

Hartmut Rehlich, Friedrich-Schiller-Universität Jena

James Bond im Spiegelkabinett

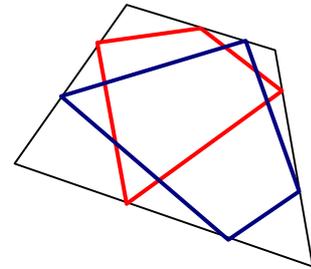
Bemerkungen zu Beobachtungen bei der Arbeit in einem Problemfeld

Vorbemerkung:

Die folgenden Ausführungen sind knapp gehalten. Unter Punkt 2 ist manches plakativ und thesenartig und spiegelt persönliche Haltungen und Erfahrungen wider. Der Autor hofft auf einen gewissen Konsens hinsichtlich der Wertschätzung einer an konstruktivistische Lerntheorien angelehnten Unterrichtsführung und auf gutmütige Leser. Unter Punkt 3 werden interessante Strukturen im Problemfeld und verschiedene Denkwege skizziert.

1. Das Problemfeld

Man kann einem konvexen Polygon Rundwege einbeschreiben, die jede Seite in genau einem Punkt außerhalb der Ecken berühren. Zwei solcher Rundwege sind in der Skizze einem Viereck einbeschrieben. Durch die Frage nach kürzesten Rundwegen dieser Art in Polygonen ist ein Problemfeld vorgegeben.



2. Ein Metaproblem: Gewohnheiten steuern Herangehensweisen

Ich habe sowohl Teilnehmer des Hamburger Projekts zur Begabtenförderung, als auch Studierende aus meinen Lehrveranstaltungen bei der Arbeit in diesem Problemfeld beobachtet. Dabei zeigten sich erhebliche Unterschiede in der Variabilität der Herangehensweisen, die man grob in die Kategorien „Anwendung von Wissen und Verfahren“ und „heuristisches Arbeiten“ differenzieren kann. Für das Dreieck wurden von der ersten Gruppe z. B. erst einmal spezielle Dreiecke oder spezielle Wege in einem Dreieck betrachtet, während die andere Gruppe in breiter Mehrheit bemüht war, das Problem „in ein Koordinatensystem zu pressen“ und mit den Mitteln der Differentialrechnung zu bearbeiten (ein Weg, der auf mehr „mathematisches Handwerkszeug“ schließen läßt, hier aber nicht zum Erfolg führte). Diese Beobachtung ist kein Einzelfall. Sie ist bei fast jeder Aufgabe reproduzierbar. Man kann wohl feststellen, daß solche durch fachsoziale Erfahrungen gebildeten Handlungsmuster nicht zu einem guten Unterricht an allgemeinbildenden Schulen passen, da man die Vorhersage wagen darf, daß sie einen „linear-vermittelnden Unterrichtsstil in der späteren Berufspraxis begünstigen. Die Übungsaufgaben zu den Vorlesungen böten zwar eigentlich hinreichend Gelegenheit zu freierer

