Johann SJUTS, Leer

Empirische Studien zur Komplexität mathematischen Denkens

Mathematische Aufgaben und Probleme zeichnen sich durch schwierigkeitsbestimmende Merkmale von Komplexität aus. Der vorliegende Beitrag will in verkürzter Fassung einer Studie (Sjuts 2005) folgenden zwei Fragen nachgehen. Erstens: Lassen sich beschreibbare Komplexität von Aufgaben und empirische Resultate ihrer Bearbeitungen ins Verhältnis setzen? Zweitens: Lassen sich gestaffelte Aufgaben konstruieren, die zu im Grunde vorhersagbaren Ergebnissen führen? Grundlage der Überlegungen und Untersuchungen ist das am Institut für Kognitive Mathematik der Universität Osnabrück entwickelte Komplexitätskonzept. Dieses kognitionstheoretisch orientierte Konzept hat mehrere schwierigkeitsbestimmende Merkmale fassbar zu machen versucht. Damit verfügt man einerseits über eine Möglichkeit, kognitive und metakognitive Leistungen zu beurteilen (Cohors-Fresenborg & Sjuts 2001), andererseits über ein Analyseinstrumentarium, das – in dieser Art neu – zu bemerkenswerten Auswertungen von PISA-Befunden und didaktisch bedeutsamen Folgerungen führt (Cohors-Fresenborg & Sjuts & Sommer 2004).

Zu erinnern ist vor allem an das Merkmal „Kognitive Komplexität“, das sich folgendermaßen umschreiben lässt (Cohors-Fresenborg & Sjuts & Sommer 2004): Das Merkmal „Kognitive Komplexität“ erfasst Anforderungen an Ausmaß, Intensität und Vielschichtigkeit von Denkvorgängen beim Lösen einer Aufgabe – insbesondere, wenn im Lösungsprozess die Gleichzeitigkeit oder das Verketten von Denkschritten in einer zu beachtenden Reihenfolge organisiert werden muss.

Die Komplexität mathematischen Denkens (beim Lösen einer Aufgabe) kann man qualitativ untersuchen, indem man Lösungen, so genannte Eigenproduktionen, einer interpretativen Analyse unterzieht. Auf diese Weise lassen sich kognitive Prozesse identifizieren und typisieren (Sjuts 2002). Die Komplexität mathematischen Denkens kann man auch quantitativ untersuchen, indem man Lösungen von (hinreichend vielen) Testpersonen in vor allem vergleichender Weise auswertet.

Beispielhaft soll folgende Aufgabe betrachtet werden:

Wanne *(KK 1)*

Man braucht drei Minuten, um eine Wanne zu füllen, und sechs Minuten, um sie zu leeren.

Wie lange dauert es, die Wanne zu füllen, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?

<u>Wanne</u> *(KK 2)*

Man braucht zwei Minuten, um eine Wanne zu füllen, und drei Minuten, um sie zu leeren.

Wie lange dauert es, die Wanne zu füllen, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?

<u>Wanne</u> *(KK 3)*

Man braucht drei Minuten, um eine Wanne zu füllen, und fünf Minuten, um sie zu leeren.

Wie lange dauert es, die Wanne zu füllen, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?

Die drei Aufgabenversionen unterscheiden sich durch ihren Anspruch hinsichtlich kognitiver Komplexität, was die Kennzeichnung KK 1 bis KK 3 zum Ausdruck bringen soll.

