Hans-Joachim BRENNER, Erfurt

Handzettel für Teilnehmerinnen

1. Analytische Geometrie anschaulich unterrichten

Ausgangspunkt meiner Überlegungen und Beispiele ist das Allgemeinbildungskonzept von
Heinrich Winter: **Mathematik als Schule der Anschauung.** (Biehler/ Jahnke: Mathematische Allgemeinbildung in der Kontroverse, 1997)

> Mittels begrifflicher Instrumente der Elementarmathematik können und sollen strukturelle Züge in wichtigen Phänomenen und Lebensbereichen unserer Welt aufgedeckt werden, so dass Verständnis, Aufklärung und Anteilnahme möglich werden. Das Anschauungsvermögen wird dabei im Sinne
> (1) wachsender Sensibilisierung im Wahrnehmen,
> (2) begrifflicher Strukturierungs- und Umstrukturierungsfähigkeit,
> (3) Produktivität im Darstellen und
> (4) kritischer Reflexivität
> gefördert.

„Die Auffassung von der Mathematik als Wissenschaft von Mustern passt sehr gut zu diesem Allgemeinbildungskonzept. Im Mathematikunterricht geht es um die Entwicklung einer mathematischen Kultur, das lebendige Fach – die Mathematik - ist der Dreh- und Angelpunkt. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch mathematisch substanzielle Lernangebote befähigt werden, über die Reproduktion von Routinen hinaus, die keineswegs unwichtig sind, selbständig Lösungswege zu entwickeln, Strukturen zu erforschen und Ergebnisse zu formulieren.“ (*Erich Ch. Wittmann*, Der Mathematikunterricht 2/3, 2005)

Davon ausgehend gestalte ich den Unterricht in der Regel so, dass die Schüler durch das Untersuchen von Beispielen (mit den sehr einfachen beginnend) erste Erkenntnisse zu einem *Problem – dem wichtigsten Ausgangspunkt unterrichtlicher Aktivitäten* - gewinnen, die dann von ihnen schrittweise verallgemeinert werden. Meine Aufgabe sehe ich darin, Möglichkeiten dafür zu schaffen, dass sich die Schüler auf der Grundlage der bis dahin gemachten Erfahrungen (einschließlich der Alltagserfahrungen) und einer noch eher unpräzisen Sprache die grundlegenden Ideen erschließen können. Dafür gilt es geeignete Beispiele zu suchen.

Auf welchen grundlegenden Erfahrungen und Erfindungen gründet sich die Analytische Geometrie? Zuerst ist das Superpositionsprinzip (Überlagerungsprinzip, Unabhängigkeitsprinzip) zu nennen. Bei vielen Erscheinungen in der Natur lässt sich das Prinzip der ungestörten additiven Überlagerung beobachten. Zweitens ist die Erfindung der Beschreibung von Punkten (und ihrer Bewegung) durch Koordinaten grundlegend. Das Vorhandensein von Alltagserfahrungen bezüglich dieser Prinzipien ist dem Schüler bewusst zu machen.

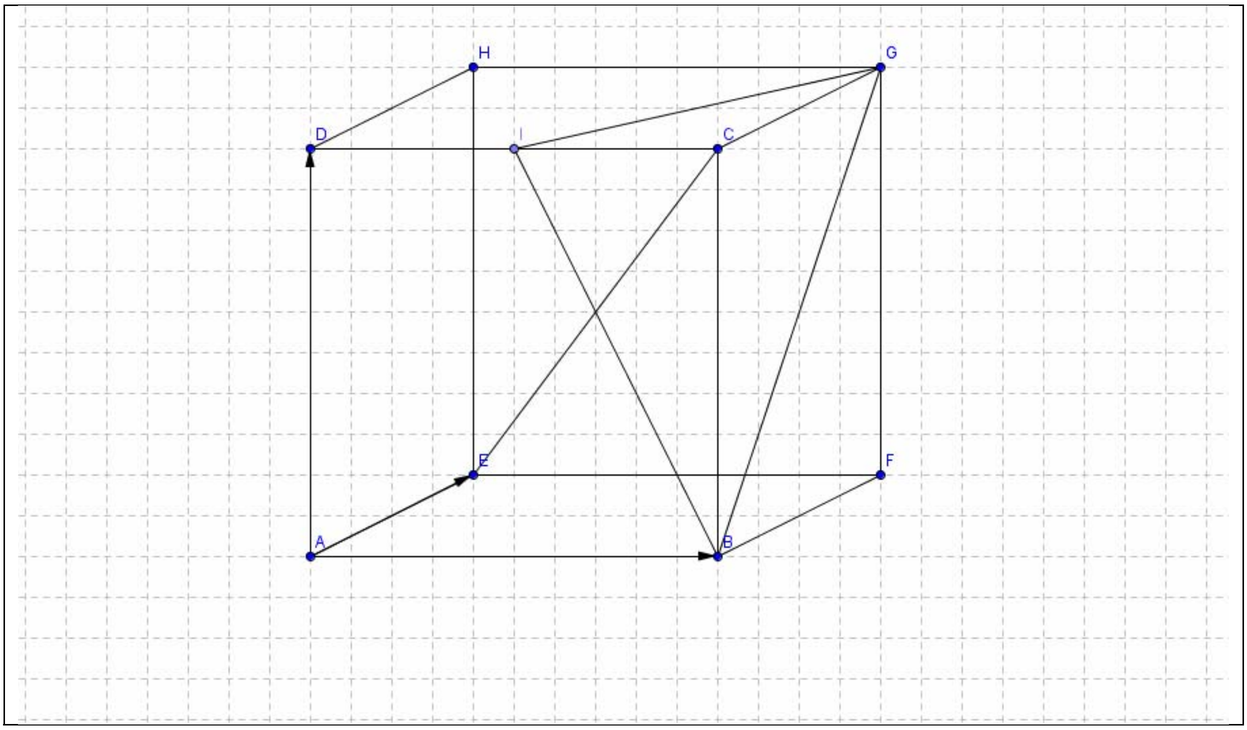
Beispiel 1: *Überqueren eines Kanals*
Breite 240m, Geschwindigkeit eines Bootes 2 m pro s, Strömungsgeschwindigkeit des Flusses 1,5 m pro s; die Zeit für die Überfahrt wird einmal ohne und einmal mit Strömung berechnet; die Relation der Zeiten ist vorher vom Schüler zu schätzen

Beispiel 2: *Waagerechter Wurf*
Die Wurfweite beim waagerechten Wurf aus 1.2 m Höhe (eines Tisches) mit einer Abwurfgeschwindigkeit von v Metern pro Sekunde (mit Lineal und Stoppuhr bestimmen) wird experimentell und analytisch bestimmt. Durch dieses Experiment im Mathematikunterricht erhält der Schüler Zeit, sich mit der Unabhängigkeit der Bewegungen vertraut zu machen. (Man benötigt lediglich einen Ball, ein Meterlineal und eine Stoppuhr/Handy.)

Beispiel 3: *Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften* (Wiederholung der Eigenschaften des Parallelogramms und des Kosinussatzes)

Beispiel 4: *Lineare Unabhängigkeit von Vektoren*
Ich erkläre den Schülern, dass ich als Freizeitläufer mir einen sehr schweren Rundkurs ausgewählt habe: Bei diesem Rundkurs geht es immer nur bergan! Den Schülern ist natürlich sofort klar, dass das nicht sein kann. Wenn es auf einem Rundkurs bergan geht, dann muss es auch wieder bergab gehen. Man kann es noch genauer sagen: Die Anzahl von Metern, die es bergan geht, muss es auch wieder bergab gehen.

