Ervin DEÁK, Budapest

Ein neuer - didaktisch fundierter - Begriff der Verhältnisgleichheit von Streckenpaaren

Erweiterte Version

0.1 Dieser Begriff ist mit derselben geometrischen Grundkonfiguration verbunden wie die Strahlensätze und leistet auch dasselbe. (Z. B. kann die übliche Ähnlichkeitslehre in gewohnter Weise entwickelt werden.) Während aber die Strahlensätze die reellen Zahlen voraussetzen, liegen unser Begriff und der entsprechende Fundamentalsatz vollständig im Bereich der reinen Kongruenzgeometrie und bereiten der Entwicklung des reellen Zahlkörpers und der Maßgeometrie einen anregungsvollen Weg im Sinne eines konstruktiv-genetischen Aufbaus dieser Disziplinen. – Es handelt sich um einen integrierenden Bestandteil einer umfassenden Neugestaltung verschiedener Gebiete der Schulmathematik auf der Grundlage einer als „fundamentale Idee" fungierenden einheitlichen, allgemeinen Idee des Messens.

1 Der elementarmathematische Hintergrund

1.1 *Grundbegriffe des „Messens" im Bereich der Strecken.* Wir unterscheiden vier Allgemeinheits-Stufen des elementaren Messens. (Im Diagramm der Abb. 1 zeigen die Pfeile jeweils in die Richtung zunehmender Allgemeinheit.) Das „*Messen* einer Strecke g mit einer Strecke h" bedeutet

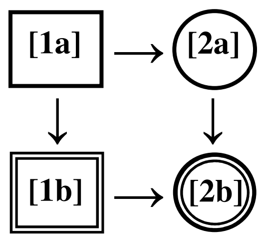


Abb. 1

[1a] die Gleichung $g = q \cdot h$ mit $q \in \mathbb{N}$,

[1b] die Gleichung $g = q \cdot \frac{h}{n}$ mit $q, n \in \mathbb{N}$,

[2a] die Division mit Rest (im weiteren DmR) $g = q \cdot h + r$, $q \in \mathbb{N}$,

[2b] die DmR $g = q \cdot \frac{h}{n} + r$, $q, n \in \mathbb{N}$ und r eine Strecke kleiner als h.

1.2 (a) Existiert die Division [1a] oder eine der Divisionen [1b], so ist dadurch das Verhältnis der Strecke g zur Strecke h vollständig erfasst.

(b) Mehrere Messungen vom Typ [2b] mit verschiedenen Werten $n_1, n_2, ..., n_k$ können durch eine einzige [2b]-Messung für ein $n \in \mathbb{N}$ ersetzt werden, so dass aus dem zugehörigen Quotienten sämtliche Quotienten rekonstruierbar sind, die zu diesen Werten n_i gehören; für n eignet sich z. B. das k.g.V. der Zahlen $n_1, n_2, ..., n_k$.

Das kann in zwei Schritten BEWIESEN werden. Mit $q(m)$ $(m \in \mathbb{N})$ bezeichnen wir den Quotienten bei der DmR von g durch $\frac{h}{m}$.

Erster Schritt. Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann haben wir

$$g = q_{ab} \cdot \frac{h}{ab} + r_{ab} = \frac{q_{ab}}{b} \cdot \frac{h}{a} + r_{ab} = \left[\frac{q_{ab}}{b}\right] \cdot \frac{h}{a} + \left\{\frac{q_{ab}}{b}\right\} \cdot \frac{h}{a} + r_{ab},$$

wobei

$$\left\{\frac{q_{ab}}{b}\right\} \cdot \frac{h}{a} + r_{ab} < \frac{b-1}{b} \cdot \frac{h}{a} + \frac{h}{ab} = \frac{h}{a},$$

also ist

$$q_a = \left[\frac{q_{ab}}{b}\right].$$

Zweiter Schritt. Sind

$$k \in \mathbb{N},\ n_i \in \mathbb{N}\ (i = 1, 2, ..., k),\ \nu = \text{k.g.V.}(n_1, n_2, ..., n_k),$$

$$\nu_i = \frac{\nu}{n_i}\ \ (i = 1, 2, ..., k).$$

Dann gilt wegen $\nu = n_i \cdot \nu_i$ und dem Ergebnis aus dem ersten Schritt:

$$q_{n_i} = \left[\frac{q_\nu}{\nu_i}\right] (i = 1, 2, ..., k).$$

(c) Mit einer noch so großen, aber *endlichen* Anzahl von [2b]-Messungen kommen wir also nicht über den Wirkungsgrad einer einzigen Messung hinaus. Die entscheidende Wendung auf dem Weg zur Maßgeometrie und überhaupt zum reellen Zahlkörper bildet aber die Vorstellung, eine *unendliche* Folge von Messungen dieses Typs für $n_1, n_2, ...$ durchzuführen.

2 Einige Grundbegriffe

2.1 Wir formulieren in diesem Sinne vier – formal verschiedene – Definitionen der <u>Streckenverhältnisgleichheit</u> (im Weiteren SVG) zweier Streckenpaare $(a; a')$ und $(b; b')$. Diese Definitionen sind auf Messungen der Art [2b] gegründet.

(V1) *Die Quotienten beim Messen von a' mit $\frac{a}{n}$ und von b' mit $\frac{b}{n}$ stimmen überein für $n = 0, 1, 2, ...$.*

(V2) *Für jede streng monoton wachsende Folge $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ von nichtnegativen ganzen Zahlen, stimmen die Quotienten beim Messen von a' mit $\frac{a}{n_k}$ und von b' mit $\frac{b}{n_k}$ für jedes $k = 0, 1, 2, ...$ überein.*

(V3) *Die Quotienten beim Messen von a' mit $\frac{a}{10^n}$ und von b' mit $\frac{b}{10^n}$ stimmen überein für $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

(V4) *Es gibt eine streng monoton wachsende Folge $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ von nichtnegativen ganzen Zahlen, sodass die Quotienten beim Messen von a' mit $\frac{a}{n_k}$ und von b' mit $\frac{b}{n_k}$ für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$ übereinstimmen.*

((V3) ist eine Formulierung des Prinzips der üblichen – dem Zehnersystem angepassten – zahlenmäßigen Streckenmessung in der – auf dem reellen Zahlkörper aufgebauten – Maßgeometrie.)

3 Ein weiterer Grundbegriff und die Äquivalenz der Grundbegriffe

3.1 Offenbar gelten die Implikationen $(V1) \Rightarrow (V2) \Rightarrow (V3) \Rightarrow (V4)$, es gilt aber auch der Satz: $(V1) \Leftrightarrow (V2) \Leftrightarrow (V3) \Leftrightarrow (V4)$. Zum Beweis würde es genügen etwa zu zeigen, dass $(V4) \Rightarrow (V1)$. Statt dessen schieben wir zwischen (V4) und (V1) die folgende Aussage ein:

(G) *In jeder geometrischen Konfiguration wie in Abb. 2 (φ ein beliebiger Winkel zwischen 0° und 180°) verlaufen die Sekanten AB und $A'B'$ parallel.* (Abb. 2.)

