Anna Susanne STEINWEG, Bamberg

Gleichungen deuten – Möglichkeiten in der Grundschule?!

Vorbemerkungen

Die hier vorgestellten Ergebnisse stammen aus einem mehrmonatigen Projekt zur Förderung des algebraischen Denkens in der Grundschule, aus dem ein Teilbereich bereits 2004 thematisiert werden konnten. Zur theoretischen Rahmung sowie zur Methode verweise ich auf die Veröffentlichung STEINWEG 2004.

Zur lernpsychologischen und mathematikdidaktischen Relevanz

Die flexible und individuelle Deutung von mathematischen Abbildungen abstrakter oder konkreter Situationen ist lernpsychologisch nicht nur sinnvoll, da sie den individuellen Interpretationen Raum lässt, sondern sogar zwingend (VOIGT 1993, STEINBRING 1997, SÖBBEKE 2003, LORENZ 1993). Die Eigenständigkeit der Kinder wird unterrichtlich wahr und ernst genommen und wird als Wesensmerkmal des heutigen Unterrichts geschätzt. Deutungsfreiräume werden den Kindern auch in verschiedenen Schulwerken zu Abbildungen eingeräumt.

Die Interpretation mathematischer Beziehungen aus unterschiedlichen Perspektiven ist ebenso ein Wesensmerkmal der Mathematik. Insbesondere, so DEVLIN (1997), manifestieren sich mathematische Beziehungen in Mustern und umgekehrt werden Muster zum Anlass nach Beziehungen zu suchen (STEINWEG 2003). Die hier vornehmlich genutzten Punktmuster weisen dabei auf eine lange Tradition hin, Zahlen in ihrer Darstellungsform wiederum als Abstarktum zu untersuchen und unterschiedlich zu deuten (DAMEROW/LEFÈVRE 1981, STEINWEG 2005).

Kinder deuten Abbildungen als Gleichungen - Projektergebnisse

Im Projekt konnten durch einen Pre- und Posttest zum einen die spontanen Erstreaktionen der beteiligten Kinder auf Aufgaben eines Themenkreise abgerufen und zum anderen die Veränderung dieser Deutungen und Bearbeitungen nach einem in den alltäglichen Unterricht integrierten Projektunterricht ermittelt werden.

Ein Ziel dieses Themenkreises im Projektunterricht war es, dass die Kinder ihre *eigene Sicht des Musters* in einem gegebenen Punktmuster sichtbar machen und diese in eine Gleichung übersetzen können. Verknüpfungen von multiplikativen und additiven Sichtweisen innerhalb einer Gleichung ergeben sich dabei aus der Sache heraus. Dabei kann die Entwicklung der Bewusstheit für unterschiedliche Gleichungen gefördert (WINTER 1982) und somit letztlich die eigene Interpretation flexibler werden.

Selbst bei „einfachen“ und im Unterricht üblichen Mustern wie einem 4x4-Quadrat ist die Deutung der Kinder spontan meist auf die Beschreibung der Form als Quadrat oder Viereck oder der kardinalen Anzahlen (16 Punkte) fixiert (vgl. helle Balken in Abb. 1 / s. auch STEINWEG 2002) und erweitert sich erst nach einem unterrichtlichen Umgang hin zu unterschiedlichen Gleichungen, die dieses Muster bergen kann (dunkle Balken in Abb. 1).

