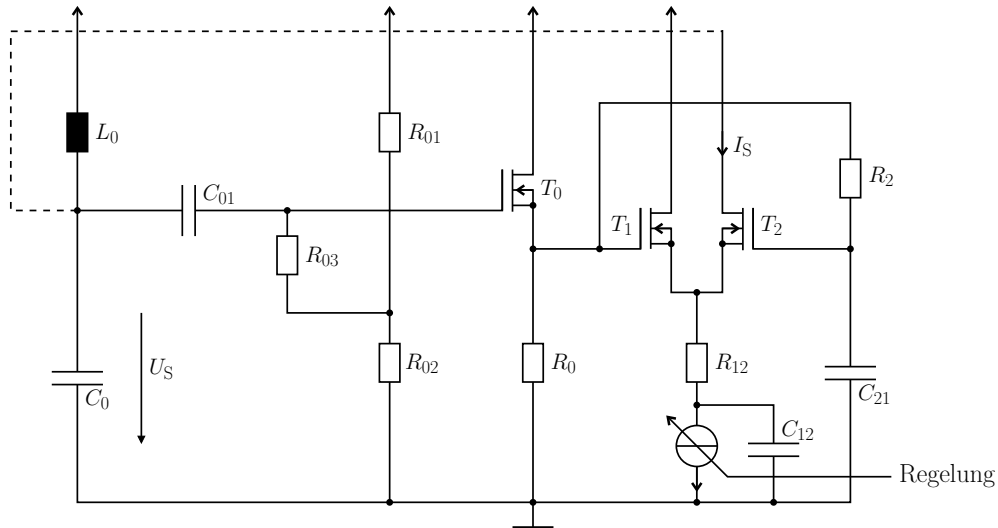


Abbildung 6.2: Prinzipielle Schaltung des eingesetzten Franklin-Oszillators

der Regelung ist eine konstante Schwingungsamplitude. Die Veränderung der Messkapazität fordert bei Einhaltung der Schwingbedingung, dass die Steilheit S_V entsprechend angepasst wird. Ferner treten bei Temperaturänderungen Verschiebungen der Arbeitspunkte der Feldeffekttransistoren und Änderungen der Widerstände auf, die ebenfalls eine Anpassung erfordern. Dies wird durch eine Amplitudenregelung gewährleistet.

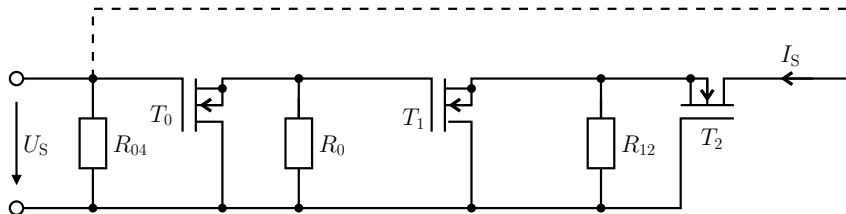


Abbildung 6.3: Wechselspannungsmäßige Betrachtung des aktiven Schaltungsteils des Franklin-Oszillators

Zur Untersuchung des eingesetzten Franklin-Oszillators ist es zweckmäßig, das Kleinsignalverhalten der Verstärkerschaltung zu betrachten. In **Abbildung 6.3** ist die Verstärkerschaltung als aktiver Schaltungsteil des Franklin-Oszillators wechselspannungsmäßig unter Vernachlässigung der Koppelkondensatoren C_{01} , C_{12} , C_{21} und des Widerstandes R_{21} dargestellt. Die Widerstände R_{01} , R_{02} , R_{03} sind in $R_{04} = R_{03} + \frac{R_{01}R_{02}}{R_{01}+R_{02}}$ zusammengefasst. Zur weiteren Untersuchung der Verstärkerschaltung wird das nachfolgende Wechselspannungersatzschaltbild des Feldeffekttransistors nach **Abbildung 6.4** eingesetzt.

Das typische Ersatzschaltbild des Feldeffekttransistors enthält eine spannungsge-

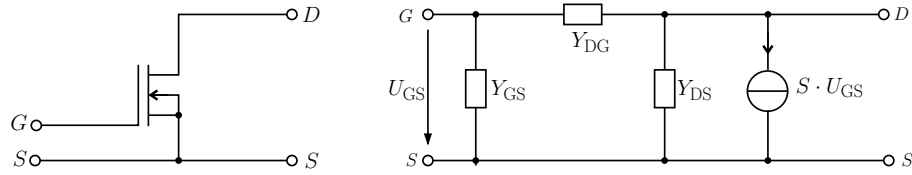


Abbildung 6.4: Wechselspannungersatzschaltbild eines Feldeffekttransistors

gesteuerte Stromquelle, mit der Steilheit S , und drei parasitäre Elemente, bestehend aus einem Widerstand mit parallelgeschaltetem Kondensator, zwischen jeweils zwei der drei Transistoranschlüsse. Die drei parasitären Admittanzen setzen sich wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} Y_{GS} &= G_{GS} + s C_{GS} \\ Y_{DG} &= G_{DG} + s C_{DG} \\ Y_{DS} &= G_{DS} + s C_{DS} . \end{aligned}$$

Mit dem Ersatzschaltbild des Feldeffekttransistors resultiert das Wechselspannungersatzschaltbild der Verstärkerschaltung in **Abbildung 6.5**.

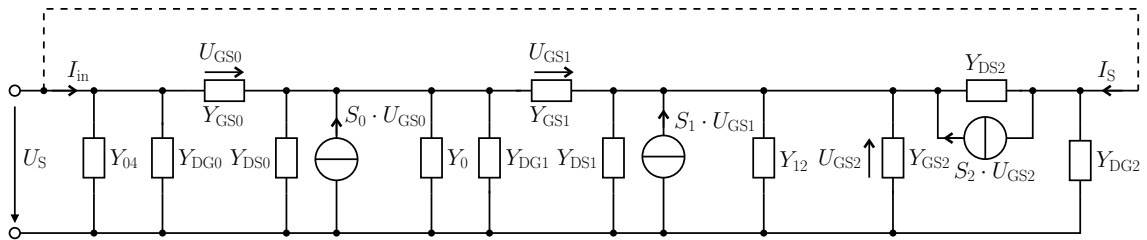


Abbildung 6.5: Wechselspannungersatzschaltbild zur Analyse der Verstärkerschaltung des Franklin-Oszillators

Die Analyse der Verstärkerschaltung führt zu einer Eingangsadmittanz $Y_{in} = \frac{I_{in}}{U_S}$ von

$$Y_{in} = Y_A - A_0 Y_{GS0} \left(S_0 + Y_{GS0} + \frac{Y_{GS1} Y_{DS2}}{Y_C + S_1 + S_2} \right)$$

und einer Ausgangsadmittanz $Y_{out} = \frac{I_S}{U_S}$ von

$$Y_{out} = Y_{DG2} + Y_{DS2} - \frac{S_2 + Y_{DS2}}{Y_C + S_1 + S_2} \left[Y_{DS2} + A_0 \left(S_1 + Y_{GS1} \right) \left(S_0 + Y_{GS0} + \frac{Y_{GS1} Y_{DS2}}{Y_C + S_1 + S_2} \right) \right] .$$

Darin sind die folgenden Größen enthalten:

$$\begin{aligned} Y_A &= Y_{04} + Y_{DG0} + Y_{GS0} & Y_B &= Y_0 + Y_{DS0} + Y_{GS0} + Y_{DG1} + Y_{GS1} \\ Y_C &= Y_{DS1} + Y_{GS1} + Y_{DS2} + Y_{GS2} + Y_{12} & Y_0 &= \frac{1}{R_0} & Y_{04} &= \frac{1}{R_{04}} \\ A_0 &= \frac{1}{Y_B + S_0 - \frac{Y_{GS1}(Y_{GS1} + S_1)}{Y_C + S_1 + S_2}} . \end{aligned}$$

Sowohl die Eingangs- als auch die Ausgangsadmittanz ist abhängig von den veränderlichen Steilheiten S_1, S_2 . Alle weiteren Größen sind konstant. Die Buffer-Stufe stellt einen Impedanzwandler dar, womit die Eingangsadmittanz der Verstärkerschaltung eine lediglich geringe Abhängigkeit von den Steilheiten S_1, S_2 aufweist. Im Gegenteil dazu zeigt die Ausgangsadmittanz eine gewünscht hohe Abhängigkeit von den Steilheiten S_1, S_2 auf. Die Eingangs- und Ausgangsadmittanz ist direkt an den Schwingkreis angeschlossen, womit sie eine Parallelschaltung zu einer Gesamtadmittanz $Y_{VS} = Y_{in} + Y_{out}$ bilden. Aufgrund des verwendeten Ersatzschaltbildes des Transistors, setzt sich die Gesamtadmittanz der Verstärker-Schaltung aus einem kapazitiven, reaktiven und einem von den Steilheiten S_1, S_2 abhängigen Anteil zusammen. Diese Anteile sind in **Abbildung 6.6** als resultierendes Ersatzschaltbild der Verstärkerschaltung des Franklin-Oszillators dargestellt.

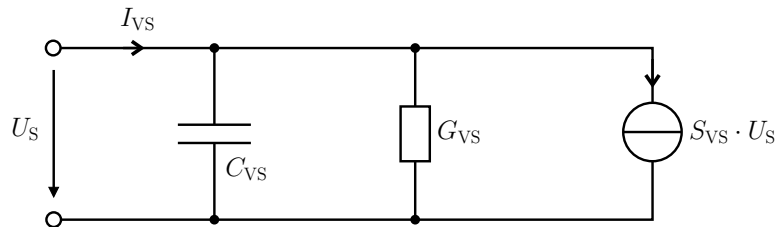


Abbildung 6.6: Resultierendes Ersatzschaltbild der Verstärkerschaltung des Franklin-Oszillators

Der Imaginärteil der Gesamtadmittanz $\text{Im}\{Y_{VS}\}$ entspricht der kapazitiven Größe C_{VS} , der von den Steilheiten S_1, S_2 unabhängige Realteil der Gesamtadmittanz $\text{Re}\{Y_{VS}\}$ entspricht der reaktiven Größe G_{VS} , während der von den Steilheiten S_1, S_2 abhängige Realteil der Gesamtadmittanz $\text{Re}\{Y_{VS}\}(S_1, S_2)$ der Steilheit S_{VS} entspricht, die zur Entdämpfung des Schwingkreises dient. Die Trennung der Gesamtadmittanz Y_{VS} in einen konstanten Anteil $Y_{VS, \text{const}}$ und einen von den Steilheiten S_1, S_2 abhängigen Anteil $Y_{VS, (S_1, S_2)}$ führt zu folgendem:

$$Y_{VS} = Y_{in} + Y_{out} = Y_{VS, \text{const}} + Y_{VS, (S_1, S_2)} \cdot \quad (6.3)$$

Darin sind die Größen $Y_{VS, \text{const}}$, $Y_{VS, (S_1, S_2)}$ durch

$$Y_{VS, \text{const}} = Y_{\text{in}, \text{const}} + Y_{\text{out}, \text{const}}$$

$$Y_{\text{in}, \text{const}} = Y_A - \frac{Y_{GS0} Y_C}{(Y_B + S_0) Y_C - Y_{GS1}^2} \left(S_0 + Y_{GS0} + \frac{Y_{GS1} Y_{DS2}}{Y_C} \right)$$

$$Y_{\text{out}, \text{const}} = Y_{DG2} + Y_{DS2} \left(1 - \frac{Y_{DS2}}{Y_C} - Y_{GS1} \frac{S_0 + Y_{GS0} + \frac{Y_{GS1} Y_{DS2}}{Y_C}}{(Y_B + S_0) Y_C - Y_{GS1}^2} \right)$$

$$Y_{VS, (S_1, S_2)} = Y_{\text{in}, (S_1, S_2)} + Y_{\text{out}, (S_1, S_2)}$$

$$Y_{\text{in}, (S_1, S_2)} = -Y_{GS0} \left[\frac{Y_{GS1} Y_{DS2}}{(Y_B + S_0) Y_C - Y_{GS1}^2} \frac{S_1 + S_2}{Y_C + S_1 + S_2} + A_{01} \left(S_0 + Y_{GS0} + \frac{Y_{GS1} Y_{DS2}}{Y_C + S_1 + S_2} \right) \right]$$

$$Y_{\text{out}, (S_1, S_2)} = Y_{DS2} \left(\frac{Y_{DS2}}{Y_C} + Y_{GS1} \frac{S_0 + Y_{GS0} + \frac{Y_{GS1} Y_{DS2}}{Y_C}}{(Y_B + S_0) Y_C - Y_{GS1}^2} \right) - \frac{S_2 + Y_{DS2}}{Y_C + S_1 + S_2} \left[Y_{DS2} + A_0 \left(S_1 + Y_{GS1} \right) \left(S_0 + Y_{GS0} + \frac{Y_{GS1} Y_{DS2}}{Y_C + S_1 + S_2} \right) \right]$$

mit

$$A_{01} = \frac{Y_C \left(Y_{GS1} S_1 - (Y_B + S_0) (S_1 + S_2) \right)}{(Y_B + S_0) Y_C - Y_{GS1}^2} + S_1 + S_2$$

gegeben.

Die explizite Trennung des Realteils der Gesamtadmittanz in G_{VS} und S_{VS} wird aus formalen Gründen durchgeführt. Sie dient zur Beurteilung der zusätzlichen Belastung des Schwingkreises, die durch die Verstärkerschaltung entsteht und ist im resultierenden Schwingkreiserersatzschaltbild in **Abbildung 6.7** dargestellt.

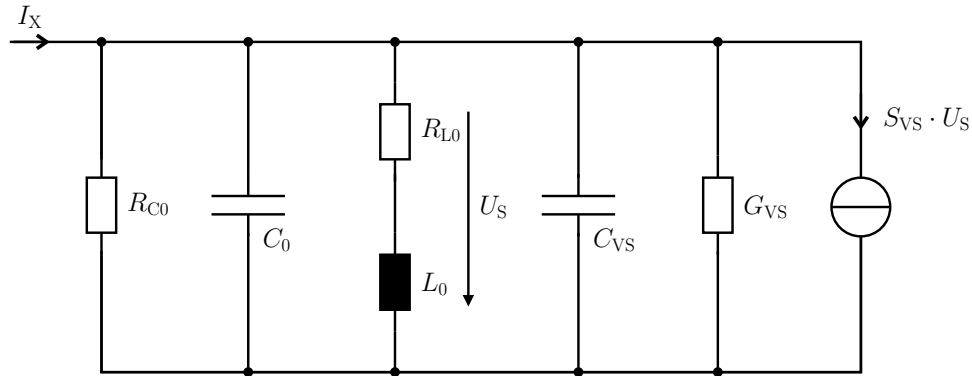


Abbildung 6.7: Resultierendes Ersatzschaltbild des Franklin-Oszillators

Das dargestellte Ersatzschaltbild zeigt, dass die Reaktanz G_{VS} wie eine zusätzliche Belastung, entsprechend des Widerstands R_{C0} , nicht frequenzbeeinflussend wirkt. Im Gegensatz hierzu wirkt der Imaginärteil der Gesamtadmittanz $\text{Im}\{Y_{VS}\}$ als zusätzlicher Kondensator direkt frequenzbeeinflussend. Die resultierende spannungsgesteuerte Stromquelle hat nach (6.2) somit zusätzlich zu R_{C0} und R_{L0} die Reaktanz G_{VS} auszugleichen.

Abschließend sind die ermittelten Größen G_{VS} , C_{VS} und S_{VS} in den **Abbildungen 6.8-6.10** in Abhängigkeit von der Steilheit der Transistoren T_1 , T_2 dargestellt. Die Steilheiten S_1 , S_2 werden aufgrund derselben Gleichspannungarbeitspunkte der Transistoren als identisch zu S angenommen. Für die Abbildungen sind die nachfolgenden Werte verwendet worden.

$$\begin{array}{lll}
 G_{DG} = 2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\Omega} & G_{GS} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\Omega} & G_{DS} = 25 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\Omega} \\
 C_{DG} = 0,1 \cdot 10^{-12} \text{ F} & C_{GS} = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ F} & C_{DS} = 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ F} \\
 R_{01} = 2,2 \cdot 10^6 \Omega & R_{02} = 1 \cdot 10^6 \Omega & R_{03} = 2,2 \cdot 10^6 \Omega \\
 S_0 = 10 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\Omega} & R_0 = 1 \cdot 10^3 \Omega & R_{12} = 21 \cdot 10^3 \Omega
 \end{array}$$

Tabelle 6.1: Bauelementwerte der untersuchten Oszillatorschaltung

Die Größen G_{VS} , C_{VS} und S_{VS} weisen in Bezug auf die Absolutwerte und den hier betrachteten Frequenzbereich von 1 MHz – 10 MHz eine gewisse Frequenzabhängigkeit auf. Die Darstellung der Reaktanz G_{VS} , liefert abgesehen von den frequenzabhängigen, über S konstanten Werten, keine weitere Information. Im Gegensatz dazu lässt der kapazitive Anteil der Verstärkerschaltung C_{VS} eine geringe und die Steilheit S_{VS} eine nahezu lineare Abhängigkeit von der Steilheit S erkennen. Die Steilheit S_{VS} der spannungsgesteuerten Stromquelle weist negative Werte auf, dies ist bedingt durch die entdämpfende Funktion, die mit einem negativen Widerstand gleichzusetzen ist.

Die Widerstände R_0 , R_{12} sind nicht beliebig zu wählen. Während der Widerstand R_0 den Eingangswiderstand der Verstärkerschaltung und den Verstärkungsfaktor der Buffer-Stufe mitbestimmt, dient der Widerstand R_{12} der Kopplung zwischen den Transistoren T_1 , T_2 und beeinflusst den Ausgangswiderstand der Verstärkerschaltung. In Bezug auf eine möglichst geringe Belastung des Schwingkreises durch die Verstärkerschaltung, ist es erstrebenswert, mit dem Eingangs- und Ausgangswiderstand hohe Widerstandswerte zu erreichen. Damit sind die Widerstände R_0 , R_{12} ebenfalls so hoch wie es die Funktionalität der Verstärkerschaltung zulässt zu wählen. Ein hoher Widerstandswert R_{12} führt aufgrund einer höheren Kopplung zwischen den Transistoren T_1 , T_2 zu einem höheren Absolutwert der Steigung von $S_{VS}(S)$. Damit ist für eine bestimmte Belastung eine geringere Steilheit S der Transistoren T_1 , T_2 nötig, was in einem geringeren Gleichstrom und damit in einem geringeren Rauschen der Transistoren resultiert [52].

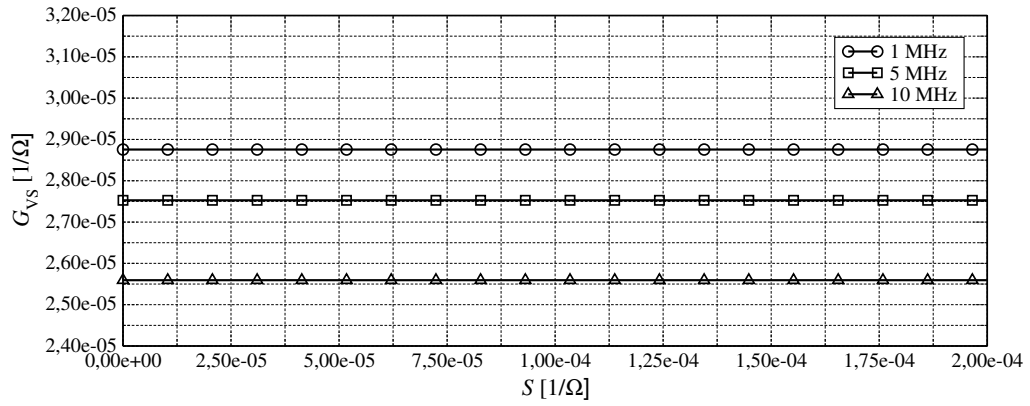


Abbildung 6.8: Gesamtreaktanz der Verstärkerschaltung des untersuchten Franklin-Oszillators

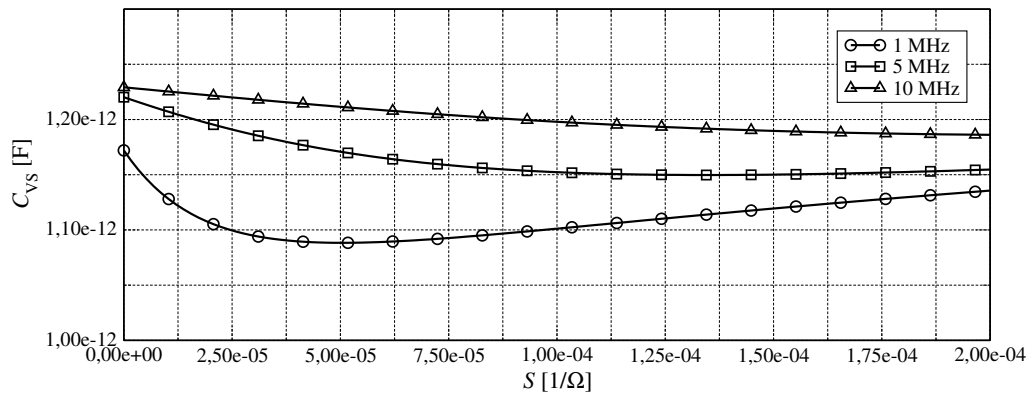


Abbildung 6.9: Gesamtkapazität der Verstärkerschaltung des untersuchten Franklin-Oszillators

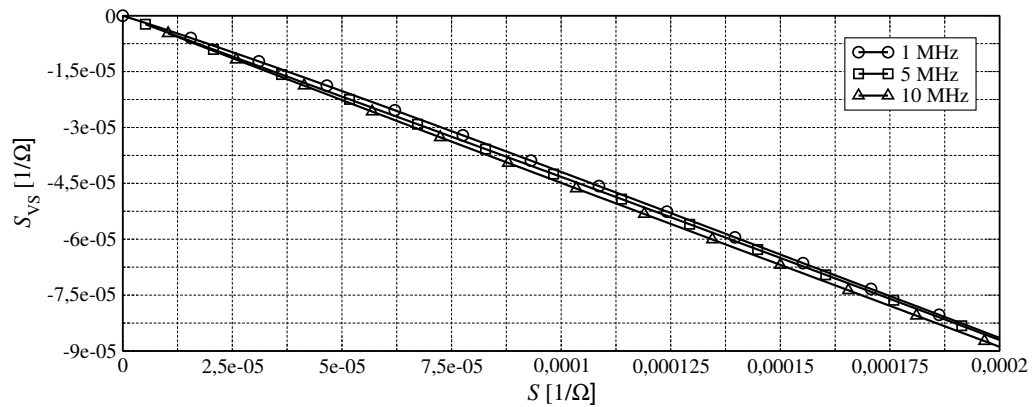


Abbildung 6.10: Gesamtsteilheit der Verstärkerschaltung des untersuchten Franklin-Oszillators

6.1.2 Schlussfolgerung zum Oszillator

In Kapitel 6.1 wird der sogenannte Franklin-Oszillator in zwei Schritten analysiert. Dabei wird ein allgemeiner Schwingkreis mit einem schwingungserhaltenden Element (Van der Pol-Oszillator) und die Verstärkerschaltung, die in ein schwingungserhaltendes Element mit parasitären Bauteilen überführt wird, getrennt betrachtet. Die Analyse des Schwingkreises liefert die Abhängigkeit der Schwingfrequenz von den Schwingkreiselementen und die Schwingbedingung, die Relevanz für die Verstärkerschaltung hat. Der zweite Schritt betrachtet die Verstärkerschaltung des Franklin-Oszillators. Diese wird ebenfalls auf einen Zweipol reduziert, der aus einer Spannungsgesteuerten Stromquelle, einem reaktiven und einem kapazitiven Element besteht. Die Zusammenführung des Schwingkreises und der Verstärkerschaltung erfolgt durch Einfügen der Zweipolparameter der Verstärkerschaltung in die des zuvor betrachteten Schwingkreises.

Entscheidend hierbei ist die Erkenntnis über den Einfluss der Verstärkerschaltung auf den Schwingkreis. Zum einen entsteht bedingt durch die parasitären, kapazitiven Elemente des Verstärkers eine Frequenzbeeinflussung und zum anderen eine zusätzliche Belastung des Schwingkreises. Die Beeinflussung der Schwingfrequenz ist von Nachteil für die Messung. Da sich die parasitären, kapazitiven Elemente nur wenig ändern, können sie als konstante Größen berücksichtigt werden. Die zusätzliche Belastung des Schwingkreises durch die parasitären, reaktiven Elemente, müssen durch eine höhere Steilheit ausgeglichen werden, was eine Erhöhung des Rauschens nach sich zieht. Die Parameter dieser Einflüsse liegen grob in der Größenordnung der Ausgangsgrößen (Ausgangsreaktanz G_{DS} , Ausgangskapazität C_{DS}), wie der Vergleich der Abbildung 6.8 und Abbildung 6.9 mit den, für diese Abbildungen verwendeten Parametern, erkennen lässt. Für die Auslegung des Oszillators können demnach grob die Parameter der Ausgangsgrößen, aus den jeweiligen Datenblättern der Feldeffekttransistoren, verwendet werden. Für eine genauere Beschreibung sind die entsprechenden Zusammenhänge (6.3) zu verwenden.

6.2 Rauschverhalten

Nicht deterministische kleine Schwankungen (Fluktuationen) einer Messgröße werden als Rauschen bezeichnet. Rauschen ist ein fundamentales, physikalisches Phänomen und begrenzt inhärent die Empfindlichkeit eines Messsystems. Die mathematische Beschreibung von Rauschvorgängen erfolgt statistisch durch Eigenschaften wie die Wahrscheinlichkeitsdichte, die Varianz und das Leistungsdichtespektrum [52, 53, 54, 55, 56, 57].

6.2.1 Elektronisches Rauschen

Verschiedene Ursachen, die nachfolgend aufgezeigt werden, führen zum Rauschen in elektronischen Schaltungen [52, 54, 55, 56, 57]. Jeder elektrische Leiter, beschrieben durch seinen ohmschen Widerstand, weist thermisches Rauschen auf, welches

auf die thermische Bewegung von freien Ladungsträgern in einem Festkörper zurückzuführen ist. In aktiven Bauteilen herrscht vorrangig das Schrotrauschen, welches durch Influenzstromimpulse erzeugt wird, das Generations-Rekombinations-Rauschen, welches durch die Elektronen-Loch-Paarbildung und Band-Band-Rekombination bedingt ist und das $1/f$ -Rauschen, welches auf verschiedene Effekte zurückzuführen ist. Das thermische Rauschen und das Schrotrauschen weisen zwar eine Frequenzabhängigkeit des Leistungsdichtespektrums auf, welche aber bei normalen Temperaturen von $300\text{ K} \pm 50\text{ K}$ und Frequenzen bis in den Bereich von 10^9 Hz als konstant angenommen werden kann und als weißes Rauschen bezeichnet wird. Darüber hinaus und auch bei sehr niedrigen Temperaturen nimmt das Leistungsdichtespektrum des thermischen Rauschens ab und ist durch Berücksichtigung der Plankschen Formel zu beschreiben [52, 54, 55, 56, 57]. Das Leistungsdichtespektrum des Schrotrauschens ist von Form und Dauer der Influenzstromimpulse abhängig [55]. Erwartungsgemäß weist das Generations-Rekombinations-Rauschen aufgrund der Trägheit des Generations-Rekombinations-Prozesses ein Tiefpass-Verhalten, abhängig von der Relaxationszeit der Ladungsträger, auf [52]. Im Gegensatz dazu steht das $1/f$ -Rauschen, welches auch als Funkelrauschen (*Flicker Noise*) bezeichnet wird. Das Funkelrauschen weist ein Leistungsdichtespektrum mit einem Verlauf $\sim f^{-1}$ auf, welches sich über einen Frequenzbereich von $10^{-6} \dots 10^6\text{ Hz}$ erstreckt und schließlich im weißen Rauschen untergeht [52, 55].

6.2.2 Oszillatorrauschen

Um eine Aussage über die Frequenz- bzw. Phasenstabilität von Oszillatoren tätigen zu können, sind Untersuchungen von möglichen Rauscheinflüssen und deren Auswirkungen nötig. Tritt bei einem Oszillator eine durch einen Stromimpuls modellierte Störung auf, so hat dies Auswirkung auf vorrangig zwei Eigenschaften der Schwingung. Zum einen ändert sich die Amplitude, die je nach Vorzeichen des Stromimpulses größer bzw. kleiner werden kann und zum anderen ändert sich die Phase der Schwingung. Die Störung in der Amplitude wird durch die jeweilige Verstärkerschaltung ausgeglichen. Eine Amplitudenregelung bzw. das nichtlineare Verhalten der Amplitudenbegrenzung der Verstärkerschaltung führen zu einem Abklingen bzw. Aufklingen der Amplitude auf ihren Urzustand [58, 59, 60]. Einen wesentlich gravierenderen Einfluss hat die Änderung der Phase auf das Schwingverhalten eines Oszillators. Die Änderung (Störung) der Phase kann bei einem freilaufenden Oszillator, wie er hier betrachtet wird, nicht auf den Urzustand zurückgeführt werden [58, 59, 60]. Hierzu wäre eine Regelung der Phase nötig. Dies würde eine Referenzphase voraussetzen, durch die der Oszillator nicht mehr freilaufend wäre. Zudem ist eine Regelung der Phase nicht möglich, da hier die Phase bzw. die Frequenz die eigentliche Messgröße ist. Schwankungen in der Phase einer Schwingung resultieren bei einer Messung der Frequenz in Frequenzschwankungen, die wiederum die eigentliche Messgröße wiedergeben. Aus diesem Grund werden minimale Phasen- bzw. Frequenzschwankungen als Ziel gesetzt. Nachfolgend werden die Ursachen, die zum Phasenrauschen führen und eine Abschätzung des Phasenrauschens dargestellt.

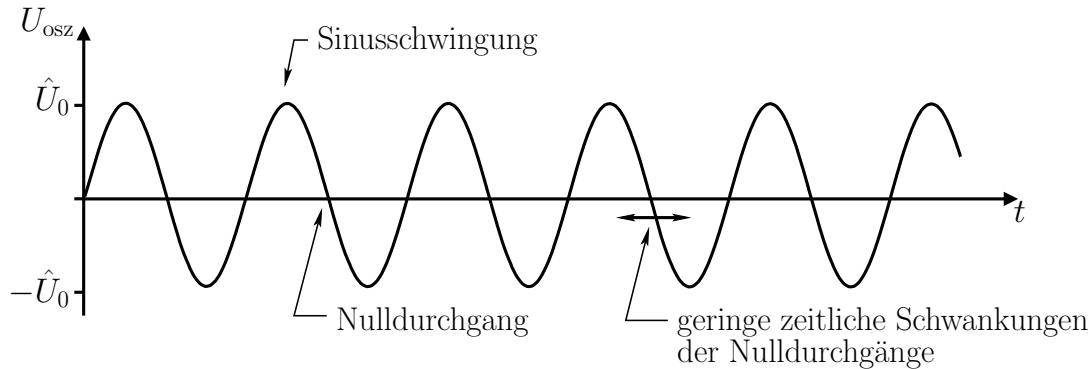


Abbildung 6.11: Zeitlicher Verlauf einer Oszillatorspannung

Der Einfluss des Rauschen auf einen realen Oszillator im Zeitbereich ist in der **Abbildung 6.11** dargestellt. Dabei handelt es sich um eine Sinusschwingung, deren Amplitude, wie es üblicherweise der Fall ist, nur sehr geringe Schwankungen aufweist. Die Phase der Schwingung variiert ebenfalls, was sich in zeitlichen Schwankungen der Nulldurchgänge auswirkt. Diese Auswirkungen werden im Frequenzbereich deutlicher. Die hier nachfolgend aufgezeigten Leistungsdichtespektren gelten unter der Annahme von ergodisch, stochastischen Prozessen, weshalb eine Beschränkung auf positive Frequenzen ausreichend ist [52, 55]. Sie werden mit W_i bezeichnet, wobei gilt $W_i = 2S_i$, $\omega \geq 0$, mit S_i dem zweiseitigen Leistungsdichtespektrum. Das Leistungsdichtespektrum der Ausgangsspannung $W_{U_{osz}}(\omega)$ eines realen Oszillators setzt sich aus dem Spektrum des Amplituden- und Phasenrauschens zu $W_{U_{osz}}(\omega) = W_U(\omega) + W_\phi(\omega)$ zusammen. Da die Leistung des Amplitudenrauschens wesentlich geringer als die des Phasenrauschens ist, entspricht das Leistungsdichtespektrum der Ausgangsspannung näherungsweise dem des Phasenrauschens $W_{U_{osz}}(\omega) \approx W_\phi(\omega)$ [52, 61]. Das Leistungsdichtespektrum einer idealen Sinusschwingung weist den in **Abbildung 6.12a** gezeigten Verlauf einer einzelnen Linie (Delta-Funktion) mit der Gewichtung des Effektivwerts auf. Durch das Rauschen entsteht ein verbreitertes Leistungsdichtespektrum, welches in **Abbildung 6.12b** dargestellt ist. Neben der Trägerleistung bei der Kreisfrequenz ω_0 enthält das Ausgangssignal eines realen, durch Rauschen gestörten Oszillators, weitere Leistungsanteile, die sich bei einer Ablagefrequenz $\Delta\omega$ befinden. Die zusätzlichen Leistungsanteile bei der Ablagefrequenz $\Delta\omega$ gilt es zu bestimmen und zu minimieren, was im Weiteren behandelt wird.

Diverse Ansätze zur Beschreibung des Phasenrauschens sind in der Literatur zu finden. Ein empirischer Ansatz, der das Phasenrauschen wiedergibt, wird in [62] vorgestellt. Dabei wird der Schwingkreis mit Verstärkerschaltung als ein lineares System betrachtet und dessen geschlossene System-Übertragungsfunktion wird für die Beschreibung des Phasenrauschens genutzt. Das durch Nichtlinearitäten ins Basisband des Oszillators transformierte $1/f$ -Rauschen wird ebenfalls durch das empi-

rische Modell wiedergeben. Dieses einfache Modell enthält einige Parameter, deren schaltungstechnische Vorhersage kaum möglich ist und durch die Messung des Phasenrauschspektrums bestimmt werden müssten. Allerdings zeigt es auf, welche Parameter für das Phasenrauschen von Bedeutung sind.

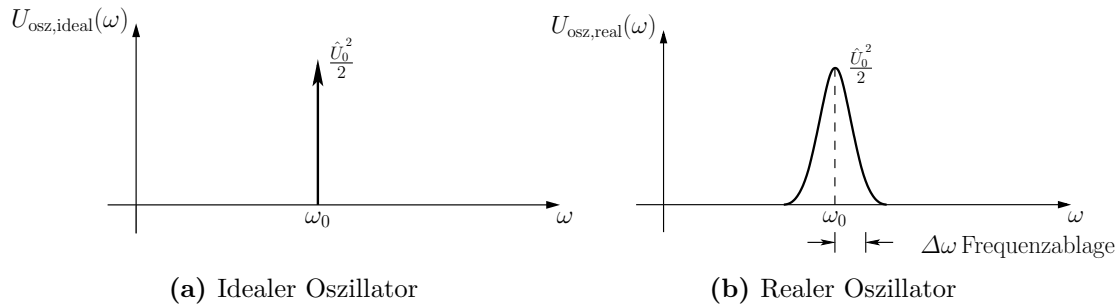


Abbildung 6.12: Spektrum einer Oszillatorspannung

Eine genauere Beschreibung des Phasenrauschens erfordert die Kenntnis aller Bauteilparameter der aktiven und passiven Schaltungselemente. Während die Parameterbestimmung der passiven Schaltungselemente mit verhältnismäßig einfachen Mitteln durchgeführt werden kann, ist die Bestimmung der Parameter der aktiven Schaltungselemente mit erheblichem Aufwand verbunden. Vor allem ist die Bestimmung des Rauschverhaltens der aktiven Schaltungselemente nur mit speziellen, sehr teuren Messgeräten möglich. Unter der Annahme, dass alle Bauteilparameter bekannt sind, ist zur genaueren Beschreibung des Phasenrauschens eine nichtlineare Modellierung des Oszillators durchzuführen. Nichtlineare Ansätze werden beispielsweise in [52, 58, 63, 64] vorgestellt. In [58] wurden sowohl sehr gute Übereinstimmungen zwischen Vorhersage und Messung als auch die Optimierung des Phasenrauschens erzielt. Der in [64] vorgestellte, nichtlineare Ansatz, bei dem eine Trennung der Störung in einen phasenbeeinflussenden und den übrigen Anteil erfolgt, weist ein Lorentzspektrum auf, welches auch in [52, 65] bestimmt wurde. Das aus der Spektroskopie kommende Lorentzspektrum weist für kleine Frequenzen einen konstanten Verlauf auf und fällt bei hohen Frequenzen mit $\sim f^{-2}$ ab. Basierend auf dem Ansatz der Trennung der Störung in einen phasenbeeinflussenden und den übrigen Anteil, wird in [63] eine Empfindlichkeitsfunktion bestimmt, die eine Aussage über das Phasenrauschen erlaubt. Mit Hilfe einer anderen Empfindlichkeitsfunktion, die der Impulsantwort eines Oszillators auf eine Phasenstörung entspricht, wird in [59, 60] ein lineares zeitvariantes System zur Beschreibung des Phasenrauschens vorgestellt. Nachfolgend wird das in [62] vorgestellte, empirische Modell auf den hier betrachteten Oszillator angewandt und in modifizierter Form zur Abschätzung des Phasenrauschens genutzt.

6.2.3 Abschätzung des Phasenrauschens

Ein mit Rauschen überlagertes Signal lässt sich durch die Summe des Signals selbst und dem Rauschsignal $\underline{U}_{s,r} = \underline{U}_s + \underline{U}_r$ darstellen. Die Überlagerung der beiden Signale führt zu einer neuen Amplitude und einem neuen Phasenwinkel, was **Abbildung 6.13** verdeutlicht. Sowohl die Amplitude als auch der Phasenwinkel der Rauschspannung sind zufällig und durch die Punktwolke angedeutet. Für die Bestimmung der resultierenden Spannung und des resultierenden Phasenwinkels ist lediglich die Winkelbeziehung zwischen der Signalspannung und der Rauschspannung entscheidend, womit der Phasenwinkel der Signalspannung zu null gesetzt werden kann. Der Betrag und der Phasenwinkel der resultierenden Spannung $\underline{U}_{s,r}$ sind entsprechend Abbildung 6.13 durch

$$\begin{aligned} |\underline{U}_{s,r}| &= \sqrt{\left(|\underline{U}_s| + |\underline{U}_r| \cdot \cos(\phi_r)\right)^2 + \left(|\underline{U}_r| \cdot \sin(\phi_r)\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(|\underline{U}_s| + |\underline{U}_{r,\text{re}}|\right)^2 + \left(|\underline{U}_{r,\text{im}}|\right)^2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\phi_{s,r} = \arctan\left(\frac{|\underline{U}_{r,\text{im}}|}{|\underline{U}_s| + |\underline{U}_{r,\text{re}}|}\right) \quad (6.5)$$

gegeben. Die Annahme einer sehr kleinen Amplitude des Rauschsignals $|\underline{U}_r| \ll |\underline{U}_s|$, erlaubt die Näherungen

$$|\underline{U}_{s,r}| \approx |\underline{U}_s| + |\underline{U}_{r,\text{re}}| \quad (6.6)$$

$$\phi_{s,r} = \frac{|\underline{U}_{r,\text{im}}|}{|\underline{U}_s|} \quad (6.7)$$

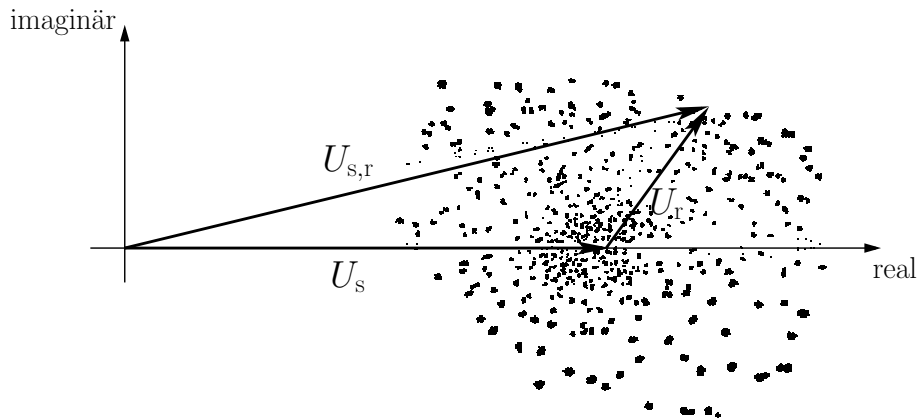


Abbildung 6.13: Zeigerdarstellung von Signal-, Rausch-, und resultierender Spannung

Diese Ergebnisse dienen lediglich zur Abschätzung, da bei einem realen Oszillator Mischprozesse durch Nichtlinearitäten auftreten, die durch eine einfache Summe der beiden Signale nicht beschrieben werden können. Die Abschätzung des Phasenrauschens bedarf der Bestimmung der Rauschspannung des Oszillators. Das Rauschen ist ein stochastischer Prozess, womit die Rauschspannung nicht zu jedem Zeitpunkt, sondern lediglich als Effektivwert (Varianz) bestimmt werden kann. Dies geschieht mit Hilfe des Leistungsdichtespektrums der Spannung. Bei einem bekannten Leistungsdichtespektrum der Störung ist der Oszillator, der wie in Abbildung 6.12b aufgezeigt, eine Filterfunktion bezüglich des Rauschens darstellt, zu berücksichtigen. Die Bestimmung der effektiven Rauschspannung erfordert somit die Bestimmung des Leistungsdichtespektrums der Oszillatorrauschspannung. Hierzu wird das in Abbildung 6.7 dargestellte Ersatzschaltbild des Franklin-Oszillators um zwei Stromquellen, die die rauschenden Elemente modellieren, erweitert. Zur Verdeutlichung ist in **Abbildung 6.14** das Oszillatorersatzschaltbild zur Ermittlung des Leistungsdichtespektrums der Rauschspannung, mit den zusammengefassten Größen $C_p = C_0 + C_{VS}$ und $R_p = (1/R_{C0} + G_{VS})^{-1}$, dargestellt.

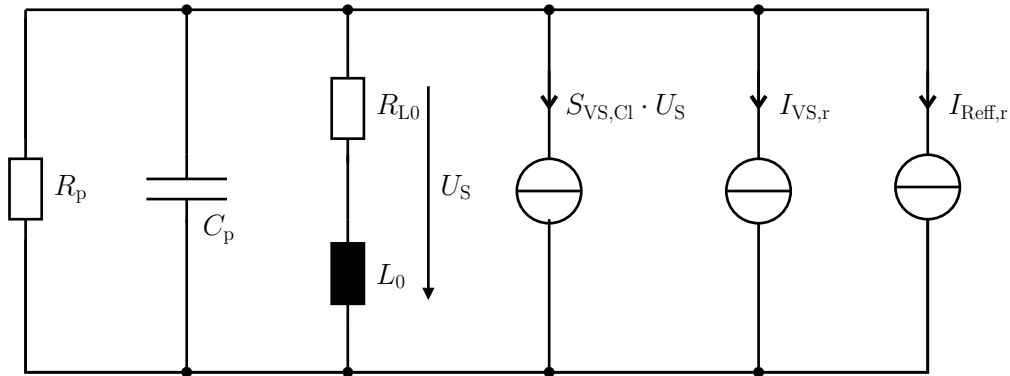


Abbildung 6.14: Ersatzschaltbild des Oszillators zur Beschreibung des Phasenrauschens

Dabei modelliert die Stromquelle $I_{VS,r}$ das Rauschen der Verstärkerschaltung und die Stromquelle $I_{Reff,r}$ das Widerstandsrauschen des effektiven Lastwiderstands des Schwingkreises. Der effektive Lastwiderstand R_{eff} lässt sich aus der nötigen Steilheit S_V aus (6.2) und der durch die Verstärkerschaltung zusätzlichen Last, beschrieben durch den resultierenden Leitwert G_{VS} , zu

$$R_{eff} = \left(\frac{1}{R_{C0}} + R_{L0} \frac{C_0}{L_0} + G_{VS} \right)^{-1}$$

bestimmen.