Beim Schnitt von Ebene und Gerade (Skizze unten) sollen diese Überlegungen angewandt werden. Gegeben ist ein Quader ABCDEFGH, eine Ebene BGI, wobei I der Mittelpunkt der Kante CD ist, sowie die Gerade CE, die mit der Ebene zum Schnitt gebracht werden soll.



Zur analytischen Beschreibung werden die Kantenvektoren $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AE}, \vec{c}=\overrightarrow{AD}$ eingeführt. Der Weg führt von A nach E und bis zur Ebene BGI in Richtung C. Vom Schnittpunkt von EC mit BGI geht es in Richtung von IG bis zur Geraden BG und von dort auf BG über B nach A über ABV zurück.

$$\vec{b}+\alpha(-\vec{b}+\vec{a}+\vec{c})+\beta\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)+\chi\left(-\vec{c}-\vec{b}\right)-\vec{a}=\vec{0}$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta-1\right)\vec{a}+(1-\alpha+\beta-\chi)\vec{b}+(\alpha-\chi)\vec{c}=\vec{0}$$

Der Weg bergauf bzw. bergab wird lediglich durch den Vektor $\vec{c}$ realisiert. Also muss dessen Koeffizient gleich null sein. Usw.

Beispiel 5: *Vektorraum aller Folgen*, die der Rekursionsgleichung (*) $a_{n+2}=8\cdot a_{n+1}-15\cdot a_n$ genügen

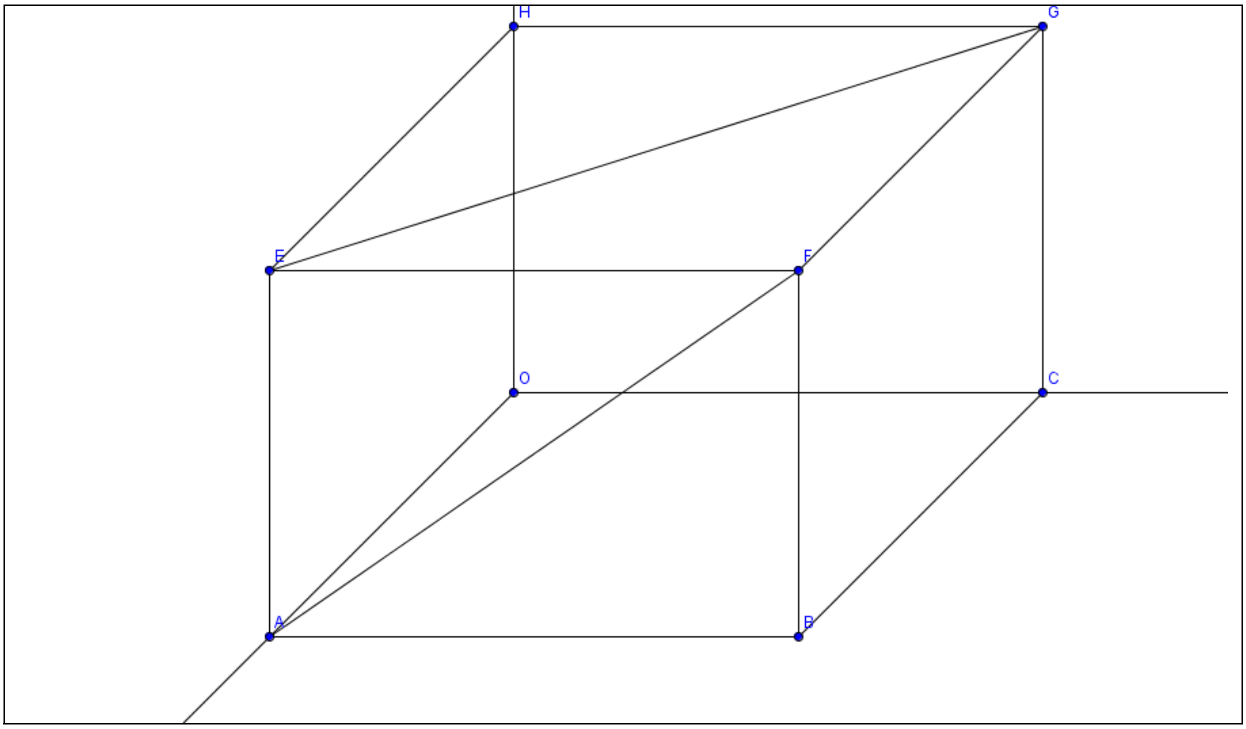
Zunächst muss vereinbart werden, wie Folgen vervielfacht und wie sie addiert werden. Dies geschieht in der üblichen Weise: $\lambda\cdot\{c_n\}=\{\lambda\cdot c_n\}$ und $\{c_n\}+\{d_n\}=\{c_n+d_n\}$, die Operationen werden gliedweise durchgeführt.

Die Frage nach geometrischen Zahlenfolgen, die die obige Rekursionsgleichung erfüllen, führt zu den Gleichungen $\begin{array}{l} a_1\cdot q^{n+1}=8\cdot a_1\cdot q^n-15\cdot a_1\cdot q^{n-1} \\ \Leftrightarrow q^2=8\cdot q-15 \end{array}$.

Die Lösungen für q sind 3 und 5. Daher erfüllen die geometrischen Zahlenfolgen $a_n = 3^n$ und $b_n = 5^n$ die Rekursionsgleichung. (Der Nachweis ist eine nette Übung für die Schüler.)
Im Folgendem wird eine beliebige Folge $\{c_n\}$, die (*) genügt, als Linearkombination von $\{a_n\}$und $\{b_n\}$dargestellt. $\{c_n\}$ ist eindeutig durch die beiden Anfangsglieder bestimmt, da sich die anderen Folgenglieder ja durch (*) ergeben. Wenn man die Anfangsglieder mit c_1 bzw. c_2 bezeichnet, dann ist das Gleichungssystem $\begin{array}{l} c_1 = \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 5 \\ c_2 = \lambda_1 \cdot 3^2 + \lambda_2 \cdot 5^2 \end{array}$ lösbar. (Dies ist stets der Fall, wenn die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung verschieden sind, was leicht zu zeigen ist. Man findet eine ausführlichere Übersicht in „Rekursive Folgen“ von A.I. Markuschewitsch.)
Ist z.B. $c_1 = 5$ und $c_2 = 20$, so ergibt sich $\lambda_1 = \frac{5}{6}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, also $c_n = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot 5^n$.

Beim Arbeiten im dreidimensionalen Koordinatensystem erweist es sich als günstig mit Hilfe von Eckpunkten und Mittelpunkten von Kanten und Flächen eines Würfels zu arbeiten. Die grundlegenden Aufgaben zur Schnittpunktsbestimmung, zur Beschreibung der Lage von Geraden und Ebenen zueinander sowie die Lösung der Maßaufgaben (Abstand, Winkel) kann man weitgehend so behandeln. Anhand eines aus Schaschlikstäbchen gebauten Modells lassen sich all diese Aufgaben leicht veranschaulichen und die Ergebnisse können einer ersten Kontrolle unterworfen werden.

Meine Einstiegsaufgabe in die Analytische Geometrie: Wir betrachten zwei Flächendiagonalen eines Würfels mit der Kantenlänge a. Welche Lagemöglichkeiten gibt es? Macht es Sinn, von einem Abstand dieser Flächendiagonalen zu sprechen?
Meine Absicht dabei ist, dass die Schüler Gelegenheit erhalten, erste Erfahrungen mit grundlegenden Begriffen und Verfahren auf einer umgangssprachlichen Ebene zu sammeln sowie Wissen aus der Geometrie zu reaktivieren. Neben der Erarbeitung der möglichen Lagebeziehungen und der Angabe von Schnittpunkten und (einfachen) Abständen werden Geraden und Ebenen auch mithilfe von Gleichungen für die Koordinaten ihrer Punkte beschrieben.



