Beiträge zum Mathematikunterricht 2011

VORTRÄGE AUF DER 45. TAGUNG FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
VOM 21.02.2011 BIS 25.02.2011
IN FREIBURG

FÜR DIE GDM HERAUSGEGEBEN VON
REINHOLD HAUG UND LARS HOLZÄPFEL

BAND 1 und 2

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Inhaltsverzeichnis, Band 1: S. 1 - 470

Inhaltsverzeichnis, Band 2: S. 471 - 948

Reinhold HAUG, Freiburg, Lars HOLZÄPFEL, Freiburg

Vorwort zum Freiburger Band „Beiträge zum Mathematikunterricht 2011“

Die 45. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik fand in der Woche vom 21. bis 25.02.2011 am Institut für Mathematische Bildung Freiburg (IMBF) statt. Zum zweiten Mal nach 1979 war die Pädagogische Hochschule somit Austragungsort dieser bundesweiten Tagung. Aus 15 Nationen konnten ca. 600 Gäste begrüßt werden.

Es gab über 280 wissenschaftliche Vorträge, in denen aktuelle mathematikdidaktische Forschungsergebnisse dargestellt und erläutert wurden. Neben zahlreichen Einzelvorträgen, moderierten Sektionen und Hauptvorträgen kam der Posterpräsentation eine besondere Bedeutung zu, denn sowohl die Gäste als auch eine Jury zeichnete das beste Poster aus, da der Waxmann-Verlag einen Posterpreis stiftete, der auf dem Gesellschaftsabend überreicht wurde. Insofern wurden die Posterbeiträge in diesem Jahr zum ersten Mal in den Tagungsband aufgenommen.

Ein besonderer bildungspolitischer Schwerpunkt auf regionaler Ebene lag in diesem Jahr in der Begegnung zwischen Wissenschaft und Praxis auf dem Lehrertag. Lehrerinnen und Lehrer aus der Region sowie Lehramtsanwärterinnen und Lehramtsanwärter aus den umliegenden Lehrerseminaren konnten an diesem Tag ein vielseitiges Programm speziell für die Praxis erleben. Inhaltlich orientierte dieses sich an den aktuellen bildungspolitischen Vorhaben des Landes. Der Schwerpunkt des Lehrertages lag daher auf dem individuellen Fördern im Mathematikunterricht durch Beobachten – Beschreiben – Bewerten – Begleiten. Über den ganzen Tag verteilt gaben 14 Vorträge für Lehrerinnen und Lehrer und andere interessierte Gäste zahlreiche Anregungen und Ideen zu Leistungsbeschreibung und -bewertung und vermittelten wissenschaftlich fundierte Einblicke in handlungsorientierten und entdeckenden Unterricht.

Ein weiterer Höhepunkt der Tagung lag in den sechs Hauptvorträgen, die der Tagung aus wissenschaftlicher Sicht einen würdigen Rahmen verliehen. Den Auftakt dazu machte am Montag Prof. Dr. Ekkehard Klieme zum Thema: „Was ist guter (Mathematik) Unterricht? – Ergebnisse und Perspektiven einer fachbezogenen empirischen Forschung jenseits von Bildungsstandards“. Im Mittelpunkt seiner Präsentation stand vor allem die Theorie der verschiedenen Basisdimensionen eines guten Unterrichts, die er in seinen langjährigen Untersuchungen zum Mathematikunterricht entwickelt hat. Mit diesem einführenden Beitrag wurde Unterrichtsforschung von einer allgemeindidaktischen Perspektive her betrachtet. Eine fachdidaktische Fokussierung erfolgte dann in den beiden Hauptvorträgen von Prof. Dr. Markus Vogel und von Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer. Herr Vogel setzte sich in seinem Vortrag „Stochastik reloaded – Die unterrichtliche Arbeit mit Daten und Zufall in der veränderten Perspektive neuer Bildungsstandards“ mit Fragen der Datenerhebung, Datenanalyse und der Datenauswertung in der Primar- und Sekundarstufe auseinander. Die Frage „Warum noch rechnen, wenn ich die Lösung sehen kann?“ wurde von Frau Rathgeb-Schnierer diskutiert. In ihrem Vortrag erörterte sie vor allem die Hintergründe zur Förderung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern. Die weiteste Anreise nahm Prof. Dr. Kaye Stacey auf sich. Sie lehrt und forscht an der University of Melbourne und referierte zum Thema: „Integrating Mathematically-Able Software into Teaching Mathematics“. Damit war auch dem an deutschen Schulen durchaus noch mit Unsicherheiten verbundenen Thema „Computereinsatz im Mathematikunterricht“ Rechnung getragen. Prof. Dr. Angelika Bikner-Ahsbahs fragte in ihrem Hauptvortrag, wie epistemische Handlungsprozesse ablaufen und berichtete in diesem Zusammenhang von einem deutsch-israelischen Projekt. Prof. Dr. Alexander Renk rundete schließlich aus Sicht der pädagogischen Psychologie mit seinen Studien zum aktiven Lernen im Bereich Mathematik die Hauptvorträge am Freitag ab. Er stellte dabei zwei durchaus konträre Sichtweisen zur Diskussion und unterschied zwischen instruktionalen und aktiven Lernformen.

Doch neben den vielseitigen Haupt- und Einzelvorträgen bot die GDM 2011 gerade den Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftlern ideale Möglichkeiten, sich mit ihrem Thema im Diskurs mit anderen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zu beschäftigen und zu vernetzen. Hilfreich war dabei ein strukturiertes Feedback zu den einzelnen Vorträgen. Während der gesamten Tagung wurden kurze Feedbackbögen ausgelegt, welche die Zuhörerinnen und Zuhörer ausfüllen und den Vortragenden rückmelden konnten.

In diesem Sinne Danken wir allen Helferinnen und Helfern, die bei großen und kleinen Problemen anpackten und somit der Tagung zum Erfolg verholfen haben. Vor allem den studentischen Hilfskräften war es zu verdanken, dass die Tagung in dieser Größe durchgeführt werden konnte. Natürlich danken wir nicht zuletzt auch allen Mitgliedern des Instituts für Mathematische Bildung Freiburg sowie der Firma „heimvorteil“, die für die Organisation und das Controlling zuständig war. Wir hoffen, dass sich alle Gäste in Freiburg wohlfühlten und bedanken uns daher noch einmal herzlich für IHR kommen.

Reinhold Haug & Lars Holzäpfel

Eröffnungsrede des 1. Vorsitzenden der GDM
Prof. Dr. Hans-Georg Weigand

Sehr geehrter Herr Rektor Druwe,

sehr geehrter Herr Regierungspräsident Würtenberger,

liebe Kolleginnen und Kollegen von der PH Freiburg,

liebe Kolleginnen und Kollegen von fern und nah,

meine sehr geehrten Damen und Herren,

ich freue mich sehr, dass wir die Jahrestagung der GDM nach 1979 zum zweiten Mal hier in Freiburg durchführen können. Mein Dank gilt zunächst allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern hier in Freiburg für die Organisation dieser Tagung. Angesichts der zahlreichen Helferinnen und Helfer, die auf der Homepage zu dieser Tagung aufgeführt sind, möchte ich hier keine einzelnen Personen hervorheben, sondern ich möchte vielmehr im Namen der GDM und aller Mitglieder dem gesamten Freiburg Team danken, den beteiligten Professorinnen und Professoren, den Mitarbeitern, den Sekretärinnen und allen studentischen Helfern. Genz herzlichen Dank für die Vorbereitung und Durchführung dieser Tagung.

Für Grußworte ist es ja mitunter reizvoll, ein Zitat an den Anfang zu stellen. Will man dann auch noch einen aktuellen Bezug herstellen, so sind „runde" Geburtstage bekannter Persönlichkeiten immer eine ergiebige Quelle. Wenn man weiterhin an die gegenwärtige Situation an den Universitäten denkt, an die heute üblichen Zielvereinbarungen, die BA-MA-Struktur denkt, dann kommt einem – natürlich – immer wieder Wilhelm von Humboldt in den Sinn. Humboldt und seine Vorstellungen über die Universität, von der Freiheit der Lehre oder auch von der Einsamkeit und Freiheit des Forschers. Doch leider hat Humboldt in diesem Jahr keinen runden Geburtstag. Aber die Humboldt-Universität in Berlin feierte im letzten Jahr ihren 200. Geburtstag. Nun erwähne ich das nicht, um noch nachträglich zum Geburtstag zu gratulieren. Ich möchte vielmehr auf die Festrede eingehen, die anlässlich dieser Geburtstagsfeier im letzten Oktober gehalten wurde. Diese Laudatio hielt der Literaturwissenschaftler Hans-Ulrich Gumbrecht von der Stanford-University in den USA.

Hans-Ulrich Gumbrecht nutzte die Gelegenheit der Festrede in Berlin, um an die Strukturbedingungen zu erinnern, die erst die Blütezeit deutscher Universitäten – im 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts – sowohl in den Natur- als auch in den Geisteswissenschaften ermöglichten.

Ich beziehe mich aus zwei Gründen auf diese Rede. Zum einen, denke ich, dass die zentralen Thesen Gumbrechts auch für aktuelle Entwicklungen an den Universitäten und insbesondere für die Didaktik der Mathematik als einer universitären, wissenschaftlichen Disziplin wichtig sind oder sein können. Zum zweiten gehe ich auf diese Festrede ein – und Sie mögen mir diesen persönlichen Bezug nachsehen – da ich Hans-Ulrich Gumbrecht noch aus seiner Würzburger Studentenzeit kenne. Schon damals habe ich ihn in literarischen, durchaus als politisch verstandenen – damals hieß das noch basisdemokratischen – Diskussionszirkeln als jemand kennengelernt, der die klassische und aktuelle Literatur als Portfolio – das Wort kannten wir damals noch nicht – für eine richtungsweisende zukunftsorientierte Denkweise zu nutzen wusste.

Gumbrecht stellte nun in seiner Berliner Rede drei Faktoren für die positive Entwicklung der deutschen Universitäten im 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts heraus.

1. Eine Berufungspolitik, die nicht auf Konsens, sondern auf produktiven Widerstand abzielte.
2. Der konsequente Verzicht auf Anwendungsorientierung, also die eigensinnige theoretische Grundlagenforschung als Ideal der Wissenschaft
3. Die leibliche Kopräsenz verschiedener Generationen

Ich sehe die Auseinandersetzung mit diesen drei Thesen für die Didaktik der Mathematik und die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik als interessant und gewinnbringend an.

Der erste Punkt – produktiver Widerstand – ist lebensnotwendig für jede wissenschaftliche und bildungspolitische Organisation. Eine lebendige Gesellschaft benötigt Mitglieder, die anders denken, anders als es der sog. Mainstream üblicherweise fordert. Also Mitglieder, die vordenken und nicht nur nachdenken, die auch querdenken. Natürlich sind Querdenker nicht immer angenehm. Aber, der eigene Standpunkt wird nur oder vor allem in der konstruktiven Auseinandersetzung mit anderen geschärft. Nur „Lena gegen Lena" ist schlichtweg langweilig.

Nun ist der produktive Widerstand in der GDM nicht meine größte Sorge. Da gibt es genügend Mitglieder, die die erste These Gumbrechts mit Leben füllen. Und das ist ja auch gut so.

Die zweite These – konsequenter Verzicht auf Anwendungsorientierung – kann sicherlich kontrovers diskutiert und ambivalent gesehen werden. Sie kann euphorische Zustimmung erfahren oder auch ablehnend als romantisierende Welt-ferne abgetan werden. Aber: Ein konsequenter Verzicht auf Anwendungsorientierung in der theoretischen Grundlagenforschung bedeutet natürlich nicht Anwendungsfeindlichkeit. Ganz im Gegenteil kann eine sog. Anwendungsferne zu höchst praktischen Konsequenzen führen. Gumbrecht führte als Beispiele dafür auch die Medizin, Mathematik und Physik in Deutschland am Ende des 19. Jahrhunderts an.

Verzicht auf Anwendungsorientierung bedeutet zunächst Freiheit, Freiheit auch visionäre Ziele verfolgen zu können, visionären Ideen nachzugehen zu können. Und so ist ja auch in der Mathematikdidaktik das Erforschen der Grundlagen des Lernens von Mathematik und ein Ausloten der Facetten des Lernprozesses ein wichtiges erkenntnistheoretisches Ziel an sich. Das Akzeptieren derartiger nicht auf die unmittelbare Anwendung zielenden Forschungsrichtungen erfordert sicherlich Toleranz und Vertrauen darauf, dass sich **nur** das Gute, Wahre und Schöne langfristig durchsetzt.

Aber, die Mathematikdidaktik ist auch eine Ingenieurwissenschaft mit dem Ziel der Entwicklung und Evaluation von Lernsituationen. Der Blick auf das Ziel der Verbesserung des Lehrens und Lernens im realen Mathematikunterricht ist ein Regulativ, wohl *das* Regulativ, das vor Beliebigkeit in der Forschung schützt und an dem sich langfristig – nicht kurzfristig – mathematikdidaktische Forschung orientieren muss. Vielleicht lässt sich deshalb für die Mathematikdidaktik eine *visionäre Anwendungsorientierung* am ehesten als Ziel angeben.

Die dritte These Gumbrechts betrifft die leibliche Kopräsenz verschiedener Generationen. Bzgl. der jüngeren Generation oder Generationen, bei den Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler hat sich in den letzten Jahren die Situation in der GDM erfreulicherweise erheblich verbessert. So konnten wir vor kurzem das 1000. Mitglied aufnehmen. Doch, es geht hier nicht nur um Anzahl, um Quantität, es geht auch um Qualität. Und da sehe ich bei den Jugendlichen heute, insgesamt, nicht nur in der Mathematikdidaktik, äußerst positive Entwicklungen. Etwa, dass es noch niemals so viele Teilnehmer bei den Nachwuchswettbewerben wie „Jugend forscht“ oder beim „Deutschen Zukunftspreis“ gab, oder dass sich das Potenzial von Studienanfängern in den letzten Jahren in vielen Aspekten erheblich verbessert hat, wenn ich etwa an die Vertrautheit mit neuen Technologien, an die sukzessive wachsenden Auslandserfahrungen oder die gestiegenen personalen Fähigkeiten denke. Das ist eine Basis, auf die auch die Mathematikdidaktik aufbauen kann.

Damit komme ich zur anderen Seite der leiblichen Kopräsenz verschiedener Generationen. Natürlich ist es gut und wichtig, dass diejenigen – nennen wir sie –

fortgeschrittenen Alters sich in die aktuelle Diskussion um Themen der Mathematikdidaktik einbringen, dass sie etwa darauf hinweisen, wenn sog. Neuerungen häufig lediglich Plagiate früherer Ideen sind. Und gegenwärtig sind ja Plagiats(nach)forschungen aktuell!

Wohl weiß ich aber auch, dass der Umgang mit dieser „fortgeschrittenen“ Seite der Kopräsenz schwieriger ist als mit der anderen „jüngeren“ Seite. Langjährige Erfahrung geht nicht immer mit der Eigenschaft einher, in der Vergangenheit erworbene Kenntnisse auf aktuelle Probleme übertragen zu können. Auch liegt es wohl in der Natur der Sache – oder besser im Laufe der Zeit – dass – nennen wir es – persönliche Befindlichkeiten dem Alter näher liegen als der Jugend. Aber nochmals: Auf die Erfahrung der fortgeschrittenen Generationen kann keine Gesellschaft – auch im Sinne des produktiven Widerstandes – verzichten. Eine Rente mit 65 oder 67 gibt es in der Wissenschaft nicht.

Damit komme ich zum Schluss. Ich wünsche Ihnen allen, dass Sie auf dieser Tagung interessante Vorträge hören, an belebenden Arbeitsgruppen teilnehmen, neue Anregungen bei vielen Gesprächen bekommen, und wir am Ende der Woche mit neuen Perspektiven für die Didaktik der Mathematik und den zukünftigen Mathematikunterricht nach Hause fahren.

Die Tagung ist damit offiziell eröffnet.

Hans-Georg Weigand
(1. Vorsitzender der GDM)

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen,
Ivy KIDRON, Jerusalem, Tommy DREYFUS, Tel Aviv

Epistemisch handeln können – aber wie?

Epistemisch zu handeln, heißt, sich in seinem Handeln auf Erkenntnis auszurichten. Erfolgreiches epistemisches Handeln baut, wenn es gelingt und zu Erkenntnis führt, Wissen durch einsichtsvolles Tätigsein auf. Im deutsch-israelischen Projekt „Effective mathematical knowledge construction in interest-dense situations“, gefördert von der German-Israeli-Foundation (Grant 946-357.4/2006), gehen wir der Frage nach, wie Prozesse der Wissenskonstruktion stattfinden. Insbesondere wollen wir verstehen, was Lernende antreibt, sich in diese „Erkenntnisprozesse“ fortgesetzt zu involvieren, wie sie Fortschritte machen und zu Erkenntnissen gelangen.

1. Stand der Forschung

Die Erforschung der Frage, wie mathematisches Wissen konstruiert wird, hat in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition. Man kann im Wesentlichen zwei Richtungen unterscheiden, Prozess-Objekt-Ansätze und dialektisch-komplementäre Ansätze. Vertreter der ersten Richtung sind z. B. Dubinsky und McDonald (2001) und Sfard (1991) und ein Vertreter der zweiten ist z. B. Radford (2008). Gilmore und Inglis (2008) kritisieren vom-Prozesse-zum-Objekt-Ansätze als ergänzungsbedürftig. Sie weisen nach, dass es Lernende gibt, die genau umgekehrt agieren, z. B. Summen erfassen können, ohne Addieren zu können.

Eine Sichtung der Literatur zeigt, dass nicht entschieden werden kann, wie Wissen genau aufgebaut wird. Je nach theoretischer Perspektive wird Wissensgenese unterschiedlich erfasst. Allen Ansätzen gemeinsam ist jedoch, dass explizit oder implizit Handlungen als didaktischer Zugang zu Wissensaufbau angesehen werden. Wenn man nun mittels Handlungen Basismodelle des Wissensaufbaus gewinnt, dann kann das, was Wissen ist, in seinen unterschiedlichen Formen und Bezügen zueinander empirisch erschlossen werden. Mathematisches Wissen ergäbe sich dann aus fachlichen Einsichten, die in epistemischen Handlungen zu mathematischen Fragestellungen gewonnen und - nach z. B. einer Überprüfung auf Gültigkeit - als geltend akzeptiert werden. Wie dieses Wissen in spezifischen Situationen generiert wird und was es ausmacht, wird auf diese Weise zu einer empirischen Frage. Genau dieses Anliegen verfolgen die beiden empirisch gewonnenen epistemischen Handlungsmodelle, die in dem vorliegenden Projekt als zentrale Werkzeuge verwendet werden. Sie sind Basis für die Rekonstruktion von Wissenskonstruktion aus individueller und sozialer Sicht.

2. Das RBC+C-Modell: Wissenskonstruktion als individueller Prozess

Basierend auf Davydovs Arbeiten (1972/1990) arbeiten Hershkowitz et al. (2001) mit einer kontextuellen Theorie der Abstraktion. Sie fassen Abstraktion als kulturelle menschliche Aktivität auf, die durch Handeln hergestellt wird. Diese Aktivität wird referierend auf Treffers & Goffree (1985) als kontextabhängige, vertikale Reorganisation von Wissen in neue mathematische Wissensbestandteile hinein verstanden. Dabei meint Kontext alles, was nicht zum direkten Wissensaufbau gehört, z. B. die Lernendenbiographien oder das soziale Umfeld. Nach diesem Modell besteht Abstraktion aus drei Phasen. Zunächst entsteht ein Bedürfnis für ein neues Konstrukt; dieses führt zur Neu-Konstruktion von Wissen, das mit dem RBC-Modell als geschachteltes epistemisches Handlungsmodell beschrieben werden kann; abschließend wird das neue Konstrukt konsolidiert (consolidated +C) (gesichert, verfügbar gemacht). Das RBC-Modell setzt sich aus den mentalen Handlungen Recognizing, Building-With und Constructing zusammen. Sie sind in Aufgabenlösungen insofern beobachtbar, als die Bearbeitung von Aufgaben durch kommunikatives, praktisches oder reflektierendes Handeln als Realisierungen epistemischen Handelns erfolgt. Recognizing-Handlungen (R) treten dann auf, wenn eine Person Konstrukte als relevant für eine Aufgabenlösung wiedererkannt. Building-with-Handlungen (B) sind Handlungen des für eine Aufgabenlösung als relevant angesehenen Zusammensetzens von wiedererkannten Konstrukten. Mit Konstruktion (Constructing: C) ist stets die Entstehung eines neuen mathematischen Konstruktes gemeint. Es umfasst Building-with-Handlungen und diese wiederum umfassen Recognizing-Handlungen.

Dieses Modell ist in zahlreichen Arbeiten auf unterschiedliche Kontexte bezogen worden: auf Einzellerner, auf Klassensituationen, Schülerpaare und -gruppen. Es konnten Building-with-Handlungen unterschiedlicher Qualität identifiziert werden, eine Teiltheorie der Konsolidierung entwickelt werden, und schließlich haben Kidron und Dreyfus zeigen können, wie Konstruktionen ineinandergreifen (für einen Überblick: vgl. Schwarz, Dreyfus und Hershkowitz, 2009).

3. Das SVSt-Modell: Wissenskonstruktion als sozialer Prozess

Das Anliegen, günstige Bedingungen für ein Mathematiklernen mit Interesse im Alltagsunterricht zu finden, hat zum Konzept interessendichter Situationen und seiner empirisch basierten Kennzeichnung geführt. Angelehnt an das Konzept der interaktionalen Verdichtung (Krummheuer, 2001) und das des Interesses als Relation zwischen Person und Interessengegenstand (Krapp, 2005) werden interessendichte Situationen im Mathematikunterricht als Situationen aufgefasst, die infolge einer mathematischen Fragestellung entstehen und folgende Merkmale aufweisen: die Lernenden involvieren sich tief in die Frage (*tiefes Involvieren*), sie bauen eine progressive Erkenntnisdynamik in dem Sinne auf, dass Wissen fortgesetzt weiterführend konstruiert wird (*progressive Erkenntnisdynamik*), und sie wertschätzen mathematische Inhalte und Aktivitäten implizit oder explizit (*positive mathematische Wertigkeit*).

Interessendichte Situationen und damit auch die Konstruktion mathematischen Wissens werden als sozial hergestellt angesehen und wurden in Hinblick auf die Frage untersucht, wie sie initiiert, stabilisiert und weitergeführt werden. In diesem Zusammenhang wurde ein epistemisches Handlungsmodell, das SVSt-Modell (englisch: GCSt), empirisch begründet entwickelt, mit dem die Erkenntnisdynamiken auch in nicht-interessendichten Situationen beschrieben werden können. Dieses Modell besteht aus drei kollektiven Handlungen, dem *Sammeln* ähnlicher mathematischer Bedeutungen, dem *Verknüpfen* weniger Zeichen/mathematischer Bedeutungen und dem *Struktursehen*. Dabei wird Struktur als Einheit von Beziehungen aufgefasst, die prinzipiell auch auf andere Sachverhalte übertragbar ist. Interessendichte Situationen zeichnen sich dadurch aus, dass sie alle ins Struktursehen hineinführen, und genau das macht sie zu besonders effektiven (im Sinne von tief gehenden) Lernprozessen. (Bikner-Ahsbahs, 2005)

4. Methodisch-methodologische Betrachtungen

Das vorliegende Projekt geht davon aus, dass Lernumgebungen entwickelbar sind, die in Hinblick auf die Aufgabenformate für die Genese von interessendichten Situationen günstige Bedingungen schaffen können. Die zwei komplementären Analyseansätze mit Analyseeinheiten vergleichbarer Größe fordern aber diachrone Betrachtungsweisen. Fruchtbar für Datenanalysen komplementärer Sichtweisen sind Methodologien zur Theorievernetzung (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2010). Ob die beiden Modelle letztendlich zu einem integralen oder aber komplementären epistemischen Handlungsmodell zusammengeführt werden können, ist derzeit noch nicht geklärt.

Entwickelt wurde eine Überkreuzmethodologie in fünf Schritten: Vereinbarung über die gemeinsame Aufgaben- oder Fragestellung, separate Bearbeitung, Austausch der Ergebnisse, Überarbeitung im Lichte der fremden Resultate, Konsensbildung soweit wie möglich.

Überkreuzmethodologisch wurden drei Aufgaben mit Interviewerinstruktion entwickelt: Aufgaben zu einer Kettenbruchentwicklung, zur Parabel als geometrischer Ort und zu einer logischen Aufgabe, die eine Argumentation im Sinne einer vollständigen Induktion fordert. Diese Aufgaben wurden in Deutschland und Israel pilotiert. Ebenfalls mit dem Überkreuzverfahren wurden Kriterien für die Video-Datenerhebung, die Transkriptionsregeln und die Übersetzung ins Englische unter Berücksichtigung von kulturell bedingten Sprechweisen erstellt. In die Datenerhebung wurden drei Schülerpaare in Deutschland und vier in Israel einbezogen. Alle Schülerpaare bearbeiteten alle drei Aufgaben, allerdings in unterschiedlicher Reihenfolge, damit Lerneffekte berücksichtigt werden können. Derzeit führen wir Überkreuz-Mikroanalysen der Transkripte ebenfalls in den oben genannten Schritten durch. Erste Ergebnisse sollen nun anhand einer Aufgabenbearbeitung zu Kettenbrüchen vorgestellt werden.

5. Die Kettenbruchaufgabe

Hier siehst du eine Folge von Brüchen, die eine Kettenbruchentwicklung darstellten:

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 + \frac{2}{1} = 1 + 2 = 3$$

$$f(2) = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1}} = 1 + \frac{2}{1+2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$f(3) = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1}}} =$$

Füge drei weitere Terme f(4), f(5), f(6) hinzu und berechne sie.

Schau dir die 7 Terme f(0), …, f(6) an. Kannst du ein Muster finden? Erkläre das Muster – wieso funktioniert es?

Berechne alle Terme bis f(20) und stelle sie als Bruch und als Dezimalzahl dar. Stelle eine Vermutung auf und begründe sie.

6. Exemplarischer Vergleich der beiden Modelle

Sammeln und Verknüpfen von Bedeutungen können als *Heuristiken* verstanden werden, während Recognizing und Building-with gemäß der Aufgabenstellung und Ziele *passieren* (Cramer, 2008). Constructing bezieht sich stets auf Neukonstruktionen und ist somit - wie theoretisch gefordert - kontextabhängig, während Struktursehen das nicht ist und auch nicht auf innermathematische Sachverhalte beschränkt bleibt. Priwitzer (2008) vergleicht die Basishandlungen und zeigt, dass Recognizing adaptiv auftreten kann. In diesem Fall haben die Lernenden eine so ausgeprägt gemeinsame Erkenntnisbasis in der Situation aufgebaut, dass ein wiedererkanntes Konstrukt sofort auch bei anderen zu einem Wiedererkennen dieses Konstruktes führt. Die sozial geteilte Wissensbasis macht also das adaptive, individuelle Mitdenken mit anderen möglich. Sammelhandlungen können im Erkenntnisprozess gänzlich unterschiedliche Funktionen haben. Zu Beginn von Erkenntnisprozessen beobachtet man häufig offenes, ungerichtetes

Sammeln. Im weiteren Verlauf tritt dann durch Ziele geleitetes sowie überleitend zum Verknüpfen auch resümierendes Sammeln auf.

7. General epistemic need – ein unbestimmtes Erkenntnisbedürfnis

Die Untersuchung der Frage, was Erkenntnisprozesse im Detail überhaupt antreibt, ist die Kernfrage des vorliegenden Projektes. In dem Versuch, das *need for a new construct (NNC)* als erste Phase zu identifizieren, sind wir jedoch wiederholt gescheitert. Stattdessen aber konnten wir andere Bedürfnisse rekonstruieren, so z. B. ein Bedürfnis nach größerer Genauigkeit, nach einem Muster oder nach einer verallgemeinernden Betrachtung. Diesen vielen Bedürfnissen schien ein basales, eher unbestimmtes Erkenntnisbedürfnis zugrunde zu liegen, das wir als *general epistemic need (GEN)* bezeichneten und im weiteren Projektverlauf untersuchten.

Das GEN begleitet Erkenntnisprozesse. Es scheint der Antrieb für die vielen kleinen Schritte zu sein, die das Voranschreiten des epistemischen Prozesses von einer vagen Idee zum definierten Konstrukt ausmachen, und es scheint situationales Interesse stabilisieren zu können. Besonders deutlich wird das GEN in Grenzsituationen. Das sind epistemische Situationen, in denen der Erkenntnisprozess stockt und Grenzerfahrungen gemacht werden. In solchen Situationen erfahren die Lernenden einen Erkenntnismangel, z. B. funktioniert eine vertraute Methode nicht mehr, notwendige Werkzeuge stehen nicht zur Verfügung, die Situation ist zu unübersichtlich, es mangelt an Konkretisierungen zum besseren Verständnis und so fort. Mit diesen Grenzerfahrungen gingen die Schüler auf zwei unterschiedliche Weisen um: Die Schüler gaben entweder auf oder ein unbestimmtes Erkenntnisbedürfnis (GEN) führte zu einer Situation, in der sie durch spezifische Erkenntnis produzierende Handlungen den Erkenntnismangel zu stillen versuchten. Dies geschah auf unterschiedliche Weise.

a. Aufgeben: In diesem Fall ist das GEN nicht vorhanden/ nicht ausgeprägt genug, um den Erkenntnisprozess voranzubringen, oder aber das vorhandene Wissen und die Anforderungen sind zu weit voneinander entfernt.

b. Bedingungen werden passend verändert: In diesem Fall passen die Anforderungen erst nach einer leichten Anpassung zum vorhandenen Wissen; eine Veränderung der Bedingungen führt dazu, dass wieder epistemisch gehandelt werden kann.

c. Zurückbeziehen auf eine gesicherte Wissensbasis: In diesem Fall geht es den Schülern um Sicherheit im Erkenntnisprozess. Auf die Frage des Interviewers bei der Bearbeitung der Kettenbruchaufgabe: „und wie sähe dann f von 100001 aus? “ antwortet Matthias nach einer Weile (1412): „aber was wir auf jeden Fall wissen ,dass ähm ne 1 vor dem Komma steht

…“. Er stellt damit klar, welches Wissen gesichert ist, dass nämlich der gesuchte Kettenbruch auf jeden Fall mit 1 beginnt.

d. Realisierungen von direkt Erkenntnis produzierenden Handlungen, die bestimmte Formen des GEN stillen können: Während in den Fällen b und c erst eine Situation geschaffen wird, in der man wieder epistemisch handeln kann, geschieht epistemisches Handeln in diesen Fällen unmittelbar, und zwar Erkenntnis produzierend. Rekonstruiert wurden bislang folgende direkt Erkenntnis produzierenden Handlungen: nach Mustern/ Strukturen suchen/diese nutzen, Hypothetisch handeln/Hypothesen prüfen, Begriffe bilden/ausarbeiten, Präzisieren/Konkretisieren/Spezifizieren, Formalisieren und Begründen/Beweisen. Dies soll nun ein Beispiel verdeutlichen.

