Alexander WYNANDS, Bonn

π und e – Zwei Zahlen im Mathematikunterricht

Die Zahl π gehört zum mathematischen Bildungskanon der Sek. I. Der Zugang zu e erfolgt im Mathematikunterricht (MU) der Sek. II. Die Einführung der beiden Zahlen sollten neben historischen Anmerkungen – z.B. zu Archimedes, Euler, Klein – didaktische Aspekte beachten:

1. Definitionen erfolgen schüler-, problem- und handlungsorientiert.
2. Bei der Approximation von π können alle Schüler der Sek. I Konvergenzprobleme „erleben", über die leistungsstarke Schüler der Sek. II argumentativ entscheiden können.
3. Aus mathematik-didaktischer Sicht ist der „Eulersche Weg" zu e, exp(x) und ln(x) dem von Felix Klein propagierten Weg über die Hyperbel-Integral vorzuziehen.

Anmerkungen zu π

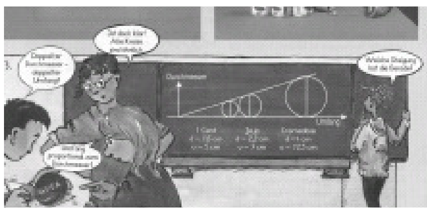
In der Sek. I kann π über den Kreisumfang oder über die Kreisfläche definiert werden. Wegen des experimentell leichteren Zugangs über die Längenmessung wird meistens die Definition (*) gewählt.

(*) π ist das Verhältnis von Umfang zum Durchmesser eines Kreises.

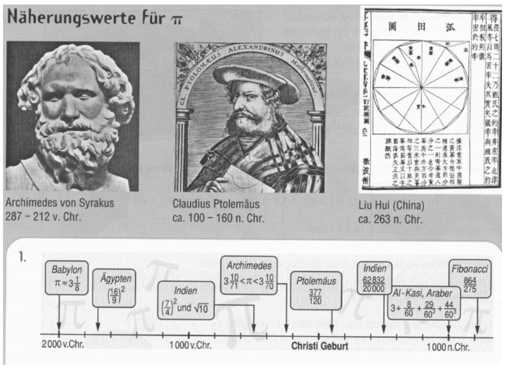
Mit (*) gilt für den Umfang $u_{Kreis} = 2\pi r$. Für den Flächeninhalt folgert man $A_{Kreis} = \pi r^2$ mit der präformalen „Tortenzerlegungs-Begründung" (Zerlegung in viele „Tortenstücke", die anschließend zu einem „Fastrechteck" mit der Länge $\frac{1}{2}u = \pi r$ und der Höhe r zusammengelegt werden).

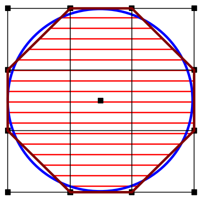
Die Frage nach der Größe von π und nach den Formeln zur Kreisberechnung bearbeitet man in der 8. oder 9. Klasse durch Messen und Entdecken an kreisförmigen Objekten (Rädern, Dosen, Münzen,…), vgl. [Maßstab].

1.

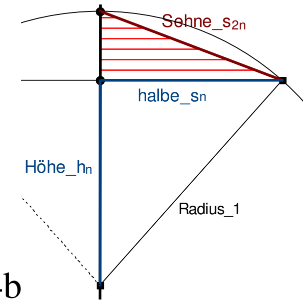

2.


Bei den Übungen an formalen und sachorientierten Aufgaben ergeben sich u.a. folgende sinnvolle Fragen: Wie genau soll das Ergebnis sein? Wie viele Dezimalstellen von π braucht man? Wer kannte wann wie viele Stellen, wie berechnet man sie? Für die Hand des Lehrers sei z.B. verwiesen auf [Beckmann] und [Posamentier/Lehmann]. Aus der Mathematikgeschichte scheinen mir folgende Beispiele bedeutsam.





4a



4b

$A_{\text{Kreis}} \approx \frac{7}{9}(2 \cdot r)^2 \qquad s_6 = 1, \quad s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^{\,2}}}$

3. Wer kannte wann π wie genau?

Die Figur in 4a zeigt einen Erklärungsversuch von [Becker] für den im Papyrus Rhind gefundenen π-Wert $(16/9)^2 = (64/81)*4 \approx (63/81)*4 = (7/9)*4$.

