Helmuth SCHÖNE, Köln

Über den Term $n^{\frac{1}{n-1}}$

Der Term $n^{\frac{1}{n-1}}$ besitzt nur einen ganzzahligen Wert, nämlich für n = 2.
Für alle n > 2 liegt der Wert des Terms zwischen 1 und 2.

$1 < n^{\frac{1}{n-1}} < 2$; für alle n > 2
Die diophantische Gleichung $a^n + b^n = c^n$ kann transformiert werden in die Gleichung $(c-x)^n + (c-y)^n = c^n$
Obige Gleichung wiederum kann umbenannt werden in die Gleichung $(a-x)^n + (a-y)^n = a^n$; ohne dass die Logik der Gleichung verändert wird. *)
$(a-x)^n + (a-y)^n = a^n$; $(a-x)^n = a^n - (a-y)^n$; n = 2
$(a-x)^2 = a^2 - (a-y)^2$; $(a-x)^2 = a^2 - (a^2 - 2ay + y^2)$; $(a-x)^2 = 2ay - y^2$
$(a-x)(a-x) = 2ay - y^2$; $(a-x)$ sei m ; $m(a-x) = 2ay - y^2$
m wird indiziert: $m_1 a - m_2 x = 2ay - y^2$; $m_1 a^1 x^0 - m_2 a^0 x^1 = 2a^1 y^1 - a^0 y^2$
Können die Seiten obiger Gleichung ineinander umgewandelt werden?
Kann auf beiden Seiten der Gleichung m = (a – x) ausgeklammert werden?
Wenn $m_1 a^1 x^0 = 2a^1 y^1$ sein soll, muss

$m_1 = \frac{2a^1 y^1}{a^1 x^0} = \frac{2y^1}{x^0}$; $m_1 = 2y^1$ sein

Wenn $m_2 a^0 x^1 = a^0 y^2$ sein soll, muss

$m_2 = \frac{a^0 y^2}{a^0 x^1} = \frac{y^2}{x^1}$ sein; m = (a – x); also gilt $m_1 = m_2$

$\frac{y^2}{x^1} = 2y^1 \quad | \; x^1 = x^{2-1}$;

$y^{2-1} = 2x^{2-1}$; $y^{\frac{2-1}{2-1}} = 2^{\frac{1}{2-1}} x^{\frac{2-1}{2-1}}$; y = 2x ;
Bemerkung: $2 = 2 \cdot 1^2$; also $y = 2 \cdot 1^2 x$
Die formalisierte Form obiger mathematischer Prozedur soll die Genesis des Terms $n^{\frac{1}{n-1}}$ aufzeigen. Angenommen seit der Antike hätte niemand durch „Zahlenspielerei“ oder mit Hilfsformeln Zahlentripel gefunden, die die Gleichung $(a - x)^2 + (a - y)^2 = a^2$ erfüllten (es gebe also kein Ägyptisches Dreieck: 3 ; 4 ; 5 und Indisches Dreieck: 5 ; 12 ; 13), dann

*) Durch die Umbenennung wird in der Transformation das „a“ erhalten. Die Griechen der Antike zollten dem ersten Buchstaben des Alphabets hohe, ja fast religiöse Achtung.

existierte etwa eine „Vermutung“ der Art, dass für die Gleichung
$(a - x)^2 + (a - y)^2 = a^2$ keine ganzzahligen Werte für a; x und y existieren.
Aber: Wenn x = 1; dann ist y = 2 und a = 5; diese drei Werte erfüllen also die Gleichung $(a -x)^2 + (a - y)^2 = a^2$.

