

DORTMUNDER MODELL BAUWESEN

# ARCHITEKT UND INGENIEUR

Seung Jin Choi  
Halil Kiziltan

Zur Berechnung der Durchbiegungen von  
Stahlbetonplatten unter Berücksichtigung  
wirklichkeitsnaher Materialmodelle

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND  
SCHRIFTENREIHE BETONBAU  
Herausgeber: Professor Dr.-Ing. Reinhard Maurer

HEFT 5  
2014

**Zur Berechnung der Durchbiegungen von  
Stahlbetonplatten  
unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Materialmodelle**

M.Sc. Seung Jin Choi

Dr.-Ing. Halil Kiziltan

Die *Schriftenreihe Betonbau* der Technischen Universität Dortmund – Fakultät Architektur und Bauingenieurwesen umfasst Veröffentlichungen des Lehrstuhls Betonbau in den Bereichen Lehre, Forschung und Praxis.

**Herausgeber**

Univ. Prof. Dr.-Ing. Reinhard Maurer  
Lehrstuhl Betonbau  
Technische Universität Dortmund  
August-Schmidt-Str. 8  
44227 Dortmund

Eigenverlag der TU Dortmund, Fachbereich Architektur und Bauingenieurwesen

Heft 5 der Schriftenreihe Betonbau

Druck und Herstellung: Hitzegrad Print Medien & Service

© 2014 Lehrstuhl Betonbau der Technischen Universität Dortmund – Fakultät Architektur und Bauingenieurwesen

Alle Rechte vorbehalten

## Vorwort des Herausgebers

Die vorliegende Arbeit von Herrn M.Sc. Seung Jin Choi entstand während seines Aufenthalts am Lehrstuhl Betonbau der TU Dortmund in enger Zusammenarbeit mit Herrn Dr.-Ing- Halil Kiziltan.

Platten stellen im Betonbau die mit am häufigsten verwendeten Bauteile dar. Aufgrund ihrer großen Schlankheit ergibt sich die Plattendicke im Allgemeinen aus den Anforderungen an die Begrenzung der Durchbiegungen zur Vermeidung von Schäden an angrenzenden Bauteilen. Daher kommt der genauen Bestimmung der Durchbiegung zur Erfüllung der Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit eine große wirtschaftliche Bedeutung zu.

Die rechnerisch ermittelten Durchbiegungen sind naturgemäß immer mit Unsicherheiten behaftet, da viele maßgebende Parameter großen Streuungen unterliegen und daher schwierig zu quantifizieren sind. Hierzu gehören besonders die Werkstoffeigenschaften des Betons, wie Zugfestigkeit, E-Modul, Kriechen und Schwinden.

Von großem Einfluss sind insbesondere die Streuungen der Betonzugfestigkeit, da die maßgebenden Beanspruchungen häufig nahe dem Rissmoment liegen. Da das Rissmoment in gleichem Maße wie die Betonzugfestigkeit streut, kann dies zu großen Abweichungen zwischen den Rechenwerten und den tatsächlichen Durchbiegungen führen.

Die Größe der Durchbiegungen ist aber auch sehr stark abhängig von Systemparametern wie der Schlankheit und den Einspannbedingungen an den Auflagern.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen sich die Autoren in erster Linie mit den anzusetzenden Materialparametern und mit der realitätsnahen Modellierung des komplexen Werkstoffverhaltens von Stahlbeton. Ziel ist die zutreffende Vorhersage der Durchbiegung von Stahlbetonplatten unter Berücksichtigung der maßgebenden Einflussparameter, mit Hilfe nichtlinearer Simulationsberechnungen auf der Grundlage der FEM.

Prof. Dr.-Ing. Reinhard Maurer

März 2014



## Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
1.1	Problemstellung	4
1.1.1	Allgemeines	4
1.1.2	Begrenzung der Verformungen nach DIN 1045-1	6
1.1.3	Begrenzung der Verformungen nach DIN EN 1992-1-1	10
1.2	Zielsetzung	16
1.3	Aufbau der Arbeit	16
<b>2</b>	<b>Stand der Kenntnisse</b>	<b>17</b>
2.1	Allgemeines	17
2.2	Überblick über bisherige Ansätze für die wirksame Zugfestigkeit $f_{ct,eff}$ zur Berechnung der Durchbiegungen	18
2.3	Näherung nach Krüger/Mertzsch zur rechnerischen Abschätzung der Durchbiegung	18
2.4	Begrenzung der Biegeschlankheit nach Krüger/Mertzsch	20
2.5	Begrenzung der Biegeschlankheit nach Donaubauer	23
2.6	Begrenzung der Biegeschlankheit nach DIN 1045-1	26
2.7	Begrenzung der Biegeschlankheit nach DIN EN 1992-1-1	27
2.8	Vergleich der verschiedenen Kriterien für die Begrenzung der Biegeschlankheit	28
<b>3</b>	<b>Materialverhalten von Beton</b>	<b>29</b>
3.1	Verhalten unter kurzzeitiger einachsiger Druckbeanspruchung	29
3.1.1	Spannungs-Dehnungs-Linie	29
3.1.2	Elastizitätsmodul des Betons	30
3.2	Verhalten unter einachsiger Zugbeanspruchung	33
3.2.1	Zentrische Zugfestigkeit $f_{ct}$	33
3.2.2	Biegezugfestigkeit $f_{ct,fl}$	34
3.2.3	Zeitliche Entwicklung der Betonzugfestigkeit	38
3.2.4	Dauerstandzugfestigkeit	40
3.2.5	Einfluss einer Vorbelastung	44
3.3	Tastversuche zum Einfluss einer Vorbelastung auf die Zugfestigkeit	45
3.3.1	Versuchsaufbau	45
3.3.2	Versuchskörper	45
3.3.3	Kurzzeitversuche ohne und mit Vorbelastung	46
3.3.4	Dauerstandversuche ohne und mit Vorbelastung	49
3.3.5	Folgerungen	51
3.4	Physikalische Einflüsse auf die Zugfestigkeit des Betons	52

---

3.5	Vorschlag zum Ansatz der wirksamen Zugfestigkeit $f_{ct,eff}$ für die Berechnung der Durchbiegungen	53
3.6	Verhalten unter zweiachsiger Beanspruchung	54
3.7	Zeitabhängige Verformungen	57
3.7.1	Rheologisches Verhalten von Beton	57
3.7.2	Kriechen des Betons	58
3.7.3	Schwinden des Betons	63
<b>4</b>	<b>Auswirkungen aus dem zeitabhängigen Verformungsverhalten des Betons auf Querschnittsebene</b>	<b>69</b>
4.1	Infolge Schwindens des Betons	69
4.1.1	Nichtlinear verteilte Eigenspannungen	69
4.1.2	Querschnittskrümmung bei unsymmetrischer Bewehrung	70
4.1.3	Vergleichsrechnungen zur Größe der Schwindkrümmungen nach den verschiedenen Ansätzen	83
4.2	Infolge Kriechens des Betons	86
<b>5</b>	<b>Auswirkungen des zeitabhängigen Verhaltens von Beton auf Bauteilebene</b>	<b>88</b>
5.1	Durchbiegungen infolge Schwindens des Betons	88
5.2	Zunahme der Durchbiegungen infolge Kriechens des Betons	89
<b>6</b>	<b>Einflüsse aus dem Verbund zwischen Stahl und Beton</b>	<b>90</b>
<b>7</b>	<b>Rechenmodell und Modellierung des Werkstoffverhaltens</b>	<b>91</b>
7.1	Allgemeines	91
7.2	Layer-Modellierung	91
7.3	Modellierung der Rissbildung	93
7.4	Modellierung des Betons im Druckbereich	94
7.4.1	Einachsige Druckbeanspruchung	94
7.4.2	Zweiachsige Druckbeanspruchung	95
7.4.3	Berücksichtigung des Kriechens des Betons	95
7.5	Modellierung des Stahlbetons im Zugbereich	96
7.5.1	Parameter für die Modellierung	96
7.5.2	Anwendung auf dem Zugstab	97
7.5.3	Anwendung auf dem Biegebalken	98
7.5.4	Zusammenfassung und Folgerungen	104
7.6	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme	106
<b>8</b>	<b>Validierung durch Versuchsnachrechnung</b>	<b>107</b>
8.1	Einachsig gespannte Plattenstreifen, <i>Jaccoud/Favre</i>	107
8.1.1	System und Belastung	107
8.1.2	Materialkennwerte	108

---

8.1.3	Nachrechnung der Kurzzeitversuche ( $t=0$ )	112
8.1.4	Langzeitversuche	113
8.2	Zweiachsig gespannte Platten, <i>Jaccoud/Favre</i>	116
8.2.1	System und Belastung	116
8.2.2	Materialkennwerte	118
8.2.3	Ergebnisse der Versuchsnachrechnung	122
8.3	Zweiachsig gespannte, punktförmig gestützte Platten, <i>Jofriet/McNeice</i>	124
8.3.1	System und Belastung	124
8.3.2	Ergebnisse der Versuchsnachrechnung	125
<b>9</b>	<b>Parameterstudie an einachsig gespannten Plattenstreifen</b>	<b>126</b>
9.1	Bezugssystem	126
9.2	Einwirkungen	127
9.3	Durchbiegungen (linear und nichtlinear Berechnung, $t=0$ )	128
9.4	Durchbiegungen einschließlich der Anteile aus Kriechen und Schwinden (nichtlinear Berechnung, $t=\infty$ )	129
9.5	Einfluss aus dem Bewehrungsgrad	130
9.6	Einfluss aus der Systemlänge	131
9.7	Einfluss aus der Schlankheit	132
9.8	Zusammenfassung	133
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>134</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Problemstellung

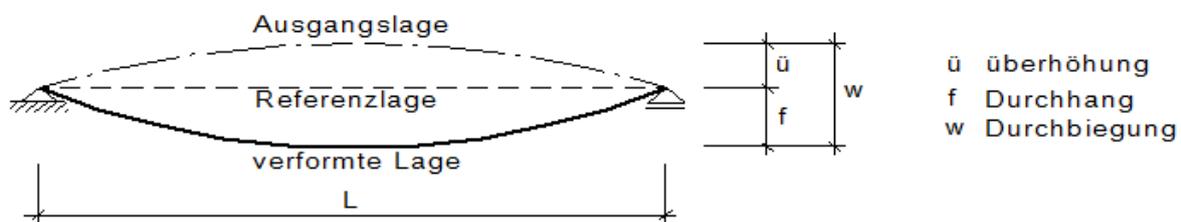
### 1.1.1 Allgemeines

Platten sind die am meisten verwendeten Tragelemente im Betonbau. Mit Betonplatten kann man horizontale Flächen beliebiger Form erzeugen. Sie werden mit einer zweiachsigen, den Beanspruchungen entsprechenden Bewehrung versehen.

Für Platten können viel größere Schlankheiten gewählt werden als für Balken. Das Verhalten von Betonplatten wird im Wesentlichen von ihrer Biegebeanspruchung dominiert. Im Allgemeinen stellt der Nachweis der Gebrauchstauglichkeit, d. h. insbesondere die Begrenzung der Durchbiegungen, das entscheidende Kriterium für die Wahl der Plattendicke dar. Die meisten Qualitätsmängel bei Platten resultieren aus zu großen Durchbiegungen in Verbindung mit Schäden an angrenzenden Bauteilen.

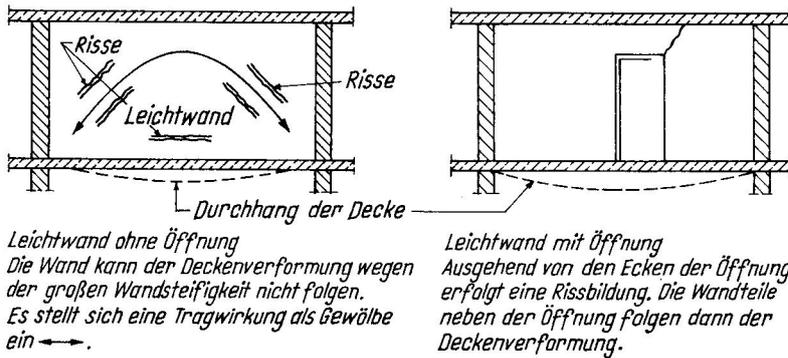
Der Nachweis der Gebrauchstauglichkeit, der vor allem die Durchbiegungen der Platten betrifft, erfolgt i. A. auf der Grundlage der Elastizitätstheorie. Allerdings können demgegenüber die Durchbiegungen durch das Entstehen von Rissen im Beton deutlich vergrößert werden. Durch die zeitabhängigen Einflüsse infolge Kriechens und Schwindens des Betons werden die Durchbiegungen zusätzlich spürbar erhöht. Die wirklichkeitsnahe Berücksichtigung dieser Einflüsse macht die Anwendung aufwendiger nichtlinearer Berechnungen notwendig. Die langfristigen Durchbiegungen von Stahlbetonplatten können unter Berücksichtigung der genannten Einflüsse ein Vielfaches der Werte für eine homogene Platte nach Elastizitätstheorie erreichen. Daneben haben die Auflagerverhältnisse und Einspannbedingungen einen großen Einfluss auf das Verformungsverhalten von Platten, was beim Tragwerksentwurf zu beachten ist.

Die vertikale Verformung einer Platte kann in Durchhang und Durchbiegung unterschieden werden (Bild 1). Die Durchbiegung ist die Differenz zwischen der Ausgangslage und der verformten Lage im belasteten Zustand. Der Durchhang hingegen bezieht sich auf die Verbindungslinie zwischen zwei Auflagerpunkten. Der Durchhang wird neben der Durchbiegung auch von der Form des Bauteils beim Betonieren bzw. Erhärten beeinflusst. So lässt sich eine Überhöhung der Schalung zur Verminderung des Durchhangs nutzen.



**Bild 1:** Biegeverformung eines Bauteils - Definition der Komponenten (aus [21])

Die Verformungen eines Bauteils oder eines Tragwerkes müssen zur Sicherstellung der Gebrauchstauglichkeit begrenzt werden. Diese Begrenzung ist zur Gewährleistung des Erscheinungsbildes (z. B. optisch störender Deckendurchhang), der Funktionsfähigkeit (z. B. Wasseransammlung auf Dachdecken) und auch zur Vermeidung von Schäden in anschließenden Bauteilen (z. B. Risse in nichttragenden Wänden, Schäden an Fassaden usw.) erforderlich.



**Bild 2:** Typische Schadenbilder in einer Trennwand infolge Durchbiegung der Deckenplatte (aus [100])

Die Durchbiegung von Deckenplatten kann zu Schäden an leichten Trennwänden führen, die oberhalb der betrachteten Decke errichtet werden (Bild 2). Bei leichten Trennwänden unterhalb einer Decke sind Schäden möglich, wenn die Wand ohne Ausgleichsmöglichkeit bis zur Deckenunterkante errichtet wird. Daher sind die Durchbiegungen von Bauteilen nach DIN 1045-1 bzw. DIN EN 1992-1-1 im Rahmen der Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit zu begrenzen.

### 1.1.2 Begrenzung der Verformungen nach DIN 1045-1

Nach DIN 1045-1 [19] gibt es für den Nachweis der Begrenzung der Verformungen von Stahlbetonbauteilen grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

- Vereinfachter Nachweis über die Begrenzung der Biegeschlankheit  $\ell_i/d$  (Abschnitt 11.3.2)
- Direkte Berechnung der Durchbiegungen unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination und Begrenzung der Durchbiegung auf 1/250 bzw. Begrenzung der Durchbiegung nach Einbau verformungsempfindlicher Bauteile auf 1/500 der Stützweite (Abschnitt 11.3.1)

Nach DIN 1045-1, 11.3.2 kann der Nachweis der Begrenzung der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen vereinfachend durch die Begrenzung der Biegeschlankheit  $\ell_i/d$  geführt werden. Für Deckenplatten aus Normalbeton des üblichen Hochbaus sind folgende Grenzwerte der Biegeschlankheit einzuhalten.

Im Allgemeinen:

$$\frac{\ell_i}{d} \leq 35 \quad \text{bzw.} \quad d \geq \frac{\ell_i}{35} \quad (\ell_i \text{ in m}) \quad (1.1)$$

Mit diesem Kriterium soll sichergestellt werden, dass die Durchbiegung auf  $\ell_{\text{eff}}/250$  begrenzt wird.

Bei erhöhten Anforderungen:

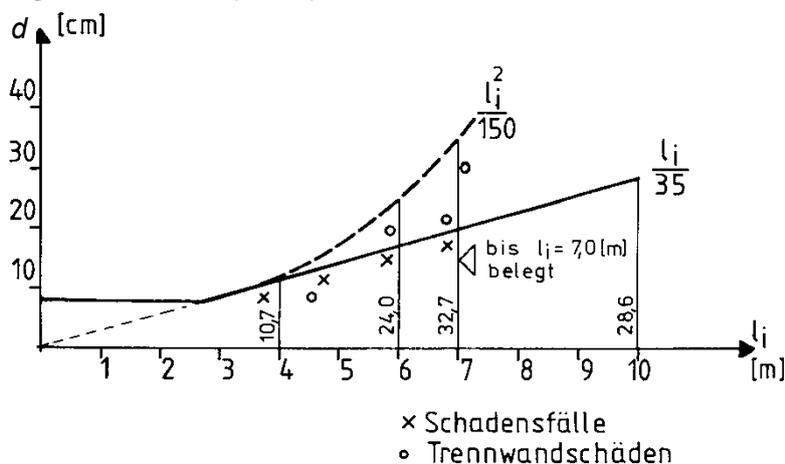
$$\frac{\ell_i}{d} \leq \frac{150}{\ell_i} \quad \text{bzw.} \quad d \geq \frac{\ell_i^2}{150} \quad (\ell_i \text{ in m}) \quad (1.2)$$

Hiermit soll sichergestellt werden, dass der Zuwachs an Durchbiegungen nach dem Einbau verformungsempfindlicher Bauteile (leichte Trennwände) auf  $\ell_{\text{eff}}/500$  begrenzt wird.

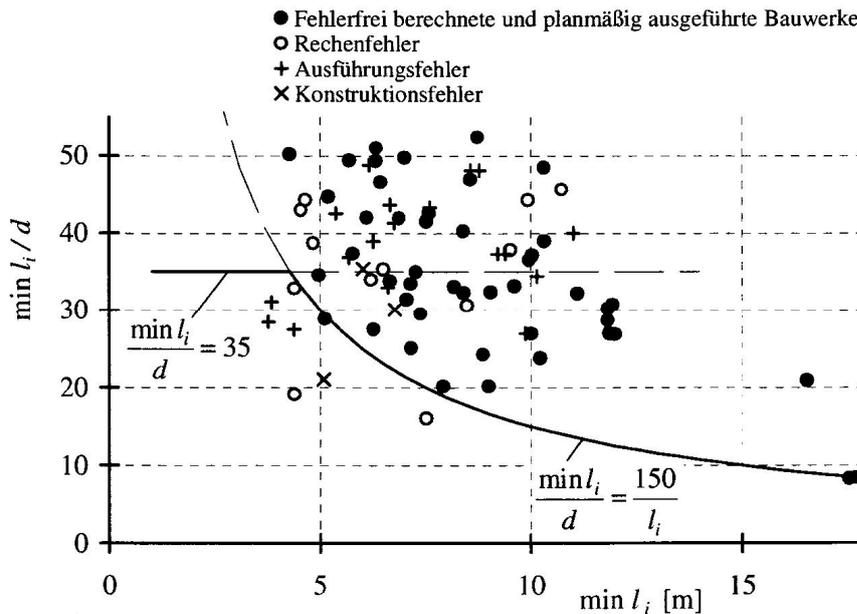
Dabei ist:

- $\ell_i$  Ersatzstützweite
- $\ell_{\text{eff}}$  effektive Stützweite
- $d$  statische Nutzhöhe

Es handelt sich hierbei um empirische Formeln, die auf der Grundlage einer Schadensanalyse abgeleitet wurden (Bild 3).



**Bild 3:** Begrenzung der Biegeschlankheit auf der Grundlage einer Schadenanalyse nach DAfStb Heft 193 (aus [74])



**Bild 4:** Bestimmung der Grenزشlankheiten von Stahlbetonbauteilen zur Vermeidung von Trennwandschäden nach Mayer/Rüsch (aus [74])

In Bild 4 ist die Kurve für die Grenزشlankheit zur Vermeidung von Schäden in nichttragenden Trennwänden in Relation zu den festgestellten Schadenfällen dargestellt.

Die Begrenzung der Durchbiegungen von Platten aus Stahlbeton durch die Begrenzung der Biegeschlankheit nach DIN 1045-1 stellt ein einfaches Näherungsverfahren dar, das in den 1960er Jahren rein empirisch auf der Grundlage einer Schadensstatistik von Mayer/Rüsch entwickelt wurde [74]. Darin sind Schadenfälle an 181 Deckenplatten infolge zu großer Verformungen gesammelt, von denen 115 ausreichend beurteilt werden konnten. Seitdem wurden sowohl die Bemessungsverfahren, als auch die Baustoffe, die heute deutlich höher ausgenutzt werden, weiterentwickelt. Dies hat zur Folge, dass die Eingangsgrößen des Näherungsverfahrens für die Verhältnisse in der heutigen Zeit nicht mehr ohne weiteres zutreffen.

Die Begrenzung der Verformungen nach DIN 1045-1, 11.3 stellt ein wesentliches Kriterium für die Wahl der Bauteildicke dar, insbesondere bei Platten des Hochbaus. Die Einhaltung der empfohlenen Grenzwerte für die zulässigen Durchbiegungen von  $L/250$  bzw.  $L/500$  kann allerdings mit dem Biegeschlankheitskriterium entsprechend DIN 1045-1, 11.3.2 nicht in allem Fällen sichergestellt werden. Dann empfiehlt sich ggf. ein rechnerischer Nachweis der Durchbiegungen durch eine direkte Berechnung.

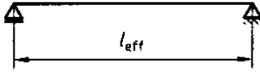
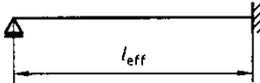
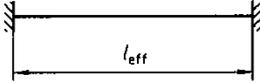
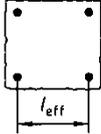
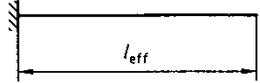
Die rechnerische Ermittlung der Durchbiegungen kann insbesondere bei einachsig gespannten Bauteilen mit einem für Handrechnungen geeigneten Näherungsverfahren erfolgen, welches bei einer realistischen Abschätzung der Biegesteifigkeiten im Zustand II ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Alternativ können die Durchbiegungen unter Anwendung aufwendiger nichtlinearer Berechnungen unter Ansatz wirklichkeitsnaher Stoffgesetze nach DIN 1045-1, 8.5.1 im Gebrauchszustand ermittelt werden ([33], [39], [62]).

Für die Begrenzung der Biegeschlankheit wird die Ersatzstützweite  $l_i$  benötigt. Diese ist abhängig von statischem System (Tabelle 1). Der Beiwert  $\alpha$  kann für häufig vorkommende Anwendungsfälle aus Tabelle 1 entnommen werden.

Für Flächentragwerke ist die Ersatzstützweite  $l_i$  bei linienförmiger Lagerung mit der kürzeren, bei punktförmiger Lagerung mit der längeren Feldspannweite zu ermitteln. Rand- und Innenfelder durchlaufender Bauteile dürfen nach Tabelle 1, Zeile 2 bzw. 3 behandelt werden, sofern das Verhältnis angrenzender effektiver Stützweiten im Bereich  $0,8 < l_{\text{eff},1}/l_{\text{eff},2} < 1,25$  liegt.

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, darf als Ersatzstützweite  $l_i$  der Abstand der Momentennullpunkte angesetzt werden. Hierfür ist der Momentenverlauf mit der quasiständigen Einwirkungskombination zu bestimmen.

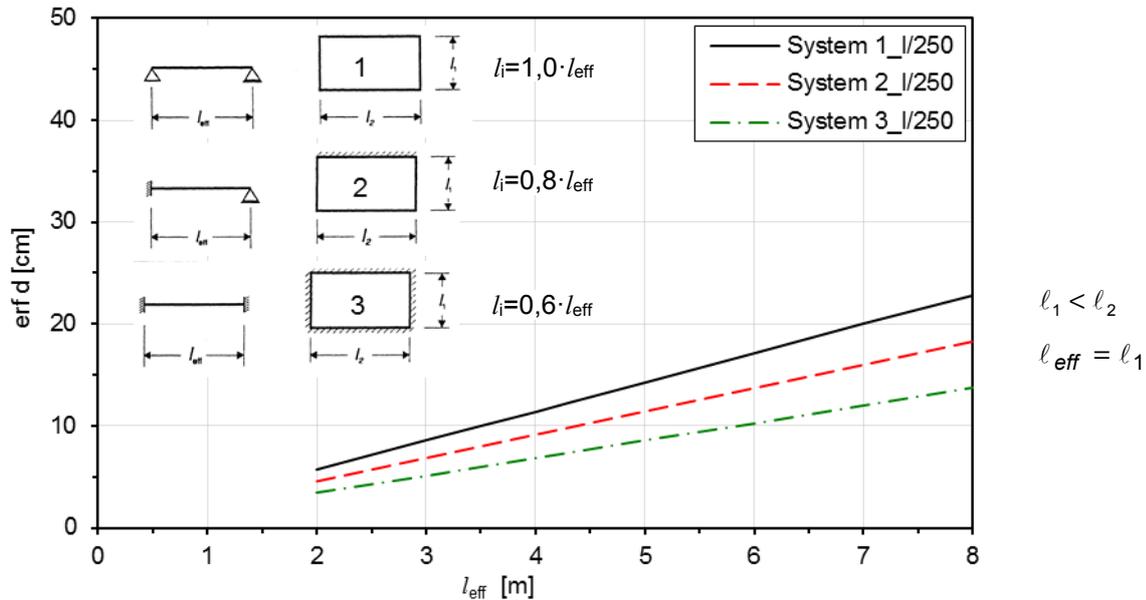
Tabelle 1: Beiwerte  $\alpha_i$  zur Bestimmung der Ersatzstützweite nach DIN 1045-1

Spalte	1	2
Zeile	Statisches System	
		$\alpha = l_i/l_{\text{eff}}$
1		1,00
2		0,80
3		0,60
4		Innenfeld 0,70 <sup>a</sup> Randfeld 0,90 <sup>a</sup>
5		2,4

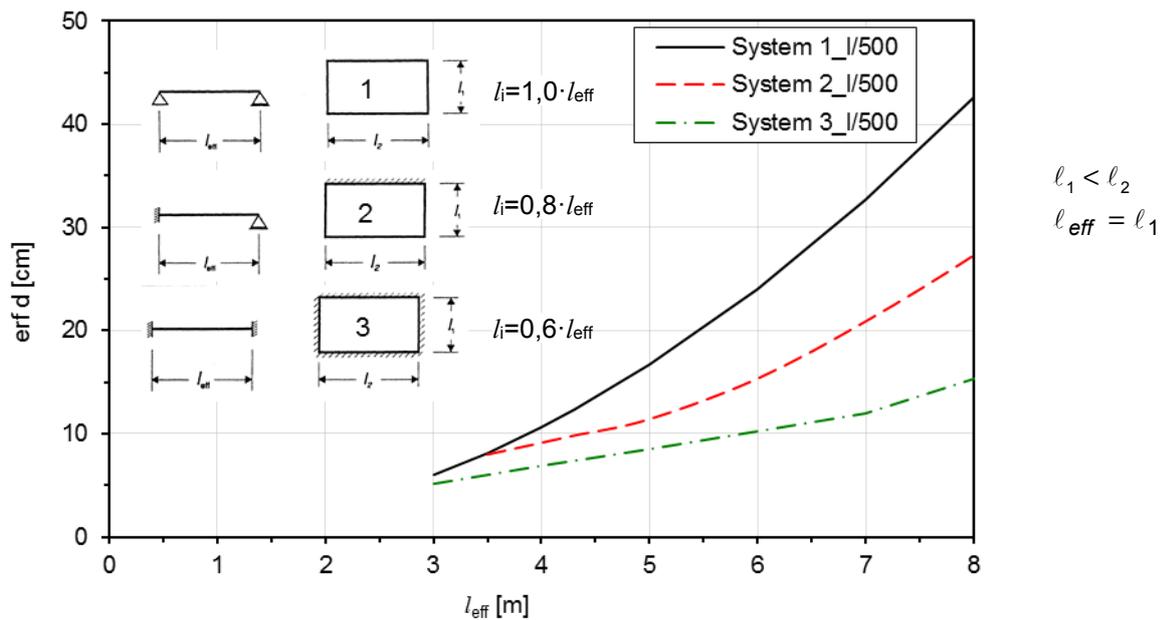
<sup>a</sup> Bei Platten mit Beton ab der Festigkeitsklasse C30/37 dürfen diese Werte um 0,1 abgemindert werden.

Die Beiwerte  $\alpha$  können sowohl für einachsig als auch für zweiachsig gespannte Stahlbetonplatten angewendet werden.

In Bild 5 und Bild 6 sind beispielhaft die statischen Nutzhöhen aus der Begrenzung der Biegeschlankheit nach DIN 1045-1 für eine allseitig freidrehbare gelagerte Rechteckeplatte sowie für das Randfeld und das Innenfeld einer Durchlaufplatte in Abhängigkeit von der Stützweite aufgetragen. Da es sich um zweiachsig gespannte Platten handelt, wurde gemäß DIN 1045-1 jeweils die kürzere Spannweite für  $l_{\text{eff}}$  zugrunde gelegt. Der günstige Einfluss aus einer Randeinspannung ist daraus sehr deutlich zu erkennen. Bis zu einer Ersatzstützweite von  $l_i \leq 4,3\text{m}$  ist stets die Bedingung  $d \geq l_i/35$  maßgebend.



**Bild 5:** Erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit von Spannweite und statischem System nach dem Biegeschlankheitskriterium der DIN 1045-1 ( $d=l_i/35$ )



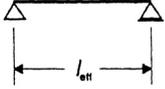
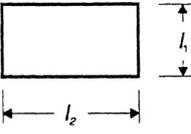
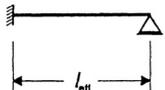
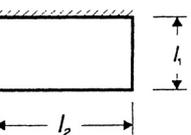
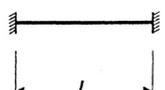
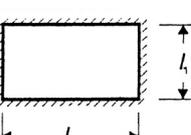
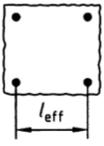
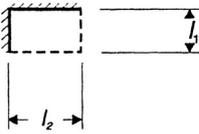
**Bild 6:** Erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit von Spannweite und statischem System nach dem Biegeschlankheitskriterium der DIN 1045-1 ( $d=l_i^2/150$ )

### 1.1.3 Begrenzung der Verformungen nach DIN EN 1992-1-1

#### Begrenzung der Verformungen ohne direkte Berechnung

Die seit dem 1. Juli 2012 für Deutschland gültige europäische Norm DIN EN 1992-1-1 enthält ebenfalls Regelungen zur Begrenzung der Durchbiegungen von Bauteilen aus Stahlbeton. Auch in DIN EN 1992-1-1 ist ein vereinfachter Nachweis über die Begrenzung der Biegeschlankheit der Bauteile enthalten. Die entsprechenden Grenzwerte sind in Tabelle 2 enthalten. Sie wurden auf der Grundlage nichtlinearer Berechnungen aus Parameterstudien abgeleitet.

Tabelle 2: Beiwert  $K$  zur Berücksichtigung der statischen Systeme für die Biegeschlankheit von Stahlbetonbauteilen

	Statisches System		$K$	Beton hoch beansprucht $\rho=1,5\%$	Beton gering beansprucht $\rho=0,5\%$
	Stabtragwerk	Platte			
1			1,0	14	20
2			1,3	18	26
3			1,5	20	30
4			1,2	17	24
5			0,4	16	8

ANMERKUNG 1 Die angegebenen Werte befinden sich in der Regel auf der sicheren Seite, und genauere rechnerische Nachweise führen häufig zu dünneren Bauteilen.

ANMERKUNG 2 Für zweiachsig gespannte Platten ist in der Regel der Nachweis auf Grundlage der kürzeren Stützweite durchzuführen. Bei Flachdecken ist in der Regel die größere Stützweite zugrunde zu legen.

ANMERKUNG 3 Die für Flachdecken angegebenen Grenzen sind weniger streng als der zulässige Durchhang von  $1/250$  der Stützweite. Erfahrungsgemäß ist dies ausreichend.

Als typische Lastgeschichte im Hochbau zur Berücksichtigung des Kriechens wurde dabei empfohlen [30].

- Zeitpunkt  $t_1=10d$ : Aufbringen der Eigenlast  $G_1$  des Tragwerkes
- Zeitpunkt  $t_2=60d$ : Aufbringen der restlichen Eigenlast (Ausbau)  $G_2$
- Zeitpunkt  $t_3=365d$ : quasi-ständige Einwirkungskombination  $G_1 + G_2 + (\psi_2 \cdot Q)$

In der Tabelle 2 zugrunde liegenden Studie wurden folgende Parameter untersucht [30].

- Berücksichtigung der Lastgeschichte in 3 Stufen zu den Zeitpunkten  $t_1, t_2, t_3$
- Durchhangbegrenzung  $\leq l/250$
- Durchbiegungsbegrenzung zur Vermeidung von Rissen an empfindlichen Bauteilen  $\leq l/500$
- Relative Luftfeuchte zwischen 50% und 80% für Kriech- und Schwindbeiwerte
- Verhältnis von vorhandener zur erforderlicher Bewehrung im GZT bis zu einem Verhältnis  $A_{s,prov}/A_{s,req} \leq 1,10$  aufgrund üblicher Aufrundung bei der Bewehrungswahl
- Betonfestigkeiten, Bewehrungsgrade,
- Lastverhältnisse mit  $\psi_2=0,3$ 
  - Einachsig gespannte Platten:  $G_1/E_{tot} = 0,45$ ;  $G_2/E_{tot} = 0,30$ ;  $(\psi_2 \cdot Q)/E_{tot} = 0,075$
  - Flachdecken:  $G_1/E_{tot} = 0,60$ ;  $G_2/E_{tot} = 0,20$ ;  $(\psi_2 \cdot Q)/E_{tot} = 0,060$

Im Allgemeinen sind Durchbiegungsberechnungen nicht erforderlich, wenn die Biegeschlankheit nach DIN EN 1992-1-1 entsprechend Gl. (1.3) bzw. (1.4) begrenzt wird. Genauere Nachweise sind erforderlich, wenn die Biegeschlankheit nicht eingehalten wird oder andere Randbedingungen oder Durchbiegungsgrenzen als die dem vereinfachten Verfahren zugrunde liegenden bestehen.

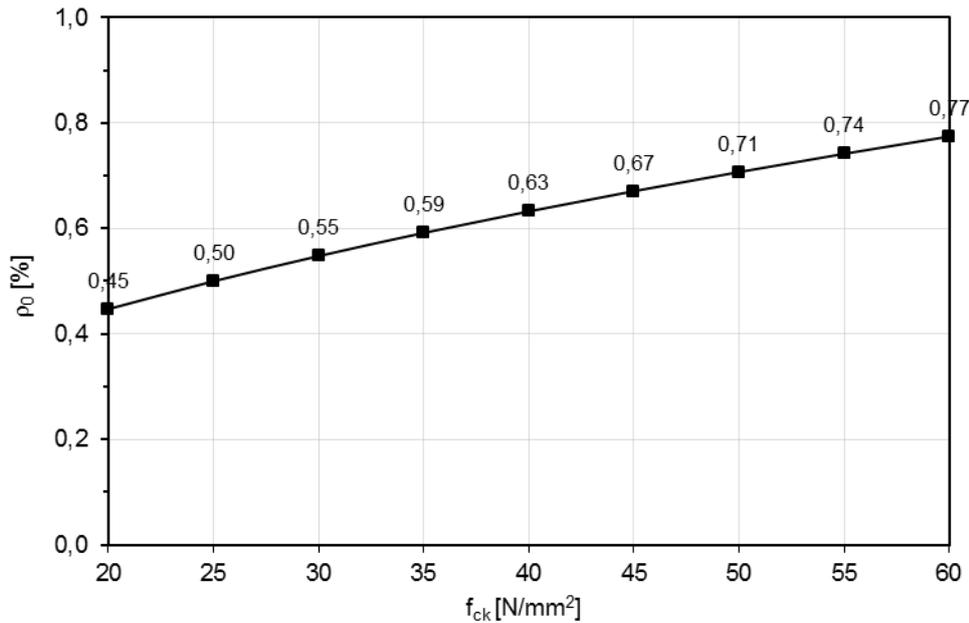
Die zulässigen Biegeschlankheiten in DIN EN 1992-1-1 berücksichtigen den Einfluss der Belastung über den erforderlichen Längsbewehrungsgrad  $\rho$  bzw.  $\rho'$  und die Betonfestigkeit über  $f_{ck}$ . Die Biegeschlankheitsgrenzen werden mit der Gl. (1.3) für gering und mäßig bewehrte und mit Gl. (1.4) für hochbewehrte Bauteile (ggf. mit Druckbewehrung) ermittelt. Die Unterscheidung erfolgt mit einem von der Betonfestigkeit abhängigen Referenzbewehrungsgrad  $\rho_0$ , der in Bild 7 grafisch aufgetragen ist. Die Längsbewehrungsgrade für Decken im üblichen Hochbau liegen i. d. R. unter 0,4%, so dass für viele übliche Fälle nur Gl. (1.3) ausgewertet werden muss.

$$\frac{\ell}{d} = K \cdot \left[ 11 + 1,5\sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2\sqrt{f_{ck}} \cdot \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{3/2} \right] \leq \left( \frac{\ell}{d} \right)_{\max} \quad \text{wenn } \rho \leq \rho_0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\ell}{d} = K \cdot \left[ 11 + 1,5\sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12}\sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}} \right] \leq \left( \frac{\ell}{d} \right)_{\max} \quad \text{wenn } \rho > \rho_0 \quad (1.4)$$

Dabei ist:

- $\ell/d$  Grenzwert der Biegeschlankheit (Verhältnis von Stützweite zu Nutzhöhe)
- $K$  Beiwert zur Berücksichtigung der verschiedenen statischen Systeme nach Tabelle 2
- $\rho_0$  Referenzbewehrungsgrad;  $\rho_0 = \sqrt{f_{ck}} \cdot 10^{-3}$  mit  $f_{ck}$  in  $N/mm^2$
- $\rho$  erforderlicher Zugbewehrungsgrad in Feldmitte, um das Bemessungsmoment aufzunehmen (am Einspannquerschnitt für Kragträger)
- $\rho'$  erforderlicher Druckbewehrungsgrad in Feldmitte, um das Bemessungsmoment aufzunehmen (am Einspannquerschnitt für Kragträger)



**Bild 7:** Referenzbewehrungsgrad  $\rho_0$  in Abhängigkeit von der Betonfestigkeit  $f_{ck}$

Die Gl. (1.3) und Gl. (1.4) sind unter der Voraussetzung hergeleitet worden, dass die Stahlspannung unter der entsprechenden Bemessungslast im GZG in einem gerissenen Querschnitt in Feldmitte eines Balkens bzw. einer Platte oder am Einspannquerschnitt eines Kragträgers  $310 \text{ N/mm}^2$  beträgt (entspricht ungefähr  $f_{yk}=500 \text{ N/mm}^2$ ). Werden andere Spannungsniveaus verwendet, sind in der Regel die nach Gl. (1.3) ermittelten Werte mit  $310/\sigma_s$  zu multiplizieren. Im Allgemeinen befindet man sich mit der Annahme nach Gl. (1.5) auf der sicheren Seite:

$$\frac{310}{\sigma_s} = \frac{500}{f_{yk}} \cdot \frac{A_{s,prov}}{A_{s,req}} \quad (1.5)$$

Dabei ist:

$\sigma_s$  die Stahlzugspannung in Feldmitte (am Einspannquerschnitt eines Kragträgers) unter der Bemessungslast im GZG

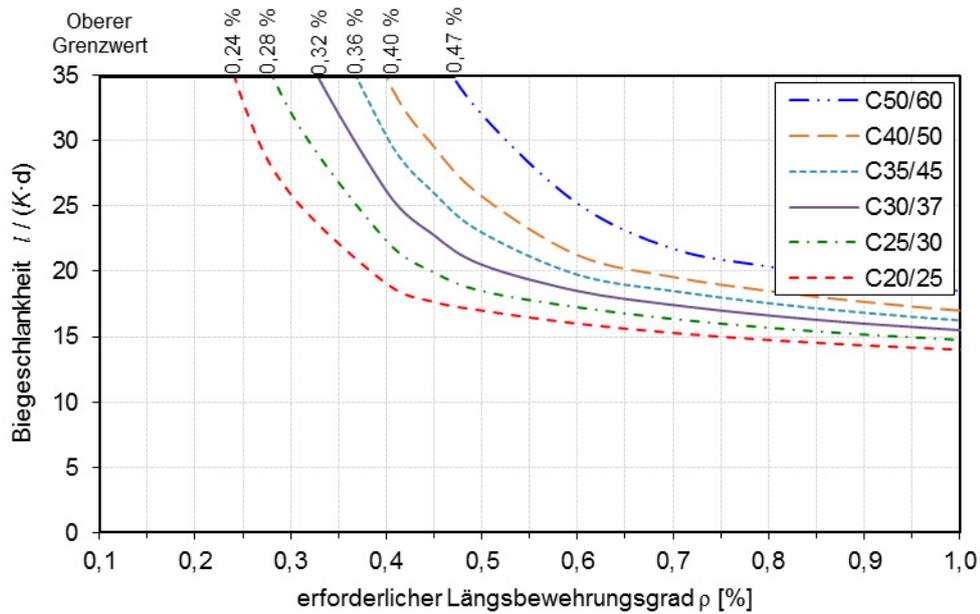
$A_{s,prov}$  die vorhandene Querschnittsfläche der Zugbewehrung im vorgegebenen Querschnitt

$A_{s,req}$  die erforderliche Querschnittsfläche der Zugbewehrung im vorgegebenen Querschnitt im Grenzzustand der Tragfähigkeit

Bei Anwendung der Gl. (1.3) und (1.4) ergeben sich in der Regel größere Grenزشlankheiten  $l/d$  als die entsprechenden Grundwerte in Tabelle 2. Zusätzlich fordert DIN EN 1992-1-1, dass die Biegeschlankheiten nach (1.3) bzw. (1.4) allgemein auf die Maximalwerte  $l/d \leq K \cdot 35$  und bei Bauteilen, die verformungsempfindliche Ausbauelemente beeinträchtigen können, auf  $l/d \leq K^2 \cdot 150/l$  begrenzt werden.

Bei Balken und Platten (außer Flachdecken) mit Stützweiten über 7 m, die leichte Trennwände tragen, die durch übermäßige Durchbiegung beschädigt werden könnten, sind in der Regel die Werte  $l/d$  nach Gl. (1.3) mit dem Faktor  $7/l_{eff}$  ( $l_{eff}$  [m]) zu multiplizieren.

Bei Flachdecken mit Stützweiten über 8,5 m, die leichte Trennwände tragen, die durch übermäßige Durchbiegung beschädigt werden könnten, sind in der Regel die Werte  $l/d$  nach Gl. (1.3) mit dem Faktor  $8,5/l_{eff}$  ( $l_{eff}$  [m]) zu multiplizieren.



**Bild 8:** Grenzwerte der Biegeschlankheiten nach DIN EN 1992-1-1 bei einer Begrenzung auf  $l/250$  bis  $\rho \leq 1,0\%$  (ohne Druckbewehrung:  $\rho' = 0$ )

In Bild 8 ist der Einfluss aus der Höhe der Beanspruchung, die sich über den erforderlichen Bewehrungsgrad  $\rho$  auswirkt, auf den Grenzwert der Biegeschlankheit nach Gl. (1.3) und Gl. (1.4) für verschiedene Betonfestigkeitsklassen dargestellt. In Bild 8 sind zusätzlich die Grenzbewehrungsgrade  $\rho_{lim}$ , bei denen die maximal zugelassene Biegeschlankheit  $l/(K \cdot d) = 35$  überschritten wird, eingetragen. Für Deckenquerschnitte mit  $\rho_{erf} > \rho_{min}$  gelten nunmehr strenge Biegeschlankheitsgrenzen als nach DIN 1045-1. Es ist zu erkennen, dass für schwach beanspruchte Tragwerke mit einem geringen erforderlichen Zugbewehrungsgrad ( $\rho \leq 0,5\%$ ) dieser einen erheblichen Einfluss auf die zulässige Biegeschlankheit hat.

### **Begrenzung der Verformungen mit direkter Berechnung**

Wenn eine Berechnung erforderlich wird, muss nach DIN EN 1992-1-1 die Durchbiegung mit einer dem Nachweiszweck entsprechenden Lastkombination ermittelt werden.

Das Berechnungsverfahren muss das Verhalten des Tragwerks unter den maßgebenden Einwirkungen wirklichkeitsnah und mit ausreichender Genauigkeit beschreiben.

Bauteile, bei denen die Betonzugfestigkeit unter der maßgebenden Belastung an keiner Stelle überschritten wird, dürfen als ungerissen betrachtet werden. Das Verhalten von Bauteilen, bei denen nur bereichsweise Risse erwartet werden, liegt zwischen dem von Bauteilen im ungerissenen und im vollständig gerissenen Zustand. Für überwiegend biegebeanspruchte Bauteile lässt sich dieses Verhalten näherungsweise nach DIN EN 1992-1-1 mit Gl. (1.6) bestimmen:

$$\alpha = \zeta \cdot \alpha_I + (1 - \zeta) \cdot \alpha_{II} \quad (1.6)$$

Dabei ist:

$\alpha, \alpha_{II}$  der jeweilige Wert des untersuchten Parameters für den ungerissenen bzw. reinen gerissenen Zustand

$\zeta$  ein Verteilungsbeiwert (berücksichtigt die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen) nach Gl. (1.7)

$$\zeta = 1 - \beta \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (1.7)$$

$\zeta=0$  für ungerissenen Querschnitte

$\beta$  ein Koeffizient, der den Einfluss der Belastungsdauer und der Lastwiederholung berücksichtigt

0,5 bei Langzeitbelastung

Dieses Verfahren ist auch für Handrechnungen geeignet. Darüber hinaus können die Durchbiegungen von Stahlbetonplatten mit nichtlinearen Verfahren auf der Grundlage der Finiten Elemente Methode (FEM) ermittelt werden. Dabei kommt der möglichst wirklichkeitsnahen Modellierung des nichtlinearen Stahlbetonwerkstoffverhaltens eine zentrale Bedeutung zu.

Die wahrscheinlich auftretenden Durchbiegungen von überwiegend auf Biegung beanspruchten Stahlbetonbauteilen hängen von teilweise stark streuenden Einflussparametern ab, die zum Teil zeitabhängig sind und darüber hinaus nicht nur von Bauteil zu Bauteil, sondern auch im Bauteil selbst streuen. Außerdem spielt der Übergang in den gerissenen Zustand II eine nennenswerte Rolle, da dabei die Steifigkeit des Bauteils erheblich reduziert wird. Wesentliche Einflussparameter für die Größe der Durchbiegungen von Stahlbetonplatten sind:

#### *Zeitunabhängige Einflüsse*

- Zugfestigkeit des Betons unter Kurzzeitbeanspruchung
- Elastizitätsmodul des Betons
- Bewehrungsgrad
- Tragsystem: einachsiger- oder zweiachsige Lastabtrag, Auflagerbedingungen
- Höhe der Belastung

### *Zeitabhängige Einflüsse*

- Kriechen und Schwinden des Betons (Umgebungsbedingungen)
- Zugfestigkeit des Betons unter Dauerbeanspruchung
- Belastungsbeginn

Bei der Ermittlung der Durchbiegungen von Stahlbetonplatten kommt der möglichen Streubreite der Betonzugfestigkeit eine signifikante Bedeutung zu. Dies gewinnt zusätzlich an Bedeutung, da die maßgebliche Belastung für die Durchbiegungen zu Beanspruchungen nahe dem Rissmoment führt. Das Rissmoment streut aber im gleichen Maße wie die Betonzugfestigkeit. Dieser Effekt kann zu großen Abweichungen zwischen den rechnerischen und tatsächlichen Durchbiegungen führen. Andere Einflüsse können ebenfalls zu deutlichen Abweichungen zwischen Rechenwerten und tatsächlichen Werten führen.

Der Betonzugfestigkeit kommt daher eine wesentliche Bedeutung zu. Deshalb sind die physikalischen Einflüsse auf die Zugfestigkeit (Maßstabeffekt, Dauerstandzugfestigkeit, Eigenspannungen, Nacherhärtung) angemessen zu berücksichtigen. Die möglichst realistische Erfassung von Kriechen und Schwinden ist ebenfalls wesentlich für eine wirklichkeitsnahe Berechnung der Langzeitverformung. Diese Einflüsse erhöhen die Verformungen ganz erheblich und sind unbedingt zu berücksichtigen.

### ***Zusammenfassende Wertung***

Aufgrund der Vielzahl dieser oben erwähnten Einflüsse und der natürlichen Streuungen wesentlicher Werkstoffkenngrößen ist es schwierig, die Durchbiegung einer Stahlbetonplatte mit Hilfe eines einfachen Näherungsverfahrens für die Anwendung in der Praxis realistisch abzuschätzen. Es wird deutlich, dass die wahrscheinlich auftretenden Durchbiegungen nicht exakt berechnet, sondern lediglich in einer gewissen Bandbreite wirklichkeitsnah abgeschätzt werden können selbst bei Anwendung nichtlinearer Verfahren auf der Grundlage der FEM.

## 1.2 Zielsetzung

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung einer geeigneten Modellierung für das nichtlineare und zeitabhängige Materialverhalten von Stahlbetonplatten für eine wirklichkeitsnahe Berechnung bzw. Abschätzung der Durchbiegungen. Hierbei sind die wesentlichen kurz- und langzeitigen Einflüsse auf die Durchbiegungen zu berücksichtigen.

Insbesondere sind für die wirklichkeitsnahe Berechnung der Durchbiegungen die systematischen physikalischen Einflüsse auf die Zugfestigkeit des Betons zu berücksichtigen. Auf dieser Grundlage ist die rechnerisch wirksame Zugfestigkeit  $f_{ct,eff}$  zu ermitteln.

Die Validierung des Rechenmodells einschließlich der verwendeten Materialmodelle erfolgt durch die Nachrechnung von Versuchen.

## 1.3 Aufbau der Arbeit

Nach einer allgemeinen Einführung in die Problematik in Kapitel 1 wird in Kapitel 2 ein Überblick über den bisherigen Stand der Kenntnisse gegeben.

Anschließend wird im Kapitel 3 das Materialverhalten von Beton und Betonstahl sowie das Verbundverhalten zwischen Bewehrung und Beton beschrieben. Darüber hinaus wird das zeitabhängige Verhalten (Kriechen, Schwinden) behandelt. Insbesondere werden die physikalischen Einflüsse auf die Zugfestigkeit des Betons eingehend diskutiert. In diesem Zusammenhang wurde ein Tastversuch zum Einfluss einer Vorbelastung auf  $f_{ct,eff}$  durchgeführt. Es wird ein Vorschlag für die in den Berechnungen anzusetzende effektiv wirksame Zugfestigkeit des Betons  $f_{ct,eff}$  für die Berechnung der Durchbiegungen zum Zeitpunkt  $t=0$  und  $t=\infty$  formuliert.

In Kapitel 4 wird auf die Auswirkungen des zeitabhängigen Verhaltens von Beton auf Querschnittebene und in Kapitel 5 auf Bauteilebene eingegangen. In Kapitel 6 geht es um den Einfluss aus dem Verbund zwischen Beton und Stahl.

In Kapitel 7 werden das Rechenmodell und die Modellierung des Werkstoffverhaltens für die wirklichkeitsnahe Berechnung der Durchbiegungen von Stahlbetonplatten beschrieben. Die numerischen Simulationsberechnungen erfolgen mit Hilfe des Programmsystems SOFiSTiK.

Kapitel 8 enthält zur Validierung des Rechenmodells Versuchsnachrechnungen von durchgeführten Kurzzeit- und Langzeit-Versuchen an ein- und zweiachsig gespannten Stahlbetonplatten. Die Versuchsnachrechnungen erfolgen mit dem FEM Programmsystem SOFiSTiK.

Das letzte Kapitel bietet einen zusammenfassenden Überblick über diese Arbeit.

## 2 Stand der Kenntnisse

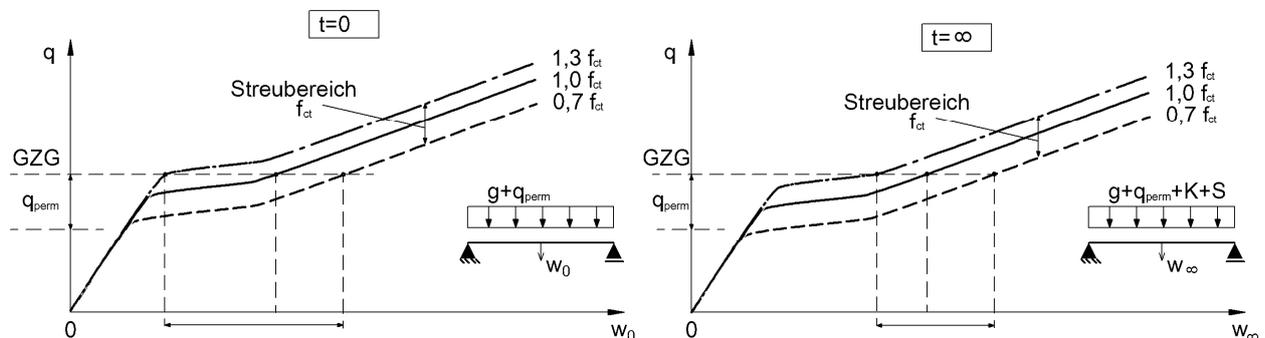
### 2.1 Allgemeines

Zum Kurzzeit- und Langzeitverhalten des Betons unter Zugbeanspruchung liegen verschiedene Untersuchungen vor. Die Zugfestigkeit des Betons, die nur ungefähr 1/10 seiner Druckfestigkeit beträgt, wird im Allgemeinen bei der Biegebemessung im GZT vernachlässigt. Zur Beurteilung des Trag- und Verformungsverhaltens eines Stahlbetonbauteils spielt die Zugfestigkeit des Betons jedoch eine sehr wichtige Rolle. So wird die Betonzugfestigkeit bei der Ermittlung des Rissmoments  $m_{cr}$  sowie bei der versteifenden Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (Tension Stiffening) in Ansatz gebracht. Die Risschnittgrößen sind direkt proportional zur Zugfestigkeit des Betons.

$$M_{cr} = f_{ct} \cdot W \quad (\text{Rissmoment, nur Biegung})$$

Die Zugfestigkeit des Betons beeinflusst das Verhalten beim Übergang vom ungerissenen in den gerissenen Zustand und wirkt sich daher sehr stark auf die Steifigkeiten und Verformungen aus. Daher ist das Verhalten von Beton unter Zugbeanspruchung bei Stahlbetonkonstruktionen von großer Bedeutung.

Die Zugfestigkeit des Betons hat einen sehr großen Einfluss auf die Durchbiegung, da vor allem bei Platten des üblichen Hochbaus die Lasten im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (GZG) häufig in der Nähe bzw. geringfügig über der Risslast liegen. Desweiteren ist das zeitabhängige Verformungsverhalten infolge Kriechens und Schwindens (K+S) des Betons von maßgeblicher Bedeutung (Bild 9).



**Bild 9:** Schema der Durchbiegungen zum Zeitpunkt  $t=0$  und  $t=\infty$  bei Stahlbetonplatten unter einer quasi-ständigen Belastung in Abhängigkeit von den unterschiedlichen Betonzugfestigkeiten  
links: ohne K+S, Kurzezeitfestigkeit  $f_{ct}$   
rechts: mit K+S, Dauerstandfestigkeit  $f_{ct}$

Mit der wirklichkeitsnahen Modellierung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens von Stahlbeton unter Gebrauchsniveau beschäftigen sich die Arbeiten von Krüger/Mertzsch sowie von Donaubaier. Auf dieser Grundlage führen sie in [33], [61], [63] umfangreiche Parameterstudien zum Durchbiegungsverhalten von Stahlbetonplatten durch.

Da sich die Biegeschlankheit  $\lambda = l/d$  als wesentlicher Einflussparameter herausgestellt hat, beruhen viele Näherungsverfahren zur Begrenzung der Durchbiegungen von Platten auf der Einhaltung eines Grenzwertes für die Biegeschlankheit. Da die Grenzwerte für die Biegeschlankheiten teilweise aus wirklichkeitsnahen Durchbiegungsberechnungen abgeleitet wurden, werden diese nachfolgend dargestellt.

## 2.2 Überblick über bisherige Ansätze für die wirksame Zugfestigkeit $f_{ct,eff}$ zur Berechnung der Durchbiegungen

Die im Bauteil effektive ausnutzbare Zugfestigkeit für das Rissmoment  $M_{cr}$  bei der Berechnung der Durchbiegungen zum Zeitpunkt  $t=\infty$  wird nachfolgend als wirksame Zugfestigkeit des Betons  $f_{ct,eff}$  bezeichnet. DIN 1045-1, DAfStb Heft 525 sowie EC2, DAfStb Heft 600 enthalten keine konkreten Regelungen für die Berechnung von Langzeitdurchbiegungen, sondern nur qualitative Aussagen über Einflüsse auf die Zugfestigkeit des Betons [21]. Aus diesem Grund werden die physikalischen Einflüsse auf die Zugfestigkeit des Betons und die ansetzbare wirksame Zugfestigkeit  $f_{ct,eff}$  im Rahmen dieser Arbeit in Kapitel 3 eingehend untersucht. Für die Berechnung des Rissmomentes ist grundsätzlich zwischen zentrischer Zugfestigkeit und Biegezugfestigkeit zu unterscheiden.

Donaubauer [33] verwendet prinzipiell  $f_{ct,eff}$  immer mit 70% des Mittelwertes der Kurzzeitzugfestigkeit. Damit wird der Abfall von der zentrischen Kurzzeitzugfestigkeit auf die zentrische Dauerstandzugfestigkeit berücksichtigt.

$$f_{ct,eff}(t=\infty) = 0,7 \cdot f_{ctm}$$

Krüger/Mertzsch [62] schlagen für die Bestimmung der wirksamen Betonzugfestigkeit und zur Berücksichtigung der Dauerstandzugfestigkeit vor, dass bei Verformungsberechnungen von 85% der Kurzzeitbiegezugfestigkeit ausgegangen werden kann. D. h. es wird eine wirksame Betonzugfestigkeit  $f_{ct,eff}(t=\infty) = 0,85 \cdot f_{ct,fl,28}$  vorgeschlagen. Die Abnahme der Zugfestigkeit unter einer dauernd einwirkenden Beanspruchung wird also mit dem Faktor 0,85 berücksichtigt. Dieser Abnahme der Zugfestigkeit liegen die Versuchsergebnisse mit exzentrischer Zugkraft nach Shkoukani/Walraven zugrunde.

## 2.3 Näherung nach Krüger/Mertzsch zur rechnerischen Abschätzung der Durchbiegung

Nachfolgend wird ein Ansatz zur rechnerischen Abschätzung der Langzeitverformung von Stahlbetonbauteilen im Zustand II mit Bezug auf die linear elastischen Kurzzeitverformungen im Zustand I vorgestellt. Dieser Ansatz basiert auf den nachfolgend beschriebenen Annahmen [59].

- Die Bestimmung der Bauteilverformung erfolgt sowohl im Zustand I als auch im Zustand II auf der Grundlage einer linearen Verteilung der Spannungen und Dehnungen über die Querschnittshöhe
- Schwindverformungen werden nicht berücksichtigt. Dafür werden die Verformungen unter der seltenen Kombination berechnet.
- Betonfestigkeitsklasse: C20/25
- Kriechzahl:  $\varphi = 2,5$  ( $t_0 = 28$  Tage,  $t_\infty = 30000$  Tage)
- Ermittlung des Rissmomentes  $M_{cr}$  unter Ansatz der Biegezugfestigkeit nach MC 90  $f_{ct,fl} \geq f_{ctm}$   
Eine Abminderung der Betonbiegezugfestigkeit erfolgt nicht, da die Rissbildung zum Zeitpunkt  $t=t_0$  infolge der Belastung  $q_{rare}$  Berücksichtigung findet.
- Druckbewehrung wird nicht berücksichtigt.

Die Verformungen im Zustand II zum Zeitpunkt  $t=\infty$  kann mit folgender Gl. (2.1) bestimmt werden.

$$f_k^II = k_a \cdot f_0^I \tag{2.1}$$

Hierbei sind:

$f_0^I$  linear elastisch berechnete Bauteilverformung im Zustand I zum Belastungszeitpunkt  $t_0$  unter der seltenen Einwirkungskombination

$f_k^{II}$  Bauteilverformung im Zustand II zum Belastungszeitpunkt  $t_k$

$k_a$  Beiwert zur Berücksichtigung der Verformungsvergrößerung (Rissbildung, Kriechen)

Der Beiwert zur Berücksichtigung der Erhöhung der Bauteilverformungen  $k_a$  kann näherungsweise mit folgender Gl. (2.2) bestimmt werden.

$$k_a = \psi \cdot \rho_s^\omega + 0,2 \quad (2.2)$$

$\rho_s$  Bewehrungsgrad zur Zugbewehrung ( $\rho_s = A_s / b \cdot h$ )

$\psi, \omega$  Beiwerte zur Bestimmung von  $k_a$  gemäß Tabelle 3

Tabelle 3: Beiwerte zur Bestimmung von  $k_a$  (aus [64])

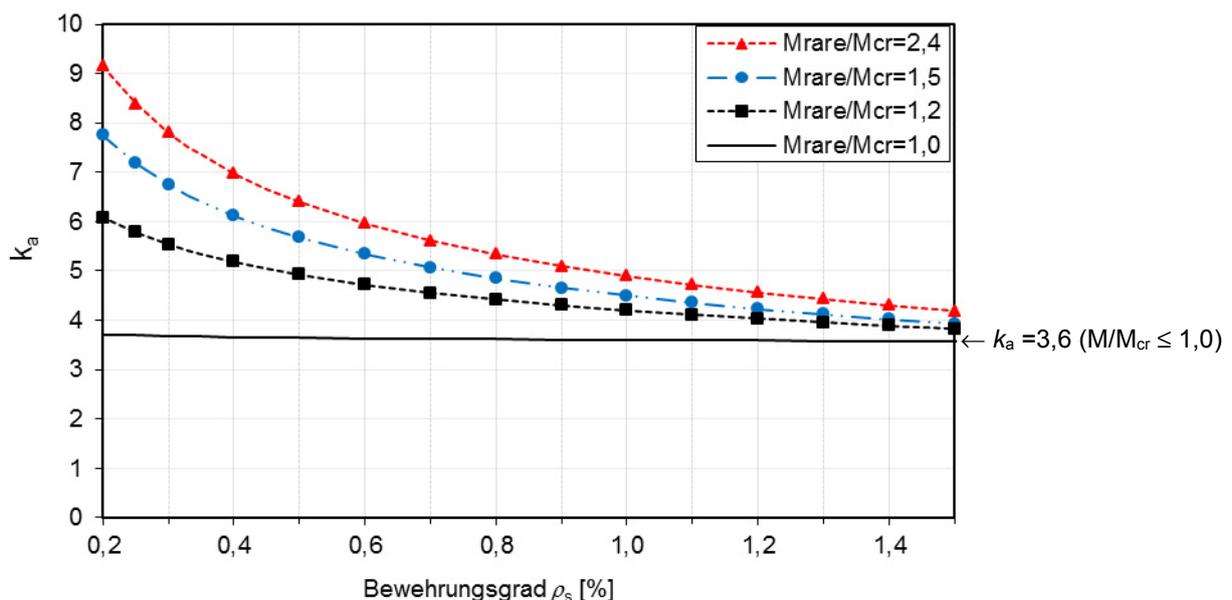
$M_{rare}/M_{cr}$	$\psi$	$\omega$
$\leq 1,0$	3,4	-0,02
1,2	4,0	-0,24
1,5	4,3	-0,35
2,4	4,7	-0,40

In der Tabelle 3 bedeuten:

$M_{rare}$  Maximalmoment unter Ansatz der seltenen Einwirkungskombination

$M_{cr}$  Rissmoment unter Ansatz der Biegezugfestigkeit ( $M_{cr} = f_{ct,fl} \cdot W_c$ )

$f_{ct,fl}$  Biegezugfestigkeit nach MC 90  $f_{ct,fl} = f_{ctm} \cdot \frac{1 + 1,5 \cdot (h/100)^{0,7}}{1,5 \cdot (h/100)^{0,7}}$



**Bild 10:** Vergrößerungsfaktor  $k_a$  in Abhängigkeit von Bewehrungsgrad  $\rho_s$  und dem Momentverhältnis  $M_{rare}/M_{cr}$

Für die Größe des Beiwertes  $k_a$  ist das Verhältnis vom Maximalmoment  $M_{rare}$  zu Rissmoment  $M_{cr}$  von Einfluss. Hierüber wird der Einfluss der Betonzugfestigkeit und die Ausdehnung der gerissenen Bereiche erfasst. Wie aus Bild 10 zu erkennen ist, nehmen die Werte für  $k_a$ , sobald das Maximalmoment  $M_{rare}$  größer ist als das Rissmoment  $M_{cr}$ , mit abfallendem Bewehrungsgrad  $\rho_s$  deutlich zu.

