

Christof WEBER, Basel

## **Vorstellungen und Mathematikunterricht – Beispiel einer Kooperation von Wissenschaft und Unterrichtspraxis**

Die Unterrichtsforschung interessiert sich unter anderem dafür, wie Lernen mit Vorstellungen zusammenhängt. Aus ähnlichen Gründen können Vorstellungen auch für Unterrichtende aufschlussreich sein. Mit *mathematischen Vorstellungsübungen* liegt nun auch ein Unterrichtsinstrument vor, das im Unterricht die Vorstellungen aufgreift, die Schülerinnen und Schüler in der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen aufbauen.

### **1. Zum Spannungsfeld von Wissenschaft und Unterrichtspraxis**

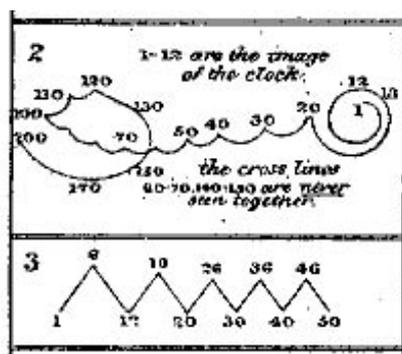
Unter dem Titel „Die Schweiz ist in punkto Fachdidaktik ein Entwicklungsland“ wurde vor kurzem das Spannungsfeld, in dem sich die Didaktik in der Schweiz befindet, diskutiert [1, S. 86 f.]. Der Interviewte – selbst Naturwissenschaftsdidaktiker auf der SII – beklagt nicht nur den diesbezüglichen brain-drain, den die Schweiz seit Jahren erleidet, sondern auch die Tatsache, dass an hiesigen Lehrerbildungsstätten kaum universitäre didaktische Forschung betrieben wird. Entsprechend würde den Studierenden kein theoretisches Fundament vermittelt, auf deren Grundlage sie ihren Berufsalltag theoretisch reflektieren und damit verbessern könnten.

Hier kann die *Aktionsforschung* wichtige Impulse geben. Diese auf Unterricht bezogene Sozialforschung zielt auf „die systematische Untersuchung beruflicher Situationen, die von Lehrerinnen und Lehrern selbst durchgeführt wird, in der Absicht, diese zu verbessern“ [2, S. 13]. Ein Beispiel solcher Aktionsforschung ist die Reflexion und Weiterentwicklung mathematischer Vorstellungsübungen, um die es in diesem Beitrag geht (siehe [3]).

### **2. Vorstellungen in der Wissenschaft und Forschung**

Seit der kognitiven Wende sind mentale Prozesse und damit auch Vorstellungen wieder Gegenstand der Forschung. Aufgrund unterschiedlicher Fragestellungen werden Vorstellungen in der Denk- und Kognitionspsychologie, aber auch in der Didaktik begrifflich äußerst vielfältig gefasst. So bestehen hinsichtlich der Ausprägungen „konkret – abstrakt“, „bildhaft – begrifflich“, „statisch – dynamisch“ oder „richtig – falsch“ große Unterschiede. In der Mathematikdidaktik werden Vorstellungen mit dem Gelingen von Lernprozessen in Zusammenhang gebracht, und zwar entweder als *Ergebnisse* gelungener Lernprozesse (als Grundvorstellungen [4]) oder aber als *Voraussetzungen* für das Gelingen von Lernprozessen (in Form von Schülervorstellungen [4], lebensweltlichen Vorstellungen oder Beliefs).

Um Vorstellungen *untersuchen* zu können, müssen sie natürlich erst einmal aktiviert und gehoben werden. Dazu kennt die Forschung verschiedene Methoden, so die seit alters verwendete *Introspektion* (siehe nebenstehende „number forms“ von Galton [5, S. 91]).



Diese Methode entspricht zwar nicht dem naturwissenschaftlichen Forschungsparadigma der Entkoppelung von Beobachter und Beobachtetem. Sie eignet sich jedoch – im Gegensatz zu den aufwändigeren Verfahren der modernen Unterrichtsforschung – hervorragend, um Vorstellungen im aktuellen Unterricht zu heben.

