Beat Wälti, Aarau

Fördern aller Begabungen durch fachliche Rahmung

Muster und Strukturen

Der Beitrag schliesst an den Artikel von Elmar Hengartner an.

Ein schönes Musikstück, ein gelungenes Bauwerk, ein Gedicht stecken voller Strukturen, die Gegenstand überraschender Entdeckungen sein können. Strukturen und Muster befriedigen unser Bedürfnis nach Ästhetik. Sie faszinieren bereits kleine Kinder, wenn sie der Erzählung eines längst bekannten Bilderbuchs auch nach unzähligen Wiederholungen mit ungebrochener Aufmerksamkeit folgen: Sie geniessen das Vorhersehbare, wachen über die richtige Wiedergabe und entdecken immer wieder neue Aspekte. Die Faszination für Muster erfasst jeden lernbereiten und neugierigen Geist. Dies umso mehr, als dass Denken eine strukturierende, ordnende Tätigkeit ist. Strukturen werden im Austausch mit der Umwelt entdeckt, aufgebaut und erworben, und sind nicht Lernstoff, der sich verordnen lässt. Wer sich Strukturen zu eigen macht, nutzt sie auch in neuem Kontext. Sie werden so zum Nährboden für Schlüsselqualifikationen wie Kreativität, Problemlösekompetenz oder Kommunikationsfähigkeit. Ihnen kommt gerade in der heutigen Informationsgesellschaft besondere Bedeutung zu.

Mathematik steckt voller Strukturen und Muster. Devlin (1998) ist keineswegs der erste, der Mathematik als Wissenschaft der Muster bezeichnet. Demgegenüber wird Mathematik oft als Fach wahrgenommen, in dem Regeln und Gesetze befolgt werden müssen. Der Widerspruch ist nur scheinbar, existieren mathematische Regeln und Gesetze doch in zahllosen (individuellen) Ausprägungen, lassen verschiedene Zugänge offen und sind in variabler Reihenfolge fassbar. Wo Regeln und Gesetzen durch eigene Zugänge die Strenge genommen wird, werden sie zu individuell verfügbaren Mustern und Strukturen. Die Suche nach ihnen führt immer wieder zu Umwegen und in Sackgassen. Gerade diese sind aber oft Ort wertvoller Entdeckungen. Die Suche nach und das Nutzen von Mustern und Strukturen ist allen, die Mathematik treiben, unabhängig von Niveau oder Alter gemeinsam. Dafür bedarf es weder einer besonderen Begabung für Mathematik noch irgendwelcher Vorkenntnisse.

Damit ist mehr als eine methodisch-organisatorische Öffnung gemeint: Erweiterte Lernformen wie Wochenplan, Freiarbeit oder Werkstattunterricht können den Unterricht unterstützen, sind jedoch keine Voraussetzung. Offenheit meint auch mehr und anderes als das Bereitstellen alternativer Aufgaben, mehr als Freiheit in der Reihenfolge der Aufgabenbearbeitung oder der Wahl von Arbeitsort und Zeitaufwand. Dies alles kann für den Umgang

mit Heterogenität hilfreich sein, trifft aber nicht den wesentlichen Punkt einer Öffnung, wie sie in den Lernumgebungen beabsichtigt wird.
Entscheidend sind die Aufgaben, an denen die Kinder arbeiten. Orientieren sich diese an kleinschrittigem Lernen, bleiben die Lösungswege vorgezeichnet und die Ergebnisse werden aufgrund Musterlösungen in «richtig – falsch» eingeteilt. So gewinnt man weder Spielraum für vielfältige, eigenständige Denkwege noch ergeben sich Anlässe für Austausch und Argumentation. Der Akzent der Lernumgebungen liegt auf einer didaktischen, inhaltlichen Öffnung. Die inhaltliche Qualität der Aufgaben ist entscheidend, damit auch im Mathematikunterricht Lernen als eigenaktives Tun angeregt wird: Eigenständiges Denken statt Lösen nach vorgegebener Strategie, Lernen in Sinnganzen statt Lernen in kleinen Schritten, argumentative Auseinandersetzung mit andern Sicht- und Vorgehensweisen statt Vergleiche mit Musterlösungen. Wo Lernende in diesem Sinn Mathematik betreiben, werden sie zu Entscheidungsträgern, zu aktiven Mitgestaltern ihres Lernprozesses. Diese Auffassung offenen Unterrichts ist eine Frage des Fach- und Lernverständnisses der Lehrpersonen und nicht der Methodenwahl. Dieser inhaltliche Akzent wird unabhängig von der Methodenwahl dank fachlicher Rahmung so oder so an Qualität gewinnen.
Die Ausführungen werden mit zwei Beispielen aus den ersten beiden Schuljahren illustriert und ergänzt.

