

Georg SCHIERSCHER, Schaan (Liechtenstein)

Das Reuleaux-Dreieck – ein bizarrer Rotor und Kurvengenerator

Vorbemerkung

Im US-Patent 1,241,175-7 ist die Erfindung einer Bohrvorrichtung festgehalten (Watts, 1917). Der Bohrkopf hat die Form eines Deltoids (**Abb. 1a**). Dieses zu Ehren des Kinematikers Reuleaux benannte Reuleaux-Dreieck (ReD) bewegt sich als Rotor im Quadrat. Damit lassen sich (fast) quadratische Löcher bohren.

Zum Einstieg braucht es asketisch wenig: Papier und Bleistift und ein aus Karton selbstgebasteltes Modell. Damit lassen sich beliebig viele ästhetisch ansprechende Bahnen bewegter Punkte des Rotors aufzeichnen. Mathematische Fragen drängen sich beim Experimentieren von selbst auf und fordern zu Eigenaktivität heraus. Das Thema lässt sich im \mathbb{R}^2 vielfältig variieren (z. B. Reuleaux-Dreieck im Rhombus, Reuleaux-Zweieck im Dreieck), in das umfassendere Thema der Gleichdicke einbetten und auf den \mathbb{R}^3 verallgemeinern (Reuleaux-Tetraeder, Meissnerscher Körper).

Das Reuleaux-Dreieck als Gleichdicke



Abb. 1: Verschiedene Gleichdicke

Das ReD ist nach dem Kreis das einfachste Gleichdicke (vgl. den Kolben im Wankelmotor); es kann als solches passgenau in einem ihm umschriebenen Quadrat rotieren. Diese Figur ist Zierstück in gotischen Masswerken (**Abb. 1b**), und Münzen vieler Länder sind als Gleichdicke geformt (**Abb. 1c**).

Das Reuleaux-Dreieck als Rotor

Aufgrund der Konstruktionsvorschrift des ReD können seine Bewegung im Quadrat bereits mit dem Computer (z. B. Turtlegraphik) simuliert und die Bahnen beliebiger, mit dem Rotor fest verbundenen Punkte gezeichnet werden:

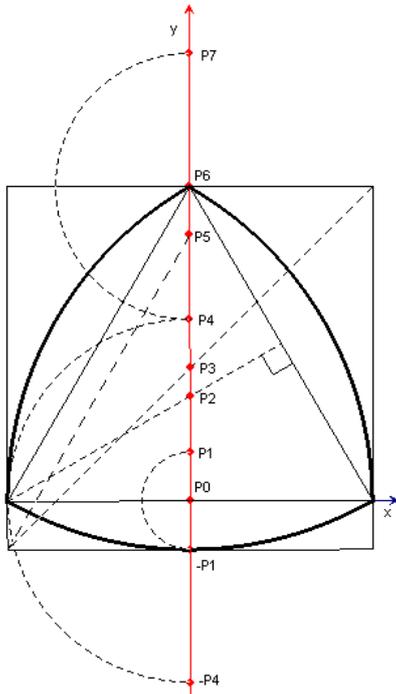


Abb. 2: Ausgewählte Punkte der Symmetrieachse des ReD

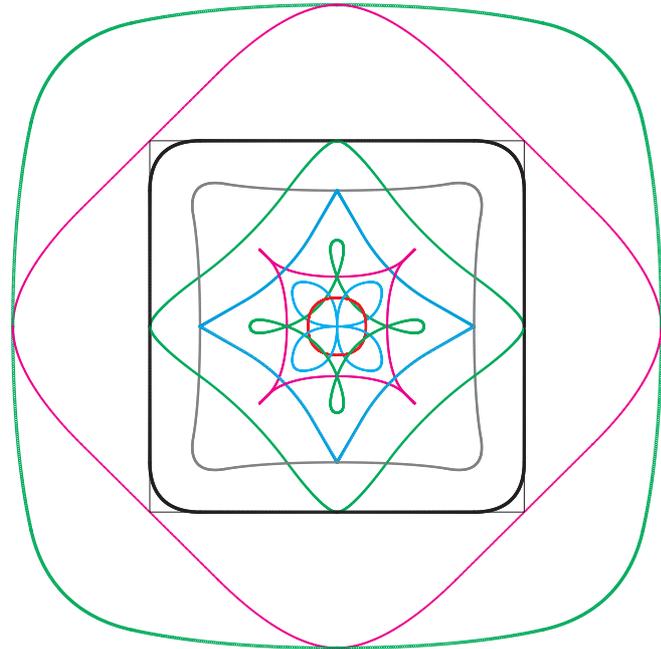


Abb. 3: Bahnen der ausgewählten Punkte bei Rotation des ReD

Vorläufige Beobachtungen: Die Bahn des Punktes P6 ist die Kontur des (fast-)quadratischen „Bohrloches“, die Bahnen der Punkte P0, P4 und P6 enthalten geradlinige Abschnitte, die Spur des Rotormittelpunktes P2 ähnelt einem Kreis und der Punkt P1 sowie der Quadratmittelpunkt P3 beschreiben Schleifen.