Angepasst an das Ersatzschaltbild des Oszillators, wird die Übertragungsfunktion (6.1) zur Beschreibung der Filterfunktion des Oszillators verwendet. Diese wird

durch Einsetzen von $s = j\omega$ aus der Laplace-Ebene in die komplexe Ebene überführt. Mit den zusammengefassten Größen resultiert die Impedanz des Oszillators \underline{Z}_{Cl} zu

$$\underline{Z}_{Cl}(\omega) = \frac{R_{L0} + j\omega L_0}{1 - \omega^2 C_p L_0 + R_{L0} \left(\frac{1}{R_p} + S_{VS,Cl} \right) + j\omega \left(L_0 \left(\frac{1}{R_p} + S_{VS,Cl} \right) + C_p R_{L0} \right)} \quad (6.8)$$

Der Oszillator wird als schwingend mit der schwingungserhaltenden Steilheit

$$S_{VS,Cl} = -1/R_{\text{eff}} - \Delta S_{VS,Cl}$$

und in der Nähe der Schwingfrequenz

$$\omega = \omega_s \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}} \right) = \omega_{0,Cl} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{Q_{L,Cl}^2}} \cdot \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}} \right),$$

mit $\omega_{0,Cl}^2 = \frac{1}{L_0 C_p}$, $Q_{L,Cl} = \frac{\omega_{0,Cl} L_0}{R_{L0}}$, betrachtet. Mit der Steilheit und Frequenz wird die Impedanz zu

$$\underline{Z}_{Cl}(\Delta\omega) = R_{L0} \frac{1+j\sqrt{1-\frac{1}{Q_{L,Cl}^2}} \left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}}\right) Q_{L,Cl}}{\left(1-\frac{1}{Q_{L,Cl}^2}\right) \left(1-\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}}\right)^2\right) - R_{L0} \Delta S_{VS,Cl} \left(1-j\sqrt{1-\frac{1}{Q_{L,Cl}^2}} \left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}}\right) Q_{L,Cl}\right)} \quad (6.9)$$

$$= -\frac{R_{L0}}{1-\frac{1}{Q_{L,Cl}^2}} \frac{1+j\sqrt{1-\frac{1}{Q_{L,Cl}^2}} \left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}}\right) Q_{L,Cl}}{\left(2\frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}} + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}}\right)^2\right) + \frac{R_{L0} \Delta S_{VS,Cl}}{1-\frac{1}{Q_{L,Cl}^2}} \left(1-j\sqrt{1-\frac{1}{Q_{L,Cl}^2}} \left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}}\right) Q_{L,Cl}\right)} \quad (6.10)$$

Unter der Annahme einer geringen Abweichung von der Schwingfrequenz (kleine Ablagefrequenz $\Delta\omega$) $\frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}} \ll 1$ und mit einer Spulengüte $Q_{L,Cl} \gg 1$ sind folgende Näherungen zulässig:

$$1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}} \approx 1, \quad \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}} \right)^2 \approx 0, \quad 1 - \frac{1}{Q_{L,Cl}^2} \approx 1, \quad 1 + jQ_{L,Cl} \approx jQ_{L,Cl}.$$

Damit resultiert die Impedanz in der Umgebung der Schwingfrequenz näherungsweise zu

$$\underline{Z}_{Cl}(\Delta\omega) \approx -R_{L0} \frac{j Q_{L,Cl}}{2 \frac{\Delta\omega}{\omega_{0,Cl}} + j R_{L0} \Delta S_{VS,Cl} Q_{L,Cl}} = -\frac{1}{\Delta S_{VS,Cl} + 2 \frac{\Delta\omega}{j \omega_{0,Cl} R_{L0} Q_{L,Cl}}}$$

$$\underline{Z}_{Cl}(\Delta\omega) \approx -\frac{1}{\Delta S_{VS,Cl} - j 2 \Delta\omega C_p} \quad (6.11)$$

Die Kenntnis des Leistungsdichtespektrums des eingepprägten Rauschens und der Filterfunktion des Oszillators ermöglicht die Bestimmung des Leistungsdichtespektrums der Oszillatorrauschspannung. Das durch die Stromquelle $I_{R_{\text{eff}},r}$ modellierte Widerstandsrauschen weist, entsprechend Kapitel 6.2.1, in dem hier betrachteten Frequenzbereich weißes Rauschen mit dem Leistungsdichtespektrum

$$W_{r,I_{R_{\text{eff}}}}(\omega) = 4kT \frac{1}{R_{\text{eff}}}$$

auf. Hierin ist k die Boltzmann-Konstante $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ und T die Temperatur des rauschenden Widerstandes R_{eff} . Der Zweite, durch die Stromquelle $I_{V_{S,r}}$ eingepprägte, Rauschanteil des Oszillators modelliert das Rauschen der Verstärkerschaltung. Das Rauschen des Verstärkers wird als additive Eingangsgröße, die dem Oszillatorsignal überlagert ist, angenommen. Somit wird sowohl das Oszillatorsignal als auch das additive Verstärkerrauschen durch die Verstärkerschaltung übertragen (verstärkt). Das Leistungsdichtespektrum der Eingangs-Rauschspannung $W_{r,U_{VS}}$ fasst die in Kapitel 6.2.1 aufgezeigten Rauschanteile aktiver Bauelemente zusammen und wird durch

$$W_{r,U_{VS}}(\omega) = A_0 \left(1 + \frac{\omega_{1/f,o}}{\omega_{1/f,u} + \omega} \right)$$

beschrieben. Die darin enthaltene Rauschspannungsamplitude A_0 , gibt die Höhe des weißen Rauschanteils, mit der Einheit $[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}}]$, an. Das Leistungsdichtespektrum der Eingangs-Rauschspannung $W_{r,U_{VS}}(\omega)$ weist das für aktive Bauelemente übliche $1/f$ -Verhalten auf. Da das $1/f$ -Verhalten für Frequenzen $f \rightarrow 0$ eine unendlich hohe Leistung impliziert, wird die Knickfrequenz $\omega_{1/f,u}$ eingeführt, die die Rauschleistung begrenzt. Des Weiteren geht das $1/f$ -Verhalten oberhalb der Knickfrequenz $\omega_{1/f,o}$ in eine konstante Amplitude (weißes Rauschen) über. Die drei zur Beschreibung des Spektrums nötigen Größen A_0 , $\omega_{1/f,u}$, $\omega_{1/f,o}$ sind durch Vermessung der aktiven Elemente oder aus Datenblättern zu bestimmen.

Der lineare Ansatz zur Beschreibung des Oszillatorrauschens lässt das $1/f$ -Rauschen des Verstärkers bei genügend hohen Schwingfrequenzen unberücksichtigt und lediglich der Anteil des weißen Rauschens trägt zum Gesamtrauschen bei. Unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten, die reale Oszillatoren aufweisen, treten Mischprodukte auf. Das Übertragen eines mit additivem Rauschen überlagerten Signals, wie es hier vereinfacht betrachtet wird, durch ein quadrierendes System führt zu

$$y(t) = (s(t) + r(t))^2 = s(t)^2 + 2s(t)r(t) + r(t)^2 \quad .$$

Wobei im Fall eines Oszillators die Multiplikation von Signal und Rauschen entscheidenden Einfluss hat. Das Leistungsdichtespektrum des quadrierten Signals $S_y(f)$ lautet nach [53]

$$S_y(f) = S_{s^2}(f) + S_{sr}(f) + S_{r^2}(f) \quad .$$

Die einzelnen Summanden sind dabei durch

$$S_{s^2}(f) = \sigma_s^4 \delta(f) + 2 S_s(f) * S_s(f)$$

$$S_{r^2}(f) = \sigma_r^4 \delta(f) + 2 S_r(f) * S_r(f)$$

$$S_{sr}(f) = 2 \sigma_s^2 \sigma_r^2 \delta(f) + 4 S_s(f) * S_r(f)$$

mit den spektralen Leistungsdichten S_s, S_r und Standardabweichungen σ_s, σ_r der Signale gegeben.

Nimmt man vereinfacht eine reine Sinusschwingung mit einer Trägerfrequenz als Ausgangssignal des Oszillators, die additiv mit einem Rauschsignal überlagert wird, an, so ergibt sich nach dem Quadrieren des Signals folgendes Leistungsdichtespektrum:

- Gleichanteil mit $\sigma_s^4 + \sigma_r^4 + 2 \sigma_s^2 \sigma_r^2$
- Gleichanteil + Wechselanteil des Sinussignals durch $2 S_s(f) * S_s(f)$, wobei der Wechselanteil die doppelte Trägerfrequenz aufweist
- Sich durch $2 S_r(f) * S_r(f)$ ergebendes Spektrum
- Wechselanteil durch $4 S_s(f) * S_r(f)$. Dies entspricht einer Mischung der Signale, bei der das Spektrum des Rauschsignals um den Betrag der Trägerfrequenz verschoben wird. Somit wird das Leistungsdichtespektrum des Rauschens zur Trägerfrequenz hochtransformiert.

Aufgrund der Nichtlinearitäten wird das $1/f$ -Rauschen des Verstärkers im Spektralbereich in die Umgebung der Sinusschwingung hochtransformiert, womit das $1/f$ -Rauschen im Vergleich zum linearen Ansatz einen wesentlich höheren Einfluss auf das Rauschverhalten des Oszillators erhält und vollständig zu berücksichtigen ist. Die Eingangs-Rauschspannung mit dem beschriebenen Leistungsdichtespektrum $W_{r,U_{VS}}$ wird über die Steilheit $S_{VS,Cl}$ des Verstärkers in den Strom $I_{VS,r}$ überführt. Die Übertragung eines Signals durch ein lineares zeitinvariantes System mit der Übertragungsfunktion $H_{sys}(\omega)$ führt zu dem durch $W_{aus}(\omega) = W_{ein}(\omega) \cdot |H_{sys}(\omega)|^2$ beschreibbaren Leistungsdichtespektrum [54, 55, 57].

Das Leistungsdichtespektrum der Stromquelle $I_{VS,r}$ ergibt sich damit unter Berücksichtigung der Frequenzverschiebung zu

$$W_{r,I_{VS}}(\omega) = W_{r,U_{VS}}(|\omega - \omega_s|) \cdot |S_{VS,Cl}|^2 = A_0 \left(1 + \frac{\omega_{1/f,o}}{\omega_{1/f,u} + |\omega - \omega_s|} \right) |S_{VS,Cl}|^2.$$

Daraus resultierend erhält man für das Leistungsdichtespektrum der Oszillatorrauschspannung den Ausdruck

$$W_{r,U_{osz}}(\omega) = W_{r,I}(\omega) \cdot |Z_{Cl}(\omega)|^2 = \left(W_{r,I_{R_{eff}}}(\omega) + W_{r,I_{VS}}(\omega) \right) \cdot |Z_{Cl}(\omega)|^2.$$

Für den Erhalt einer konstanten Schwingungsamplitude muss $S_{VS,Cl} = -1/R_{\text{eff}}$ gelten, was zu

$$\begin{aligned} W_{r,U_{\text{osz}}}(\omega) &= \left(4kT \frac{1}{R_{\text{eff}}} + W_{r,U_{VS}}(|\omega - \omega_s|) \cdot |S_{VS,Cl}|^2 \right) \cdot |Z_{Cl}(\omega)|^2 \\ &= \left(4kT R_{\text{eff}} + W_{r,U_{VS}}(|\omega - \omega_s|) \right) \cdot \frac{|Z_{Cl}(\omega)|^2}{R_{\text{eff}}^2} \end{aligned}$$

führt.

Mit (6.11) führt die Umformulierung

$$\frac{|Z_{Cl}(\Delta\omega)|^2}{R_{\text{eff}}^2} = \frac{1}{R_{\text{eff}}^2} \frac{1}{\Delta S_{VS,Cl}^2 + 4\Delta\omega^2 C_p^2} = \frac{1}{4R_{\text{eff}}^2 C_p^2} \frac{1}{\left(\frac{\Delta S_{VS,Cl}}{2C_p}\right)^2 + \Delta\omega^2}$$

zu dem Ausdruck

$$W_{r,U_{\text{osz}}}(\Delta\omega) \approx \left[4kT R_{\text{eff}} + A_0 \left(1 + \frac{\omega_{1/f,o}}{\omega_{1/f,u} + |\Delta\omega|} \right) \right] \frac{1}{4R_{\text{eff}}^2 C_p^2} \frac{1}{\left(\frac{\Delta S_{VS,Cl}}{2C_p}\right)^2 + \Delta\omega^2},$$

der das Leistungsdichtespektrum der Oszillatorrauschspannung in der Umgebung der Schwingfrequenz $\omega = \omega_s + \Delta\omega$ wiedergibt. Entsprechend (6.7) ist eine Normierung auf die Oszillatoramplitude \hat{u}_S durchzuführen, womit das Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens in der Umgebung der Schwingfrequenz

$$\begin{aligned} W_{r,\phi}(\Delta\omega) &= \frac{W_{r,U_{\text{osz}}}(\Delta\omega)}{\frac{1}{2}\hat{u}_S^2} \\ &\approx \frac{4kT R_{\text{eff}} + A_0 \left(1 + \frac{\omega_{1/f,o}}{\omega_{1/f,u} + |\Delta\omega|} \right)}{2\hat{u}_S^2} \frac{1}{R_{\text{eff}}^2 C_p^2} \frac{1}{\left(\frac{\Delta S_{VS,Cl}}{2C_p}\right)^2 + \Delta\omega^2} \quad (6.12) \end{aligned}$$

lautet. Das durch (6.12) beschriebene Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens stellt ein Lorentz-Spektrum dar [52, 64, 65]. Die noch unbestimmte Größe $\Delta S_{VS,Cl}$ ist sehr entscheidend für den Verlauf des Spektrums.

Mit $\Delta S_{VS,Cl} \rightarrow 0$ entspricht der Verlauf, jedoch nicht der Betrag, den Ergebnissen von [59, 60, 62] mit der problematischen Singularität bei $\Delta\omega = 0$. Die Größe $\Delta S_{VS,Cl}$ bestimmt die Knickfrequenz des Spektrums und unterscheidet die Spektren der Oszillatorrauschspannung und des Phasenrauschens [52, 65]. Es gilt die Beziehung $\Delta S_{VS,Cl,\phi} \ll \Delta S_{VS,Cl,U}$, womit deutlich wird, dass bei geringen Frequenzablagen $\Delta\omega$ das Phasenrauschen dominiert [52, 65, 61].

Die Größe $\Delta S_{VS,Cl}$ stellt eine Abweichung der Steilheit der Verstärkerschaltung von dem idealen linearen Fall, bei dem die Last des Schwingkreises gerade kompensiert wird, dar. Bei Berücksichtigung von Nichtlinearitäten kommen Anteile höherer

Ordnung zur Näherung des Verstärkerverhaltens hinzu, die ebenfalls zum Erhalt der Schwingung beitragen. Tritt aufgrund von Rauschen eine Störung auf, die sowohl in der Frequenz als auch in der Phase der Oszillatorschwingung gleicht, so resultiert dies bedingt durch die Nichtlinearitäten in einer Änderung der Steilheit $\Delta S_{\text{VS,Cl}}$, dessen Größenordnung vom nichtlinearen Verhalten abhängt [65]. Zu diesem Einfluss sind auch Mischprozesse aus n - und $1/n$ -fachen Frequenzen der Schwingungsfrequenz zu zählen, die zusammen dem Amplitudenrauschen zuzuordnen sind. Der übrige Anteil des Rauschens führt, bedingt durch die Nichtlinearitäten, ebenfalls zu einer Änderung der Steilheit, die im Phasenrauschen resultiert. Das effektive Rauschspannungsquadrat eines Parallelschwingkreises mit einem rauschenden Widerstand weist aufgrund seiner Filterfunktion nach [54] einen Wert von $U_{\text{osz,r}}^2 = \frac{kT}{C}$ auf. Dieser Wert führt bezogen auf den Effektivwert der Schwingungsamplitude zu einer Änderung der Steilheit von

$$\Delta S_{\text{VS,Cl}} \approx \frac{kT}{\frac{1}{2} \hat{u}_S^2 C_p} \cdot S_{\text{VS,Cl}} \approx \frac{2kT}{\hat{u}_S^2 C_p} \cdot \frac{1}{R_{\text{eff}}}. \quad (6.13)$$

Dieser Wert entspricht dem aus [65] und ist um den Faktor 2 kleiner als der in [52].

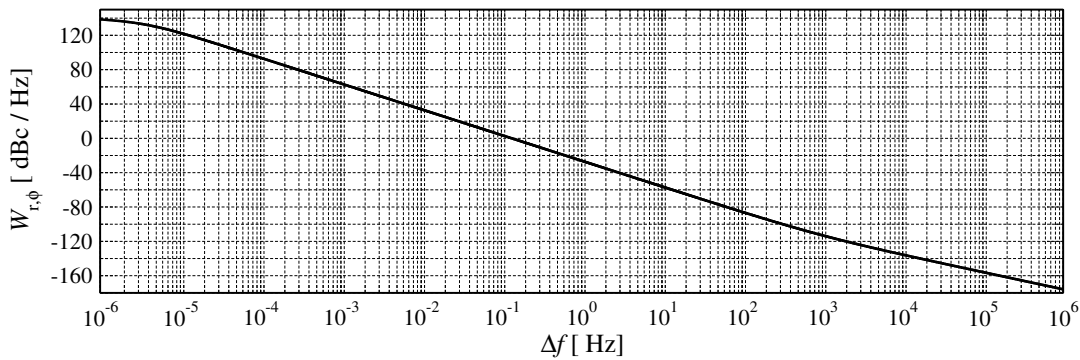


Abbildung 6.15: Phasenrauschspektrum zur Abschätzung der Frequenzschwankungen

In **Abbildung 6.15** ist das durch (6.12) angegebene Phasenrauschspektrum in Abhängigkeit von der Ablagefrequenz Δf im logarithmischen Maßstab dargestellt. Zu erkennen ist, dass das Spektrum bei hohen Ablagefrequenzen ($\Delta f > 10^3$ Hz) eine Abhängigkeit von $\sim \Delta f^{-2}$, im Bereich von ($10^{-5} < \Delta f < 10^3$ Hz) eine Abhängigkeit von $\sim \Delta f^{-3}$ und bei Ablagefrequenzen ($\Delta f < 10^{-6}$ Hz) eine Abflachung, gefolgt von einem konstanten Verlauf, aufweist. Die Abhängigkeit $\sim \Delta f^{-2}$ des Spektrums ist bedingt durch die Filtereigenschaft des Oszillators, während die Abhängigkeit $\sim \Delta f^{-3}$ durch das hochtransformierte $1/f$ -Rauschen, das sich zusätzlich zur Filtereigenschaft auswirkt, herrührt. Das dargestellte Phasenrauschspektrum resultiert aus den folgenden Parametern der eingesetzten Schaltung, die Datenblättern entnommen bzw. gemessen wurden:

$$\begin{array}{llll}
R_{\text{eff}} = 25,45 \cdot 10^3 \Omega & C_p = 40 \cdot 10^{-12} \text{ F} & \Delta S_{\text{VS,C1}} \text{ aus (6.13)} & \hat{u}_S = 2 \text{ V} \\
A_0 = \left(2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}}\right)^2 & \omega_{1/f,u} = 2 \pi 10^{-6} \text{ Hz} & \omega_{1/f,o} = 2 \pi 10^5 \text{ Hz} & T = 298 \text{ K}
\end{array}$$

Tabelle 6.2: Bauelement- und Rauschwerte zur Abschätzung des Phasenrauschspektrums des verwendeten Oszillators

Ein bekanntes Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens erlaubt die Bestimmung der Phasenschwankungen. Da eine Frequenzmessung nach Kapitel 6.3 während einer gewissen Messzeit erfolgt, ist dieser Einfluss zu berücksichtigen. Phasenschwankungen lassen sich durch das Schwankungsquadrat

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = E\{\Delta\phi^2\} = E\left\{\left(\phi(t + \Delta T) - \phi(t)\right)^2\right\}$$

mit der Messzeit ΔT in Beziehung setzen [66, 67]. Der Erwartungswert lässt sich umformulieren zu

$$E\left\{\left(\phi(t + \Delta T) - \phi(t)\right)^2\right\} = E\{\phi(t)^2\} + E\{\phi(t + \Delta T)^2\} - 2 E\{\phi(t + \Delta T) \phi(t)\} \quad .$$

Weiter gilt für die Erwartungswerte unter der bereits getroffenen Annahme von ergodisch, stochastischen Prozessen die Parsevalsche Gleichung [52, 54]

$$E\{\phi(t)^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty W_{r,\phi}(\omega) d\omega$$

und unter Einbeziehung der Autokorrelationsfunktion [52, 54]

$$E\{\phi(t + \Delta T) \phi(t)\} = R_{\phi\phi}(\Delta T) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty W_{r,\phi}(\omega) \cos(\omega \Delta T) d\omega \quad .$$

Wegen $E\{\phi(t)^2\} = E\{\phi(t + \Delta T)^2\}$ (ergodisch stochastischer Prozess) ist das Schwankungsquadrat gegeben durch

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Delta\phi}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 2 W_{r,\phi}(\omega) \left(1 - \cos(\omega \Delta T)\right) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 4 W_{r,\phi}(\omega) \sin^2\left(\frac{\omega}{2} \Delta T\right) d\omega \quad . \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Bezüglich der Schwingfrequenz ω_s ist das durch (6.12) beschriebene Phasenrauschspektrum symmetrisch $W_{r,\phi}(-\Delta\omega) = W_{r,\phi}(\Delta\omega)$, womit die Betrachtung von positiven Frequenzablagen $\Delta\omega > 0$ ausreichend ist. Dies wird durch die Beziehung

$\mathcal{W}_{r,\phi}(\Delta\omega) = 2 W_{r,\phi}(\Delta\omega)$ berücksichtigt und resultiert in

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 8 \mathcal{W}_{r,\phi}(\Delta\omega) \sin^2\left(\frac{\omega_s + \Delta\omega}{2} \Delta T\right) d\Delta\omega .$$

Elektronisch sind Nulldurchgänge von Schwingungsperioden leicht detektierbar. Deshalb ist es sinnvoll, Phasenschwankungen vollständiger Schwingungsperioden zu bestimmen. Hierzu lässt sich die Messzeit ΔT mit $\Delta T = N \frac{2\pi}{\omega_s}$ durch das Vielfache einer Schwingungsperiode ausdrücken. Um die Gewichtungsfunktion $\sin^2\left(\frac{\omega}{2} \Delta T\right)$ in (6.14) ebenfalls durch die Frequenzablage $\Delta\omega$ zu beschreiben, ist diese in der Umgebung der Schwingfrequenz zu betrachten. Die Gewichtungsfunktion in der Umgebung der Schwingfrequenz lautet nach Anhang C.5 mit $\delta = 0$

$$\sin^2\left(\frac{\omega_s + \Delta\omega}{2} \Delta T\right) = \sin^2\left(\frac{N\pi}{\omega_s} \Delta\omega\right) .$$

Überdies ist in Anhang C.5 gezeigt, dass die Gewichtungsfunktion bei der Wahl einer Messzeit ΔT , die dem Vielfachen einer vollständigen Periode entspricht, zu den geringsten Phasenschwankungen führt. Das Schwankungsquadrat des Phasenrauschens $\sigma_{\Delta\phi}^2$ bezogen auf das Vielfache einer Schwingungsperiode lässt sich in Abhängigkeit von der Ablagefrequenz $\Delta\omega$ durch

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 8 \mathcal{W}_{r,\phi}(\Delta\omega) \sin^2\left(\frac{N\pi}{\omega_s} \Delta\omega\right) d\Delta\omega . \quad (6.15)$$

ausdrücken. Das Integral zur Bestimmung des Schwankungsquadrats $\sigma_{\Delta\phi}^2$ lässt sich analytisch nicht lösen [67], womit lediglich eine numerische Bestimmung möglich ist.

Das durch (6.15) zu bestimmende Phasenschwankungsquadrat erlaubt eine Aussage über die zu erwartenden relativen Frequenzschwankungen. Hierzu ist das Schwankungsquadrat auf die Anzahl der gemessenen Schwingungen zu beziehen. Eine Abschätzung der zu erwartenden relativen Frequenzschwankungen ist mit Hilfe des angenäherten Leistungsdichtespektrums des Phasenrauschens $\mathcal{W}_{r,\phi}(\Delta\omega) = 2 W_{r,\phi}(\Delta\omega)$ aus (6.12) durch

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{N 2\pi} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 8 \mathcal{W}_{r,\phi}(\Delta\omega) \sin^2\left(\frac{N\pi}{\omega_s} \Delta\omega\right) d\Delta\omega} \quad (6.16)$$

zu bestimmen. Für die Erzeugung des Phasenrauschspektrums der Abbildung 6.15, sind die Parameter entsprechend der Größenordnung des hier betrachteten Oszillators gewählt worden. Das Phasenrauschspektrum resultiert nach numerischer Berechnung von (6.16) in einer relativen Frequenzschwankung von $1,1 \cdot 10^{-8}$, die eine Abschätzung für das Auflösungsvermögen des hier betrachteten Oszillators darstellt. Diese Abschätzung der Frequenzschwankungen zeigt, dass der eingesetzte Oszillator die geforderte Auflösung weit übertrifft und somit für eine höchstauflösende Druckmessung geeignet ist.

6.2.4 Schlussfolgerung zum Rauschverhalten

Das Kapitel 6.2 beschreibt die Auswirkung elektronischen Rauschens auf das Phasenverhalten eines Oszillators. Der Oszillator wird als lineares Modell in reduzierter Form in der Zweipoldarstellung (Van der Pol-Oszillator) betrachtet.

Als Resultat der Untersuchungen, ergeben sich nach (6.12) die nachfolgenden Maßnahmen für die hier interessierende hohe Phasen- bzw. Frequenzstabilität. Die effektive Belastung des Schwingkreises ist möglichst hochohmig zu gestalten $R_{\text{eff}} \rightarrow \infty$. Hierbei geht unter Vernachlässigung des Verlustwiderstands der Kapazität entscheidend der Ohmsche Widerstand der Induktivität und die aus der Verstärkerschaltung resultierende Belastung ein. Die Kapazität und die Schwingungsamplitude sollten ebenfalls möglichst hohe Werte aufweisen, wobei sich eine zu hohe Amplitude bedingt, durch die Einflüsse von Nichtlinearitäten, negativ auswirkt. Des Weiteren sind aktive Elemente zu wählen, die ein geringes Rauschen, eine niedrige Knickfrequenz $\omega_{1/f,0}$ und ein möglichst geringes nichtlineares Verhalten aufweisen. Die Abschätzung der relativen Frequenzschwankungen durch (6.16) zeigt, dass die Schwankungen sich mit der Anzahl der Schwingungsperioden reduzieren. Dabei ist eine geforderte maximale Messzeit vorrangig und ausschlaggebend. Darüber hinaus sind Drifteinflüsse nicht berücksichtigt, die ebenfalls die Messzeit begrenzen.

Unter Berücksichtigung der durch Nichtlinearitäten auftretenden Einflüsse, die nicht zu vernachlässigen sind, wird eine Näherung zur Beschreibung des Leistungsdichtespektrums des Phasenrauschens bestimmt. Darauf basierend erfolgt eine Abschätzung der rauschbedingten relativen Frequenzschwankungen. Sie zeigt, dass das hier betrachtete Konzept die geforderte Auflösung weit übertrifft und für eine höchstauflösende Druckmessung geeignet ist.

6.3 Frequenzmessung

Der Einsatz eines Oszillators, dessen Schwingfrequenz durch das Sensorelement beeinflusst wird, ist mit einem zu wählenden Frequenzmessverfahren zu erfassen. Die Forderung einer hohen Auflösung und einer schnellen Messung bedarf der Betrachtung und Beurteilung von Verfahren zur Frequenzmessung, die nachfolgend erfolgt.

Die Frequenz eines periodischen Signals entspricht der Anzahl von vollständigen Wiederholungen des Signals in einem definierten Zeitintervall [68]. Bezieht man sich bei dem Zeitintervall auf eine Länge von 1s, so erhält man die Frequenz in Hertz (Hz). Somit wird ein Wert für die Frequenz bestimmt, der dem Mittelwert der momentanen Frequenz entspricht:

$$\bar{f}_\tau = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} f(t) dt$$

Hierbei ist $f(t)$ die momentane Frequenz zum Zeitpunkt t und \bar{f}_τ ist der Mittelwert der Frequenz im Messintervall τ .

6.3.1 Messverfahren

Die rein analoge Frequenzmessung wird an dieser Stelle lediglich der Vollständigkeit halber erwähnt, jedoch nicht weiter betrachtet. Zur Frequenzmessung werden Verfahren der digitalen Frequenzmessung vorgestellt. Standardgeräte für die digitale Frequenzmessung sind elektronische Zähler. Auf die Details der einzelnen Baugruppen wie Eingangssignalanpassung, Zeitbasis und Steuerung wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen. Nachfolgend werden Messprinzipien, die für die Frequenzmessung in Frage kommen, vorgestellt.

Direkte Frequenzmessung / Periodendauermessung [68, 69]

Die direkte Frequenzmessung stellt das einfachste Prinzip dar. Während einer definierten Torzeit werden die vollständigen Perioden des Eingangssignals gezählt. Aufgrund der bekannten Torzeit T_{Tor} und der ermittelten Anzahl von Perioden n_x , kann die Frequenz des Signals direkt bestimmt werden.

$$f_x = \frac{n_x}{T_{\text{Tor}}}$$

Quasi invers ist die Funktionsweise der Periodendauermessung. Während einer Periode des zu messenden Signals werden Zeitbasisimpulse mit einer definierten Frequenz gezählt. Die bekannte Frequenz f_0 und die ermittelte Anzahl der Zeitbasisimpulse n_0 erlauben die Bestimmung der Periodendauer.

$$T = \frac{n_0}{f_0}$$

Bei Messungen von hohen Frequenzen ist die direkte Frequenzmessung und bei niedrigen Frequenzen entsprechend die Periodendauermessung vorzuziehen.

Eingangssynchronisierter rechnender Zähler / Frequenzverhältnismessung [69]

Wie bei der direkten Frequenzmessung werden auch hier die vollständigen Perioden des zu messenden Signals während einer definierten Torzeit gezählt. Kombiniert wird dies mit der Zählung der Zeitbasisimpulse, wie bei der Periodendauermessung. Hinzu kommt, dass die Torzeit synchron mit dem ersten Impuls des zu messenden Signals begonnen wird. Nach abgelaufener Torzeit wird die Zählung nicht abgebrochen, sondern läuft bis zum Ende der Periode des zu messenden Signals weiter. Auf diese Weise erhält man ein Frequenzverhältnis, aus dem sich die Frequenz des zu messenden Signals, aufgrund der bekannten Frequenz der Zeitbasisimpulse f_0 , bestimmen lässt.

$$f = \frac{n_x}{n_0} \cdot f_0$$

Dieses Prinzip ist sowohl für niedrige als auch für hohe Frequenzen geeignet.

Schwebungs-/Mischfrequenzmessung [68]

Die Bestimmung der Schwebungs- bzw. Mischfrequenz ist keine direkte Möglichkeit zur Frequenzmessung. Dieses Verfahren dient als eine Zwischenstufe. Für die Messung der Schwebungsfrequenz selbst ist ein beliebiges, weiteres Frequenzmessverfahren erforderlich. Dieses Verfahren erfordert ein Referenzsignal, welches eine Frequenz aufweist, die nah an der Frequenz des zu messenden Signals liegt. Durch das sogenannte Mischen (Multiplikation) der Signale ergibt sich unter anderem eine im Verhältnis zu den Signalfrequenzen niedrige Schwebungsfrequenz. Diese entspricht der Differenz der Frequenzen des Referenzsignals und des zu messenden Signals [70]. Die so erhaltene Schwebungsfrequenz ist mit einem beliebigen Messverfahren zu bestimmen. Die durch Mischen realisierte Transformation in einen wesentlich niedrigeren Frequenzbereich entspricht einem Lupeneffekt, mit Hilfe dessen ein Blick auf das zu messende Signal in der Umgebung der zu messenden Signalfrequenz erreicht wird. Die bekannte Referenzfrequenz und die erhaltene Schwebungsfrequenz erlauben die Bestimmung der zu messenden Frequenz. Die Kombination dieses Verfahrens mit einem weiteren Frequenzmessverfahren erlaubt eine schnelle und hochauflösende Frequenzmessung und eignet sich damit für die hier gestellte Aufgabe.

Frequenzmessung mittels digitaler Fouriertransformation

Die digitale Abtastung der Oszillator-Ausgangsspannung ermöglicht mittels digitaler Fouriertransformation die Bestimmung des Signal-Spektrums und somit die Bestimmung der Frequenz [71, 72]. Dies setzt voraus, dass zum einen die Abtastung mit einer Frequenzstabilität durchgeführt wird, die besser als die des zu messenden Signals ist. Zum anderen setzt eine geforderte Frequenzauflösung eine entsprechende Messzeit voraus. Während der Messzeit T_{Mess} werden $N_x = f_{\text{Tast}} \cdot T_{\text{Mess}}$ Abtastwerte mit der Frequenz f_{Tast} aufgenommen. Das resultierende Spektrum besteht aus N_x Spektralanteilen, deren Abstand und somit auch die Frequenzauflösung $\Delta f = \frac{f_{\text{Tast}}}{N_x}$ beträgt. Damit besteht die Beziehung $\Delta f = 1/T_{\text{Mess}}$ zwischen Frequenzauflösung und Messzeit, die unabhängig von der Abtastfrequenz ist. Eine Frequenzauflösung von 1 Hz erfordert eine Messzeit von 1 s, weshalb diese Methode eher zur groben Frequenzmessung geeignet ist.

Mit Hilfe von Interpolationsverfahren ist eine Erhöhung der Frequenzauflösung um den Faktor 10^3 möglich [73]. Dies setzt voraus, dass eine ausreichend schnelle und frequenzstabile Signalabtastung stattfindet und sich die Signalfrequenz während der Messung nicht ändert. Der Rechenaufwand, der zusätzlich bedingt durch die Interpolation auftritt, ist im Vergleich zur Berechnung der Fast-Fourier-Transformation (FFT) zu vernachlässigen. Eine bestimmte geforderte Frequenzauflösung bedarf entsprechend vieler Abtastwerte. Mit der FFT wird das gesamte Spektrum bis zur halben Abtastfrequenz, mit entsprechendem Rechenaufwand, berechnet. Bei einer Frequenzmessung ist lediglich der Bereich der zu messenden Frequenz von Interesse. Eine Möglichkeit zur Reduzierung des Rechenaufwands bietet die sogenannte Zoom-FFT, die lediglich einen Teilbereich des Spektrums bestimmt [74].

Interpolierende Verfahren

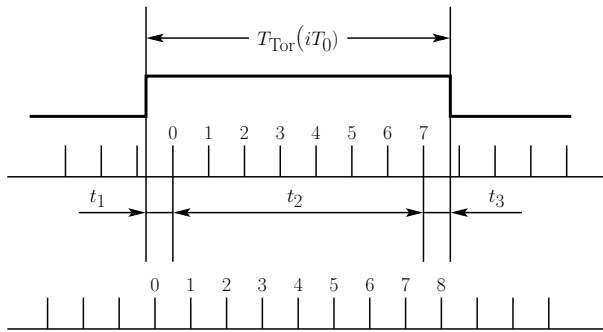


Abbildung 6.16: Entstehung des Zählimpulsfehlers

Start als auch das Ende des Messintervalls starten je einen Rechteck-Oszillator (**Abbildung 6.17**). Die Frequenzen der Oszillatoren unterscheiden sich geringfügig, was maßgebend für die Messauflösung ist. Aufgrund der unterschiedlichen Frequenzen und des zeitlich verschobenen Startpunkts der Schwingungen, tritt im zeitlichen Verlauf der Schwingungen eine Koinzidenz der Signalflanken auf. Die Anzahl der bis zur Koinzidenz aufgetretenen Schwingungen der zwei Oszillatoren entspricht unter Beachtung der Schwingungsdauern dem zu messenden Zeitintervall $T = ((n_1 - 1) T_1 - (n_2 - 1) T_2)$.

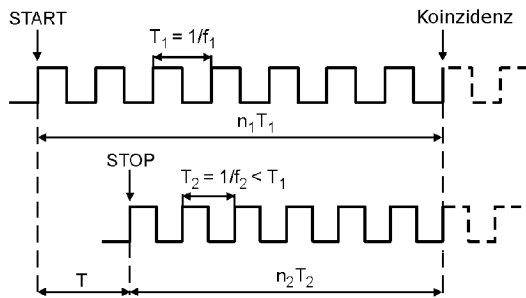


Abbildung 6.17: Vernier-Methode

die Spannung mit einem ADU zu digitalisieren, um daraus das Zeitintervall zu bestimmen. Alternativ ist es möglich das Zeitintervall um einen definierten Faktor zu strecken und mit Hilfe eines weiteren Zählers zu bestimmen [77]. Das Strecken erfolgt beispielsweise durch einen linearen Abstieg mit einer betragsmäßig um den definierten Faktor geringeren Steigung auf null zurück.

Die zur Zeitintervallmessung verwendete Vernier-Methode [75, 76] kann als Interpolationsverfahren zur Frequenzmessung genutzt werden. Die gesamte Messzeit T_x der **Abbildung 6.16** setzt sich aus $T_{\text{Tor}} = t_1 + t_2 + t_3$ zusammen. Die Zeit t_2 kann dabei in erster Näherung fehlerfrei mit einem einfachen Zähler, wie in der Betrachtung der Messgenauigkeit gezeigt ist, gemessen werden. Es bietet sich somit an, die nicht messbaren Zeitintervalle t_1 und t_3 mittels der Vernier-Methode zu bestimmen. Sowohl der

Dieses Prinzip entspricht dem Nonius eines Messschiebers. Die Schwierigkeit der Vernier-Methode liegt in der technischen Realisierbarkeit von Oszillatoren, die ausreichend phasenstabil und startbar sind.

Weitere Möglichkeiten bestehen darin, das zu messende Zeitintervall t_1 bzw. t_3 der **Abbildung 6.16**, in einen Spannungswert umzusetzen [75, 77]. Diese Spannung steigt im einfachsten Fall von null linear mit einer definierten Steigung und der Intervalllänge an. Mit dem Ende des Zeitintervalls ist

6.3.2 Betrachtungen der Messgenauigkeit

Jedes digitale Messgerät weist aufgrund der Messwertdiskretisierung einen Messfehler von ± 1 Digit, der kleinsten Auflösungseinheit, auf. Dies entspricht bei digitalen Zählern einem Fehler von ± 1 Zählimpuls. Zwischen der Torzeit T_{Tor} und den Zählimpulsen besteht im Allgemeinen keine konstante Phasenbeziehung. Eine Messung ist beispielhaft in Abbildung 6.16 dargestellt. Die durch i Schwingungsperioden T_0 des zu messenden Signals bedingte Torzeit enthält im gezeigten Beispiel 8 Zählimpulse, deren Abstand der Zeit T_0 entspricht, und zwei Zeitintervalle t_1, t_3 die unbestimmt sind. Bedingt durch eine andere Phasenlage ist es möglich, dass ein Zählimpuls weniger bzw. ein Zählimpuls mehr in die Torzeit passt, wie es in der unteren Impulsskala der Abbildung 6.16 der Fall ist. Somit tritt bei Vernachlässigung von sonstigen Fehlerquellen und nicht ermittelten Zeitintervallen t_1, t_3 , wie es bei einfachen Zählern der Fall ist, zwangsläufig ein Messfehler von ± 1 Zählimpuls auf.

Zur Bestimmung des relativen Messfehlers wird angenommen, dass sowohl die zu messende Frequenz f_x mit entsprechender Periodendauer T_x als auch die Frequenz f_0 der Zeitbasis des Zählers und die entsprechende Periodendauer T_0 während der Torzeit T_{Tor} gemessen werden. Unter diesen Annahmen gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} n_x &= T_{\text{Tor}} \cdot f_x \\ n_0 &= T_{\text{Tor}} \cdot f_0 \quad . \end{aligned}$$

Dabei entspricht n_x den Zählimpulsen der zu messenden Frequenz und n_0 den Zählimpulsen der Frequenz der Zeitbasis während der Torzeit. Die Auflösung der Gleichungen nach T_{Tor} und Gleichsetzung ergibt für die zu messende Frequenz:

$$f_x = \frac{n_x}{n_0} \cdot f_0 \quad .$$

Eine Beschreibung, der zu messende Frequenz kann, somit durch $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ erfolgen. Aufgrund von Messfehlern bzw. systematischen Fehlern führen die Einzelfehler Δx_i zu einem Gesamtfehler Δf , der sich durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \quad \text{für} \quad \Delta x_i \ll x_i \quad (6.17)$$

bestimmen lässt [69]. Mit der Annahme von bekannten Fehlerschranken wird der relative Fehler der zu messenden Frequenz durch

$$\left| \frac{\Delta f_x}{f_x} \right| = \left| \frac{\Delta n_x}{n_x} \right| + \left| \frac{\Delta n_0}{n_0} \right| + \left| \frac{\Delta f_0}{f_0} \right|$$

beschrieben.

Üblicherweise wird von einer Zeitbasis ausgegangen, deren Fehler vernachlässigbar zu den weiteren Fehlereinflüssen ist. In dieser Arbeit ist die absolute Genauigkeit

der Zeitbasis von geringem Interesse. Entscheidend ist hier die Kurzzeitstabilität, die für schnelle kontinuierliche Relativmessungen der Frequenz relevant ist. Voraussetzung dafür ist, dass der Fehler aufgrund von Kurzzeitstabilität vernachlässigbar ist, wovon bei einer quarzstabilisierten Zeitbasis ausgegangen werden kann. Somit ist der relative Frequenzfehler durch

$$\left| \frac{\Delta f_x}{f_x} \right| = \left| \frac{\Delta n_x}{n_x} \right| + \left| \frac{\Delta n_0}{n_0} \right|$$

gegeben. Abhängig von dem verwendeten Messverfahren ergeben sich verschiedene Beziehungen für den relativen Messfehler der Frequenz.

Direkte Frequenzmessung Aufgrund der eingestellten Torzeit ist hier die Anzahl der Zeitbasisimpulse n_0 fest vorgegeben, womit $\Delta n_0 = 0$ gilt. Der digitale Restfehler führt zu $\Delta n_x = \pm 1$, womit sich der relative Frequenzmessfehler zu

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = \pm \frac{1}{n_x} = \pm \frac{1}{T_{\text{Tor}} \cdot f_x}$$

ergibt. Der relative Fehler der direkten Frequenzmessung ist umgekehrt proportional zu der zu messenden Frequenz. Dies bedeutet, dass sich dieses Messverfahren besonders für hohe Frequenzen eignet.

Periodendauermessung Die Vorgabe der Messzeit über eine Periode des zu messenden Signals, führt zu $\Delta n_x = 0$. Der digitale Messfehler entsteht hier bei der Bestimmung der Zeitbasisimpulse, womit $\Delta n_0 = \pm 1$ gilt. Der relative Frequenzmessfehler wird somit durch

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = \pm \frac{1}{n_0} = \pm \frac{1}{T_x \cdot f_0}$$

beschrieben. Das Messverfahren der Periodendauermessung führt erwartungsgemäß zu einem relativen Fehler, der umgekehrt proportional zur Periodendauer des zu messenden Signals ist. Dieses Messverfahren bietet sich somit für niedrige Frequenzen an.

Eingangssynchronisierter rechnender Zähler / Frequenzverhältnismessung Eine feste Anzahl von Frequenzimpulsen n_x wird durch die Vorgabe der Torzeit gegeben. Die Synchronisation der Torzeit auf das zu messende Signal und die Messung nach Ablauf der Torzeit bis zum Ende der angefangenen Periode des Messsignals ergibt $\Delta n_x = 0$. Somit ist lediglich die Bestimmung der Basiszeitimpulse fehlerbehaftet. Der relative Frequenzmessfehler wird dann wie folgt bestimmt:

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = \pm \frac{f_x}{n_x \cdot f_0} \leq \pm \frac{1}{T_{\text{Tor}} \cdot f_0} \quad .$$

Die Frequenzverhältnismessung erlaubt eine Messung, deren relativer Fehler unabhängig von der Frequenz des zu messenden Signals ist. Aufgrund dieser Eigenschaft wird dieses Verfahren zur Frequenzmessung eingesetzt.

Schwebungs-/Mischfrequenzmessung Durch Mischen des unbekanntes Signals der Frequenz f_x mit einem Signal einer bekannten Vergleichsfrequenz f_v , wird ein neues Signal erzeugt, welches eine Schwebungsfrequenz f_s aufweist. Für die Schwebungsfrequenz gilt

$$f_s = |f_v - f_x| \quad . \quad (6.18)$$

Bei Einsatz der Frequenzverhältnismessung als Verfahren zur Messung der Schwebungsfrequenz, ist der relative Fehler der Schwebungsfrequenz durch

$$\frac{\Delta f_s}{f_s} = \pm \frac{1}{T_{\text{Tor}} \cdot f_0}$$

bestimmt. Damit ist allerdings keine Aussage zum relativen Fehler der zu messenden Frequenz f_x möglich. Hierzu muss (6.18) nach f_x umgestellt werden und (6.17) darauf angewandt werden. Für den relativen Fehler ist noch eine Division durch f_x durchzuführen. Somit ergibt sich der relative Frequenzmessfehler zu:

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = \frac{\Delta f_v}{f_x} - \frac{\Delta f_s}{f_x} \quad .$$

Die Größe Δf_s ist bereits bestimmt, womit noch eine Aussage zu Δf_v zu treffen ist. Hier wird angenommen, dass die Vergleichsfrequenz von der Zeitbasis abgeleitet wird und deren Fehler bzw. Abweichung vernachlässigbar ist. Mit dieser Annahme folgt für den relativen Frequenzmessfehler:

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = \pm \frac{f_s}{f_x} \cdot \frac{1}{T_{\text{Tor}} \cdot f_0} \quad .$$

Die erhaltene Beziehung zeigt, dass der relative Messfehler im Vergleich zur Frequenzverhältnismessung mit einem Faktor $\frac{f_s}{f_x} \ll 1$ multipliziert wird. Dies bedeutet, dass durch das Messverfahren eine Herabsetzung der Torzeit bei vorgegebener Fehlerschranke möglich ist. **Abbildung 6.18** stellt den relativen Messfehler der Schwebungsfrequenzmessung in Abhängigkeit von der Torzeit T_{Tor} und dem Verhältnis der Schwebungsfrequenz zur Messfrequenz $\frac{f_s}{f_x}$, mit einer Frequenz der Zeitbasis von 40 MHz, dar.

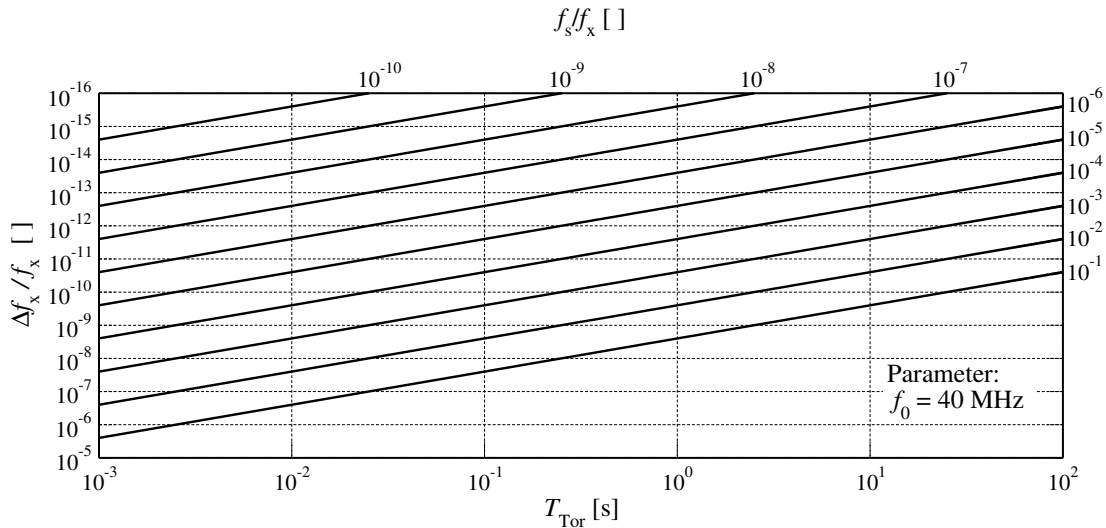


Abbildung 6.18: Relativer Messfehler bei der Schwebungsfrequenzmessung in Abhängigkeit von der Torzeit und dem Verhältnis der Schwebungsfrequenz zur Messfrequenz

6.3.3 Schlussfolgerung zur Frequenzmessung

Die einfachste Realisierung einer Frequenzmessung wird mit dem Verfahren der direkten Frequenzmessung erreicht. Die geringe Erweiterung zur Frequenzverhältnismessung erlaubt eine Messung, deren Messfehler unabhängig von der zu messenden Frequenz ist. Wird wie hier eine hohe Auflösung gefordert, so bedeutet es für beide Verfahren eine entsprechend lange Torzeit. Im Fall der Frequenzverhältnismessung wird eine Erhöhung der Auflösung zusätzlich durch die Erhöhung der Referenzfrequenz erreicht, die allerdings aufgrund des Einsatzes von Zählerbausteinen und deren Maximalfrequenz beschränkt ist. Somit ist für eine weitere Erhöhung der Auflösung die Schwebungsfrequenzmessung oder zusätzlich eines der Interpolationsverfahren zu verwenden.

Die Beurteilung der Messverfahren zeigt, dass die Schwebungsfrequenzmessung in der Kombination mit der Frequenzverhältnismessung ein einfach zu realisierendes, schnelles und hochauflösendes Verfahren darstellt. Es wird hier zur Frequenzmessung eingesetzt.

6.4 Direkte Kapazität zu Digitalwert Umsetzung

Seit wenigen Jahren sind Integrierte-Schaltungen (ICs) auf dem Markt erhältlich, die die direkte Umsetzung einer Kapazität in einen Digitalwert ermöglichen (C/D-Umsetzer). Anders als die in [21, 22, 44, 78, 79] vorgestellten Verfahren zur Digitalisierung einer Kapazität, die zunächst eine kapazitätsabhängige Spannung generieren, die anschließend mittels eines ADUs digitalisiert wird, setzen die hier betrachteten C/D-Umsetzer die zu messende Kapazität, basierend auf einem Delta-Sigma-Umsetzer, direkt in einen Digitalwert um [80, 79]. Eine kommerzielle Lösung ist in der Regel aufwandsärmer als eine Neuentwicklung in ein Projekt zu implementieren, weshalb ein Vergleich der Sensoren auf Oszillatorbasis und C/D-Umsetzerbasis durchgeführt wird. Nachfolgend wird das Funktionsprinzip eines Delta-Sigma-Umsetzers verdeutlicht und die Modifikation zum C/D-Umsetzer aufgezeigt. Des Weiteren wird die technische Umsetzung, speziell die sogenannte Schirm(Guard)-Elektrode, betrachtet.

