Stephanie SCHULER, Schwäbisch Gmünd

Was können Mathematikmaterialien im Kindergarten leisten? – Kriterien für eine gezielte Bewertung

1. Einleitung

In Fachzeitschriften für Erzieherinnen und bei Verlagen findet man zahlreiche Vorschläge, wie und womit mathematische Bildung im Kindergarten gestaltet werden kann. Gleichzeitig werden in der Literatur Vorläuferfähigkeiten genannt, die Kinder im Vorschulalter erwerben sollen. Doch mit welchem Material kann *was* gelernt werden? Welche Materialien und Lernangebote genügen mathematikdidaktischen Gesichtspunkten sowie den Anforderungen früher (mathematischer) Bildung?

Im Folgenden soll zunächst der Begriff Vorläuferfähigkeiten in Bezug auf den Zahlbegriff in seiner historischen Entwicklung dargestellt und darauf aufbauend für diesen Beitrag genauer gefasst werden. Nach einem Überblick über verschiedene Ansätze zur frühen mathematischen Bildung werden Kriterien vorgestellt, die der Analyse des mathematischen Bildungsgehalts von Materialien dienen und deren Bewertung ermöglichen. Die Möglichkeiten und Grenzen dieses Katalogs werden in einem letzten Schritt anhand erster Daten aus einer Pilotstudie in einer Kindertagesstätte diskutiert.

2. Stand der Forschung – Vorläuferfähigkeiten

> „Deutlicher als 1970 ist inzwischen im Blick, dass sich die Kompetenzen der Heranwachsenden in Zeiträumen entfalten, die in der frühen Kindheit beginnen und weit über die Grundschule hinausreichen. [...] Paradebeispiel dafür sind die phonologische Bewusstheit […] und die frühe Zahlbegriffsentwicklung. Während der Kindergartenzeit entwickeln sich die entscheidenden Vorläuferfähigkeiten für die schulischen Lernprozesse“ (Faust-Siehl 2001, 74).

Wenn also von Vorläuferfähigkeiten die Rede ist, dann geht es um Fähigkeiten, die als eine Voraussetzung für schulisches Lernen angesehen werden und bereits im Kindergarten erworben bzw. gefördert werden sollen. Für den Erwerb des Zahlbegriffs lassen sich in der Literatur zahlreiche Vorläuferfähigkeiten[1] finden, die sich über die Zeit verändert und weiter-

[1] Vorläuferfähigkeiten beschränken sich nicht auf den Zahlbegriffserwerb (vgl. Peter-Koop & Grüßing 2007, 154 u. 161f), sind aber in diesem Bereich am besten ausgearbeitet und empirisch fundiert (vgl. Krajewski 2003).

entwickelt haben. Diese historische Entwicklung soll im Folgenden exemplarisch nachgezeichnet werden.

Nach Piaget (1964, 50ff) entwickelt sich der Zahlbegriff auf der Grundlage von logisch-formalen Operationen wie Seriation, Klassifikation, Eins-zu-Eins-Zuordnung und Zahlinvarianz. Das Zählen hingegen leistet in seinen Augen keinen Beitrag zur Zahlbegriffsentwicklung, „da das laute Zählen erst dann eine wirklich numerische Bedeutung erlangt, wenn die Operationen im praktischen Bereich [Herstellung operatorischer Korrespondenz] logisch konstituiert worden sind“ (Piaget & Szeminska 1972, 100). Logisch-formale Operationen sind erst im konkret-operativen Stadium, also mit der Einschulung, verfügbar. Diese Aussagen schlugen sich didaktisch in der vorschulischen und schulischen Mengenlehre der 70er Jahre nieder (vgl. z.B. Neunzig 1972).

Gelman und Gallistel (1978) stellten Ende der 70er Jahre im Unterschied zu Piaget die Bedeutung des Zählens für den Zahlbegriffserwerb heraus: Zählen geht demnach der Zahlinvarianz voraus und kann diese unterstützen (vgl. auch Clements 1984, 772ff). Sie stellten zudem generell in Frage, ob die Zahlvarianz den Erwerb des Zahlbegriffs anzeige (vgl. Gelman & Gallistel 1978). Während Gelman und Gallistel von angeborenen Zählprinzipien ausgingen, wurde dies von anderen Forschern bestritten. So vertritt Fuson (1988, 34–60) die Auffassung, dass Zählfertigkeiten nicht angeboren sind, sondern erworben werden. Sie unterscheidet fünf Ebenen des Erwerbs von Zählfertigkeiten. Gleichzeitig wurde in Habituierungsexperimenten nachgewiesen, dass bereits Säuglinge Unterschiede zwischen Mengen wahrnehmen können (vgl. z.B. Starkey & Cooper 1980). Und schon bei Kleinkindern kann von einer Subitizing-Kapazität, d.h. einer Anzahlerfassung ohne Zählen, von drei Elementen ausgegangen werden (für einen detaillierten Überblick siehe Krajewski 2003, 43–56).

Resnick (1989) hat in der Folge herausgearbeitet, dass sich das vorsprachliche Mengenwissen – wie Subitizing und die wahrnehmende Unterscheidung hinreichend verschieden großer Mengen – durch die Sprache zu protoquantitativen Schemata weiterentwickelt.[2] Entscheidend für ein echtes Zahlkonzept ist nach ihm die Verknüpfung dieser Schemata mit dem Zählen, da erst das Zählen eine genaue Bestimmung der Anzahl von Elementen einer Menge ermöglicht. Kennzeichen eines echten Zahl-

[2] Resnick (1989, 162f) unterscheidet drei protoquantitative Schemata (Vergleichsschema: Vergleich zweier Mengen mit den Begriffen mehr und weniger), Zunahme-Abnahme-Schema (Zu-/Abnahme einer Menge mit den Begriffen mehr/weniger als vorher), Teil-Ganzes-Schema (Mengen in Teile zerlegen und wieder zu einem Ganzen zusammensetzen).

konzepts ist das numerische Teil-Ganzes-Schema, das aus einer Verknüpfung von Zählen, simultaner Anzahlerfassung und dem Vergleich von Mengen hervorgeht (vgl. Resnick 1989, 162 ff; vgl. auch Krajewski 2003, 56f; Krajewski & Schneider 2006, 250). Dieses sogenannte Skills-Integration-Modell (vgl. Clements 1984, 766), die Integration von zunächst getrennten Teilfertigkeiten zu einem echten Zahlkonzept, findet in den 90er Jahren Eingang in die deutsche Mathematikdidaktikforschung. So beschreiben beispielsweise Gerster und Schultz (1998) den Weg vom Zählen zum Rechnen als notwendigerweise über die Anzahl gehend. Zentrales Veranschaulichungsmittel ist für sie das Zehnerfeld, das die simultane Anzahlerfassung strukturierter Mengen bis 10 sowie deren Zerlegungen und Ergänzungen zur 10 aufbauen soll (vgl. Gerster & Schultz 1998, 329ff; vgl. auch Flexer 1986; Schütte 2004b).