Im Zustand I gilt  $f_{\infty}^I = (1 + \varphi_{\infty}) \cdot f_0^I$ . Dort gilt nach Bild 10:  $k_a = 3,6$  ( $M/M_{cr} \leq 1,0$ ).

Im Zustand II liegt der Vergrößerungsfaktor  $k_a$  für  $M_{rare}/M_{cr} = 1,2$  etwa zwischen 3,5 und 6: Bei sehr kleinen Bewehrungsgraden steigt er in Abhängigkeit vom Verhältnis  $M_{rare}/M_{cr}$  sogar an bis auf  $k_a = 9$  ( $M_{rare}/M_{cr} = 2,4$ ).

## 2.4 Begrenzung der Biegeschlankheit nach Krüger/Mertzsch

Zur Begrenzung der Biegeschlankheit wurden seinerzeit in [59], [61], [62] gegenüber DIN 1045-1 alternative Berechnungsansätze angegeben. Vergleichsrechnungen von Krüger/Mertzsch ergaben, dass die erforderliche Bauteildicke durch die in DIN 1045-1 angegebenen Schlankheitskriterien teilweise unterschätzt wird. Es zeigte sich, dass es für den Fall der Verformungsbeschränkung auf  $l/500$  sinnvoll ist, den Nachweis der Biegeschlankheit von Platten und Balken zu trennen. Begründet wird dieser Vorschlag damit, dass plattenförmige Bauteile aufgrund ihrer Beanspruchung und der Art des Lastabtrags in der Regel eine deutlich geringere Rissbildung aufweisen als Balken. Daher wird empfohlen, für plattenartige Bauteile von Grenzwerten der Verkehrslast und bei balkenartigen Bauteilen von Bewehrungsgrenzwerten auszugehen [60].

Die Biegeschlankheit kann danach entsprechend der folgenden Gl. (2.3) bestimmt werden:

$$\frac{l_i}{d} \leq \frac{\lambda_i}{k_c} \quad (2.3)$$

Damit kann die erforderliche Nutzhöhe  $d$  entsprechend Gl. (2.4) bestimmt werden.

$$\text{erf } d \geq \frac{l_i}{\lambda_i} \cdot k_c \quad (2.4)$$

Hierbei sind:

$\lambda_i$                       Grenزشlankheit gemäß Tabelle 4

$l_i$                         ideelle Stützweite

bei Plattentragwerken:  $l_i = \eta_i \cdot l_{\text{eff}}$  mit  $l_{\text{eff}} = \min l = l_y$  sowie  $\eta_i$  nach Bild 11

$$k_c \approx \left( \frac{f_{ck0}}{f_{ck}} \right)^{1/6}$$

$$f_{ck0} = 20 \text{ N/mm}^2$$

### Abschätzung der Grenzschlankheit $\lambda_i$ für Platten

In Tabelle 4 sind die Beiwerte  $\lambda_i$  für die Ermittlung der erforderlichen Biegeschlankheit bei Platten zusammengestellt.

Tabelle 4: Grenzschlankheit  $\lambda_i$  bei Platten (aus [59])

zul. w	$\ell_i$ [m]	$\lambda_i$	zul. w	$\ell_i$ [m]	$\lambda_i$
1/250	≤ 4,0 m	30,0	1/500	≤ 4,0 m	23,0
	7,0 m	24,0		7,0 m	17,0
	12,0 m	19,0		12,0 m	13,0

Zwischenwerte können linear interpoliert werden.

Begrenzung der Biegeschlankheit nach Krüger/Mertzsch

Die Werte beruhen auf folgende Annahmen:

- Beton:  $f_{ck} \geq 20 \text{ N/mm}^2$   
 $\varphi \leq 2,5$
- Belastung:  $q_k \leq 5,0 \text{ kN/m}^2$

Zur Berücksichtigung des Verformungsverhaltens unterschiedlich gelagerter Platten wird näherungsweise von den Ansätzen im Zustand I ausgegangen (Bild 11).

Gemäß Krüger/Mertzsch hängt die empfohlene Plattenschlankheit vom statischen System der Platte ab, wobei auch das Verhältnis der Spannweiten  $\ell_x/\ell_y$  und die Randeinspannungen eingehen. Außerdem wird zwischen Platten unterschieden, bei denen die Durchbiegung auf 1/250 bzw. 1/500 zu begrenzen ist.

Für die analytische Berechnung von  $\eta_i$  gilt näherungsweise:

$$\eta_i = \begin{cases} 0,168 + 0,979k_L - 0,283k_L^2 \leq 1,0 & \text{Platte 1} \\ 0,148 + 0,689k_L - 0,188k_L^2 \leq 1,0 & \text{Platte 2} \\ 0,473 + 0,200k_L - 0,065k_L^2 \leq 1,0 & \text{Platte 3} \\ 0,103 + 0,578k_L - 0,162k_L^2 \leq 1,0 & \text{Platte 4} \end{cases} \quad \text{mit } k_L = \frac{L_x}{L_y}$$

In Bild 12 ist die erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit des Verhältnisses der Spannweiten  $L_x/L_y = 1,0$  über die Stützweiten bei Platten ( $w \leq \ell_{eff}/250$ ) dargestellt.

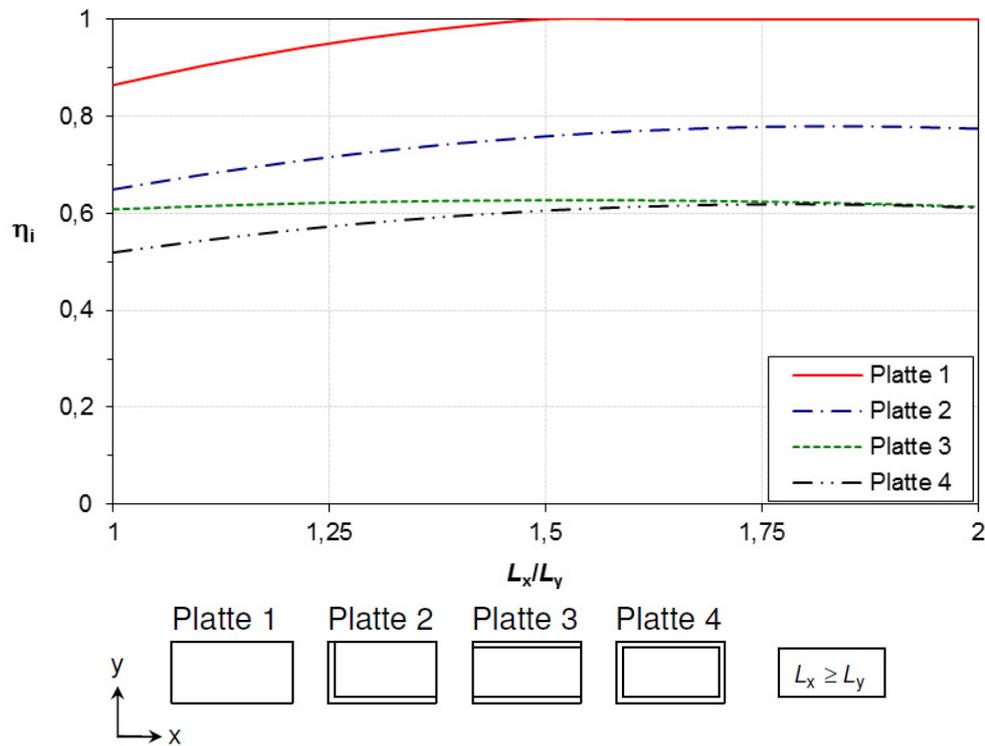


Bild 11: Beiwert  $\eta_i$  zur Berücksichtigung der Plattengeometrie (aus [59])

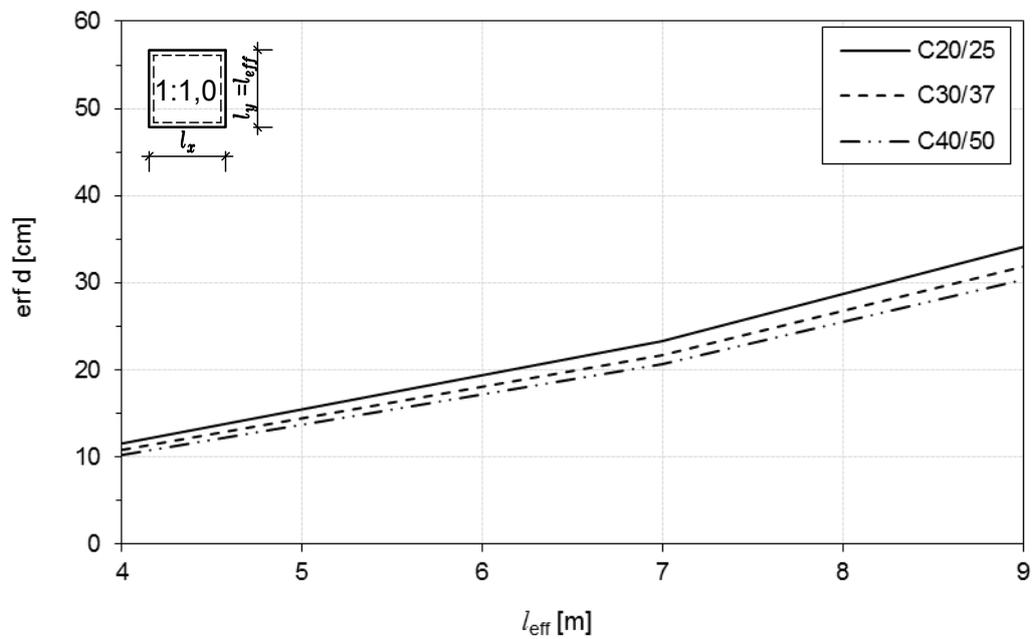
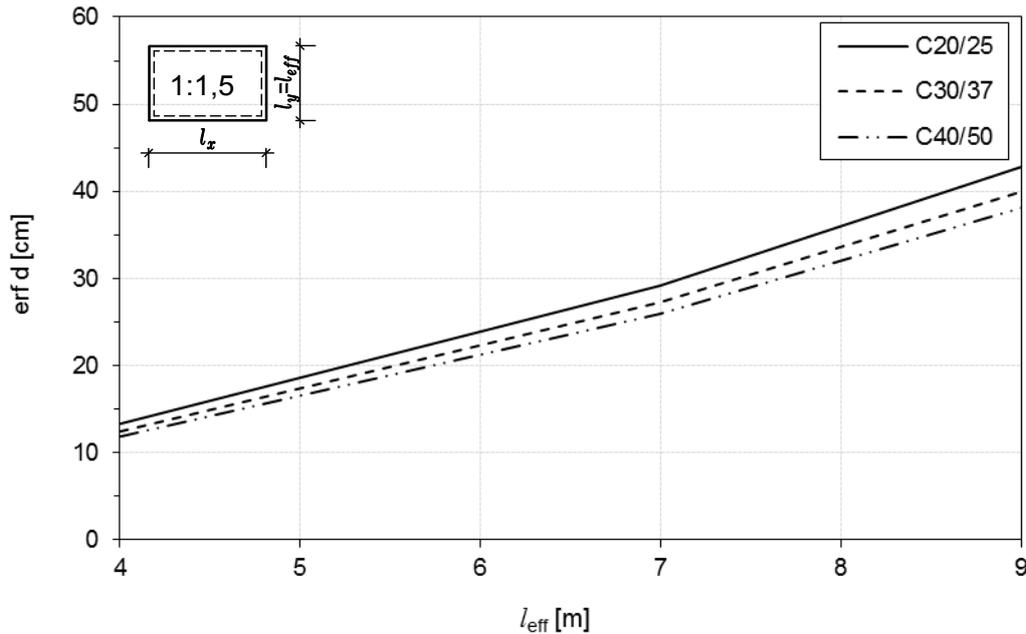


Bild 12: Erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit des Verhältnisses der Spannweiten  $L_x/L_y = 1,0$  über die Stützweiten  $l_{\text{eff}}$  bei Platten ( $w \leq l_{\text{eff}}/250$ )



**Bild 13:** Erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit des Verhältnisses der Spannweiten  $L_x/L_y = 1,5$  über die Stützweiten  $l_{eff}$  bei Platten ( $w \leq l_{eff}/250$ )

Bild 13 zeigt die erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit des Verhältnisses der Spannweiten  $L_x/L_y = 1,5$  über die Stützweiten bei Platten ( $w \leq l_{eff}/250$ ) dargestellt.

## 2.5 Begrenzung der Biegeschlankheit nach Donaubauer

Donaubauer [33] hat im Rahmen von numerischen Untersuchungen mit wirklichkeitsnaher Werkstoffmodellierung gezeigt, dass mit den vorhandenen Schlankheitskriterien der DIN 1045-1 die Durchbiegung nicht in allen Fällen auf den als zulässig angesehenen Wert von  $l_{eff}/250$  begrenzt werden können. In [33] wird zwischen ein- und zweiachsig gespannten Platten unterschieden.

Den durchgeführten rechnerischen Untersuchungen lagen die folgenden grundlegenden Parameter zugrunde:

$$f_{zul} = \frac{l_{eff}}{250} \quad \text{Grenzwert der zulässigen Verformung}$$

$t_0 = 28$  Tage      Belastungsbeginn

RH = 50%      Relative Luftfeuchte für Innenbauteile

$q_k = 1,5 - 2,75$  kN/m<sup>2</sup>      Nutzlast

$\psi_2 = 0,30$       Quasi-ständiger Anteil der Nutzlast

$f_{ct\infty} = 0,7 \cdot f_{ctm}$       Ansatz der Dauerstandzugfestigkeit

Mit Hilfe dieser Annahmen kann die zulässige Biegeschlankheit von ein- und zweiachsig gespannten Stahlbetonplatten wie folgt berechnet werden:

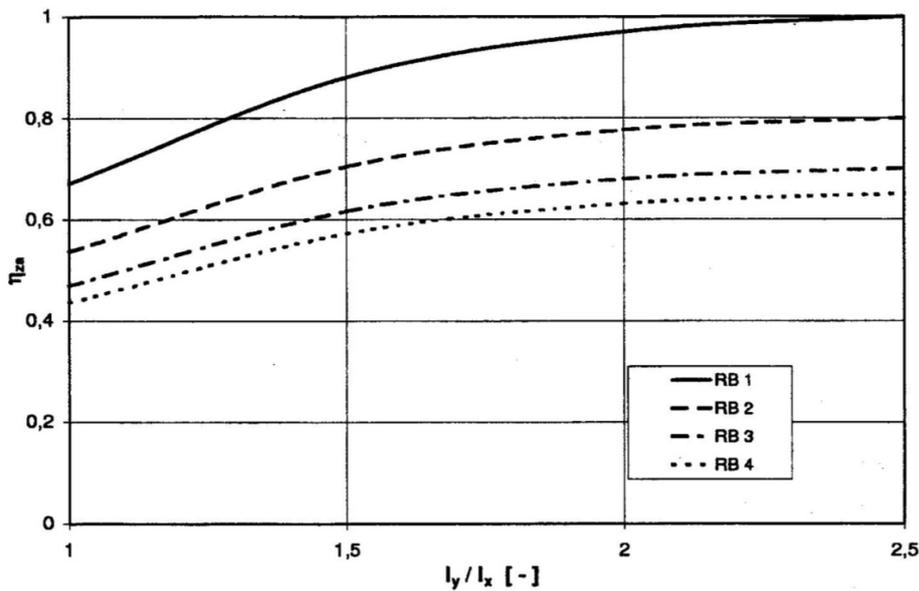
$$\frac{l_i}{d} \geq \lambda_0 \cdot \left( \frac{l_0}{l_i} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{f_{ck}}{f_{ck0}} \right)^{2/3} \quad (2.5)$$

Dabei ist:

- $\lambda_0 = 25$  Grundwert der Biegeschlankheit
- $l_0 = 5,0 \text{ m}$  Bezugswert der Spannweite
- $f_{ck0} = 25 \text{ N/mm}^2$  Bezugswert der Betondruckfestigkeit
- $l_i$  ideelle Stützweite
- $l_{eff}$  Stützweite
  - $l_i = \alpha_i \cdot l_{eff}$  für einachsig gespannten Platten
  - $l_i = \eta_{za} \cdot l_{eff}$  für zweiachsig gespannten Platten ( $l_{eff}$ : kleine Stützweite)
- $\alpha_i$  Beiwert zur Berücksichtigung der Durchlaufwirkung nach
- $\eta_{za}$  Beiwert zur Berücksichtigung des zweiachsigen Lastabtrags nach Bild 14

Tabelle 5: Beiwert  $\alpha_i$  zur Berücksichtigung der Durchlaufwirkung bei einachsig gespannten Stahlbetonplatten (aus [33])

Statisches System	$\alpha_i$
Frei drehbar gelagerter Einfeldträger	1,0
Endfeld eines Durchlaufträgers	0,8
Innenfeld eines Durchlaufträgers	0,7
Kragträger	2,5



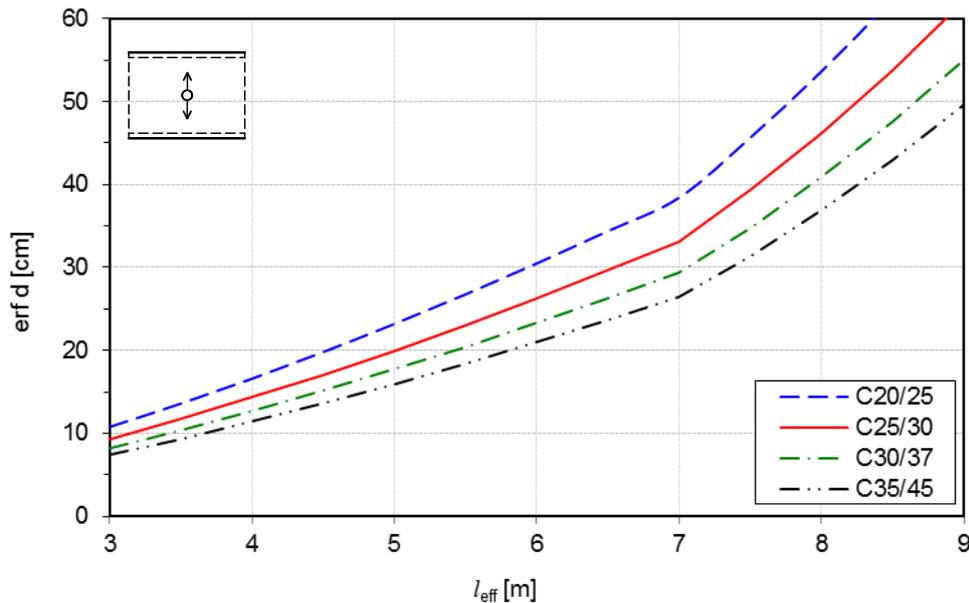
Bezeichnung	RB 1	RB 2	RB 3	RB 4
Lagerungs- bedingung				

**Bild 14:** Beiwert  $\eta_{za}$  für zweiachsig gespannte Platten (aus [33])

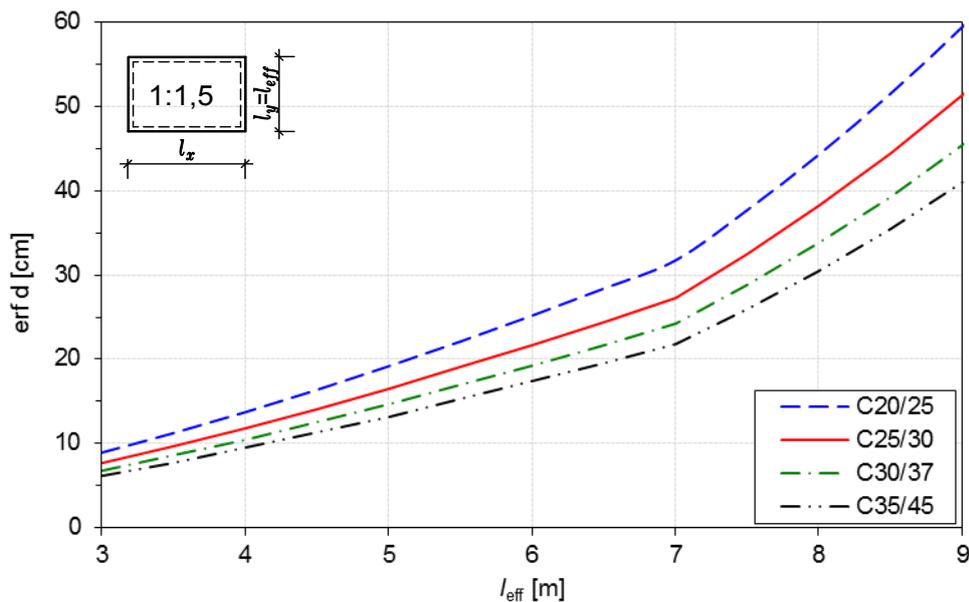
Die in Bild 14 dargestellten Beiwerte  $\eta_{za}$  zur Berücksichtigung der zweiachsigen Lastabtragung sind mit Hilfe der angegebenen Berechnungsansätze durch eine Regressionsanalyse berechnet worden. Bei den zweiachsig gespannten Stahlbetonplatten wurde grundsätzlich eine linienförmige Lagerung angenommen.

Bei Stützweiten über 7 m sollte der Grundwert der Biegeschlankheit  $\lambda_0$  zusätzlich mit einem Faktor  $7/\ell_{eff}$  ( $\ell_{eff}$  in m) multipliziert werden. Damit nimmt die erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  ab einer Stützweite von  $\ell_{eff} > 7\text{ m}$  überproportional zu.

$$\frac{\ell_i}{d} = \lambda_0 \cdot \left(\frac{\ell_0}{\ell_i}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{f_{ck}}{f_{ck0}}\right)^{2/3} = \frac{7}{\ell_{eff}} \cdot \lambda_0 \cdot \left(\frac{\ell_0}{\ell_i}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{f_{ck}}{f_{ck0}}\right)^{2/3}$$

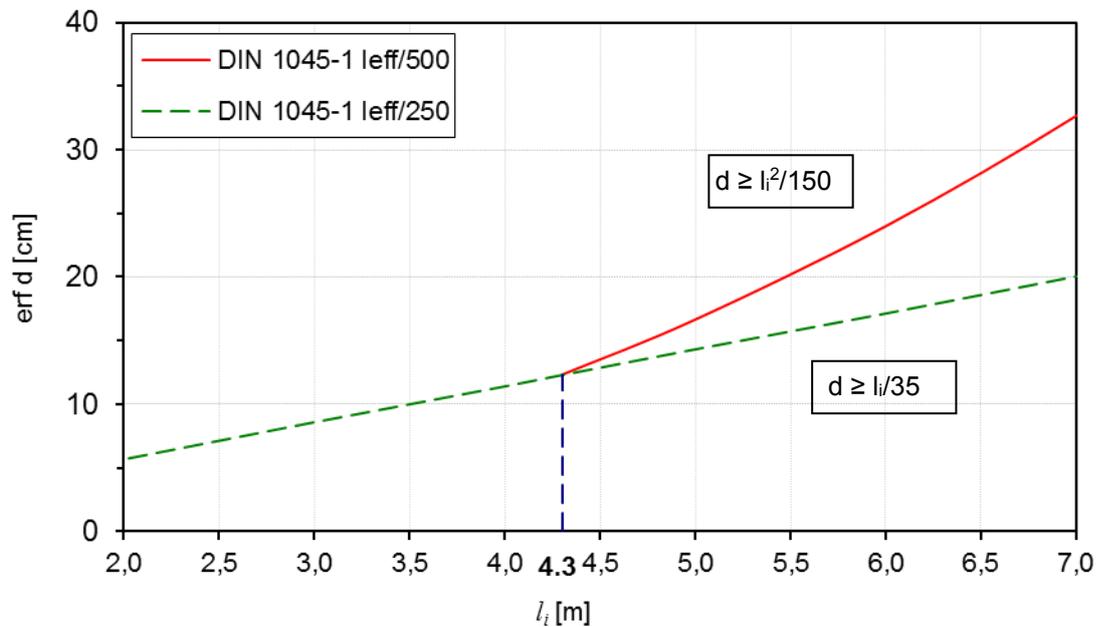


**Bild 15:** Erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit der Stützweiten  $\ell_{eff}$  für eine einfeldrige, einachsig gespannte Platte ( $w \leq \ell_{eff}/250$ )



**Bild 16:** Erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit der Stützweiten  $\ell_{eff}$  für eine einfeldrige, zweiachsig gespannte Platte ( $\ell_x/\ell_y = 1,5$ ) ( $w \leq \ell_{eff}/250$ )

## 2.6 Begrenzung der Biegeschlankheit nach DIN 1045-1



**Bild 17:** Statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit von der Ersatzstützweite  $l_i$

Nach DIN 1045-1 darf der Nachweis der Begrenzung der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen vereinfachend durch die Begrenzung der Biegeschlankheit  $l_i/d$  geführt werden. Für Deckenplatten aus Normalbeton des üblichen Hochbaus sind folgende Grenzwerte der Biegeschlankheit einzuhalten.

*Bei allgemeiner Anforderungen gilt:*

$$\frac{l_i}{d} \leq 35$$

*Bei verformungsempfindlichen angrenzenden Bauteilen gilt:*

$$\frac{l_i}{d} \leq \frac{150}{l_i}$$

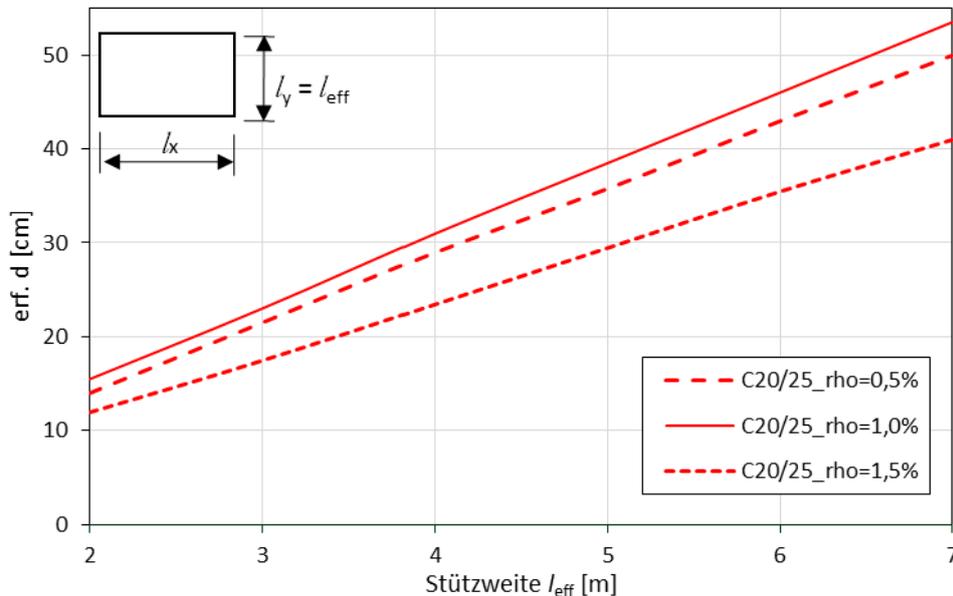
Dabei ist:

$l_{\text{eff}}$	effektive Stützweite
$l_i = \alpha \cdot l_{\text{eff}}$	Ersatzstützweite
$\alpha$	Beiwert in Abhängigkeit vom statischen System und den Lagerungsbedingungen
$d$	statische Nutzhöhe

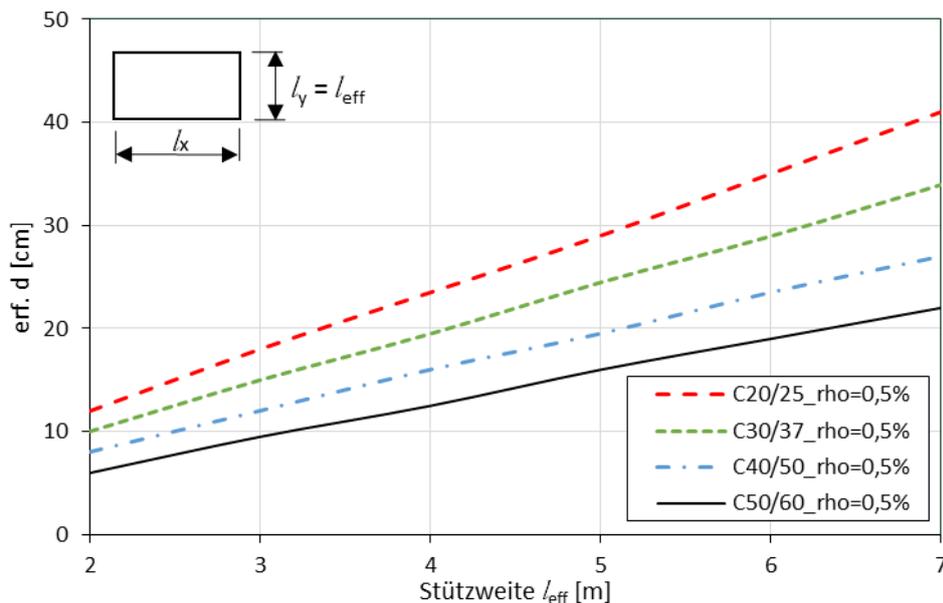
Die Hintergründe zur Begrenzung der Biegeschlankheit nach DIN 1045-1 sind in Kapitel 1 beschrieben.

## 2.7 Begrenzung der Biegeschlankheit nach DIN EN 1992-1-1

Die Erläuterungen zur Begrenzung der Biegeschlankheit nach DIN EN 1992-1-1 sind in Kapitel 1. Einleitung enthalten. Nachfolgend sind einige Auswertungen für Standardfälle dargestellt. In Bild 18 ist der Einfluss aus der Höhe der Beanspruchung, berücksichtigt über den erforderlichen Bewehrungsgrad  $\rho$ , auf die erforderliche statische Höhe  $d$  aus der Begrenzung der Biegeschlankheit gemäß DIN EN 1992-1-1 in Abhängigkeit von der Stützweite  $l_{\text{eff}}$  dargestellt.



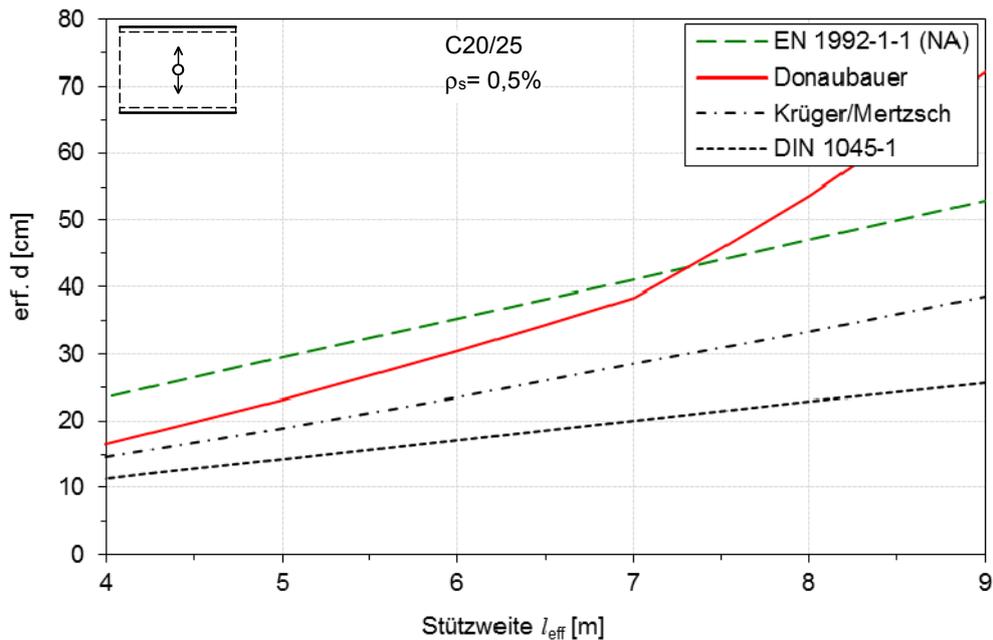
**Bild 18:** Erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit vom Längsbewehrungsgrad  $\rho$  (%) und Stützweite ( $w \leq l_{\text{eff}}/250$ ) (ohne Druckbewehrung:  $\rho' = 0$ )



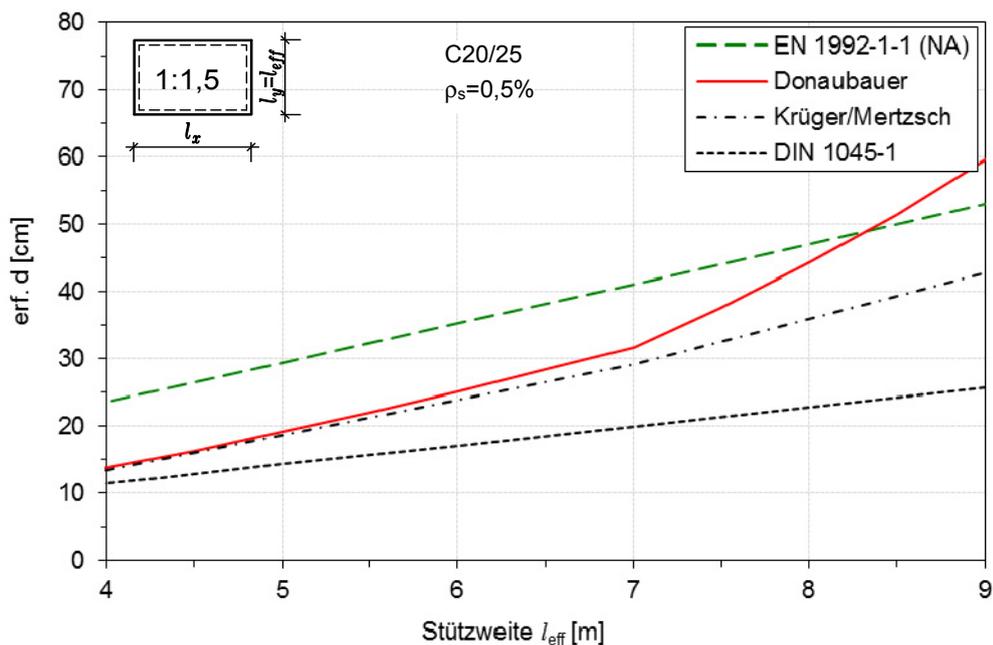
**Bild 19:** Erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit von der Betonfestigkeitsklasse und Stützweite ( $w \leq l_{\text{eff}}/250$ ) (ohne Druckbewehrung:  $\rho' = 0$ )

## 2.8 Vergleich der verschiedenen Kriterien für die Begrenzung der Biegeschlankheit

In Bild 20 ist beispielhaft für den Bewehrungsgrad  $\rho_s = 0,5\%$  die erforderliche Nutzhöhe  $d$  aus den verschiedenen Biegeschlankkriterien für eine einachsig gespannte Platte dargestellt. Für den Fall einer zweiachsig gespannten Stahlbetonplatte ( $\rho_s = 0,5\%$ ) ist in Bild 21 die erforderliche statische Nutzhöhe  $d$  in Abhängigkeit von der maßgebenden Deckenspannweite dargestellt. Es zeigt sich, dass die in DIN EN 1992-1-1 (NA) angegebener zulässiger Biegeschlankheit im baupraktischen Bereich wesentlich restriktiver als die Grenzwerte nach DIN 1045-1 sind.



**Bild 20:** erforderliche Nutzhöhen  $d$  aus verschiedenen Biegeschlankkriterien für die einachsig gespannte Platte ( $w \leq l_{eff}/250$ ) (aus [28], [33], [63])



**Bild 21:** erforderliche Nutzhöhen  $d$  aus verschiedenen Biegeschlankkriterien für die zweiachsig gespannte Platte ( $w \leq l_{eff}/250$ ) (aus [28], [33], [63])

### 3 Materialverhalten von Beton

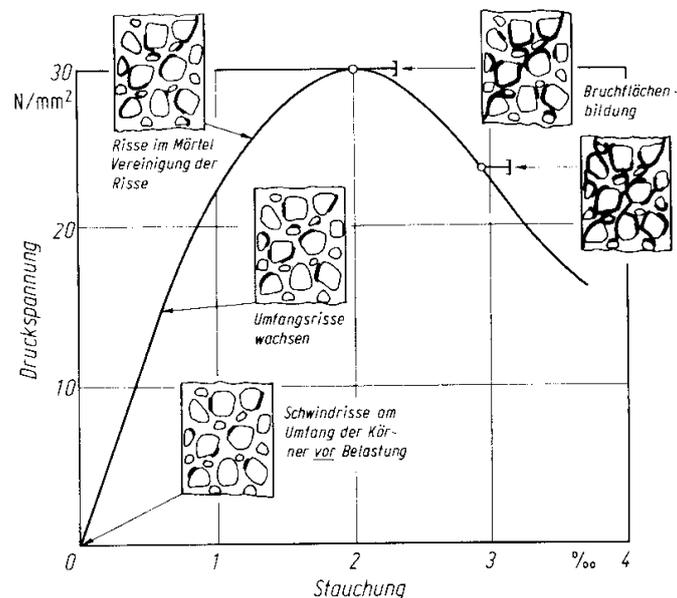
#### 3.1 Verhalten unter kurzzeitiger einachsiger Druckbeanspruchung

##### 3.1.1 Spannungs-Dehnungs-Linie

Die Spannungs-Dehnungs-Linie für Beton hat bei einachsiger Druckbeanspruchung den in Bild 22 schematisch dargestellten Verlauf. Der Beton kann als ein Zweiphasensystem (Zementstein und Gesteinskörnung) aufgefasst werden.

Bereits vor der Belastung des Betons sind erste Mikrorisse und Poren im Zementstein sowie vor allem Mikrorisse in den Grenzflächen zwischen dem Zementstein und den Gesteinskörnern vorhanden. Die ersten Mikrorisse sind eine Folge davon, dass der Zementstein durch das Schwinden sein Volumen verkleinern will, infolge der Verdunstung des chemisch nicht gebundenen Wassers. Da die Gesteinskörner nicht schwinden, entstehen Spannungen im Gefüge des Betons, die bereits zu ersten Mikrorissen führen können. Die feinen Mikrorisse sind i. d. R. gleichmäßig im Zementstein und an den Grenzschichten verteilt; sie sind kürzer als die Größe der größten Gesteinskörner und von außen nicht sichtbar.

Bis zu Druckspannungen von etwa 40% der Druckfestigkeit des Betons verläuft das Spannungs-Stauchungs-Diagramm näherungsweise geradlinig. In diesem Bereich verhält sich der Beton in guter Näherung linear elastisch. Bei weiterer Erhöhung der Druckbeanspruchungen kommt es dann als Folge des Anwachsens, der Neubildung und der Vereinigung von Mikrorissen zu einer fortschreitend zunehmenden Krümmung der Arbeitslinie. Das Verhalten des Betonkörpers ist nicht mehr linear. Bei einer Spannung von etwa 80% der Druckfestigkeit setzen sich die Risse in der Mörtelphase des Betons fort, so dass die Risse mit zunehmender Belastung sehr schnell anwachsen. Schließlich erfolgt unter der Höchstlast die Ausbildung von Bruchflächen, die das Versagen einleiten.



**Bild 22:** Spannungs-Dehnungs-Diagramm und fortschreitende Mikrorissbildung bei einachsiger Druckbeanspruchung des Betons

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Untersuchung der Durchbiegung von Stahlbetonplatten unter Gebrauchslasten. Dabei wird der Beton maximal etwa bis zur halben Druckfestigkeit beansprucht.

### 3.1.2 Elastizitätsmodul des Betons

Der Elastizitätsmodul des Betons wird von der Zementsteinqualität und –menge sowie vom Verbund zwischen Zementstein und Gesteinskörnung beeinflusst. Auf Grund der unterschiedlichen Steifigkeit der verwendeten Gesteinskörnungen schwankt er relativ stark. Die Werte für den Elastizitätsmodul in EC2 gelten für Betone mit quarzitäen Gesteinskörnungen bei einer Betonprüfung im Alter von 28 Tagen. Der tatsächlich vorhandene Elastizitätsmodul  $E_{cm,mod}$  kann je nach verwendeter Gesteinskörnung durchaus bis zu 20% höher oder bis zu 30% niedriger ausfallen [22]. In Tabelle 6 sind nach EC2 Korrekturwerte  $\alpha_E$  für Zuschlag aus anderen Gesteinsarten angegeben.

$$E_{cm,mod} = \alpha_E \cdot E_{cm}$$

$\alpha_E$       Beiwert zur Berücksichtigung der Art der Gesteinskörnung

Tabelle 6:      Faktor  $\alpha_E$  in Abhängigkeit von der Gesteinskörnung (aus [28])

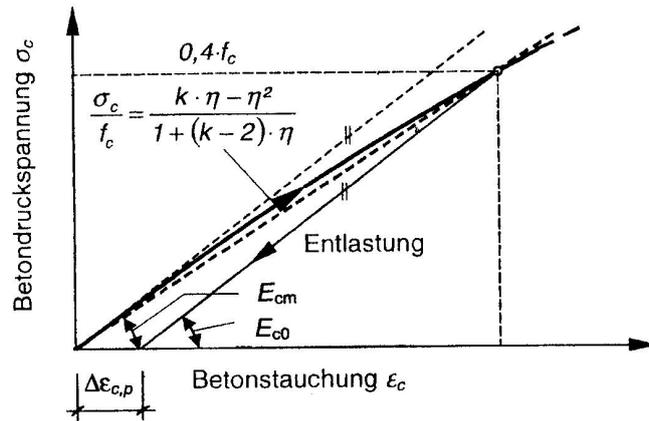
Art der Gesteinskörnung	$\alpha_E$
Basalt	1,2
Quarz, Quarzite	1,0
Kalkstein	0,9
Sandstein	0,7

Die wesentlichen betontechnologischen Einflussparameter für die Größe des E-Moduls des Betons sind:

- der Wasserzementwert
- das Alter des Betons
- der E-Modul und der Volumenanteil der Gesteinskörnung
- Feuchtezustand des Betons

Mit sinkendem Wasserzementwert und zunehmendem Alter nimmt der E-Modul des Betons ebenso wie die Druckfestigkeit zu. Eine Zunahme des Zementsteingehalts bewirkt eine Abnahme des E-Moduls und der Druckfestigkeit. Aus den Einflussparametern geht hervor, dass der E-Modul des Betons mit steigender Betondruckfestigkeit ansteigt.

Aufgrund der Korrelation zwischen dem E-Modul und der Druckfestigkeit des Betons ist es naheliegend, den E-Modul von Beton in Abhängigkeit von der Betondruckfestigkeit anzugeben und entsprechende empirische Formeln  $E_c = E_{c(fc)}$  aufzustellen. Diese empirischen Beziehungen können allerdings nur Näherungen sein, da sie die Abhängigkeit des E-Moduls von der Art der Gesteinskörnung und deren Volumenanteil nicht direkt erfassen.



**Bild 23:** Sekantenmodul  $E_{cm}$  und Entlastungsmodul  $E_{c0}$  von  $\sigma_c \approx 0,4 \cdot f_c$  (aus [22])

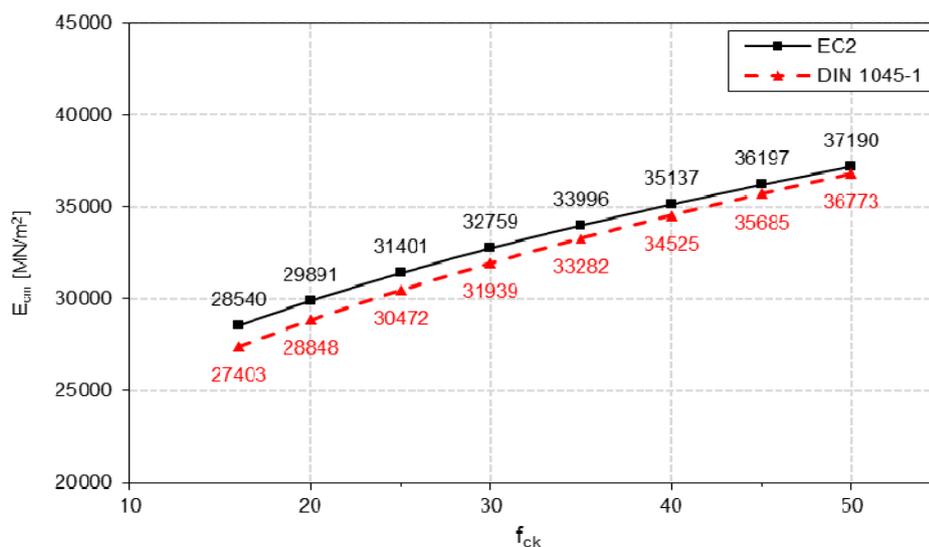
Im Bereich der Spannungen unter Gebrauchslast (bis etwa  $\sigma_c = 0,4 \cdot f_{cm}$ ) verhält sich der Beton annähernd linear. Der Elastizitätsmodul  $E_c$  ist als Tangentenmodul im Ursprung der Spannungs-Dehnungs-Linie definiert und entspricht ungefähr dem Modul  $E_c$  bei rascher Entlastung von einem niedrigen Lastniveau bei  $\sigma_c \approx 0,4 \cdot f_c$  (Bild 23). Plastische Verformungsanteile werden nicht erfasst. Er gilt für statische Druckbeanspruchung und darf näherungsweise auch für Zugbeanspruchung angesetzt werden.

Der Elastizitätsmodul  $E_{cm}$  ist als Sekantenmodul zwischen der Spannung  $\sigma_c = 0$  und  $\sigma_c = 0,4 \cdot f_{cm}$  für Betonsorten bei quarzithaltigen Gesteinskörnungen definiert und beschreibt die Steifigkeit des ungerissenen Betons auf Gebrauchslastniveau bei Kurzzeitbelastung unter Berücksichtigung von plastischen Anfangsdehnungen  $\Delta\epsilon_{c,p}$ .

Für gewöhnlich kann der Elastizitätsmodul näherungsweise aus der mittleren Betondruckfestigkeit  $f_{cm}$  ermittelt werden. Der Tangentenmodul  $E_c$  wird in EC2 mit  $1,05 \cdot E_{cm}$  angenommen.

$$E_{cm} = 22.000 \cdot \left[ \frac{f_{cm}}{10} \right]^{0,3} \approx 11.000 \cdot f_{cm}^{0,3} \quad (3.1)$$

$$E_c = 1,05 \cdot E_{cm} \quad (3.2)$$



**Bild 24:** Vergleich Sekanten-E-Modul  $E_{cm}$  nach EC2 und DIN 1045-1 bis zur Betonfestigkeitsklasse C50/60

### Zeitliche Entwicklung des Elastizitätsmoduls

Die zeitabhängige Entwicklung des Elastizitätsmoduls  $E_{cm}(t)$  verläuft anfangs schneller als die der Betondruckfestigkeit und darf nach EC2 mit folgender Gl. (3.3) ermittelt werden [14]:

$$E_{cm}(t) = [f_{cm}(t)/f_{cm}]^{0,3} \cdot E_{cm} = \beta_{cc}(t)^{0,3} \cdot E_{cm} \quad (3.3)$$

$$\beta_{cc}(t) = \exp\left\{s \left[1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right]\right\}$$

Dabei sind:

$E_{cm}(t)$  Elastizitätsmodul im Alter von  $t$  Tagen

$E_{cm}$  Elastizitätsmodul im Alter von 28 Tagen

$\beta_{cc}(t)$  ein vom Alter des Betons  $t$  abhängiger Beiwert

$t$  das Alter des Betons in Tagen

$s$  ein vom verwendeten Zementtyp abhängiger Beiwert

= 0,20 für Zement der Festigkeitsklassen CEM 42,5 R, CEM 52,5 N und CEM 52,5 R (Klasse R)

= 0,25 für Zement der Festigkeitsklassen CEM 32,5 R, CEM 42,5 N (Klasse N)

= 0,38 für Zement der Festigkeitsklassen CEM 32,5 N (Klasse S)

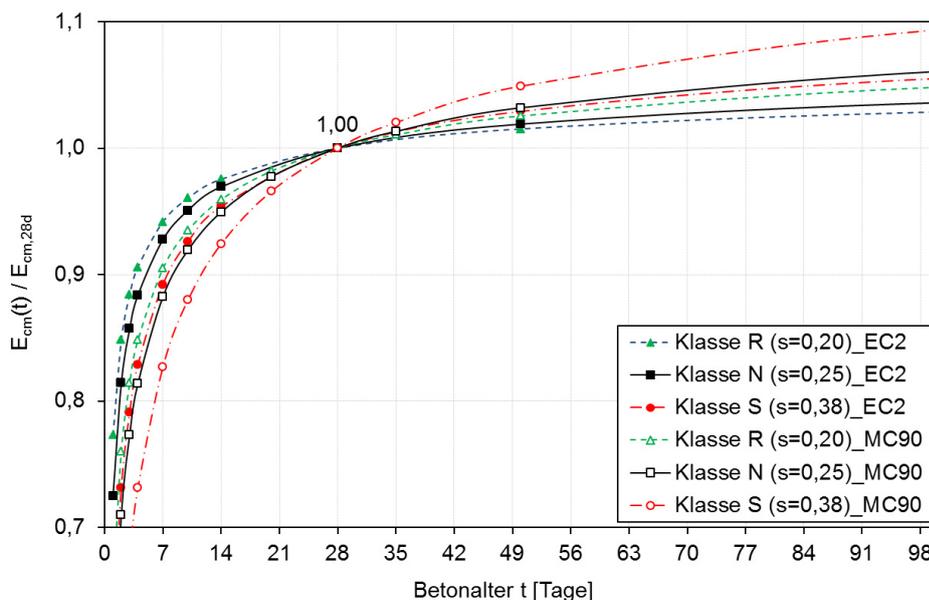
Gemäß Model Code 90 [13] kann die zeitabhängige Entwicklung des Elastizitätsmoduls  $E_{cm}(t)$  mit folgender Gl. (3.4) beschrieben werden.

$$E_{cm}(t) = [\beta_{cc}(t)]^{\alpha} \cdot E_{cm} \quad (3.4)$$

$\alpha = 1,0$  für  $t < 28$  Tage

$\alpha = 0,5$  für  $t \geq 28$  Tage

In Bild 25 wird die zeitabhängige Entwicklung des E-Moduls  $E_{cm}(t)$  nach EC2 und MC90 verglichen. Der Unterschied des E-Moduls  $E_{cm}(t)$  zwischen EC2 und MC 90 besteht im reduzierten Exponenten  $\alpha=0,3$  für  $[\beta_{cc}(t)]^{\alpha}$  im EC2 statt  $\alpha=0,5$  im MC 90.



**Bild 25:** Vergleich der zeitabhängigen Entwicklung des E-Moduls  $E_{cm}(t)$  nach EC2 und MC90

## 3.2 Verhalten unter einachsiger Zugbeanspruchung

### 3.2.1 Zentrische Zugfestigkeit $f_{ct}$

In Bild 26 ist das Verhalten von Beton im weggesteuerten zentrischen Zugversuch dargestellt. Die in Bild 26 dargestellte Gesamtverformung eines Betonprobekörpers unter Zugbeanspruchung lässt sich in die Verformungen der lokalisierten Risszone mit verstärkter Mikrorissbildung und zunehmender Rissaufweitung und des ungeschädigten Bereichs aufteilen.

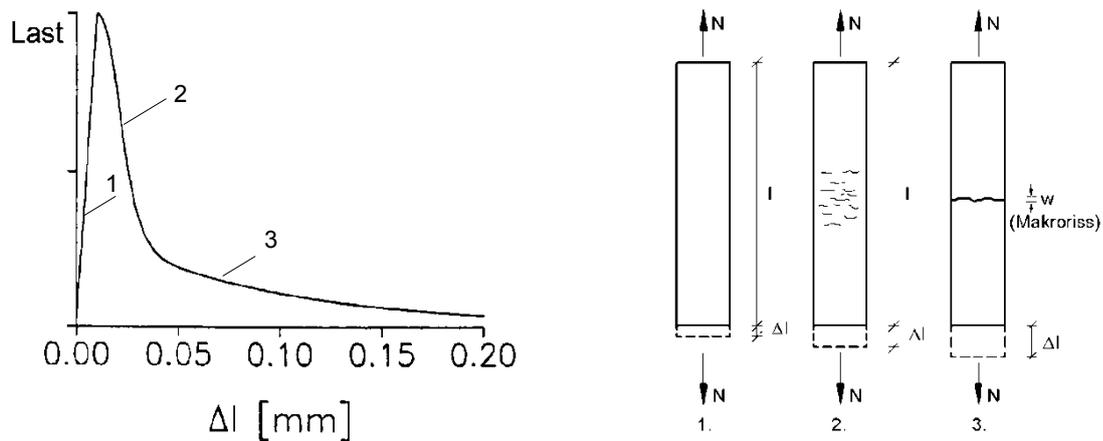
Die Verformung der ungeschädigten Zone kann in sehr guter Näherung durch ein linear-elastisches Verhalten beschrieben werden. Der linear elastische Anteil der Längenänderung ist proportional zur Last  $F$ . Wird die Zugkraft  $F$  im Bereich des abfallenden Astes wieder kleiner, vermindert sich der linear elastische Formänderungsanteil gleichermaßen.

In der örtlich eng begrenzten Risszone finden zunehmend eine Neubildung und ein Zusammenwachsen von Mikrorissen statt, was schließlich zum makroskopischen Reißen des Probekörpers durch eine Trennrissbildung führt. Das Zugtragverhalten vom Beton wird durch das Wachstum von Mikrorissen bestimmt, die sich beim vollständigen Versagen durch einen Trennbruch zu einem durchgehenden Riss vereinigen.

Die Verformung der Risszone (Bruchprozesszone) kann zweckmäßig durch einen fiktiven, diskreten Einzelriss der Rissbreite  $w$  beschrieben werden. Die Längenänderung des Bereiches mit verstärkter Mikrorissbildung (Bruchprozesszone) wird dabei zunächst zu einem fiktiven Riss mit der Rissbreite  $w$  zusammengefasst. In diesem Bereich entwickelt sich dann mit zunehmender Längenänderung ein Makroriss als Trennriss mit der Rissbreite  $w$  durch das Zusammenwachsen bestimmter Mikrorisse. Der Zusammenhang zwischen der Rissbreite  $w$  und der Spannung  $\sigma$  wird durch die Zugspannungs-Rissöffnungs-Beziehung ( $\sigma$ - $w$ -Beziehung) beschrieben. Die in Bild 26 dargestellte, über die Messlänge  $l$  gemessene Gesamtverformung  $\Delta l$  ergibt sich dann zu:

$$\Delta l = l \cdot \frac{\sigma}{E} + w \quad (3.5)$$

Der Beton versagt im weggesteuerten zentrischen Zugversuch keineswegs schlagartig und ideal spröde. Vielmehr ist der Beton in der Lage, über einen sich öffnenden Riss bis zu einer Breite von ca.  $w = 0,15$  mm noch begrenzt Zugspannungen zu übertragen.



1. ansteigender Ast
2. abfallender Ast (Zone mit verstärkter Mikrorissbildung)
3. abfallender Ast (bestimmte Mikrorisse wachsen zu einem Makroriss zusammen)

**Bild 26:** Kraft-Verformungs-Linie bei Zugbelastung unter stetiger Verlängerung (aus [1])

### Näherungsweise Berechnung der Zugfestigkeit aus der Druckfestigkeit

Die rechnerische Bestimmung der Betonzugfestigkeit kann näherungsweise in Abhängigkeit von der Betondruckfestigkeit  $f_{ck}$  erfolgen. Sie nimmt mit der Druckfestigkeit des Betons zu. Aus der bestehenden Korrelation kann der Mittelwert der einachsigen zentrischen Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  gemäß EC2 näherungsweise wie folgt aus der Druckfestigkeit berechnet werden:

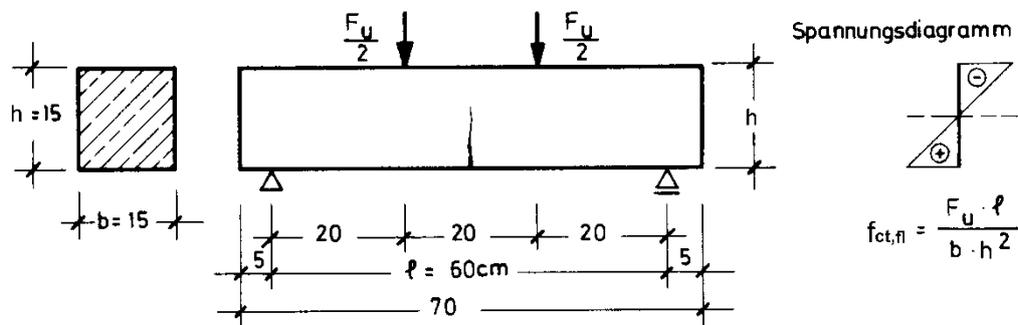
$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad \text{bis C50/60} \quad (3.6)$$

Zur Berücksichtigung der Streuung der Zugfestigkeit können der 5% und 95%-Quantilwert herangezogen werden:

$$f_{ctk;0,05} = 0,7 \cdot f_{ctm} \quad (5\text{-Quantil})$$

$$f_{ctk;0,95} = 1,3 \cdot f_{ctm} \quad (95\text{-Quantil})$$

### 3.2.2 Biegezugfestigkeit $f_{ct,fl}$

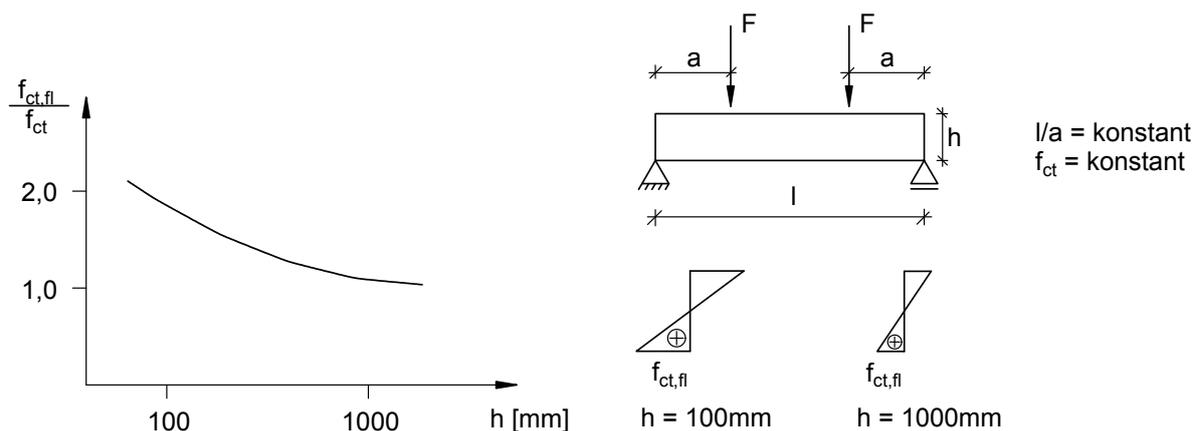


**Bild 27:** Prüfkörper zur Ermittlung der Biegezugfestigkeit (aus [23])

Zur Beurteilung des Trag- und Verformungsverhaltens von vorwiegend auf Biegung beanspruchten Bauteilen ist die Biegezugfestigkeit des Betons eine wesentliche Größe. Die Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  wird aus der Bruchlast  $F_u$  infolge einer Biegebeanspruchung eines Balkens aus unbewehrtem Beton ermittelt. Sie ist stark von den absoluten Abmessungen des Prüfkörpers und von der Laststellung abhängig. Bild 27 zeigt einen Betonbalken 15x15x70 cm mit zwei Einzellasten in jeweils  $l/3$ . Die Balken werden bis zur Prüfung unter Wasser gelagert, um ein Feuchtigkeitsgefälle, durch das im Kern Druckspannungen, außen Zugspannungen entstehen, über den Querschnitt durch Austrocknung zu verhindern (nichtlinear verteilte Eigenspannungen). Die Biegezugfestigkeit nimmt mit dem Alter vorwiegend bis zum 28. Tag zu und ist wie die zentrische Zugfestigkeit vom  $w/z$ -Wert, Hydratationsgrad und der Haftung zwischen Zementstein und Betonzuschlag abhängig. Beim Austrocknen der Betonbalken kann die Biegezugfestigkeit je nach Zement, Beton und Lagerungsbedingung vorübergehend um etwa 10 bis 50% vermindert werden [11], [84]. Von besonderem Einfluss auf die Biegezugfestigkeit ist jedoch die absolute Höhe des Balkens [84].

### Maßstabseffekt

Wenn sich geometrisch ähnliche Bauteile bei unterschiedlicher absoluter Größe nicht ähnlich verhalten, wird das als Maßstabseffekt bezeichnet. Einer der bekanntesten Maßstabseffekte ist die Abhängigkeit der Biegezugfestigkeit von der Bauteilhöhe [34].



**Bild 28:** Abhängigkeit der Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  von der absoluten Bauteilhöhe  $h$  (aus [73])

Durch den Maßstabseffekt kann die Biegezugfestigkeit insbesondere bei niedrigen Bauteilhöhen (Platten) deutlich größer sein als die zentrische Zugfestigkeit.