6.4.1 Delta-Sigma-Umsetzer

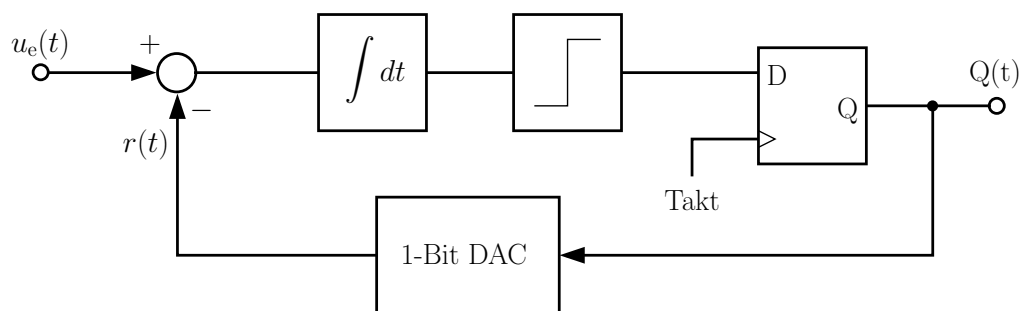


Abbildung 6.19: Blockschaltbild eines Delta-Sigma-Modulators erster Ordnung

In **Abbildung 6.19** ist das Blockschaltbild eines Delta-Sigma-Modulators erster Ordnung dargestellt. Der Delta-Sigma-Modulator erzeugt einen Bitstrom $Q(t)$ (Bitstream) aus logischen Nullen bzw. Einsen, der im Mittel dem Eingangssignal $u_e(t)$ entspricht [69, 81]. Die Differenz Δ aus Eingangssignal und dem durch einen Digital zu Analog Umsetzer erzeugten Analogwert des Bitstroms wird einem Integrator Σ zugeführt. Das analoge Signal aus der Integration der Differenz wird mittels eines Komparators, der bei Unter- bzw. Überschreitung eines Schwellwerts logische Nullen bzw. Einsen erzeugt, digitalisiert. Das digitale Signal wird zunächst in einem Speicher gepuffert und erst bei Eintreffen des Taktsignals als Bitwert $Q(t)$ ausgegeben [69, 81]. Der vom Delta-Sigma-Modulator erzeugte Bitstrom stellt noch nicht die endgültigen Digitalwerte dar. In dem aufgezeigten Beispiel weist der Bitstrom lediglich eine Auflösung von 1 Bit auf. Erst ein nachfolgendes digitales Tiefpassfilter, welches lediglich den niederfrequenten Signalanteil herausfiltert und eine Dezimati-

on, die eine Reduzierung der Abtastfrequenz bedeutet, führen zu den resultierenden Digitalwerten.

Diese Art der Analog zu Digital Umsetzung weist zwei Vorteile auf. Zum einen ist die technische Realisierung im Vergleich zu anderen Möglichkeiten der Umsetzung mit gleichem Auflösungsvermögen wesentlich einfacher und zum anderen erlaubt dieser Umsetzer den Einsatz eines einfachen Tiefpassfilters (Anti-Alias-Filter) vor der Analog zu Digital Umsetzung. Möglich ist dies durch eine Überabtastung des Analogsignals, wobei mit Überabtastung die Wahl einer wesentlich höheren Abtastfrequenz, als sie nach dem Abtasttheorem nötig wäre $f_{\text{Tast}} \gg f_{\text{Nyquist}}$, gemeint ist. Die Frequenz, mit der das digitale Signal am Ausgang des Delta-Sigma-Umsetzers zur Verfügung steht, ist wiederum niedriger und liegt üblicherweise in der Größenordnung der nötigen Abtastfrequenz f_{Nyquist} . Sie beträgt mehr als das Doppelte der im zu digitalisierenden Signal höchsten vorkommenden Frequenz $f_{\text{Nyquist}} > 2 \cdot f_{\text{Signal,max}}$ [72, 71]. Die technische Realisierung sieht in der Regel Delta-Sigma-Umsetzer höherer Ordnung (≥ 2) vor, da die geringe Auflösung von 1 Bit ein hohes Quantisierungsrauschen mit sich führt und eine beliebig hohe Abtastfrequenz, die das Quantisierungsrauschen reduziert, nicht realisierbar ist [69, 81].

6.4.2 C/D-Umsetzer

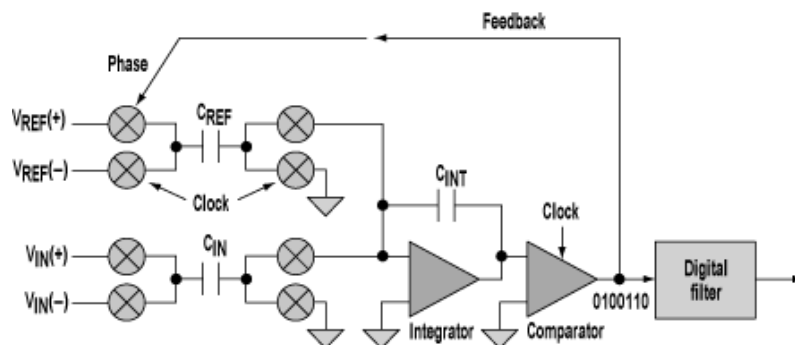


Abbildung 6.20: Technische Realisierung eines Delta-Sigma-Umsetzers erster Ordnung [82]

Der Übergang von einem Delta-Sigma-Umsetzer zu einem C/D-Umsetzer wird anhand der üblichen technischen Realisierung, die in **Abbildung 6.20** dargestellt ist, aufgezeigt. Technologiebedingt wird ein Integrator mit geschalteten Kapazitäten realisiert. Dabei werden die Kondensatoren in einem Taktzyklus an die Spannungen $V_{\text{REF+}}$ bzw. $V_{\text{IN+}}$ gegen Masse geschaltet und im nächsten Taktzyklus werden sie an den Integrator gegen die Spannungen $V_{\text{REF-}}$ bzw. $V_{\text{IN-}}$ geschaltet und geben so die während des ersten Taktzyklus aufgenommene Ladung ab. Die Umsetzung des digitalen Bitstroms in einen Analogwert erfolgt durch Schalten des Kondensators C_{REF} auf die Referenzspannung $V_{\text{REF+}}$ bzw. $V_{\text{REF-}}$. Der weitere funktionale Verlauf

entspricht dem in Kapitel 6.4.1 beschriebenen. Die Modifikation des Delta-Sigma-Umsetzers der Abbildung 6.20 zu einem Kapazität zu Digitalwert Umsetzer sieht die folgenden Anpassungen vor.

- Statt der Variation der Spannungen V_{IN+} , V_{IN-} , die bei einem gewöhnlichen ADU die umzusetzende Größe darstellen, werden diese als definierte Spannungen vorgegeben.
- Der zumessende Kondensator C_{IN} wird durch zwei Anschlüsse aus der Integrierten-Schaltung herausgeführt und als umzusetzende Größe, die extern anzuschließen ist, betrachtet.

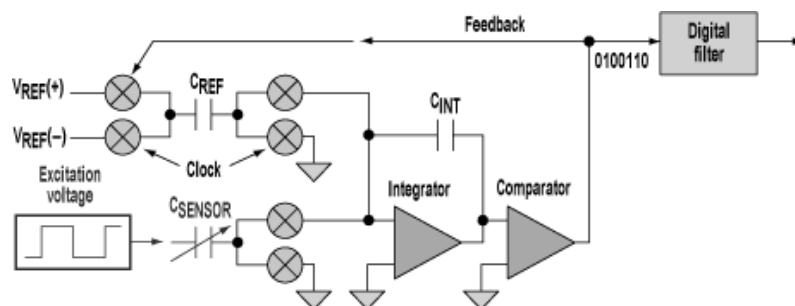


Abbildung 6.21: Technische Realisierung eines C/D-Umsetzers erster Ordnung [82]

Diese Modifikation ist zur Verdeutlichung in **Abbildung 6.21** dargestellt, wobei der veränderliche Kondensator mit C_{SENSOR} bezeichnet wird und die Umschaltung der definierten Spannungen bereits in dem Block *Excitation voltage* integriert ist. Das bestehende System eines Delta-Sigma-Umsetzers ist somit sehr einfach zu einem Kapazität zu Digitalwert Umsetzer zu überführen. Ist, wie hier betrachtet, ein einseitig geerdeter Kondensator die zu messende Größe, so sieht die Modifikation etwas anders aus. Während ein Anschluss des Kondensators an Masse angeschlossen ist, wird der zweite Anschluss wechselweise an eine positive Referenzspannung, an den Integrator, an eine negative Referenzspannung und wieder an den Integrator geschaltet [79]. Die Auflösung kommerziell erhältlicher C/D-Umsetzer liegt derzeit bei maximal 20 Bit effektiv (24 Bit Worte) [83]. Diese hohe Auflösung wird durch den Einsatz des Delta-Sigma-Prinzips erreicht und erfüllt die eingangs gestellte Anforderung.

6.4.3 Technische Umsetzung des Sensorelements

Kommerziell erhältlich sind Kapazität zu Digitalwert Umsetzer derzeit nur von der Firma Analog Devices. Der hier verwendete Typ, der den Anschluss eines geerdeten Kondensators erlaubt, lautet *AD7747* [83]. Bedingt durch die Größen der integrierten Bauteile entsteht eine Einschränkung des Kapazitätsbereichs des zu messenden

Kondensators. Auswertbar durch das IC *AD7747* sind Kapazitätsänderungen von $\Delta C = \pm 8$ pF, wobei ein Basiswert der Kapazität durch programmierbare Werte im Bereich von $C_{\text{Offset}} = 0 \dots 17$ pF kompensierbar ist [83]. Für eine optimale Ausnutzung des ICs ist somit eine Messkapazität des Sensorelements vorzusehen, deren Kapazitätsänderung im gesamten Messbereich $\Delta C \leq 16$ pF beträgt und eine Basiskapazität aufweist, die im kompensierbaren Bereich liegt.

Kondensatoren weisen bedingt durch ihre Randbereiche ein gewisses elektrisches Streufeld auf, wie in Kapitel 6.5.1 gezeigt ist. Die damit verbundene Streukapazität ist bei Messungen von Kapazitäten störend, gerade wenn die zu messende Kapazität in der Größenordnung der Streukapazität liegt. Eine Abhilfe bietet eine Schirmelektrode (Guard-Elektrode) [21, 43]. Durch “Ausgleichen“ der Streukapazität ermöglicht sie es, dass für die Messung lediglich die zu bestimmenden Kapazität verbleibt.

Die Schirm-Elektrode stellt eine Vergrößerung der Messelektrode dar, wobei sie physikalisch durch einen möglichst geringen Abstand voneinander getrennt sind. Die Schirmelektrode weist im Idealfall dieselbe Spannung auf, mit der auch die Messelektrode beaufschlagt wird. Es entsteht eine insgesamt betrachtet größere Elektrode, deren Innenbereich, gebildet durch die Messelektrode, ein homogenes elektrisches Feld aufweist und somit einen nahezu idealen Kondensator darstellt. Der kritische Randbereich wird dadurch vom Rand der Messelektrode zum Rand der Schirmelektrode verschoben, an dem der Einfluss des Streufeldes auf die Messelektrode in erster Näherung verschwindet. Sowohl die Kapazität von Schirmelektrode zur Umgebung als auch die Kapazität von Schirmelektrode zur Messelektrode weisen einen Einfluss auf das Messergebnis auf, der allerdings bei nicht zu großen Kapazitäten zu vernachlässigen ist [83].

6.5 Das Sensorelement: Kondensator

Die Realisierung eines Sensorelements durch einen Kondensator bedarf der Betrachtung seiner physikalischen Eigenschaften. Der Kondensator ist ein elektrisches Bauteil, welches elektrische Energie in Form von Ladungen speichert. Er wird aus zwei beliebig gestalteten, leitenden Elektroden gebildet, die jeweils entgegengesetzt gleiche Ladungen tragen. Die Speicherfähigkeit eines Kondensators wird als Kapazität bezeichnet, die die Einheit $[F = \frac{As}{V}]$ trägt. Die mathematischen Zusammenhänge zur Bestimmung der Kapazität eines Kondensators, deren Anwendung auf einen einfachen Plattenkondensator und die Verdeutlichung von Randeffekten sind Teil des Kapitels 6.5.1. Diese Zusammenhänge und Erkenntnisse werden in Kapitel 6.5.2 zur Bestimmung der Kapazität des Sensorelements entsprechend der Aufbauten 1 und 2 verwendet. Ferner wird ein Vergleich der Ergebnisse einer Finite-Elemente-Methoden-Simulation, der analytischen Beschreibung und einer analytischen Näherung aufgezeigt.

6.5.1 Der Kondensator

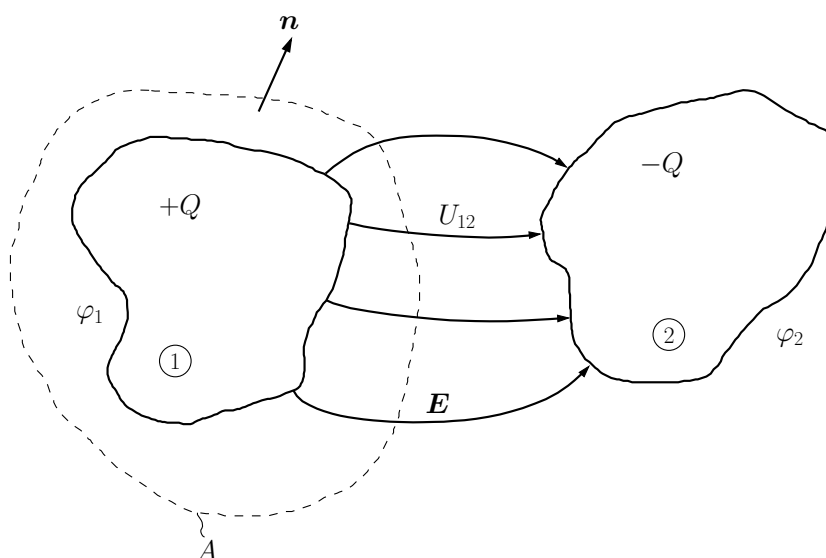


Abbildung 6.22: Kondensator

Ein Kondensator, der aus zwei beliebig gestalteten, leitenden Elektroden, wie in **Abbildung 6.23** gezeigt, gebildet ist, trägt jeweils entgegengesetzt gleiche Ladungen. Die Ladungen sind mit dem Aufbau eines elektrischen Feldes, dessen Feldlinien auf der Oberfläche einer Elektrode entspringen und auf der Oberfläche der anderen Elektrode enden, verbunden. Bedingt durch eine gute Leitfähigkeit, bilden die Elektroden zwei Äquipotentialflächen, zwischen denen eine elektrische Spannung $U = \varphi_1 - \varphi_2$ herrscht. Die Potentialdifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ ist durch das elektrische Feld vorgegeben

und durch das Linienintegral der elektrischen Feldstärke E entlang einer beliebigen Strecke s

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} \quad (6.19)$$

bestimmt [84, 85, 86]. Die Abhängigkeit der entgegengesetzt gleichen Ladungen auf und der Spannung zwischen den Elektroden, ist von den geometrischen Beziehungen der beiden Elektroden zueinander gegeben. Diese Abhängigkeit wird durch die Kapazität eines Kondensators beschrieben. Die Kapazität stellt eine proportionale Beziehung zwischen der Ladung Q und der Spannung U dar. Sie ist gegeben durch den Quotienten aus der Ladung einer Elektrode und der zwischen den Elektroden herrschenden Spannung [84, 85, 86].

$$C = \frac{|Q|}{|U|} \quad (6.20)$$

Da üblicherweise eine Spannung auf einen Kondensator eingepreßt wird, ist die Ladung der Elektroden zu bestimmen. Diese ist durch das Hüllintegral über eine geschlossene Fläche A und der aus ihr heraustretenden elektrischen Flussdichte D in Flächennormalenrichtung bestimmt. In homogenen, isotropen Medien hängt die elektrische Flussdichte über $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ mit der elektrischen Feldstärke zusammen, womit die elektrische Ladung Q durch die Maxwellsche Gleichung

$$Q = \oiint_A \vec{D} \vec{n} dA = \oiint_A \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \vec{n} dA \quad (6.21)$$

gegeben ist [84, 85, 86]. Die Kapazität eines Kondensators ist somit lediglich von der geometrischen Anordnung, den geometrischen Abmessungen und dem umgebenden Material der Elektroden abhängig. Mit (6.19 - 6.21) folgt schließlich für die Kapazität:

$$C = \frac{\oiint_A \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \vec{n} dA}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{s}} \quad (6.22)$$

Kapazitätsbestimmungen von beliebigen Elektrodenanordnungen sind analytisch für viele Fälle nicht lösbar. Zum einen kann die Kapazität einer Elektrodenanordnung in einigen Fällen durch eine vereinfachte, symmetrische Anordnung angenähert und analytisch bestimmt werden, zum anderen kann sie numerisch mit Hilfe diverser Verfahren wie z.B. Finite-Elemente-Methode (FEM) oder Finite-Differenzen-Methode (FDM) bestimmt werden [84, 85].

Der Plattenkondensator

Nachfolgend wird der häufig vorkommende Plattenkondensator, sowohl mit als auch ohne Randeffekte, betrachtet. Anhand des Plattenkondensators wird beispielhaft aufgezeigt, wie sich das elektrische Feld und das elektrische Potential verhält, welche Einflüsse von Bedeutung sind, und welche vernachlässigt werden können.

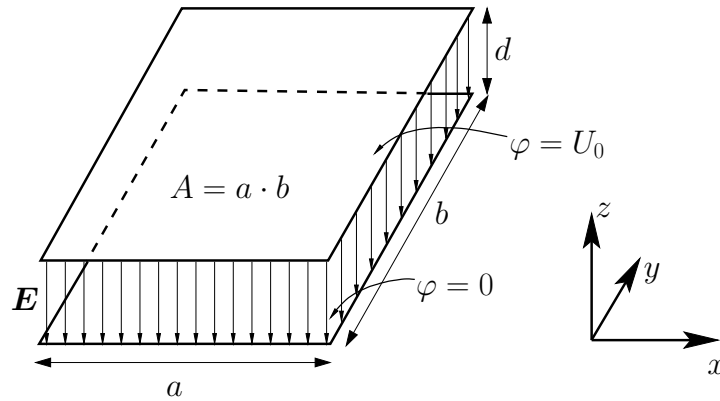


Abbildung 6.23: Plattenkondensator unter Vernachlässigung der Randeffekte

Bei Vernachlässigung der Randeffekte, kann der Plattenkondensator, wie er in Abbildung 6.23 dargestellt ist, als ein eindimensionales Problem betrachtet werden. Das Gebiet zwischen den Elektroden ist ladungsfrei, womit das elektrische Potential φ durch die Laplacegleichung

$$\Delta\varphi = 0 \quad (6.23)$$

bestimmt ist [84, 85, 86]. Die eindimensionale Betrachtung vereinfacht die Laplace-Gleichung zu

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = 0 \quad (6.24)$$

mit der Lösung

$$\varphi(z) = Az + B \quad (6.25)$$

Die Randwerte des Plattenkondensators müssen durch die Lösung erfüllt werden. Da für das Potential $\varphi(z)|_{z=0} = 0$ und $\varphi(z)|_{z=d} = U_0$ gelten muss, lautet die Lösung

$$\varphi(z) = \frac{U_0}{d} z \quad (6.26)$$

Das Potential hängt über

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (6.27)$$

mit der elektrischen Feldstärke \vec{E} zusammen [86]. Der Verlauf der elektrischen Feldstärke im Plattenkondensator ist somit durch

$$E_z = -\frac{U_0}{d} \quad (6.28)$$

gegeben. Durch Einsetzen der elektrischen Feldstärke in (6.22) folgt für die Kapazität eines Plattenkondensators in Luft ($\varepsilon_{r,\text{Luft}} \approx 1$) und unter Vernachlässigung der Randeffekte

$$C = \frac{\oiint_A \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \vec{n} dA}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{s}} = \frac{\varepsilon_0 \frac{U_0}{d} A}{\frac{U_0}{d} d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad . \quad (6.29)$$

Bei Vernachlässigung von Randeffekten weist der Plattenkondensator ein homogenes, über der Kondensatorhöhe konstantes elektrisches Feld auf, das senkrecht von der positiv geladenen Elektrode ($\varphi = U_0$) zur negativ geladenen Elektrode ($\varphi = 0$) hin gerichtet ist. Das Potential nimmt linear mit der Kondensatorhöhe von positiver zu negativer Elektrode hin ab, was bedeutet, dass jede zur z -Richtung senkrecht stehende Linie eine Äquipotentiallinie ist. Diese Betrachtungsweise ist für $d \ll a, b$ im Innern des Plattenkondensators zulässig [84]. Für statische Betrachtungen des elektrischen Feldes gilt, dass das geschlossene Ringintegral der Feldstärke über einen beliebigen Weg null ergibt.

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad (6.30)$$

Das bedeutet, dass das elektrische Feld auch jeweils von der Außenseite der positiv geladenen Elektrode zur Außenseite der negativ geladenen Elektrode hin gerichtet sein muss. Aufgrund des längeren Integrationsweges zwischen den Außenseiten resultiert auch eine geringere elektrische Feldstärke außerhalb der Kondensatorplatten. Im Inneren des Außenbereichs der Kondensatorplatten hat die verhältnismäßig geringe Feldstärke, einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Kapazität. Wohingegen die Feldstärke des Außenbereichs am Rand des Kondensators, abhängig von dem Verhältnis $\text{Min } d / (a, b)$, einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag zur Kapazität leistet.

Das beschriebene Verhalten wird in den **Abbildungen 6.24, 6.25**, die die Ergebnisse einer FEM-Simulation eines Plattenkondensators zeigen, deutlich. Dabei ist in Abbildung 6.24 der Verlauf des elektrischen Potentials mit den Linien konstanten Potentials dargestellt. Innerhalb der Kondensatorplatten, im Inneren des Kondensators, weist das Potential einen linearen Abfall von der positiven zur negativen Elektrode auf, während sich die Linien konstanten Potentials zum Rand hin aufspalten. Außerhalb der Kondensatorplatten weisen die Linien konstanten Potentials keinen senkrechten Verlauf zur z -Richtung mehr auf. Sie werden immer gekrümmter, je weiter der Abstand von den Elektroden zunimmt.

In Abbildung 6.25 ist ein Teilausschnitt der rechten Seite des Kondensators ebenfalls mit Linien konstanten Potentials und zusätzlich mit den Stromlinien des elektrischen Feldes dargestellt. Da das elektrische Feld über die Gleichung (6.27) mit dem elektrischen Potential zusammenhängt, steht es immer senkrecht zu den Linien konstanten Potentials und somit in Normalenrichtung der Potentiallinien. Abbildung 6.25 macht nochmals den parallelen Verlauf der Linien konstanten Potentials innerhalb der Kondensatorplatten, im Inneren des Kondensators und die Aufspaltung der Linien zum

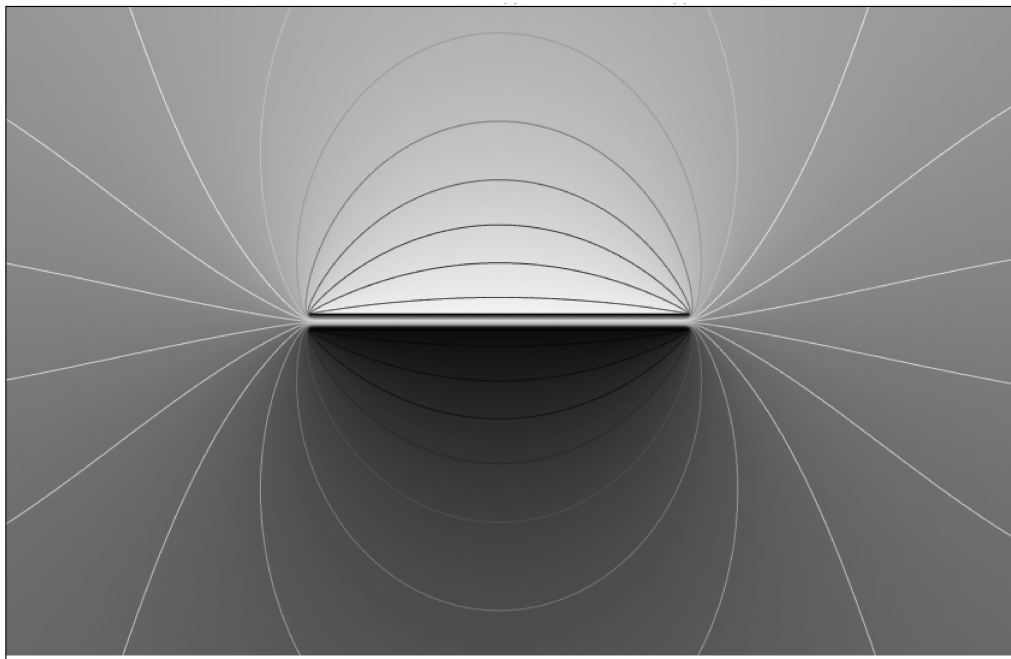


Abbildung 6.24: Zweidimensionaler Verlauf des elektrischen Potentials mit Linien konstanten Potentials eines Plattenkondensators

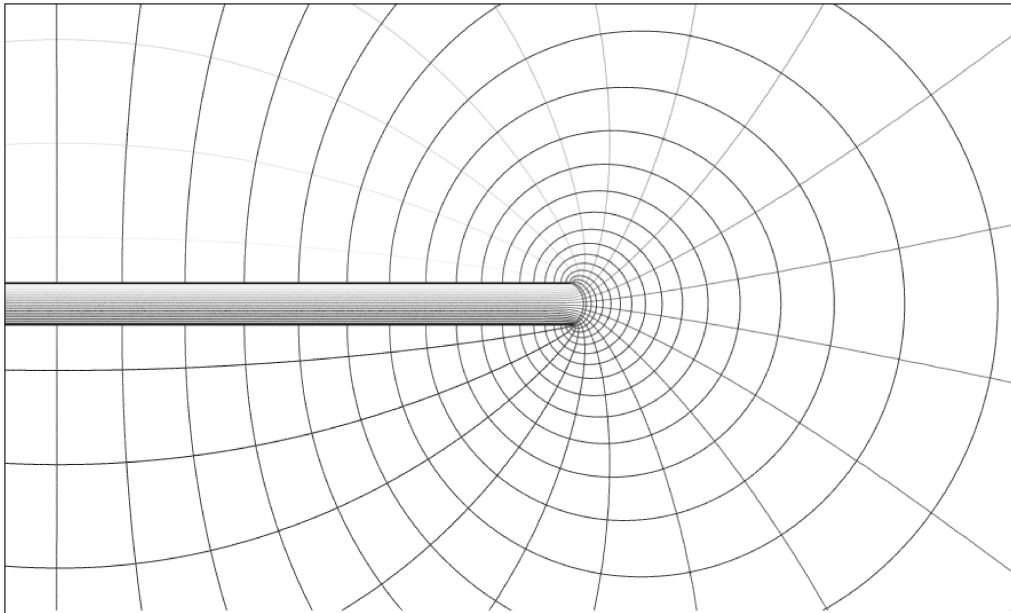


Abbildung 6.25: Zweidimensionaler Verlauf von Linien konstanten Potentials und Stromlinien des elektrischen Feldes eines Plattenkondensators

Rand hin, deutlich. Des Weiteren ist zu erkennen, dass sehr wohl ein elektrisches Feld außerhalb der Kondensatorplatten existiert. Dieses hat aufgrund der relativ geringen Feldstärke (da langer Integrationsweg zwischen den Platten) nur im direkten Randbereich des Kondensators einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf die Kapazität. Zudem bedeutet dies, dass jegliche Veränderung bzw. Beeinflussung des elektrischen Feldes durch einen Leiter oder ein dielektrisch wirkendes Objekt auch außerhalb der Kondensatorplatten zu einer Veränderung der Kapazität führt.

6.5.2 Berechnung der Kapazitäten

Das durch einen Kondensator realisierte Sensorelement bedarf, nach den in Kapitel 6.5.1 aufgezeigten Einflüssen, einer genaueren Betrachtung. Der Messkondensator kann sowohl für Aufbau 1 als auch für Aufbau 2 durch eine vereinfachte Elektrodenanordnung angenähert werden. Nachfolgend werden vereinfachte Elektrodenanordnungen für den Aufbau 1 und Aufbau 2 betrachtet und die daraus resultierende Messkapazität bestimmt.

Aufbau 1

Der Aufbau 1 ist, zur Untersuchung der Messkapazität, in **Abbildung 6.26** vereinfacht dargestellt. Die Abbildung zeigt eine Unterteilung in zwei Teilbereiche. Ein Bereich, der sich oberhalb der Messelektrode im abgeschirmten Bereich befindet, stellt eine Streukapazität dar und ist in der Modellierung durch den Bereich I mit $e_{1,0} \leq z \leq c_{1,0}$, der **Abbildung 6.27**, angenähert. Dabei beinhaltet der Bereich $e_{1,0} \leq z \leq d_{1,0}$ das Platinenmaterial als Träger der Messelektrode.

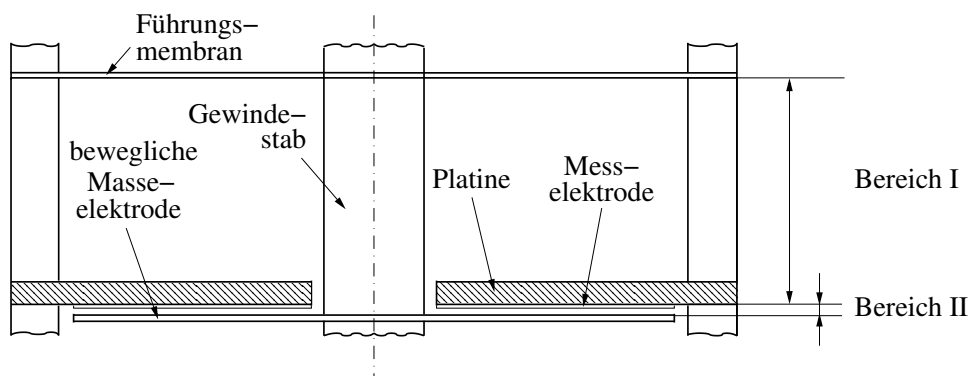


Abbildung 6.26: Angenäherter Aufbau 1 zur Untersuchung der Messkapazität

Ein zweiter Bereich, der sich zwischen der Messelektrode und der beweglichen Elektrode befindet und die eigentliche Messkapazität darstellt, ist in der Modellierung durch den Bereich II mit $0 \leq z \leq e_{1,0}$ angenähert. Dieser Bereich ist durch die Auslenkung der beweglichen Elektrode in seiner Höhe veränderlich. Alle weiteren

Abmessungen ($b_1 - a_1, c_{1,0} - d_{1,0}, d_{1,0} - e_{1,0}$) sind konstant. Der gesamte Messkondensator beinhaltet beide beschriebenen Teilbereiche.

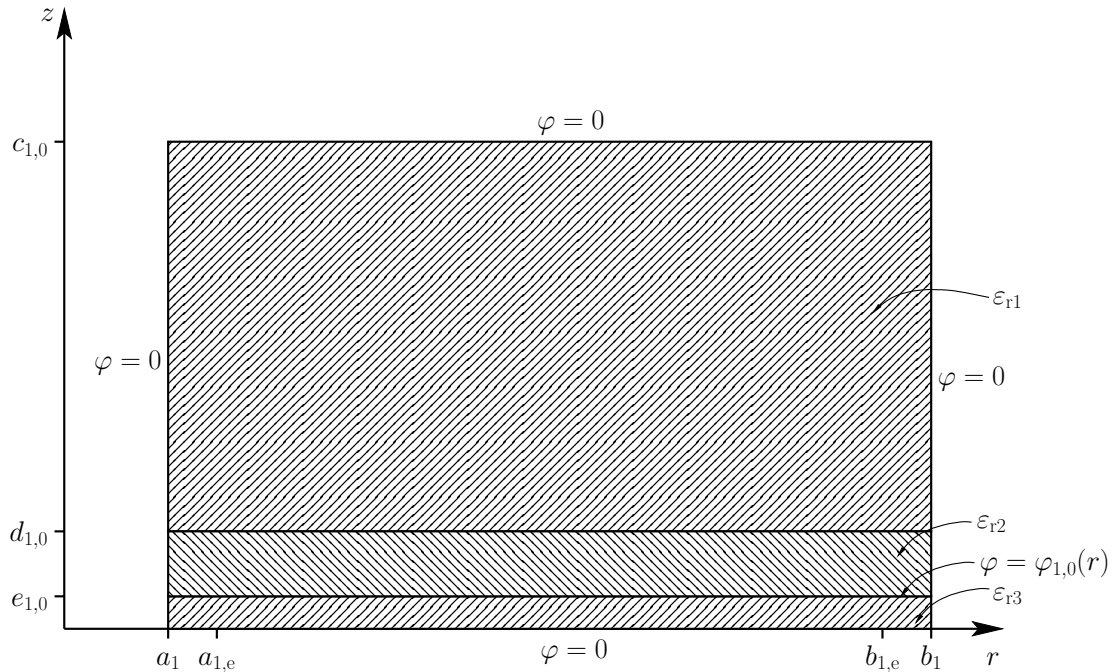


Abbildung 6.27: Angenäherte Elektrodenanordnung des Messkondensators für Aufbau 1

Die Berechnung der Kapazität erfolgt entsprechend der Vorgehensweise im Kapitel 6.5.1. Die getrennten Teilbereiche I, II sind aufgrund der Trennung an der Messelektrode ladungsfrei und stellen zwei voneinander unabhängige Randwertprobleme dar. Für beide Teilbereiche ist die Laplace-Gleichung (6.23) unter Berücksichtigung der vorgegebenen Randbedingungen zu lösen.

Eine übliche Vorgehensweise zur Lösung einer partiellen Differentialgleichung ist die Separation der Gleichung durch einen Produktansatz [84, 85, 87]. Aufgrund des rotationssymmetrischen Aufbaus erfolgt die Beschreibung des Problems in Zylinderkoordinaten. Die zu lösende Laplace-Gleichung lautet in Zylinderkoordinaten

$$\Delta\varphi(r, \theta, z) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(r, \theta, z) = 0 \quad . \quad (6.31)$$

Mit dem Produktansatz für das Potential, einer Umstrukturierung der Gleichung

$$\varphi(r, \theta, z) = U(r) V(\theta) W(z) \quad (6.32)$$

und anschließender Division durch φ ergibt sich die Laplace-Gleichung zu:

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{r}{U(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{V(\theta)} \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{W(z)} \frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad (6.33)$$

Mit der Zusammenfassung

$$\frac{1}{V(\theta)} \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta^2} = -k_\theta^2, \quad \frac{1}{W(z)} \frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2} = k_z^2$$

erhält man drei gewöhnliche Differentialgleichungen für $U(r)$, $V(\theta)$, $W(z)$.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k_z^2 - k_\theta^2 \right) U(r) = 0 \quad (6.34)$$

$$\frac{d^2 V(\theta)}{d\theta^2} + k_\theta^2 V(\theta) = 0 \quad (6.35)$$

$$\frac{d^2 W(z)}{dz^2} - k_z^2 W(z) = 0 \quad (6.36)$$

Die Elementarlösungen für $V(\theta)$, $W(z)$ lauten [84, 85, 87]:

$$\begin{aligned} V_{k_\theta}(\theta) &\sim \sin(k_\theta \theta), \cos(k_\theta \theta), \exp(-jk_\theta \theta), \exp(jk_\theta \theta) && \text{für } k_\theta \neq 0 \\ &V_{k_\theta}(\theta) \sim b_1 \theta + b_0 && \text{für } k_\theta = 0 \\ W_{k_z}(z) &\sim \sinh(k_z z), \cosh(k_z z), \exp(-k_z z), \exp(k_z z) && \text{für } k_z \neq 0 \\ &W_{k_z}(z) \sim c_1 z + c_0 && \text{für } k_z = 0 \end{aligned}$$

Für die Lösung der Differentialgleichung von $U(r)$ ist bezüglich k_z zu unterscheiden. Für den Fall $k_z = 0$ lauten die Elementarlösungen

$$\begin{aligned} U_{k_\theta}(r) &\sim r^{k_\theta}, r^{-k_\theta} && \text{für } k_\theta = 1, 2, \dots \\ U_{k_\theta}(r) &\sim a_0 + a_1 \ln(r) && \text{für } k_\theta = 0 \end{aligned},$$

während sich für den Fall $k_z \neq 0$ die Bessel- und Neumann-Funktionen

$$U_{k_\theta}(r) \sim J_{k_\theta}(k_z r), N_{k_\theta}(k_z r) \quad \text{für } k_\theta = 0, 1, 2, \dots$$

als Elementarlösungen ergeben [84, 85, 87]. Die hier betrachtete Näherung der Elektrodenanordnung wird als rotationssymmetrisch angesetzt, womit die Abhängigkeit von der Koordinate θ verschwindet. Dies führt weiterhin zu $k_\theta = 0$, was bedeutet, dass sich die Elementarlösungen für $U(r)$ und den Fall $k_z \neq 0$ auf

$$U(r) \sim J_0(k_z r), N_0(k_z r)$$

beschränken.

Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht darin, die Abhängigkeit von z zu $-k_z^2$ zu setzen, wie es für die Abhängigkeit von θ getan wurde. Dies führt zu komplexen Argumenten in den Elementarlösungen. Damit gehen die Elementarlösungen der z -Abhängigkeit in harmonische Funktionen, wie in der Abhängigkeit von θ , über und in der r -Abhängigkeit gehen die Elementarlösungen in die modifizierten Bessel-Funktionen über.

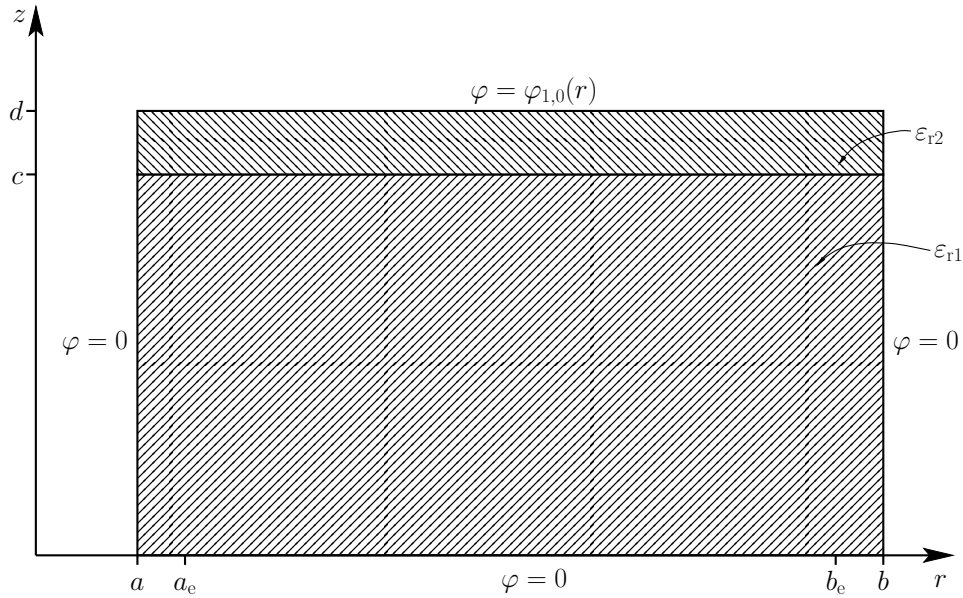


Abbildung 6.28: Bereich I des aufbau 1 der angenäherten Elektrodenanordnung des Messkondensators

Die Elementarlösungen sind als Kombinationen zur Bestimmung der Gesamtkapazität an die Randbedingungen anzupassen. Hierzu wird zunächst der Bereich I des Messkondensators, also der Bereich oberhalb der Messelektrode, der die Trägerplatte und einen Abschirmbereich enthält, betrachtet. Der Bereich I ist separiert und horizontal an der Messelektrode gespiegelt, in **Abbildung 6.28**, dargestellt. Dabei entspricht die Höhe c der Höhendifferenz $c = c_{1,0} - d_{1,0}$, die Höhe d entspricht der Höhendifferenz $d = c_{1,0} - e_{1,0}$ und weiter entsprechen $a = a_1$, $b = b_1$ der Abbildung 6.27.

Das schraffierte Gebiet der Abbildung 6.28 besteht aus zwei verschiedenen Dielektrika. Im Bereich $0 \leq z \leq c$ befindet sich Luft und im Bereich $c \leq z \leq d$ befindet sich das Platinenmaterial der Messelektrode. Der Rand der Anordnung ist, abgesehen von der Messelektrode, geerdet und liegt somit auf dem Potential $\varphi = 0$. In der Realität erstreckt sich die Messelektrode lediglich von $r = a_e$ bis $r = b_e$, mit $a_e > a$, $b_e < b$. Modelliert wird dies durch die Vorgabe eines Potentials $\varphi_{A1,0}(r)$, welches sich über die gesamte Länge $a \leq r \leq b$ erstreckt.

Mit den genannten Annahmen ist eine analytische, näherungsweise Bestimmung der Kapazität, der in Abbildung 6.28 dargestellten Anordnung, möglich. Die unterschiedlichen Dielektrika führen zu einer aufgeteilten Potentialfunktion $\varphi_{A1,I}(r, z)$, die sich wie folgt aus den Potentialfunktionen $\varphi_{A1,I_1}, \varphi_{A1,I_2}$ zusammensetzt.

$$\varphi_{A1,I}(r, z) = \begin{cases} \varphi_{A1,I_1}(r, z) & \text{für } 0 \leq z \leq c \\ \varphi_{A1,I_2}(r, z) & \text{für } c \leq z \leq d \end{cases} \quad (6.37)$$

Bedingt durch die bisher getroffenen Annahmen ($k_\theta = 0$) und die elementaren Lösungsfunktionen werden für die allgemeine Lösung die Ansätze

$$\begin{aligned} \varphi_{A1,I_1}(r, z) = & \left(a_{0,1} + a_{1,1} \ln(r) \right) \left(c_{0,1} + c_{1,1} z \right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{n,1} \sinh(k_{n,1} z) + B_{n,1} \cosh(k_{n,1} z) \right) \\ & \left(E_{n,1} J_0(k_{n,1} r) + F_{n,1} N_0(k_{n,1} r) \right) \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{A1,I_2}(r, z) = & \left(d_{0,1} + d_{1,1} \ln(r) \right) \left(e_{0,1} + e_{1,1} z \right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n,1} \sinh(l_{n,1} (z - c)) + D_{n,1} \cosh(l_{n,1} (z - c)) \right) \\ & \left(G_{n,1} J_0(l_{n,1} r) + H_{n,1} N_0(l_{n,1} r) \right) \end{aligned} \quad (6.39)$$

gewählt.

Die Lösung der Potentialfunktion $\varphi_{A1,I}(r, z)$ hängt entscheidend von dem angesetzten Potential der Messelektrode ab. Entsprechend der Elementarlösungen wird das Potential der Messelektrode $\varphi_{1,0}(r)$ zu

$$\varphi_{1,0}(r) = \begin{cases} \frac{U_0}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right) & \text{für } a \leq r \leq a_e \\ U_0 & \text{für } a_e \leq r \leq b_e \\ \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right)} \ln\left(\frac{r}{b}\right) & \text{für } b_e \leq r \leq b \end{cases} \quad (6.40)$$

angesetzt. Die Potentialfunktion $\varphi_{1,0}(r)$ weist im Bereich der Messelektrode das konstante Potential U_0 auf. In den Bereichen außerhalb der Elektrode steigt das Potential logarithmisch von 0 auf U_0 bzw. fällt logarithmisch von U_0 auf 0 ab. Der logarithmische Potentialverlauf wurde ebenfalls in [88, 89] verwendet.

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen erhält man nach Anhang C.1 für die Potentialfunktionen $\varphi_{A1,I_1}(r, z)$, $\varphi_{A1,I_2}(r, z)$ die Reihenlösungen

$$\varphi_{A1,I_1}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n,1}}{K_{n,1}} \frac{\sinh(k_{n,1} z)}{N_{n,1}} Z_0(k_{n,1} r) \quad (6.41)$$

$$\varphi_{A1,I_2}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n,1}}{K_{n,1}} \frac{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,1} (z-c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (z-c))}{N_{n,1}} Z_0(k_{n,1} r) \quad (6.42)$$

Darin sind die folgenden Konstanten und Funktionen enthalten.

$$\begin{aligned}
 K_{n,1} &= \frac{b^2 Z_1(k_{n,1} b)^2 - a^2 Z_1(k_{n,1} a)^2}{2} \\
 L_{n,1} &= \frac{U_0}{k_{n,1}^2} \left(\frac{Z_0(k_{n,1} a_e) - Z_0(k_{n,1} a)}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} + \frac{Z_0(k_{n,1} b) - Z_0(k_{n,1} b_e)}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right)} \right) \\
 N_{n,1} &= \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,1}(d-c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1}(d-c)) \\
 Z_0(k_{n,1} r) &= N_0(k_{n,1} a) J_0(k_{n,1} r) - J_0(k_{n,1} a) N_0(k_{n,1} r) \\
 Z_1(k_{n,1} r) &= N_0(k_{n,1} a) J_1(k_{n,1} r) - J_0(k_{n,1} a) N_1(k_{n,1} r)
 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte $k_{n,1}$ sind aus der Gleichung

$$N_0(k_{n,1} a) J_0(k_{n,1} b) - J_0(k_{n,1} a) N_0(k_{n,1} b) = 0$$

zu bestimmen. Sie sind nicht äquidistant, wie es bei harmonischen Funktionen der Fall ist und im allgemeinen nur numerisch bestimmbar.

Die Potentialfunktionen erlauben nun eine Berechnung der Kapazität für den betrachteten Bereich I. Nach (6.20) bzw. (6.22) ist zunächst die Ladung Q über (6.21) zu bestimmen. Die Ladung, die als Hüllintegral der elektrischen Flussdichte über die Fläche der Elektrode gegeben ist, kann auf zwei Wegen berechnet werden. Zum einen kann über die Fläche der gesamten Elektrode, die auf dem Potential $\varphi = 0$ liegt, integriert werden und zum anderen kann über die Fläche der Messelektrode integriert werden. Da beide Elektroden betragsmäßig dieselbe Ladung aufweisen, ist es aufgrund des geringeren Rechenaufwands sinnvoller über die Fläche der Messelektrode zu integrieren. Die Bestimmung der Ladung der Messelektrode führt mit (6.21), (6.27) und $\vec{n} = -\vec{e}_z$ zu folgendem Ergebnis.

$$\begin{aligned}
 Q_{A1,I} &= - \int_0^{2\pi} \int_a^b \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \vec{E}_z(r, z) \Big|_{z=d} r d\theta dr = - \int_0^{2\pi} \int_a^b \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \left(- \frac{\partial \varphi_{A1,I_2}(r, z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=d} r d\theta dr \\
 &= 2 \pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n,1}}{K_{n,1}} \frac{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \cosh(k_{n,1}(d-c))}{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,1}(d-c))} \frac{\cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \sinh(k_{n,1}(d-c))}{\cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1}(d-c))} \\
 &\qquad\qquad\qquad k_{n,1} r Z_0(k_{n,1} r) dr
 \end{aligned}$$

Die Gesamtkapazität des Aufbaus 1 mit der Elektrodenanordnung nach Abbildung 6.27 setzt sich zusammen aus $C_A = C_{A1,I} + C_{A1,II}$. Dabei ist $C_{A1,II}$ die veränderliche Messkapazität und der Anteil $C_{A1,I}$ ist eine konstante Streukapazität, die idealerweise gleich null wäre.