Bewegungsablauf des ReD in einem Winkelfeld des Quadrates

Wir lassen das ReD - wie die Bohrmaschine - im Uhrzeigersinn laufen. Die vierstrahlige Symmetrie der Bahnen legt nahe, das Augenmerk auf den Bewegungsablauf im Winkelfeld *einer* der Quadratecken (z. B. E1, **Abb. 4**) zu richten. Die Bewegung besteht aus drei Phasen zu je 30° . Die sämtlichen

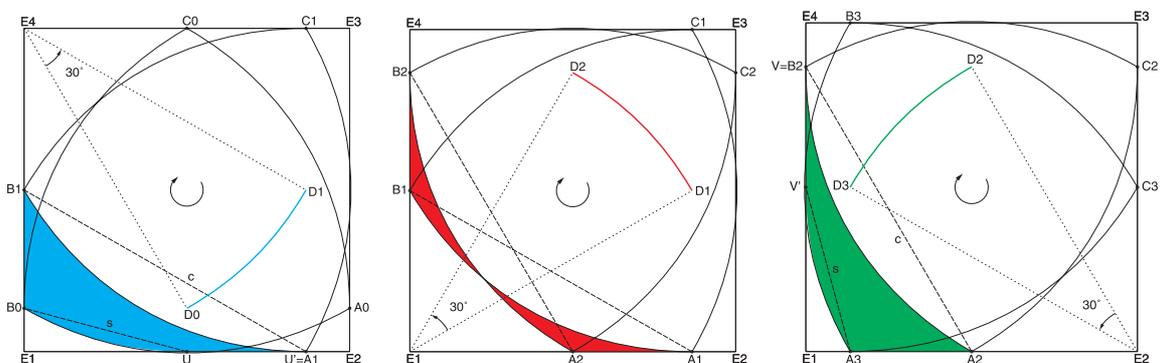


Abb. 4: Aus drei Phasen zusammengesetzte Vierteldrehung des ReD im Quadrat

Lagen des ReD als starrem System sind durch die Position zweier beliebiger Systempunkte eindeutig bestimmt – wir haben es mit einer Zweipunktführung zu tun.

Phase 1: *Variable Gleitsehnenlänge*

In der Startposition (**Abb. 4a**) berührt der Rotorbogen $\widehat{A0B0}$ die Leitstrecke E1E2 im Gleitpunkt U, das Bogenende B0 ist Gleitpunkt auf E1E4. Beim Übergang des Rotorbogens in die Endposition (A1B1) gleitet U nach rechts bis A1.

Die Bahnnormalen der Gleitpunkte U und B0 schneiden sich jeweils im augenblicklichen Drehpol. Dieser wandert gegenläufig zum Rotor auf dem Kreisbogen um E4 – mit der Seitenlänge c des Quadrates als Radius – von D0 nach D1 und überstreicht dabei erwartungsgemäss einen 30° -Winkel.

Phase 2: *Konstante Gleitsehnenlänge*

In der Startposition berührt der Rotorbogen $\widehat{A1B1}$ die Leitstrecke E1E2 „einseitig“ in A1; in der Endposition berührt er die andere Leitstrecke „einseitig“ in B2. Beim Übergang von der Start- in die Endposition behält die Sehne A1B1 ihre konstante Länge c : Es liegt die klassische Situation der Bewegung am Ellipsenzirkel (**Abb. 5**) vor.

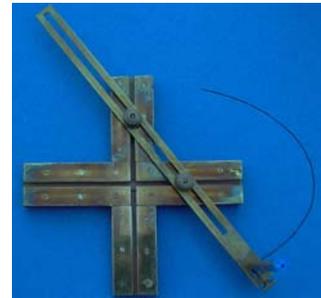


Abb. 5: Ellipsenzirkel

In dieser Phase beschreibt jeder Punkt auf der Symmetrieachse des Rotors (**Abb. 2**) einen zur Diagonalen (E1E3) (**Abb. 4**) symmetrischen Ellipsenbogen mit dem Öffnungswinkel von 30° . Dabei kann dieser Ellipsenbogen im speziellen Falle (in welchem?) ein Kreisbogen sein oder zu einer einfachen oder zweizähligen Strecke entarten.