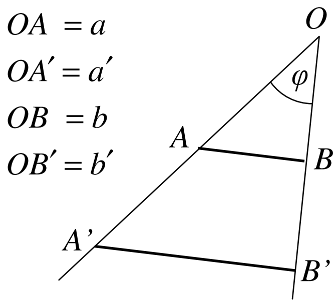


Abb. 2

(Durch das Einfügen von (G) in den Komplex der „eindimensionalen" Aussagen (V1) – (V4) erstreckt sich die ganze Problematik auf das „zweidimensionale" Problemfeld der Ähnlichkeit in der Ebene.)

3.2 $(G) \Rightarrow (V1)$ und $(V4) \Rightarrow (G)$ können sehr leicht und anschaulich bewiesen werden: $(G) \Rightarrow (V1)$ direkt (Abb. 3), $(V4) \Rightarrow (G)$ indirekt (die „ungünstige" Situation in Abb. 4 bzw. Abb. 5 stellt sich bestimmt ein, wenn n so groß gewählt wird, dass $n \cdot AA' > OA$ bzw. $n \cdot BB' > OB$).

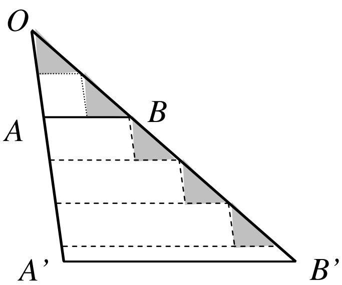


Abb. 3

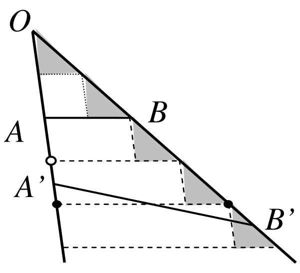


Abb. 4

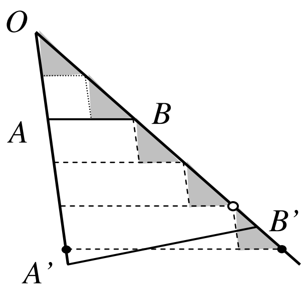


Abb. 5

4 Über einen Erfahrungshintergrund der Äquivalenz (V1)$\Leftrightarrow$(G) und über einen Aspekt der hier verfolgten strategischen Linie

4.1 Der neue Begriff (V1) und seine Varianten (Abschwächungen) brauchen nicht ganz unerwartet über den Lernenden hereinzubrechen. Die Parallelität der Sekanten erscheint nämlich sehr leicht im folgenden Spezialfall.

DEFINITION. Wir sagen, zwei Streckenpaare $(a';a)$ und $(b';b)$ seien *gleichproportioniert* (gp), wenn

1. sowohl $(a;a')$ als auch $(b;b')$ kommensurabel sind, also in einem rationalen Verhältnis stehen
2. und obendrein diese beiden Verhältnisse übereinstimmen.

(1. und 2. zusammen bedeuten, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass sowohl a' durch $\frac{a}{n}$ als auch b' durch $\frac{b}{n}$ restlos teilbar sind und die beiden Quotienten übereinstimmen.)

4.2 SATZ. *Seien* $(a;a')$ *und* $(b;b')$ *gleichproportioniert.*

(1) *In der geometrischen Konfiguration der Abb. 2 (3.1) sind dann* $A'B' \| AB$.

(2) *Aus (1) folgt dann leicht, dass für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *der Quotient beim Messen von* a' *mit* $\frac{a}{n}$ *derselbe ist wie beim Messen von* b' *mit* $\frac{b}{n}$.

Allerdings kann bei (2) auch ein Rest auftreten, u. zw. für jedes n entweder in keiner dieser Messungen oder in beiden).

(Einen unmittelbaren Beweis dafür, dass aus der Gleichproportioniertheit von zwei Streckenpaaren ihre Streckenverhältnisgleichheit folgt, bringen wir weiter unten.)

4.3 Über die Implikationsverhältnisse in diesem Gebiet gewährt das Diagramm in Abb. 6 eine vollständige Übersicht.

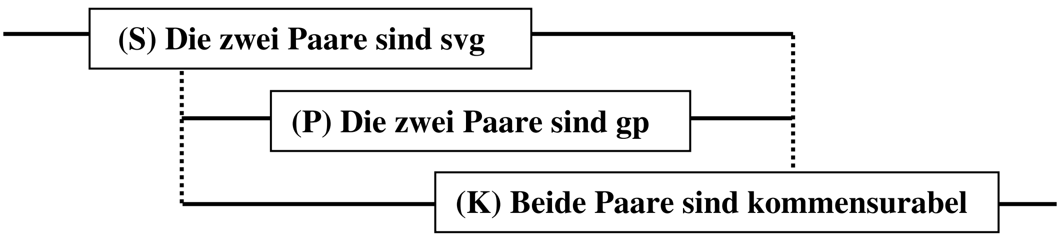


Abb. 6

Wir beweisen die nichttrivialen Implikationen des Diagramms.

(a) (P)$\Rightarrow$(S): *Sind* $(a;a')$ *und* $(b;b')$ *gp, so auch svg im Sinne von (V1).*

BEWEIS. Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit

$$n \cdot a' = m \cdot a \qquad \text{und} \qquad n \cdot b' = m \cdot b,$$

so kann es keine Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit

$$a' < p \cdot \frac{a}{q} \text{ und } b' \geq p \cdot \frac{b}{q}$$

geben, weil sonst

$$q \cdot a' < p \cdot a \qquad \text{und} \qquad q \cdot b' \geq p \cdot b,$$

und daher

$$mq \cdot a = nq \cdot a' < np \cdot a \quad \text{und} \quad mq \cdot b \geq nq \cdot b' \geq np \cdot b,$$

also

$$mq < np \qquad \text{und} \qquad mq \geq np$$

wären.

(b) (S)$\wedge$(K) $\Rightarrow$(P): *Sind beide Streckenpaare* $(a; a')$ *und* $(b; b')$ *kommensurabel und svg im Sinne von (V1), so sind sie auch gp.*

Beweis. Laut Voraussetzung gibt es $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a' = m \cdot \frac{a}{n}$ und $b' \geq m \cdot \frac{b}{n}$, und es ist zu zeigen, dass sogar $b' = m \cdot \frac{b}{n}$. Wäre nun aber $b' > m \cdot \frac{b}{n}$, so gibt es (Archimedische Eigenschaft!) ein $t \in \mathbb{N}$ mit $t \cdot \left(b' - \frac{b}{n} \right) > \frac{b}{n}$, und daher $b' > (tm+1) \cdot \frac{b}{tn}$, was aber der Voraussetzung widerspricht, da $a' = tm \cdot \frac{a}{tn}$.

Bemerkung. In diesem Beweis wird die vorausgesetzte Kommensurabilität des Streckenpaares $(b; b')$ nicht ausgenutzt. Wir haben also eigentlich den folgenden – formal – allgemeineren Satz bewiesen:

(b*) *Sind* $(a; a')$ *ein kommensurables Paar und die Paare* $(a; a')$ *und* $(b; b')$ *svg im Sinne von (V1), so sind sie auch gp.*

(c) *Zwei kommensurable Paare sind genau dann svg, wenn sie gp sind.* Das ist die Zusammenfassung von (a) und (b).