In Bild 29 ist das Verhältnis zwischen Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  und zentrischer Zugfestigkeit  $f_{ct}$  auf der Grundlage verschiedener Ansätze dargestellt ([13], [14], [27], [34]). Wie in Bild 29 zu sehen ist, nimmt die Biegezugfestigkeit mit abnehmender Balkenhöhe  $h$  deutlich zu. Bei sehr großen Balkenhöhen nähert sich die Biegezugfestigkeit der zentrischen Zugfestigkeit an. EC2, 3.1.8(1) gibt eine Beziehung zur Ermittlung der rechnerischen Biegezugfestigkeit aus der zentrischen Zugfestigkeit und Bauteilhöhe  $h$  an.

$$f_{ctm,fl} = \left(1,6 - \frac{h}{1000}\right) \cdot f_{ctm} \geq f_{ctm} \quad (3.7)$$

mit  $h$  die Gesamthöhe des Bauteils in mm

$f_{ctm}$  der Mittelwert der zentrischen Zugfestigkeit

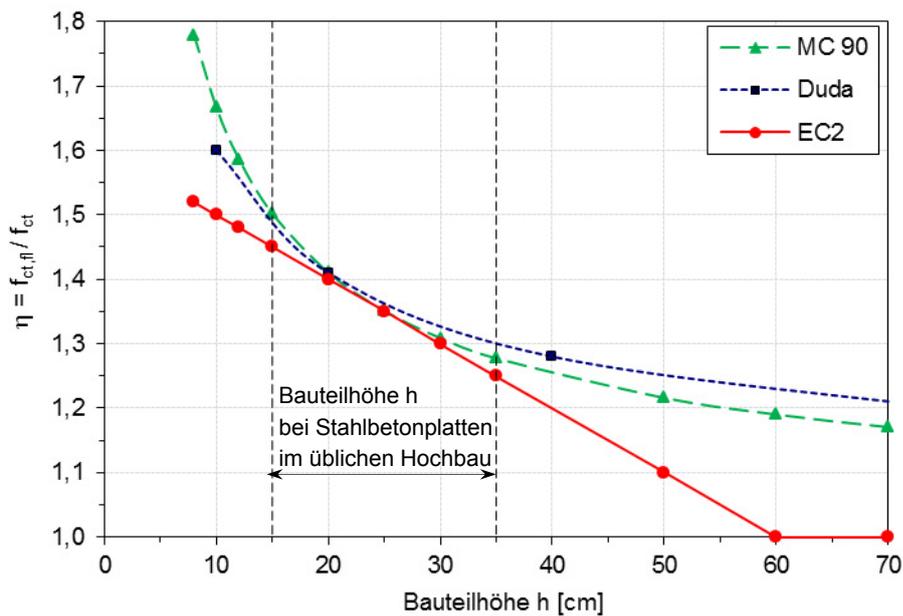
Nimmt man z.B. eine Bauteilhöhe von 20cm an, so ergibt sich gemäß Gl. (3.7)  $f_{ct,fl} = 1,40 \cdot f_{ctm}$ .

Gemäß Model Code 90 (CEB/FIP 1993) kann die Biegezugfestigkeit wie folgt bestimmt werden:

$$f_{ct,fl} = \frac{1 + 1,5 \cdot (h/h_0)^{0,7}}{1,5 \cdot (h/h_0)^{0,7}} \cdot f_{ctm} \quad (3.8)$$

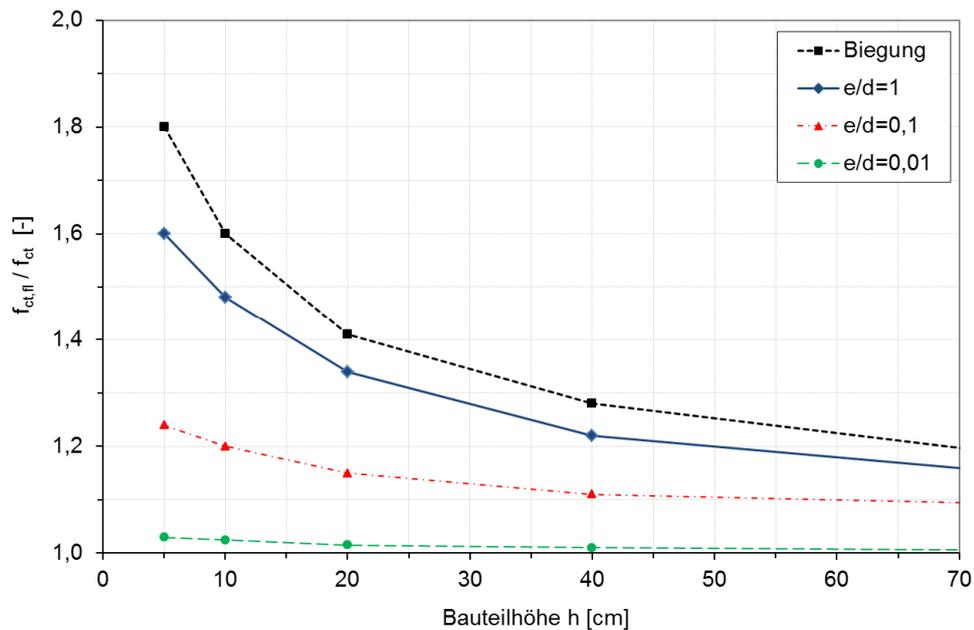
mit  $h_0 = 100$  mm, wobei  $h_0$  ein Bezugswert ist

Duda gibt in [34] ebenfalls eine Beziehung zur Ermittlung der Biegezugfestigkeit an, die in Bild 29 für den Fall reiner Biegung gemeinsam mit den beiden anderen Ansätzen dargestellt ist.



**Bild 29:** Einfluss der Bauteilhöhe  $h$  auf das Verhältnis von Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  zu zentrischer Zugfestigkeit  $f_{ct}$  nach verschiedenen Ansätzen

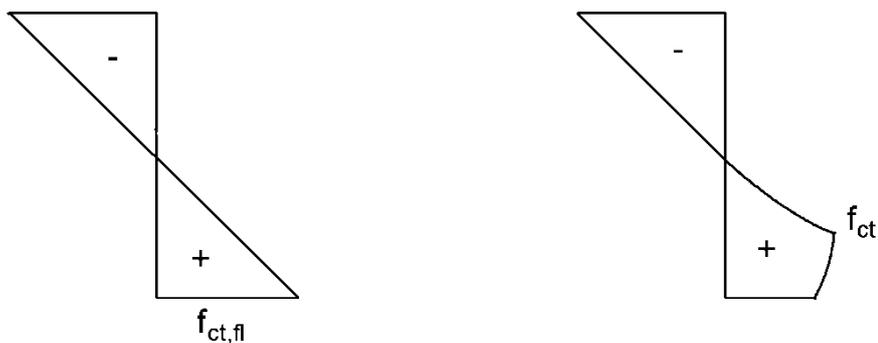
Der Unterschied zwischen reiner Biegung und einer exzentrischen Zugkraft nach Duda [34], kann Bild 30 entnommen werden. Mit kleiner werdender Exzentrizität der Zugkraft nimmt der Maßstabseffekt deutlich ab.



**Bild 30:** Bezogene Biegezugfestigkeit bei reiner Biegung und exzentrischem Zug nach Duda (aus [34])

Die Ursache für den Maßstabseffekt liegt in der Spannungsverteilung im Rissquerschnitt, infolge des Zugtragverhaltens des Betons gemäß Bild 26.

Die Spannungsverteilung im Riss ist bei kleinen Bauteilhöhen deutlich nichtlinear. Die Maximalspannung tritt dabei jedoch nicht am unteren Rand des Probekörpers auf (Bild 31a). Die tatsächliche Spannungsverteilung über die Querschnittshöhe weicht von der Annahme einer linearen Spannungsverteilung je nach Bauteilhöhe mehr oder weniger ab (Bild 31b). Die zentrische Zugfestigkeit des Betons wird im Querschnitt nicht überschritten.



a) falsche Annahme einer linearen Spannungsverteilung

b) wirkliche Spannungsverteilung

**Bild 31:** Spannungsverteilung unter Bruchmoment im Rissquerschnitt (aus [34])

### 3.2.3 Zeitliche Entwicklung der Betonzugfestigkeit

Die zeitliche Entwicklung der Zugfestigkeit des Betons  $f_{ctm}(t)$  ist vom Hydrationsgrad direkt abhängig. Demensprechend wird sie besonders stark durch die Nachbehandlung und Trocknungsbedingungen sowie der Bauteilgröße beeinflusst. Der zeitliche Verlauf der Zugfestigkeit darf gemäß EC2, 3.1.2(9) mit Gl. (3.9) ermittelt werden.

$$f_{ctm}(t) = [\beta_{cc}(t)]^{\alpha} \cdot f_{ctm} \quad (3.9)$$

$$\beta_{cc}(t) = \exp \left\{ s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{1/2} \right] \right\}$$

Dabei sind:

$\beta_{cc}(t)$  Ein vom Alter des Betons  $t$  abhängiger Beiwert

$t$  das Alter des Betons in Tagen

$s$  ein vom verwendeten Zementtyp abhängiger Beiwert

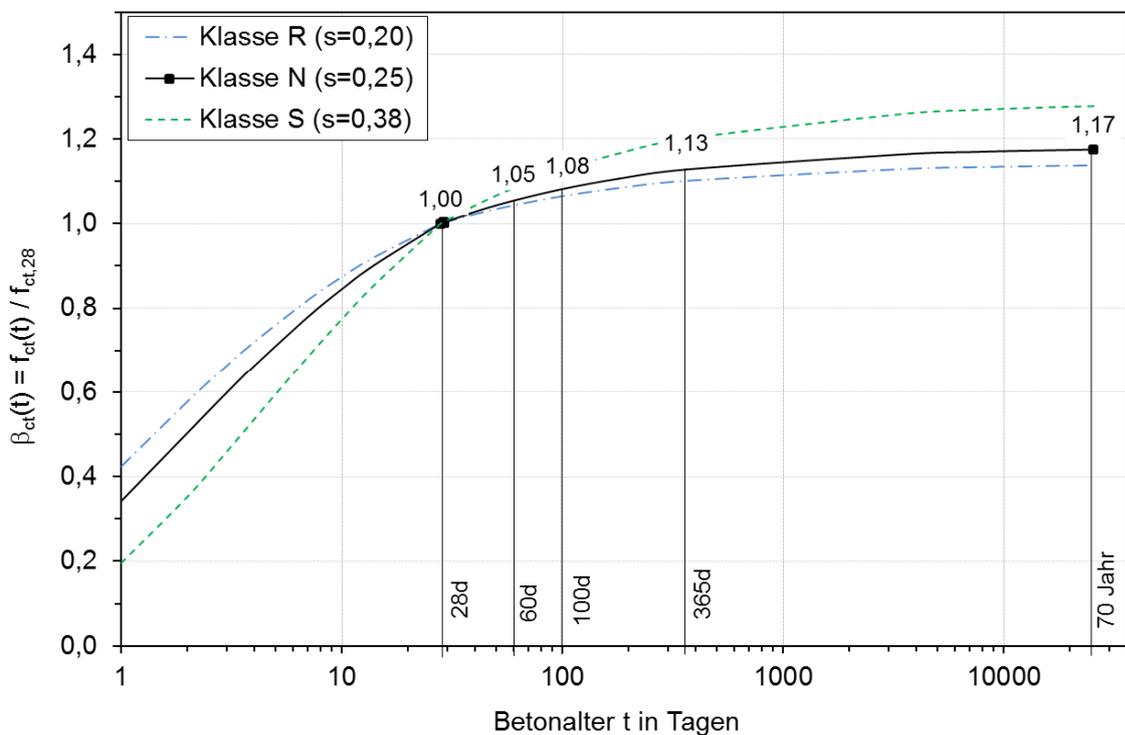
= 0,20 für Zement der Festigkeitsklassen CEM 42,5 R, CEM 52,5 N und CEM 52,5 R (Klasse R)

= 0,25 für Zement der Festigkeitsklassen CEM 32,5 R, CEM 42,5 N (Klasse N)

= 0,38 für Zement der Festigkeitsklassen CEM 32,5 N (Klasse S)

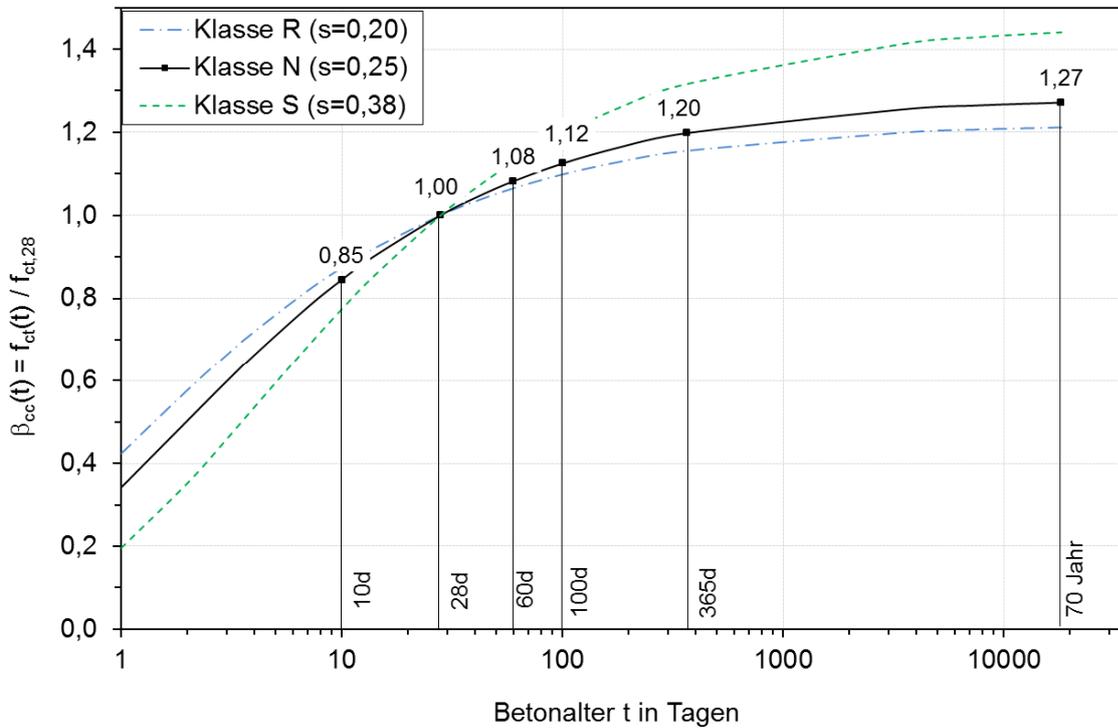
$\alpha$  = 1 für  $t < 28$  Tage

$\alpha$  = 2/3 für  $t \geq 28$  Tage



**Bild 32:** Zeitliche Entwicklung der Betonzugfestigkeit  $f_{ctm}(t)$  je nach Zement der Klasse nach EC2

Mit dem Alter nimmt die zeitliche Entwicklung der Betonzugfestigkeit  $f_{ctm}(t)$  zunächst wie die Druckfestigkeit zu. Die Nacherhärtung des Betons aus sehr schnell erhärtenden Zementen ist klein. Nach 28 Tagen ist die Zunahme gering. So erfolgt für die Klasse N bis zum Zeitpunkt  $t=100d$  und  $t=\infty$  ein Anstieg der Festigkeit auf den 1,08-fachen bzw. 1,17-fachen Wert der 28 Tage Zugfestigkeit des Betons (Bild 32).



**Bild 33:** Zeitliche Entwicklung der Betonzugfestigkeit  $f_{ctm}(t)$  je nach Zement der Klasse nach *fib* MC 2010

Gemäß *fib* Model Code 2010 [14] kann die zeitliche Entwicklung der Betonzugfestigkeit  $f_{ctm}(t)$  mit Gl. (3.10) beschrieben werden.

$$f_{ctm}(t) = [\beta_{cc}(t)]^{\alpha} \cdot f_{ctm} \quad (3.10)$$

Dabei ist:

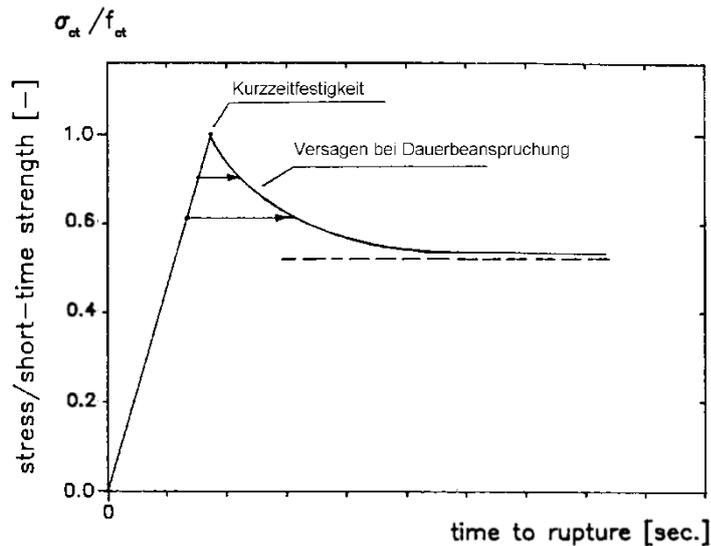
$$\alpha = 1,0 \quad \text{für } t < 28 \text{ Tage}$$

$$\alpha = 1,0 \quad \text{für } t \geq 28 \text{ Tage}$$

Im *fib* MC 2010 wird von einer zeitlichen Entwicklung der Betonzugfestigkeit  $f_{ctm}(t)$  ausgegangen, die erst ab einem Alter von 28 Tagen affin zur Entwicklung der Druckfestigkeit ist. Der Unterschied in Gl. (3.9) besteht im erhöhten Exponenten  $\alpha=1,0$  für  $[\beta_{cc}(t)]^{\alpha}$  im *fib* MC 2010 statt  $2/3$  im EC2. Aus dem Vergleich zwischen

Bild 32 und Bild 33 ist zu erkennen, dass der rechnerische Anstieg der Betonzugfestigkeit  $f_{ctm}(t)$  gemäß EC2 nach 28 Tagen ( $t > 28d$ ) etwas flacher verläuft als gemäß *fib* MC 2010.

### 3.2.4 Dauerstandzugfestigkeit



**Bild 34:** Prinzip der Zugfestigkeit des Betons unter einer Langzeitbelastung (aus [89])

Analog dem Verhalten des Betons unter einer ständig wirksamen Druckbeanspruchung existiert auch unter einer entsprechenden Zugbeanspruchung eine Dauerstandfestigkeit. Im Gegensatz zur Dauerstandfestigkeit unter Druckbeanspruchung liegen nur wenige Versuche zur Bestimmung der Zugfestigkeit unter langzeitiger Beanspruchung vor. Der Grund hierfür dürfte vor allem in der relativ aufwendigen Versuchsdurchführung zu sehen sein. Bild 34 zeigt qualitativ das Verhältnis zwischen der Dauerstandzugfestigkeit  $\sigma_{ct}$  und der Zugfestigkeit  $f_{ct}$  bei Kurzzeitbeanspruchung über die Dauer der Beanspruchung. Die Spannung wurde konstant gehalten. Wirken hohe Zugspannungen längere Zeit auf den Beton ein, so setzt ein Mikrorisswachstum auch bei konstanter Belastung ein, bis der Beton versagt. Mit sinkender Zugspannung nimmt die Zeit bis zum Versagen zu.

Reinhardt/Cornelissen [81] führten Zeitstandversuche an zentrisch gezogenen Prüfkörpern unter langzeitiger Lasteinwirkung durch. Das Austrocknen vor und während der Versuchsdurchführung wurde durch eine Versiegelung verhindert. Bei den durchgeführten Versuchen wurde auch der Einfluss der Betondruckfestigkeit und der Zementart untersucht (Tabelle 7). Nach etwa einem Tag stellte sich der späteste Zeitbruch ein. Die längste Belastungsdauer betrug 30 Tage, danach wurden diese als Durchläufer bezeichneten Proben ausgebaut. Außerdem wurde festgestellt, dass der Abfall der Dauerstandfestigkeit bei konstanter Zugspannung sehr schnell erfolgt und einen unteren Grenzwert von etwa 60% der Kurzzeitzugfestigkeit  $f_{ctm}$  erreicht [86]. Unter diesem Spannungsniveau traten auch die ersten „Durchläufer“ auf. Die Streuungen in den Versuchsergebnissen waren beträchtlich, allerdings nicht größer als aufgrund der Streuung der statischen Zugfestigkeit zu erwarten war. Veränderungen in der Betonzusammensetzung und der Temperatur im Bereich zwischen 4°C und 21°C hatten keinen signifikanten Einfluss auf die Größe der Dauerstandfestigkeit.

Tabelle 7: Mechanische Eigenschaften des Festbetons (aus [81])

	H <sup>1)</sup> P <sup>2)</sup>	HH	LP	LH	
$f_{cm,cube}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	44,2	44,2	33,3	31,6	<sup>1)</sup> H= hohe Festigkeit, L= niedrige Festigkeit
$f_{ctm,sp}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	2,79	2,73	2,26	2,29	<sup>2)</sup> P= Portlandzement, H=Hochofenzement B
$f_{ctm}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	2,60	2,92	2,21	2,14	
$E_{cm}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	29500	30400	28800	29500	

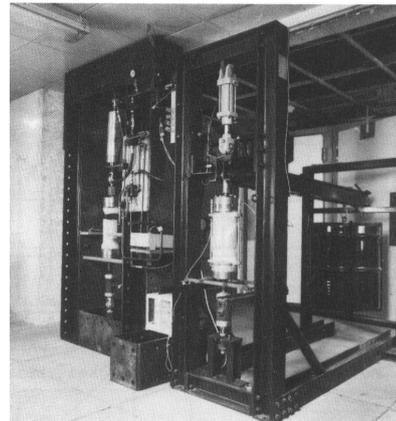
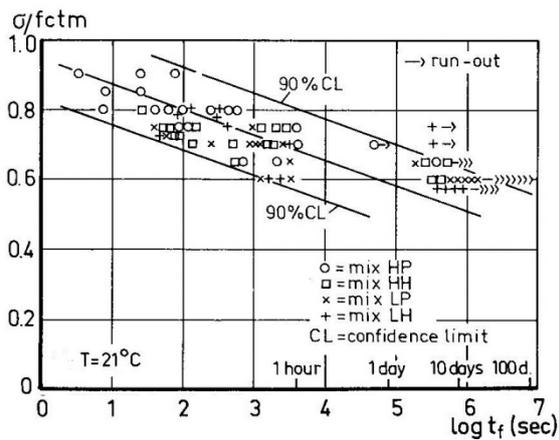
Eine statistische Regressionsanalyse ergab, dass für die 140 Versuchsergebnisse der Zusammenhang zwischen dem Spannungsniveau  $\sigma_{ct}/f_{ctm}$  und der Bruchstandzeit in Sekunden durch Gl. (3.11) beschrieben werden kann [81]. Hierbei wurden die Durchlaufläufer in der Regressionsanalyse mit einer fiktiven Versagenszeit von ca. 4 Tagen berücksichtigt.

$$\frac{\sigma_{ct}}{f_{ctm}} = -0,07 \cdot \log t + 0,94 \quad (3.11)$$

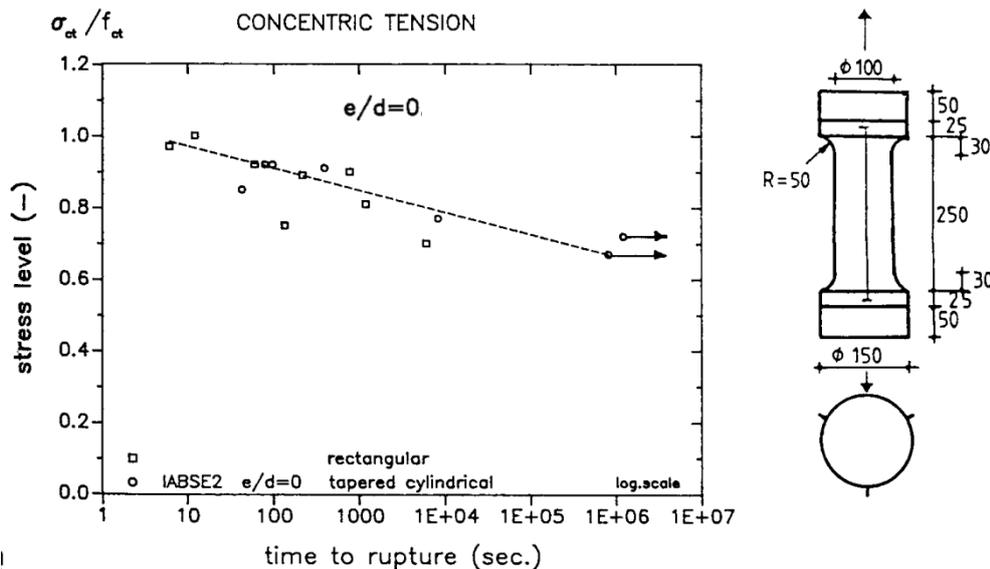
Hierbei sind:

$\sigma_{ct}$  effektive Zugspannung als Beanspruchung

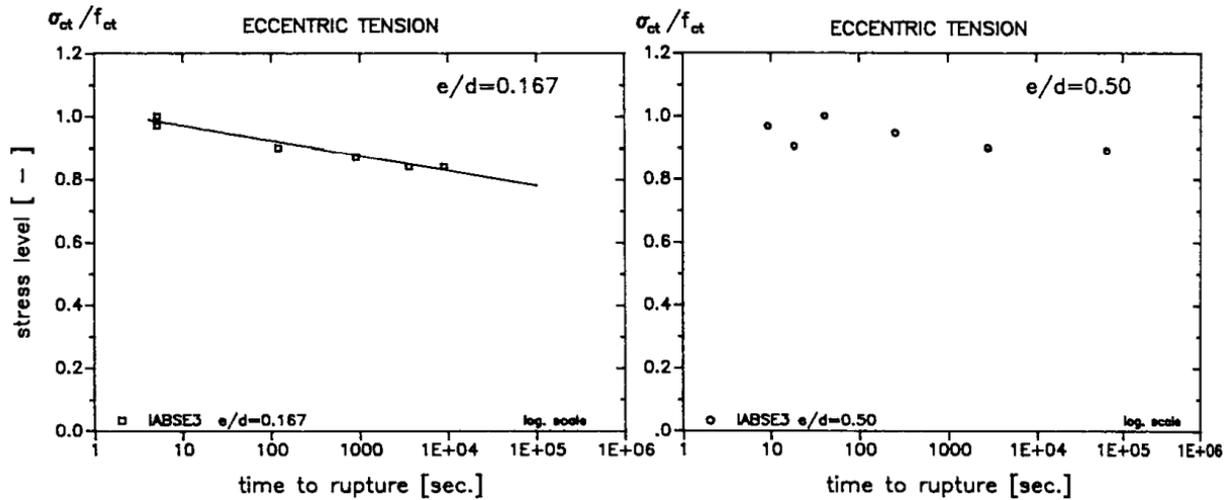
$t$  Standzeit in Sekunden bis zum Bruch



**Bild 35:** Versuche von Reinhardt/Cornelissen (1985) und Annäherung nach Gl. (3.11) (aus [81], [92])



**Bild 36:** Versuche von Shkoukani/Walraven (1991): Beziehung zwischen Spannungsniveau  $\sigma_{ct}/f_{ctm}$  und Bruchstandzeit mit  $e/d=0$  (aus [89])



**Bild 37:** Beziehung zwischen Spannungsniveau  $\sigma_{ct}/f_{ct}$  und Bruchstandzeit mit  $e/d=0,167$  und  $0,5$  (aus [89])

Shkoukani/Walraven [89] führten ebenfalls Zeitstand-Zugversuche an zylindrischen und quadratischen Probekörpern durch, bei denen zusätzlich der Einfluss einer exzentrischen Zugbelastung untersucht wurde. Die Exzentrizität wurde in den Versuchen im Bereich von  $e/d = 0$ ,  $0,167$  und  $0,5$  variiert. Bei den Proben mit  $e/d = 0$  erfolgte bereits ein Versagen unter 70% der Kurzzeitzugfestigkeit. Im Gegensatz hierzu wurde bei den Proben mit  $e/d = 0,167$  eine Dauerstandzugfestigkeit von ca. 75% der Zugfestigkeit unter kurzzeitiger Beanspruchung erzielt. Dieser Wert stieg mit zunehmender Exzentrizität für  $e/d = 0,5$  auf 83% an. Es zeigte sich, dass bei exzentrischer Belastung der Abfall der Dauerstand- zur Kurzzeitzugfestigkeit geringer ist (Bild 37).

Durch die Gl. (3.12) - (3.15) aus Versuchsergebnisse kann im Mittel in Abhängigkeit von der Abfall der Zugfestigkeit beschrieben werden [62], [92].

$$e/d = 0 \text{ (zentrisch): } \quad \frac{\sigma_{ct}}{f_{ctm}} = -0,06 \cdot \log t + 1,03 \quad (3.12)$$

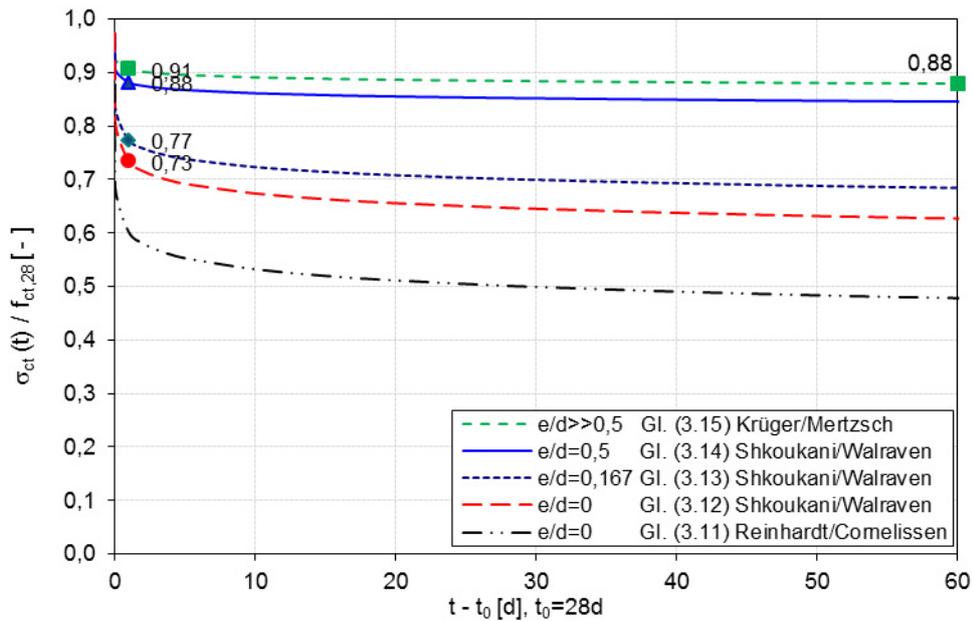
$$e/d = 0,167 \text{ (exzentrisch): } \quad \frac{\sigma_{ct}}{f_{ctm}} = -0,05 \cdot \log t + 1,02 \quad (3.13)$$

$$e/d = 0,5 \text{ (exzentrisch): } \quad \frac{\sigma_{ct}}{f_{ctm}} = -0,02 \cdot \log t + 0,98 \quad (3.14)$$

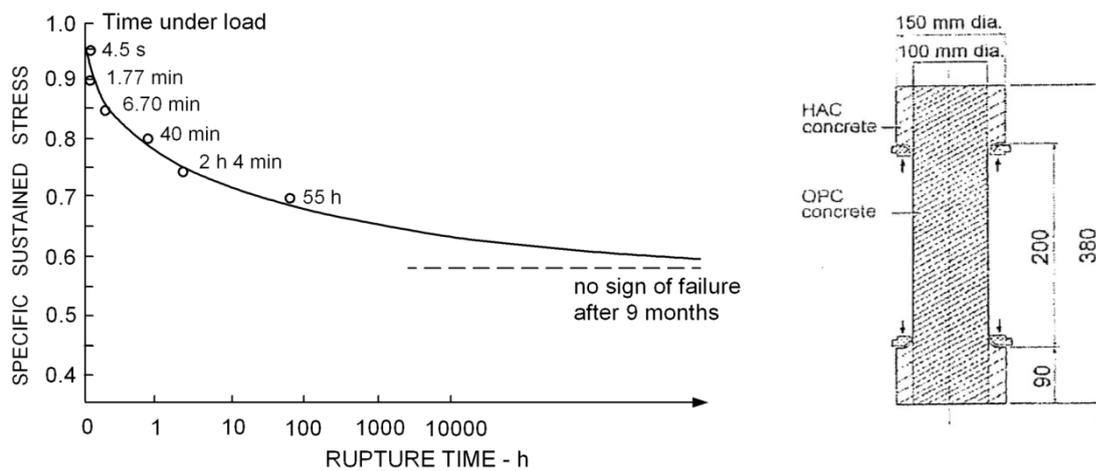
$$e/d \gg 0,5 \text{ (nur Biegung): } \quad \frac{\sigma_{ct}}{f_{ctm}} = -0,015 \cdot \log t + 0,98 \quad (3.15)$$

mit  $t$  = Standzeit in Sekunden bis zum Bruch.

Für überwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile ( $e/d \gg 0,5$ ) ist beispielsweise nach einer Belastungsdauer vom 1 Tag ( $t - t_0 = 1d$ ,  $t = 29d$ ,  $t_0 = 28d$ ) ein Abfall der Betonzugfestigkeit auf  $\sigma_{ct} = 0,90 \cdot f_{ctm}$  zu erwarten und nach 60 Tagen auf etwa  $\sigma_{ct} = 0,88 \cdot f_{ctm}$ . Für sehr lange Zeiträume strebt die Kurve asymptotisch gegen einen Wert von etwa  $0,85 \cdot f_{ctm}$ .



**Bild 38:** Abhängigkeit des bezogenen Zugfestigkeitsabfalls bei langzeitiger Beanspruchung nach Gl. (3.11) - (3.15)



**Bild 39:** Auf die Kurzzeitzugfestigkeit bezogene zentrische Betonzugfestigkeit in Abhängigkeit von der Belastungsdauer (aus [1])

Al-Kubaisy und Young [1], [86] testeten angekerbte Normalbetonproben mit einer Druckfestigkeit von  $f_{cm}=44,8 \text{ N/mm}^2$  unter Dauerzugbelastung. Dabei wurde während des Versuchs die Rissbildung mit Ultraschallsignalen detektiert. Die Risse verliefen zum Teil schon vor der Belastung in der Verbundzone zwischen Zementstein und Zuschlagkorn. Der längste Zeitversuch dauerte 55 Stunden. Nach 9 Monaten wurden die Proben, die nicht versagt waren, wieder ausgebaut (Bild 39). Die Restzugfestigkeit betrug etwa 67% ( $\alpha_{ct}=0,67$ ). Nach Kordina [55], [56] betragen die zentrischen Dauerstandzugfestigkeiten zum Zeitpunkt  $t=1$  Jahr etwa 75% der zentrischen Kurzzeitzugfestigkeiten. Die zentrische Zugfestigkeit unter Dauerbeanspruchung kann gemäß fib Model Code 2010 mit Gl. (3.16) ermittelt werden [14].

$$f_{ctk,t=\infty} = \alpha \cdot f_{ctk} \quad (3.16)$$

Dabei ist:

$f_{ctk}$  Kurzzeitzugfestigkeit

$\alpha = 0,6$  Abminderungsfaktor für die Dauerstandfestigkeit für normal Beton

### 3.2.5 Einfluss einer Vorbelastung

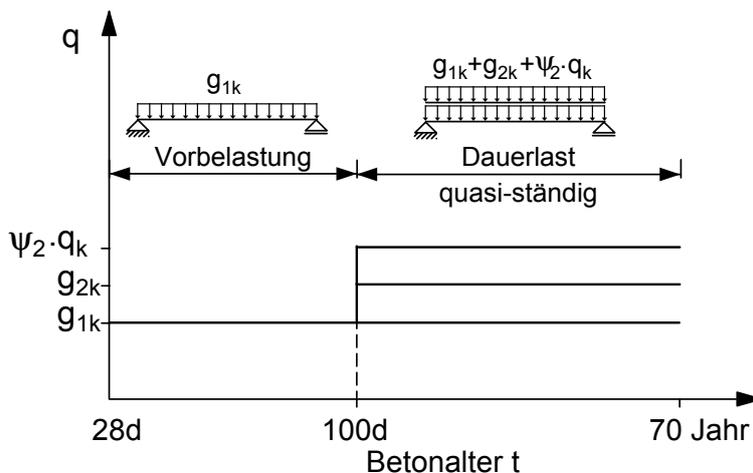
Verschiedentlich wurde bei einer exzentrischen Belastung und einer Belastungsgeschwindigkeit, die eine Versuchsdauer von 3 Stunden erlaubt, kein schädigender, sondern sogar eine festigkeitssteigernder Einfluss beobachtet. Dies liegt nach Meinung der betreffenden Autoren daran, dass die Dauervorbelastung günstig wirkt, weil sich Spannungsspitzen auf Mikrorissebenen durch Relaxation abbauen können [86], [91].

Von anderen Autoren wurde dagegen eine Festigkeitsminderung infolge einer Zugvorbelastung oder kein Einfluss festgestellt. Die Ergebnisse wurden dabei erheblich von den Randbedingungen (z. B. unterschiedliche Lastniveaus, Dauer der Vorbelastung) der Versuche bestimmt [7], [86], [99].

Aufgrund der widersprüchlichen Aussagen in der Literatur wurden an der TU Dortmund Tastversuche zum Einfluss einer Vorbelastung durchgeführt, über die im nachfolgenden Abschnitt 3.3 berichtet wird.

Ein ggf. vorhandener Einfluss ist für die Berechnung der Durchbiegungen von Interesse. In Bild 40 wird schematisch und beispielhaft die Lastgeschichte der Decke eines Hochbaus gezeigt. Zunächst wirkt die Eigenlast  $g_{1k}$  bis 100 Tage und anschließend wird zusätzlich eine Ausbaulast  $g_{2k}$  sowie eine veränderliche Last  $\psi_2 \cdot q_k$  als quasi-ständige Nutzlast aufgebracht. D.h., bevor die maßgebende Belastung für die Durchbiegung aufgebracht wird, wirkt  $g_{1k}$  als Vorbelastung.

- Zeitpunkt  $t_0 = 28d$ : Aufbringen der Eigenlast  $g_{1k}$
- Zeitpunkt  $t_1 = 100d$ : Aufbringen der Ausbaulast  $g_{2k}$  und der quasi-ständigen Nutzlast  $\psi_2 \cdot q_k$



**Bild 40:** Lastgeschichte der Decke eines Hochbaus

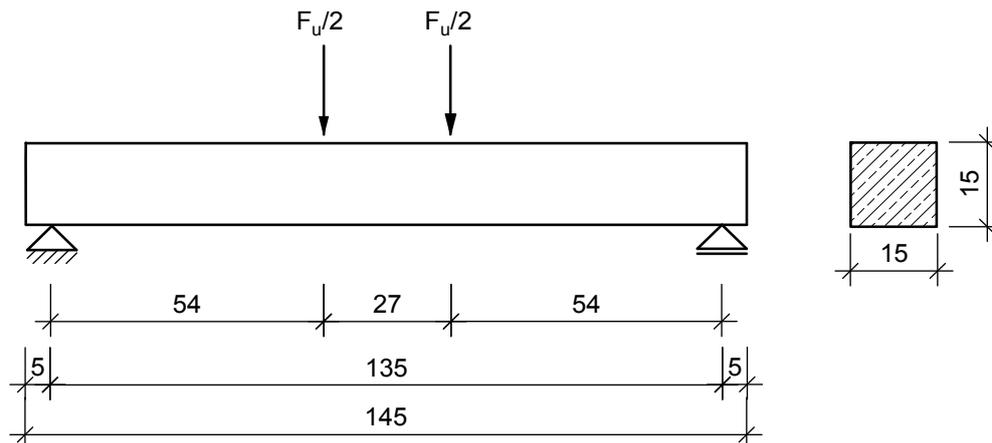
Für die Berechnung der Durchbiegungen ist es von Interesse, ob infolge der Vorbelastung durch  $g_{1k}$  bezüglich des Rissmomentes der Decke über die Betonzugfestigkeit eine festigkeitssteigernde oder –mindernde Wirkung eintritt.

### 3.3 Tastversuche zum Einfluss einer Vorbelastung auf die Zugfestigkeit

#### 3.3.1 Versuchsaufbau

Die Tastversuche wurden an Biegebalken aus unbewehrtem Beton unter Kurzzeit- und Langzeitbelastung durchgeführt. Hierbei wurde auch der Einfluss einer Vorbelastung berücksichtigt. Ziel war, den Einfluss einer Vorbelastung auf die Kurzzeit- und Dauerstandzugfestigkeit zu untersuchen.

#### 3.3.2 Versuchskörper



**Bild 41:** Abmessungen des Versuchskörpers (VK 1 - 14)

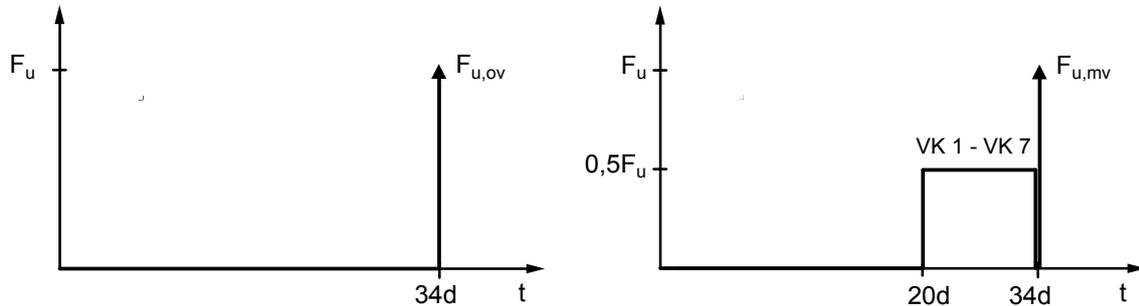
Die Kurzzeit- und Langzeitversuche an Biegebalken von 150mm x 150mm x 1450mm wurden mit zwei Einzellasten durchgeführt. Die Abmessungen sind in Bild 41 dargestellt. Für die Versuche wurden insgesamt 14 Versuchskörper aus unbewehrtem Beton und 15 Probewürfel unter gleichen Erhärtungsbedingungen zur Bestimmung der Festigkeit hergestellt (Bild 42). Die Versuchskörper der Druckfestigkeitsklasse C25/30 wurden aus natürlichem, nicht gebrochenem Zuschlag (Sieblinie im günstigen Bereich), Portlandzement und Leitungswasser hergestellt. Das Ausschalen erfolgte nach 5 Tagen. Anschließend wurden die Versuchskörper und die Probewürfel jeweils getrennt mit einer Plastikfolie eingepackt. Die Plastikfolie war vor und während der Versuchsdurchführung vorhanden. Durch die Folienverpackungen sollten ein Austrocknen an den Oberflächen und damit einhergehende zugfestigkeitsmindernde Eigenspannungszustände weitgehend vermieden werden.



**Bild 42:** Versuchskörper und Schalung

### 3.3.3 Kurzzeitversuche ohne und mit Vorbelastung

Die Kurzzeitversuche ohne Vorbelastung dienen als Bezugsversuche zum Vergleich. Die vorbelasteten Versuchskörper wurden 14 Tage mit einem Spannungsniveau  $0,5 \cdot F_u$  belastet. Mit  $F_{u,ov}$  ist die Bruchlast gemeint, die im Mittel für die nicht vorbelasteten Versuchskörper ermittelt wurde.



**Bild 43:** Schema zu der durchgeführten Lastgeschichte ohne und mit Vorbelastung  
 ov: ohne Vorbelastung (links)      mv: mit Vorbelastung (rechts)

#### 3.3.3.1 Versuchsdurchführung mit Vorbelastung

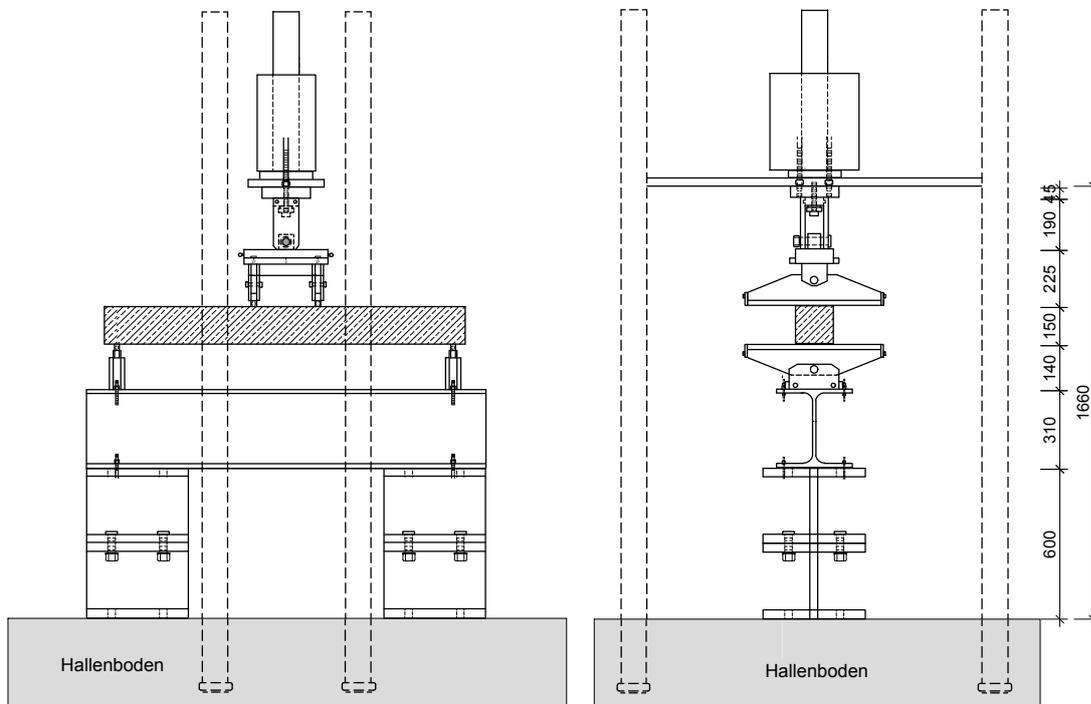
Die Krafteinleitung erfolgte mit Sandsäcken als Ballast an den Balken als 14 tägige Vorbelastung (Bild 44).



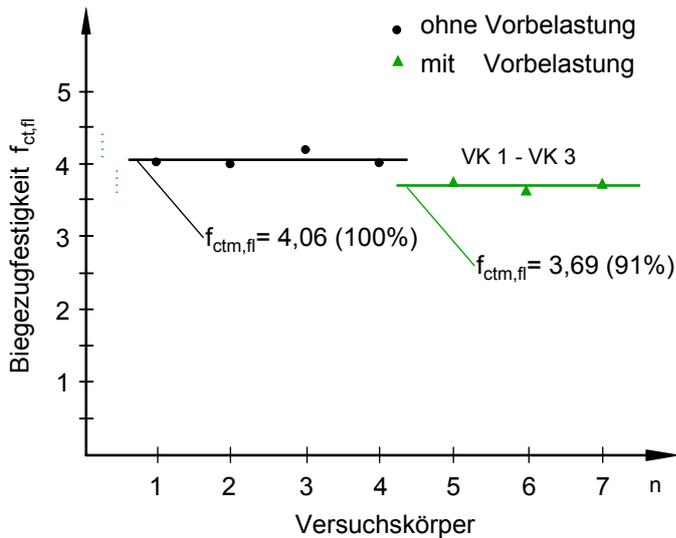
**Bild 44:** Vorbelastete Versuchskörper (VK 1-7)

### 3.3.3.2 Bestimmung der Kurzzeitfestigkeit

Mit einer Prüfmaschine wurden anschließend die vorbelasteten und nicht vorbelasteten Versuchskörper unter Kurzzeitbelastung getestet (Bild 45). Während des Versuches wurde die Plastikfolie nicht entfernt. Die Belastung wurde kraftgeregelt durchgeführt. Die Last wurde bis zum Bruch des Biegebalkens so gesteigert, dass die Biegezugspannung im Balken je Sekunde um  $0,05 \text{ N/mm}^2$  gemäß DIN EN 12390-5, 6.2 zunahm.

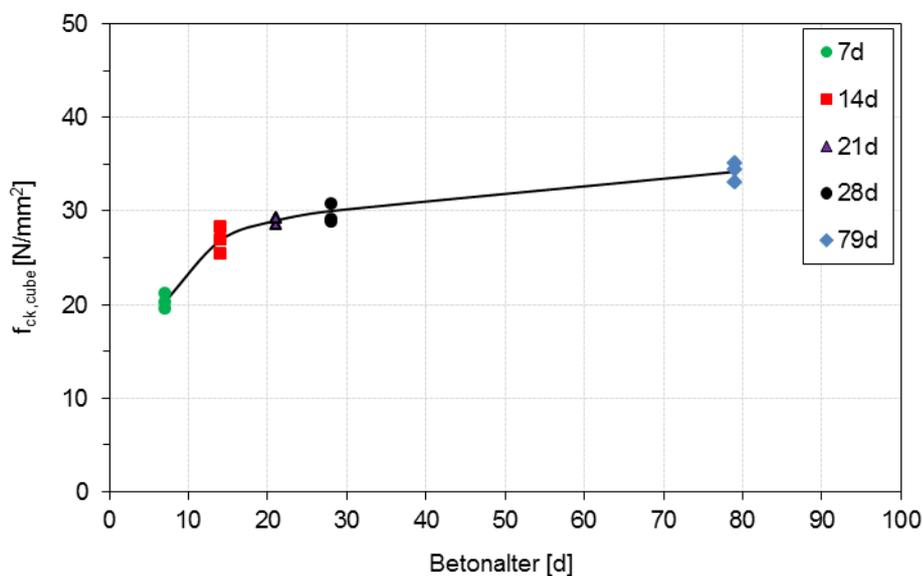


**Bild 45:** Versuchsstand und Versuchsaufbau des statischen Versuches



**Bild 46:** Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  ohne und mit Vorbelastung zum Zeitpunkt  $t=34d$

In Bild 46 werden die in den Versuchen festgestellten Biegezugfestigkeiten  $f_{ct,fl}$  ohne und mit Vorbelastung verglichen. Die Biegezugfestigkeit wird aus der gemessenen Bruchlast  $F_u$  berechnet ( $M_u = f_{ct,fl} \cdot W$ ). Die mittlere Biegezugfestigkeit  $f_{ctm,fl}$  ohne Vorbelastung betrug  $4,06 \text{ MN/m}^2$  und mit Vorbelastung  $3,69 \text{ MN/m}^2$ . Daraus ergibt sich, dass die Biegezugfestigkeit mit Vorbelastung ca. 10% kleiner ist als ohne Vorbelastung, wobei die Streuungen in den Versuchsergebnissen jeweils gering sind.



**Bild 47:** Gemessene Würfeldruckfestigkeit in Abhängigkeit vom Betonalter

In Bild 47 ist die gemessene zeitabhängige Entwicklung der Würfeldruckfestigkeit  $f_{ck,cube}$  dargestellt.

Nach 28d:

$$f_{cm,cube} = 30 \text{ MN/m}^2$$

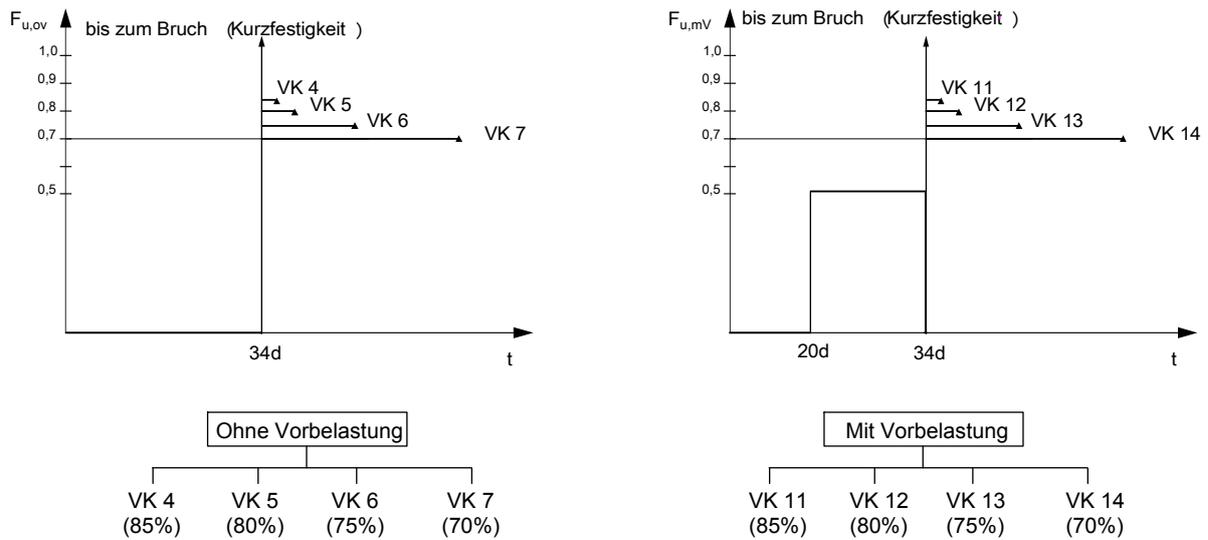
$$f_{cm,cyl} = 25 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{ctm} \approx 0,30 \cdot 25^{2/3} = 2,6 \text{ MN/m}^2 \text{ (Abschätzung nach EC2)}$$

$$f_{ct,fl} \approx 1,45 \cdot 2,6 = 3,8 \text{ MN/m}^2 \text{ (Abschätzung nach EC2)}$$

Damit wird die Größenordnung der bei den Versuchskörpern gemessenen Biegezugfestigkeiten bestätigt.

### 3.3.4 Dauerstandversuche ohne und mit Vorbelastung



**Bild 48:** Schema zur Größe der Dauerstandbelastung für die Probekörper ohne (VK 4 bis VK 7) und mit (VK 11 bis VK 14) Vorbelastung bezogen auf die Kurzzeitfestigkeit

Zur Bestimmung der Dauerstandfestigkeit wurde zunächst an 3 Versuchskörpern als Bezugswert die Kurzzeitfestigkeit  $F_{u,ov}$  und  $F_{u,mv}$  ermittelt. Für die Bestimmung verschiedenen Belastungsniveaus wurde die Kurzzeitfestigkeit aus Kurzzeitversuche verwendet.

Zur Bestimmung der Dauerstandzugfestigkeit und der Bruchzeit wurden die Dauerstandversuche mit und ohne Vorbelastung durchgeführt. Für die genauen Ergebnisse der Bruchzeit wurde eine Überwachungskamera eingerichtet. Für diese Dauerstandversuche wurden insgesamt 8 Versuchskörper mit einem Lastverhältnis von 0,70/0,75/0,80/0,85 bezogen auf die Kurzzeitfestigkeit ohne Vorbelastung  $F_{u,ov}$  belastet (Bild 48). Bei den 4 Versuchskörpern VK 4 bis VK 7 wurde das Lastniveau der nicht vorbelasteten Versuchskörper mit  $F=(0,7 \text{ bis } 0,85) \cdot F_u$  variiert. Die vorbelasteten 4 Versuchskörper VK 11 bis VK 14 wurden 14 Tage mit einem Spannungsniveau  $0,5 \cdot F_u$  vorbelastet. Die Prüfung fand im Alter der Versuchskörper von 34 Tagen statt.

### 3.3.4.1 Versuchsergebnisse der Dauerstandversuche



**Bild 49:** Bruch (85% ohne und mit Vorbelastung: links, 75% ohne Vorbelastung: rechts)

Im Dauerstandversuch zeigte sich, dass der Abfall der Zugfestigkeit unter konstanter Beanspruchung sehr schnell erfolgt. 3 von 8 Versuchskörpern ohne bzw. mit Vorbelastung gingen nach relativ kurzer Zeit zu Bruch (Bild 49): Der vorbelastete Versuchskörper mit einem Lastniveau von 0,85 der Bruchlast nach 2 Sekunden, der nicht vorbelastete Versuchskörper mit einem Lastniveau von 0,85 der Bruchlast nach 10 Sekunden.

Der nicht vorbelastete Versuchskörper mit einem Lastniveau von 0,75 der Bruchlast ging in 11 Minuten zu Bruch (Bild 49, rechts). Versuchskörper, die nicht innerhalb der ersten 11 Minuten versagten, kamen auch danach nicht mehr zu Bruch.



**Bild 50:** Links: verbleibende 5 Versuchskörper mit einem Lastniveau bis zum 0,8-fachen der Bruchlast  
Rechts: verbleibende 5 Versuchskörper mit teilweise anschließender Lasterhöhung

5 Versuchskörper blieben 18 Tage ohne Bruch. Aus den Versuchsergebnissen kann festgestellt werden, dass die Dauerstandzugfestigkeit zwischen 0,7 und 0,8 der Kurzzeitfestigkeit betrug. Ein eindeutiger Einfluss aus der Vorbelastung auf die Dauerstandzugfestigkeit konnte dabei jedoch nicht festgestellt werden. Für die Bestimmung der wirksamen Zugfestigkeit als Dauerstandzugfestigkeit

ohne und mit Vorbelastung kann danach als Faktor 0,7 bis 0,8 bzw. im Mittel etwa 0,75 ( $\alpha_{ct} = 0,75$ ) angesetzt werden.

Zusätzlich wurde die Belastung der zu diesem Zeitpunkt noch nicht zu Bruch gegangenen Versuchskörper mit einem Lastniveau von 0,70 bzw. 0,75 der Bruchlast einheitlich auf ein Lastniveau von 0,8 der Kurzzeit-Bruchlast erhöht (Bild 50, rechts). Der vorbelaste Versuchskörper mit einem Lastniveau von 0,8 der Bruchlast (zuvor 0,7) ging dabei innerhalb von 6 Minuten zu Bruch.

### 3.3.4.2 Tragfähigkeit nach erfolgter Dauerstandbelastung

Mit einer Prüfmaschine wurden danach zusätzlich statische Kurzzeit Versuche an den nicht zu Bruch gegangenen verbliebenen 4 Versuchskörpern durchgeführt (Bild 50, rechts). Die Prüfung fand im Alter von 79 Tage statt. In Tabelle 8 sind die Versuchsergebnisse angegeben. Beim Vergleich der Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  ( $t=79d$ ) mit und ohne Vorbelastung zeigt sich kein signifikanter Einfluss aus der Vorbelastung.

Tabelle 8: Biegezugfestigkeit im Alter von 79 Tage

VK	80% m.V. (zuvor 75%)	80% m.V.	80% o.V. (zuvor 70%)	80% o.V.
$f_{ct,fl}$ [MN/m <sup>2</sup> ]	4,65	4,60	4,34	4,57

### 3.3.5 Folgerungen

Der Einfluss einer Vorbelastung auf die Kurzzeit- und Dauerstandzugfestigkeit wird aus den Tastversuchen wie folgt zusammengefasst.

$\alpha_{ct}$	= 1,0	Kurzzeitfestigkeit ohne Vorbelastung
$\alpha_{ct}$	= 0,9	Kurzzeitfestigkeit mit Vorbelastung
$\alpha_{ct}$	= 0,7...0,8	Dauerstandzugfestigkeit ohne Vorbelastung bei Biegung (i.M. 0,75)
$\alpha_{ct}$	= 0,7...0,8	Dauerstandzugfestigkeit mit Vorbelastung bei Biegung (i. M. 0,75)

### 3.4 Physikalische Einflüsse auf die Zugfestigkeit des Betons

Die Zugfestigkeit des Betons unterliegt großen Streuungen (Variationskoeffizient ca. 30%). Die bei der Bemessung eines Bauteils ausnutzbare Zugfestigkeit kann darüber hinaus von weiteren physikalischen Einflüssen bestimmt sein. Ursachen dafür sind zu überlagernde nichtlinear verteilte *Eigenspannungen* infolge ungleichmäßigen Abfließens der Hydratationswärme, ungleichmäßigen Schwindens über den Bauteilquerschnitt und Behinderung der Schwinddehnungen durch die Bewehrung, die Schwächung des Betonquerschnitts und Zugspannungskonzentrationen durch die Bewehrung, die gegenüber der Kurzzeitfestigkeit deutlich geringere *Dauerstandzugfestigkeit* sowie der *Maßstabeinfluss* aus der Bauteilgeometrie. Die vorgenannten Einflüsse wirken sich im Allgemeinen parallel zur Bauteiloberfläche wesentlich stärker aus als rechtwinklig zur Bauteiloberfläche [21], [22], [88].

Bei einer Dauerstandsbeanspruchung sind zwei gegenläufige Einflüsse wirksam: Eine hohe Dauerlast bewirkt eine Festigkeitsminderung, die mit steigender Belastungsdauer kontinuierlich, aber mit sinkender Geschwindigkeit zunimmt. Gleichzeitig kann der Beton – ein ausreichendes Feuchteangebot vorausgesetzt – weiter hydratisieren, wodurch er an Festigkeit gewinnt (Nacherhärtung des Betons). Sobald die Festigkeitszunahme als Folge der fortschreitenden Hydratation größer ist als der Festigkeitsverlust als Folge der fortschreitenden Mikrorissbildung, tritt kein Dauerstandsversagen mehr ein.

Durch folgende physikalische Einflüsse wird die Zugfestigkeit des Betons vermindert oder vergrößert:

#### *Vergrößerung der Zugfestigkeit*

- Maßstabeffekt ( $\eta = f_{ct,fl}/f_{ct}$ )
- Nacherhärtung des Betons ( $\beta_{ct} = f_{ct}(t)/f_{ct,28}$ )

#### *Verminderung der Zugfestigkeit*

- Dauerstandzugfestigkeit ( $\alpha_{ct} \cdot f_{ct,28}$ ) < Kurzzeitzugfestigkeit ( $f_{ct,28}$ )
- Nichtlinear verteilte Eigenspannungen
- Eigenspannungen infolge Schwindbehinderung durch die Bewehrung

Die genannten physikalischen Einflüsse auf die Zugfestigkeit des Betons wurden beschrieben. Diese erwähnten Einflüsse sind beim Ansatz der Zugfestigkeit des Betons für die Durchbiegungsberechnungen angemessen zu berücksichtigen.

### 3.5 Vorschlag zum Ansatz der wirksamen Zugfestigkeit $f_{ct,eff}$ für die Berechnung der Durchbiegungen

Für die Bestimmung der wirksamen Zugfestigkeit des Betons  $f_{ct,eff}$  werden die bekannten physikalische Einflüsse auf die Zugfestigkeit berücksichtigt. Auf der Grundlage der oben erwähnten Einflüsse auf die Zugfestigkeit wird folgender Ansatz für die wirksame Zugfestigkeit nach Gl. (3.17) vorgeschlagen.

$$f_{ct,eff}(t) = \beta_{ct} \cdot k \cdot \alpha_{ct} \cdot \eta \cdot f_{ctm} \quad (\text{reine Biegung}) \quad (3.17)$$

Dabei sind:

$\beta_{ct}$	= 1,1	Nacherhärtung des Betons nach EC2 bzw. <i>fib</i> MC2010 ( $t = 60d \dots 100d$ )
$k$	= 0,9	nichtlinear verteilte Eigenspannungen aus Schwinden und Temperatur
$\alpha_{ct}$	= 1,0	Kurzzeitfestigkeit ohne Vorbelastung
$\alpha_{ct}$	= 0,9	Kurzzeitfestigkeit mit Vorbelastung
$\alpha_{ct}$	= 0,75	Dauerstandzugfestigkeit ohne Vorbelastung bei Biegung
$\alpha_{ct}$	= 0,75	Dauerstandzugfestigkeit mit Vorbelastung bei Biegung
$\eta$	$\approx 1,35$	Mittelwert für den Maßstabseffekt nach EC 2: $f_{ct,fl} = \eta \cdot f_{ctm}$ mit $\eta = 1,6 \cdot h / 1000$ ( $h$ in mm) $h = 15 \text{ cm}$ : $\eta = 1,45$ $h = 35 \text{ cm}$ : $\eta = 1,25$

Aus diesem Ansatz für eine wirksame Zugfestigkeit  $f_{ct,eff}$  ergeben sich die folgende Werte:

$$f_{ct,eff}(t=\infty) = 1,1 \cdot 0,9 \cdot 0,75 \cdot \eta \cdot f_{ctm} = 0,75 \cdot \eta \cdot f_{ctm} = 0,75 \cdot f_{ct,fl} \approx 1,0 \cdot f_{ctm}$$

Daraus folgt, dass  $f_{ct,eff}(t=\infty) = 1,0 \cdot f_{ctm}$  bzw.  $0,75 \cdot f_{ct,fl}$  als die wirksame Zugfestigkeit unabhängig von einer Vorbelastung angesetzt werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit wird für die Berechnung der Durchbiegungen der Ansatz  $f_{ct,eff}(t=\infty) = 0,75 \cdot \eta \cdot f_{ctm}$  verwendet.

