Matthias ZELLER, Freiburg, Bärbel BARZEL, Freiburg

Die Rolle von Computeralgebra beim Lernen elementarer Algebra

Der Einfluss von Computeralgebrasystemen (CAS) auf das Lehren und Lernen von Mathematik wurde in den vergangenen Jahren bereits in verschiedenen Studien untersucht. Viele Ergebnisse deuten auf einen Mehrwert besonders in höheren Schulstufen hin. Weniger Beachtung fand bisher jedoch der Einsatz in der Sekundarstufe I. Im Projekt CAYEN (CAS in elementary algebra – YES or No) werden in einem Vergleichsdesign zum einen grafikfähige Taschenrechner (TI-nspire-Non-CAS) welche Tabellenkalkulation und Graphenplotter bereitstellen und zum anderen Computeralgebrarechner, die zudem noch mit algebraischen Ausdrücken umgehen können, eingesetzt. In drei 7. Gymnasialklassen wurden in einer explorativen, qualitativen Erhebung erste Daten gesammelt und ausgewertet sowie Hypothesen zur weiteren Untersuchung aufgestellt.

1. Theoretischer Rahmen und Forschungsfragen

Algebra Lernen: Der Umgang mit algebraischen Objekten erfordert ein breites Feld verschiedener Kompetenzen, das sich gliedern lässt in ‚syntactical skills' und ‚symbol sense' basierend auf der in der Psychologie üblichen Unterscheidung zwischen ‚conceptual und procedural knowledge' (Hiebert 1986).

Syntactical skills als procedural knowledge beziehen sich zum einen auf das regelgeleitete, zielgerichtete Umformen von Termen und Gleichungen und zum anderen auf das Wissen über die formale Notation der algebraischen Sprache (Siebel 2005; Hefendehl-Hebeker 2008).

Unter Symbol sense (Arcavi 1994) als conceptual knowledge fasst man Vorstellungen von algebraischen Objekten sowie von Algebra selbst. Es geht um das Verstehen algebraischer Objekte als Basis für einen flexiblen Umgang mit ihnen. Grundlage dieses Verstehens ist das Bewusstsein über die verschiedenen Funktionen, die algebraische Objekte spielen können und die damit verbunden Grundvorstellungen. So können Variablen als Unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahlen (Gegenstandsaspekt); als Platzhalter (Einsetzungsaspekt) oder als Zeichen, mit denen man nach Regeln operieren darf (Kalkülaspekt) genutzt werden (Malle 1993). Diese Aspekte können noch um weitere ergänzt werden, so stellt Drijvers (2003) Variablen als ‚generalisierte Zahlen' und als ‚veränderliche Größe' als zentral heraus. Im Bereich symbol sense sind auch die Vorstellungen zur Algebra insgesamt bedeutsam, welche ein Bewusstsein über die Möglichkeiten und Grenzen von Algebra beinhalten. Davon hängt die Motivation ab, Algebra zu verwenden und sie im Vergleich zu anderen Repräsentationen zu bewerten.

Medien als Werkzeuge: Die beiden in der Vergleichsstudie eingesetzten Geräte (TI-nspire in beiden Versionen) werden im Sinne von ‚general purpose tools' verwendet (Noss und Hoyles 1996; Barzel et. al 2005), wobei Lernende die Möglichkeit haben zu entscheiden, bei welchen Tätigkeiten sie welches Medium auf welche Weise einsetzen. Die Integration solcher Werkzeuge wird im Modell der ‚instrumental genesis' beschrieben (Drijvers und Trouche 2008). Das Medium erscheint zunächst als Artefakt, ohne Bezug zur Aufgabe. Je nach Art der Aufgabe und der individuellen mentalen Schemata werden Bezüge zwischen Aufgabe und Medium hergestellt und das Medium integriert. Durch diese individuelle instrumentale Genese wird das Artefakt zum Werkzeug. Aus didaktischer Sicht ist es bedeutsam wie diese Genese von statten geht, durch was sie beeinflusst wird und welche Lernprozesse von ihr beeinflusst werden.

Forschungsfragen: Im Zentrum des Projektes steht die Frage, welchen Einfluss CAS auf das Lernen elementarer Algebra und hier insbesondere auf die Entwicklung von symbol sense hat.

- Welchen Einfluss haben beide Technologien beim Einsatz als Werkzeug auf die Entwicklung von Vorstellungen algebraischer Objekte und der Algebra selbst?
- Welche Rolle spielen beide Technologien beim Einsatz als Werkzeug bei der Wahl von und beim Wechsel zwischen Repräsentationen?

2. Design der Untersuchung

Nach der Entwicklung und Pilotierung von Unterrichtsmaterialien und Erhebungsinstrumenten wurde eine explorative, qualitative Erhebung durchgeführt, aus der die hier dargestellten Befunde stammen. Eine Non-CAS-Klasse (n=26) und zwei CAS-Klassen (n=24+27) mit rechnererfahrenen Lehrern wurden über 8 Wochen im Unterricht von zwei Personen beobachtet und mehrere Gruppenarbeitssequenzen gefilmt sowie die Bildschirme der Taschenrechner digital aufgezeichnet. Zudem wurden Interviews geführt und Schülerdokumente gesichtet. Die Datenfülle wurde nach grounded theory (Strauss/ Corbin 1996) reduziert und ausgewertet.

Im Zentrum des Unterrichtsmaterials stehen offene, kontextbezogene Aufgaben, die unter Einbezug verschiedener Repräsentationen (Graph, Tabelle, Term / Gleichung) bearbeitet werden können. Das Lösen von Gleichungen tritt dabei im Rahmen von funktionalem Denken auf, wodurch sich viele Einsatzmöglichkeiten der verschiedenen Rechnerprogramme ergeben.