Das Diagramm stellt auch zwei Nicht-Implikationen dar. 1. Kommensurable Streckenpaare brauchen offensichtlich nicht gp zu sein. 2. Es gibt streckenverhältnisgleiche nicht-kommensurable Paare $(a; a')$, $(b; b')$. Für ein einfaches Beispiel s. Abb. 7.)

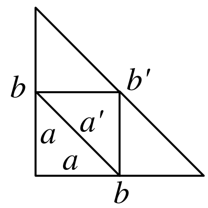


Abb. 7

5 Arithmetik und Geometrie

5.1 Der soeben behandelte Spezialfall (P) (Abb. 6) unserer geometrischen Problematik ist das Abbild einer allgemeingültigen arithmetischen Gesetzmäßigkeit im Bereich der positiven rationalen Zahlen (wo ja zwei beliebige Elemente „kommensurabel” sind und daher das Analogon der Bedingung 1. gegenstandslos wäre):

Sind $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ *und* $a' = \frac{p}{q} \cdot a$, $b' = \frac{p}{q} \cdot b$, *so gilt für jedes Paar* $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m \cdot \frac{a}{n} \leq a' < (m+1) \cdot \frac{a}{n} \Leftrightarrow m \cdot \frac{b}{n} \leq b' < (m+1) \cdot \frac{b}{n}.$$

(Unter der angegebenen Voraussetzung sind ja beide doppelten Ungleichungen zu $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} < \frac{m+1}{n}$ äquivalent.) Aus dieser arithmetischen Tatsache folgt nun die eingeschränkte geometrische Tatsache unter (a) ganz natürlich: $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} < \frac{m+1}{n}$ ist nämlich gleichwertig sowohl mit $m \cdot \frac{a}{n} \leq a' < (m+1) \cdot \frac{a}{n}$ als auch mit $m \cdot \frac{b}{n} \leq b' < (m+1) \cdot \frac{b}{n}$, wenn a, a', b und b' Strecken mit $a' = \frac{p}{q} \cdot a$ und $b' = \frac{p}{q} \cdot b$ sind.

5.2 In der Geometrie bedeutet aber die Kommensurabilitätsforderung für das Streckenpaar (a, a') und für das Streckenpaar (b, b') eine echte Einschränkung, während in der $\mathbb{Q}$-Arithmetik die analoge Forderung nichts sagend wäre.

5.3 Die allgemeine Äquivalenz $(\text{V1}) \Leftrightarrow (\text{G})$ stellt also eine echte Erweiterung der auf die rationalen Zahlen zurückführbaren eingeschränkten geometrischen Tatsache unter 2.1(a) dar, und auf dieser Erweiterung kann eine allgemeine geometrische Proportionenlehre aufgebaut werden. Allerdings wird dabei die Zahlenmäßigkeit eingebüßt. Darin liegt aber ein Motiv für die Erweiterung des rationalen Zahlkörpers zum reellen Zahlkörper, um die verlorene Harmonie von Geometrie und „Arithmetik” – auf einer höheren begrifflichen Ebene – wiederherzustellen und so zu einer echten „Maßgeometrie” zu gelangen.

6 Über einen klassischen Begriff der Streckenverhältnisgleichheit, und über die eigenartige Funktion beider Verhältnisgleichheits-Begriffe für den Werdegang der mathematischen Erkenntnis

6.1 Die im fünften Buch von Euklids Elementen entwickelte geometrische Proportionenlehre ist auf dem folgenden – auf Eudoxos zurückgehenden – Begriff aufgebaut.

DEFINITION. „Man sagt, dass Größen *in demselben Verhältnis stehen*, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind."*

*Zitiert aus *Die Elemente*, Bücher I – XIII, von EUKLID, aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer, Einleitung von Peter Schreiber, Ostwalds Klassiker der exakten Wiss. Band 235, Leipzig 2003; V. Buch, Definition 5, S. 91.

Mit unserem üblichen Formelapparat und auf Strecken bezogen formuliert lautet diese Definition so:

(E) Zwei Streckenpaare $(a';a)$ und $(b';b)$ *stehen im selben Verhältnis*, wenn

$$\begin{aligned} p\cdot a < q\cdot a' &\Leftrightarrow p\cdot b < q\cdot b' \\ p\cdot a = q\cdot a' &\Leftrightarrow p\cdot b = q\cdot b' \end{aligned} \quad (p,q\in\mathbb{N})\,.$$

(Die dritte Eudoxossche Forderung – $p\cdot a < q\cdot a' \Leftrightarrow p\cdot b < q\cdot b'$ $(p,q\in\mathbb{N})$ – haben wir ausgelassen, da sie eine Folge der ersten beiden ist.)

6.2 SATZ. *Zwei Streckenpaare $(a';a)$ und $(b';b)$ sind genau dann streckenverhältnisgleich im Sinne von (V1), wenn sie im Eudoxosschen Sinne im selben Verhältnis stehen.*

BEWEIS. (1) (E) $\Rightarrow$(V1). Es ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung (E)

$$m\cdot\frac{a}{n}\le a' < (m+1)\cdot\frac{a}{n} \Rightarrow m\cdot\frac{b}{n}\le b' < (m+1)\cdot\frac{b}{n}\,.$$

Wäre nun aber

$b' < m\cdot\frac{b}{n}$,	$b' \ge (m+1)\cdot\frac{b}{n}$,
so hätten wir	so hatten wir
$m\cdot a \le n\cdot a'$ und $m\cdot b > n\cdot b'$,	$n\cdot a' < (m+1)\cdot a$ und $n\cdot b' \ge (m+1)\cdot b$,

im Widerspruch zu (E).

(2) (V1) $\Rightarrow$(E). Es ist zu zeigen, dass – unter der Voraussetzung (V1) –

$$\begin{aligned} &(\alpha)\ \ p\cdot a < q\cdot a' \Leftrightarrow p\cdot b < q\cdot b' \\ &(\beta)\ \ p\cdot a = q\cdot a' \Leftrightarrow p\cdot b = q\cdot b' \end{aligned} \quad (p,q\in\mathbb{N})\,.$$

Die Behauptung (β) haben wir – unter der Voraussetzung (V1) – schon bewiesen (Satz (b*) unter 4.3).

Beweisen wir also (α). Nehmen wir an, dass – entgegen der Behauptung – $n\cdot b' \ge m\cdot b$, was hier – nach (β) eigentlich $n\cdot b' > m\cdot b$ bedeutet. Wir hätten dann $a' < m\cdot\frac{a}{n}$ und $b' > m\cdot\frac{b}{n}$, was aber (V1) widerspricht.