Auf die obige Frage nach f(1000001) ergibt sich folgende Gesprächssequenz (**‚ja** bedeutet: Die Stimme setzt neu an, und /M: M fällt ins Wort):

1413	/M:	das ne ungerade Zahl ‚ja
1414	T:	2 komma ‚null null null null null
1415	/M:	ja weils ne ungerade ähm ‚Stelle ist
1416	T:	ja ‚es ist ganz nah an 2 dran schon
1417	M:	ja
1418	T:	das sind dann ja irgendwie 100 Nullen oder so (lacht) ‚und dann kommt irgend ne andere Zahl

f(1000001) kann nicht bestimmt werden, deshalb wird *gesammelt* und *verknüpft*. Zunächst stellt Matthias fest, dass das Argument ungerade ist (1413). Tims Beitrag ist dann eine Folgerung gemäß der vorhandenen Wissensbasis. Die *Begründung* von Matthias macht Tims Beitrag zu einer geprüften *Hypothese* (1415). Tim fühlt sich dann aufgefordert, seine Äußerung auszuarbeiten. Er vollzieht dabei einen *spezifizierenden* Sichtwechsel und *konkretisiert* ihn abschließend (1416, 1418). Dadurch wird zum ersten Mal die Zahl 2 mit dem Approximationsverhalten der Folgenglieder verglichen. Ein GEN wird zwar nicht explizit, implizit aber sind die direkt Erkenntnis produzierenden Handlungen geeignet, ein spezifisches GEN zu stillen, z.B. das *Bedürfnis nach Konkretisierung* oder *Begründung*.

e. Bedürfnis nach einem neuen Konstrukt (NNC): Bisweilen wissen die Schüler genau, was sie brauchen, um voranzukommen. In einem solchen Fall spricht man von einem *need for a new construct* (NNC). In der vorliegenden Episode entsteht ein solches NNC, als der Interviewer nach zahlreichen Grenzerfahrungen fragt, wie es wohl weitergeht. Tim ist der Auffassung, die Folge nähere sich der 2, erreiche 2 aber nicht (potenziell unendlich), und Matthias meint, sie erreiche im Grenzfall 2 (aktual unendlich).

Klärungsversuche leiten über zur Frage, *weshalb* die Kettenbrüche sich der Zwei nähern. Dies kann nicht unmittelbar beantwortet werden, stellt also eine Grenzerfahrung dar, die ein Bedürfnis für eine explizite (neue) Funktionsdarstellung der Kettenbrüche (NNC) erzeugt. Tim äußert dies sogar: „das Beste wäre wenn wir ne Funktionsgleichung hätten ne'". Dieses Bedürfnis führt intensiviert zu epistemischen Handlungen, die das NNC aber nicht unmittelbar stillen können, sondern nur mittelbar durch Vorschalten eines stillbaren GEN (vgl. mit Kidron et al., 2011).

Direkt Erkenntnis produzierende Handlungen bringen den Prozess in kleinen Schritten voran, denn nach direkt Erkenntnis produzierenden Handeln weiß man mehr als vorher. Mit dem Erkenntnisschritt hat man Kompetenz- und Autonomieerfahrungen gemacht, das sind psychische Grundbedürfnisse, die nach der Selbstbestimmungstheorie situationales Interesse stärken (siehe Krapp, 2005); situationales Interesse wiederum motiviert zum epistemischen Weiterhandeln, was dann wieder zu Grenzerfahrungen führen kann, usw. Erfolgreiche direkt Erkenntnis produzierende Handlungen stabilisieren demnach situationales Interesse, und im GEN scheinen sich die psychischen Grundbedürfnisse fachlich zu realisieren.

8. Indirekt Erkenntnis produzierende Handlungen

Neben den direkt Erkenntnis produzierenden Handlungen konnten wir indirekt Erkenntnis produzierende Handlungen rekonstruieren, die die Umgebung erkenntnisfördernd gestalten, z.B. indem Komplexität reduziert wird. Rekonstruiert wurden vier nicht trennscharfe Orientierungen dieser Handlungen:

- *Räumliche* Orientierungen sorgen für einen guten Überblick und schaffen Ordnung im Raum (auf den Arbeitsblättern und Texten usw.)
- *Zeitliche* Orientierungen strukturieren/optimieren den Arbeitsprozess.
- *Soziale* Orientierungen gestalten den sozialen Raum günstig für epistemisches Handeln (z.B. durch Informationsaustausch, Stützen und Wertschätzen der Beiträge des Anderen, Absprachen, …)
- *Fachliche* Orientierungen sichern die Wissensbasis z. B. durch Fehlerprophylaxe oder setzen Heuristiken ein.

In unseren Untersuchungen führen leistungsstarke Schüler diese Handlungen permanent nebenbei aus und unterstützen damit den eigenen und den gemeinsamen Erkenntnisprozess. Dies gelingt leistungsschwachen Lernenden nicht im gleichen Maße. Die vorliegenden Befunde können aber Anregungen für eine Gestaltung alltäglichen Mathematikunterrichts geben, die allen Lernenden fachliche Erkenntnisprozesse besser zugänglich macht.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. & Prediger, S. (2009): Networking theories – an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In B. Sriraman & L. English (Hrsg.): Theories of Mathematics Education. Heidelberg, New York: Springer - Advances in mathematics education series, 483-503.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005): Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie. Hildesheim, Berlin: Franzbecker div.

Cramer, J. (2008): Wissenskonstruktion am Beispiel unendlicher Mengen: eine empirische Analyse. Examensarbeit. Bremen: Universität Bremen.

Davydov, V. V. (1990): Soviet studies in mathematics education: Vol. 2. Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (Original: 1972).

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001): APOS: "A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research". In D. Holton (Hrg.): The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, 273-280.

Gilmore, G. & Inglis, M. (2008): Process- and Object-based thinking in arithmetic. Proceedings of the 32th international conference for the Psychology of Mathematics Education (PME32) (Vol. 3). Bergen, Norwegen: Bergen University College, 73-80.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. Journal for Research in Mathematics Education 32, 195-222.

Kidron, I., Bikner-Ahsbahs, A. & Dreyfus, T. (2011): How the general epistemic need (GEN) leads to the need for a new construct: A case of networking two theoretical approaches. Paper presented at CERME 7 (in press).

Krapp, A. (2005): Basic needs and the development of interest and intrinsic motivation. Learning and Instruction, 15, 381-395.

Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001): Paraphrase und Traduktion. Weinheim: Beltz Wissenschaft, Deutscher Studien Verlag.

Priwitzer, J. (2011): Epistemische Basishandlungen in Modellen zur Konstruktion mathematischen Wissens. Masterarbeit. Bremen: Universität Bremen.

Radford (2008). A cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Hrsg.): Semiotics in Mathematics Education. Rotterdam: Sense Publishers, 215-234.

Schwarz, B. B., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. In B. B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Hrsg.), Transformation of Knowledge through Classroom Interaction. London, UK: Routledge, 11-41.

Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical objects: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics 22, 1-36.

Treffers, A ., & Goffree, F . (1985). Rational analysis of realistic mathematics education - The Wiskobas program. In L. Streefland (Hrsg.), Proceedings of the PME9 (Vol. 2). Utrecht, Niederlande: OW&OC, 97-121.

Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

Warum noch rechnen, wenn ich die Lösung sehen kann?

Hintergründe zur Förderung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern

Die Thematik „Förderung flexibler Rechenkompetenzen" ist nicht neu und über die Notwendigkeit, flexibles Rechnen zu fördern herrscht bereits seit längerer Zeit Konsens (z. B. Selter 2000/2003, Anghileri 2001, Lorenz 2002, Schütte 2004). Die Zielrichtung ist klar: Grundschülerinnen und –schüler sollen nicht einfach zum schnellen und akkuraten Rechnen – also zu disziplinierten Rechenmaschinen (Anghileri 2001) – erzogen werden, sondern flexible Rechenkompetenzen entwickeln. Beim Blick in die Theorie, die Forschung und in Mathematikbücher der Grundschule wird deutlich, dass zwar die Desiderate einheitlich sind, nicht aber die Vorstellungen darüber, was mit flexiblem Rechnen gemeint ist; diese werden an vielen Stellen gar nicht explizit genannt.

Versteht man die Rolle von Theorien als „Mittler zwischen Phänomenen des Mathematiklernens und -lehrens und ihrer Forschung" (Prediger 2010, 172[1]) wird deutlich, wie wichtig die Klärung des theoretischen Verständnisses ist. Das Verständnis von flexiblem Rechnen beeinflusst verschiedene Bereiche: die Forschung, die Entwicklung und die Unterrichtspraxis. Je nach Definition werden unterschiedliche Perspektiven auf das flexible Rechnen eröffnet und damit auch jeweils eine bestimmte Realität konstituiert.

Blick in die Theorie

Das Ziel der nachfolgenden Klärung besteht darin, vorhandene explizite und implizite theoretische Annahmen zum flexiblen Rechnen herauszuarbeiten. In diesem Zusammenhang stellt sich zunächst die Frage, wie der komplexe Prozess der Lösung einer Rechenaufgabe abläuft.

1. Ebenen des Lösungsprozesses

In Anlehnung an verschiedene Autoren, die sich mit Vorgehensweisen beim additiven Rechnen beschäftigt haben (z.B. Krauthausen 1993, Radatz u.a. 1998, Selter 2000, Threlfall 2009, Wittmann 1999), lässt sich folgen-

---

[1] Prediger, Susanne (2010): Über das Verhältnis von Theorien und wissenschaftlichen Praktiken – am Beispiel von Schwierigkeiten mit Textaufgaben. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 31(2), 167-195.

des Modell zur Beschreibung des Lösungsprozesses entwickeln: Das Lösen von Aufgaben ist ein komplexes Zusammenspiel von verschiedenen Ebenen, denen unterschiedliche Rollen zukommen und die einen unterschiedlichen Explikationsgrad aufweisen (vgl. Abb. 1).

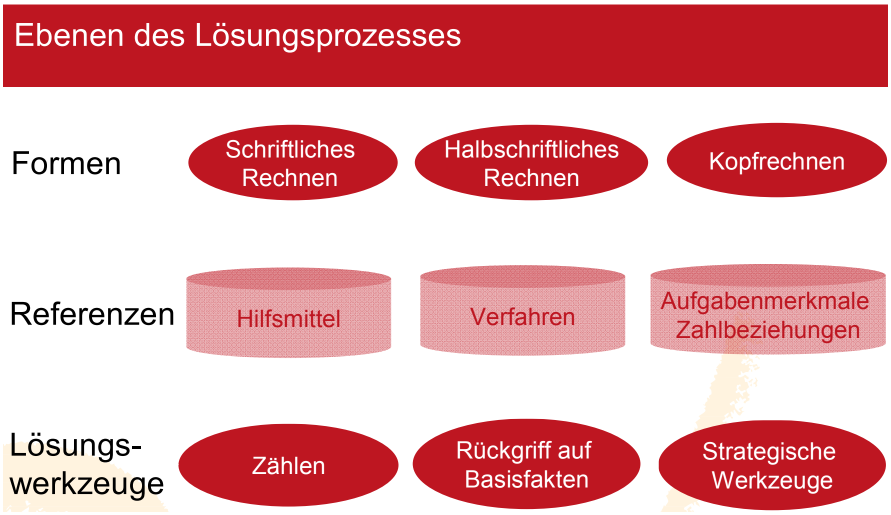


Abbildung 1

Formen: Im Lösungsprozess kann auf verschiedene Formen des Rechnens zurückgegriffen werden, wie das schriftliche Rechnen, das halbschriftliche Rechnen und das Kopfrechnen. Die von einem Kind genutzten Formen sind für den Beobachter deutlich sichtbar, sie allein reichen aber zum Lösen einer Aufgabe aber nicht aus.

Referenzen: Jedem Lösungsprozess liegen bestimmte Erfahrungen zugrunde, die hier mit dem Begriff „Referenzen" gefasst werden. So kann sich das Lösungsvorgehen eines Kindes beispielsweise auf Hilfsmittel stützen, die konkret genutzt oder mental vorgestellt werden. Ebenso können gelernte Verfahren oder erkannte Aufgabenmerkmale und genutzte Zahlbeziehungen der Referenzkontext eines Lösungsprozesses sein. Häufig ist es schwierig, den Referenzkontext anhand eines Lösungsweges zu rekonstruieren, wie Tanjas Lösungsweg zur Aufgabe 46 – 19 zeigt:

T: Ähm 46 (.) minus (..) 9 - nein, minus 6 mach ich jetzt (…) und dann sind das ja 40, und dann minus 3 sind s i e b e n u n d dreißig, und dann noch minus 10 sind 27.

Tanja zerlegt den Subtrahenden und zieht ihn sukzessive vom Minuenden ab. Ob Tanjas Vorgehen auf einem gelernten Verfahren, auf erkannten Aufgabenmerkmalen und genutzten Zahlbeziehungen oder auf der Kombination von beidem basiert, kann anhand des explizierten Lösungsweges nicht erschlossen werden.

Lösungswerkzeuge: Die Referenzebene ist noch keine Ebene der konkreten Lösung. Die Lösung einer Aufgabe erfolgt, indem im Rahmen des Referenzkontextes Lösungswerkzeuge genutzt und kombiniert werden. Lösungswerkzeuge sind das Zählen, der Rückgriff auf Basisfakten und das Nutzen von strategischen Werkzeugen. Ich verwende hier den Begriff „strategisches Werkzeug“ und grenze ihn vom Begriff „Strategien“ ab. Während der Begriff „Strategien“ in der mathematikdidaktischen Literatur häufig im Sinne fertiger Lösungswege verwendet wird (z. B. „Hauptstrategien des Zahlenrechnens“ bei Selter 2000, 231), meine ich mit strategischen Werkzeugen solche, mit denen Aufgaben verändert oder vereinfacht werden können. Dazu gehören das Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen, das gleich- und gegensinnige Verändern sowie das Nutzen von Hilfsaufgaben und Analogiewissen.

Beim Lösen von Aufgaben werden die verschiedenen Ebenen kombiniert und je nach Kombination können verschiedene Kompetenzen der Kinder rekonstruiert werden. Im Hinblick auf flexible Rechenkompetenzen besteht ein wesentlicher Unterschied darin, ob ein Kind beim Kopfrechnen seinen Lösungsprozess auf ein gelerntes Verfahren oder auf erkannte Aufgabenmerkmale und Zahlbeziehungen stützt, wie dies beispielsweise bei Simones Lösungsweg zur Aufgabe 46 - 19 der Fall zu sein scheint:

S: Wenn ich da plus mach, (*zeigt auf die Aufgabe*) dann hab ich 20 und da 47 und dann ist die leichter zum Rechnen.

I: Welche Aufgabe rechnest du denn dann?

S: 47-20. Dann kommt 26 (.) nee 27.

I: Und du bist jetzt ganz sicher, dass bei 47-20 das Gleiche rauskommt wie bei 46-19?

S: Ja, weil äh ich plus eins dazugenommen habe und dann ist da mehr und ich nehme da mehr weg.

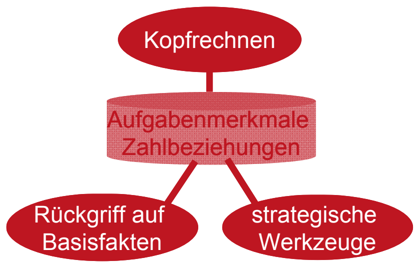


Abbildung 2

In Simones Lösungsweg lassen sich verschiedene Lösungswerkzeuge erkennen: Sie verändert die Ausgangsaufgabe gleichsinnig zur Aufgabe 47 – 20. Diese löst sie vermutlich durch eine Kombination von Analogiewissen und Rückgriff auf Basisfakten. Da sie ihr Vorgehen begründen kann, ist anzunehmen, dass ihr Referenzkontext das Erkennen und Nutzen von Aufgabenmerkmalen und Zahlbeziehung ist (vgl. Abb. 2).

2. Flexibles Rechnen

Flexibles Rechnen wird in der Literatur nicht einheitlich definiert, aber es kristallisieren sich zwei grundlegende Richtungen heraus.

Viele Arbeiten stützen sich auf das Modell der Strategiewahl (Siegler & Lemaire 1997), wobei teilweise eine Unterscheidung zwischen Flexibilität und Adäquatheit vorgenommen wird (Heinze et. al. 2009a): Unter Flexibilität wird dann die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Strategien auszuwählen, verstanden. Adäquatheit zielt auf die Fähigkeit ab, eine passende Strategie zu wählen. Torbeyns und Kollegen (2009) fassen beide Aspekte in ihrer Definition zusammen und beschreiben flexibles Rechnen als Fähigkeit, zwischen verschiedenen Strategien die für die Lösung der Aufgabe am besten passende (bewusst oder unbewusst) auszuwählen.

Eine kritische Auseinandersetzung mit dem Modell der Strategiewahl findet sich in den theoretischen Arbeiten zum flexiblen Rechen von Threlfall (2002/2009). Er betont: „However, there are difficulties with the notion of strategic choice as an explanatory model for strategic flexibility at the calculation-flexibility level, and it seems appropriate to seek an alternative" (Threlfall 2009, 554)[2]. Die von ihm beschriebene Alternative möchte ich im Folgenden als „Modell der Emergenz" bezeichnen. Threlfall (2002) betont, dass eine Strategie im Sinne eines kompletten Lösungswegs nicht gewählt wird, sondern emergiert. Flexibles Rechnen kann dementsprechend als situationsbedingtes, individuelles Reagieren auf spezifische Aufgabenmerkmale und die entsprechende Konstruktion eines Lösungsvorgehens unter Nutzung strategischer Werkzeuge beschreiben werden (Rathgeb-Schnierer 2010).

Verknüpft man diese beiden Definitionslinien mit den oben dargestellten Ebenen des Lösungsprozesses (vgl. Abb. 1), so stellt sich eine Verbindung wie folgt dar:

- Strategiewahl kann sich auf die Ebene der Formen oder der Lösungswerkzeuge beziehen. Dementsprechend wird ein Kind dann als flexibler Rechner betrachtet, wenn es eine adäquate Form und innerhalb dieser ein adäquates Lösungswerkzeug wählen kann. Allerdings richten die meisten Forschungsarbeiten ihren Blick ausschließlich auf die Ebene der Lösungswerkzeuge.
- Beim Modell der Emergenz spielt die Verbindung der Ebenen „Lösungswerkzeuge" und „Referenzen" eine wichtige Rolle, weil davon ausgegangen wird, dass Lösungswege abhängig von den im Prozess

[2] Threlfall, John (2009): Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 41(5), 541–555.

erkannten Aufgabenmerkmalen und Zahlbeziehungen emergieren. Als flexibler Rechner wird nur das Kind bezeichnet, das sich eben nicht auf ein gelerntes Verfahren stützt, sondern auf erkannte Aufgabenmerkmale und Zahlbeziehungen.

Mit beiden Modellen sind ganz spezifische Merkmale und Herausforderungen verknüpft:

- Nutzt man das Modell der *Strategiewahl* als Erklärungsmodell für flexibles Rechnen, werden Gesichtspunkte wie das Strategierepertoire sowie die Häufigkeit, Effektivität und Adäquatheit von genutzten Strategien betrachtet (Siegler & Lemaire 1997). Der Fokus liegt auf der Art der Lösung: Wie viele verschiedene Strategien nutzt ein Kind beim Lösen von Aufgaben? Wie häufig werden einzelne Strategien genutzt? Sind die genutzten Strategien effektiv und aufgabenadäquat? Erklärt man flexibles Rechnen über die Adäquatheit eines Lösungsweges, sind damit verschiedene Herausforderungen verbunden. Einmal muss definiert werden, welches der adäquate Lösungsweg für eine bestimmte Aufgabe ist und welche Kriterien bei der Auswahl relevant sind (Heinze et. al. 2009a, Steinberg 1985, Threlfall 2002). Zum anderen stellt sich die Frage, ob die Wahl eines adäquaten Lösungsweges nicht auch auf der Anwendung eines gelernten Verfahrens beruhen kann. Wenn dies der Fall ist, kann dann noch von flexiblem Rechnen gesprochen werden oder handelt es sich nicht vielmehr um die routinemäßige Anwendung eines Verfahrens (Threlfall 2009)?
- Nutzt man das Modell der Emergenz als Erklärungsmodell für flexibles Rechnen, so werden Aspekte wie das Zahl- und Operationswissen, das Erkennen von Zahlen- und Aufgabenmerkmalen und die entsprechende Nutzung und Kombination strategischer Werkzeuge relevant (Heirdsfield & Cooper 2004, Schütte 2004, Threlfall 2009). Diese Aspekte werden nicht durch die Art der Lösung sichtbar und deshalb muss der Blick auf das Vorgehen bei der Lösung, also den Lösungsprozess gerichtet werden: Erkennt ein Kind Aufgabenunterschiede? Werden dementsprechend strategische Werkzeuge genutzt? Werden strategische Werkzeuge innerhalb eines Lösungsweges kombiniert? Werden Lösungswege begründet? Auch wenn man flexibles Rechnen damit erklärt, dass im Lösungsprozess Aufgabenmerkmale erkannt und der Lösungsweg unter Nutzung passender strategischer Werkzeuge konstruiert wird, gibt es spezifische Herausforderungen. Einmal stellt sich die Frage, wie man die internen Lösungsprozesse von Kindern offenlegen kann und zum anderen, woran sich zeigt, dass ein

Kind Aufgabenmerkmale im Lösungsprozess erkennt und entsprechende strategische Werkzeuge nutzt (Rathgeb-Schnierer 2010).

Blick in die Forschung

In den vergangenen zehn Jahren wurde eine ganze Reihe von Forschungsarbeiten publiziert, die sich mit Fragen zum flexiblen Rechnen beschäftigen. In Form eines kurzen Überblicks lassen sich die Ergebnisse wie folgt zusammenfassen:

- Schülerinnen und Schüler zeigen beim Lösen von Aufgaben kaum aufgabenadäquates Handeln. Unabhängig von deren Effektivität, bevorzugen sie schriftliche Algorithmen (Selter 2000, Benz 2007).
- Das Rechnenlernen über Musterlösungen wirkt sich negativ auf die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen aus (Beishuizen & Klein 1998, Heirdsfield & Cooper 2004, Schütte 2004).
- Lösungswege hängen nicht in erster Linie von Aufgabentypen ab, sondern vielmehr von speziellen Zahlenmerkmalen einer Aufgabe (Blöte et. al. 2000, Torbeyns et. al. 2009) und von der Zahlwahrnehmung im Lösungskontext (Rathgeb-Schnierer 2010).
- Flexible Rechner verfügen über aspektreiches Zahlwissen, Zahl- und Operationsverständnis, beherrschen Basisfakten und zeigen im Hinblick auf das Fach Mathematik Selbstvertrauen und eine positive Einstellung (Heirdsfield & Cooper 2002/2004, Hope 1987, Threlfall 2002). Zudem erkennen sie Aufgabenmerkmale und Zahlbeziehungen und nutzen diese beim Lösen von Aufgaben (Macintire & Forrester 2003, Rathgeb-Schnierer 2010, Schütte 2004, Threlfall 2009).
- Die Entwicklung eigener Lösungswege sowie die Entwicklung von Flexibilität kann durch entsprechende Unterrichtsansätze, z. B. das Lernen auf eigenen Wegen anhand komplexer Aufgabenstellungen, gefördert werden (Beishuizen & Klein 1998, Fuson & Burghardt 2003, Heinze et. al. 2009b, Rathgeb-Schnierer 2006).

Betrachtet man die referierten Forschungsarbeiten, so wird deutlich, dass sie sich explizit oder implizit auf eines der beiden zuvor dargestellten theoretischen Erklärungsmodelle stützen. Es zeigt sich zudem, wie sich die zwei verschiedenen theoretischen Grundlinien auf die Art der Fragestellung, die Methoden der Erforschung und die Rückbindungen der Ergebnisse in die Theorie auswirken. Forschungsarbeiten, die sich auf das Strategiewahlmodell beziehen, fokussieren die adäquate Wahl von Lösungswerkzeugen und nutzen vorwiegend quantitative Methoden (z. B. Blöte et-al. 2000, Torbeyns et. al. 2009, Verschaffel et. al. 2007). Arbeiten, denen das Emergenzmodell zugrunde liegt, richten ihren Blick auf den Lösungsprozess und dessen Referenzkontext und nutzen dafür qualitative Methoden (z. B. Heirdsfield & Cooper 2002/2004; Rathgeb-Schnierer 2006). Die zwei unterschiedlichen theoretischen Zugänge können dementsprechend als „Brillen“ verstanden werden, die einerseits verschiedene Ausschnitte des komplexen Konstrukts „flexibles Rechnen“ fokussieren und damit Forschungspraxis und Erkenntniswege öffnen, anderseits gleichzeitig den Blick auch einengen und somit Erkenntniswege begrenzen (Prediger 2010). Sie beeinflussen sowohl die Art der Fragestellung als auch das, was als Antwort auf diese Fragestellung betrachtet wird.

Blick in die Entwicklung

Beim abschließenden Blick in die Entwicklung wird zwei Fragen nachgegangen: Worüber müssen Kinder verfügen, um flexibel rechnen zu können? Wie vollzieht sich die eigenständige Rechenwegsentwicklung?

Die nachfolgenden Antworten beziehen sich auf Ergebnisse einer Fallstudie zur Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen von Schülerinnen und Schülern des zweiten Schuljahrs (Rathgeb-Schnierer 2006/2010). Basierend auf dem Modell der Emergenz lag das Forschungsinteresse auf den Lösungsprozessen der Kinder. Zur Datenerhebung wurden zu drei verschiedenen Zeitpunkten Interviews mit den Kindern (n=20) durchgeführt und anhand eines sytematisch-extensionalen Interpretationsverfahren ausgewertet (Beck & Maier 1994).

Bei der Auswertung der Daten haben sich unsere Vorannahmen bestätigt, dass Rechenwege von soliden Kenntnissen der Basisfakten, vom Wissen über Zahlen und Operationen und vom Verfügen über strategische Werkzeuge abhängen (vgl. Abb. 3). Wir konnten aber auch viele Verhaltensweisen beim Lösen von Aufgaben beobachten, die sich mit den oben genannten Einflussfaktoren nicht erklären ließen. Beispielsweise, warum ein Kind zwei strukturgleiche Aufgaben mit Hilfe verschiedener Lösungswerkzeuge löst oder sein Lösungsvorgehen im Prozess plötzlich verändert[3].

Bei der Analyse dieser mit den bisherigen Grundannahmen nicht zu erklärenden Verhaltensweisen zeigte sich ein weiterer Einflussfaktor auf interne Rechenwege: Interne Rechenwege werden entscheidend von den im konkreten Fall erkannten spezifischen Aufgaben- und Zahleigenschaften beeinflusst (Blöte et al. 2000). Dieses individuelle und momentane Erkennen

---

[3] Eine Zusammenfassung der Studie ist nachzulesen in: Rathgeb-Schnierer, E. (2010). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(2), 257-283.

bezeichne ich als Wahrnehmung von Zahlen und Aufgaben (vgl. Abb. 3). Ob die erkannten Eigenschaften im Lösungsprozess Anwendung finden können, hängt mitunter vom Wissen über die Regeln im Umgang mit Zahlen und Operationen sowie von den individuellen Zahlpräferenzen ab (Selter 1999).

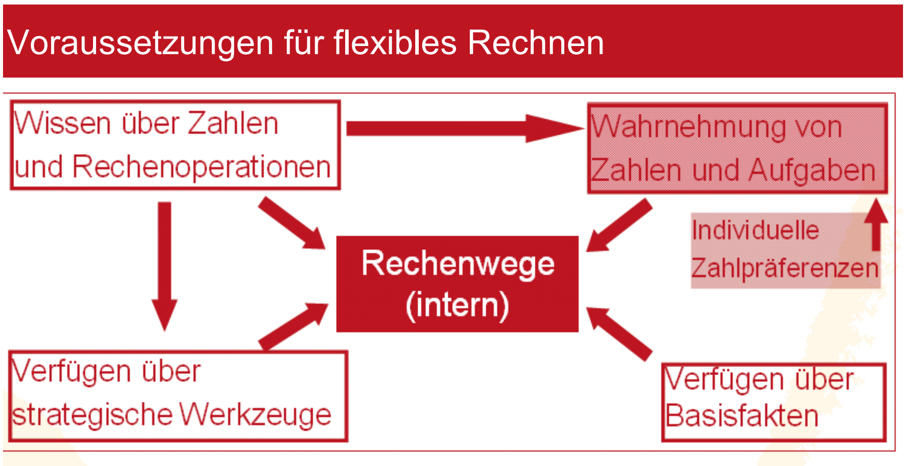


Abbildung 3

Die dargestellten Voraussetzungen für flexibles Rechnen geben einen Hinweis darauf, welche Art von Aktivitäten im Unterricht zum Tragen kommen sollte. Grundsätzlich ist es wichtig, alle vier Bereiche zu fördern (vgl. Abb. 3). Besonderes Augenmerk sollte m.E. auf den Bereich „Wahrnehmung von Zahlen und Aufgaben“ gelegt werden, der in aktuellen Schulbüchern vielfach keine oder nur eine untergeordnete Rolle spielt. Dieser Bereich kann durch kontinuierliche Aktivitäten zur Schulung des Zahlenblicks (Schütte 2008) gefördert werden. Sie zielen darauf ab, dass Aufgaben nicht sofort gerechnet, sondern im Hinblick auf ihre inhärenten Merkmale, auf ihre Struktur und Beziehungen zu den anderen Aufgaben betrachtet werden (Rathgeb-Schnierer 2008, Rechtsteiner-Merz 2011).

Die Entwicklung der internen Rechenwege in Richtung Flexibilität erfordert neben geeigneten Aktivitäten auch den entsprechenden Unterrichtsrahmen. In der o. g. Studie hat sich gezeigt, dass die eigenständige Entwicklung von Rechenwegen sowie deren Artikulation und Austausch zentrale Entwicklungsfaktoren darstellen. Dementsprechend bedarf es einer Lernumgebung, die durch geeignete Angebote einerseits die eigene Auseinandersetzung der Kinder anregt und andererseits zum Austausch von Lösungswegen und Erfahrungen herausfordert (Rathgeb-Schnierer 2006).

Literatur

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann bei der Autorin per Email angefordert werden: rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de

Alexander RENKL Freiburg

Aktives Lernen in Mathematik: Von sinnvollen und weniger sinnvollen Konzeptionen aktiven Lernens

1. Einleitung

Viele instruktionale Maßnahmen und Unterrichtsmethoden für das Mathematiklernen werden unter anderem damit begründet, dass sie zu aktivem Lernen führen (z. B. "Inquiry-Ansätze" oder Gruppenarbeiten). Doch was ist mit aktivem Lernen genau gemeint, und ist es immer sinnvoll? Oder anders formuliert: Welche Formen aktiven Lernens sind sinnvoll?

Obgleich aktives Lernen typischerweise als effektives Lernen angesehen und als Gegenentwurf zum (passiven) Lernen in traditionellen Lernformen verstanden wird (siehe Renkl, in Druck), wird selten eine explizite Definition gegeben. Entsprechend wird dieser Begriff ganz unterschiedlich verwendet. Ziel dieses Beitrags ist es, drei typische Sichtweisen zum aktiven Lernen vorzustellen und kritisch zu bewerten. Bei der Beurteilung dieser Sichtwiesen wird eindeutig Stellung bezogen. Dabei wird von bestimmten Voraussetzungen ausgegangen, die an dieser Stelle explizit werden.

