Ralf WAGNER, Engelbert NIEHAUS, Koblenz-Landau

# Verbindung von Tabellenkalkulation, Dynamischer Geometriesoftware und Geographischen Informationssystemen zur Visualisierung von glatten Wegen im mathematischen Umweltlabor

Zielsetzung ist es, aus einzelnen Punkten der Ebene, als gemessene oder berechnete Ortskoordinaten, einen der zeitlichen Abfolge entsprechenden glatten Weg durch die Punkte zu rekonstruieren. Mit dieser Interpolationsaufgabe wird exemplarisch die Bedeutung mathematischer Modellbildung im Kontext eines mathematischen Umweltlabors verdeutlicht. Dabei wird eine Verbindung von algebraischen Aspekten der Tabellenkalkulation und der geometrischen Veranschaulichung in DGS-Systemen hergestellt, da dort die Möglichkeit der visuellen und der geometrischen Analyse der Konstruktion besteht.

## 1. Mathematikdidaktische Konzeption des mathematischen Umweltlabors

Das mathematische Umweltlabor ist ein problemorientiertes Projekt, welches an der Universität Koblenz-Landau, Campus Landau durch eine Kooperation der Institute für Umweltwissenschaften und Mathematik entstanden ist. Dabei steht eine anwendungsorientierte Bearbeitung von authentischen Problemlöseaufgaben aus dem Bereich der Umwelt-wissenschaften, insbesondere von Risikoanalysen, im Vordergrund. Im Wesentlichen sieht das Konzept die projektorientierte Zusammenarbeit (siehe [7] und [8]) von drei Teilnehmergruppen vor. Dies sind zum Einen Studierende des Diplomstudiengangs Umweltwissenschaften, zum Anderen Studierende der Lehramtsstudiengänge mit Hauptfach Mathematik und schließlich SuS mit besonderer mathematisch naturwissenschaftlicher Begabungen. Die Heterogenität der Teilnehmer bedingt natürlich unterschiedliche fachliche Kenntnisse. Die Schulmathematik stellt sich den SuS oftmals als Ansammlung unterschiedlicher Verfahren dar, wobei zu vorhandenen mathematischen Kompetenzen der Lernenden geeignete Probleme gesucht werden. Authentische Probleme besitzen i.d.R. eine höhere Komplexität, die die Lernvoraussetzung der SuS zunächst übersteigt. An dieser Stelle knüpft das Konzept des mathematischen Umweltlabors an, denn hier werden komplexe Problemstellung bearbeitet, welche durch Modellbildung im heterogenen Team zu lösen sind. Die beteiligten Studierenden der Umweltwissenschaften können auf Grund ihres fachlich breit gefächerten Studiums wichtige fächerübergreifende Beiträge zur mathematischen Modellbildung leisten. In diesem Artikel wird beispielhaft die Rekonstruktion glatter Wege durch ein bestimmtes Risikogebiet betrachtet und die entsprechende Modellbildung erläutert. Ausgehend von einer sich bewegenden Person werden in zeitlichen Abständen zugehörige Ortskoordinaten gesammelt. Für die spätere Risikobewertung ist der berechnete Wege wesentlich, da die Personen auf dem Weg unterschiedlich hohen Risiken ausgesetzt waren. Da nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Beteiligten alle notwendigen mathematischen Verfahren beherrschen, werden Lernprozesse in direkter Abhängigkeit von dem gegebenen Problem initiiert. Den beteiligten Lehramtsstudierenden kommt eine wichtige Rolle zu. Ihre Aufgabe besteht nun darin, die mathematische Theorie für die anderen fachlich und didaktisch aufzubereiten. Durch die Teilnahme an diesem Projekt lernen die Lehramtsstudierenden authentische Lehr- und Lernumgebungen zur mathematischen Modellbildung kennen und sammeln Erfahrungen im Umgang mit SuS. Den beteiligten Schülerinnen und Schüler wird die Möglichkeit gegeben, durch die Bearbeitung konkreter und realistischer Aufgabenstellungen mit mathematischen Werkzeugen zu arbeiten, die in vielen Anwendungsbereichen, insbesondere im Risikomanagement, curriculare Lerninhalte projektorientiert weiter vertiefen.

Im Folgenden werden drei unterschiedliche Niveaustufen der mathematischen Modellierung differenzierbarer Wege beschrieben. Die erstellte Webapplikation dient der Veranschaulichung der entsprechenden Wege. Dies kann ohne Kenntnis der internen Berechnung verwendet und zu Risikobewertungen herangezogen werden. Die graphische Darstellung der Splines in Geogebra durch Verwendung von Komplexkombinationen setzt das Verständnis des Konstruktionsprinzips voraus Die algebraische Beschreibung bildet schließlich die anspruchsvollste Ebene.

## 2. Fachwissenschaftliche Hintergründe

Bei der hier betrachteten Anwendnung handelt es sich, wie bereits erläutert, um die Rekonstruktion glatter Wege durch Verwendung einer zeitliche Abfolge diskreter Ortskoordinaten. Um die entsprechenden Wege beschreiben und später auch sinnvoll visualisieren zu können, ist eine mathematische Modellierung unabdingbar. Bei diesem Problem ist es naheliegend, unterschiedliche Interpolationsverfahren zu betrachten, um eine Verbindung der einzelnen Koordinaten zu erhalten. Bei der Modellierung von Problemen ist es sinnvoll, einfache Modelle aus den Lernvoraussetzungen der Gruppe zu entwickeln und diese dann schrittweise zu verbessern. Lineare Interpolation liefert aufgrund fehlender Differenzierbarkeit an manchen Stellen unrealistische Wegverläufe. Da es sich um Ortskoordinaten einer zweidimensionalen Ebene handelt, gelangt man schließlich zur Modellierung differenzierbarer Kurven (Splines). Die so modellierten Kurven entstehen durch eine einfache Bildung von Konvexkombinationen (siehe [2]). Ausgangspunkt sind eine Anzahl von Koordinatenpunkten, beispielsweise vier. Es werden zuerst Bezierkurven für jeweils zwei benachbarte Punkte gebildet gemäß $B_{1,2}$ (t) = c • $A_2$ + (1 – c) • $A_1$ (c aus [0,1]). Die so enstendenen Bezierkurven werden dann wieder durch Konvexkombinationen kombiniert und das Verfahren so lange fortgesetzt, bis schließlich eine Kurve für alle betrachteten Koordinatenpunkte gefunden wurde.