Strukturen nutzen am Beispiel von Rechenpäckchen zum Einspluseins

Strukturierte Aufgabe

1. 4 + 6 = 10
2. 5 + 7 = 12
3. 6 + 8 = 14
4. 7 + 9 = 16
5. …

Auch bei solch einfachen Aufgaben lassen sich – bewusst oder unbewusst – zahlreiche Muster bzw. Strukturen nutzen und entdecken:

- Die Summen nehmen in 2er Schritten zu und sind immer gerade.
- Die Summen sind jeweils doppelt so gross wie die Zahl zwischen den beiden Summanden (4 + 6 = 10. 5 + 5 = 10)
- Die beiden Summanden nehmen von Zeile zu Zeile um 1 zu und sind jeweils beide gerade oder ungerade.
- Die Reihe lässt sich beliebig lange fortsetzen.

Unstrukturierte Aufgabe

1 + 3 = 4
5 + 8 = 13
6 + 4 = 10
9 + 2 = 11
5 + 9 = 14

Die Aufgaben stehen in keinem Zusammenhang zu einander und sind – wenn überhaupt – lediglich nach Schwierigkeitsgrad geordnet. Solche Übungen verfolgen aus Sicht der meisten Kinder ein Ziel: möglichst rasch möglichst viele richtige Resultate zu erzielen.

Kindern, die solche Übungen bearbeiten, können Folgeaufträge bearbeiten, die sie einerseits zu eigenem Tun animieren, andererseits zu weiteren strukturellen Entdeckungen führen können:

1 Führe das Päckchen um einige Zeilen weiter. (Dabei werden viele Kinder den vertrauten Zahlenraum sprengen).
2 Wie lautet die 7. / die 10. / die 20. Zeile in diesem Päckchen?
3 Erfinde ein ähnliches Päckchen.
4 Erfinde ein Päckchen, bei dem die Summen von Zeile zu Zeile um 3 grösser werden.
5 Erfinde ein Päckchen, mit den Summen 6, 8, 7, 9, 8, 10, …
6 Erfinde ein Päckchen, bei dem das zehnte Resultat 50 ergibt.
7 Erfinde eine eigene Zahlenreihe und schreibe dazu ein Päckchen auf.

Kinder, die solche Übungen bearbeiten, erhalten in der Regel weitere ähnliche Übungsaufgaben bzw. Arbeitsblätter, obschon der Schwierigkeit der Operation für sie keine Herausforderung ist.

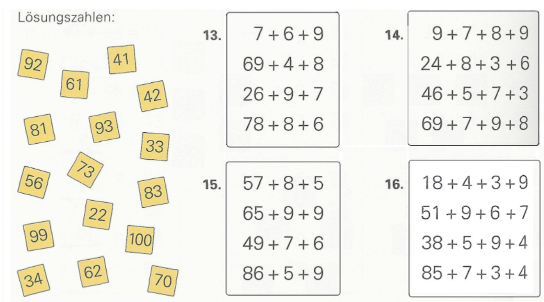
Die Arbeit an strukturierten Übungen öffnet ein Tätigkeitsfeld, das weit über das Training von Kenntnissen und Fertigkeiten hinauszielt. Im Beispiel werden mehrere Rechnungen in einen systematischen Zusammenhang gestellt. So lassen sich Strukturen erforschen, entdecken, fortsetzen, ausgestalten und selber erzeugen (Wittmann 2003). Die sieben Fragestellungen zeigen auf, dass strukturierte Übungen oft zu eigentlichen Lernumgebungen erweitert werden können. Auch dann, wenn der Anlass ein unscheinbares Rechenpäckchen ist. Den Lernumgebungen aus unserem Projekt liegen solche Strukturen zu Grunde. Sie sind das eigentliche Thema des Bandes zu Lernumgebungen, der Ende 2005 erscheinen wird.