Erstens geht es in diesem Beitrag um den Erwerb "inhaltlichen" Wissens, nicht um andere Lernziele, wie etwa Veränderung "mathematischer Weltbilder" oder Fertigkeiten der Selbststeuerung. Es wird der Erwerb von verständniskonstituierendem Wissen zu mathematischen Konzepten, Algorithmen und Heuristiken (z. B. im Bereich des Beweisens) betrachtet. Zweitens wird als Ziel anwendbares Wissen gesehen, das aus integrierten mentalen Repräsentationen von einerseits (abstrakten) Konzepten und Prinzipien und andererseits Problemsituationen einschließlich der Lösungen (Instanziierungen) besteht (siehe Renkl, 2011). Es geht also darum, dass ein Schüler z. B. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtige Konzepte (z. B. unabhängige Ereignisse) und Prinzipien (z. B. Multiplikationssatz) kennt und zudem weiß, wie diese Konzepte und Prinzipien in Problemsituationen (z. B. bei der Analyse von Glückspielen) einzusetzen sind. Bei der folgenden Lektüre sollten diese Voraussetzungen im Hinterkopf behalten werden.

Nach Renkl (2009; in Druck) lassen sich drei Perspektiven unterscheiden: Perspektive des aktiven Tuns, Perspektive der aktiven Informationsverarbeitung und Perspektive der fokussierten Informationsverarbeitung.

2. Perspektive des aktiven Tuns

Diese Perspektive betrachtet insbesondere offene Lernaktivitäten, so etwa aktives Problemlösen, Hands-on-Aktivitäten oder Teilnahme an fachlichen

Diskussionen mit Peers, als besonders lernförderlich (vgl. Greeno, 2006; Lave, 1996). Sie wird typsicherweise von Ansätzen vertreten, die sich als *konstruktivistisch* (z. B. im Sinne Piagets), *sozialkonstruktivistisch* (z. B. unter Bezug auf Vygotsky) oder *situiert* (z. B. Greeno, 2006; Lave, 1996) bezeichnen. Insbesondere „situierte Ansätze" postulieren, dass Wissen nicht aus für sich stehende Entitäten in Kopf besteht, sondern mit *Aktivitäten* verbunden ist (z. B. Barab et al., 2008). Diese Aktivitäten sind wiederum an konkrete Situationsklassen gebunden. Damit sind auch Wissen und Lernen situiert (Greeno, 2006). Vor diesem Hintergrund soll zu erwerbendes Wissen in Aktivitätsmuster „eingebaut" erworben werden, die zu Situationen der Anwendung passen. Um sich entsprechende Aktivitätsmuster anzueignen, sollten Lernende aktiv an "authentischen" Diskursen und Problemlöseprozessen teilnehmen (z. B. Greeno, 2006; Lave, 1996).

Akzeptiert man die Annahme, dass Lernen ein Prozess ist, der sich im Kopf (Gehirn) vollzieht, ist es problematisch, Kriterien darüber, ob effektives Lernen stattfindet, primär an offenen Aktivitäten festzumachen. Wird dies dennoch gemacht (vgl. z. B. Chi, 2009), so muss man die (zumindest implizite) naive Annahme einer 1:1-Korrepondenz zwischen äußerlich sichtbaren Lernaktivitäten und dem, was im Kopf der Lernenden passiert, unterstellen (Renkl, 2009). Ein eindrückliches Beispiel, dass dies beim Mathematiklernen nicht so sein muss, stammt von Pauli und Lipowsky (2007). Die verbale Beteiligung der Schüler am Unterricht, die von den Autoren als aktive Partizipation beim Lernen angesehen wird, sagt nicht den Lernerfolg vorher. Vermeintlich aktive Schüler lernten also nicht mehr. Ein weiterer empirischer Befund stammt von Renkl (1996). Er zeigte, dass Lernen durch Lehren – ein „Paradebeispiel" für aktives Lernen aus der Perspektive des aktiven Tuns – die Lernenden in Stress versetzen und sie überfordern kann, wenn sie erst begonnen haben, sich einen Stoffbereich zu erschließen. Diejenigen, die nach einer ersten Selbstlernphase den Stoff (hier: Wahrscheinlichkeitsrechnung) anderen erklärten, die dieselbe Selbstlernphase gerade hinter sich gebracht hatten, lernten weniger als die Zuhörenden. Die "passiven" Zuhörenden erwarben also mehr Wissen.

Zusammengefasst weist die Perspektive des aktiven Tuns theoretische Probleme auf und sie steht im Widerspruch zu empirischen Befunden. Für weitere für diese Perspektive problematische Befunde und theoretische Analysen siehe Leuders und Holzäpfel (in Druck) sowie Renkl (in Druck).

3. Perspektive der aktiven Informationsverarbeitung

Aus der kognitionspsychologisch "inspirierten" Perspektive der aktiven Informationsverarbeitung ist vor allem die tiefe mentale Verarbeitung von

Information bzw. von Lernstoff entscheidend (vgl. den Begriff des kognitiv aktivierenden Unterrichts; z. B. Baumert et al., 2010). Damit ist nicht die offene Aktivität entscheidend, sondern die mentale stoffbezogene Aktivität. Auch dies entspricht einer konstruktivistischen Grundauffassung, da nicht angenommen wird, dass das Wissen direkt vermittelt oder übertragen werden kann, vielmehr müssen die Lernenden aktiv Information interpretieren und daraus Wissen konstruieren (Renkl, 2009, in Druck).

Die Perspektive der aktiven Informationsverarbeitung kommt nicht in jedem Fall zu anderen Bewertungen von Lernarrangements als die des aktiven Tuns. Zwar ist die aktive Informationsverarbeitung entscheidend, oftmals wird aber angenommen, dass offene Aktivitäten (z. B. Explorieren) lernförderlich sein können. Die Lernförderlichkeit wäre aber immer über die Induktion mentaler Verarbeitungsprozesse (z. B. Hypothesenbilden und –testen) vermittelt (vgl. Chi, 2009). Allerdings wird auch ins Kalkül einbezogen, dass offene Aktivitäten (z. B. Problemlösen) der stoffbezogenen mentalen Aktivität abträglich sein können (vgl. die Befunde von Renkl, 1996, zu den Effekten des Erklärens).

Den vielfach in der Forschung verwendeten Lernstrategiefragebögen liegt ebenfalls diese Perspektive zugrunde. Sie thematisieren –zumindest bei Skalen zu primären Lernstrategien, die direkt mit der Wissenskonstruktion in Zusammenhang stehen – im Prinzip lernförderliche mentale Aktivitäten (z. B. eigene Beispiele suchen, Analogien ziehen oder Hauptpunkte identifizieren) und fragen ab, ob Lernende diese einsetzen (z. B. Schukajlow & Leiss, 2011). Je mehr eine Person angibt, entsprechende Aktivitäten einzusetzen, einen umso höheren („günstigen“) Kennwert erhält sie. Es kann jedoch angezweifelt werden, dass es wirklich sinnvoll, wenn ein Lernender beim Lernen möglichst viele der zahlreichen im Fragebogen genannten Lernstrategien einsetzt. Zumindest die typischerweise sehr schwachen Zusammenhänge zwischen solchen Fragebogenmaßen und Lernerfolg (z. B. Jamieson-Noel & Winne, 2003; Schukajlow & Leiss; 2011) legen nahe, dass ein pures "Mehr" an solchen kognitiven Aktivität nicht unbedingt optimal ist (siehe Glogger, Schwonke, Holzäpfel, Nückles & Renkl, 2011)..

Als zweites Beispiel für die Problematik der Perspektive der aktiven Informationsverarbeitung dienen die Befunde von Hilbert, Renkl, Kessler und Reiss (2008). Sie gaben Erstsemestern komplexe Lösungsbeispiele vor, anhand derer heuristische Vorgehensschritte für das Finden mathematischer Beweise erlernt werden konnten (dabei ging es „nur“ um das Finden einer Beweisidee und deren Absicherung durch eine argumentative Kette, nicht um die formale Ausarbeitung eines Beweises). Diese heuristischen Vorgehensschritte wurden an geometrischen Inhalten exemplifiziert. Die Lernenden mussten somit auch geometrische Inhalte verstehen, um die Heuristiken nachzuvollziehen. Entsprechend wurden zwei Maßnahmen zur "Aktivierung" implementiert bzw. experimentell variiert. Zum einen wurden auszufüllende Lücken in die geometrischen Teile der Lösungsbeispiele eingebaut (z. B. „Ein Punkt-Spiegelung entspricht einer Rotation um ___ Grad.“); zum anderen wurden die Lernenden nach entsprechenden Abschnitten der Lösungsbeispiele über Prompts („Leitfragen“) aufgefordert niederzuschreiben, welcher heuristische Schritt gerade vollzogen wurde und warum. Letztgenannte Maßnahmen sollten den Fokus auf die heuristischen Schritte lenken. Um den Lernerfolg zu ermitteln, wurde das konzeptuelle Wissen über Beweisen erfasst und es wurden Beweisaufgaben gestellt (Beweisfertigkeiten). Für den gleichzeitigen Erwerb von konzeptuellem Wissen und Beweisfertigkeiten war die Lernbedingung mit Prompts zu den Beweisschritten und ohne Geometrielücken am effektivsten. Das Lernen war also nicht dann am erfolgreichsten, wenn möglichst viele Anregungen zur aktiven Verarbeitung gegeben wurden (Prompts und Lücken), sondern wenn das fokussiert wurde (nur Prompts), was „im Kern“ gelernt werden sollte; dies war eben das Finden und Überprüfen einer Beweisidee.

Zusammengefasst kann es bezweifelt werden, ob das pure Aktivieren lernstoffbezogener Informationsinformation optimal ist (zu einer weitergehenden Erörterung siehe Renkl, 2009, in Druck). Um diesem Problem Rechnung zu tragen, wird im nächsten Abschnitt wird die Perspektive der fokussierten Informationsverarbeitung vorgestellt.

4. Perspektive der fokussierten Informationsverarbeitung

Die Perspektive der fokussierten Informationsverarbeitung steht nicht im grundsätzlichen Widerspruch zu derjenigen der aktiven Informationsverarbeitung; sie differenziert diese vielmehr aus. Es wird postuliert, dass effektives Lernen darin besteht, dass bei der aktiven Informationsverarbeitung die zentralen Konzepte und Prinzipien fokussiert werden (Renkl, 2009, in Druck). Maßnahmen, die bei den Lernenden Informationsverarbeitung hinsichtlich nicht zentraler Lernziele induzieren, sind eher hinderlich als produktiv aktivierend, wie dies exemplarisch die Befunde von Hilbert et al. (2008) zeigen (negative Effekte von "aktivierenden Lücken“ in geometrischen Inhalten beim Erlernen des Beweisens).

Im Folgenden werden drei Beispiele aus eigener Forschung vorgestellt, die zeigen, wie fokussierte Informationsverarbeitung gefördert werden kann. Das erste Beispiel greift die Funktion von Selbsterklärungsprompts beim Lernen aus Lösungsbeispielen auf. Die grundlegende Logik des Lernens aus Lösungsbeispielen besagt, dass Lernende zunächst Lösungswege verstanden haben sollten, bevor sie selbst Aufgaben bearbeiten, um „mechanisches“ Vorgehen zu vermeiden und verstehensorientiertes Bearbeiten von Aufgaben zu ermöglichen (Renkl, 2011). Entsprechendes Verständnis kann dadurch gefördert werden, dass die Lernenden beim Beispielstudium angeleitet werden, sich das Beispiel mit Bezug auf die zugrundeliegenden zentralen Konzepte und Prinzipien zu erarbeiten (d.h. sich selbst zu erklären). So sollen Lernende z. B. bei einem Lösungsschritt angeben, welcher wahrscheinlichkeitstheoretische Satz ihm zugrunde liegt. Wir konnten in einer Reihe von Studien zeigen (z. B. Berthold, Eysink & Renkl, 2008), dass solche Prompts bei geeigneten Lernvoraussetzungen, die ein weitgehend erfolgreiches Bearbeiten dieser Anforderung erlauben (Berthold & Renkl, 2009), Verständnis und Transfer bei Mathematiklernen fördern.

Ein zweites Beispiel bezieht sich auf die Nutzung multipler externaler Repräsentationen (Darstellungssysteme) beim Mathematiklernen. Nach einer weit verbreiteten naiven Annahme wird mehr gelernt, wenn mehr unterschiedliche Darstellungsarten vorgegeben werden (z. B. Gleichung und Abbildung statt nur Gleichung). Lernende sind aber sehr oft mit der Nutzung unterschiedlicher Repräsentationen überfordert, so dass diese bisweilen sogar abträglich sein können (Ainsworth, 2006). Schwonke, Berthold und Renkl (2009) fanden, dass sich selbst bei fortgeschrittenen Lernenden (Psychologiestudierende) kaum Anzeichen dafür finden, dass sie multiple Repräsentationen in dem Sinne nutzten, wie es entsprechende Theorien als nützlich erachteten (z. B. Ainsworth, 2006). Wenn man sich fragt, woher denn die Lernenden wissen sollten, was sich z. B. Instruktionsdesigner denken, wenn sie multiple Repräsentation vorgeben, erscheint dieser Befund wenig überraschend. Eine nahe liegende Konsequenz ist es, die Lernenden einfach entsprechend zu informieren. Schwonke et al. (2009) testeten, ob Lernende davon profitieren, wenn man sie kurz (1-2 Minuten) darüber aufklärt, wie man in einem mathematischen Lernprogramm die multiplen Repräsentation nutzen sollte. Es wurde dargelegt, dass bei Lösungsbeispielen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung die vorgegebenen Baumdiagramme quasi als Brücke benutzt werden sollten, um zu verstehen, wie man vom Problemtext der Aufgabenstellung zur Gleichung kommt. Diese sehr sparsame Intervention hatte substantielle positive Effekte auf den Lernerfolg. Schwonke et al. (2009) haben also die Lernenden darüber informiert, wie sie gezielt bzw. fokussiert multiple Repräsentationen nutzen können, und dies hat den Lernerfolg bedeutsam erhöht.

Das dritte Beispiel greift ebenfalls das Lernen aus Lösungsbeispielen auf. Statt die Lernenden sich die Beispiele selbst erklären zu lassen, kann man ihnen auch entsprechende instruktionale Erklärungen geben. Allerdings erweist sich diese Option oft als problematisch (Renkl, 2011), wofür mehrere Faktoren verantwortlich gemacht werden können. Unter anderem verarbeiten die Lernenden die instruktionalen Erklärungen vielfach nur oberflächlich. Berthold und Renkl (2010) benutzten deshalb Prompts, die eine Weiterverarbeitung von instruktionalen Erklärungen in Hinblick auf eine fokussierte Verarbeitung zentraler Prinzipien (mathematischer Sätze) induzierten. Dabei mussten die Lernenden Fragen zu den Erklärungen beantworten, die sich insbesondere auf die zugrunde liegenden Sätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Rationale bezogen. Mit diesen Prompts wurde der Lernerfolg deutlich erhöht.

Zusammengefasst betont die Perspektive der fokussierten Verarbeitung, dass es ausschlaggebend ist, ob die zentralen Konzepte und Prinzipien fokussiert und in korrekter Weise erworben werden. Entsprechend gestaltete Prompts sind eine Möglichkeit, fokussierte Verarbeitung zu induzieren.

5. Zum Abschuss: Antworten auf mögliche kritische Einwände

Gegen die vorgebrachte Position kann ich eine Reihe von Einwänden antizipieren; drei naheliegende werden hier aufgegriffen. Erstens könnte man vorbringen, dass man beim problemorientierten Lernen, dessen Nutzen doch gut belegt ist, zunächst eine unfokussierte Aktivität induziert, in den Sinne als man nicht gleich zu den zentralen Konzepten und Prinzipien vorstößt. Das stimmt, aber die empirisch gut bewährten Ansätze des problemorientieren Lernens nutzen eine vergleichsweise kurze Phase der unfokussierten Aktivität gerade dazu, die Fokussierung in einer anschließenden Lernphase zu erhöhen (z. B. Schmidt, de Grave, de Volder, Moust & Patel, 1989; Schwartz & Martin, 2004).

Zweitens könnte man einwenden, dass Lernformen wie entdeckendes Lernen (Inquiry Learning) nicht nur den Erwerb mathematischen Inhaltswissen fördern, sondern auch allgemeinere Fertigkeiten wie Hypothesentesten oder Selbstregulation. Dass entdeckendes Lernen durchaus erfolgreich sein kann, wenn es gut strukturiert wird, so dass die Aufmerksamkeit der Lernenden auf Zentrales fokussiert wird, sei unbestritten (z. B. Alfieri, Brooks, Aldrich & Tenenbaum, 2011). Dass Lernende beim Entdecken ausgerecht so anspruchsvolle Lernziele wie Hypothesentesten oder Selbstregulation in substantiellem Ausmaß quasi nebenbei erreichen, dafür kenne ich keinen überzeugenden Beleg. Nutzt man entdeckendes Lernen, um etwa Selbstregulation zu fördern – wogegen sicherlich nichts einzuwenden ist -, müssen die Lernenden explizit darauf fokussiert werden - wohl dann allerdings auf Kosten anderer Lernziele.

Drittens könnte man die Gefahr einer „Überdidaktisierung“ sehen, wenn man Lernende immer "an der Hand nimmt", um auf die wichtigsten Konzepte und Prinzipien zu fokussieren. Ich stimme zu. Die Perspektive der fokussierten Verarbeitung ist so jedoch nicht gemeint. Bei Lernenden mit höherem Vorwissen z. B. kann man weitgehend darauf vertrauen, dass sie die wichtigen Aspekte fokussieren. Entsprechendes „didaktisches Gängeln“ wäre abträglich (vgl. Expertise-Umkehr-Effekt; Kalyuga & Renkl, 2010). Zudem wird das Prinzip der „erwünschten Schwierigkeit“ (Bjork & Bjork, 2011) keineswegs in Abrede gestellt: Lernbedingungen, die es für die Lernenden zunächst „schwerer“ machen, erhöhen vielfach den Lernerfolg. So ist es meist besser, die Lernenden die Prinzipien hinter Beispiellösungen sich selbst erklären zu lassen (Vorgabe von Selbsterklärungsprompts) als sie ihnen zu erklären (Vorgabe instruktionaler Erklärung; Renkl, 2011). Die Perspektive der fokussierten Erklärung sollte nicht dahingehend missverstanden werden, als dass das Wichtige den Lernenden immer „auf dem Tablett serviert“ werden sollte. Zentral ist vielmehr, dass die Lernenden angehalten werden, sich eingehend mit dem Wichtigsten zu beschäftigen.

Literatur

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183-198.

Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. & Tenenbaum, H. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology, 103,* 1-18.

Barab, S., Ingram-Goble, A., Gresalfi, M., Arici, A., Siyahhan, S., Dodge, T. & Hay, K. (2008). Conceptual play spaces and the quest Atlantis project. In G. Kanselaar, V. Jonker, P. A. Kirschner & F. J. Prins (Hrsg.), *Proceedings of the 8th International Conference of the Learning Sciences 2008* (Bd. 3, S. 190-192). Utrecht, NL: ICLS.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*, 133-180.

Berthold, K., Eysink, T. H. & Renkl, A. (2009). Assisting self-explanation prompts are more effective than open prompts when learning with multiple representations. *Instructional Science, 37,* 345-363.

Berthold, K. & Renkl, A. (2009). Instructional aids to support a conceptual understanding of multiple representations. *Journal of Educational Psychology, 101*, 70-87.

Berthold, K. & Renkl, A. (2010). How to foster active processing of explanations in instructional communication. *Educational Psychology Review, 22*, 25-40.

Bjork, E. L. & Bjork, R. A. (2011). Making things hard on yourself, but in a good way: Creating desirable difficulties to enhance learning. In M. A. Gernsbacher, R. W. Pew, L. M. Hough & J. R. Pomerantz (Hrsg.), *Psychology and the real world: Essays illustrating fundamental contributions to society* (S. 56-64). New York: Worth Publishers.

Chi, M. T. H. (2009) Active-constructive-interactive: A conceptual framework for differentiating learning activities. *Topics in Cognitive Science, 1*, 73-105.

Glogger, I., Schwonke, R., Holzäpfel, L., Nückles, M. & Renkl, A. (2011). *Learning strategies assessed by journal writing: Prediction of learning outcomes by quantity, quality, and combinations of learning strategies* (eingereichtes Manuskript).

Greeno, J. G. (2006). Learning in activity. In R. K. Sawyer (Hrsg.), *Cambridge handbook of the learning sciences* (S. 79-96). New York, NY: Cambridge University Press.

Hilbert, T. S., Renkl, A., Kessler, S. & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning & Instruction, 18,* 54-65.

Jamieson-Noel, D., & Winne, P. (2003). Comparing self-reports to traces of studying behavior as representations of students' studying and achievement. *German Journal of Educational Psychology*, *17*, 159-171.

Kalyuga, S. & Renkl, A. (2010). Expertise reversal effect and its instructional implications. *Instructional Science*, *38*, 209-215.

Lave, J. (1996). Teaching, as learning, in practice. *Mind, Culture, and Activity, 3*, 149-164.

Leuders, T. & Holzäpfel, L. (in Druck). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft, 39.*

Pauli, C. & Lipowsky, F. (2007). Mitmachen oder zuhören? Mündliche Schülerinnen- und Schülerbeteiligung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft, 35,* 101-124.

Renkl, A. (1996). Lernen durch Erklären - oder besser doch durch Zuhören? *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, *28*, 148-168.

Renkl, A. (2009). Wissenserwerb. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 3-26). Berlin: Springer.

Renkl, A. (2011). Instruction based on examples. In R. E. Mayer & P. A. Alexander (Hrsg.), *Handbook of research on learning and instruction* (S. 272-295). New York, NY: Routledge.

Renkl, A. (in Druck). Aktives Lernen: Von sinnvollen und weniger sinnvollen theoretischen Perspektiven zu einem schillernden Konstrukt. *Unterrichtswissenschaft, 39*.

Schmidt, H. G., De Volder, M. L., De Grave, W. S., Moust, J. H. C. & Patel, V. L. (1989). Explanatory models in the processing of science text: The role of prior knowledge activation through small-group discussion. *Journal of Educational Psychology, 81*, 610-619.

Schukajlow, S. & Leiss, D. (2011). Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. *Journal für Mathematik-Didaktik, 32*, 53-77.

Schwartz, D. L. & Martin, T. (2004). Inventing to prepare for future learning: The hidden efficiency of encouraging original student production in statistics instruction. *Cognition and Instruction, 22*, 129-184.

Schwonke, R., Berthold, K. & Renkl, A. (2009). How multiple external representations are used and how they can be made more useful. *Applied Cognitive Psychology, 23,* 1227-1243.

Markus VOGEL, Heidelberg

„Stochastik reloaded" – Mit Daten und Zufall in die Unterrichtspraxis

„Daten" und „Zufall" bilden zusammen eine Leitidee der Bildungsstandards. Mit der curricularen Zusammenführung der empirischen Welt der Daten und der wahrscheinlichkeitstheoretischen Welt von zufälligen Vorgängen stellt sich die Frage, wie man im Unterricht vorgehen kann, so dass die Idee, die beiden Welten zusammenzuführen, auch unterrichtspraktisch konkret wird. Im Folgenden werden dazu wesentliche stochastikdidaktische Überlegungen und exemplarisch unterrichtpraktische Konkretisierungen vorgestellt.

1. Eine Welt voller Daten

Wir leben in einer Welt voller Daten. Daten sind omnipräsent – schon beim einfachen Aufschlagen einer Zeitung oder beim Einschalten der Nachrichten begegnen uns Daten und verlangen von uns Situationen und damit verbundene Sachverhalte zu prüfen, abzuwägen und Entscheidungen zu treffen. Durch Daten – als Zahlen mit Kontext – werden Phänomene, Situationen oder, ganz allgemein gesprochen, Informationen der natürlichen, technischen oder sozialen Umwelt quantifiziert. Gerade wenn es um wichtige Entscheidungen geht, sollten diese Entscheidungen nicht rein subjektiver Willkür unterworfen, sondern möglichst objektiv und allgemein nachvollziehbar auf der Basis von guten Daten begründet sein. Hierin begründen sich die Anstrengungen einer sorgfältigen Datenanalyse. Die Aufgabe besteht im Kern immer darin, im Überangebot aller Dateninformationen, bildlich gesprochen im Nebel der Datenwolke, Strukturen ausfindig zu machen und diese als Datentrend zu beschreiben.

Wenn es darum geht, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, „technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahr[zu]nehmen, [zu] verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte [zu] beurteilen" (KMK, 2003, S. 6), wird offensichtlich, dass die Leitidee Daten und Zufall hinsichtlich der zugrunde liegenden anwendungsorientierten Perspektive einen wesentlichen Beitrag dazu leisten kann, um diesen schulischen Anspruch einlösen zu helfen. Darüber hinaus geht es in einer strukturmathematischen Perspektive auch um die Handhabung der verwendeten mathematischen Werkzeuge (z. B. Funktionen). Durch den kontext- und zweckgebundenen Gebrauch können sich diese in ihrer mathematischen Begrifflichkeit weiter erschließen (vgl. Vollrath, 1989).

2. Daten <u>und</u> Zufall

In den KMK-Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss aus dem Jahr 2003 (KMK, 2003, S. 12) heißt es:

„Die Schülerinnen und Schüler

- werten graphische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,
- planen statistische Erhebungen,
- sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie graphisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software),
- interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen,
- reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren,
- beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.“

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es grundsätzlich darum geht, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, Fragen an empirische Phänomene ihrer erlebten Umwelt zu stellen und mit den zur Verfügung stehenden elementaren mathematischen Mitteln zu beantworten. Die Daten sind der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgeordnet und der statistische Aspekt geht über das bloße Erstellen von Grafiken als Teil des Sachrechnens deutlich hinaus. Der Zufall wird ebenfalls empirisch erfahrbar über die phänomenologische Wahrnehmung und experimentelle Untersuchungen eingebunden.

Wenn die Daten unmittelbar naheliegende Anknüpfungspunkte für den Mathematikunterricht im Sinne der Leitidee Daten und Zufall bieten, wie und wo sind dann Überlegungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung anzustellen, was haben eigentlich Daten und Zufall miteinander zu tun? Wenn diese Frage (insbesondere angesichts der derzeitigen Diskussion um die KMK-Bildungsstandards für die Sekundarstufe II) keine explizite Antwort, auch in der curricularen Verankerung, findet, dann besteht die Gefahr, bereits früher als unzulänglich erkannten Entwicklungen wieder den Weg zu bereiten: „[…] daß [sic!] in den meisten […] Mathematikwerke[n] statistische und wahrscheinlichkeitstheoretische Passagen nahezu beziehungslos (und zuweilen mit falschem Bezug) hintereinandergesetzt [sic!] sind.“ (Schupp, 1982, S. 214 mit Verweis auf Steinbring, H. & Strässer, R. (Hrsg.), 1981)

Daten und ihre Analyse lassen sich hinsichtlich ihrer Ausrichtung in zwei Bereiche unterteilen:

1. Rückblick und Bestandsaufnahme: Die Datenanalyse umfasst die Beschreibung eines in statistischen Daten erfassten Ist-Zustands der Realität. Mit dem Blick auf einen Jetzt-Zustand (und dem damit verbundenen Blick in die Vergangenheit, aus der dieser Jetzt-Zustand hervorgeht,) ist

sie in der Gegenwart verankert. Die Daten bilden nicht die Realität in ihrer Komplexität ab, sondern nur ein vereinfacht abbildendes Modell der Realität (z. B. Daten einer Volkszählung). Die inhaltliche Perspektive dieses Modells ergibt sich aus der vorgeordneten erkenntnisleitenden Fragestellung, die zur Datenerhebung geführt hat.

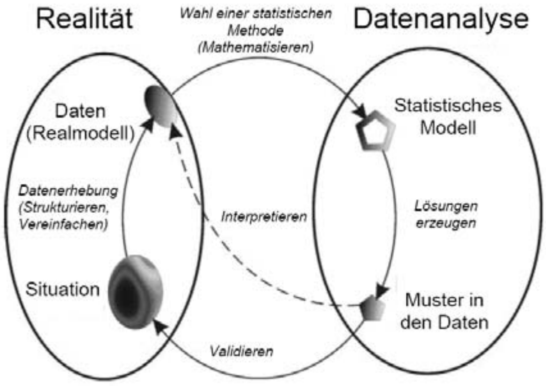
2. Ausblick: Bei vielen statistischen Fragestellungen reicht es aber nicht, den durch Daten repräsentierten Ist-Zustand zu beschreiben. Es wird nach Verallgemeinerungen gefragt, die über den Informationsgehalt der Daten aus der Stichprobe hinausreichen (z. B. Schluss von der Stichprobe einer Volkszählung auf die Eigenschaften des gesamten Volkes). Außerdem sind häufig die Entscheidungen in die Zukunft gerichtet, umfassen also auf konkreten Daten beruhende Prognosen zukünftiger Daten. Sowohl für die Verallgemeinerung wie auch die Prognose benötigt man die Wahrscheinlichkeitsanalyse, um auf der Basis vorhandener Daten (noch) nicht bekannte Daten in ihrer Größe abschätzbar zu machen.

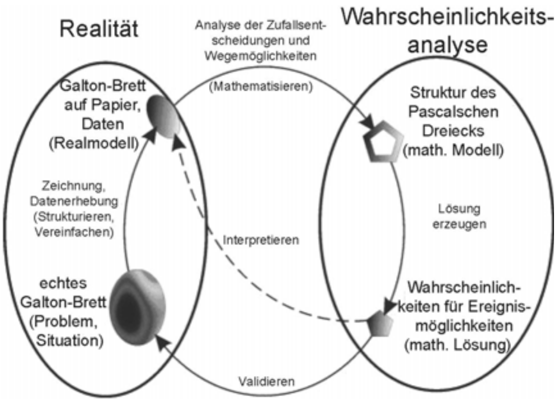
Wie der Realitätsbeschreibung durch Daten liegen auch der Verallgemeinerung und Prognose Modelle von der Realität zu Grunde. Akzeptiert man den Gedanken, dass sich ein wesentlicher Teil der Stochastik auf die Beschreibung aktueller und zukünftiger Daten mit einem realen Kontext richtet (Wild & Pfannkuch, 1999), so besteht die Stochastik, repräsentiert durch Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalyse, aus dem Aufstellen, Bearbeiten und Bewerten von Modellen der Realität.

3. Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalyse als Modellierungsprozesse

Wird die Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalyse aus der Perspektive der Modellbildung betrachtet, so stellt sich die Frage, welche Anforderungen an Modelle der Realität, insbesondere für den Bereich der Schulmathematik, gestellt werden und welche Merkmale sie auszeichnen. Der wesentliche Kern des Modellierens besteht darin, dass nicht die gesamte Komplexität der Ausgangsfragestellung berücksichtigt wird. Es wird bewusst mit Verkürzungen gearbeitet, die nur jeweils relevante Merkmale berücksichtigen. Was aber als relevant angesehen wird, darüber entscheidet das modellbildende Subjekt. Eine eindeutige, zeitlich und inhaltlich allgemeingültige Zuordnung von Original und Modell gibt es daher nicht (*Pragmatisches Merkmal* des allgemeinen Modellbegriffs nach Stachowiak, 1973). „Modelle sind Modelle für jemanden, zu einer bestimmten Zeit und zu einem bestimmten Zweck.“ (Schupp, 1988, S. 10) Aus diesem Grund sind Modelle nicht hinsichtlich ihrer Richtigkeit, sondern hinsichtlich ihrer Nützlichkeit zu beurteilen (vgl. Box & Draper, 1987). Für die Modellbeurteilung sind nach Stachowiak (1973) zwei weitere Merkmale wesentlich: Die Güte eines Modells bemisst sich zum einen über das *Abbildungsmerkmal* daran, wie gut es die relevanten Eigenschaften des Ausgangssachverhalts wiedergeben kann, und zum anderen über das *Verkürzungsmerkmal* daran, wie gut es der mathematischen Bearbeitung zugänglich ist und intuitive Einsichten zu vermitteln vermag.