6.3 Der Eudoxossche Begriff (E) der Verhältnisgleichheit von zwei Streckenpaaren und unser Begriff (V1) der Streckenverhältnisgleichheit sind also äquivalent, und sie leisten auch dasselbe: Beide machen es möglich, in

der Euklidischen Ebene eine unbeschränkte Proportionenlehre aufzubauen, ohne über die (positiven) rationalen Zahlen – also im Wesentlichen über die natürlichen Zahlen – hinausgehen zu müssen.
Damit kann in diesem Bereich das Problem der Inkommensurabilität umgangen werden, und für den Werdegang der griechischen Mathematik war dies von höchster Wichtigkeit, da ihre Weiterentwicklung durch den „Skandal" der Inkommensurabilität in eine gefährliche Krise geraten ist.

6.4 Das didaktische Problem der Maßgeometrie und des reellen Zahlkörpers zeigt eine auffallende Analogie zu dieser historischen Situation. Auch im Unterricht bereitet das Bedürfnis, schon in einem Stadium *vor* der Entwicklung des Begriffs der reellen Zahl eine allgemeine geometrische Proportionenlehre zu haben, erhebliche Schwierigkeiten.

Trotz der Äquivalenz dieser beiden Verhältnisgleichheitsbegriffe und trotz der Tatsache, dass sich der Begriff (E) in einer gewissen historischen Situation „bewährt" hat, scheint aus didaktischer Sicht dennoch jener Unterschied ausschlaggebend zu sein, dass sich dieser Begriff durch seine Nicht-Operativität gewissermaßen als *statisch* erweist (d. h. keinen gangbaren Weg zur Weiterentwicklung des Zahlbegriffs bahnt), wogegen der Begriff (V1) durch seine Operativität (die sich in seiner algorithmischen Art manifestiert) einen durchaus *dynamischen* Charakter hat: Er zeigt – über das durch ihn gelöste Problem der Proportionenlehre hinaus – einen direkten Weg zum Begriff der reellen Zahl.

6.5 Merkwürdigerweise hat der Eudoxossche Begriff am Ende des 19. Jahrhunderts eine bedeutsame Nachwirkung ausgelöst: Der Dedekindsche Begriff der „Schnitte" in der geordneten Menge der rationalen Zahlen, dessen Theorie – einer der vielen, zu dieser Zeit entdeckten, mathematisch äquivalenten, dem Charakter nach jedoch sehr verschiedenen Wegen zum korrekten Aufbau des reellen Zahlkörpers – kann direkt von den Eudoxosschen Vorstellungen ausgehend entwickelt werden: Für ein Streckenpaar $(a; a')$ bildet das Paar $(M_<; M_\geq)$ mit etwa

$$M_< = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N},\ n \cdot a' < m \cdot a \right\},$$

$$M_\geq = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N},\ n \cdot a' \geq m \cdot a \right\}$$

einen Dedekindschen Schnitt in der geordneten Menge der positiven rationalen Zahlen. Tatsächlich folgt aus

$$n \cdot a' < m \cdot a \quad \text{und} \quad p \cdot a' \geq q \cdot a$$

die Ungleichung $\frac{q}{p} \cdot a < a' \leq \frac{m}{n} \cdot a$ und daher $\frac{q}{p} < \frac{m}{n}$, usw.

Die Nicht-Operativität prägt aber den Charakter des Begriffs der Dedekindschen Schnitte nicht weniger als jenen des Eudoxosschen Verhältnisgleichheitsbegriffes, weshalb diese wichtige Theorie als didaktisches Mittel zum Aufbau des Begriffs der reellen Zahl ebenfalls minder geeignet scheint.

7 Über ein Motiv des Satzes (V1)⇔(G) aus 3.2 und unseres Begriffs der Streckenverhältnisgleichheit überhaupt

7.1 Dieses Motiv entstammt merkwürdigerweise nicht dem Problemfeld der Streckenmessung, sondern jenem der Flächenmessung.
Die Grundbegriffe Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit induzieren eine Reihe von wichtigen aber auch hochinteressanten Fragen, wie z. B. die Frage, ob ergänzungsgleiche Polygone immer auch zerlegungsgleich sind (das Umgekehrte ist eine Trivialität).*

*Man beachte, dass dies von der Maßgeometrie her keine Frage, sondern eine Standardtatsache ist. Auf Grund des *Maßbegriffes* „Zahlenmäßiger Flächeninhalt" sind ergänzungsgleiche Polygone flächeninhaltsgleich, und als solche sind sie nach dem Satz von W. Bolyai–Gerwien auch zerlegungsgleich. Was uns Sorgen macht ist aber, ob die Äquivalenz der Ergänzungsgleichheit und der Zerlegungsgleichheit – die ja begrifflich frei vom reellen Zabhlkörper ist – auch innerhalb der reinen Kongruenzgeometrie bewiesen werden kann. (Das ist tatsächlich der Fall, aber die bekannten Beweise sind komplex und nicht gerade kurz. Wir behandeln das Problem hier nur in zwei Spezialfällen; einer davon ist integrierender Bestandteil der Schulmathematik.

7.2 In der Schulmathematik erscheint aus diesem Problemfeld der folgende
SATZ. *Zwei Parallelogramme mit kongruenten Grundlinien und kongruenten Höhen sind* – nicht nur ergänzungsgleich (was einem soz. in die Augen springt, s. die Fälle (α), (β) und (γ) der Abb. 8), sondern sogar – *zerlegungsgleich.**

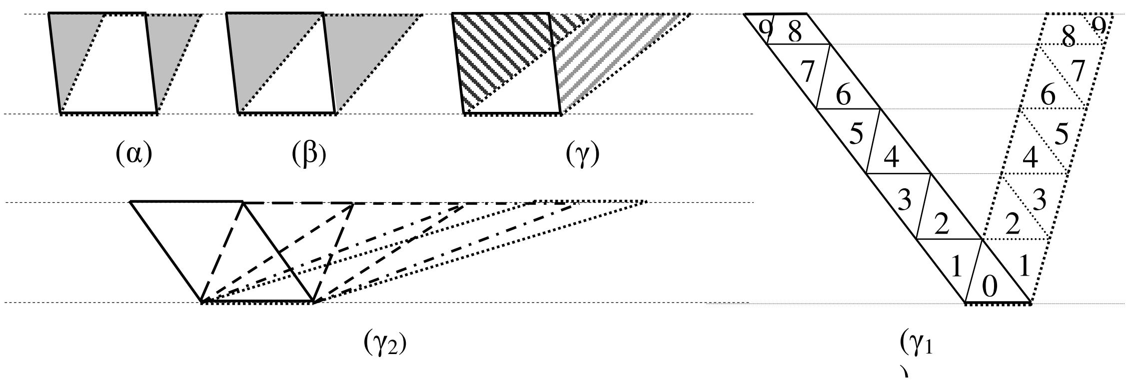


Abb. 8

*In den Fällen (α) und (β) ist die Zerlegungsgleichheit der beiden Parallelogramme sehr leicht erkennbar. Im Fall (γ) ist das jedoch keinesfalls eine Trivialität; der Beweis erfordert schon etwas Findigkeit. (Merkwürdigerweise wird dieser Fall in manchen Schulbüchern einfach außer Acht gelassen.)

