Sebastian WARTHA, Regensburg

Fehler in der Bruchrechnung durch Grundvorstellungsumbrüche

1. Fehleranfälligkeit in der Bruchrechnung und Grundvorstellungen

Die Erweiterungen des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen über die positiv rationalen Zahlen zu den rationalen Zahlen stellt einen zentralen Lerninhalt zu Beginn der Sekundarstufe I dar. Zugleich ist dieses Themenfeld besonders anfällig für Fehler (vgl. Padberg 2002).

Ein Großteil dieser Fehler ist darauf zurückzuführen, dass vorschnell auf einer formalen, regelorientierten Ebene gearbeitet wird und zu wenig Wert auf den Aufbau von Grundvorstellungen gelegt wird (vgl. z.B. Malle 2004). Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten sind nötig, um reale Sachsituationen mathematisch modellieren oder um zwischen unterschiedlichen mathematischen Darstellungsformen wechseln zu können (vgl. vom Hofe 1995). Insbesondere die Erweiterung des Zahlbereichs erfordert erhebliche Reorganisationen im Grundvorstellungsgefüge der Schüler. Anschauliche Grundvorstellungen, die im Grundschulbereich erfolgreich eingesetzt wurden, sind oftmals nicht oder nur eingeschränkt übertragbar und müssen im neuen Zahlbereich erweitert werden (vgl. Prediger 2004). Finden die Erweiterungen im Grundvorstellungsgefüge nicht statt („GV-Umbruch“) bzw. werden neue mathematische Begriffe und Verfahren nicht mit Sinn und Bedeutung gefüllt, so können sich Fehlvorstellungen bzw. „Tacid Models“ etablieren (vgl. Fischbein et al. 1990), die im ungünstigsten Fall zu systematischen Fehlstrategien führen.

Es wird vermutet, dass in der mangelnden Erweiterung von Grundvorstellungen eine Hauptursache der Defizite im Umgang mit rationalen Zahlen, insbesondere in Anwendungskontexten, liegt.

2. PALMA – eine Längsschnittstudie

An den Universitäten München, Regensburg und Kassel wird derzeit das DFG-geförderte Projekt PALMA (Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik) durchgeführt (näheres siehe Pekrun et al. 2004). Hierbei werden an einer repräsentativen deutschen Schülerkohorte (N=2100) Entwicklungen und Bedingungen von Mathematikleistungen in der Sekundarstufe I analysiert. Hierfür wurde ein Testinstrument entwickelt, das mathematische Kompetenzen im Laufe der Sek. I erfasst. Qualitative Zusatzerhebungen in Form von halbstandardisierten Interviews (N=36), die parallel zu den quantitativen Erhebungen durchgeführt werden, sollen Aufschluss über Vorhandensein und Ausprägung von Grundvorstellungen sowie über die Strategien von Schülern geben, die diese entwickeln, um Defizite im Vorstellungsbereich zu kompensieren. Ein Schwerpunkt der PALMA-Untersuchungen sind zu Beginn der Sekundarstufe I die Erweiterungen des Zahlbereichs.

3. Ergebnisse aus den quantitativen Untersuchungen

Hier eine typische Aufgabe zur Anwendung von Bruchzahlen, die in der PALMA-Erhebung der 6. Jahrgangsstufe eingesetzt wurde.

Aufgabe Popcorn
1kg Popcorn kostet 2,80 Euro. Wie viel kosten ¾ kg?

Nahe liegende Lösungswege dieser Aufgabe sind die Bestimmung des Ergebnisses über einen Bruchoperator oder über Proportionalitätsüberlegungen. Bei der Operatormethode muss die Anteilbildung „¾ von 2,80" mit einer Multiplikation übersetzt werden. Mögliche Schwierigkeiten sind darin zu sehen, dass die Verringerung der Ausgangsgröße (2,80) in diesem Kontext durch eine Multiplikation (und nicht etwa über eine Differenz oder einen Quotienten) erreicht wird. Beim Rechnen über proportionale Überlegungen sind mentale Zuordnungsprozesse sowie eine Grundvorstellung zur Proportionalität erforderlich.