Der veränderliche Anteil der Gesamtkapazität $C_{A1,II}$ ist bei Vernachlässigung von Randeffekten als idealer Kondensator, da $e/(b-a) \ll 1$ gilt, zu betrachten. Mit (6.22) folgt für einen idealen Kondensator entsprechend der Abbildung 6.29

$$\begin{aligned} C_{A1,II,ideal} &= \frac{\oiint_A \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \vec{n} dA}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{s}} = \frac{1}{U_0} \int_0^{2\pi} \int_a^b \varepsilon_0 \varepsilon_{r3} \frac{U_0}{e} r d\theta dr \\ &= 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r3} \frac{b^2 - a^2}{e}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Eine äquivalente Betrachtung für den Bereich I ist nicht zweckmäßig. Der Bereich I entspricht einer Reihenschaltung von zwei Kondensatoren, die sich aus Messelektrode ($z = d$) → Grenzfläche Platine/Luft ($z = c$) und Grenzfläche Platine/Luft ($z = c$) → Umgebung ($z = 0$) ergeben. Da die Platine eine geringe Höhe und eine gewisse Permittivität aufweist, wird die Kapazität des Bereichs I bedingt durch die Reihenschaltung vorrangig durch den Luftbereich bestimmt. Nach Abbildung 6.28 ist allerdings die Beziehung $c/(b-a) \ll 1$ nicht erfüllt, womit die Randeffekte einen deutlichen Einfluss auf die Kapazität nehmen und die Annahme eines idealen Kondensators zu wesentlich geringeren Werten führt.

Der Kondensator nach Aufbau 1 hat den in **Abbildung 6.30** gezeigten Kapazitätsverlauf. Dargestellt ist die mit (6.44), (6.45) analytisch bestimmte, die mit (6.46) als ideal bestimmte und eine mittels FEM-Simulation bestimmte Kapazität in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{1,0}$. Die zur Darstellung genutzten Daten, gemäß Abbildung 6.27 des angenäherten Aufbaus 1, sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt.

$a_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$b_1 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$c_{1,0} - d_{1,0} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$a_{1,e} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$b_{1,e} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$d_{1,0} - e_{1,0} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$\varepsilon_{r1} = 1$	$\varepsilon_{r2} = 4$	$\varepsilon_{r3} = 1$

Tabelle 6.3: Geometrische Abmessungen zur mathematischen Bestimmung der Messkapazität des Aufbaus 1

Erwartungsgemäß ist eine Differenz zwischen den Ergebnissen der FEM-Simulation und denen der idealen Kapazität, die keine Streufelder berücksichtigt, zu erkennen. Des Weiteren besteht auch eine Differenz zwischen den Ergebnissen FEM-Simulation

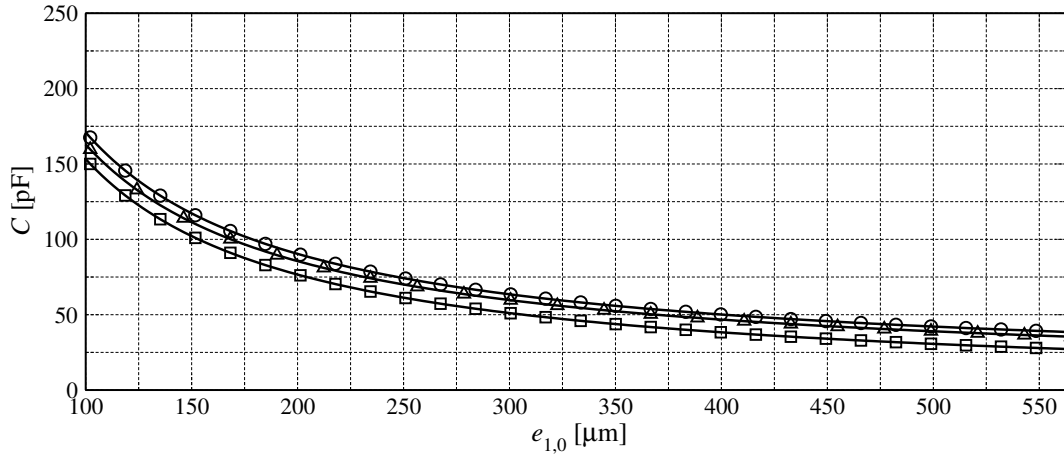


Abbildung 6.30: Verlauf der Kapazität von Aufbau 1 in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{1,0}$

- \square Analytisch bestimmte, ideale Kapazität
- \circ Analytisch mittels Reihenansatz bestimmte Kapazität
- \triangle Mittels FEM-Simulation bestimmte Kapazität

und den Ergebnissen für die Kapazität nach dem analytischen Ansatz. Diese Differenz ist dadurch begründet, dass zur Näherung des Potentialverlaufs eine Vorgabe des Potentials auf der Messelektrode getroffen wurde. Das vorgegebene Potential entspricht nicht den Ergebnissen der FEM-Simulation, bei der das Potential vom Elektrodenrand $a_{1,e}$, $b_{1,e}$ zur Umgebung a_1 , b_1 wesentlich rascher abnimmt, womit eine geringere elektrische Energie in diesem Bereich resultiert und somit auch die Kapazität geringer ist. Die Differenzen der Kapazitätsverläufe sind gesondert in **Abbildung 6.31** dargestellt.

Die Differenz zwischen der resultierenden Kapazität der FEM-Simulation und der idealen Kapazität $C_{\text{fem}} - C_{\text{ideal}}$ in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{1,0}$ verhält sich fast konstant im Vergleich zu den Absolutwerten. Die mittels FEM-Simulation bestimmte Kapazität weist bedingt durch die Streukapazität des Bereichs I, dem Abschirmbereich oberhalb der Messelektrode, höhere Werte als die ideale Kapazität auf. Im Gegensatz dazu resultiert die Kapazität nach dem analytischen Ansatz in zu hohen Werten, womit die Differenz zwischen analytischem Ansatz und FEM-Simulation $C_{\text{analytisch}} - C_{\text{fem}}$ von null verschieden ist und zu sehr geringen Elektrodenabständen weiter ansteigt. Die Vorgabe des Potentials auf der Messelektrode führt vor allem im Bereich II, in dem die eigentliche Messung stattfindet und der Elektrodenabstand gering ist, zu verhältnismäßig hohen Fehlern. Dies wird durch den Anstieg der Differenz $C_{\text{analytisch}} - C_{\text{fem}}$ im Bereich $e_{1,0} \rightarrow 0$ deutlich.

Die Differenz $C_{\text{fem}} - C_{\text{ideal}}$ bei dem mittleren Elektrodenabstand von $300 \mu\text{m}$ beträgt $8,7 \text{ pF}$, was zum größten Teil der Streukapazität, dem Bereich I, zuzuordnen ist. Das analytische Ergebnis des Bereichs I ergibt einen Wert von $C_{A1,I} = 9,6 \text{ pF}$. Es

ist somit ausreichend für Aufbau 1 die Gesamtkapazität $C_{A1} = C_{A1,I} + C_{A1,II,ideal}$ durch eine konstante Streukapazität, die von dem Bereich I herrührt, durch $C_{A1,I}$ mit (6.45) zu beschreiben und den vom Elektrodenabstand abhängigen Teil durch $C_{A1,II,ideal}$ mit (6.46) zu beschreiben.

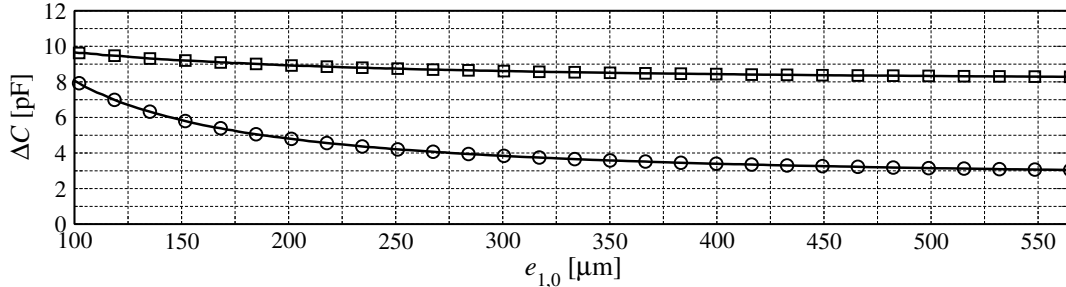


Abbildung 6.31: Verlauf der Kapazitätsdifferenzen von Aufbau 1 in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{1,0}$

- Kapazitätsdifferenz zwischen der mittels FEM-Simulation bestimmten Kapazität und der analytisch bestimmten, idealen Kapazität
- Kapazitätsdifferenz zwischen der analytisch mittels Reihenansatz bestimmten Kapazität und der mittels FEM-Simulation bestimmten Kapazität

Aufbau 2

Der Aufbau 2 weist, wie **Abbildung 6.32** erkennen lässt, eine durchgehende Messelektrode auf. Bezüglich Aufbau 1 ist somit die Modifikation $a_1 \rightarrow 0$ der angenäherten Elektrodenanordnung durchzuführen. Dies resultiert in der angenäherten Elektrodenanordnung der **Abbildung 6.33**.

Als entscheidenden Unterschied zum Aufbau 1, enthält der Aufbau 2 eine Masselektrode, deren Höhe sich über den Radius ändert. Diese radiale Abhängigkeit der Elektrodenhöhe wird durch die Funktion $f_{2,0}(r)$ berücksichtigt. Äquivalent zum Aufbau 1 wird eine Unterteilung in die Bereiche I mit $e_{2,0} \leq z \leq c_{2,0}$ und II mit $0 \leq z \leq e_{2,0}$ vorgenommen. Ebenfalls wird hier zunächst der Bereich I betrachtet, für den die aus dem Aufbau 1 gewählten Ansätze der Potentialfunktionen mit der Unterteilung

$$\varphi_{A2,I}(r, z) = \begin{cases} \varphi_{A2,I_1}(r, z) & \text{für } 0 \leq z \leq c \\ \varphi_{A2,I_2}(r, z) & \text{für } c \leq z \leq d \end{cases} \quad (6.47)$$

nach **Abbildung 6.34** verwendet werden. Fernerhin wird auch für Aufbau 2 ein Potential auf der Messelektrode vorgegeben. Entsprechend der Modifikation lautet

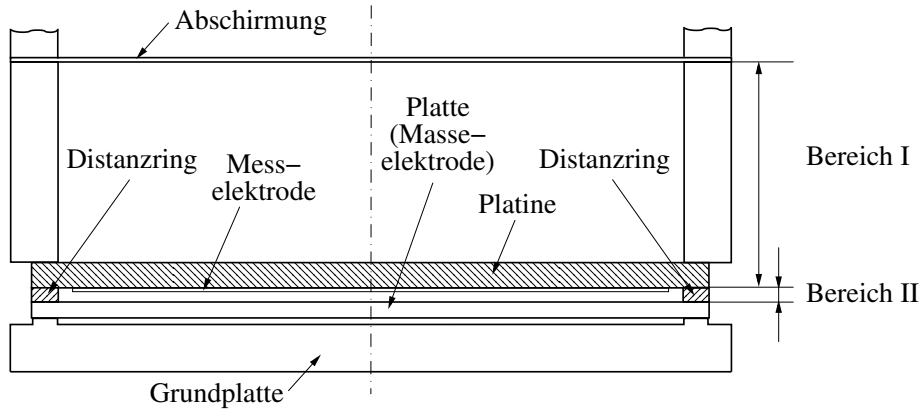


Abbildung 6.32: Angenäherter Aufbau 2 zur Untersuchung der Messkapazität

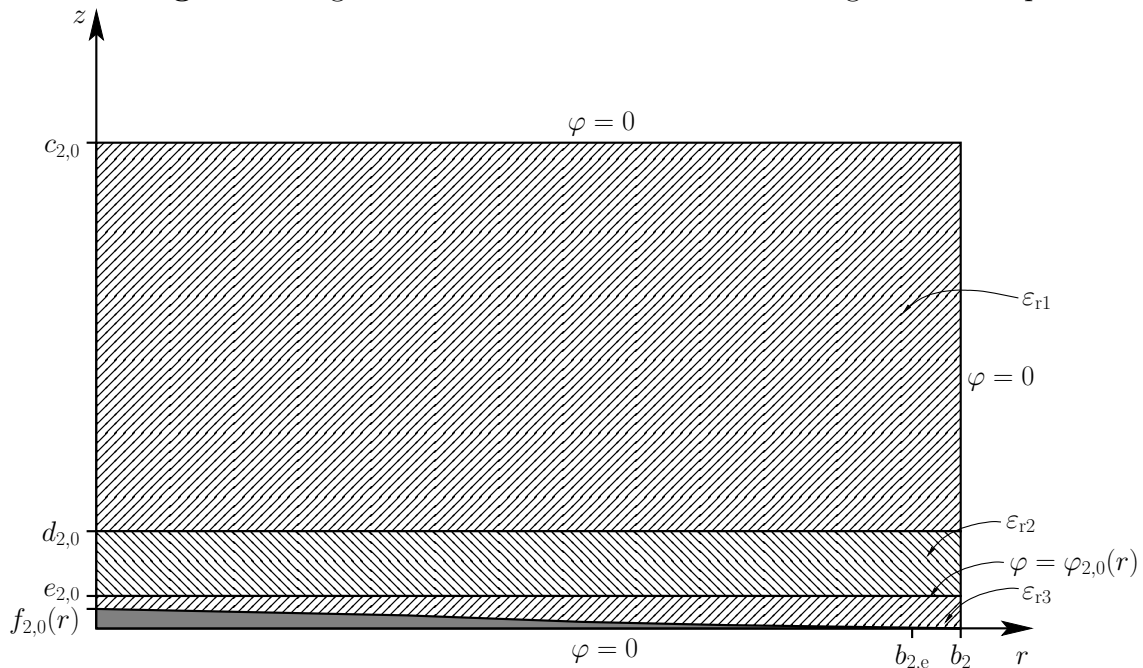


Abbildung 6.33: Angenäherte Elektrodenanordnung des Messkondensators für Aufbau 2

das vorgegebene Potential der Messelektrode $\varphi_{2,0}(r)$

$$\varphi_{2,0}(r) = \begin{cases} U_0 & \text{für } 0 \leq r \leq b_e \\ \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right)} \ln\left(\frac{r}{b}\right) & \text{für } b_e \leq r \leq b \end{cases} \quad (6.48)$$

Die Potentialfunktion $\varphi_{2,0}(r)$ weist im Bereich der Messelektrode das konstante Potential U_0 auf und fällt im Bereich außerhalb der Elektrode logarithmisch von U_0 auf 0 ab.

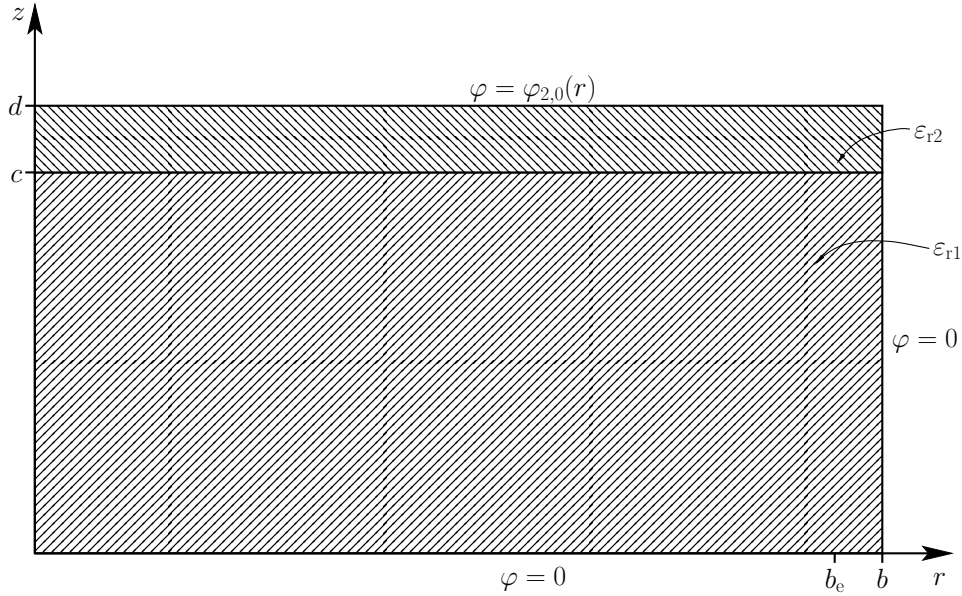


Abbildung 6.34: Bereich I des Aufbaus 2 der angenäherten Elektrodenanordnung des Messkondensators

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen ergeben sich nach Anhang C.2 für die Potentialfunktionen $\varphi_{A2,I_1}(r, z)$, $\varphi_{A2,I_2}(r, z)$ die Reihenlösungen

$$\varphi_{A2,I_1}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n,2}}{K_{n,2}} \frac{\sinh(k_{n,2} z)}{N_{n,2}} J_0(k_{n,2} r) \quad (6.49)$$

$$\varphi_{A2,I_2}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n,2}}{K_{n,2}} \frac{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,2} (z-c)) \cosh(k_{n,2} c) + \sinh(k_{n,2} c) \cosh(k_{n,2} (z-c))}{N_{n,2}} J_0(k_{n,2} r) \quad (6.50)$$

Darin sind die folgenden Konstanten enthalten.

$$K_{n,2} = \frac{b^2 J_1^2(k_{n,2} b)}{2}$$

$$L_{n,2} = \frac{U_0}{k_{n,2}^2 \ln\left(\frac{b_e}{b}\right)} \left(J_0(k_{n,2} b) - J_0(k_{n,2} b_e) \right)$$

$$N_{n,2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,2} (d-c)) \cosh(k_{n,2} c) + \sinh(k_{n,2} c) \cosh(k_{n,2} (d-c))$$

Die Eigenwerte $k_{n,2}$ sind aus der Gleichung $J_0(k_{n,2} b) = 0$ zu bestimmen. Auch diese sind nicht äquidistant und im Allgemeinen nur numerisch bestimmbar.

Unter Anwendung der Potentialfunktionen ist entsprechend dem Aufbau 1 die Kapazität $C_{A2,I}$ des Ausbaus 2, Bereichs I durch

$$C_{A2,I} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right) b k_{n,1}^2 J_1(k_{n,2} b)} \left(J_0(k_{n,2} b) - J_0(k_{n,2} b_e) \right) \frac{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \cosh(k_{n,2} (d-c)) \cosh(k_{n,2} c) + \sinh(k_{n,2} c) \sinh(k_{n,2} (d-c))}{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,2} (d-c)) \cosh(k_{n,2} c) + \sinh(k_{n,2} c) \cosh(k_{n,2} (d-c))} \quad (6.51)$$

gegeben.

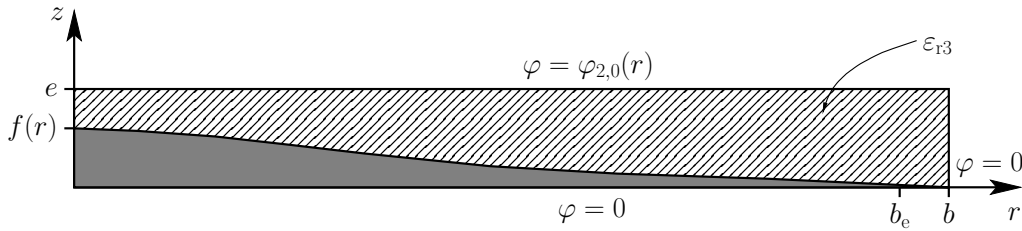


Abbildung 6.35: Bereich II des Aufbaus 2 der angenäherten Elektrodenanordnung des Messkondensators

Für den Bereich II des Aufbaus 2 ist die **Abbildung 6.35** zu betrachten. Wie im Anhang C.3 gezeigt, ist für den Bereich II aufgrund der radialen Abhängigkeit der Höhe der Masselektrode $f(r)$ keine analytische Lösung bestimmbar. An dieser Stelle bleibt lediglich die Bestimmung einer idealen Kapazität. Nach Anhang C.4.1 ist die ideale Kapazität des in **Abbildung 6.35** dargestellten Kondensators mit $d_0 \rightarrow e$, $R_i \rightarrow 0$, $R_a \rightarrow b$ und der Verformung $f(r) = w_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R_p} \right)^2 \right) \left(\alpha - \left(\frac{r}{R_p} \right)^2 \right)$ gegeben durch

$$C_{A2,II,ideal} = \frac{\pi \varepsilon_0 R_p^2}{e} \frac{1}{\sqrt{4 \frac{w_0}{e} + \frac{w_0^2}{e^2} (1-\alpha)^2}} \ln \left[\frac{\frac{2}{\left(1+\alpha - \sqrt{4 \frac{e}{w_0} + (1-\alpha)^2} \right)} \frac{b^2}{R_p^2} - 1}{\frac{2}{\left(1+\alpha + \sqrt{4 \frac{e}{w_0} + (1-\alpha)^2} \right)} \frac{b^2}{R_p^2} - 1} \right]. \quad (6.52)$$

In **Abbildung 6.36** ist der Kapazitätsverlauf des Kondensators nach Aufbau 2 gezeigt. Darin ist die mit (6.52) als ideal bestimmte und die aus einer FEM-Simulation resultierende Kapazität in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{2,0}$ dargestellt. Die zur Darstellung genutzten Daten gemäß **Abbildung 6.29** des angenäherten Aufbaus 2 sind in der nachfolgenden Tabelle aufgezeigt.

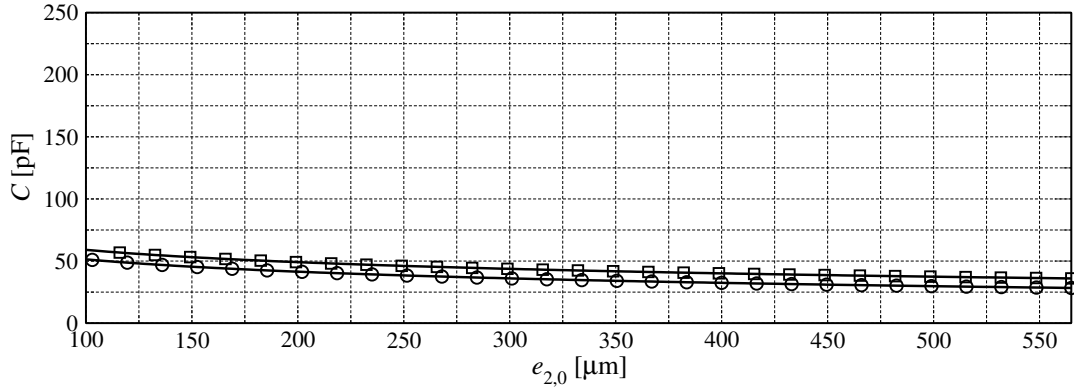


Abbildung 6.36: Verlauf der Kapazität von Aufbau 2 in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{2,0}$

- Analytisch bestimmte, ideale Kapazität
- Mittels FEM-Simulation bestimmte Kapazität

$$\begin{array}{lll}
 b_2 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m} & c_{2,0} - d_{2,0} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m} & \varepsilon_{r1} = 1 \\
 b_{2,e} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ m} & d_{2,0} - e_{2,0} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} & \varepsilon_{r2} = 4 \quad \varepsilon_{r3} = 1
 \end{array}$$

Tabelle 6.4: Geometrische Abmessungen zur mathematischen Bestimmung der Messkapazität des Aufbaus 2

Auch im Aufbau 2 ist erwartungsgemäß eine Differenz zwischen der, aus einer FEM-Simulation resultierenden Kapazität und der idealen Kapazität zu erkennen. Die Differenzen der Kapazitätsverläufe sind gesondert in **Abbildung 6.37** dargestellt. Die Differenz zwischen der, aus der FEM-Simulation resultierenden Kapazität und der idealen Kapazität $C_{\text{fem}} - C_{\text{ideal}}$ in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{2,0}$ verhält sich fast konstant. Die Differenz $C_{\text{fem}} - C_{\text{ideal}}$, die zum größten Teil der Streukapazität, dem Bereich I, zuzuordnen ist, beträgt bei dem mittleren Elektrodenabstand von $300 \mu\text{m}$ ca. $7,8 \text{ pF}$, während das analytische Ergebnis des Bereichs I einen Wert von $C_{A2,I} = 8,4 \text{ pF}$ ergibt. Demnach ist es auch für Aufbau 2 ausreichend, die Gesamtkapazität $C_{A2} = C_{A2,I} + C_{A2,II,\text{ideal}}$ durch eine konstante Streukapazität, die von dem Bereich I herrührt, durch $C_{A2,I}$ mit (6.51) zu beschreiben und den vom Elektrodenabstand abhängigen Teil durch $C_{A2,II,\text{ideal}}$ mit (6.52) zu beschreiben.

Die Absolutwerte des Kondensators nach Aufbau 2 sind bei geringen Elektrodenabständen wesentlich geringer als im Aufbau 1. Die Kapazitätsänderung in Bezug auf die minimale Kapazität ist im Aufbau 2 wesentlich geringer, woraus eine geringere Empfindlichkeit bezüglich der Messgröße, Elektrodenabstand, resultiert. Durch eine Modifikation der Messelektrode ist eine Erhöhung der Empfindlichkeit zu erreichen. Der in **Abbildung 6.33** angedeutete Masselektrodenverlauf weist zum Rand hin

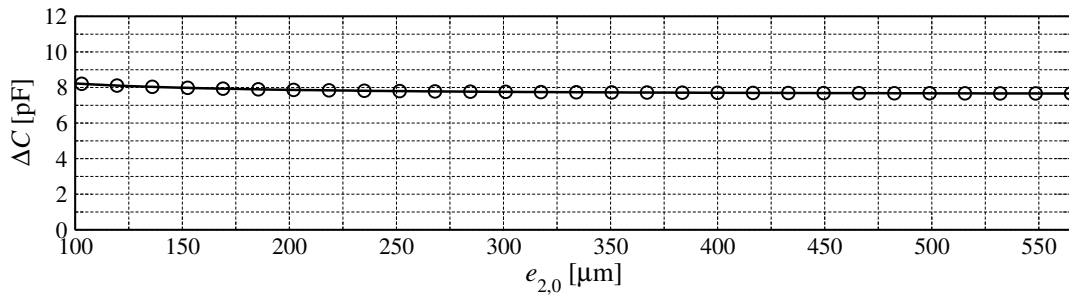


Abbildung 6.37: Verlauf der Kapazitätsdifferenz von Aufbau 2 in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand $e_{2,0}$

- Kapazitätsdifferenz zwischen der mittels FEM-Simulation bestimmten Kapazität und der analytisch bestimmten, idealen Kapazität

$r \rightarrow b_2$ den Abstand $e_{2,0}$ auf, der sich nicht verändert und einem Totraum entspricht, während im Inneren $r \rightarrow 0$ der Abstand auf $e_{2,0} - f(r)$ abnimmt. Eine Anpassung der Messelektrode an den Masseelektrodenverlauf reduziert den Totraum und erhöht die Empfindlichkeit. Mit dieser Maßnahme wird das Auflösungsvermögen des Sensors erhöht.

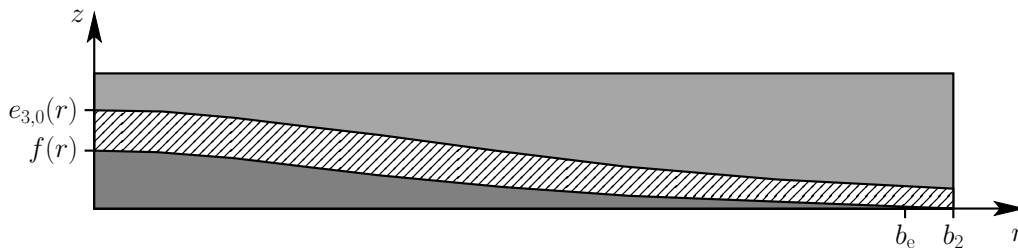


Abbildung 6.38: Angenäherte Elektrodenanordnung des Messkondensators für Aufbau 2, Messelektrode optimal angepasst an Masselektrode

Die optimale Anpassung der Messelektrode an die Masselektrode (druckaufnehmende Platte) ist in **Abbildung 6.38** gezeigt, in der eine Anpassung des unteren Randes der Messelektrode durch $e_{3,0}(r) = d_{3,0} - f_{\max}(r)$ dargestellt ist. Dabei ist $d_{3,0}$ als minimaler Abstand der beiden Elektroden bei maximaler Auslenkung der Masselektrode zu verstehen. Die sich aus einem solchen Elektrodenverlauf ergebende Kapazität ist im Anhang C.4.2 angegeben. Diese Anpassung der Messelektrode ist aufgrund des Verlaufs mit einer aufwendigen Herstellung verbunden.

Eine einfachere Möglichkeit stellt **Abbildung 6.39** für die Anpassung der Messelektrode durch ein einfaches Drehteil dar. Der untere Elektrodenrand weist im mittleren Bereich $0 < r < b_m$ einen geraden Verlauf und im Bereich $b_m < r < b_2$ einen linearen

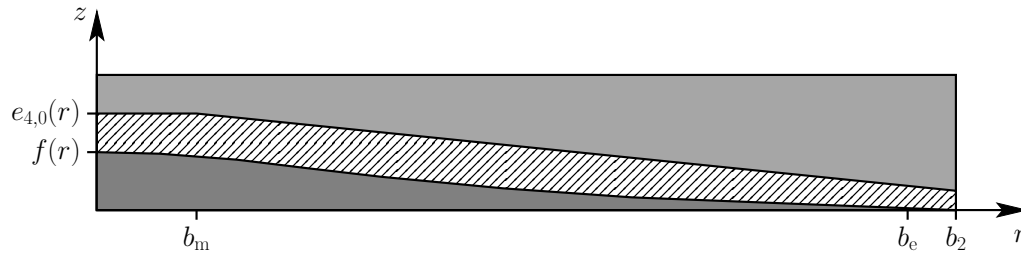


Abbildung 6.39: Angenäherte Elektrodenanordnung des Messkondensators für Aufbau 2 mit einfach angepasster Messelektrode

Abfall $e_{4,0}(r) = d_{4,0}(1 - \beta r)$, mit einem Abstand $d_{4,0} < f_{\max}(0)$ und einer Steigung β , mit der sich Mess- und Masselektrode bei maximaler Auslenkung der Masselektrode nicht berühren, auf. Die Kapazität der vereinfacht angepassten Messelektrode ist analytisch nicht bestimmbar und nur durch numerische Integration zu ermitteln.

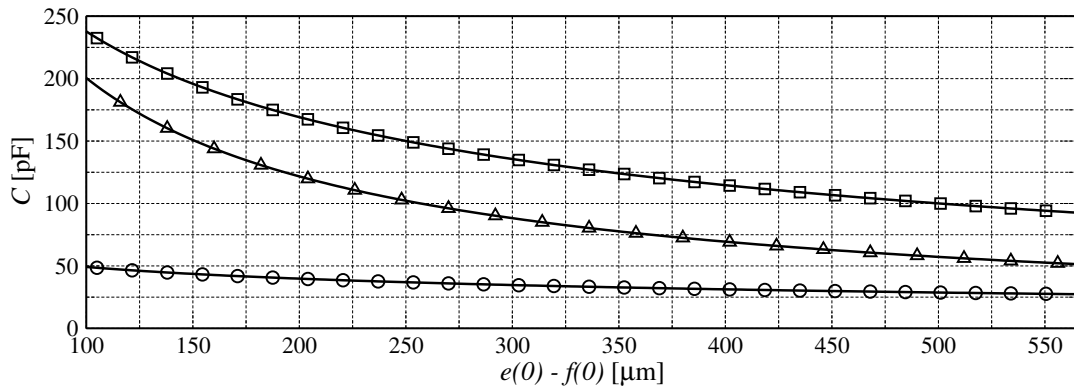


Abbildung 6.40: Verlauf der Kapazität von Aufbau 2 in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand der unterschiedlichen Messelektroden

- Plane (gerade) Messelektrode
- Optimal an den Plattenverlauf angepasste Messelektrode
- △ Einfach angepasste Messelektrode

Die Auswirkung der Messelektrodenanpassung ist beispielhaft in **Abbildung 6.40** dargestellt. Zum Vergleich sind die Kapazitätswerte der geraden Messelektrode und die der beiden Varianten abgebildet. Die Kapazität der optimal angepassten Messelektrode ist nach Anhang C.4.2 bestimmt, während die Kapazität der vereinfacht angepassten Messelektrode mittels numerischer Integration bestimmt ist. Es ist für beide Elektrodenanpassungen eine deutliche Kapazitätssteigerung im Vergleich zur geraden Elektrode zu erkennen. Dabei ändert sich die Kapazität der vereinfacht angepassten Elektrode um den Faktor 4 von ca. 50 pF auf ca. 200 pF, während die Kapazität der optimal angepassten Elektrode sich lediglich um den Faktor 2,7 von ca. 90 pF auf ca. 240 pF ändert. Da die Schwingfrequenz des Oszillators nach Ka-

pitel 6.1 die Abhängigkeit $\sim 1/\sqrt{C}$ aufweist, ist nicht die Differenz, sondern das Verhältnis der maximalen zur minimalen Kapazität für die Änderung der Frequenz entscheidend. Damit ist die vereinfacht angepasste Elektrode, die einen größeren Frequenzhub erzeugt, vorzuziehen.

Die optimal angepasste Elektrode ist an den Verlauf der Masselektrode (druckaufnehmende Platte) angepasst. Durch eine Abweichung von diesem Verlauf könnte die Empfindlichkeit noch gesteigert werden, wie **Abbildung 6.41** erkennen lässt. Aufgrund der aufwendigen Herstellung wird hier die Optimierung einer derartigen Elektrode nicht weiter betrachtet.

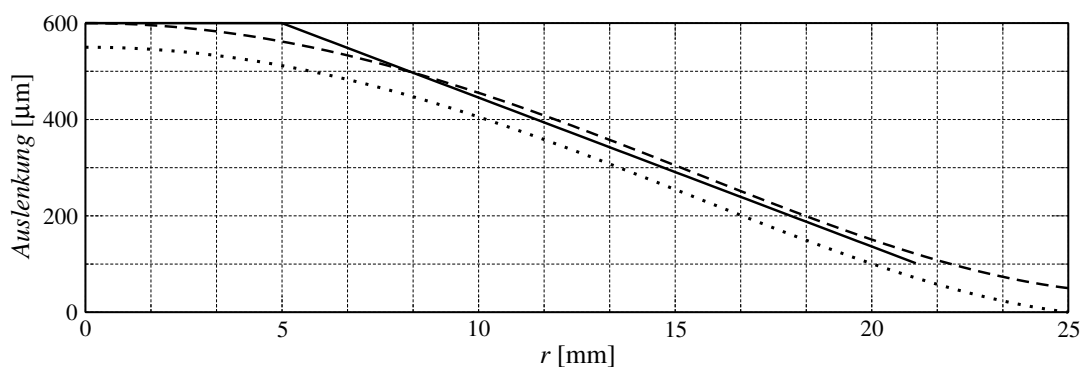


Abbildung 6.41: Verlauf der angepassten Messelektroden (unterer Rand)
 ··· Masselektrode (druckaufnehmende Platte)
 — — Optimal an den Plattenverlauf angepasste Messelektrode
 — Einfach angepasste Messelektrode

6.5.3 Schlussfolgerung zum Kondensator

Das Kapitel 6.5.1 beschreibt die physikalischen Eigenschaften und das Vorgehen zur Bestimmung der Kapazität eines Kondensators. Dabei wird auf die Randeffekte von Kondensatoren eingegangen, die in der Regel bei kapazitiven Sensoren, wie auch hier, nicht zu vernachlässigen sind.

Sowohl für Aufbau 1 als auch für den Aufbau 2 werden in Kapitel 6.5.2 analytische Näherungen zur Kapazitätsbestimmung aufgezeigt, wobei die Kapazität des Aufbaus 2 nur für einen Teil des Aufbaus, durch den hier gewählten Ansatz, analytisch bestimmbar ist.

Es wird ein Vergleich von Ergebnissen einer FEM-Simulation mit den analytischen Ergebnissen eines idealen Kondensators für die jeweiligen Aufbauten durchgeführt. Der Vergleich lässt erkennen, dass die Summe aus einer konstanten, analytisch bestimmten Streukapazität und der Kapazität eines veränderlichen idealen Kondensators

sators, eine ausreichende Beschreibung der Gesamtkapazität des hier betrachteten Sensors wiedergibt.

Der Vergleich der Kapazitätsverläufe des Aufbaus 1 aus Abbildung 6.30 mit denen des Aufbaus 2 aus Abbildung 6.36 zeigt, dass das Sensorelement nach Aufbau 1 eine mehr als doppelt so hohe Empfindlichkeit aufweist. Die beschriebene Anpassung der Messelektrode des Aufbaus 2 zeigt eine Maßnahme zur Steigerung der Empfindlichkeit des Aufbaus 2 auf, der damit an die Empfindlichkeit Aufbaus 1 herankommt.

6.6 Umgebungseinflüsse

Die Umgebung weist diverse Einflüsse, wie Temperatur, Druck und Luftfeuchtigkeit, auf den elektronischen Teil des Sensors auf. Der Einfluss der Temperatur führt zum einen, wie in Kapitel 5.3 beschrieben, zu einer thermischen Ausdehnung der, die Messelektroden tragenden, eingespannten Platinen. Die daraus resultierenden Spannungen und Momente der Platinen, führen zu einer temperaturabhängigen Verformung, die einen Fehler der zu messenden Kapazität darstellt. Zum anderen resultieren Temperaturänderungen in der Verschiebung der Arbeitspunkte der elektronischen Schaltung, die zur Veränderung der parasitären Elemente der aktiven Bauelemente führen.

Die Kapazität eines von Luft umgebenen Kondensators hängt, wie es hier der Fall ist, von der relativen Permittivität der Luft ab. Da sich die Messelektroden auf einer Trägerplatine befinden, spielt auch die relative Permittivität der Platine eine Rolle. Somit hängt die Genauigkeit und Konstanz dieser Kapazität von der Veränderung der relativen Permittivität der Luft und der Platine ab. Hierbei können folgende Fehlerquellen auftreten: Wasserbildung auf den Elektroden, Staubablagerungen, Luftdruckänderung und Luftfeuchtigkeit. Diese Faktoren beeinflussen die Permittivität der Luft bzw. der Platine und somit die zu messende Kapazität. Die beschriebenen Einflüsse auf die Permittivität der Luft sind geringer als die der thermischen Ausdehnung [22]. Dies gilt nicht bei hoher relativer Luftfeuchte.

Diese in der Regel langsam verlaufenden Veränderungen (mehrere Minuten, Stunden) könnten mit einer zusätzlichen Temperaturmessung und einem zu messenden Temperaturverhalten des Sensors berücksichtigt werden. Da hier die absolute Genauigkeit des Sensors zweitrangig ist, werden diese Einflüsse nicht weiter betrachtet.

6.7 Schlussfolgerung zum elektrischen Sensorteil

Das Kapitel 6 beschreibt den elektrischen Teil des Sensors. Die das Sensorelement auswertende Einheit, ein Oszillator, wird in Kapitel 6.1 analysiert. Die Oszillatorschaltung basiert auf einem Franklin-Oszillator, der auf einen Zweipol, bestehend aus den Schwingelementen, einem Last- und dem schwingungserhaltenden Element, reduziert wird. Das Rauschverhalten des Oszillators wird in Kapitel 6.2 untersucht

und eine Abschätzung der Frequenzstabilität, durch die das minimale Auflösungsvermögen des oszillatorbasierten Sensors gegeben ist, wird bestimmt. Aus der Abschätzung der Frequenzstabilität und den Erkenntnissen des Oszillators werden Maßnahmen zur Verbesserung der Frequenzstabilität aufgezeigt. Zu dem zeigt die Abschätzung, dass das hier betrachtete Sensorkonzept die geforderte Auflösung weit übertrifft und für eine höchstauflösende Druckmessung geeignet ist.

Eine Übersicht der prinzipiell zur Frequenzmessung geeigneten Verfahren gibt das Kapitel 6.3 wieder. Nach Beurteilung der Verfahren resultiert der eingangssynchronisierte rechnende Zähler (Frequenzverhältnismessung), kombiniert mit einer Schwebungsfrequenzmessung, als ein geeignetes Frequenzmessverfahren. Es ermöglicht eine schnelle und hochauflösende Messung der Schwingfrequenz.

Eine alternative Möglichkeit zur Auswertung des Sensorelements stellt die kommerziell erhältliche, direkte Kapazität zu Digitalwert-Umsetzung dar. Das auf einem Delta-Sigma-Umsetzer basierende Prinzip wird in Kapitel 6.4, unter Betrachtung der Randbedingungen zur technischen Umsetzung, vorgestellt.

Das eigentliche Sensorelement, der Kondensator, wird in Kapitel 6.5 untersucht. Aus den Untersuchungen resultiert, dass die analytisch angenäherten Randeffekte, der Kondensatoren, die sich aus den jeweiligen Aufbauten ergeben, nicht zu vernachlässigen sind. Es ist jedoch ausreichend den veränderlichen Teil des Sensorelements als idealen Kondensator aufzufassen und die Randeffekte durch eine zusätzliche, konstante Streukapazität zu berücksichtigen. Die in Kapitel 6.5.2 dargestellten Kapazitätsverläufe der beiden Aufbauten zeigen, dass der Aufbau 1 eine höhere Empfindlichkeit aufweist. Hinzu kommt, dass der Aufbau 1 zwei Kondensatoren enthält, die sich gegenseitig verändern, womit die Empfindlichkeit weiter gesteigert wird. Darüber hinaus heben sich in erster Näherung die Temperatureinflüsse der elektronischen Schaltungen im Aufbau 1 auf. Zur Steigerung der Empfindlichkeit des Aufbaus 2, wird eine Maßnahme aufgezeigt, mit der die Empfindlichkeit des Aufbaus 2 ähnliche Werte erreicht wie der Aufbau 1.

In Kapitel 6.1 ist die Abhängigkeit der Oszillatorschwingfrequenz von dem Schwingelement Kondensator aufgezeigt. Zu der Kapazität des Sensorelements nach Kapitel 6.5.2 kommt die Streukapazität des Sensorelements und die parasitäre Kapazität der Verstärkerschaltung nach Kapitel 6.1 hinzu. Zusätzlich leisten Streukapazitäten des Schaltungslayouts einen weiteren Beitrag zur frequenzbestimmenden Gesamtkapazität. Die Gesamtempfindlichkeit des Oszillators bezüglich Kapazitätsänderungen wird durch Streu- und parasitäre Kapazitäten reduziert. Dieser konstante Kapazitätsanteil setzt das Verhältnis von maximaler zu minimaler Gesamtkapazität des Sensors herab. Aus diesem Grund gilt es, den konstanten Kapazitätsanteil möglichst gering zu halten.

Mit der in Kapitel 6.2 abgeschätzten relativen Frequenzschwankung von $\frac{\Delta f}{f} = 1,1 \cdot 10^{-8}$, dem Verhältnis der Kapazitätsänderung des Aufbaus 1 von $35 \text{ pF}/160 \text{ pF} \approx 0,22$ bzw. des Aufbaus 2 von $36 \text{ pF}/59 \text{ pF} \approx 0,59$ nach der Abbildung 6.30 bzw.

6.36 und der Abhängigkeit der Schwingfrequenz $\sim 1/\sqrt{C}$ nach Kapitel 6.1, ist eine Abschätzung der zu erwartenden relativen Auflösung des Drucks möglich.

Mit der Beziehung

$$\frac{\Delta p}{p_{\max}} = \frac{\Delta f}{f} \frac{\frac{1}{\sqrt{C_{\min}}}}{\frac{1}{\sqrt{C_{\min}}} - \frac{1}{\sqrt{C_{\max}}}} = \frac{\Delta f}{f} \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{C_{\min}}{C_{\max}}}},$$

ergibt sich eine zu erwartende, relative Auflösung des Drucks von $\frac{\Delta p}{p_{\max}} = 2,1 \cdot 10^{-8}$ für Aufbau 1 und $\frac{\Delta p}{p_{\max}} = 4,7 \cdot 10^{-8}$ für Aufbau 2, die die geforderte Auflösung um mehr als eine Größenordnung übertrifft. Damit ist gezeigt, dass das hier vorgestellte Sensorkonzept die Anforderung bezüglich der Auflösung erfüllt und zur höchstauflösenden Druckmessung geeignet ist.

Kapitel 7

Aufbau der Prototypen

Dieses Kapitel zeigt die mechanischen Aufbauten des Sensors. Dabei wird sowohl der schaltungstechnische Aufbau der Oszillator-Schaltung als auch der des C/D-Umsetzers dargestellt. Ebenfalls werden die Gesamtaufbauten 1 und 2 abgebildet.

7.1 Aufbau der Oszillator-Schaltung

Der in Kapitel 6.1 betrachtete Franklin-Oszillator bildet das Kernelement zur Auswertung des Sensorelements mittels eines LC-Oszillators. Die weiteren Schaltungsteile, die der Regelung der Schwingamplitude, der Weiterverarbeitung des Oszillatorsignals und der Spannungsversorgung dienen, werden nicht näher betrachtet.

Das neben dem Sensorelement zur Schwingungserzeugung nötige Bauelement, die Spule, hat ebenfalls einen großen Einfluss auf das Schwingverhalten des Oszillators. Wie in Kapitel 2.2.3 beschrieben, weist eine Luftspule unter Vernachlässigung des ohmschen Widerstandes die geringsten Verluste auf, was von Vorteil für das Rauschverhalten des Oszillators ist. Die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes resultiert in einer Beeinflussung der Induktivität durch die nähere Umgebung der Spule. Da eine sinnvolle Abschirmung der Spule kaum realisierbar und mit weiteren Verlusten verbunden ist, bietet sich der Einsatz einer Toroid-Spule an. Das Magnetfeld einer Toroid-Spule ist im Idealfall auf den Innenbereich der Spule beschränkt, womit in erster Näherung keine Störeinflüsse des Magnetfelds durch die direkte Umgebung auftreten und somit die Induktivität unbeeinflusst bleibt. Dieser Vorteil rechtfertigt die etwas aufwendigere Herstellung der Spule.

Der Wahl von Widerständen ist ebenfalls Beachtung zu schenken. Widerstände der Bauform Metal Electrode Leadless Faces (MELF) weisen ein geringeres Stromrauschen als Chip-Widerstände auf, wobei größere Bauformen vorzuziehen sind, wie den entsprechenden Datenblättern der Hersteller zu entnehmen ist.