Für die Nachrechnung von Versuchen können die folgende Ansätze Verwendung finden:

$$\underline{t=\infty}: f_{ct,eff}(t=\infty) = 0,75 \cdot \eta \cdot f_{ctm}$$

$$\underline{t=28d}: f_{ct,eff}(t=28d) = 1,0 \cdot 0,9 \cdot 1,0 \cdot \eta \cdot f_{ctm} = 0,90 \cdot \eta \cdot f_{ctm}$$

Der Maßstabseffekt  $\eta$  wird im Programm SOFiSTiK für Platten im üblichen Hochbau mit 1,35-1,45 explizit am Verbundquerschnitt berücksichtigt.

Die Eigenspannungen infolge der Schwindbehinderung des Betons durch die Bewehrung werden ebenfalls im Programm SOFiSTiK explizit am Verbundquerschnitt berücksichtigt. Daher wird zur Berücksichtigung der nichtlinear verteilten Eigenspannungen  $k = 0,9$  angesetzt.

### 3.6 Verhalten unter zweiachsiger Beanspruchung

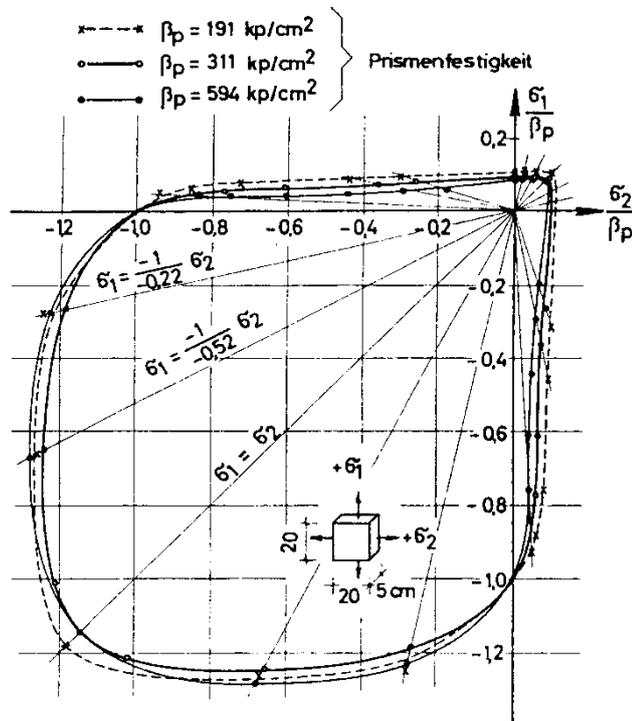
#### Festigkeit unter zweiachsiger Beanspruchung

In Stahlbetonplatten als ebene Flächentragwerke unterliegt der Beton i. A. einer zweiachsigen Beanspruchung (Hauptspannung  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ). Beton versagt unter einachsiger Druckbeanspruchung letztlich durch Querkzugspannungen infolge seines inhomogenen Gefüges aus Zementstein und dem steiferen größeren Gesteinskörnern. Daher hat eine zweiachsige Druckbeanspruchung eine gewisse Festigkeitssteigerung zur Folge, während Querkzugspannungen eine Verminderung der Druckfestigkeit bewirken. Bild 51 zeigt die von Kupfer angegebenen, experimentell ermittelten Versuchsergebnisse, die zur Beurteilung der Betonfestigkeit unter einer zweiachsigen Beanspruchung herangezogen werden [58].

Für den Fall einer Druck-Druck-Beanspruchung kann demnach bei einem entsprechenden Querdruck  $\sigma_2$  ( $\sigma_2 \approx \frac{1}{2}\sigma_1$ ) die aufnehmbare Spannung  $\sigma_1$  bis auf das ca. 1,25-fache der Prismenfestigkeit des Betons anwachsen (Bild 51). Für den Fall  $\sigma_1 = \sigma_2$  ergibt sich eine Erhöhung der aufnehmbaren Druckspannung um ca. 15%.

Dagegen fällt im Druck-Zug-Bereich die aufnehmbare Druckspannung bei gleichzeitigem Querkzug signifikant ab. Dabei ist aber zu beachten, dass es sich um unbewehrten Beton handelt. Wie aus Bild 51 zu erkennen ist, fällt auch die Zugfestigkeit des Betons bei einer Druckbeanspruchung senkrecht dazu ab. Dagegen ist im Zug-Zug-Bereich keine signifikante gegenseitige Beeinflussung zu erkennen. Die Risse bilden sich senkrecht zur größeren Zugspannung als Hauptspannung.

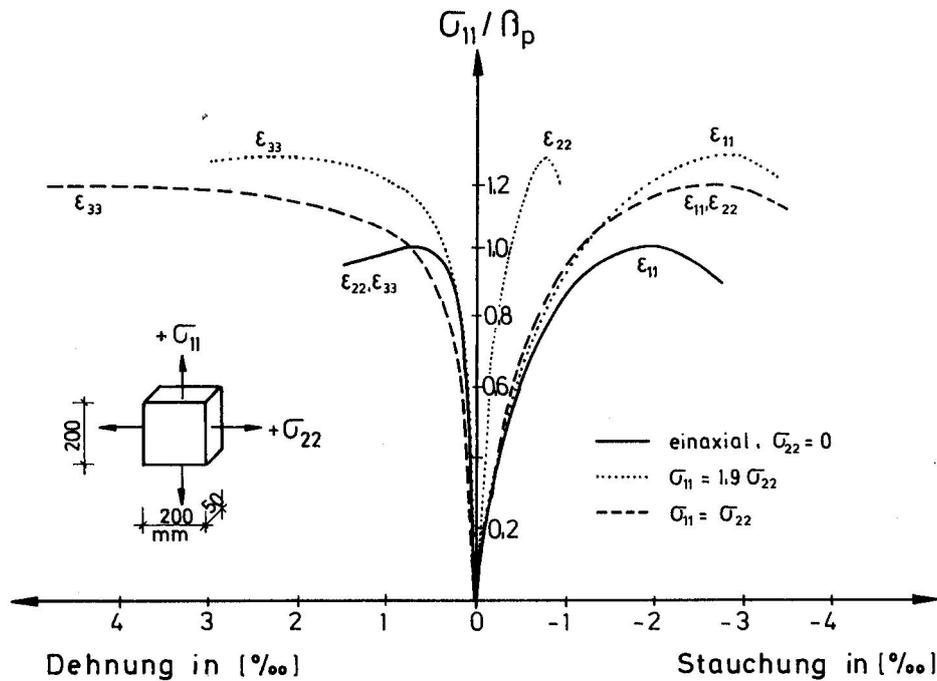
Für die nachfolgenden Durchbiegungsberechnungen unter Gebrauchslast ist die Betondruckfestigkeit jedoch nicht kritisch. Von Bedeutung ist jedoch der Einfluss der zweiachsigen Beanspruchung auf den Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Linien.



**Bild 51:** Festigkeit des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung nach Kupfer (aus [58])

### Spannungs-Dehnungs-Linie

In Bild 52 sind die Druckspannungs-Dehnungs-Linien vergleichend für einachsige und zweiachsige Beanspruchungen dargestellt. Die Spannungen und Dehnungen weichen mit zunehmender Beanspruchung deutlich voneinander ab. Für den Bereich der Spannungen unter Gebrauchslasten bis ca.  $0,4 \cdot f_{cm}$  sind die Abweichung dagegen relativ gering.



**Bild 52:** Druckspannungs-Dehnungs-Linie für einachsige und zweiachsige Beanspruchung (aus [58])

Der Einfluss der zweiachsigen Druckspannungen im Beton ist unter Gebrauchslasten sehr gering, da diese üblicherweise im elastischen Bereich verbleiben. Ebenso ist der Abfall der aufnehmbaren Zugspannung bei gleichzeitig wirkendem Querdruck unter Gebrauchslasten klein. Bei den Berechnungen kann daher mit ausreichender Genauigkeit die Berücksichtigung des zweiachsigen Verhaltens über die Querdehnzahl  $\nu_c$  berücksichtigt werden. Beton wird für die Berechnungen daher als homogener, bis zur Rissbildung isotroper Werkstoff idealisiert, der sich unter Gebrauchslasten linear elastisch verhält. Das Werkstoff-Gesetz für den zweiachsigen Spannungszustand ergibt sich für einen homogenen und isotropen Werkstoff wie folgt:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu_c^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu_c & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_c}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = C_{el} \cdot \bar{\epsilon}_{el}$$

Zur Beschreibung des Verformungsverhaltens von Stahlbeton unter zweiachsiger Beanspruchung unter Berücksichtigung einer Rissbildung sind zahlreiche Ansätze für die praktische Anwendung entwickelt worden. Für das Verformungsverhalten unter Gebrauchslasten sind die Steifigkeitsänderungen infolge Rissbildung sowie die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen wesentlich.

### **Querdehnzahl**

Die Querdehnzahl von Beton unter einachsiger Beanspruchung ist zum einen von der Betonzusammensetzung und –festigkeit, vom Betonalter und vom Feuchtezustand des Betons und zum anderen von der Belastungshöhe abhängig. Im Bereich der Gebrauchslasten schwankt die Querdehnzahl von Beton etwa zwischen 0,15 und 0,22. Mit steigender Betondruckfestigkeit nimmt die Querdehnzahl zu. Der wesentliche Einflussparameter ist jedoch die Spannungshöhe. Bis ca. 80% der Druckfestigkeit bleibt die Querdehnzahl praktisch konstant [12]. Da die Betondruckspannungen unter den Gebrauchslasten deutlich unterhalb  $0,8 \cdot f_{cm}$  bleiben, kann der Anstieg der Querdehnzahl im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt werden. Für die Berechnungen wird die Querdehnzahl mit  $\nu_c = 0,2$  berücksichtigt.

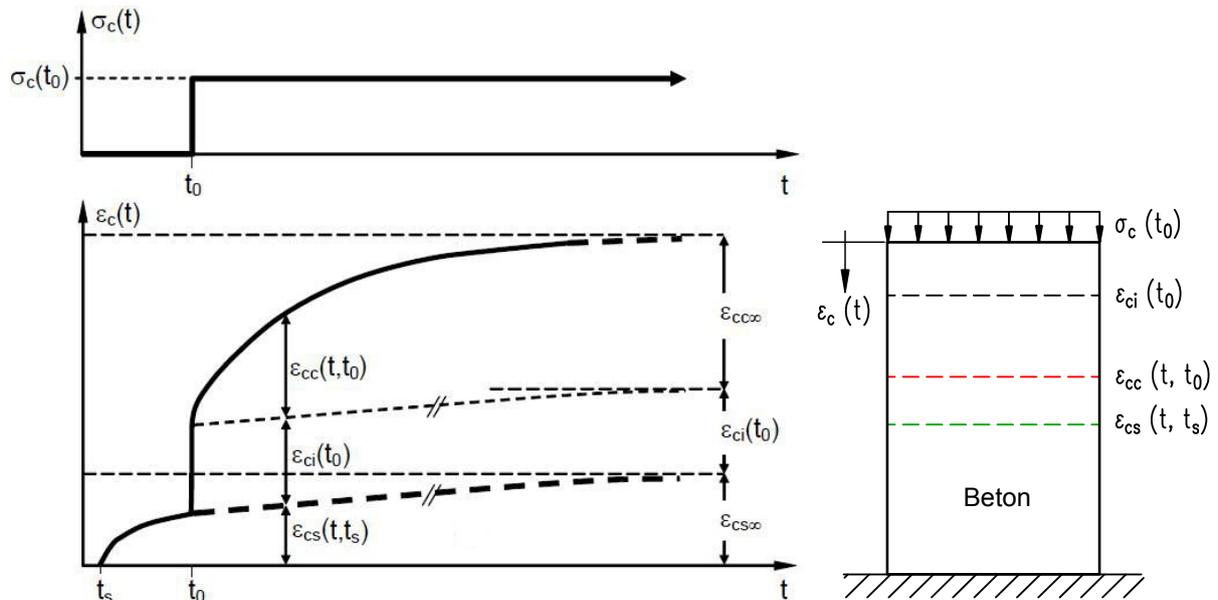
Mit Beginn der Rissbildung fällt die Querdehnzahl im unmittelbaren Rissbereich deutlich ab, da im Riss parallel zu diesem keine Zugkraft übertragen werden kann. Eine Berechnung von Stahlbetonplatten mit  $\nu_c = 0$  führt in den meisten Fällen zu Schnittgrößen, die für die Ermittlung der Bewehrung auf der sicheren Seite liegen [96]. In Fällen, wo wegen geringer Zugbeanspruchung eine Rissbildung nicht zu erwarten oder nicht zulässig ist, sollte mit  $\nu_c = 0,2$  gerechnet werden.

Gemäß EC2, 3.1.3(4) darf die Querdehnzahl für ungerissenen Beton mit  $\nu_c = 0,2$  und für gerissenen Beton mit  $\nu_c = 0$  angesetzt werden.

## 3.7 Zeitabhängige Verformungen

### 3.7.1 Rheologisches Verhalten von Beton

Beton ist ein visko-elastischer Werkstoff. Kriechen und Schwinden sind zeitabhängige Verformungseigenschaften des Betons. Infolge Kriechens und Schwindens nehmen die Durchbiegungen eines Bauteils zeitabhängig zu. Beim Schwinden handelt es sich um eine lastunabhängige Formänderung. Unter Kriechen versteht man die Zunahme einer Formänderung mit der Zeit unter dauernd wirkenden Lasten bzw. Spannungen.



**Bild 53:** Definition der Verformungskomponenten von Beton unter zeitlich konstanter Spannung  $\sigma_c(t_0)$  (aus [76])

Bei der Beobachtung von Probekörpern aus Beton über einen längeren Zeitraum lassen sich signifikante Erhöhungen der Verformung feststellen. Die bei konstanten Umgebungsbedingungen an einem Betonkörper unter zeitlich konstanter Spannung  $\sigma_c(t_0)$  zum Zeitpunkt  $t$  beobachtbare Gesamtdehnung  $\epsilon_c(t)$  wird üblicherweise in die additiven Komponenten entsprechend Gl. (3.19) aufgespalten.

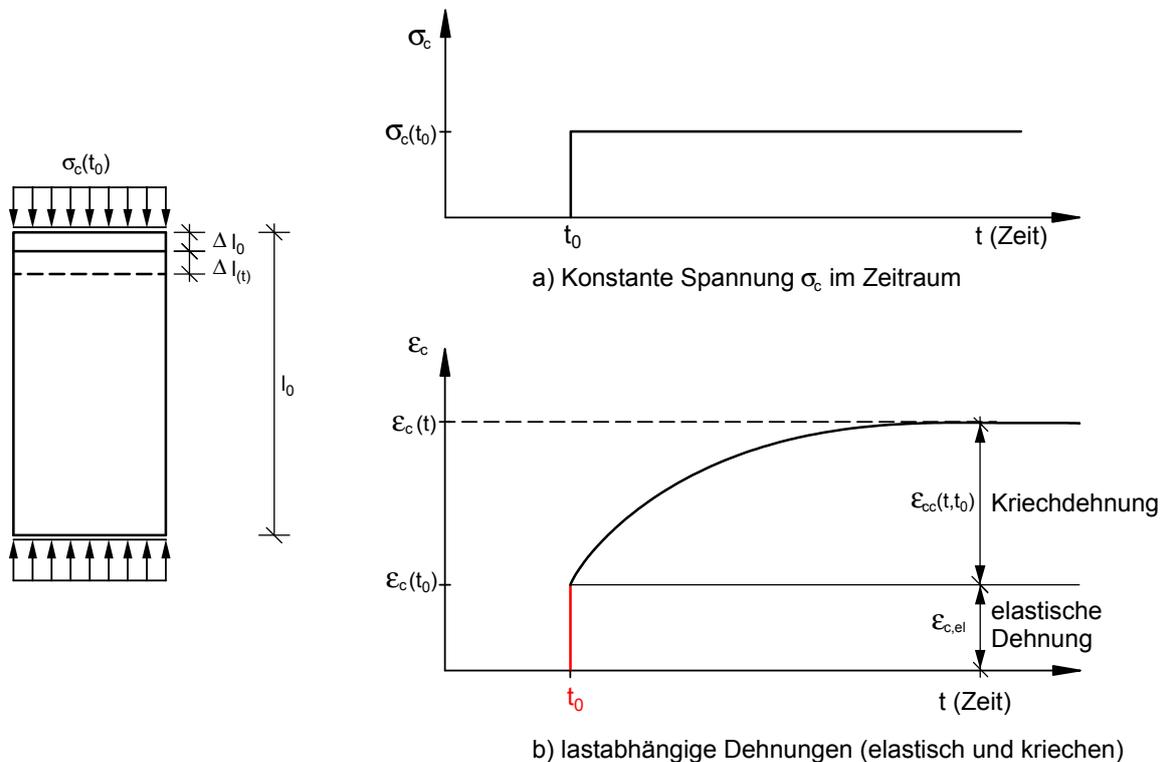
$$\epsilon_c(t) = \epsilon_{ci}(t_0) + \epsilon_{cc}(t, t_0) + \epsilon_{cs}(t, t_s) \quad (3.19)$$

Dabei sind:

$\epsilon_{ci}(t_0)$	elastische Dehnung zum Zeitpunkt des Belastungsbeginn
$\epsilon_{cc}(t, t_0)$	Kriechdehnung
$\epsilon_{cs}(t, t_s)$	Schwinddehnung
$t_0$	Belastungsalter des Betons
$t_s$	Betonalter zu Beginn der Trocknung (i. d. R. mit Beendigung der Nachbehandlung)

### 3.7.2 Kriechen des Betons

Das Kriechen bezeichnet die zeitabhängige Dehnungszunahme des Betons infolge einer ständigen Belastung. Die einzelnen Anteile des Kriechens sind in Bild 54 dargestellt. Die lastabhängige elastische Dehnung  $\varepsilon_{c,el}$  vergrößert sich im Laufe der Zeit um den Kriechanteil  $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ . Die Kriechverformung setzt sich aus einem bleibenden Anteil  $\varepsilon_{cf}$  und einem verzögert elastischen Anteil  $\varepsilon_{cv}$ , der reversibel ist, zusammen.



**Bild 54:** Zeitlicher Verlauf der Kriechdehnung (aus [65])

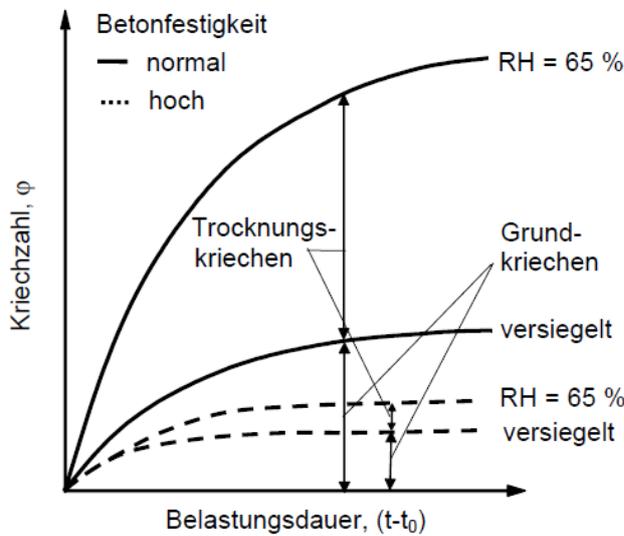
Die dem Kriechen zu Grunde liegenden Mechanismen sind komplex. Auf Gebrauchslastniveau wird das Kriechen des Betons fast ausschließlich durch das Kriechen der Zementsteinmatrix verursacht, da die Gesteinkörner im Allgemeinen keine zeitabhängige Verformungszunahme zeigen. Bis zu einer Spannung von ca.  $0,4 \cdot f_c$  sind die Kriechverformungen nahezu proportional zu den elastischen Verformungen (lineares Kriechen). Oberhalb von ca.  $0,4 \cdot f_c$  nimmt das Kriechen durch fortschreitende Mikrorissbildung stark zu (nichtlineares Kriechen). Die Kriechverformung ist nach einer Entlastung teilweise reversibel (Rückkriechen des verzögert elastischen Anteils).

Das Verhältnis von Kriechdehnung zur elastischen Dehnung wird im Bereich des linearen Kriechens als Kriechzahl  $\varphi(t, t_0)$  bezeichnet. Diese Kriechzahl  $\varphi(t, t_0)$  ist wie folgt definiert:

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\varepsilon_{c,el}(t_0)} = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\varepsilon_{ci,28}(t_0)} = \varepsilon_{cc}(t, t_0) \cdot \frac{E_c}{\sigma_c(t_0)} \quad (3.20)$$

In Gl. (3.20) stellt  $\varepsilon_{ci,28}$  die elastische Dehnung eines Betons im Alter von 28 Tagen dar,  $E_c$  ist der entsprechende E-Modul (Tangentenmodul) des Betons und  $\sigma_c(t_0)$  bezeichnet die kriecherzeugende Spannung, die zum Zeitpunkt  $t_0$  aufgebracht wird. Die Kriechzahl gibt damit das Verhältnis aus Kriechdehnung unter Dauerlast im Alter von 28 Tagen bei gleicher Belastungshöhe an.

In der obigen Gl. (3.20) bedeuten  $\varepsilon_{c,c}(t, t_0)$  die zugehörige Kriechverformung eines Betons bis zum Zeitpunkt  $t \rightarrow \infty$ , der im Alter  $t_0$  belastet wurde.  $\varepsilon_{c0}$  ist die zugehörige elastische Verformung des Betons beim Aufbringen der Belastung zum Zeitpunkt  $t_0$ .



**Bild 55:** Zeitlicher Verlauf des Kriechens von normal Beton in Abhängigkeit vom Feuchtegehalt tangentialenmodul des Betons (aus [76])

Bild 55 veranschaulicht den Einfluss der Betonfestigkeit (normalfest) auf die Größe der Kriechzahl. Darin ist die Kriechverformung in die Komponenten Grund- und Trocknungskriechen aufgespalten. Das Grundkriechen beschreibt die sich unter Dauerlast bei verhiertem Probekörper ohne Feuchtaustausch mit der Umgebung (z. B. bei sehr hoher Umgebungsfeuchte oder sehr massivem Bauteil) einstellende Kriechdehnung. Das Trocknungskriechen erfasst die infolge einer Austrocknung zusätzlich entstehende Kriechdehnung.

In Bild 55 zeigt sich, dass sich mit der Betonfestigkeit nicht nur die Größe, sondern auch das Verhältnis von Grund- und Trocknungskriechen ändert. Diese Zusammenhänge finden sich in EC2 bzw. in den folgenden analytischen Beziehungen zur Verformungsvorhersage wieder.

### **Einflussparameter**

Das Kriechen des Betons wird im Wesentlichen von folgenden Parametern beeinflusst [21]:

- Belastungsalter ( $t_0$ )
- Betondruckfestigkeit
- Bauteilabmessung ( $h_0$ )
- Relative Luftfeuchtigkeit der Umgebung (RH %)
- Betontechnologische Parameter (Zementart, Wassermenge, Zementgehalt und Art der Gesteinkörnung)

Die genannten betontechnologischen Parameter bestimmen ebenfalls die Höhe der Betondruckfestigkeit, so dass diese in EC2 als Bezugswert zur Abschätzung der Größe des Kriechens herangezogen wurde. Die ermittelten Kriechzahlen  $\varphi(t, t_0)$  dürfen als zu erwartende Mittelwerte angesehen werden. Die mittleren Variationskoeffizienten für die Vorhersage der Kriechzahl liegen bei etwa 30%. Für gegenüber Kriechen empfindliche Tragwerke sollte die mögliche Streuung dieser Werte berücksichtigt werden.

Die in [30] enthaltenden Regeln zur Berechnung der Kriechzahlen beruhen auf folgenden Voraussetzungen.

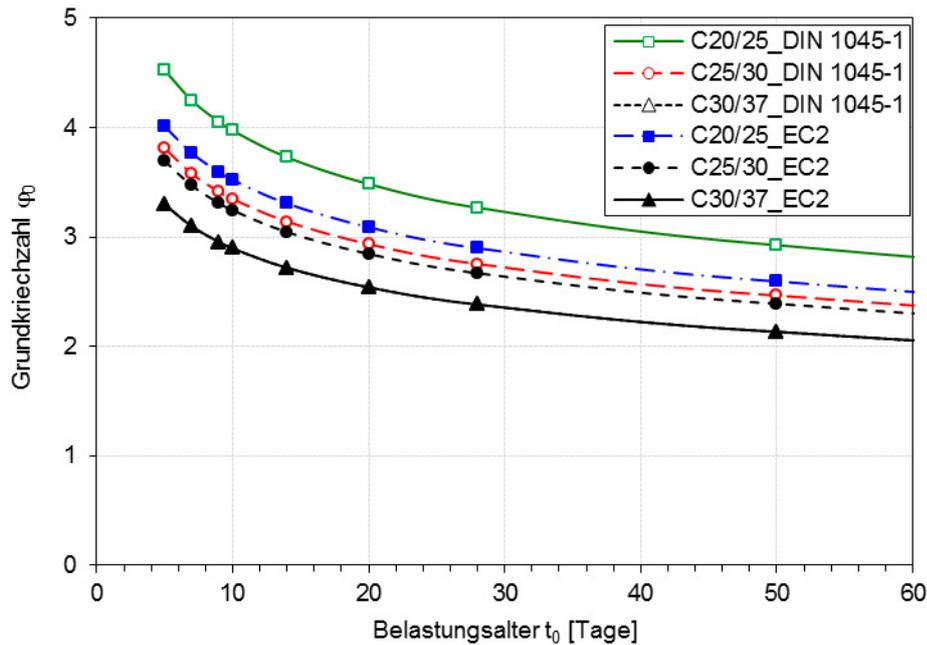
- Umgebungsbedingungen mit mittleren relativen Luftfeuchten zwischen 40% und 100%
- Temperaturen zwischen -40°C und 40°C
- Die kriecherzeugende Betondruckspannung  $\sigma_c$  ist nicht größer  $0,45 \cdot f_{ck}(t_0)$

Tabelle 9: Vergleich der Kriechzahlen nach DIN 1045-1 und EC2

		DIN 1045-1 sowie Heft 525	EC2 sowie Heft 600
1	Gesamtkriechen	$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0)$	
2	Grundzahl	$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0)$	
3	Relative Feuchte	$\varphi_{RH} = \left[ 1 + \frac{1 - RH/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2$	
		$\alpha_1 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7}; \alpha_2 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,2}$	$\alpha_1 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7} \leq 1; \alpha_2 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,2} \leq 1$
4	Druckfestigkeit	$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}}$	
5	Belastungsbeginn	$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + t_0^{0,2}}$ mit $t_0 = t_{0,T} \cdot \left[ \frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0,5$ Tage $\alpha = -1$ für Zement der Klasse S, $\alpha = 0$ für Zement der Klasse N, $\alpha = 1$ für Zement der Klasse R	
6	Zeitverlauf nach Belastungsbeginn	$\beta_c(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{\beta_H + t - t_0} \right]^{0,3}$	
7	Relative Feuchte	$\beta_H = 150 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{1,2 \cdot RH}{100} \right)^{18} \right] \cdot h_0 + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3$	
		$\alpha_3 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,5}$	$\alpha_3 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,5} \leq 1$

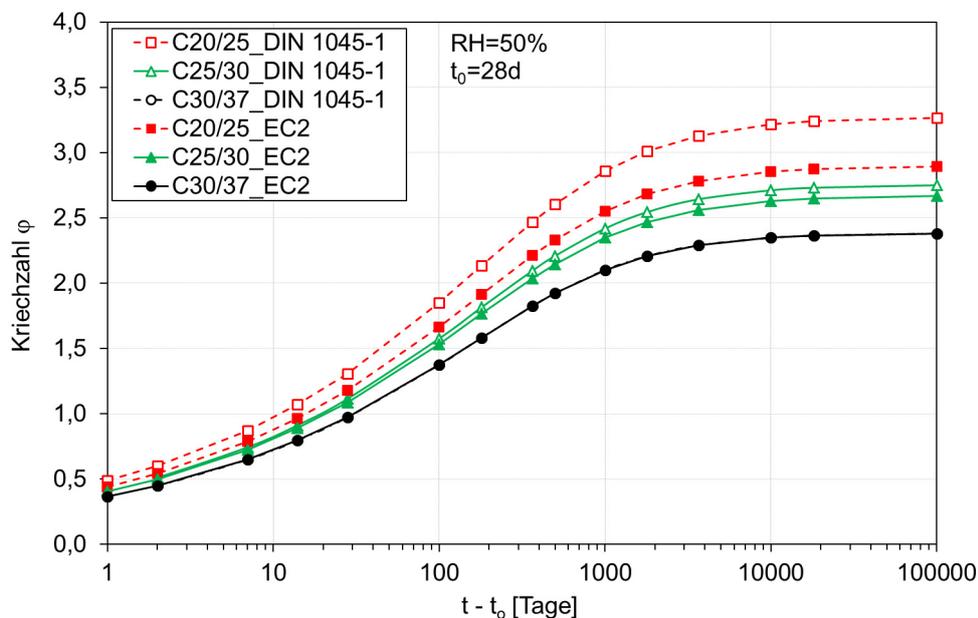
In Tabelle 9 werden die Gleichungen für die Kriechzahl nach DIN 1045-1 und EC2 verglichen. Für beide Kriechanteile wird in DIN 1045-1 sowie in EC2 ein identischer Produktansatz wie folgt zugrunde gelegt [20], [28]:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (3.21)$$



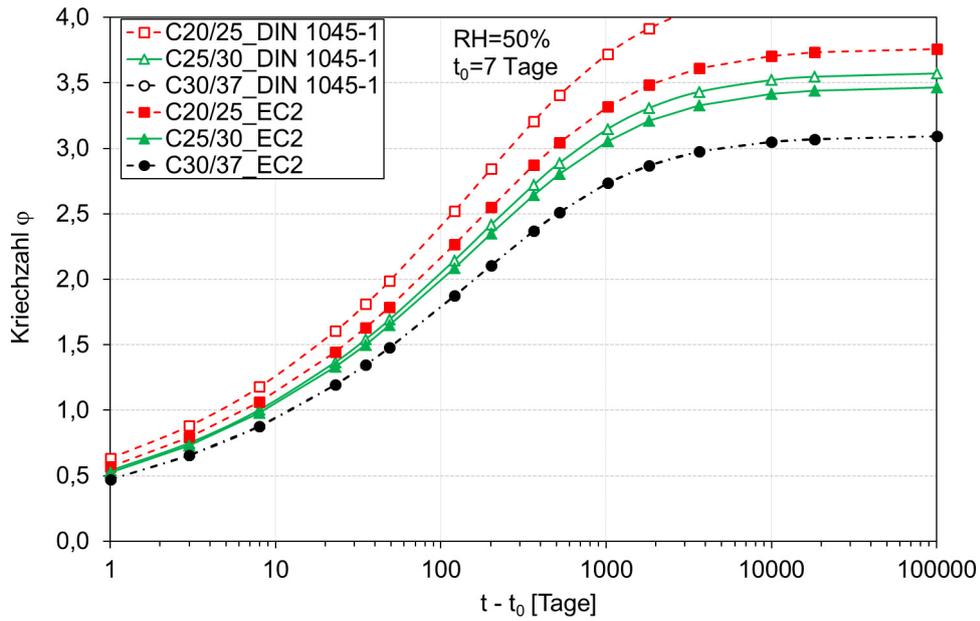
**Bild 56:** Vergleich Grundkriechzahl  $\varphi_0$  nach EC2 und DIN 1045-1 (RH=50%,  $h_0=190\text{mm}$ )

Den Einfluss des Belastungsalters und der Betonfestigkeitsklasse auf die Grundkriechzahl  $\varphi_0$  zeigt Bild 56. Die Kurven für die Betonfestigkeitsklassen  $\leq$  C25/30 nach DIN 1045-1 liegen oberhalb der Kurve nach EC2. Ab der Festigkeitsklasse C30/37 liegen sie exakt aufeinander. Das liegt daran, dass die Beiwerte  $\alpha_i$  gemäß EC2 für Betonfestigkeitsklassen  $\leq$  C25/30 auf den Maximalwert von 1,0 begrenzt werden (Tabelle 9).



**Bild 57:** Vergleich Kriechzahl  $\varphi$  nach EC2 und DIN 1045-1 ( $t_0=28$  Tage, RH=50 %)

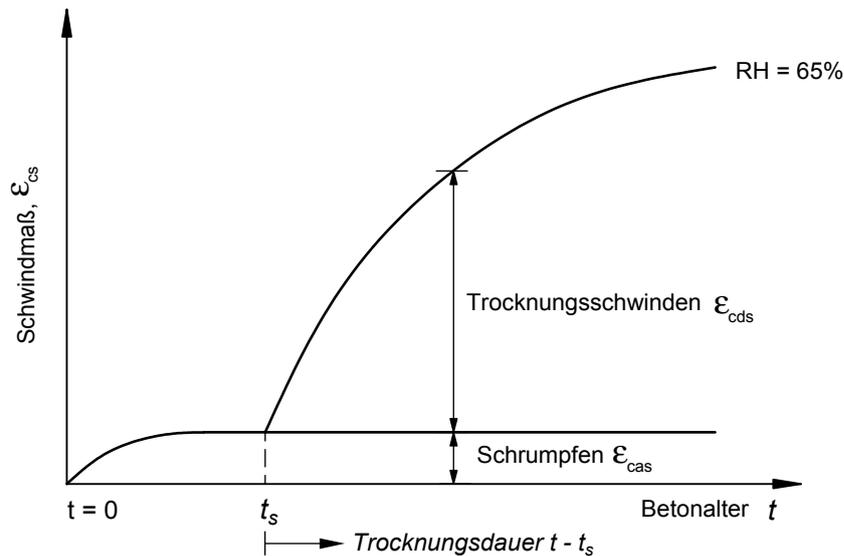
Auch die Kriechzahlen sind für Betonfestigkeitsklassen  $\leq$  25/30 kleiner (Bild 57). Die Abweichungen sind umso größer, je kleiner die Betonfestigkeitsklasse ist. Ab der Betonfestigkeitsklasse C30/37 sind keine Unterschiede gegeben.



**Bild 58:** Vergleich Kriechzahl  $\phi$  nach EC2 und DIN 1045-1 ( $t_0=7$  Tage,  $RH=50\%$ )

Wird der Beton im jungen Alter belastet, nimmt die Kriechzahl  $\phi$ , wie aus dem Vergleich zwischen Bild 57 und Bild 58 zu sehen ist, deutlich zu. Die Abweichungen sind dann größer.

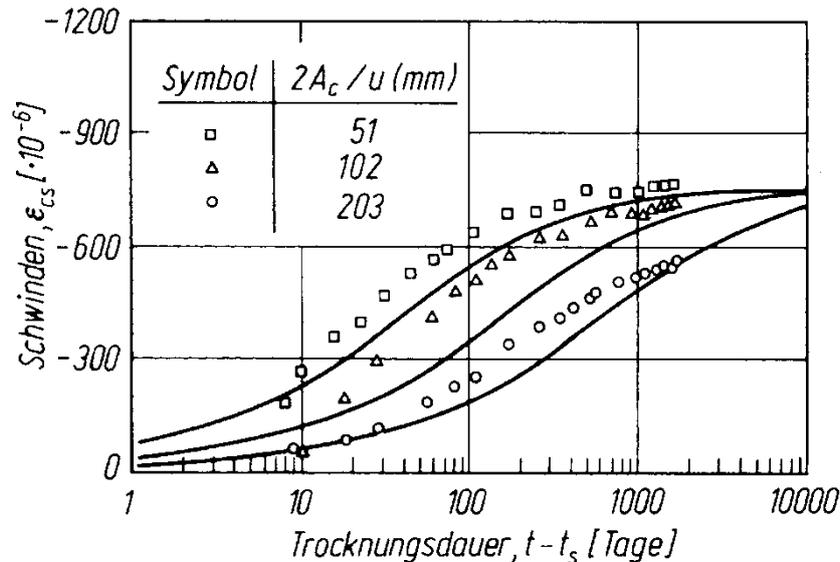
### 3.7.3 Schwinden des Betons



**Bild 59:** Schematische Darstellung des zeitlichen Verlaufs von Grund- und Trocknungsschwinden bei normalfesten Betonen (aus [22])

Zu den lastunabhängigen Verformungen des erhärteten Betons gehören insbesondere das *Schwinden* und das *Quellen*. Diese Verformungen werden vorrangig durch Wasserverlust bei Austrocknung oder durch Wasseraufnahme ausgelöst. Eine Reihe unterschiedlicher Mechanismen tragen zum Schwinden von Beton bei. Für Normalbeton ist der größte und bedeutendste Anteil das *Trocknungsschwinden*. Es stellt sich ein, wenn Beton in trockener Umgebung Feuchte abgibt und als Folge das Volumen der Bauteile kleiner wird. Im Wasser oder an sehr feuchter Luft nimmt der Beton dagegen Wasser auf. Dies ist mit einer Volumenzunahme, dem *Quellen* verbunden.

Für Normalbeton kann in erster Näherung angenommen werden, dass Wasserverlust und Trocknungsschwinden einander proportional sind. Da die Austrocknung von Beton ein sehr langsam ablaufender Diffusionsprozess ist, entwickelt sich auch die Schwindverformung nur langsam mit der Zeit. Die oberflächennahen Bereiche eines Betonquerschnitts stehen schon nach einer kurzen Trocknungsdauer im Feuchtegleichgewicht mit der umgebenden Luft. Mit steigender Entfernung von der Oberfläche nimmt der Feuchtegehalt des Betons aber deutlich zu. Es können Jahrzehnte verstreichen, ehe z. B. ein dickes Bauteil über seinen ganzen Querschnitt die sog. Ausgleichsfeuchte erreicht hat.



**Bild 60:** Der Einfluss der Querschnittsabmessungen auf das Schwinden von Beton–Vergleich von Versuchsergebnissen mit der Vorhersage (aus [77])

In Bild 60 ist die zeitliche Entwicklung der Schwindverformungen, die an Normalbeton bestimmt wurden, mit der Vorhersage verglichen. Aus diesem Diagramm geht auch der Einfluss der Querschnittsabmessungen auf den zeitlichen Ablauf des Schwindens hervor. Somit schwinden dünne Bauteile schneller als dicke, da sie schneller austrocknen.

Der wichtigste Einflussparameter für die Größe des Schwindens von Normalbeton ist der Feuchteverlust des Betons nach einer gegebenen Trocknungsdauer. Das Schwinden nimmt daher mit steigendem Anmachwassergehalt und sinkender relativer Feuchte der umgebenden Luft zu.

Trocknungsschwinden bezeichnet die Volumenverringering von porösem Material infolge Wasserabgabe. Trocknungsschwinden kann erst entstehen, wenn ein Feuchtigkeitsverlust an der Oberfläche möglich ist. Dies ist im Allgemeinen erst nach der Nachbehandlung der Fall. Das Trocknungsschwinden ist über einen Querschnitt ungleichförmig verteilt. Es erzeugt nichtlinear verteilte Eigenspannungen in einem unbewehrten Querschnitt [21].

Bei dem chemischen Prozess (Hydratation) kommt es zu einer Volumenreduzierung, da das Zementgel ein kleineres Volumen einnimmt als das Volumen der Ausgangsprodukte Zement und Wasser. Dieser Prozess wird als autogenes Schwinden bezeichnet. Das Schrumpfen vollzieht sich unabhängig von den klimatischen Umgebungsbedingungen. Daher ist auch die Zeitfunktion des Schrumpfens von den Bauteildicken unabhängig. Das Schrumpfen ist über den Querschnitt gleichförmig verteilt und erzeugt daher keine nichtlinear verteilten Eigenspannungen.

Die beiden beschriebenen Vorgänge, Trocknungsschwinden und autogenes Schwinden, laufen zeitlich versetzt ab, da das Trocknungsschwinden von der Diffusion des Wassers zur Bauteiloberfläche von der Größe und Form des Probekörpers, den Lagerungsbedingungen und auch seiner Dichtigkeit abhängig ist. Durch das Austrocknen von der Oberfläche nach innen sind die Verformungen ungleichförmig über den Querschnitt verteilt.

Das Schwinden des Betons wird im Wesentlichen von folgenden Parametern beeinflusst:

- Wassergehalt des Betons
- Betondruckfestigkeit
- Dauer der Austrocknung
- Mittlere relative Luftfeuchtigkeit
- Abmessungen des Bauteils

Die Schwinddehnung  $\varepsilon_{cs}(t, t_s)$  des Betons setzt sich aus den Anteilen Grundswinden  $\varepsilon_{ca}(t)$  und Trocknungsswinden  $\varepsilon_{cd}(t)$  zusammen. Für die Berechnungen der Schwinddehnung werden die Ansätze nach EC2 bzw. DAfStb Heft 600 verwendet. Die Grundwerte des Schrumpfen und des Trocknungsswindens werden mit einer Zeitfunktion multipliziert und addiert. Die ermittelten Schwinddehnungen dürfen als zu erwartende Mittelwerte angesehen werden. Die mittleren Variationskoeffizienten für die Vorhersage der Schwinddehnung liegen bei etwa 30%.

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cd}(t) + \varepsilon_{ca}(t) \quad (3.22)$$

Dabei sind:

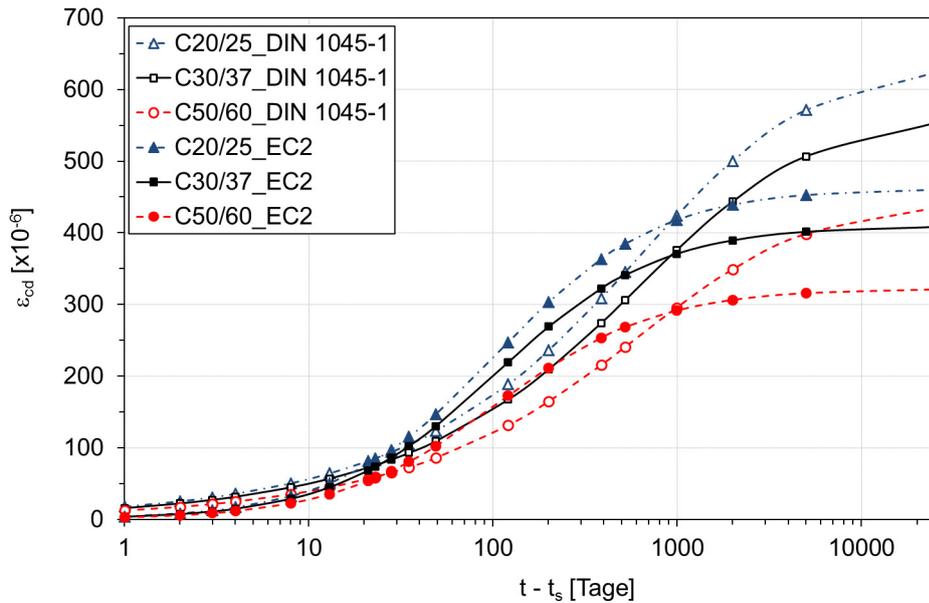
$\varepsilon_{cs}(t, t_s)$	die Gesamtschwinddehnung
$\varepsilon_{cd}(t)$	die Trocknungsschwinddehnung des Betons
$\varepsilon_{ca}(t)$	die autogene Schwinddehnung

In Tabelle 10 werden die Gleichungen für das Trocknungsswinden nach DIN 1045-1 und EC2 verglichen. Im Schwindansatz der DIN 1045-1 und EC2 werden übereinstimmend die aus der Zusammensetzung eines Konstruktionsbetons resultierenden Einflüsse in grober Näherung allein durch die Einflussparameter der Betondruckfestigkeit und der Zementart erfasst.

Die Grundwerte  $\varepsilon_{cd,0}$  für die Trocknungsschwinddehnung gemäß EC2 wird auf 85% der Werte  $\varepsilon_{cds,0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH)$  nach DIN 1045-1 bei den Zementarten S und N reduziert. Das zeitabhängige Gesamtmaß für die Trocknungsschwinddehnung  $\varepsilon_{cd}(t)$  wird nach EC2 durch Multiplikation des Grundmaßes mit dem Zeitfaktor  $k_h \cdot \beta_{ds}(t, t_s)$  und nach DIN 1045-1 mit  $\beta_{ds}(t-t_s)$  ermittelt.

Tabelle 10: Trocknungsschwinden nach DIN 1045-1 und EC2

	DIN 1045-1 sowie Heft 525	EC2 sowie Heft 600																														
Gesamt-trocknungsschwinden	$\varepsilon_{cds}(t, t_s) =$ $\varepsilon_{cds,0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot \beta_{ds}(t-t_s)$ nach Gl. (9.22)	$\varepsilon_{cd}(t) = \varepsilon_{cd,0} \cdot k_h \cdot \beta_{ds}(t, t_s)$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th colspan="4"><math>h_0 = 2A_c/u</math> [mm]</th> </tr> <tr> <th></th> <th>100</th> <th>200</th> <th>300</th> <th><math>\geq 500</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th><math>k_h</math></th> <td>1,0</td> <td>0,85</td> <td>0,75</td> <td>0,70</td> </tr> </tbody> </table> nach Gl. (3.9)		$h_0 = 2A_c/u$ [mm]					100	200	300	$\geq 500$	$k_h$	1,0	0,85	0,75	0,70															
	$h_0 = 2A_c/u$ [mm]																															
	100	200	300	$\geq 500$																												
$k_h$	1,0	0,85	0,75	0,70																												
Grundwert	$\varepsilon_{cds,0}(f_{cm}) =$ $\left[ 220 + 110 \cdot \alpha_{ds1} \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{10}\right) \right] \cdot 10^{-6}$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>CEM</th> <th>S</th> <th>N</th> <th>R</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th><math>\alpha_{ds1}</math></th> <td>3</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>6</td> </tr> <tr> <th><math>\alpha_{ds2}</math></th> <td>0,13</td> <td>0,12</td> <td>0,12</td> <td>0,12</td> </tr> </tbody> </table> nach Gl. (9.25)		CEM	S	N	R	$\alpha_{ds1}$	3	4	6	6	$\alpha_{ds2}$	0,13	0,12	0,12	0,12	$\varepsilon_{cd,0} = 0,85 \cdot \beta_{RH} \cdot$ $\left[ 220 + 110 \cdot \alpha_{ds1} \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{10}\right) \right] \cdot 10^{-6}$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>CEM</th> <th>S</th> <th>N</th> <th>R</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th><math>\alpha_{ds1}</math></th> <td>3</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>6</td> </tr> <tr> <th><math>\alpha_{ds2}</math></th> <td>0,13</td> <td>0,12</td> <td>0,12</td> <td>0,11</td> </tr> </tbody> </table> nach Gl. (B.11)		CEM	S	N	R	$\alpha_{ds1}$	3	4	6	6	$\alpha_{ds2}$	0,13	0,12	0,12	0,11
	CEM	S	N	R																												
$\alpha_{ds1}$	3	4	6	6																												
$\alpha_{ds2}$	0,13	0,12	0,12	0,12																												
	CEM	S	N	R																												
$\alpha_{ds1}$	3	4	6	6																												
$\alpha_{ds2}$	0,13	0,12	0,12	0,11																												
Luftfeuchte	$\beta_{RH}(RH) = -1,55 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right]$ für $40\% \leq RH < 99\% \cdot \beta_{s1}$ $\beta_{RH}(RH) = 0,25$ für $RH \geq 99\% \cdot \beta_{s1}$ mit $\beta_{s1} = \left( \frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,1} \leq 1,0$ nach Gl. (9.26)	$\beta_{RH} = 1,55 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right]$ nach Gl. (B.12)																														
Trocknungszeit	$\beta_{ds}(t-t_s) = \sqrt{\frac{t-t_s}{350 \cdot \left( \frac{h_0}{100} \right)^2 + (t-t_s)}}$ nach Gl. (9.27)	$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{t-t_s}{0,04 \cdot \sqrt{h_0^3 + (t-t_s)}}$ nach Gl. (3.10)																														



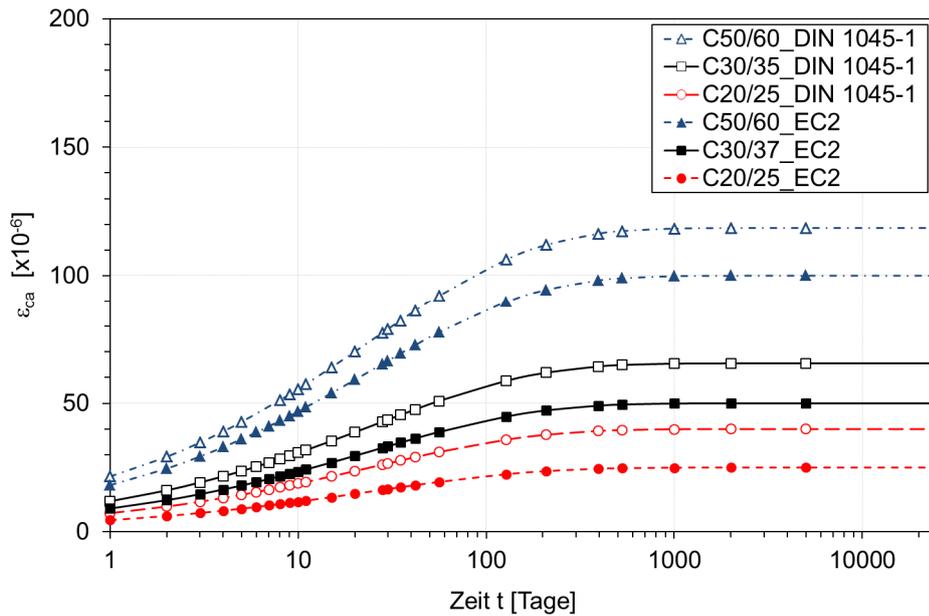
**Bild 61:** Vergleich Trocknungsschwindens  $\varepsilon_{cd}$  nach EC2 und DIN 1045-1 in Abhängigkeit von der Betonfestigkeit (RH=50%, Zement der Klasse N)

In Bild 61 ist der Vergleich des Trocknungsschwindens von Beton in Abhängigkeit von der Betonfestigkeitsklasse nach EC2 und DIN 1045-1 dargestellt. Mit steigender Betondruckfestigkeit sinkt das Trocknungsschwinden  $\varepsilon_{cd}$  ab. Das Trocknungsschwinden erfolgt gemäß EC2 gegenüber DIN 1045-1 zu Beginn etwas langsamer. Etwa nach 3 Jahren stimmen die Werte überein. Danach liegen die Kurven nach EC2 deutlich unter den Kurven nach DIN 1045-1.

In Tabelle 11 werden die Gleichungen für das Grundschwinden nach DIN 1045-1 und EC2 verglichen.

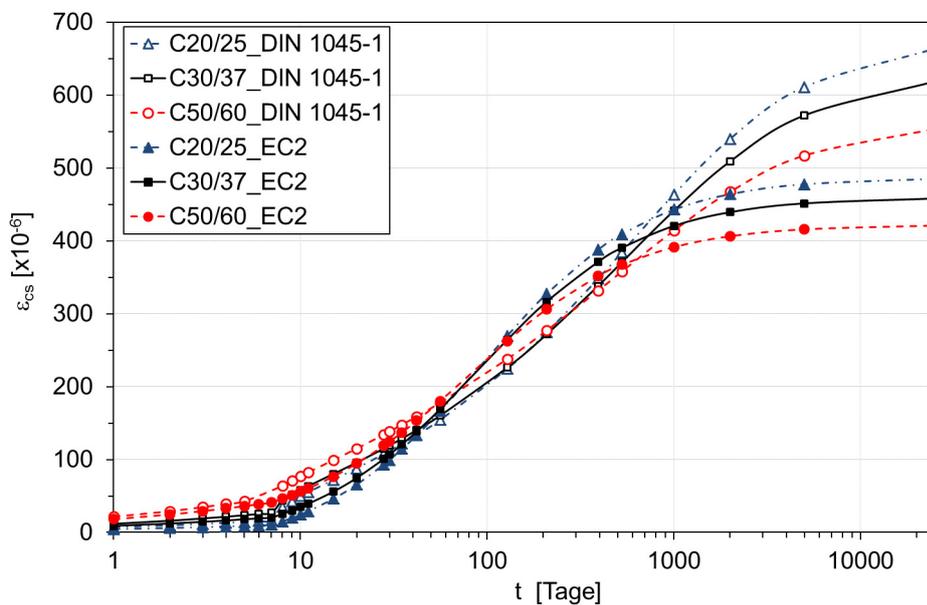
Tabelle 11: Vergleich Grundschwinden  $\varepsilon_{ca}(t)$  nach DIN 1045-1 und EC2

	DIN 1045-1 sowie Heft 525	EC2 sowie Heft 600								
Grundschwinden	$\varepsilon_{cas}(t) = \varepsilon_{cas0}(f_{cm}) \cdot \beta_{as}(t)$ nach Gl. (9.21)	$\varepsilon_{ca}(t) = \varepsilon_{ca}(\infty) \cdot \beta_{as}(t)$ nach Gl. (3.11)								
Grundmaß	$\varepsilon_{cas0}(f_{cm}) = -\alpha_{as} \cdot \left( \frac{f_{cm}}{60 + f_{cm}} \right)^{2,5} \cdot 10^{-6}$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>CEM</td> <td>S</td> <td>N</td> <td>R</td> </tr> <tr> <td><math>\alpha_{as}</math></td> <td>800</td> <td>700</td> <td>600</td> </tr> </table> nach Gl. (9.24)	CEM	S	N	R	$\alpha_{as}$	800	700	600	$\varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5 \cdot (f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6}$ nach Gl. (3.12)
CEM	S	N	R							
$\alpha_{as}$	800	700	600							
Zeiteinfluss	$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2 \sqrt{t})$ nach DIN 1045-1 Gl. (9.24) und EC 2 Gl. (3.13)									



**Bild 62:** Vergleich Grundschnitten  $\varepsilon_{ca}(t)$  in Abhängigkeit von Betonfestigkeit (Zement der Klasse N, RH=50%)

In Bild 62 sind das Grundschnitten  $\varepsilon_{ca}(t)$  mit der Zement der Klasse N in Abhängigkeit von der Betonfestigkeitsklasse nach EC2 und DIN 1045-1 dargestellt. Die Kurve nach EC2 ergeben sich deutlich unterhalb der Kurve nach DIN 1045-1.



**Bild 63:** Vergleich der Gesamtschwinddehnung  $\varepsilon_{cs}$  nach EC2 und DIN 1045-1

Bild 63 zeigt die Gesamtschwinddehnung  $\varepsilon_{cs}$  gemäß EC2 und DIN 1045-1 für unterschiedliche Betonfestigkeitsklasse. Bis zu etwa 3 Jahren liegen die Werte nach EC2 und DIN 1045-1 nahe beieinander. Danach liegen die Kurven nach EC2 deutlich unterhalb der Kurve nach DIN 1045-1.

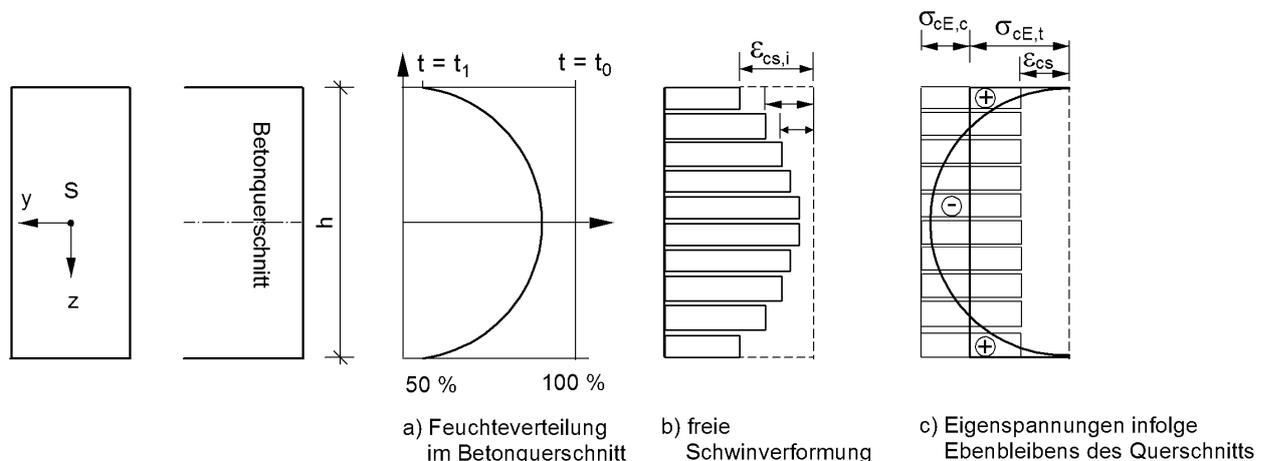
## 4 Auswirkungen aus dem zeitabhängigen Verformungsverhalten des Betons auf Querschnittsebene

### 4.1 Infolge Schwindens des Betons

#### 4.1.1 Nichtlinear verteilte Eigenspannungen

Wenn junger bzw. durchfeuchteter Beton von außen nach innen austrocknet, tritt infolge nichtlinear verteilter Eigenspannungen  $\sigma_{cE}$  eine Abminderung der effektiven Betonzugfestigkeit ein. Bei der Austrocknung schwinden nämlich die Randzonen des Querschnittes früher und stärker als der Kern. Dadurch entstehen Eigenspannungen, die sich einer ggf. vorhandenen äußeren Beanspruchung überlagern. Diese Eigenspannungen sind hauptsächlich abhängig von der Feuchtigkeitsdifferenz zwischen den Fasern der Randzone und dem Kern sowie von der Größe der Schwinddehnungen des Betons [75]. Die Größe der Eigenspannungen hängt insbesondere von den Bauteilabmessungen, den Lagerungsbedingungen und der Betonzusammensetzung ab.

Nichtlinear über den Querschnitt verteilte Eigenspannungen, z. B. aus ungleichmäßigem Schwinden des Betons oder infolge einer ungleichmäßigen Temperaturverteilung beim Abfließen der Hydratationswärme vermindern die effektive Zugfestigkeit am Querschnitttrand. Die Behinderung der Schwindverkürzungen in den Randfasern führt zu Betonzugspannungen an den Querschnittsrändern [103]. Diese Eigenspannungen überlagern sich mit den Zugspannungen aus der Biegebeanspruchung. Dies führt zu einer früheren Rissbildung als bei alleiniger Einwirkung der Biegespannung.



**Bild 64:** Nichtlinear verteilte Eigenspannungen

- (a) Feuchteverteilungen aus dem Trocknungsschwinden eines unbewehrten Betonquerschnitts
- (b) freie Schwindverformungen  $\epsilon_{cs,i}$  der einzelnen Fasern
- (c) sowie zugehörige Eigenspannungsverteilung  $\sigma_{cE}$  (aus [5], [76])

Bild 64 zeigt schematisch die Feuchteverteilung in einem austrocknenden Betonquerschnitt (a) und die hieraus resultierenden nichtlinear verteilten Eigenspannungen (c). Aus den Eigenspannungen resultieren keine Schnittgrößen.

$$N_E = \int_A \sigma_{cE} \cdot dA = 0 \qquad M_E = \int_A z \cdot \sigma_{cE} \cdot dA = 0$$

Die Eigenspannungen führen aber zu einer Verminderung der Risschnittgrößen.

DIN 1045-1, 11.2.2 bzw. EC2, 7.3.2 geben dazu den Eigenspannungsbeiwert  $k$  zur Abminderung der effektiv ausnutzbaren Betonzugfestigkeit an. Dieser Beiwert wird in Deutschland mit  $k = 0,5 \dots 0,8$  angenommen. Er ist wegen des Anwachsens der Eigenspannungen mit der Bauteildicke an  $h$  geknüpft. Aus Versuchen von Falkner [36], Jaccoud [48] und Holmberg [47] geht hervor, dass bei Bauteildicken von 20cm und direktem Zwang  $k = 0,8$  gesetzt werden kann [88].

$$f_{ct,eff} = k \cdot f_{ctm} \quad \text{für Biegung} \quad (4.1)$$

$$k = 0,8 \quad \text{für} \quad h < 300 \text{ mm}$$

$$k = 0,5 \quad \text{für} \quad h \geq 800 \text{ mm}$$

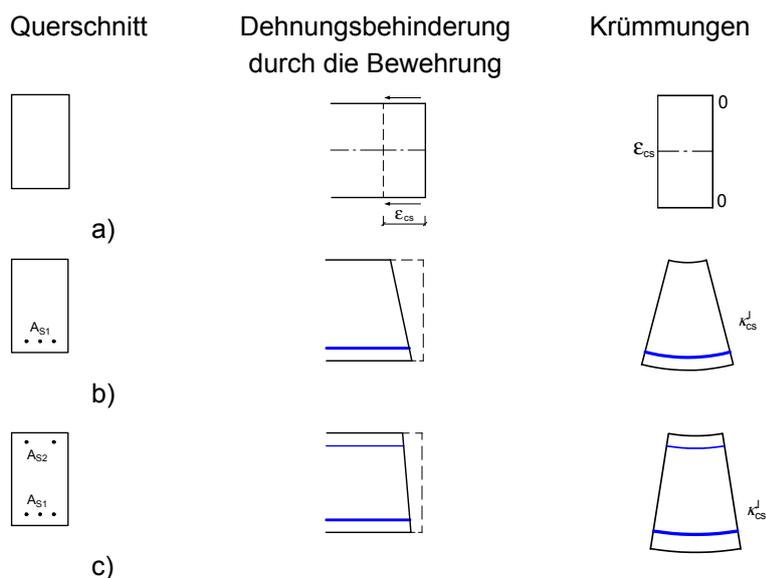
Da es sich bei Hochbaudecken i. d. R. um dünne Bauteile handelt und der Eigenspannungszustand aus dem Aufschwinden des Betons auf die Bewehrung zusätzlich berücksichtigt wird, wird im Rahmen dieser Arbeit der Beiwert zu  $k = 0,9$  angenommen.

Beim Abfließen der Hydratationswärme werden die nichtlinear verteilten Eigenspannungen zwar zu einem großen Teil durch das Kriechen des anfangs noch plastischen Betons abgebaut, aber nicht vollständig. Sie überlagern sich den Eigenspannungen infolge Schwindens des Betons.

#### 4.1.2 Querschnittskrümmung bei unsymmetrischer Bewehrung

##### Allgemeines

Gleichmäßiges Schwinden  $\epsilon_{cs}$  eines nicht verformungsbehinderten Bauteils aus unbewehrtem Beton führt zu einer Verkürzung ohne Krümmungen oder Spannungen. Die Bewehrung, die nicht schwindet, führt bis zu einem gewissen Grad zu einer Behinderung der Schwindverformungen. Dies führt zu Druckspannungen in der Bewehrung und Zugspannungen im Beton. Bei unsymmetrisch angeordneter Bewehrung entstehen infolge der unterschiedlichen Dehnungsbehinderungen zusätzlich Krümmungen. Aus diesen Krümmungen resultieren bei den entsprechenden Bauteilen Durchbiegungen (Bild 65).



**Bild 65:** Krümmungen infolge Schwindens des Betons am ungerissenen Querschnitt:

- a) unbewehrter Beton
- b) bewehrter Beton ohne Druckbewehrung
- c) unsymmetrisch bewehrter Beton mit Druckbewehrung ( $A_{S2} < A_{S1}$ )

### (i) Ermittlung der Schwindkrümmungen nach EC2

Die Methode gemäß Eurocode 2 [28] für die Berechnung der Durchbiegungen infolge Schwindens des Betons kann an einem ungerissenen Querschnitt im Zustand I wie folgt hergeleitet werden. Wenn sich der Balken um  $\varepsilon_{cs}$  gleichmäßig verkürzt, entsteht im Stahl eine Druckspannung  $\varepsilon_{cs} \cdot E_s$  (Bild 66).