Der schwierige Fall: Die Punkte K der Diagonalen g in der oberen Seitenfläche haben die Beschreibung, dass die z-Koordinate stets a ist und dass für die x- und y-Koordinaten stets $y = -x + a$ gilt. Jeder Punkt K auf g hat somit die Koordinaten $K(x, -x + a; a)$. Analog gilt für die Punkte L auf der Diagonalen der vorderen Seitenfläche $L(a; y; y)$. Für spezielle Werte für x bzw. y werden die Abstände der Punkte K und L bestimmt. Schon an dieser Stelle werden Vermutungen über die Definition des Abstandes zweier Geraden angestellt. Es gilt:

$$\overline{KL}^2 = (x-a)^2 + (-x+a-y)^2 + (a-y)^2 = 2x^2 - 4ax + 2xy + 2y^2 - 4ay + 3a^2$$
$$= 2 \cdot \left(x - a + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(y - \frac{2a}{3} \right)^2 + \frac{a^2}{3} .$$

Zur Bestätigung multipliziert man die entsprechenden Summen einfach aus. Wichtig ist mir die Auswertung der letzten Summe. Sie wird dann minimal, wenn die beiden ersten Summanden null werden. Das Ergebnis ist danach anhand der entsprechenden Punkte anhand des Modells zu „bestätigen“ – man „sieht“ die rechten Winkel. (Hinweis: Verbindet man den Mittelpunkt M von $\overline{EF}$ mit den Punkten B und H, so sind die Schnittpunkte dieser Strecken mit den Flächendiagonalen diejenigen Punkte K und L der Flächendiagonalen, die den kürzesten Abstand voneinander haben. K und L teilen die Flächendiagonalen jeweils im Verhältnis 1:2. Daher liegt KL parallel zur Raumdiagonalen HB. Dass HB senkrecht zu den Flächendiagonalen (und damit auch KL senkrecht zu den Flächendiagonalen liegt) ist, sieht man ein, wenn man zum Beispiel AF um eine halbe Kantenlänge in negativer x-Richtung verschiebt. Das Viereck BF'HA' ist ein Rhombus, da alle vier Seiten gleich lang sind.)

Bei der Behandlung von Darstellungsmöglichkeiten für Ebenen (nach der Behandlung von Geraden in der Ebene und im Raum) liegt es auf der Hand, zuerst mit der Koordinatengleichung zu beginnen. Wiederum ist das Festlegen der Ebene durch spezielle Punkte des Würfels für das Lernen günstig. So wird die Ebene E_1(E, F, G, H), in der die obere Seitenfläche liegt, durch z = a beschrieben. Die beiden anderen Koordinaten x und y können frei gewählt werden. Also E_1: $x \in \Re, y \in \Re, z = a$. Die Ebene E_2(B, C, H, E) wird beschrieben durch $z = a - y$; x kann frei gewählt werden: $x \in \Re, y \in \Re, z = a - y$. Entsprechende Übungen dienen dazu, dass der Schüler erkennt, dass Geraden einen und Ebenen zwei frei wählbare Parameter besitzen.

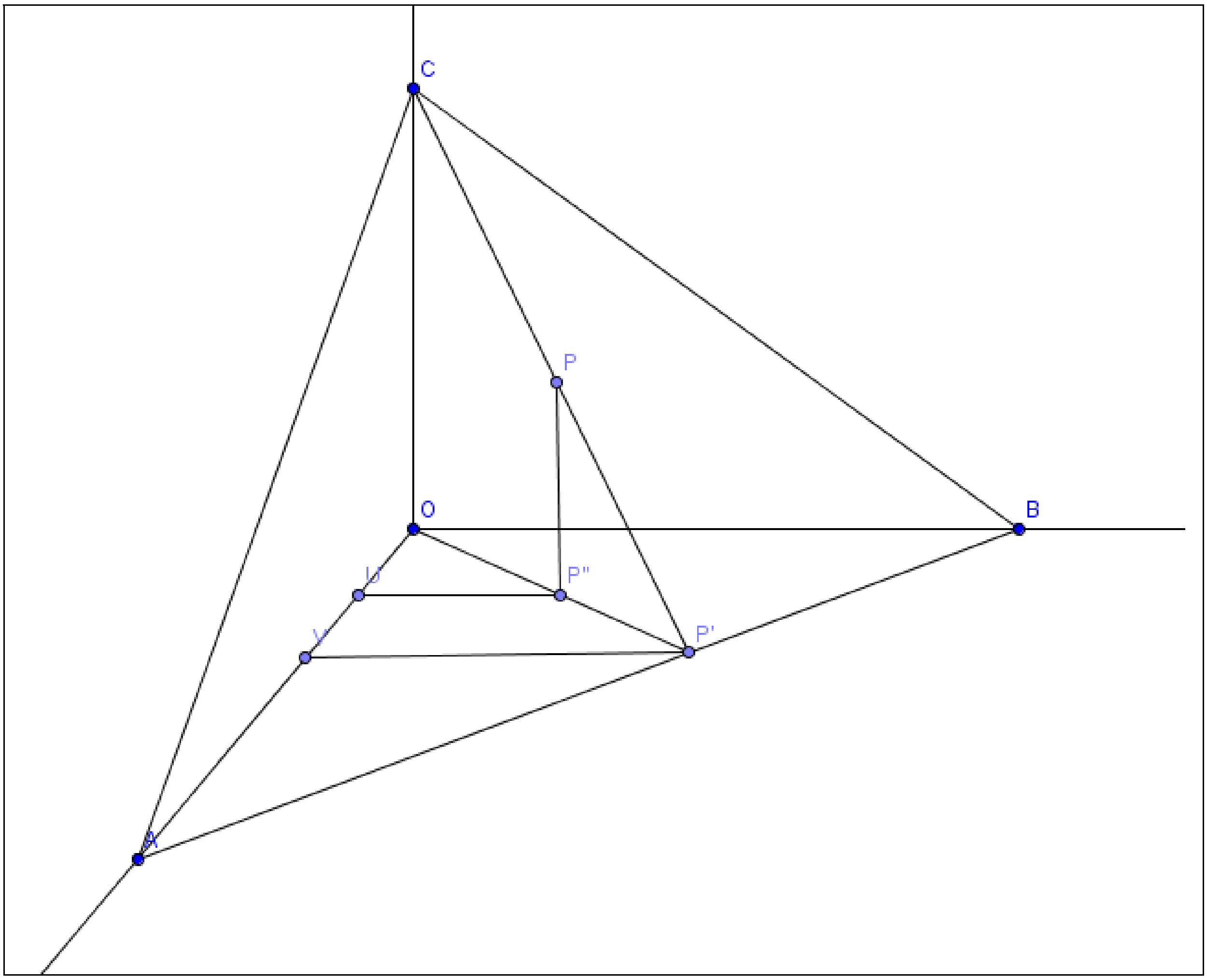
Bei der Herleitung der allgemeinen Koordinatengleichung hat es sich bewährt, von den Achsenschnittpunkten auszugehen. Weist man den Punkten A, B, C konkrete Koordinaten zu, so lassen sich die Gleichungen der Geraden AB, AC, BC leicht finden. (Als günstig erweisen sich die Achsenabschnittsgleichungen.) Im nächsten Schritt bestimmt man besondere Punkte der Ebene (zum Beispiel die Mittelpunkte der Strecken AB, AC, BC und sich daraus ergebende weitere Mittelpunkte von Strecken). Ziel ist das Finden einer Gleichung für die Koordinaten der Punkte der Ebene. (Eine allgemeine Lösung ist unten angegeben.)