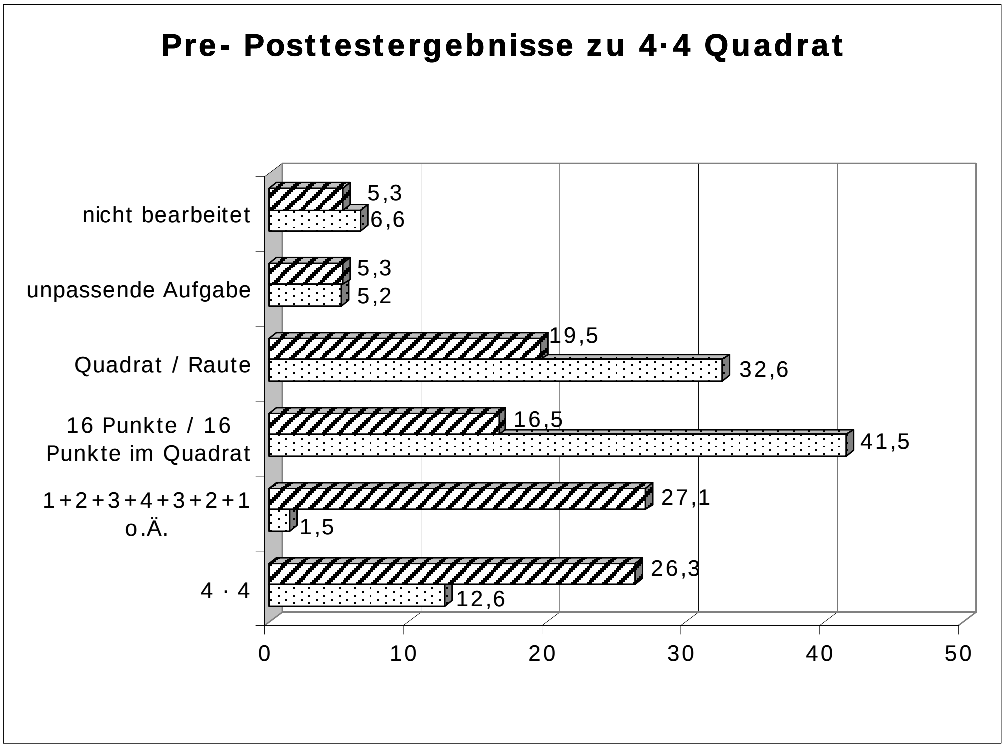

Abb. 1

Kinder gehen offen auf diese Aufgabe zu – wie an der Anzahl der Nichtbearbeitungen abgelesen werden kann. Auch die im Unterricht allen Zweitklässlern bereits bekannt Multiplikationsaufgabe wird jedoch erst nach dem Projektunterricht vermehrt der Abbildung zugeordnet.

Kinder deuten Gleichungen als Bilder - Projektergebnisse

Gleichungen umgekehrt in eine Abbildung zu übersetzen ist eine unterrichtlich nicht verankerte Anforderung. So können viele der Projektkinder die Aufforderung zu zeichnen nicht einlösen (helle Balken in Abb. 2). Die eingeforderte Kompetenz des „Sehens“ und „Darstellens“ von mathematischen Beziehungen ist nicht nur Kindern zumeist unbekannt, sodass die hohe Anzahl der Nichtbearbeitungen gut zu erklären ist.

Spontane Darstellungsversuche münden meist in der Eins-zu-Eins-Übersetzung von Zahlen in Bilder (Herzchen, Sterne etc.), die dann in linearer Anordnung mit Operationszeichen in einer Dinggleichung kombiniert werden (LORENZ/RADATZ 1993, insbesondere S. 50ff).

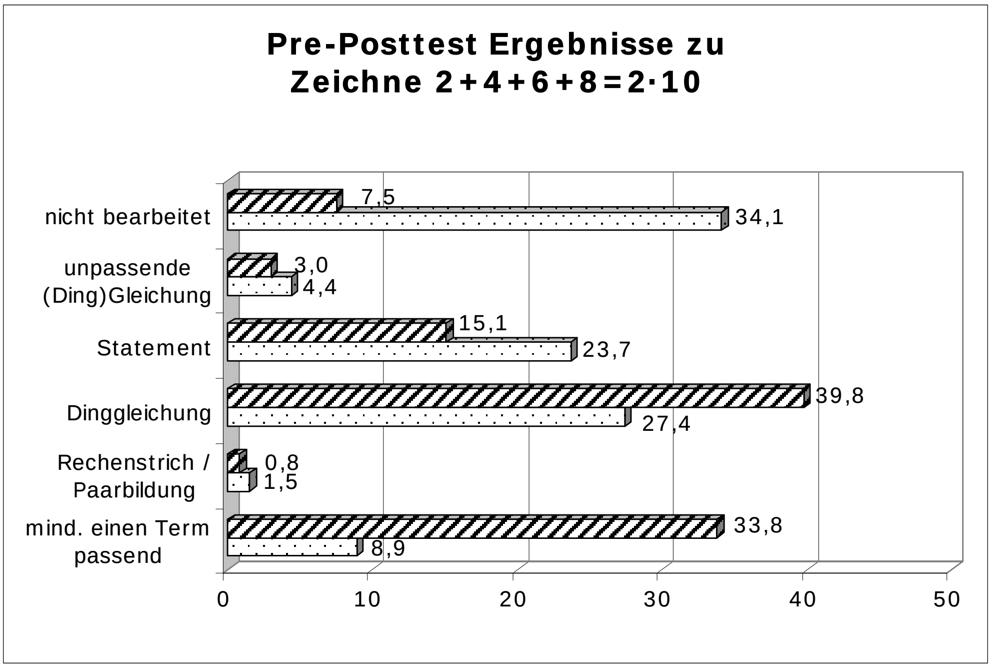

Abb. 2

Nach der Begegnung mit derartigen Anforderungen im Projekt, zeichnen gut ein Drittel der Kinder zumindest einen der Terme mathematisch sinnvoll. Knapp 40% hingegen interpretieren die Aufgabe als Anreiz, Zahlen und Operationszeichen wieder in eine Dinggleichung zu übersetzen. Die zugrunde liegende Struktur kann somit jedoch nicht hilfreich erkannt und genutzt werden.

