

Hendrik SIMON, Köln

## **Zählen und Zahlen jenseits der 20 - was kommt nach Fuson?**

In der praktischen Arbeit mit rechenschwachen Kindern nach der in Simon (2007) beschriebenen Methode des gelenkten Entdecken-Lassens erweist sich die Vermittlung von Kenntnissen bezüglich des dezimalen Stellenwertsystems als überraschend anspruchsvoll. Bei der Durchführung geeigneter Lernspiele treten Vorgehensweisen auf, die mit einer linearen Entwicklung der Zählfertigkeiten im Zahlenraum ab 20 nicht erklärt werden können. Genau diese Beobachtungen können aber auch ein Schlüssel zum Verständnis der Entwicklung sein, die sich an die durch Fuson (1988) beschriebenen Zählstufen anknüpft. Bei der Entwicklung der Zählfertigkeiten müssen neben sprachlichen Aspekten auch Wechselwirkungen mit Realsituationen berücksichtigt werden. Dies gilt insbesondere für den Übergang zwischen Zähl- und Anzahlbedeutung der Zahlen (count-to-cardinal- und cardinal-to-count-transitions, Fuson 1988) und später für die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von mehrstelligen Zahlen.

Bei der Methode des gelenkten Entdecken-Lassens erhalten die Kinder Serien von Tasks, in denen sowohl eine „primitive“ Strategie (die also nicht so viele Kenntnisse verlangt) als auch mindestens eine fortschrittlichere Strategie zum Erfolg führen. Dabei basiert die der fortschrittlicheren Strategie zugrundeliegende Idee auf einer konkreten Anwendung des zu erwerbenden mathematischen Konzepts. Im Verlauf der Bearbeitung einer Serie können verschiedene Stufen beobachtet werden (s. auch Siegler & Stern, 1998). Nachdem zunächst die alte Strategie verwendet wird, tritt in einer Übergangsphase der Einsatz der neuen Strategie sporadisch auf, ohne dass dies dem Kind bewusst ist. Erst später lösen die vorhandenen Randbedingungen für die Nutzung der neuen Strategie ihren bewussten Einsatz aus. Somit ist eine situationsspezifische Strategie entstanden (s. Simon, 2007). Die höchste Stufe der Strategienutzung ist dann erreicht, wenn das Kind mit dem Tripel {Randbedingungen, Strategie, gewünschte Zielsituation} so umgehen kann, dass abweichende Aufgaben durch Anpassung der Randbedingungen oder der Strategie bearbeitet werden können (Transfer).

Diese Stufen der Strategieentwicklung können schneller durchlaufen werden oder gar entfallen, wenn das Kind bereits in ähnlichen Aufgabenserien Erfahrungen aus dem Bereich desselben mathematischen Konzepts sammeln konnte, sodass es ihm möglich ist, unbewusst oder bewusst Ähnlichkeiten zu nutzen. Die Bewusstwerdung dieser Ähnlichkeiten mündet im Verständnis der zugehörigen mathematischen Begriffe.

Für die Entwicklung des Verständnisses des dezimalen Stellenwertsystems bedeutet dies, dass auch dessen Eigenschaften erst in spezifischen Kontexten erlebt werden, aus denen heraus sie fortlaufend generalisiert werden. Die Kenntnis von Vorgehensweisen in spezifischen Situationen bedeutet noch nicht, dass das mathematische Konzept bereits verstanden ist. Ist das mathematische Konzept aber bereits vorhanden, so muss davon ausgegangen werden, dass für die meisten (geeigneten) konkreten Tasks auch eine Lösungsstrategie generiert werden kann.

## 1. Eigenschaften des Stellenwertsystems

Nach eigenen Beobachtungen sind die ersten Strukturen mehrstelliger Zahlen, die Kinder spontan nutzen,

- Ähnlichkeiten der Zehnerbereiche untereinander (...24, 25, 26 ... ist analog zu ...34, 35, 36 ...),
- die sprachliche Zerlegung der Zahlworte in Wortbestandteile (“sieben/und/dreißig“) und
- das Zählen in der Zehnerreihe.

Die Kenntnisse, die ein Kind letztendlich bezüglich des Stellenwertsystems erwerben soll, sind

- dass das „und“ im Zahlwort einer Addition entspricht,
- dass Einer, Zehner, Hunderter usw. gegeneinander eingetauscht werden können, ohne dass sich die Zahl verändert,
- die Zahl auch anderweitig auf verschiedenste Arten zusammengesetzt werden kann und
- dass die rechte Stelle einer Zahl in Ziffernschreibweise die Einer zählt, die daneben die Zehner und so weiter.

## 2. Unterschiedliche Entwicklungszweige des Verständnisses

Die oben erwähnten spontan genutzten Strukturen des Stellenwertsystems können als drei verschiedene Startpunkte für separate Entwicklungszweige gelten, in denen eine Fortentwicklung kindlicher (Er)Kenntnisse bezüglich des Stellenwertsystems stattfinden kann.