In der mathematikdidaktischen Literatur wurde der so genannte mathematische Modellierungskreislauf nunmehr seit einigen Jahrzehnten verschiedentlich vorgestellt und diskutiert. Besondere Aufmerksamkeit erfuhr er insbesondere mit den Veröffentlichungen im Rahmen der PISA-Studien (z.B. Blum et al., 2003). Spezifiziert man den Modellierungskreislauf als stochastischen Modellierungskreislauf ergibt sich – egal, ob allgemein als Datenanalyse oder exemplifiziert am Galton-Brett als Wahrscheinlichkeitsanalyse betrachtet (vgl. Eichler & Vogel, 2009):





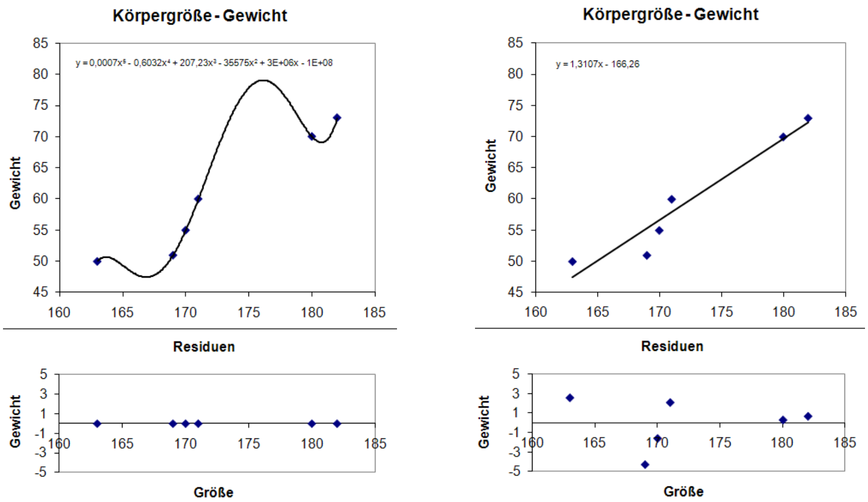
Die Daten bilden die Informationen, die aus Beobachtung, Umfrage oder Experiment hervorgehen, als Kontextzahlen in einem Realmodell der Situation ab. Über Mathematisierungsprozesse des Visualisierens, Simulierens und Formalisierens wird ein mathematisches Modell erstellt, das die Grundlage für statistische Bewertungen oder wahrscheinlichkeitstheoretische Voraussagen bildet. Lösungen, die sich aus Berechnungen auf dieser mathematischen Modellgrundlage ergeben, bilden ein mathematisches Muster ab, das sich im Kontext der Realmodellebene (ggf. unter Hinzunahme neuer Daten) zu bewähren hat. (Hinsichtlich der hier aus Platzgründen notwendigen Verkürzungen sei für ausführlichere Überlegungen auf Eichler & Vogel (2009) sowie Eichler & Vogel (in press) verwiesen.)

Statistische Daten – bereits erhobene wie prognostizierte – hängen in ihrem Entstehungsprozess stets vom Zufall (genauer gesagt: erklärtermaßen als vom Zufall verursacht) ab. Daraus ergibt sich die Variabilität der Daten, die den Kern stochastischen Denkens darstellt. In der Einsicht, dass die Welt nicht streng deterministisch ist, sondern aus einem Mix an Variation und Struktur besteht, gleicht die Datenanalyse einer Suche nach dem Muster in der Variation. Den Zusammenhang zwischen Daten und dem ihnen innewohnenden Paar aus Variabilität und Muster kann man durch die *Grundgleichung der Datenmodellierung* (vgl. z. B. Eichler & Vogel, 2009) ausdrücken, die sich in verschiedener Weise darstellen lässt:

$$\textit{Daten} = \textit{Muster} + \textit{Variabilität} = \textit{Trend} + \textit{Zufall} = \textit{Funktion} + \textit{Residuen}$$

Die additive Struktur der Grundgleichung der Datenmodellierung ist ein pragmatisches Konstrukt, um mit der omnipräsenten Variabilität von Daten fertig zu werden: Der Teil der Datenvariabilität, der erklärt werden kann, wird mit einer deterministischen Komponente zum Ausdruck gebracht. Das, was übrig bleibt, der unerklärte Anteil an Variabilität wird mit dem Konstrukt *Zufall* modelliert. Damit kommt eine stochastische Komponente in die Modellierung der Daten.

Aus der Grundgleichung der Datenmodellierung lässt sich das Ziel der Modellierungsbemühungen beschreiben: Der Musteranteil soll möglichst groß und das, was übrig bleibt, die unerklärte Variabilität möglichst klein sein. Das darf jedoch nicht um den Preis einer sachgerechten Modellierung geschehen, wie folgendes konstruiertes Beispiel (vgl. Vogel & Eichler, 2010) zu einem Zusammenhang von Körpergröße und Gewicht von sechs Erwachsenen zeigt:



Durch die vollständige Datenerfassung verliert das funktionale Modell im linken Beispiel die Möglichkeit, einen sachlich sinnvoll begründbaren Zusammenhang zwischen Körpergröße und Gewicht trendgemäß abzubilden. Dadurch büßt es ein zentrales Merkmal ein, welches ein Modell nach Stachowiak (1973) kennzeichnet: das Abbildungsmerkmal. Dagegen erweckt die rechts dargestellte Regressionsgerade, welche auf der Basis der Minimierung der quadratischen Abweichungen durch den Computer ermittelt wurde, hinsichtlich einer Trendabbildung eine größere Glaubwürdigkeit deshalb, weil sie nichtvorhandene Messwerte in ihrer Größenordnung besser abschätzen lässt (wobei jedoch auch dieses Modell weiter hinterfragt werden kann).

4. Daten und Zufall im Unterricht verknüpfen

Wie sich Daten und Zufall konkret im Unterricht verknüpfen lassen, lässt sich idealtypisch am „Schokolinsen-Beispiel" exemplifizieren (vgl. Eichler & Vogel, 2009). Die Aufgabe besteht für die Schülerinnen und Schüler darin, aus einem empirisch ermittelten Anteil der roten Schokolinsen in einer Tüte eine Prognose für die Grundgesamtheit aller Schokolinsentüten zu diesem Anteil zu erstellen und diese Prognose zu überprüfen. Ein Unterrichtsgang könnte wie folgt aussehen:

1. Datenanalyse: Eine Unterrichtsstunde mit 30 Tüten ergibt, dass durchschnittlich 18 Schokolinsen in einer Tüte sind mit durchschnittlich rund drei Linsen pro Farbe.

2. Modellannahmen: Unter der Annahme, dass eine Tüte hinsichtlich der Farbe unabhängig gefüllt wird, wird geschätzt, dass jede Schokolinse mit der Wahrscheinlichkeit von 1/6 eine bestimmte Farbe hat. Diese Modellannahmen und ihre Grenzen sollen geprüft werden. Auf der Basis dieser Modellannahmen wird die Wahrscheinlichkeit, eine rote Schokolinse aus einer Tüte zu ziehen mit P(rot) = 1/6 (und P(nicht_rot) = 5/6) postuliert. Eine weitere wichtige Modellannahme, die bewusst zu machen ist, ist die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit der Ziehungen: Das heißt, die Wahrscheinlichkeiten ändern sich nicht, wenn die nächste Schokolinse aus der Tüte gezogen wird.

3. Simulationsmodell und theoretisches Modell erstellen: Mit dem Computer lässt sich auf der Basis der Modellannahmen ein Simulationsmodell für 10000 Tüten erstellen.

Mithilfe kombinatorischer Überlegungen bzw. mithilfe der (zuvor notwendigerweise behandelten) Binomialverteilung lässt sich ein theoretisches Modell erstellen:

$$\binom{18}{r} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{r} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{18-r}$$

mit r ganzzahlig und $0 \leq r \leq 18$. Die Gegenüberstellung der Modelle ergibt z.B. folgende Tabellenwerte:

Häufigkeiten bei 10000 Tüten			Theorie Binomialverteilung		
Anzahl	abs.	rel. Häuf.	Anzahl	abs.	Wahrsch.
0	366	0,037	0	376	0,038
1	1369	0,137	1	1352	0,135
2	2329	0,233	2	2299	0,230
3	2405	0,241	3	2452	0,245
4	1871	0,187	4	1839	0,184
5	1031	0,103	5	1030	0,103
6	422	0,042	6	446	0,045
7	155	0,016	7	153	0,015
8	39	0,004	8	42	0,004
> 8	13	0,001	> 8	11	0,001

4. Validierung: Aus den Ergebnissen können Kriterien für die Validierung des zugrunde liegenden theoretischen Modells und/oder des Simulationsmodells in der Realität konstruiert werden. Beispielsweise kann man festlegen, dass das Modell beim Öffnen einer neuen realen Tüte bei 8 oder mehr roten Schokolinsen in einer Tüte abgelehnt und bei weniger als 8 roten Linsen beibehalten wird. In diesem Fall würde man mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als einem Prozent einen Fehler begehen. Die Schülerinnen und Schüler können auch andere Kriterien festgelegen. Sie erfahren dabei, dass dies eine Aushandlungssache ist. Wenn man dabei noch bespricht, welche Arten von Fehlern auftreten können, nämlich die Annahme der Gleichverteilung zu verwerfen, obwohl

diese tatsächlich gegeben ist (Fehler 1. Art) oder an der Annahme der Gleichverteilung festzuhalten, obwohl diese nicht gegeben ist (Fehler 2. Art), so ist man mit diesem Validierungsschritt bei der Grundidee des Hypothesentestens angelangt.

Das Beispiel der Farbverteilung von Schokolinsen zeigt mit den unterschiedlichen Zugangsweisen (Simulation vs. Theorie) in Schritt 3, dass sich Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalyse gegenseitig ergänzen. Der Unterschied in beiden Varianten des Modellierens zeigt sich in ihren unterschiedlichen Zugriffspunkten von Empirie und Theorie während dieses Modellierungsschrittes:

- Beim wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz stehen das theoretische Modell und damit die Wahrscheinlichkeitsanalyse am Anfang. Anschließend erfolgt die Validierung des theoretischen Modells anhand der Analyse empirischer Ergebnisse (etwa von Simulationen), also anhand der Datenanalyse.
- Beim empiriebasierten Ansatz über Simulationen steht die Untersuchung einer empirischen Häufigkeitsverteilung, also die Datenanalyse, am Anfang. Anschließend kann das Ergebnis der Mustersuche in den Daten in ein empirisch begründetes, dennoch aber theoretisches Modell einfließen. Innerhalb dieses Modells erfolgt die Wahrscheinlichkeitsanalyse, dessen Validierung wiederum im Sinne einer Datenanalyse erfolgt.

Wie man zu den gesuchten Wahrscheinlichkeiten oder insgesamt einer Wahrscheinlichkeitsverteilung kommt, hängt von der zugrunde liegenden Problemstellung und der Entscheidung als modellbildende Person ab: Geht man von empirisch ermittelten Häufigkeiten aus oder trägt man (idealerweise begründet) ein theoretisches Modell an die Problemsituation heran – diese Entscheidung ist eine subjektive Entscheidung der Modellbildung.

Die Verknüpfung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Datenanalyse lässt sich in den komplexen Anforderungen des realen Mathematikunterrichts nicht durchgängig verwirklichen. Für die Datenanalyse wie für die Wahrscheinlichkeitsanalyse sind (zum Teil komplexe) mathematisch-technische Werkzeuge notwendig, deren sachgerechte Handhabung als solche erlernt werden muss. Dies darf jedoch nicht zu einer unterrichtlichen Dominanz von ausschließlich kalkülorientierten innermathematischen Aufgaben führen, mit denen der Anspruch eines gehaltvollen Stochastikunterrichts, nämlich dass die Schülerinnen und Schüler lernen, Fragen an empirische Phänomene ihrer erlebten Umwelt zu stellen und mit den zur Verfügung stehenden elementaren mathematischen Mitteln zu beantworten (vgl. oben), nicht eingelöst werden kann. Hans Schupp (1982, S. 210) bringt die Notwendigkeit, Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalyse (zumindest immer wieder einmal) auch im Unterricht zu verknüpfen, treffend auf den Punkt: „Statistik ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung ist blind […], Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Statistik ist leer […].“

Literatur

Blum, W., Neubrand, M., Ehmke, T., Senkbeil, M., Jordan, A., Ulfig, F. & Carstensen, C. H. (2003). In Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.), PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs (S. 47-92). Münster: Waxmann.

Box, G. & Draper, N. (1987). Empirical Model-Building and Response Surfaces. New York: Wiley.

Eichler, A. & Vogel, M. (2009). Leitidee Daten und Zufall – Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Eichler, A. & Vogel, M. (in press). Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalyse als Modellierung. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), Didaktik des mathematischen Modellierens – Erste Bausteine. Wiesbaden: Vieweg+Teubner

KMK, Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. München: Luchterhand.

Schupp, H. (1982). Zum Verhältnis statistischer und wahrscheinlichkeitstheoretischer Komponenten im Stochastik-Unterricht der Sekundarstufe I. Journal für Mathematik-Didaktik, 3 (3/4), 207-226.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. Der Mathematikunterricht, 34(6), 5-16.

Stachowiak, H. (1973). Allgemeine Modelltheorie. Wien: Springer.

Steinbring, H. & Strässer, R. (Hrsg.) (1981). Rezensionen von Stochastik-Lehrbüchern. Zentralblatt der Mathematikdidaktik (ZDM), 13, 236-286.

Vogel, M. & Eichler (2010). Residuen helfen gut zu modellieren. Stochastik in der Schule, 30(2), 8-13.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. Journal für Mathematikdidaktik, 10, 3-37.

Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical Review 67(3), S. 223-248.

Christoph ABLEITINGER, Essen

Komplexität von Übungsaufgaben im ersten Jahr des gymnasialen Lehramtsstudiums

Übungsaufgaben stellen in den ersten beiden Semestern eines Mathematikstudiums den entscheidenden Dreh- und Angelpunkt dar. Einerseits ist der entsprechende zeitliche Aufwand für die Studierenden sehr groß, andererseits haben Übungsaufgaben hohe Relevanz bei Prüfungen und Klausuren.

Und das ist auch durchaus wünschenswert, denn Aufgaben geben Gelegenheit zum authentischen Betreiben von Mathematik. Während die Studierenden in den Vorlesungen üblicherweise eine eher passive Rolle einnehmen, müssen sie bei der Bearbeitung von Haus- und Präsenzaufgaben in den Übungsgruppen selbst initiativ und kreativ werden.

Will man also Aussagen darüber machen, warum so viele Studierende Schwierigkeiten in ihrem ersten Studienjahr haben, lohnt es sich, einen analysierenden Blick auf die Übungsaufgaben zu richten.

1. Klassische Übungsaufgaben und ihre Lösungen

Übungsaufgaben aus Analysis aus Linearer Algebra haben meist ganz typische Merkmale: Sie sind prägnant formuliert und enthalten keine Redundanzen, sie verzichten auf Motivationstexte ebenso wie auf Grafiken.

Ein typisches Beispiel wäre etwa: Für welchen reellen Parameter a nimmt die Funktion $f(x,y) = x^2 - xy + a\log(1+y^2)$ an der Stelle $(0,0)$ ein lokales Extremum an? Begründen Sie Ihre Antwort!

Je nach Dozent werden den Studierenden Musterlösungen zu den Aufgaben zur Verfügung gestellt. Auch diese Musterlösungen sind meist kurz und bündig. Sie kommen ohne Begleitkommentare und Erläuterungen aus und offenbaren nur selten den Weg, *wie* man auf die Lösung gekommen ist. Es ist demnach wenig verwunderlich, dass Erstsemester mit solchen Musterlösungen wenig anfangen können. Selbst wenn das bloße Nachvollziehen der Lösung gelingt, hat die Beschäftigung mit den Musterlösungen nur wenig Lerneffekt für künftige selbstständige Aufgabenbearbeitungen.

Im Rahmen des von der Telekom-Stiftung geförderten Projektes „Mathematik besser verstehen“ wurden aus diesem Grund zu einigen der Aufgaben ausführliche Musterlösungen verfasst, die folgenden Gesichtspunkten Rechnung tragen sollen:

- Die Problemstellung soll geklärt werden.
- Es sollen Lösungsideen entwickelt werden.

- Es dürfen Irrwege vorkommen und es sollen unterschiedliche Strategieoptionen in den Blick genommen werden.
- Entscheidende Punkte in der Lösung sollen hervorgehoben werden.
- Es sollen detaillierte Argumentationsschritte aufgeführt werden.

Ziel ist es, den Studierenden damit Vorbilder für authentisches, professionelles Mathematiktreiben zu liefern.

2. Wissenschaftliche Fragestellungen und Forschungsmethode

Beim Verfassen ausführlicher Musterlösungen ergeben sich ganz automatisch eine Reihe fachdidaktischer Fragestellungen:

- Welche Kompetenzen benötigt man zur Lösung klassischer Mathematikaufgaben des ersten Studienjahres?
- Gibt es typische Bearbeitungsphasen, die in unterschiedlichen Aufgabenlösungen immer wieder zu identifizieren sind?
- Kann man die zur Lösung benötigten Teilkompetenzen isoliert schulen?

Um diese Problemstellungen wissenschaftlichen Methoden zugänglich zu machen, wurde eine Sammlung an ausführlichen Musterlösungen zu Aufgaben aus dem Studienjahr 2009/10 zur Analyse ausgewählt.

In einer ersten Phase haben wir versucht, unterschiedliche Bearbeitungssequenzen hinsichtlich ihrer Intention und ihrer Funktion zu identifizieren. Diese Bearbeitungssequenzen wurden klassifiziert und zu sieben unterschiedlichen Bearbeitungsphasen zusammengefasst. Methodische Fragen diese Klassifikation betreffend können aufgrund des begrenzten Platzes hier leider nicht diskutiert werden.

Im folgenden Abschnitt wird ein Überblick über das vorläufige Phasenmodell gegeben, das in unserer weiteren Forschungsarbeit einem Interrater-Reliabilitätstests unterzogen werden soll.

3. Das Phasenmodell

P Problembewusstsein schaffen (Developing awareness): Diese Phase gliedert sich in zwei Subkategorien:

a) Bevor eine Aufgabe sinnvoll bearbeitet werden kann, muss zunächst geklärt werden, welchem Themenfeld sie zuzuordnen ist und worin das eigentliche Problem in der Aufgabenstellung besteht (z.B. inwiefern die Aufgabe nicht trivial zu beantworten ist). Es wird dabei der Weg gebahnt, passende Handlungsspielräume zu öffnen.

b) Zum Problembewusstsein soll aber auch gehören, dass man während bzw. am Ende des Aufgabenlösungsprozesses den springenden Punkt der Aufgabe erkennt und benennt oder rückblickend die Rolle der Aufgabe im Kontext des Themengebietes identifiziert.

K Klärung der Handlungsoptionen (Review of options for actions): In dieser Phase werden Handlungsoptionen gesichtet, die zur Aufgabenlösung beitragen könnten, ohne bereits die Detailausführung in Angriff zu nehmen. Es wird abgewogen, welche Art von Strategie, welche Theorie, welcher Satz, welche Definition, welcher Kalkül zum Einsatz kommen könnte. In der Folge wird die Entscheidung für eine der Optionen getroffen bzw. werden fehlgeschlagene Handlungsoptionen während des Lösungsprozesses verworfen und neue aufgenommen.

Diese Phase begleitet den gesamten Aufgabenlösungsprozess, ohne dass dabei der Problemzustand verändert wird. Die Veränderung des Problemzustandes wird allerdings schon angebahnt und durch die Entscheidung zugunsten einer der Handlungsoptionen beeinflusst bzw. sogar determiniert.

Z Einen Zugriff herstellen, die Aufgabe handhabbar machen (Gaining accessibility): Bei vielen Aufgaben muss sich der Aufgabenlöser – um die gewählte Handlungsoption durchzuführen – zuerst einen Ankerpunkt verschaffen, an dem er mit der Bearbeitung ansetzen kann. Man muss gewissermaßen die äußere Schale der Aufgabe aufbrechen und die Aufgabenstellung so repräsentieren, dass sie für die zur Verfügung stehenden Methoden zugänglich wird. Das kann manchmal durch einen Sichtweisenwechsel erfolgen, manchmal aber auch durch einen Übergang zu geeigneten Objekten bzw. zu einer geeigneten Darstellung der vorliegenden mathematischen Objekte. Diese Phase hat öffnenden Charakter, insofern sich danach meist neue Handlungsoptionen bieten (die vorher eventuell noch gar nicht sichtbar waren).

A Anpassung oder Prüfen der Passung (Adjustment): Zielt man auf die Verwendung eines bestimmten Werkzeuges (z.B. Satz, Methode, Kalkül) ab, so muss die Problemstellung an dieses Werkzeug angepasst werden, muss die vorliegende Situation eventuell modifiziert werden. Unter Umständen müssen Notationen angeglichen werden oder es muss erkannt werden, dass das Werkzeug modulo der Notationen schon zur vorliegenden Situation passt. Auch das Überprüfen von Voraussetzungen eines Satzes und das gezielte Umstrukturieren eines Ausdrucks, um ihn in eine gewünschte Form zu bringen, gehören in diese Kategorie.

Im Gegensatz zur Kategorie Z handelt es sich hierbei um fokussierende Tätigkeiten.

T Tricks, professionelles Know-How (Gimmicks): An manchen Stellen der Aufgabenbearbeitung hilft nur noch ein Trick, eine spezielle Repräsentation oder Umdeutung des Problems. Diese Tricks sind meist lokale „vom Himmel fallende“ Ideen, die sehr speziell auf eine bestimmte Situation passen und nur erfahrenen Aufgabenlösern geläufig sind. In manchen Fällen lassen sich diese Tricks allerdings auch durch das Anwenden heuristischer Strategien finden. Die Funktion von Tricks ist meist das Vorantreiben des Lösungsprozesses, wenn dieser ins Stocken geraten ist bzw. das elegante Abkürzen der Aufgabenlösung.

H Handwerk (Engineering): Damit ist das Ausführen von Verfahren und Techniken gemeint, die zur Routine geworden sind. Selbstverständlich ist es subjektiv unterschiedlich, welche Arbeitsphasen eine Person als Handwerk bezeichnen würde – eine Tätigkeit, die für einen Experten Routine ist, kann für einen Novizen noch eine große kognitive Herausforderung darstellen.

Legen wir das (normativ zu erwartende) Kompetenzniveau von Studienanfängern zugrunde, so können wir Tätigkeiten wie das Manipulieren von Termen, das Abarbeiten von Kalkülen oder das Anwenden von einfachen bekannten Resultaten als Handwerk bezeichnen.

B Begleitende, strukturierende Kommentare und Erläuterungen: Zwischen einzelnen Teilschritten der Aufgabenbearbeitung wird Resümee gezogen. Es wird über schon Erreichtes reflektiert und festgehalten, was noch zu zeigen ist. Durch begleitende Kommentare kann auch nochmal der entscheidende Punkt in der Aufgabenbearbeitung akzentuiert werden. Schließlich fällt auch das Beurteilen des Erfolgs von zuvor durchgeführten Handlungen in diese Kategorie.

Beispiele zu den einzelnen Phasen, eine Diskussion des Gültigkeitsbereichs bzw. der Grenzen des Modells sowie eine ausführliche Darstellung des Interrater-Tests zur Feststellung der Reliabilität des vorgestellten Analysewerkzeugs müssen wegen der knappen Kapazität an anderer Stelle nachgeliefert werden.

Literatur

Anderson, J. R. (2007): Kognitive Psychologie. 6. Auflage, Springer Verlag, Berlin.

Kaiser, H. (2005): Wirksames Wissen aufbauen. Ein integrierendes Modell des Lernens. h.e.p. Verlag, Bern.

Renkl, A.; Hilbert, T.; Schworm, S. (2001): Example-based Learning in Heuristic Domains: A Cognitive Load Theory Accout. In: Educ Psychol Rev (21). S. 67-78

Wittmann, E. (1974): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg Verlag, Braunschweig.

Ergi Acar, Frankfurt am Main

Mathematiklernen in einer familialen Spielsituation

Die Bedeutung der Familie für die Lesesozialisation sowie die Auswirkung dieser Lernprozesse für Leistungsunterschiede im Deutschunterricht werden in der Deutschdidaktik breit diskutiert. Eine entsprechende Diskussion der Familie als Instanz für (frühe) mathematische Sozialisation kommt – zumindest in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik – erst langsam in Gang. In der Studie erStMaL-FaSt werden Kinder im Kindergartenalter mit ihrer Kernfamilie in mathematischen Situationen beobachtet.

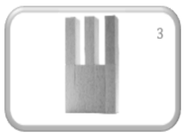
1. Theoretischer und analytischer Rahmen

Internationale Forschungsprojekte, wie z.B. CEMELA und MAPS (Civil 2005) in den USA oder die Studie zu Home Numeracy in UK (Street, Baker & Tomlin 2008), zeigen nicht nur, dass familiäre Aktivitäten bedeutsame Auswirkungen auf die mathematische Denkentwicklung des Kindes haben, sondern weisen auch auf die besondere Bedeutung ethnischer und kultureller Hintergründe der Familien für mathematische Lernprozesse hin. Auch Zevenberg (2000) beschreibt die individuelle Konstruktion von Identitäten bei Mathematiklerner und deren soziale und kulturelle Unterschiede. Lerntheoretisch erklärbar wird dies aus einer sozio-kulturellen Perspektive: Die Kindern werden in verschiedene mathematische Aktivitäten eingebunden und dabei von ‚kompetenteren' Familienmitgliedern unterstützt. Die familialen Situationen werden somit ‚erlebt' als „learning-as-participation" (Sfard 2008, S.79) – nicht nur im Sinne ganz spezifischen, kulturell geprägten Mathematik sondern auch einer kulturell geprägten ‚Praxis des Mathematiklernens'. Die Eltern sind aber auch meist nicht nur die ersten ‚mathematischen Erzieher'; Familien begleiten ihre Kinder in ihren mathematischen Lernprozessen als ‚paralleles Unterstützungssystem' neben den Institutionen Kindergarten und (Grund-)Schule. Das Begriff ‚Unterstützungssystem' bezeichnet in sozial-konstruktivistischen Theorie den konstitutiven Beitrag des sozialen Systems für die kognitive Entwicklung des Individuums. Mit Bezug auf Brunners Konzept des Unterstützungssystems für den Spracherwerb („Language Acquisition Support System" - LASS) wird analog für das Mathematiklernen das Unterstützungssystem für das Mathematiklernen „Mathematics Learning Support System" - MLSS) genannt (Bruner 1990). Die verschiedenen familialen Kontexte wirken sich somit auf das Mathematiklernen im Kindergartenalter und in der Grundschule in Form ihrer spezifisch ausgeprägten MLSS aus.

Im Alltag gehen die viele Familien von der einschränkenden Meinung aus, dass die Mathematik aus Zählen und Rechenoperationen besteht (Blevins-Knabe 2008). Entsprechendes spiegelt sich z. B. häufig auch in gemeinsamen, im familalen Kontext veranstalteten (mathematischen) Spielen wieder (Tiedemann 2010). Empirisch weitgehend ungeklärt ist jedoch, wie solche MLSS in einzelnen funktionieren und wie sie sich im Zuge der kindlichen Entwicklung verändern. Eine Basisfähigkeit im Bereich von Zahlen und Operationen ist die ‚Spontanerfassung' (Subitizing). Diese Fahigkeit entwickelt sich weiter zu den verschiedenen arithmetischen Fähigkeiten. (Clements & Samara 2007a) Bereits im vorschulischen Alter bestehen enge Zusammenhänge zwischen geometrischen und arithmetischen Kenntnissen. Clements & Samara z. B. verdeutlichen, dass dem räumlichen Denken eine entscheidene Rolle in der Entwicklung der arithmetischer Fähigkeiten zukommt. Zudem führen sie aus, dass es insbesondere familiale Kontexte sind, in denen sich die Raumvorstellung und das räumliche Denken beim Kind ausformen (Clements & Samara 2007a). Infolgedessen greifen wir besonders die Ausführung zum familialen Kontext für die mathematische Bereiche Geometrie und Arithmetik auf. Die Rekonstruktion der thematische Entwicklungen in den familialen Interaktionsprozessen wird mit Hilfe der Interaktionsanalyse (Krummheuer, 2011) vorgenommen.

2. Das Fallbeispiel: Familie Ak

Im Fallbeispiel beschäftigen sich die eine türkische Mutter Leyla und ihre einzige Tochter Aleyna (4;8 Jahre) mit dem Spiel ‚Bauherr'. Ziel des Spiels ist es, das Gebäude auf der Spielkarte genau nachzubauen. Dadurch wird der Unterschied zwischen der zweidimensionalen Abbildungen und den dreidimensionalen Körpern erfahrbar. In der vierten Runde zieht Leyla eine Karte und bittet um Aleynas Hilfe. Sie fangen an, die nebenstehende Karte zusammen nachzubilden. Im Laufe der Runde legen sie drei Bauklötzchen aufeinander während zwei andere Klötzchen auf dem Tisch liegen bleiben.



193			Leyla	wie viel sind sie jetzt *zählt mit dem rechten*
194				*Zeigefinger auf das Karte ab* eins zwei drei vier
195				fünf. *guckt die Klötzchen* wie viel steine haben
196		<		wir hier/
197		<	Aleyna	*schiebt die Karte vor ihr* eins zwei drei/

Obwohl die Spielsituation dem Bereich Geometrie zuzuordnen ist, macht die Mutter aus der Aufgabe für ihre Tochter eine arithmetische Übung daraus. Sie stellt die Frage, wie viel sie da haben. Aleyna stellt auf der Handlungsebene wohl eine Eins-zu-Einszurodnung zwischen die Klötzchen und ihrer Anordnung her. Aber die Frage bleibt immer noch offen, ob sie die

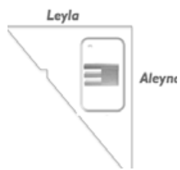
Anzahl bestimmen konnte, wie viel Klötzchen da liegen. Dann stellt die Mutter noch weitere Fragen.

200			Leyla	wie viel fehlen noch/ *zeigt die zwei Andere*
201			Aleyna	*zählt leise one-to-one die Klötzchen auf der*
202				*Karte mit dem rechten Zeigefinger ab*
203	04:13		Leyla	wie viel muss man darauf tun *zeigt die Klötzchen*
204				wie viel sollen wir darauf tun *ordnet die Zweier*
205			Aleyna	himm\ fünf.