I. Eine qualitative Analyse zeigt zunächst, ausgehend von der Aufgabe KK 2, die Anforderungen.

Lösungsvariante 1: Aus dem Aufgabentext ergibt sich, dass man 6 Minuten braucht, um die Wanne dreimal zu füllen, und 6 Minuten, um sie zweimal zu leeren. Nach 6 Minuten ist die Wanne also (einmal) voll. Eine entsprechende Überlegung in etwas einfacherer Form führt auch zum Ergebnis bei der Aufgabe KK 1. Man braucht 6 Minuten, um die Wanne zweimal zu füllen, und 6 Minuten, um sie einmal zu leeren. Auch in diesem Fall ist sie nach 6 Minuten (einmal) voll. Bei der Aufgabe KK 3 liegt eine solche Lösung nicht unmittelbar auf der Hand. Die entsprechende Überlegung ist deutlich schwieriger. Man braucht 7,5 Minuten, um die Wanne zweieinhalb mal zu füllen, und 7,5 Minuten, um sie eineinhalb mal zu leeren. Nach 7,5 Minuten ist sie also (einmal) voll. Oder abgewandelt: Man braucht 15 Minuten, um die Wanne fünfmal zu füllen, und 15 Minuten, um sie dreimal zu leeren. Folglich ist sie nach 15 Minuten zweimal voll, nach 7,5 Minuten ist sie also (einmal) voll.

Lösungsvariante 2: Der Aufgabentext besagt, dass sich die Wanne nach einer Minute zur Hälfte füllt und zu einem Drittel leert, die Wanne per Saldo zu einem Sechstel voll wird. Nach 6 Minuten ist die Wanne also ganz voll. Entsprechende Überlegungen gibt es zu den Aufgaben KK 1 und KK 3. Bei der Aufgabe KK 1 wird die Wanne per Saldo in einer Minute zu einem Sechstel voll, bei der Aufgabe KK 3 sind es zwei Fünfzehntel.

Lösungsvariante 3: Nimmt man als Zeitspanne für die Zwischenbetrachtung nicht eine Minute, sondern zwei Minuten, so füllt sich die Wanne einmal, leert sich zugleich aber auf ein Drittel. Folglich ist sie nach 6 Minuten tatsächlich voll. Für die Aufgabe KK 1 gilt entsprechend: Nach drei Minuten füllt sich die Wanne einmal, leert sich zugleich aber auf die

Hälfte. Folglich ist sie nach 6 Minuten tatsächlich voll. Eine entsprechende Lösung der Aufgabe KK 3 ist dagegen mit Stammbrüchen nicht möglich (siehe auch Lösungsvariante 2).

Recht häufig fehlt bei der Aufgabenbearbeitung die Vorstellung, dass sich die Wanne, auch wenn der Stöpsel herausgezogen ist, tatsächlich füllt. Ein bestimmtes (nämlich statisches) Denken verhindert offensichtlich, den (dynamischen) Vorgang zweier Prozesse (hier des Zufließens und des Abfließens) adäquat zu erfassen. Man fühlt sich (erneut) an „Achilles und die Schildkröte" nach dem berühmten Paradoxon von Zenon erinnert (Sjuts 2002). Gleichzeitig bieten Eigenproduktionen einen Einblick in kognitive Strukturen (Schwank 2003).

II. In einer umfangreichen Studie (Sjuts 2005) waren Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufen 5, 6 und 7 diese (und einige andere) Aufgaben gestellt worden – in gleichmäßiger Verteilung auf die drei Jahrgänge. 155 Testpersonen aller drei Jahrgänge erhielten die Aufgabe mit der kognitiven Komplexität KK 1, 153 Testpersonen die mit KK 2 und 150 Testpersonen die mit KK 3.

Nimmt man die Lösungen aller drei Aufgaben zusammen, ergibt sich eine Lösungsquote von 15,1 %, die sich indes nur geringfügig von Jahrgangsstufe zu Jahrgangsstufe erhöht (13,1 % im 5. Schuljahrgang, 13,8 % im 6. Schuljahrgang, 18,7 % im 7. Schuljahrgang). Sehr deutlich ist dagegen der Unterschied in der Erfolgsbilanz zwischen den Versionen KK 1, KK 2 und KK 3. 43 (von 155, also 27,7 %) Schülerinnen und Schüler lösten die Aufgabe KK 1, 24 (von 153, also 15,7 %) die Aufgabe KK 2 und 2 (von 150, also 1,3 %) die Aufgabe KK 3.