Die so berechneten glatten Wege sollen schließlich visualisiert werden, um den Verlauf durch das betrachtete Risikogebiet veranschaulichen zu können. Die Dynamische Geometriesoftware Geogebra (siehe [3]) leistet hier gute Dienste, denn durch die algebraische Komponente ist es hier möglich, die berechneten Bezierkurven zu konstruieren. Außerdem kann eine dynamische Veränderung der entsprechenden Kurve betrachtet werden. Dadurch wird ein weitergehendes Verständnis dieser Kurven und deren Abhängigkeit von den verwendeten Ortskoordinaten ermöglicht. Ist lediglich das Ergebnis (differenzierbarer glatter Weg) im Lernprozess wesentlich kann man durch einen online verfügbaren Konverter automatisch eine entsprechende Geogebra-Datei erstellen lassen. Anhand einer bereitgestellten Webanwendung (siehe [1]) kann sich der Leser selbst ein Bild davon machen. Diese Visualisierungsmöglichkeiten sind eine wichtige Komponente bei der Aufbereitung gegebener Daten. Bei vielen Anwendungen ist es erforderlich, benutzerfreundliche Lösungen bereitzustellen. Eine häufig verwendete Visualisierungsmöglichkeit von geographischen Daten sind so genannte Geographische Informationssysteme (GIS). Im mathematischen Umweltlabor kommt das OpenSource Programm GRASS zum Einsatz, welches auch im Hinblick von Risikoanalysen entwickelt wurde (siehe [4]). Durch die Verwendung dieses lernen die Beteiligten, mit einer in der Realität wirklich verwendeten professionellen Software umzugehen und ihre Ergebnisse enstprechend aufzubereiten und zur Verfügung zu stellen.

## 3. Lehrplanbezug

Da im mathematischen Umweltlabor sehr unterschiedliche Fragestellungen behandelt werden, sind viele Bezüge zum Lehrplan für das Fach Mathematik vorhanden. Betrachtet man das vorgestellte Anwendungsbeispiel, dann spielt dort der Begriff der Differenzierbarkeit (siehe [5]) eine besondere Rolle, wobei nicht nur der in der Schule behandelte eindimensionale Fall, sondern die Differenzierbarkeit von räumlichen Kurven betrachtet werden muss, zu deren Verständnis selbstverständlich der eindimensionale Fall grundlegend ist. Durch die Aufbereitung der vorhandenen Daten aus einer Tabellenkalkulation spielen algebraische Begriffe eine wichtige Rolle (siehe [6]). Durch die Behandlung von Kurven wird außerdem das Verständnis des Funktions- und Abbildungsbegriffes erweitert.

## 4. Gewonnene Ergebnisse und Erkenntnisse

Bei den bereits an diesem Projekt teilgenommenen Schülerinnen und Schülern hat sich gezeigt, dass diese bei vorhandenen besonderen Begabungen im mathematischen und naturwissenschaftlichen Bereich gut in der Lage sind, sich mit einiger Hilfestellung neue Verfahren anzueignen und diese auch gewinnbringend einzusetzen. Auch zeigte sich großes Interesse an den Modellbildungsprozessen und den authentischen Problemen, was das entwickelte Konzept bestätigt.

## 5. Fazit

Die bis jetzt gewonnenen Erkenntnisse lassen einen Mehrwert für die Beteiligten erkennen. Allerdings ist bei den teilnehmenden SuS eine gewisse mathematische und naturwissenschaftliche Begabung erforderlich, um auch selbstständig einen Beitrag leisten zu können und an dem Modellbildungsprozess teilnehmen zu können. Dies bedingt auch eine vorhandene Motivation, sich gegebenenfalls neue Verfahren anzueignen und gemeinsam ein Problem zu lösen. Dieser letzte Punkt kann auch einen wichtigen Beitrag für soziale Schlüsselqualifikationen leisten, welche für das spätere Berufsleben erforderlich und gewünscht sind.

## 6 Literatur und Links auf verwendete Programme


[1] Webapplikation Universität Koblenz-Landau. Ralf Wagner. http://mathematik.uni-landau.de/cgi-bin/riskmap/path.cgi, 2009

[2] M. Hanke-Bourgeois: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens. 2. Auflage. Vieweg+Teubner Stuttgart, 2006.

[3] OpenSource-Entwicklerteam, GeoGebra, http://www.geogebra.org/ (URL geprüft am 28.01.2009)

[4] OpenSource-Entwicklerteam , GRASS GIS, http://grass.osgeo.org/ (URL geprüft am 26.03.2007)

[5] Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach. Ministerium für Bildung. Wissenschaft und Weiterbildung Rheinland-Pfalz, 1998.

[6] Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5 – 9/ 10). Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz, 2007.

[7] J. Dewey, W.H. Kilpatrick: Der Projektplan. Grundlegung und Praxis. Weimar, 1935.

[8] K. Frey: Die Projektmethode. 10. Auflage. Beltz. Weinheim, 1982, 1990, 2005.