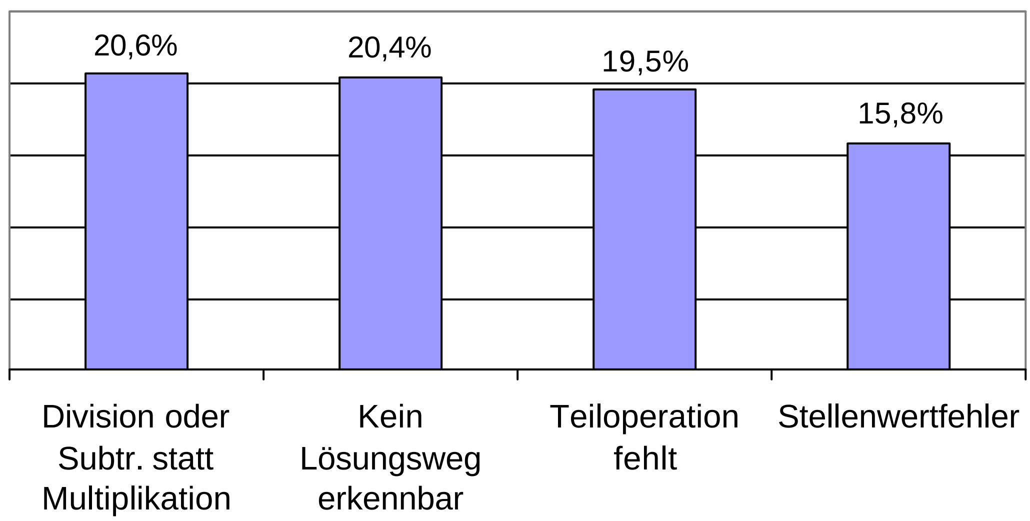

Abb. 1: Hauptfehler beim Lösen der Aufgabe Popcorn (N=461)

Die Aufgabe wurde von 35,3% der Schüler richtig gelöst, 461 von 2059 Schülerinnen und Schülern (22,4%) lösten die Aufgabe falsch. Aus Abb. 1 entnimmt man, wo die Hauptschwierigkeiten beim Lösen dieser Aufgabe lagen.

Der häufigste Fehler mit über 20% von allen fehlerhaften Lösungen ist die Wahl einer falschen Rechenoperation (minus oder geteilt). Hierbei wurde der Bruch 3/4 nicht mit dem Ausgangswert 2,80 multipliziert, sondern subtrahiert oder dividiert. Bei über 20% der falschen Lösungen war kein Lösungsweg erkennbar, hier war meist nur ein (falsches) Ergebnis angegeben. Die drittgrößte Gruppe der inkorrekten Lösungen führte entweder die Teiloperation 2,80:4 oder 2,80·3 aus, was auf einen Lösungsversuch über einen Proportionalitätsschluss oder Bruchoperator hinweist. Knapp 16% der fehlerhaften Lösungen gehen auf Rechenfehler im dezimalen Stellenwertsystem zurück. Es wurden weitere systematische Fehler analysiert, auf die hier aber nicht eingegangen wird.

Auffällig ist bei der Analyse dieser Aufgabe, dass etwa jeder fünfte fehlerhafte Lösungsversuch auf die Wahl einer falschen Rechenoperation zurückzuführen ist: statt zu multiplizieren wurde dividiert oder subtrahiert.

4. Ergebnisse aus den qualitativen Untersuchungen

In den qualitativen Zusatzerhebungen der 6. und 7. Jahrgangsstufen wurde untersucht, welche konkreten Grundvorstellungen beim Lösen zu Tage treten. Dabei wurden die Lösungswege von Schülerinnen und Schülern zu Aufgaben zur multiplikativen Anteilsbildung (vgl. Aufgabe Popcorn) anhand von Transkripten analysiert. Hier ein Beispiel aus der Klasse 7:

Aufgabe Erbe

Herr Ludwig hinterlässt bei seinem Tode 4000 €. Sein Sohn Uli erbt $\frac{3}{8}$ davon. Wie viel € bekommt Uli?