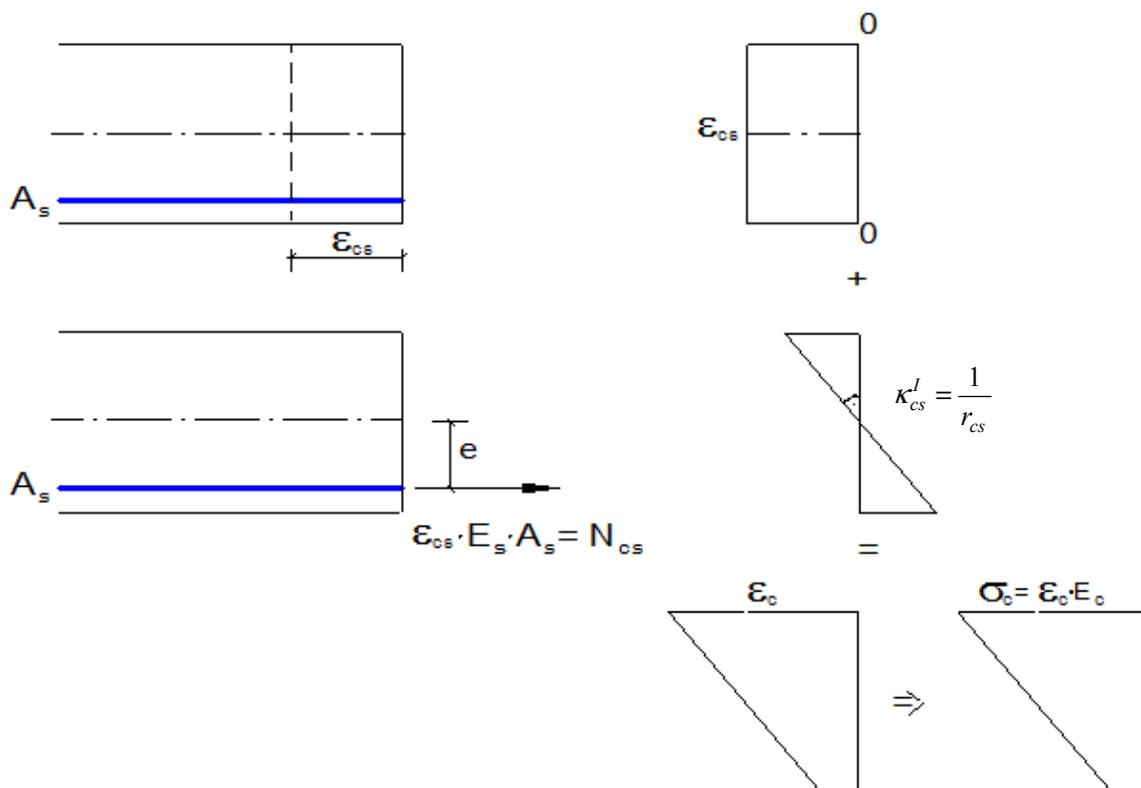
Die zugehörige Druckkraft beträgt:

$$N_{cs} = \varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s$$

$\varepsilon_{cs}$  freie Schwinddehnung

$E_s$  E-Modul des Stahls

$A_s$  Fläche der Bewehrung



**Bild 66:** Verfahren nach Eurocode 2 für die Ermittlung der Schwindkrümmung im Zustand I

Das zugehörige Festhaltungemoment kann wie folgt berechnet werden:

$$M_{cs} = N_{cs} \cdot e = \varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \cdot e$$

Wird das so verformte System freigegeben, wird sich der Balken unter der freigesetzten Kraft in der Bewehrung verformen. Infolge des freigesetzten Festhaltungemomentes  $M_{cs}$  entsteht eine Krümmung, die im Zustand I wie folgt angegeben werden kann.

$$\kappa_{cs}^I = \left( \frac{1}{r} \right)_{cs} = \frac{M_{cs}}{E_{c,eff} \cdot I_1} = \frac{\varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \cdot e}{E_{c,eff} \cdot I_1} = \alpha_e \cdot \varepsilon_{cs} \cdot \frac{S_1}{I_1} \quad (4.2)$$

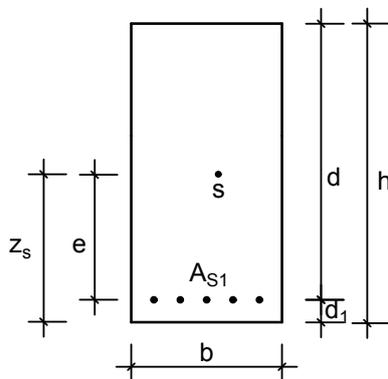
Dabei ist:

$S_1, S_2$	Flächenmoment ersten Grades der Querschnittsfläche der Bewehrung bezogen auf den Schwerpunkt des Querschnitts im Zustand I und II
$I_1, I_2$	das Flächenmoment 2. Grades des Querschnitts für Zustand I und II
$e$	Exzentrizität der Bewehrung
$\alpha_e$	Verhältnis der E-Moduln $= \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{E_s}{E_{cm}} \cdot (1 + \varphi)$

S und I sind in der Regel sowohl für den ungerissenen als auch für den gerissenen Zustand zu ermitteln.

Die oben genannte Methode wird auf gerissene Querschnitte in gleicher Weise angewendet, obwohl sie am ungerissenen Querschnitt hergeleitet wurde. Dabei wird statt  $I_1$  für den Querschnitt im Zustand I das Flächenträgheitsmoment  $I_2$  für den gerissenen Querschnitt im Zustand II angesetzt. S wird ebenso für den gerissenen Querschnitt berechnet, um die Schwindkrümmungen für gerissene Querschnitte zu ermitteln. Es gehen neben dem Schwindmaß  $\varepsilon_{cs}$  und dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln  $\alpha_e = E_s/E_{c,eff}$  noch das Flächenmoment ersten Grades der Bewehrung und das Flächenmoment zweiten Grades des ideellen Querschnittes in die Berechnung ein. Kriecheffekte können über einen effektiven E-Modul erfasst werden. Hierfür wird der Elastizitätsmodul des Betons durch  $(1+\varphi)$  dividiert.

#### ohne Druckbewehrung ( $A_{s2}/A_{s1}=0$ )



$$\kappa_{cs}^I = \varepsilon_{cs} \cdot \alpha_e \cdot \frac{S_1}{I_1}$$

$$S_1 = A_{s1} \cdot e = A_{s1} \cdot (z_s - d_1)$$

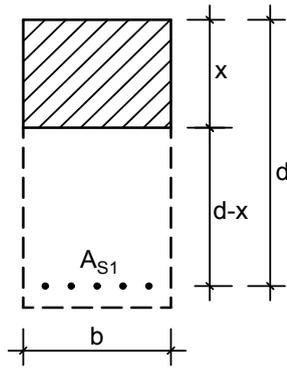
$$I_1 = \kappa_I \cdot b \cdot h^3 / 12$$

$$z_s = \frac{A_{s1} \cdot \alpha_e \cdot (h - d) + b \cdot h \cdot \frac{h}{2}}{A_{s1} \cdot \alpha_e + b \cdot h}$$

**Bild 67:** Gleichungen zur Ermittlung der geometrischen Größen  $I_1$  und  $S_1$  nach Zustand I für einen Rechteckquerschnitt ohne Druckbewehrung nach EC2

Dabei sind:

$z_s$	Schwerpunkt Abstand des Querschnitts vom unteren Rand
$e$	Abstand Bewehrung vom Schwerpunkt



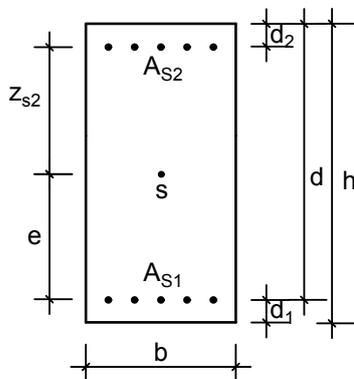
$$\kappa_{cs}^{II} = \varepsilon_{cs} \cdot \alpha_e \cdot \frac{S_2}{I_2}$$

$$S_2 = A_{s1} \cdot (d - x)$$

$$I_2 = \frac{\kappa_{II} \cdot b \cdot d^3}{12}$$

**Bild 68:** Gleichungen zur Ermittlung der geometrischen Größen  $I_2$  und  $S_2$  nach Zustand II für einen Rechteckquerschnitt ohne Druckbewehrung nach EC2

### Mit Druckbewehrung



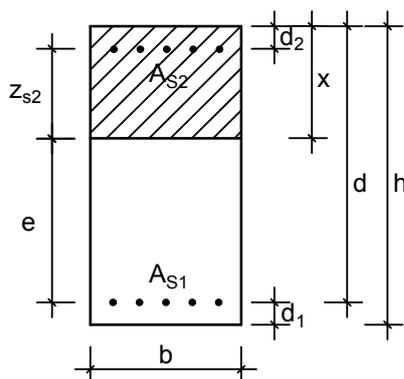
$$e = d - x_I$$

$$z_{s2} = x_I - d_2; \quad z_{s2} < 0$$

$$S_1 = A_{s1} \cdot e + A_{s2} \cdot z_{s2}$$

$$I_1 = \frac{\kappa_I \cdot b \cdot h^3}{12}$$

**Bild 69:** Gleichungen zur Ermittlung der geometrischen Größen  $I_1$  und  $S_1$  nach Zustand I für einen Rechteckquerschnitt mit Druckbewehrung



$$e = d - x_{II}$$

$$z_{s2} = x_{II} - d_2$$

$$S_2 = A_{s1} \cdot e + A_{s2} \cdot z_{s2}$$

$$I_2 = \frac{\kappa_{II} \cdot b \cdot d^3}{12}$$

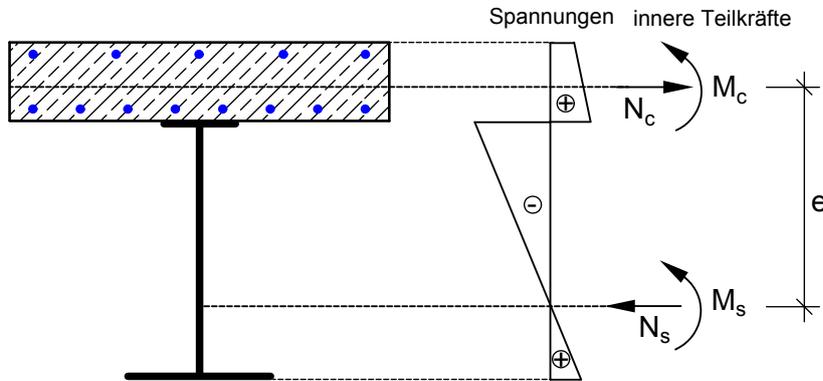
**Bild 70:** Gleichungen zur Ermittlung der geometrischen Größen  $I_2$  und  $S_2$  nach Zustand II für einen Rechteckquerschnitt mit Druckbewehrung

Tabelle 12: Zusammenstellung der geometrischen Größen  $x$ ,  $I$  und  $S$  für die Zustände I und II in biegebeanspruchten Bauteilen mit Rechteckquerschnitt [66]

Zeile	Größe	Zustand I	Zustand II
1	$x$	$x_I = \kappa_{xI} \cdot h$ $\rho_{II} = A_{s1}/(b \cdot h)$ $\kappa_{xI} = (0,5 + A_1)/(1 + B_1)$ $A_I = \alpha_e \cdot \rho_{II} \cdot (d/h) \cdot (1 + A_{s2} \cdot d_2 / (A_{s1} \cdot d))$ $B_{II} = \alpha_e \cdot \rho_{II} \cdot (1 + A_{s2}/A_{s1})$	$x_{II} = \kappa_{xII} \cdot d$ $\rho_{II} = -B_{II} + \sqrt{B_{II}^2 + 2A_{II}}$ $\kappa_{xI} = (0,5 + A_1)/(1 + B_1)$ $A_{II} = \alpha_e \cdot \rho_{II} \cdot (1 + A_{s2} \cdot d_2 / (A_{s1} \cdot d))$ $B_{II} = \alpha_e \cdot \rho_{II} \cdot (1 + A_{s2}/A_{s1})$
2	$I$	$I_1 = k_I \cdot b \cdot h^3 / 12$ $k_I = 1 + 12 \cdot (0,5 - k_{xI})^2 + 12 \cdot \alpha_e \cdot \rho_{II} \cdot (d/h - k_{xI})^2$ $+ 12 \cdot \alpha_e \cdot \rho_{II} \cdot \frac{A_{s2}}{A_{s1}} \cdot \left( k_{xI} - \frac{d_2}{h} \right)$	$I_2 = k_{II} \cdot b \cdot d^3 / 12$ $k_{II} = 4 \cdot k_{xII}^3 + 12 \cdot \alpha_e \cdot \rho_{II} \cdot (1 - k_{xII})^2$ $+ 12 \cdot \alpha_e \cdot \rho_{II} \cdot \frac{A_{s2}}{A_{s1}} \cdot \left( k_{xII} - \frac{d_2}{d} \right)$
3	$S$	$S_1 = A_{s1} \cdot e + A_{s2} \cdot z_{s2}$	$S_2 = A_{s1} \cdot e + A_{s2} \cdot z_{s2}$

### (ii) Ermittlung der Schwindkrümmungen am elastischen Verbundquerschnitt nach Trost

Aus dem konstanten Anteil des Schwindens kann nach Trost der primäre Eigenspannungszustand aus Schwinden berechnet werden. Betonschwinden führt zu Eigenspannungen wie in Bild 71 dargestellt. Die Teilschnittgrößen ergeben sich mit den Bezeichnungen nach Gl. (4.3) wie folgt.



**Bild 71:** Primäre Eigenspannungen infolge Schwindens

$N_s$	$M_s$	
$\frac{1}{E_s \cdot A_s} + \frac{1}{E_c \cdot A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi(t))$	$-\frac{e}{E_s \cdot I_s}$	$\epsilon_{cs}(t)$
$\frac{e}{E_c \cdot I_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi(t))$	$\frac{1}{E_s \cdot I_s} + \frac{1}{E_c \cdot I_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi(t))$	0

(4.3)

$$N_c = -N_s \quad (4.4)$$

$$M_c = M_s - N_s \cdot e \quad (4.5)$$

$$\kappa_c = \kappa_s \quad \rightarrow \quad \frac{M_c}{E_c \cdot I_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = \frac{M_s}{E_s \cdot I_s} \quad (4.6)$$

$$N_s = \frac{\epsilon_{cs}}{\frac{1}{E_s \cdot A_s} + \frac{1 + \rho \cdot \varphi}{E_c \cdot A_c} + \frac{(1 + \rho \cdot \varphi) \cdot e^2}{E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}}$$

$$M_s = -\frac{N_s \cdot e}{1 + \frac{1}{\alpha_e \cdot I_s / I_c \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}}$$

Damit ergeben sich die Dehnungen in den Schwerpunkten des Betons und der Bewehrung:

$$\epsilon_{s,s} = \frac{N_s}{E_s \cdot A_s} = \frac{\epsilon_{cs}}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) + \frac{A_s \cdot E_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot e^2}{E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}} \quad (4.7)$$

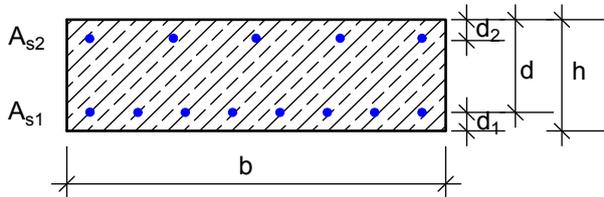
$$\epsilon_{c,c} = \epsilon_{cs} + \frac{N_c}{E_c \cdot A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = \epsilon_{cs} + \frac{E_s \cdot A_s}{E_s \cdot A_s} \cdot \frac{N_c}{E_c \cdot A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = \epsilon_{cs} - \alpha_e \cdot \rho_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \epsilon_{s,s} \quad (4.8)$$

e Abstand Schwerpunkt Stahlquerschnitt bis Schwerpunkt Betonquerschnitt

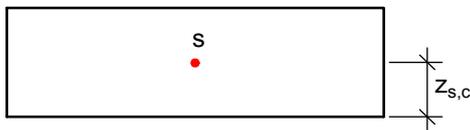
Die Vorgehensweise entspricht dem „Verfahren der Teilquerschnitte“ (Teilquerschnitt Stahl + Teilquerschnitt Beton).

### Stahlbetonquerschnitt

#### Zustand I

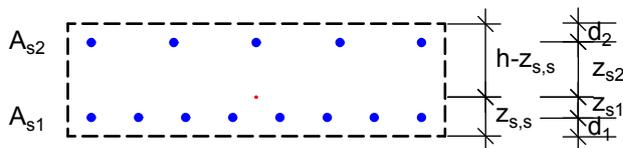


#### Betonquerschnitt



$$z_{s,c} = \frac{h}{2} \quad A_c = b \cdot h$$

#### Stahlquerschnitt



$$z_{s,s} = \frac{A_{s1} \cdot d_1 + A_{s2} \cdot (h - d_2)}{A_{s1} + A_{s2}}$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

$$I_s = A_{s1} \cdot z_{s1}^2 + A_{s2} \cdot z_{s2}^2 \quad (I_{s1} \approx 0, I_{s2} \approx 0) \text{ nur Steiner-Glieder}$$

e Abstand zwischen Schwerpunkt Stahlquerschnitt aus Bewehrung und Betonquerschnitt (=  $z_{s,c} - z_{s,s}$ )

$z_{s1}$  Abstand zwischen Schwerpunkt Stahlquerschnitt und Bewehrung  $a_{s1}$   
=  $z_{s,s} - d_1$

$z_{s2}$  Abstand zwischen Schwerpunkt Stahlquerschnitt und Bewehrung  $a_{s2}$   
=  $h - z_{s,s} - d_2$

$$K_s^I = \frac{\varepsilon_{c,c}^I - \varepsilon_{s,s}^I}{e} \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_{s,s}^I = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) + \frac{E_s \cdot A_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot e^2}{E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}} \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_{c,c}^I = \varepsilon_{cs} - \alpha_e \cdot \rho_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \varepsilon_{s,s}^I \quad (4.11)$$

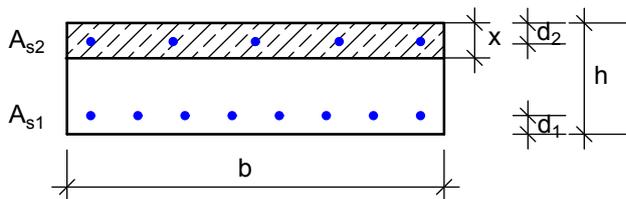
$$e = z_{s,c} - z_{s,s} = \frac{h}{2} - \frac{A_{s1} \cdot d_1 + A_{s2} \cdot (h - d_2)}{A_{s1} + A_{s2}}$$

$$e = \frac{h}{2} - d_1 \quad (\text{ohne Druckbewehrung})$$

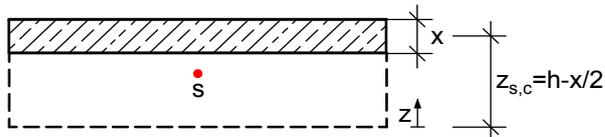
$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_s = A_{s1} \cdot z_{s1}^2 + A_{s2} \cdot z_{s2}^2$$

### Zustand II

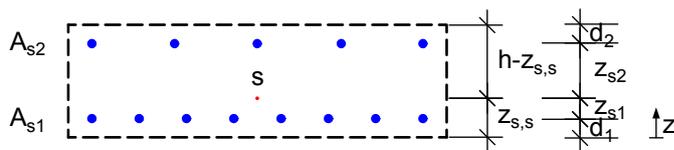


### Betonquerschnitt



$$z_{s,c} = h - \frac{x}{2}$$

### Stahlquerschnitt



$$z_{s,s} = \frac{A_{s1} \cdot d_1 + A_{s2} \cdot (h - d_2)}{A_{s1} + A_{s2}}$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

$$I_s = A_{s1} \cdot z_{s1}^2 + A_{s2} \cdot z_{s2}^2$$

$$\rho_s = \frac{A_s}{b \cdot x}$$

$$\kappa_{cs} = \frac{M_s}{E_s \cdot I_s} = \frac{M_c}{E_c \cdot I_c}$$

$$\kappa_s^{II} = \frac{\varepsilon_{c,c}^{II} - \varepsilon_{s,s}^{II}}{e}$$

(4.12)

$$\varepsilon_{s,s}^{\text{II}} = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) + \frac{E_s \cdot A_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot e^2}{E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}}$$

$$\varepsilon_{c,c}^{\text{II}} = \varepsilon_{cs} - \alpha_e \cdot \rho_s \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \varepsilon_{s,s}^{\text{II}}$$

$$e = z_{s,c} - z_{s,s} = h - \frac{x}{2} - \frac{A_{s1} \cdot d_1 + A_{s2} \cdot (h - d_2)}{A_{s1} + A_{s2}}$$

$$e = h - d_1 - \frac{x}{2} \quad (\text{ohne Druckbewehrung})$$

$$I_c = \frac{b \cdot x^3}{12} \tag{4.13}$$

$I_c$       Trägheitsmoment des Bruttobetonquerschnitts im Zustand II

### (iii) Ermittlung der Schwindkrümmungen nach König/Tue

Auch der nachfolgenden Vorgehensweise liegt die Theorie des elastischen Verbundquerschnitts zugrunde. Die Verformung eines Bauteils durch Schwinden wird durch die Anordnung der Bewehrung im Querschnitt und die Rissbildung des Bauteils beeinflusst. Durch die Behinderung des Schwindens im ungerissenen Querschnitt wird ein Eigenspannungszustand hervorgerufen. Bei der Bestimmung der Krümmung infolge Schwindens kann der Gesamtquerschnitt in die gedachten Teilquerschnitte, bestehend aus Beton und Stahl, zerlegt und ihre Dehnungen in ihren Schwerpunkten getrennt betrachtet werden. Die Dehnungen der gedachten Teilquerschnitte werden durch innere Kräfte erzeugt. Bei Annahme einer schubstarrten Verbindung der Teilquerschnitte, kann die Schwindkrümmung über das Kräfte- und Momentengleichgewicht sowie die Kompatibilitätsbedingungen (Ebenbleiben des Querschnitts) bestimmt werden (Bild 72) [53].

Kräftegleichgewicht:

$$N_s + N_c = 0 \quad (4.14)$$

Momentengleichgewicht:

$$M_c + M_s + N_s \cdot e = 0 \quad (4.15)$$

Kompatibilitätsbedingungen

$$\kappa_c = \kappa_s \quad \rightarrow \quad \frac{M_c}{E_c \cdot I_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = \frac{M_s}{E_s \cdot I_s} \quad (4.16)$$

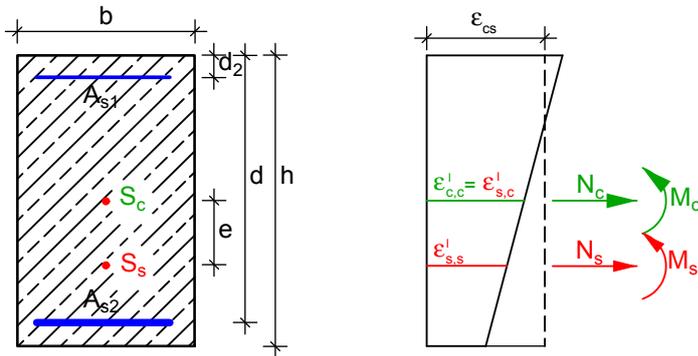
$$\varepsilon_{c,c} = \varepsilon_{s,c} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{cs} + \frac{N_c}{E_c \cdot A_c} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) = \frac{N_s}{E_s \cdot I_s} - \frac{M_s}{E_s \cdot I_s} \cdot e \quad (4.17)$$

Dabei sind:

- $\varepsilon_{c,c}$     Betondehnung auf der Höhe des Betonschwerpunktes
- $\varepsilon_{s,c}$     Stahlidehnung bezogen auf den Betonschwerpunkt
- $\rho$         Relaxationsbeiwert (= 0,8)
- $\varepsilon_{cs}$     Schwindmaß des Betons
- $e$         Abstand zwischen den Schwerpunkten des Betons und des Stahls

Die Betrachtungsweise erfolgt am Querschnitt im Zustand I und im Zustand II.

### Zustand I



**Bild 72:** Innere Kräfte und Krümmungen infolge Schwindens im Zustand I

$$\kappa_s^I = \frac{\varepsilon_{c,c}^I - \varepsilon_{s,s}^I}{e} \quad (4.18)$$

$$\varepsilon_{s,s}^I = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{1 + \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s + \frac{A_s \cdot e^2}{I_c + I_s \cdot \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)} \right)}$$

$$\varepsilon_{c,c}^I = \varepsilon_{cs}(\infty) - \frac{\varepsilon_{cs}(\infty) \cdot \rho_s \cdot \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{1 + \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s + \frac{A_s \cdot e^2}{I_c + I_s \cdot \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)} \right)}$$

$$e = \frac{\rho_{s1} \cdot (h - 2 \cdot d_1) - \rho_{s2} \cdot (h - 2 \cdot d_2)}{2 \cdot \rho_s}$$

$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

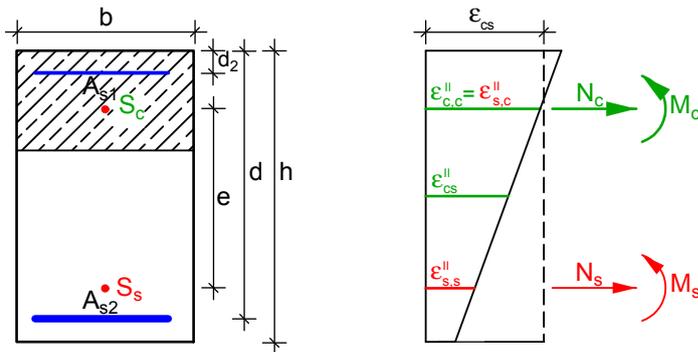
$$I_s = \frac{\rho_{s1} \cdot \rho_{s2}}{\rho_s^2} \cdot (\rho_{s1} + \rho_{s2}) \cdot (d - d_2)^2$$

Dabei sind:

- $\varepsilon_{s,s}^I$  Stahldehnung auf der Höhe des Stahlschwerpunktes
- $\varepsilon_{c,c}^I$  Betondehnung auf der Höhe des Betonschwerpunktes
- $\rho_s$  Gesamtbewehrungsgrad (Druck- und Zugbewehrung) =  $(A_{s1} + A_{s2}) / (b \cdot h)$
- $e$  Abstand zwischen den Schwerpunkten des Betons und des Stahls
- $I_c$  Trägheitsmoment des Bruttobetonquerschnitts im Zustand I
- $I_s$  Trägheitsmoment der Stahllagen

## Zustand II

Im Zustand II sind die Gleichungen dahingehend zu modifizieren, dass statt der Bauteilhöhe  $h$  die Druckzonenhöhe  $x$  bzw. in bezogener Form  $\xi_h = x/h$  verwendet wird. In gerissenem Zustand verändern sich die resultierenden inneren Kräfte, da der Betonzugzone im Zustand II keine Zugspannungen zugewiesen werden. Des Weiteren verändern sich die Betonfläche  $A_c$ , das Trägheitsmoment  $I_c$  sowie der Abstand zwischen den Schwerpunkten  $e$ . Näherungsweise wird auch hier von der Modellvorstellung der Ersatznormalkraft im Bewehrungsschwerpunkt Gebrauch gemacht. Schwinden führt im Riss zu einer Vergrößerung der Druckzonenhöhe.



**Bild 73:** Innere Kräfte und Krümmungen infolge Schwindens im Zustand II

Die Krümmung infolge Schwindens im Zustand II errechnet sich zu

$$\kappa_s^{II} = \frac{\varepsilon_{c,c}^{II} - \varepsilon_{s,s}^{II}}{e} \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_{s,s}^{II} = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{1 + \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s / \xi_h + \frac{A_s \cdot e^2}{I_c \cdot \xi_h^3 + I_s \cdot \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)} \right)} \quad (4.20)$$

$$\varepsilon_{c,c}^{II} = \varepsilon_{cs}(\infty) - \frac{\varepsilon_{cs}(\infty) \cdot \rho_s / \xi_h \cdot \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{1 + \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s / \xi_h + \frac{A_s \cdot e^2}{I_c \cdot \xi_h^3 + I_s \cdot \alpha_e \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)} \right)} \quad (4.21)$$

$$e = \frac{\rho_{s1} \cdot (h - 2 \cdot d_1) - \rho_{s2} \cdot (h - 2 \cdot d_2)}{2 \cdot \rho_s} + (1 - \xi_h) \cdot \frac{h}{2} \quad (4.22)$$

$$e = h - d_1 - \frac{x}{2} \quad (\text{ohne Druckbewehrung}) \quad (4.23)$$

$$I_c \cdot \xi_h^3 = \frac{b \cdot x^3}{12} \quad (4.24)$$

$$\rho_s / \xi_h = \frac{A_s}{b \cdot x} \quad (4.25)$$

$$\xi_h = x/h = \xi \cdot d/h$$

Dabei ist:

$e$  Abstand zwischen den Schwerpunkten

**(iv) vereinfachte Ermittlung der Schwindkrümmungen nach Maurer/Djouahra [41]**

Die Schwindkrümmungen im Zustand I werden vereinfachend vernachlässigt, da sie im Allgemeinen kleiner sind als die Schwindkrümmungen im Zustand II.

$$\kappa_{cs}^I \approx 0 \quad (4.26)$$

Der Einfluss des Schwindens auf die mittlere Stahldehnung bei abgeschlossener Rissbildung ist gering [70]. Die mittlere Dehnung in der Bewehrung ändert sich durch das Schwinden nahezu nicht.

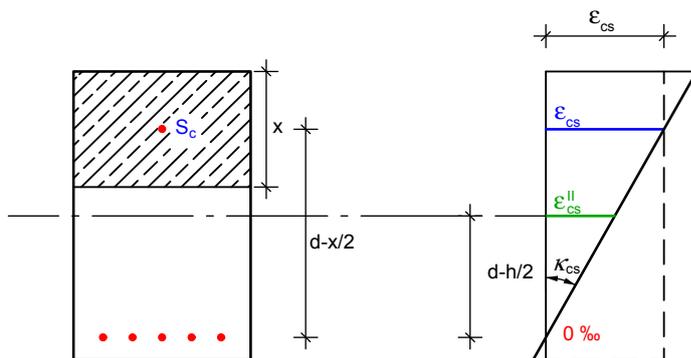
Geht man ferner davon aus, dass im Schwerpunkt der Druckzonenhöhe  $x$  die Schwinddehnung  $\varepsilon_{cs}(\infty)$  vorhanden ist, so ergibt sich im Zustand II bei abgeschlossener Rissbildung die durch das Schwinden verursachte Krümmung – bei Querschnitten mit geringer oder ohne Druckbewehrung – in guter Näherung zu:

$$\kappa_{cs}^{II} = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{d - x/2} \quad (4.27)$$

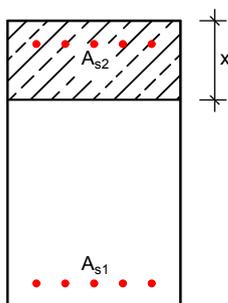
$x$  Druckzonenhöhe unter Berücksichtigung des Bewehrungsgrades und des Kriechens.

$$x = \frac{\alpha_e \cdot A_{s1}}{b} \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d}{\alpha_e \cdot A_{s1}}} \right) \quad \text{mit } \alpha_e = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{E_s}{E_{cm}} \cdot (1 + \varphi)$$

Durch die zwei gegebenen Dehnungswerte ist die Dehnungsebene des Schwindens eindeutig definiert und somit auch die Schwindverkürzung  $\varepsilon_{cs}^{II}$  in der Bauteilachse.



**Bild 74:** Dehnungen infolge Schwindens über die Querschnittshöhe im Zustand II. Näherung für die Berücksichtigung der Druckbewehrung bei der Schwindkrümmung auf Grundlage der vereinfachenden Annahme, dass sich die Druckbewehrung etwa im Schwerpunkt der Druckzone befindet.



$$\kappa_{cs}^{II} = \frac{\text{red } \varepsilon_{cs}(\infty)}{d - x/2}$$

$$\text{red } \varepsilon_{cs} \hat{=} - \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_e \cdot \rho_{s2} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi_\infty)}$$

$$\rho_{s2} = \frac{A_{s2}}{b \cdot x} \quad \rho = 0,8$$

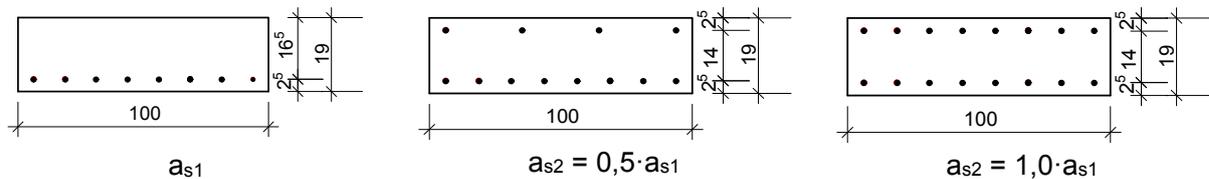
vereinfachend :  $x = 2 \cdot d_2$

**Bild 75:** Dehnungen mit Druckbewehrung infolge Schwindens über die Querschnittshöhe im Zustand II

### 4.1.3 Vergleichsrechnungen zur Größe der Schwindkrümmungen nach den verschiedenen Ansätzen

Für den Vergleich der verschiedenen Ansätze zur Ermittlung der Schwindkrümmung wird der nachfolgend dargestellte, 19cm dicke Querschnitt gewählt. Mit den unterschiedlichen Ansätzen (EC2, Trost, König/Tue, Maurer/Djouahra) werden die Schwindkrümmungen  $\kappa_{cs}^I$  und  $\kappa_{cs}^{II}$  berechnet und verglichen. Für die Berechnung der Krümmung wird jeweils ein Beton C20/25, eine Schwinddehnung  $\varepsilon_{cs} = -0,4 \cdot 10^{-3}$  und eine Kriechzahl  $\varphi = 2,5$  angenommen. Dazu wird der Bewehrungsgrad  $\rho_{s1} = 0,1 - 1,0\%$  variiert. Darüber hinaus wird die Druckbewehrung  $a_{s2}$  mit 50% und 100% der Biegezugbewehrung  $a_{s1}$  angesetzt. Dadurch wird der Einfluss einer in der Druckzone liegenden Bewehrung auf die Krümmung infolge Schwindens untersucht.

Querschnitt:  $b/h/d = 100/19/16,5$



Beton:

C20/25

$E_{cm} = 29000 \text{ MN/m}^2$

$\varphi = 2,5$

$\varepsilon_{cs} = -0,4 \cdot 10^{-3}$

Bewehrungsgrad:

$$\rho_{s1} = \frac{A_{s1}}{b \cdot d} = 0,1 - 1,0 \%$$

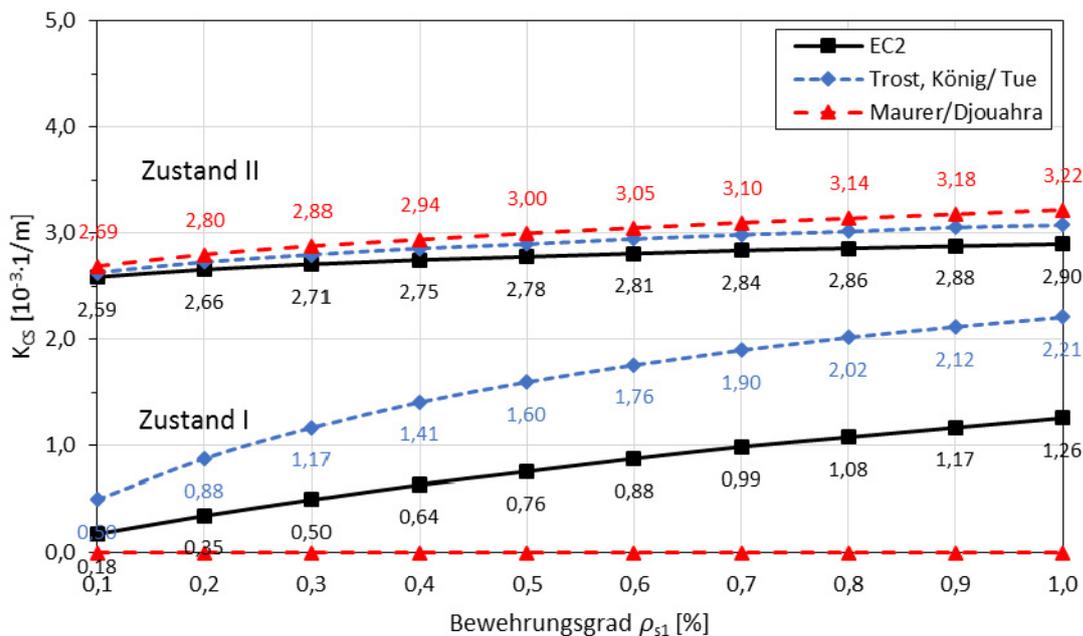


Bild 76: Schwindkrümmung im Zustand I und II nach den unterschiedlichen Ansätzen ( $a_{s2} = 0$ )

In Bild 76 werden die Krümmungen infolge Schwindens des Betons im Zustand I und II für einen einseitig bewehrten Querschnitt mit Hilfe der unterschiedlichen Ansätze verglichen. Es zeigt sich,

dass sich mit zunehmendem Bewehrungsgrad die Querschnittskrümmungen  $\kappa_{cs}$  im Zustand I spürbar erhöhen. Insbesondere bei gering bewehrten Querschnitten ist die Schwindkrümmung im Zustand I deutlich kleiner als bei höher bewehrten Querschnitten.

Darüber hinaus stimmt die Querschnittskrümmung im Zustand I und II zwischen den Ansätzen nach Trost und König/Tue überein. Das liegt daran, dass beide Ansätze auf der Theorie des elastischen Verbundquerschnitts basieren.

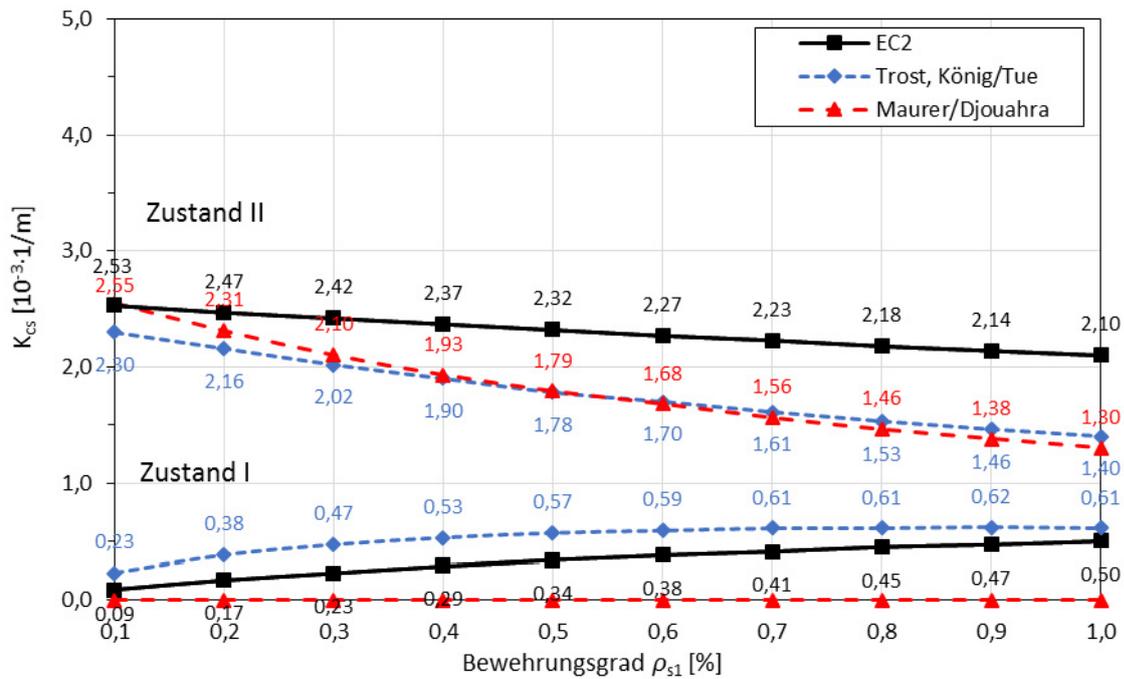
Der Unterschied zwischen den Kurven im Zustand I nach EC2 und Trost, König/Tue ist deutlich. Der Grund liegt in dem unterschiedlichen Ansatz für das Trägheitsmoment I, dem Abstand zwischen den Schwerpunkten der Teilquerschnitte aus Beton und Stahl und dem Faktor  $(1+\rho\cdot\varphi)$ , wobei  $\rho$  einen Alterungsbeiwert zur Berücksichtigung der die Kriechspannung reduzierenden Relaxation angibt (Tabelle 13).

Tabelle 13: Vergleich Querschnittskrümmung aus Schwinden im Zustand I zwischen EC2 und Trost, König/Tue

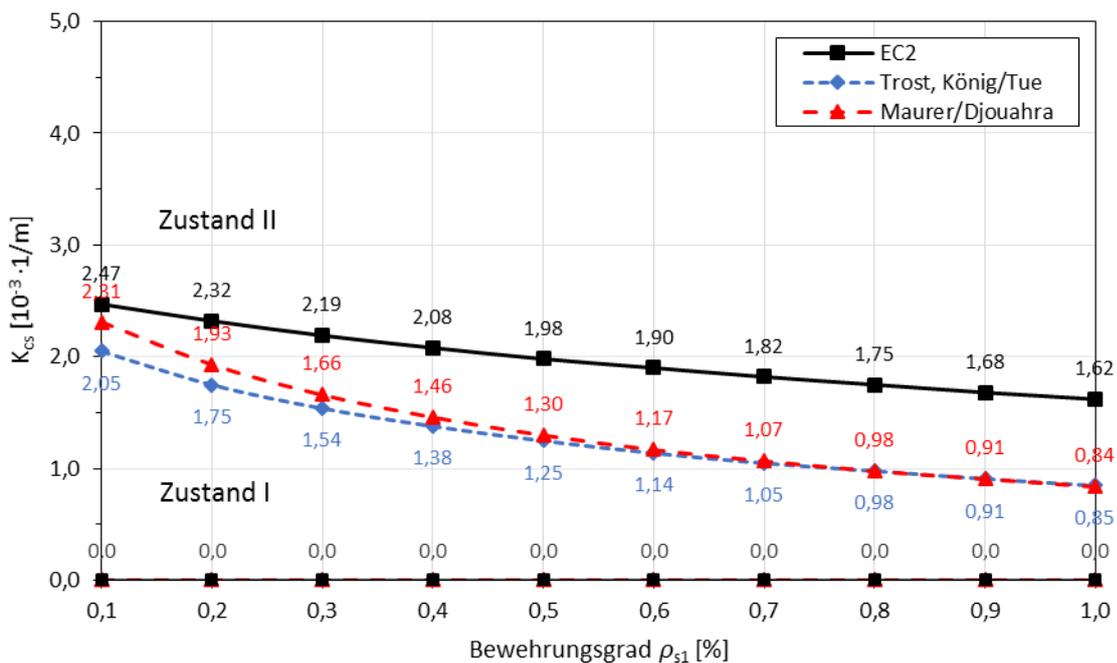
Größe	EC2	Trost, König/Tue
$I_1$	$\frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2} - z_s\right)^2 + \alpha_e \cdot A_{s1} \cdot (z_s - d_1)^2$ $= 6,26 \cdot 10^{-4} m^4$	$\frac{b \cdot h^3}{12}$ $= 5,71 \cdot 10^{-4} m^4$
Abstand zwischen den Schwerpunkten des Betons und des Stahls	$e = 6,6 \text{ cm}$	$h/2 - d_1 = 7,0 \text{ cm}$
$1+\rho\cdot\varphi$	Keine	3,0
$S_1$	$3,26 \cdot 10^{-5} m^3$	$3,46 \cdot 10^{-5} m^3$
$\kappa_{cs}^I$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$1,17 \cdot 10^{-3}$
$\kappa_{cs}^I$ (ohne $1+\rho\cdot\varphi$ )	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$

Wie Bild 76 zeigt, ist der Unterschied der Querschnittskrümmungen im Zustand II zwischen den unterschiedlichen Ansätzen nicht groß. Im Vergleich zu der Krümmung  $\kappa_{cs}^{II}$  nach EC2 beträgt die Abweichung der Krümmung nach Maurer/Djouahra beim Bewehrungsgrad  $\rho_{s1} = 0,3\%$  lediglich 6%. Bei großen, einseitig angeordneten Bewehrungsmengen ist die Dehnungsdifferenz zwischen der sich frei verkürzenden Betondruckzone und der verformungsbehinderten Zugzone größer, die Krümmung steigt somit.

Bild 77 zeigt die Krümmungen infolge Schwindens für einen beidseitig bewehrten Querschnitt mit Druckbewehrung ( $a_{s2} = 0,5 \cdot a_{s1}$ ). Der Randabstand der beiden Bewehrungslagen ist gleich groß. Er beträgt  $d_{s1}/h = d_{s2}/h = 0,13$ . Wie zu sehen ist, nimmt mit zunehmendem Bewehrungsgrad die Schwindkrümmung im Zustand II ab. Dagegen steigt die Krümmung aus Schwinden im Zustand I mit ansteigendem Bewehrungsgrad an.



**Bild 77:** Schwindkrümmung im Zustand I und II mit Druckbewehrung ( $a_{s2}=0,5 \cdot a_{s1}$ )



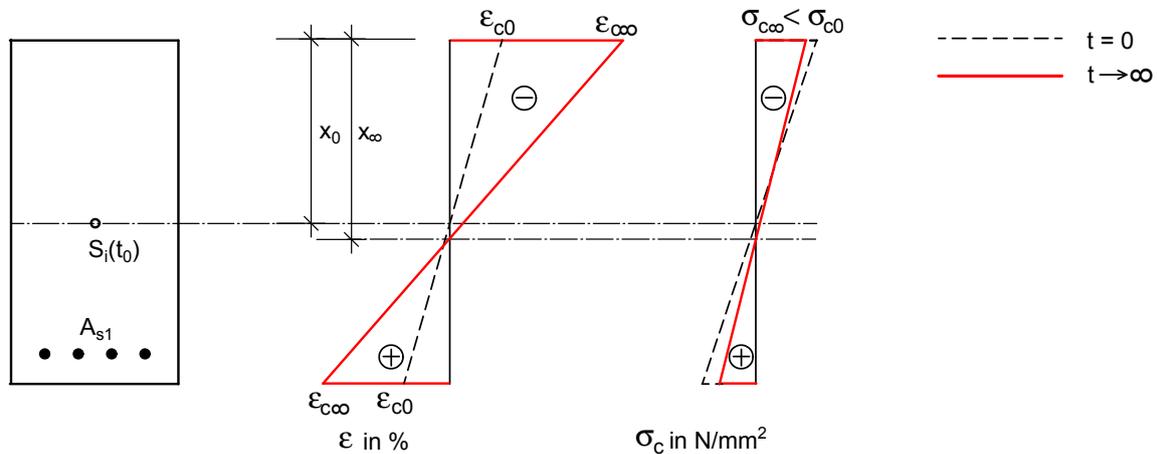
**Bild 78:** Schwindkrümmung im Zustand I und II mit Druckbewehrung ( $a_{s2}=1,0 \cdot a_{s1}$ )

In Bild 78 wird die Krümmung infolge Schwindens für einen beidseitig symmetrisch bewehrten Querschnitt im Zustand I und II gezeigt. Die Schwindkrümmung im Zustand II nimmt mit zunehmenden Bewehrungsgrad deutlich ab. Der Einfluss der Druckbewehrung ist aus dem Vergleich mit Bild 76 deutlich erkennbar. Bei größerer Druckbewehrung wird die Krümmung günstig beeinflusst. Im Zustand I ergeben sich aus Schwinden keine Krümmungen.

## 4.2 Infolge Kriechens des Betons

Die Auswirkungen aus dem Kriechen des Betons können bequem über die Anwendung des effektiven E-Moduls für Beton berücksichtigt werden. Diese Methode ist nicht exakt, für sie spricht aber ihre Einfachheit.

### ungerissener Querschnitt



**Bild 79:** Auswirkungen des Kriechens auf die Dehnungen und Spannungen im ungerissenen Querschnitt (aus [103])

In ungerissenen Querschnitten aus unbewehrtem Beton steigt die Dehnung  $\varepsilon_{c\infty}$  durch das Kriechen an.

$$\varepsilon_c(\infty) = \varepsilon_c(t_0) \cdot (1 + \varphi(\infty, t_0))$$

Der effektive E-Modul des Betons, der das Kriechen berücksichtigt, kann wie folgt ermittelt werden:

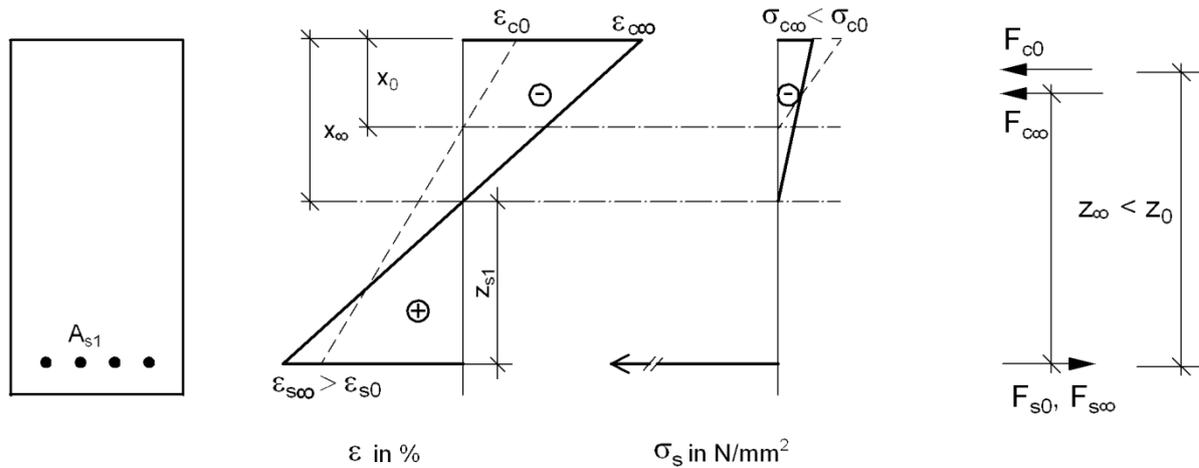
$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(\infty, t_0)}$$

Für die Biegesteifigkeit gilt damit:

$$EI^I(t) = \frac{EI^I(t_0)}{1 + \varphi(\infty, t_0)} = E_{c,eff} \cdot I^I$$

In bewehrten Querschnitten wird die Kriechdehnung durch Bewehrung nach der Theorie des elastischen Verbundquerschnitts behindert. Durch das Kriechen wandern der ideale Schwerpunkt des Verbundquerschnitts und damit die Dehnungsnulllinie näher zur Bewehrung. Druckzonenhöhe und ideales Trägheitsmoment nehmen damit geringfügig zu (b).

### gerissener Querschnitt



**Bild 80:** Auswirkungen des Kriechens auf die Dehnungen und Spannungen im gerissenen Querschnitt (aus [103])

In gerissenen Querschnitten kriecht lediglich der Beton in der Druckzone. Da die Verteilung der Dehnungen über den Querschnitt stets eben bleiben muss, wandert die Dehnungsnulllinie näher zur Bewehrung. Durch die vergrößerte Druckzone fallen die Betondruckspannungen erheblich ab, während die Stahlspannungen zum Ausgleich des geringfügig verkleinerten Hebelarms aus Gleichgewichtsgründen etwas anwachsen.

Auch für den gerissenen Zustand II bietet sich die Methode des effektiven E-Moduls an.

Mit  $\alpha_{e,eff}$  kann die Druckzonenhöhe  $x_\infty$  mit Hilfe der hergeleiteten Beziehung für  $x$  ermittelt werden.

Für den Zeitpunkt  $t = 0$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}} \quad x = \frac{\alpha_e \cdot A_{s1}}{b} \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d}{\alpha_e \cdot A_{s1}}} \right)$$

Für den Zeitpunkt  $t = \infty$

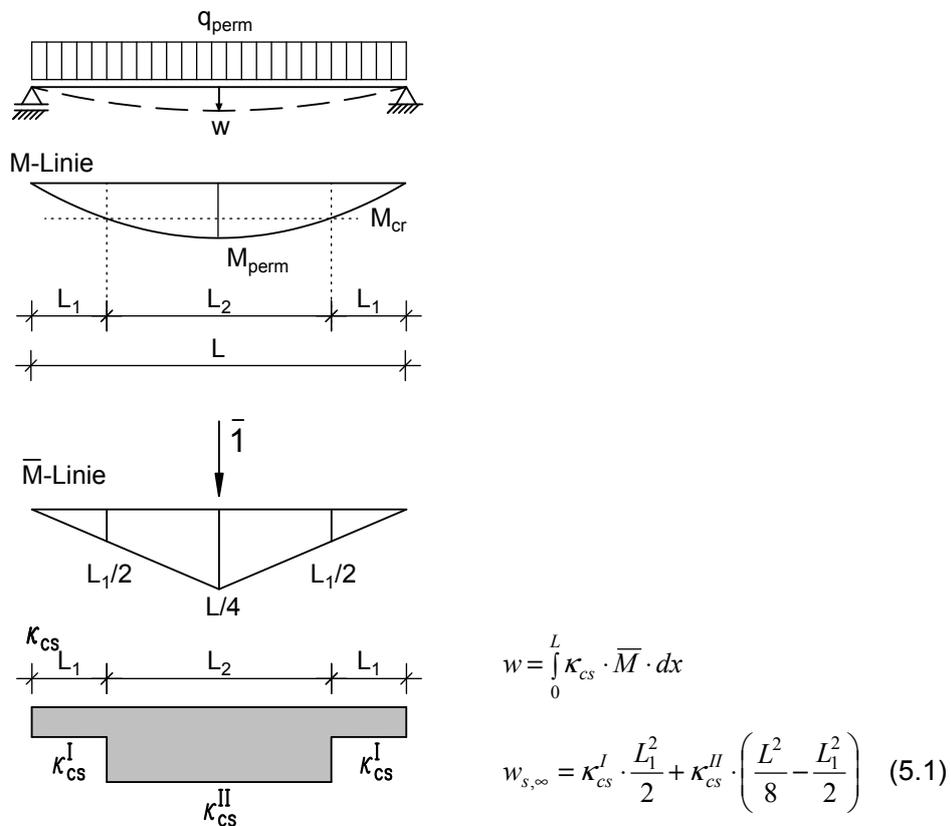
$$\alpha_{e,eff} = \frac{E_s}{E_{c,eff}} \quad x = \frac{\alpha_{e,eff} \cdot A_{s1}}{b} \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d}{\alpha_{e,eff} \cdot A_{s1}}} \right)$$

Die Biegesteifigkeit des gerissenen Querschnitts (reiner Zustand II) nimmt durch Kriechen im Vergleich zum Zustand I deutlich weniger ab. Allerdings nehmen die Querschnittskrümmungen deutlich zu.

## 5 Auswirkungen des zeitabhängigen Verhaltens von Beton auf Bauteilebene

### 5.1 Durchbiegungen infolge Schwindens des Betons

Die Durchbiegungen infolge Schwindens des Betons können berechnet werden, indem die zuvor ermittelten Schwindkrümmungen  $\kappa_{cs}^I$  und  $\kappa_{cs}^{II}$  auf die Querschnitte der ungerissenen Bereiche  $L_1$  bzw. der gerissenen Bereiche  $L_2$  angesetzt werden (Bild 81). Das Lastniveau hat dabei lediglich einen Einfluss auf die längenmäßige Ausdehnung der gerissenen und ungerissenen Bereiche ( $L_1$ ,  $L_2$ ). Im Allgemeinen werden die Durchbiegungen unter der quasi-ständigen Kombination ermittelt. Bei einer einmaligen Lastüberschreitung werden allerdings die Risse über einen größeren Bereich eingepreßt und sind anschließend auch unter einer geringeren Laststufe noch wirksam, indem in diesen Bereichen das Rissmoment identisch null ist.

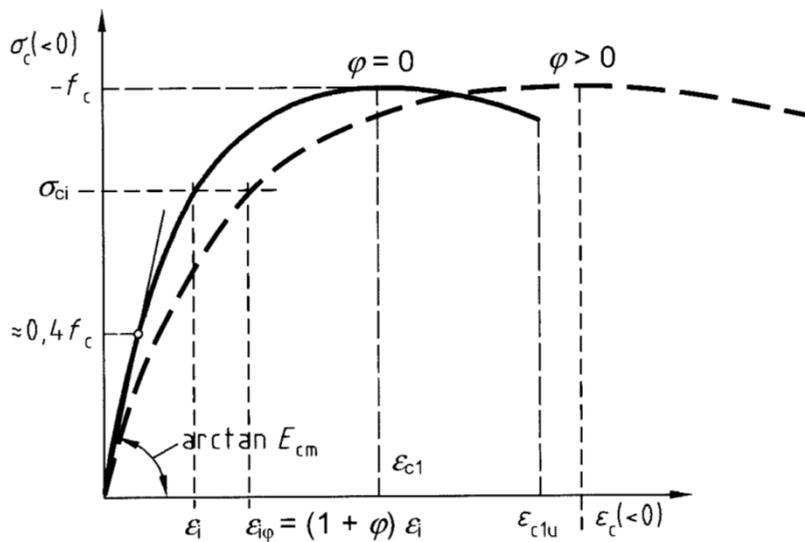


**Bild 81:** Ermittlung der Durchbiegung infolge Schwindens mit dem Arbeitssatz

In Bild 81 wird die Durchbiegung infolge Schwindens mit dem Arbeitssatz ermittelt.  $w_{s,\infty}$  bezeichnet dabei die Durchbiegung aus Schwinden alleine. Dieser Verformungsanteil wird zu der Verformung aus Last addiert. Die Ausdehnung der gerissenen und ungerissenen Bereiche wird unter der quasi-ständigen Lasteinwirkung angesetzt. Sie kann aber auch ggf. unter der häufigen oder seltenen Kombination ermittelt werden. Hier empfehlen sich ggf. Vergleichsrechnungen, da die Schwindkrümmungen im Zustand II deutlich größer sein können als im Zustand I.

## 5.2 Zunahme der Durchbiegungen infolge Kriechens des Betons

Auch durch das Kriechen des Betons werden die Durchbiegungen der Bauteile zeitabhängig vergrößert. Der Einfluss kann bei linearer  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Linie für den Beton vereinfachend mittels des effektiven E-Moduls  $E_{c,eff}$  gemäß Kapitel 4.2 erfasst werden. Bei Verwendung nichtlinearer  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Linien für den Beton kann das Kriechen berücksichtigt werden, indem alle Dehnungswerte des Betons mit einem Faktor  $(1+\varphi(t,t_0))$  multipliziert werden (Bild 82).



**Bild 82:** Berücksichtigung des Kriechens in der Spannungs-Dehnungs-Linie des Betons

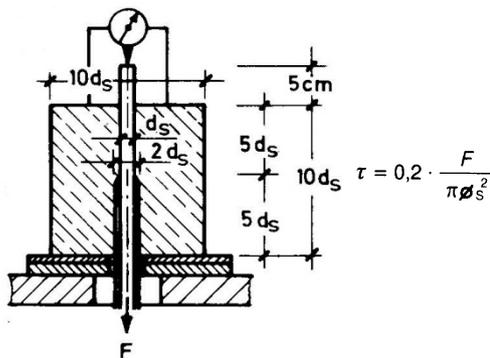
Die Zunahme der Durchbiegungen infolge Kriechens des Betons ist im Zustand II geringer als im Zustand I, da im Zustand II lediglich der Beton in der Druckzone kriecht. Dagegen nehmen im Zustand I die Dehnungen durch das Kriechen des Betons sowohl in der Druckzone als auch in der Zugzone zu, wodurch die Zunahme der Krümmungen und damit der Durchbiegungen am Bauteil entsprechend größer ist.

## 6 Einflüsse aus dem Verbund zwischen Stahl und Beton

Stahlbeton ist ein Verbundwerkstoff. Beim Verhalten von Bauteilen aus Stahlbeton spielt außer den beiden Werkstoffen Beton und Stahl auch der Verbund zwischen dem Beton und den Bewehrungsstäben eine entscheidende Rolle.

Die Verbundspannungen sind abhängig von der Relativverschiebung zwischen Stahl und Beton. Der Verbund zwischen Stahl und Beton wird von zahlreichen Faktoren beeinflusst.

Als Versuchskörper zur Ermittlung des Zusammenhangs zwischen den Verbundspannungen und Relativverschiebungen, dem sog. Verbundgesetz, werden i. A. sog. Pulloutkörper verwendet (Bild 83). Unter dauernd wirksamen Beanspruchungen vergrößern sich die Relativverschiebungen zwischen Stahl und Beton durch das Verbundkriechen.

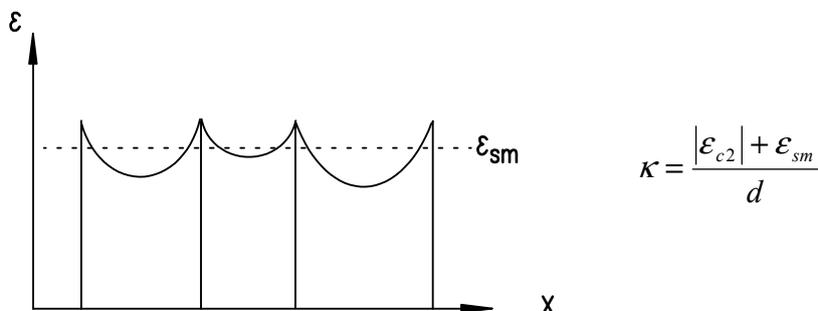


**Bild 83:** Pulloutkörper zur Ermittlung des Verbundgesetzes (aus [85])

Der Verbund wirkt sich in Hinblick auf die Größe der zu erwartenden Durchbiegungen günstig aus. Durch den Verbund fallen die Spannungen und Dehnungen in der Bewehrung zwischen 2 Rissen ab. Dadurch ist die mittlere Stahldehnung  $\epsilon_{sm}$  über einen Bereich kleiner als die Stahldehnung im Rissquerschnitt. Dieser Effekt hat kleinere Krümmungen und damit Durchbiegungen zur Folge.

Der versteifende Einfluss aus dem Verbund zwischen den Rissen im Beton kann im Rechenmodell über das „Tension Stiffening“ entweder beim Stahl oder beim Beton berücksichtigt werden (s. Kapitel 7). Damit kann mittels der Methode der verschmierten Rissbildung die mittlere Stahldehnung in der gerissenen Zugzone beschrieben werden.

In den nachfolgenden Berechnungen mit SOFiSTiK wird Tension Stiffening durch die Modifizierung der Stahlkennlinie über FCT programmintern nach DAfStb Heft 400 berücksichtigt. Darüber hinaus wird der Effekt des „Tension Stiffening“ über FCTK ebenfalls programmintern berücksichtigt.



**Bild 84:** Dehnungsverlauf des Betonstahls bei abgeschlossener Rissbildung

## 7 Rechenmodell und Modellierung des Werkstoffverhaltens

### 7.1 Allgemeines

Im Rahmen dieser Arbeit wird für die Durchführung der nichtlinearen Berechnungen das FEM-Programmsystem SOFiSTiK verwendet. Zur Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens infolge Rissbildung und nichtlinearer Spannungs-Dehnungs-Linien wird die Layer-Modellierung verwendet.

### 7.2 Layer-Modellierung

Die Layertechnik wird für die nichtlineare Berechnung von Bauteilen aus Verbundwerkstoffen wie Stahlbeton verwendet, um eine Rissbildung und ein Plastizieren einzelner Schichten für die unterschiedlichen Werkstoffe Stahl und Beton zu erfassen. Dies ermöglicht insbesondere die nichtlineare Berechnung von Platten aus Stahlbeton unter Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens.

