

Jan WÖRLER, Würzburg

Konkrete Kunst:

Mathematik in Bildern finden und dynamisch erforschen

Modellierung ist ein zentrales Thema aktueller mathematikdidaktischer Forschung und Diskussion. Auch im Mathematikunterricht werden Anwendungsaufgaben stärker unter dem Gesichtspunkt realer Modellierung betrachtet. Dabei ist die Anwendung mathematischer Methoden zur Lösung realer Anwendungsprobleme i. d. R. vor allem deswegen sehr komplex, weil oft die Randbedingungen und die das System beeinflussenden Parameter unbekannt sind oder nur näherungsweise ermittelt werden können.

Anders ist die Situation in einem speziellen Gebiet der Alltagswelt, in der Konkreten Kunst (vgl. Lauter 2007): Die Werke dieser Kunstgattung basieren meist auf einigen wenigen Systemelementen, die – das fordert die Theorie – „einfach“ und für einen Betrachter auch „visuell nachprüfbar“ sind. Die Randbedingungen für die Bilder sind von den Künstlern fest vorgegeben, die bildbestimmenden Parameter haben häufig einen direkten Bezug zu mathematischen Objekten oder Verfahren. Ein Betrachter ist demnach prinzipiell in der Lage vom Kunstwerk auf das zugrunde liegende mathematische Modell schließen zu können. Ein solches Vorgehen entspricht damit weitgehend der Modellierung von Realsituationen. Fasst man schließlich ein Konkretes Kunstwerk als System von mathematischen Größen und Relationen auf und sucht nach einer „möglichst guten“ mathematischen Beschreibung dieses Systems, so ist dies unter didaktischen Gesichtspunkten eine gute Lern- oder Übungsumgebung für die Hinführung zur Modellierung von Realsituationen.

Im Folgenden wird anhand eines 2-Phasen-Schemas vorgestellt, wie unter diesem Blickwinkel die Behandlung Konkreter Kunst im Mathematikunterricht erfolgen kann. Der zentrale Aspekt der Phase I ist dabei die Modellierung Kunstwerks. In der Phase II steht die dynamische Erforschung des gefundenen Modells mit Hilfe interaktiver Computersimulationen im Zentrum.

Phase I: Mathematik in Bildern finden – Modellierung

Ausgangspunkt bei der Behandlung Konkreter Kunst im Unterricht ist das Kunstwerk, das von den Schülerinnen und Schülern unter mathematischen Gesichtspunkten untersucht wird. Das Ziel ist es, Größen und Zusammenhänge zu finden, die den Bildaufbau möglichst vollständig beschreiben. Dazu sind im Wesentlichen drei Schritte notwendig (vgl. Abb. 1):

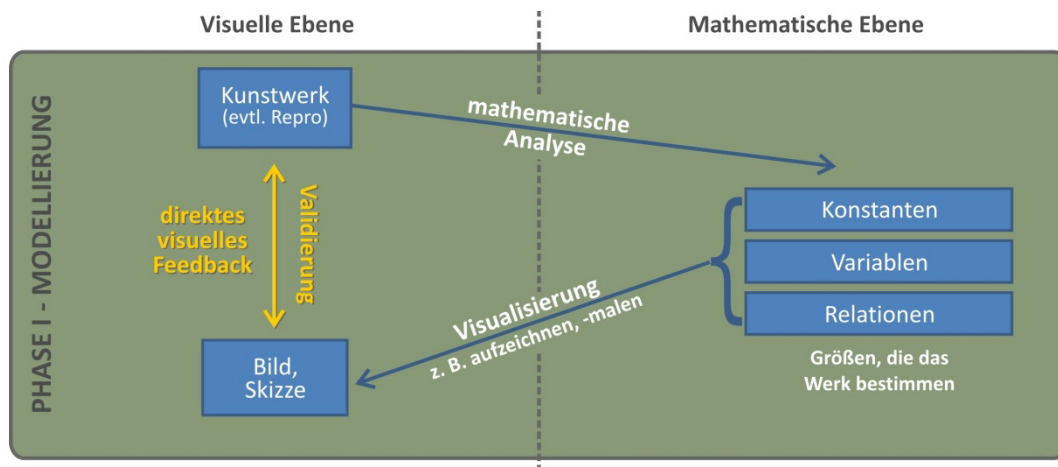


Abb. 1: In der Phase der Modellierung werden die mathematischen Größen gesucht, die das Werk bestimmen.

Mathematische Analyse. In diesem Schritt wird das Werk auf seinen mathematischen Gehalt hin untersucht. Dazu werden Muster freigelegt oder Regelmäßigkeiten erkannt und mathematisch beschrieben. Fähigkeiten wie Reduzieren, Abstrahieren und Generalisieren werden hierbei besonders gefordert. Die Analyse führt auf Konstanten (wie etwa das Bildformat) und Variablen (z. B. Farben), sowie auf die funktionalen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Größen (etwa die Verteilung der einzelnen Farben über die Farbfläche).