Für leistungsstarke Schüler sollte die „Ausschöpfung“ nach Archimedes (287-212 v.Chr.) unter Einsatz einer Tabellenkalkulation besprochen werden. Kern der Methode ist die (Rekursions-)Formel zwischen den Sehnen der ein- (oder um-) beschriebenen regelmäßigen n-Ecke und 2n-Ecke, Abbildung 4b. Nur der Satz des Pythagoras wird benötigt. Durch Hinsehen auf die Näherungswerte für π entdeckt man erstaunliches.

1. In der linken Tabelle sieht man die „Numerische Konvergenz“ der π-Folge gegen den sinnlosen Wert 0, weil die s-Werte in der Formel aus 4b als „0“ zwischengespeichert werden. Das nennt man „Nullkatastrophe“.

(1) $s_6 = 1, \quad s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^{\,2}}}$

n Ecken	Sehne s(n)	π-Näherung Pi(n)
6	1,00E+00	3,0000000
12	5,18E-01	3,1058285
24	2,61E-01	3,1326286
48	1,31E-01	3,1393502
96	6,54E-02	3,1410320
201.326.592	***2,98E-08***	***3,0000000***
402.653.184	***1,49E-08***	***3,0000000***
805.306.368	***0,00E+00***	***0,0000000***

(2) Näherungen mit $s_{2n} = s_n : \sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^{\,2}}}$

s(n)	Pi(n)	(Pi(2n)-Pi(n)) / Pi(n)	
1,00E+00	3,0000000000	./.	k-Faktor
5,18E-01	3,1058285412	3,53E-02	./.
2,61E-01	3,1326286133	8,63E-03	0,24461
1,31E-01	3,1393502030	2,15E-03	0,24866
6,54E-02	3,1410319509	5,36E-04	0,24967
3,12E-08	***3,1415926536***	***2,83E-16***	***1,00000***
1,56E-08	***3,1415926536***	***0,00E+00***	***0,00000***
7,80E-09	***3,1415926536***	***0,00E+00***	***#DIV/0!***

2. Mit der „numerisch stabilen“ 2. Formel $s_{2n} = s_n : \sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^{\,2}}}$, die algebraisch äquivalent zur Formel in 4b ist, entdeckt oder vermutet man
   a) schrittweise (fast) Halbierung der Sehnenlängen s_n,
   b) stabile „numerische Konvergenz“ der π-Folge (bis 805 306 368-Eck),
   c) „lineare“ Konvergenz mit einem Konvergenzfaktor k = 0,25.

Die Beweise zu den Entdeckungen in 2. können in der Sek. II behandelt werden. Das entspricht einer didaktischen Methode mit den Merkmalen spiralig-vertiefend-themenzentriert und Geometrie, Algebra, Numerik, Algorithmik und Analysis vernetzend. Beweise zu 1. und 2.

$$\left|\frac{s_n - s_{2n}}{s_n}\right| = 1 - \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{(4-s_n{}^2)}}} \le k < \frac{1}{2} \text{ also: } \lim_{n\to\infty}(s_n) = 0; \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{s_{2n}}{s_n}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)_n := \frac{\pi_{2n}-\pi_n}{\pi_n} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{(4-s_n{}^2)}}} - 1 \quad \text{Also: Kontraktion } k_n:$$

$$k_n := \left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)_{2n} : \left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)_n = \frac{2-\sqrt{2+x}}{2-x};\; x := \sqrt{2+\sqrt{4-s_n{}^2}}$$

mit Näherung: $\sqrt{4-s^2} \approx 2 - \frac{s^2}{4}$ oder mit Regel von l´Hospital: $\lim_{n\to\infty}(k_n) = \frac{1}{4}$

Anmerkungen zu e

Logarithmen spielten im 16. / 17. Jh. eine große Rolle für numerisches Rechnen. Die Rechenlast nimmt uns heute der Taschenrechner ab. Mit der „natürlichen" Logarithmusfunktion konnte schließlich die Lücke bei der Integration $\int x^n dx$ für n = -1 geschlossen werden. Dies war (zu) lange die Basis für den „Kleinschen Weg" von ln(x) zur e-Funktion im MU des Gymnasiums. Euler [Euler] war der erste, der genial zu „seiner" Zahl e hinführte und über die Umkehrung von e^x die Logarithmusfunktion ln(x) definierte. Ausgangspunkte sind in der Sek. I Wachstumsprozesse, z.B. Schachbrettgeschichte, Seerosenwachstum, Zu- oder Abnahmen von Populationen, radioaktiver Zerfall, bei denen sich eine „Größe" pro „Zeittakt" immer um die gleiche Rate p %, d.h. mit dem Faktor b := 1+p/100 ändert.