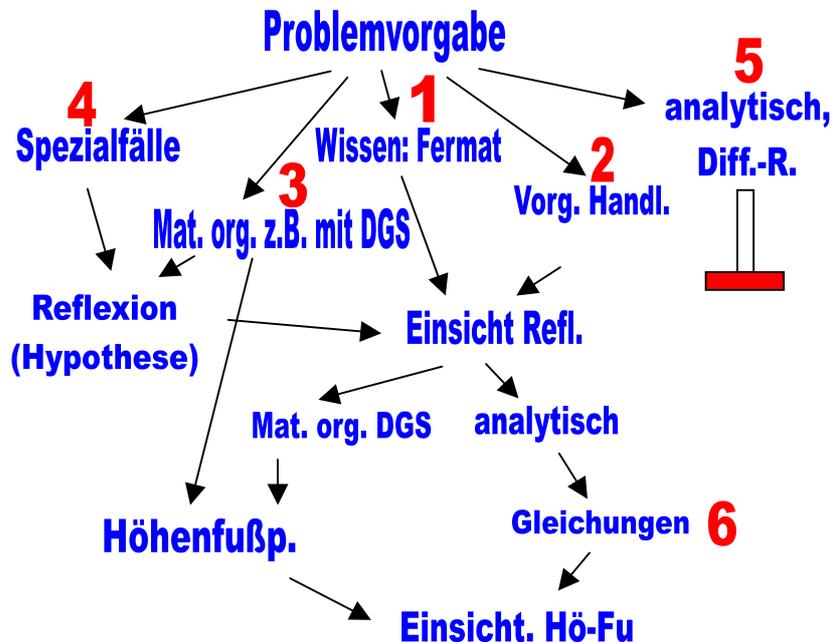
eigentlich hinreichend Gelegenheit zu freierer Arbeit, aber leider bleibt den Studierenden dafür selten die nötige Muße (manchen fehlt aber auch schlicht das Interesse) und die Lösungen der Übungsaufgaben werden schnell „abgehakt“ oder sogar abgeschrieben.

Um zu diesen prägenden Erfahrungen ein kleines Gegengewicht zu setzen, werden an einigen Universitäten (auch in Jena) „Problemlöseseminare“ angeboten. Hier können die Studierenden eigene Erfahrungen bei der Arbeit in facettenreichen elementarmathematischen Problemfeldern sammeln. Sie erfahren dabei, daß es oft ganz unterschiedliche Denkweisen und Bearbeitungswege für ein Problem geben kann und trainieren auch ihre Wahrnehmung hinsichtlich dessen, was andere denken (letzteres ist für Lehrer unverzichtbar). Über die Annahme der Nützlichkeit, vielleicht sogar Notwendigkeit solcher Veranstaltungen ist bei der Sichtung aktueller mathematikdidaktischer Veröffentlichungen ein breiter Konsens zu sehen. Dieser darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß die Vorstellungen über die Ausgestaltung durchaus zwischen zwei extremen Polen rangieren können. Metaphorisch ausgedrückt kann man es für richtig halten, Gelegenheiten zur Erlernung des Seiltanzes durch ein gespanntes Seil zu schaffen oder Wissen über Kinematik und Biomechanik zu vermitteln. Letzteres kann durchaus für sich interessant sein, liegt aber in seiner Wirkung grundsätzlich neben der Hauptabsicht, da hierbei vor allem deklaratives Wissen, aber kein Können aufgebaut wird. Bei der Beobachtung guter „Problemlöser“ zeigt sich immer wieder, daß eine Schulung selbständigen Denkens letztlich am besten über ein weitgehend unreflektiertes Training möglich ist. Der Nutzen der Metakognition und übersichtlicher Gliederungen heuristischer Strategien liegt eher in der Kommunikation über Problemlösen, als im Problemlösen. Begriffsorientierte Lehrveranstaltungen tragen zudem die Gefahr in sich, daß nur ein neues Feld unerlebten fremden Expertenwissens für die Studenten angerissen wird, das diese dann, von den oben genannten Gewohnheiten gesteuert, „seelenlos lernen“. Es gibt keine „Abkürzung“. Durch Erfahrung gebildete, die Handlungen einer Person steuernde mentale Netze können nicht durch aufgesetzte Begriffe ersetzt werden. Dieser Unterschied findet eine Analogie bei mathematischen Verallgemeinerungen: Für die Qualität der mathematischen Kompetenz einer Person bietet ein durch eigene Erfahrungen geknüpftes Zusammenhangsnetz eine wesentlich bessere Grundlage als „fremde Fertigprodukte“, deren Akzeptanz oft genug nur durch das „Gängelband der Logik“ erzwungen wird.¹

¹ Eine Beschreibung von Wesensunterschieden der auf diesen verschiedenen Wegen gewonnenen, nur scheinbar gleichwertigen Erkenntnisse findet man z.B. in Schopenhauers Dissertation „Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde“.