Die Teile (γ_1) und (γ_2) der Abb. 8 stellen zwei grundverschiedene Beweise der Zerlegungsgleichheit für den Fall (γ) dar. Bei (γ_2) wird das Problem auf die Fälle (α) und (β) zurückgeführt.
Ein weiterer, grundlegender Unterschied besteht darin, dass die Zerlegungsgleichheit bei (γ_1) *unmittelbar*, durch Übertragung einer geeignet konstruierter Zerlegung eines der Parallelogramme auf das andere, bei (γ_2) aber über die *mittelbare Zerlegungsgleichheit* bewiesen wird.
Es gibt aber auch eine merkwürdige Gemeinsamkeit zwischen diesen Beweisen: *Beide müssen auf das Archimedische Axiom gegründet werden*. Das ist gesetzmäßig: D. Hilbert bewies in *Grundlagen der Geometrie*, dass es in einer nicht-archimedischen Geometrie zwei Dreiecke mit der gleichen Grundlinie und der gleichen Höhe gibt, die nicht zerlegungsgleich sind.

7.3 Ein anderer Spezialfall des Äquivalenzproblems der Zerlegungsgleichheit und der Ergänzungsgleichheit ist auf Gnomon-Figuren bezogen.
SATZ. *In jeder Gnomon-Figur sind die Ergänzungsparallelogramme* – nicht nur (ganz offensichtlich) ergänzungsgleich, sondern auch – *zerlegungsgleich* (Abb. 10).
Das ist durchaus nicht „offensichtlich".

7.4 Im folgenden Satz wird jedoch eine Tatsache ausgesprochen, die jedem ins Auge springt, der sich auch nur ein bischen mit Gnomon-Figuren beschäftigt. (In der Flächentheorie der griechischen Mathematik und überhaupt in der griechischen Geometrie spielten diese Konfigurationen eine zentrale Rolle.)
SATZ. *In einer Gnomon-Figur sind die Nebendiagonalen zueinander parallel.* (Abb. 11).

7.5 Trifft dies zu, so kann die Zerlegungsgleichheit der Ergänzungsparallelogramme sehr leicht über die Transitivität dieser Relation (mittelbar zerlegungsgleiche Polygone sind zerlegungsgleich) und den Satz unter 7.4 bewiesen werden. (Abb. 9.) Es fehlt also der Beweis des Satzes 7.4 .

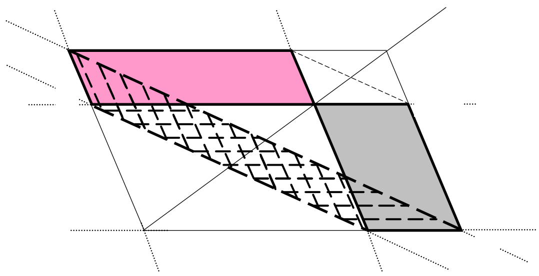


Abb. 9

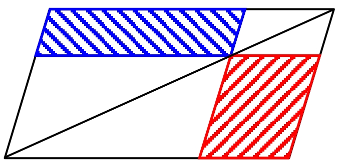


Abb. 10

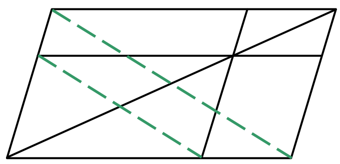


Abb. 11

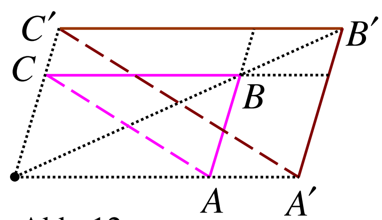


Abb. 12

7.6 Durch Hervorhebung gewisser aufeinander bezogener Teile der Abb. 11 – wie in Abb. 12 – erkennt man nun aber leicht die Beziehung des Satzes 7.4 zum „Kleinen Desarguesschen Satz"*, der meistens in der folgenden Formulierung (α) angeführt wird.

* Der "große" (ebene) Desarguessche Satz (der Projektiven Geometrie) lautet (in gedrängter Form): *Eine komplanare Desarguessche Figur ist dann und nur dann zentral, wenn sie axial ist*. Es erübrigt sich hier auf den Inhalt dieses wohlbekannten fundamentalen Satzes näher einzugehen, zumal wir nur jenen Spezialfall benutzen, dass die "Axialität" im Sinne der unendlich fernen Geraden besteht. Mit der Parallelität von Geraden formuliert ist das eben der Satz (α), den wir also auf der Grundlage der elementaren Schulmathematik (nicht auf jener der Projektiven Geometrie) behandeln.

Beide – äquivalente – Formulierungen (α) und (β) sind *auf zwei Dreiecke, ABC und $A'B'C'$, mit $AB \parallel A'B'$ und $BC \parallel B'C'$*, bezogen (Abb. 13).

(α) *Sind auch $AC \parallel A'C'$, so gehen die Geraden AA' BB', CC' durch einen Punkt oder sie verlaufen parallel.*

(β) *Gehen die Geraden AA', BB', CC' durch einen Punkt oder verlaufen sie parallel, so sind auch $AC \parallel A'C'$.*

Für unseren Zweck wird die folgende Einschränkung von (β) genügen:
(β*) *Gehen die Geraden AA', BB', CC' durch einen Punkt, so sind auch $AC \parallel A'C'$.*

Die Aussage 7.4 kann unmittelbar aus der Formulierung (β*) hergeleitet werden.
Aus 7.4 folgt endlich – nach 7.5 – die andere wichtige Tatsache über Gnomonfiguren, dass nämlich *in einer Gnomonfigur die beiden Ergänzungsparallelogramme* – nicht nur ergänzungsgleich, sondern sogar – *zerlegungsgleich sind.*

7.7 Nach alledem bleibt die Frage offen (sie wird eben durch diese Ergebnisse hervorgerufen), wie der Kleine Desarguessche Satz – nicht wie gewöhnlich über die Strahlensätze, also im Rahmen der Maßgeometrie, sondern – mit rein kongruenzgeometrischen Mitteln bewiesen werden kann. Von unserem Satz (V1) $\Leftrightarrow$ (G) (3.2) ausgehend ist das nun aber ganz leicht:

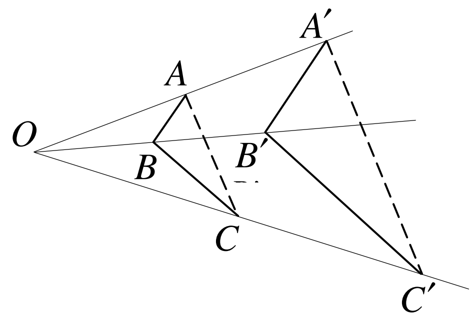


Abb. 13

BEWEIS des Kleinen Desarguesschen Satzes in der Fassung (β*) (7.6).

Wegen $AB \| A'B'$ und $BC \| B'C'$ sind sowohl die Paare $(OA;OA')$ und $(OB;OB')$ wie die Paare $(OB;OB')$ und $(OC;OC')$ streckenverhaltnisgleich im Sinne von (V1), also auch die Paare $(OA;OA')$ und $(OC;OC')$; daraus folgt endlich $AC \| A'C'$. (Abb. 13.)