A(A; 0; 0), B(0; B; 0), C(0; 0; C), P(x; y; z), P'(x';y';0), P''(x; y; 0), U(x; 0; 0), V(x'; 0; 0) (Skizze unten)

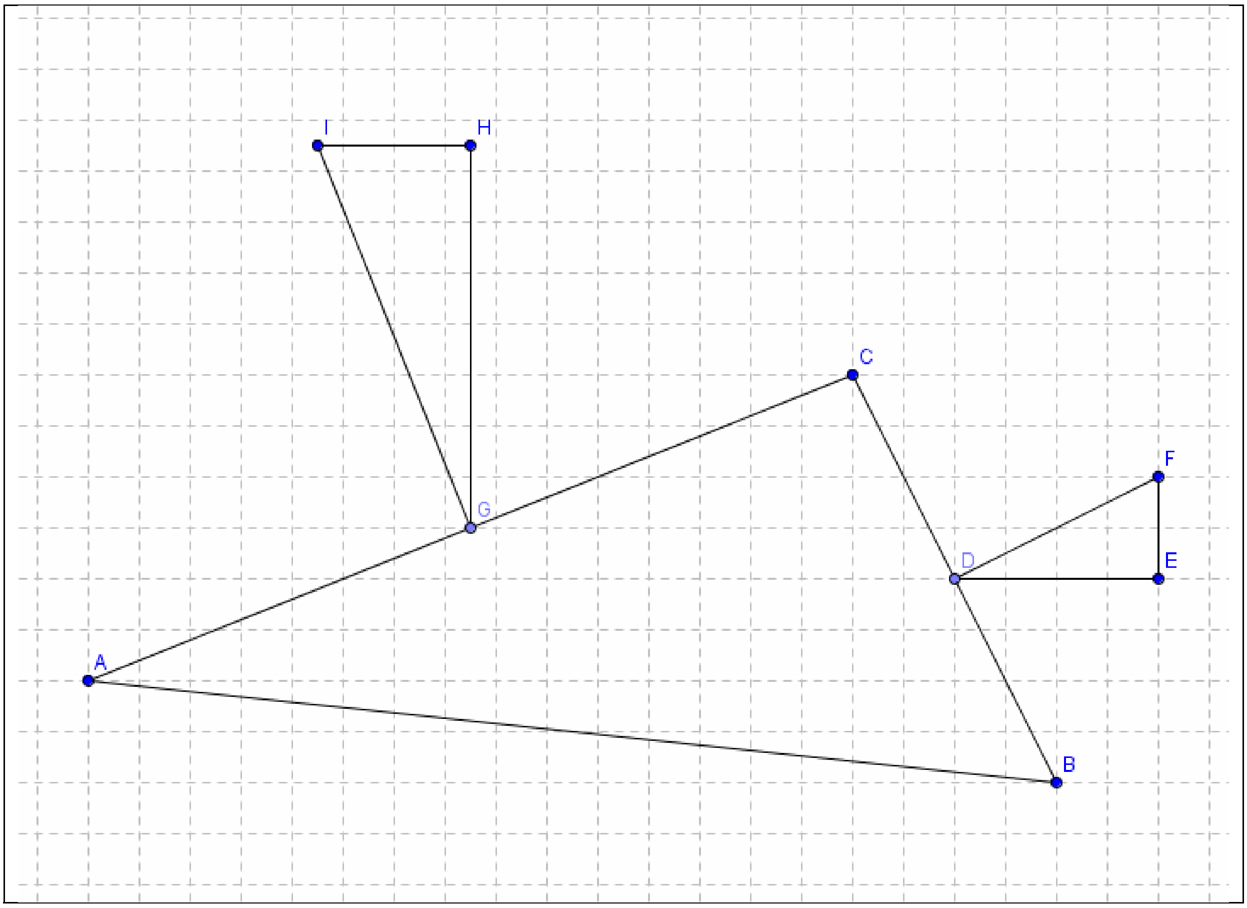
g(A; B): $\frac{x'}{A} + \frac{y'}{B} = 1$ und z = 0, denn die Koordinaten der Punkte A und B erfüllen diese Gleichungen. (Die doppelte Bedeutung für A, B und C ist gewählt, um die Bezeichnung $a = \frac{1}{A}$ usw. zu ermöglichen.)

Durch Anwendung der Strahlensätze folgt: $\frac{z}{C} = \frac{\overline{P'P''}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{UV}}{\overline{OV}} = \frac{x'-x}{x'} = 1 - \frac{x}{x'}$ und $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$

Daher gilt $\frac{z}{C} + \frac{x}{x'} = 1 \Rightarrow \frac{z}{C} + \frac{x}{x'} \cdot 1 = \frac{z}{C} + \frac{x}{x'} \cdot \left(\frac{x'}{A} + \frac{y'}{B} \right) = \frac{z}{C} + \frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$.


C
P
O
B
U
P''
V
P'
A

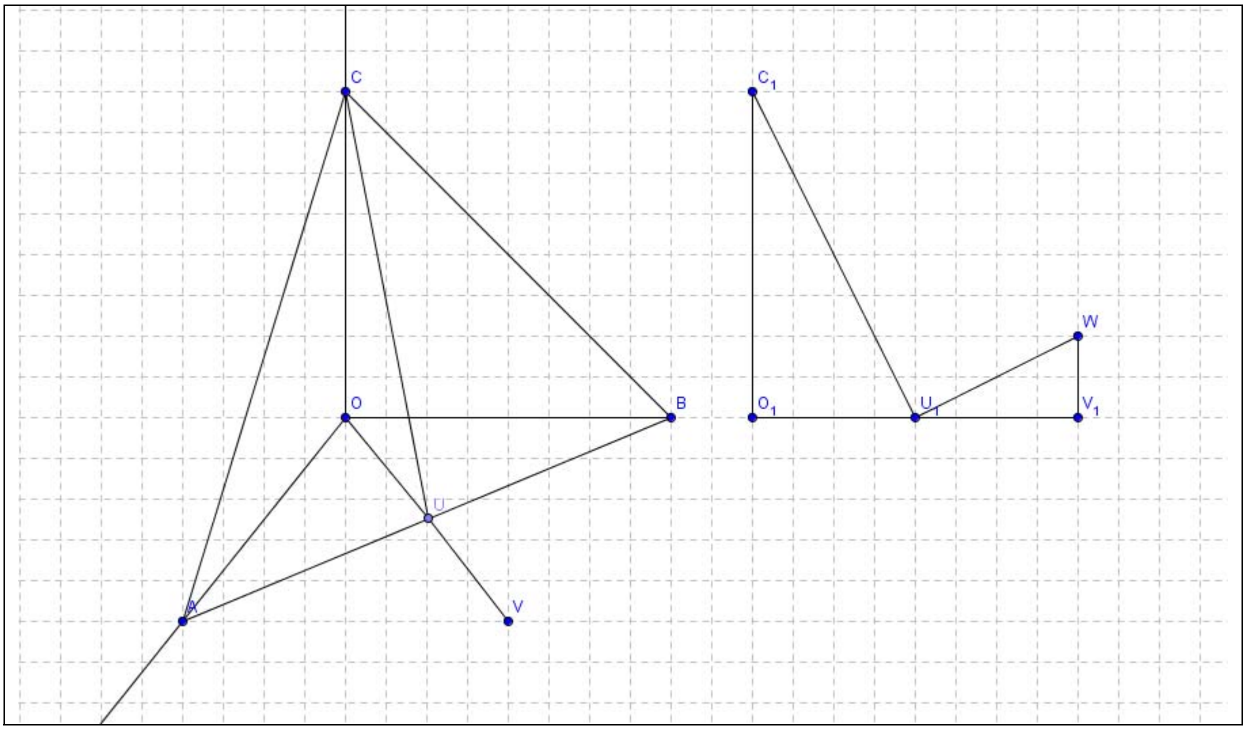
Den Umgang mit orthogonalen Geraden kann man anhand der folgenden Aufgabe gut üben. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Bestimme die Mittelpunkte der nach außen über den Dreiecksseiten errichteten Quadraten. (Errichtet man die Quadrate über den Seiten eines Parallelogramms, so entsteht ein …, weil …)



Eine elementare Herleitung eines Terms für den Normalenvektor ermöglicht es, dass das Vorstellungsvermögen und die Fähigkeit zum Strukturieren geometrischer Sachverhalte weiter entwickelt sowie eine höhere Wertschätzung des darauf basierenden Lösungsalgorithmus ermöglicht wird.