Mit diesen Frage thematisiert die Mutter eine Addition, wobei sie und nicht die Summe sondern auf einen Summanden hinweist. Aleyna antwortet und nennt jedoch die Summe: fünf. Hier scheint es, dass Aleyna die Aufgabe durch eine Spontanerfassung gelöst hat. Nach einer positiven Rückmeldung durch die Mutter stellt Leyla nochmals die Frage nach dem Summanden, dem Zuwachs. Aleyna reagiert prompt und antwortet: drei. Es scheint, dass sie schon die Summe bereits bei der Beantwortung der ersten Frage bestimmt hat.

209			Leyla	genau.jetzt mach mal weiter
210		#	Aleyna	*nimmt ein Klötzchen von Zweier und legt es auf*
211				*die dreier Klötzchen*
212		#	Leyla	vier..und/
213			Aleyna	*nimmt das restliche Klötzchen und legt es auf die*
214				*neue vierer Klötzchen* fünf.

Während sie die restlichen zwei Klötzchen auf die bereits vorhandenen drei Klötzchen legen, zählen sie den dadurch erwirkten Zuwachs von Klötzchen. Nach diesen Zählaktivitäten bauen sie die Figur weiter, bis sie fertig sind. Am Ende der Sequenz unterscheiden Bild und Nachbau sich deutlich. Dennoch gibt die Mutter eine positive Rückmeldung und sagt, dass Aleyna es richtig nachgebaut hat. Wenn man die Sitzposition der Mutter bedenkt, könnte man ein Erklärung finden, warum sie eine positive Rückmeldung gegeben hat. Wie im nebenstehenden Bild gezeigt, sieht Leyla die Karte um 90° gedreht. Es könnte sein, dass die Mutter sich nicht vergegenwärtigt, wie von Aleyna Sitzposition die Figur auf Karte aussieht. Unterstellt man, dass die Mutter nur über eine unzureichend entwickelte Fähigkeit der räumlichen Perspektiveübernahme (Piaget 1967) verfügt, wird ihre positive Reaktion eher nachvollziehbar. In diesem Sinn könnte man vermuten, dass die Mutter die unterschiedlichen Ansichten der Figur nicht gegenwärtig sind. Mit Blick auf die empirische Ausgestaltung des Begriffs des MLSS muss man zumindest im familialen Kontext wohl auch berücksichtigen, dass hier



Unterstützungen geleistet werden, die möglicherweise bei den Kindern zu mathematischen Fehlentwicklungen führen könnten.

3. Zusammenfassung und Ausblick

An dem gewählten Beispiel zeigt sich ein aus mathematischer Sicht unbefriedigender Spielprozess. Mutter und Kind führen das Spiel nicht gemäß den Spielregeln durch. Die Mutter unterstützt zudem ihre Tochter in mathematisch fehlerhafter Weise. Möglicherweise besteht das MLSS lediglich aus positiven Rückmeldungen, unabhängig von der „Güte“ der kindlichen Handlungen. Zudem fällt auf, dass das MLSS stark auf die Arithmetik des Zählens und der Anzahlbestimmung fokussiert und die raumgeometrischen Inhalte dieses Spiels außer Acht lässt. Man wird eventuell verstärkt bei MLSSen aus dem familialen Kontext von einer Arithmetiklastigkeit ausgehen müssen und sich darüber hinausgehend die Frage stellen müssen, in wie weit bzw. in welcher Weise in diesen Kontexten Zonen der nächsten Entwicklung auch für nicht-arithmetische mathematische Inhalte wirksam werden.

Literatur

Blevins-Knabe, B. (2008): Fostering early numeracy at home. Encyclopedia of Language and Literacy Development (pp. 1-8). London, ON: Canadian Language and Literacy Research Network

Civil, M., Planas, N., & Quintos, B. (2005). Immigrant parents' perspectives on theirchildren's mathematics. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(2), 81-89.

Clements , D.H. & Samara, J. (2007a) Early Childhood mathematics learning. In F.K. Lester, Jr.(Ed.), Second Handbook of research on Mathemtics Teaching and Learning (pp.461-555) New York: Information Age Publishing.

Krummheuer, G. (2010). Die Interaktionsanalyse. In F.Heinzel (Hrsg.), Methoden der Kindsheitforschung. Weinheim, München: Juventa

Piaget, Jean (1967): The Child’s Conception of the World. London: Routledge &Kegan.

Sfard, A. (2008). Thinking as Communicating Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing. Cambridge University Press. New York.

Street, B., Baker, D. & Tomlin, A. (2008): Navigating Numricies. London: Springer.

Tiedemann, K. (2010): Support in mathematischen Eltern-Kind-Diskursen: funktionale Betrachtung einer Interaktionsroutine. In B. Brandt, M. Fetzer und M. Schütte (Hg.), Auf den Spuren Interpretativer Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. Götz Krummheuer zum 60. Geburtstag. Münster: Waxmann, pp. 149-175.

Zevenbergen, R. (2000). “Cracking the code” of mathematics classrooms: school success as a function of linguistic, social and cultural background. In J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on mathematics teaching and learning. (pp. 201-224). Westport, CA: Ablex,

Kathrin AKINWUNMI, Dortmund

Zum Verallgemeinern mathematischer Muster und zur propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten in der Grundschule

1. Verallgemeinern mathematischer Muster – nicht nur ein Zugang zur Algebra

Das Verallgemeinern mathematischer Muster ist eine Leitidee für den Zugang zur Algebra (Mason et al. 2005) und die Einführung von Variablen in der Sekundarstufe. Die Tätigkeit, die Fischer et al. (2010, 2) als „aus vielen einzelnen Fällen ein allgemeines Muster oder einen allgemeinen Zusammenhang herleiten – das allen Gemeinsame erfassen“ beschreiben, stellt sich dabei als eine elementare menschliche Denkhandlung dar, die aber für das algebraische Denken eine wichtige Rolle spielt (ebd.). Variablen als *Unbestimmte* und als *Veränderliche* (nach Freudenthal 1973; 1983) dienen als Mittel des Verallgemeinerns. Es lässt sich dadurch eine Sinnstiftung für den Gebrauch von Variablen erzielen, da Variablen benötigt werden, um beispielsweise allgemein zu kommunizieren, argumentieren, explorieren oder Probleme zu lösen (Malle 1993).

Der Auffassung der Mathematik als die Wissenschaft von Mustern folgend, stellt sich das Verallgemeinern als grundlegende Tätigkeit jeglichen Mathematikunterrichts dar – auch bereits in der Grundschule. Entdecken, Beschreiben und Begründen von Mustern und Strukturen sind hier feste Bestandteile des Mathematikunterrichts und dabei müssen Muster und Strukturen von den Lernenden aktiv konstruiert, das heißt in mathematische Zeichen hineingedeutet werden (Steinbring 2005). Die Schülerinnen und Schüler stehen dabei vor der Anforderung, das Allgemeine im Besonderen zu sehen (ebd.).

Kommunizieren Kinder über Mathematik, so sprechen sie ebenso über Regelmäßigkeiten, Strukturen und Beziehungen; doch ohne die Kenntnis der algebraischen Sprache, ohne konventionelle Zeichen zur Verallgemeinerung, stehen sie vor der Schwierigkeit, etwas Allgemeines mitteilen zu wollen, ohne Zeichen wie Variablen dafür zu kennen. Sie sind dann gezwungen, in der Kommunikation selbst passende Zeichen zu finden, welche die mathematischen Strukturen und Beziehungen in ihrer Allgemeinheit repräsentieren und stoßen so in der Interaktion auf die Notwendigkeit des Verallgemeinerns.

In der Zusammenführung dieser beiden Perspektiven auf das Verallgemeinern ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- Wie verallgemeinern Grundschulkinder mathematische Muster und wie verwenden und deuten sie dabei Variablen?
- Welche Hilfsmittel nehmen die wichtige Rolle von Variablen ein?
- Lässt sich in den Verallgemeinerungen der Lernenden eine propädeutische Entwicklung von Variablenkonzepten erkennen?

2. Einblick in die Ergebnisse einer Interviewstudie

Um Verallgemeinerungen mathematischer Muster im Rahmen eines Dissertationsprojekts zu untersuchen, wurden 30 klinische Interviews mit Viertklässlerinnen und Viertklässlern durchgeführt, denen Aufgaben zur Deutung und Beschreibung von mathematischen Mustern vorgelegt wurden. Mit Hilfe des epistemologischen Dreiecks (Steinbring 2005) können die Verallgemeinerungen der Schülerinnen und Schüler aus begriffsbildungstheoretischer Perspektive in den Blick genommen werden.

Die Aufgabe der Beschreibung mathematischer Muster und Strukturen stellt sich in der Untersuchung als Moment heraus, in dem Kinder die Notwendigkeit zur Verallgemeinerung verspüren. Dabei entsteht die Verwendung von Zeichen mit Variablencharakter aus der Motivation, eine mathematische Struktur allgemein und über ein Beispiel hinaus zu beschreiben.

Als der Schüler Lars für die nebenstehende Folge (Abb. 1) beschreiben möchte, wie er die jeweils benötigte Anzahl an Plättchen errechnen kann, fertigt er die folgende Zeichnung (Abb. 2) an und es entsteht die hier dargestellte Interviewszene:

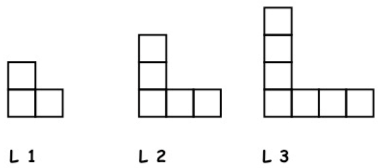


Abb. 1: Die Folge ‚L-Zahlen' des Aufgabenformats *‚Plättchenmuster'*

Abb. 2: Lars Beschreibung der Folge

L.: Das sind ja jetzt fünf. Und das sind jetzt fünf. So und ähm und (*zeichnet Pfeile an die Quadrate).*
I.: Mmh. Super. Jetzt musst du mir nochmal genauer erklären, wie du das genau meinst (*zeigt auf die Pfeile auf dem Blatt).*
L.: Also das runter (*fährt mit dem Stift die senkrechten Quadrate entlang)* plus das (*fährt mit dem Stift die waagerechten Quadrate entlang)* rechne ich.
I.: Ah, ok. Gut.
L.: Und ähm, das hier (*zeigt auf das Quadrat an der Ecke des L-Musters*) soll noch zu dem runter gehören. Deswegen mach ich da ne etwas dickere Linie hin (*zeichnet die Linie nach).*

Lars nutzt in dieser Interviewszene eine Zeichnung des 4. Folgeglieds zur Beschreibung seiner Musterstrukturierung, welche er mit einem senkrechten und einem waagerechten Pfeil, sowie einem Pluszeichen versieht. Durch seine Erklärung der Pfeile „das runter plus das rechne ich“ zeigt er auf, dass diese die Summanden der Addition der beiden dargestellten Seiten repräsentieren sollen. Die beiden Summanden bezeichnet er mündlich mit den Wörtern ‚das runter‘ und ‚das’, welche hier als *Wortvariablen* aufgefasst werden können. Sowohl diese, als auch die in der Zeichnung benutzten Pfeile verweisen als Variablen auf die sich verändernde Anzahl an Plättchen in den Teilstücken von Lars Musterstrukturierung. Sie ermöglichen es Lars, die Struktur der L-Zahlen über das aufgezeichnete Beispiel 5+4 hinaus zu beschreiben.

In der Situation der Versprachlichung ziehen Lernende spontan gewählte Zeichen aus anderen Kontexten hinzu, die als Wortvariable dienen, wie hier bei Lars das Lokaladverb der Richtung ‚runter’ und der deiktische Ausdruck ‚das’. Diese Zeichen setzen die Kinder in eine neue Wechselbeziehung zu der allgemeinen zu beschreibenden Struktur (Abb. 3) und prägen dadurch den Variablenbegriff.

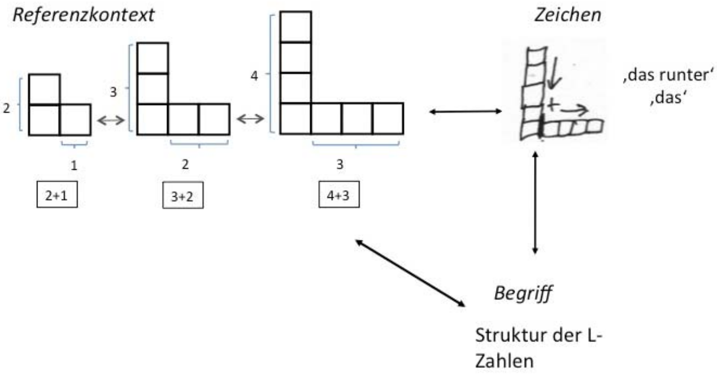


Abb. 3: Lars Beschreibung der Strukturierung

Auch wenn der Weg von diesen propädeutischen Variablenkonzepten zum konventionellen Variablengebrauch eine nicht zu unterschätzende Abstraktion darstellt, besitzen doch gerade die hier entstehenden unbewussten Begriffe eine bedeutsame Rolle in der Begriffsentwicklung (Wygotski 1986).

Über die unterschiedlichen Aufgabenformate hinweg können verschiedene Verallgemeinerungsweisen identifiziert werden (Abb. 4), die den Schülerinnen und Schülern als Mittel zur Verallgemeinerung dienen. Obwohl die oberen vier Verallgemeinerungsweisen Grenzen für das Treffen von allgemeingültigen Aussagen (eine Beschreibung gilt für alle Objekte des Musters / mit gleicher Struktur) aufweisen, verdeutlichen sie dennoch jeweils den allgemeinen Charakter des Musters, ermöglichen also ein ‚Allgemeinverstanden-Werden‘ in der Interaktion.

Verall-gemeinerungsweise	**Beschreibung der Kategorie**	**Plakative Beschreibung des Terms x^2**
Angabe eines Beispiels	SuS geben ein Beispiel an und kennzeichnen dieses dabei explizit als solches.	„Das ist zum Beispiel drei mal drei."
Aufzählung mehrerer Beispiele	SuS zählen mehrere Beispiele auf und verweisen ggf. auf einen Fortlauf.	„Das ist ein mal eins, zwei mal zwei, drei mal drei und so weiter."
Quasi-Variablen	SuS verwenden konkrete Zahlen und verbinden diese mit sprachlich verallgemeinernden Elementen.	„Ich rechne immer drei mal drei."
Bedingungssätze	SuS verwenden Bedingungssätze.	„Wenn da drei steht, dann rechne ich drei mal drei."
Variablen	SuS verwenden Wörter oder Zeichen mit Variablencharakter.	„Man muss die Zahl mal die gleiche Zahl rechnen." oder „? • ?"

Abb. 4: Verallgemeinerungsweisen

Die hier beschriebenen Verallgemeinerungsweisen (und deren Mischformen) entstehen in der Interaktion bei der Beschäftigung mit Mustern und Strukturen und nehmen im Kontext des Verallgemeinerns die Rolle von Variablen ein. Sie ermöglichen es den Lernenden, mathematische Muster und Strukturen allgemein zu beschreiben und dienen gleichzeitig der propädeutischen Entwicklung der Variablen als Unbestimmte bzw. als Veränderliche.

Literatur

Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010): Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. In: *Praxis der Mathematik in der Schule,* 52 (33), 1-7.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1.* Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

Malle, G. (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig: Vieweg.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005): Developing Thinking in Algebra. London: Sage Publications.

Steinbring, H. (2005): *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective.* New York: Springer.

Wygotski, L.S. (1986[6]): *Denken und Sprechen*. Frankfurt am Main: Fischer.

Henrike ALLMENDINGER, Universität Siegen

Elementarmathematik vom höheren Standpunkt – eine Begriffsanalyse in Abgrenzung zu Felix Klein

„Mehr Fachwissen kann also für Lehrerinnen und Lehrer nicht nur bedeuten, ihren Schülerinnen und Schülern curricular ‚voraus' zu sein. Fachwissen muss vielmehr ein tieferes Verständnis der Inhalte des mathematischen Schulcurriculums einschließen." (Krauss et al. 2008)

So wird in der COACTIV-Studie die Notwendigkeit einer „Schulmathematik vom höheren Standpunkt" beschrieben. Nicht nur diese Studie beruft sich auf Felix Klein. Aber ist diese Assoziation wirklich zutreffend? Meinen wir wirklich Felix Kleins „höheren Standpunkt", wenn wir von demselben sprechen? Eine genaue Auseinandersetzung mit Kleins Vorlesungen zeigt, dass sich seine Ausgangsperspektive, Intention und Schwerpunktsetzung wesentlich von dem unterscheiden, was heute vielfach unter dem Begriff „höherer Standpunkt" verstanden wird. Ziel dieses Beitrags ist es, das breite Spektrum, in dem sich Auslegungen des Begriffs „höherer Standpunkt" aufhalten können, darzustellen.

1. Felix Klein: „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus"

Klein selbst beschreibt die Intention seiner Vorlesungen folgendermaßen:

„Ich strebe in meinen Elementarvorlesungen vor allem dahin, meinen Zuhörern Interesse und Verständnis für die Fragestellungen und den Sinn und Zweck der mathematischen Behandlung beizubringen." (Klein 1899)

Die Vorlesungsreihe richtet sich an Studenten, die bereits Grundkenntnisse in Algebra, Zahlentheorie und Funktionentheorie erworben haben. Es wird auf weite Teile des Mathematikstudiums zurückgegriffen. Klein gibt einen Überblick über den in der Schule zu unterrichtenden Stoff. Die Schulmathematik wird dann in die Hochschulmathematik eingebettet, und zudem werden die thematisierten mathematischen Inhalte sowohl inner- als auch außermathematisch vernetzt.

Klein legt in seinem mathematischen Forschen und Lehren großen Wert auf die Anschauung – so auch in dieser Vorlesung. Einen breiten Raum nimmt weiter die historisch-genetische Sicht ein. Durch die Auseinandersetzung mit der Entstehungsgeschichte von Begriffen erschließen sich Zusammenhänge. Insbesondere zeigt sich dadurch, wie sehr die Mathematik von induktivem Vorgehen und heuristischen Mitteln geprägt ist. Zudem werden die Studenten für Fragen zur Bedeutung von Mathematik sensibilisiert, indem Klein philosophische Überlegungen in seine Vorlesung einbezieht. Kritische Bemerkungen über die bestehende Schulpraxis ergänzen das Angebot.

Insgesamt ist Kleins Standpunkt und somit die Zielsetzung der Vorlesung stark geprägt durch einen Blick auf Elementarmathematik aus der Perspektive der Hochschulmathematik.

2. Wilhelm Franz Meyer: „Repetitorium zur Elementarmathematik“

Der Zeitgenosse und Schüler Kleins, Wilhelm Franz Meyer, beschreibt die Idee seiner Vorlesung „Repetitorium zur Elementarmathematik“ so:

„[Grundgedanke der Vorlesung ist,] daß man bei häufiger Durcharbeitung des Elementarstoffes nicht nur eine wesentliche Ersparnis an Gedanken- und Rechnungsarbeit erzielt, sondern in enger Verbindung damit höhere Gesichtspunkte fast von selbst einführt.“ (Meyer 1899)

Es handelt sich um eine Vorlesung am Anfang des Grundstudiums. Somit kann nur auf die Schulmathematik Bezug genommen werden. Neben dem Sicherstellen von Rechenfertigkeiten, was insbesondere eine Grundlage für höhere Vorlesungen schaffen soll, geht es Meyer vor allem um einen „genaueren“ Blick auf elementare Themen und darum, den Studenten Respekt für Elementarmathematik und ihre Tiefe beizubringen.

Einer kurzen Wiederholung schulmathematischer Algorithmen folgt eine logische Analyse von Begriffen und Verfahren. Das schließt das Erkennen von Zusammenhängen und deren Rechtfertigung ein, genauso wie eine Reflexion der Ergebnisse. Dazu kommen Fragen zur Eindeutigkeit und Wohldefiniertheit von Begriffen. Verallgemeinerung bindet die Elementarmathematik dann direkt an die Hochschulmathematik an.

Zielsetzung seiner Vorlesung ist die Beschäftigung mit Elementarmathematik mit Übergängen zur hochschulmathematischen Perspektive. Im Gegensatz zu Klein, der die hochschulmathematische Perspektive schon voraussetzt, ist es Meyers erklärtes Ziel, diese in seinem Repetitorium erst zu entwickeln.

Da keine konkreten Ausarbeitungen des „Repetitorium zur Elementarmathematik“ vorliegen, lassen sich kaum Aussage über die Umsetzung machen. Eine Vorlesung, die im beschriebenen Sinne gehalten wird, kann jedoch sicher nicht den Anspruch auf Vollständigkeit und Überblick erheben, wie es die „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ von Klein macht. Die besprochenen Themen werden aber deutlich mehr in ihrer elementaren Tiefe betrachtet.

3. Urs Kirchgraber: „Fachwissenschaftliche Vertiefung mit pädagogischem Fokus“

„Generell gilt: Die Spezifizierung mit ‚pädagogischem Fokus‘ bedeutet: ‚Ist von Bedeutung für die zukünftige Tätigkeit als Gymnasiallehrperson im entsprechenden Fach‘.“ (Kirchgraber 2008)

Es handelt sich – nach dem Kleinschen Vorbild – um eine Vorlesung zu Beginn des Hauptstudiums. Die Grundkenntnisse des Grundstudiums werden vorausgesetzt. Anders als bei Klein ist der Inhalt stark eingegrenzt. Es geht also nicht um einen Überblick, sondern um eine gezielte Untersuchung ausgewählter Themen.

Ziel seiner Vorlesung ist zunächst ein reflektierter Umgang mit der Schulmathematik. Zudem sollen die Studenten lernen, Mathematik zu würdigen: „Um ein angemessenes Bild von Mathematik zu bekommen ist es nötig, über Mathematik zu reflektieren und über Mathematik als Ganzes nachzudenken.“ (Kirchgraber 2008) In seinen Vorlesungen will Kirchgraber zudem Verantwortung gegenüber anderen insbesondere den nicht in der Schule unterrichteten Fächern erzeugen.

Drei Merkmale sind entscheidend: Erstens wird eine Längsschnittkohärenz entwickelt. Die elementarmathematische und hochschulmathematische Ebene können sich gegenseitig unterstützen. Auf der einen Seite hat die Elementarmathematik Modellcharakter für die Hochschulmathematik, zum anderen hilft die Hochschulmathematik – so Kirchgraber – einer „vorwärts kompatiblen Betrachtungsweise“. Zweitens wird in den Vorlesungen das Elementarisieren und Exaktifizieren von Inhalten thematisiert. Beim Elementarisieren stützt sich Kirchgraber auf die These, dass jeder hochschulmathematische Inhalt, so voraussetzungsstark und komplex er auch sein mag, einen Kern enthält, der jedem verständlich gemacht werden kann. Umgekehrt wird in der Mathematik oft mit vorläufigen Vorstellungen gearbeitet, die erst präzisiert werden, wenn es ein fachliches Bedürfnis danach gibt. Diese Exaktifizierungsprozesse sollen bewusst durchlaufen werden. Drittens können durch das Analysieren von Beweisen Kernideen herausgearbeitet werden.

Zusammenfassend lassen sich zwei Perspektiven bei Kirchgraber erkennen. Einerseits blickt er, genau wie Klein, auf die Elementarmathematik aus hochschulmathematischer Perspektive. Umgekehrt betrachtet er Hochschulmathematik aus elementarmathematischer Perspektive. Auch wenn in Kirchgrabers Vorlesung eine Perspektiverweiterung deutlich erkennbar ist, hat die Hochschulmathematik wie bei Klein eine tragende Rolle. Das ist bei Meyer anders, der die Elementarmathematik ins Zentrum seiner Betrachtungen rückt und erst Schritt für Schritt hochschulmathematische Überlegungen einfließen lässt.

4. Ausblick

Damit ist das „Feld des höheren Standpunkts" aber noch nicht ganz abgesteckt. So wird zum Beispiel in der Siegener „Schulanalysis vom höheren Standpunkt" aus dem Projekt MATHEMATIK NEU DENKEN eine weitere Akzentverschiebung deutlich:

„Ziel ist eine Standpunktverlagerung weg von der vertrauten Beherrschung von Kalkülen hin zu einer verstehensorientierten begrifflichen Durchdringung." (Beutelspacher, Danckwerts, Nickel 2010)

Hier spielt u.a. die Anschlussfähigkeit für die mathematikdidaktische Vertiefung eine tragende Rolle.

Einer deskriptiven Analyse verschiedener charakteristischer Vorlesungen soll daher für die weitere Arbeit eine normative Klärung der Idee des „höheren Standpunkts" folgen, bei welcher der „verstehensorientierte Umgang mit Elementarmathematik" eine zentrale Rolle spielen wird.

Literatur

Beutelspacher, Albrecht; Danckwerts, Rainer; Nickel, Gregor: Mathematik Neu Denken. Empfehlungen zur Neuorientierung der universitären Lehrerbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt, Deutsche Telekom Stiftung, Bonn 2010.

Kirchgraber, Urs: Zur Mathematiklehrpersonenausbildung fürs Gymnasium an der ETH Zürich. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2008 (S. 143–159).

Klein, Felix: Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1899 (S. 126–138).

Klein, Felix: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, 3 Bde., Julius Springer, Berlin 1968.

Krauss, Stefan; Neubrand, Michael; Blum, Werner; Baumert, Jürgen; Brunner, Martin; Kunter, Mareike; Jordan, Alexander: Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. Journal für Mathematikdidaktik (JMD), 29(3/4), 2008 (S. 223-258).

Meyer, Wilhelm Franz: Zur Ökonomie des Denkens in der Elementarmathematik. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1899 (S. 147–154).

Judith AMES, Landau

Mathematisches Verstehen – untersucht bei Studierenden im lehramtsbezogenen Masterstudiengang (Lehramt für die Primarstufe)

Im Rahmen einer Lehrveranstaltung für Studierende im Masterstudiengang Grundschulbildung am Campus Landau der Universität Koblenz-Landau soll mathematisches Verstehen von Studierenden untersucht werden. Der Begriff *Verstehen* wird dabei im Sinne von Fähigkeiten oder Fertigkeiten zu kognitiven Leistungen, die sich auf vielfältige Weise manifestieren können, verwendet (vgl. Scholz 2011). Es sollen die Fähigkeiten oder Fertigkeiten untersucht werden, die zum Ausdruck kommen, wenn Studierende in einem so genannten Mathematikjournal Arbeitsaufträge schriftlich bearbeiten.

1. Anlass der Untersuchung

Studierende für das Lehramt Grundschule sollen im Verlauf ihres Studiums lernen,

- welche mathematischen Vorerfahrungen Grundschulkinder beim Eintritt in die Grundschule mitbringen,
- wie diese aufgegriffen und weiterentwickelt werden können und schließlich,
- welche mathematischen Kompetenzen Grundschulkinder bis zum Ende ihrer Grundschulzeit erwerben sollen.

Doch wie verstehen Studierende selbst Mathematik? Was ist Mathematik für sie? Welche Rolle spielt die eigene Beschäftigung mit mathematischen Problemstellungen für ihr Verstehen, ihr Vertrauen in ihr eigenes mathematisches Denken und für ihren Gebrauch einer mathematischen Sprache?

2. Fragestellungen

Die Untersuchung findet im Rahmen der Lehrveranstaltung „Kompetenzerwerb beim Entdecken von Mustern und Strukturen“ im Wintersemester 2010/2011 an der Universität in Landau statt. In dieser Lehrveranstaltung steht das selbstständige Entdecken von Mustern und Strukturen durch die Studierenden im Mittelpunkt. Es werden verschiedene Muster und Strukturen mathematischer Konstrukte thematisiert, beispielsweise Strukturen in Zahlsystemen, Punktmuster oder andere geometrische Muster.

Die Untersuchung ist von folgenden Fragen geleitet:

- Welche mathematischen Muster und Strukturen erkennen Studierende? Welches Wissen über Muster und Strukturen nutzen sie bei der Bearbeitung mathematischer Aufgabenstellungen?
- Welche (mathematische) Sprache nutzen Studierende? Ändert sich ihr Sprachgebrauch im Verlauf der Lehrveranstaltung? Und falls ja, in welcher Weise?
- Wie entsteht Vertrauen in das eigene mathematische Denken?

3. Theoretischer Hintergrund und Untersuchungsmethode

Als ein Instrument zur Dokumentation von Verstehensprozessen nutzen Peter Gallin und Urs Ruf in ihrem Dialogischen Lernmodell das „Reisetagebuch“ oder „Lernjournal“ (vgl. Gallin & Ruf 1998). Dieser Ansatz wird für die Lehrveranstaltung „Kompetenzerwerb beim Entdecken von Mustern und Strukturen“ aufgegriffen. Die Studierenden führen ein so genanntes Mathematikjournal, also ein Heft, das zur Sichtbarmachung ihrer Herangehensweisen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgabenstellungen dienen soll. Die Einträge in das Mathematikjournal geben den Studierenden Gelegenheit, ihr bereits vorhandenes Wissen zu zeigen, und können ihre Selbsttätigkeit fördern.

Das Modell des mathematischen Kosmos von Rainer Kaenders und Ladislav Kvasz (vgl. Kaenders & Kvasz 2011) diente mir als weitere Anregung, über Verstehensprozesse nachzudenken. Der mathematische Kosmos eines Individuums wird in diesem Modell in die drei Dimensionen Inhalte, Werkzeugkompetenz und Denkaktivitäten zerlegt.

Abbildung 1: Der mathematische Kosmos eines Individuums (Kaenders & Kvasz 2011)

Stellt man sich dieses Modell als Koordinatensystem in einem dreidimensionalen Raum vor, so stellt sich die Frage, ob sich das Vorgehen der Studierenden bei der Bearbeitung von Arbeitsaufträgen durch Wege in einem solchen oder ähnlichen Raum beschreiben lässt. Gibt es erkennbare Muster? Kann ein solches Modell so modifiziert werden, dass es als Modell zur Analyse der Einträge in die Mathematikjournale genutzt werden kann?

4. Die Lehrveranstaltung *Kompetenzerwerb beim Entdecken von Mustern und Strukturen*

An der Lehrveranstaltung nehmen sowohl Studierende, die im Bachelorstudiengang das Fach Mathematik studiert haben, als auch Studierende, die zuvor nur die Pflichtmathematikveranstaltungen im Rahmen des Faches Grundschulbildung besucht haben, teil. Im Wintersemester 2010/2011 nahmen insgesamt 71 Studierende an der Veranstaltung teil. Im Mittelpunkt der Lehrveranstaltung steht die Bearbeitung von Arbeitsaufträgen im Mathematikjournal. Dabei sollen die Studierenden ihre Problemlöseprozesse für sich und andere nachvollziehbar schriftlich darstellen und zu ihrem Vorgehen Stellung nehmen. Es gibt dabei keine mathematisch formalen Vorgaben für die Erstellung der Einträge. Die meisten Arbeitsaufträge sind offen gestaltet, und die Studierenden wurden aufgefordert, sie so weit zu bearbeiten, wie sie es können. Sie sollten beispielsweise untersuchen, welche natürlichen Zahlen sich als Treppenzahlen darstellen lassen und welche nicht, oder sie sollten die Muster und Strukturen beschreiben, die sie in verschiedenen Türmen aus Bauklötzen erkennen können. Die Studierenden erhalten nach jeder Lehrveranstaltung, wenn sie es möchten, ein schriftliches Feedback zu ihren Einträgen.