Der Aufbau des Zahlbegriffs als ein Zusammenspiel verschiedener Teilfertigkeiten wird von Lorenz (2005a, 29) um die visuell-räumliche Komponente von Zahlen erweitert. Mathematische Basiskompetenzen sind demnach das Zählen, das Subitizing und das visuelle Operieren. Unter Rückbezug auf das Triple-Code-Modell (vgl. Dehaene 1992, 31)[3] und dessen Untersuchungen zu Zahlenraumvorstellungen von Erwachsenen[4], begründet Lorenz die Betonung des relationalen Zahlaspekts[5] gegenüber dem kardinalen und ordinalen Aspekt wie folgt:

> „Wenn Zahlen im Denken nicht durch Mengen repräsentiert werden, sondern durch (räumlich-geometrische) Beziehungen, dann spielen die klassischen Zahlaspekte (kardinaler, ordinaler Zahlaspekt) nur eine untergeordnete Rolle“ (Lorenz 2006, 56).

Erwachsene beschreiben ihre mentale Repräsentation von Zahlen häufig als lineare Anordnung in einem vorgestellten Zahlenraum. „Die Zahl ‚18‘ wird nicht als isolierte Menge gedacht (‚gesehen‘), sondern auf einem imaginierten Zahlenstrahl verortet, d.h. sie wird als zwischen 10 und 20 liegend vorgestellt, hierbei näher an 20“ (Lorenz 2006, 56; vgl. auch Dehaene 1999,

---

[3] Die Zahlenverarbeitung und damit ihre Repräsentation findet nach Dehaene (1992) in drei Formen statt: Wortform, Ziffernform und ungenaue Menge. Echtes numerisches Wissen besteht in der flexiblen Übertragung zwischen den Repräsentationsformen, also ähnlich wie beim Skills-Integration-Modell in der Verknüpfung der ungenauen Mengenwahrnehmung mit der Zahlwortreihe und den Ziffern.

[4] Hierzu ist kritisch anzumerken, dass sich die Untersuchungen zur Zahlenraumvorstellung ausschließlich auf Erwachsene beziehen und nicht zwangsläufig mit noch im Aufbau befindlichen Zahlenraumvorstellungen von Kindern, übereinstimmen müssen (vgl. Dehaene 1999, 79ff).

[5] Lorenz beschreibt diesen Aspekt als „die Idee der relativen Position [einer] Zahl zur Eins oder zu anderen herausragenden Zahlen“ (Lorenz 2005b, 170; vgl. auch Stern 1998, 75ff).

97ff). Im Anfangsunterricht ist folglich der Rechenstrich ein Veranschaulichungsmittel von zentraler Bedeutung, da es die räumlichen Beziehungen von Zahlen in den Vordergrund stellt. Im vorschulischen Bereich spielen visuelle und räumliche Vorläuferfähigkeiten eine entscheidende Rolle (vgl. Lorenz 2006, 57ff):

- Visuelles Gedächtnis (Informationen visuell speichern)
- Räumliche Orientierung (Wahrnehmung räumlicher Beziehungen und der Raumlage)
- Visuelle Differenzierung (Unterschiede, Ähnlichkeiten wahrnehmen)
- Figur-Grund-Diskrimination (Teilfiguren aus einem komplexem Hintergrund erkennen und isolieren)
- Auge-Hand-Koordination (Koordination von Sehen und Körperbewegung)

Die psychologische Forschung befasst sich schon seit längerem mit Schwierigkeiten beim Lesen und Schreiben Lernen und seit einigen Jahren auch mit der Entstehung von Schwierigkeiten beim Rechnen Lernen (vgl. z.B. Schneider 1989; Krajewski 2003, Krajewski & Schneider 2006). So ist es Schneider und Krajewski ein zentrales Anliegen, spezifische Vorläuferfertigkeiten[6] zu benennen. Spezifische Vorläuferfertigkeiten unterscheiden sich von unspezifischen dadurch, dass sie *entweder* für die Vorhersage einer Lese-Rechtschreibschwäche *oder* für die einer Rechenschwäche geeignet sind, aber nicht für beides. Für die späteren Mathematikleistungen in der Grundschule nennt Krajewski (2003, 202ff) folgende spezifischen Vorläuferfertigkeiten:

- Zahlenvorwissen (Zählfertigkeiten, arabisches Zahlwissen, erstes Rechnen)
- Mengenvorwissen (Seriation, Mengenvergleich)

Als unspezifische Vorläuferfertigkeiten werden folgende angeführt:

---

[6] Im Unterschied zur mathematikdidaktischen Forschung wird in der Psychologie von Vorläuferfertigkeiten statt von Vorläuferfähigkeiten gesprochen. Der Begriff ‚Fertigkeiten' betont die Automatisierung, die schnelle Abrufbarkeit und die Entlastung des Gedächtnisses als eine Voraussetzung für Verstehensprozesse (vgl. z.B. Stern 2007, 100f). Der Begriff ‚Fähigkeiten' ist assoziiert mit operativem Üben, beweglichem Denken und Verständnis (vgl. Padberg 1992, 265). Fertigkeiten sollten sich aus Fähigkeiten entwickeln, um verständnisvolles Lernen zu gewährleisten. Nicht alle Fähigkeiten müssen automatisiert werden. Jedoch scheint es hier in Bezug auf die frühe arithmetische Bildung keinen Konsens zu geben.

- Zahlenverarbeitungsgeschwindigkeit (Würfelbilder lesen, Ziffern lesen, Zahlen verbinden)
- Gedächtniskapazität (Zahlen nachsprechen, Anzahlerfassung, nachklopfen)

Die räumliche Vorstellung, in Krajewskis Untersuchung angenommen als unspezifische Vorläuferfertigkeit, konnte als solche nicht durchgängig bestätigt werden (vgl. Krajewski 2003, 168 ff). Dieses Ergebnis steht im Widerspruch zu den Annahmen von Lorenz (2005a). Ein Förderprogramm, das auf obiger Untersuchung fußt, bezieht lediglich spezifische Vorläuferfertigkeiten ein (vgl. Krajewski, Nieding & Schneider 2007).