Für die Normalenrichtung in der x-y-Ebene zur Geraden AB gilt: $\overrightarrow{n_{AB}} = \overrightarrow{UV} = \left(B \quad A \quad 0\right)^T$. Die Länge des Vektors wurde so gewählt, dass sie mit der Länge der Strecke AB übereinstimmt, also $\overline{AB} = \overline{UV}$ (in der Abb. unten ist die Strecke UV stark gekürzt). Weiterhin wurde mit U der Lotfußpunkt des Lotes von O auf AB bezeichnet. $\overline{OU}$ kann daher mithilfe des Flächeninhaltes des Dreiecks OAB ausgedrückt werden: $\overline{OU} \cdot \overline{AB} = 2 \cdot I(OAB) = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = A \cdot B$. Um den Normalenvektor der Ebene zu bestimmen, muss der Vektor $\overrightarrow{UV}$ nur noch „um AB auf die richtige Höhe gedreht werden“. Da die Dreiecke OUC und UVW mit dem Faktor $k=\frac{\overline{UV}}{\overline{OC}}$ ähnlich sind, gilt: $\overline{VW}=k\cdot\overline{OU}=\frac{\overline{UV}}{\overline{OC}}\cdot\frac{A\cdot B}{\overline{AB}}=\frac{\overline{UV}}{\overline{OC}}\cdot\frac{A\cdot B}{\overline{UV}}=\frac{A\cdot B}{C}$. Daher hat ein Normalenvektor die Darstellung $\overrightarrow{n_{ABC}}=\begin{pmatrix}B\\A\\\frac{A\cdot B}{C}\end{pmatrix}=A\cdot B\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{A}\\\frac{1}{B}\\\frac{1}{C}\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$,

wobei mit a, b, c wie üblich die Koeffizienten von x, y, z bezeichnet wurden.



Der Normalenvektor steht also senkrecht auf zwei unabhängigen Richtungen der Ebene.
Zum Abschluss möchte ich noch einmal betonen, dass die Basis durch die Untersuchung von Beispielen geschaffen wird (der Grad der Formalisierung wird durch den Lernfortschritt der einzelnen Schüler/der Klasse bestimmt). So werden bei der Bestimmung eines Normalenvektors in der Regel für die z-Koordinate zunächst Näherungswerte angegeben. Dies ist sehr willkommen, da man auf eine anschauliche Weise über die Ähnlichkeit von Dreiecken (Ähnlichkeitsfaktoren) bzw. dem Vervielfachen von Vektoren sprechen kann.

2. Die leichten und die schweren Funktionen

Einleitung: Anhand von Beispielen zur Behandlung von Funktionen wird dargelegt, wie der Autor sich bemüht den Anforderungen eines allgemein bildenden Mathematikunterrichts gerecht zu werden. Die Schwerpunkte des Artikels liegen zum einen in der Darlegung von (bekannten) Forderungen aus der Mathematikdidaktik und zum anderen in der Darstellung und Begründung ausgewählter mathematischer Inhalte (*Probleme!*) und Methoden, die den Aufbau von Grundvorstellungen ermöglichen sollen. Die entsprechenden Lernumgebungen, also die konkrete Inszenierung von Unterricht beginnend mit der Untersuchung von Beispielen hin zum Ziehen von Schlussfolgerungen und Finden von Verallgemeinerungen und deren Begründungen, müssen erst noch konstruiert werden.

Grundvorstellungen erfassen nach *R. vom Hofe* Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität. Bei der Verwendung von Grundvorstellungen als didaktischem Modell geht es auf der einen Seite um eine Beschreibung des mathematischen Kerns und auf der anderen um die individuellen Erklärungsmodelle der Schüler (deren Herausbildung natürlich erst ermöglicht werden muss). Die Ausbildung von Vorstellungsbildern und Handlungsschemata setzt eine aktive Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen anhand von Beispielen voraus. Die Bereitstellung von geeigneten Beispielen, die dem jeweiligen Stand der Fähigkeiten der Schüler entsprechen, ist eine wesentliche Aufgabe für jeden Mathematiklehrer. Im Prozess der aktiven Auseinandersetzung mit Problemen sammelt der Schüler Erfahrungen, die im möglichst hohen Maße zur Allgemeinbildung beitragen sollen.

Heinrich Winter stellte 1995 in dem Artikel „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung“ fest, dass „eine funktionierende Demokratie ohne aufgeklärte, also selbständig denkende Bürger nicht vorstellbar ist. Daher muss jedes Fach an allgemein bildenden Schulen aufweisen und begründen, inwieweit es für die Allgemeinbildung unentbehrlich ist.“
Für den Mathematikunterricht fordert er, dass „dieser anstreben sollte die drei folgenden Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(2) Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formen, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(3) In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemfähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Das Wort Erfahrung soll zum Ausdruck bringen, dass das Lernen von Mathematik weit mehr sein muss als eine Entgegennahme und Abspeicherung von Informationen, dass Mathematik erlebt (möglicherweise auch erlitten) werden muss.

In (1) ist die Mathematik als nützliche, brauchbare Disziplin angesprochen … Interessant und wirklich unentbehrlich für Allgemeinbildung sind Anwendungen der Mathematik erst, wenn in Beispielen aus dem gelebten Leben erfahren wird, wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von Aufklärung durch sie zustande kommen kann, und Aufklärung ist Bürgerrecht und Bürgerpflicht …"

Als Beispiele nennt *Heinrich Winter* die Zinsrechnung, exponentielles Wachstum/Zerfall, Wurf/Drehung/Schwingung einschließlich ihrer Ursachen und Folgen, Momentangeschwindigkeit, das Zusammenspiel von Oberfläche und Volumen in der belebten Natur.

Wie ist der Unterricht zu gestalten, um diese Grunderfahrungen zu ermöglichen? Ein wichtiges Prinzip wird von *Lutz Führer* erläutert. Er schreibt in seinem Buch „Pädagogik des Mathematikunterrichts" (Vieweg Verlag 1997, S. 86), dass wir die nach wie vor erkleckliche Stofffülle der Lehrpläne und Schulbücher nur dann mit einiger Hoffnung auf Breitenwirkung lehren können, wenn wir die zahllosen Einzelheiten als durchsichtige Konsequenzen weniger Grundgedanken darstellen und deren Ableitung aus solchen Grundgedanken einüben. Er fasst seine Gedanken zur These 21 zusammen: „Der Mathematikunterricht muss vom Lehrer um wenige beziehungsreiche Grundgedanken konzentriert werden. Sie sind dem Schüler im Laufe der Schulzeit zunehmend bewusster und in ihrer Vielschichtigkeit deutlicher zu machen - Spiralprinzip". Ein solches fundamentales Konzept ist die funktionale Variation statischer Beziehungen, Konfigurationen und Situationen. Ein weiteres ist die Idee der rekursiven Beschreibung von Problemen.