5. Konkretisierung des methodischen Vorgehens

Zu Beginn der Veranstaltung wurden mittels eines Fragenbogens biografische Daten der Studierenden erhoben, insbesondere Informationen zum bisherigen Studienverlauf, der Motivation für das Studium und den Mathematikkenntnissen. Außerdem nahmen die Studierenden an einem Intelligenzstrukturtest (BIS 4) teil. Am Ende der Lehrveranstaltung beurteilten sie die ihnen gestellten Arbeitsaufträge während der gesamten Veranstaltung noch einmal danach, wie leicht oder schwer sie einen Zugang zur Bearbeitung gefunden haben. Die Studierenden konnten zwischen der Teilnahme an einer schriftlichen Klausur und dem Erstellen eines Portfolios als Prüfungsleistung auswählen. Die Analyse der Einträge in die Mathematikjournale über das gesamte Semester hinweg soll zur Beantwortung der oben formulierten Fragestellungen beitragen. Die von den Studierenden erstellten Unterlagen wurden, um die Anonymität zu wahren und gleichzeitig eine Zuordnung der Unterlagen zueinander zu gewährleisten, mit einem Anonymisierungsschlüssel gekennzeichnet.

6. Diskussion und Ausblick

Im weiteren Verlauf der Untersuchung werden nun die Fragebögen und Tests ausgewertet und Kriterien zur Analyse der Einträge der Studierenden in die Mathematikjournale erarbeitet.

Was sich schon jetzt, ohne dass die Auswertung abgeschlossen ist, sehr deutlich zeigt:

Die Einträge in die Mathematikjournale und die Reflexionen dazu in den von Studierenden erstellten Portfolios zeigen deutlich, dass auch bei Studierenden „kleine“ Erkenntnisse von den Lehrenden wahrgenommen und wertgeschätzt werden sollten. Durch Bestätigung oder Wertschätzung von erbrachten Leistungen kann das Vertrauen in das eigene mathematische Denken und die Zuversicht, einen Arbeitsauftrag bewältigen zu können, gestärkt werden. Insbesondere gilt das für diejenigen Studierenden, die ihre Mathematikkenntnisse im Vergleich zu ihren Kommilitoninnen und Kommilitonen eher schlecht einschätzen. Das Gleiche gilt auch für gegenseitige Hilfe und Bestätigung durch Kommilitoninnen und Kommilitonen.

Eine Studentin reflektierte die Bearbeitung eines Arbeitsauftrags folgendermaßen:

„Mithilfe dieser Erklärungen und in Zusammenarbeit mit meinen Kommilitonen fiel es mir nicht besonders schwer, die folgenden Aufgaben zu berechnen. Hierbei ist zu bemerken, dass ich zunächst alleine versucht habe, auf den richtigen Lösungsweg zu kommen, mir aber zwischendurch Bestätigung oder Hilfe bei meinen Banknachbarn eingeholt habe. Dass ich fast selbstständig in der Lage war, diese für mich fremden mathematischen Symbole zu entschlüsseln, habe ich bereits als erstes Erfolgserlebnis angesehen.“

Literatur

Gallin, P. und Ruf, U. (1998): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Band 1 und 2. Kallmeyer, Seelze.

Kaenders, R. & Kvasz, L. (2011): Mathematisches Bewusstsein. In M. Helmerich & al. (Hrsg.): Mathematik verstehen: Philosophische und didaktische Perspektiven. Vieweg + Teubner Verlag, 71 - 85.

Scholz, O. (2011): Verstehen verstehen. In M. Helmerich & al. (Hrsg.): Mathematik verstehen: Philosophische und didaktische Perspektiven. Vieweg + Teubner Verlag, 3 - 13.

Daniela AßMUS, Braunschweig

Lösungsverhalten bei mathematischen Fragestellungen - Mathematisch begabte Zweitklässler und Kinder einer zweiten Grundschulklasse im Vergleich

Ausgangspunkt für die hier dargestellten Beobachtungen war eine umfangreiche empirische Untersuchung zu Merkmalen mathematischer Begabungen bei Zweitklässlern (Aßmus, 2007; 2008), an der 182 potentiell mathematisch begabte Zweitklässler teilnahmen und u.a. speziell entwickelte Indikatoraufgaben bearbeiteten. Diese Aufgaben dienten gleichzeitig als Aufnahmetest für ein außerschulisches Förderprojekt an der Leuphana Universität Lüneburg, für das aus der Testgruppe 60 Kinder ausgewählt wurden. Die Teilnehmer des Förderprojektes kamen semesterbegleitend alle 14 Tage nachmittags an die Universität und setzten sich dort 75 Minuten lang mit herausfordernden mathematischen Aufgaben auseinander. Darüber hinaus wurden vergleichbare Förderstunden in einer zweiten Grundschulklasse mit 22 Kindern durchgeführt, die als Vergleichsklasse an den Untersuchungen teilgenommen hatte. Im Folgenden soll das Lösungsverhalten in den beiden Gruppen bei einigen in den Förderstunden bearbeiteten Aufgaben gegenübergestellt werden.

Der Vergleich der beiden Gruppen wurde mit folgenden Zielsetzungen vorgenommen: Zum einen sollten Gemeinsamkeiten und Unterschiede beobachtbarer mathematikspezifischer Fähigkeiten für eine weitere Spezifizierung der Merkmale potentiell mathematisch begabter Zweitklässler analysiert werden. Darüber hinaus war von Interesse, inwiefern sich die gewählten Vorgehensweisen bei der Bearbeitung von anspruchsvollen mathematischen Aufgaben in den beiden Gruppen unterschieden. Zum anderen sollten die Auswirkungen der Förderung beobachtet werden, um nachfolgend einschätzen zu können, ob Unterschiede in den Lösungsqualitäten bei den Indikatoraufgaben auf verschiedene Erfahrungen im Umgang mit ähnlichen bzw. mit unbekannten Aufgaben zurückzuführen sind. Insbesondere war von Interesse, ob die Kinder der Grundschulklasse nach einiger Zeit ähnliche Leistungen wie die Kinder des Förderprojektes zeigen, die Leistungen der beiden Gruppen sich einander also annähern würden.

Es wurden nur solche Aufgaben eingesetzt, die mit den im zweiten Schuljahr bekannten mathematischen Operationen bearbeitbar waren und auch den Zahlenraum bis 100 nicht überstiegen. Zur Lösung der Aufgaben war es jedoch u. U. notwendig, Beziehungen zwischen verwendeten Zahlen oder Größen herzustellen, mathematische Strukturen zu erkennen, zu nutzen und zu übertragen, Gedankengänge umzukehren, mehrere Details gleichzeitig zu beachten, Repräsentationswechsel vorzunehmen etc., wobei jeweils verschiedene Vorgehensweisen möglich waren. Einige Aufgaben waren in Einzelarbeit zu bearbeiten, in der Regel saßen die Kinder jedoch an Gruppentischen mit drei bis vier Plätzen, an denen sie die Sozialform frei wählen konnten. Pro Gruppentisch standen ein bis zwei Studierende als Ansprechpartner zur Verfügung, die gleichzeitig das Verhalten, Vorgehen und die Ergebnisse der einzelnen Kinder protokollierten. Die so entstandenen Protokolle sowie die schriftlichen Schülerlösungen dienten als Datenbasis für den Gruppenvergleich.

Nachfolgend wird beispielhaft eine Aufgabe vorgestellt. Für die Deutung der Ergebnisse ist zu beachten, dass diese aufgrund der geringen Datenbasis sowie aufgrund des nicht standardisierten Untersuchungsdesigns nicht verallgemeinerbar sind. Sie liefern jedoch exemplarisch Hinweise auf Unterschiede zwischen potentiell mathematisch begabten und „normal“ begabten Zweitklässlern, die in weiterführenden Studien zu überprüfen sind.

1. Aufgabenbeispiel „Zahlendreieck“

Gegeben war das folgende Zahlendreieck, das in Einzel- oder Gruppenarbeit bearbeitet werden konnte:

Reihe 1				1			
Reihe 2			1	2	1		
Reihe 3		1	2	3	2	1	
Reihe 4	1	2	3	4	3	2	1

Einige ausgewählte Aufgabenstellungen:

- a) Schreibe die Zahlen der 5. Reihe auf.
- b) Wie viele Zahlen stehen in der 7. (15.) Reihe?
- c) In welcher Reihe stehen 39 Zahlen?

Acht Kinder der Grundschulklasse setzten das Zahlendreieck eigenständig korrekt fort, die anderen benötigten Hilfestellungen oder schrieben die fünfte Reihe von anderen Kindern ab. Bei den folgenden Teilaufgaben verringerte sich die Anzahl derjenigen, die in der Grundschulklasse ohne Hilfestellung ein Ergebnis ermitteln konnten. So fanden fünf Kinder selbstständig die Anzahl der Zahlen in der 7. Reihe und drei Kinder die in der 15. Reihe, alle anderen Kinder benötigten Hilfestellungen bzw. erarbeiteten die Lösung zusammen mit einem Studierenden. Aufgabe c) wurde von keinem Kind eigenständig gelöst. Im Gegensatz dazu waren die Kinder des Förderprojekts größtenteils in der Lage, die Teilaufgaben a) und b) eigenständig korrekt zu bearbeiten. Viele nannten bereits beim Aufschreiben der 5. Reihe strukturelle Eigenschaften des Zahlendreiecks. Aufgabe c) bereitete auch im Förderprojekt vielen Kindern Schwierigkeiten, sodass sie zunächst falsche Ergebnisse bestimmten, es gelang jedoch 22 Kindern auf eigenem Weg eine korrekte Lösung anzugeben.

Auch bezüglich der gewählten Vorgehensweisen waren deutliche Unterschiede zwischen den beiden Gruppen festzustellen. Die Kinder der Grundschulklasse lösten die Aufgaben ausschließlich, indem sie die entsprechenden Reihen aufschrieben und dort die Zahlen abzählten. Hilfestellungen der Studierenden, die rechnerische Vorgehensweisen anbahnten, wurden nicht berücksichtigt. Im Gegensatz dazu war im Förderprojekt eine Vielzahl an unterschiedlichen Vorgehensweisen zu beobachten. Einige Kinder schrieben auch dort die Reihen auf, die meisten von ihnen wechselten jedoch mit zunehmendem Schreibaufwand zu rechnerischen Strategien. Knapp die Hälfte aller Kinder nutzten bei Aufgabe b) von vornherein strukturelle Eigenschaften, die eine rechnerische Bearbeitung ermöglichten. Beispielhaft genannt sei hier die Umdeutung der Anzahlen pro Reihe als Zahlenfolge der ungeraden Zahlen, die sich rekursiv aus der Anzahl der vorigen Reihe plus 2, sowie explizit über die Zuordnungsvorschrift „Reihenzahl + Reihenzahl – 1“ berechnen lässt. Aufgabe c) wurde von den meisten Kindern, die einen Lösungsansatz fanden, rechnerisch bearbeitet, die meisten Kinder kehrten eine vorher verwendete Vorgehensweise um.

2. Ergebnisse

Aus der Auswertung aller eingesetzten Aufgaben lassen sich zusammenfassend folgende Unterschiede zwischen den beiden Gruppen festhalten:

Bei anspruchsvollen Textaufgaben hatten die Kinder der Grundschulklasse große Schwierigkeiten, in dem Text eine mathematische Struktur zu erkennen, die eine korrekte Bearbeitung ermöglichte. Dies trat besonders dann auf, wenn mehrere Operationen miteinander zu verknüpfen oder mehrere Bedingungen zu berücksichtigen waren bzw. zunächst Zusammenhänge zwischen den gegebenen Zahlen erkannt werden mussten. Die Kinder des Förderprojekts waren demgegenüber größtenteils in der Lage, eine sinnvolle mathematische Struktur zur Bearbeitung der Aufgabe zu erkennen und diese für die Lösungsfindung zu nutzen. Viele verwendeten dabei verkürzende Strategien, durch die die Anzahl der Rechenschritte verringert wurde.

Bei eher formal-mathematischen Aufgaben erkannten die Kinder der Grundschulklasse math. Strukturen hauptsächlich dann, wenn sie bildlichen Darstellungen (bspw. dem „Zahlendreieck“) entnommen werden konnten.

Genau passende Fragestellungen konnten diese Kinder dann durch Fortsetzen der Darstellungen beantworten. Den Kindern des Förderprojekts gelang darüber hinaus zu einem großen Teil ein Repräsentationswechsel auf die rechnerische Ebene und das Erkennen und Nutzen verkürzender Strukturen.

Aufgabenstellungen, in denen es zur Bearbeitung notwendig war, die Gedankengänge umzukehren, wurden von den Kindern der Grundschulklasse nicht gelöst. Den Kindern des Förderprojekts gelang es demgegenüber bereits häufig, umgekehrte Fragestellungen korrekt zu beantworten. Die meisten dieser Kinder nutzten - wenn möglich - bei vorigen Aufgabenteilen verkürzende Strukturen. Insgesamt war zu erkennen, dass die Kinder der Grundschulklasse wesentlich größerer Schwierigkeiten als die Kinder des Förderprojekts hatten, relationale Begriffe zu verstehen und anzuwenden, mehrere Bedingungen in einer Aufgabenstellung gleichzeitig zu berücksichtigen und auch bei unbekannten Aufgabentypen eigenständig Lösungsansätze zu entwickeln.

In der Grundschulklasse wurden fast ausschließlich ausprobierende Vorgehensweisen verwendet, einige wenige Kinder setzten zusätzlich Tabellen ein. Auch im Förderprojekt gab es Kinder, die ausprobierend vorgingen, einige entdeckten während des Probierens mathematische Strukturen, die andere Vorgehensweisen ermöglichten und setzten mit diesen den Lösungsvorgang fort, wieder andere nutzten generell strukturierte Vorgehensweisen, setzten verkürzende Rechenstrategien ein und kehrten im Bedarfsfall diese Vorgehensweisen um. Auffällig war, dass fast alle Kinder die Aufgaben vollständig im Kopf bearbeiteten und schriftliche Aufzeichnungen vermieden.

Eine Verringerung der Leistungsunterschiede zwischen den beiden Gruppen war nicht zu beobachten.

Literatur

Aßmus, D. (2007): Merkmale und Besonderheiten mathematisch potentiell begabter Grundschüler – aktuelle Forschungsergebnisse. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 246 – 249

Aßmus, D. (2008): Merkmale und Besonderheiten mathematisch potentiell begabter Zweitklässler – Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. In: Fuchs, M. & F. Käpnick (Hrsg.): Mathematisch begabte Kinder – Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft. Berlin: LIT, S. 59 - 69

Sergey ATANASYAN, Ildar SAFUANOV, Moskau

Master Programs for future mathematics teachers in Russian Federation

Introduction

Serious innovations in educational system and, generally, the steps to the educational reforms were caused by crucial changes in political and social life during the last 15-20 years. The differentiation of education is the central part of discussions on the reforms, which continue since 1990 till today. Two kinds of the differentiation are being discussed:

1) w.r. to the amount of mathematics to be studied;

2) w.r. to the inclination of classes: mathematical, for engineering and natural sciences, for the humanities.

Now the process of the differentiation of schools and higher education takes place. Generally, approaches to the higher (university) education have changed. In some of pedagogical universities, two-stage curricula have been elaborated: after first 4 years, students become Bachelors and may teach at lower secondary schools. After 2 years of additional studies, they become Masters and have the right to teach at upper secondary schools. Obligatory assignments to institutes for annual production of young teachers, percent of satisfactory marks etc. are abolished. Institutes can almost independently work out their curricula.

2. The structure of curricula.

Generally, in standards recommended by the Ministry of Education in 1995, the amount of classroom hours for the whole course of pre-service teacher education program is about 4000, half of which (about 2000) are devoted to mathematical disciplines, one quarter (about 1000) to general cultural (e. g. social, philosophical and medical) sciences and one quarter (also about 1000) to psychological and pedagogical (including mathematics education) disciplines. However, the total amount of mathematics education is usually only about 170 hours (i.e. less than 5% of the whole program). The standards are used both in traditional 5-year course and in new two-level 6-year courses completing with master’s degree.

During the last years some modifications in this preparation are taking place connected with multilevel structure of higher education: two-years’ incomplete education, four-years’ study for the Bachelor’s degree; additional two-years’ preparation to the Master’s degree; alternative (traditional) way is five years' professional training for obtaining teacher’s diploma. Besides, the rather large role belongs to three-years’ graduate study, three-years’ postgraduate study, and also to the ramified system of in-service professional training of each school or university teacher (ideally - once every five years of work).

The new system of continuous education for teachers is only arising, but both in traditional and modern systems there is a lot of unsolved problems, which are caused by the lack of the complex approach to the development of the professional competence of teachers.

We will consider the new approaches to teacher education for mathematical profile classes in a Master program in the Moscow City Pedagogical University.

3. The Master program in Mathematics Education in the Moscow City Pedagogical University.

3.1. Overview.

In the Moscow City Pedagogical University, a new Master Program on mathematics education devoted to preparing teachers for the work in profile classes with mathematical bias also has been prepared. The curriculum includes advanced courses in Mathematics Education as well as in Mathematics such as «Geometry of complex and dual numbers» or «Abstract algebraic systems».

Proceeding from the purposes of offered mathematical disciplines, subject matter and methods of its teaching should satisfy to the following requirements.

The subject matter should be based on the school curriculum and on the facts stated in the school textbooks.

The statement of a material should be in a sufficient measure strict and correct.

It is necessary to acquaint the students with methods of teaching of these disciplines, appropriate for the school complexity level.

It is necessary to connect the contents of these disciplines with elementary mathematics, to show, how to prepare the pupils of profile classes to understanding of ideas and methods of mathematical researches, to mastering university courses of higher mathematics.

For example, the offered syllabuses of geometrical disciplines of choice represent the adapted to the school level geometry courses, usually studied by students of Russian pedagogical universities. One can choose the following sections:

constructive geometry, i.e. theory of solving tasks on construction figures on a plane by compasses and ruler;

foundations of projective geometry, namely properties of the central projection and of the model of a projective plane i.e. extended Euclidean plane complemented by infinitely distant points;

properties of axonometric and Monge's method of representing spatial bodies on a plane.

analytical methods in solving tasks of elementary geometry;

geometry of complex numbers;

axiom of parallelism and elements of geometry of Lobachevsky (hyperbolic geometry).

Consider in more detail three syllabuses of offered geometrical disciplines.

3.2. Syllabuses of offered geometrical disciplines.

3.2.1. Analytical methods at solving tasks of elementary geometry.

Russian school textbooks of geometry and foundations of vector algebra and analytical geometry are considered. In particular, properties of inner product of vectors are considered, the equations of a straight line and a circle on a plane and planes and spheres in space are deduced. One of the basic skills, which should be mastered by the students on the exercises, is a choice of convenient rectangular Cartesian system of coordinates, on which the complexity of calculations depends.

3.2.2. Geometry of complex numbers.

The basic idea of this course is to acquaint the students with geometrical interpretation of two-dimensional algebras of complex, dual and double numbers, and also with analytical methods of study of geometrical properties of figures by means of these algebras. Future masters study properties of interpretation of complex numbers by points of a plane where by a known rule to each complex number the point of a plane, namely the so-called complex plane is put in a correspondence. The questions of correspondence between geometrical transformations of a plane and appropriate properties of functions of complex variables are considered.

The concept of a dual number is introduced. Properties of geometry of a plane of dual numbers are considered. Algebraic properties of double numbers are studied. On the plane of double numbers the pseudoeuclidean metrics is introduced, and the properties of figures on this plane are considered. Properties of straight lines and circles, and also geometrical transformations are studied by means of algebra of dual numbers.

3.2.3. Axiom of parallelism and elements of geometry of Lobachevsky (hyperbolic geometry).

The basic purpose of a course is to show the students and pupils a place and meaning of the axiom of parallelism in the logical construction of Euclidean plane geometry, and also to acquaint them with some facts of hyperbolic geometry. It is well known that the attempts of the proof of the fifth postulate of Euclid have very interesting history closely connected to the history of development of a civilization. It is offered the following scheme of the construction of discipline. First, it is necessary to acquaint the pupils with the history of attempts of the proof of the fifth postulate of Euclid. In these attempts, the statements equivalent to the axiom of parallelism were used.

The proofs of equivalence of these statements to this axiom of parallelism are carried out. The axiom of parallelism of Lobachevsky is formulated, and it follows from it, that on a plane of Lobachevsky is not hold abovementioned statements. The pupils get acquainted with a model of Cayley-Klein where points of a plane of Lobachevsky are interpreted as internal points of a circle.

The experience of studying these disciplines by students and teaching in profile classes shows their efficiency. These courses acquaint students and pupils with a material having connected with the school program, but extending its framework, stimulate the great interest to geometry.

Literatur

Dorofeev, G.V., Kuznecova, L.V., Suvorova, S.B., Firsov, V.V. (1990). Differentiation in Mathematical education. Matematika v shkole, No. 5, 6-19.

Thomas BARDY, Bremen

Wie erlangt mathematisches Wissen im alltäglichen Mathematikunterricht für die Lernenden Geltung? - Erste Ergebnisse einer empirischen Studie -

Einleitung

Ich beschäftige mich mit der Frage, wie im alltäglichen MU durch Handlungen der Akteure mathematisches Wissen Geltung in der Klasse erlangt. Angenommen wird, dass diese Prozesse sich in Handlungspraktiken der Unterrichtskultur zeigen und deshalb beobachtbar sind.

Im MU geht es um die Vermittlung bzw. die Konstruktion mathematischen Wissens, aber auch um die Bewertung der Leistungen der beteiligten Lernenden. Das erzwingt bei den Lernenden, zu erkennen, was als geltend im Unterricht angesehen wird, und bei der Lehrperson, deutlich zu machen, was gelten soll. Wissen, das Geltung (aus Sicht der Lehrperson) erlangt hat, dient dann als Grundlage der Leistungsüberprüfung.

Zu den Begriffen „Geltung“ und „Gültigkeit“

Die Begriffe „Geltung“ und „Gültigkeit“ werden in verschiedenen Wissenschaften benutzt und dort in ihrem Bedeutungsgehalt gegeneinander abgegrenzt, z.B. in der Philosophie (u.a. Habermas 1998) oder in der Rechtstheorie (siehe z.B. Alexy 2005). **Geltung** ist Ergebnis des Akts, der Verbindlichkeit und Akzeptanz herstellt. Dies kann bewusst oder unbewusst geschehen. Etwas „gilt“, wenn es verbindlich akzeptiert wird. „Unter ‚Geltung‘ ist […] nur die Dimension zu verstehen, in der bestimmte Ansprüche und Bedingungen charakterisiert werden, ohne daß sie gerechtfertigt, eingelöst oder erfüllt wären.“ (Ulfig 1997, 189) **Gültigkeit** einer Aussage liegt vor, wenn diese Aussage bewiesen oder durch Argumente begründet werden kann.

Gültiges Wissen besitzt allerdings noch keine Geltung, solange es nicht durch den Willen (z.B. der Allgemeinheit oder des Lehrers) in Kraft gesetzt wurde. „’Gültig’ heißt nur, dass Gründe vorliegen, die der Intellekt als richtig, zutreffend, adäquat, logisch korrekt, etc. beurteilt“ (Weichbold 2007, 1), um das Wissen in Geltung zu setzen. Diese Gründe schaffen nicht von sich aus die Geltung des Wissens; „die Geltung ist keine Folge von logischen Voraussetzungen, sondern eines Willensaktes“ (a.a.O.).

Methodisches Vorgehen

Die empirischen Untersuchungen meines Projekts sind so angelegt, dass eine empirisch basierte begriffliche Klärung in mehreren Schritten möglich ist. Das ist am besten mit dem theoretischen Sampling aus der **Grounded Theory** realisierbar (Strübing 2008). Das heißt, Datenerhebung und Datenauswertung gehen Hand in Hand. Jeder Datensatz wird sofort transkribiert und analysiert, und zwar gemäß den Zielen der Untersuchung. Mit jedem dieser Auswertungszyklen gewinnt man weiter und tiefer gehende Einsichten.

Zunächst habe ich den Unterricht von 3 Lehrpersonen an einem Gymnasium (G8, Jgst.10, je 6-7 aufeinander folgende Unterrichtsstunden) zum Thema „Einführung in die Differenzialrechnung“ videographiert, transkribiert und analysiert. Nach Abschluss der Auswertung werde ich meine Ergebnisse mit Videodaten der Universität Zürich (Reusser et al., 3 Lehrpersonen, G9, Jgst.9, je 3 aufeinander folgende Unterrichtsstunden) zum Thema „Satz des Pythagoras“ vergleichen. Zusätzlich werden zurzeit durch Studierende Beobachtungsdaten von etwa 45 Lehrpersonen (unterschiedliche Themen und Jahrgangsstufen, je 2 aufeinander folgende Unterrichtsstunden) erhoben. Die Auswertung meiner Daten erfolgt mit unterschiedlichen Analysemethoden.

Ziele der Auswertung sind u.a. die theoretisch-begriffliche Klärung des Untersuchungsgegenstands, die Identifizierung von Handlungspraktiken der Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Unterricht, die die Konstruktion mathematischen Wissens fördern, erschweren oder behindern, und die Frage, in welchen Formen und mit welchen Funktionen mathematisches Schulwissen etabliert wird.

Erste Ergebnisse

Abbildung 1 ist aus der Analyse / Interpretation meiner eigenen Videodaten entstanden.

Ich erhalte z.B. als Formen der Kategorie 1.1:

- gezieltes / direktes Vormachen / Zeigen mit oder ohne Nachmachen,
- explizite Definitionen, Begriffs- oder Bezeichnungsfestlegungen,

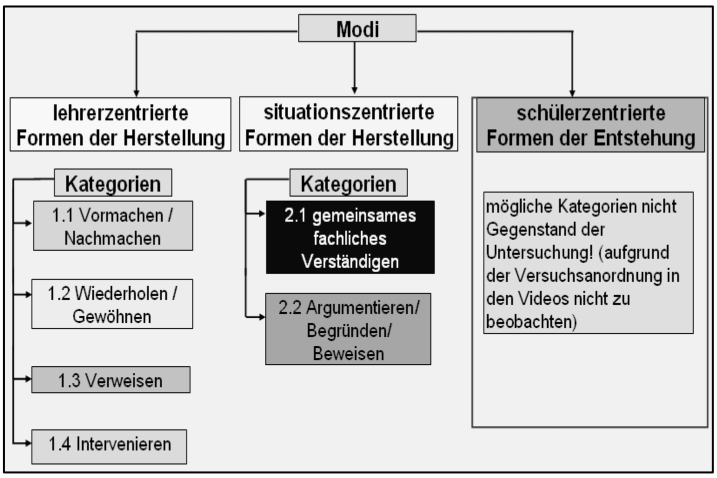


Abb. 1

- Beantwortung von Lehrerfragen / Ergänzen von Sätzen des Lehrers ohne Korrektur / mit ausdrücklicher Bestätigung durch den Lehrer,
- Verfolgen / Abarbeiten eines vorgegebenen / vorbereiteten Vorgehens/ Lösungsweges.

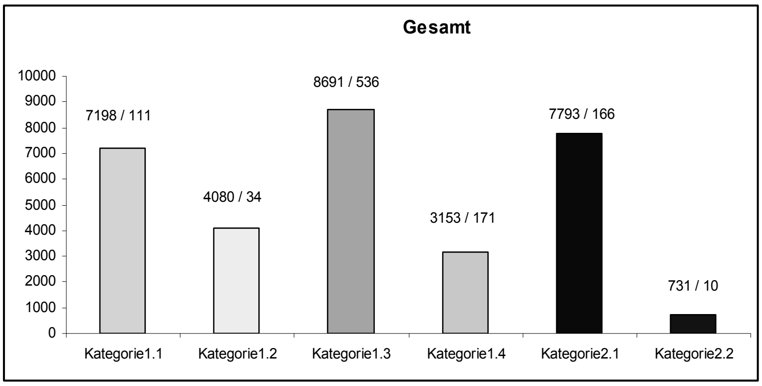


Abb. 2

Abbildung 2 zeigt die Gesamtauswertung der Daten der 3 Lehrpersonen (insgesamt 19 Unterrichtsstunden).
Erläuterung: 7198/111 bedeutet: 7198s lang trat Kategorie 1.1 auf, und zwar an 111 Stellen.

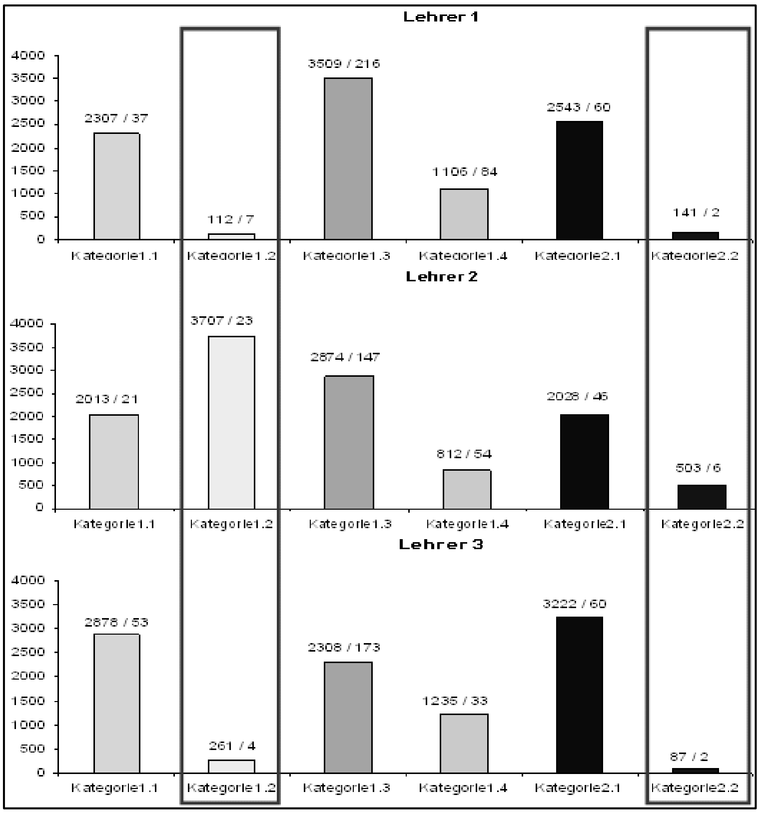


Abb. 3

Auffallend ist, dass die Kategorie 2.2 nur einen sehr geringen Anteil besitzt.
Abbildung 3 erfasst die Kategorienverteilung im Vergleich der 3 Lehrpersonen.
Erhebliche Unterschiede treten insbesondere bei den Kategorien 1.2 und 2.2 auf.
Außerdem stellen die drei Lehrer in der jeweils inhaltlich zentralen Stunde (Thematisierung der ersten Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten) mit unterschiedlichen Schwerpunkt-Kategorien Geltung her:

Lehrer 1: **Vormachen/Nachmachen** (Lehrer erläutert den Differenzenquotienten (h-Meth.) und zeigt, wie man am TR den Limes-Befehl verwendet),

Lehrer 2: **Gewöhnen** (Lehrer erläutert die Bedeutung des Grenzwertes des Differenzenquotienten und ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Steigung einer Tangente; Schüler wenden das Verfahren mehrfach an), Lehrer 3: **Vormachen/Nachmachen**; **Verweisen**; **Intervenieren**; **gemeinsames fachliches Verständigen** (gemeinsame Erarbeitung des Differenzenquotienten; Erläuterung des Differenzenquotienten an einem Beispiel durch einen Schüler und Diskussion/Verständigen darüber; Präzisieren, Vormachen und Verweis auf fachliche Normen durch den Lehrer).