Durch die konsequente Abspeicherung der Ergebnisse in allen Schichten des Elementes kann auch eine Entlastung nach vorangegangener Plastizierung einzelner Schichten berücksichtigt werden (hysterese-Effekt für die Plattenbiegung). Es können dadurch Eigenspannungen über die Querschnittshöhe selbst nach völliger Entlastung entstehen. Die Layertechnik bietet weiterhin Vorteile bei der Ergebnisdarstellung. Neben einer numerischen Ausgabe der Ergebnisse für die einzelnen Schichten des Elementes ist zusätzlich eine grafische Ausgabe der Ergebnisse über die Dicke eines QUAD-Elementes möglich.

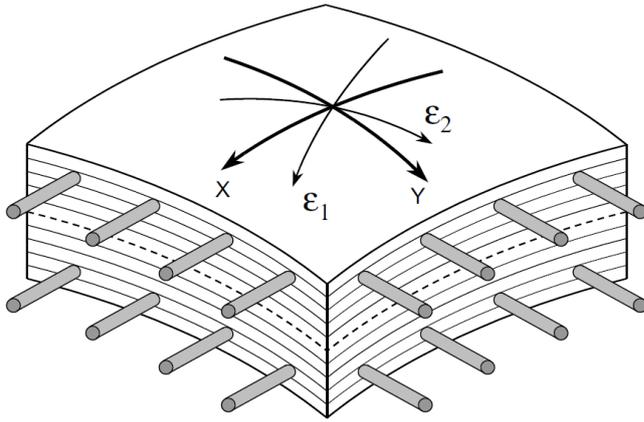
Nichtlinear bearbeitet das Layermodell derzeit nur Schichten aus den Materialien Beton und Stahl. Die Be- und Entlastungskurve wird dabei in jeder Schicht separat abgefahren (Hysterese).

Die Beschreibung des Spannungs-Dehnungsverhaltens bis zum Spannungsmaximum im Hauptspannungsraum erfolgt in SOFiSTiK mit dem Konzept der äquivalenten einachsigen Dehnungen, das auf Darwin/Pecknold zurückgeht [19].

In jeder Schicht werden die Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  und daraus die Hauptspannungen  $\sigma_I$  und  $\sigma_{II}$  errechnet. Je Hauptspannungsrichtung wird aus dem Hauptspannungsverhältnis  $\sigma_I/\sigma_{II}$  eine äquivalente einachsige Spannungs-Dehnungs-Linie ermittelt. Für die Beschreibung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens im Druckbereich wird dabei die Beziehung aus DIN EN 1992-1-1, 3.1.5, Bild 3.2 verwendet. Die maximale Betondruckspannung wird dabei nach dem Bruchkriterium von Kupfer (1973) (Kapitel 3) begrenzt. Mit dieser maximalen Betondruckspannung wird für jede der beiden Hauptspannungsrichtungen die äquivalente einachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehung angesetzt. Die äquivalenten einachsigen Spannungs-Dehnungs-Linien ergeben sich durch Skalierung der Spannungen und Dehnungen der einachsigen  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Linie mit den Faktoren  $\sigma_I/f_{cm}$  und  $\sigma_{II}/f_{cm}$  (Bild 86).

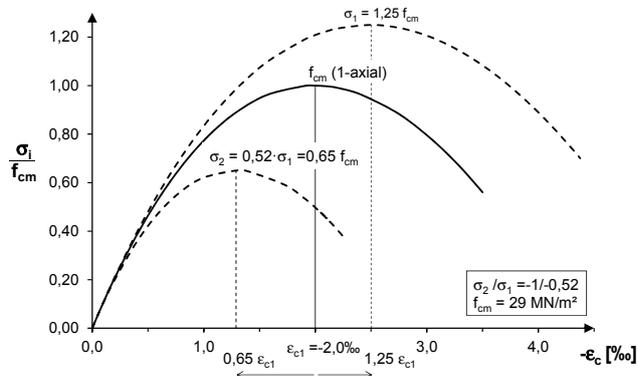
Die damit ermittelten nichtlinear verteilten Spannungen werden über die Schichten zu Schnittkräften aufintegriert. Dabei werden auch die Kräfte aus der Bewehrung einschließlich des Tension Stiffening Effekts berücksichtigt.

Besonders wichtig ist die Eingabe der Betonzugfestigkeit der (nackten) Betonlayer, also des Betons ohne Bewehrung. In AQUA wird dieser Wert in Satz BETO...FCTK eingegeben. Die Wahl einer realistischen Betonzugfestigkeit FCTK ist hier von besonderer Bedeutung.

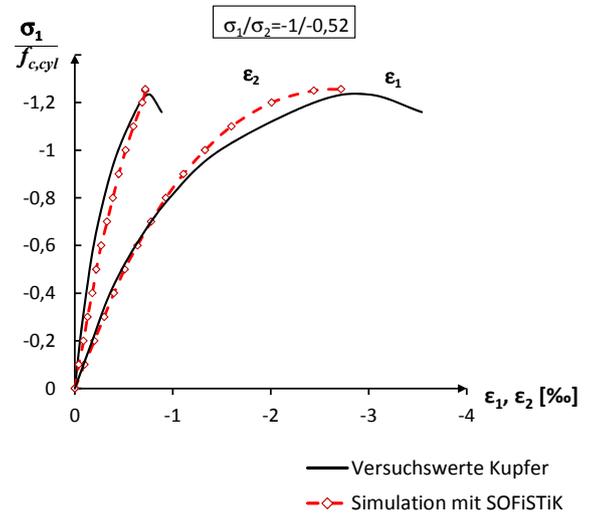


**Bild 85:** Schichtenmodell in Dickenrichtung (aus [2])

a)



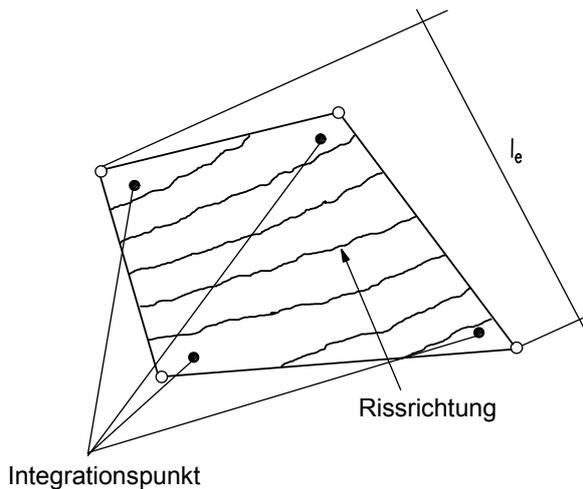
b)



**Bild 86:** Berechnung der zweiachsialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen auf Grundlage der äquivalenten  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehungen für das Spannungsverhältnis  $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-0,52$  [54]

### 7.3 Modellierung der Rissbildung

Als Rissmodelle stehen die diskrete Rissbildung und die verschmierte Rissbildung zur Verfügung. Eine wesentliche Voraussetzung für die wirklichkeitsnahe Berechnung von Betonbauteilen stellt die zuverlässige Modellierung des Materialverhaltens dar. Risse im Beton werden im Element meist verschmiert abgebildet. Die Modellvorstellung der *verschmierten* Rissbildung vermeidet die aufwändige Anpassung der FE-Netze mit fortschreitender diskreter Rissbildung. Das Netz bleibt hier über die gesamte Berechnung konstant. Stattdessen wird das Materialgesetz so angepasst, dass die Auswirkung der gerissenen Betonzugzone näherungsweise erfasst wird. Dies geschieht, indem die Steifigkeit der gerissenen Elemente herabgesetzt wird [93].



**Bild 87:** Charakteristische Länge eines finiten Elements

Da Spannungs- und Dehnungszustände bei der Finte-Element-Berechnung an den Integrationspunkten der Elemente ausgewertet werden, die repräsentativ für einen bestimmten räumlichen Bereich des Elements stehen, wird somit der Effekt einer Überschreitung der Zugfestigkeit an einer bestimmten Stelle innerhalb dieses Bereichs über die zugehörige Fläche verschmiert. Da der Zusammenhang zwischen einwirkenden Spannungen und resultierenden Dehnungen aus einer Spannungs-Rissöffnungsbeziehung abgeleitet wird, kommt dem Einflussbereich eine wichtige Rolle zu. Damit die Ergebnisse nicht von der gewählten Elementgröße abhängig sind (dies wäre physikalisch widersprüchlich), wird eine gleichwertige  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Beziehung aus der charakteristischen Länge des Elements  $l_E$  und der Bruchenergie  $G_F$  abgeleitet. Eine mögliche Bestimmung der charakteristischen Elementlänge  $l_E$  ist in Bild 87 dargestellt.

Die Bruchenergie  $G_F$  kann als Fläche unter der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung interpretiert werden und stellt nach heutiger Sicht eine Materialkonstante des Betons dar. Sie liegt für übliche Betone im Bereich von 0,1-0,25 Nmm/mm<sup>2</sup>.

Da das *verschmierte* Risskonzept keine zusätzlichen Eingriffe in die Vernetzungsalgorithmen notwendig macht, hat es sich im Bereich von kommerziellen FE-Programmsystemen durchgesetzt. Diese Art der Modellierung liefert i.A. sinnvolle Ergebnisse und ist ausreichend genau.

## 7.4 Modellierung des Betons im Druckbereich

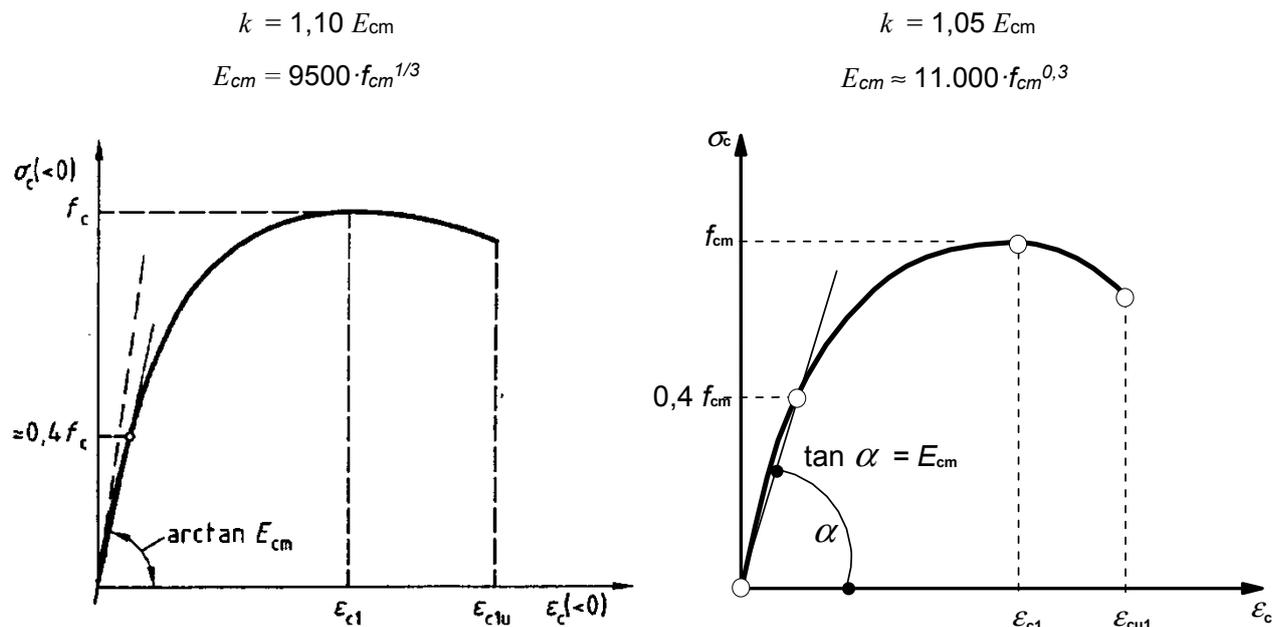
### 7.4.1 Einachsige Druckbeanspruchung

Die Modellierung des Werkstoffverhaltens für die wirklichkeitsnahe Berechnung der Durchbiegungen von Stahlbetonplatten erfolgt über die Definition von Werkstoffkennlinie. Für die Modellierung wird in DIN 1045-1 und Eurocode 2 für das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Beton unter einachsiger Druckbeanspruchung nachfolgende Beziehung verwendet. Die analytische Beschreibung einer wirklichkeitsnahen Spannungs-Dehnungs-Linie des Betons für nichtlineare Berechnungen basiert im Wesentlichen auf den Arbeiten von [18]. Dieser Ansatz wurde aus Kurzzeitversuchen abgeleitet und beschreibt das einachsige Verhalten des Betons unter einer Druckbeanspruchung. In Bild 88 ist die wirklichkeitsnahe Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Gl. (7.1) schematisch dargestellt.

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k-2) \cdot \eta} \quad (7.1)$$

Für die hier durchgeführte Verformungsberechnung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit wird die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons auf der Grundlage von Mittelwerten der Festigkeiten verwendet. Da die Verformungen integrale Größen sind, sind die mittleren Materialeigenschaften längs der Stabachse maßgebend.

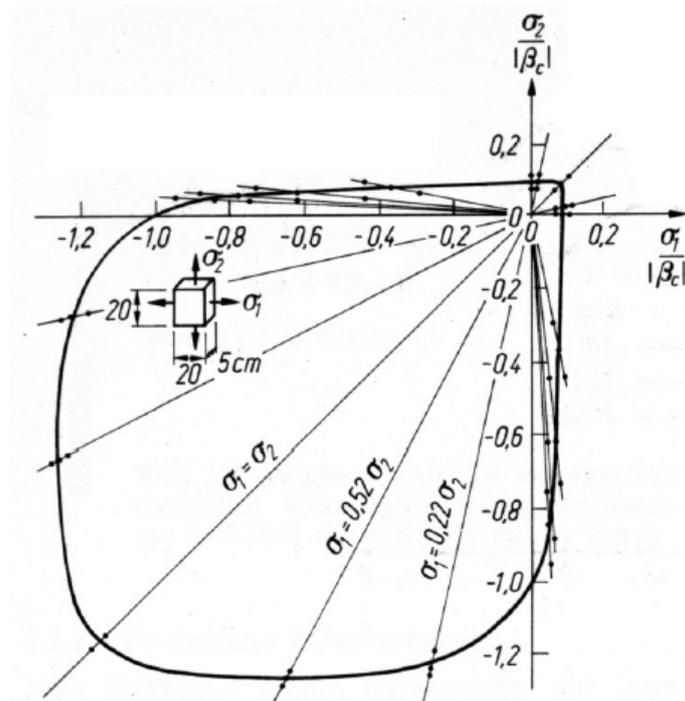
$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MN/m}^2$$



**Bild 88:** Spannungs-Dehnungs-Linie für Verformungsberechnungen nach DIN 1045-1 (links) und EC2 (rechts)

## 7.4.2 Zweiachsige Druckbeanspruchung

Im Druckbereich ergibt sich für unbewehrten Beton aus dem Hauptspannungsverhältnis eine maximale Betondruckfestigkeit  $\beta_{ic}$  ( $= f_c$ ) aus der Hüllkurve nach Kupfer.



**Bild 89:** Zweiachsige Versagenskurve nach Kupfer, Hilsdorf und Rüschi (aus [55])

Mit diesem Maximalwert  $\beta_{ic}$  ( $= f_c$ ) kann für jede der zwei Hauptspannungsrichtungen eine einachsige Spannungs-Dehnungslinie angesetzt werden.

## 7.4.3 Berücksichtigung des Kriechens des Betons

Aus den zeitabhängigen Verzerrungen  $\varepsilon_c(t)$  infolge Kriechens des Betons resultieren zeitabhängige zusätzliche Verformungen der Bauteile und Tragwerke. Das Kriechen kann in guter Näherung dadurch berücksichtigt werden, dass alle Dehnungswerte des Betons im Spannungs-Dehnungs-Diagramm für die Verformungsberechnung (Bild 82) mit dem Faktor  $(1+\varphi)$  multipliziert werden. Die Berechnung der effektiven Biegesteifigkeit muss für den untersuchten Zeitpunkt  $t$  mit dem effektiven E-Modul  $E_{c,eff}(t)$  nach Gl. (7.2) [21] durchgeführt werden.

$$E_{c,eff}(t) = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi_{(t,t_0)}} \quad (7.2)$$

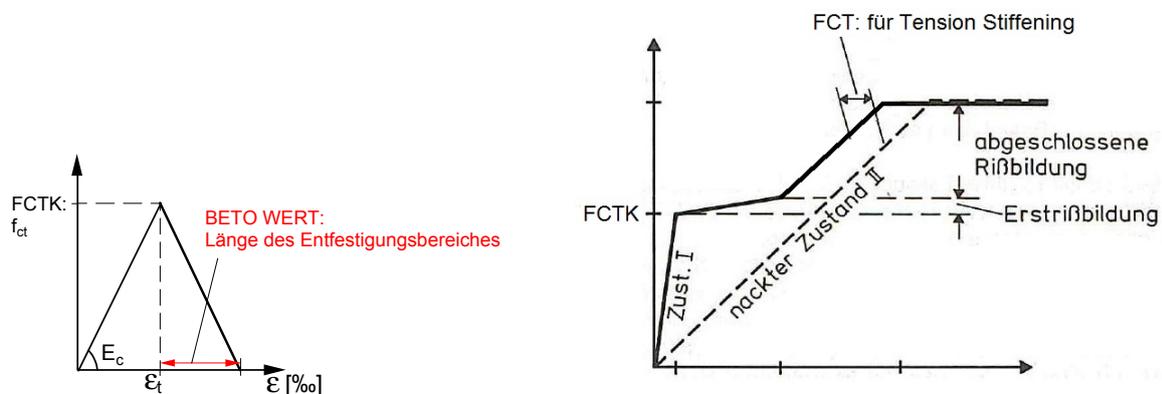
## 7.5 Modellierung des Stahlbetons im Zugbereich

### 7.5.1 Parameter für die Modellierung

Zur Modellierung des Werkstoffverhaltens für die wirklichkeitsnahe Berechnung der Durchbiegungen von Stahlbetonplatten ist im FE Programmsystem SOFiSTiK die Eingabe von drei Parametern notwendig. Diese sind:

FCTK	Zugfestigkeit des Betons $f_{ct}$
FCT	Wert der Betonzugfestigkeit für das Tension Stiffening
BETO WERT	Länge des Entfestigungsbereiches auf der Betonzugseite nach überschreiten der Betonzugfestigkeit (Tension Softening) [‰]

Die Parameter sind zur Erläuterung in Bild 90 dargestellt.

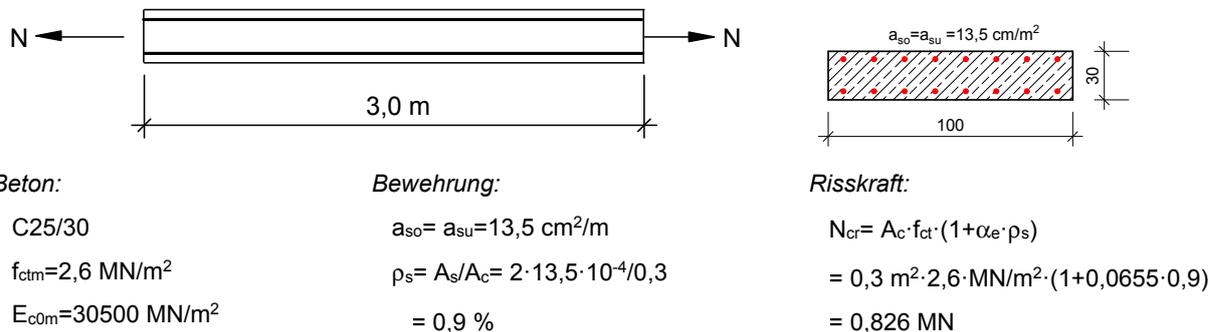


**Bild 90:** Modellierung des Betons im Zugbereich (links), Tension Stiffening (rechts)

Überschreitet die Zugdehnung die Zugbruchdehnung des Betons, wird das Element als gerissen betrachtet. Die Berücksichtigung der versteifenden Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (Tension Stiffening) erfolgt programmintern durch eine modifizierte Stahlkennlinie oder durch eine modifizierte Betonkennlinie. Dies erfolgt wahlweise nach Heft 400 und Heft 525 DAfStb. Für das Verformungsverhalten unter Gebrauchslasten stellen die Rissbildung im Beton sowie die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen wesentliche Einflüsse dar.

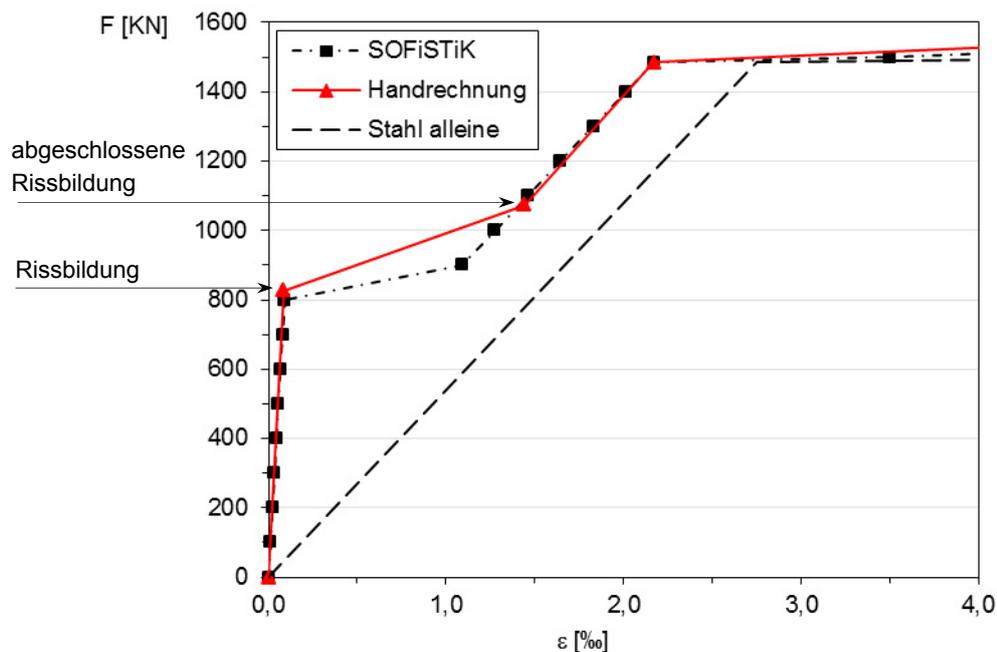
Um festzustellen, wie sich die o. g. Parameter auf die Kraft-Dehnungs-Linie bzw. Momenten-Krümmungs-Beziehung auswirken, werden diese nachfolgend an einem Zugstab (Kap.7.5.1) bzw. Biegebalken (Kap.7.5.2) untersucht.

## 7.5.2 Anwendung auf dem Zugstab



**Bild 91:** Zugstab

Der in Bild 91 dargestellte Zugstab wird mit dem Programmsystem SOFiSTiK modelliert und physikalisch nichtlinear berechnet. Es werden QUAD-Elemente verwendet. Die Berechnungsergebnisse werden einer Handrechnung nach Heft 525 gegenübergestellt (Bild 92). Die Belastung wird in Form einer Zugkraft aufgebracht und schrittweise gesteigert.



**Bild 92:** Vergleich der Kraft-Dehnungs-Linie nach SOFiSTiK und Handrechnung

Aus Bild 92 geht eine sehr gute Übereinstimmung für den Zustand vor der Erstrissbildung sowie den Zustand nach der abgeschlossenen Rissbildung hervor. Lediglich zwischen Erst- und abgeschlossener Rissbildung sind kleine Abweichungen vorhanden.

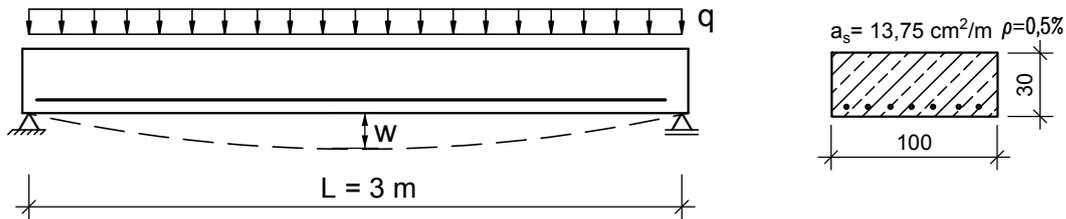
Bei der Simulation des Zugstabverhaltens wurden im Programmsystem SOFiSTiK die folgenden Parameter verwendet:

$$F_{CTK} = 0,9 \cdot 2,6 \text{ MN/m}^2$$

$$F_{CT} = 2,6 \text{ MN/m}^2$$

$$\text{BETO WERT} = 0,18 \text{ ‰ (Standardwert)}$$

### 7.5.3 Anwendung auf dem Biegebalken



**Beton:**

C25/30

$f_{ctm} = 2,6 \text{ MN/m}^2$

$E_{c0m} = 30500 \text{ MN/m}^2$

**Bewehrung:**

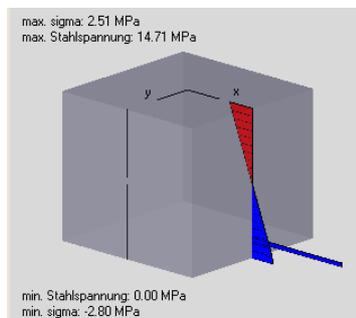
$a_{su} = 13,75 \text{ cm}^2/\text{m}$

$\rho_s = 0,5 \%$

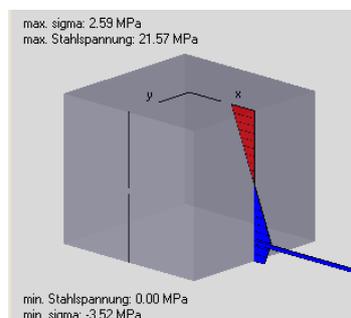
**Bild 93:** Biegebalken

Entsprechend dem Zugstab wird der in Bild 93 dargestellte Biegebalken ebenfalls mit QUAD-Elementen modelliert und physikalisch nichtlinear berechnet.

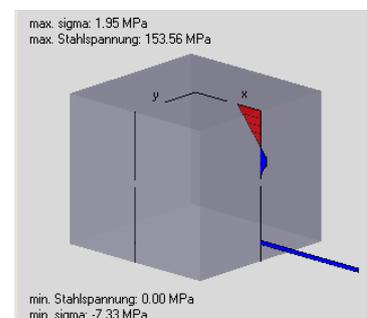
In Bild 94 werden die berechneten Spannungen verteilt über ein Element für drei Zustände wiedergegeben. Nach Überschreitung der Betonzugfestigkeit wird bei weiterer Laststeigerung der lineare Verlauf gestört. Der Übergangszustand b) ist von der Länge des Entfestigungsbereiches der Spannungs-Dehnungs-Linie des Betons auf der Zugseite abhängig. Fällt nach Überschreitung der Betonzugfestigkeit die Zugdehnung sprunghaft auf Null ab, entfällt dieser Zustand.



a) unmittelbar vor Überschreitung der Betonzugfestigkeit

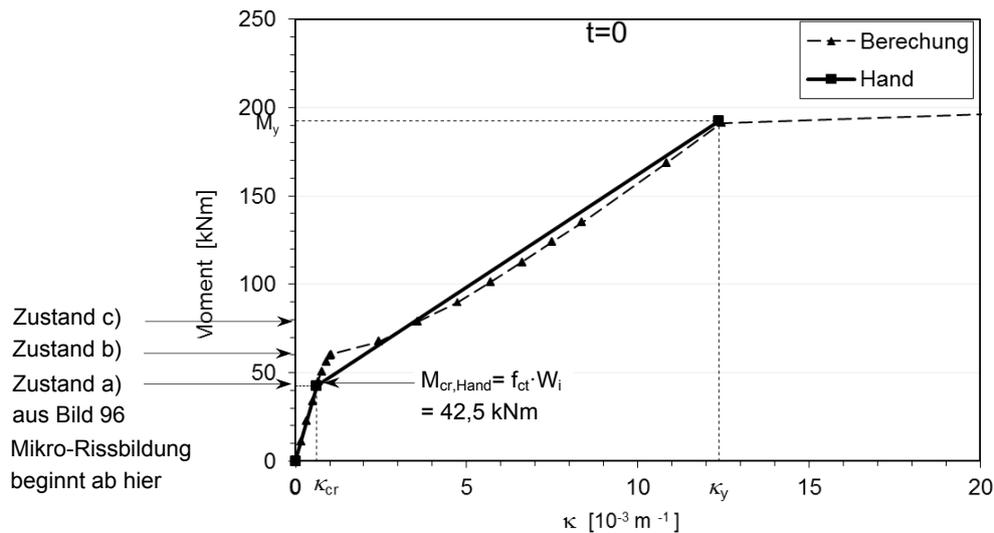


b) unmittelbar vor dem Einzelriss (wirkliche Spannungsverteilung)



c) Einzelriss

**Bild 94:** Spannungsverteilung in Plattenmitte (FCT = 2,6 MN/m<sup>2</sup>; FCTK = 2,6MN/m<sup>2</sup>; BETO WERT = 0,18 ‰)



**Bild 95:** Vergleich der M- $\kappa$ -Beziehung SOFiSTiK (FCT 2,6 FCTK 2,6) und Handrechnung ( $f_{ctm} = 2,6 \text{ MN/m}^2$ )

Bild 95 zeigt den Vergleich für die Moment-Krümmungs-Beziehung, die sich nach SOFiSTiK bzw. Handrechnung ergibt.

Dabei sind:

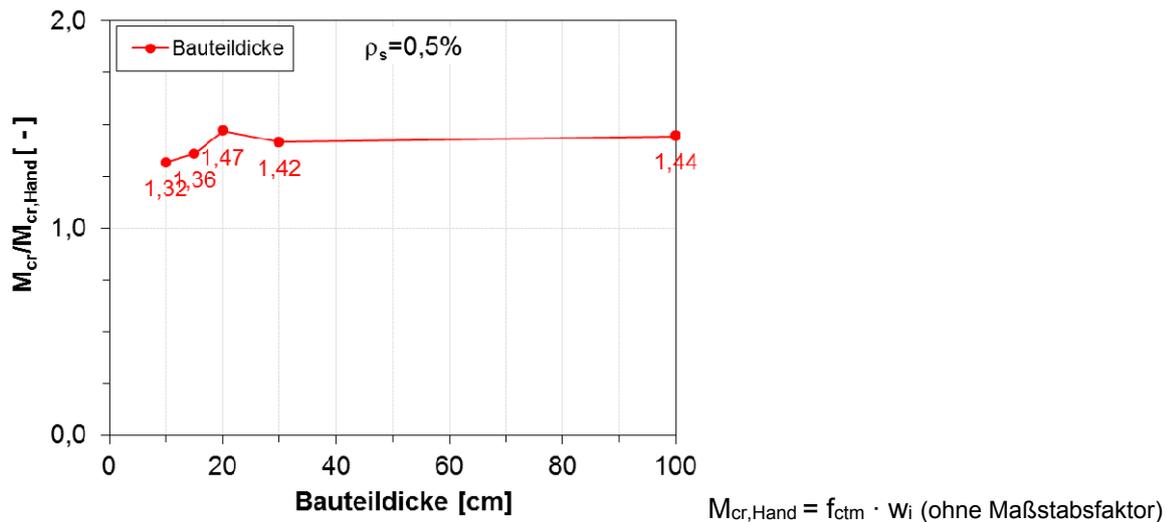
$f_{ctm} = 2,6 \text{ MN/m}^2$	zentrische Zugfestigkeit des Betons
$W_i = 16,34 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$	ideelles Widerstandsmoment = $I_i / (h/2 - z_s)$
$M_{cr,Hand} = f_{ctm} \cdot W_i = 42,5 \text{ kNm}$	Rissmoment

Die M- $\kappa$ -Beziehung aus der Handrechnung ist durch die Punkte Rissbildung (cr) und Fließen der Bewehrung (y) charakterisiert. Wie aus Bild 95 zu erkennen ist, ist das mit  $f_{ctm}$  berechnete Rissmoment aus der Handrechnung  $M_{cr,Hand}$  deutlich kleiner als das Rissmoment  $M_{cr}$  aus SOFiSTiK ( $M_{cr} > M_{cr,Hand}$ ). Der Grund liegt im Maßstabseffekt.

$$M_{cr} = f_{ctm} \cdot \eta \cdot W_i = f_{ct,fl} \cdot W_i \quad \text{Rissmoment unter Berücksichtigung des Maßstabseffektes}$$

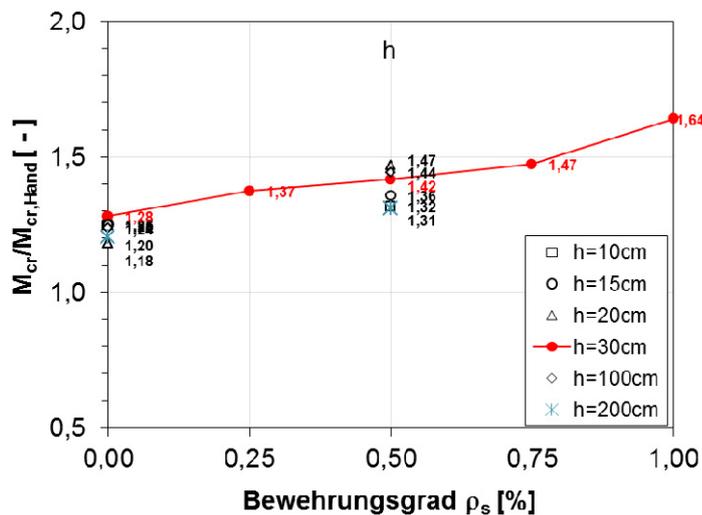
Dabei ist  $\eta$  Maßstabsfaktor

Zur Untersuchung der Größe des im Programm eingebauten Maßstabseffektes werden an dem in Bild 93 dargestellten System einige Parameter variiert. Dabei wird die Standardeinstellung für den BETO WERT nicht verändert. Für FCTK und für FCT wird  $f_{ctm}$  eingesetzt. Zunächst werden die Auswirkungen einer Variation der Bauteildicke  $h$  sowie des Bewehrungsgrads  $\rho_s$  untersucht (Bild 96, Bild 97). Ob eine maßgebliche Netzabhängigkeit vorliegt, wird durch die Berechnung des o.g. Systems mit verschiedenen Elementbreiten untersucht (Bild 98).



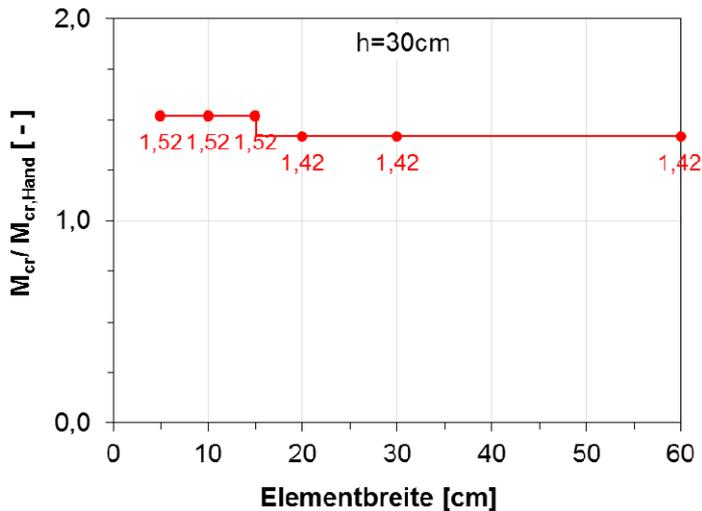
**Bild 96:** Maßstabsfaktor in Abhängigkeit von der Bauteildicke (FCT 2,6 FCTK 2,6, BETO WERT: Standard)

Physikalisch nimmt der Maßstabsfaktor mit abnehmender Bauteildicke  $h$  zu. Für den Maßstabsfaktor gibt es unterschiedliche Ansätze (z.B. EC2, MC90, Duda). Für eine Bauteilhöhe  $h=30\text{cm}$  ergibt sich der Maßstabsfaktor nach EC2 zu 1,3, nach MC90 zu 1,31 und nach Duda zu 1,33. Bei Plattendicken im üblichen Hochbau von etwa 15cm bis 35cm liefert SOFiSTiK einen nahe zu konstanten Wert von 1,42 bei einem Bewehrungsgrad  $\rho_s=0,5\%$ . Bedenkt man die große Streuung der Betonzugfestigkeit, erscheint der in SOFiSTiK für die Standardeinstellung fest verdrahtete Maßstabsfaktor im Mittel ausreichend genau.



**Bild 97:** Faktor in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad  $\rho_s$  (FCT 2,6 FCTK 2,6, BETO WERT: Standard)

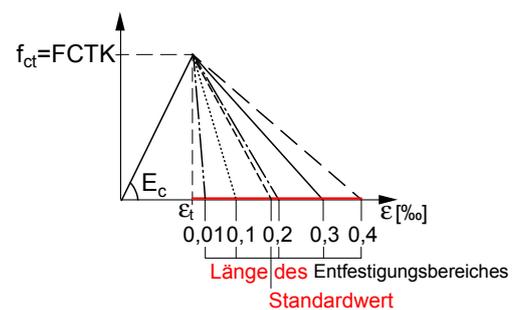
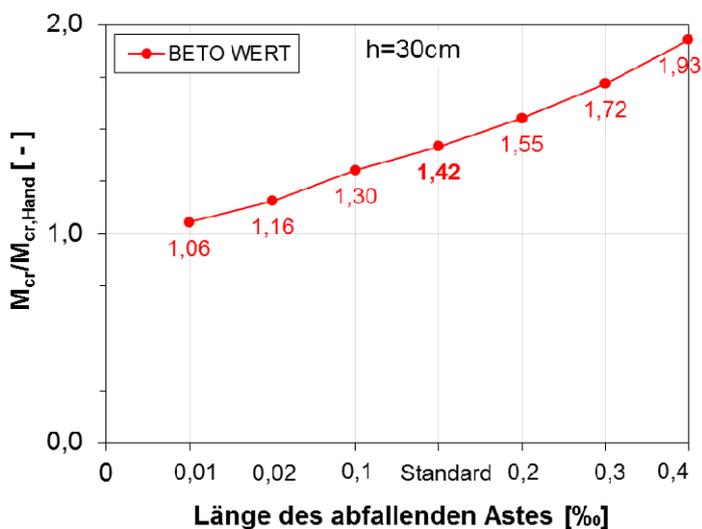
Wie aus Bild 97 zu erkennen ist, nimmt der Maßstabsfaktor nach SOFiSTiK mit steigendem Bewehrungsgrad  $\rho_s$  geringfügig zu. Bei Platten im üblichen Hochbau liegt der Bewehrungsgrad  $\rho_s$  zwischen 0,25% und 0,5%. Hierfür ergeben sich nach der Standardeinstellung Werte von etwa 1,35 – 1,45.



**Bild 98:** Netzabhängigkeit des Maßstabsfaktors (FCT 2,6 FCTK 2,6, BETO WERT: Standard,  $\rho_s=0,5\%$ )

Für die Untersuchung der Netzabhängigkeit des Maßstabsfaktors wurden mehrere Berechnungen mit unterschiedlicher Elementbreite durchgeführt. Bei Elementbreiten kleiner als 15cm erhöht sich der Maßstabsfaktor sprunghaft auf etwa  $1,52/1,42=107\%$ .

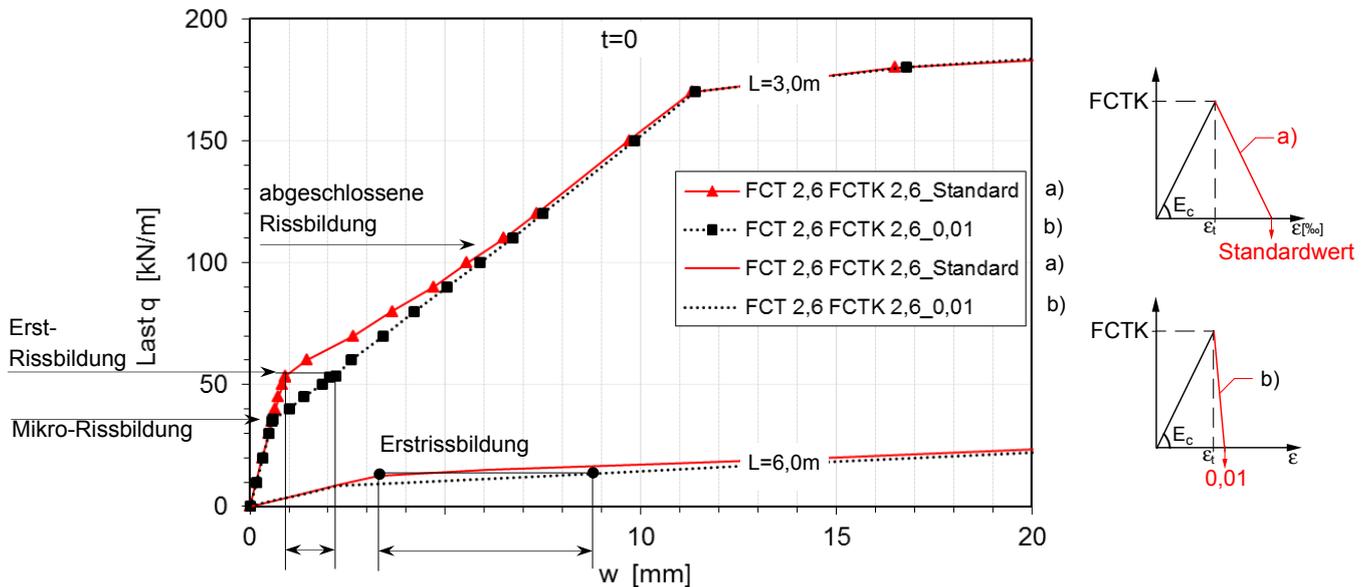
Standardmäßig ist in SOFiSTiK ein Entfestigungsbereich eingestellt, welcher mit dem BETO WERT verändert werden kann. Sofern die Standardeinstellung (BETO WERT = 0,18‰) beibehalten wird, ergibt sich aus der Berechnung (SOFiSTiK) für eine Platte mit  $h=30\text{cm}$  und  $\rho_s=0,5\%$  ein Maßstabsfaktor von etwa 1,4.



**Bild 99:** Faktor unter Variation der Länge des Entfestigungsbereiches [‰] (FCT 2,6 FCTK 2,6,  $\rho_s=0,5\%$ )

Bild 99 zeigt die Abhängigkeit des Maßstabsfaktors von der Länge des Entfestigungsbereiches auf der Betonzugseite. Falls nach Überschreiten von  $f_{ct}$  (FCTK) die Betonzugdehnung auf 0,01 [‰] sprunghaft abfällt, wird ein Wert von etwa 1,0 erreicht. Wenn der Ast der Zugspannung-Dehnungslinie im Entfestigungsbereich flacher verläuft, steigt der Faktor stark an. Die Größe des Entfestigungsbereiches steuert die Größe der Zugtragfähigkeit des Betons unmittelbar vor der Erstrissbildung.

Um die Sensitivität des BETO Wertes auf die Durchbiegungen in Abhängigkeit der Spannweiten zu untersuchen, wurde zusätzlich zum in Bild 93 dargestellten Biegebalken ein weiterer Einfeldträger mit einer Spannweite von 6,0 m untersucht.

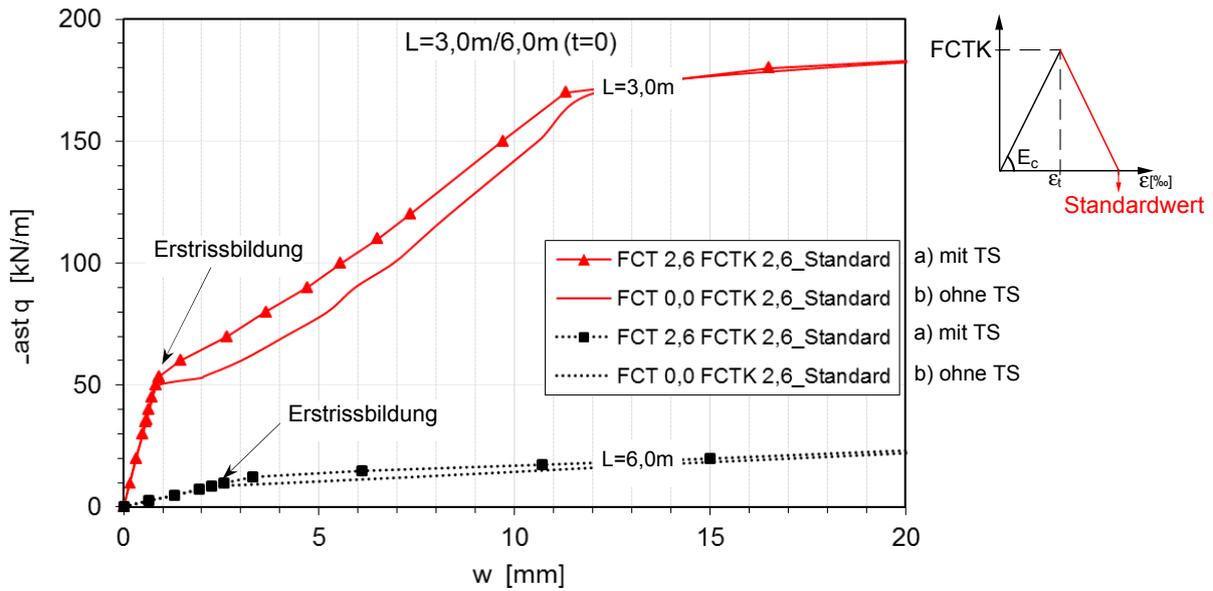


**Bild 100:** Einfluss der Länge des Entfestigungsbereiches (BETO WERT) auf die Durchbiegungen

In Bild 100 ist der Einfluss der Länge des Entfestigungsbereiches auf die Durchbiegungen bei einer Spannweite von  $L=3,0\text{m}$  und  $L=6,0\text{m}$  dargestellt. Der BETO-WERT wird dabei zwischen 0,01 und Standardeinstellung variiert. Im Zustand zwischen Erst- und abgeschlossener Rissbildung sind deutlich Durchbiegungsunterschiede zu erkennen. Der Einfluss des BETO-Wertes auf die Durchbiegungen ist bei der größeren Spannweiten von  $L=6,0\text{m}$  im Bereich der Rissbildung deutlich zu erkennen. Bei einer ungerissenen Platte bzw. einer Platte mit ausgeprägter Rissbildung spielt die Größe des BETO-Wertes allerdings keine Rolle.

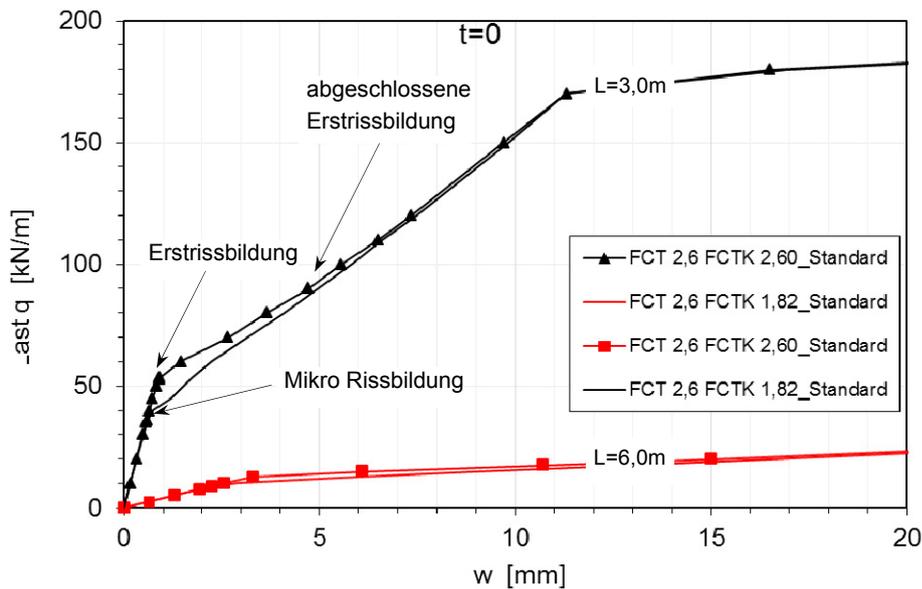
Bei der Eingabe von FCTK 0,01 wird darüber hinaus das Rissmoment ohne Einfluss des Maßstabeffekts erreicht. Der Grund dafür ist der fehlende Entfestigungsbereich auf der Betonzugseite. Dadurch geht das Bauteil rechnerisch vom ungerissenen Zustand ohne Mikrorissbildung unmittelbar in den Zustand mit dem Erstriss über. Bei der Eingabe von FCTK = 2,6  $\text{MN/m}^2$  und einem BETO WERT = 0,01 ist der Maßstabeffekt rechnerisch nicht wirksam.

Einen weiteren Einfluss auf die Durchbiegungen hat die Eingabe des Parameters (FCT), mit dem der „Tension Stiffening“ Effekt berücksichtigt wird (Bild 101). Wird dieser Wert zu null gesetzt (FCT = 0,0), ergeben sich ab der Erstrissbildung durchgehend größere Durchbiegungen.



**Bild 101:** Einfluss von Tension Stiffening (FCT) auf die Durchbiegungen

Bild 102 zeigt den Einfluss des Parameters (FCTK) auf die Durchbiegungen bei einer Spannweite von  $L=3,0m$  und  $L=6,0m$ . Wird dieser Wert auf  $0,7 \cdot f_{ctm}$  gesetzt ( $FCTK 1,82=0,7 \cdot 2,6$ ), wird das mit  $f_{ctm}$  Rissmoment ermittelte  $M_{cr,Hand}$  erreicht. Rechnet man den einprogrammierten Maßstabsfaktor heraus, ergibt sich der FCTK-Wert zu  $f_{ctm} \cdot (1/1,42) = 0,7 \cdot f_{ctm} = 1,82$ .



**Bild 102:** Einfluss von FCTK auf die Durchbiegungen

### 7.5.4 Zusammenfassung und Folgerungen

In Bild 103 sind die Einflüsse der untersuchten Parameter auf die Momenten-Krümmungsbeziehung in schematischer Form zusammenfassend dargestellt.

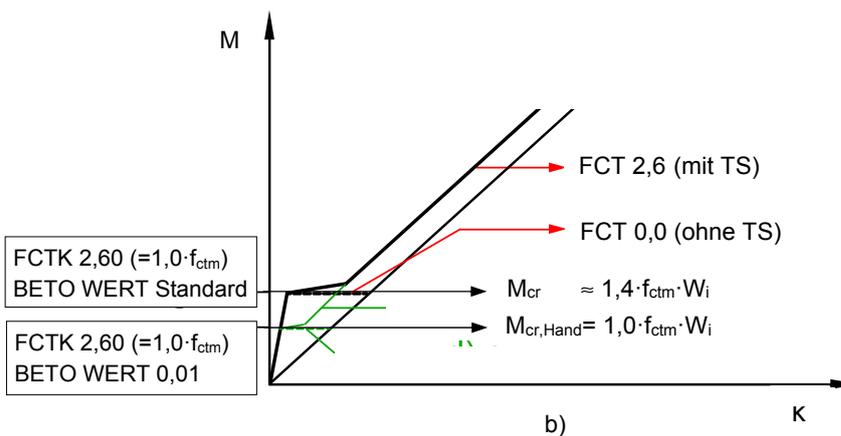
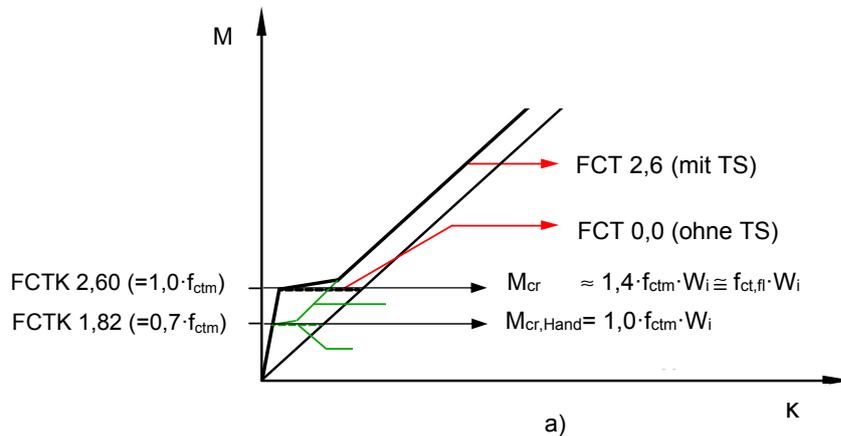
Bedenkt man die große Streubreite der Betonzugfestigkeit, erscheint der in SOFiSTiK für die Standardeinstellung (FCT, FCTK, BETO WERT (keine Eingabe)) einprogrammierte Maßstabsfaktor mit einem Wert von etwa 1,4 für Platten im üblichen Hochbau ausreichend genau. Im Folgenden wird daher von der Standardeinstellung Gebrauch gemacht.

Standardeinstellung:

$$FCT \hat{=} f_{ctm}$$

$$FCTK \hat{=} f_{ctm} \cdot \text{Vorfaktor für Dauerstandfestigkeit} = f_{ctm} \cdot 0,75$$

BETO WERT (Standardeinstellung SOFiSTiK)



**Bild 103:** Schema a) Änderung der Eingabe FCTK b) Änderung der Eingabe BETO WERT

Der Maßstabsfaktor wird durch die Standardeinstellung in SOFiSTiK mit dem Faktor 1,35 - 1,45 berücksichtigt.

- Für die Modellierung von Platten im üblichen Hochbau ergibt sich für die Berechnung der Durchbiegungen zum Zeitpunkt  $t=\infty$  der Ansatz der effektiven Betonzugfestigkeit  $f_{ct,eff} = 1,0 \cdot f_{ctm} = 2,6 \text{ MN/m}^2$  (C25/30) wie folgt:

$t=\infty$

Wert der Betonzugfestigkeit für das Tension Stiffening

$$FCT = 1,0 \cdot f_{ctm}$$

$$FCT = 2,6$$

SOFiSTiK / Ansatz  $f_{ct,eff}$

$$FCTK = 0,75 \cdot f_{ct,fl} = 0,75 \cdot \eta \cdot f_{ctm}; \eta = 1,3 - 1,4 \text{ (Programmintern berücksichtigt)}$$

$$= 0,75 \cdot f_{ctm}$$

$$FCTK = 1,95$$

- Für die Nachrechnung der Versuche zur Validierung des Rechenmodells:

$t=0$  (ohne Vorbelastung)

Wert der Betonzugfestigkeit für das Tension Stiffening

$$FCT = f_{ctm}$$

$$FCT = 2,6$$

SOFiSTiK / Ansatz  $f_{ct,eff}$

$$FCTK = 0,90 \cdot f_{ct,fl} = 0,9 \cdot \eta \cdot f_{ctm}; \eta = 1,3 - 1,4 \text{ (Programmintern berücksichtigt)}$$

$$= 0,9 \cdot f_{ctm}$$

$$FCTK = 2,24 (= 2,6 \cdot 0,86)$$

$t=0$  (mit Vorbelastung)

Wert der Betonzugfestigkeit für das Tension Stiffening

$$FCT = f_{ctm}$$

$$FCT = 2,6$$

SOFiSTiK / Ansatz  $f_{ct,eff}$

$$FCTK = 0,82 \cdot f_{ct,fl} = 0,82 \cdot \eta \cdot f_{ctm}; \eta = 1,3 - 1,4 \text{ (Programmintern berücksichtigt)}$$

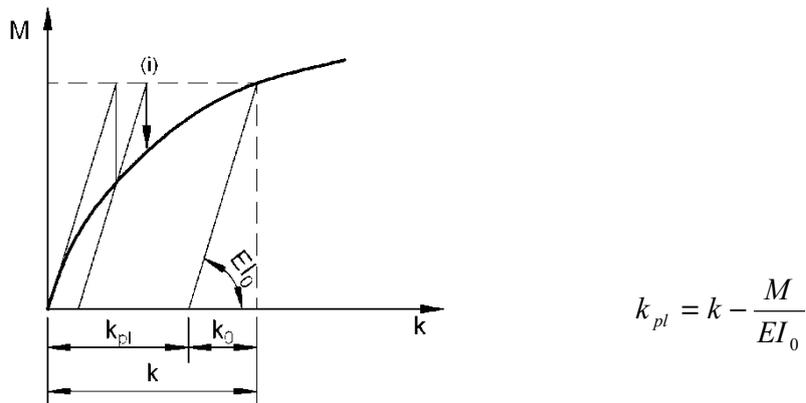
$$= 0,82 \cdot f_{ctm}$$

$$FCTK = 2,0 (= 2,6 \cdot 0,78)$$

## 7.6 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

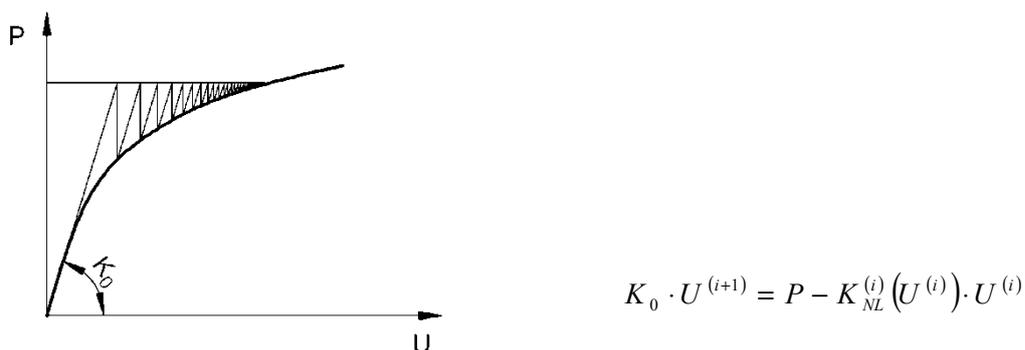
Nichtlineare Gleichungssysteme können nur iterativ gelöst werden. Dies erfolgt in ASE nach dem *modifizierten Newton-Raphson-Verfahren* mit konstanter Steifigkeit. Dies hat den Vorteil, dass die Steifigkeitsmatrix nicht bei jedem Iterationsschritt neu gebildet werden muss und die Systemmatrix immer positiv definit bleibt. Die Geschwindigkeit des Verfahrens wird durch einen Beschleunigungsalgorithmus nach Crisfield [17] erhöht. Dieses Verfahren merkt sich die Entwicklung der Restkräfte über die Iterationen und ermittelt sich daraus Faktoren für die Verschiebungskremente des aktuellen und des letzten Schrittes. Bei diesem Verfahren bleibt die Steifigkeit unverändert. Es werden jedoch plastische Zusatzkrümmungen  $k_{pl}$  erzeugt.

Die Steifigkeit auf Elementebene wird in einen konstanten Teil  $EI_0$  und einen veränderlichen Teil zerlegt, der sich aus den plastischen Krümmungen ergibt.



**Bild 104:** modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren mit konstanter Anfangssteifigkeit (Steifigkeit auf Elementebene)

Aus dem konstanten Teil wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $K_0$  aufgebaut. Die Nichtlinearitäten werden über die rechte Seite in jedem Iterationsschritt mit  $K_{NL}^{(i)}$  angepasst



**Bild 105:** Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren (mit konstanter Anfangssteifigkeit)

Bei den nachfolgend durchgeführten Berechnungen wurde hauptsächlich das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren verwendet.

## 8 Validierung durch Versuchsnachrechnung

### 8.1 Einachsig gespannte Plattenstreifen, Jaccoud/Favre

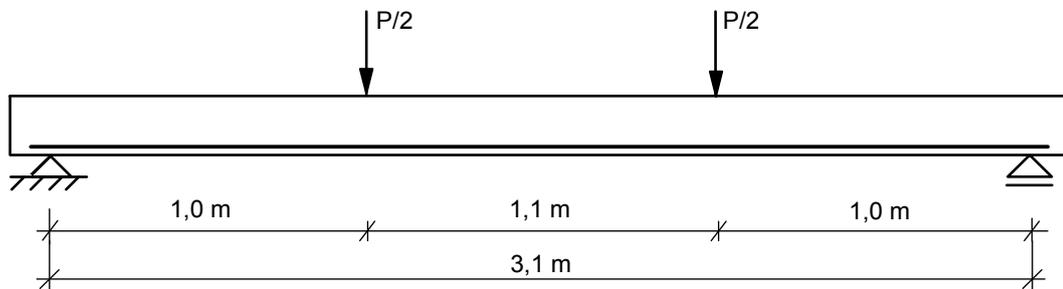
#### 8.1.1 System und Belastung

Die von Jaccoud/Favre [49] zwischen 1979 und 1981 durchgeführten Versuche an einachsig und zweiachsig gespannten Platten wurden sowohl unter Kurzzeit- als auch unter Langzeitbelastung durchgeführt. Die Versuchsserie C bestand aus einem Rechteckquerschnitt ( $b=75\text{cm}$ ,  $h=16\text{cm}$ ) und einer Spannweite von  $L=3,10\text{m}$ . In Bild 106 sind das statische System und der Querschnitt der Platte dargestellt.

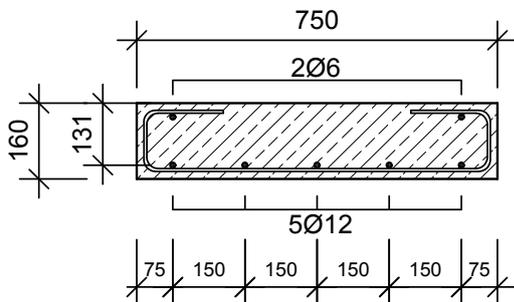
Die Balken wurden nach dem Betonieren zunächst sieben Tage unter einer wasserundurchlässigen Folie vor Austrocknung geschützt und anschließend bis zum 28. Tag unter konstanten Feuchtigkeits- und Temperaturumgebungsbedingungen von 60% relative Luftfeuchte (RH) und  $20^\circ\text{C}$  gelagert.

Versuchsserie C:

$$b/h/d = 75/16/13,1$$



Querschnitt:

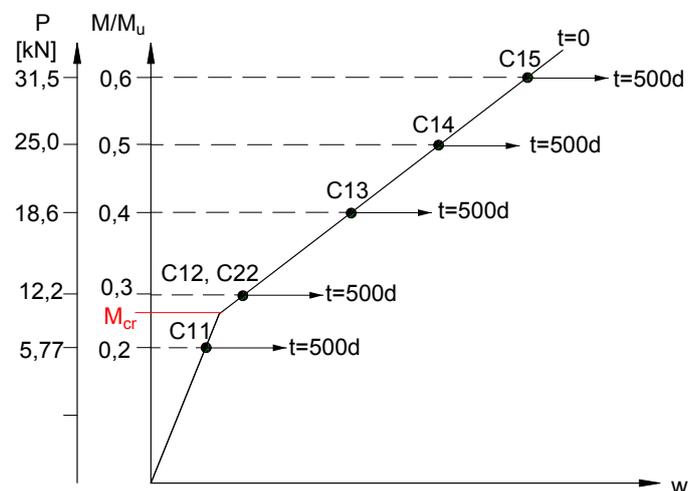


Bewehrungsgrade:

$$\rho_s = 0,58\%$$

Belastung:

$$g_k = 3,92 \text{ kN/m}^2$$



**Bild 106:** Statisches System, Querschnitt und Belastung mit zugehöriger Durchbiegung, Versuchsserie C Jaccoud/Favre (aus [49])

Die Versuchskörper wurden im Alter von 28 Tagen einem Vier-Punkt-Biegeversuch unterworfen, wobei die zwei vertikalen Lasten  $P/2$  im Abstand von  $1,10\text{m}$  aufgebracht und über einen Versuchszeitraum von 500 Tagen (d) konstant gehalten wurden. Die Dauerversuche wurden unter verschiedenen Beanspruchungsniveaus ( $0,2$  bis  $0,6 M/M_u$ ) durchgeführt. Dabei wurden die Verformungen in Plattenmitte gemessen.