Den Eulerschen Weg zu e und e^x kann man mit „Hand und Verstand" nachgehen. Dazu empfehlen sich „2^{hoch}-Stäbe" (aus Rundholz, ca. 5 cm Durchmesser, für die 2er-Potenzen), die in gleichmäßigen Abständen aufgestellt die Funktion f(x) = 2^n für natürliche n „be-greifbar" machen. Nun sucht man passende „Höhen" für Plätze auf halbem, drittel, … 1/m–tel Weg von einem 2^n–Stab zum nächsten.

Die Formalisierungen hierzu sind n-te Wurzeln und die Schreibweise $2^{n/m}$. Das „Einpassen" von Stäben gegebener Höhe, so dass alle Stabenden „augenscheinlich" auf einer „glatten" Kurve liegen, führt zu den Logarithmen-Werten der Stabhöhen. Schließlich verändert man die (äquidistanten) Abstände zwischen den Stäben und „begreift", dass alle Exponential-Funktionen $f(x) = b^x$ mit beliebiger Basis $b>1$ (oder $0<b<1$) zueinander affin sind, d.h. $b^x = 2^{kx}$ mit „passendem" k.

e – die besondere Basis

Euler überlegte sinngemäß (schon vor 1748): Wenn b als reelle Zahl existiert mit der Eigenschaft, dass der Graph von b^x in (0|1) linear mit dem „einfachsten" Steigungsmaß t = 1 ansteigt, dann gilt für „kleine" x-Beträge:

$b^x \approx 1 + x$ mit $x = \dfrac{1}{\pm n} \Rightarrow \quad b \approx (1+\dfrac{1}{n})^n$ und $b \approx (1-\dfrac{1}{n})^{-n} = (1+\dfrac{1}{n-1})^n$. Das ist der Zugang zu $e = \lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n-1})^n$ und Näherungswerten, z.B. $\underline{\mathbf{2{,}718}}4\ldots = (0{,}9999)^{-10000}$ **< e <** $1{,}0001^{10000} = \underline{\mathbf{2{,}718}}1\ldots$

Mir scheint, dass im MU der Sek. II die aus der Definition von e folgende Eigenschaft, dass wiederholte Ableitungen von e^x wieder e^x ergeben, zu selten genutzt wird zur Approximation von e^x durch ein Polynom in x.

Mit $e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \ a_kx^k + \ldots$ und $1 = (e^x)^{(k)}{}_{x=0} = k!a_k$

gilt: $a_k = \dfrac{1}{k!}$ und damit $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$, insbesondere: $e = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}$

Auch die Irrationalität von e, die Euler 1737 bewies, kann leistungsstarken Schülern so vermittelt werden: Die Annahme e = p/q mit q > 1 führt zum Widerspruch: $0 < (\dfrac{p}{q} - \sum_{o}^{q}\dfrac{1}{k!}) \cdot q! = (\sum_{q+1}^{\infty}\dfrac{1}{k!}) \cdot q! < 1$. Links vom Gleichheitszeichen steht eine natürliche Zahl. Die Summe rechts von „=" lässt sich durch eine geometrische Reihe nach oben abschätzen. Anfangsglied und Quotient der Reihe sind beide 1/(q+1), der Summenwert ist 1/q < 1.

Literatur

Becker, O.: *Grundlagen der Mathematik in Geschichtlicher Entwicklung*, Freiburg, 1975

Beckmann, P.: *A History of π*, St. Martin´s, New York, 1989

Euler, L.: *Introductio in Analysin Infinitorum*, Bousquet, Lausanne, 1748

Posamentier/Lehmann: *A Biography of the World´s Most Mysterious Number*; Prometheus Books, New York, 2004

[Maßstab] Schröder/Wurl/Wynands: *Schulbücher Maßstab/Faktor 9. Klasse für Haupt- und Realschulen*, Schroedel-Verlag, Braunschweig, 2007