$(a – x)^2 + (a – y)^2 = a^2$;
$(a – x)^2 = 2ay – y^2 \quad | \; y = 2x$
$(a – x)^2 = 4ax – 4x^2$; $(a – x)^2 = 4x (a – x)$; $(a – x) = 4x$; $a = 5x$
x = 1; y = 2; a = 5
$(a – x)^2 + (a – y)^2 = a^2$; $(5 – 1)^2 + (5 – 2)^2 = 5^2$; $4^2 + 3^2 = 5^2$

Mit diesen Ausführungen wäre also die oben erwähnte „Vermutung” falsifiziert für den Exponenten n = 2.
Die Gleichung $(a - x)^2 + (a - y)^2 = a^2$ ist außerdem lösbar:
$a = x + y \pm\sqrt{2xy}$; $(a – x) = y \pm\sqrt{2xy}$; $(a – y) = x \pm\sqrt{2xy}$
2xy muss dabei eine geradzahlige Quadratzahl sein **).
xy sind dann die Faktorisierungen von halben geradzahligen Quadratzahlen, wobei xy von yx nicht unterschieden wird. Es gibt also zu jeder geradzahligen Quadratzahl Zwillingspaare von Tripeln – und zwar jeweils so viele Paare wie es Faktorisierungen xy von den entsprechenden halben geraden Quadratzahlen gibt.
$2xy = z^2$; $xy = \frac{z^2}{2}$; $xy = 2 (\frac{z}{2})^2$
Wenn z^2 ein gerades Quadrat ist, dann ist $(\frac{z}{2})^2$ ein Quadrat – gerade oder ungerade. Wenn x = 1 ; dann ist $y = 2 (\frac{z}{2})^2$; y kann dann sein:
$2\cdot 1^2$; $2\cdot 2^2$; $2\cdot 3^2$; $2\cdot 4^2$; $2\cdot 5^2$ usw.

y ; wenn x =1	Faktorisierungen
$2\cdot 1^2 = 2$	$1\cdot 2$;
$2\cdot 2^2 = 8$	$1\cdot 8$; $2\cdot 4$
$2\cdot 3^2 = 18$	$1\cdot 18$; $2\cdot 9$; $3\cdot 6$
$2\cdot 4^2 = 32$	$1\cdot 32$; $2\cdot 16$; $4\cdot 8$
$2\cdot 5^2 = 50$	$1\cdot 50$; $2\cdot 25$; $5\cdot 10$
… ...	... ...

Analysieren wir nun die Gleichung $(a - x)^3 + (a - y)^3 = a^3$
$(a – x)^3 = a^3 – (a – y)^3$; $(a – x)^3 = a^3 – (a^3 – 3a^2y + 3ay^2 – y^3)$;
$(a – x)^3 = 3a^2y – 3ay^2 + y^3$; $(a – x)$ sei m

**) 2xy muss ein Quadrat sein, sonst gäbe es keine ganzzahlige Wurzel daraus zu ziehen und 2xy muss ein gerades Quadrat sein, weil der Faktor 2 enthalten ist.

$m\,(a - x)^2 = 3a^2y - 3ay^2 + y^3$;

$m_1 a^2 - m_2\, 2ax + m_3 x^2 = 3a^2y - 3ay^2 + y^3$

Können die Seiten obiger Gleichung ineinander umgewandelt werden? Kann auf beiden Seiten der Gleichung m = (a – x) sukzessiv ausgeklammert werden?

$m_1 a^2x^0 - m_2\, 2a^1x^1 + m_3 a^0x^2 = 3a^2y^1 - 3a^1y^2 + a^0y^3$;

$m_1 a^2x^0 = 3a^2y^1$; wenn $m_1 = \dfrac{3a^2\ y^1}{a^2\ x^0}$; $m_1 = 3y$

$m_3 a^0x^2 = a^0y^3$; wenn $m_3 = \dfrac{a^0\ y^3}{a^0\ x^2}$; $m_3 = \dfrac{y^3}{x^2}$

m = (a – x) ; also müssen die indizierten m untereinander gleich sein.