Die obigen Skizzen zeigen, welche individuellen Vorstellungen sich zwei Versuchspersonen von der Menge der Zahlen in ihrer räumlichen Anordnung machen. Beide Vorstellungsbilder unterscheiden sich deutlich von der fachlichen Vorstellung des Zahlenstrahls und sind insofern nicht korrekt. Dennoch erfassen sie wesentliche Aspekte des Zahlenstrahls, so etwa die Reihung der Zahlen ihrer Größe nach.

Dieser wissenssoziologische Unterschied zwischen individuellen Vorstellungen und der ausgehandelten, fachlich korrekten Grundvorstellung kann begrifflich wie folgt gefasst werden: Statt von „Schülervorstellungen“ schlage ich vor, von **singulären Vorstellungen** sprechen, und entsprechend sollte von **regulären Vorstellungen** statt von „Grundvorstellungen“ gesprochen werden. Diese Begrifflichkeit bildet nicht nur ab, dass singuläre und reguläre Vorstellungen einander bedingen. Sie operiert auch außerhalb von „richtig“ und „falsch“. Damit wird über ein Interesse für Schülervorstellungen, das sich bloß im Kontext von Fehlvorstellungen bewegt, hinausgegangen. Vielmehr werden singuläre Vorstellungen unter einer *Entwicklungsperspektive* angegangen. [3, S. 128–132, 143–149]

### 3. Vorstellungen im gymnasialen Mathematikunterricht

Moderne Unterrichtskonzepte plädieren dafür, den Unterricht zuweilen auch bei den Lernenden beginnen zu lassen. So nimmt die Dialogische Didaktik in einer *singulären Standortbestimmung* der Lernenden ihren Anfang, um den Fachunterricht als Wechselspiel von Singularität und Regularität zu modellieren [6]. Singuläres wird hier an Gefühlen und Eindrücken festgemacht, die die Auseinandersetzung mit fachlichen Fragen begleiten und die sich in Schülerdokumenten niederschlagen. Auf der SII ist der Fo-

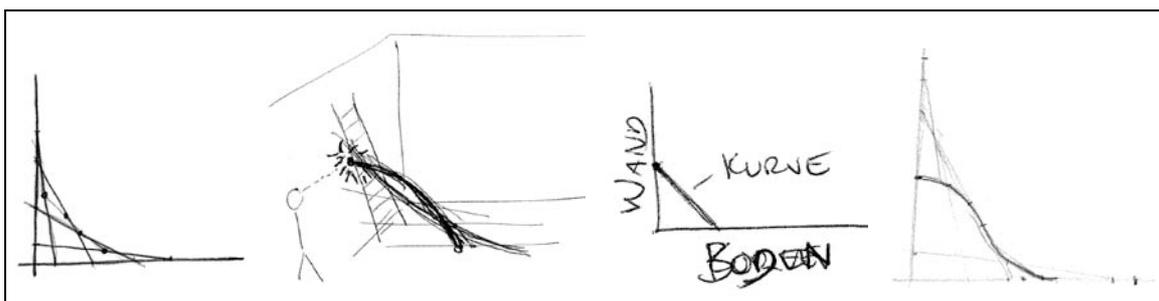
kus auf *singuläre Vorstellungen* stufengerechter. Inwiefern ein solcher Fokus produktiv ist und inwiefern er gymnasialen Ansprüchen genügt, wird nun an einem mehrfach erprobten Beispiel skizziert (ausführlicher in [7]).

Singuläre Vorstellungen von Gymnasiastinnen und Gymnasiasten lassen sich durch *mathematische Vorstellungsübungen* aktivieren. In einer solchen Übung wird ein mathematischer Inhalt in einen außermathematischen Bild- und Handlungszusammenhang eingebettet, beispielsweise die Konstruktion einer Ellipse durch eine gleitende Strecke in den Zusammenhang einer rutschenden Leiter. Die entsprechenden Vorstellungsanweisungen lauten im Beispiel wie folgt [3, S. 165–172]:

- Stellen Sie sich eine Leiter in einem hellen, geräumigen Zimmer vor. ...
- Nehmen Sie die Leiter und lehnen Sie sie dicht an die Wand an. ...
- Stellen Sie sich selbst vor die linke Seite der Leiter hin und lehnen Sie sich mit Ihrer linken Schulter an die Wand. So sehen Sie von der Leiter nur noch den linken Holm vor Ihnen, wie er nach links an die Zimmerwand angelehnt ist. ...
- In der Mitte des Ihnen zugewandten Leiternholms ist eine Lampe befestigt. Verdunkeln Sie das Zimmer und schalten Sie die Lampe ein. Sie sehen sie leuchten, als Leuchtpunkt. ...
- Das untere Leiterende beginnt auf dem Boden zu rutschen, ganz langsam nach rechts, von der Wand weg. Das obere Leiterende berührt dabei weiter die Wand und gleitet an ihr entlang hinunter. Im Moment, da es den Boden berührt, rutscht die Leiter nicht weiter, sondern bleibt liegen. ...