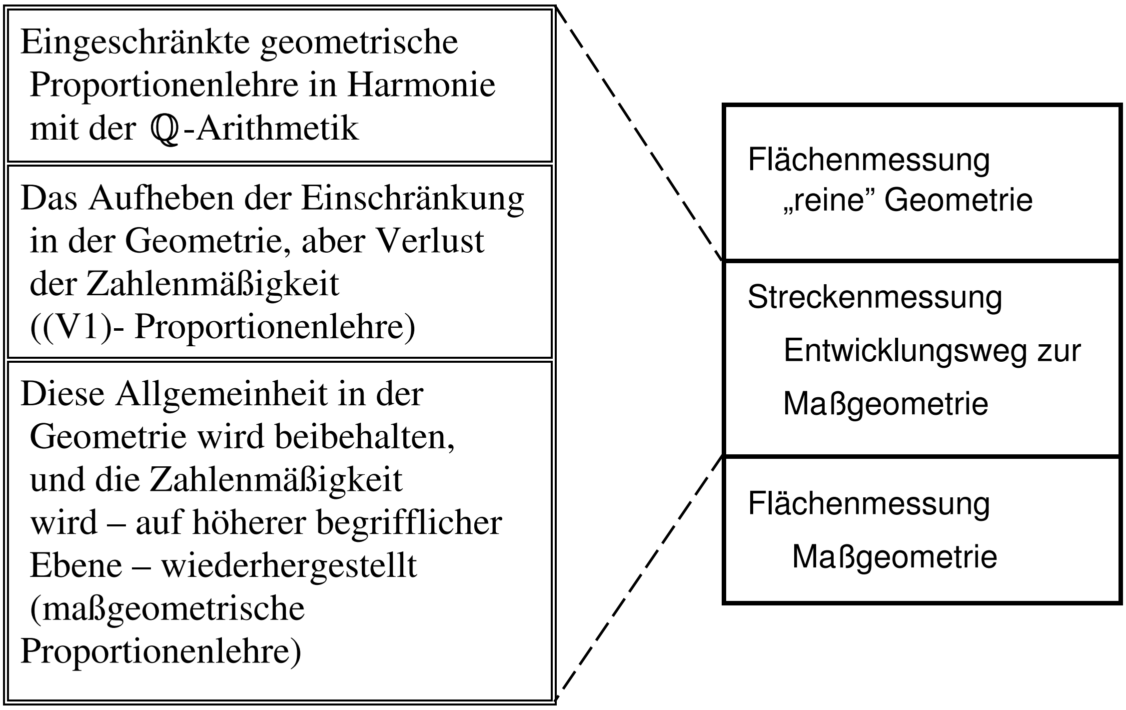
Das formale Gerüst dieses Beweises stimmt mit jenem der Herleitung des Kleinen Desarguesschen Satzes vom Strahlensatz. Der inhaltliche Unterschied ist aber bedeutend, da wir uns hier auf der Basis der natürlichen Zahlen bewegen. Darin erscheint ein starkes Motiv für den Satz (V1) $\Leftrightarrow$ (G) und überhaupt für den Begriff (V1).

8 Über weitreichende Zusammenhänge und „Strategien"

8.1 In dieser skizzenhaften Übersicht können die umfassenden Untersuchungen in den hier berührten Gebieten unmöglich lückenlos dargestellt werden. Das soll der Gegenstand von Publikationen größeren Umfangs sein. Insbesondere können wir nicht auf die vielschichtigen Möglichkeiten eingehen, die Gnomon-Geometrie als Mittel der Vereinheitlichung – im Sinne des „Fundamentale Idee"-Prinzips – in der Schulmathematik wirken zu lassen; tatsächlich können viele Inhalte der gewohnten Schul-Geometrie und noch vieles andere aus der Elementargeometrie durch diesen „roten Faden" verbunden werden.

8.2 Auch die vielfältigen und durchaus nicht einfachen didaktischen Probleme des Begriffs der reellen Zahl sollen in dieser Konzeption nach prinzipienbfesten Strategien behandelt werden, u. zw. nicht nur auf dem Gebiet der Geometrie, sondern auch im Rahmen mehrerer Disziplinen der Schulmathematik, wie Arithmetik, Logarithmus, Algebra und Analysis.

8.3 Die folgenden beiden Tabellen beziehen sich nur auf die in diesem Beitrag behandelten Gegenstände, sie dürften aber einen Einblick in die Art dieser Strategischen Linien gewähren. In diesen strategischen Linien der Be-griffsentwicklungsprozesse deutet sich ein dialektischer Wesenszug an, den wir hier nicht weiter erörtern, um uns nicht im Philosophischen zu verlieren.



9 Ein „taktisches” Mittel

Zum Abschluss dieser “strategischen” Überlegungen stellen wir noch eine eher “taktische” Überlegung an.

9.1 Wir fügen in der kongruenzgeometrischen Phase des Entwicklungsganges des Flächeninhaltsbegriffs und des Streckenlängenbegriffs immer wieder Ausblicke auf die Maßgeometrie ein und stellen die Frage, wie sich das jeweilige Problem gestaltet, wenn wir es auf der Grundlage der Maßgeometrie formulieren; das Problem erweist sich in jeder solchen Situation als „Banalität”. Das bedeutet aber nicht, dass es eine problemlose Sache ist, sondern dass die begrifflichen Schwierigkeiten im Begriff des zahlenmäßigen Inhalts eingebunden sind und so bei dem sorglosen Umgang mit den reellen Zahlen und den geometrischen Maßbegriffen umgangen werden.

9.2 Es ist also nur Schein, dass etwa die Aussage “aus *a gemessen mit b gleich c gemessen mit d* folgt *a gemessen mit c gleich b gemessen mit d*” – wo die Buchstaben Strecken bedeuten – eine “Trivialität” ist (was – offen oder unterschwellig – damit begründet wird, dass “wie wir schon lange wissen” $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, wenn $b,c,d\neq 0$). *Der Lernende wird damit getäuscht, dass ein Problem unproblematisch wird, wenn man einen Umweg über nicht hinreichend begründete Begriffe macht.*

9.3 Man könnte etwa das Symbol $a'::a=b'::b$ benutzen zum Ausdruck dafür, dass die Streckenpaare $(a;a')$ und $(b;b')$ svg sind; die Symbole $a'::a$ und $b'::b$ haben an sich keine Bedeutung. (In einer späteren Phase – wir behandeln sie weiter unten etwas ausführlicher – könnten wir dem Symbol $a'::a$ auch für sich einen Sinn verleihen, indem wir vereinbaren, dass es für den zu dem Streckenpaar $(a;a')$ gehörenden unendlichen Dezimalbruch stehen soll.