Jeder Kategorie kann eine Norm zugeordnet werden: Norm 1: Was der Lehrer (vor)macht, gilt. Norm 2: Der etablierte Gebrauch verschafft Geltung. Norm 3: Worauf der Lehrer verweist, das gilt. Norm 4: Lehrerinterventionen verschaffen Geltung. Norm 5: Das, worauf wir uns verständigt haben, gilt. Norm 6: Gründe für fachliche Richtigkeit erzeugen Geltung.

Bei Lehrer 1 erzeugen die Normen 3 und 5 vorrangig Geltung, bei Lehrer 2 die Normen 2 und 3 sowie bei Lehrer 3 die Normen 5 und 1.

Gewinn für die Unterrichtspraxis

Im Hinblick auf die Unterrichtspraxis können meine Untersuchungen wichtige Hinweise für Lehrpersonen in Bezug auf den Einsatz spezieller Formen/Kategorien der Herstellung von Geltung liefern. Welche Kategorien bzw. Formen bevorzugt eine Lehrperson? Ist dies sinnvoll? Wie kann sie sensibel dafür gemacht werden, wie oft sie Geltung durch Konventionen herstellt und welche Bedeutung Argumentieren für das Fach Mathematik hat?

Im Einzelnen sind u.a. Antworten auf folgende Fragen zu erwarten: Welche Formen der Herstellung von Geltung gibt es? Gibt es Indizien, die auf erfolgreiche Formen der Herstellung von Geltung hinweisen? An welchen Stellen von Prozessen der Wissenskonstruktion sollte mathematisches Wissen sinnvollerweise Geltung erlangen? Welche Formen der Herstellung von Geltung sollten als professionelles Handeln im Unterricht in die Lehreraus- und -fortbildung integriert werden?

Literatur

Alexy, R. (⁴2005). *Begriff und Geltung des Rechts.* Freiburg, München: Karl Alber.

Habermas, J. (1998). *Faktizität und Geltung. Beiträge zur Diskurstheorie des Rechts und des demokratischen Rechtsstaats.* Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

Strübing, J. (²2008). *Grounded Theory. Zur sozialtheoretischen und epistemologischen Fundierung des Verfahrens der empirisch begründeten Theoriebildung*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Ulfig, A. (1997). *Lebenswelt – Reflexion – Sprache. Zur reflexiven Thematisierung der Lebenswelt in Phänomenologie, Existenzialontologie und Diskurstheorie.* Würzburg: Königshausen & Neumann.

Weichbold, V. (2007; 12.11.2009). *Eine Anmerkung zur Normenbegründung.* Abgerufen von: http://www.at/E_Normenbegruendung.pdf

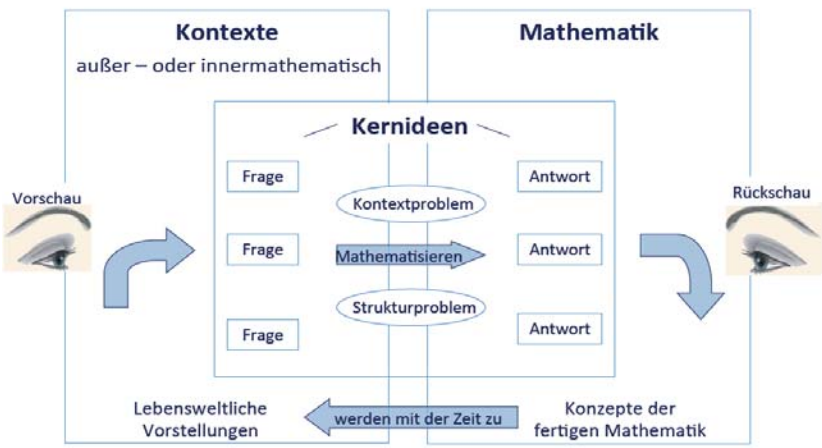
Bärbel BARZEL, Susanne PREDIGER, Timo LEUDERS,
Stephan HUSSMANN, Freiburg / Dortmund

Kontexte und Kernprozesse – Aspekte eines theoriegeleiteten und praxiserprobten Schulbuchkonzepts

Im Rahmen des langfristigen Forschungs- und Entwicklungsprojektes KOSIMA (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen, vgl. Hußmann / Leuders / Barzel / Prediger 2011, später publiziert als Barzel et al. 2012) haben wir ein ganzheitliches Konzept für den Unterricht in den Klassen 5-10 entwickelt und erprobt. Ein ganzheitliches Konzept muss nicht nur über alle Themenbereiche und Unterrichtsphasen hinweg tragen, es integriert auch verschiedene didaktische Prinzipien, hier die Prinzipien des genetischen Lernens (Wagenschein 1977, Freudenthal 1991), Verstehensorientierung (Skemp 1976, Wagenschein 1977, Hiebert et al. 1997), Eigentätigkeit (Freudenthal 1983) und Sinnstiftung (s.u.). Zur Realisierung dieser Prinzipien wurden verschiedene wiederkehrende Strukturelemente entwickelt, von denen hier Kontext und Kernideen sowie die Strukturierung in die Kernprozesse Erkunden, Ordnen, Vertiefen vorgestellt werden soll.

Kontexte und Kernideen

In Leuders et al. (2011) ist ausführlicher dargestellt, wie zur Sinnstiftung die Ansätze Anwendungsorientierung, genetisches Lernen, Ideen- und Subjektorientierung miteinander verschränkt werden: Mathematik im Entstehen wird durch eigenständige Genese mathematischer Konzepte in konkreten *Problemen* erlebbar (s.u. Erkunden). Dieses genetische Prinzip wird mit Anwendungsorientierung verknüpft, indem die Probleme, soweit sinnvoll, in authentischen und großräumig genutzten *Kontexten* situiert werden.



Die fachspezifische Substanz wird über die Orientierung an fundamentalen Ideen (Bruner 1970) aufgegriffen, die in der Perspektive des lernenden

Subjekts als *Kernideen* formuliert werden. In der Vorschau (Gallin/Ruf 1998) strukturieren Kernfragen die Lernprozesse, in der Rückschau werden diese durch bereichsspezifische Konkretisierungen allgemeiner fundamentaler Ideen und mit Hilfe der nacherfundenen mathematischen Konzepte beantwortet. So wirft zum Beispiel der Kontext „Orientierung von Mensch und Tier“ die subjektiv zugängliche Kernfrage „Wie kann ich Orte durch Zahlen beschreiben?“ auf. Als Antwort entsteht die Idee der Koordinaten.

Kontext und Kernfragen werden auf einer Einstiegsseite durch eine Situation aus dem lebensweltlichen Alltag der Lernenden etabliert. Mit den Einstiegen werden Vorerfahrungen aktiviert und die Kernfragen als relevante Fragen etabliert.

Erkunden - Kernprozess des beziehungshaltigen Entdeckens und Nacherfindens

Konstruktivistisch orientierte Design-Theorien (z.B. Brophy 2002) betonen die Bedeutung aktiver Konstruktionen von Wissen. Zur Initiierung eigenständiger *mathematischer* Wissenskonstruktionsprozesse werden genetische Probleme konstruiert, bei deren Bearbeitung mathematische Begriffe eigenständig nacherfunden und mathematische Zusammenhänge und Vorgehensweisen entdeckt werden (Winter 1989, Freudenthal 1991, Hußmann 2002). Wir nennen dies den Kernprozess des *Erkundens*.

Prozesse der horizontalen Mathematisierung werden durch inner- oder außermathematische *Kontextprobleme* initiiert (Freudenthal 1983). Im Verlauf der Bearbeitung dieser Kontextprobleme erfinden Lernende mathematische Begriffe als Werkzeuge und entdecken Zusammenhänge und Vorgehensweisen. Ergänzend braucht es aber auch *Strukturprobleme*, welche auf sogenannte vertikale Mathematisierungsprozesse zielen (Freudenthal 1983). Strukturprobleme initiieren die Untersuchung struktureller Phänomene und ihre Zusammenhänge zu anderen theoretischen Elementen, die Exploration von Möglichkeiten der Übertragung bereits bekannter Operationen oder Prozesse der Schematisierung, z.B. die Entwicklung eines Kalküls im Umgang mit den Objekten.

Gemeinsam ist Kontext- und Strukturproblem die authentische und selbständige Weise des Umgangs mit Mathematik (Winter 1996). Im Kernprozess des Erkundens stehen dabei die individuellen Ideen und die Sprache der Lernenden im Vordergrund, noch nicht die fachlich konsolidierte Mathematik. Unterstützt werden die Prozesse durch Anregungen zur Verschriftlichung (im „Prozessheft“) und fokussierte Reflexion (in der Aufgabenkategorie „Nachgedacht“).

Beim konkreten Design von Erkunden-Aufgaben sind immer wiederkehrende *Herausforderungen* jeweils lokal zu bewältigen:

- Wie findet man einen über mehrere Stunden tragfähigen Kontext? …passende genetische Probleme? …eine tragende Kernidee?
- Welche Balance zwischen Offenheit und Zielorientierung ist themenspezifisch angemessen?
- Wie können Möglichkeiten der natürlichen Differenzierung jeweils ausgeschöpft werden?

Ordnen – Kernprozess des aktiven Systematisieren und Sicherns

Für einen nachhaltigen, konsolidierten Wissensbau muss dem Erkunden eine Phase des Systematisierens und Sicherns folgen, die vier Funktionen erfüllt: Reflektieren (Erfahrungen bewusst machen), Regularisieren (individuell Erarbeitetes mit dem regulären mathematischen Wissen abgleichen), Vernetzen (fragmentiertes Wissen miteinander in Beziehung setzen) und Dokumentieren (Gelerntes im Wissensspeicher schriftlich festhalten, um später darauf zugreifen zu können). Wir nennen dies den Kernprozess des *Ordnens*.

Im Gesamtkonzept mussten neue Wege erarbeitet werden, um auch das Ordnen unter möglichst aktiver Beteiligung der Lernenden zu gestalten, ohne diese durch zu viel Offenheit zu überfordern. Dazu wurde eine Vielzahl von Aneignungshandlungen im Spektrum zwischen Selbstfinden und Nachvollziehen entwickelt und erprobt (Prediger et al. 2011).

Beim konkreten Design von Ordnen-Aufgaben sind immer wiederkehrende *Herausforderungen* jeweils lokal zu bewältigen:

- Welche Facetten des konzeptuellen und prozeduralen Wissens (Bedeutungen, Konventionen, Abgrenzungen, usw.) müssen für den langfristigen Gebrauch systematisiert und gesichert werden?
- Wie kommt die reguläre Mathematik auf lautere Weise ins Spiel?
- Wie gelingt die Balance zwischen genügend Kontextbindung einerseits, um eine gedankliche Verankerung zu gewährleisten und genügend Ablösung vom Kontext andererseits, um Abstraktion zu ermöglichen?

Vertiefen - Kernprozess des kognitiv aktivierenden Übens

Zur Festigung des erworbenen und systematisierten Wissens und Könnens sind Phasen des Übens ebenso unabdingbar wie der Transfer auf andere Kontexte und die weitere Vernetzung mit anderen Themen. Das nennen wir den Kernprozess des *Vertiefens*. Für eine produktive und kognitiv aktivierende Gestaltung des Übens kann das Schulbuchkonzept auf bewährte Ansätze zurückgreifen (Winter 1984, Müller/Wittmann 1992, Büchter/Leuders 2005).

Beim konkreten Design von Vertiefen-Aufgaben sind immer wiederkehrende *Herausforderungen* jeweils lokal zu bewältigen:

- Wie weit muss ein Transfer von den Kontexten des Erkundens auf weitere Kontexte explizit angeleitet werden?
- Wie wird der Bedarf nach genügend Training von Fertigkeiten ausbalanciert mit dem nach vorstellungsorientiertem, sinnstiftendem und kontextbezogenem Arbeiten?
- Wie wird ein angemessenes Differenzierungspotential gewährleistet?

Checkliste – Mittel der Zielorientierung und Selbsteinschätzung

Lernende brauchen Transparenz und Bewusstheit darüber, was von ihnen erwartet wird und was sie bereits an Kompetenzen erreicht haben. Nur mit einer solchen Zielorientierung können sie den eigenen Lernprozess insgesamt reflektieren, selbstkritisch gestalten und so Verantwortung für das eigene Lernen übernehmen. Checklisten, die sowohl Kompetenzen in Schülersprache als auch konkretisierende Beispielaufgaben angeben, können diesen Prozess unterstützen (Fernholz/Prediger 2007). Sie ermöglichen konkret eine Selbsteinschätzung des eigenen Lernstandes und durch die Verweise auf passende Vertiefenaufgaben eine selbständige Bearbeitung der ermittelten Lücken oder Defizite.

Handbuch – Unterstützung für eine fundierte Unterrichtsvorbereitung

Zentrale Bestandteile des begleitenden Handbuchs für Lehrkräfte sind Umsetzungsvorschläge für den Unterricht, Hinweise zu Diagnose, Förderung und Differenzierung und fachdidaktische Informationen zur Thematik. Neben den Lösungen finden sich mögliche Lernwege, um Ideen und Schwierigkeiten der Lernenden zu antizipieren. Damit wird eine fundierte Vorbereitung auf einen flexiblen, diagnosegeleiteten und differenzierenden Unterricht ermöglicht.

Anmerkungen

Alle Autorinnen und Autoren haben am Artikel gleichberechtigt mitgewirkt. Literatur in der längeren Fassung des Beitrags unter www.ko-si-ma.de.

Andreas BAUER, Würzburg

Argumentieren mit multiplen und dynamischen Darstellungen

Argumentieren hat im Mathematikunterricht in der Vergangenheit an Bedeutung gewonnen und wurde in den KMK-Bildungsstandards als allgemeine mathematische Kompetenz besonders hervorgehoben. Dabei wird Argumentieren verstanden als „der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, diesen Begründungsbedarf zu befriedigen“ (Schwarzkopf 2000, S. 240). Damit ist die Argumentation, wie sie im Mathematikunterricht stattfindet, von einer allgemeineren Sichtweise von Argumentation abzugrenzen: während für letztere die Existenz einer Kontroverse entscheidend ist (vgl. Klein 1980, S. 10), wird im Mathematikunterricht dem Schüler oder der Schülerin eine argumentative Begründung abverlangt, „obwohl die genannte Antwort korrekt und die Richtigkeit mitnichten strittig ist“ (Krummheuer & Fetzer 2005, S. 30). Der Begründungsbedarf in dieser Argumentation erschließt sich also nicht aus der Notwendigkeit einer rationalen Konsensfindung, sondern verfolgt das Ziel, eine „Einsicht in einen allgemeinen Sachverhalt zu vermitteln und diese zu sichern“ (Vollrath 1980, S. 30). Dies äußert sich schon dadurch, dass für Argumentationen in der Klasse häufig keine antagonistischen, sondern vielmehr kooperative Argumentationsweisen charakteristisch sind (vgl. Meyer 2007, S. 82).

Toulmins 1958 erstmals veröffentlichtes Argumentationsmodell (vgl. Toulmin 2003) hat sich in der Mathematikdidaktik in zahlreichen Studien als Werkzeug zur Analyse von Argumenten bewährt (vgl. Schwarzkopf 2000, Krummheuer & Fetzer 2005, Bezold 2009, Fetzer 2011). Demnach besteht ein Argument aus verschiedenen Elementen, welchen in der Argumentation jeweils unterschiedliche Funktionen oder Rollen innehaben. In der nachträglichen Analyse beobachteter Argumentationsprozesse werden die Aussagen der Argumentierenden diesen Rollen zugeordnet, die im Pro-

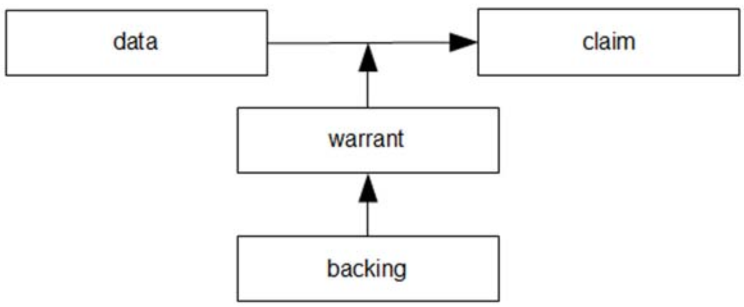


Abbildung 1: Grundstruktur von Argumenten nach Toulmin (2003, S. 92)

zess der Argumentation vorgebrachten Argumente werden also gemäß Toulmins Argumentationsmodell rekonstruiert. Argumente besitzen eine einheitliche Struktur: Eine Behauptung (claim) wird aufgestellt, basierend auf einem Datum (data). Dies ist zulässig wegen einer anwendbaren Schlussregel (warrant), deren Gültigkeit durch eine Stützung (backing) abgesichert ist (vgl. Toulmin 2003, S. 87ff). Eine beispielhafte Analyse eines Arguments ist in Abbildung 4 gezeigt.

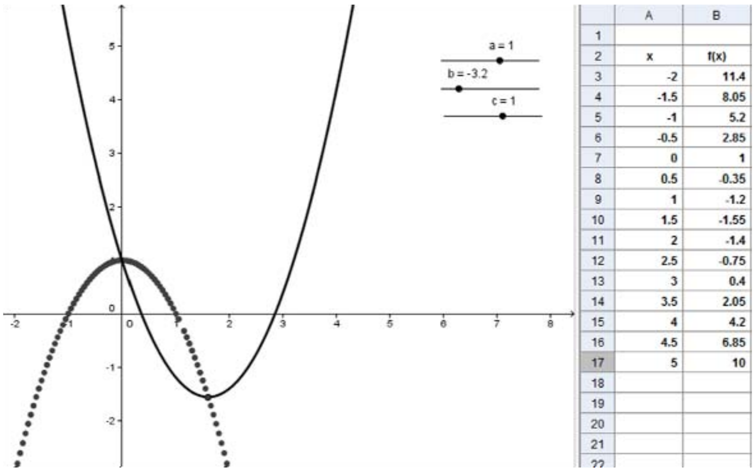


Abbildung 2: Beispiel einer multiplen, dynamischen Repräsentation

Wird über mathematische Objekte diskutiert, so entziehen sich diese als abstrakte, nicht-stoffliche Objekte dem direkten Zugriff menschlicher Wahrnehmung. Ein Zugang zu diesen Objekten ist nur über Repräsentationen möglich (vgl. Duval 2006, Kaput 1991), also sichtbare Informationsdarbietungen, welche bestimmte Eigenschaften eines mathematischen Objektes abbilden und somit greifbar machen. Diese bezeichnet man in Abgrenzung zu den mentalen, subjektiven Modellen mathematischer Objekte als *externe* Repräsentationen (vgl. Scaife & Rogers 1996, S. 188).

Der Computer hat als relativ neues Medium die Bandbreite externer Repräsentationen erheblich erweitert, insbesondere durch die Einführung dynamischer und dynamisch verbundener multipler Darstellungen (vgl. Abbildung 2). Multiple, externe Repräsentationen (MER) waren bereits Gegenstand zahlreicher Studien. Diese haben jedoch nicht nur positive Effekte nachweisen können (zusammengefasst bei Acevedo Nistal, Van Dooren, Clarebout, Elen, Verschaffel 2009), weshalb begonnen wurde, Gestaltungskriterien für die Verwendung von MERs zu entwerfen. Ainsworth (2006) identifiziert drei wesentliche Funktionen von MERs (Abbildung 3): eine ergänzende Rolle, in der zusätzliche Repräsentationen weitere Informationen und Handlungsmöglichkeiten bieten. Bei der eingrenzenden Rolle präzisieren Repräsentationen andere, um z. B. den Graph-als-Bild-Fehler (vgl. Clement 1989, S. 8) zu vermeiden. Die dritte Rolle ermöglicht das Erzeugen eines tieferen Verständnisses für Repräsentationen, indem z. B. von bekannten Repräsentationen auf neue, unbekannte geschlossen und so das Wissen über Repräsentationen erweitert werden kann.

Abbildung 3: Funktionen von MER, vereinfacht nach Ainsworth (2006)

Vor allem die Verbindung und das Umschalten zwischen den einzelnen Darstellungen bereitet Lernenden wegen des notwendigen Wissens über Repräsentationen große Schwierigkeiten (vgl. van der Meij & de Jong 2006, S. 200). Die dynamische Verbindung dieser Repräsentationen mit Hilfe des Rechners verspricht jedoch eine Vereinfachung des Verständnisses durch eine automatische Übersetzung zwischen den Teilrepräsentationen der MER (vgl. Scaife & Rogers 1996, Kaput 1989). Besonders die Handlungen, die Lernende auf solchen dynamisch verbundenen Repräsentationen ausführen können, wie z. B. die Variation eines Graphen mit Hilfe von Schiebereglern (s. Abbildung 2), machen durch die auftretenden Invarianten die Verbindung zwischen den dargestellten Repräsentationen sichtbar und erlauben damit einen Blick auf die Struktur des zugrundeliegenden mathematischen Objektes. Eine solche Lernumgebung ist daher mehr als nur die Summe ihrer Teile (vgl. Kaput 1989, S. 179f).

Multiple dynamische Repräsentationen (MDER) können Lernende beim Argumentieren unterstützen, indem sie neue Daten anbieten, zusätzliche Schlussregeln verfügbar machen oder als Stützung fungieren. In Abbildung 4 ist eine beispielhafte Analyse eines Argumentes zu sehen.

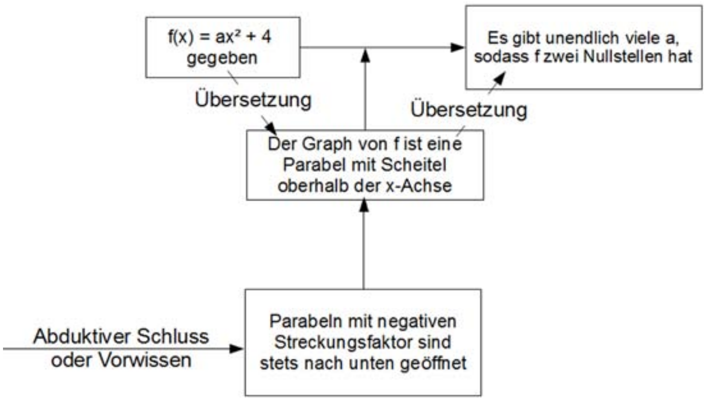


Abbildung 4: Beispielhafte Analyse eines Argumentes mit MDER

Die Schlussregel zur Behauptung ist dabei nur anwendbar, wenn zuvor ein Repräsentationswechsel von der gegebenen Gleichung zum Graphen der Funktion vorgenommen wird. Die Anwendbarkeit dieser Schlussregel ist durch eine Stützung abgesichert, welche entweder bereits als Vorwissen vorhanden war, oder z. B. aus einem dynamischen Applet abduktiv geschlossen wurde.

In meiner Dissertation werden im Rahmen einer empirischen Studie die Argumente Lernender anhand des Toulmin'schen Argumentationsmodells analysiert und insbesondere die Rolle der Multiplizität und Dynamik von Repräsentationen in den Argumenten beleuchtet.

Literatur

Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J. & Verschaffel, L. (2009): Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. In: ZDM Mathematics Education 41, S. 627–636.

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. Focus on Learning Problems in Mathematics 11 (1-2), 77–87.

Fetzer, M. (2011). Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathemathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. Journal für Mathematik-Didaktik 32, 27–51.

Kaput, J. J. (1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. In: Wagner, S. & Kieran, C. (Hrsg.), Research issues in the learning and teaching of algebra (S. 167–194). [Hillsdale, N.J.], Reston, Va: L. Erlbaum Associates; National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In: von Glasersfeld, E. (Hrsg.), Radical constructivism in mathematics education (S. 53–74). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Krummheuer, G. & Fetzer, M. (2005): Der Alltag im Mathematikunterricht. München: Elsevier.

van der Meij, J. & de Jong, T. (2006): Supporting students learning with multiple representations in a dynamic simulation-based learning environment. In: Learning and instruction 16 (3), S. 199–212.

Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.

Scaife, M. & Rogers, Y. (1996): External cognition: how do graphical representations work? In: International Journal for Human-Computer Studies 45, S. 185–213.

Schwarzkopf, R. (2000). Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen und Fallstudien. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

Toulmin, S. (2003): The Uses of Argument. Updated edn. Cambridge: Cambridge University Press.

Vollrath, H.-J. (1980): Eine Thematisierung des Argumentierens in der Hauptschule. In: Journal für Mathematikdidaktik 1, S. 28–41.

Isabell BAUSCH, Regina BRUDER, Darmstadt

Subjektive Theorien über die Planung von Mathematikunterricht

Das tägliche Handeln einer Lehrkraft wird wesentlich durch ihre Vorstellungen über guten Unterricht beeinflusst (vgl. Wahl, 2001). Fischler (2001) fasst die Forschungsergebnisse zur Erfassung von Lehrer-Vorstellungen zusammen und stellt heraus, dass sich gerade bei noch nicht routinierten Lehrkräften zeigt, dass ein Rückgriff auf gelerntes Professionswissen gerade in stressigen Situationen nur selten gelingt. Aus diesem Grund ist es bereits in der ersten Phase der Mathematiklehrerausbildung wichtig, die Entwicklung von Vorstellungen über guten Mathematikunterricht zu untersuchen und zu ermöglichen.

1. Lesson-Plan-Studie

Um die Entwicklung von Vorstellungen über guten Mathematikunterricht zu untersuchen, wurde die Theorie der persönlichen Konstrukte (Kelly, 1955) als Forschungshintergrund gewählt. Zur Erfassung individueller Konstrukte hat Kelly (1955) die Repertory-Grid-Technik entwickelt. Im Zentrum dieser Methode steht das Vergleichen von Objekten. Hierbei bilden die gefundenen Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser Objekte die sogenannten individuellen Konstrukte. In der folgenden Studie wird diese Methode verwendet, um individuelle Konstrukte über die Planung von gutem Mathematikunterricht zu erfassen, indem Unterrichtsentwürfe miteinander verglichen werden.

Die Lesson-Plan-Studie ist seit zwei Jahren ein Gemeinschaftsprojekt der University of Technology Sydney und der Technischen Universität Darmstadt. Die Studie wird an beiden Universitäten längsschnittlich in unterschiedlichen Semestern durchgeführt, wobei alle Teilnehmer das Lehramt für die Sekundarstufe II anstreben.

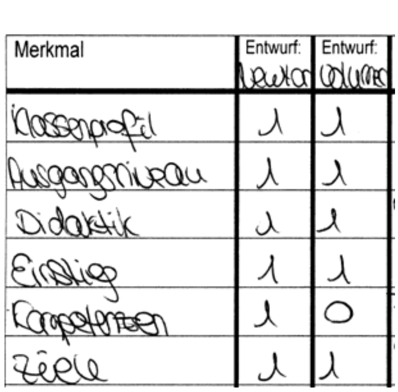


Abbildung 1: Beispiel für ein Grid

Die Lesson-Plan-Studie ist für 45 Minuten konzipiert und variiert die Repertory-Grid-Technik. Zunächst werden die Studierenden durch ein fünfminütiges Brainstorming über die Planung von Mathematikunterricht auf das Thema „Unterrichtsqualität“ eingestimmt. Daran schließt ein Vergleich zweier Unterrichtsentwürfe an, bei dem von den Studierenden das eigenständige Benennen von Gemeinsamkeiten und Unterschieden erwartet wird. Das Zutreffen bzw. Nichtzutreffen der gefundenen Merkmale wird markiert (siehe Abb. 1). Den Abschluss der Befragung bildet die Frage nach dem subjektiv eingeschätzt „besseren“ Unterrichtsentwurf mit Begründung und nach evtl. Verbesserungsvorschlägen (Kuhnke-Lerch & Bruder, 2010).

2. Auswertung des Vergleichs der Unterrichtsentwürfe

Um die Merkmale, die von den Studierenden zur Unterscheidung der Unterrichtsentwürfe genannt wurden (vgl. Abb. 1), zu analysieren, wurde auf der Basis verschiedener Beschreibungen guten Mathematikunterrichts und entsprechender Unterrichtsplanung ein Kategoriensystem entwickelt (vgl. Abb. 2 und Kuhnke-Lerch, 2009). Um die Stabilität der Einstufung der Merkmale in dieses Kategoriensystem zu überprüfen, wurden zwei geschulte Rater gebeten 400 Merkmale einzustufen. Mit einem Krippendorf Alpha von 0,81 ist die Interraterreliabilität akzeptabel.

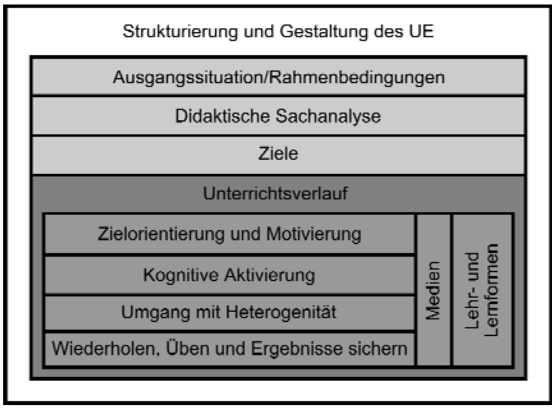


Abbildung 2: Kategoriensystem zur Analyse des Grids

Um die Antwortcharakteristik der Studierenden insgesamt genauer zu untersuchen und Kategorien, die häufig miteinander genannt werden, zu identifizieren, wurde eine explorative Hauptkomponentenanalyse (KMO: 0,635) durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abb. 3 dargestellt. Es konnten vier Komponenten bestimmt und wie folgt interpretiert werden:

Rotierte Komponentenmatrix

Kategorien	Komponente			
	1	2	3	4
Ziele	,756	-,111	,176	,080
Ausgangssituation/Rahmenbedingung	,747	-,132	-,013	,101
Didaktische Sachanalyse	,709	,027	-,151	-,038
Struktur des Unterrichtsentwurfs	,332	-,350	,252	,074
kognitive Aktivierung	-,152	,756	-,032	-,010
Zielorientierung und Motivierung	-,046	,547	,139	,120
Umgang mit Heterogenität	,231	,465	,439	-,313
Unterrichtsverlauf	-,186	-,150	,757	,114
Üben und Ergebnissicherung	,132	,291	,618	-,005
Medien	,256	-,069	,077	,775
Lehr-und Lernformen	-,130	,494	,001	,635

Abbildung 3: Ergebnisse der Hauptkomponentenanalyse

1) Die *planungsorientierte* Sicht auf Mathematikunterricht setzt sich aus den Kategorien „Ausgangssituation/Rahmenbedingungen“, „Didaktische Sachanalyse“, „Ziele“ und „Struktur des Unterrichtsentwurfs“ zusammen. Diesen Kategorien ist gemein, dass sie Merkmale der Unterrichtsplanung beinhalten, auf denen die Gestaltung des Unterrichts aufbaut.

2) Die *aktivierende* Sicht auf Mathematikunterricht beinhaltet die Merkmale der Kategorien „kognitive Aktivierung“, „Umgang mit Heterogenität“ und „Motivierung“. Diese Merkmale sind schülerorientiert und beschreiben verschiedene Möglichkeiten für Mathematik zu interessieren und eine kognitive Mitarbeit zu fördern.