Aufgrund der bisherigen Ausführungen ergibt sich für die mathematische Förderung im Kindergarten folgender Katalog an Vorläuferfähigkeiten:

- Vergleichen von Mengen (umfasst Eins-zu-Eins-Zuordnung, Seriation, Klassifikation)
- Zählen (verbale Zählfertigkeiten), Abzählen von Objekten (mit und ohne Zeigen)
- Simultanerfassung[7] kleiner Mengen bis 4 und Quasi-Simultanerfassung strukturierter Mengen
- Teil-Ganzes-Beziehungen (Zusammensetzung und Zerlegung von Anzahlen aus Teilmengen) und erstes Rechnen (in konkreten alltäglichen Situationen)

Die Auswahl soll an dieser Stelle kurz erläutert werden. Der obige Katalog greift aus der dargestellten zeitlichen Entwicklung von Vorläuferfähigkeiten im Hinblick auf den Zahlbegriff und das Rechnen die wesentlichen Schnittpunkte heraus. Der Mengenvergleich schließt die logischen Operationen nach Piaget mit ein. Da die Zahlinvarianz dem Zählen nach heutigem Forschungsstand nachfolgt und sich aus Zählaktivitäten entwickelt (vgl. Peter-Koop & Grüßing 2007, 158f; Clements 1984, 772ff) wurde sie nicht als Vorläuferfähigkeit aufgenommen.

Das Zählen, das zwar an sich noch nicht auf ein echtes Zahlkonzept hindeutet, soweit der heutige Konsens mit Piaget (vgl. z.B. Lorenz 2005, 40; Peter-Koop & Grüßing 2007, 160), gilt sowohl im Modell der Integration von Teilfertigkeiten als auch in der empirischen Studie von Krajewski (2003) als eine zentrale Vorläuferfähigkeit. Die Verknüpfung von Mengenvergleich und Zählfertigkeiten über die visuell-gliedernde Mengenerfas-

[7] Simultanerfassung ist gleichbedeutend mit Subitizing, steht also für eine Anzahlerfassung „auf einen Blick“ ohne Zählen.

sung zum numerischen Teil-Ganzes-Schema liegt nicht nur den beiden eben erwähnten Ansätzen zugrunde[8], sondern findet auch eine Entsprechung im Relationalzahlaspekt bei Lorenz (2005; 2006) und ist somit auch hier anschlussfähig.

3. Aktuelle Ansätze zur frühen Bildung

Vorläuferfähigkeiten bieten einen wichtigen Anhaltspunkt, um vorhandene Vorschläge zur frühen arithmetischen Bildung zu bewerten. Doch bevor Materialien auf ihren Gehalt an Vorläuferfähigkeiten analysiert werden sollen, können erste Unterscheidungen bereits auf einer konzeptionellen Ebene getroffen werden:

- *Lehrgang* versus *offenes Angebot*
- Förderung von *Risikokindern* versus *breite Förderung* aller Kinder
- Förderung ausschließlich *spezifischer* versus Förderung auch *unspezifischer Vorläuferfertigkeiten*
- Mathematik als *Bestandteil des Kindergartenalltags* versus Schaffung einer eigenständigen *mathematischen Fantasiewelt*
- Förderung speziell des *Zahlbegriffs* versus breite Förderung *verschiedener Inhaltsbereiche*

Diese konzeptuellen Aspekte stützen sich auf implizite und explizite Charakteristika der nachfolgenden Materialien, Überlegungen zum Bildungsauftrag und die pädagogische Praxis in Kindertagesstätten.

3.1 Lehrgangsorientierte Förderprogramme

Lehrgangsorientierte Förderprogramme wie „Mengen, zählen, Zahlen“ (Krajewski, Nieding & Schneider 2007) oder „Zahlenland“ (Preiß 2004; 2005; Friedrich & de Galgoczy 2004) zeichnen sich durch eine *sequenziell gestufte Einführung der Zahlen bis 10* aus. Beim ersten Programm sollen kurz vor oder zu Schulbeginn *spezifische Vorläuferfertigkeiten* wie Zählfertigkeiten, die Mengenbewusstheit von Ordinalzahlen und der Vergleich und die Zerlegung von Mengen bei *Risikokindern* gezielt gefördert werden.

[8] Bei Krajewski (2003) ist die Anzahlerfassung zwar keine spezifische Vorläuferfähigkeit, über die Gedächtniskapazität aber eine unspezifische.

Dazu wurden von den Autoren Materialien[9] und Vorschläge zur Gesprächsführung entwickelt, an die sich die Erzieherinnen halten sollten.

Beim zweiten Programm „Zahlenland“, das es in zwei leicht abweichenden Versionen gibt, steht die aspektreiche, spielerische Einführung der Zahlen im vorletzten Kindergartenjahr (*alle Kinder* ab 4 Jahre) im Vordergrund, wobei der Ordinalzahlaspekt die größte Aufmerksamkeit erfährt (Übungen auf dem Zahlenweg). Andere Zahlaspekte werden im Zahlenhaus durch eigens entwickelte Materialien angesprochen[10], die konkrete Umsetzung wird ebenfalls durch vorgegebene Gesprächsdialoge unterstützt. „[Die Aktivitäten] wirken […] in ihrer Gesamtheit trotz ihres spielerischen Zugangs und sehr geeigneter einzelner Materialien (Zahlenweg) eher verschult“ (Grüßing & Peter-Koop 2007, 181). Kritisch wird nicht nur der eher *schulische Charakter*, sondern auch die *Konzentration auf die Arithmetik* und die Erzeugung problematischer Bilder von Mathematik gesehen. Als problematisch werden ferner einzelne Äußerungen wie „Seid freundlich zu den Zahlen, dann sind die Zahlen auch freundlich zu euch“ beurteilt (vgl. Grüßing & Peter-Koop 2007, 181), die *animistische Vorstellungen* bei den Kindern unterstützen können.

3.2 Punktuell einsetzbare Materialien

Materialien wie „Das kleine Zahlenbuch“ I und II (Müller & Wittmann 2002; 2004), „Die Käferschachtel“ (Royar 2007) sowie gängige Gesellschaftsspiele[11] können auf unterschiedliche Art und Weise eingesetzt werden. Ihr Einsatz ist durch die Autoren nicht durchgängig vorgeschrieben. Ziel ist die *breite Förderung* aller Kinder. Die Materialien können als *offenes Angebot* im Freispiel oder als eher *angeleitete Tätigkeit* in einer Kleingruppe zum Einsatz kommen. Es ist eine Variation der Gruppengröße, des Gruppenalters, der Zeitdauer, des Zeitpunkts, der Intensität und auch

[9] Wesentliches Veranschaulichungsmittel ist die Zahlentreppe, durch die die aufsteigende Zahlenfolge und der Mengenvergleich veranschaulicht werden soll. Wie bei den Cuisenairestäben der 70er Jahre ist aber die Mächtigkeit der Menge nur in Relation zu den anderen Mengen sichtbar und nicht an sich. Weitere bildliche Darstellungen von Anzahlen wie Uhrabschitte, der Zahlenstrahl und Punktanordnungen ohne eindeutige Gliederungshilfen und Ergänzungen zur 10, erschweren die simultane Anzahlerfassung.

[10] Punktbilder nach Würfel- und Dominoanordnungen, Würfeltürme, geometrische Formen der Ebene und des Raumes, charakteristische Zahlbilder in der Umwelt; insbesondere die geometrischen Veranschaulichungen erschweren bei Anzahlen größer als 6 die simultane Anzahlerfassung.