Bevor im Folgenden das oben Ausgeführte am Beispiel der linearen, der Exponentialfunktion und der Sinusfunktion erläutert wird, soll nochmals *Heinrich Winter* zu Wort kommen. Er fordert, dass künftige Mathematiklehrer erfahren sollen, dass mathematische Inhalte nicht nur nach innerfachlichen Ordnungsprinzipien strukturiert, sondern auch aus anderen pädagogisch relevanten Blickwinkeln gesehen und verstanden werden müssen, vor allem aus der Sicht

- der historischen Genese von Ideen,
- der möglichen Bezüge zu unterschiedlichen außermathematischen Bereichen,
- der Akzentuierung nach übergeordneten fundamentalen Ideen,
- der möglichen Verwurzelung in Alltagserfahrungen,
- der möglichen unterschiedlichen Repräsentationsformen,
- der möglichen Distanzen zu Primärintuitionen und damit zu möglichen Verständnishürden,
- der möglichen Erschließbarkeit durch selbständige Lernaktivitäten in überschaubaren Problemfeldern.

Jetzt nun soll der Versuch unternommen werden all das Gesagte bei der Behandlung der linearen und der Exponentialfunktion zu berücksichtigen. (Diese Funktionen und die Sinusfunktion, das sind die leichten Funktionen - die Polynome sind die schweren.) Zunächst gilt es eine von mehreren möglichen Erläuterungen der Begriffe zu geben.

Eine Funktion heißt

- *linear*, wenn $f(x+\Delta x) = f(x) + Konst(\Delta x)$ und
- *exponentiell*, wenn $f(x+\Delta x) = f(x) \cdot Konst(\Delta x)$ für alle x

und alle gewählten Zuwächse Δx gilt. Dabei steht $Konst(\Delta x)$ für eine Konstante, deren Größe von der konkreten Wahl von Δx abhängt. (Im Unterricht bemühe ich mich, das immer wieder sprachlich und geometrisch zum Ausdruck zu bringen.)
Im Unterricht müssen diese Darstellungen natürlich zunächst durch die Betrachtung geeigneter Beispiele erarbeitet werden. Als Ausgangspunkte werden Experimente/Sachverhalte gewählt, die umgangssprachlich beschrieben werden können.

- gleichförmige Bewegung (geradlinig, auf einer Kreisbahn)
- Kosten für eine bestimmte Menge an Artikeln, bei festen Kosten für einen
- Masse in Abhängigkeit vom Volumen
- Werte für die maximalen Höhen eines mehrfach aufprallenden Balls
- Zins als „gerechter“ Anteil, der an den Leihenden gezahlt wird; Zinseszins
- radioaktiver Zerfall usw.

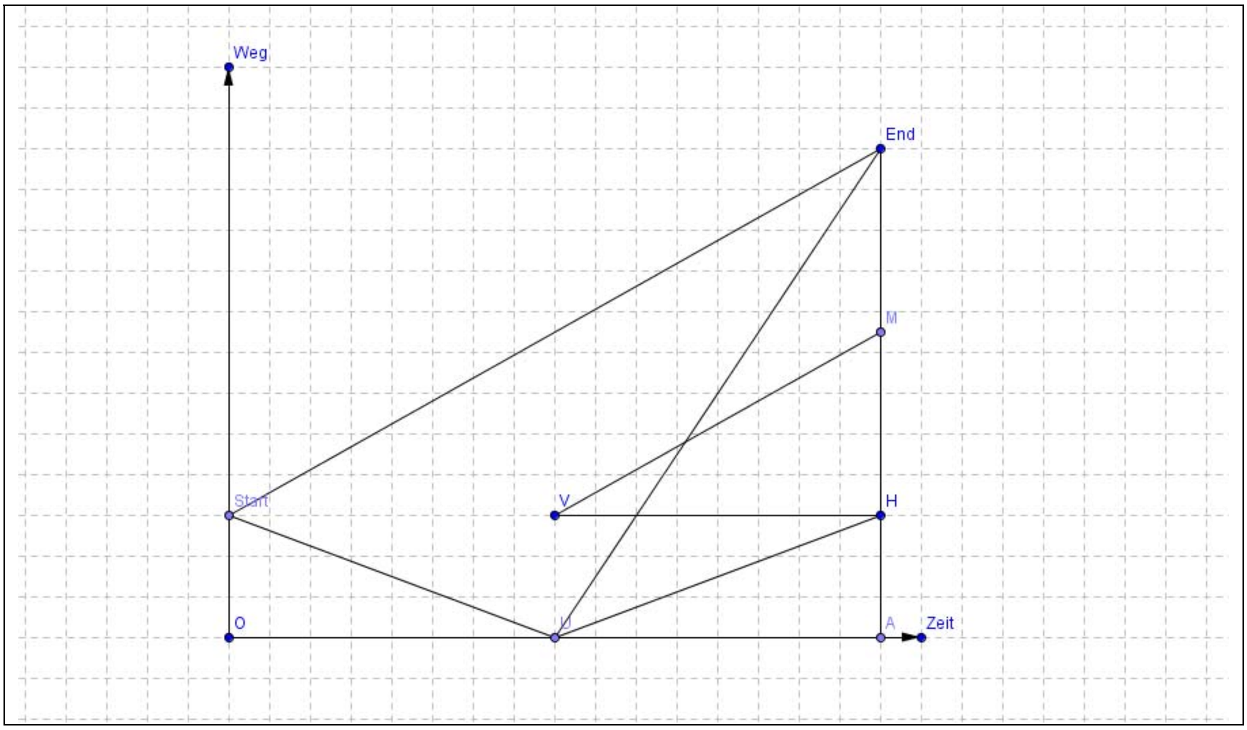
Lineare Funktion: $f(x+\Delta x) = f(x) + d$

Ausgangspunkte sind zunächst Beispiele mit einem Definitionsbereich D(*f*), der eine endliche Teilmenge von N ist (endliche Zahlenfolgen), oft wähle ich die Tabellenform (ab Kl. 5).
Folgerung von $f(x+i\cdot\Delta x) = f(x) + i\cdot d$; parallel dazu werden graphische Darstellungen erarbeitet, kongruente Anstiegsdreiecke werden genutzt
Übergang zu Beispielen mit einem D(*f*), der endlich viele positive rationale Argumente enthält (das Volumen und andere Größen müssen nicht mehr ganzzahlig sein)
Begründung von $f(x+\frac{\Delta x}{n}) = f(x) + \frac{d}{n}$ und $f(x+i\cdot\frac{\Delta x}{n}) = f(x) + i\cdot\frac{d}{n}$ (wieder ausgehend von konkreten Beispielen zum Allgemeinen), auch unter Nutzung der graphischen Darstellung und der entsprechenden Anstiegsdreiecke
Herleitung von Funktionswerten in allgemeiner Darstellung für rationale Argumente, wenn ein „Startwert“ *f(0)* gegeben ist; schließen auf die allgemeine Funktionsgleichung

Beispiel 1: Untersuchung des Zusammenhangs von *Masse und Volumen* einer Eisenlegierung

$1cm^3$	$2cm^3$	$3cm^3$			$8cm^3$		$15{,}5cm^3$	
	15g		37,5g	62,5g		90g		150,3g

Beispiel 2 (Kl. 9): Ein *Schwimmer* schafft durch seine Kraft und Ausdauer beim Schwimmen im ruhigen Wasser über Stunden hinweg eine Geschwindigkeit von 5 km pro h. Schwimmt er in einem Fluss mit der Strömungsgeschwindigkeit von 3 km pro h, dann ist er entsprechend langsamer oder schneller, je nachdem ob er in Strömungsrichtung oder entgegengesetzt schwimmt. Heute nimmt er einen Ball mit ins Wasser, lässt ihn los und schwimmt 2 km gegen den Strom. Danach dreht er um und schwimmt dem Ball hinterher. Wie lange benötigt er, um den Ball wieder einzuholen und welchen Weg wird er dabei zurücklegen?
Wichtig ist mir hier, dass geometrische Interpretationen von Problemen zur gleichförmigen Bewegung anhand von einfacheren Aufgaben geübt wurden und die folgende Lösung im Erfahrungsbereich der Schüler liegt oder zumindest mit Hilfen verstanden wird.