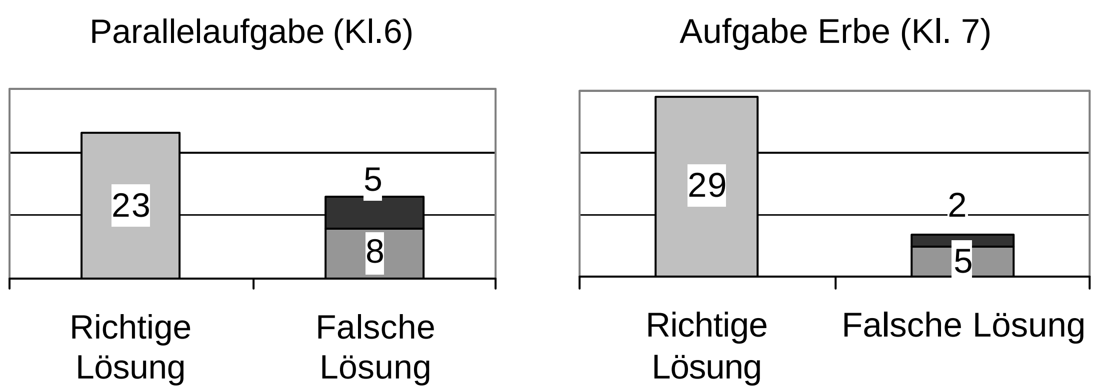

Abb. 2: Multiplikative Anteilbildung: Lösungshäufigkeiten

Die Abb. 2 zeigt, dass diese Aufgabe in Klasse 7 besser gelöst wurde als die entsprechende Parallelaufgabe in Klasse 6 (Klasse 6: 23 von 36, Klasse 7: 29 von 36 Schülerinnen und Schüler gelangten zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe). In beiden Fällen hatten jedoch mehr als die Hälfte der fehlerhaften Lösungen die Wahl einer falschen Rechenoperation zur Ursache: 8 der 11 falschen Lösungen in der 6. Jahrgangsstufe und 5 der 7 fehlerhaften Lösungen in der 7. Jahrgangsstufe.

Die fehlerhafte Wahl der Rechenoperation wurde in den Interviews in erster Linie damit begründet, dass nur so eine „Verkleinerung" des Ausgangswertes zu erreichen ist (vgl.: Wartha & vom Hofe, 2005). Diese charakteristische Fehlerstrategie ist darauf zurückzuführen, dass die Grundvorstellung zur Multiplikation im neuen Zahlbereich nicht adäquat erweitert wurde. Die „alten" Vorstellungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen (Multiplikation vergrößert, Division verkleinert) sind weiterhin wirksam.

Insgesamt konnten in beiden Serien ca. 50% der Fehler durch vorstellungsbedingte Defizite ähnlicher Art erklärt werden. Dabei zeigen sich erste Hinweise für eine hohe zeitliche Stabilität dieser Fehlvorstellungen. Diese näher zu untersuchen wird unter anderem Inhalt der folgenden PALMA-Erhebungen sein.

Literatur:

Fischbein, E., Tirosh, D., Stavy, R. & Oster, A. (1990): *The autonomy of mental models*. – In: For the Learning of Mathematics, 10, p. 23–30.

Hofe, R. vom (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum, Heidelberg.

Malle, G. (2004) *Grundvorstellungen zu Bruchzahlen*. In: MathematikLehren, 123, S. 4–8.

Padberg, F. (2002)*: Didaktik der Bruchrechnung*. Spektrum, Heidelberg.

Pekrun, R., Götz, Th., Hofe, R. vom, Blum, W., Jullien, S., Zirngibl, A., Kleine, M., Wartha, S. (2004): *Emotionen und Leistung im Fach Mathematik. Ziele und erste Befunde aus dem „Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik" (PALMA)*. In: Doll, J. & Prenzel, M. (Hrsg): Bildungsqualität von Schule. Münster: Waxmann, S. 345 – 363.

Prediger, S. (2004): *Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen?* In: MathematikLehren, 123, S. 10-13.

Wartha, S. & Hofe, R. vom (2005): *Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung*. In: MathematikLehren, 128, S. 10 – 16.