[11] „Mensch ärgere dich nicht“, „Speed“, „Halli Galli“, „Hamstern“, „Elfer raus“, „Domino“.

der Spielregeln möglich. Alle Materialien sind weitgehend auf den *Zahlbegriffserwerb* ausgerichtet.

Die Spiele in „Das kleinen Zahlenbuch“ und in „Die Käferschachtel“ knüpfen zum Teil an bekannte Familienspiele wie Memory, Stechen, Schnipp Schnapp, Würfel- und Wegespiele an. Dadurch bleibt der Spielcharakter der mathematischen Aktivitäten erhalten. Während sich „Das kleine Zahlenbuch“ I hauptsächlich auf die Vorläuferfähigkeit Zählen und Abzählen bezieht (Festigung der Zahlwortreihe und Zahlzeichen bis 20, Zuordnung von Menge, Zahlzeichen und Zahlwort, Vorgänger/Nachfolger, Aufbau standardisierter Würfelbilder), will Teil II die simultane und die quasi-simultane Anzahlerfassung und die Teil-Ganzes-Beziehungen fördern. Die Materialien sind so beschaffen, dass sowohl unstrukturierte (Tierbilder) als auch gegliederte Mengenbilder (Dominosteine, Punktekarten mit 5er-Gliederung aus dem Anfangsunterricht) berücksichtigt werden.

Bei „Die Käferschachtel“ erfolgt der Aufbau des Zahlbegriffs in Anknüpfung an die Zählfertigkeiten und das Mengenverständnis der Kinder durch strukturierte Zahlbilder. Durch das eigens entwickelte Anschauungsmaterial – Marienkäfer – soll insbesondere die simultane Anzahlerfassung verschiedenster Zahlbilder gefördert werden. Die Struktur des Materials lehnt sich an die Zehnerfelder aus dem Anfangsunterricht an: Ergänzung zur 10, Fünfergliederung, Anlehnung an Würfelbilder, vielfältige mögliche Untergliederungen von Anzahlen (vgl. Gerster & Schultz 1998; Schütte 2004; Flexer 1986). Neben der simultanen Anzahlerfassung können durch das Material aber noch weitere Vorläuferfähigkeiten wie Seriation nach Anzahl, Klassifikation nach Anzahl, Vorgänger, Nachfolger, erstes Rechnen, Anzahlen Vergleichen, verschiedene Zerlegungen Finden, Teil-Ganzes-Beziehungen Sehen, Darstellen, Benennen, Ikonisierung von Zahlbildern, Zuordnung Zahl, Anzahl und Zahlwort angesprochen werden.

Die Anzahlerfassung spielt bei den Materialien dieser Gruppe eine wichtige Rolle. Im Unterschied zu den lehrgangsorientierten Förderprogrammen werden hier auch *unspezifische Vorläuferfertigkeiten* berücksichtigt.

3.3 Integration in den Kindergartenalltag

„Mathe-Kings“ (Hoenisch & Niggemeyer 2004) und „Gleiches Material in großer Menge“ (vgl. Hülswitt 2007) können Bestandteil der gesamten Kindergartenzeit sein und folglich eine *Verankerung im Kindergartenalltag* finden. „Mathe-Kings“ beschränkt sich zudem nicht auf den Zahlbegriffserwerb, sondern bezieht noch weitere mathematische Inhaltsbereiche wie

Sortieren und Klassifizieren, Muster, Geometrie, Wiegen, Messen und Vergleichen, grafische Darstellungen und Statistik ein. Es werden alltägliche Rituale für die ganze Gruppe, punktuelle Beschäftigungen in Form von Spielen und Materialien für eine ständig vorhandene Lernumgebung vorgeschlagen. Das Konzept umfasst folglich sowohl *angeleitete Aktivitäten* zu den *verschiedenen Inhaltsbereichen* als auch eine *reichhaltige Lernumgebung*, die von *allen Kindern* gemäß ihren Ideen und Interessen genutzt werden kann.

„Gleiches Material in großer Menge“ regt zum Erfinden von Mathematik an. Dabei eröffnet und begrenzt die Art des Materials die möglichen Erfindungen und Entdeckungen. Ein Material besteht aus lauter strukturgleichen Elementen wie z.B. gleich großen Holzwürfeln. Es ist somit im mathematischen Sinne zunächst unstrukturiert und regt in seiner Menge zu Strukturierungen an, Hülswitt (2007, 150) nennt dies den „Reiz unordentlicher Ordnungen“. Es wird die Gleichwertigkeit der Handlungs-, Bild- und Symbolebene herausgestellt und somit ein immer geforderter Anspruch des EIS-Prinzips verwirklicht.

Beim Erfinden tauchen durch die Begrenzungen des Materials immer wieder ähnliche Themen auf: Muster, vollkommene Formen wie Dreieck und Quadrat, Bandornamente, Parkette, Körper, die Mitte, Abbildungen, Bündeln oder Schätzen. Dies macht deutlich, dass es zu einer zwanglosen *Integration von Arithmetik und Geometrie* kommt.

Folgende Vorläuferfähigkeiten können angeregt werden: Eins-zu-Eins-Zuordnung, Seriation, Klassifikation, Zählen und Abzählen, Simultanerfassung, Vergleichen mit mathematischen Begriffen. Diese werden aber nicht automatisch gefördert, sondern sind im Unterschied zu den bisherigen Beispielen in noch höherem Maße zufällig, da der Lernprozess von den Erfindungen der Kinder vorangetrieben wird. Als ein wesentliches Element beschreibt Hülswitt (2007, 154) die „Ideenwanderung“. Durch das Nachahmen und Variieren von Handlungen und Produkten entwickeln sich in der Gruppe als Ganzes immer perfektere Gestaltungen und Lösungen der selbst gefundenen Problemstellung. Auch in Vorschulgruppen ist dieser Prozess, trotz eingeschränkter verbaler Fähigkeiten, zu beobachten: Perfektere Gestaltungen und Lösungen „entstehen nicht unbedingt durch verbale Kommunikation, sondern durch das Registrieren anderer Produkte“ (ebd., 154).

4. Kriterien zur Auswahl und Bewertung von Materialien

Im vorangegangenen Abschnitt wurden drei verschiedene Ansätze früher mathematischer Bildung im Kindergarten auf einer konzeptionellen Ebene unterschieden. Diesen drei Ansätzen zugeordnete Materialien wurden auf der Basis verschiedener, z.T. noch nicht explizit genannter Kriterien beschrieben und analysiert. Im Folgenden sollen diese Kriterien anhand von Leitfragen detailliert aufgefächert und zu einem Auswahl- und Bewertungskatalog für Materialien der frühen Bildung zusammengefasst werden.