Die vollständige Oszillator-Schaltung wird auf einer Trägerplatine direkt im Sensoraufbau untergebracht. Die sich anbietende, gleichzeitige Nutzung der Trägerplatine der Oszillator-Schaltung als Messelektrode ist mit hohen Streukapazitäten, die vom Schaltungslayout zur Messelektrode herrühren und im Bereich von $10 \text{ pF} \pm 5 \text{ pF}$ liegen können, verbunden. Eine explizite Trennung der Messelektrode von der Trägerplatine der Oszillator-Schaltung ist demnach vorzuziehen, womit die Empfindlichkeit bezüglich Kapazitätsänderungen nicht verschlechtert wird, wie im Fall der Zusammenlegung.

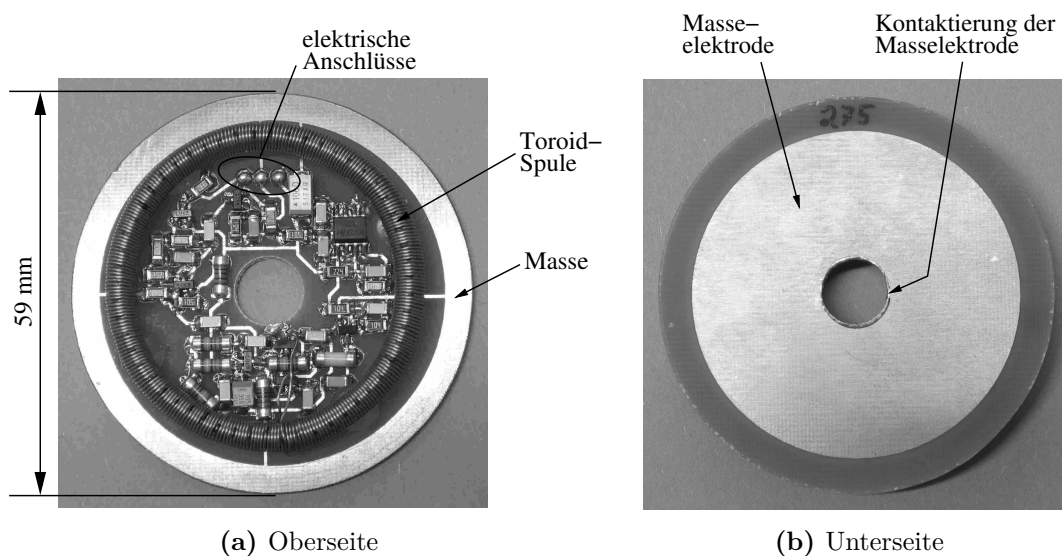


Abbildung 7.1: Platine der Oszillatorschaltung

Die eingesetzte Oszillatorschaltung ist in **Abbildung 7.1** dargestellt. Die vollständige Herstellung der Platine erfolgte am Fachgebiet Messtechnik. Aufgrund ihrer Größe ist die Toroid-Spule sehr gut zu erkennen. Die auf der Oberfläche montierten *SMD*-Bauteile ermöglichen die kleine Bauform, wobei sich im Oszillator-Teil die etwas größeren MELF-Widerstände von den übrigen Widerständen unterscheiden. Die Unterseite besteht aus einer Kupferfläche, die mit dem Bezugspotential (Masse) der Schaltung verbunden ist. Die Bohrung in der Platinenmitte dient zur Durchführung des Gewindestabs der beweglichen Elektrode des Aufbaus 1. Für den Aufbau 2 resultiert dies in einem problemlos hinnehmbaren Kapazitätsverlust des Prototyps.

Der Einsatz einer aktiven Schirmelektrode, wie sie in Kapitel 6.4.3 beschrieben wird, ist mit einem Oszillator nicht vereinbar. Ohne auf den mathematischen Beweis einzugehen, wird der Einfluss einer aktiven Schirmelektrode auf einen Oszillator, wie folgt, erläutert. Für ihre Funktionalität ist die Schirmelektrode mit der Spannung, die an der Messelektrode anliegt, zu betreiben. Unterscheiden sich die Spannungen der Mess- und Schirmelektrode aufgrund eines Verstärkungsfaktors $\neq 1$ oder einer Phasenverschiebung $\neq 0$, so ist die Funktionalität der Schirmelektrode nicht vollständig gegeben und ein geringer Anteil der Streukapazität verbleibt. Eine verbleibende Spannungsdifferenz führt zu einem Stromfluss von der Mess- zur Schirmelektrode über die resultierende Mess-Schirm-Elektroden-Kapazität. Damit fließt ein zusätzlicher Strom in bzw. aus dem Schwingkreis, was die resultierende Steilheit der Verstärkerschaltung des Oszillators beeinflusst. Das Schwingverhalten des Oszillators wird dadurch abhängig von dem treibenden Verstärker der Schirmelektrode, was nicht gewünscht ist.

7.1.1 Aufbau des C/D-Umsetzers

Die Schaltung der zum Vergleich eingesetzten kommerziellen Lösung, der Sensorelement-Auswertung, ist in **Abbildung 7.2** dargestellt.

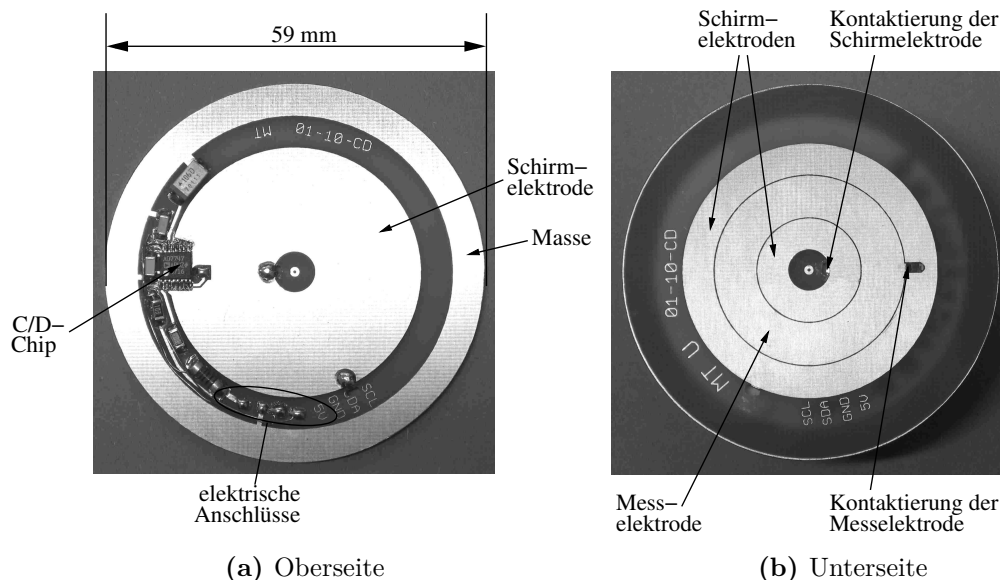


Abbildung 7.2: Platine zur Auswertung des Sensorelements durch das IC *AD7747*

Im Vergleich zu der Oszillatorschaltung ist der Bauteil Aufwand der kommerziellen Lösungsmöglichkeit der Auswertung des Sensorelements wesentlich geringer. Er beläuft sich auf das C/D-Chip und einige Widerstände und Kondensatoren. Sowohl auf der Oberseite als auch auf der Unterseite der Platine ist die in Kapitel 6.4.3 beschriebene Schirmelektrode zu erkennen. Aus der Einschränkung des auswertbaren Kapazitätsbereichs, des verwendeten C/D-Umsetzers, resultiert die abgebildete Messelektrode auf der Platinenunterseite.

7.2 Aufbau des Sensors

Die beiden Aufbauvarianten unterscheiden sich mechanisch, von außen betrachtet, nur geringfügig. In den **Abbildungen 7.3, 7.4** ist der Aufbau 1 dargestellt. Zu erkennen ist ein Anschlussstück, der die Spannungsversorgung und Ausgabe der Schwingungsfrequenzen beinhaltet. Des Weiteren ist die Platine, die die Spannungsversorgung und die Signalumformung (Sinus in Rechteck) gewährleistet und der Druckanschluss zu erkennen. Das Sensorelement und die Schaltungen befinden sich im Mittelteil und sind in **Abbildung 7.3** nicht zu erkennen. **Abbildung 7.4** zeigt den Sensor ohne Deckel und obere Führungsmembran auf. Hier ist zusätzlich die Oszillatorschaltung und der Gewindestab der beweglichen Masselektrode zu erkennen.

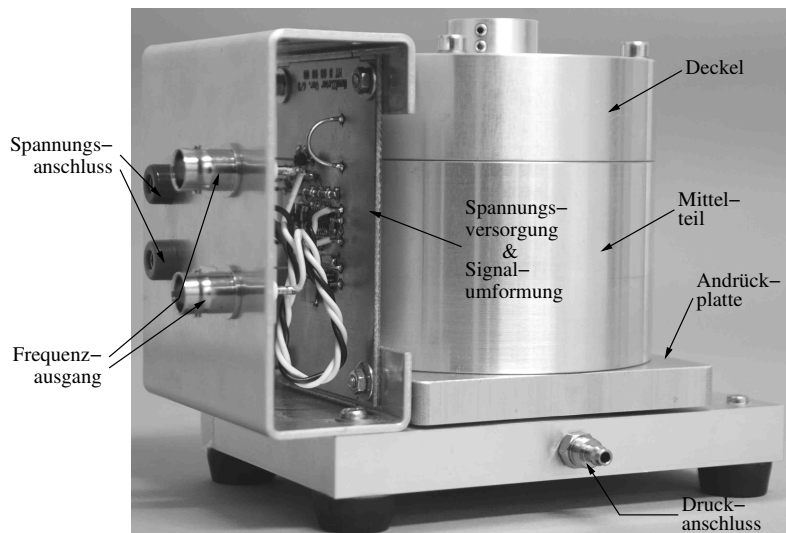


Abbildung 7.3: Aufbau 1 des Sensors mit Deckel

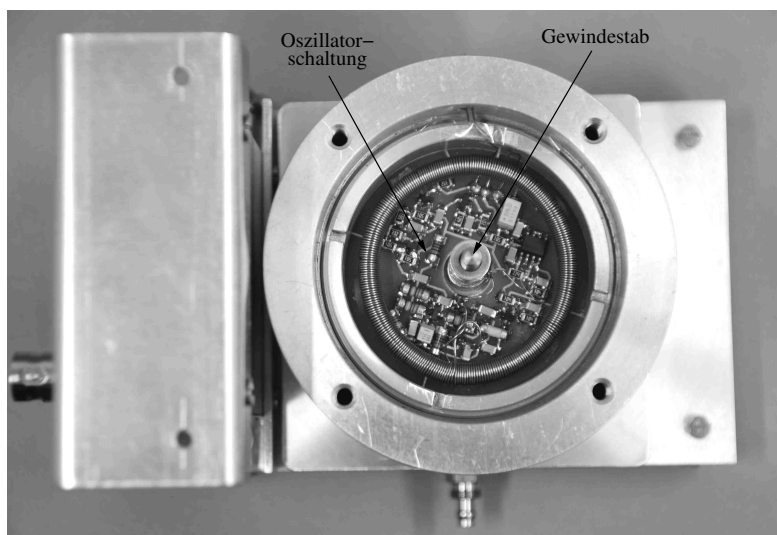


Abbildung 7.4: Aufbau 1 des Sensors ohne Deckel und Führungsmembran

Aufbau 2 unterscheidet sich von außen lediglich in seiner Größe vom Aufbau 1. Er ist in den **Abbildungen 7.5, 7.6** dargestellt. Ohne Deckel lässt sich zusätzlich der Einbau der Oszillatorschaltung erkennen, was Abbildung 7.6 zeigt.

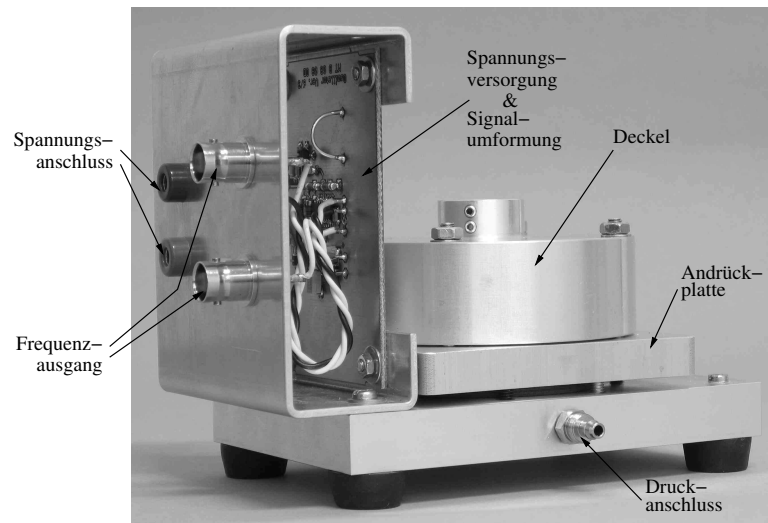


Abbildung 7.5: Aufbau 2 des Sensors mit Deckel

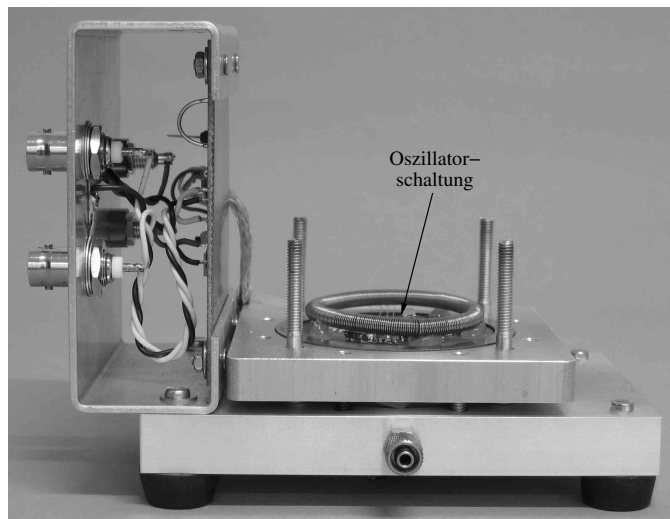


Abbildung 7.6: Aufbau 2 des Sensors ohne Deckel

Kapitel 8

Messergebnisse der Sensor-Prototypen

Dieses Kapitel zeigt das messtechnische Verhalten der Sensor-Prototypen auf. Dazu wird der Sensor in beiden Aufbauvarianten im Druckbereich von $0 \dots 8 \cdot 10^5$ Pa Differenzdruck gegen Atmosphäre getestet. Ein Vergleich der Sensorelementauswertung, basierend auf dem LC-Oszillator und dem CDU, erfolgt im Aufbau 2. Mit Hilfe eines speziellen Messaufbaus, dem Druckmodulator, der kleine Druckänderungen im Bereich von $3 \dots 3500$ Pa bei einem vorgebbaren Arbeitsdruck reproduzierbar erzeugt, wird das Auflösungsvermögen des Sensors ermittelt.

8.1 Messaufbau zur Ermittlung des Sensor-Auflösevermögens

Der Nachweis einer hohen Druckauflösung des Sensors bedarf der Erzeugung kleiner Druckänderungen, die eine sinnvolle Abschätzung des Auflösungsvermögens erlauben. Kommerzielle Druckregler, die sich prinzipiell für eine solche Aufgabe eignen, erreichen kaum eine reproduzierbare Druckänderung von $\Delta p = 100$ Pa. Aus diesem Grund wird der in **Abbildung 8.1** gezeigte Druckmodulator zur Erzeugung kleiner Druckänderungen verwendet ¹.

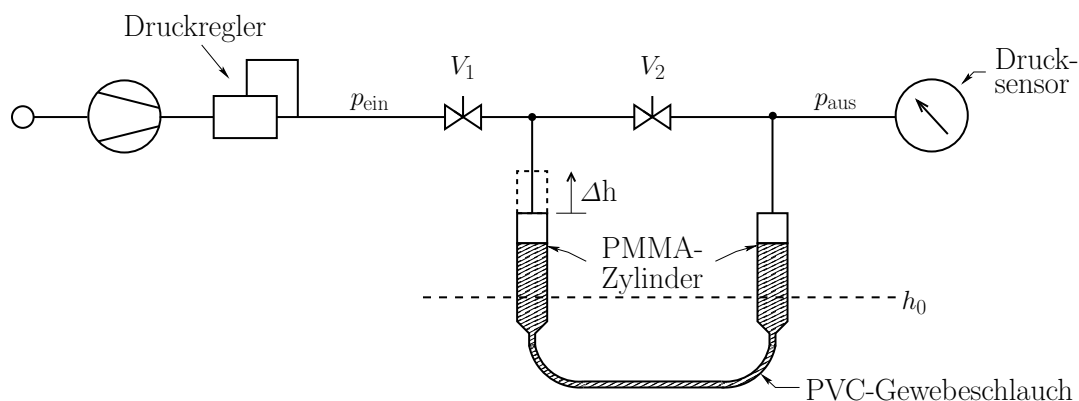


Abbildung 8.1: Schematischer Aufbau des Druckmodulators zur Erzeugung kleiner Druckänderungen

Der Druckmodulator selbst besteht aus zwei runden Zylindern aus Polymethylmethacrylat (PMMA), die bis zu einer gewissen Höhe mit Wasser gefüllt sind und mittels

¹Nach einem Vorschlag von Prof. Dr.-Ing. Mathias Uhle

eines Gewebeschauchs aus Polyvinylchlorid (PVC) verbunden sind. Die Modulation des Arbeitsdrucks erfolgt hier durch vertikales Verfahren des linken PMMA-Zylinders mittels eines schrittmotorangetriebenen Linear-Spindeltisches. Ein geforderter Arbeitsdruck p_{ein} wird mittels eines Druckreglers aufgeprägt, auf den der Druckmodulator die gewünschten kleinen Druckänderungen aufmoduliert. Der zu testende Sensor-Prototyp wird mit dem Druck p_{aus} beaufschlagt, was auf der rechten Seite des schematischen Aufbaus zu erkennen ist.

Sowohl das Ventil V_1 als auch das Ventil V_2 sind vor Beginn der Messung auf Durchfluss geschaltet. Nach Erreichen des Arbeitsdrucks ist zunächst das Ventil V_1 und nach einer Stabilisierungsphase das Ventil V_2 zu schließen. Mit diesem Vorgang wird erreicht, dass das so entstandene geschlossene System auf beiden Seiten denselben Arbeitsdruck p_A aufweist. Durch Veränderung der Höhe des linken PMMA-Zylinders um Δh relativ zur beliebigen Bezugsposition h_0 wird eine Druckänderung erzeugt. Diese ist mit einer entstandenen Wassersäule Δh_w gegenüber der rechten Seite begründet. Die Größe der Druckänderung wird anhand des in **Abbildung 8.2** dargestellten Modells, welches das bereits geschlossene System nachbildet, bestimmt.

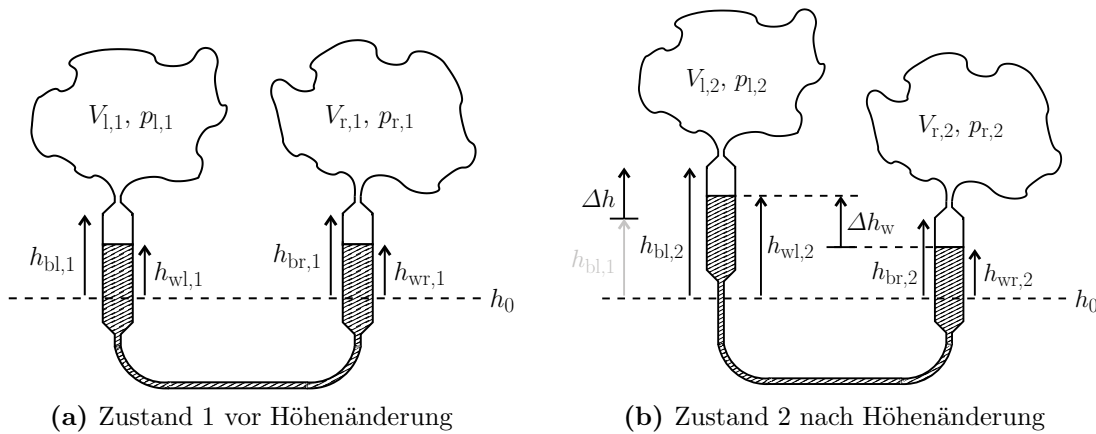


Abbildung 8.2: Modell des Druckmodulators zur Erzeugung kleiner Druckänderungen

Der Druckmodulator verfügt über ein Gas/Luft-Volumen $V_{l,i}$ mit einem Druck $p_{l,i}$ der linken bzw. $V_{r,i}$ und $p_{r,i}$ der rechten Seite in den Zuständen $i = 1$ vor bzw. $i = 2$ nach einer Höhenänderung Δh . Die zum Teil luftgefüllten PMMA-Zylinder weisen im gesamten mit Wasser gefüllten Bereich die Querschnittsfläche A_l der linken bzw. A_r der rechten Seite auf.

Im Zustand 1 herrschen links und rechts dieselben Drücke $p_{l,1} = p_{r,1} = p_A$, weshalb die Wasserpegel gleichfalls auf denselben Höhen $h_{wl,1} = h_{wr,1}$, die auf h_0 bezogen sind, liegen. Für die Oberkante des linken PMMA-Zylinders gilt die Höhe $h_{bl,1}$ und die des rechten $h_{br,1}$. Eine Änderung der Höhe des linken PMMA-Zylinders um Δh resultiert im Zustand 2 in $h_{bl,2} = h_{bl,1} + \Delta h$, wobei die Höhe des rechten PMMA-Zylinders unverändert bleibt $h_{br,2} = h_{br,1}$. Ferner ändert sich der Wasserpegel der

linken Seite auf die Höhe $h_{wl,2}$. Da die rechte Seite in ihrer Höhe unverändert bleibt $h_{br,2} = h_{br,1}$, entsteht eine Differenz der linken und rechten Wasserpegel $\Delta h_w = h_{wl,2} - h_{wr,2}$, die mit einer Druckänderung einhergeht. Die Gewichtskraft der sich einstellenden Wassersäule $\Delta h_w > 0$ komprimiert die Luft der rechten Seite, was eine Änderung der beiden Gas/Luft-Volumina und damit eine Änderung der Drücke $p_{l,2}$ und $p_{r,2}$ zur Folge hat. Mit der Differenz des luftgefüllten Raums zwischen Oberkante des rechten PMMA-Zylinders und des rechten Wasserpegels der beiden Zustände ändert sich das Volumen der rechten Seite zu

$$V_{r,2} = V_{r,1} + A_r \cdot \left(\underbrace{(h_{br,2} - h_{wr,2})}_{\text{Luftraum Zustand 2}} - \underbrace{(h_{br,1} - h_{wr,1})}_{\text{Luftraum Zustand 1}} \right).$$

Danach ist der Wasserpegel $h_{wr,2}$ durch

$$h_{wr,2} = h_{wr,1} + \frac{V_{r,1} - V_{r,2}}{A_r}$$

bestimmt. Aufgrund der kleinen zu erzeugenden Druckänderungen wird angenommen, dass sich das Gesamtvolumen des Systems, insbesondere des PVC-Gewebschlauchs, von Zustand 1 zu Zustand 2 nicht ändert, womit

$$V_{\text{ges}} = V_{l,1} + V_{r,1} \stackrel{!}{=} V_{l,2} + V_{r,2}$$

gilt und in der Beziehung

$$V_{l,2} = V_{l,1} + V_{r,1} - V_{r,2}$$

für das Volumen $V_{l,2}$ resultiert. Zudem muss bedingt durch die Inkompressibilität von Wasser, für die zwischen Oberkante der PMMA-Zylinder und der Wasserpegel eingeschlossenen Volumina der beiden Seiten, die Beziehung

$$A_l \cdot (h_{bl,1} - h_{wl,1}) + A_r \cdot (h_{br,1} - h_{wr,1}) \stackrel{!}{=} A_l \cdot (h_{bl,2} - h_{wl,2}) + A_r \cdot (h_{br,2} - h_{wr,2})$$

erfüllt sein. Mit $h_{bl,2} = h_{bl,1} + \Delta h$, $h_{br,2} = h_{br,1}$, $h_{wl,1} = h_{wr,1}$ folgt für die letztgenannte Beziehung

$$A_l \cdot (\Delta h + h_{wr,1} - h_{wl,2}) = -A_r \cdot (h_{wr,1} - h_{wr,2}),$$

womit der Wasserpegel $h_{wl,2}$ aus

$$h_{wl,2} = h_{wr,1} + \Delta h + \frac{A_r}{A_l} \cdot (h_{wr,1} - h_{wr,2}) = h_{wr,1} + \Delta h - \frac{V_{r,1} - V_{r,2}}{A_l}$$

hervorgeht. Der Druck auf der rechten Seite im Zustand 2 folgt aus dem Kräftegleichgewicht $p_{r,2} = p_{l,2} + \rho_w g \Delta h_w$. Die Wassersäule Δh_w wirkt mit der Dichte des Wassers ρ_w und der Erdbeschleunigung g als zusätzlicher Druck [1, 26]. Weiter ergibt sich mit $\Delta h_w = h_{wl,2} - h_{wr,2}$

$$\begin{aligned} p_{r,2} &= p_{l,2} + \rho_w g (h_{wl,2} - h_{wr,2}) = p_{l,2} + \rho_w g \left(\Delta h - \frac{V_{r,1} - V_{r,2}}{A_l} - \frac{V_{r,1} - V_{r,2}}{A_r} \right) \\ &= p_{l,2} + \rho_w g \left(\Delta h - \frac{V_{r,1} - V_{r,2}}{A_r} \left(1 + \frac{A_r}{A_l} \right) \right). \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme des idealen Gasgesetzes und der Annahme von isothermen Zustandsänderungen gilt $p \cdot V = m \cdot R_s \cdot T = \text{const.}$ [1, 26]. Folglich sind im Zustand 2 der Druck $p_{1,2}$ und das Volumen $V_{r,2}$ durch

$$p_{1,2} = p_{1,1} \frac{V_{1,1}}{V_{1,2}} = \frac{p_{1,1}}{1 + \frac{V_{r,1} - V_{r,2}}{V_{1,1}}} \quad V_{r,2} = V_{r,1} \frac{p_{r,1}}{p_{r,2}} \iff V_{r,1} - V_{r,2} = V_{r,1} \left(1 - \frac{p_{r,1}}{p_{r,2}}\right)$$

gegeben. Die Drücke im Zustand 1 entsprechen dem Arbeitsdruck $p_{1,1} = p_{r,1} = p_A$, womit sich schließlich die Gleichung

$$p_{r,2} = \frac{p_A}{1 + \frac{V_{r,1}}{V_{1,1}} \left(1 - \frac{p_A}{p_{r,2}}\right)} + \rho_w g \left[\Delta h - \frac{V_{r,1}}{A_r} \left(1 + \frac{A_r}{A_l}\right) \left(1 - \frac{p_A}{p_{r,2}}\right) \right]. \quad (8.1)$$

bzw. nach einigen Umformungen die kubische Gleichung

$$p_{r,2}^3 - p_{r,2}^2 (p_A + b_p - a_p) - p_{r,2} p_A \left((a_p - b_p) \frac{V_{r,1}}{V_{1,1} + V_{r,1}} + a_p \right) + a_p p_A^2 \frac{V_{r,1}}{V_{1,1} + V_{r,1}} = 0 \quad (8.2)$$

für den Ausgangsdruck $p_{r,2}$ nach einer Höhenänderung des linken PMMA-Zylinders Δh ergibt. Darin sind die Größen

$$a_p = \rho_w g \frac{V_{r,1}}{A_r} \left(1 + \frac{A_r}{A_l}\right) \quad b_p = \rho_w g \Delta h$$

enthalten.

Der Druck $p_{r,2}$ kann zum einen aus der kubischen Gleichung bestimmt werden und zum anderen durch eine Näherung. Die Division von (8.2) durch $p_{r,2}^2$ und anschließendes Einsetzen von $p_{r,2} = p_A + \Delta p$ ergibt

$$p_A + \Delta p = p_A + b_p - a_p + \frac{1}{1 + \frac{\Delta p}{p_A}} \left((a_p - b_p) \frac{V_{r,1}}{V_{1,1} + V_{r,1}} + a_p \right) - a_p \frac{1}{1 + 2 \frac{\Delta p}{p_A} + \frac{\Delta p^2}{p_A^2}} \frac{V_{r,1}}{V_{1,1} + V_{r,1}}.$$

Aufgrund sehr kleiner Druckänderungen $\Delta p \ll p_A$ gilt $\frac{\Delta p^2}{p_A^2} \approx 0$ und mit $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ für $x \ll 1$ [36] gilt $\frac{1}{1 + \frac{\Delta p}{p_A}} \approx 1 - \frac{\Delta p}{p_A}$ bzw. $\frac{1}{1 + 2 \frac{\Delta p}{p_A}} \approx 1 - 2 \frac{\Delta p}{p_A}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \Delta p &= b_p - a_p + \left(1 - \frac{\Delta p}{p_A}\right) \left((a_p - b_p) \frac{V_{r,1}}{V_{1,1} + V_{r,1}} + a_p \right) - a_p \left(1 - 2 \frac{\Delta p}{p_A}\right) \frac{V_{r,1}}{V_{1,1} + V_{r,1}} \\ &= b_p \left(1 - \frac{V_{r,1}}{V_{1,1} + V_{r,1}}\right) + \frac{\Delta p}{p_A} \left((a_p + b_p) \frac{V_{r,1}}{V_{1,1} + V_{r,1}} - a_p \right) \\ &= \frac{b_p V_{1,1}}{V_{1,1} + V_{r,1}} + \frac{\Delta p}{p_A} \frac{b_p V_{r,1} - a_p V_{1,1}}{V_{1,1} + V_{r,1}} = \frac{b_p}{1 + \frac{a_p}{p_A} + \left(1 - \frac{b_p}{p_A}\right) \frac{V_{r,1}}{V_{1,1}}}. \end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich mit Einsetzen der Größen a_p , b_p die aus der Höhenänderung Δh des linken PMMA-Zylinders folgende Druckänderung zu

$$\Delta p = \frac{\rho_w g}{1 + \frac{V_{r,1}}{V_{1,1}} \left(1 - \frac{\rho_w g \Delta h}{p_A}\right) + \frac{\rho_w g V_{r,1}}{p_A A_r} \left(1 + \frac{A_r}{A_l}\right)} \Delta h. \quad (8.3)$$

Die nichtlineare Gleichung (8.3) lässt erkennen, dass die Druckänderung stark von dem Verhältnis der Volumina im Zustand 1 $\frac{V_{r,1}}{V_{l,1}}$ abhängt und bei Bedarf dadurch zu reduzieren bzw. unter Vernachlässigung des dritten Summanden im Nenner und mit $V_{r,1} \ll V_{l,1}$ auf den bekannten Wert $\rho_w g \Delta h$ zu maximieren ist.

Die zur Berechnung nötigen geometrischen Daten des Druckmodulators wurden erfasst. Dazu sind die Innendurchmesser der PMMA-Zylinder und der verwendeten Druckschläuche sowie die Höhe des Gas/Luft-Volumens der PMMA-Zylinder und die Länge der Druckschläuche vermessen worden. Weitere nötige Gas/Luft-Gefäße wurden zur genauen Volumenbestimmung mittels Wasser ausgelitert. Es wurden die folgenden geometrischen Daten für den Messaufbau des Druckmodulators bestimmt:

A_l	A_r	Δh_{\min}	Δh_{\max}
$452 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$	$452 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$	$0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$450 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
V_l	V_r	Δp_{\min}	Δp_{\max}
$298 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$	$82,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$	$0,76 \text{ Pa}$	3430 Pa

Tabelle 8.1: Daten des verwendeten Druckmodulators

Der Verfahrweg des schrittmotorangetriebenen Linear-Spindeltisches wurde bei kleinen Verfahrwegen mittels einer Messuhr und bei größeren Verfahrwegen mittels eines Stahllineals kontrolliert. Die der Schrittmotorsteuerung vorgegebenen Verfahrswege stimmten mit den gemessenen Verfahrwegen überein.

Der Nachweis der Funktionalität des Druckmodulators ist, durch den in **Abbildung 8.3** gezeigten Druckänderungsverlauf, gegeben. Der Druck des Druckmodulators wurde mit einem kommerziellen, als Referenzdruck dienenden Drucksensor vom Typ *DRTR-AL-10V-R10B* der Firma *HYGROSENS Instruments* erfasst. Der Referenzdruck-Sensor verfügt über einen Messbereich von 0 – 1 MPa Differenzdruck gegen Atmosphäre und eine Messgenauigkeit von $\pm 0,2\%$ vom Messbereichsendwert. Die Messung erfolgte mit einem Arbeitsdruck von $p_A \approx 2 \cdot 10^5$ Pa Differenzdruck gegen Atmosphäre, wobei aufgrund von Undichtigkeiten im Messaufbau ein gewisser Druckabfall auftrat. Der gesamte Messaufbau wies einen Druckabfall von ca. $34 \frac{\text{Pa}}{\text{min}}$ auf, der in der gezeigten Abbildung 8.3 durch eine lineare Funktion korrigiert ist. Zudem wurde gegenüber der Ausgangssituation der Arbeitsdruck p_A abgezogen. Damit zeigt Abbildung 8.3 lediglich die mittels des Druckmodulators erzeugten Druckänderungen. Es ist zu erkennen, dass die mittels des Referenzdruck-Sensors gemessenen Druckänderungen im Gesamtverlauf mit den durch (8.3) berechneten Druckänderungen sehr gut übereinstimmen. Der Referenzdruck-Sensor erlaubt die Auflösung der durch den Druckmodulator erzeugten Druckänderungsstufen von ca. 380 Pa nicht mehr. Seine Auflösung ist auf ca. 500 Pa begrenzt, woraus das grobe Messsignal des Referenzdruck-Sensors resultiert. Der zur Digitalisierung des Referenzdruck-Signals verwendete ADU erlaubt eine wesentlich höhere Auflösung und ist an dieser Stelle als begrenzendes Glied auszuschließen.

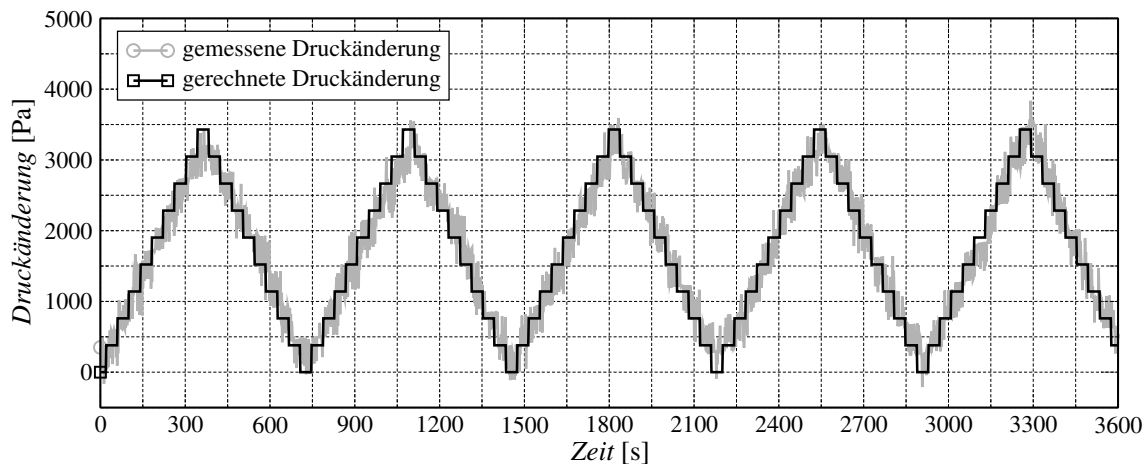


Abbildung 8.3: Gemessener und gerechneter Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A zum Nachweis der Funktionalität des Druckmodulators

- Mittels Referenzdruck-Sensor gemessenen Druckänderungen
- Nach (8.3) berechnete Druckänderungen

8.2 Messergebnisse

8.2.1 Lang- und Kurzzeitstabilität der Sensor-Prototypen

Temperaturabhängiges Driftverhalten und Alterungserscheinungen bestimmen die Langzeitstabilität der Schwingfrequenz. Diese ist relativ einfach durch lange Messzeiten zu erfassen, wobei sich hier Langzeit auf mehrere Stunden beschränkt. Anders sieht es bei der Kurzzeitstabilität aus. Um vergleichbare Aussagen treffen zu können, hat sich zur Angabe der Kurzzeitstabilität die sogenannte Allan-Varianz etabliert [45, 46, 90, 91]. Sie wird durch aufeinanderfolgende, totzeitlose Frequenzmessungen in Abhängigkeit von der Messzeit T_a und der Anzahl der Messwerte m bestimmt.

$$\sigma_y^2(T_a, m) = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} (y_i - y_{i-1})^2 \quad \text{mit} \quad y_i = \frac{f_i - f_{\text{ref}}}{f_{\text{ref}}}$$

Bei sehr kurzen Messzeiten $T_a < 100$ ms und entsprechend hoher Frequenzstabilität des Oszillators ist das Schwebungsfrequenzmessverfahren unumgänglich, da die nötige Messgenauigkeit anders nicht erreichbar ist.

Um eine Aussage über die Frequenzstabilität zu erhalten, werden die Sensor-Prototypen im unbelasteten Zustand betrieben. Sowohl die Messung der Langzeitstabilität als auch der Kurzzeitstabilität mittels Allan-Varianz wird mit beiden Aufbauten durchgeführt. Die Messung der Kurzzeitstabilität des CDUs erfolgt ebenfalls mit Hilfe der Allan-Varianz, wobei $y_i = \frac{C_i - C_{\text{ref}}}{C_{\text{ref}}}$ zur Berechnung verwendet wird.

Die gemessene Kurzzeitstabilität des Sensors in Form der Allan-Varianz $\sigma_y(T_a, m)$, zeigt **Abbildung 8.4**. Dargestellt sind die Mittelwerte von jeweils sechs durchgeführten Messungen der Allan-Varianz, in Abhängigkeit von der Messzeit T_a bei $m = 50$. Die Messung der Kurzzeitstabilität der Oszillatoren erfolgte mittels des Schwebungsfrequenzmessverfahrens, wobei das Signal zur Mischung von einem Funktionsgenerator vom Typ *HM8130* der Firma *Hameg* erzeugt wurde. Aus diesem Grund ist zusätzlich die Kurzzeitstabilität des Generators dargestellt, die, wiederum mittels der Schwebungsfrequenzmessung mit einem zweiten, baugleichen Funktionsgenerator, gemessen wurde.

Die Kurzzeitstabilität des Aufbaus 1, beschrieben durch die Allan-Varianz, wird für beide Oszillatoren getrennt betrachtet. Im unbelasteten Zustand des Sensors weist der Kondensator des Oszillators 1 einen wesentlich größeren Elektrodenabstand, als der des Oszillators 2, auf. Aufgrund der daraus resultierenden, geringeren Kapazität, ist die Schwingfrequenz des Oszillators 1 wesentlich höher, als die Schwingfrequenz des Oszillators 2. Der geringe Elektrodenabstand des Kondensators von Oszillator 2, weist aus diesem eine sehr hohe Empfindlichkeit bezüglich der Elektrodenauslenkung, auf. Dies ist deutlich im Verlauf der Allan-Varianz des Oszillators 2 zu erkennen. Sie weist Werte auf, die fast um eine Größenordnung höher sind, als die des Oszillators 1 ($T_a > 0,5$ s). Im Bereich 75 ms $< T_a < 0,7$ s weist die Allan-Varianz des Oszillators 1 etwas höhere Werte auf, als der in Kapitel 6.2 abgeschätzte Wert

des relativen Phasenrauschens von $1,1 \cdot 10^{-8}$. Für Messzeiten $T_a > 0,7$ s macht sich bereits das Driftverhalten des Sensors bemerkbar.

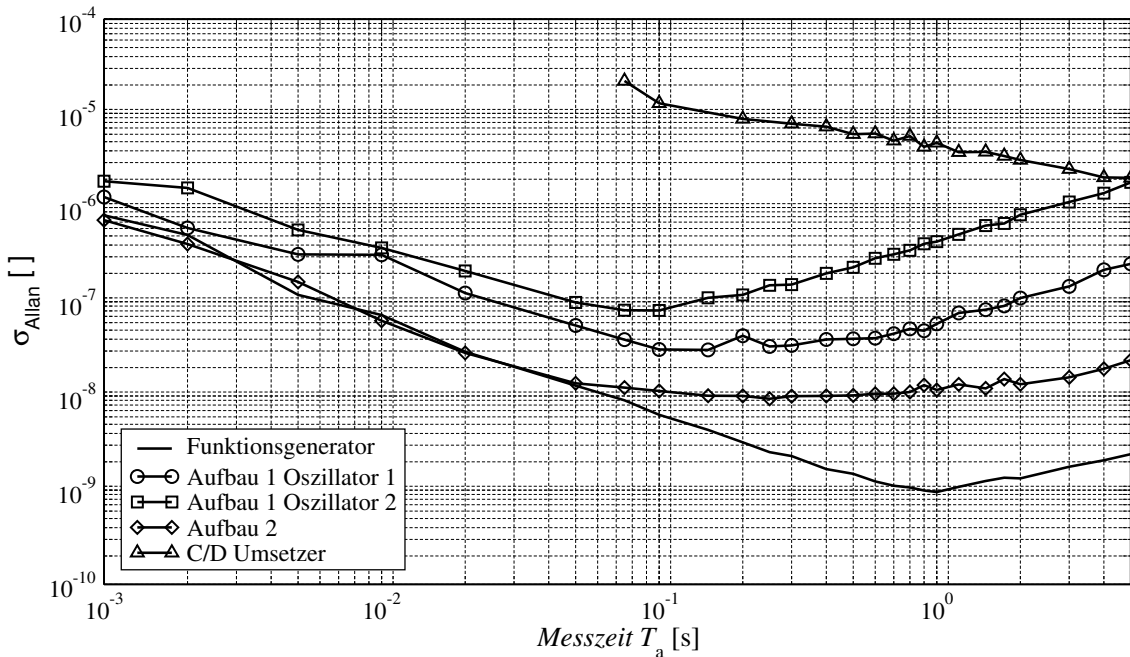


Abbildung 8.4: Gemessene Allan-Varianz bei $m = 50$ in Abhängigkeit der Messzeit T_a (Mittelwerte von je sechs Messungen der Allan-Varianz)

Die Werte der Allan-Varianz des Aufbaus 2 im Bereich $50 \text{ ms} < T_a < 2 \text{ s}$, liegen in der Größenordnung der abgeschätzten Werte des Phasenrauschens von $1,1 \cdot 10^{-8}$. Der Bereich $T_a < 50 \text{ ms}$ wird durch das Phasenrauschen des Funktionsgenerators limitiert und ist deshalb nur begrenzt aussagefähig, während das Driftverhalten des Aufbaus 2 erst bei Messzeiten $T_a > 2 \text{ s}$ ins Gewicht fällt.

Zuletzt ist die gemessene Kurzzeitstabilität des CDUs in Abbildung 8.4 dargestellt. Sie weist die höchsten Werte auf, die sogar eine Größenordnung schlechter sind als die des sehr empfindlichen Oszillators 2 aus Aufbau 1. Zum Vergleich der Kurzzeitstabilität des CDUs mit den Oszillatoren sind die Messwerte für $T_a > 0,1 \text{ s}$ als Mittelwerte, aus der sich jeweils ergebenden Anzahl von Messwerten, berechnet worden.

Die gemessene Langzeitstabilität des Sensors ist in **Abbildung 8.5**, in Form einer relativen Abweichung, dargestellt. Zur besseren Vergleichbarkeit werden nicht die gemessenen Größen, also die Schwingfrequenz bzw. die Kapazität, sondern, die aus den Messwerten ermittelten Auslenkungen der Plattenmitte, miteinander verglichen.

Die relative Abweichung der Auslenkung der Plattenmitte wurde für diese Abbildung durch

$$\Delta w_{0,\text{relativ}} = \frac{w_0 - \bar{w}_0}{\Delta w_{0,\text{max}}}$$

als Differenz der aktuellen Plattenauslenkung (Plattenmitte) und des Mittelwerts des gesamten zeitlichen Verlaufs, bezogen auf die zu erwartende maximale Auslenkung der Plattenmitte, berechnet.

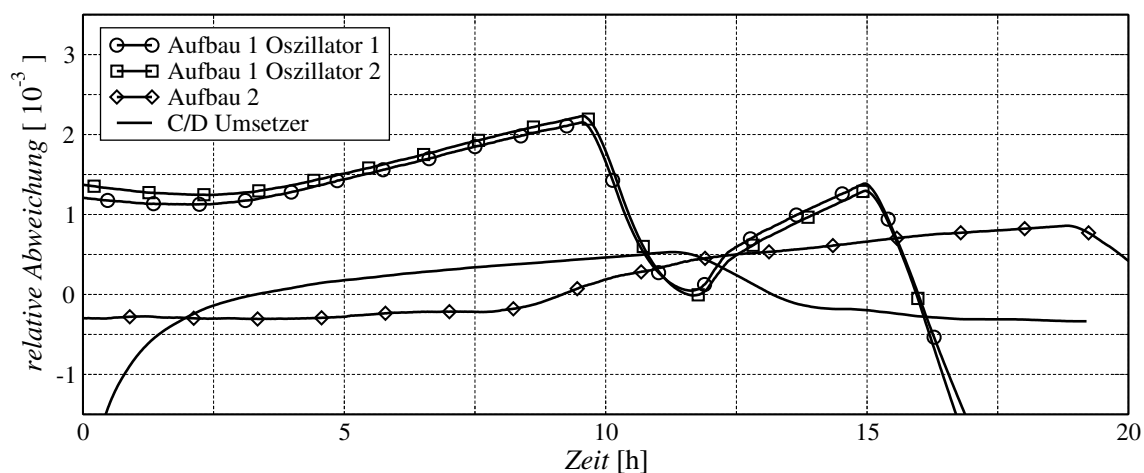


Abbildung 8.5: Gemessene Langzeitstabilität in Form einer relativen Abweichung der Auslenkung der Plattenmitte

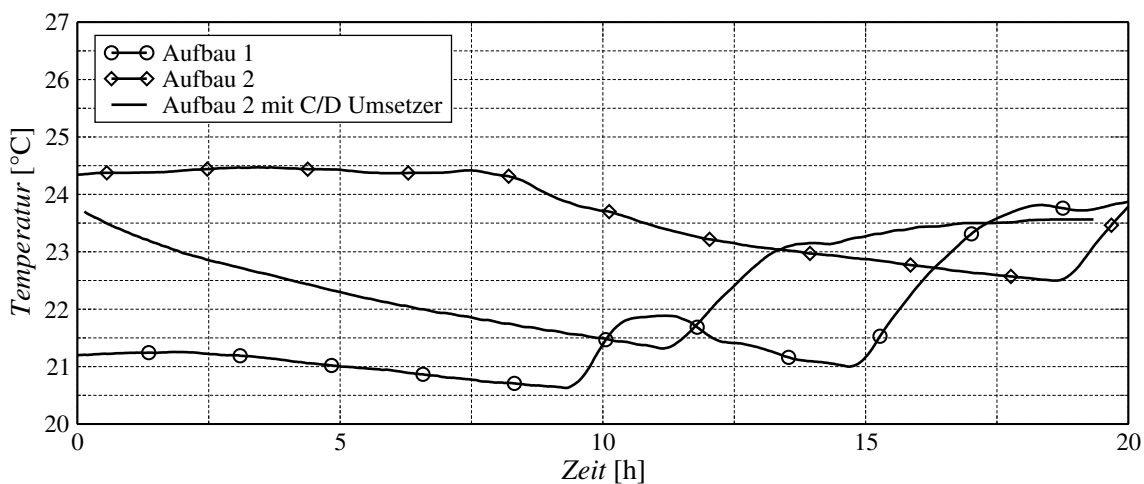


Abbildung 8.6: Gemessene Temperatur (Mittelwerte aus je 32 Messwerten)

Das Verhalten der einzelnen Verläufe ist direkt mit der gemessenen Temperatur korreliert, wie der Vergleich der relativen Abweichungen der Abbildung 8.5 mit den Temperaturverläufen der **Abbildung 8.6** zeigt. Die Temperaturschwankungen, die zu den dargestellten Abweichungen führen, liegen im Bereich von $0 \dots 3,5$ K.

