Christof WEBER, Basel

Kopfgeometrie – ein Aufgabenformat wandelt sich

Kopfgeometrische Aufgaben leiten dazu an, einen geometrischen Sachverhalt gedanklich zu visualisieren. Auf der Grundlage von mentalen Bildern und Handlungen – den Vorstellungen – ist dann ein Problem zu bearbeiten, ohne darstellende Hilfsmittel (Gegenstände, Notizen etc.) einzusetzen. Je nach methodischer Gestaltung sind bei der Präsentation der Problemstellung (durch die Lehrperson) oder bei der Präsentation der Bearbeitung (durch die Lernenden) Hilfsmittel zugelassen oder auch nicht.

Kopfgeometrie hat seit langem ihren fest Platz im Mathematikunterricht, und dies nicht nur in der Mittelschule. Sie wurde in verschiedenen Zeiten sehr verschieden charakterisiert und begründet. Dieser Beitrag gibt zuerst einen kurzen historischen Überblick über Formen und Ziele von „Mathematik im Kopf“ und stellt dann einige neuere Entwicklungen vor.

1. Eine nicht unkritische *tour d’horizon* durch die Geschichte

Unter den Begründungen für die Bedeutung von Kopfgeometrie lassen sich folgende drei Argumentationslinien ausmachen:

- „Entfaltung der Kräfte der Raumanschauung“
- „Steigerung mehrerer Faktoren der räumlichen Intelligenz“
- „Verbesserung der Problemlösekompetenz“

Je nach Begründung sieht auch das kopfgeometrische Aufgabenformat anders aus. Im Folgenden werden die beiden ersten Argumentationslinien vorgestellt, die dritte kann hier aus Platzgründen nicht beschrieben werden.

Zur „Entfaltung der Kräfte der Raumanschauung“

Johann Pestalozzi fordert in seinem „ABC der Anschauung“ (1803), die „Kräfte der Raumanschauung“ von Kindern zu entfalten. Dazu legt er ihnen Tabellen von Linien und Quadraten vor (Abb. in Treutlein 1911, 17) und animiert sie zu Nachsprechübungen („die erste waagrechte Linie ist kürzer als die zweite“ usw.). Für den Pädagogen Pestalozzi ist die Geometrie also ein Mittel zum Zweck, die „Raumanschauung“ auszubilden. Geometrie stellt für ihn keinen fachlichen Lerninhalt dar, vielmehr misst er ihr einen formalen Bildungswert bei. Dennoch fokussieren unter seinem Einfluss auch Lehrerbildner wie Jakob Steiner (Absolvent von Pestalozzis Institut) und Adolf Diesterweg auf die „Ausbildung der inneren Anschauung“. Von ihnen wird berichtet, wie sie in ihren mathematischen Lehrveranstaltungen auf veranschaulichende Hilfsmittel verzichtet und geometrische Inhalte rein sprachlich beschrieben – und damit eine frühe Form von Kopfgeometrie begründet haben (Klein 1926, 128; Treutlein 1911, 113).

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wird Pestalozzis Forderung von Felix Klein und den Meraner Reformern aufgegriffen und umgedeutet. Der (gymnasiale) Mathematikunterricht muss nun nicht mehr nur der „Stärkung des Anschauungsvermögens" dienen, sondern auch zur „Gewohnheit des funktionalen Denkens" erziehen. Ziel ist, im Unterricht weniger Spezialkenntnisse zu vermitteln und dafür – im Sinne einer Konzentration auf das Wesentliche – die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Teilbereichen bewusst zu machen. Mit der Aufnahme von Lerninhalten (etwa des Funktionsbegriffs oder der Infinitesimalrechnung) in die Lehrpläne verfolgt die Meraner Reform neben formalen Bildungszielen dezidiert auch materiale Ziele (Krüger 2000). In Folge dieser Reform erscheinen Publikationen mit ersten kopfgeometrischen Aufgaben. So modelliert Peter Treutlein in seinem propädeutischen Geometrielehrbuch „Luftwürfel" und verwendet (erstmals?) den Begriff „Kopfgeometrie" (1911, 123, 113). Bruno Kerst geht noch einen Schritt weiter und beschreibt, wie er kopfgeometrische Aufgaben im Unterricht einsetzt und welche Folgen dies hat (Kerst 1920).