Strukturen nutzen am Beispiel „Summen mit vier Ziffernkarten“

Nimm vier Ziffernkarten und bilde damit zwei zweistellige Zahlen. Bilde so verschiedene Additionen.

43 + 51
41 + 53
31 + 54
34 + 15

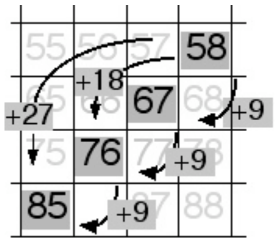
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	~~58~~	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	~~76~~	77	78	79	80
81	82	83	84	~~85~~	86	87	88	89	90
91	92	93	~~94~~	95	96	97	98	99	100



Aus einem aktuellen Lehrmittel (Hohl W. et. al. Mathematik 2 Primarschule, Lehrmittel des Kantons Zürich, 1996)

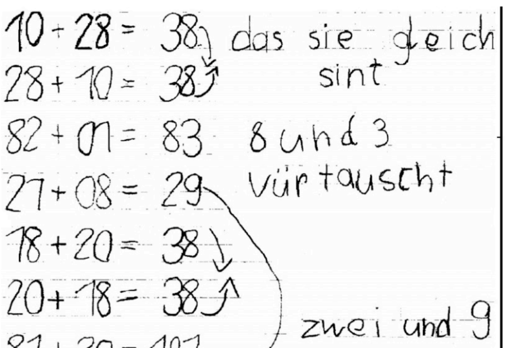
Den Kindern verlangt diese Lernumgebung vorerst eine Entscheidung ab: Mit welchen Ziffernkarten lassen sich Rechnungen legen, die sie gerne rechnen und die für sie weder zu schwierig noch zu einfach sind? Danach lädt die Lernumgebung ein, Strukturen zu nutzen, zu ergänzen, zu entdecken und darzustellen:

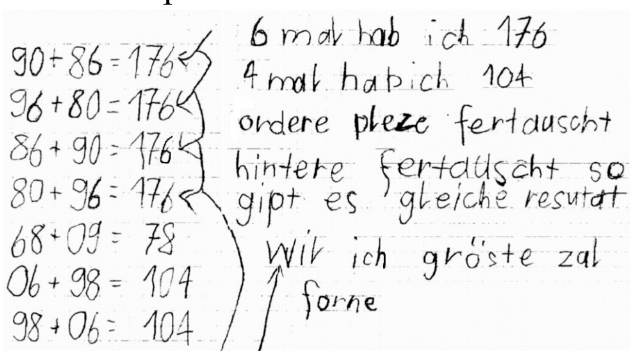
1 Durch wiederholte Addition mit den gleichen Ziffernkarten gerät der Stellenwert der Zehner und der Einer in den Vordergrund.
2 Das Vertauschen der beiden Summanden ändert die Summe nicht.
3 Zehner oder die Einer der beiden Summanden lassen sich vertauschen.
4 Die Summen unterscheiden sich jeweils um 9 oder um ein Vielfaches von 9. Auf der Zahlentafel liegen sie jeweils auf einer diagonal verlaufenden Linie – was den Lehrpersonen eine rein optische Kontrolle ohne Nachrechnen ermöglicht.



5 Durch die Darstellung der Ergebnisse auf der 100er Tafel werden Summen sichtbar, die mit den vier Ziffernkarten gelegt werden können.
6 Mit einem gegebenen Ziffernset lässt sich die grösstmögliche und die kleinstmögliche Summe bestimmen.
7 Die Summen sind häufig Umkehrzahlen (49 / 94, 58 / 85, 67 / 76).

Die zwei folgenden Kinderdokumente zeigen auf, dass in der Erprobung viele Strukturmerkmale entdeckt wurden, einige davon wurden explizit formuliert. Die Vielfalt und die Individualität der Entdeckungen verdeutlichen, dass Muster und Strukturen Lernhilfe und Ansporn sein können.





Literatur

Devlin, K (2002). Muster der Mathematik. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

Wittmann, E. (2003) Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht der Grundschule? In: Baum, M. & Wielpütz, H. (Hrsg.) Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. S. 18-46. Seelze: Kallmeyer.