Die Langzeitstabilität des Aufbaus 1 ist getrennt in den Verläufen des Oszillators 1 und des Oszillators 2 abgebildet. Erwartungsgemäß ist die relative Abweichung des Aufbaus 1, bedingt durch dessen höhere Temperaturabhängigkeit (Kapitel 5.3), höher als die des Aufbaus 2.

Die relative Abweichung des Aufbaus 2 liegt sowohl mit der Auswertung mittels Oszillator als auch mit dem CDU (unter Vernachlässigung der ersten 2 Stunden) bei ca. $6 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{K}}$, während der Aufbau 1, etwa doppelt so hohe Werte aufweist.

Die in Kapitel 5.3 aufgezeigte Temperaturabhängigkeit des Aufbaus 1 ist halb so groß, wie die gemessene. Auch die Temperaturabhängigkeit des Aufbaus 2, weist höhere Werte auf als sie von der thermischen Ausdehnung ($\approx 10 \dots 20 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$) zu erwarten sind. Demnach leistet die Temperaturabhängigkeit der elektronischen Schaltung einen erheblichen Beitrag zur Gesamttemperaturabhängigkeit des Sensors, die beispielsweise durch eine zusätzliche Temperaturmessung im Sensor kompensiert werden kann.

8.2.2 Druckverhalten der Sensor-Prototypen

Nachfolgend sind die Messergebnisse der Sensor-Prototypen aufgezeigt. Sie sind unterteilt in den Aufbau 1 und den Aufbau 2 inklusive CDU. Es werden jeweils die Auslenkungen der Plattenmitte bei Aufprägung einer dreieckförmigen Druckbelastung von $0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \dots 8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ Differenzdruck gegen Atmosphäre und zwei Druckverläufe mit sehr geringen eingepprägten Druckänderungen dargestellt. Die geringen Druckänderungen werden bei einem Arbeitsdruck von $2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ Differenzdruck gegen Atmosphäre mit Hilfe des Druckmodulators erzeugt. Zum einen weisen die aufmodulierten Druckänderungen einen größeren Druckverlauf von $0 < \Delta p < 1000 \text{ Pa}$ in 100 Pa Schritten auf und zum anderen weisen sie sehr geringe Änderungen von $\Delta p \approx 3 \text{ Pa}$ auf.

Aufbau 1

Die Beaufschlagung des Sensors mit einer dreieckförmigen Druckbelastung führt zu den in **Abbildung 8.7** gezeigten Auslenkungen der Plattenmitte. Sie wurden aus den gemessenen Frequenzen der Oszillatoren 1 und 2 errechnet und stimmen, mit Anpassung der in Kapitel 6.5.2 beschriebenen Streukapazität, sehr gut mit der mittels eines kommerziellen, induktiven Wegaufnehmers gemessenen Auslenkung überein. Der induktive Wegaufnehmer vom Typ *W10N* der Firma *Hottinger Baldwin Messtechnik (HBM)* dient hier als Referenzmessgröße für die Auslenkung der Plattenmitte. Zur Auswertung des induktiven Wegaufnehmers diente der Trägerfrequenz-Messverstärker vom Typ *KWS 3082 & AI 3401* der Firma *HBM*.

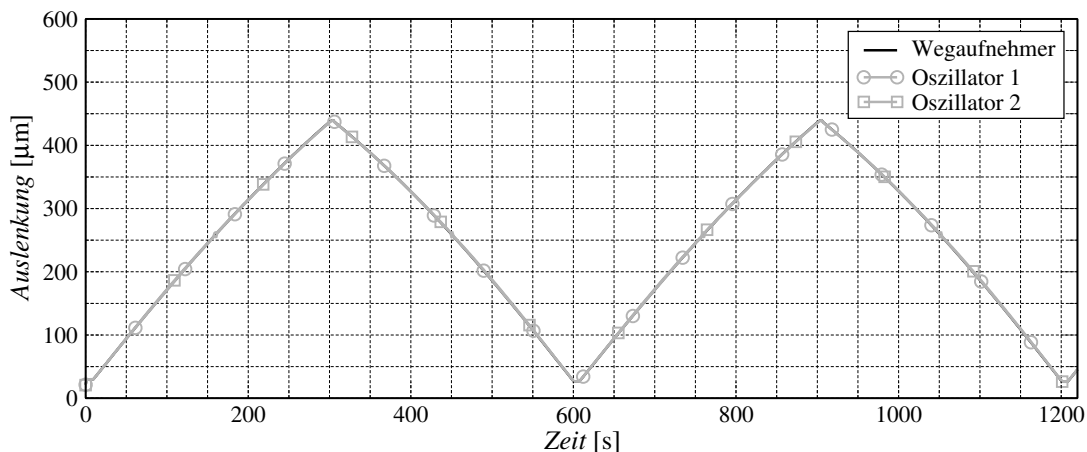


Abbildung 8.7: Mittels eines induktiven Wegaufnehmers gemessene und aus den gemessenen Frequenzen der Oszillatoren 1 und 2 berechnete Auslenkung der Plattenmitte bei Aufprägung einer dreieckförmigen Druckbelastung, Aufbau 1

Eine Beziehung zwischen eingepprägtem Druck und Auslenkung der Plattenmitte, wie sie in Kapitel 5.2.2 aufgezeigt ist, stellt **Abbildung 8.8** dar. Der durch (5.52)

beschriebene Verlauf der Auslenkung der Plattenmitte in Abhängigkeit vom aufgeprägten Differenzdruck gegen Atmosphäre ist ebenfalls dargestellt. Abgesehen von der angepassten Drehfedersteifigkeit von $c_D = 8000 \text{ N}$, sind für den Verlauf nach der Plattentheorie, die Plattendaten des Kapitels 5.2.2 verwendet worden. Auch hier stimmt der gemessene Verlauf gut mit dem der Plattentheorie überein.

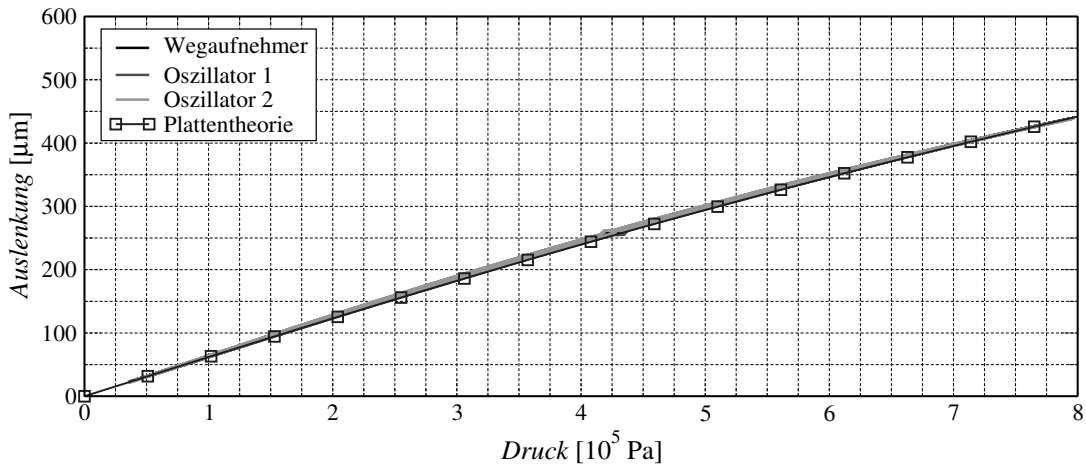


Abbildung 8.8: Auslenkung der Plattenmitte in Abhängigkeit vom Differenzdruck gegen Atmosphäre, Aufbau 1

In den gemessenen Verläufen der beiden Oszillatoren, ist in dem Bereich von ca. $4,1 \cdot 10^5 \text{ Pa} - 4,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ Differenzdruck gegen Atmosphäre eine Abweichung vom Verlauf zu erkennen. Dieser Bereich ist gesondert für die aus der Frequenz des Oszillators 1 berechnete und die sich aus der Plattentheorie ergebende Auslenkung der Plattenmitte in **Abbildung 8.9** dargestellt. Diese Abweichung ist dadurch bedingt, dass die Oszillatoren in diesem Bereich eine ähnliche Frequenz aufweisen. Liegen die Frequenzen der Oszillatoren sehr nah beieinander, rasten diese aufeinander ein und stellen zwei gekoppelte Oszillatoren dar. Der Aufbau 1 ist damit für den Bereich von ca. $4,1 \cdot 10^5 \text{ Pa} - 4,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ Differenzdruck gegen Atmosphäre nicht geeignet.

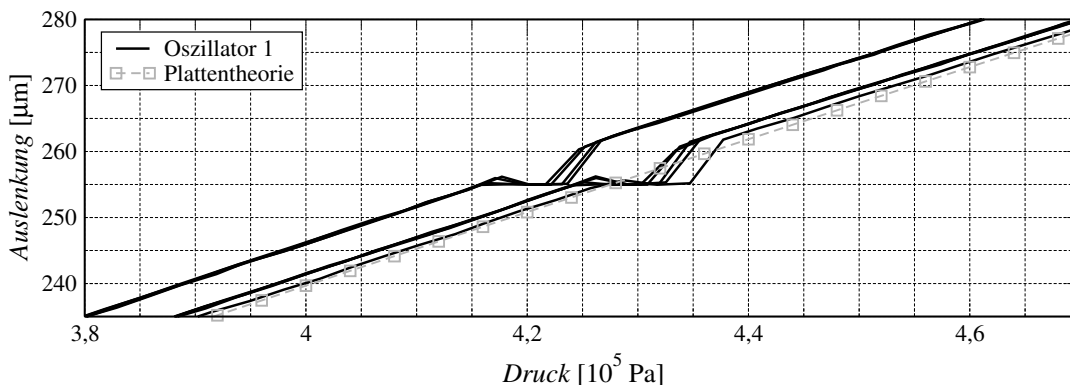


Abbildung 8.9: Auslenkung der Plattenmitte in Abhängigkeit vom Differenzdruck gegen Atmosphäre, Aufbau 1

Die mittels des Druckmodulators aufgeprägten, geringen Druckänderungen sind nachfolgend, mit einer linearen Korrektur des Druckabfalls des Messsystems, dargestellt. **Abbildung 8.10** zeigt einen Druckänderungsverlauf bei aufgeprägten Druckänderungsstufen von ca. 100 Pa. Abgebildet sind die errechneten Druckänderungen aus dem Verfahrensweg Δh des Druckmodulators. Zudem sind die aus den gemessenen Frequenzen der Oszillatoren 1 und 2 resultierenden Druckänderungen dargestellt, die gut mit dem errechneten Druckänderungsverlauf übereinstimmen.

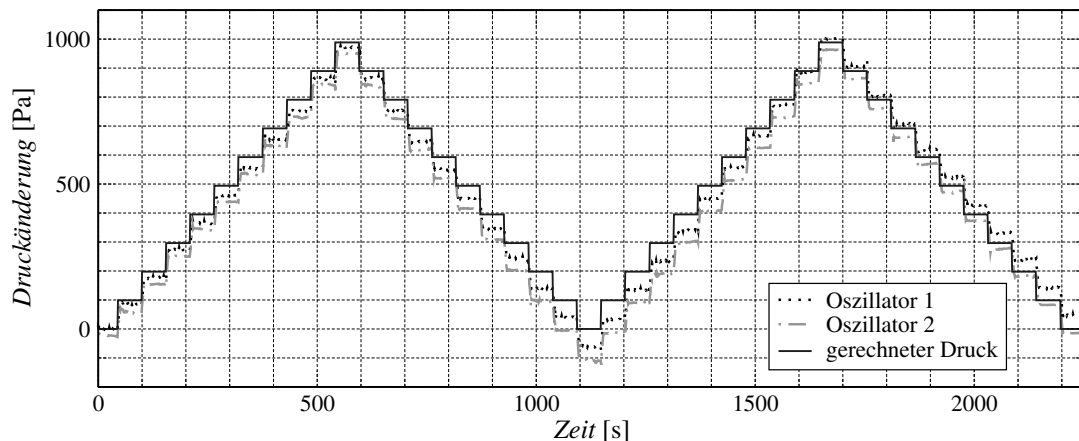


Abbildung 8.10: Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 100 Pa, Aufbau 1

Einen Ausschnitt dieses Druckänderungsverlaufs zeigt die **Abbildung 8.11** als Auslenkung der Plattenmitte. Der Nullpunkt der Auslenkung bezieht sich dabei auf den Beginn der Messung. Die Schwingungen, die bei 265 s und 270 s zu erkennen sind, resultieren aus dem ruckartigen Anfahren und Abbremsen des PMMA-Zylinders des Druckmodulators durch den Linear-Spindeltrieb. Das Wasser bildet mit dem sich darüber befindenden Gas/Luft-Volumen ein Masse-Feder-System. Dieses wird durch das Anfahren bzw. Abbremsen zu Schwingungen angeregt, die aufgrund der geringen Viskosität von Wasser nur langsam abklingen.

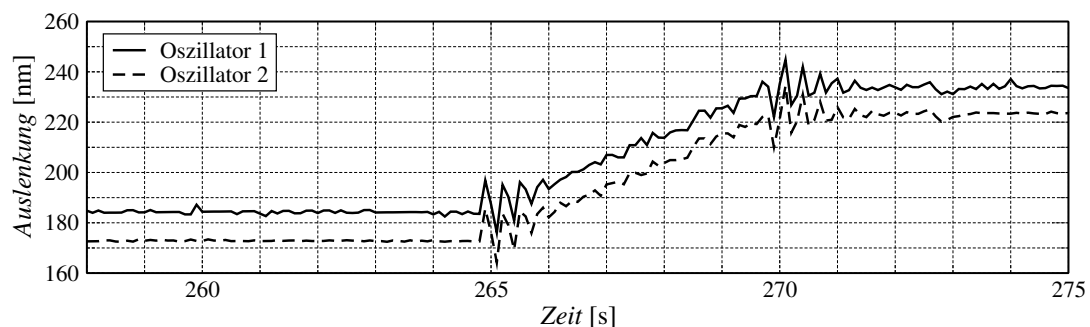


Abbildung 8.11: Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 100 Pa: Ausschnitt, Aufbau 1

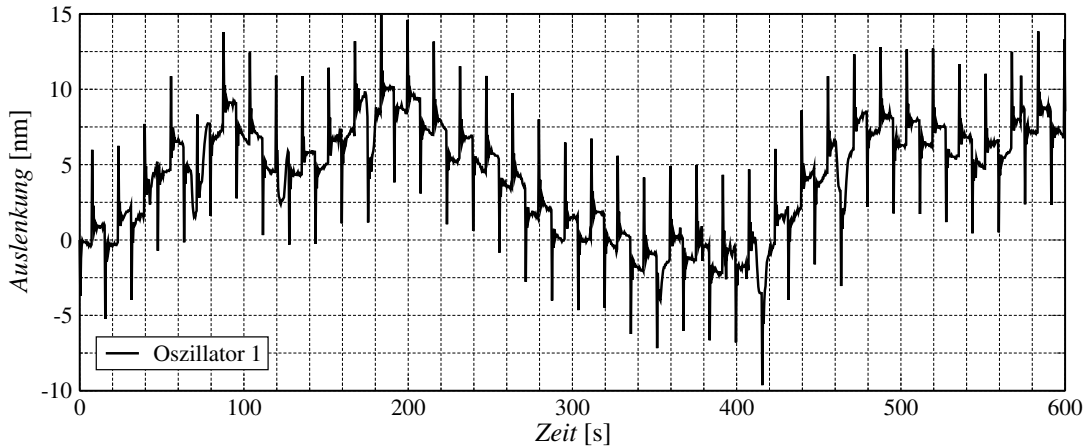


Abbildung 8.12: Auslenkung der Plattenmitte bei aufgeprägten Druckstufen von ca. 3 Pa, Aufbau 1

Die mit dem Messaufbau sinnvoll noch realisierbaren, feinsten Druckänderungen sind in **Abbildung 8.12** dargestellt. Die mittels des Druckmodulators erzeugten Stufen der Druckänderungen betragen ca. 3 Pa, wofür der PMMA-Zylinder um die Höhe $\Delta h = 0,4$ mm verfahren wurde. Die Auslenkung der Plattenmitte wurde für diese Abbildung mit dem Beginn der Messung zu null gesetzt. Im Mittel weist der gezeigte Verlauf langsam verlaufende Schwankungen auf, die höher als die erzeugten Stufen der Druckänderung sind. Die Stufen der Druckänderung sind jeweils durch zwei impulsförmige Ausschläge zu erkennen. Aus den Messungen der Langzeitstabilität sind temperaturbedingte Schwankungen, die auf den Sensor zurückzuführen sind, bei einer vergleichsweise konstanten Temperatur während der Messung ($\Delta T < 1$ K) in dieser Größenordnung nicht zu erwarten. Aus diesem Grund sind die langsamen Schwankungen im Verlauf auf Temperaturänderungen des Messaufbaus (Druckmodulator) zurückzuführen.

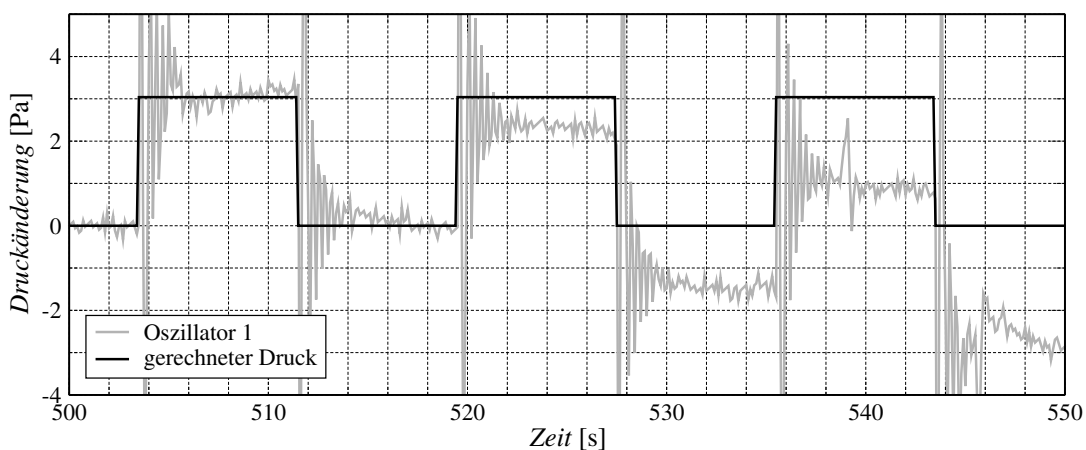


Abbildung 8.13: Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 3 Pa: Ausschnitt, Aufbau 1

Ein Ausschnitt, der die aus der gemessenen Frequenz des Oszillators 1 resultierenden Druckänderungen und die errechneten Druckänderungen aus dem Verfahrensweg Δh des Druckmodulators zeigt, ist in **Abbildung 8.13** dargestellt. Zur besseren Darstellung ist der Druckänderungsverlauf am Anfang des Ausschnitts zu null gesetzt. In **Abbildung 8.13** ist zu erkennen, dass die errechneten Druckänderungen gut mit den gemessenen Druckänderungen übereinstimmen. Druckauschläge, wie der bei ca. 539 s, sind auf Änderungen des Atmosphärendrucks, in Form einer Druckwelle, zurückzuführen. Sie können beispielsweise durch das Öffnen von Türen oder Windböen entstehen.

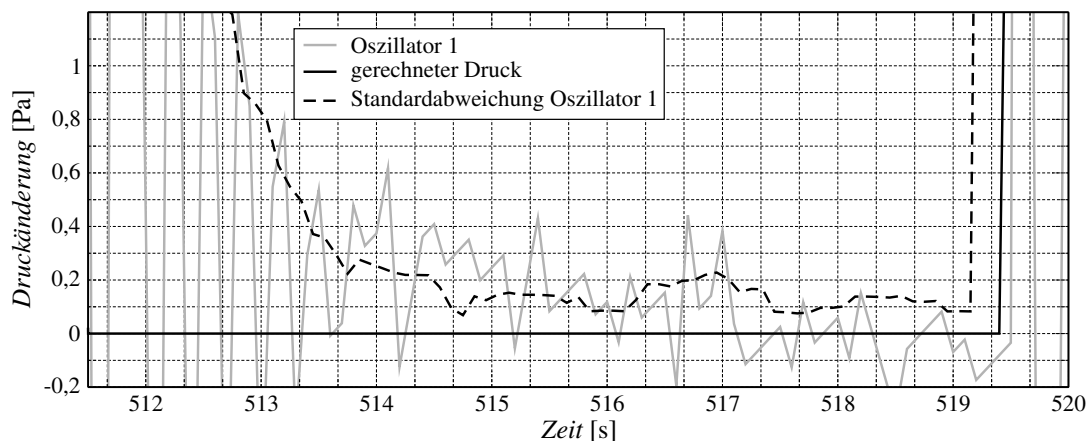


Abbildung 8.14: Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 3 Pa, Aufbau 1
Ausschnitt zur Beurteilung des Sensorauflösevermögens

Zur Beurteilung des Auflösungsvermögens des Sensors ist in **Abbildung 8.14** ein kürzerer Ausschnitt vergrößert dargestellt. Darin ist zusätzlich die Standardabweichung über acht Messwerte der resultierenden Druckänderungen des Oszillators 1 abgebildet. Bei der hier verwendeten Messzeit von 50 ms ist am Verlauf der Standardabweichung zu erkennen, dass der Sensor eine Auflösung von ca. 0,2 Pa erreicht. Dies gilt für den gesamten Verlauf, der in **Abbildung 8.12** dargestellt ist. Die gemessene Allan-Varianz, die in **Abbildung 8.4** dargestellt ist, erlaubt die Aussage, dass diese hohe Auflösung auch bei längeren Messzeiten zu erwarten ist.

Aufbau 2

Entsprechend den Messergebnissen des Aufbaus 1, sind nachfolgend die ermittelten Messergebnisse des Aufbaus 2 dargestellt. Das Aufprägen einer dreieckförmigen Druckbelastung führt zu den in **Abbildung 8.15** gezeigten Verläufen der Auslenkung der Plattenmitte. Sie wurden aus der gemessenen Frequenz des Oszillators und den Werten des CDUs errechnet. Mit der Anpassung der in Kapitel 6.5.2 beschriebenen Streukapazität stimmen die Verläufe der Auslenkung, mit der mittels des induktiven Wegaufnehmers, der zum Testen des Aufbaus 1 verwendet wurde, gemessenen Auslenkung überein.

Bedingt durch den Aufbau, der eine Klemmung der Platte, eines Distanzrings und der Platine mit Messelektrode vorsieht (Abbildung 6.32, Seite 97), ist eine Korrektur der Messergebnisse vorzunehmen. Die Verformung der Platte führt aufgrund des entstehenden Moments am Plattenrand dazu, dass auch die Platine mit Messelektrode eine druckabhängige Verformung aufweist. Diese wurde ebenfalls mit dem induktiven Wegaufnehmer gemessen und liegt bei ca. 9% der Plattenauslenkung. Die Verformung der Messelektrode ist mit der Gleichung (C.25), zur Bestimmung der Kapazität in Abhängigkeit von der Auslenkung der Plattenmitte, zu berücksichtigen. Der Unterschied in den Verläufen zu dem mittels des induktiven Wegaufnehmers gemessenen Verlauf ist auf die Messungenauigkeit des Wegaufnehmers in diesem Aufbau zurückzuführen. Eine Fehlstellung des wegnehmenden Stabs des induktiven Wegaufnehmers ist hierfür verantwortlich.

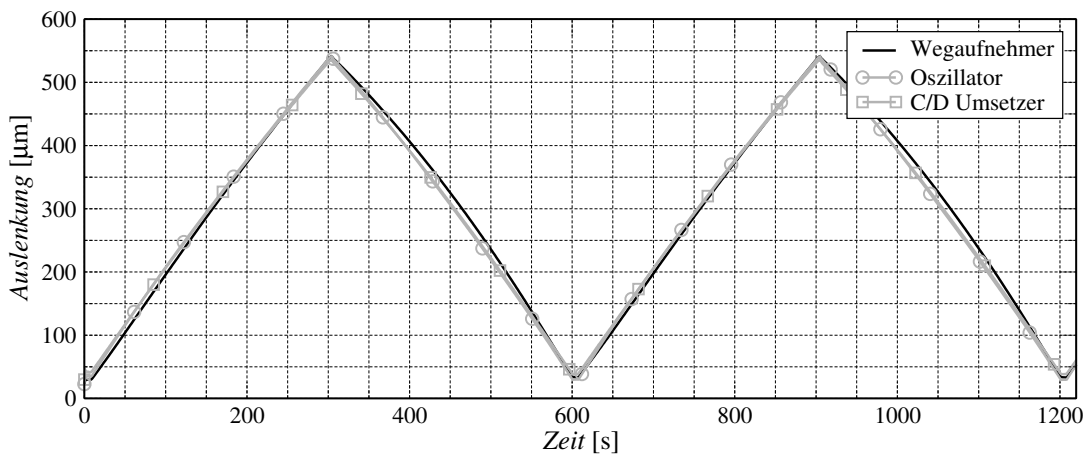


Abbildung 8.15: Mittels eines induktiven Wegaufnehmers gemessene, aus der gemessenen Frequenz des Oszillators und den Werten des CDUs berechnete Auslenkung der Plattenmitte bei Aufprägung einer dreieckförmigen Druckbelastung, Aufbau 2

Dieses Verhalten des Wegaufnehmers führt zu einer ausgeprägten, scheinbaren Hysterese, die in **Abbildung 8.16** zu erkennen ist. Zum Vergleich ist auch hier der aus der Plattentheorie resultierende Verlauf dargestellt. Die Klemmung lässt erwarten, dass die Drehfedersteifigkeit wesentlich geringer ist, als im Aufbau 1, in dem die

druckaufnehmende Platte von einer Aluminiumplatte geklemmt wird. Mit den sonst identischen Daten der Platte resultiert der gezeigte Verlauf nach der Plattentheorie mit einer angepassten Drehfedersteifigkeit von $c_D = 3000 \text{ N}$. Die Messergebnisse des Oszillators und CDUs stimmen bis zu einem Differenzdruck gegen Atmosphäre von $p < 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ gut mit der Plattentheorie überein. Für höhere Drücke führt die Klemmung zu einem Verlauf, der nicht mehr mit der betrachteten Plattentheorie übereinstimmt.

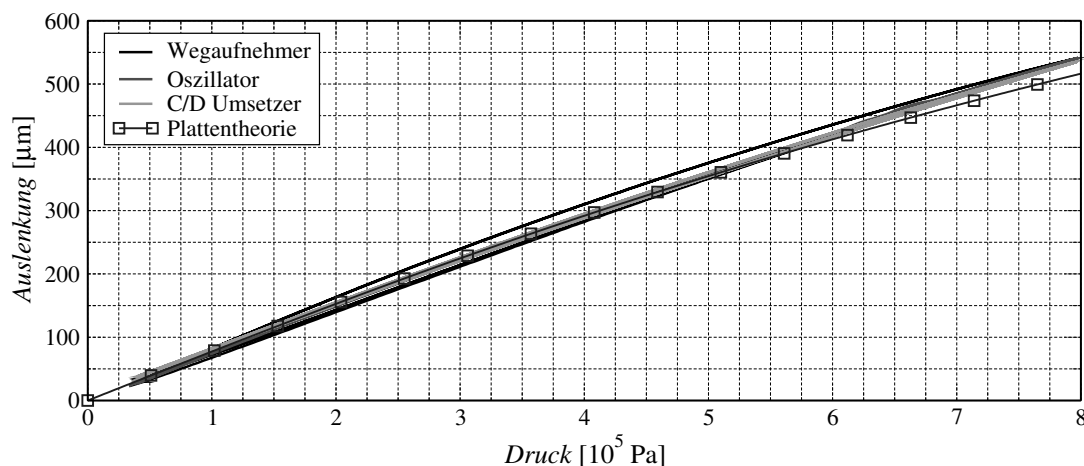


Abbildung 8.16: Auslenkung der Plattenmitte in Abhängigkeit vom Differenzdruck gegen Atmosphäre, Aufbau 2

Die nachfolgenden, mittels des Druckmodulators aufgeprägten Druckänderungen, sind ebenfalls mit einer linearen Korrektur des Druckabfalls des Messsystems, dargestellt. **Abbildung 8.17** zeigt den Druckänderungsverlauf bei aufgeprägten Druckänderungsstufen von ca. 100 Pa.

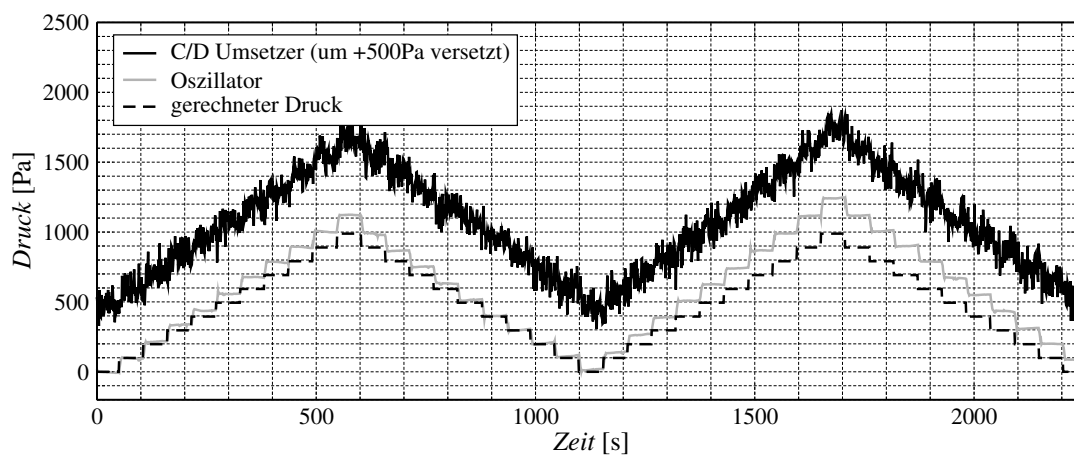


Abbildung 8.17: Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 100 Pa, Aufbau2

Dargestellt sind die Messergebnisse des Oszillators und des CDUs, wobei der Verlauf des CDUs aus Darstellungsgründen um 500 Pa angehoben ist. Zudem ist der aus dem Verfahrenweg des PMMA-Zylinders resultierende, berechnete Druckänderungsverlauf dargestellt. Der CDU folgt dem groben Druckänderungsverlauf. Allerdings ist deutlich zu erkennen, dass das Auflösungsvermögen des CDUs hier nicht mehr zur Auflösung der aufgeprägten Druckänderungsstufen von ca. 100 Pa ausreicht.

Die feinsten, realisierten Druckänderungen des Aufbaus 2 sind in **Abbildung 8.18** dargestellt. Der gezeigte Verlauf weist ebenfalls langsam verlaufende Schwankungen auf, die höher als die erzeugten Stufen der Druckänderung sind. Wie bei Aufbau 1, so werden auch hier diese Schwankungen auf langsame Temperaturänderungen des Messaufbaus (Druckmodulator) zurückgeführt.

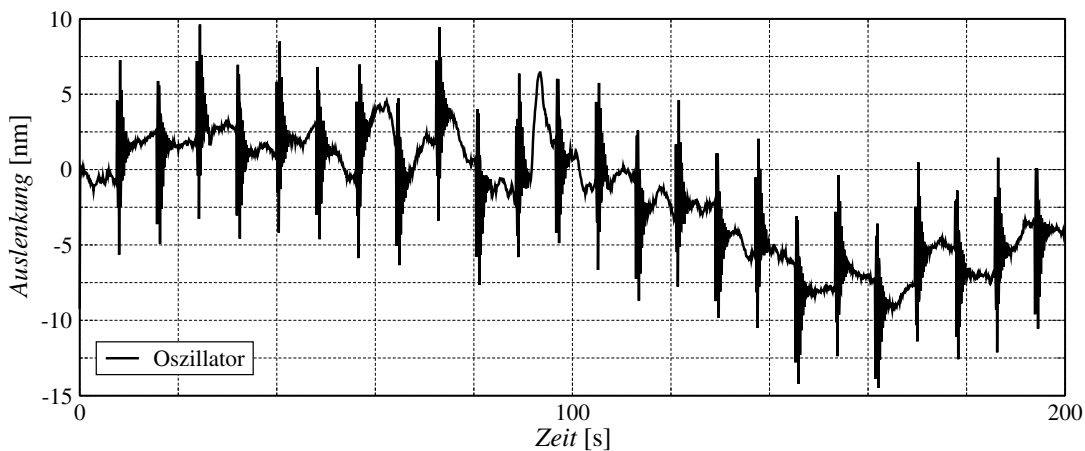


Abbildung 8.18: Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufgeprägten Druckstufen von ca. 3 Pa, Aufbau 2

Ein Ausschnitt, der die gemessenen Druckänderungen und die aus dem Verfahrenweg errechneten Druckänderungen zeigt, ist in **Abbildung 8.19** dargestellt. Auch hier ist zur besseren Darstellung der Druckänderungsverlauf am Anfang des Ausschnitts zu null gesetzt. Der aus der Frequenzmessung des Oszillators berechnete Druckänderungsverlauf lässt die errechneten Druckänderungen, die mittels Druckmodulator aufgeprägt wurden, erkennen. Zur Beurteilung des Auflösungsvermögens des Sensors ist in **Abbildung 8.20** ein kürzerer Ausschnitt vergrößert dargestellt. Darin ist zusätzlich die Standardabweichung über acht Messwerte der resultierenden Druckänderungen des Oszillators abgebildet. Am Verlauf der Standardabweichung, bei der hier verwendeten Messzeit von 50 ms ist zu erkennen, dass der Sensor eine Auflösung von ca. 0,3 Pa erreicht. Auch hier ist die hohe Auflösung bei längeren Messzeiten, wie im Aufbau 1 begründet, zu erwarten. Dieser Wert der Standardabweichung gilt für die Teile des Gesamtverlaufs (Abbildung 8.18), die keine zu hohe Veränderung der Auslenkung innerhalb der Druckstufen aufweisen. Im Bereich von 56 s – 104 s ist zwar die Standardabweichung höher, da hier die Schwankungen innerhalb der (konstanten) Druckstufen zu hoch sind, allerdings ist die Auflösung dieselbe. Das

Auflösevermögen des Aufbaus 2 ist aufgrund der geringeren Empfindlichkeit gegenüber dem Aufbau 1 erwartungsgemäß geringer als die des Aufbaus 1.

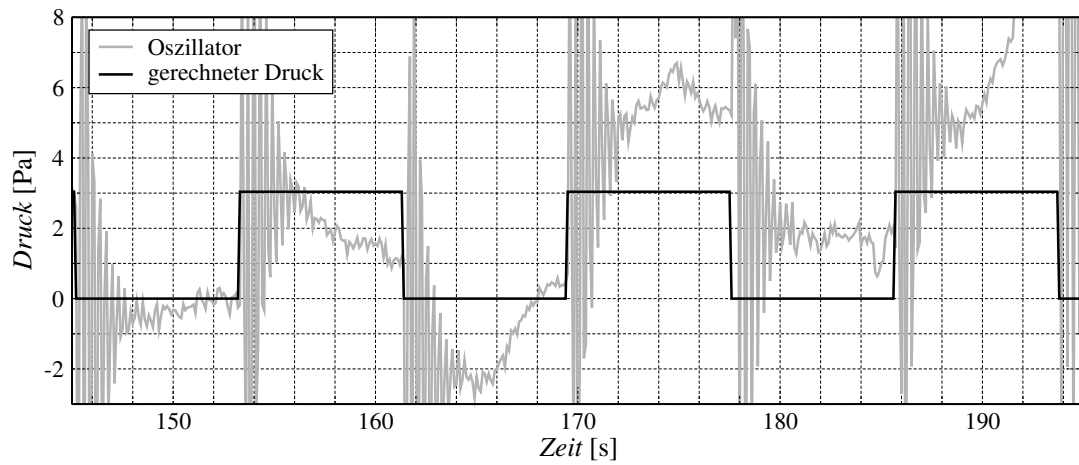


Abbildung 8.19: Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufprägten Druckstufen von ca. 3 Pa: Ausschnitt, Aufbau 2

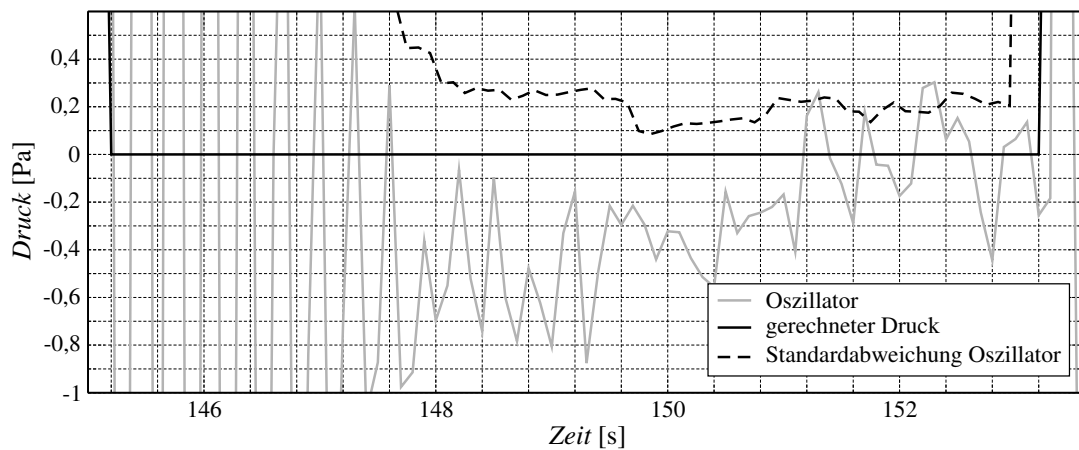


Abbildung 8.20: Druckänderungsverlauf bei abgezogenem Arbeitsdruck p_A und aufprägten Druckstufen von ca. 3 Pa, Aufbau 2. Ausschnitt zur Beurteilung des Sensorauflösevermögens

Die Steigerung der Empfindlichkeit des Aufbaus 2 durch eine angepasste Elektrode, wie sie in Abbildung 6.39, des Kapitels 6.5.2 gezeigt ist, wird in den nachfolgenden Abbildungen dargestellt. Die relative Änderung der Frequenzen bei der Aufprägung einer dreieckförmigen Druckbelastung von $0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \dots 8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ Differenzdruck gegen Atmosphäre zeigt **Abbildung 8.21**. Die darin dargestellte relative Frequenzänderung ist durch

$$\Delta f_{\text{relativ}} = \frac{f_{\text{unbelastet}} - f}{f_{\text{unbelastet}}}$$

bestimmt. Es ist zu erkennen, dass der Aufbau 1 die größte relative Frequenzänderung aufweist. Sie ist ca. doppelt so hoch, wie die des Aufbaus 2. Mit dem Einsatz einer angepassten Elektrode wird eine Steigerung der relativen Frequenzänderung um den Faktor 1,6 erreicht.

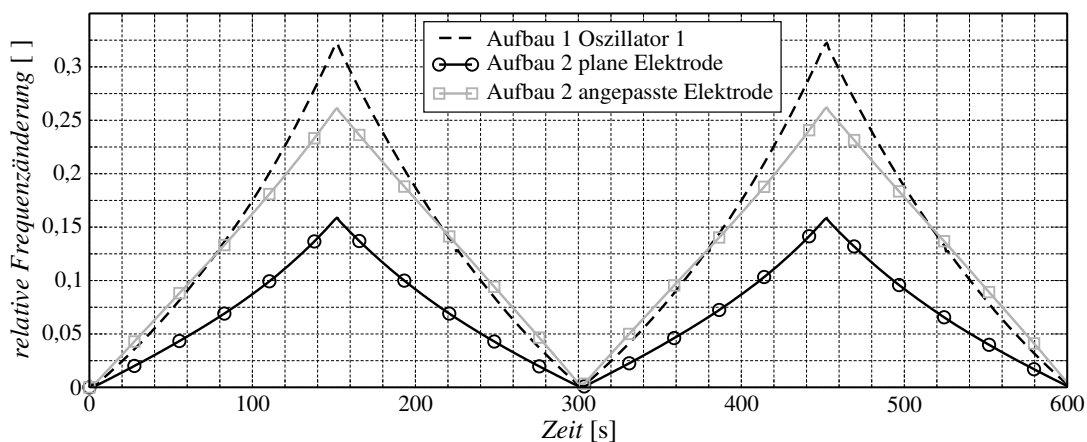


Abbildung 8.21: Vergleich der relativen Frequenzänderung bei Aufprägung einer dreieckförmigen Druckbelastung von $0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \dots 8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ Differenzdruck gegen Atmosphäre

Die Steigerung der relativen Frequenzänderung und damit der Empfindlichkeit ist in **Abbildung 8.22** nochmals verdeutlicht. Sie zeigt die resultierenden Frequenzänderungen des Oszillators 1 des Aufbaus 1 und des Oszillators des Aufbaus 2 mit und ohne angepasste Elektrode, bei aufgeprägten Druckänderungen in Stufen von 100 Pa. Erwartungsgemäß sind die Frequenzänderungen des Aufbaus 2 mit einer angepassten Elektrode deutlich höher als die des Aufbaus 2 mit planer (gerader) Elektrode.

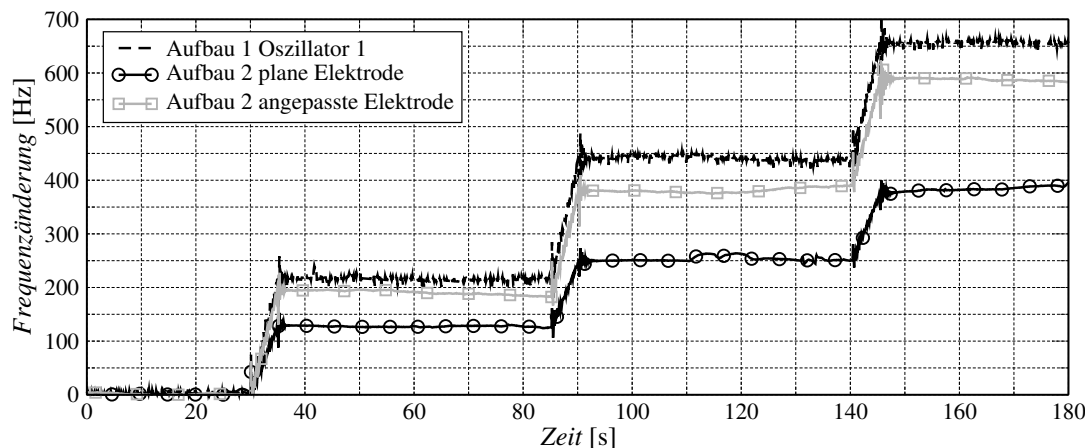


Abbildung 8.22: Vergleich der Frequenzänderung bei Aufprägung von Druckänderungen von 100 Pa

8.3 Schlussfolgerung der Messergebnisse

Die Messergebnisse der Sensor-Prototypen bestätigen die in den Kapiteln 5 & 6 erhaltenen theoretischen Ergebnisse. Der gemessene Verlauf einer aufgetragenen, dreieckförmigen Druckbelastung von $0,5 \cdot 10^5$ Pa ... $8 \cdot 10^5$ Pa Differenzdruck gegen Atmosphäre stimmt für Aufbau 1 im gesamten Verlauf gut mit den Ergebnissen der Plattentheorie überein, während der Verlauf von Aufbau 2, bedingt durch die Klemmung der Platte, lediglich bis zu einem Differenzdruck gegen Atmosphäre von $5 \cdot 10^5$ Pa gut mit der Plattentheorie übereinstimmt. Die Oszillatoren des Aufbaus 1 rasten im Bereich von ca. $4,1 \cdot 10^5$ Pa – $4,4 \cdot 10^5$ Pa Differenzdruck gegen Atmosphäre aufeinander ein und stellen zwei gekoppelte Oszillatoren dar. Damit ist der Aufbau 1 für diesen Bereich nicht geeignet.

Die abgeschätzte Frequenzstabilität der Oszillatoren wurde durch die Messungen der Allan-Varianz bestätigt. Die hohe Frequenzstabilität erlaubt schließlich beiden Aufbauten eine Auflösung des Drucks von ca. 0,2 – 0,3 Pa, was bei dem ausgelegten Messbereich von $0 \dots 10 \cdot 10^5$ Pa Differenzdruck gegen Atmosphäre, einer relativen Auflösung von $2 - 3 \cdot 10^{-7}$ entspricht. Damit weist der Sensor-Prototyp eine weit bessere Auflösung auf, als sie eingangs der Arbeit formuliert wurde. Die Steigerung der Empfindlichkeit des Sensors mit dem Aufbau 2 durch eine angepasste Elektrode konnte durch Messungen ebenfalls bestätigt werden.

Der Einsatz eines kommerziell erhältlichen CDUs zur Auswertung der Kapazität des Sensors konnte die Anforderungen nicht erfüllen. Dieser erlaubt lediglich eine relative Auflösung des Drucks von ca. $\pm 2 \cdot 10^{-4}$.

Der Vergleich der Messergebnisse der Aufbauten 1 und 2 lässt die Aussage zu, dass der wesentlich einfachere Aufbau 2, mit einer zu ändernden Klemmung der Platte und einer angepassten Elektrode, die bessere Wahl zur Druckmessung darstellt.

Kapitel 9

Ausblick

Die grundsätzliche Funktionalität und das geforderte Auflösungsvermögen des Sensor-konzepts sind gegeben.

Die Verwendung des einfachen Aufbaus 2 mit einer angepassten Elektrode und einer anderen Gestaltung der Plattenklemmung ist vielversprechend. Auch eine kompaktere Bauform des Sensors, die die gesamte Auswertelektronik beinhaltet, ist denkbar.

Die Frequenzmessung erfolgte mittels einer Frequenzverhältnismessung, kombiniert mit der Schwebungsfrequenzmessung. Dabei wurde das Mischsignal mit einem Funktionsgenerator erzeugt. Denkbar ist hier ein stabiler Frequenz-Synthesizer, der eine Anpassung der Mischfrequenz in festen Frequenzstufen erlaubt. Dieser kann in der Frequenzmessschaltung integriert werden.

Die hier zur graphischen Darstellung durchgeführte Auswertung der Messergebnisse mittels eines PCs (Frequenz \rightarrow Kapazität \rightarrow Auslenkung \rightarrow Druck) ist vom Rechenaufwand her problemlos mit heutigen Mikroprozessoren beherrschbar.