Entwicklungszweig 1 (Dekadenwiederholung): Der Ausgangspunkt hierfür ist, dass dem Kind die Gleichartigkeit der Dekaden bewusst ist. Im Verlauf der Entwicklung wird das Zählen in Zehnerschritten möglich. Über Erkenntnisse aus spezifischen Situationen wird das Zählen in Zehnerschritten mit der Addition von 10 in Verbindung gebracht. Die Übung „Zehner und

Einer Rein und Raus“ (Simon & Grünke, 2010) illustriert beispielhaft, wie eine Konzeptentwicklung in diesem Zweig ablaufen kann.

Entwicklungszweig 2 (Zerlegung nach Klang): Ausgehend von phonetischer Bewusstheit wird die zusammengesetzte Wortstruktur der Zahlworte erkannt. Über bereichsspezifische Erkenntnisse, die oft aus konkreten Zahldarstellungen resultieren (unterschiedliche semantische Strukturen der Addition, s. Schmidt & Weiser, 1993) bringen die Kinder den Wortteil „und“ mit der Addition in Verbindung. Die Entwicklung des Verständnisses für die Addition, wie sie in Fuson (1988) beschrieben wird, kann auch auf diesen Entwicklungszweig übertragen werden. Speziell bezogen auf das Verständnis für das dezimale Stellenwertsystem können Beobachtungen mit verschiedenen Übungen angeführt werden (z.B. die Übung „dezimal strukturiertes Zählen“, Simon 2005).

Entwicklungszweig 3 (gebündeltes Abzählen): Die Entdeckung der charakteristischen Abfolge der Zwischenergebnisse beim Abzählen dezimal gebündelten Materials oder das kontextfreie Zählen in der Zehnerreihe steht hier am Anfang. Über Erkenntnisse aus verschiedensten Zählsituationen wird das gebündelte Zählen mit einem Konzept in Verbindung gebracht, das der Multiplikation mit 10 entspricht. Entwicklungen, die zu diesem Zweig gehören, können oft bei der Arbeit mit gebündeltem Material beobachtet werden, z.B. bei der Addition zweistelliger Zahlen mittels dezimaler Blöcke.

Wie die Beobachtung von Kindern bei der Bearbeitung der hier genannten und auch weiterer im Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems wirksamer Übungen (Simon 2005, Simon 2007 und Simon & Grünke 2010) zeigt, scheinen die Entwicklungen innerhalb dieser Zweige relativ unabhängig voneinander abzulaufen. So können Kinder einen der Zweige bereits vollständig durchlaufen haben, während in den anderen beiden Zweigen noch nicht einmal ansatzweise generalisierte mathematische Konzepte vorliegen.

Dass neben diesen Entwicklungszweigen weitere Faktoren berücksichtigt werden müssen, zeigen überraschende Beobachtungen an rechenschwachen Kindern. So muss selbst dann, wenn ein Kind bei der Addition zweier Zahlen das Kommutativgesetz verwendet, die Vertauschbarkeit von Zehnern und Einern beim Rechnen nicht unbedingt verstanden sein. So konnte z.B. ein Kind, welches  $80-1$  rechnen sollte, diese Aufgabe nur dann lösen, wenn zuerst 7 Zehner und danach 10 Einer in einen Beutel gegeben wurden, aber nicht, wenn diese Reihenfolge umgekehrt wurde. Ein anderes Kind konnte die Rechenaufgabe  $50+6$  spontan lösen, rechnete die Aufgabe  $6+40$  aber mittels „41,42,43,44,45,46“.

Vergleichbare Effekte mit Bezug auf das Distributivgesetz und das Monotoniegesetz (liegt dem Prinzip der Nachbaraufgaben sowie der Tatsache zugrunde, dass sich eine Zahl nicht verändert, wenn man Zehner entbündelt oder zu Zehnern bündelt) können ebenfalls an geeigneten Übungen beobachtet werden.

### **3. Fazit**

Ein Modell für die Entwicklung des Verständnisses für unser Stellenwertsystem kann nicht linear sein. Stufenfolgen, wie sie in den Fusons Stufen des Zählens und der Addition (Fuson, 1988) aufgeführt werden, sind allenfalls in den drei Entwicklungszweigen denkbar. Das Durchlaufen dieser Stufen hängt jedoch von Kenntnissen bezüglich der Rechenarten und den zwischen ihnen wirkenden Rechengesetzen und von bereits vorhandenen Kenntnissen aus den anderen Entwicklungszweigen ab.

### **Literatur**

- Fuson, K. (1988): Children's Counting and Concepts of Number. New York: Springer.
- Schmidt, S., Weiser, W. (1993): Semantische Strukturen von einfachen Textaufgaben zu den Grundrechenarten. In: Becher, H.R., Bennack, J. (Hrsg.): Taschenbuch Grundschule. Hohengehren.
- Siegler, R.S., Stern, E. (1998): Conscious and unconscious strategy discoveries: A Microgenetic Analysis. *Journal of experimental Psychology* 127(4), 377-397
- Simon, H. (2005): Dyskalkulie - Kindern mit Rechenschwäche wirksam helfen. Stuttgart: Klett-Cotta.
- Simon, H. (2007): Interventionen bei Störungen des Erwerbs arithmetischer Konzepte. Lengerich: Pabst Science Publishers.
- Simon, H., Grünke, M. (2010): Förderung bei Rechenschwäche. Stuttgart: Kohlhammer.