Ysette Weiss-Pidstrygach, Universität Göttingen

Lernen, zu sagen was man meint

1. Klassifizieren, Zuordnen, Strukturerhalten - Universelle Ideen als Motivation

Man benutzt das 'gleiche' Wort, meint jedoch völlig verschiedene Sinninhalte. Eine Flut von Informationen wird ständig bewusst und unbewusst eingeordnet, klassifiziert, bewertet. Probleme der Kommunikation und der Datenstrukturierung nehmen mit der wachsenden Globalisierung einen immer größeren Teil des Alltags ein. Das bewusste Erlernen charakteristischer Merkmale von Objekten und des Ignorierens fast aller Unterschiede ist ein leicht zu motivierender Rahmen, in welchen viele Themen von der Grundstufe bis zur Sek II eingebettet werden können.

Über den Inhalt der mentalen Schublade mit der Bezeichnung 'Dreieck' kann man sich anhand weniger charakteristischer Merkmale absprechen. Zugehörigkeit zur Schublade ist durch (mentale) Tätigkeiten überprüfbar. Wir können außerdem Unterschubladen aufmachen und in Abhängigkeit von Ordnungssinn und Prioritäten nach Ähnlichkeit oder Kongruenz oder Gleichheit weitersortieren. Sind wir in einer der Schubladen, so haben wir konstruktive Methoden alle anderen Objekte darin und somit eine passende Bezeichnung zu finden. Die gleiche Bezeichnung für alle Objekte einer Schublade machen diese ununterscheidbar.

2. Mathematischer Hintergrund

Die Aufteilung einer Menge von Objekten in Schubladen ist mathematisch formalisiert eine Zerlegung der Menge in Äquivalenzklassen. Sie kann durch Zuordnungen realisiert werden. Beim prädikativen Zugang stehen die Klassen (Urbilder der Zuordnung) und die charakterisierenden Merkmale (Bildpunkte) im Vordergrund, der funktionale Zugang identifiziert die zu einer Klasse gehörenden Objekte. Die Äquivalenzklassen sind von der Struktur einfach, da die einzige Beziehung zwischen zwei Elementen äquivalent oder nicht äquivalent ist.

Viele Inhalte der Schulmathematik weisen jedoch eine reichhaltigere Struktur auf: Die Operation einer Gruppe. Durch die Gruppenoperation erhalten wir außer der Aufteilung der Menge in Orbits (Klassifikation) die konstruktive Möglichkeit, ausgehend von einem Objekt die ganze Klasse zu erzeugen. In diesem Fall bilden die Invarianten der Gruppenoperation oder ausgezeichnete Repräsentanten mögliche Bezeichnungen der Schubladen. Verfeinerungen der Invarianten entsprechen der Einführung von Unterschubladen.

Die Bedeutung der Ideen Invarianz, Funktion, Charakterisierung für den Schulunterricht wurde z.B. von A. Schreiber (S.167) hervorgehoben. Eine ausführliche Darstellung dieser und mit damit im Zusammenhang stehender universeller Ideen findet man z.B. bei F. Schweiger (Kap.1, Kap.9).

3. Umgangssprachliche Formulierung und Instrumentalisierung

Die Aufteilung einer Menge in Äquivalenzklassen kann spielerisch dargestellt werden. Den Elementen der Menge entsprechen dann Positionen (A,B,C,D…), die Aufteilung der Menge erfolgt durch Spielzüge (→), durch welche man von einer Position in eine andere kommen kann. Um die disjunkte Aufteilung zu erzielen müssen die Spielzüge folgende Eigenschaften haben:

- kann man von der Position A in die Position B ziehen (A→B), so kann man auch von B nach A ziehen (B→A), m. a. W. die Züge sind umkehrbar (←)
- Kann man von der Position A in die Position B (A→ B), und von der Position B in die Position C (B→C) ziehen, so kann man von A nach C ziehen (A→C)
- der Zug (A→A) existiert für alle Positionen, m.a.W. eine Art Aussetzen.

Betrachten wir als Beispiel die Menge aller Dreiecke. Jedes Dreieck ist eine Position. Die Spielzüge sind alle möglichen Drehungen, Spieglungen und Verschiebungen. Positionen, die durch Züge verbunden werden können, sind in unserem Spiel äquivalent. In unserem Dreiecksbeispiel sind durch Züge miteinander verbundene Dreiecke kongruent. Der entwickelte Zugang ist abbildungsgeometrisch. Diese Repräsentation werden wir „Positionsspiel“ nennen.

Eine andere umgangssprachliche Übersetzung ist: Schublade (oder Ordner) für Äquivalenzklasse, Schubladenbezeichnung für die Werte der Zuordnung oder ausgewählte Repräsentanten und Wühlen in Schubladen im Falle der Operation einer Gruppe. In unserem Dreiecksbeispiel befinden sich in einer Schublade alle zueinander kongruenten Dreiecke. Eine mögliche Bezeichnung für eine Schublade ist z.B. die Angabe der drei Seitenlängen eines Dreiecks der Schublade. Wählt man die Länge einer Seite als charakteristisches Merkmal, so liegen in einer Schublade alle Dreiecke, mit einer gleichlangen Seite. Es gibt dann jedoch ist keine eindeutige Zuordnung Dreieck → Schublade. Ein aus der Alltagserfahrung kommender Ansatz ist der Versuch, für die in mehrere Schubladen passenden Dreiecke (z.B. Dreiecke mit zwei gleichlangen Seiten) neue Schubladen aufzumachen und umzusortieren. Da es auch hier noch Dreiecke gibt, die in mehrere Schubladen passen, werden nochmals neue Schublade für die in mehrere Schubladen passenden Dreiecke eingeführt und umsortiert. Dieser Ansatz führt uns zur Euklidischen Klassifikation von Dreiecken. Wir werden diese Repräsentation „Schubladendenken“ nennen.