9.4 All dies bedeutet aber noch lange nicht, dass die Strecken (aufeinander bezogen) „Maß*zahlen*" haben; das ist in dieser Phase eher eine Wunschvorstellung.
Wären a, a', b und b' von 0 verschiedene positive reelle Zahlen (sie können auch die Maßzahlen von Strecken sein), so hätten wir

$$a:a'=b:b' \overset{\text{(I)}}{\Leftrightarrow} a':a=b':b \overset{\text{(II)}}{\Leftrightarrow} a':b'=a:b \left(\overset{\text{(III)}}{\Leftrightarrow} ab'=a'b\right),$$

allerdings für nicht-rationale Zahlen nur auf Grundlage eines großen, verwickelten Apparats, der uns noch nicht zur Verfügung steht. Die entsprechenden kongruenzgeometrischen Aussagen

$$a::a'=b::b' \overset{(1)}{\Leftrightarrow} a'::a=b'::b \overset{(2)}{\Leftrightarrow} a'::b'=a::b \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \ ?\ *$$

lassen sich aber „rein geometrisch" erkennen, deuten und beweisen. (Wir müssen hier die entsprechenden Überlegungen und Beweise überspringen.)

* Die Äquivalenz (2) entspricht jenem Satz der Proportionenlehre nach Eudoxos, der in den *Elementen* Euklids (Satz V. 16) so formuliert ist: „*Stehen vier Größen in Proportion, so müssen sie auch vertauscht in Proportion stehen*". Def. V, 12: „Verhältnis mit <u>*Vertauschung*</u> ist die Inbeziehungsetzung von Vorderglied zu Vorderglied und von Hinterglied zu Hinterglied". (Zitiert aus der Thaerschen Ausgabe – s. die Anmerkung * zu 6.1 – Seiten 103 und 92.)

9.5 Mit diesen Ausblicken verfolgen wir mehrere Prinzipien.

Das erste Prinzip ist natürlich die begriffliche Klarheit durchgehend zu wahren.

Zweitens wird dadurch im Laufe der Entwicklung ein *Ziel* vor Augen gehalten, das geeignet ist, viele Einzelheiten eines langen Prozesses zu bündeln. Wichtig ist auch, dass sich dieses Ziel wünschenswert zeigt (es wird immer wieder ganz konkret darauf hingewiesen, welchen Nutzen es bringen würde, wenn wir es schon erreicht hätten).

Drittens dient diese Taktik dem Aufrechterhalten einer psychischen Spannung, die dem Lernenden gefühlsmäßig die Kraft zum Durchhalten in einem langen Arbeitsprozess verleihen soll.

9.6 Dass die geometrischen Maßbegriffe hier lange Entwicklungsprozesse hindurch als nicht-fertig gelten, bedeutet nicht, dass sie "unterwegs" nicht gebraucht werden dürfen oder überhaupt zu verschweigen sind. Wir wollen mit offenen Karten spielen und dem Lernenden Einblick in unsere Strategie gewähren; d. h. wir wollen nicht so tun, als wüssten wir nicht, dass die Schüler z. B. die *Vorstellung* der zahlenmäßigen Länge präsent haben. Es soll klargemacht werden, dass es uns auf die Mathematisierung von prämathematischen Vorstellungen ankommt.

10 Auf dem Weg zu den unendlichen Dezimalbrüchen als Zahlen

10.1 Dem Prinzip (V1) folgend führt von (V3) ein verzweigtes System von Wegen zum üblichen Verfahren des Vergleichs von Streckenpaaren, d. h. zum „zahlenmäßigen Messen" (besser: zur „zahlenmäßigen" Deutung) von Streckenverhältnissen.
Die Streckenverhältnisse selbst können nämlich bei (V3) mit unendlichen Dezimalbrüchen repräsentiert werden, deren endliche Abschnitte in den einzelnen Schritten des Messungsvorgangs erscheinen (s. das Beispiel in Abb. 14).

$$
\begin{array}{lcl}
2\cdot\frac{a}{10^0}\le a'<3\cdot\frac{a}{10^0} & \longrightarrow & 20\cdot\frac{a}{10^1}\le a'<30\cdot\frac{a}{10^1} \\
 & \swarrow & \\
25\cdot\frac{a}{10^1}\le a'<26\cdot\frac{a}{10^1} & \longrightarrow & 250\cdot\frac{a}{10^2}\le a'<260\cdot\frac{a}{10^2} \\
 & \swarrow & \\
250\cdot\frac{a}{10^2}\le a'<251\cdot\frac{a}{10^2} & \longrightarrow & 2509\cdot\frac{a}{10^3}\le a'<2510\cdot\frac{a}{10^3} \\
 & \swarrow & \\
2509\cdot\frac{a}{10^3}\le a'<2510\cdot\frac{a}{10^3} & \longrightarrow & 25090\cdot\frac{a}{10^4}\le a'<25100\cdot\frac{a}{10^4} \\
 & \swarrow & \\
25097\cdot\frac{a}{10^4}\le a'<25098\cdot\frac{a}{10^4} & \longrightarrow & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Abb. 14

Das Verfahren geht nach den Pfeilen voran, wobei sich ständig Äquivalenz- und Verschärfungsschritte abwechseln. Wir haben es mit einer Intervallschachtelung zu tun, was nicht für jede beliebige Folge $n_1 < n_2 < \ldots$ im Sinne von (V2) oder (V4) der Fall ist.

10.2 Das entscheidende Moment ist jene Besonderheit, die wir – da es keine Standarbezeichnung gibt – die *Stabilität der Dezimalen* nennen wollen: Die k-stellige Dezimalzahl aus dem jeweiligen k-ten Schritt ist zugleich der k-stellige Abschnitt jener $(k+1)$-stelligen Dezimalzahl, die sich im nächsten Schritt ergibt; es kommt bloß eine weitere Ziffer hinzu. So entwickelt sich gesetzmäßig und eindeutig ein unendlicher Dezimalbruch, der zum Streckenpaar $(a'; a)$ gehört (Abb. 14).

2
2,5
2,50
2,509
2,5097
....

10.3 Da wir eine Harmonisierung von Geometrie und „Arithmetik" anstreben, ist es unumgänglich, auch der umgekehrten Frage nachzugehen: gehört jeder („positive") unendliche Dezimalbruch zu einem Streckenpaar (und daher offensichtlich zu unendlich vielen)?
Die bejahende Antwort kann unschwer aus dem Vollständigkeitsaxiom (etwa in der Form, dass auf der Geraden jede Intervallschachtelung einen Kern hat) abgeleitet werden.

10.4 (a) Im Unterricht werden die unendlichen Dezimalbrüche meistens völlig unbegründet als „Zahlen" hingestellt.
(b) Von den vielen nötigen Strukturen auf der als Grundmenge (eines Modells des reellen Zahlkörpers) behandelten Menge der unendlichen Dezimalbrüche, kann hier wenigstens die (lexikographische) Anordnung den Lernenden nahe gebracht werden, u. zw. in einem inhaltlich-begrifflich reichhaltigen, von der Geometrie her motivierten Kontext.
(c) Der Begriff (V1) induziert nämlich unmittelbar den Gedanken, wie neben die Streckenverhältnis*gleichheit* eine Größer-Relation gestellt werden kann: „Das Verhältnis von von b' zu b ist größer als jenes von a' zu a, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass beim Messen von a' mit $\frac{a}{n}$ und von b' mit $\frac{b}{n}$ $(n = 1, 2, ...)$ der Quotient bei dem Paar (b', b) größer ist. (Geometrisch entspricht dem die Art der Nichtparallelität von $A'B'$ und AB in Abb. 15 (vgl. auch die Abbildungen 4 und 5 unter 3.2), woraus auch erhellt, dass das Verhältnis von von b' zu b nicht größer und zugleich kleiner als jenes von a' zu a sein kann.)
(d) Von (V3) ausgehend gestaltet sich die Sache so: Zu jedem geordneten Streckenpaar gehört eindeutig ein unendlicher Dezimalbruch – womit der entscheidende Schritt zum zahlenmäßigen Messen einer Strecke mit einer anderen Strecke getan ist –, und der Vergleich von Streckenpaaren beruht auf der üblichen (lexikographischen) Ordnung der unendlichen Dezimalbrüche.