4.1 Mathematischer Gehalt des Materials

Als ein erstes Bewertungskriterium können die im zweiten Abschnitt vorgestellten *Vorläuferfähigkeiten* gelten. Auf einer theoretischen Ebene werden Vorläuferfähigkeiten benannt, welche in der Auseinandersetzung mit dem Material angesprochen, diagnostiziert und gefördert werden können. Bei der Bewertung eines Materials ist zudem das Kriterium *mathematische Ergiebigkeit* von Belang: Können mit dem Material vielfältige Vorläuferfähigkeiten gefördert werden oder nur einzelne? In welcher Intensität ist diese Beschäftigung mit Vorläuferfähigkeiten möglich? Ist es für die Kinder möglich, sich auf verschiedenen Niveaus mit dem Material auseinanderzusetzen? Ist ein niederschwelliger Einstieg über das Zählen oder das Subitizing, z.B. ohne Kenntnis der Zahlzeichen, möglich (vgl. Schütte 2001a)?

- Welche Vorläuferfähigkeiten können mit dem Material angesprochen und gefördert werden?
- Werden einzelne oder mehrere Vorläuferfähigkeiten angesprochen?
- Bietet das Material Möglichkeiten der Bearbeitung auf verschiedenen Niveaus?

Ein weiteres Kriterium für die Bewertung ist die Art des verwendeten Materials. Hier ist auch Material im engeren mathematikdidaktischen Sinne gemeint, so genannte Arbeitsmittel oder Veranschaulichungsmittel. Bei Radatz u.a. (1996, 37ff) findet sich ein Kriterienkatalog zur Beurteilung von Arbeitsmitteln im arithmetischen Anfangsunterricht. Anhand dieses Katalogs können z.T. auch obige Materialien beurteilt werden, insofern es sich um Veranschaulichungsmittel aus dem Anfangsunterricht oder Abwandlungen handelt (vgl. auch Abschnitt 3). Aufgrund der Problematik, dass die Struktur von Veranschaulichungsmitteln sich nicht aus dem Material von selbst erschließt, sondern in das Material hineingesehen werden muss (vgl. Lorenz 1995, 10; Floer 1995, 20f), wurde von Schütte (2004b,

7) die Eigenstrukturierung von Veranschaulichungsmitteln postuliert und umgesetzt. Dies würde für die frühe Bildung bedeuten, nicht nur strukturierte Materialien zu verwenden, sondern auch solche, die eigene Strukturierungen der Kinder zulassen und begünstigen. Es bleibt die offene Frage, welche Materialien gerade letzteres tun. Eine Möglichkeit ist sicherlich die strukturelle Gleichwertigkeit des Materials, wie dies beim Konzept „Gleiches Material in großer Menge“ (vgl. Hülswitt 2007) der Fall ist. Noch zu untersuchen bleibt, ob Alltagsmaterialien wie Perlen, Knöpfe oder Bohnen dies ebenfalls leisten können und welche Vorläuferfähigkeiten über diejenigen der Seriation, Klassifikation, des Zählens und Abzählens hinaus gefördert werden könnten. Die Verwendung von Arbeitsmitteln aus dem arithmetischen Anfangsunterricht oder deren Abwandlungen betont die *Anschlussfähigkeit zum schulischen Lernen*, wohingegen die Verwendung unstrukturierter Materialien der *kindlichen Eigenaktivität bei der Herstellung von Strukturen* mehr Raum gibt und Bedeutung zumisst.

- Erfüllt das Material didaktische Kriterien des Anfangsunterrichts?
- Lässt das Material Eigenstrukturierung zu und/oder begünstigt es diese?

4.2 Gestalt des Lernprozesses mit dem Material

Neben dem mathematischen Gehalt, der sich vorab bestimmen lässt, ist für die Bewertung eines Materials die Gestalt des Lernprozesses von entscheidender Bedeutung. Die Analyse des mathematischen Gehalts ist noch keine Gewähr dafür, dass das Material von Kindern entsprechend dieses Gehalts verwendet bzw. überhaupt verwendet wird.

Ein erstes Kriterium bildet das *Anregungspotential* eines Materials. Anregungspotential soll vorläufig folgendermaßen beschrieben werden: Kinder greifen von selbst nach diesem Material, Kinder greifen mehrfach nach diesem Material, Kinder entwickeln eigene und vielfältige Spielideen mit diesem Material, Kinder beschäftigen sich über einen längeren Zeitraum mit diesem Material.

Der Aufforderungscharakter der in Abschnitt 3 aufgeführten Materialien kann an dieser Stelle nicht abschließend beurteilt werden. Es ist jedoch zu vermuten, dass die Erzieherin bei der Einführung von Spielregeln und Spielideen eine wichtige Rolle spielt. Um im Einzel- oder Kleingruppenspiel ohne Erzieherin zum Einsatz zu kommen, muss die Motivation jedoch aus dem Spiel heraus entstehen, da sonst die Kinder nur nach Aufforderung oder zusammen mit der Erzieherin nach dem Material bzw. nach dem Spiel greifen. Es ist zudem auch denkbar, dass die Kinder Spielideen untereinander weitergeben oder gegenseitig aufgreifen.

Ein zweites Kriterium betrifft die Bedingungen, unter denen eine mathematisch gehaltvolle Auseinandersetzung mit dem Material stattfinden kann. Es ist zu vermuten, dass für geeignet befundene Materialien nicht per se für eine qualitativ hochwertige mathematische frühe Bildung stehen, sondern es noch weitere *Bedingungen für gelingende Lernprozesse und eine mathematisch gehaltvolle Auseinandersetzung* gibt: „Programme sind selten ‚teacher proof', also lehrer- oder erzieherinnensicher. Ihre Effekte hängen immer auch von der Persönlichkeit und den interaktiven Qualitäten der Erzieherin ab" (Dollase 2006, S. 10). Doch auch die individuellen Voraussetzungen der Kinder dürften hier keine zu vernachlässigende Rolle spielen.

- Hat das Material Anregungspotential/Aufforderungscharakter?
- Sind gelingende Lernprozesse und eine mathematisch gehaltvolle Auseinandersetzung zu beobachten? Welche Bedingungen lassen sich dafür formulieren?

5. Tragfähigkeit des Kriterienkatalogs – erste Ergebnisse einer Pilotstudie

Um den Lernprozess genauer beschreiben zu können, muss das Material zum Einsatz kommen.

5.1 Ziele und Fragen

Folgende Fragen bestimmten die Pilotstudie:

- Lassen sich die vorab bestimmten Vorläuferfähigkeiten in der Auseinandersetzung mit dem Material beobachten?
- Welche Spielideen entwickeln sich mit potentiell geeigneten Materialien?
- Hat das Material Anregungspotential? Kann das Anregungspotential aufgrund der Beobachtungen genauer gefasst werden?
- Lassen sich Bedingungen festmachen, unter denen eine mathematisch gehaltvolle Auseinandersetzung stattfindet?