Kapitel 10

Zusammenfassung

Die schnelle Detektion von Leckagen pneumatischer Systeme mittels eines Drucksensors zur Differenzdruckmessung gegen Atmosphäre setzt ein hohes Auflösungsvermögen des Sensors voraus. In Bezug darauf ist die Untersuchung von Druckmessverfahren, deren Auflösungsvermögen eine Unterteilung des Messbereichs in mindestens 10^6 Stufen erlaubt und der Nachweis des Auflösungsvermögens durch einen Prototyp, Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Das Sensorkonzept sieht eine elastische Platte zur Druckaufnahme vor, deren Verformung, als Resultat der Untersuchungen und Bewertungen von verschiedenen Druckmessverfahren, kapazitiv ausgewertet wird. Sowohl der Zusammenhang zwischen eingepprägtem Druck und Verformung der Platte als auch die auftretende Beanspruchung derselben werden bestimmt. Hierzu findet ein linearer und für größere Verformungen, die hier eine Rolle spielen, ein nichtlinearer Ansatz Verwendung.

Die Auswertung der Plattenverformung erfolgt mittels eines Messkondensators, der, nach Bewertung von Kapazitätsmessverfahren, als frequenzbestimmendes Glied in einem LC-Schwingkreis dient. Die Schwingfrequenz des Oszillators erlaubt unter Kenntnis der druckabhängigen Plattenverformung bzw. der daraus resultierenden Kapazität eine Aussage über den herrschenden Druck. Hierzu wird die Analyse der sich ergebenden Kapazität des Sensors durchgeführt. Zu dem wird ein zweites Konzept realisiert, welches zum Vergleich der Verfahren, einen kommerziell erhältlichen Kapazität zu Digitalwert-Umsetzer vorsieht.

Von den möglichen Schaltungstypen der Oszillatoren wird eine Schaltung realisiert, die auf einem Franklin-Oszillator basiert. Sie erlaubt die hier vorausgesetzte Anbindung eines geerdeten Kondensators und weist ein geringes Frequenz- bzw. Phasenrauschen auf. Es erfolgt die Analyse der Oszillatorschaltung und des Rauschverhaltens, die eine Abschätzung der Frequenzschwankungen erlaubt. Ferner wird eine Optimierung der Bauteilparameter im Bezug auf ein geringes Phasenrauschen aufgezeigt.

Zur Messung der Oszillatorfrequenz werden verschiedene Verfahren untersucht und bewertet. Daraus resultierend erfolgt hier die Frequenzmessung nach dem Verfahren der Frequenzverhältnismessung kombiniert mit der Schwebungsfrequenzmessung (Signalmischung).

Mit Hilfe umfangreicher Experimente wurde nachgewiesen, dass es in dieser Arbeit gelungen ist, einen neuen Drucksensor mit einer relativen Druckauflösung von

$\frac{\Delta p_{\min}}{p_{\max}} < 2 - 3 \cdot 10^{-7}$, vorzustellen. Dabei kann der realisierte Sensorprototyp in einem Druckbereich von 0 – 1 MPa Differenzdruck gegen Atmosphäre arbeiten, ohne dass dazu Umschaltungen des Messbereichs nötig wären. Zudem zeichnet sich der Prototyp durch eine sehr einfache Konstruktion und damit auch durch eine hohe Zuverlässigkeit aus. Für eine Serienfertigung ist die verwendete elektronische Schaltung leicht auf einem Chip integrierbar. Die eingangs der Arbeit formulierten Anforderungen an den Sensor konnten weit übertroffen werden.

Kapitel 11

Abstract

Fast detection of leakages in pneumatic systems with gauge pressure sensors requires a very high sensor resolution. Concerning this matter the subject of this thesis is the study of measurement methods which allow the fragmentation of the measurement range into a minimum of 10^6 steps and a verification by a prototype.

An elastic plate whose pressure induced deformation is capacitively evaluated is the result of the study and validation of different pressure measurement methods. A linear approach and for larger deformations, which are of interest here, a nonlinear approach is used to describe deformation and stress of the plate.

A capacitor which evaluates the plate deformation is used as the frequency determining element of a LC-Oscillator. The resonance frequency of the oscillator and knowledge of pressure dependent plate deformation and resulting capacitance allows the prediction of induced pressure. For this purpose an analysis of the resulting sensor capacitance is carried out. A second concept is realised which uses a commercially available capacitance to digital converter. This provides a comparison of both measurement methods.

The oscillator circuit is based on a franklin-oscillator. This circuit allows the connection of a grounded capacitor and features low frequency- and phase noise. The analysis of the oscillator circuit and its noise performance is carried out which allows an estimation of the interesting frequency fluctuations. Furthermore an improvement of device parameters resulting in lower phase noise is shown.

Validation of different frequency measurement methods proves the method of frequency ratio measurement in combination with a beat frequency measurement (heterodyne principle) to be best suited here.

Extensive experiments have shown that the introduced new gauge pressure sensor provides a relative pressure resolution of $\frac{\Delta p_{\min}}{p_{\max}} < 2 - 3 \cdot 10^{-7}$. The realised sensor prototype works over the pressure range of 0 – 1 MPa without any change to subranges. Furthermore the sensor features a simple construction and thereby a high reliability. For a batch production the used electronic circuit can easily be integrated into one chip. The formulated requirements of the sensor at the beginning of this thesis have been widely exceeded.

Anhang A

Vergleich der relativen Größenänderungen eines kapazitiven und resistiven Sensorelements

Die Beaufschlagung des Sensors mit einem Druck $p > 0$ resultiert in einer Verformung der druckaufnehmenden Platte. Die Ermittlung der Verformung kann nach Kapitel 2.2 auf unterschiedliche Weise erfolgen. Das häufig verwendete Messverfahren mittels Dehnungsmessstreifen wird mit der hier zu untersuchenden kapazitiven Auswertmöglichkeit verglichen. Diesbezüglich wird nachfolgend die Größenordnung der relativen Änderung der beiden Messverfahren dargelegt.

In Kapitel 5.2 ist der Verlauf der mechanischen Dehnung in Abhängigkeit des Plattenradius dargestellt. Die Abbildung 5.7 zeigt, dass die größte Dehnung in Plattenmitte und am Plattenrand auftritt. Dabei ist bei einer fest eingespannten Platte ($\alpha_w = 1$) die am Plattenrand entstehende radiale Dehnung um einen Faktor zwei höher als in der Plattenmitte. Aus diesem Grund wird diese maximale Dehnung in radialer Richtung für eine Abschätzung verwendet.

Eine Änderung der Kapazität wird durch die Auslenkung der Plattenmitte hervorgerufen. In Abbildung 5.6 ist der Verlauf der Plattenauslenkung gezeigt, die in der Plattenmitte ihren höchsten Wert aufweist.

In beiden Fällen hängt die relative Änderung von der Verformung der Platte ab, die der Gleichung (5.8) gehorcht. Die relative Widerstandsänderung wird vereinfacht zu

$$\frac{\Delta R}{R_0} = k \cdot \varepsilon \quad (\text{A.1})$$

angenommen [11]. Über die Proportionalitätskonstante k wirkt sich die mechanische Dehnung ε direkt auf die Widerstandsänderung aus. Mit der Annahme der maximalen Dehnung in Form des Maximalwerts der radialen Dehnung $\varepsilon_{r,\max}$ der Platte, ergibt sich die Widerstandsänderung mit Hilfe der Gleichung (5.10) und $\alpha_w = 1$ zu

$$\frac{\Delta R}{R_0} = k \cdot \varepsilon_{r,\max} = k \cdot \varepsilon_r(\zeta) \Big|_{\zeta=1} = -\frac{3}{4} k \frac{R^2}{h^2} \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot p \quad (\text{A.2})$$

Als kapazitives Sensorelement wird der einfachheit halber ein Plattenkondensator nach Kapitel 6.5.1, mit der Elektrodenfläche A und dem Elektrodenabstand d , dessen Kapazität durch $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ gegeben ist, betrachtet. Der Elektrodenabstand setzt sich

dabei aus einem Basisabstand d_0 und der Verformungsänderung Δw zu $d = d_0 - \Delta w$ zusammen. Damit ergibt sich die relative Kapazitätsänderung mit

$$\frac{C_0 + \Delta C}{C_0} = \frac{\frac{\varepsilon \cdot A}{d_0 - \Delta w}}{\frac{\varepsilon \cdot A}{d_0}} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta w}{d_0}}$$

zu

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta w}{d_0}} - 1 = \frac{\Delta w}{d_0 - \Delta w}. \quad (\text{A.3})$$

Mit den Gleichungen (5.8), (5.10) kann die maximale radiale Dehnung durch

$$\varepsilon_{r,\max} = \varepsilon_r(\zeta) \Big|_{\zeta=1} = -w_{\max}(\zeta) \Big|_{\zeta=0} \cdot \frac{4h}{R^2}$$

beschrieben werden. Woraus das Verhältnis der Kapazitäts- zu Widerstandsänderung gebildet werden kann. Es lautet mit $\Delta w = w_{\max}(\zeta) \Big|_{\zeta=0}$:

$$\left| \frac{\frac{\Delta C}{C_0}}{\frac{\Delta R}{R_0}} \right| = \left| \frac{\frac{\Delta w}{d_0 - \Delta w}}{k \varepsilon_{r,\max}} \right| = \left| \frac{R^2 \frac{w_{\max}(\zeta) \Big|_{\zeta=0}}{d_0 - w_{\max}(\zeta) \Big|_{\zeta=0}}}{-4kh w_{\max}(\zeta) \Big|_{\zeta=0}} \right| = \frac{R^2}{4kh} \frac{1}{d_0 - w_{\max}(\zeta) \Big|_{\zeta=0}}. \quad (\text{A.4})$$

Mit der Annahme konkreter Daten erhält man folgende Größenänderungen

$$k = 2, h = 0,9 \text{ mm}, R = 25 \text{ mm}, d_0 = 0,6 \text{ mm}, w_{\max}(\zeta) \Big|_{\zeta=0} \approx 0,85 d_0$$

$$\left| \frac{\frac{\Delta C}{C_0}}{\frac{\Delta R}{R_0}} \right| = \left| \frac{\frac{\Delta w}{d_0 - \Delta w}}{k \varepsilon_{r,\max}} \right| = \frac{R^2}{0,6kh d_0} \approx 965. \quad (\text{A.5})$$

Die angenommenen Daten, die für den Aufbau 1 gelten, zeigen, dass die relative Kapazitätsänderung um einen Faktor mehr als 900 höher ist, als die relative Widerstandsänderung. Auch die Verwendung eines piezoresistiven Sensorelements, mit einer ca. 80-Fach höheren Empfindlichkeit ($|k_{\text{piezo}}| \approx 100 \dots 160$), ist dem kapazitiven Sensorelement um den Faktor 12 in der Empfindlichkeit unterlegen. Nach den in Kapitel 6.5.2 dargestellten Kapazitätsverläufen der Abbildungen 6.30 und 6.36 ist die Empfindlichkeit des Aufbaus 2 um den Faktor 3 geringer als die des Aufbaus 1. Womit immer noch eine 300- bzw. 4-Fach höhere Empfindlichkeit gegenüber dem resistiven Sensorelement besteht.

Ein weiteres Argument, das für den Einsatz eines kapazitiven Sensorelements spricht, ist die hohe Verstärkung, die zur Auswertung der Widerstandsänderung nötig ist. Sie stellt technisch zwar kein Problem dar, aber limitiert aufgrund des Verstärker- und Widerstandsrauschens das Auflösungsvermögen des Sensors.

Anhang B

Konstantenbestimmung der Plattendifferentialgleichung

B.1 Bestimmung der Konstanten für linearen Fall

Die in Kapitel 5.2.1 bestimmte allgemeine Lösung der Plattendifferentialgleichung (5.4) ist gegeben durch

$$w(\zeta) = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K} \zeta^4 + C_1 \cdot \zeta^2 \ln(\zeta) + C_2 \cdot \zeta^2 + C_3 \cdot \ln(\zeta) + C_4.$$

Die Betrachtung der Randbedingungen erlaubt die Bestimmung der Konstanten C_1 bis C_4 . Aufgrund der elastischen Einspannung am Rand ist die Randbedingung (5.6) $m_{rr}(\zeta) \Big|_{\zeta=1} = c_D \cdot \frac{dw(\zeta)}{dr} \Big|_{\zeta=1}$ und eine verschwindende Verformung $w(\zeta = 1) = 0$ der Platte am Radius R einzuhalten. Die Auslenkung im Mittelpunkt der Platte ($\zeta = 0$) muss bei Druckaufprägung ungleich null, aber endlich sein. Ferner darf zur Einhaltung einer stetigen Verformung keine Neigung im Mittelpunkt auftreten, womit die Randbedingungen $w(0) \neq 0, \infty$ und $\frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0$ einzuhalten sind. Für die Bestimmung der Konstanten sind die konstitutiven Gleichungen und radialen Ableitungen der allgemeinen Lösung nötig. Die Ableitungen sind gegeben durch:

$$\frac{dw(\zeta)}{d\zeta} = \frac{p \cdot R^4}{16 \cdot K} \zeta^3 + C_1 \cdot (1 + 2 \ln(\zeta)) \cdot \zeta + 2 \cdot C_2 \cdot \zeta + \frac{C_3}{\zeta} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d^2w(\zeta)}{d\zeta^2} = \frac{3 \cdot p \cdot R^4}{16 \cdot K} \zeta^2 + C_1 \cdot (3 + 2 \ln(\zeta)) + 2 \cdot C_2 - \frac{C_3}{\zeta^2} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d^3w(\zeta)}{d\zeta^3} = \frac{3 \cdot p \cdot R^4}{8 \cdot K} \zeta + \frac{2 \cdot C_1}{\zeta} + \frac{2 \cdot C_3}{\zeta^3} \quad (\text{B.3})$$

Die konstitutiven Gleichungen sind gegeben durch [29, 30]:

$$\begin{aligned}
m_{rr}(r) &= -K \left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right) \\
m_{\varphi\varphi}(r) &= -K \left(\frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} + \nu \frac{d^2 w(r)}{dr^2} \right) \\
q_r(r) &= -K \left(\frac{d^3 w(r)}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw(r)}{dr} \right).
\end{aligned}$$

Mit der dimensionslosen Koordinate ζ gehen die Gleichungen über in:

$$m_{rr}(\zeta) = -\frac{K}{R^2} \left(\frac{d^2 w(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{\nu}{\zeta} \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$m_{\varphi\varphi}(\zeta) = -\frac{K}{R^2} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} + \nu \frac{d^2 w(\zeta)}{d\zeta^2} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$q_r(\zeta) = -\frac{K}{R^3} \left(\frac{d^3 w(\zeta)}{d\zeta^3} + \frac{1}{\zeta} \frac{d^2 w(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^2} \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \right). \quad (\text{B.6})$$

Das Moment $m_{r\varphi}$ und die Querkraft q_φ sind aufgrund der Rotationssymmetrie gleich null.

Die Konstante C_3 führt durch den Logarithmus zu einer Singularität in der Plattenmitte. Da die Auslenkung an dieser Stelle endlich ist, muss C_3 zu null gesetzt werden. Zur Bestimmung der Konstante C_1 ist eine der drei genannten konstitutiven Gleichungen zu betrachten. Nutzt man hierzu das radiale Biegemoment m_{rr} , da es in einer Randbedingung enthalten ist, so erhält man:

$$m_{rr}(\zeta) = -\frac{K}{R^2} \left(\frac{pR^4}{16K} (3 + \nu) \zeta^2 + C_1 \left(3 + \nu + 2 \ln(\zeta)(1 + \nu) \right) + 2C_2(1 - \nu) \right)$$

Es ist ersichtlich, dass die Konstante C_1 ebenfalls zu null gesetzt werden muss, da das Biegemoment in der Plattenmitte endlich sein muss und keine Singularität aufweisen darf. Die Randbedingung $m_{rr}(\zeta)|_{\zeta=1} = c_D \cdot \frac{dw(\zeta)}{dr} \Big|_{\zeta=1}$ führt zu

$$\begin{aligned}
-\frac{K}{R^2} \left(\frac{d^2 w(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{\nu}{\zeta} \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \right) \Big|_{\zeta=1} &= \frac{c_D}{R} \cdot \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=1} \\
-\frac{K}{R^2} \left((3 + \nu) \frac{pR^4}{16K} + 2(1 + \nu)C_2 \right) &= \frac{c_D}{R} \left(\frac{pR^4}{16K} + 2C_2 \right)
\end{aligned}$$

womit die Konstante C_2 in

$$C_2 = -\frac{p \cdot R^4}{32 \cdot K} \cdot \frac{3 + \nu + c_D \frac{R}{K}}{1 + \nu + c_D \frac{R}{K}}$$

resultiert. Die noch zu bestimmende Konstante C_4 ergibt sich aus der verschwindenden Verformung am Plattenrand

$$w(1) = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K} - \frac{p \cdot R^4}{32 \cdot K} \cdot \frac{3 + \nu + c_D \frac{R}{K}}{1 + \nu + c_D \frac{R}{K}} + C_4 = 0$$

zu

$$C_4 = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K} \cdot \frac{5 + \nu + c_D \frac{R}{K}}{1 + \nu + c_D \frac{R}{K}}.$$

Somit lautet die Lösung der Plattendifferentialgleichung (5.4):

$$\begin{aligned} w(\zeta) &= \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K} \zeta^4 - 2 \cdot \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K} \cdot \frac{3 + \nu + c_D \frac{R}{K}}{1 + \nu + c_D \frac{R}{K}} \cdot \zeta^2 + \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K} \cdot \frac{5 + \nu + c_D \frac{R}{K}}{1 + \nu + c_D \frac{R}{K}} \\ w(\zeta) &= \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot K} \cdot \left(1 - \zeta^2\right) \cdot \left(\frac{5 + \nu + c_D \frac{R}{K}}{1 + \nu + c_D \frac{R}{K}} - \zeta^2\right). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

B.2 Bestimmung der Konstanten für Reihenansatz

Das zu lösende Differentialgleichungssystem bestehend aus (5.34, 5.35) lautet:

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{12(1-\nu^2)} \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \Theta(\zeta) \right) \right] &= \frac{Q}{2H} \zeta + S_{rr}(\zeta) \Theta(\zeta) \\ \zeta \frac{d}{d\zeta} \left(S_{rr}(\zeta) + S_{\varphi\varphi}(\zeta) \right) &= -\frac{1}{2} \left(\Theta(\zeta) \right)^2. \end{aligned}$$

Mit den gewählten Ansätzen

$$\begin{aligned} \Theta(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \zeta^{2k-1}, \quad S_{rr}(\zeta) = 2H \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \zeta^{2k-2}, \\ S_{\varphi\varphi}(\zeta) &= 2H \sum_{k=1}^{\infty} k(2k-1) B_k \zeta^{2k-2} \end{aligned}$$

geht es über in

$$\frac{H^2}{3(1-\nu^2)} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) A_k \zeta^{2k-3} = \frac{Q}{2H} \zeta + 2H \sum_{k=1}^{\infty} A_k \zeta^{2k-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \zeta^{2k-2} \quad (\text{B.8})$$

$$16H \sum_{k=1}^{\infty} k^2(k-1) B_k \zeta^{2k-2} = - \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \zeta^{2k-1} \right)^2. \quad (\text{B.9})$$

Die Gleichungen müssen für beliebige $\zeta \in [0 \dots 1]$ erfüllt sein. Hierzu sind die jeweiligen Potenzen von ζ auf der linken und rechten Seite der Gleichungen zu betrachten. Für ζ^{-1} auf der linken Seite von (B.8) erhält man:

$$\frac{H^2}{3(1-\nu^2)} \cdot 1 \cdot (1-1) \cdot A_1 \cdot \zeta^{-1} = 0$$

Die Konstante A_1 ist somit nicht durch (B.8) bestimmbar. Der Vergleich von linker und rechter Seite von (B.8) bezüglich der ersten Potenz von ζ resultiert in

$$\frac{H^2}{3(1-\nu^2)} \cdot 2 \cdot (2-1) A_2 \zeta^1 = \frac{Q}{2H} \zeta^1 + 2H \cdot A_1 \zeta^1 \cdot 1 B_1 \zeta^0.$$

Damit ist die Konstante A_2 durch

$$A_2 = \frac{3(1-\nu^2)}{2H^2} \left(\frac{Q}{2H} + 2H A_1 B_1 \right). \quad (\text{B.10})$$

bestimmt. Die Betrachtung der höheren Potenzen ζ muss auf der rechten Seite von (B.8) durch Kombinationsmöglichkeiten berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{3(1-\nu^2)} \cdot 3 \cdot (3-1) A_3 \zeta^3 &= 2H \left(A_2 \zeta^3 \cdot 1 B_1 \zeta^0 + A_1 \zeta^1 \cdot 2 B_2 \zeta^2 \right) \\ \frac{H^2}{3(1-\nu^2)} \cdot 4 \cdot (4-1) A_4 \zeta^5 &= 2H \left(A_3 \zeta^5 \cdot 1 B_1 \zeta^0 + A_2 \zeta^3 \cdot 2 B_2 \zeta^2 \right. \\ &\quad \left. + A_1 \zeta^1 \cdot 3 B_3 \zeta^4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{3(1-\nu^2)} \cdot 5 \cdot (5-1) A_5 \zeta^7 &= 2H \left(A_4 \zeta^7 \cdot 1 B_1 \zeta^0 + A_3 \zeta^5 \cdot 2 B_2 \zeta^2 \right. \\ &\quad \left. + A_2 \zeta^3 \cdot 3 B_3 \zeta^4 + A_1 \zeta^1 \cdot 4 B_4 \zeta^6 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{3(1-\nu^2)} \cdot 6 \cdot (6-1) A_6 \zeta^9 &= 2H \left(A_5 \zeta^9 \cdot 1 B_1 \zeta^0 + A_4 \zeta^7 \cdot 2 B_2 \zeta^2 \right. \\ &\quad \left. + A_3 \zeta^5 \cdot 3 B_3 \zeta^4 + A_2 \zeta^3 \cdot 4 B_4 \zeta^6 + A_1 \zeta^1 \cdot 5 B_5 \zeta^8 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{H^2}{3(1-\nu^2)} \cdot k \cdot (k-1) A_k \zeta^{2k-3} = 2H \sum_{m=1}^{k-1} m A_{k-m} B_m$$

Somit erhält man für die Konstanten A_k die folgende Gleichung, mit der sie rekursiv bestimmt werden können.

$$A_k = \frac{6(1-\nu^2)}{k(k-1)H^2} \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m A_{k-m} B_m \quad \text{für } k > 2.$$

Unter Einbeziehung von (B.9) erhält man die Konstanten B_k mit der selben Vorgehensweise. Für die Potenz ζ^0 folgt

$$16H \cdot 1^2 \cdot (1-1) B_1 \zeta^0 = 0,$$

womit die Konstante B_1 durch (B.9) nicht bestimmbar ist. Weiter erhält man bei der Betrachtung der höheren Potenzen von ζ ebenfalls Kombinationsmöglichkeiten

auf der rechten Seite von (B.9).

$$\begin{aligned}
16 H \cdot 2^2 \cdot (2-1) B_2 \zeta^2 &= - \left(A_1 \zeta^1 \cdot A_1 \zeta^1 \right) \\
16 H \cdot 3^2 \cdot (3-1) B_3 \zeta^4 &= - \left(A_1 \zeta^1 \cdot A_2 \zeta^3 + A_2 \zeta^3 \cdot A_1 \zeta^1 \right) \\
16 H \cdot 4^2 \cdot (4-1) B_4 \zeta^6 &= - \left(A_1 \zeta^1 \cdot A_3 \zeta^5 + A_2 \zeta^3 \cdot A_2 \zeta^3 + A_3 \zeta^5 \cdot A_1 \zeta^1 \right) \\
16 H \cdot 5^2 \cdot (5-1) B_5 \zeta^8 &= - \left(A_1 \zeta^1 \cdot A_4 \zeta^7 + A_2 \zeta^3 \cdot A_3 \zeta^5 + A_3 \zeta^5 \cdot A_2 \zeta^3 \right. \\
&\quad \left. + A_4 \zeta^7 \cdot A_1 \zeta^1 \right) \\
16 H \cdot k^2 \cdot (k-1) B_k \zeta^{2k-2} &= - \sum_{m=1}^{k-1} A_m A_{k-m}
\end{aligned}$$

Schließlich erhält man für die Konstanten B_k die nachfolgende Gleichung, die eine rekursive Bestimmung erlaubt.

$$B_k = - \frac{1}{16 H} \frac{1}{k^2 (k-1)} \cdot \sum_{m=1}^{k-1} A_{k-m} A_m \quad \text{für } k > 1$$

B.3 Bestimmung der Konstanten für Näherungsansatz

B.3.1 Methode der Fehlerorthogonalisierung

Die allgemeine Lösung der Airyschen Spannungsfunktion $\Phi(\zeta)$ ist durch (5.48) zu

$$\begin{aligned}
\Phi(\zeta) = -4E w_0^2 \left(\frac{\zeta^8}{192} - \frac{\zeta^6}{72}(1+\alpha_w) + \frac{\zeta^4}{64}(1+\alpha_w)^2 \right) + \frac{C_1}{2} \zeta^2 \left(\ln(\zeta) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4\zeta} \right) \\
+ \frac{C_2}{4} \zeta^2 + C_3 \ln(\zeta)
\end{aligned} \tag{B.11}$$

gegeben. Dabei sind zunächst die Konstanten C_1 bis C_3 und anschließend die Auslenkung in Plattenmitte w_0 zu bestimmen. Die Membranspannungen sind durch (5.14),(5.15) bzw. mit der einheitenlosen Koordinate ζ durch

$$n_{rr}(\zeta) = \frac{h}{R^2} \frac{1}{\zeta} \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} \tag{B.12}$$

$$n_{\varphi\varphi}(\zeta) = \frac{h}{R^2} \frac{d^2 \Phi(\zeta)}{d\zeta^2} \tag{B.13}$$

gegeben. Die Membranspannungen müssen im Plattenmittelpunkt, bei $\zeta = 0$, einen endlichen Wert aufweisen. Die erste und zweite Ableitung führt ähnlich wie in Anhang B.1 dazu, dass die Konstanten C_1, C_3 zu null gesetzt werden müssen, womit

sich die allgemeine Lösung der Spannungsfunktion auf

$$\Phi(\zeta) = -4E w_0^2 \left(\frac{\zeta^8}{192} - \frac{\zeta^6}{72}(1 + \alpha_w) + \frac{\zeta^4}{64}(1 + \alpha_w)^2 \right) + \frac{C_2}{4}\zeta^2 \quad (\text{B.14})$$

reduziert. Am Rand der Platte, bei $\zeta = 1$, darf aufgrund der Lagerung keine Verschiebung der Mittelfläche u , die durch

$$u(r) = r \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi}(r) \Big|_{z=0} = \frac{r}{E} \left(\frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) \quad (\text{B.15})$$

bzw.

$$u(\zeta) = \frac{\zeta}{ER} \left(\frac{d^2 \Phi(\zeta)}{d\zeta^2} - \frac{\nu}{\zeta} \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} \right) \quad (\text{B.16})$$

gegeben ist, auftreten. Somit ist die Konstante C_2 aus der Bedingung

$$u(\zeta) \Big|_{\zeta=1} = \frac{\zeta}{ER} \left(\frac{d^2 \Phi(\zeta)}{d\zeta^2} - \frac{\nu}{\zeta} \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} \right) \Big|_{\zeta=1} = 0 \quad (\text{B.17})$$

zu bestimmen. Hieraus folgt nach Einsetzen der differenzierten Spannungsfunktion die Gleichung

$$u(\zeta) \Big|_{\zeta=1} = -E w_0^2 \left(\frac{7}{6} - \frac{5}{3}(1 + \alpha_w) + \frac{3}{4}(1 + \alpha_w)^2 - \frac{\nu}{6} + \frac{\nu}{3}(1 + \alpha_w) - \frac{\nu}{4}(1 + \alpha_w)^2 \right) + \frac{C_2}{2}(1 - \nu) = 0$$

aus der die Konstante C_2 in

$$C_2 = \frac{E w_0^2}{6} \cdot \frac{(3 - \nu)(1 + 3\alpha_w^2) - 2\alpha_w(1 + \nu)}{1 - \nu} \quad (\text{B.18})$$

resultiert. Somit ist die Lösung der Airyschen Spannungsfunktion durch

$$\Phi(\zeta) = -\frac{E w_0^2}{6} \left(\frac{\zeta^8}{8} - \frac{\zeta^6}{3}(1 + \alpha_w) + \frac{3}{8}\zeta^4(1 + \alpha_w)^2 - \frac{\zeta^2}{4} \frac{(3 - \nu)(1 + 3\alpha_w^2) - 2\alpha_w(1 + \nu)}{1 - \nu} \right) \quad (\text{B.19})$$

gegeben.

B.3.2 Methode der virtuellen Verschiebung

Die Bestimmung der Konstante w_0 mit Hilfe der virtuellen Verschiebung führt zu der Gleichung (5.66)

$$\frac{\partial \Pi_a(w)}{\partial w_0} = \frac{\partial W_B(w)}{\partial w_0} + \frac{\partial W_M(w)}{\partial w_0} + \frac{\partial W_D(w)}{\partial w_0}. \quad (\text{B.20})$$

Die Differentiation der einzelnen Summanden

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} p R^2 (3 \alpha_w - 1) &= \frac{8 \pi K}{3 R^2} w_0 \left(8 + 3 (1 + \nu) (1 - \alpha_w)^2 \right) \\ &+ \frac{16 \pi K}{3 R^2} \frac{1 + \nu}{56} \frac{w_0^3}{h^2} \left[8 - 56 \alpha_w \left(1 - \alpha_w + 3 \alpha_w^2 \right) + (7 - \nu) \left(1 + 14 \alpha_w^2 + 21 \alpha_w^4 \right) \right] \\ &\quad - \frac{8 \pi K}{3 R^2} w_0 \left(12 (1 - \alpha_w) + 3 (1 + \nu) \left(1 - \alpha_w \right)^2 \right) \end{aligned}$$

und anschließendes zusammenfassen

$$\begin{aligned} \frac{p R^4}{2 K} (3 \alpha_w - 1) &= 8 w_0 (12 \alpha_w - 4) \\ &+ 16 \cdot \frac{1 + \nu}{56} \frac{w_0^3}{h^2} \left[8 - 56 \alpha_w \left(1 - \alpha_w + 3 \alpha_w^2 \right) + (7 - \nu) \left(1 + 14 \alpha_w^2 + 21 \alpha_w^4 \right) \right] \end{aligned}$$

führt zu dem bereits bekannten Ergebnis (5.52)

$$\begin{aligned} \frac{p R^4}{64 K} &= w_0 + \frac{w_0^3}{h^2} \\ &\frac{1 + \nu}{112 (3 \alpha_w - 1)} \left(8 - 56 \alpha_w \left(1 - \alpha_w + 3 \alpha_w^2 \right) + (7 - \nu) \left(1 + 14 \alpha_w^2 + 21 \alpha_w^4 \right) \right). \end{aligned} \tag{B.21}$$

Anhang C

Konstantenbestimmung der Potentialfunktion

C.1 Bestimmung der Konstanten für Aufbau 1 im Bereich I

Die in Kapitel 6.5.2 bestimmten Allgemeinen Lösungsansätze für das Potential lauten

$$\begin{aligned} \varphi_{A1,I_1}(r, z) = & \left(a_{0,1} + a_{1,1} \ln(r) \right) (c_{0,1} + c_{1,1} z) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{n,1} \sinh(k_{n,1} z) + B_{n,1} \cosh(k_{n,1} z) \right) \\ & \left(E_{n,1} J_0(k_{n,1} r) + F_{n,1} N_0(k_{n,1} r) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{A1,I_2}(r, z) = & \left(d_{0,1} + d_{1,1} \ln(r) \right) (e_{0,1} + e_{1,1} z) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n,1} \sinh(l_{n,1} (z - c)) + D_{n,1} \cosh(l_{n,1} (z - c)) \right) \\ & \left(G_{n,1} J_0(l_{n,1} r) + H_{n,1} N_0(l_{n,1} r) \right). \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Konstanten des Lösungsansatzes erfolgt unter Berücksichtigung der Randbedingungen. Hierzu ist das Potential bzw. die Ableitung des Potentials an den Rändern bzw. Grenzflächen zu betrachten. Für den Bereich I gelten die folgenden Randbedingungen:

$$\varphi_{A1,I_1}(r, 0) = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\varphi_{A1,I_1}(a, z) = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\varphi_{A1,I_1}(b, z) = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\varphi_{A1,I_2}(r, d) = \varphi_{1,0}(r) \quad (\text{C.4})$$

$$\varphi_{A1,I_2}(a, z) = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\varphi_{A1,I_2}(b, z) = 0 \quad (\text{C.6})$$

Aus (C.1) folgt $B_{n,1} = 0$, da $\cosh(0) = 1 \neq 0$ und $a_{0,1} = -a_{1,1} \ln(r)$. Da es sich um linearunabhängige Lösungen handelt, ist diese getrennte Betrachtung zulässig. Weiter führt (C.2), (C.3) zu

$$E_{n,1} J_0(k_{n,1} a) + F_{n,1} N_0(k_{n,1} a) = 0$$

$$E_{n,1} J_0(k_{n,1} b) + F_{n,1} N_0(k_{n,1} b) = 0 \quad (\text{C.7})$$

und

$$a_{0,1} = -a_{1,1} \ln(a), \quad a_{0,1} = -a_{1,1} \ln(b) \quad .$$

Damit muss gelten

$$a_{0,1} = 0, \quad a_{1,1} = 0$$

und

$$F_{n,1} = -E_{n,1} \frac{J_0(k_{n,1} a)}{N_0(k_{n,1} a)}$$

$$E_{n,1} \left(J_0(k_{n,1} b) - N_0(k_{n,1} b) \frac{J_0(k_{n,1} a)}{N_0(k_{n,1} a)} \right) = 0,$$

woraus sich zur Bestimmung der Konstante $k_{n,1}$ die Gleichung

$$N_0(k_{n,1} a) J_0(k_{n,1} b) - N_0(k_{n,1} b) J_0(k_{n,1} a) = 0 \quad (\text{C.8})$$

ergibt. Der Vergleich von (C.7) und (C.8) führt zu

$$E_{n,1} = N_0(k_{n,1} a), \quad F_{n,1} = -J_0(k_{n,1} a) \quad .$$

Eine Auflösung nach $E_{n,1}$ statt $F_{n,1}$ führt zu den alternativen Konstanten

$$E_{n,1} = N_0(k_{n,1} b), \quad F_{n,1} = -J_0(k_{n,1} b),$$

wobei beide Varianten die Randbedingungen (C.2) und (C.3) erfüllen. Die Kombination der Bessel- und Neumannfunktionen wird der Übersicht halber zusammengefasst zu

$$Z_0(k_{n,1} r) = N_0(k_{n,1} a) J_0(k_{n,1} r) - J_0(k_{n,1} a) N_0(k_{n,1} r) \quad .$$

Die Randbedingungen (C.5), (C.6) sind equivalent zu behandeln, womit sich die Lösungen für das Potential zu

$$\varphi_{A1,I_1}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,1} \sinh(k_{n,1} z) Z_0(k_{n,1} r)$$

$$\varphi_{A1,I_2}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n,1} \sinh(k_{n,1} (z - c)) + D_{n,1} \cosh(k_{n,1} (z - c)) \right) Z_0(k_{n,1} r)$$

reduzieren. Die übrigen Konstanten sind unter Berücksichtigung der Randbedingungen an der Grenzfläche zwischen den Dielektrika $z = c$ der Abbildung 6.28 zu bestimmen. Bei statischen elektrischen Feldern, die sich im ladungsfreien Raum befinden gilt

$$\text{Rot } \vec{E} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_{A1,I_1}(r, z) \Big|_{z=c} = \varphi_{A1,I_2}(r, z) \Big|_{z=c} \quad (\text{C.9})$$

und

$$\text{Div } \vec{D} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad D_{z,1,1} \Big|_{z=c} = D_{z,1,2} \Big|_{z=c} \quad \Longleftrightarrow \quad -\varepsilon_{r1} \frac{\partial \varphi_{A1,I_1}}{\partial z} \Big|_{z=c} = -\varepsilon_{r2} \frac{\partial \varphi_{A1,I_2}}{\partial z} \Big|_{z=c} \quad (\text{C.10})$$

Aus (C.9) folgt

$$A_{n,1} \sinh(k_{n,1} c) Z_0(k_{n,1} r) = D_{n,1} Z_0(k_{n,1} r) \quad \Rightarrow \quad D_{n,1} = A_{n,1} \sinh(k_{n,1} c)$$

und aus (C.10) folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r1} A_{n,1} k_{n,1} \cosh(k_{n,1} c) Z_0(k_{n,1} r) &= \varepsilon_{r2} C_{n,1} k_{n,1} Z_0(k_{n,1} r) \\ \Rightarrow C_{n,1} &= \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} A_{n,1} \cosh(k_{n,1} c). \end{aligned}$$

Die noch nicht berücksichtigte Randbedingung (C.4), die das Potential auf der Elektrode vorgibt, ermöglicht die Bestimmung der Konstante $A_{n,1}$. Die Potentialvorgabe auf der Elektrode ist durch

$$\begin{aligned} \varphi_{A1,I_2}(r, z) \Big|_{z=d} &= \varphi_{1,0}(r) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n,1} \sinh(k_{n,1} (d-c)) + D_{n,1} \cosh(k_{n,1} (d-c)) \right) Z_0(k_{n,1} r) \end{aligned}$$

zu erfüllen. Entsprechend den harmonischen Funktionen weisen auch die Bessel-Funktionen eine Orthogonalität auf, die es ermöglicht eine Funktion in eine Fourier-Bessel-Reihe zu entwickeln. Im Allgemeinen gilt [38, 87]:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0}(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{n,1} Z_0(k_{n,1} r) \\ \int_a^b r \varphi_{1,0}(r) Z_0(k_{n,1} r) dr &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{n,1} \int_a^b r Z_0(k_{n,1} r) Z_0(k_{m,1} r) dr = \sum_{n=1}^{\infty} G_{n,1} K_{n,1} \delta_{n,m} \quad . \end{aligned}$$

Mit der Ausblendeigenschaft der Kronecker-Delta-Funktion $\delta_{n,m}$, die den Term mit $n = m$ aus der Summe ausblendet (Orthogonalität) erhält man die Beziehung

$$G_{n,1} = \frac{1}{K_{n,1}} \int_a^b r \varphi_{1,0}(r) Z_0(k_{n,1} r) dr = \frac{L_{n,1}}{K_{n,1}},$$

wobei unter Einhaltung der Sturm-Liouville-Bedingungen, die im Allgemeinen durch Dirichletprobleme, wie es hier der Fall ist, erfüllt sind, gilt [38, 87, 92, 93]

$$K_{n,1} = \int_a^b r Z_0^2(k_{n,1} r) dr = \frac{b^2 Z_1^2(k_{n,1} b) - a^2 Z_1^2(k_{n,1} a)}{2} \quad .$$

Mit diesen Beziehungen folgt für die Konstanten $A_{n,1}$, $C_{n,1}$ und $D_{n,1}$

$$\begin{aligned} \frac{L_{n,1}}{K_{n,1}} &= C_{n,1} \sinh(k_{n,1} (d - c)) + D_{n,1} \cosh(k_{n,1} (d - c)) \\ &= A_{n,1} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \cosh(k_{n,1} c) \sinh(k_{n,1} (d - c)) + A_{n,1} \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (d - c)) \\ A_{n,1} &= \frac{L_{n,1}}{K_{n,1} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \frac{1}{\sinh(k_{n,1} (d - c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (d - c))} \\ C_{n,1} &= \frac{L_{n,1}}{K_{n,1} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \frac{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \cosh(k_{n,1} c)}{\sinh(k_{n,1} (d - c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (d - c))} \\ D_{n,1} &= \frac{L_{n,1}}{K_{n,1} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \frac{\sinh(k_{n,1} c)}{\sinh(k_{n,1} (d - c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (d - c))} . \end{aligned}$$

Schließlich ist die Konstante $L_{n,1}$ unter der Annahme des Elektrodenpotentials

$$\varphi_{1,0}(r) = \begin{cases} \frac{U_0}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right) & \text{für } a \leq r \leq a_e \\ U_0 & \text{für } a_e \leq r \leq b_e \\ \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right)} \ln\left(\frac{r}{b}\right) & \text{für } b_e \leq r \leq b \end{cases}$$

und durch die Integration von

$$\begin{aligned} L_{n,1} &= \int_a^b r \varphi_{1,0}(r) Z_0(k_{n,1} r) dr \\ &= \int_a^{a_e} r \frac{U_0}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right) Z_0(k_{n,1} r) dr + \int_{a_e}^{b_e} r U_0 Z_0(k_{n,1} r) dr \\ &\quad + \int_{b_e}^b r \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right)} \ln\left(\frac{r}{b}\right) Z_0(k_{n,1} r) dr \end{aligned}$$

zu bestimmen. Der erste und der dritte Summand sind durch partielle Integration zu lösen. Mit $\int x Z_0(cx) dx = \frac{x}{c} Z_1(cx)$ und $\int Z_1(cx) dx = -\frac{1}{c} Z_0(cx)$ [38, 87, 92, 93]

folgt für den ersten Summanden

$$\begin{aligned}
\frac{U_0}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} \int_a^{a_e} r Z_0(k_{n,1} r) \ln\left(\frac{r}{a}\right) dr &= \frac{U_0}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} \left[\frac{r}{k_{n,1}} Z_1(k_{n,1} r) \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{r}{k_{n,1}} Z_1(k_{n,1} r) \frac{1}{r} dr \right]_a^{a_e} \\
&= \frac{U_0}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} \left[\frac{r}{k_{n,1}} Z_1(k_{n,1} r) \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{Z_0(k_{n,1} r)}{k_{n,1}^2} \right]_a^{a_e} \\
&= \frac{U_0}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} \left[\frac{a_e}{k_{n,1}} Z_1(k_{n,1} a_e) \ln\left(\frac{a_e}{a}\right) + \frac{Z_0(k_{n,1} a_e) - Z_0(k_{n,1} a)}{k_{n,1}^2} \right]
\end{aligned}$$

Die Konstante $L_{n,1}$ ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}
L_{n,1} &= \frac{U_0}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} \left[\frac{a_e}{k_{n,1}} Z_1(k_{n,1} a_e) \ln\left(\frac{a_e}{a}\right) + \frac{Z_0(k_{n,1} a_e) - Z_0(k_{n,1} a)}{k_{n,1}^2} \right] \\
&\quad + U_0 \frac{b_e Z_1(k_{n,1} b_e) - a_e Z_1(k_{n,1} a_e)}{k_{n,1}} \\
&\quad - \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right)} \left[\frac{b_e}{k_{n,1}} Z_1(k_{n,1} b_e) \ln\left(\frac{b_e}{b}\right) + \frac{Z_0(k_{n,1} b_e) - Z_0(k_{n,1} b)}{k_{n,1}^2} \right] \\
&= \frac{U_0}{k_{n,1}^2} \left(\frac{Z_0(k_{n,1} a_e) - Z_0(k_{n,1} a)}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} + \frac{Z_0(k_{n,1} b) - Z_0(k_{n,1} b_e)}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right)} \right).
\end{aligned}$$

Die nun vollständig bestimmten Reihenansätze der Potentialfunktionen für den Bereich I des Aufbaus 1 lauten

$$\begin{aligned}
\varphi_{A1,I_1}(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n,1}}{K_{n,1}} \frac{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,1} z)}{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,1} (d-c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (d-c))} Z_0(k_{n,1} r) \\
\varphi_{A1,I_1}(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0 \sinh(k_{n,1} z) Z_0(k_{n,1} r)}{k_{n,1}^2 \left(b^2 Z_1^2(k_{n,1} b) - a^2 Z_1^2(k_{n,1} a) \right)} \\
&\quad \frac{\frac{Z_0(k_{n,1} a_e) - Z_0(k_{n,1} a)}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} + \frac{Z_0(k_{n,1} b) - Z_0(k_{n,1} b_e)}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right)}}{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,1} (d-c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (d-c))} \tag{C.11}
\end{aligned}$$

$$\varphi_{A1,I_2}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n,1}}{K_{n,1}} \frac{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,1} (z-c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (z-c))}{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,1} (d-c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (d-c))} Z_0(k_{n,1} r)$$

$$\varphi_{A1,I_2}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0}{k_{n,1}^2 \left(b^2 Z_1^2(k_{n,1} b) - a^2 Z_1^2(k_{n,1} a) \right)} \left(\frac{Z_0(k_{n,1} a_e) - Z_0(k_{n,1} a)}{\ln\left(\frac{a_e}{a}\right)} + \frac{Z_0(k_{n,1} b) - Z_0(k_{n,1} b_e)}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right)} \right) \quad (C.12)$$

$$\frac{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,1} (z-c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (z-c))}{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,1} (d-c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (d-c))} Z_0(k_{n,1} r) \quad .$$

C.2 Bestimmung der Konstanten für Aufbau 2 im Bereich I

Die in Kapitel 6.5.2 bestimmten, allgemeinen Lösungsansätze für das Potential lauten

$$\varphi_{A2,I_1}(r, z) = \left(a_{0,2} + a_{1,2} \ln(r) \right) (c_{0,2} + c_{1,2} z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{n,2} \sinh(k_{n,2} z) + B_{n,2} \cosh(k_{n,2} z) \right) \left(E_{n,2} J_0(k_{n,2} r) + F_{n,2} N_0(k_{n,2} r) \right)$$

$$\varphi_{A2,I_2}(r, z) = \left(d_{0,2} + d_{1,2} \ln(r) \right) (e_{0,2} + e_{1,2} z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n,2} \sinh(l_{n,2} (z-c)) + D_{n,2} \cosh(l_{n,2} (z-c)) \right) \left(G_{n,2} J_0(l_{n,2} r) + H_{n,2} N_0(l_{n,2} r) \right) .$$

Das Potential bzw. die Ableitung des Potentials an den Rändern bzw. Grenzflächen ist für die Bestimmung der Konstanten des Lösungsansatzes zu betrachten. Für den Bereich I gelten die folgenden Randbedingungen:

$$\varphi_{A2,I_1}(r, 0) = 0 \quad (C.13)$$

$$\varphi_{A2,I_1}(0, z) < \infty \quad (C.14)$$

$$\varphi_{A2,I_1}(b, z) = 0 \quad (C.15)$$

$$\varphi_{A2,I_2}(r, d) = \varphi_{2,0}(r) \quad (C.16)$$

$$\varphi_{A2,I_2}(0, z) < \infty \quad (C.17)$$

$$\varphi_{A2,I_2}(b, z) = 0 \quad (C.18)$$

Aus (C.13) folgt $B_{n,2} = 0$, da $\cosh(0) = 1 \neq 0$ und $a_{0,2} = -a_{1,2} \ln(r)$. Da es sich um linearunabhängige Lösungen handelt, ist diese getrennte Betrachtung zulässig. Weiter führt (C.14), (C.15) zu

$$E_{n,2} J_0(k_{n,2} 0) + F_{n,2} N_0(k_{n,2} 0) < \infty \quad \Rightarrow \quad F_{n,2} = 0, \quad \text{da } N_0(k_{n,2} 0) \rightarrow -\infty$$

$$E_{n,2} J_0(k_{n,2} b) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{n,2} = 1 \quad \text{da beliebig wählbar}$$

und

$$a_{0,2} + a_{1,2} \ln(0) < \infty \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = 0, \quad \text{da } \ln(0) \rightarrow -\infty$$

$$a_{0,2} = 0 \quad .$$

Damit muss die Konstante $k_{n,2}$ die Gleichung

$$J_0(k_{n,2} b) = 0 \tag{C.19}$$

erfüllen. Die Randbedingungen (C.17), (C.18) sind equivalent zu behandeln, womit sich die Lösungen für das Potential zu

$$\varphi_{A2,I_1}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,2} \sinh(k_{n,2} z) J_0(k_{n,2} r)$$

$$\varphi_{A2,I_2}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n,2} \sinh(k_{n,2} (z - c)) + D_{n,2} \cosh(k_{n,2} (z - c)) \right) J_0(k_{n,2} r)$$

reduzieren. Die übrigen Konstanten sind unter Berücksichtigung der Randbedingungen an der Grenzfläche zwischen den Dielektrika $z = c$ der Abbildung 6.34 zu bestimmen. Auch die noch nicht berücksichtigte, auf der Elektrode potentialvorgebende, Randbedingung (C.16) ist zu berücksichtigen. Da diese mit der Anpassung $a \rightarrow 0$, $a_e \rightarrow 0$, $Z_0(k_{n,1} r) \rightarrow J_0(k_{n,2} r)$ äquivalent zum Aufbau 1 sind, können die Ergebnisse aus dem Anhang C.1 übernommen werden. Mit

$$K_{n,2} = \int_0^b r J_0^2(k_{n,2} r) dr = \frac{b^2 J_1^2(k_{n,2} b)}{2} \quad .$$

und

$$\begin{aligned} L_{n,2} &= \int_0^b r \varphi_{2,0}(r) J_0(k_{n,2} r) dr \\ &= \int_0^{b_e} r U_0 J_0(k_{n,2} r) dr + \int_{b_e}^b r \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right)} \ln\left(\frac{r}{b}\right) J_0(k_{n,2} r) dr \\ &= \frac{U_0}{k_{n,1}^2 \ln\left(\frac{b_e}{b}\right)} \left(J_0(k_{n,2} b) - J_0(k_{n,2} b_e) \right) \end{aligned}$$

ergeben sich die vollständig bestimmten Reihenansätze der Potentialfunktionen für den Bereich I des Aufbaus 2 zu

$$\varphi_{A2,I_1}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n,2}}{K_{n,2}} \frac{\sinh(k_{n,2} z)}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sinh(k_{n,2} (d-c)) \cosh(k_{n,2} c) + \sinh(k_{n,2} c) \cosh(k_{n,2} (d-c))} J_0(k_{n,2} r)$$

$$\varphi_{A2,I_1}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0 \sinh(k_{n,2} z) J_0(k_{n,2} r)}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right) b^2 k_{n,2}^2 J_1^2(k_{n,2} b)} \quad (C.20)$$

$$\frac{J_0(k_{n,2} b) - J_0(k_{n,2} b_e)}{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,1} (d-c)) \cosh(k_{n,1} c) + \sinh(k_{n,1} c) \cosh(k_{n,1} (d-c))}$$

$$\varphi_{A2,I_2}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n,2} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,2} (z-c)) \cosh(k_{n,2} c) + \sinh(k_{n,2} c) \cosh(k_{n,2} (z-c))}{K_{n,2} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,2} (d-c)) \cosh(k_{n,2} c) + \sinh(k_{n,2} c) \cosh(k_{n,2} (d-c))} J_0(k_{n,2} r)$$

$$\varphi_{A2,I_2}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0 \left(J_0(k_{n,2} b) - J_0(k_{n,2} b_e) \right)}{\ln\left(\frac{b_e}{b}\right) b^2 k_{n,2}^2 J_1^2(k_{n,2} b)} \quad (C.21)$$

$$\frac{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,2} (z-c)) \cosh(k_{n,2} c) + \sinh(k_{n,2} c) \cosh(k_{n,2} (z-c))}{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sinh(k_{n,2} (d-c)) \cosh(k_{n,2} c) + \sinh(k_{n,2} c) \cosh(k_{n,2} (d-c))} J_0(k_{n,2} r) .$$

C.3 Bestimmung der Konstanten für Aufbau 2 im Bereich II

Im Gegensatz zum Bereich I ist der Potentialverlauf im Bereich II des Aufbaus 2 vollständig mit einer Potentialfunktion beschreibbar. Nach Kapitel 6.5.2 und den erfüllten Randbedingungen $\varphi_{A2,II}(0, z) < \infty$, $\varphi_{A2,II}(b, z) = 0$ gemäß Anhang C.2 lautet der Lösungsansatz für das Potential

$$\varphi_{A2,II}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{n,2} \sinh(k_{n,2} z) + B_{n,2} \cosh(k_{n,2} z) \right) J_0(k_{n,2} r)$$

oder entsprechend dem Bereich I

$$\varphi_{A2,II}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{n,2} \sinh(k_{n,2} (z - f(r))) + B_{n,2} \cosh(k_{n,2} (z - f(r))) \right) J_0(k_{n,2} r)$$

mit der Konstante $k_{n,2}$ aus (C.19). Die Konstanten $A_{n,2}$, $B_{n,2}$ unter Berücksichtigung der verbliebenen Randbedingungen zu bestimmen:

$$\varphi_{A2,II}(r, f(r)) = 0 \quad (C.22)$$

$$\varphi_{A2,II}(r, e) = \varphi_{2,0}(r) . \quad (C.23)$$

Aus der Randbedingung (C.22) und dem zweiten Ansatz folgt $B_{n,2} = 0$, da $\cosh(0) = 1 \neq 0$ gilt. Der erste Ansatz liefert $B_{n,2} = -A_{n,2} \tanh(k_{n,2} f(r))$.