3. Vorläufige Befunde und Hypothesen

Die Ergebnisse der qualitativen Untersuchung geben Hinweise zu den folgenden drei Hypothesen.

1. CAS unterstützt den Schritt von Arithmetik zu Algebra: Im Unterricht konnte immer wieder beobachtet werden, dass Non-CAS-Schülerinnen und Schüler algebraische Ausdrücke in ihren Rechner eingeben. Eine Eingabe ist zwar möglich, aber nicht die weitere Bearbeitung. Für die weitere Bearbeitung der Aufgabe muss also zu einer anderen Repräsentation oder zu Papier und Stift gewechselt werden. Bei manchen Lernenden zeigte sich die folgende Irritation: Algebra erhielt für sie eine Sonderrolle gegenüber den anderen Repräsentationen, die im Rechner problemlos verwendet werden können. Einzelne sprachen sogar von einem Unterschied zwischen den zugrunde liegenden Rechengesetzen der Arithmetik und der Algebra. Für diese Lernenden war es schwer vorstellbar, dass der Rechner bei gleichen Rechenregeln nicht mit Algebra arbeiten kann. In der CAS-Gruppe hingegen zeigte sich, dass das zunächst sehr unübersichtliche Feld algebraischer Umformungen mithilfe der Auflistung im CAS strukturiert wurde. Die vielfältigen Möglichkeiten algebraische Terme zu manipulieren, was tatsächlich ein neuer Aspekt der Algebra ist, wurden von manchen CAS-Schülerinnen und Schülern hierdurch schnell in ihre Vorstellungen von Algebra integriert. Ein weiterer neuer Aspekt der Algebra ist, dass Terme und Gleichungen an Wert gewinnen, sie können ein Ergebnis mit starker Aussagekraft darstellen (Objekt- / Beziehungsaspekt von Gleichungen). CAS gibt algebraische Ausdrücke als Ergebnis einer Umformung aus, was bei manchen Schülern zu mehr Akzeptanz dieses Aspektes führte.

2. CAS regt dazu an, die Bedeutung und Struktur algebraischer Ausdrücken zu betrachten: Beim Lösen von Gleichungen sind zwei kognitive Aktivitäten relevant: Welche Struktur soll die nächste Zeile haben? Mit welcher Operation kann diese Struktur erzeugt werden? CAS-Schüler machten diese Aktivitäten explizit, da sie sie bewusst im Gespräch reflektierten. Dies zeigte sich in den Videos und in den Hefteinträgen, bei denen sie die CAS-Befehle (z.B. ‚factor‘) auch bei der Arbeit ohne Rechner aufschrieben. Insgesamt konnte beim Umgang mit Problemen ein ‚mutigerer‘ Einsatz von Variablen bei CAS- Schülern beobachtet werden. An Stellen, an denen der Einsatz von Variablen nicht zwingend nötig war, verwendeten CAS-Schüler Variablen, meist als Wort-Variablen (z.B. m für Miete).

3. CAS-Schülerinnen und Schüler bewerten Algebra objektiver und sehen ihren Wert klarer: In einer Reflexionsphase wurden die verschiedenen Repräsentationen von den Lernenden miteinander verglichen und nach selbst entwickelten Kriterien bewertet. Algebra ist genau, gut geeignet für den Umgang mit vielen und großen Zahlen und oft ist es schwer einen Ansatz zu finden. Darin waren sich beide Gruppen einig. Während die CAS-Gruppe oft die Schnelligkeit und die Einfachheit der Ergebniskontrolle herausstellten, betonte die non-CAS-Gruppe häufiger die Undurchsichtigkeiten und Schwierigkeiten im Umgang mit Algebra. Die Folgen hiervon konnten in den Daten wiedergefunden werden: In mehreren Gruppenarbeiten brachen non-CAS-Schüler den Einsatz von Algebra ab und wechselten zu einer anderen Repräsentation, um den Rechner einsetzen zu können.

4. Ausblick

Ziel der nächsten Phase des Projektes ist es, die dargestellten Hypothesen auf Gültigkeit zu prüfen (z.B: quantitativ mit pre- und posttests). Weiter ist geplant rechnerfreie Gruppen in den Vergleich zu integrieren, um die Bedeutung der Grafikfähigkeit und Tabellenkalkulation näher zu beleuchten.

Literatur

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Barzel, B., Drijvers, P., Maschietto, M., Trouche, L. (2005). Tools and technologies in mathematical didactics. Bosch, M. (ed.). *Proceedings of CERME 4*. February 2005.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment.* Utrecht: CD ß Press.

Drijvers, P., Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*: Vol. 2. (pp. 363 392). Charlotte, NC: Information Age.

Hiebert, J. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Hefendehl-Hebecker, L. (2008). Wege zur Formelsprache – Entwicklung algebraischen Denkens als didaktische Aufgabe. In: *Unikate, 33*, (pp. 66-71).

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg.

Noss, R., Hoyles, C. (1996). *Windows in mathematical meaning: learning cultures and computers.* London: Kluwer.

Siebel, F. (2005). *Elementare Algebra und ihre Fachsprache.* Mühltal: Allgemeine Wissenschaft.

Vollrath, H.-J. (1994). *Algebra in der Sekundarstufe*. Mannheim: Wissenschaftsverlag.

Strauss, A., Corbin, J. (1996). *Grounded theory - Grundlagen qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union.