5.2 Durchführung und Methoden

Die Pilotstudie fand in einer städtischen Kindertagesstätte in Freiburg i. Br. statt. Die Einrichtung liegt in einem Viertel, wo Menschen unterschiedlichster Herkunft und sozialer Schicht zusammen leben. Wie alle städtischen Einrichtungen in Freiburg beteiligt sich auch diese Kindertagesstätte am INFANS-Projekt: Aufgrund von Beobachtungen, ihrer Dokumentation und Auswertung werden Interessen und Themen der Kinder von den Erzieherinnen benannt und mit entsprechenden Angeboten beantwortet (vgl. Andres & Laewen 2005; Laewen & Andres 2007).

Im Rahmen der Pilotstudie wurde den Erzieherinnen eine Materialkiste zur Verfügung gestellt, die sie nach eigenem Ermessen einsetzen konnten. Für die Kiste wurden punktuell einsetzbare Materialien ausgewählt, da diese auf der einen Seite für den zeitlich begrenzten Rahmen einer Pilotstudie geeignet erschienen und sich auf der anderen Seite mit dem zugrunde gelegten Katalog an Vorläuferfähigkeiten zum Zahlbegriffserwerb (vgl. Abschnitt 2.1) weitgehend decken. Die Kiste umfasste „Das kleine Zahlenbuch", „Die Käferschachtel", Gesellschaftsspiele, Zahlenkarten, Zählschachteln (vgl. Schütte 2001b, 13), Würfel, Nüsse und Bohnen. Sie kam in einem offenen „Matheangebot" zum Einsatz, für das sich die Kinder in der „Forscherzeit" entscheiden konnten. Anfangs wählten die Erzieherinnen Materialien aus, hinter welchen sie Potential für eigene Ideen der Kinder vermuteten (Würfel, Nüsse, Bohnen, Zählschachteln, Dominospiele, Zahlenkarten, Wendeplättchen). Diese brachten sie ohne Spielideen in die Gruppe ein. Später kamen auch Regelspiele („Memory", Stechen mit Mengenbildern, „Hamstern", „Mensch ärgere dich nicht") zum Einsatz, die zunächst eine Einführung der Regeln verlangten. Die zweimal wöchentlich stattfindenden Angebote (Dauer je 30 bis 50 min) wurden mit einer Videokamera aufgezeichnet.

Im Folgenden sollen einige von den Erzieherinnen ausgewählte Materialien anhand des Kriterienkatalogs überblickshaft analysiert werden.

Kriterien	Domino	Anzahl-Zahl-Domino	Schachteln und Bohnen	Nüsse und Würfel	Zahlen-karten	Stechen
1. Mathematischer Gehalt des Materials						
Mengenvergleich (mehr/ weniger, gleichviel)	+	+	+	+		++
Aufsagen der Zahlwortreihe	+	+	++	++	++	+
Abzählen von Objekten (einzeln, weiter, Schritte)	+	+	++	++	+	+
Vorgänger/Nachfolger	+		+		+	
Zuordnung Zahlzeichen - Menge		++	++		+	
Aufbau Würfelbilder	++	+		++		+
Andere Punktbilder/Anordnungen	+	+				+
Teil-Ganzes-Beziehungen	+	+		+		+
Erstes Rechnen	+		+	+		
Didaktisches Material aus dem AU oder Anlehnung						
Unstrukturiertes Material			++	++		
2. Gestalt des Lernprozesses						
Anregungspotential	+	+	+	+	+	+
Mathematisch gehaltvolle Auseinandersetzung	+	+	+	+	+	+

+: möglich, kann stattfinden ++: zutreffend, wird in hohem Maße unterstützt

5.3 Erste Ergebnisse

Anhand exemplarischer Beispiele sollen im Folgenden erste Antworten auf die Fragen der Pilotstudie gefunden werden.

- Dennis (4;9) beschäftigt sich über 40 Minuten mit den Schachteln, die er zunächst alle ganz füllt, stapelt, umfüllt, anordnet. Auf Anregung einer Erzieherin beginnt er, die Schachteln gemäß der Beschriftung zu füllen. Dies führt er mit ihrer Hilfe, später auch allein mit einzelnen Nachfragen zu den Zahlzeichen, zu Ende. Durch eine andere Erzieherin wird er anschließend zum Ordnen der Schachteln nach der Zahlzeichenreihe angeregt. Dabei zählt Dennis die Schachteln mehrfach durch. Nach Abschluss dieser Aufgabe verlässt Dennis die Schachteln.

Spontane Zuwendung kann zu Materialien mit haptischem oder optischem Aufforderungscharakter wie Schachteln und Bohnen, Nüsse, Würfel, Domino, Anzahl-Zahl-Domino beobachtet werden. Erste Aktivitäten sind Ein- und Ausräumen, Bauen, Anordnen, Benennen und Zählen. An Vorläuferfähigkeiten können im obigen Beispiel das Abzählen von Objekten, das Aufsagen der Zahlwortreihe, die Zuordnung von Zahlzeichen und Menge beobachtet werden (vgl. als zutreffend gekennzeichnet unter 5.1). Diese Aktivitäten werden von der Erzieherin angeregt.

- Sascha (6;5) und Sajed (6;4) würfeln mit zwei Würfeln Nüsse aus einer Schachtel, ein Spiel, das Sascha zuvor mit einer Erzieherin zusammen entwickelt hat. Sascha zählt die Würfelaugen und die Nüsse einzeln aus, Sajed kennt schon etliche Zerlegungen, andere Summen bestimmt er durch Weiterzählen. Im Laufe des Spiels geht er dazu über, Sascha ihre Würfelsummen zu nennen. Sascha artikuliert mehrfach begeistert, dass sie schon viele Nüsse aus der Schachtel gewürfelt hat und wie wenige noch in der Schachtel sind. Die Erzieherin regt an, alle Nüsse aus der Schachtel zu würfeln und dann wieder hinein. Nach der Umsetzung dieser Spielidee endet das Spiel.

Die Spielidee wurde in diesem Beispiel im Unterschied zum obigen von den Kindern und der Erzieherin gemeinsam entwickelt. Folgende Vorläuferfähigkeiten konnten beobachtet werden: Aufsagen der Zahlwortreihe, verschiedene Strategien beim Abzählen von Objekten, das simultane Erfassen von Würfelbildern und erstes Rechnen. Die gezeigten Vorläuferfähigkeiten sind abhängig von der Spielidee – und somit auch von den Anregungen der Erzieherin – und den Kompetenzen der Kinder (Zählstrategien, erstes Rechnen).