Die Potentialfunktionen reduzieren sich somit weiter zu

$$\varphi_{A2,II}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,2} \left(\sinh(k_{n,2} z) - \tanh(k_{n,2} f(r)) \cosh(k_{n,2} z) \right) J_0(k_{n,2} r)$$

oder entsprechend dem Bereich I

$$\varphi_{A2,II}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,2} \sinh(k_{n,2} (z - f(r))) J_0(k_{n,2} r) .$$

Unter Ausnutzung der Orthogonalitätsbeziehungen der Bessel-Funktionen und der Randbedingung (C.23) ist die Konstante $A_{n,2}$ zu bestimmen. Die Betrachtung der zweiten Potentialgleichung führt zu der Orthogonalitätsbeziehung

$$\varphi_{2,0}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,2} \sinh(k_{n,2}(e - f(r))) J_0(k_{n,2} r)$$

$$\int_0^b r \varphi_{2,0}(r) J_0(k_{n,2} r) dr = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,2} \int_0^b r \sinh(k_{n,2}(e - f(r))) J_0(k_{n,2} r) J_0(k_{m,2} r) dr$$

die analytisch nicht zu lösen ist. Entsprechendes gilt für die erste Potentialgleichung. Für den Bereich II des Aufbaus 2 ist mit den gewählten Ansätzen keine analytische Lösung bestimmbar.

C.4 Bestimmung der idealen Kapazität von Aufbau 2 im Bereich II

C.4.1 Gerade Messelektrode

Ein luftgefüllter $\varepsilon_{r,\text{Luft}} \approx 1$ Kondensator dessen eine gerade Elektrode, mit dem inneren Radius R_i und äußeren Radius R_a , einen radialabhängigen Abstand $d(r)$ zur zweiten Elektrode aufweist, ist entsprechend (6.22) mit

$$C_{A2,II,\text{ideal}} = \frac{\oiint_A \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \cdot \vec{n} dA}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \frac{1}{U_0} \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_a} \varepsilon_0 \frac{U_0}{d(r)} r d\theta dr$$

$$= 2\pi \varepsilon_0 \int_{R_i}^{R_a} \frac{r}{d(r)} dr \quad (\text{C.24})$$

zu bestimmen. Der Elektrodenabstand ist durch $d(r) = d_0 - w(r)$, mit

$$w(r) = w_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R_p} \right)^2 \right) \left(\alpha - \left(\frac{r}{R_p} \right)^2 \right)$$

zu

$$d(r) = w_0 \left(\frac{d_0 - \alpha w_0}{w_0} + (1 + \alpha) \frac{r^2}{R_p^2} - \frac{r^4}{R_p^4} \right) = w_0 \left(a + b \frac{r^2}{c^2} - \frac{r^4}{c^4} \right)$$

gegeben. Für die Kapazität ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} C_{A2,II,ideal} &= 2 \pi \varepsilon_0 \int_{R_i}^{R_a} \frac{r}{w_0 \left(a + b \frac{r^2}{c^2} - \frac{r^4}{c^4} \right)} dr = -2 \pi \varepsilon_0 \frac{c^4}{w_0} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r}{r^4 - b c^2 r^2 - a c^4} dr \\ &= -2 \pi \varepsilon_0 \frac{c^4}{w_0} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r}{\left[r^2 - \frac{b c^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a}{b^2}} \right) \right] \left[r^2 - \frac{b c^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4a}{b^2}} \right) \right]} dr . \end{aligned}$$

Mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x^2 + a)(x^2 + b)} = \frac{1}{b - a} \left(\frac{1}{x^2 + a} - \frac{1}{x^2 + b} \right)$$

und dem Integral

$$\int \frac{x}{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(a^2 - x^2)$$

nach [36], folgt

$$\begin{aligned} C_{A2,II,ideal} &= -\frac{2 \pi \varepsilon_0 c^2}{w_0 \sqrt{b^2 + 4 a^4}} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r}{\frac{b c^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4a}{b^2}} \right) - r^2} - \frac{r}{\frac{b c^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a}{b^2}} \right) - r^2} dr \\ &= -\frac{\pi \varepsilon_0 c^2}{w_0 \sqrt{b^2 + 4 a^4}} \left[\ln \left(\frac{\frac{b c^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a}{b^2}} \right) - r^2}{\frac{b c^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4a}{b^2}} \right) - r^2} \right) \right]_{R_i}^{R_a} \\ &= \frac{\pi \varepsilon_0 c^2}{w_0 \sqrt{b^2 + 4 a^4}} \left[\ln \left(\frac{2 \frac{r^2}{c^2} - \left(b + \sqrt{b^2 + 4 a} \right)}{2 \frac{r^2}{c^2} - \left(b - \sqrt{b^2 + 4 a} \right)} \right) \right]_{R_a}^{R_i} \end{aligned}$$

und mit $a = \frac{d_0 - \alpha w_0}{w_0}$, $b = 1 + \alpha$, $c = R_p$ und den Integrationsgrenzen

$$\begin{aligned} C_{A2,II,ideal} &= \frac{\pi \varepsilon_0 R_p^2}{d_0} \frac{1}{\sqrt{4 \frac{w_0}{d_0} + \frac{w_0^2}{d_0^2} (1 - \alpha)^2}} \\ &\quad \ln \left[\frac{\left(2 \frac{R_i^2}{R_p^2} - \left(1 + \alpha + \sqrt{4 \frac{d_0}{w_0} + (1 - \alpha)^2} \right) \right) \left(2 \frac{R_a^2}{R_p^2} - \left(1 + \alpha - \sqrt{4 \frac{d_0}{w_0} + (1 - \alpha)^2} \right) \right)}{\left(2 \frac{R_i^2}{R_p^2} - \left(1 + \alpha - \sqrt{4 \frac{d_0}{w_0} + (1 - \alpha)^2} \right) \right) \left(2 \frac{R_a^2}{R_p^2} - \left(1 + \alpha + \sqrt{4 \frac{d_0}{w_0} + (1 - \alpha)^2} \right) \right)} \right] . \end{aligned}$$

C.4.2 Angepasste Messelektrode

Weisen beide Elektroden eines Kondensators, der luftgefüllt $\varepsilon_{r,Luft} \approx 1$ ist, eine radiale Abhängigkeit ihrer Höhe auf, so ist deren Abstand $d(r)$ entsprechend zu

Anhang C.4.1 anzupassen. Verfügt eine der Elektroden über einen inneren Radius R_i und äußeren Radius R_a ist die Kapazität entsprechend (C.24) mit

$$C_{A2,II,ideal} = 2\pi\epsilon_0 \int_{R_i}^{R_a} \frac{r}{d(r)} dr$$

zu bestimmen. Der Elektrodenabstand ist durch $d(r) = u(r) - w(r)$, mit

$$u(r) = d_0 + d_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R_p}\right)^2\right) \left(\alpha - \left(\frac{r}{R_p}\right)^2\right)$$

$$w(r) = w_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R_p}\right)^2\right) \left(\alpha - \left(\frac{r}{R_p}\right)^2\right)$$

zu

$$\begin{aligned} d(r) &= \frac{d_{\max} - w_0}{R_p^4} \left(R_p^4 \left(\frac{d_0}{d_{\max} - w_0} + \alpha \right) - (1 + \alpha) R_p^2 r^2 + r^4 \right) \\ &= a (b + c r^2 + r^4) \end{aligned}$$

gegeben. Für die Kapazität ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} C_{A2,II,ideal} &= 2\pi\epsilon_0 \int_{R_i}^{R_a} \frac{r}{a(b + c r^2 + r^4)} dr = \frac{2\pi\epsilon_0}{a} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r}{r^4 + c r^2 + b} dr \\ &= \frac{2\pi\epsilon_0}{a} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r}{\left[r^2 + \frac{c}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{c^2}} \right) \right] \left[r^2 + \frac{c}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b}{c^2}} \right) \right]} dr . \end{aligned}$$

Mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x^2 + a)(x^2 + b)} = \frac{1}{b - a} \left(\frac{1}{x^2 + a} - \frac{1}{x^2 + b} \right)$$

und dem Integral

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$$

nach [36], folgt

$$\begin{aligned} C_{A2,II,ideal} &= -\frac{2\pi\epsilon_0}{a\sqrt{c^2 - 4b}} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r}{r^2 + \frac{c}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{c^2}} \right)} - \frac{r}{r^2 + \frac{c}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b}{c^2}} \right)} dr \\ &= -\frac{\pi\epsilon_0}{a\sqrt{c^2 - 4b}} \left[\ln \left(\frac{r^2 + \frac{c}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{c^2}} \right)}{r^2 + \frac{c}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b}{c^2}} \right)} \right) \right]_{R_i}^{R_a} \\ &= -\frac{\pi\epsilon_0}{a\sqrt{c^2 - 4b}} \left[\ln \left(\frac{2r^2 + c + \sqrt{c^2 - 4b}}{2r^2 + c - \sqrt{c^2 - 4b}} \right) \right]_{R_i}^{R_a} . \end{aligned}$$

Weiter sind zwei Fälle zu betrachten. Für $c^2 - 4b \geq 0$ gilt die Logarithmus-Funktion. Ist Allerdings $c^2 - 4b < 0$ so enthält der Logarithmus eine komplexe Zahl und ist durch eine andere reellwertige Funktion zu beschreiben.

Der Fall $c^2 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1 + \sqrt{\frac{4d_0}{d_{\max} - w_0}}$ führt mit $a = \frac{d_{\max} - w_0}{R_p^4}$, $b = R_p^4 \left(\frac{d_0}{d_{\max} - w_0} + \alpha \right)$, $c = -(1 + \alpha) R_p^2$ und den Integrationsgrenzen zu

$$\begin{aligned}
C_{A2,II,ideal} &= - \frac{\pi \varepsilon_0 R_p^2}{(d_{\max} - w_0) \sqrt{(1-\alpha)^2 - \frac{4d_0}{d_{\max} - w_0}}} \left[\ln \left(\frac{2 \frac{r^2}{R_p^2} - \left(1 + \alpha - \sqrt{(1-\alpha)^2 - \frac{4d_0}{d_{\max} - w_0}}\right)}{2 \frac{r^2}{R_p^2} - \left(1 + \alpha + \sqrt{(1-\alpha)^2 - \frac{4d_0}{d_{\max} - w_0}}\right)} \right) \right]_{R_i}^{R_a} \\
&= \frac{\pi \varepsilon_0 R_p^2}{(d_{\max} - w_0) \sqrt{(1-\alpha)^2 - \frac{4d_0}{d_{\max} - w_0}}} \\
&\quad \ln \left[\frac{\left(2 \frac{R_i^2}{R_p^2} - \left(1 + \alpha - \sqrt{(1-\alpha)^2 - \frac{4d_0}{d_{\max} - w_0}}\right)\right) \left(2 \frac{R_a^2}{R_p^2} - \left(1 + \alpha + \sqrt{(1-\alpha)^2 - \frac{4d_0}{d_{\max} - w_0}}\right)\right)}{\left(2 \frac{R_i^2}{R_p^2} - \left(1 + \alpha + \sqrt{(1-\alpha)^2 - \frac{4d_0}{d_{\max} - w_0}}\right)\right) \left(2 \frac{R_a^2}{R_p^2} - \left(1 + \alpha - \sqrt{(1-\alpha)^2 - \frac{4d_0}{d_{\max} - w_0}}\right)\right)} \right]. \tag{C.25}
\end{aligned}$$

Der zweite Fall $c^2 - 4b < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 + \sqrt{\frac{4d_0}{d_{\max} - w_0}}$ ergibt ein komplexes Argument in der Logarithmus-Funktion.

$$\begin{aligned}
C_{A2,II,ideal} &= - \frac{2 \pi \varepsilon_0}{2j a \sqrt{4b - c^2}} \left[\ln \left(\frac{2r^2 + c + j\sqrt{4b - c^2}}{2r^2 + c - j\sqrt{4b - c^2}} \right) \right]_{R_i}^{R_a} \\
&= - \frac{2 \pi \varepsilon_0}{2j a \sqrt{4b - c^2}} \left[\ln \left(\frac{j \frac{2r^2 + c}{\sqrt{4b - c^2}} - 1}{j \frac{2r^2 + c}{\sqrt{4b - c^2}} + 1} \right) \right]_{R_i}^{R_a}.
\end{aligned}$$

Das komplexe Argument der Logarithmus-Funktion wird mit der Beziehung $\operatorname{arccot}(z) = -\frac{1}{2j} \ln \left(\frac{jz-1}{jz+1} \right)$ in eine reelle Zahl überführt [36]. Mit den Größen $a = \frac{d_{\max} - w_0}{R_p^4}$, $b = R_p^4 \left(\frac{d_0}{d_{\max} - w_0} + \alpha \right)$, $c = -(1 + \alpha) R_p^2$ und den Integrationsgrenzen folgt

$$\begin{aligned}
C_{A2,II,ideal} &= \frac{2 \pi \varepsilon_0}{a \sqrt{4b - c^2}} \left[\operatorname{arccot} \left(\frac{2r^2 + c}{\sqrt{4b - c^2}} \right) \right]_{R_i}^{R_a} \\
&= \frac{2 \pi \varepsilon_0 R_p^2}{(d_{\max} - w_0) \sqrt{\frac{4d_0}{d_{\max} - w_0} - (1 - \alpha)^2}} \left[\operatorname{arccot} \left(\frac{2 \frac{r^2}{R_p^2} - (1 + \alpha)}{\sqrt{\frac{4d_0}{d_{\max} - w_0} - (1 - \alpha)^2}} \right) \right]_{R_i}^{R_a} \\
&= \frac{2 \pi \varepsilon_0 R_p^2}{(d_{\max} - w_0) \sqrt{\frac{4d_0}{d_{\max} - w_0} - (1 - \alpha)^2}} \\
&\quad \left[\operatorname{arccot} \left(\frac{2 \frac{R_a^2}{R_p^2} - (1 + \alpha)}{\sqrt{\frac{4d_0}{d_{\max} - w_0} - (1 - \alpha)^2}} \right) - \operatorname{arccot} \left(\frac{2 \frac{R_i^2}{R_p^2} - (1 + \alpha)}{\sqrt{\frac{4d_0}{d_{\max} - w_0} - (1 - \alpha)^2}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Schließlich führt $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ [36] zu der Kapazität

$$C_{A2,II,ideal} = \frac{2\pi\epsilon_0 R_p^2}{(d_{\max}-w_0)\sqrt{\frac{4d_0}{d_{\max}-w_0}-(1-\alpha)^2}} \left[\arctan\left(\frac{2\frac{R_i^2}{R_p^2}-(1+\alpha)}{\sqrt{\frac{4d_0}{d_{\max}-w_0}-(1-\alpha)^2}}\right) - \arctan\left(\frac{2\frac{R_a^2}{R_p^2}-(1+\alpha)}{\sqrt{\frac{4d_0}{d_{\max}-w_0}-(1-\alpha)^2}}\right) \right].$$

C.5 Betrachtung der Gewichtungsfunktion des Phasenspektrums

Zu betrachten ist die mit

$$\sin^2\left(\frac{\omega_s + \Delta\omega}{2} \Delta T\right) \quad (C.26)$$

gegebene Gewichtungsfunktion des Phasenspektrums in Abhängigkeit der Messzeit ΔT . Die Messzeit ist im Allgemeinen durch

$$\Delta T = N T_s + \delta T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} (N + \delta)$$

das ganzzahlige Vielfache N der Schwingungsperiode T_s und einen Anteil δT_s beschreibbar. Eingesetzt in (C.26) folgt

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\omega_s + \Delta\omega}{2} \frac{2\pi}{\omega_s} (N + \delta)\right) &= \sin^2\left((N + \delta)\pi + (N + \delta)\frac{\Delta\omega}{\omega_s}\pi\right) \\ &= \sin^2\left((N + \delta)\pi + \frac{\Delta\omega \Delta T}{2}\right) \\ &= \left(\sin((N + \delta)\pi) \cos\left(\frac{\Delta\omega \Delta T}{2}\right) + \cos((N + \delta)\pi) \sin\left(\frac{\Delta\omega \Delta T}{2}\right)\right)^2 \\ &= \left(\left[\sin(N\pi) \cos(\delta\pi) + \cos(N\pi) \sin(\delta\pi)\right] \cos\left(\frac{\Delta\omega \Delta T}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left[\cos(N\pi) \cos(\delta\pi) - \sin(N\pi) \sin(\delta\pi)\right] \sin\left(\frac{\Delta\omega \Delta T}{2}\right)\right)^2 \\ &= \left((-1)^N \sin(\delta\pi) \cos\left(\frac{\Delta\omega \Delta T}{2}\right) + (-1)^N \cos(\delta\pi) \sin\left(\frac{\Delta\omega \Delta T}{2}\right)\right)^2 \\ &= \left(\sin(\delta\pi) \cos\left(\frac{\Delta\omega \Delta T}{2}\right) + \cos(\delta\pi) \sin\left(\frac{\Delta\omega \Delta T}{2}\right)\right)^2. \quad (C.27) \end{aligned}$$

Das Phasenrauschspektrum fällt bei großen Frequenzablagen $\Delta\omega \gg 0$ sehr stark ab, womit hier der Bereich der kleinen Frequenzablagen von Interesse ist. Die umgeformte Gewichtungsfunktion (C.27) ist somit für $\Delta\omega \Delta T \ll 1$ zu betrachten und lautet näherungsweise

$$\sin^2\left(\frac{\omega_s + \Delta\omega}{2} \frac{2\pi}{\omega_s} (N + \delta)\right) \approx \left(\sin(\delta\pi) + \cos(\delta\pi) \frac{\Delta\omega \Delta T}{2}\right)^2. \quad (C.28)$$

Die Näherung (C.28) lässt erkennen, dass für $\delta \rightarrow 0$ bzw. $\delta \rightarrow 1$ eine mit $\Delta\omega$ linear ansteigende Funktion in der Klammer resultiert. Der Bereich $0 < \delta < 1$ enthält zusätzlich den konstanten Anteil $\sin(\delta\pi)$, wobei der Klammerausdruck mit $\delta = \frac{1}{2}$, dem Maximum, den Wert 1 aufweist und somit keine Gewichtung mehr darstellt. Die Messzeit ΔT ist demnach mit $\delta \rightarrow 0$ bzw. $\delta \rightarrow 1$ zu wählen, was dem vielfachen einer Schwingungsperiode entspricht. Hierdurch wird die Abhängigkeit des Phasenrauschspektrums von $\sim \Delta f^{-3}$ in $\sim \Delta f^{-2}$ abgeflacht, was in wesentlich geringeren Phasenschwankungen resultiert.

Literaturverzeichnis

- [1] LUCAS, Klaus: *Thermodynamik : Die Grundgesetze der Energie- und Stoffumwandlungen*. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer, 2008
 - [2] BONFIG, Karl W. ; BONFIG, Karl W. (Hrsg.) ; MARTINI, K. H. (Hrsg.): *Technische Druck- und Kraftmessung*. Ehningen bei Böblingen : Technische Akademie Esslingen, expert verlag, 1988
 - [3] RUBNER, Friedrich: *Druckmesstechnik*. München : Oldenbourg Industrieverlag, 2005
 - [4] ROHRBACH, Chr. et. a.: *Verfahren der elektrischen Druckmessung und ihre Anwendung*. Düsseldorf : VDI Verlag, 1966. – Bericht Nr. 93
 - [5] BONFIG, Karl W. ; BARTZ, W. J. ; WOLFF, J. ; BONFIG, Karl W. (Hrsg.): *Sensoren, Meßaufnehmer*. Ehningen bei Böblingen : Expert Verlag, 1988 (Das Handbuch für Ingenieure ; 2)
 - [6] NIEBUHR, Johannes ; LINDNER, Gerhard: *Physikalische Meßtechnik mit Sensoren*. 4., überarb. Aufl. München : Oldenbourg, 1996
 - [7] FRADEN, Jacob: *Handbook of Modern Sensors*. 3. Aufl. New York, NY : Springer, 2004
 - [8] ŽOCHOVSKIJ, Michail K.: *Druck- und Vakuummessgeräte*. Leipzig : Fachbuchverlag Leipzig, 1957
 - [9] NEUMEISTER, Jochen: *Druckmessung mit Oberflächenwellenfiltern sowie resistiven und kapazitiven Dünn- und Dickschichtsensoren*. Düsseldorf : VDI Verlag, Stuttgart, Universität, Diss., 1991. – Reihe 8, Nr. 262
 - [10] HESSE, Stefan ; SCHNELL, Gerhard: *Sensoren für die Prozess- und Fabrikautomation*. 3., vollst. überarb. Aufl. Wiesbaden : Vieweg, 2004
 - [11] PARTHIER, Rainer: *Messtechnik*. 4., verb. Aufl. Wiesbaden : Friedr. Vieweg & Sohn Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2008
 - [12] KOHLRAUSCH, Friedrich: *Praktische Physik 1*. 22., neubearb. und erg. Aufl. Stuttgart : Teubner, 1968
 - [13] BERGMANN, Clemens Ludwig ; S. Ludwig ; Schaefer: *Lehrbuch der Experimentalphysik, Optik*. 9. Aufl. Berlin [u.a.] : de Gruyter, 2004
-

-
- [14] KAO, T.W. (Hrsg.) ; TAYLOR, H.F. (Hrsg.): *High-sensitivity intrinsic fiber-optic Fabry-Perot pressure sensor*. Bd. 21. 1996 (Optics Letters). – S. 615-617
- [15] ABEYSINGHE, Don C. (Hrsg.) ; DASGUPTA, Samhita (Hrsg.) ; BOYD, Joseph T. (Hrsg.) ; JACKSON, Howard E. (Hrsg.): *Optical Fiber Pressure Sensor Based on Photoelasticity and its Application*. Bd. 13. 2001 (IEEE Photonics Technology Letters). – S. 993-995
- [16] WANG, Anbo (Hrsg.) ; XIAOJIAN FANG, Se H. (Hrsg.) ; JIN, Xiaodan (Hrsg.) ; LIN, Junxiu (Hrsg.): *Optical Fiber Pressure Sensor Based on Photoelasticity and its Application*. Bd. 10. 1996 (Journal of Lightwave Technology). – S. 1466-1472
- [17] ZHAO, Yang (Hrsg.) ; ANSARI, Farhad (Hrsg.): *Intrinsic Single-Mode Fiber-Optic Pressure Sensor*. Bd. 13. 2001 (IEEE Photonics Technology Letters). – S. 1212-1214
- [18] MARTENS, Oliver: *Sensor zur zweidimensionalen Strömungsmessung von Newtonschen Fluiden*, Dortmund, Universität, Fachbereich Maschinenbau, Diss., 2006
- [19] FORBRIGER, Thomas (Hrsg.): *Skriptum zur Vorlesung Seismologische Messtechnik - Wegaufnehmer, Karlsruhe, Universität*. 2007
- [20] KOHN, Dietmar: *Untersuchung eines induktiven Spiralsensors als Wegaufnehmer und Anwendung des Sensorelements in Mikroelektronik-Systemen*. VDI-Verlag, München, Universität der Bundeswehr, Fachbereich Elektrotechnik, Diss., 1986 (Reihe 8, Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik; Nr. 120)
- [21] BAXTER, Larry K.: *Capacitive Sensors: Design and Applications*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 1997 (IEEE Press series on electronic technology)
- [22] BONSE, Marcus H. W.: *Capacitive Position Transducers Theoretical Aspects and Practical Applications*, Delft, University of Technology, Diss., 1995
- [23] BENZEL, Hubert: *Bau linearisierter kapazitiver Drucksensoren mit Auswerteschaltungen in Schalter-Kondensator-Technik*. Düsseldorf : VDI Verlag, Stuttgart, Universität, Diss., 1995. – Reihe 8, Nr. 460
- [24] UMRATH, Walter: *Grundlagen der Vakuumtechnik*. Aufl. 07/98. Köln : Leybold Vakuum, 1997
- [25] WUTZ, Max ; ADAM, Hermann ; WALCHER, Wilhelm ; JOUSTEN, Karl (Hrsg.): *Handbuch Vakuumtechnik: Theorie und Praxis*. 7., erw. Aufl. Braunschweig : Vieweg, 2000
-

-
- [26] TIPLER, Gene Paul Allen ; M. Paul Allen ; Mosca ; PELTE, Dietrich (Hrsg.): *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. 2., dt. Aufl. Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag, 2004
- [27] BOWDEN, David Frank P. ; T. Frank P. ; Tabor: *The friction and lubrication of solids*. Nachdr. Oxford [u.a.] : Clarendon Pr., 2001 (Oxford classic texts in the physical sciences)
- [28] POPOV, Valentin. L.: *Kontaktmechanik und Reibung: Ein Lehr- und Anwendungsbuch von der Nanotribologie bis zur numerischen Simulation*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009
- [29] ALTENBACH, Holm ; ALTENBACH, Johannes ; NAUMENKO, Konstantin: *Ebene Flächentragwerke*. Berlin : Springer, 1998
- [30] RAECKE, I.: *Flächentragwerke I/II, Elastische Platten, Skriptum zur Vorlesung*
- [31] TIMOŠENKO, Stepan P. ; WOINOWSKY-KRIEGER, Sergius: *Theory of Plates and Shells*. 2. Aufl. New York [u.a.] : McGraw-Hill, 1959
- [32] SAIBEL, Edward (Hrsg.) ; TADJBAKHS, Iradj (Hrsg.): *Large Deflections of Circular Plates under Uniform and Concentrated Central Loads*. Bd. 11. 1960 (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik 6). – S. 496-503
- [33] EATON, William R. (Hrsg.) ; BITSIE, Fernando (Hrsg.) ; SMITH, James H. (Hrsg.) ; PLUMMER, David W. (Hrsg.): *A New Analytical Solution for Diaphragm Deflection and its Application to a Surface-Micromachined Pressure Sensor*. 1999 (International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems). – S. 640 - 643
- [34] WAY, S. (Hrsg.): *Bending of Circular Plate with Large Deflection*. 1934 (ASME Transactions, Applied Mechanics). – S. 627-636
- [35] CHIEN, Wei-Zang (Hrsg.): *Large Deflection of a Circular Clamped Plate under Uniform Pressure*. 1947 (Chinese Journal of Physics). – S. 169-177
- [36] BRONSTEIN, Il'ja N. ; SEMENDJAJEW, Konstantin A. ; MUSIOL, Gerhard ; MÜHLIG, Heiner ; BRONŠTEJN, Il'ja N. (Hrsg.): *Taschenbuch der Mathematik*. 5., überarb. u. erw. Aufl. Thun, Frankfurt am Main : Harri Deutsch, 2001
- [37] SCHWARZ, Hans R. ; KÖCKLER, Norbert ; SCHWARZ, Hans R. (Hrsg.) ; KÖCKLER, Norbert (Hrsg.): *Numerische Mathematik*. 6., überarb. Aufl. Wiesbaden : B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2006
- [38] ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A. ; ABRAMOWITZ, Milton (Hrsg.): *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 2., korr. Aufl. Washington, D.C. : Dover, 1964
-

-
- [39] HIBBELER, Russel C.: *Technische Mechanik*. Bd. 2: Festigkeitslehre. 5., überarb. u. erw. Aufl. München : Pearson Education, 2006
- [40] DIJK, Piet van (Hrsg.): *A Novel Method for Accurate Measurement of Elastic and Plastic Properties of Contact Spring Materials*. 2006 (Proc. 23th Conf. On Electrical Contacts ICEC)
- [41] WESTIG, Ergste (Hrsg.): *Rostfreier Federbandstahl Argeste 1.4310*. 2007. – Federbandkatalog
- [42] GROTE, Karl-Heinrich ; BEITZ, Wolfgang ; DUBBEL, Heinrich (Hrsg.) ; BEITZ, Wolfgang (Hrsg.): *DUBBEL Taschenbuch für den Maschinenbau*. 20., neubearb. u. erw. Aufl. Berlin : Springer, 2001
- [43] HEERENS, W. C. (Hrsg.): *Application of capacitance techniques in sensor design*. 1986 (Journal of Physics E: Scientific Instruments, Vol. 19). – S. 897-906
- [44] ZHU, Fang: *Development of Capacitive Position Transducers Through a Mechatronic Approach*, Delft, University of Technology, Diss., 1992
- [45] PARZHUBER, Otto: *Untersuchung und Optimierung von Meßoszillatoren für kapazitive Sensoren*, München, Universität der Bundeswehr, Fachbereich Elektrotechnik, Diss., 1991
- [46] NEUBIG, Bernd ; BRIESE, Wolfgang: *Das Grosse Quarzkochbuch*. Franzis, 1997
- [47] GREBENNIKOV, Andrei: *RF and Microwave Transistor Oscillator Design*. Chichester : Wiley, 2007
- [48] ROHDE, David P. Ulrich L. ; Newkirk N. Ulrich L. ; Newkirk: *RF-Microwave Circuit Design for Wireless Applications*. New York, NY : Wiley, 2000
- [49] KOSTER, Bettina (Hrsg.) ; WALDOW, Peter (Hrsg.) ; WOLFF, Ingo (Hrsg.): *A unique, low-voltage, source-coupled J-FET VCO*. 2001 (RF Singal Processing). – S. 58-68
- [50] KOSTER, Norbert H. (Hrsg.) ; KOSTER, Bettina J. (Hrsg.) ; ERNI, Daniel (Hrsg.) ; BEYER, Adalbert (Hrsg.): *Oscillator Design for Suppressing Spurious Signals*. 2007 (IEEE microwave magazine). – S. 67-80
- [51] KOSTER, Bettina (Hrsg.) ; WALDOW, Peter (Hrsg.) ; WOLFF, Ingo (Hrsg.) ; BEYER, Adalbert (Hrsg.): *An Experimental Low-Voltage I-Band Oscillator Assembled With Only Five SMD-Components*. 2003 (ARFTG Conference Digest). – S. 117- 124
- [52] BLUM, Alfons: *Elektronisches Rauschen*. Stuttgart : Teubner, 1996
-

-
- [53] DAVENPORT, Wilbur B. ; ROOT, William L.: *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*. New York [u.a.] : McGraw-Hill, 1958
- [54] BITTEL, Heinz ; STORM, Leo: *Rauschen*. Berlin : Springer, 1971
- [55] MÜLLER, Rudolf: *Rauschen*. 2., überarb. u. erw. Aufl. Berlin : Springer, 1990
- [56] BENEKING, Heinz: *Praxis des elektronischen Rauschens*. Mannheim : Hochschulkripten Bibliographisches Institut, 1971
- [57] CONNOR, Frank R.: *Rauschen*. Braunschweig : Vieweg, 1986
- [58] ANZILL, Werner J.: *Berechnung und Optimierung des Phasenrauschens von Oszillatoren*, München, Technische Universität, Fachbereich Elektrotechnik, Diss., 1994
- [59] HAJIMIRI, Ali (Hrsg.) ; LEE, Thomas H. (Hrsg.): *A General Theory of Phase Noise in Electrical Oscillators*. 1998 (IEEE Journal Solid-State Circuits, Vol. 33). – S. 179-194
- [60] HAJIMIRI, Ali (Hrsg.) ; LEE, Thomas H. (Hrsg.): *Oscillator Phase Noise: A Tutorial*. 2000 (IEEE Journal Solid-State Circuits, Vol. 35). – S. 326-336
- [61] BRAUN, Günter: *Impedanz-Rauschanpassung in Transistoroszillatoren zur Optimierung des Rauschabstandes*, München, Universität der Bundeswehr, Fachbereich Elektrotechnik, Diss., 1985
- [62] LEESON, D. B. (Hrsg.) ; IEEE (Veranst.): *A Simple Model of Feedback Oscillator Noise Spectrum*. Bd. 54. 1966 (Proceedings Letters). – S. 329-330
- [63] FALK, Thomas (Hrsg.) ; SCHWARZ, Wolfgang (Hrsg.): *Rauschanalyse von Oszillatoren mit Empfindlichkeitsfunktionen*. 2001 (Proc. E.I.S. Workshop)
- [64] DEMIR, Alper (Hrsg.) ; MEHROTRA, Amit (Hrsg.) ; ROYCHOWDHURY, Jaijeet (Hrsg.): *Phase Noise in Oscillators: A Unifying Theory and Numerical Methods for Characterization*. 2000 (IEEE Transactions in circuits and systems, Vol. 47). – S. 655-674
- [65] EDSON, W. A. (Hrsg.): *Noise in Oscillators*. 1960 (Proc. IRE, Vol. 48). – S. 1454-1466
- [66] HAJIMIRI, Ali (Hrsg.) ; LIMOTYRAKIS, Sotirios (Hrsg.) ; LEE, Thomas H. (Hrsg.): *Jitter and phase noise in ring oscillators*. 1999 (IEEE Journal of Solid-state Circuits, Vol. 34). – S. 790-803
- [67] DRAKHLIS, Boris (Hrsg.): *Calculate Oscillator Jitter By Using Phase-Noise Analysis*. 2001 (Microwaves & RF). – S. 82-90, 157
-

-
- [68] STECHER, Rudolf: *Messung von Zeit und Frequenz*. Berlin : Verlag Technik Berlin, 1990
- [69] LERCH, Reinhard: *Elektrische Messtechnik : Analoge, digitale und computer-gestützte Verfahren*. 4., neu bearb. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer, 2007
- [70] ZINKE, Otto ; BRUNSWIG, Heinrich ; MAYER, Konrad (Hrsg.): *Hochfrequenz-technik 2*. 5., Neubearb. Aufl. Berlin : Springer, 1999
- [71] OPPENHEIM, Alan V. ; SCHAFER, Ronald W.: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. München : Oldenbourg, 1995
- [72] BEST, Roland: *Digitale Signalverarbeitung und -simulation*. Aarau / Schweiz : AT Verlag, 1989
- [73] GASIOR, M. (Hrsg.) ; GONZALEZ, J.L. (Hrsg.): *Improving FFT Frequency Measurement Resolution by Parabolic and Gaussian Spectrum Interpolation*. 2004 (Beam Instrumentation Workshop. AIP Conference Proceedings, Vol. 732). – S. 276-285
- [74] THRANE, N.: *Zoom-FFT*. Brüel & Kjær, 1980 (Technical Review No. 2)
- [75] KALISZ, József (Hrsg.): *Review of methods for time interval measurements with picosecond resolution*. 2004 (Metrologia 41). – S. 17–32
- [76] CHEN, Poki (Hrsg.) ; ZHENG, Jia-Chi (Hrsg.) ; CHEN, Chun-Chi (Hrsg.): *A Monolithic Vernier-Based Time-to-Digital Converter with Dual PLLs for Self-Calibration*. 2005 (IEEE Custom Integrated Circuits Conference). – S. 321-324
- [77] RAISANEN-RUOTSALAINEN, E. (Hrsg.) ; RAHKONEN, T. (Hrsg.) ; KOSTAMO-VAARA, J. (Hrsg.): *A BiCMOS time-to-digital converter with 30 ps resolution*. 1999 (Circuits and Systems, 1999. ISCAS '99. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on). – S. 278-281
- [78] SUSTER, Michael (Hrsg.) ; GUO, Jun (Hrsg.) ; CHAIMANONART, Nattapon (Hrsg.) ; KO, Wen H. (Hrsg.) ; YOUNG, Darrin J. (Hrsg.): *A High-Performance MEMS Capacitive Strain Sensing System*. 2006 (IEEE Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 15, No. 5). – S. 1069-1077
- [79] O'DOWD, J. (Hrsg.) ; CALLANAN, A. (Hrsg.) ; BANARIE, G. (Hrsg.) ; COMPANY-BOSCH, E. (Hrsg.): *Capacitive sensor interfacing using sigma-delta techniques*. 2005 (Sensors, IEEE). – S. 951–954
- [80] BINGESSER, M. (Hrsg.) ; LOELIGER, T. (Hrsg.) ; HINN, W. (Hrsg.) ; HAUER, J. (Hrsg.) ; MODL, S. (Hrsg.): *Low-Noise Sigma-Delta Capacitance-to-Digital Converter for Sub-pF Capacitive Sensors with Integrated Dielectric Loss Measurement*. 2008 (Design, Automation and Test in Europe, 2008). – S. 868-872
-

-
- [81] MALOBERTI, Franco: *Data Converters*. Secaucus, NJ, USA : Springer, 2007
- [82] BRYCHTA, Michal: *Measure Capacitive Sensors with a Sigma-Delta Modulator*. 2005 (Electronic design online journal, April, 2005)
- [83] DEVICES, Analog: *Integrated capacitance to digital converter AD7745/6/7*. – Datenblätter, <http://www.analog.com>
- [84] HENKE, Heino ; HENKE, Heino (Hrsg.): *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. 3., erw. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer, 2007
- [85] LEHNER, Günther: *Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker*. 6. Aufl. Berlin : Springer, 2008
- [86] WOLFF, Ingo: *Maxwellsche Theorie: Grundlagen und Anwendungen*. 4. überarb. Aufl. Berlin : Springer, 1997
- [87] MOON, Parry ; SPENCER, Domina E.: *Field Theory Handbook*. 2. Aufl. Heidelberg : Springer, 1971
- [88] HEERENS, W. C. (Hrsg.): *The solution of Laplace's equation in cylindrical and toroidal configurations with rectangular sectional shapes and rotation-symmetrical boundary conditions*. 1976 (Journal of Applied Physics, Vol 47, No. 8). – S. 3740-3744
- [89] SIMONS, J. (Hrsg.) ; HEERENS, W. C. (Hrsg.): *Convergent Fourier-Bessel series to calculate potential and field strength in rotationally symmetric lens systems*. 1984 (Journal of Applied Physics, Vol. 56, No. 3). – S. 648-668
- [90] ALLAN, D. W. (Hrsg.): *Statistics of Atomic Frequency Standards*. 1966 (Proc. IEEE 54). – S. 221-230
- [91] BARNES, J. A. (Hrsg.) ; CHI, A. R. (Hrsg.) ; CUTLER, L. S. (Hrsg.) ; HEALEY, D. J. (Hrsg.) ; LEESON, D. B. (Hrsg.) ; MCGUNIGAL, T. E. (Hrsg.) ; JR., J. A. M. (Hrsg.) ; SMITH, W. L. (Hrsg.) ; SYDNOR, R. L. (Hrsg.) ; VESSOT, R. F. C. (Hrsg.) ; WINKLER, G. M. R. (Hrsg.): *Characterization of frequency stability*. 1971 (IEEE Trans. Instrum. Meas. IM-20). – S. 105-120
- [92] PRUDNIKOV, Anatolij P.: *Integrals and Series Vol. 2, Special functions*. New York : Gordon & Breach, 1986
- [93] GRADSTEIN, Izrail' S. ; RYZHIK, Iosif M. ; JEFFREY, Alan (Hrsg.) ; ZWILLINGER, Daniel (Hrsg.): *Table of integrals, series, and products*. 7. Aufl. Amsterdam : Elsevier, 2007
- [94] JACOB, Arne: *Stabilität und Rauschen von Mesfet-Oszillatoren*, Braunschweig, Universität, Fak. f. Maschinenbau u. Elektrotechnik, Diss, 1986
-

-
- [95] MARTIN, Jörg: *Entwicklung, Herstellung und Erprobung mikromechanischer Druck- und Durchflußsensoren für pneumatische Anwendungen*, Karlsruhe, Forschungszentrum, Diss., 1998
- [96] MEHLHORN, Thorsten: *Kapazitiver Silizium-Drucksensor mit integrierter Signalverarbeitung*, Berlin, Technische Universität, Fachbereich Elektrotechnik, Diss., 1995
- [97] KÖHLER, Albert: *Die Entwicklung von aufgedampften Messwertaufnehmern und deren Anwendung zur Druck- und Temperaturmessung in geschmierten Wälz- und Gleitkontakten*, Aachen, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, Diss., 1981
- [98] EISELE, Ronald: *Kohärenzeigenschaften von Halbleiterlichtquellen und Verfahren für einen faseroptischen Drucksensor*, Kiel, Christian-Albrechts-Universität, Fachbereich Elektrotechnik, Diss., 1994
- [99] KASTEN, Klaus: *Entwicklung und Charakterisierung eines integrierten kapazitiven Hochtemperaturdrucksensors*. Düsseldorf : VDI Verlag, Aachen, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, Universität, Diss., 2002. – Reihe 9, Nr. 349
- [100] TOMASI, Luca: *A new micromachined piezoresistive pressure sensor with dual range and self-test functionalities*. VDI Verlag, Berlin, Technische Universität, Diss., 2007. – Reihe 9, Nr. 378
- [101] DEMIR, Alper (Hrsg.): *Computing Timing Jitter From Phase Noise Spectra for Oscillators and Phase-Locked Loops With White and 1/f Noise*. 2006 (IEEE Transactions in circuits and systems, Vol. 53). – S. 1869-1884
-

LEBENS LAUF

PERSÖNLICHE DATEN

Name	Christof Dropalla
Geburtsdatum	31.10.1981
Geburtsort	Strzelce Opolskie (Groß Strehlitz), Polen
Familienstand	verheiratet, 1 Kind

AUSBILDUNG

08/1988 - 07/1992	Grundschule, Żędowice (Sandowitz, Polen), Dortmund
08/1992 - 07/1998	Gustav-Heinemann-Gesamtschule, Dortmund
08/1998 - 09/2001	Berufsausbildung, Universität Dortmund Abschluss: Kommunikationselektroniker
08/1999 - 06/2001	Leopold-Hoesch-Berufskolleg, Dortmund Abschluss: Fachhochschulreife
10/2002 - 09/2006	Studium der Elektrotechnik und Informationstechnik Universität Duisburg-Essen, Duisburg Vertiefungsrichtung: Steuer- und Regelungstechnik Abschluss: Diplom-Ingenieur

WEHR-/ZIVILDIENTST

10/2001 - 07/2002	Zivildienst, Rettungshelfer, Malteser Hilfsdienst, Dortmund
-------------------	---

BERUFLICHE TÄTIGKEIT

08/2002 - 09/2002	Rettungshelfer, Malteser Hilfsdienst, Dortmund
11/2002 - 04/2006	Studentische Hilfskraft, Fachgebiet Messtechnik, Technische Universität Dortmund
10/2006 - 07/2010	Wissenschaftlicher Angestellter, Fachgebiet Messtechnik, Technische Universität Dortmund
ab 08/2010	Hardwareentwickler, Leopold KOSTAL GmbH & Co. KG, Standort Dortmund