Sowohl in der Präsentation Positionsspiel als auch beim Schubladendenken erfolgt eine Loslösung vom fachspezifischen Kontext. In dieser Form sind die Ideen Klassifizieren, Zuordnung und Invarianz nicht an mathematische Objekte oder Objekte der physikalischen Welt gebunden. Wir befinden uns auf der obersten Stufe der Hierarchie universeller Ideen (Schweiger, S.14).

Die zu den universellen Ideen gehörenden Problemlösemethoden werden damit universell einsetzbare Instrumente: Denkmethoden.

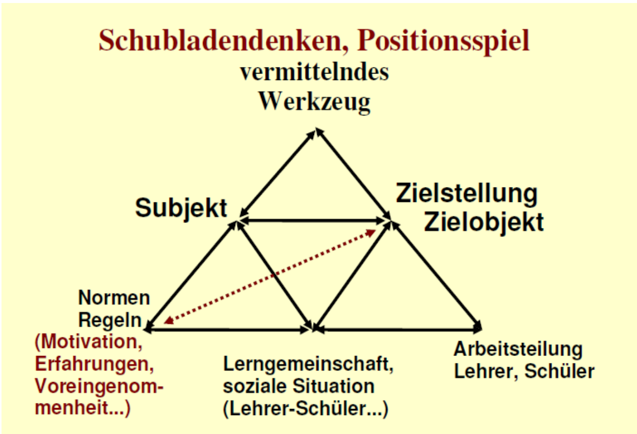
Die typische Situation zur Anwendung der universellen Werkzeuge Positionsspiel und Schubladendenken ist das Vorhandensein einer Menge, welche durch eine Zuordnung aufgeteilt wird. Beispiele der Schulmathematik sind:

Menge	Zuordnung	Invariante Spielzüge
endliche Mengen	Zählen	1-1-Zuordnung der Elemente
Objektmengen	Messen	die Messgröße erhaltende Operationen
Menge der Dezimalzahlen	Runden	+½ und Weglassen der entsprechenden Dezimalstellen
Menge der natürlichen Zahlen	Teilen mit Rest	Addieren von Vielfachen des Teilers
Menge der Brüche	Dezimalzahlbestimmung	Kürzen und Erweitern
Menge der Dreiecke	Messen der Seitenlängen	Isometrien (Spiegeln, Drehen, Verschieben)
Gleichungssysteme	Lösen	äquivalente Umformungen
Menge der Dreiecke	Messen der Winkel	Isometrien, Streckungen , Stauchungen
Menge der Polynomfunktionen	Abbildung auf Grad	Parametervariation
Menge der diff.-baren Funktionen	Differenzieren	Addieren von Konstanten

Eine Zuordnung durch Messen ist z.B.: Objekt → Farbe des Objekts.

An diesem Beispiel lassen sich weitere Möglichkeiten situierten entdeckenden Lernens im Rahmen unserer Instrumentalisierung gut veranschaulichen. Das Spiel „Ich sehe was, was Du nicht siehst...“ klärt durch seinen diagnostischen Ansatz die bereits existierende Klassifikation beim Spieler. Der Spieler benennt Objekte, die in seine individuelle mentale Schublade zur gewählten Farbe passen. Ausgehend von diesem aktuellen Entwicklungsstand kann durch soziale Interaktion die Notwendigkeit neuer Farbbezeichnungen zum Gesprächsthema gemacht werden. Innerhalb der Zone der möglichen Entwicklung erfolgt eine Verfeinerung der Werkzeuge und sprachliche Anpassung. Mögliche Variationen des Spiels sind in [Weiss-Pidstrygach] beschrieben.

4. Fundamentale Ideen im sozial-kulturellen Paradigma



Die Herangehensweise vernetzt verschiedene Themen horizontal. Außerdem wird durch die verschiedenen Sichtweisen das Werkzeug variiert, formalisiert und verinnerlicht. Die Loslösung der Methode vom Objekt gestattet die nebenstehende Formalisierung in der Terminologie der Tätigkeitstheorie.

Die Fixierung des vermittelnden Werkzeugs und die Handhabung des Werkzeugs als Lernziel erlauben Variationen beim Zielobjekt und der Lernsituation innerhalb einer Tätigkeit. Sowohl für das Schubladendenken, als auch für das Positionsspiel kann man ähnlich wie es bei der Variation von Aufgaben geschieht, einfache Variationsprinzipien dieser Methoden aufstellen.

Literatur

Schreiber A., (1979). Universelle Ideen im mathematischen Denken-ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. *Mathematica Didactica* 2 (S. 165-171).

Schweiger, A., Fundamentale Ideen
http://www.uni-salzburg.at/pls/portal/docs/1/550958.PDF

Weiss-Pidstrygach Y. Ich sehe was, was Du nicht siehst –für Farbenblinde. Erscheint in *Praxis der Mathematik* .