Die Bahn des Schwimmers sei eine gerade Linie inmitten des Flusses. Wir denken uns einen Strahl zur Messung des zurückgelegten Weges und legen den Anfangspunkt der Skala in den Umkehrpunkt des Schwimmers. Im Weg-Zeit-Diagramm erscheint dann die Phase des Schwimmens vom Start bis zum Umkehrpunkt als fallende Gerade (von „Start" zu U). Der negative Anstieg der Geraden entspricht der Geschwindigkeit des Schwimmers gegen den Strom und die Negativität ergibt sich aus der Zählrichtung des Weges. Der Betrag der Geschwindigkeit ergibt sich hier aus der Differenz der gegebenen Geschwindigkeiten ($v_S - v_F$). Vom Umkehrpunkt bis zum Endpunkt (der Schwimmer erreicht den Ball wieder) ergibt sich die Geschwindigkeit aus der Summe der Geschwindigkeiten des Schwimmers und des Flusses ($v_F + v_S$). Zur Lösung des Problems stellen wir uns vor, dass wir nicht wissen, wann der Schwimmer den Ball wieder erreicht (im Unterricht probieren die Schüler einige Werte aus). Wenn wir die (durch Probieren erlangte) Vermutung verwenden, dass der Schwimmer in beiden Richtungen gleich lange schwimmt, dann sind die Strecken OU und UA gleich lang (im Beispiel 1h). Der Punkt H wird so gewählt, dass die Dreiecke UAH und OUStart kongruent sind. Die Strecke HEnd ist dann gleich der Differenz der Geschwindigkeiten $(v_F + v_S) - (v_S - v_F) = 2v_F$. Wenn M der Mittelpunkt der Strecke HEnd ist, dann ist der Anstieg der Geraden VM gleich v_F. Nach der Umkehrung des Strahlensatzes sind die Strecken Start End und VM parallel. Die Strecke StartEnd hat also auch den Anstieg v_F und beschreibt somit die Bewegung des im Fluss treibenden Balls. Daher sind Schwimmer und Ball nach 2h am gleichen Ort. Auf dem Weg in Flussrichtung legt der Schwimmer 8km (Länge von AEnd) zurück.

Exponentialfunktion: $f(x+\Delta x) = q \cdot f(x)$

Die Vorgehensweise ist ganz analog zur obigen. Die Frage des Wurzelziehens stellt sich in ganz natürlicher Weise. Im folgenden Beispiel wird das Wachstum einer Bakterienkultur unter idealen Bedingungen dargestellt. Ideal soll bedeuten, dass sich die Bakterien bei gleich gewählter Zeitdifferenz stets um den gleichen Anteil (vom jeweiligen Ausgangswert) vermehren.
Beispiel 1:

1d	2d	3d			8d		9,5d	
80mg		180mg	405mg	607,5mg		2,0503g		6,9198g

Beispiel 2: Entladung eines Kondensators über einen Widerstand R
Wesentlich ist die Erläuterung des Ansatzes, des mathematischen Modells des Entladungsvorganges und das Fassen des Wesentlichen zunächst in umgangssprachlicher Form. $\frac{\Delta Q}{Q} = \text{konst} \approx \frac{I \cdot \Delta t}{C \cdot U} \approx \frac{I \cdot \Delta t}{C \cdot R \cdot I} = \frac{\Delta t}{C \cdot R}$ Die Aufsummierung und Grenzwertbildung führt zum gewünschten Ergebnis.

Lineare Rekursionsgleichungen

Ausgangspunkte sind auch hier wieder Probleme aus den Naturwissenschaften und der Wirtschaft. (Zur Abzahlung eines Kredites für einen Häuserkauf wird eine Projektwoche durchgeführt.)
Die Funktionalgleichungen werden zunächst auf natürliche Argumente beschränkt und mithilfe der Zahlenfolgennotiation aufgeschrieben. $a_{n+1} = a_n + d$; $a_{n+1} = q \cdot a_n$; $a_{n+1} = q \cdot a_n + d$ Die letzte Rekursionsgleichung ergibt sich zum einen als Problemstellung aus den beiden anderen und zum anderen aus der Untersuchung von monatlichen Sparens, der Ratenzahlung, des Abbaus von Medikamenten im menschlichen Körper, Geschwindigkeit beim Fallen in der Luft usw.

Die Schüler untersuchen zunächst viele Beispiele von solchen Zahlenfolgen, vermuten Eigenschaften und versuchen diese zu bestätigen. Zusammenfassungen und formalere Beweise folgen: Verhalten der Folgen, explizite Darstellungen, Partialsummen. (Ich lasse hier auch ganzzahlige Folgen auf Teilbarkeit hin untersuchen.) Zur letzten Rekursionsformel noch ein Hinweis. Liegt q zwischen -1 und 1, so finden die Schüler schnell den

Grenzwert g und dass der Grenzwert die Fixpunkteigenschaft hat: $g = q \cdot g + d$. Dann lässt sich Folgendes ableiten $a_{n+1} - g = (q \cdot a_n + d) - (q \cdot g + d) = q \cdot (a_n - g) = q^2 \cdot (a_{n-1} - g) = q^n \cdot (a_1 - g)$.

Und noch eine analoge Erläuterung für beliebige q: Wenn eine Zahlenfolge durch $a_{n+1} = q \cdot a_n + d$ mit dem Startwert a_1 gegeben ist, dann kann man die explizite Darstellung wie folgt finden. Man konstruiert eine Hilfsfolge, die eine geometrische Zahlenfolge ist und die man aus der gegebenen durch eine einfache Verschiebung um eine Konstante x erhält. (Das muss der Schüler nicht unbedingt wissen; ist aber nützlich bei der Konstruktion von Aufgaben. Anhand von Beispielen ist alles leicht nachvollziehbar.)

$a_{n+1} - x = q \cdot (a_n - x) \Rightarrow x = \frac{d}{1-q}$ Startwert der neuen Folge $a_1 - \frac{d}{1-q}$

$$b_n = a_n - \frac{d}{1-q} \Rightarrow b_{n+1} = q \cdot b_n \Rightarrow b_n = q^{n-1} \cdot b_1 = q^{n-1} \cdot (a_1 - \frac{d}{1-q})$$

$$\Rightarrow a_n = q^{n-1} \cdot (a_1 - \frac{d}{1-q}) + \frac{d}{1-q}$$

Beispiel 1: Für einen *Hausbau* borgt man 200000€ bei einem Zinssatz von 6,75% und zahlt jährlich 24000€ zurück. Sind s_n und s_{n+1} die Schulden nach dem n-ten bzw. (n+1)-ten Jahr, dann gilt $s_{n+1} = s_n \cdot 1{,}0675 - 24000$ mit $s_0 = 200000$.