3. Bewegungsmöglichkeiten im Problemfeld

Zunächst werden exemplarisch beobachtete unterschiedliche Denkwege zur Frage nach kürzesten Rundwegen im Dreieck skizziert.



1 Für diejenigen, die das Fermatsche Prinzip kennen (Lichtweg = kürzester Weg), ist das gesuchte (Licht-) Dreieck im (verspiegelten) Dreieck sofort durch die Gleichheit der Reflexionswinkel gekennzeichnet.

2 Die Gleichheit gewisser Winkel als notwendige Bedingung ergibt sich z.B. auch durch die Vorstellung einer Handlung (Rundweg als gespannter Gummiring, Tauziehen).



3 Bei der Arbeit mit einem DGS-System (oder „per Hand“) kann die Lage der Berührungspunkte (Höhenfußpunkte) oder auch die Reflexionsbedingung ins Auge fallen. Diese kann dann bewiesen werden (davon später).

4 Man kann eine Reihe von Spezialfällen (z.B. gleichschenklige oder rechtwinklige Dreiecke) mit Erfolg algebraisch oder geometrisch analysieren und Hypothesen ableiten.

5 Standardverfahren aus der mehrdimensionalen Analysis führten bei Studenten in eine Sackgasse (das GS wird sehr komplex).

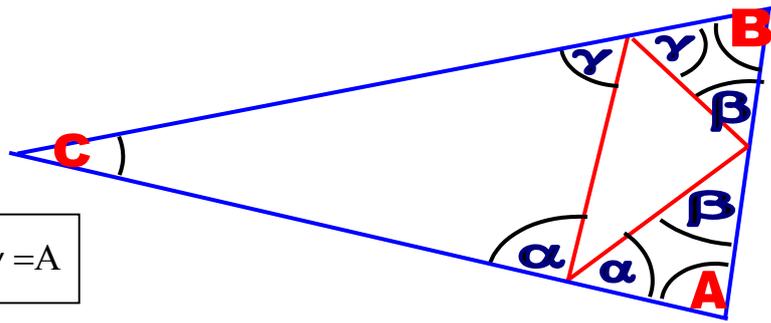
6 Nach der Einsicht der Reflexionsbedingung wurde von einigen Problemlösern das folgende Gleichungssystem aufgestellt:

$$A + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$B + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$C + \gamma + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = B, \quad \beta = C, \quad \gamma = A$$



Das Gleichungssystem ist symmetrisch. Interessant ist, daß sich im weiteren Verlauf der Problembearbeitung die Fälle ungeradzahlicher Eckenzahl von denen mit geradzahlicher Eckenzahl wesentlich unterscheiden. Im ungeraden Fall kann es nur genau eine oder keine Lösung geben, im geraden Fall gibt es Vorgaben mit einem Lösungskontinuum (z.B. bei bestimmten Sehnenvierecken). Die Reichhaltigkeit erfolgsversprechender Herangehensweisen an dieses Problemfeld ist enorm und kann hier nur angerissen werden. Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die Assoziation eines Duells im Spiegelkabinett aus einem Vorspann zu einem James Bond Film einem Teilnehmer aus der Begabtenförderung die Idee brachte, nach geraden Wegen in den virtuellen Nachbarwelten zu suchen. Mit einer Laserpistole hätte Bond auf irgendein Spiegelbild des Gegners zielen können und diesen sicher getroffen; die Aufgabenstellung verlangt also einen „Schuß in den eigenen Rücken“. Das folgende Bild zeigt eine so gewonnene Konstruktion eines geschlossenen Lichtwegs der gesuchten Art in einem Sehnenviereck. Diese Konstruktionsmethode beweist mit etwas Überlegung dann auch die Gültigkeit des Fermatschen Prinzips in diesem Falle.