## 8.1.2 Materialkennwerte

### 8.1.2.1 Beton

Zur Bestimmung der Materialparameter wurden je Serie Würfel, Prismen und Zylindern hergestellt. Parallel zu den durchgeführten Versuchen wurden Druckfestigkeit, Zugfestigkeit, Elastizitätsmodul (Sekantenmodul) sowie Kriech- und Schwindbeiwerte in Abhängigkeit von der Zeit gemessen.

#### *Druckfestigkeit, Zugfestigkeit, Elastizitätsmodul*

In Tabelle 14 sind die Ergebnisse dieser Nebenversuche zusammengefasst. Anhand der mittleren Zylinderdruckfestigkeit  $f_{cm}$  lässt sich der verwendete Beton nach EN 206-1, 8.2.1.3 etwa in die Festigkeitsklasse C25/30 einordnen.

$$f_{ck} = f_{cm} - 4 \text{ MN/m}^2 = 28,82 \text{ MN/m}^2 - 4 = 24,82 \text{ MN/m}^2$$

Tabelle 14: Aus Nebenversuchen gemessene Betonkennwerte der Versuchsreihe C (aus [49])

		C11	C12	C22	C13	C14	C15
$f_{cm,cube}$	[MN/m <sup>2</sup> ]	35,30	34,47	35,48	34,56	34,47	33,25
$f_{cm,cyl}$	[MN/m <sup>2</sup> ]	28,82	29,40	32,89	30,93	29,40	29,29
$f_{ctm}$	[MN/m <sup>2</sup> ]	2,56	3,06	2,89	2,82	2,56	2,90
$E_{cm}$	[MN/m <sup>2</sup> ]	28970	28300	30700	29200	28300	28720

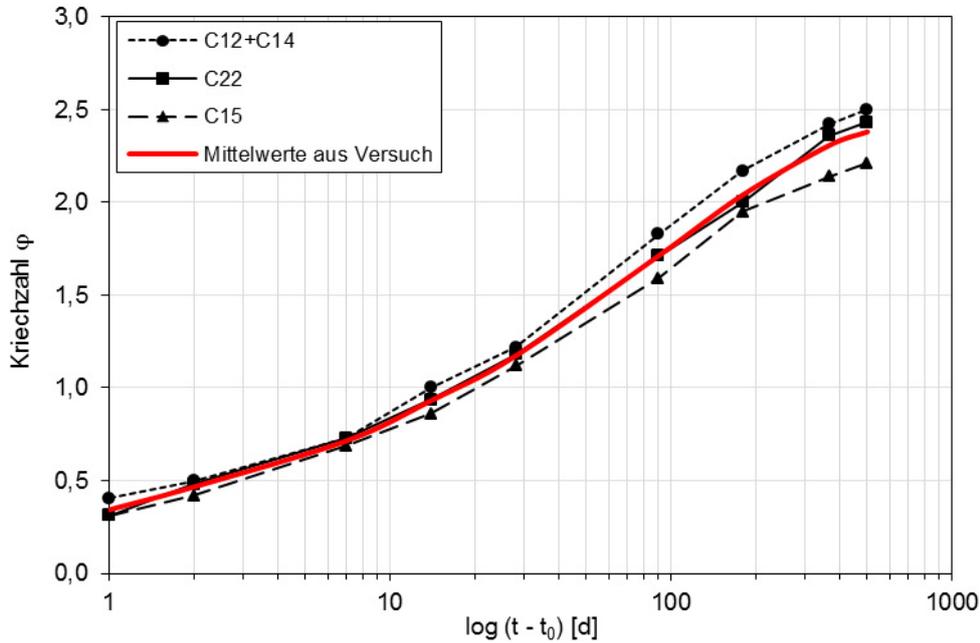
Die Nachrechnung der Versuche basiert auf der Grundlage der in Tabelle 14 angegebenen Festigkeiten. Für die Nachrechnung der Versuche wird die wirksame Zugfestigkeit  $f_{ct,eff}$  nach Gl. (3.18) wie folgt verwendet:

$$f_{ct,eff}(t=0) = 0,90 \cdot \eta \cdot f_{ctm} = 0,90 \cdot f_{ct,fl} \text{ (Kurzzeitversuch)}$$

$$f_{ct,eff}(t=\infty) = 0,75 \cdot \eta \cdot f_{ctm} = 0,75 \cdot f_{ct,fl} \text{ (Langzeitversuch)}$$

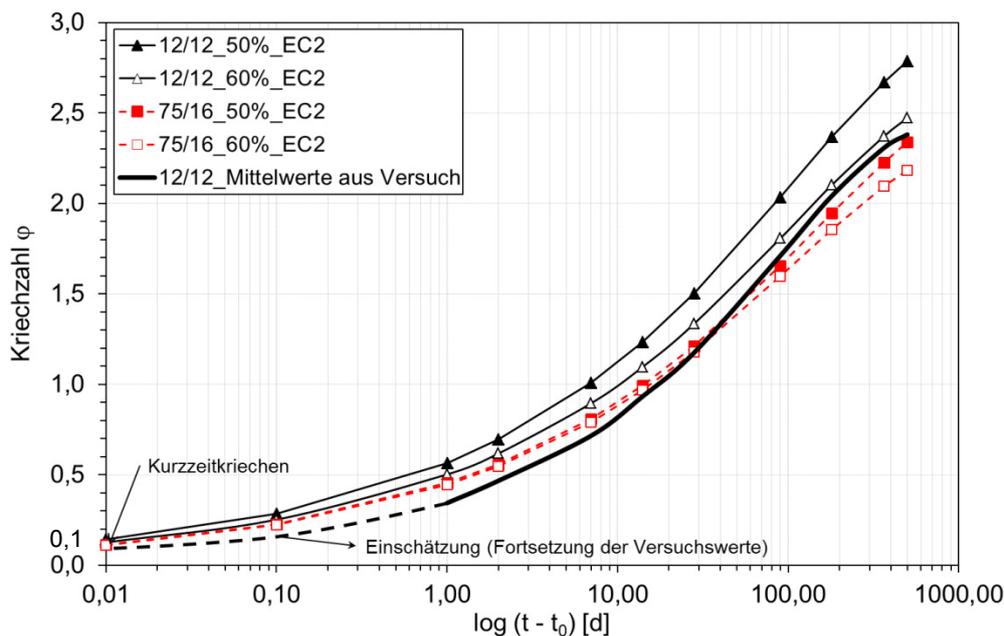
## Kriechen

In Bild 107 sind die gemessenen Kriechzahlen  $\varphi$  dargestellt. Die zugehörigen Mittelwerte sind als dicke, durchgezogene Linie angegeben. Die Werte für die Versuchskörper C11 und C13 fehlen. Bei der Versuchsnachrechnung wurden für alle Versuche die Mittelwerte verwendet.



**Bild 107:** Gemessene Kriechzahlen  $\varphi(t, t_0)$  der Versuchsserie C ( $t_0=28$  Tage) (120mm x 120mm x 360mm)

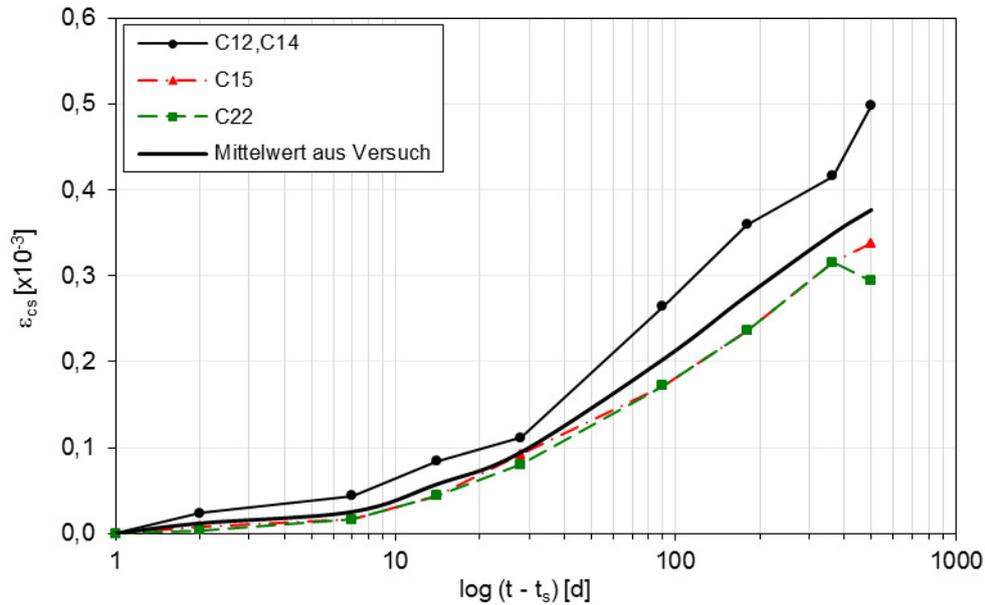
Bild 108 zeigt den Vergleich der Mittelwerte aus den Versuchen mit den entsprechenden Kriechzahlen nach EC2. Die Kurve der Mittelwerte aus den Versuchen verlaufen in den ersten 30 Tagen unterhalb der Kurven nach EC2.



**Bild 108:** Vergleich der Mittelwertkurve aus den Versuchen mit den Kriechzahlen nach EC2

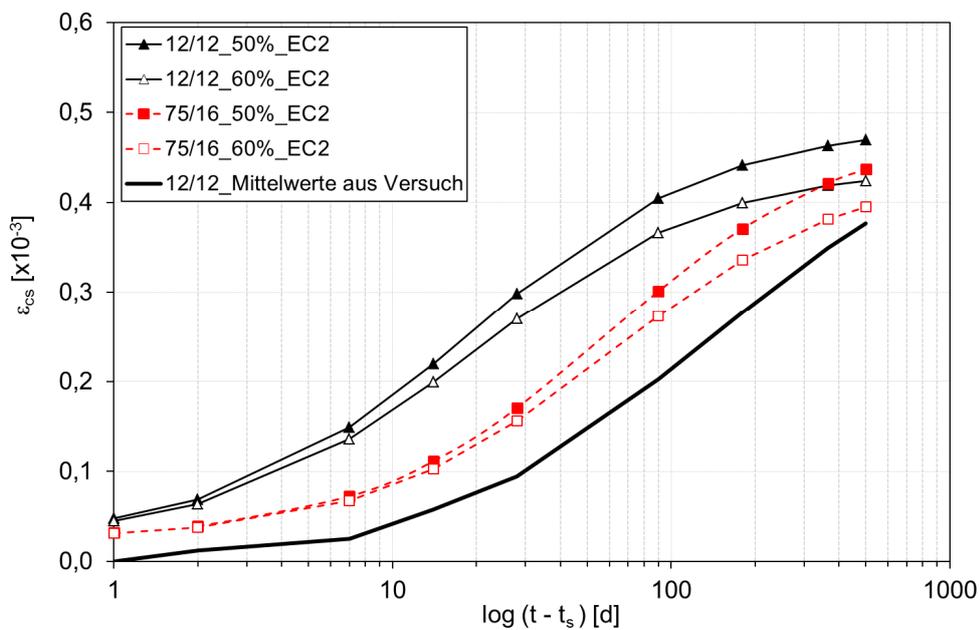
Bild 109 enthält eine Darstellung der gemessenen Schwinddehnungen. Die Mittelwerte sind als dicke, durchgezogene Kurve eingetragen.

### Schwinden



**Bild 109:** Gemessene Schwindbeiwerte  $\epsilon_{cs}$  der Versuchsserie C (120mm x 120mm x 360mm)

Bild 110 zeigt den Vergleich der Mittelwertkurve aus den Versuchen mit den Schwindbeiwerten  $\epsilon_{cs}$  nach EC2. Die Kurve der Mittelwerte aus den Versuchen liegt im dargestellten Zeitraum deutlich unterhalb der entsprechenden Kurven nach EC2.



**Bild 110:** Vergleich der Mittelwertkurve aus den Versuchen mit den Schwindbeiwerten  $\epsilon_{cs}$  nach EC2

### 8.1.2.2 Betonstahl

Für alle Versuchsreihen wurde ein naturharter Stahl der Gruppe IIIa gemäß der Schweizer Norm SIA 162 verwendet. Für die Serie C wurde die Fließgrenze (0,2% Dehngrenze) mit  $f_{0,2} = 460 \text{ MN/m}^2$  sowie die Bruchspannung mit  $f_u = 580 \text{ MN/m}^2$  bestimmt.

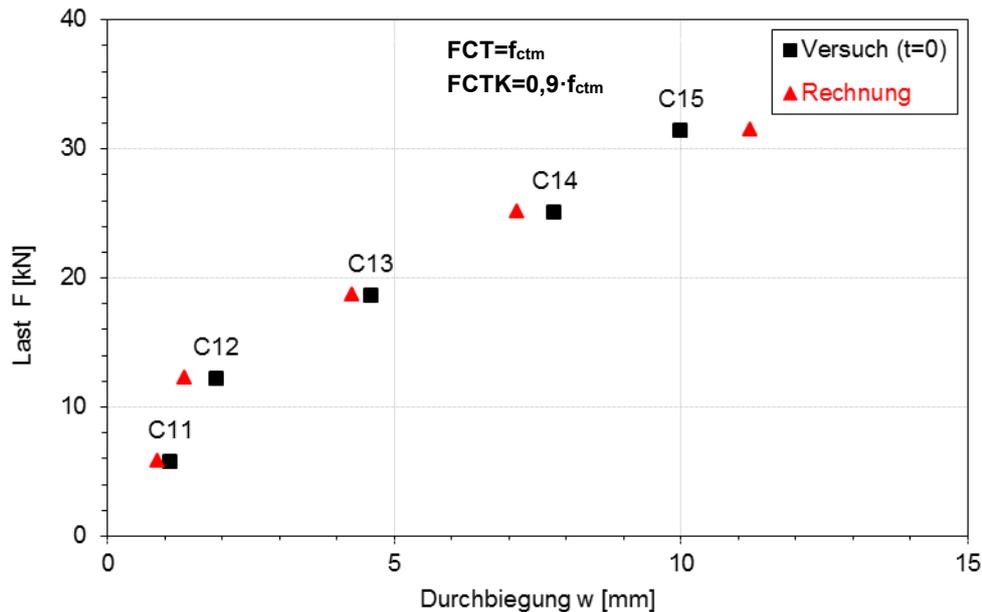
Bei den nichtlinearen Berechnungen wird der Elastizitätsmodul des Stahls einheitlich mit  $E_s = 200000 \text{ MN/m}^2$  angesetzt.

Die Plattenstreifen waren mit  $5\text{Ø}12$  ( $A_s = 5,65 \text{ cm}^2$ ;  $d = 13,1 \text{ cm}$ ) als Zugbewehrung und zwei Montagestäben  $2\text{Ø}6$  ( $A_s = 0,57 \text{ cm}^2$ ;  $d = 2,6 \text{ cm}$ ) in der Druckzone bewehrt. Zusätzlich wurde eine Querbewehrung  $8\text{Ø}20 \text{ cm}$  angeordnet. Die Querbewehrung war zur Einfassung der Ränder seitlich aufgebogen (Bild 106).

Im Rahmen der durchgeführten experimentiellen Untersuchungen zu den Durchbiegungen verhält sich der Stahl rein elastisch.

### 8.1.3 Nachrechnung der Kurzzeitversuche (t=0)

Bild 111 zeigt die gemessenen und berechneten Durchbiegungen in Plattenmitte unter Kurzzeitbelastung in Abhängigkeit von der Lasthöhe im Vergleich. Bei der Erstbelastung (Anfangsdurchbiegungen) ist der Versuchskörper C11 noch ungerissen. C12 befand sich im Bereich der Erstrissbildung, während die übrigen Versuchskörper (C13 - C15) ein abgeschlossenes Rissbild aufwiesen. Wie aus Bild 111 zu erkennen ist, stimmen die berechneten Durchbiegungen mit denen aus den Versuchen relativ gut überein. Die maximale Abweichung beträgt ca. 11% (C15).



**Bild 111:** Vergleich der gemessenen und berechneten Durchbiegungen unter sofortiger Belastung

Die Versuche wurden zusätzlich zur Berücksichtigung des Kurzzeitkriechens mit einer Kriechzahl  $\varphi=0,1$  (vgl. Bild 108) nachgerechnet. Die Auswirkungen sind in Bild 112 dargestellt. Eine wesentliche Veränderung ergab sich dabei für den Versuchskörper C15 mit ausgeprägter Rissbildung. Die berechnete Durchbiegung weicht hier noch deutlich mehr vom Versuchswert ab.

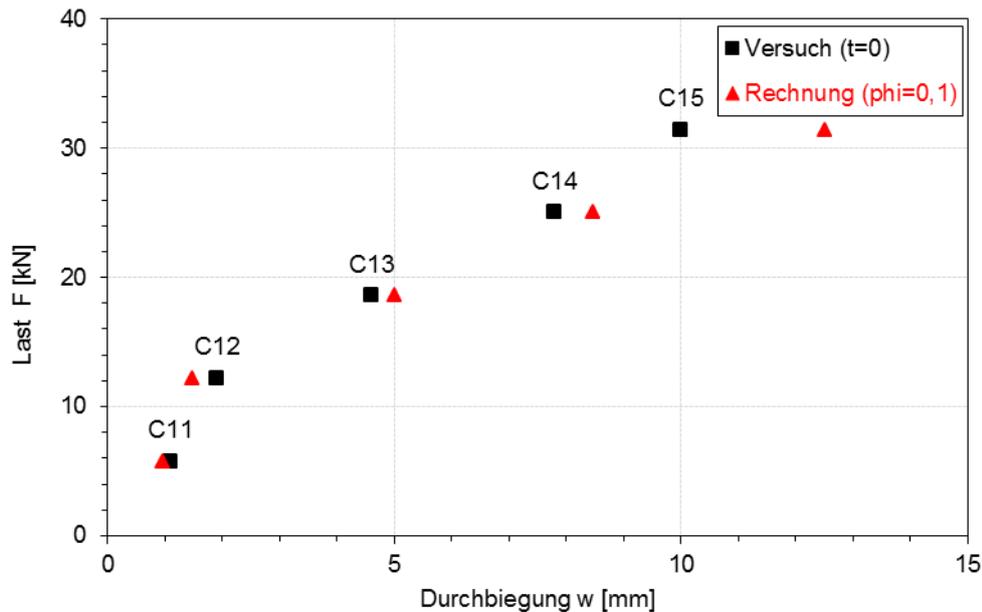
Zusammenfassend lässt sich folgern, dass der Ansatz im Zusammenhang mit den Parametern für das Rechenmodell im Programmsystem SOFiSTiK (Kap. 7)

$$F_{CTK} \hat{=} 0,9 \cdot f_{ctm} \text{ (Kurzzeitbetonfestigkeit)}$$

$$F_{CT} \hat{=} f_{ctm} \quad (\text{TS})$$

$$\varphi=0$$

eine relativ gute Übereinstimmung zwischen den Rechenwerten und den Versuchswerten für die Durchbiegung ergibt.



**Bild 112:** Vergleich der gemessenen und berechneten Durchbiegungen unter sofortiger Belastung mit Kurzzeitkriechen ( $\varphi=0,1$ )

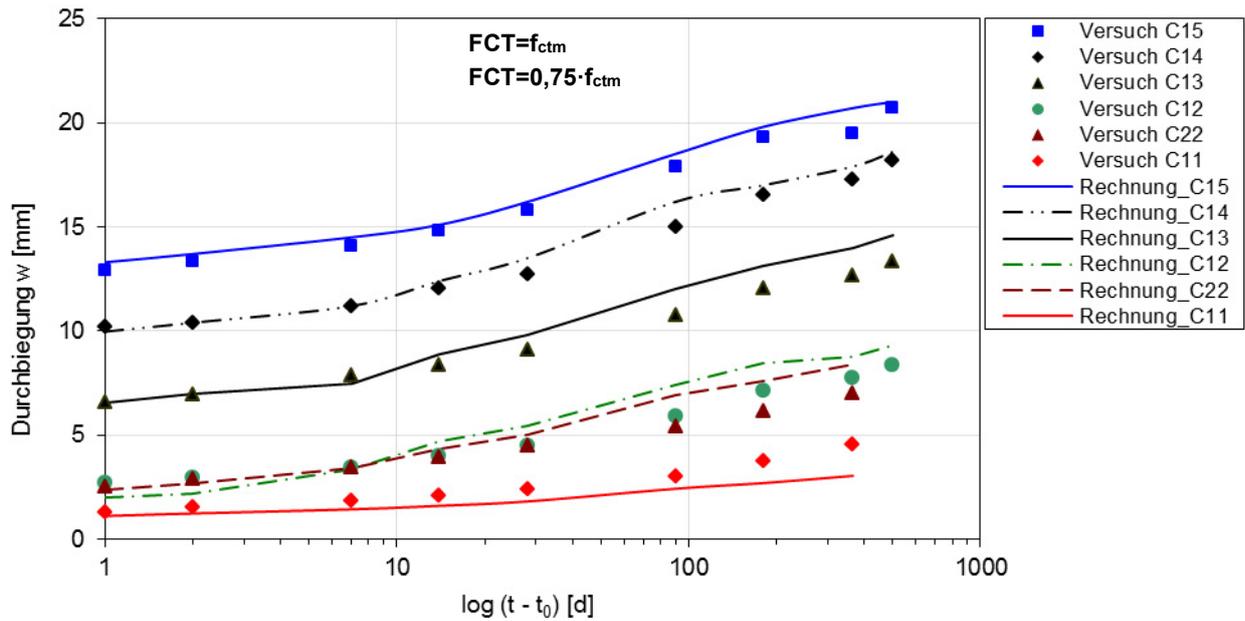
#### 8.1.4 Langzeitversuche

In Bild 113 - Bild 116 sind die Durchbiegungen in Plattenmitte, welche in den Langzeitversuchen gemessenen wurden, den berechneten Durchbiegungen gegenübergestellt. Die Einflüsse aus Kriechen und Schwinden des Betons treten stets gemeinsam auf. Daher müssen für die Berechnung der Durchbiegungen beide Einflüsse gleichzeitig berücksichtigt werden.

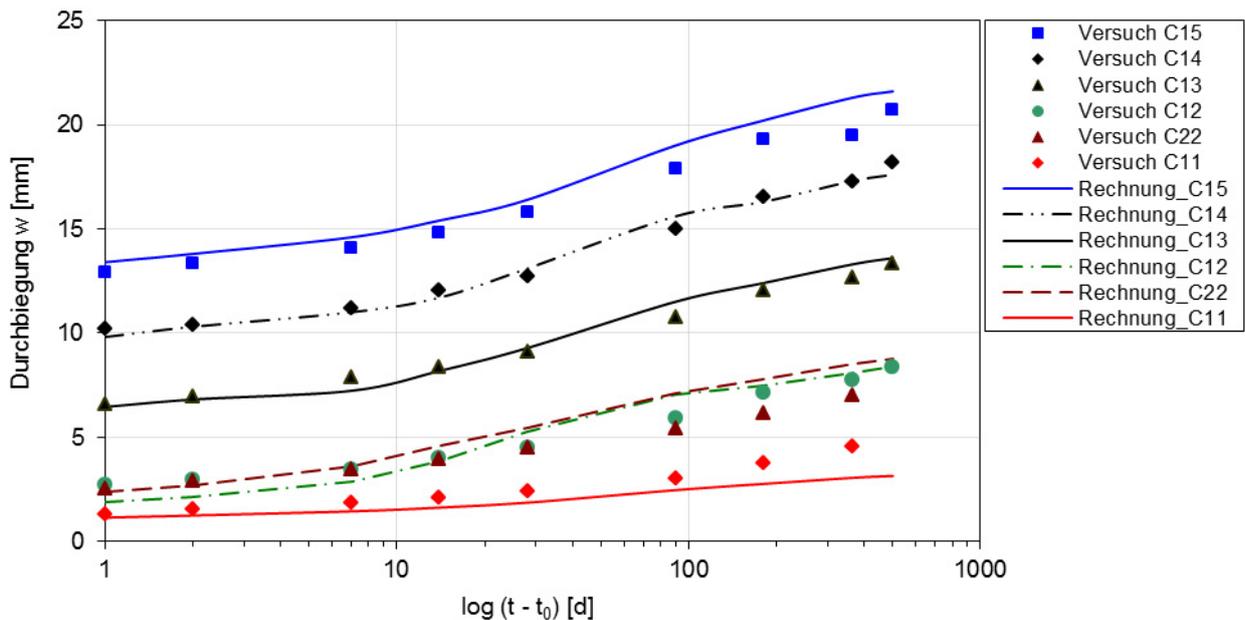
In Bild 113 wurden die zum jeweiligen Versuch an den Probekörpern gemessenen zugehörigen Werte für die Kriechzahl  $\varphi$  und die Schwinddehnung  $\epsilon_{cs}$  eingesetzt. In Bild 114 sind berechneten Ergebnissen aus den entsprechenden Mittelwerten der Probekörper dargestellt. In Bild 115 sind als Basis die Kriechzahlen und die Schwinddehnungen nach EC2 für den Versuchskörper mit dem Querschnitt 75/16cm ermittelt und bei den Versuchsnachrechnungen verwendet worden. Bild 116 zeigt den Vergleich der Versuchsergebnisse mit den berechneten Werten, die mit der Kriechzahl und den Schwinddehnungen nach EC2 für einen Querschnitt 12/12cm mit RH=56% ermittelt wurden.

Der Versuchskörper C11 verblieb über den gesamten Versuchszeitraum ungerissen. Bezüglich der Platten C13 bis C15 ist festzuhalten, dass sie bereits zu Versuchsbeginn eine ausgeprägte Rissbildung aufwiesen. Da es sich bei der vorhandenen Beanspruchung um konstante Dauerlasten handelte, wurde bei der Berechnung der Durchbiegung für die Zugfestigkeit von der effektiven Zugfestigkeit  $f_{ct,eff} \hat{=} 0,75 \cdot \eta \cdot f_{ctm}$  gemäß Gl. (3.18) ausgegangen.

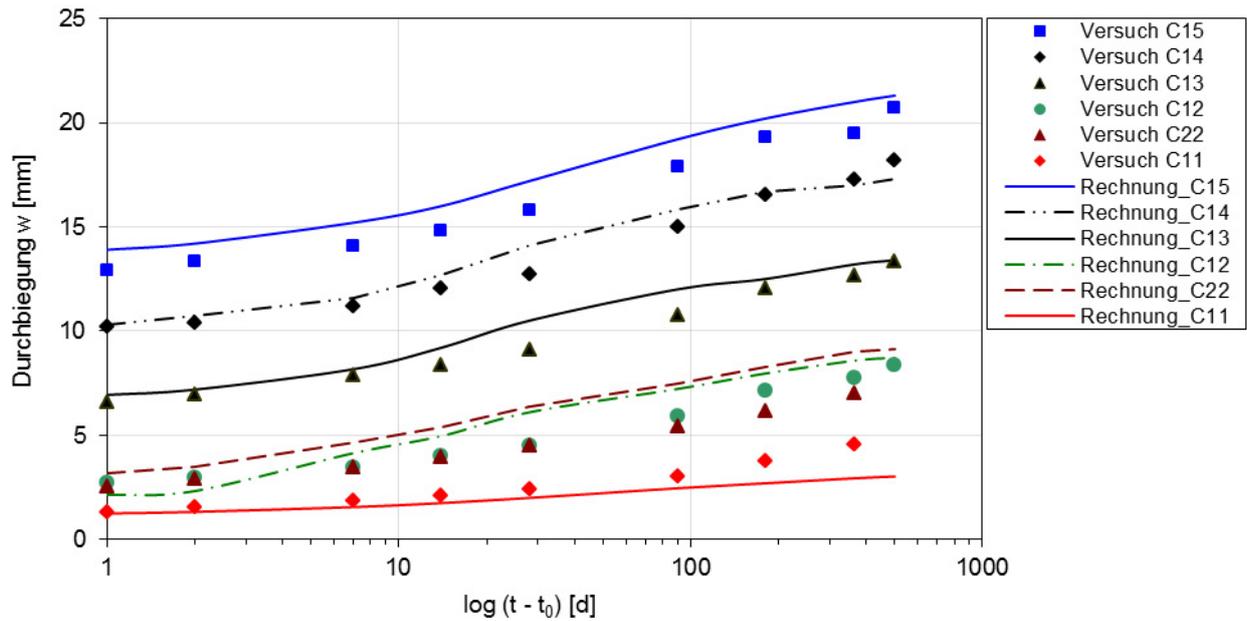
Im Allgemeinen ist eine gute Übereinstimmung mit den gemessenen Durchbiegungen festzustellen. Die maximalen Abweichungen treten bei den Versuchskörpern C12 und C22 auf, die sich in der Phase der Rissbildung befinden.



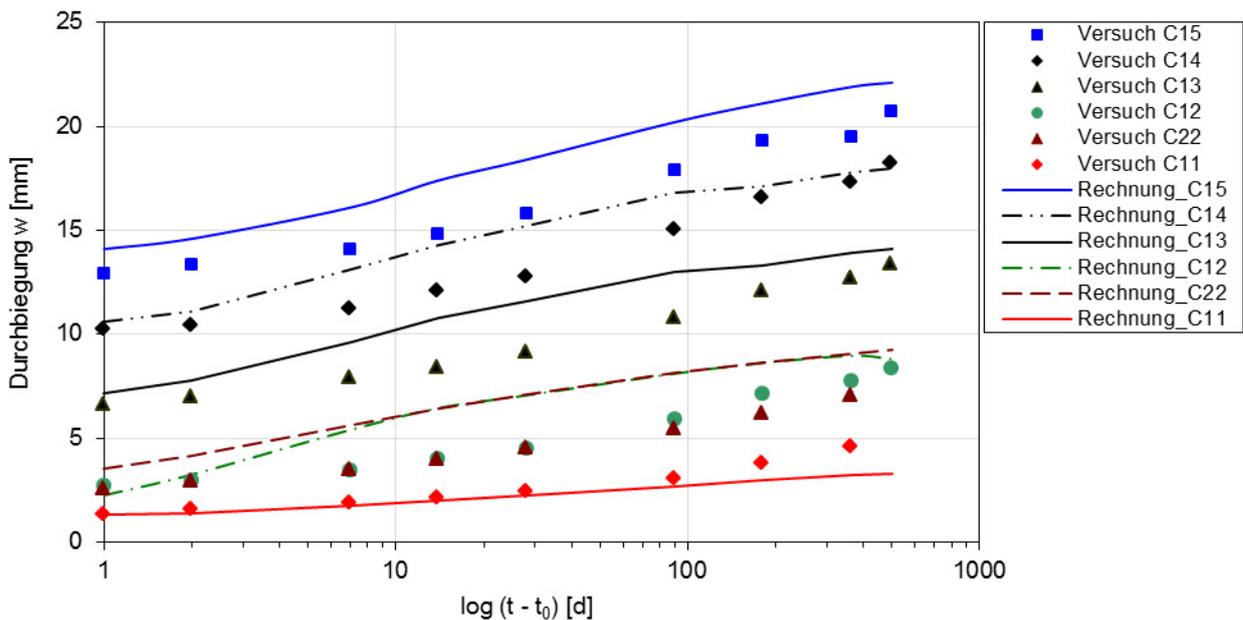
**Bild 113:** Vergleich der gemessenen und berechneten Durchbiegungen unter den unterschiedlichen Laststufen der Langzeitbelastungen mit jeweils zugehörigen gemessenen Kriechzahlen  $\varphi$  und Schwinddehnungen  $\varepsilon_{cs}$



**Bild 114:** Vergleich der gemessenen und berechneten Durchbiegungen unter den unterschiedlichen Laststufen der Langzeitbelastungen mit den Mittelwerten der gemessenen Kriechzahlen  $\varphi$  und Schwinddehnungen  $\varepsilon_{cs}$



**Bild 115:** Vergleich der gemessenen und berechneten Durchbiegungen unter den unterschiedlichen Laststufen der Langzeitbelastungen mit  $\varphi$  und  $\epsilon_{cs}$  nach EC2 (Abmessungen 75/16cm, RH=60%)



**Bild 116:** Vergleich der gemessenen und berechneten Durchbiegungen unter den unterschiedlichen Laststufen der Langzeitbelastungen mit  $\varphi$  und  $\epsilon_{cs}$  nach EC2 für die Abmessungen 12/12cm mit RH=60%

Der Ansatz für die Langzeitfestigkeit des Betons mit  $f_{ct,eff}(t=\infty) = 0,75 \cdot \eta \cdot f_{ctm}$  liefert befriedigend genaue Ergebnisse. Aus dem Vergleich der Bilder 112 – 116 erkennt man, dass sich Abweichungen im Streubereich der Kurven für  $\varphi$  und  $\epsilon_{cs}$  (Bild 107, Bild 109) nicht übermäßig empfindlich auf die rechnerischen Durchbiegungen auswirken.

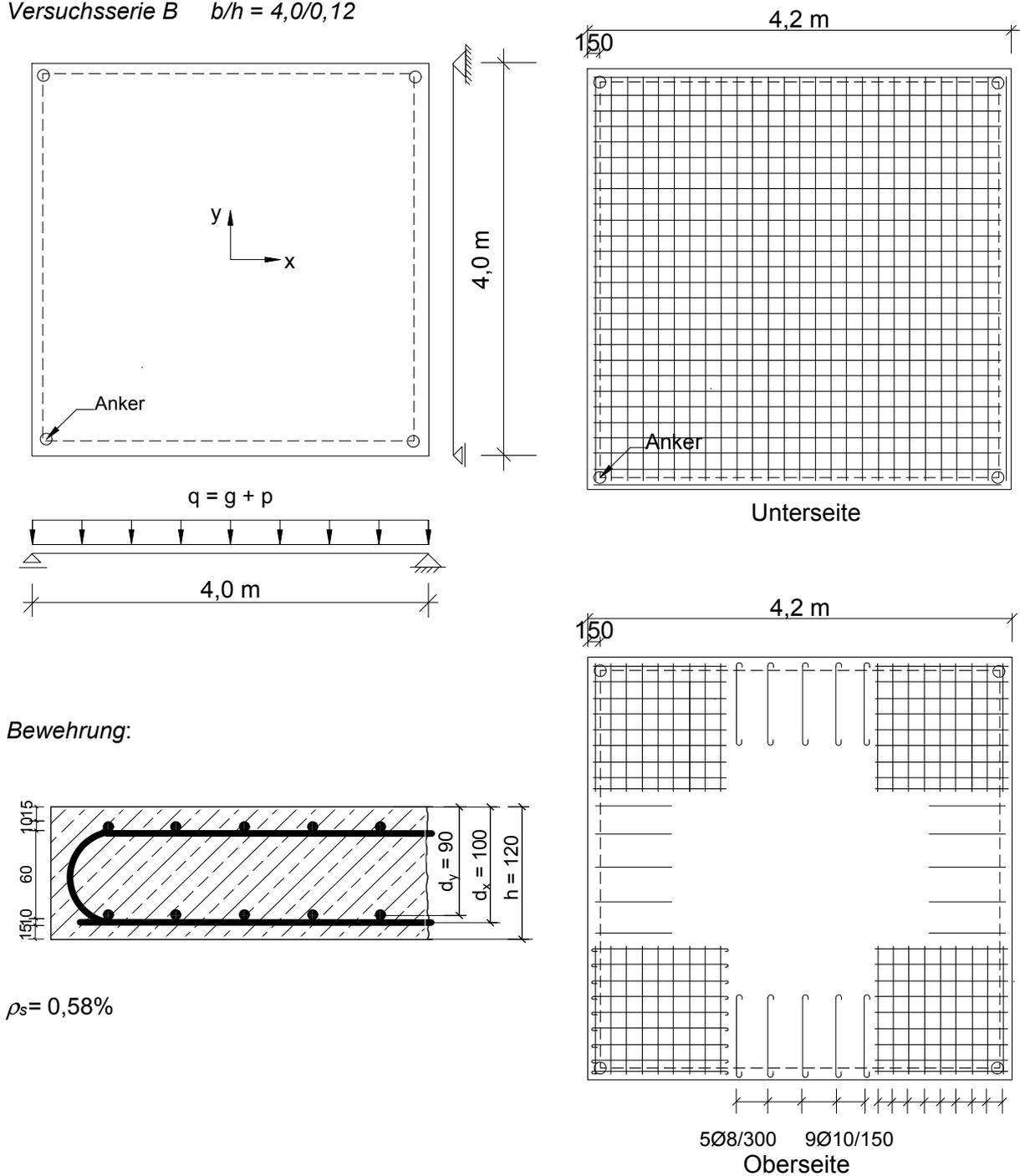
Mit der Kriechzahl und den Schwinddehnungen nach EC 2 für einen Querschnitt 12/12 cm mit RH = 60 % (Bild 116) werden die in den Versuchen gemessenen Durchbiegungen rechnerisch am meisten überschätzt.

## 8.2 Zweiachsig gespannte Platten, Jaccoud/Favre

### 8.2.1 System und Belastung

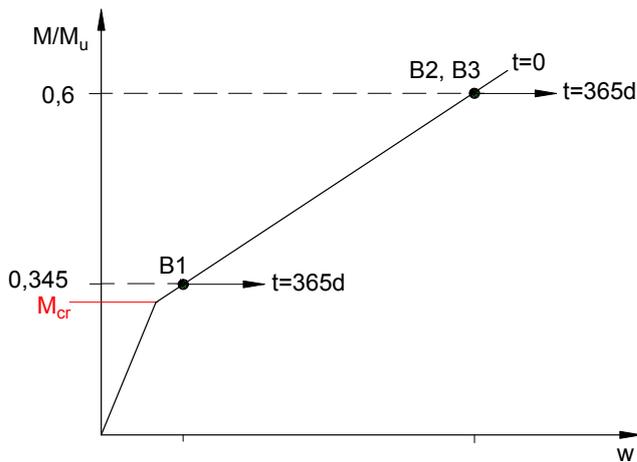
Bei den Versuchskörpern handelt es sich um vierseitig freidrehbar gelagerte Platten, wobei die Ecken mittels Anker gegen Abheben gesichert wurden. In Bild 117 sind das statische System und der Querschnitt der Platten dargestellt.

Versuchsserie B  $b/h = 4,0/0,12$



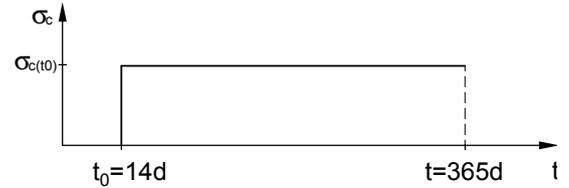
**Bild 117:** statisches System und Querschnitt der Versuchsserie B (aus [49])

Belastung:



Serie	M/M <sub>u</sub>	g [kN/m <sup>2</sup> ]	p [kN/m <sup>2</sup> ]
B1	0,345	2,94	7,9
B2	0,60	2,94	15,81
B3	0,60	2,94	15,81

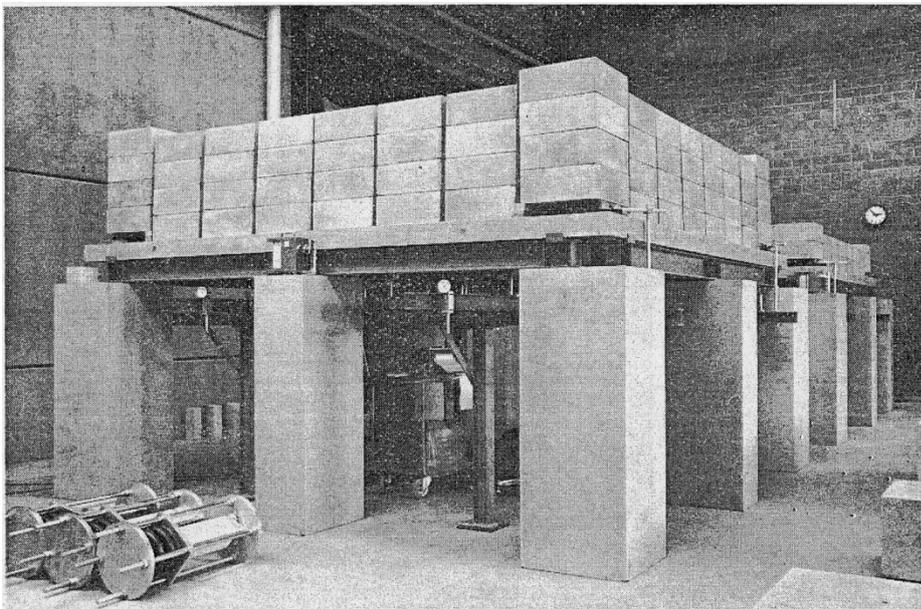
Unter konstanten Spannungen



**Bild 118:** Belastung der Versuchsserie B

Die aufgebrachte Belastung resultierte aus der Eigenlast von  $g=2,94 \text{ kN/m}^2$  und der aufgebrachten gleichmäßig verteilten Last  $p$ . Die Platte B1 wurde mit einer Gleichlast  $p=7,9 \text{ kN/m}^2$  und die Versuchsplatten B2 und B3 mit  $p=15,8 \text{ kN/m}^2$  beaufschlagt.

Die Belastung wurde im Alter von 14 Tagen durch Betonblöcke aufgebracht und ca. 1 Jahr konstant gehalten (Bild 119). Sie betragen ca. 1/3 (B1) bzw. 2/3 (B2 und B3) der rechnerischen Traglast (Bemessungswert).



**Bild 119:** Versuchsstand (aus [49])

## 8.2.2 Materialkennwerte

### 8.2.2.1 Beton

Druckfestigkeit, Zugfestigkeit, Elastizitätsmodul sowie die zeitabhängigen Kriechzahlen und Schwinddehnungen wurden parallel zu den durchgeführten Versuchen an Probekörpern gemessen. Die so ermittelten Betonkennwerte sind in Tabelle 15 zusammengestellt.

Für die Versuchsnachrechnungen werden die Mittelwerte der Baustoffkennwerte von den Probekörpern verwendet. Die Druckfestigkeit wurde an Würfeln (200x200x200) ermittelt. Außerdem wurde der Elastizitätsmodul des Betons an Prismen (120x120x360) gemessen.

Tabelle 15: An Probekörpern gemessene Betonkennwerte nach 13 Tagen (aus [49])

Versuch	$f_{cm,cube,13}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_{ctm,13}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$E_{cm,13}$ [MN/m <sup>2</sup> ]
B1	35,8	3,16	28390
B2	39,9	3,16	29720
B3	35,1	2,84	25930

#### Druckfestigkeit des Betons

Die Zylinder-Druckfestigkeit  $f_{cm,cyl}$  kann mit  $f_{ck,cyl} = 0,8 \cdot f_{ck,cube}$  berechnet werden. Die charakteristische Festigkeit  $f_{ck,28}$  wird daraus mit  $f_{ck,28} = f_{cm,28} - 4$  bestimmt.

#### Zeitliche Entwicklung der Druckfestigkeit und des Elastizitätsmoduls

Nach DIN EN 1992-1-1 kann die zeitliche Entwicklung der Betondruckfestigkeit durch eine Exponentialfunktion nach Gl. (3.3) abgeschätzt werden. Die zeitliche Entwicklung des Elastizitätsmoduls wird ebenfalls nach Gl. (3.3) abgeschätzt. Die so berechneten Werte sind in Tabelle 16 aufgeführt.

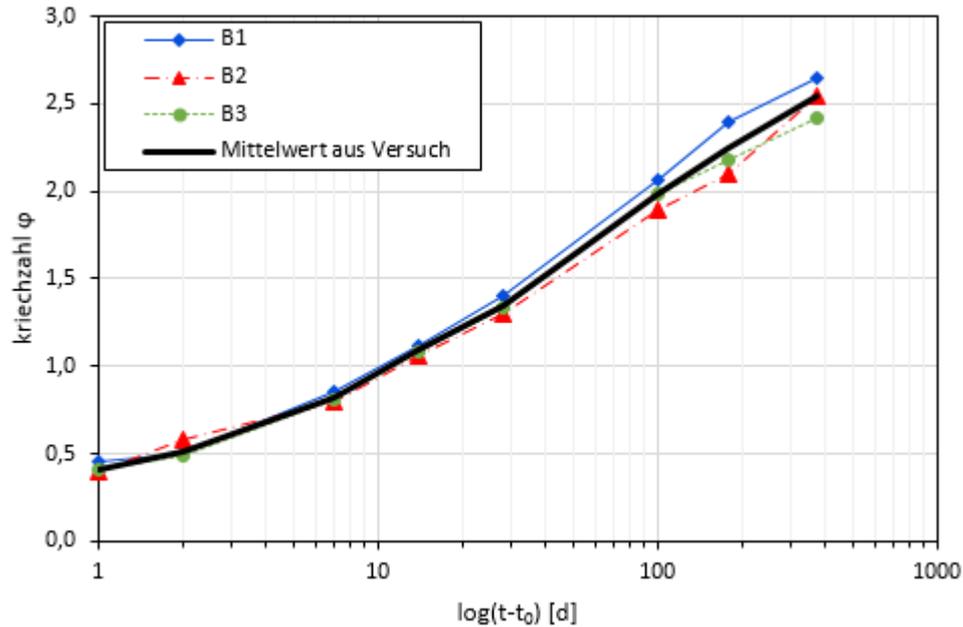
$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{cm} \quad \text{mit} \quad \beta_{cc}(t) = \exp \left[ s \left( 1 - \left( \frac{28}{t_e/t_1} \right)^{0.5} \right) \right]$$

Tabelle 16: Beton Kennwerte nach 28 Tagen für die Versuchsnachrechnung

Versuch	$f_{cm,cyl,13}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_{cm,28}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_{ck,28}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$E_{cm,28}$ [N/mm <sup>2</sup> ]
B1	28,64	32,18	28,18	29403
B2	31,92	35,86	31,86	30781
B3	28,08	31,55	27,55	26855

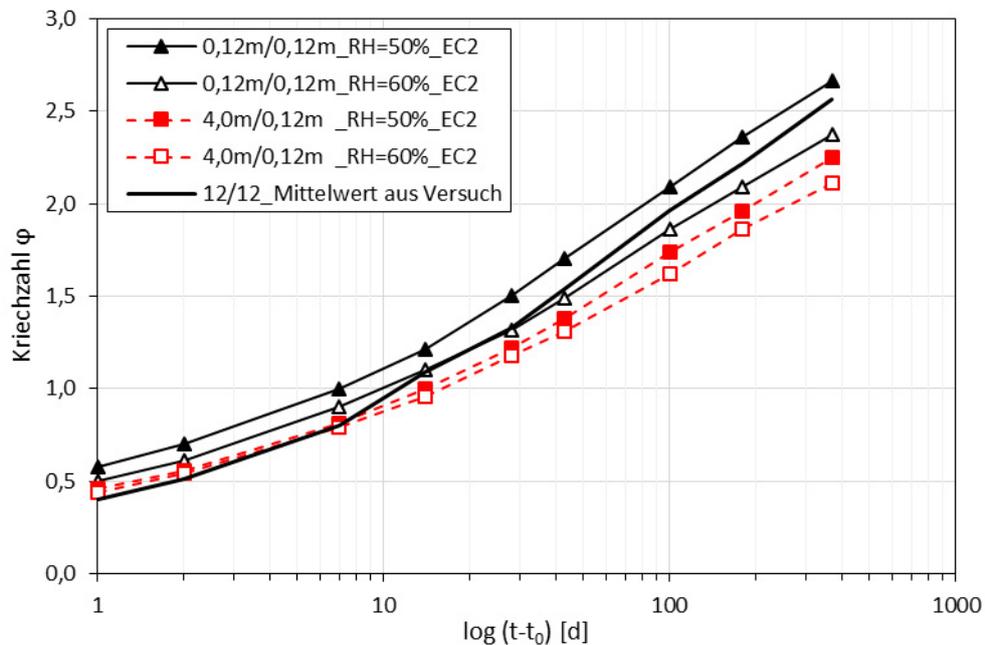
## Kriechen

Das Bild 120 zeigt die an den Probekörpern gemessenen Kriechzahlen.



**Bild 120:** Gemessene Kriechzahlen  $\varphi(t, t_0)$  der Versuchsreihe B ( $t_0=14$  Tage) (120mm x 120mm x 360mm)

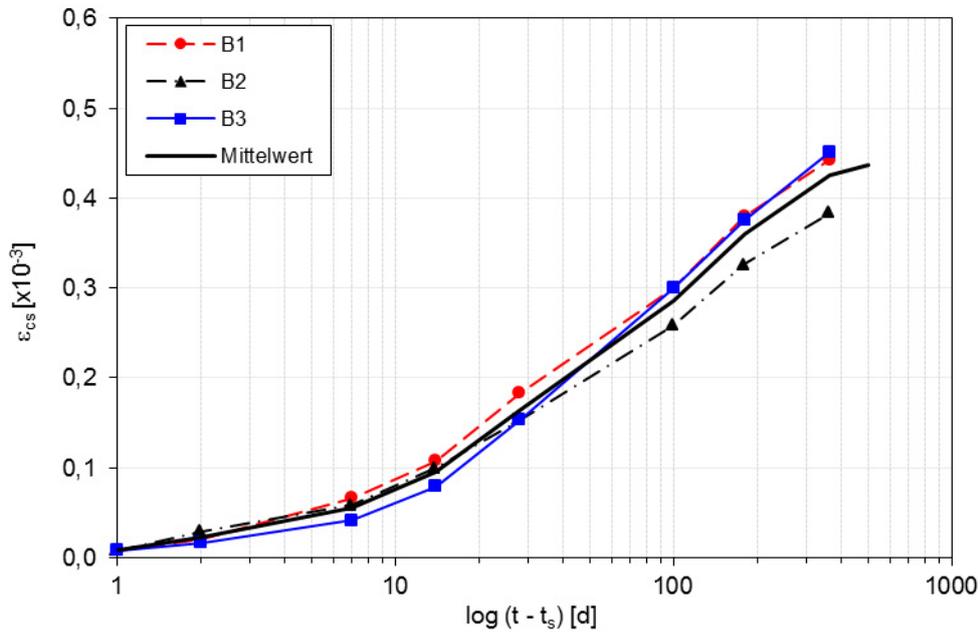
Die Kurven in Bild 120 zeigen den Vergleich der Kriechzahlen von den Probekörpern mit denen nach EC2.



**Bild 121:** Vergleich der Mittelwertkurve aus den Versuchen mit den Kriechzahlen  $\varphi(t, t_0)$  nach EC2

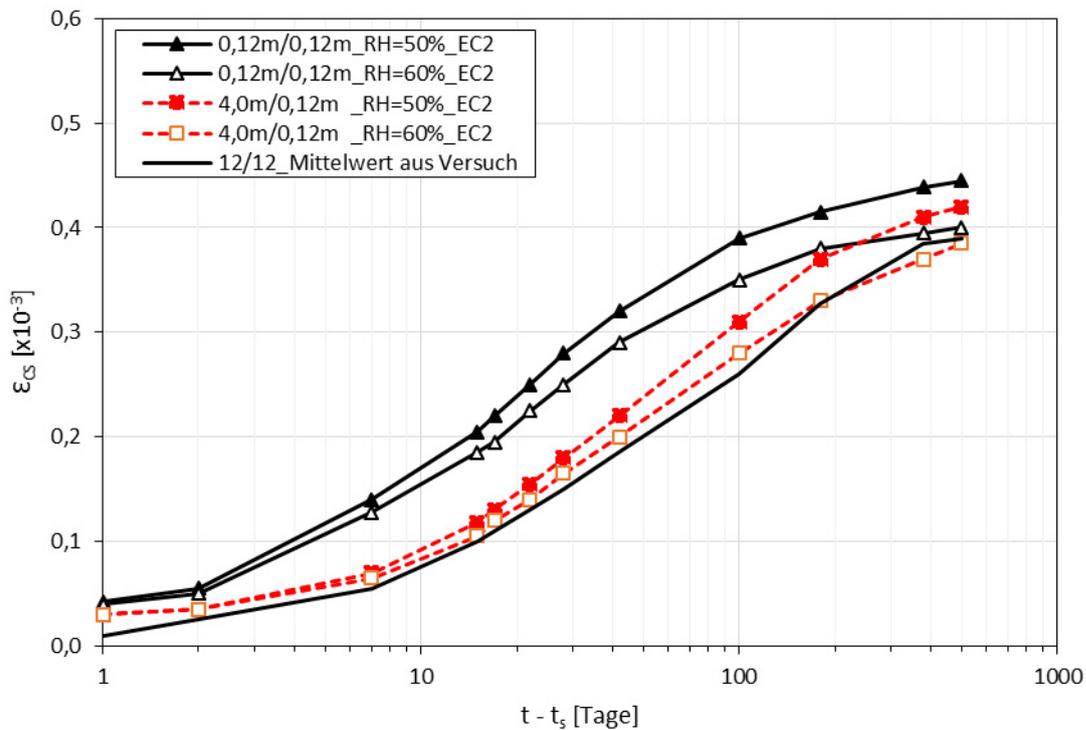
## Schwinden

Bild 122 zeigt die an den Probekörpern gemessenen Schwinddehnungen.



**Bild 122:** Gemessene Schwindbeiwerte der Versuchsreihe B ( $t_s=14$  Tage) (120mm x 120mm x 360mm)

Die Kurven in Bild 123 stellen den Vergleich der Mittelwertkurve aus den Versuchen mit den Schwindbeiwerten  $\epsilon_{cs}$  nach EC2 dar.



**Bild 123:** Vergleich der Mittelwerte aus Versuch mit Schwindbeiwerten  $\epsilon_{cs}$  nach EC2

### 8.2.2.2 Betonstahl

Die Angaben über die verwendete Bewehrung sind in Tabelle 17 zusammengefasst. Die Platten B1 und B2 waren zweiachsig isotrop bewehrt, die Versuchsplatte B3 hingegen weist eine orthotrope Bewehrung auf. In den Ecken wurden bei allen drei Platten als obere Drillbewehrung je Richtung neun Stäbe ( $d_s=10$  mm,  $s=150$  mm) vorgesehen. In jeder Bewehrungslage betrug der Stababstand  $s=150$  mm. Die Betonüberdeckung wurde dabei entsprechend den unteren Bewehrungslagen gewählt.

Tabelle 17: Bewehrungsmenge und –anordnung der Versuche B (aus [49])

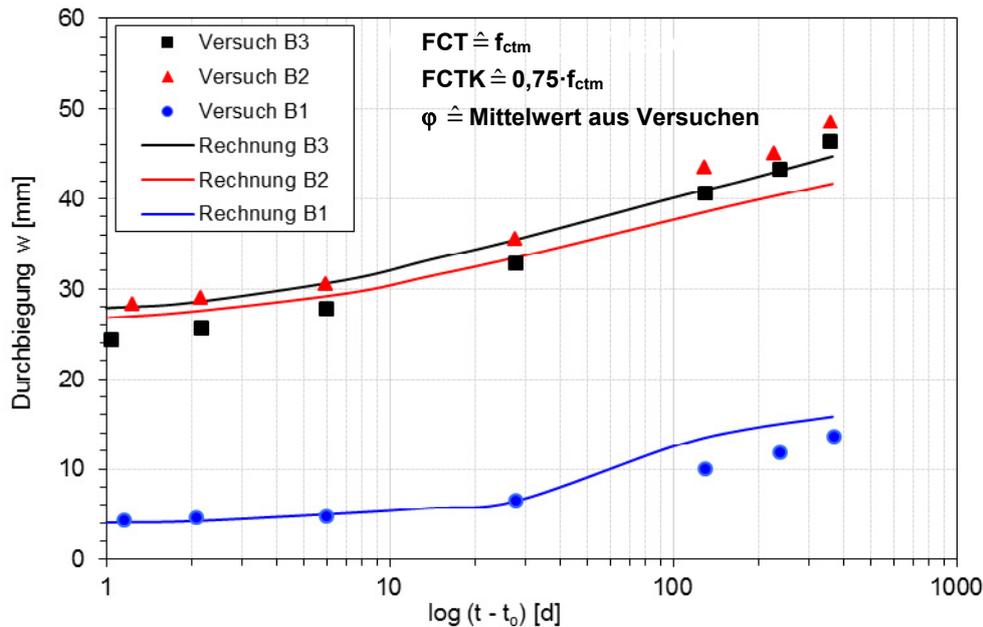
Versuch	x - Richtung				y – Richtung			
	$d_s$ [mm]	s [mm]	$d_x$ [mm]	$\rho_x$ [%]	$d_s$ [mm]	s [mm]	$d_y$ [mm]	$\rho_y$ [%]
B1	10	150	100	0,52	10	150	90	0,58
B2	10	150	100	0,52	10	150	90	0,58
B3	12	150	99	0,76	8	150	89	0,38

Die Beanspruchung der Bewehrung erfolgt bei den Versuchen im elastischen Bereich. Für die Versuchsnachrechnungen wurde  $E_s = 200.000$  N/mm<sup>2</sup> angesetzt.

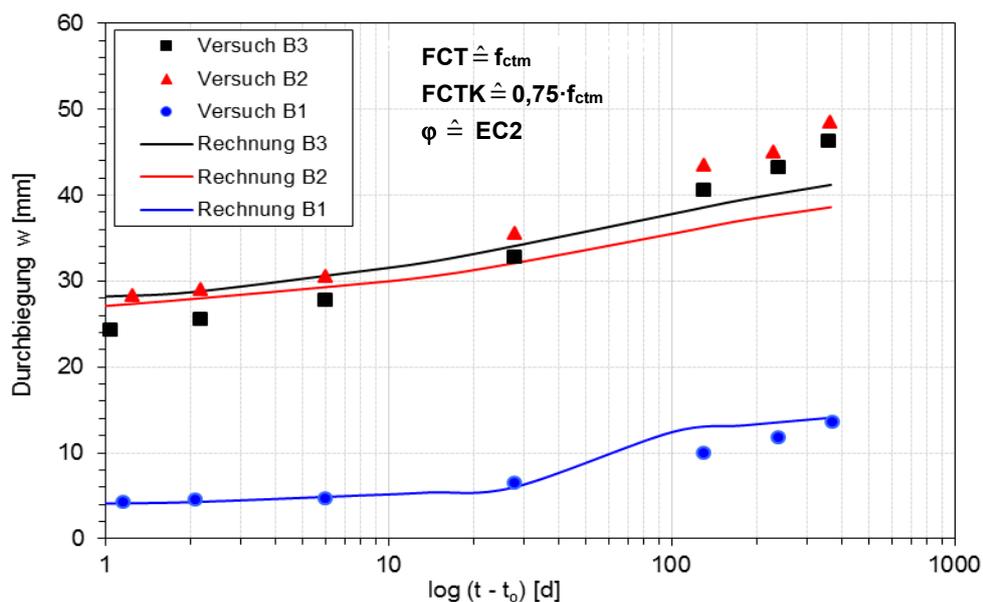
### 8.2.3 Ergebnisse der Versuchsnachrechnung

Bild 124 und Bild 125 zeigen den Vergleich zwischen den berechneten und den im Versuch gemessenen Durchbiegungen in Plattenmitte. Für die Platte B1 lassen sich gute Übereinstimmungen ermitteln. Bei den Versuchsplatten B2 und B3 ergeben sich geringfügige Abweichungen, die mit zunehmender Versuchsdauer zunehmen.

Der Ansatz für die Dauerstandzugfestigkeit des Betons  $F_{CTK} \hat{=} 0,75 \cdot f_{ctm}$  und für das Tension Stiffening  $F_{CT} \hat{=} f_{ctm}$  liefert auch für die zweiachsig gespannte Platte eine relativ gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten.

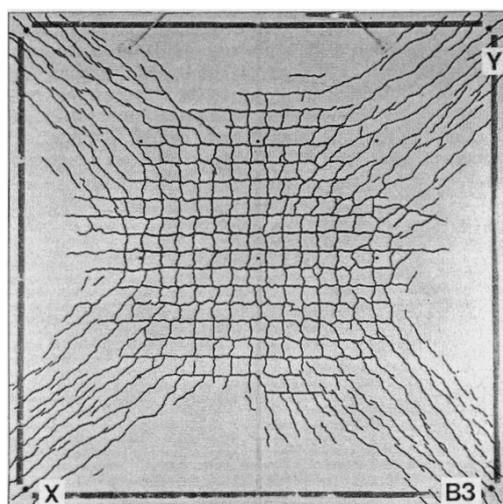
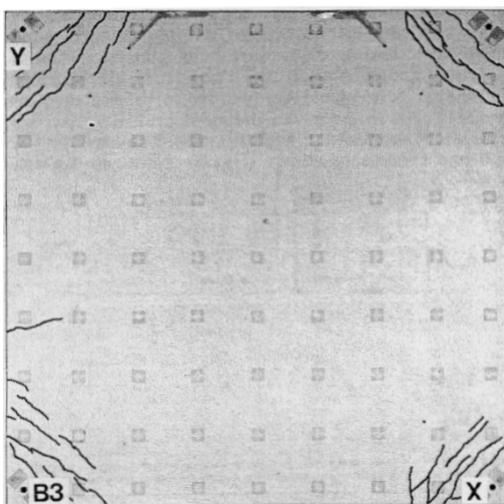
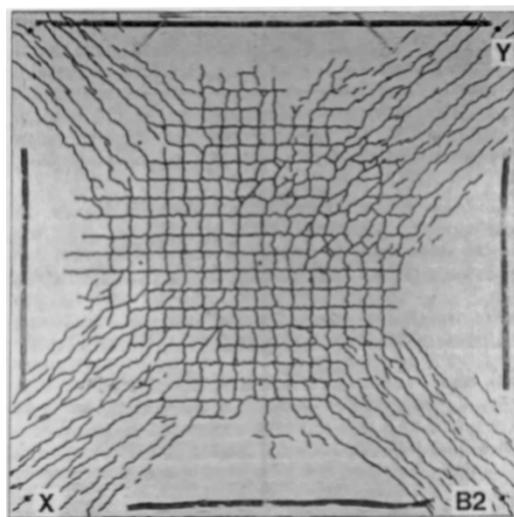
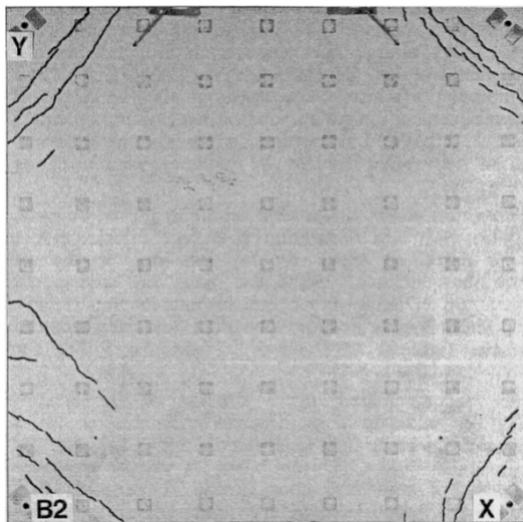
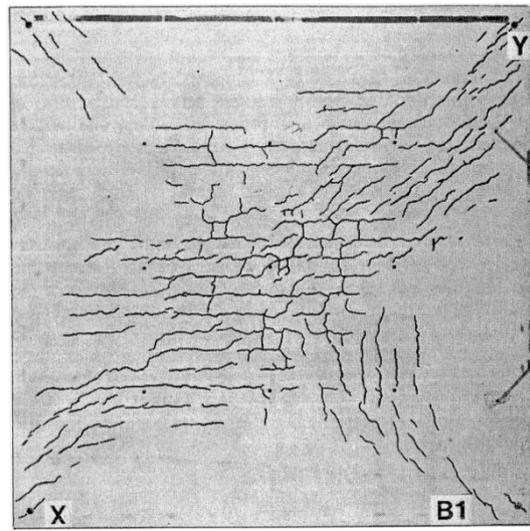
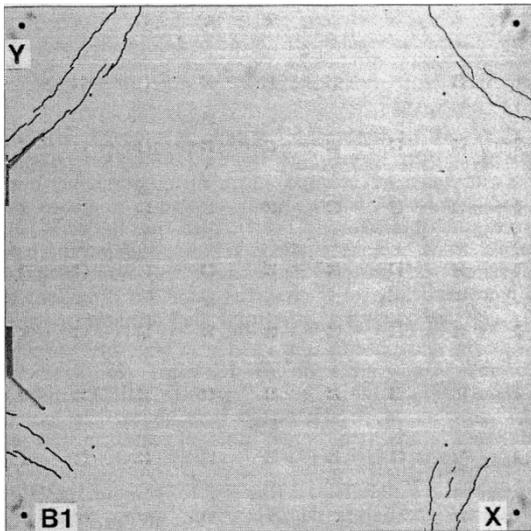


**Bild 124:** Vergleich der gemessenen und berechneten Durchbiegungen unter den unterschiedlichen Laststufen der Langzeitbelastungen mit den Mittelwerten der gemessenen Kriechzahlen  $\varphi$  und Schwinddehnungen  $\epsilon_{cs}$



**Bild 125:** Vergleich der gemessenen und berechneten Durchbiegungen unter den unterschiedlichen Laststufen der Langzeitbelastungen mit  $\varphi$  und  $\epsilon_{cs}$  nach EC2 (Abmessungen 400/12cm, RH=60%)

Die Rissbilder der Versuchskörper B1, B2 und B3 sind Bild 126 zu entnehmen.