Zur „Steigerung mehrerer Faktoren der räumlichen Intelligenz"

Zur gleichen Zeit werden in den USA große Anstrengungen unternommen, die menschliche Denkfähigkeit zu operationalisieren, um sie messen zu können. Dem Psychometriker Louis Thurstone gelingt es 1938 mittels einer Faktorenanalyse von empirischen Daten, sieben „Primärfaktoren" der Intelligenz auszumachen (Maier 1999). Einer dieser Faktoren ist „space", das „Vorstellungsvermögen" bzw. die „Raumvorstellung". Dieser Faktor erfasst die Fähigkeit, gedanklich mit zwei- oder dreidimensionalen geometrischen Objekten zu operieren. Er wird später von Thurstone weiter in „visualization", „spatial relations" und „spatial orientation" ausdifferenziert. Diese Teilfaktoren werden üblicherweise durch die Angabe von entsprechenden Testaufgaben charakterisiert, in denen geometrische Objekte graphisch dargeboten und gedanklich manipuliert werden müssen (ebd., 34ff.).

Mit dem Siegeszug des Intelligenzkonstrukts und der Subsumption des „Vorstellungsvermögens" unter die Intelligenz wird die Relevanz von Kopfgeometrie nicht mehr bestritten. Dadurch entsteht aber auch die Gefahr, dass ihr Gewinn primär in der „Steigerung der räumlichen Intelligenz" bzw. im „Training des Vorstellungsvermögens" gesucht wird. Kopfmathematische Aufgaben gleichen sich dann an Intelligenztestaufgaben an mit dem Ergebnis, dass mathematische Themen und deren Verständnis zu kurz kommen. Damit gerät die Kopfmathematik wieder in die Nähe eines formalen Bildungsideals des 19. Jahrhunderts.

Diskussion

Dass Kinder im Intelligenztest besser abschneiden, nachdem sie entsprechende Aufgaben geübt haben, ist wahrscheinlich. Dass sie ergo ihre „Intelligenz“ gesteigert haben, liegt in der Natur der Sache (und wird neudeutsch „teaching the test“ (!) genannt). Nur: Welches Stück Mathematik kann oder weiß ein Kind, nachdem es wiederholt Intelligenztestaufgaben bearbeitet hat? Was hat es deshalb verstanden? Kann es deshalb auch andere Aufgaben besser lösen?

Gerade vor dem Hintergrund der aktuellen Transferforschung sind hier Zweifel angebracht. So scheinen Wissen und Können sehr viel bereichsspezifischer zu sein als man sich das als Lehrperson wünschen mag. So wenig wie Latein logisches Denken trainiert, so wenig nutzt das wiederholte Lösen eines Aufgabentyps dem Lösen eines anderen. Folglich verbessert sich weder das allgemeine „Vorstellungsvermögen“ noch die „Problemlösekompetenz“ (für eine aktuelle Studie siehe Owen et al. 2010).

Damit stellt sich die Frage, wie gedankliches Visualisieren aussehen kann, das mathematische Themen thematisiert und ihr Verständnis ermöglicht.

2. Neuere Entwicklungen

In den letzten zehn Jahren wurde die Kopfgeometrie nicht nur hinsichtlich des thematisierten Inhalts weiterentwickelt, sondern auch hinsichtlich der Prozesse, auf die sie zielt.