Visualisierung: Die gefundenen mathematischen Zusammenhänge werden in geeigneter Weise veranschaulicht, im Allgemeinen auf Papier skizziert.

Validierung: Der Vergleich von Skizze und Kunstwerk gibt eine Rückmeldung über die Qualität der Analyse; stimmen beide unter mathematischer Perspektive überein, kann der gefundene Satz an Größen und Relationen als vollständig angesehen werden.

Phase II: dynamische Erforschung des modellierten Systems

Am Ende der Phase I liegt eine mathematische Beschreibung des Kunstwerkes vor, die im Übergang zur Phase II als interaktive Computersimulation implementiert und in Form eines Applets zum Ausgangspunkt weitergehender Fragestellungen gemacht werden kann. Offen ist allerdings die Frage, inwieweit SchülerInnen– zumindest einfache –Simulationen selbst erstellen können oder ob sie von einem Dritten zur Verfügung gestellt werden müssen. Die interaktiven Elemente solcher Applets machen es dabei möglich, direkt auf einzelne Parameter des Modells zuzugreifen, sie dynamisch zu verändern und so ihren Einfluss zu erforschen. Dadurch wird das Verständnis der funktionalen Zusammenhänge gefördert und die Leistungsfähigkeit und Grenzen des Simulationsmodells aufgezeigt (vgl. Abb. 2).

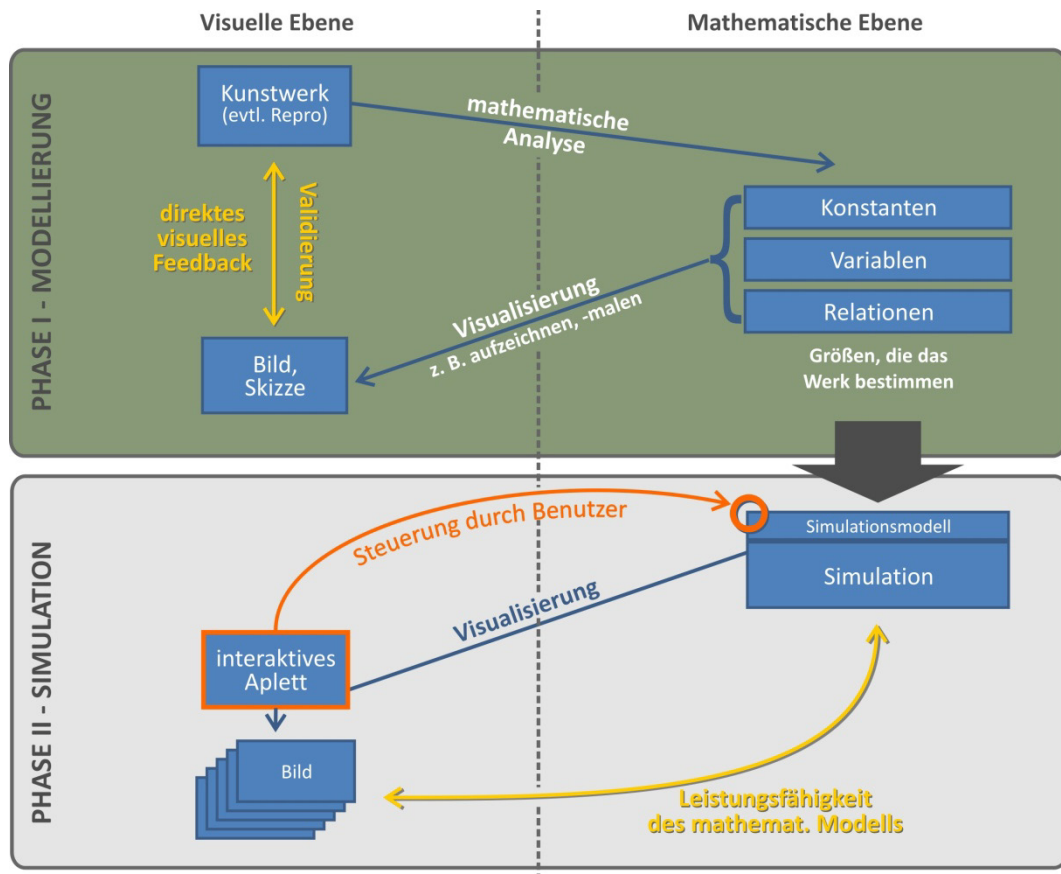


Abb. 2.: In der Phase II wird das mathematische Modell als Ergebnis der Modellierungsphase mit Hilfe von Computersimulationen dynamisch auf Leistungsfähigkeit und Grenzen untersucht.