- Eine Erzieherin erklärt Hokia (4;2) und Laeticia (4;0) die Spielregeln für das Stechen mit Anzahlbildern bis 5. Sie selbst spielt nicht mit, steu-

> ert aber das Spiel, indem sie die Karten verteilt und die einzelnen Spielschritte wie Aufdecken, Vergleichen und Stechen anleitet. Sprachanteile der Kinder fallen zumeist auf Zählaktivitäten, die die Erzieherin einfordert, um den Gewinn eines Stichs zu begründen. Die Begründungsstrategie der Kinder ist aber das Überblicken. Nach der zweiten Runde will die Erzieherin die Karten einpacken. Hokia äußert aber den Wunsch nach einer weiteren Runde. Die Forscherin schlägt eine Runde ohne die Erzieherin vor. Die Erzieherin verlässt die beiden, die die Organisation des Spielgeschehens nun selbst in die Hand nehmen. Nach einigen Stichen packt Hokia die Karten ein. Sie möchte nun das Spiel spielen, das die Erzieherin mit einem anderen Kind gerade begonnen hat.

Im Unterschied zu den beiden vorherigen Beispielen kann bei diesem Spiel der Mengenvergleich beobachtet werden. Mengen können von den Kindern durch Überblicken (mehr/weniger) oder durch das Bestimmen der Anzahl (5 ist mehr als 4) vorgenommen werden. Um die Anzahl zu bestimmen kann die Würfelbildanordnung auf den Karten genutzt werden oder gezählt werden. Wie sich die individuellen Zugangsweisen weiter entwickeln, hängt auch vom Umgang der Erzieherin mit eben diesen ab. Werden sie als erfolgreiche Strategie zugelassen und behutsam weiterentwickelt; oder werden sie, wie in obigem Beispiel, von der Erzieherin nicht gesehen und andere noch nicht verfügbare Strategien gefordert.

In allen drei Beispielen konnte eine ausdauernde Beschäftigung mit dem Material, Konzentration auf die Tätigkeit, Vertiefung bzw. Versunkenheit ins Geschehen, der Wunsch nach Wiederholung, Freude, Zufriedenheit und Spaß (auch am gemeinsamen Tun) beobachtet werden. Diese Beobachtungen sprechen dafür, Anregungspotential nicht nur mittels Selbstläufigkeit (vgl. 4.2), sondern auch mittels Engagiertheit zu fassen. Die Engagiertheitsskala nach Laevers (1997) umfasst die oben aufgezählten Punkte.

Darüber hinaus lassen sich aber das Anregungspotential und die Gestalt des Lernprozesses aufgrund der obigen Beobachtungen als eine Verquickung von Materialmöglichkeiten, Kompetenzen der Erzieherin und Kompetenzen des Kindes beschreiben. Engagiertheit und eine mathematisch gehaltvolle Auseinandersetzung werden einerseits durch die Möglichkeiten des Materials zu vielfältigen, auf verschiedenen Niveaus ausführbaren Aktivitäten und andererseits durch die Erzieherin bestimmt, die diese Möglichkeiten des Materials aufzeigt. Wie das Kind diese Möglichkeiten aufgreift und nutzt, hängt wiederum von seinen Vorkenntnissen ab. Es wurde auch deutlich, dass strukturierte und unstrukturierte Materialien unterschiedliche erste Zugangsweisen begünstigen. Unstrukturierte Materialien legen zunächst das Zählen nahe, strukturierte das Überblicken. Strukturierungen müssen bei unstrukturierten Materialien durch die Erzieherin angeregt werden.

Spielideen und Vorschläge der Erzieherinnen werden aber nicht voraussetzungslos übernommen. Die Übernahme kann an die Präsenz der Erzieherin gebunden sein. Erste Deutungen gehen dahin, dass eine enge inhaltliche Lenkung nicht nur die individuellen Möglichkeiten und Fähigkeiten der Kinder behindert, sondern auch zum Abbruch des Spielgeschehens führen kann. Präsenz in verschiedenen Phasen des Spielgeschehens könnte bedeuten:

- Erklären der Spielregeln;
- zeitweises Mitspielen bei komplexen Spielen oder bei Mangel an Spielpartnern;
- Prozesshilfe beim Spielverlauf; inhaltliche Hilfe bei Nachfrage;
- neue inhaltliche Anregungen bei Material mit verschiedenen Möglichkeiten der Benutzung;
- sukzessiver, nicht abrupter Rückzug aus dem Spielgeschehen;
- bloße Anwesenheit, um das Bedürfnis nach Aufmerksamkeit und Zuwendung zu stillen.

Neben der Erprobung und Weiterentwicklung von Material ergibt sich somit auch die Notwendigkeit der Schulung der Erzieherinnen. Diese Schulungsaufgaben beziehen sich auf den mathematischen Gehalt von Materialien, die Sensibilität für individuelle Zugangsweisen der Kinder, die Herstellung von Verbindungen zwischen individuellen Zugangsweisen und dem mathematischen Gehalt und auf Gesprächstechniken bzw. Präsenz, die der Initiierung, der Aufrechterhaltung, der Wiederaufnahme und der Weitergabe von mathematisch gehaltvollen Spielideen förderlich sind.

6. Diskussion und Ausblick

Im vorliegenden Beitrag wurde ausgehend von der Vielfalt an Vorschlägen zur frühen mathematischen Bildung ein Kriterienkatalog zur Bewertung von Materialien entwickelt. Er setzt sich auf der einen Seite aus eher ‚harten' Kriterien zum mathematischen Gehalt zusammen, welche vor einem Einsatz herangezogen werden können. Auf der anderen Seite geht es um eher ‚weiche' Kriterien wie das Anregungspotential und die Bedingungen einer mathematisch gehaltvollen Auseinandersetzung, welche den Einsatz des Materials begleiten.

Die Ausführungen in Abschnitt 5 verdeutlichen die Möglichkeiten und Grenzen dieses Kriterienkatalogs. Seine Möglichkeiten bestehen primär darin, den Bildungsgehalt verschiedener Materialien im Hinblick auf den Zahlbegriffserwerb zu prüfen und darzustellen. Materialien können beurteilt und ausgewogen hinsichtlich der angesprochenen Vorläuferfähigkeiten und der Materialbeschaffenheit (strukturiert, unstrukturiert) eingesetzt werden. Damit ist er eine Hilfe beim Einlösen des Bildungsauftrags. Es wurde aber auch deutlich, dass zum Anregungspotential oder zu den Bedingungen einer mathematisch gehaltvollen Auseinandersetzung vorab nur Vermutungen angestellt werden können. Zur Ausdifferenzierung dieser Kriterien konnte die Pilotstudie einen ersten Betrag leisten, indem sie den Umgang der Kinder und Erzieherinnen mit dem Material in den Blick genommen hat (vgl. 5.3). Es ergaben sich auch Hinweise auf die Weiterentwicklung von Materialien und Spielideen und den Schulungsbedarf von Erzieherinnen. Hilfreich für dieses Anliegen könnte eine Weiterentwicklung des Analyserasters für das Material (vgl. 5.2) zu einem Analyseraster für den Einsatz (im Sinne eines Beobachtungsbogens für die Praxis) sein.