$m_3 = m_1$;

$\dfrac{y^3}{x^2} = 3y^1$;

$y^{3-1} = 3x^2 \mid x^2 = x^{3-1}$

$y^{\frac{3-1}{3-1}} = 3^{\frac{1}{3-1}}\ x^{\frac{3-1}{3-1}}$; $y = 3^{\frac{1}{3-1}}\ x$

Die Feststellung von m_2 erübrigt sich – die Gleichsetzung von m_1 mit m_3 ergibt bereits einen diese Gleichheit realisierenden y-Wert, der

unganzzahlig ist: $y = 3^{\frac{1}{3-1}}\ x$;

$1 < 3^{\frac{1}{3-1}} < 2$

Jeder Exponent n > 3 kann auf die gleiche Art und Weise analysiert werden und führt zum Term $n^{\frac{1}{n-1}}$ für den Exponenten n:

$1 < n^{\frac{1}{n-1}} < 2$; für alle n > 2

Für den Exponenten (n+1) lautet der Term $(n + 1)^{\frac{1}{n}}$;

$1 < (n + 1)^{\frac{1}{n}} < 2$; für alle (n + 1) > 3

Diese Ausführungen können als ein elegantes Beispiel für die Beweismethode der Vollständigen Induktion angesehen werden.

Ein anderer Zugang zum Term $n^{\frac{1}{n-1}}$

Die Ausgangsgleichung für die Analyse zum Finden des Terms $2^{\frac{1}{2-1}}$ war $(a - x)^2 = 2ay - y^2$; $(a - x) = m$ kann dann als $(2ay - y^2) : (a - x)$ bestimmt werden.

Die Reihenfolge der algebraischen Glieder im Dividend ($2ay - y^2$) und Divisor ($a - x$) darf im Ergebnis der Division keine Rolle spielen, d. h. die Ergebnisse der zwei verschiedenen Divisionen müssen gleichgesetzt werden können.

$(2ay - y^2) : (a - x) = 2y$; $(-y^2 + 2ay) : (-x + a) = \frac{y^2}{x}$

$\frac{y^2}{x} = 2y$; $y^{2-1} = 2x$;

$y^{\frac{2-1}{2-1}} = 2^{\frac{1}{2-1}} \quad x^{\frac{1}{2-1}} \mid x^{\frac{1}{2-1}} = x$

$y = 2^{\frac{1}{2-1}}\, x$

$y = 2\; x$

$(3a^2y - 3ay^2 + y^3)\,(a - x)^2 = m$; $(3a^2y - 3ay^2 + y^3)\,(a^2 - 2ax + x^2) = 3y$;

$(y^3 - 3ay^2 + 3a^2y) : (x^2 - 2ax + a^2) = \frac{y^3}{x^2}$

$m_3 = m_1$

$\frac{y^3}{x^2} = 3y$; $y^{3-1} = 3x^2 \mid x^2 = x^{3-1}$; $y = 3^{\frac{1}{3-1}} \quad x$

Die Gleichsetzung von m_1 mit m_3 ist begründet in der Kohärenz der Mathematik. Wäre das Ergebnis der jeweiligen Division abhängig von der Reihenfolge der einzelnen Glieder im algebraischen Divident und Divisor, dann wäre die Kohärenz der Mathematik (Algebra) nicht mehr gewahrt, d.h. das Ergebnis einer Division hinge von der zufälligen Wahl der Reihenfolge der Glieder im Divident und Divisor ab - das darf nicht sein, also müssen die indizierten m gleich sein, aber schon die Gleichsetzung der indizierten m bei umgekehrter Reihenfolge der Glieder im Divident und Divisor ergibt den y-Wert, der als Faktor den Term $n^{\frac{1}{n-1}}$ enthält. Da jede entsprechende Gleichung, mit welchem Exponenten $n > 2$ auch immer, so analysierbar ist, dass der Term aufgezeigt werden kann, ist dies auch eine sehr kurze Bestätigung der Fermatischen Vermutung.

Literatur

Schöne, Helmuth „Über die Fermatsche Vermutung“,
ISBN 3-921092-63-9 ; Demmig Verlag, Nauheim 1989

Schöne, Helmuth, DdM, 37.Jahrestagung, Dortmund 2003, Seite 565-568
ISBN 3-88120-354-0 ; Verlag Franzbecker, Hildesheim.

Schöne, Helmuth, DdM, 38.Jahrestagung Augsburg 2004, Seite 517-520
ISBN 3-88120-384-2 ; Verlag Franzbecker, Hildesheim.