Auf diese Vorstellungsanweisungen folgen zur *Hebung* der singulären Vorstellungen zwei Fragen: Die mathematische Frage „Welche Form hat die Leuchtkurve, die die Lampe durch das Rutschen der Leiter in das dunkle Zimmer zeichnet?“ zielt auf mathematisches Problemlösen, und die metakognitive Frage „Welche Vorstellungsbilder und welche Vorstellungshandlungen haben Sie im Laufe der Vorstellungsübung herangezogen?“ zielt auf die Introspektion der konstruierten, singulären Vorstellungen.

Bearbeiten die Schülerinnen und Schüler diese beiden Fragen in ihren Forschungsheften, entstehen Skizzen, die an die „number forms“ von Galton erinnern. In der Regel sind ihre Leuchtkurven linksgekrümmt (Abb. links), aber immer wieder auch rechtsgekrümmt, gerade oder sogar asymmetrisch:



Solche singulären Vorstellungsbilder sind *Eigenleistungen* der Lernenden, die als selbstbestimmt erlebt werden, unterliegen sie doch der eigenen Bearbeitung. Hält sich zu diesem Zeitpunkt die Lehrperson mit ihren regulären Vorstellungen zurück, kann sie durch geeignete Fragen die Reflexion über die singulären Vorstellungen anregen. In deren Verlauf arbeiten manche Schülerinnen und Schüler das reguläre Vorstellungsbild des Viertelkreises selbst heraus und entwickeln Argumente und Beweise dafür. Darüber hinaus stellen sich Einzelne die Frage, wie das hinderliche Vorstellungsbild der Linkskrümmung zustande kommt (und beantworten sie auch). Im Zuge solcher Reflexionsprozesse können die Lernenden erkennen, dass Vorstellungen nicht hinderlich bleiben müssen, sondern durch Umstrukturierung *produktiv* gemacht werden können. So beschreibt ein Schüler, dass es für die Leuchtkurve irrelevant sei, ob die Leiter umfällt oder wegrutscht:

Vorgestellt hatte ich mir eigentlich das Bild ①, denn für mich war am Anfang eigentlich klar, dass es ~~in~~ etwa eine solche Form haben muss in irgendeiner Weise:

also so: 

Aber ich hätte nicht an ② gedacht, da dies Form der umfallenden Leiter hat

also so 

~~Es ist~~  
Umfallen und Wegrutschen ist gleich.

*Zusammenfassend* lohnen sich singuläre Vorstellungen im Unterricht sowohl aus pädagogischer wie auch aus fachlicher Sicht, da sie ein aktives, selbstbestimmtes und reflektierendes Lernen ermöglichen. Sie lassen sich durch mathematische Vorstellungsübungen aktivieren und heben und stehen damit für einen fachlich anspruchsvollen Mathematikunterricht bereit.

#### Literatur

- [1] Peter Labudde: Die Schweiz ist in punkto Fachdidaktik ein Entwicklungsland. In: *Schulblatt des Kantons Zürich*, Januar 2007
- [2] Herbert Altrichter / Peter Posch: *Lehrer erforschen ihren Unterricht*. Julius Klinkhardt, Bad Heilbrunn 1998
- [3] Christof Weber: *Mathematische Vorstellungen bilden*. h.e.p. Verlag, Bern 2007
- [4] Rudolf vom Hofe: *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1995
- [5] Francis Galton: *Inquiries into Human Faculty and its Development*. Macmillan, London 1883 [erhältlich unter <http://galton.renoster.com/books/human-faculty/>]
- [6] Urs Ruf / Peter Gallin: *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*. Kallmeyer Verlag, Seelze 1998
- [7] Christof Weber: Vorstellungsübungen und dialogischer Mathematikunterricht. In: Stefan Keller / Felix Winter / Urs Ruf (Hrsg.): *Besser Lernen im Dialog*. Kallmeyer Verlag, Seelze 2007 (in Vorbereitung)