Ein Beispiel: Das „Primzahlbild 1-9216“

Das 2-Phasen-Schema wird exemplarisch am Beispiel des Werkes „Primzahlenbild 1-9216“ der Schweizer Künstlerin Suzanne Daetwyler vorgestellt (vgl. Abb. 4):

Phase I: (vgl. dazu Woerler 1998) Die bildbestimmenden Größen des Werkes sind, das verrät bereits der Titel, die Primzahlen. Sie heben sich als farbige Kästchen vom hellgrauen Hintergrund ab. Ihre Anordnung ergibt sich zustande, indem die Bildfläche in 9216 Felder unterteilt wird. Die Felder werden, im Bildzentrum des Bildes bei der Zahl 1 beginnend, spiralförmig durchnummeriert und die mit primen Nummer farblich markiert.

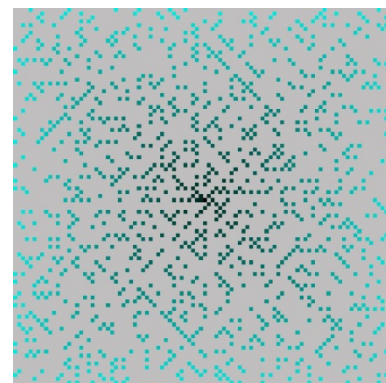


Abb. 4: S. Daetwyler (1996): „Primzahlenbild 1-9216“

Phase II: Da die Anordnung der Kästchen nun geklärt ist, drängen sich weitere Fragen geradezu auf: Wie könnte das gefundene Muster über die realen Bildgrenzen hinaus fortgeführt werden? Zwar gibt es unendlich viele Primzahlen, aber sie werden auch „nach außen hin“ weniger – treten Bereiche auf in denen gar keine Primzahlen liegen, gibt es „Löcher“ im Muster? Wie stark nimmt die Dichte der Primzahlen nach außen hin eigentlich ab? Wie dicht liegen die Primzahlen überhaupt in den natürlichen Zahlen? Und wie ändert sich das Bild, wenn man eine andere als die spiralförmige Anordnung der Primzahlkästchen wählt? Was ändert sich, wenn man statt der Primzahlen ganze Zahlen oder Quadratzahlen auf die gleiche Weise anordnet? Welche Eigenschaften dieser Mengen kann man aus dem Bild ablesen?

Simuliert man die Spiralbewegung am Computer und schaltet einen Primzahltest nach, erhält man ein Applet, mit dem man diese Fragen erforschen, klären und weiterentwickeln kann (vgl. Abb. 5). Ein entsprechendes Applet ist unter <http://www.dmuw.de/projekt/kunst> abrufbar.

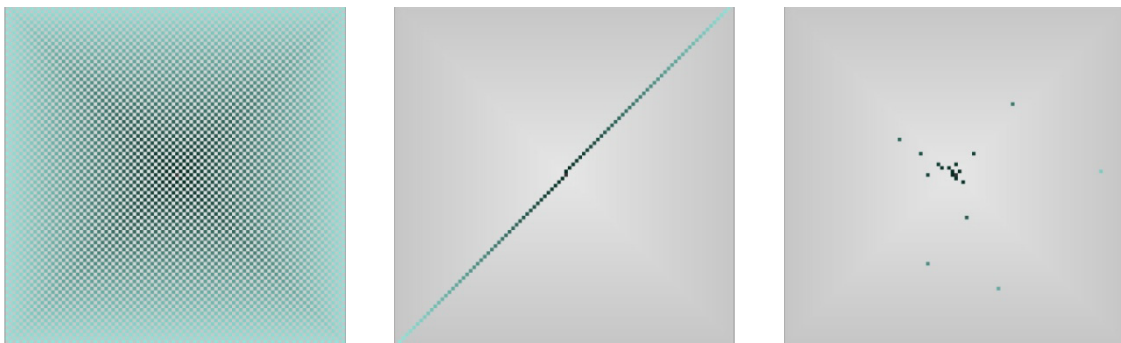


Abb. 5: Bei der Simulation des Werkes wird die Menge der betrachteten Zahlen verändert. Statt der Primzahlen werden gerade Zahlen (li.), Quadratzahlen (mi.) oder Fibonacci-Zahlen (re.) angezeigt.

Literatur

- Bossel, H. (1992). *Modellbildung und Simulation*. Braunschweig: Vieweg
- Schröder, B. (2007). *Konkrete Kunst: Mathematisches Kalkül und programmiertes Chaos*. Berlin: Reimer.
- Lauter, M.; Weigand, H.-G. (2007). *Ausgerechnet... Mathematik und Konkrete Kunst*. Baunach: Spurbuchverlag.
- Wörler, J. (2008). Mathematik und Konkrete Kunst: Verbindungen zwischen scheinbar fremden Welten. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*, 235 - 283. Münster: WTM