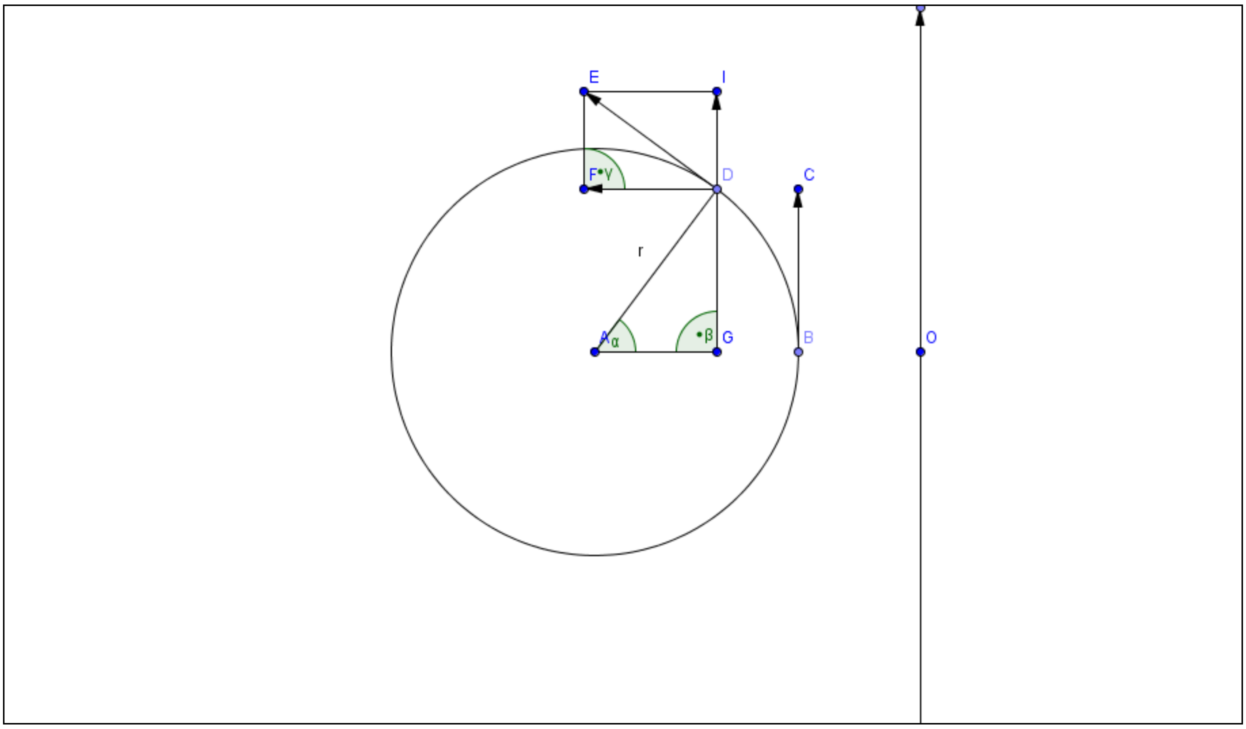
Zunächst wird anhand einer Tabelle untersucht, wann die Schulden abbezahlt sind und wie viel insgesamt bezahlt wurde. (Hier erweist sich natürlich der Einsatz eines CAS-Rechners als günstig. Das ist aber nicht zwingend erforderlich.) Vergleicht man die Gleichung $s_{n+1} - x = (s_n - x) \cdot 1{,}0675$ mit der obigen, so erhält man $x = 355556$. Das Problem kann daher auch mithilfe der Folge $b_{n+1} = b_n \cdot 1{,}0675$ und $b_0 = -155556$ beschrieben werden. (Der Zusammenhang lautet $s_n = b_n + 355556$.) Explizite Terme für die Schulden im n-ten Jahr und für die insgesamt gezahlte Summe sind jetzt leicht anzugeben.

Beispiel 2: *Medikamentenabbau* (siehe „Der Einsatz des TI-89 in der Jahrgangsstufe 11 an Thüringer Gymnasien", S. 22): Ein Patient nimmt täglich 12mg eines Medikamentes ein. Im Laufe des Tages baut der Körper 40% des Wirkstoffs ab. Wie groß ist die Menge des Wirkstoffs unmittelbar nach der Einnahme am 2., 3., 4. und am n-ten Tag? Gegen welchen Grenzwert strebt die Folge?

Bezeichnet man die Menge des Wirkstoffes im Körper unmittelbar nach der Einnahme am n-ten Tag mit x_n, so gilt $x_{n+1} = x_n \cdot 0{,}6 + 12$, weil 60% des nach der Einnahme am n-ten Tag im Körper vorhandenen Wirkstoffes im Körper verblieben sind (und nicht abgebaut werden) und 12 mg hinzukamen. Man prüft schnell nach, dass die Rekursionsgleichung gleichwertig zu $x_{n+1} - 30 = (x_n - 30) \cdot 0{,}6$ ist. Die Folge $\{x_n - 30\}$ mit dem Startwert -18 strebt gegen 0, die Folge{ x_n } hat daher den Grenzwert 30.

Die Sinusfunktion

Zur Einführung gehe ich von periodischen Vorgängen aus (früher war stets die Dreiecksberechnung mein Ausgangspunkt). Ein gutes Beispiel ist die Untersuchung der Länge des Tages in Deutschland, wenn man sie über Jahre hinweg beobachtet. (Im Internet finden die Schüler die notwendigen Daten.) Die Eigenschaften werden genannt, begründet und graphisch dargestellt. Dann betrachten die Schüler die gleichförmige Kreisbewegung (in gleichen Zeiten gleich lange Bögen) - ich nehme stets ein Rad eines Fahrrades und befestige an der Felge eine rote Klammer. Die Bewegung eines Punktes wird in Richtung der Achse und senkrecht zur Achse und einer beliebigen Richtung der Ebene beobachtet (gleichförmige Kreisbewegung bzw. Hoch- und Hinunterbewegung auf einer Strecke). Man betrachtet Punkte, die in gleichen Abständen auf der Kreislinie liegen und die somit auch bezüglich der Zeit in gleichen Abständen liegen. Die Einführung der Sinusfunktion (und der Kosinusfunktion – andere Blickrichtung) muss hier nicht erläutert werden. Der Vorteil des Vorgehens besteht darin, dass sich die Frage, was denn passiert, wenn man die Umlaufgeschwindigkeit verdoppelt, in natürlicher Weise stellt. Um den Begriff der Winkelgeschwindigkeit sollte man keinen Bogen machen. Die Funktion *y = sin(2x)* erhält eine konkrete physikalische Bedeutung. Die Ableitung der Sinusfunktion lässt sich jetzt leicht bestimmen (nachdem man für konkrete Punkte bzw. Intervalle über Durchschnittsgeschwindigkeiten diskutiert und den Begriff der Momentangeschwindigkeit ins Spiel gebracht hat). Man zeichnet zwei gleich lange Geschwindigkeitspfeile mit der Länge *v* (Umlaufgeschwindigkeit) an die Kreisbahn: beim Durchgang durch die Nulllage und in einem beliebigen Punkt P. Der Pfeil in P wird in Komponenten in Richtung der gewählten Achsen zerlegt und gedeutet. Die Komponente in y-Richtung der Länge $v \cdot \cos\alpha$ (folgt aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke) beschreibt die Geschwindigkeit des sich bewegenden Punktes bei der Bewegung auf der Strecke (entsprechend der Definition der Sinuswerte). Schreibt man die Länge der y-Komponente als $\omega \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t)$, dann hat man auch schon ein Beispiel für die Kettenregel gefunden.



E
I
F
γ
D
C
r
A
α
β
G
B
O