Vordergründig sind es nur die veränderten Zahlen, die den Unterschied der Aufgabenversionen ausmachen. Es ist aber unschwer zu erkennen, dass der kognitive Aufwand (von KK 1 über KK 2 zu KK 3) deutlich steigt. Wer eine Lösung sucht, kann zu Beginn der Überlegungen noch nicht übersehen, ob die Lösungsidee Erfolg verspricht. Und dass bei KK 3 eine Vereinfachung der Zahlen hilfreich wäre, erfordert erst recht zusätzliche gedankliche Arbeit. Ebenso sind metakognitive Kontrollmaßnahmen (Sjuts 2003) von großer Bedeutung, da mehrere Gedankengänge verfolgt werden müssen und auch nicht verloren gehen dürfen.

Alles zusammengenommen, die deutlichen Unterschiede der Resultate zu den Versionen KK 1, KK 2 und KK 3, die im Vergleich zu anderen Aufgaben recht geringe Steigerung über die Schuljahrgänge 5, 6 und 7, dazu die Feststellung, dass der Rechenaufwand nicht übermäßig hoch ist, führt dazu, dass die wesentliche Erklärung für die Erfolgsquote im Bereich der kognitiven Komplexität liegt. Das „geistige Betriebssystem" wird hinsichtlich erforderlicher Maßnahmen, das eigene Denken zu organisieren und zu kontrollieren, unterschiedlich in Anspruch genommen. Und das beginnt schon beim Lesen der Aufgabe, wenn man versucht, sich eine Vorstellung von der Aufgabe zu machen und von den kognitiven Werkzeugen, die für eine Aufgabenbearbeitung aussichtsreich erscheinen.

Mathematiklehrerinnen und -lehrern ist der Sachverhalt, dass die kognitive Komplexität eine hohe Bedeutung hat, sehr wohl vertraut. Bei der Konstruktion von A- und B-Version einer Klassenarbeitsaufgabe (für je eine Hälfte der Klasse) dürfen die Unterschiede gerade nicht die kognitive Komplexität betreffen, was schon mittels unterschiedlicher Zahlen in der Aufgabe, die entsprechende Anforderungen an die Organisation des Denkens zur Folge haben, passieren kann.

Insgesamt lassen sich also Merkmale kognitiver Komplexität identifizieren, insbesondere Anforderungen an Ausmaß, Intensität und Vielschichtigkeit von Denkvorgängen, und somit auch Hinweise ableiten, die geeignet sind, Aufgaben mit unterschiedlicher Schwierigkeit bei vergleichbarer stofflicher Basis zu konstruieren. Das wiederum erlaubt Schlüsse auf die Gestaltung eines gründlicheren, sorgfältigeren Lernens des mathematischen Denkens, insbesondere, wenn Metakognition die Lern- und Verstehensprozesse begleitet.

Literatur:

Cohors-Fresenborg, Elmar & Sjuts, Johann (2001): Die Berücksichtigung von kognitiver und metakognitiver Dimension bei zu erbringenden und zu beurteilenden Leistungen im Mathematikunterricht. In: Solzbacher, Claudia & Freitag, Christine (Hrsg.): Anpassen, Verändern, Abschaffen? Schulische Leistungsbewertung in der Diskussion. Bad Heilbrunn 2001, S. 147-162

Cohors-Fresenborg, Elmar & Sjuts, Johann & Sommer, Norbert (2004): Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In: Neubrand, Michael (Hrsg.) (2004): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. Wiesbaden 2004, S. 109-144

Schwank, Inge (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 35, Heft 3, S. 70-78, 2003

Sjuts, Johann (2002): Unterschiedliche mentale Konstruktionen beim Aufgabenlösen. Eine Fallstudie zur Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 23, Heft 2, S. 106-128, 2002

Sjuts, Johann (2003): Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 24, Heft 1, S. 18-40, 2003

Sjuts, Johann (2005): Denken will organisiert sein. Empirische Studien zur Komplexität mathematischen Denkens. 2005 (im Druck)