(a) Oberseite

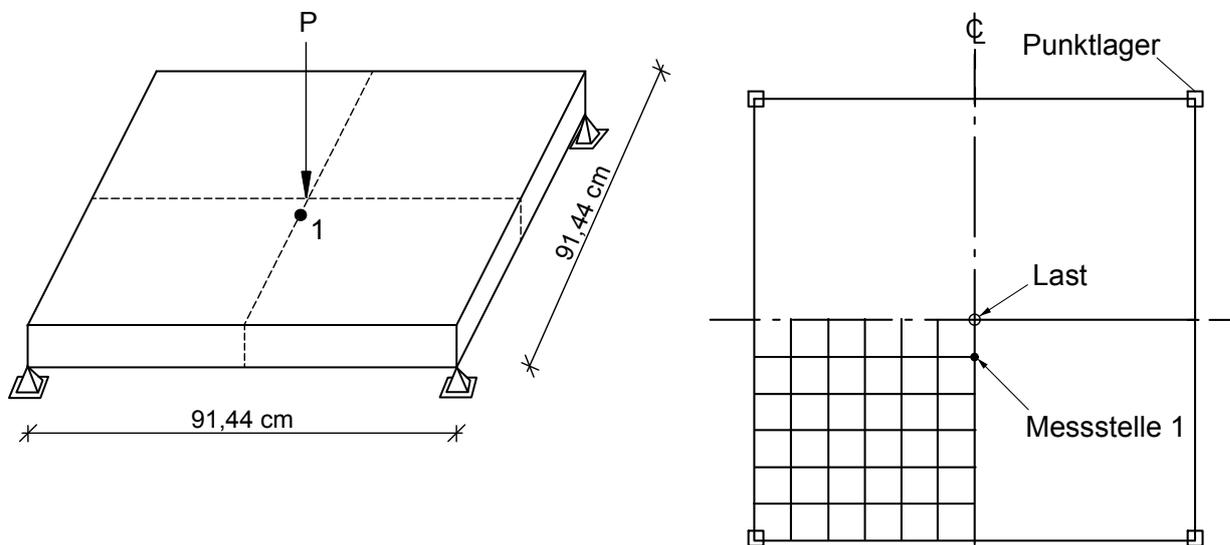
(b) Unterseite

**Bild 126:** Rissbilder B1, B2 und B3 (aus [49])

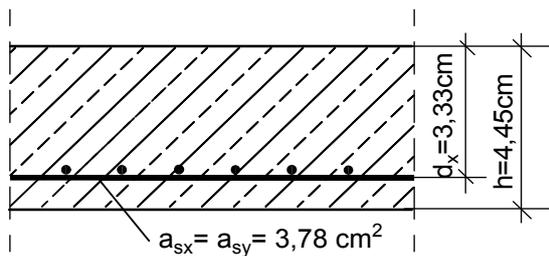
## 8.3 Zweiachsig gespannte, punktförmig gestützte Platten, Jofriet/McNeice

### 8.3.1 System und Belastung

System:



Querschnitt:



Materialparameter:

Beton:

$$f_{ck} = 37,92 \text{ MN/m}^2$$

$$E_{cm} = 28613 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{ctm} = 3,39 \text{ MN/m}^2$$

$$\mu = 0,15$$

Bewehrung:

$$f_y = 345,4 \text{ MN/m}^2$$

$$E_s = 201300 \text{ MN/m}^2$$

$$\epsilon_h = 0,01$$

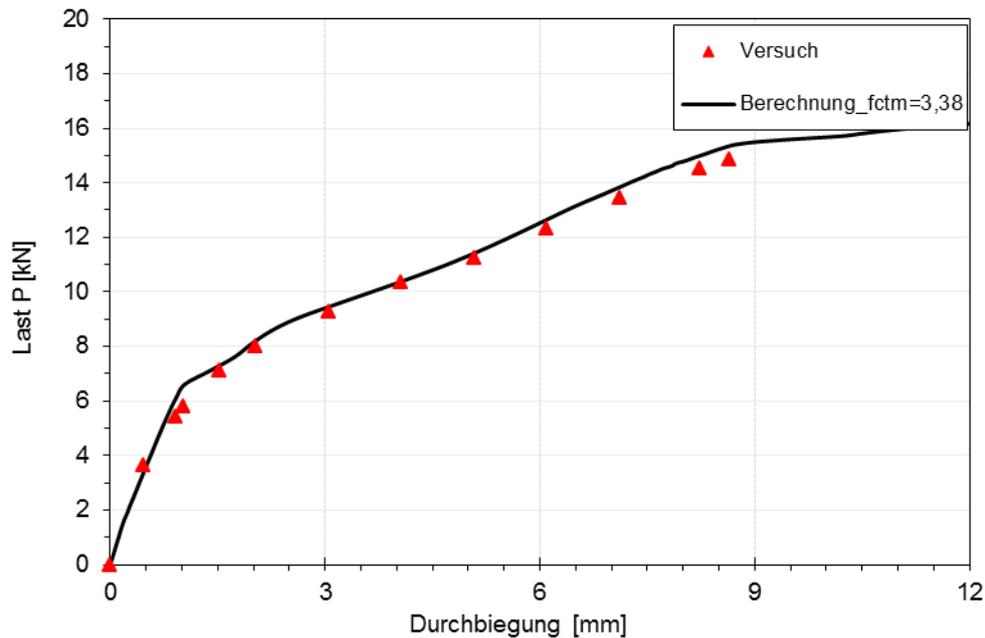
$$a_{sx} = 3,78 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$a_{sy} = 3,78 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Bild 127: System, Querschnitt und Materialparameter der Platte von Jofriet/McNeice (aus [51])

Jofriet/McNeice [51] untersuchten im Kurzzeitversuch eine vierpunktgelagerte quadratische Platte unter einer Einzellast in Plattenmitte, um den Steifigkeitsabfall infolge Rissbildung und die daraus resultierenden Durchbiegungen zu ermitteln. In Bild 127 sind die Abmessungen der untersuchten Platte, die Lage der isotropen Netzbewehrung sowie die Materialparameter angegeben. Die Betondruckfestigkeit beträgt  $f_{ck}=37,92 \text{ MN/m}^2$ . Daraus kann eine Betonzugfestigkeit  $f_{ctm}=3,39 \text{ MN/m}^2$  nach EC 2-1-1 abgeleitet werden. Die Platte ist isotrop mit geripptem Stahl bewehrt. Der Bewehrungsgrad beträgt  $\rho_s=1,26\%$ . In der Versuchsnachrechnung wird die Platte in  $12 \times 12$  Elemente eingeteilt und die Last auf das Element in Plattenmitte als Flächenlast aufgebracht. Die Last  $P$  wird im Versuch inkrementell gesteigert bis die Bruchlast erreicht ist.

### 8.3.2 Ergebnisse der Versuchsnachrechnung



**Bild 128:** Vergleich der Nachrechnung mit den Ergebnissen aus dem Versuch

Das Trag- und Verformungsverhalten der Platte von Jofriet/McNeice wird anhand des Last-Verschiebungs-Diagramms für die Plattenmitte in Bild 127 dargestellt. Die Nichtlinearität des Tragverhaltens wird fast ausschließlich von der Rissbildung und dem Fließen der Bewehrung verursacht.

Der Ansatz für die Kurzzeitfestigkeit  $F_{CTK} \cong 0,9 \cdot f_{ctm}$  und  $F_{CT} \cong f_{ctm}$  liefert hier eine sehr gute Übereinstimmung mit der Versuchswerten.

## 9 Parameterstudie an einachsig gespannten Plattenstreifen

### 9.1 Bezugssystem

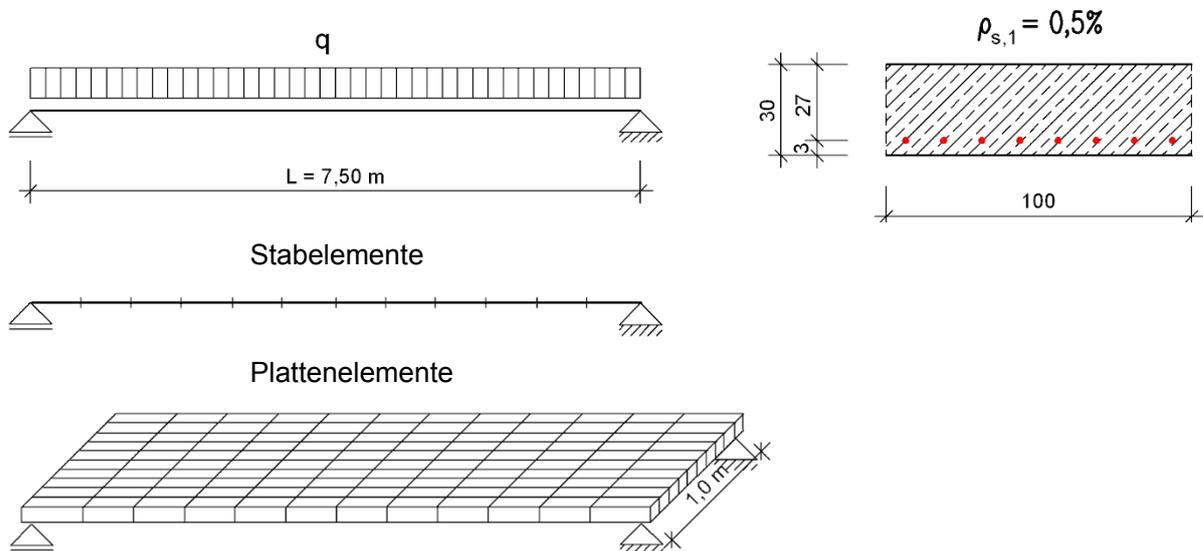
Für die Untersuchung von einachsig gespannter Plattenstreifen wird das in Bild 129 dargestellte System als Bezugssystem gewählt [71]. Dabei handelt es sich um ein verhältnismäßig schlankes System. Die einachsig gespannten Plattenstreifen werden sowohl mit nichtlinearen Plattenelementen als auch mit nichtlinearen Stabelementen berechnet.

Bei den nichtlinearen Berechnungen wird die Last schrittweise bis zum Beginn des Fließens der Bewehrung gesteigert. Die zugehörigen Verformungen ( $w$  = Durchbiegung in Feldmitte) werden ermittelt. Da sich die Untersuchungen auf den Gebrauchszustand beziehen, wird auf die genaue Berechnung der Traglast verzichtet. Die Auswertung erfolgt zum Zeitpunkt  $t=0$  und  $t=\infty$ .

Bezugssystem: einachsige Platte

$b/h/d = 100/30/27$

C30/37



#### Systemparameter:

Schlankheit:  $L/h = 25$  bzw.  $L/d = 27,8$

Bewehrungsgrad:  $\rho_s = 0,5\%$

Systemlänge:  $L = 7,50$  m

#### Belastungsniveaus:

$q_{Ed} = 21,2$  kN/m

$q_{rare} = 15,1$  kN/m

$q_{perm} = 12,5$  kN/m

#### Parameter für Verformungen:

E-Modul:  $E_{c0m} = 31900$  MN/m<sup>2</sup>

Kriechen:  $\varphi = 2,5$

Schwinden:  $\epsilon_{cs} = -0,5 \cdot 10^{-3}$

$M_{cr} = 60,3$  kNm

$f_{ct} = 2,9$  MN/m<sup>2</sup>

$f_{ct,fl} = 3,77$  MN/m<sup>2</sup> nach EC2 ( $t=0, t=\infty$ )

$M_{cr}/M_{Ed} = 40\%$

**Bild 129:** Bezugssystem an einachsig gespannten Platten [71]

## 9.2 Einwirkungen

Die Nachweise in den Grenzzuständen der Gebrauchstauglichkeit (GZG) erfolgen unter quasi-ständigen Beanspruchungsniveaus. Bei einer veränderlichen Einwirkung ergibt sich folgendes Beanspruchungsniveaus:

$$\text{GZG: } q_{perm} = 1,0 \cdot g_k + \psi_2 \cdot q_k$$

Bei der linear elastischen Berechnung ist im GZT die Beanspruchung  $M_{Ed}$  gleich oder kleiner als die Biegetragfähigkeit  $M_{Rd}$  des Querschnitts:

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} = \mu_{Ed} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd}$$

Für einen Einfeldträger mit Gleichstreckenlast ergibt sich somit:

$$q_{Ed} \leq \frac{M_{Rd} \cdot 8}{L^2}$$

Bei den nachfolgenden Untersuchungen wird davon ausgegangen, dass im Querschnitt mindestens die Bewehrung aus der Bemessung nach linear elastischer Berechnung im GZT vorhanden ist. Wird etwas mehr Bewehrung eingelegt, als für die Tragsicherheit benötigt wird, wirkt sich dies günstig auf die tatsächlichen Durchbiegungen aus.

Ausgehend vom Beanspruchungsniveau  $q_{Ed}$  wird mit Hilfe von Lastfaktoren auf die Lastniveaus der Gebrauchszustände geschlossen (selten und quasi-ständig):

$$f_{perm} = \frac{q_{Ed}}{q_{perm}}$$

Die Faktoren sind vom Verkehrslastanteil ( $g_k/q_k$ ) sowie von der Art der Belastung (Kombinationsbeiwert  $\psi_2$ ) abhängig. Da sich diese Parameter in der Regel in gewissen Grenzen bewegen, ergibt sich auch für die Faktoren eine begrenzte Bandbreite.

Im Betonbau ist das Verhältnis  $g_k/q_k$  im Allgemeinen relativ groß, d. h. der Verkehrslastanteil ist i. d. R. kleiner als die Eigenlast. Der Parameter  $\psi_2$  variiert zwischen 0,3 und 0,8 und hat nur einen Einfluss auf die den Faktor  $f_{perm}$ .

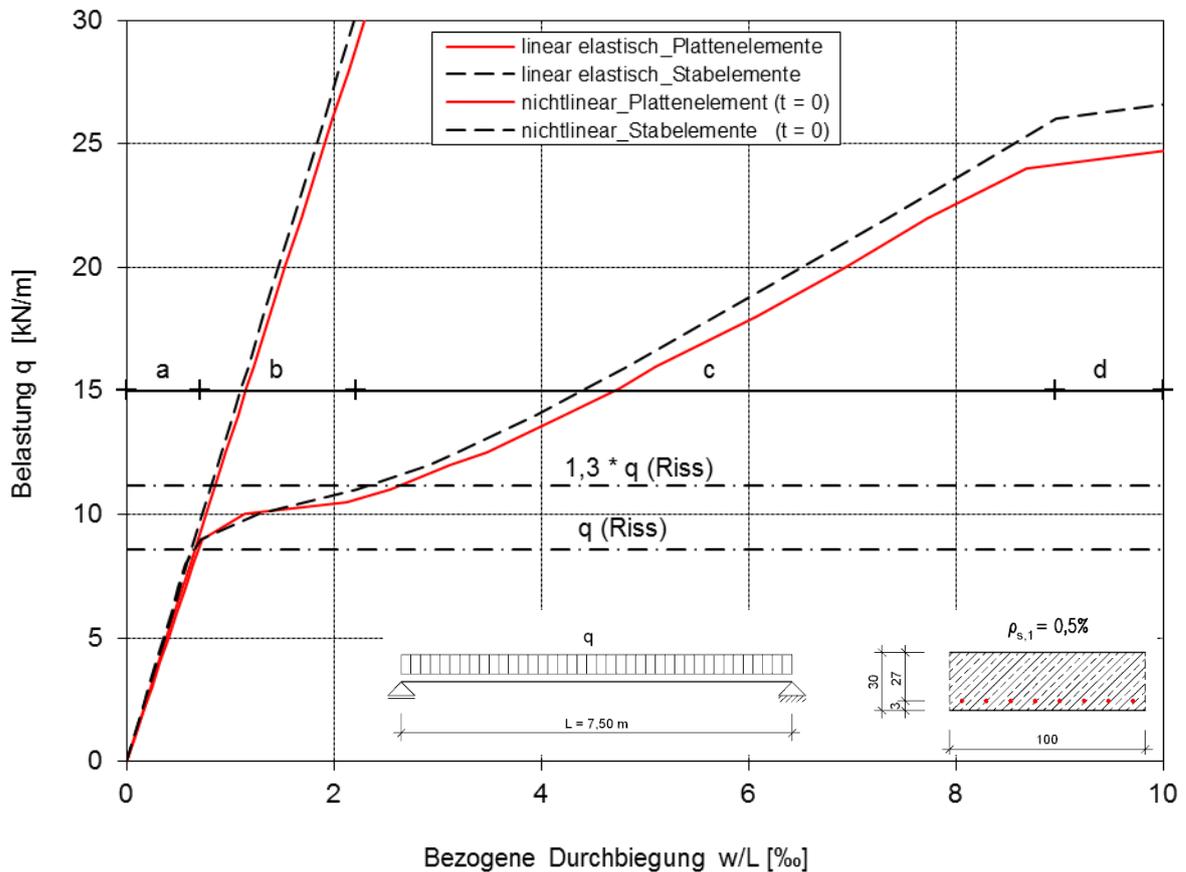
Für die nachfolgenden Untersuchungen werden folgende Faktoren angenommen, die die üblichen Verhältnisse im Mittel gut beschreiben:

$$f_{perm} = \frac{q_{Ed}}{q_{perm}} = 1,7 \quad \text{bzw.} \quad q_{perm} = \frac{q_{Ed}}{1,7}$$

Bei großem Eigengewichtsanteil sind die Verformungen unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination größer als hier berechnet.

### 9.3 Durchbiegungen (linear und nichtlinear Berechnung, $t=0$ )

Die Last-Verformungsdiagramme zeigen die für den Stahlbeton typischen Verläufe mit den drei Bereichen: a) ungerissen, b) Rissbildung, c) abgeschlossenes Rissbild und d) Fließen (Bild 130). Das Rissmoment sowie die Phase der Rissbildung sind gut erkennbar. Dabei sind die Diagramme für die Durchbiegung in Feldmitte affin. Die Biegesteifigkeit im Zustand I sowie das Rissmoment werden gut abgebildet.

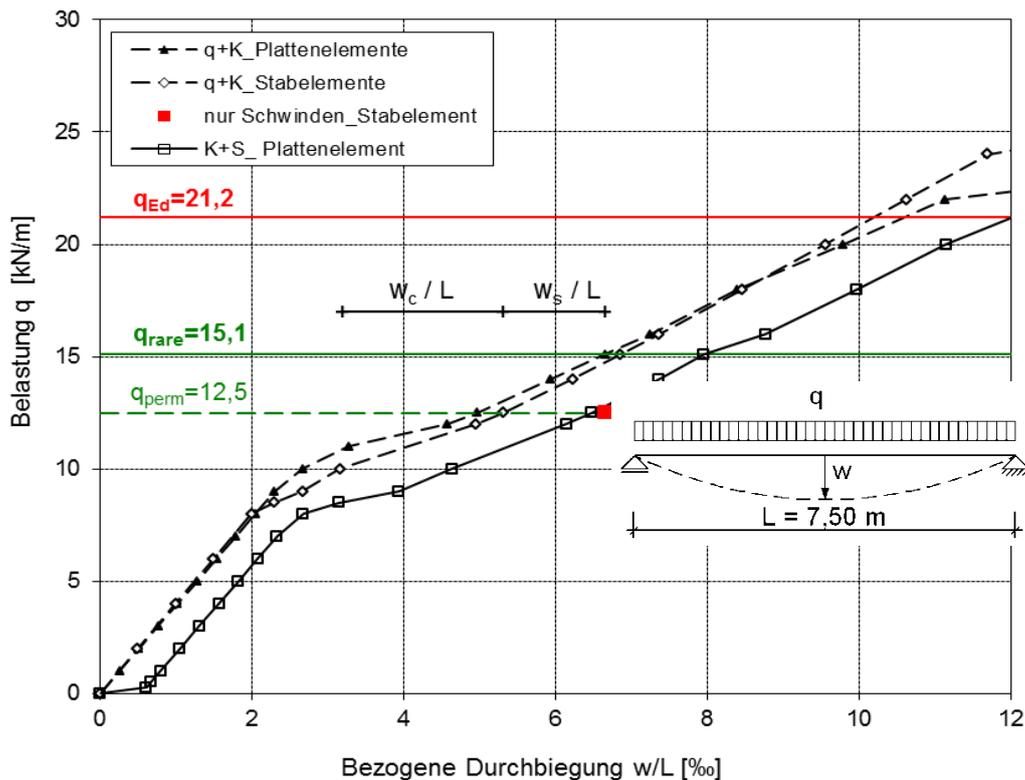


**Bild 130:** Last-Durchbiegungs-Diagramm der Bezugsplatte zum Zeitpunkt  $t=0$

Die Darstellung in Bild 129 enthält den Vergleich der rechnerischen Durchbiegungen, ermittelt mit nichtlinearen Balken- und Plattenelementen. Die Werkstoffkenngrößen wurden jeweils gleich angesetzt. Die Plattenelemente führen auf etwas größere Durchbiegungen.

## 9.4 Durchbiegungen einschließlich der Anteile aus Kriechen und Schwinden (nichtlinear Berechnung, $t=\infty$ )

Mit dem Rechenmodell werden die Verformungen zum Zeitpunkt  $t=\infty$  unter Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens ermittelt. Für ein Lastniveau  $\max. M_{\text{Feld}} \leq M_{\text{Cr}}$  ergeben sich die gleichen Durchbiegungen wie nach linear-elastischer Berechnung mit  $E_{c,\text{eff}}=E_{c0m}/(1+\varphi)$ . Die Durchbiegungsanteile aus Kriechen und Schwinden folgen bei der Plattenelementen an der Standardeinstellung vom SOFiSTiK. Bei den nichtlinearen Balkenelementen muss der Anteil der Durchbiegungen aus dem Schwinden separat berechnet und dazu addiert werden. In Bild 130 erfolgte dies lediglich für die Laststufe  $q_{\text{perm}} = 12,5 \text{ kN/m}^2$ . Es zeigte sich eine gute Übereinstimmung zwischen Balken- und Plattenelementen.



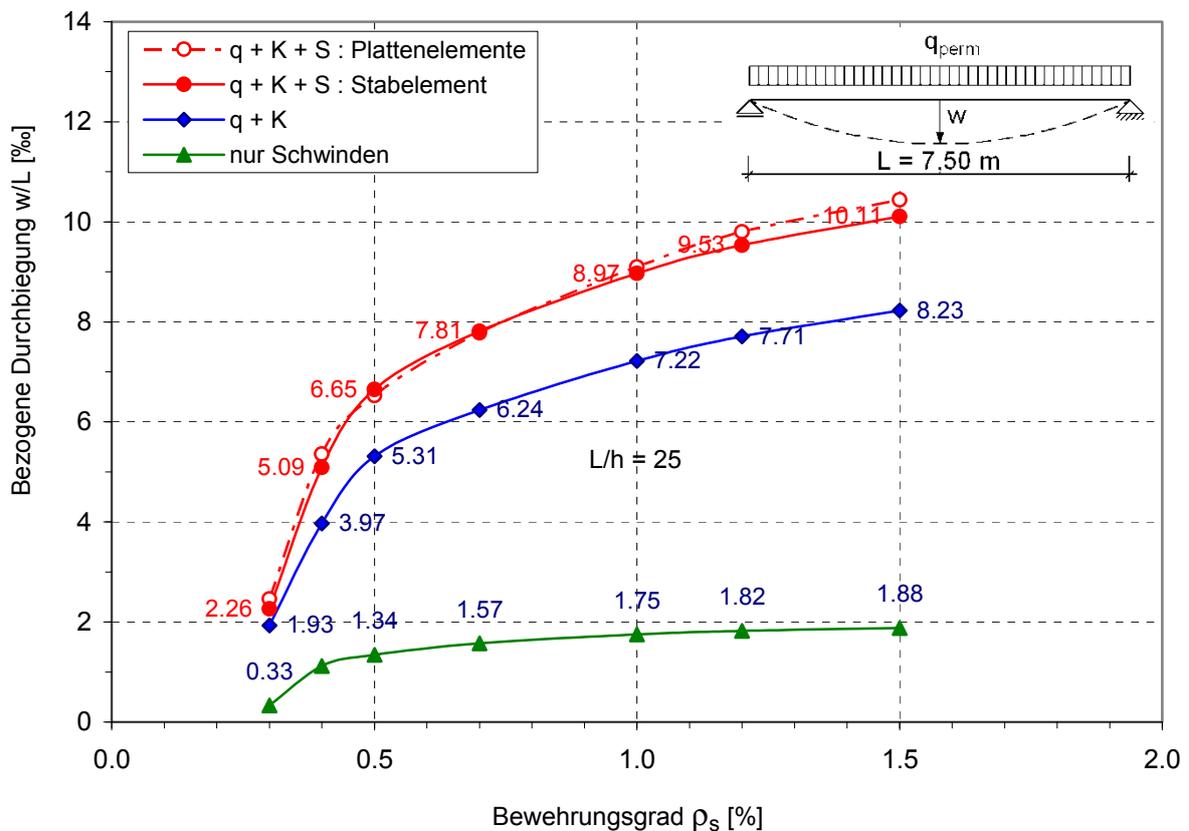
**Bild 131:** Durchbiegung einschließlich der Anteile aus Kriechen und Schwinden infolge  $q_{d,\text{perm}}$

Tabelle 18: Ergebnisse ( $L/H=25$ ,  $\rho_s=0,5\%$ )

Einwirkungs-Kombination	w [mm]	w/L [%]	w [mm]	w/L [%]
Modellierung	Stabelemente		Plattenelemente	
$q_{\text{selt}} (t=0)$	33	4,44	35	4,70
$q_{\text{perm}} (t=0)$	24	3,19	26	3,48
$q_{\text{perm}}+K$	40	5,31	38	5,0
Schwinden	10	1,34	11	1,53
$q_{\text{perm}}+K+S$	50	6,65	49	6,53

## 9.5 Einfluss aus dem Bewehrungsgrad

Setzt man voraus, dass die statisch erforderliche Bewehrung aus der Biegebemessung im GZT eingelegt wird, so steigt mit zunehmendem Bewehrungsgrad die aufnehmbare Last  $q_{Ed}$  des Systems an und damit das Belastungsniveau der quasi-ständigen Einwirkungskombination ( $f_{perm}=1,7$ ). Die Verformungen unter der quasiständigen Einwirkungskombination nehmen dementsprechend mit zunehmendem Bewehrungsgrad zu, u. a. da sich die Ausdehnung der gerissenen Bauteilbereiche vergrößert (Bild 132). Der Kurvenverlauf ist durch einen steilen Ast (bis ca.  $\rho_s=0,5\%$ ) und einen daran anschließenden flacher verlaufenden Ast gekennzeichnet. Beim Knickpunkt (ca.  $\rho_s=0,5\%$ ) wird unter quasi-ständiger Belastung das abgeschlossene Rissbild erreicht.



**Bild 132:** Bezogene Durchbiegung in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad  $\rho_s$  zum Zeitpunkt  $t=\infty$  (quasi-ständige Einwirkung)

## 9.6 Einfluss aus der Systemlänge

Um den Einfluss der absoluten Systemlänge auf die bezogenen Verformungen zu untersuchen werden nachfolgende Systeme untersucht und ausgewertet:

$L = 5\text{ m}$        $\rho_s = 0,5\%$        $\rho_s = 1,0\%$

$L = 10\text{ m}$       $\rho_s = 0,5\%$        $\rho_s = 1,0\%$

Die Schlankheit  $L/h = 25$  wurde bei allen Systemen beibehalten.

**L=7,50m h = 0,30m L/h=25**

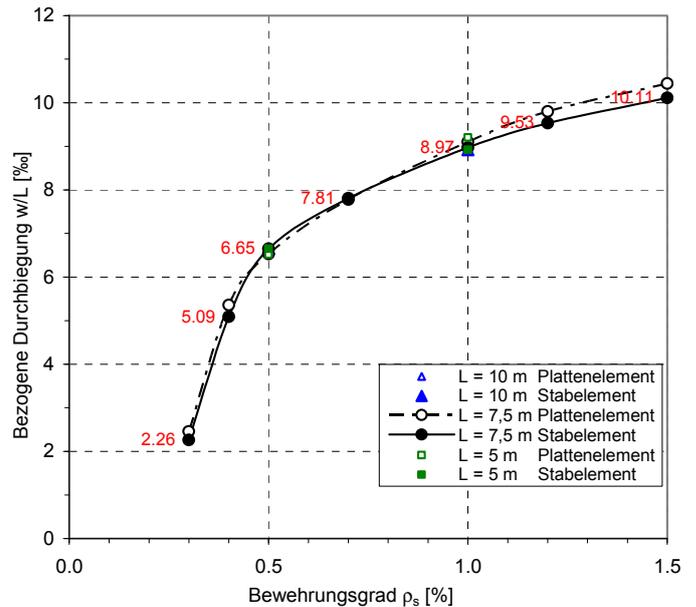
Element	Stab		Platten	
	quasiständig t = ∞	Schw inden	quasiständig +Schw inden	quasiständig +Schw inden
$\rho_s$ [%]	w/L [‰]	w/L [‰]	w/L [‰]	w/L [‰]
0.30	1.93	0.33	2.26	2.46
0.40	3.97	1.12	5.09	5.36
0.50	5.31	1.34	6.65	6.53
0.70	6.24	1.57	7.81	7.78
1.00	7.22	1.75	8.97	9.10
1.20	7.71	1.82	9.53	9.80
1.50	8.23	1.88	10.11	10.44

**L=5m h = 0,20m L/h=25**

0.50	5.31	1.34	6.65	6.52
1.00	7.17	1.75	8.92	9.20

**L=10 m h = 0,40m L/h=25**

0.50	5.31	1.34	6.65	6.53
1.00	7.17	1.75	8.92	9.20



**Bild 133:** Ergebnisse Variation Systemlänge

Die entsprechenden Punkte in Bild 133 fallen praktisch aufeinander. Die Systemlänge hat bei sonst gleichen Parametern ( $\rho_s$ ;  $L/h$ ) danach keinen Einfluss auf die bezogenen Verformungen infolge Last (inkl. Kriechen). Gleiches gilt für die Verformungen aus Schwinden.

Eine Schlankheit von  $L/h=25$  ist bei Platten durchaus nicht unüblich. Daher verwundert es zunächst, dass die Verformungen selbst bei einem Bewehrungsgrad von nur 0,5 % und entsprechender zugehöriger Belastung relativ groß sind:

$$w_{\text{perm}}/L = 6,53\text{‰} \gg 4\text{‰}$$

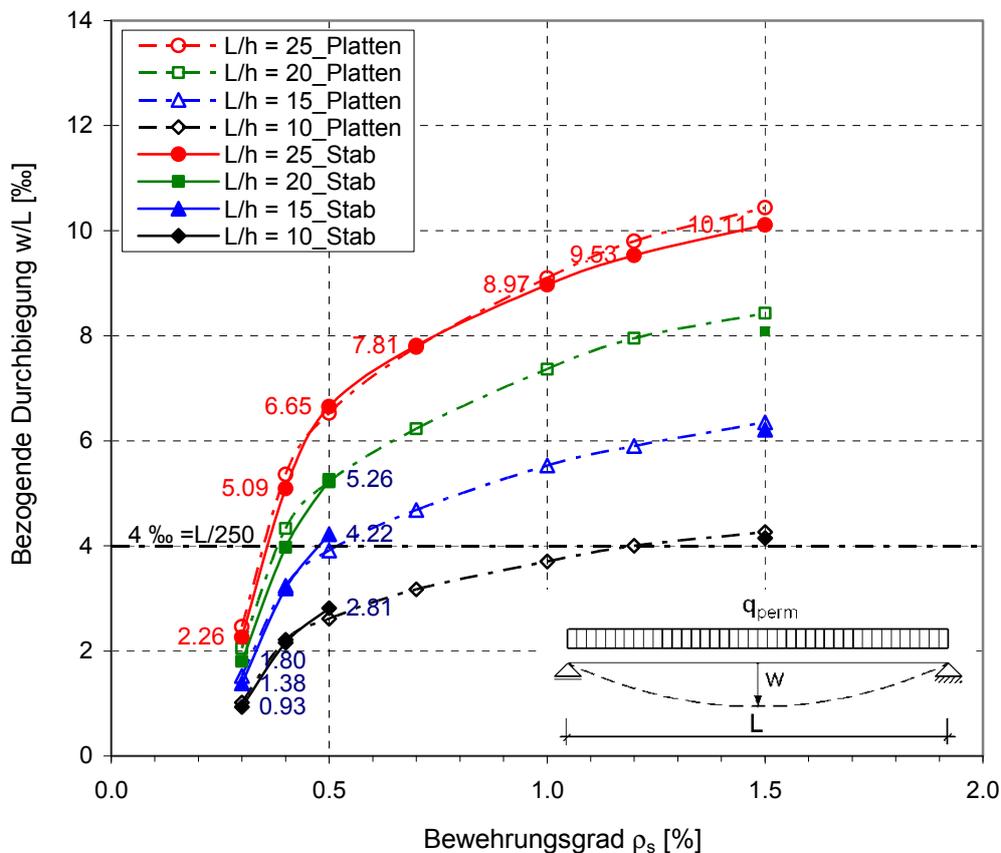
D. h. das Bauteil ist nur mit einer Überhöhung herstellbar.

## 9.7 Einfluss aus der Schlankheit

Die systemabhängigen Haupteinflussgrößen für die Beurteilung der zu erwartenden Verformungen sind die Parameter Schlankheit und Bewehrungsgrad. Bei der nachfolgend durchgeführten Variation der Schlankheit werden ebenfalls die Bewehrungsgrade variiert. Dadurch ergibt sich je Schlankheit eine Kurve.

Da die Systemlänge von untergeordneter Bedeutung ist, wird der untersuchte Querschnitt beibehalten und die Systemlänge  $L$  variiert. Untersucht werden:

$L = 7,5 \text{ m}$	$L/h = 25$	$L/d = 27,8$	(Bezugssystem)
$L = 6,0 \text{ m}$	$L/h = 20$	$L/d = 22,2$	
$L = 4,5 \text{ m}$	$L/h = 15$	$L/d = 16,7$	
$L = 3,0 \text{ m}$	$L/h = 10$	$L/d = 11,1$	



**Bild 134:** Bezogene Durchbiegung in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad  $\rho_s$  und der Schlankheit  $L/h$  (quasi-ständige Einwirkungskombination)

Durch die Variation des Bewehrungsgrades ergibt sich der typische zunächst stark ansteigende und anschließend abknickende und flacher ansteigende Kurvenverlauf, als Folge der zugehörigen Ausdehnung der gerissenen Bereiche. Der Bewehrungsgrad ist proportional zur Belastung. Bei einem Bewehrungsgrad von 0,3% bleibt der Querschnitt über die gesamte Bauteillänge im ungerissenen Zustand I.

Die Werte der Einzelkurven sind unmittelbar von der Schlankheit abhängig. Die Höhe  $h$  bzw.  $d$  des Querschnittes geht sowohl in die Biegesteifigkeit des ungerissenen, als auch des gerissenen Querschnittes ein.

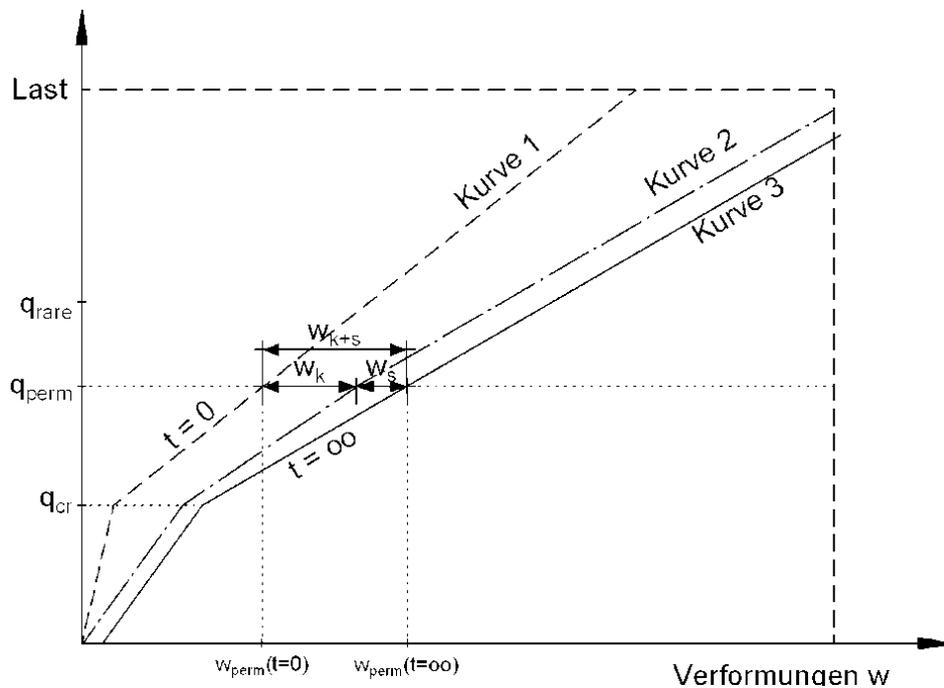
## 9.8 Zusammenfassung

Bei der Auswertung der untersuchten Systeme wurde grundsätzlich von der statisch erforderlichen Bewehrung über Belastungsfaktoren  $f_{perm}$  auf die Lastniveaus der quasi-ständigen Einwirkungskombination geschlossen.

Die bezogene Durchbiegungen  $w_{perm}/L$  werden maßgeblich von der Schlankheit und vom statisch erforderlichen Bewehrungsgrad  $\rho_s$  bestimmt. Mit zunehmender Schlankheit nehmen die Verformungen des Bauteils deutlich zu. Somit ist die Schlankheit ein sehr wichtiges Kriterium zur Beurteilung der zu erwartenden Verformungen.

Der statisch erforderliche Bewehrungsgrad spiegelt den Belastungsgrad wider und kann als weiteres Kriterium zur Beurteilung der zu erwartenden Verformungen herangezogen werden. Bei niedrigen Bewehrungsgraden verbleibt das Bauteil ganz oder zum großen Teil im Zustand I.

Daneben haben die Werkstoffkenngrößen (Zugfestigkeit, Kriechen, Schwinden, E-Modul) einen sehr großen Einfluss. Das Schwinden des Betons hat einen nicht unerheblichen Einfluss auf die Durchbiegung und muss deswegen bei der Ermittlung der Verformungen immer berücksichtigt werden.



**Bild 135:** Ermittlung der Verformungen zum Zeitpunkt  $t=0$  und  $t=\infty$  aus der äußeren Last  $q$

Bei den hier durchgeführten nichtlinearen Berechnungen werden die Verformungen mit ausreichend vielen Laststufen berechnet, so dass sich, wie in Bild 135 schematisch dargestellt, Last-Verformungsdiagramme ergeben.

Kurve 1: Berechnung der Verformungen zum Zeitpunkt  $t=0$ , d. h. ohne die Einflüsse aus Kriechen und Schwinden des Betons

Kurve 2: Berechnung der Verformungen zum Zeitpunkt  $t=\infty$  unter Berücksichtigung der Kriechverformung des Betons

Kurve 3: Berechnung der Verformungen zum Zeitpunkt  $t=\infty$  mit den Einflüssen aus Kriechen und Schwinden des Betons

## 10 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird das Verformungsverhalten von schlanken Patten aus Stahlbeton im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit untersucht.

Zunächst wird ein Überblick über die Begrenzung der Durchbiegungen über Biegeschlankheitskriterien nach unterschiedlichen Ansätzen gegeben.

Bei der direkten nichtlinearen Durchbiegungsberechnung von Stahlbetonplatten spielt die Betonzugfestigkeit, insbesondere bei den häufig vorkommenden Beanspruchungen nahe dem Rissmoment, eine wesentliche Rolle. Daher kommt diesem Parameter eine besondere Bedeutung zu. Da sie jedoch großen Streuungen unterliegt, können bei Beanspruchungen nahe der Risschnittgrößen die Berechnungsergebnisse von den tatsächlichen Durchbiegungen stark abweichen. Von den Streuungen abgesehen, wird die Zugfestigkeit des Betons im Wesentlichen durch die physikalischen Einflüsse *Maßstabseffekt* sowie *Nacherhärtung* vergrößert, dagegen durch Einflüsse wie *Dauerstandzugfestigkeit*, *nichtlinear verteilte Eigenspannungen* und *Eigenspannungen infolge Schwindbehinderung durch die Bewehrung* vermindert. Über den Einfluss der Dauerstandzugfestigkeit bei Biegung in Verbindung mit einer Vorbelastung gibt es in der Literatur widersprüchliche Aussagen. Daher wurden hierzu eigene Tastversuche an unbewehrten Biegebalken durchgeführt und der Vorfaktor  $\alpha_{ct}$  für die Dauerstandzugfestigkeit unabhängig von der Vorbelastung zu i.M. 0,75 ermittelt. Für die Berechnung der Durchbiegungen bei reiner Biegung wird unter Berücksichtigung der o.g. Einflüsse unabhängig von einer Vorbelastung der Ansatz der wirksamen Zugfestigkeit mit

$$f_{ct,eff}(t) = \beta_{ct} \cdot k \cdot \alpha_{ct} \cdot \eta \cdot f_{ctm} \quad \Rightarrow \quad f_{ct,eff}(t=\infty) = 0,75 \cdot \eta \cdot f_{ctm}$$

vorgeschlagen [Kapitel 3.5].

Für die wirklichkeitsnahe Erfassung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetonplatten unter langandauernder Belastung sind geeignete Materialmodelle erforderlich. Hierbei kommt dem Verbundverhalten zwischen Beton und Stahl (tension stiffening) eine besondere Bedeutung zu, ebenso die rechnerische Berücksichtigung von Langzeiteinflüssen (Kriechen, Schwinden). Hierfür werden geeignete Materialmodelle vorgestellt [Kapitel 4].

Die rechnerischen Untersuchungen werden mit dem nichtlinearen FE-Programmsystem SOFiSTiK durchgeführt. Die Verifikation des Rechenprogramms mit den o.g. Ansätzen für die Materialmodellierung erfolgt durch Nachrechnungen von Versuchsergebnissen an Stahlbetonplatten unter kurz- und langzeitiger Lastbeanspruchung [Kapitel 8]. Für die Berechnung der Durchbiegung zum Zeitpunkt  $t=\infty$  liefert das Rechenmodell im Programmsystem SOFiSTiK mit dem Ansatz

$$FCTK \hat{=} 0,75 \cdot f_{ctm}$$

$$FCT \hat{=} f_{ctm} \quad (\text{Tension Stiffening, TS})$$

eine gute Übereinstimmung zwischen den Rechen- und Versuchswerten. Der Maßstabseffekt  $\eta$  wird in SOFiSTiK für Plattendicken des üblichen Hochbaus mit 1,30 - 1,45 durch Voreinstellung im Programm automatisch berücksichtigt.

Anhand eines Bezugssystems von 1 m breiten Plattensstreifen (Einfeldträger) wurden die Einflüsse aus Belastung unter Berücksichtigung des Kriechens und aus Schwinden des Betons auf die Durchbiegung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit rechnerisch untersucht. Hierzu wurden in den Simulationsrechnungen ausgehend von der Platte des Bezugssystems einige Parameter gezielt variiert. Die Parameter  $\varphi$  und  $\epsilon_{cs}$  haben zwar einen großen Einfluss auf die rechnerischen Durchbiegungen, wirken sich jedoch nicht so stark aus wie die Streuung der Betonzugfestigkeit.

## Literaturverzeichnis

- [1] Al-Kubaisy, M.A.; Young, A. G.: Failure of Concrete under Sustained Tension. Magazine of Concrete Research, Vol. 27, No. 92, pp 171-178, 1975
- [2] Bažant, P.B., Planas J.: Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials, New Directions in Civil Engineering Series, Purdue University, 1998
- [3] Bažant, Z.P.: Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal in *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 110, 518, 1984.
- [4] Bažant, Z.P., Carol, I.: Creep and Shrinkage of Concrete: proceedings of the fifth international RILEM symposium, Barcelona, Spanien, 1993, S. 877-888
- [5] Bažant, Z.P.: Mathematical Modelling of Creep and Shrinkage of Concrete. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England, 1988, S. 98-177
- [6] Bergmeister, K.; Kaufmann, W.: Tragverhalten und Modellierung von Platten, Betonkalender 2007, S. 71-131
- [7] Blaschke, F.; Losekamp, C.; Mehlhorn, G.: Zugtragvermögen nach lang andauernder statischer sowie schwellender Zugvorbelastung von Beton, DFG Forschungsbericht, Verlag IRB, 1993
- [8] Bockhold J.; Pfister T.: Die Methode der effektiven Spannungen zur einfachen Berechnung der Kriechverformungen von Stahlbetonträgern, Beton- und Stahlbetonbau (11/2006), Verlag Ernst & Sohn, 2006
- [9] Bockholt J.; Pfister T.: Vereinfachte, wirklichkeitsnahe Ermittlung der Durchbiegung von Stahlbetonträgern unter Kriechbeanspruchung, Beton- und Stahlbetonbau (4/2006), Verlag Ernst & Sohn, 2006
- [10] Bonzel, J.; Kadlecik, V.: Einfluss der Nachbehandlung und des Feuchtigkeitszustands auf die Zugfestigkeit. Betontechnische Bericht (1970), Heft 7, S. 303-309 und Heft 8, S. 351-357; ebenso Beton-Verlag, Düsseldorf 1971, S. 99-132
- [11] Bonzel, J.: Beton. In: Betonkalender 1989, Teil 1, Verlag Ernst & Sohn, S. 1-105
- [12] Chen, W.; Salbeeb, A.: Constitutive Equations for Engineering Material, Volume I: Elasticity and Modelling. Toronto : J. Wiley & Sons, 1982
- [13] Comité Euro-International du Béton (CEB) : CEB-FIP Model Code 1990. Bulletin d'Information No. 213-214, Thomas Telford Services, London 1993
- [14] fédération internationale du béton (*fib*) : *fib* Bulletin 55 : Model Code 2010, First complete draft - Volume 1, March 2010.
- [15] Comité Euro-International du Béton (CEB) : Serviceability models : behaviour and modelling in serviceability limit states including repeated and sustained loads. S143-155, Lausanne 1997
- [16] Cornelissen, H.A.W.; Reinhardt, H. W.: Uniaxial tensile fatigue failure of concrete under constant-amplitude and programme loading. Magazine of Concrete Research, Vol. 36, No. 129, pp 216-226, 1984
- [17] Crisfield, M. A.: A quadratic Mindlin element using shear constraints Computers & Structures, Volume 18, Issue 5, 1984, S. 833-852

- [18] Darwin, D., & Pecknold, D. Inelastic Model for Cyclic Biaxial Loading of Reinforced Concrete. Ph.D. dissertation, University of Illinois, 1974
- [19] DIN 1045-1 [07.2001]: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion, Beuth Verlag, Berlin, 2001
- [20] DIN 1045-1 [08.2008]: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion, Beuth Verlag, Berlin, 2008
- [21] Deutscher Ausschuss für Stahlbeton(DAfStb): Erläuterungen zu DIN 1045-1. Heft 525 der Schriftenreihe des DAFStb, Beuth-Verlag, Berlin, 2003
- [22] Deutscher Ausschuss für Stahlbeton(DAfStb): Erläuterungen zu Eurocode 2: DIN EN 1992-1-1. Heft 600 der Schriftenreihe des DAFStb
- [23] DIN 1048-5 [06.1991]: Prüfverfahren für Beton; Festbeton, gesondert hergestellte Probekörper. Ausgabe 06.1992
- [24] DIN 1055-100 [03.2001]: Einwirkungen auf Tragwerke, Teil 100 Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept, Beuth Verlag, Berlin, 2001
- [25] DIN 1055-7 [11.2002]: Einwirkungen auf Tragwerke, Teil 7: Temperatureinwirkungen, Beuth Verlag, Berlin, 2002
- [26] Domone, P. L.: Uniaxial tensile creep and failure of concrete. Magazine of Concrete Research, Vol. 26, No. 88, pp 144-152, 1974
- [27] DIN V ENV 1992-1-1: Eurocode 2 - Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1-1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau, Juni 1992
- [28] DIN EN 1992-1-1: Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004 + AC:2010, Januar 2011
- [29] DIN EN 1992-1-1/NA: Nationaler Anhang – National festgelegte Parameter – Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, 2011-01
- [30] Eurocode 2 – Commentary. European Concrete Platform ASBL (ed.). Brüssels, June 2008
- [31] Dinges, D.: Vergleichende Untersuchungen von Stahlbetonflächentragwerken unter Berücksichtigung physikalischer und geometrischer Nichtlinearitäten. Dissertation, TH Darmstadt, 1987
- [32] Drucker, D. - ; Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis or limit design. In: Quarterly Journal of Applied Mathematics (1952), S 157-165.
- [33] Donaubaue, U.: Rechnerische Untersuchung der Durchbiegung von Stahlbetonplatten unter Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten und unter Berücksichtigung zeitabhängiger Verformungen, Dissertation TU München, 2002

- 
- [34] Duda, H.: Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 419 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1991
- [35] Eibl, J. ; Iványi, G.: Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 260, Ernst & Sohn, 1976
- [36] Falkner, H.: Zur Frage der Rissbildung durch Eigen- und Zwangspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonbauteilen. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 208, Ernst & Sohn, 1969
- [37] Gilbert, R. I., and R. F. Warner, "Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs," Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, vol. 104, ST12, pp. 1885–1900, 1978.
- [38] Gilbert, R. I.: Deflection Calculation for Reinforced Concrete Structures – Why We Sometimes Get It Wrong, ACI Structural Journal, 11/12 1999
- [39] Grasser, E.; Thielen G.: Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgrößen und Formänderungen von Stahlbetontragwerken, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 240 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1996
- [40] Grübl, P.: Beton, Ernst & Sohn, Berlin, 2001
- [41] Gudrun, D.: Verhalten von Stahltonbauteilen unter einer kombinierten Beanspruchung aus Last und zentrischem Zwang. Dissertation, TU Dortmund, 2009
- [42] Hartmann, F.; Katz, C.: Statik mit finiten Elementen, Verlag Springer Berlin, 2001
- [43] Harth, S.: Beitrag zur Berechnung rechteckiger Stahlbetonplatten unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Stoffgesetze. Dissertation, TU München, 1989
- [44] Hausmann, G.: Verformungsvorhersage vorgespannter Flachdecken unter Berücksichtigung der stochastischen Eigenschaften. Dissertation, TH Darmstadt, 2007
- [45] Hillerborg, A; Modèer, M.; Petersson, P.E.: "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements", Cement and Concrete Research, Vol. 6, 1976, S. 773-782
- [46] Hilsdorf, H.; Reinhardt, H.: xxxx – xxxx. In: Betonkalender 1997, Teil 1, Verlag Ernst & Sohn Berlin, S. xxx-xxx
- [47] Holmberg, A.; Lindgren, E.: Cracks in Concrete Walls. National Swedish Building Research, D7: 1972
- [48] Jaccoud, J.; Francon ; Canara: Armature Minimale Pour le Contrôle de la Fissuration, Projet de Recherche 82-13. In : Rapport Mai (1985), EPFL Lausanne
- [49] Jaccoud, J.; Favre, R: Flèche des Structures en Béton Armé – Vérification Experimentale d'une Méthode de Calcul, Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Série: Béton 208, 1982
- [50] J. Kollegger. : Ein Materialmodell für die Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken. Dissertation, GH Kassel, 1988

- [51] Jofriet, J.C. und G.M. McNeice (1971). Finite element analysis of reinforced concrete slabs. *Journal of the Structural Division, ASCE* 97 (ST3), 785–806.
- [52] König, G.; Tue, N.-V.: Grundlagen und Bemessungshilfen für die Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 466 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1996
- [53] König, G.; Tue, N.-V.; Schenck, G.: Grundlagen des Stahlbetonbaus, Vieweg+Teubner Verlag, Berlin, 2008
- [54] Kolodziejczyk, A.: Zum Nachweis kippgefährdeter Stahlbeton- und Spannbetonträger beliebiger Geometrie nach Theorie II. Ordnung, in Vorbereitung
- [55] Kordina, K.: Beton unter Langzeit-Zugbeanspruchung; Bautechnik 76 (1999), Heft 6. S. 479-488
- [56] Kordina, K.; Schubert, L. ; Troitzsch, U.: Kriechen von Beton unter Zugbeanspruchung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 498 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 2000
- [57] Kupfer, H.; Hilsdorf, H.K.; Rüschi, H.: Behaviour of concrete under biaxial stress. *ACI Journal Proceedings* Vol. 66, No. 8, 656-666, August 1969.
- [58] Kupfer, H.: Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung, DAfStb Heft 229, Berlin: Ernst & Sohn, 1973
- [59] Krüger, W.; Mertzsch, O.: Zum Trag- und Verformungsverhalten bewehrter Betonquerschnitte im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 533 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 2006
- [60] Krüger, W.; Mertzsch, O.: Beitrag zum Trag- und Verformungsverhalten bewehrter Betonquerschnitte im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit, Rostocker Berichte aus dem Fachbereich Bauingenieurwesen, Heft 3, Rostock 2001, S. 25–156
- [61] Krüger, W.; Mertzsch, O.: Beitrag zur Verformungsberechnung von Stahlbetonbauten. *Beton- und Stahlbetonbau* 93 (1998), Heft 10 u. 11, S. 300-303 u. S. 330–336
- [62] Krüger, W.; Mertzsch, O.: Zur Verformungsbegrenzung von überwiegend auf Biegung beanspruchten Stahlbetonquerschnitten. *Beton- und Stahlbetonbau* 97 (2002), Heft 11, S. 584–589
- [63] Krüger, W.; Mertzsch, O.: Verformungsbegrenzung im Betonbau. Bundesvereinigung der Prüfengeure für Bautechnik e. V. (BVPI), 2009, S. 1–13
- [64] Krüger, W.; Mertzsch, O.: Verformungsnachweise-Erweiterte Tafeln zur Begrenzung der Biegeschlankheit, Beitrag in *Stahlbetonbau aktuell*, Praxishandbuch 2003, S. 19-38
- [65] Leonhardt, F.: Vorlesungen über Massivbau, Teil 5, Springer Verlag, 1979
- [66] Litzner, H.-U.: Grundlagen der Bemessung nach Eurocode 2 – Vergleich mit DIN 1045 und DIN 4227. In: *Betonkalender* 1995, Teil 1, Verlag Ernst & Sohn Berlin, S. 519-727

- 
- [67] Litzner, H.-U.: Grundlagen der Bemessung nach Eurocode 2 – Vergleich mit DIN 1045 und DIN 4227. In: Betonkalender 1996, Teil 1, Verlag Ernst & Sohn Berlin, S. 567-792
- [68] Lubiner, J.; Oliver J., Oller S. and Onate E.: A Plastic-Damage Model for Concrete, International journal of Solids and Structures, 25, 1989, S. 299-326
- [69] Marti, P.; Alvarez, M.; Kaufmann, W.; Sigrist, V.: Tragverhalten von Stahlbeton, Fortbildungskurs für Bauingenieure, ETH Zürich 1999
- [70] Maurer, R. : Grundlagen zur Bemessung des Betongurtes von Stahlverbundträgern. Dissertation, TU Darmstadt, 1992
- [71] Maurer, R., Djouahra G., Choi, S.J.: Auflagerverdrehungen im Stahlbetonbau für die Bemessung von Elastomerlagern im Hochbau, DIBt-Forschungsbericht 12/2006
- [72] Maurer, R.: Skript Spannbeton I, TU Dortmund 2009
- [73] Maurer, R.: Skript Betonbau I, II, TU Dortmund 2010
- [74] Mayer, H.; Rüsçh, H.: Bauschäden als Folge der Durchbiegung von Stahlbeton-Bauteilen, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 193 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin-München, 1967
- [75] Mayer, H.: Die Berechnung der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 194 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin-München, 1967
- [76] Müller, H. S.; Kvitsel, V.: Grundlagen der neuen Vorhersagemodelle für das Kriechen und Schwinden von Beton nach DIN 1045. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, in Vorbereitung; siehe auch: Kriechen und Schwinden von Beton – Grundlagen der neuen DIN 1045 und Ansätze für die Praxis. Beton- und Stahlbetonbau, Bd. 97, Heft 1, 2002, S. 8-19
- [77] Müller, H. S.; Küttner, C. H.; Kvitsel, V.: Creep and shrinkage models of normal and high-performance concret: concept for a unified code-type approach., Revue française de génie civil. Volume 3, no 3-4 (1999), S. 113-132
- [78] Noakowski, P.: Steifigkeitsorientiert Statik im Stahlbetonbau, Berlin, Ernst, 2003.
- [79] Pravida, J.: Zur nichtlinearen adaptiven Finite-Element-Analyse von Stahlbetonscheiben. Dissertation, TU München, 1999
- [80] Pölling, R.: Eine praxisnahe schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2001
- [81] Reinhardt, H.-W.; Cornelissen, H.: Zeitstandversuche an Beton. In: Baustoffe '85, Bauverlag Wiesbaden, 1985, S. 162-167
- [82] Reinhardt, H.-W.; Wüstholtz, T.: Tensile deformation behavior of self-compacting concrete under sustained loading. 5<sup>th</sup> International RILEM Symposium on Self-Compacting Concrete, Belgium, Vol. 2, pp 591-598, 2007
- [83] Reinhardt, H.-W.; Hilsdorf, H. K.: Beton. In: Betonkalender 2001, Teil 1, Verlag Ernst & Sohn Berlin, 2001, S. 1-144

- [84] Reinhardt, H.-W.: Ingenieurbaustoffe, Verlag Ernst & Sohn Berlin, 2010
- [85] RILEM: Bond tests for reinforcing steel, 2. Pull-out test. in: Tests and specifications of reinforcements for reinforced and prestressed concrete. (Four Recommendations of the RILEM/CEB/FIP Committee) RILEM 3 (1970), No. 15, p. 175-178
- [86] Rinder, T.: Hochfester Beton unter Dauerzuglast, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 544 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 2003
- [87] Schaper, G.: Berechnung des zeitabhängigen Verhaltens von Stahlbetonplatten unter Last- und Zwangbeanspruchung im ungerissenen und gerissenen Zustand, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 338 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin-München, 1982
- [88] Schießl, P.: Grundlagen der Neuregelung zur Beschränkung der Rissbreite, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 400, S. 158-175, 1989
- [89] Shkoukani, H.; Walraven, J.: Sustained tensile Strength of Concrete. IABSE Colloquium "Structural Concrete", Stuttgart, Vol. 62, S. 725-729, 1991
- [90] Shkoukani, H.: Behavior of Concrete under Concentric and Eccentric Sustained Tensile Loading. In: Darmstadt concrete: annual journal on concrete and concrete structures, Band 4, 1989, pp. 223-234
- [91] Shkoukani, H.: Beton unter Dauerzugbeanspruchung, Tagungsband zum Darmstädter Massivbau-Seminar, Band 1, Rissbreitenbeschränkung und Mindestbewehrung, TH Darmstadt, 1989
- [92] Sippel, Thomas M.: zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken unter Betriebsbelastung. Dissertation, Universität Stuttgart, 1996
- [93] SOFiSTiK Statik Programme Version 23.0 (Handbuch), SOFiSTiK AG Oberschleißheim, 2005
- [94] Springenschmid, R.: Die Ermittlung der Spannungen infolge von Schwinden und hydrationswärme. Beton- und Stahlbetonbau 97 (1984), Heft 10, S. 263–269
- [95] Stempniewski, L.; Eibl, J.: Finite Elemente im Stahlbeton. In: Betonkalender 1993. Teil1, S.249-312, Berlin: Verlag Ernst & Sohn 1993
- [96] Stiglat, K.; Wippel, H.: massiv Platten, Betonkalender 1996 Teil 1, Ernst & Sohn 1997
- [97] Wüstholtz, T.; Reinhardt, H. W.: "Deformation behaviour of self-compacting concrete under tensile loading", *Materials and Structures*, Vol. 40, Nr. 9. November 2007
- [98] Wesche, K.: Baustoffe für tragende Bauteile/2, Bauverlag Wiesbaden und Berlin 1993
- [99] Wittmann, F.; Zaitsev, J.: Verformung und Bruchvorgang poröser Baustoffe bei kurzzeitiger Belastung und Dauerlast, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 232 der Schriftenreihe, Verlag Ernst & Sohn, Berlin-München-Düsseldorf, 1974
- [100] Wommelsdorff, O.: Stahlbetonbau; Bemessung und Konstruktion Teil 1, Grundlagen Biegebeanspruchte Bauteile, Werner Verlag 2005
- [101] Zahlten, W.: Ein Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Computeranalyse allgemeiner Stahlbetonschalen. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1990

- [102] Zilch, K. ; Rogge, A.: Bemessung von Stahlbeton- und Spannbetonbauteile im Brücken- und Hochbau, Betonkalender 2004 Teil 2
- [103] Zilch, K.; Zehetmaier, G.: Bemessung im konstruktiven Betonbau-Grundlagen und Tragfähigkeit, 2005
- [104] Zilch, K.; Zehetmaier, G.: Bemessung im konstruktiven Betonbau-Nach DIN 1045-1 und EN 1992-1-1, 2010

*In der Schriftenreihe Betonbau sind bisher erschienen:*

- Heft 1      Andreas Arnold  
              „Zum Einfluss der Zwangsschnittgrößen aus Temperatur bei Tragwerken aus  
              Konstruktionsbeton mit und ohne Vorspannung“ (2008)
- Heft 2      Gudrun Djouahra  
              „Verhalten von Stahlbetonbauteilen unter einer kombinierten Beanspruchung aus Last und  
              zentrischem Zwang“ (2009)
- Heft 3      Melanie Krause  
              „Ein neues Konzept zum Nachweis der Standsicherheit von Dübelbefestigungen in  
              Wärmedämm-Verbundsystemen (WDVS)“ (2010)
- Heft 4      Halil Kiziltan  
              „Zum Einfluss des Druckbogens auf den Schubwiderstand von Spannbetonbalken“ (2012)
- Heft 5      Seung Jin Choi; Halil Kiziltan  
              „Zur Berechnung der Durchbiegungen von Stahlbetonplatten unter Berücksichtigung  
              wirklichkeitsnaher Materialmodelle“ (2014)



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND

SCHRIFTENREIHE BETONBAU

Herausgeber: Professor Dr.-Ing. Reinhard Maurer

HEFT 5

2014