Literatur

Andres, B. & Laewen, H.-J. (2005): Beobachtung und Dokumentation in Kindertageseinrichtungen. In: Bertelsmann-Stiftung (Hrsg.): Guck mal! Bildungsprozesse des Kindes beobachten und dokumentieren. Gütersloh, S. 33–48.

Clements, D.H.: (1984): Training Effects on the Development and Generalization of Piagetian Logical Operations and Knowledge of Number. In: Journal of Educational Psychology 76 (1984) 5, S. 766–776.

Dehaene, S. (1999): Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können. Basel, Boston, Berlin.

Dehaene, S. (1992): Varieties of numerical abilities. In: Cognition 44, S. 1–42.

Dollase, R. (2006): Rettet den ganzheitlichen Ansatz! Oder: eine Bedienungsanleitung für den Einsatz von Förderprogrammen in Kindertageseinrichtungen. In: Welt des Kindes 84 (2006) 6, S. 8–11.

Faust-Siehl, G. (2001): Konzept und Qualität im Kindergarten. In: Faust-Siehl, G. & Speck-Hamdan, A. (Hrsg.): Schulanfang ohne Umwege. Mehr Flexibilität im Bildungswesen. Frankfurt a.M.: Grundschulverband – Arbeitskreis Grundschule e.V., S. 53–79.

Flexer, R.J. (1986): The power of five: the step before the power of ten. In: Arithmetic Teacher, H. 2, S. 5–9.

Floer, J. (1995): Wie kommt das Rechnen in den Kopf? Veranschaulichen und Handeln im Mathematikunterricht. In: Die Grundschulzeitschrift, 9 (1995) 82, S. 20–22, 39.

Friedrich, G. & de Galgoczy, V. (2004): Komm mit in das Zahlenland. Eine spielerische Entdeckungsreise in die Welt der Mathematik. Freiburg.

Fuson, K.C. (1988): Childrens counting and concepts of numbers. New York. Springer.

Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978): The Child`s Unterstanding of Number. Cambridge, MA.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (1998): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. http://opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/ (15.02.08)

Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2007): Mathematische Frühförderung – Inhalte, Aktivitäten und diagnostische Beobachtungen. In: Brokmann-Nooren, C., Gereke, I., Kiper, H. & Renneberg, W. (Hrsg.): Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen. Bad Heilbrunn, S. 168–184.

Hoenisch, N. & Niggemeyer, E. (2004): Mathe-Kings. Junge Kinder fassen Mathematik an. Weimar, Berlin.

Hülswitt, K.L. (2007): Freie mathematische Eigenproduktionen: Die Entfaltung entdeckender Lernprozesse durch Phantasie, Ideenwanderung und den Reiz unordentlicher Ordnungen. In: Graf, Ulrike & Moser Opitz, Elisabeth (Hrsg.): Diagnostik und Förderung im Elementarbereich und Grundschulunterricht. Baltmannsweiler, S. 150–164.

Krajewski, K. (2005): Vorschulische Mengenbewusstheit von Zahlen und ihre Bedeutung für die Früherkennung von Rechenschwäche. In: Hasselhorn, M., Schneider, W. & Marx, H. (Hrsg.) Diagnostik von Mathematikleistungen. Göttingen, S. 49–70.

Krajewski, K. (2003): Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg.

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2007): Mengen, zählen, Zahlen (MZZ). Berlin.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006): Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht 53 (2006) 4, S. 246–262

Laevers, F. (Hrsg.) (1997): Die Leuvener Engagiertheits-Skala für Kinder. LES-K. Erkelenz: Fachschule für Sozialpädagogik.

Laewen, H.-J. & Andres, B. (2007): Das infans-Konzept der Frühpädagogik. In: Neuß, N. (Hrsg.) (2007): Bildung und Lerngeschichten im Kindergarten. Berlin, S. 73–99.

Lorenz, J.H. (2006): Förderdiagnostische Aufgaben für Kindergarten und Anfangsunterricht. In: Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (Hrsg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren. Offenburg, S. 55–66.

Lorenz, J.H. (2005a): Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen im Vorschulalter. In: Hasselhorn, M., Schneider, W. & Marx, H. (Hrsg.): Diagnostik von Mathematikleistungen. Göttingen, S. 29–48.

Lorenz, J.H. (2005b): Grundlagen der Förderung und Therapie. Wege und Irrwege. In: von Aster, M. & Lorenz, J. H. (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. Göttingen, S. 165–177.

Lorenz, J.H. (1995): Arithmetischen Strukturen auf der Spur. Funktion und Wirkung von Veranschaulichungsmitteln. In: Die Grundschulzeitschrift 9 (1995) 82, S. 8–12.

Müller, G.N. & Wittmann, E.Ch. (2002; 2004): Das kleine Zahlenbuch. Band 1: Spielen und Zählen. Band 2: Schauen und Zählen. Seelze.

Neunzig, W. (1972): Mathematik im Vorschulalter. Freiburg.

Padberg, F. (1992)²: Didaktik der Arithmetik. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich.

Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2007): Bedeutung und Erwerb mathematischer Vorläuferfähigkeiten. In: Brokmann-Nooren, C., Gereke, I., Kiper, H. & Renneberg, W. (Hrsg.):Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen. Bad Heilbrunn, S. 153–166.

Piaget, J. (1964): Die Genese der Zahl beim Kind. In: Piaget, J. (Hrsg.): Rechenunterricht und Zahlbegriff. Braunschweig, S. 50–72.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1975): Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Stuttgart.

Preiß, G. (2004; 2005): Leitfaden Zahlenland. 2 Bände. Kirchzarten.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, Astrid (1996): Handbuch für den Mathematikunterricht. Band 1. Hannover.

Resnick, L. B. (1989): Developing Mathematical Knowledge. In: American Psychologist 44 (1989) 2, S. 162-168.

Royar, Th. (2007): Die Käferschachtel. Lichtenau.

Schütte, S. (Hrsg.) (2004b): Die Matheprofis 1. Schülerbuch und Lehrermaterialien. München.

Schütte, S. (2001a): Offene Lernangebote – Aufgabenlösungen auf verschiedenen Niveaus. In: Grundschulunterricht, (2001) 11, S. 4–8.

Schütte, S. (2001b): Mehr Offenheit im mathematischen Anfangsunterricht. In: Die Grundschulzeitschrift, Sammelband Offener Mathematikunterricht: Mathematiklernen auf eigenen Wegen, S. 10–13.

Starkey, P. & Cooper, R.G. (1980): Perception of numbers by human infants. In: Science 210 (28), 1033–1035.

Stern, E. (2006): Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans hinterher. Der Erwerb geistiger Kompetenzen bei Kindern und Erwachsenen aus kognitionspsychologischer Perspektive. In: Nuissl, E. (Hrsg.): Vom Lernen zum Lehren. Lern- und Lehrforschung für die Weiterbildung. Bielefeld, S. 93–105.

Stern, E. (1998): Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter. Pabst.