Bemerkungen

Die ausschnitthafte Darstellung der Ergebnisse weist auf die hohe Bedeutung von Erfahrungsräumen hin, in denen die Schülerinnen und Schüler zum einen eine Art Erstbegegnung mit derartigen Aufgaben erleben dürfen und zum anderen die Möglichkeit des Austauschs der verschiedenen Interpretationen erhalten. Im Projektunterricht wurden keine fixen Einheiten abgearbeitet, noch wurde für und auf den Test hin unterrichtet. Vielmehr wurde viel Wert auf die Integration der Abbildungsdeutungen bzw. der Verbildlichung von Termen und Gleichungen in den „normalen“ Unterricht gelegt. Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass ein noch gezielteres „Unterweisen“ in diese Fähigkeiten nicht notwendig ist, der alltägliche Unterricht (vor dem Projekt) jedoch zu wenig Hinweise auf und Anregungen für diese mathematischen Fähigkeiten gibt.

Die Phasen der Reflexion im Unterricht wurden als überaus wichtig eingeschätzt, da hier die Sprache der Mathematik im Bild und das Bild als mathematische Sprache bewusst erkannt werden kann.

Diese Bewusstheit sollte auch insbesondere auf Seiten der Lehrenden geweckt werden. Das hohe ‚Potenzial‘ der Deutungsräume in den Aufgaben muss vom Lehrenden er- und gekannt werden, um mögliche Reaktionen der Lernenden einzuordnen, zu unterstützen oder auch auf Alternativen hinweisen zu können. Die beobachteten Dinggleichungen sind ebenso typisch für Versuche des „Anschaulich-Machens“ von Rechenbeziehungen bei Studierenden, sodass hier auch ein Hinweis zur vertieften Auseinandersetzung in der Lehreraus- und weiterbildung gesehen werden kann.

Die Kompetenzen und Deutungsvorstellungen der Kinder bieten auch Hinweise für den Sekundarunterricht, der Gleichungen explizit thematisiert, und m.E. derartige Erfahrungsräume zunehmend öffnen und in die „Gleichungslehre“ integrieren sollte. Das „Sehen“ fördert die Einsicht in die Beziehungsgehalte der oft willkürlich verbunden erscheinenden Terme.

Die Grenzen der Anschaulichkeit bei höheren Gleichungen werden nicht als Problem, sondern als Chance gewertet, diese Grenzen bewusst zu überschreiten und Analogien im Prinzip des Permanenzprinzips (wie bei der Zahlraumerweiterung) aufzugreifen. Ebenso produktiv kann wohl auch im Grundschulbereich mit dem Dilemma der vermeintlich „eindeutigen Darstellung“ von Malaufgaben und der freien Interpretation von Abbildungen umgegangen werden.

Literatur

DAMEROW / LEFÈVRE (1981) *Rechenstein, Experiment, Sprache.* Klett-Cotta

DEVLIN (1997) *Mathematics: The Science of Patterns.* Scientific American Library, NY

LORENZ (1993) *Mathematik und Anschauung*. Aulis

LORENZ / RADATZ (1993) *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Schroedel

SÖBBEKE (2003) „Grundschulkinder deuten Strukturen in Anschauungsmittel hinein“ In: Henn (Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Franzbecker: 605 – 608

STEINBRING (1997) „Kinder erschließen sich eigene Deutungen” In: *Grundschule* 3: 17 – 19

STEINWEG (2002) „Zu Bedeutung und Möglichkeiten von Aufgaben zu figurierten Zahlen“ *Journal für Mathematikdidaktik*, 23.2: 129 – 151

STEINWEG (2003) „Gut, wenn es etwas zu entdecken gibt". In: Ruwisch/Peter-Koop (Hrsg.) *Gute Aufgaben im MU der Grundschule*. Mildenberger: 56 – 74

STEINWEG (2004) „Vom Reiz des Ausrechnen-Wollens oder Warum 25+4 auch 54 sein kann…“ Beiträge zum Mathematikunterricht. Franzbecker: 573 - 576

STEINWEG (im Druck/2005) „Stein für Stein – Zahlen als Figuren“ erscheint in: *Die Grundschulzeitschrift*

VOIGT (1993) „Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern". In: Lorenz (Hrsg.) *Mathematik und Anschauung*. Aulis: 147 – 166

WINTER (1982) „Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe". In: *mathematica didactica* 5.4: 185 – 211