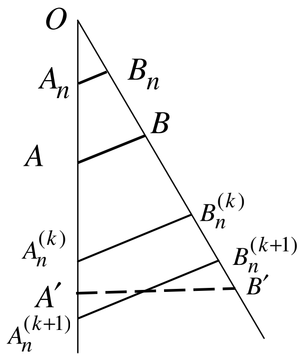
$OA = a$

$OA' = a'$

$OA_n = \frac{a}{n}$

$OA_n^{(k)} = k \cdot \frac{a}{n}$

$OA_n^{(k+1)} = (k+1) \cdot \frac{a}{n}$



$OB = b$

$OB' = b'$

$OB_n = \frac{b}{n}$

$OB_n^{(k)} = k \cdot \frac{B}{n}$

$OB_n^{(k+1)} = (k+1) \cdot \frac{b}{n}$

Abb. 15

10.5 Auch von anderen nötigen Strukturen kann wenigstens ein Bild vermittelt werden. Z. B. kann die Addition im Bereich der (vorläufig positiven) unendlichen Dezimalbrüche von einem geometrischen Problemfeld her nicht nur motiviert, sondern auch definiert werden. Eine der Fragen aus diesem Problemfeld ist: Angenommen, dass sich aus der Messung von a mit c bzw. von b mit c der unendliche Dezimalbruch δ_1 bzw. δ_2 ergibt, soll der unendliche Dezimalbruch für die Messung von $a+b$ mit c ermittelt werden. Das führt zur Entdeckung einer Definition der Addition von zwei (positiven) unendlichen Dezimalbrüchen (wobei dann auch die Kommutativität und die Assoziativität dieser Operation nachgewiesen werden sollte).

10.6 (a) Dabei könnten unendliche Dezimalbrüche vom Typus $8{,}72\dot{9}$ Schwierigkeiten bereiten, und in dieser Beziehung ist es wichtig zu wissen, dass solche unendlichen Dezimalbrüche im beschriebenen Messungsvorgang niemals auftreten können. (Führt also die Messung von a mit c bzw. von b mit c zu $1{,}2\dot{4}\dot{3}$ bzw. $5{,}1\dot{5}\dot{6}$, so ergibt die Messung von $a+b$ mit c nicht etwa $6{,}3\dot{9}$, sondern 6,4.) Der im Kasten rechts angedeutete (indirekte) Beweis kann als allgemein gültig betrachtet werden; er ist formal gesehen derselbe wie der Beweis dafür, dass sich bei dem üblichen Algorithmus der schriftlichen Division einer natürlichen Zahl durch eine andere niemals ein solcher unendlicher Dezimalbruch ergibt (wobei die *arithmetische* Version des Archimedischen Axioms benutzt wird), und dies kann auch für alle Algorithmen, die durch Intervallschachtelung im Bereich der endlichen Dezimalbrüche – als den Kern der Schachtelung – einen unendlichen Dezimalbruch hervorbringen, ähnlich gezeigt werden.

$8{,}72 \cdot b \le a < 8{,}73 \cdot b$
$8{,}729 \cdot b \le a < 8{,}730 \cdot b$
$8{,}7299 \cdot b \le a < 8{,}7300 \cdot b$
. . . .
$8{,}73 \cdot b - a < 10^{-n} \cdot b,$
$10^n \cdot (8{,}73 \cdot b - a) < b$
$(n = 2, 3, 4, ...)$
widerspricht dem (geometrischen) Archimedischen Axiom

(b) Dieser Gegenstand wird im Unterricht sozusagen nie gewissenhaft behandelt, und es herrscht daher auch große Unklarheit darüber. Am einfachsten wäre es, diese unendlichen Dezimalbrüche auszuschließen, und für das Modellieren des reellen Zahlkörpers das reduzierte System als Grundmenge zu nehmen. Die *Möglichkeit* dazu geht aus der vorigen Überlegung hervor. Es ist aber auch *notwendig*, da z. B. den Elementen $8{,}72\dot{9}$ und $8{,}73$, die nach der lexikographischen Ordnung verschieden sind, nach der Metrik kein positiver Abstand zugeschrieben werden kann; diese beiden Strukturen wären also inkompatibel. (Es ist auch absurd und wird der Harmonisierung von Arithmetik und Geometrie nicht gerecht, dass die geordnete Menge aller unendlichen Dezimalbrüche Sprünge – im Dedekindschen Sinne – aufweist.

11 Schlussbemerkung

11.1 (a) Der Streckenverhältnisgleichheits-Begriff unter 2.1 taucht – in der Formulierung (V1) oder (V3) – dann und wann in der mathematikdidaktischen Literatur oder in Lehrbüchern auf. Wir führen zwei Beispiele an.

(b) Das anspruchsvolle Buch von Émile Borel (deutsche Ausgabe von Paul Stäckel: *Elemente der Mathematik*, zwei Bände, zweite Auflage, Teubner 1920) zeichnet sich durch den hohen Grad der „Natürlichkeit" und Anschaulichkeit aus; die besagte Definition (im 2. Band, S. 171) steht aber für sich ohne besondere systembildende Funktionen.

(c) „There were, in the first place, different schemes for rearranging and symplifying Euclid's book V. According to Euclid four magnitudes, *a*, *b*, *c*, *d*, are in proportion, when for any integers *m* an *n*, we have simultaneously $ma\left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\}nb$ and $mc\left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\}nd$. A definition of proportion adopted by the Italians Sannia and D'Ovidio was considered, according to which parts are substituted for multiples, viz. *a*, *b*, *c*, *d*, are in proportion, if, for any integer *m*, *a* contains $\frac{b}{m}$ neither a greater nor a less number of times than *c* contains $\frac{d}{m}$."

Das Buch von A. Sannia und E. D'Ovidio liegt uns nicht vor. Das Zitat entnehmen wir aus dem Buch von F. Cajori: *A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching*, Macmillan 1896, Revised and enlarged edition 1917 (Seiten 286–287). Es bezieht sich auf den wichtigen Beitrag Augustus de Morgans: *The Connection of Number and Magnitude: An Attempt to Explain the Fifth Book of Euclid* (1836; 1837 als

Anhang zu seinem Buch *Elements of Trigonometry*) zu den Bestrebungen in Deutschland, England und Italien (im 18. und im 19. Jahrhundert), die *Elemente* von Euklid – insbesondere das V. Buch – für Unterrichtzwecke neu zu gestalten.