Inhaltliche Weiterentwicklung

Weil „visualisieren“ nichts anderes als „graphisch bzw. visuell darstellen“ bedeutet, liegt es nahe, geometrische Inhalte zu thematisieren und Kopfgeometrie zu machen. Allerdings lassen sich auch Inhalte aus nichtgeometrischen Teilgebieten visualisieren, so zum Beispiel die Addition von Zahlen als das Aneinanderfügen von Längen oder die Konvergenz einer geometrischen Reihe als das stückweise Färben einer festen Strecke. Mit anderen Worten können auch nichtgeometrische Inhalte thematisiert und für *Kopfmathematik* genutzt werden. In der Grundschule spricht man auch vom „Sachrechnen im Kopf“ (Wittmann / Müller 2008).

Bereits Kerst hat auf die Rolle auch von „taktilen“, nichtvisuellen Vorstellungen hingewiesen (Kerst 1920). Von Bauersfeld und O’Brien stammt „Mathe mit geschlossenen Augen“ (2002), kopfmathematische Aufgaben zum Üben des taktilen, nichtvisuellen Erfassens von Zahlen und Formen.

Prozessuale Weiterentwicklung

Zur Auseinandersetzung mit Mathematik gehört nicht nur das Problemlösen, sondern auch das Modellieren, Argumentieren sowie Begriffsbilden. Entsprechend unterscheidet man Aufgaben zum Erkunden und Erfinden, Aufgaben zum Sammeln und Systematisieren sowie Aufgaben zum Üben und Reflektieren (Büchter / Leuders 2005). Deshalb kann auch Kopfmathematik mehr als Probleme stellen, die vorstellungsbasiert zu lösen sind.

Mit *mathematischen Vorstellungsübungen* (Weber 2010) liegen kopfmathematische Aufgaben vor, die auf unterschiedliche Prozesse zielen. Auch sie können ein Problem beschreiben, ohne dass in der beschriebenen Situation eine Strategie zu dessen Lösung vorgegeben wird: Sobald die Situation vergegenwärtigt ist, kann experimentiert, entdeckt und vermutet werden. Sie können aber auch schrittweise dazu anleiten, Objekte gedanklich zu konstruieren, zum Beispiel ein Ikosaeder oder Würfelquerschnitte. Dann zielen sie auf das Verfügbarmachen und Explorieren eines Themas.

Ein weitere Gruppe von Vorstellungsübungen liefert ein Plausibilitätsargument für einen Sachverhalt, etwa dass die Reihe 1/3 + 1/9 + 1/27 + … den Wert 1/2 hat. Sie stoßen Prozesse des plausiblen Schließens und präformalen Begründens an und unterstützen so Verstehensprozesse. Schließlich können sie auch einen kontraintuitiven (paradoxen) Sachverhalt beschreiben. Hierbei werden kognitive Konflikte angeregt, um mathematische Konzepte und Begriffe zu reflektieren und verstehen.

Damit ist die Weiterentwicklung der Kopfmathematik keineswegs am Ende. Wohin uns die mathematikdidaktische Zukunft weiter führen wird?

Literatur

Bauersfeld, H. / O'Brien, T. (2002): *Mathe mit geschlossenen Augen.* Verlag a. d. Ruhr.

Büchter, A. / Leuders, T. (2005): *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Leistung fördern, Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Kerst, B. (1920): Kopfgeometrie. In: *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen*, 51, 217–223.

Klein, F. (1926): *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Berlin: Springer (erhältlich unter *http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/*)

Krüger, K. (2000): *Erziehung zum funktionalen Denken*. Berlin: Logos.

Maier, P. (1999): *Räumliches Vorstellungsvermögen*. Donauwörth: Auer.

Owen, A. et al. (2010): Putting brain training to the test. In: *Nature*, 465, 775–778.

Treutlein, P. (1911): *Der geometrische Anschauungsunterricht*. Leipzig und Berlin: Teubner. (erhältlich unter *http://name.umdl.umich.edu/ABN2464.0001.001*)

Weber, C. (2010): *Mathematische Vorstellungsübungen – ein Handbuch für das Gymnasium*. Seelze: Klett und Kallmeyer.

Wittmann, E. / Müller, G. (2008): *Sachrechnen im Kopf*. Zug: Klett und Balmer.