Phase 3: *Variable Gleitsehnenlänge*

Erklärt sich aus der Symmetrie zu Phase 1 (**Abb. 4a, c**).

Bei einer Voldrehung des Rotors wird die Kurve der Drehpole D0D1D2D3D0 dreimal entgegen der Rotordrehrichtung durchlaufen.

Berechnungen und Bahncharakteristiken

Die Herleitung - mittels einfacher trigonometrischer Beziehungen an rechtwinkligen Dreiecken - und eine eingehende Diskussion der Bahngleichungen muss hier aus Platzgründen unterbleiben¹, ebenso die (elementare) Berechnung der vom ReD überstrichenen Fläche A ($A = \left(\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3} - 3\right)c^2$);

¹ Interessierte können darüber im gleichnamigen Aufsatz in *mathematik lehren* vom Juni 2005 zum Thema Kurven mehr erfahren.

ferner kann nachfolgend auch nur eine kleine Auswahl an Bahnen und deren „Erweiterten“ gezeigt werden.

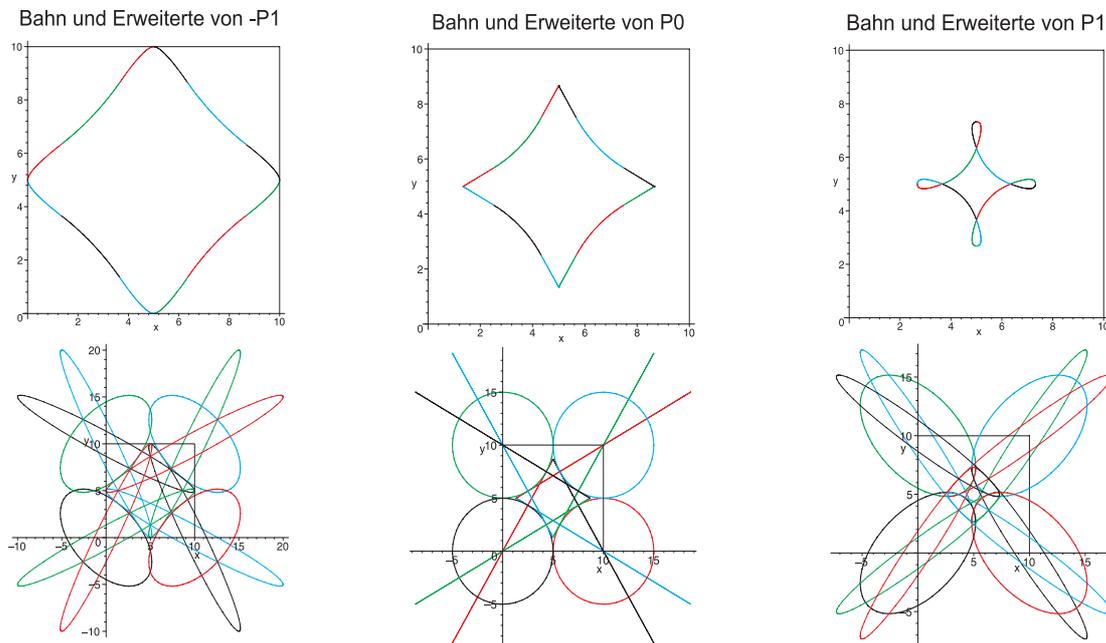


Abb. 6: 12-phasige Bahnen und entsprechende erweiterte Bahnen dreier Punkte auf der Symmetrieachse des rotierenden ReD

Ein paar Bahncharakteristiken:

- Jede Bahn ist vierstrahlig symmetrisch
- Jede Bahn besteht aus $4 \times 3 = 12$ Ellipsenbogen (mit 30° -Öffnungswinkel), die glatt ineinander übergehen
- Die Erweiterungen der Ellipsenbogen zu Ellipsen haben je zu dritt eine Quadratecke als gemeinsamen Mittelpunkt
- Die Ellipsen aus **Phase 2** sind kongruent, ebenso die Ellipsen aus **Phase 1** und **Phase 3**; bei der Bahn des Rotormittelpunktes fallen sie je zu dritt zusammen
- Die Ellipsen sind im Besonderen Kreise oder entarten zu zweizähligen Strecken
- Die Bahnen weit entfernter Punkte nähern sich der Kreisform.

Literatur

Jaglom, I.M. und Boltjanski, W.G.: Konvexe Figuren. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.

Watts, H.J.: Drill or Boring Member. Application filed Nov. 1, 1916. U.S. Patentschriften Nr. 1,241,175-7. Patented Sept. 1917.

Zum Suchbegriff 'reuleaux triangle' finden sich im Internet viele Informationen und Animationen. Alle Abbildungen stammen vom Verfasser.