3) Die *aufgabenorientierte* Sicht auf Mathematikunterricht setzt sich aus den Kategorien „Üben, Wiederholen und Ergebnisse sichern“ und „Unterrichtsverlauf“ zusammen. In diesen Kategorien spielen Aufgaben und deren Einbindung in die verschiedenen Unterrichtssituationen eine zentrale Rolle.

4) Die *methodenorientierte* Sicht auf Mathematikunterricht beinhaltet die Kategorien „Medien“ und „Lehr- und Lernformen“. Diese Merkmale beschreiben die verschiedenen Unterrichtsmethoden und Medien, die im Mathematikunterricht eingesetzt werden können.

Mit Hilfe dieser vier Komponenten wurde die Ausprägung der verschiedenen Sichtweisen der Studierenden auf die Planung von Mathematikunterricht in Abhängigkeit von der Ausbildungsstufe untersucht (siehe Abb. 4).

Hier fällt zunächst der Peak in der planungsorientierten Sichtweise auf, der zu der Gruppe der Teilnehmer an den zweiten schulpraktischen Studien gehört. Diese Gruppe richtet im Vergleich zu allen anderen ihren Fokus stärker auf formale und vorbereitende Aspekte der Unterrichtsplanung. Dies kann dadurch erklärt werden, dass diese Studierenden zum Zeitpunkt der Befragung gerade aus dem Schulpraktikum kommen und selbst eigene Unterrichtsentwürfe innerhalb dieses Praktikums entwickelt

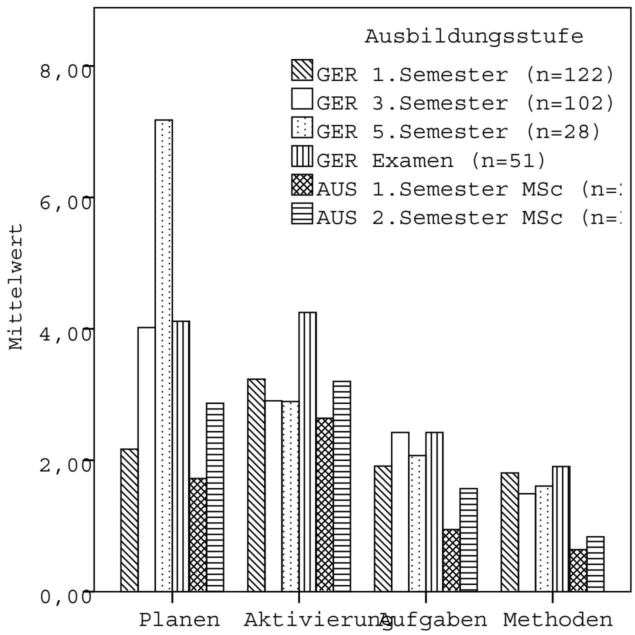


Abbildung 3: Auswertung nach Ausbildungsstufe

haben. Werden im Vergleich dazu die Studierenden betrachtet, die kurz vor ihrer Examensprüfung stehen teilen sich die genannten Merkmale ausgewogener auf alle Komponenten auf. Das Vergleichen der Unterrichtsentwürfe wird vielfältiger. Es ist zu erkennen, dass der Fokus der Studierenden des ersten Semesters eher auf der Aktivierung der Schüler liegt. Die Studierenden des dritten Semesters besitzen eher Schwerpunkte in den planungs- und aufgabenorientierten Sichtweisen, die sich auch als Ziele der didaktischen Grundlagenveranstaltung im dritten Semester identifizieren lassen. Anders als bei den Studierenden aus Deutschland lässt sich bei den australischen Studierenden zwar eine Veränderung der Merkmalsanzahl, jedoch nicht der Struktur der Sichtweisen erkennen. So fokussieren die australischen Studierenden in beiden Semester kognitive Aktivierung und Motivierung der Schüler.

3. Zusammenfassung

Mithilfe einer Hauptkomponentenanalyse über die individuellen Merkmalen der Studierenden beim Vergleichen von Unterrichtsentwürfen konnten vier Komponenten (Planen, Aktivieren, Aufgaben und Methoden) für Konstrukte zur Planung von Mathematikunterricht identifiziert werden, die sich i. w. erwartungsgemäß im Laufe des Studiums verändern. Diese Komponenten scheinen in Zusammenhang mit den aktuellen fachdidaktischen Lehrveranstaltungen der Studierenden zu stehen, wobei sich die jeweils aktuellen Schwerpunkte in den Komponenten am Ende des Studiums zu Gunsten einer vielfältigen Sicht auf Mathematikunterricht relativieren.

Um den Lernprozesses in der Ausbildung zum Mathematiklehrer durch die Teilnahme an dieser Studie zu unterstützen, wird zurzeit ein Feedback entwickelt, das eine individuelle Reflexion des aktuellen Kompetenzerwerbs in Bezug auf die Planung von Mathematikunterricht ermöglichen soll.

Literatur

Fischler, H. (2001). Verfahren zur Erfassung von Lehrer-Vorstellungen zum Lehren und Lernen in den Naturwissenschaften. In: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften (7). S.105-120

Kelly, G. A. (1955). The psychology of personal constructs. New York: Norton.

Kuhnke-Lerch, I. & Bruder, R. (2010). Wie analysieren Lehramtsstudierende Unterrichtsentwürfe? – Vorstellung einer Studie zur Erfassung von Lernprozessen im Lehramtsstudium. In Beiträge zum Mathematikunterricht (S.517-520)

Kuhnke-Lerch, I. (2010). Unterrichtsentwürfe reflektieren und entwickeln. In: mathematik lehren (158). Seelze: Friedrich Verlag, S. 60-61.

Wahl, D. (2001). Nachhaltige Wege vom Wissen zum Handeln. In: Beiträge zur Lehrerbildung 19 (2). S.157-174

Christiane BENZ, Karlsruhe

Kinder und Erwachsene entdecken Mathematik

Mathematische Bildung im Elementarbereich ist zunehmend in den Fokus gerückt sowohl in der bildungspolitischen als auch in der fachdidaktischen Diskussion. Es existieren bereits Angebote zur Fortbildung und konkrete Anregungen zur Förderung mathematischer Bildung. Auch Forschungsprojekte beleuchten zunehmend mathematikdidaktische Fragestellungen im Elementarbereich (Gasteiger 2010). In diesem Beitrag wird eine Fortbildungskonzeption vorgestellt, deren inhaltliche Ausgestaltung auf theoretischen und empirischen Befunden der fachdidaktischen Forschung basiert. Dabei orientiert sich das Konzept auch an empirischen Ergebnissen zu Vorstellungen von Erzieherinnen bezogen auf Kompetenzen von Kindern im Elementarbereich. Nach der Beschreibung des Konzepts werden ausgewählte Ergebnisse der Forschung bezüglich Beobachtungskompetenzen von Erzieherinnen vorgestellt.

1. Ausgangslage

In einer Fragebogenuntersuchung (Benz 2008) wurden Erzieherinnen befragt, welche Kompetenzen Kinder im Elementarbereich erwerben sollen. Die meisten Aussagen beziehen sich auf den arithmetischen Bereich, wie das Zählen oder den Umgang mit Mengen. Auch das Schreiben und Lesen von Zahlen sowie das Lösen von Rechenaufgaben werden häufig genannt. Andere mathematische Inhaltsbereiche lassen sich in den Antworten weitaus seltener finden. Dies macht deutlich, dass weitere mathematische Inhaltsbereiche wie Geometrie und Größen inhaltliche Bausteine einer Fortbildung darstellen sollten, so dass Erzieherinnen ein breiteres inhaltliches Spektrum mathematischer Bildung kennen lernen können. Betrachtet man in der Fragebogenuntersuchung die Aussagen, die sich auf den arithmetischen Bereich beziehen genauer, werden hier sehr unterschiedliche Erwartungen formuliert. Antworten auf die Frage "Welche Kompetenzen sollen die Kinder erwerben?" sind z.B. „Nichts", „Zahlen von 1 bis 20 schreiben", „Das kleine 1x1 kennen", „Einfache Rechnung wie 7+7=14", „Zahlvorstellung bis 100". Diese Aussagen markieren Eckpunkte eines breiten Spektrums der Kompetenzerwartung. Dies unterstreicht die Notwendigkeit der Klärung, welche Kompetenzen Kinder vor Schulbeginn erwerben sollen.

Zur Beantwortung dieser Fragestellung kann zunächst auf normative Vorgaben wie Bildungspläne zurückgegriffen werden. Da diese inhaltlich zum Teil wenig aussägekräftig sind und sich auch in den einzelnen Bundeländern sehr unterscheiden, liefern empirisch-theoretische Erkenntnisse die

Grundlage für die Auswahl der Inhalte früher mathematischer Bildung. Bevor in diesem Beitrag empirisch-theoretische Grundlagen im arithmetischen Bereich dargestellt werden, wird zuerst die Fortbildungskonzeption vorgestellt.

2. Fortbildungskonzeption

Die Fortbildungskonzeption ist in 4 aufeinanderfolgende halbjährige Fortbildungsabschnitte aufgeteilt. Um das breite inhaltliche Spektrum früher mathematischer Bildung zu verdeutlichen, steht in jedem Fortbildungsabschnitt ein anderer mathematischer Inhaltsbereich im Fokus, *Zählen und Sehen, Muster erforschen, Vergleichen und Messen* und *Bauen und Legen*.

Jeder Fortbildungsabschnitt besteht aus 3 Bausteinen:

- Erarbeitung fachdidaktischen Hintergrundwissens in Workshops sowie gemeinsame Gestaltung konkreter Lernumgebungen mit den Erzieherinnen.
- Besuch der Erzieherinnen mit ihrer Kindergruppe in der MachmitWerkstatt an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe. Dort werden Materialien für Lernumgebungen zum jeweiligen Inhaltsbereich zur Verfügung gestellt (vgl. Benz 2010). Desweiteren stehen Studierende als weitere Lernbegleiter zur Verfügung.
- Reflexionstreffen auf der Basis von Videoausschnitten des gemeinsamen Entdeckens von Mathematik in der MachmitWerkstatt.

Alle Besuche der Kindergruppen in der MachmitWerkstatt werden videografiert, die Reflexionstreffen werden audiografiert.

In diesem Artikel werden inhaltliche Grundlagen des Fortbildungsabschnitts *Zählen und Sehen*, sowie erste Ergebnisse einer Studie, in der Beobachtungskompetenzen von Erzieherinnen erfasst werden, vorgestellt.

3. Empirisch-theoretische Grundlagen

Im Workshop des Fortbildungsabschnitts *Zählen und Sehen* bilden Theorien und empirische Erkenntnisse zur Zahlbegriffsentwicklung die Grundlage. Dabei stehen Erkenntnisse zur ordinalen und kardinalen Zahlvorstellung im Mittelpunkt. Vor allem die Bedeutung der Teil-Ganzes-Beziehung (Resnick 1983) wird thematisiert. Die Einsicht, dass Mengen aus verschiedenen anderen Mengen und später dann in der Vorstellung Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt werden können, wird als eine bedeutsame Komponente bei der Zahlbegriffsentwicklung betont. Diese Einsicht kann bei Kindern durch eine strukturierte Anzahlerfassung, -bestimmung und -darstellung unterstützt werden (Gaidoschik 2010). Dornheim (2008) konnte in einer Studie zur Vorhersage von Rechenleistung nachweisen, dass neben flexiblen Zählkompetenzen (wie Vorwärtszählen, Abzählen, Abzählen ohne Zeigen und Rückwärtszählen), das schnelle Erfassen strukturierter Anzahlen und komplexe Leistungen im Teile-Ganzes-Konzept die Aspekte waren, die die größte Vorhersagekraft von Rechenleistung hatten. Aus diesem Grund werden im Workshop verschiedene Möglichkeiten der Anzahlerfassung, -bestimmung und -darstellung diskutiert. Die Förderung des *Sehens* im Sinne einer (quasi)-simultanen und strukturierten Anzahlerfassung wird neben der Förderung des *Zählens* anhand verschiedener Materialien und Impulse thematisiert. Gemeinsam mit den Erzieherinnen werden Spielumgebungen, die diese Förderschwerpunkte unterstützen, sowie Handlungsoptionen innerhalb der Spielumgebungen erarbeitet (vgl. Benz 2010).

4. Beobachtungskompetenzen von Erzieherinnen im Bereich Anzahlerfassung, -bestimmung und -darstellung

In der empirischen Begleitstudie zum Fortbildungsprojekt werden unter anderem Beobachtungskompetenzen von Erzieherinnen untersucht. Wenn Erzieherinnen Lernprozesse aufgreifen, weiterführen und anregen sollen, ist das Wahrnehmen von Lösungsprozessen eine notwendige Voraussetzung, um daran anknüpfend Lerngelegenheiten gestalten zu können. Daher soll folgende Fragestellung untersucht werden: Welche Aspekte der Beobachtungskompetenz bezüglich der Anzahlerfassung, -bestimmung und -darstellung können bei Erzieherinnen identifiziert werden? Um diese Frage beantworten zu können werden zunächst deskriptive Kategorien generiert. Ausgewertet wurden hierzu 40 videografierte Spielsituationen während des gemeinsamen Handelns von Erwachsenen und Kindern in der MachmitWerkstatt, sowie das audiografierte Reflexionstreffen zur Thematik *Zählen und Sehen* mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring 2007). Der Generierungsprozess der einzelnen Kategorien kann hier aus Platzgründen leider nicht dargestellt werden (vgl. Benz 2011).

Anhand des vorliegenden Datenmaterials können folgende Kategorien identifiziert werden, in denen Erzieherinnen Beobachtungen artikulieren:

- *Zählfähigkeiten*: Kenntnisse der Zahlwortreihe, Vorwärtszählen, Rückwärtszählen, Zählprinzip: Eins-Zu-Eins Zuordnung
- *Simultanerfassung* (Würfelbilder)
- *Verschiedene Arten der Anzahlbestimmung*: Alleszählen, Zählen in Zweierschritten (in größeren Schritten), Weiterzählen, Wissen
- *Strukturierte Anzahlerfassung – Verschiedene Sichtweisen von Strukturen*

Durch die Auswertung der Daten konnte festgestellt werden, dass die Erzieherinnen die Aspekte wahrnehmen, die durch empirisch-theoretische Erkenntnissen zur Zahlbegriffsentwicklung gewonnen wurden. Es können demnach theoretische Aspekte der Zahlbegriffsentwicklung als deskriptive Kategorien für die Analyse der Beobachtungskompetenz bei Erzieherinnen genutzt werden.

In einem weiteren Schritt kann nun anhand dieser deskriptiven Kategorien auf empirischer Basis die Beobachtungskompetenz von Erzieherinnen differenziert analysiert werden. Hierdurch kann erfasst werden, inwieweit Erzieherinnen Lernprozesse beobachten können. Anhand der Kategorien ist es möglich zu erfassen, inwieweit Erzieherinnen Bearbeitungsprozesse von Kindern im Bereich der Anzahlerfassung, -bestimmung und -darstellung wahrnehmen können.

Literatur

Benz, C. (2011): *Zweiter Zwischenbericht zum Projekt „Minis und Erwachsene entdecken Mathematik“*. Unveröffentlicht PH Karlsruhe.

Benz, C. (2010): Minis entdecken Mathematik. Braunschweig: Westermann.

Benz, C. (2008): Zahlen sind eigentlich nichts Schlimmes – Vorstellungen von Erzieherinnen über Mathematik im Kindergarten. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik von 14.3. bis 18.3 2008 in Budapest. Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Dornheim, D. (2008): *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten.* Berlin: Logos.

Gaidoschik, M. (2010): *Warum Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr.* Frankfurt: Peter Lang.

Gasteiger, H. (2010): *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes.* Münster: Waxmann.

Mayring, Philipp (2007): *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (9. Auflage, erste Auflage 1983). Weinheim: Deutscher Studien Verlag

Resnick, L. B. (1983): A development theory of number understanding. In Ginsburg, Herbert P. (Hg.). *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press, S. 110–151.

Stephan BERENDONK, Köln

Über eine Unterrichtseinheit zum Eulerschen Polyedersatz

Im folgenden Beitrag wird eine Unterrichtseinheit zum Eulerschen Polyedersatz für die Mittelstufe an niederländischen Gymnasien vorgestellt. Die Unterrichtseinheit ist in drei Teile gegliedert. Jeder Teil behandelt einen Erfahrungsbereich, in dem der Eulersche Polyedersatz entdeckt werden kann. Ein beliebter Beweis des Satzes geht auf von Staudt (1847) zurück. Die Idee dieses Beweises kommt in den drei Erfahrungsbereichen auf unterschiedliche Weise zum Vorschein und zwar durch Fragen und Betrachtungen, die an den jeweiligen Kontext gebunden sind.

1. Ecken, Kanten und Flächen

Den ersten Erfahrungsbereich bilden Papier- und Plastikpolyeder. Ist ein solches mathematisches Polyeder homöomorph zur Kugel, so gilt die folgende Formel: *Ecken – Kanten + Flächen = 2*. Die entscheidende Idee im von Staudtschen Beweis dieses Satzes ist es, zwischen zwei Arten von Kanten zu unterscheiden. Dies gelingt ihm, indem er einen maximalen Baum im Graphen des Polyeders betrachtet. Es gibt nun die Kanten, die auf dem Baum liegen und die übrigen Kanten. Erstere sind den Ecken zugeordnet; letztere den Flächen. Doch, woher kommt der maximale Baum, möchte man fragen.

Einen Zugang zu der Beweisidee liefert die Betrachtung von Polyedermustern, da diese im Gegensatz zum Polyeder von Natur aus zwei unterschiedliche Arten von Kanten besitzen, solche die auf dem Rand und solche die im Inneren liegen. Es liegt nahe, beim Bau eines Polyeders aus einem Muster zu fragen, entlang wie vieler Kanten man falten muss und wie viele Kantenpaare man verkleben muss. Dies führt zu der Beobachtung:

Ecken = geklebte Kanten + 1

Flächen = gefaltete Kanten + 1

Die geklebten Kanten bilden schließlich den maximalen Baum, mit dem der von Staudtsche Beweis beginnt.

2. Berge, Pässe und Täler

Den zweiten Erfahrungsbereich bilden Gebirgslandschaften auf Inseln. Ordnet man jedem Punkt auf einer solchen Insel seine Höhe über dem Meeresspiegel zu, so erhält man eine Höhenfunktion. Diese besitzt im allgemeinen nur isolierte Extrempunkte. Die lokalen Maxima einer solchen Höhenfunktion nennen wir *Berge*, die lokalen Minima *Täler* und die stabilen Sattelpunkte *Pässe*. Es gilt dann die folgende von James Clerk Maxwell (1870) gefundene Beziehung: *Berge – Pässe + Täler = 1*.

Die entscheidende Idee in Maxwells Beweis ist wiederum die Unterscheidung zweier Arten von Pässen. Dies erreicht er, indem er den Meeresspiegel und den Grundwasserspiegel gleichermaßen steigen lässt und schaut was passiert, wenn das Wasser die Höhe eines Passes erreicht. Das Wasser nähert sich dabei dem Pass von zwei Seiten. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Entweder gehört das Wasser auf beiden Seiten zu einem Gewässer oder es gehört zu zwei verschiedenen Gewässern. Im ersten Fall nennen wir den Pass eine *Landenge*, im zweiten Fall eine *Meerenge*. Es gilt schließlich die folgende Beziehung:

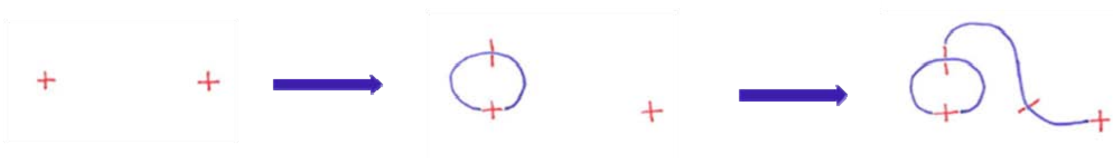
Berge = Landengen + 1

Täler = Meerengen

Bevor der Beweis mit den SchülerInnen thematisiert wird, werden topographische Karten von Inseln mit eingezeichneten Höhenlinien betrachtet. Die Pässe findet man darin als Doppelpunkte der Höhenlinien wieder. Die Überlegung das Wasser steigen zu lassen, liegt hiernach nicht mehr fern.

3. Kreuze, Züge und Gebiete

Den dritten Erfahrungsbereich bildet das Spiel „Brussels sprouts“ (Rosenkohl) von John H. Conway. Dies ist ein Spiel für zwei Personen, für das man nur einen Stift und ein Zeichenblatt benötigt. Zu Beginn des Spiels befindet sich eine beliebige Anzahl von Kreuzen auf dem Zeichenblatt. Jedes Kreuz besitzt 4 freie Arme. Nun ziehen die Spieler abwechselnd. Ein Zug besteht darin zwei freie Arme durch eine Kurve zu verbinden und irgendwo entlang der Kurve einen Strich zu setzen, sodass auf beiden Seiten der Kurve wieder ein freier Arm entsteht. Die folgende Abbildung zeigt die ersten beiden Züge eines möglichen Spielverlaufs für den Fall, dass mit zwei Kreuzen begonnen wurde:



Die Kurven dürfen einander jedoch nicht schneiden. Der erste Zug im obigen Spielverlauf hat ein Gebiet abgetrennt, daher kann man einen freien Arm innerhalb dieses Gebiets nun nicht mehr mit einem freien Arm außerhalb des Gebiets verbinden. Der Spieler, der zuerst keinen Zug mehr durchführen kann, hat verloren.

Der Clou des Spiels ist, dass ein Spiel mit *n* Kreuzen zu Beginn stets nach genau *5n-2* Zügen endet, sodass der Gewinner schon *feststeht*, sobald der beginnende Spieler feststeht.

Zunächst stellt sich die Frage, warum das Spiel überhaupt endet, schließlich bleibt die Anzahl der freien Arme während des Spiels konstant. Beim Spielen macht man jedoch die Erfahrung, dass die Zugmöglichkeiten immer weniger werden. Die Frage, ob dies bei jedem Zug der Fall ist, führt wieder zu der entscheidenden Unterscheidung zwischen zwei Arten von Zügen: denen, die ein Gebiet abtrennen und denen, die zwei Komponenten miteinander verbinden. Die Ersten reduzieren die Zugmöglichkeiten, die Zweiten nicht. Am Ende des Spiels gilt:

Kreuze = verbindende Züge + 1

Gebiete = trennende Züge + 1

Dabei ist mit „Kreuze“ die Anzahl der Kreuze zu Beginn und mit „Gebiete“ die Anzahl der Gebiete am Ende des Spiels gemeint. Da außerdem am Ende des Spiels in jedes Gebiet genau ein freier Arm weist, die freien Arme während des Spiels konstant bleiben und jedes Kreuz vier freie Arme besitzt, gilt ferner: *Gebiete = 4 Kreuze*. Setzt man dies in die zweite der beiden obigen Gleichungen ein und addiert diese, so erhält man die gesuchte Formel für die Anzahl der Züge.

In David S. Richesons Buch „Euler’s Gem“ (2008) wird das Spiel Brussels sprouts als Anwendung des Eulerschen Polyedersatzes präsentiert. Im Gegensatz dazu wird in dieser Unterrichtseinheit das Spiel als ein Kontext präsentiert, indem durch Fragen, die das Spiel aufwirft, der Eulersche Polyedersatz und der von Staudtsche Beweis entdeckt werden können.

Aufbau der Unterrichtseinheit

Alle drei Teile der Unterrichtseinheit beginnen mit einer phänomenologischen Phase. Die Untersuchungsgegenstände sind jeweils konkrete physikalische Gegenstände: Plastikpolyeder, Salzteiginseln und auf Papier gezeichnete Spielverläufe. Typische Handlungen sind zählen, spielen und buchhalten. Dabei werden Eigenschaften einzelner Objekte festgestellt. Mit Hilfe von Induktion im Sinne von George Pólya (1954) wird schließlich ein Gesetz aufgestellt, d.h. eine Eigenschaft wird einer ganzen Klasse von Objekten zugeschrieben.

Darauf folgt jeweils eine abstraktere Phase, in der die soeben beobachteten Eigenschaften der Objekte zum Untersuchungsgegenstand erhoben werden. Es geht nun um das Suchen und Ordnen von logischen Zusammenhängen zwischen diesen Eigenschaften. Es ist die Phase des Erklärens oder des Beweisens der Gesetze.

In einer letzten Phase werden dann schließlich die Beweise selbst zum Untersuchungsgegenstand. Zum einen werden die drei Beweise des Eulerschen Polyedersatzes aus den unterschiedlichen Erfahrungsbereichen miteinander verglichen und die Analogien zwischen ihnen herausgearbeitet. Zum anderen werden sie innerhalb ihres Erfahrungsbereichs als Werkzeug eingesetzt, um neue, d.h. noch nicht induktiv erhaltene, Gesetze über die ursprünglichen Objekte zu finden. Im Erfahrungsbereich Inseln wird gefragt, wie sich die Formel für die Berge, Pässe und Täler verändert, wenn man anstatt einer Insel einen ganzen Planeten betrachtet. Im Erfahrungsbereich Brussels sprouts wird gefragt, wie sich die Formel für die Anzahl der Züge verändert, wenn man die Kreuze durch Dreizacks ersetzt. In beiden Fällen soll untersucht werden, an welcher Stelle der Beweis anzupassen ist.

Zielsetzungen der Unterrichtseinheit

Wenn SchülerInnen nur ein geringes Bedürfnis nach Beweisen von Sätzen aufweisen, so mag das daran liegen, dass sie die Sätze empirisch überprüfen (vgl. Struve, 1990) und den Beweis nicht zur Wissensabsicherung benötigen. Die SchülerInnen sollen daher in der Unterrichtseinheit erfahren, dass Beweise nicht nur zur Erklärung eines Sachverhalts dienen können, sondern dass sie auch beim Suchen eines neuen Gesetzes eingesetzt werden können und sich dabei verändern.

Vor allem aber sollen die SchülerInnen erleben, wie durch Abstraktion, in unserem Fall durch das Erkennen der gemeinsamen kombinatorischen Struktur, verschiedene Erfahrungsbereiche miteinander vernetzt werden können.

Die mit der Unterrichtseinheit verfolgten Ziele gehen also über die Vermittlung der topologischen Inhalte hinaus.

Literatur

Maxwell, J. C. (1870). On Hills and Dales. The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and J. Science, 40, 421 - 425.

Pólya, G. (1954). Induction and analogy in mathematics. Vol.1 of Mathematics an plausible reasoning. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Richeson, D.S. (2008). Euler's gem, the polyhedron formula and the birth of topology. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Struve, H. (1990). Grundlagen einer Geometriedidaktik, Bd. 17 der Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik. Mannhein et al.

von Staudt, K.G.C. (1847). Geometrie der Lage. Nürnberg: Bauer und Raspe.

Tatjana BERLIN, Essen

Unterstützung der algebraischen Denkentwicklung

Diesem Beitrag liegt ein Projekt zugrunde, welches einen Einstieg in die elementare Algebra untersucht und analysiert. Traditionell erfolgt dieser Einstieg in der Klasse 7. Die Formelsprache wird dabei relativ unvermittelt in Gebrauch genommen und vorwiegend auf der syntaktischen Ebene trainiert. Dies bedeutet, dass den Schülerinnen und Schülern ein sprunghafter Entwicklungsschritt zugemutet wird, an dem viele scheitern. Sie erleben das formale Manipulieren mit Zeichen als willkürlich und können den Sinn und die Bedeutung des mathematischen Geschehens nicht nachvollziehen. All dies gibt Anlass zu der Frage, ob es den natürlichen Lernbedingungen der Lernenden nicht entgegen käme, der Einführung der algebraischen Symbolsprache in der Klasse 7 eine propädeutische Phase in der Klasse 5 voranzustellen.

In einer binationalen empirischen Studie (Essen / St. Petersburg) untersuchte ich, wie Schülerinnen und Schüler der Klasse 5 in der Beschäftigung mit geometrischen und arithmetischen Mustern Strukturen erkennen, beschreiben, verallgemeinern und sich dabei Buchstabenvariable als symbolisches Darstellungsmittel zu eigen machen. Als Instrument der Datenerhebung dienten halbstandardisierte Interviews, die mit Methoden der interpretativen Unterrichtsforschung analysiert wurden.

1. Anbahnung algebraischen Denkens

Unter algebraischem Denken wird im Folgenden den Inbegriff des verständigen und beweglichen Umgangs mit der Symbolsprache der elementaren Algebra verstanden. Dazu gehören insbesondere die folgenden Fähigkeiten (Berlin u.a., 2009):

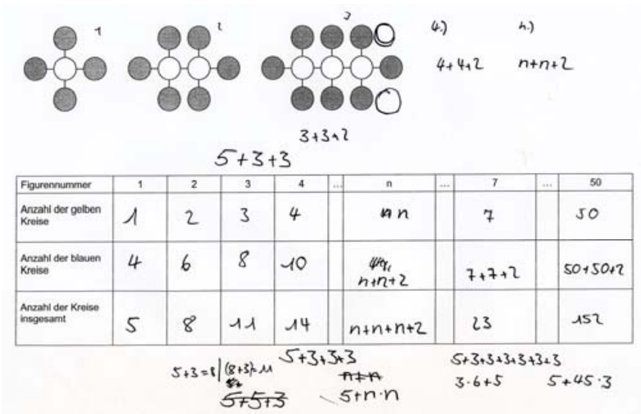
- in arithmetischen Zusammenhängen Strukturen und Formen erkennen,
- diese begrifflich und symbolisch allgemein beschreiben
- und schließlich symbolische Ausdrücke regelgeleitet umformen, die Ergebnisse sachgerecht interpretieren und aus ihnen neue Informationen ablesen.

Geometrische Musterfolgen eignen sich, um erste Gehversuche mit algebraischen Sichtweisen anzubahnen. Dies geschieht zum Beispiel, indem Beziehungen zwischen der Anzahl aller oder bestimmter Figurenteile und der Bildnummer hergestellt werden. Die in der Studie erhobenen Daten lassen erkennen, dass Kinder der Jahrgangsstufe 5 solche Situationen sehr unterschiedlich strukturieren und auf verschiedenen Ebenen der algebraischen

Denkentwicklung argumentieren. Während die einen noch in numerischen Betrachtungen verhaftet bleiben, gelangen andere zu einer arithmetisch-strukturellen Sichtweise bis hin zur Schwelle des Formelgebrauchs. Im Folgenden wird eine der verwendeten Aufgaben vorgestellt, typische Bearbeitungsstrategien der Schülerinnen und Schüler beschreiben und gezeigt, welche Stufen der algebraischen Denk- und Fähigkeitsentwicklung dabei offenbar werden. Dadurch lässt sich weiter ausschärfen, was algebraisches Denken ausmacht und welche besonderen Anforderungen dabei zu bewältigen sind.

2. Die Aufgabe KREISE

Auf dem Bogen sind eine Musterfolge von drei Figuren sowie eine auszufüllende Tabelle abgebildet (Abb. 1). Neben den drei abgebildeten Figuren ist genügend Platz für eine eventuelle bildliche Fortsetzung der Figurenfolge freigelassen worden. Aufgabe der Kinder ist es, zunächst die Anzahl der gelben, dann die der blauen und anschließend die der Kreise insgesamt zu bestimmen. Die Tabelle enthält Spalten für die Figurennummern 1 bis 4, *n*, 7 sowie 50.

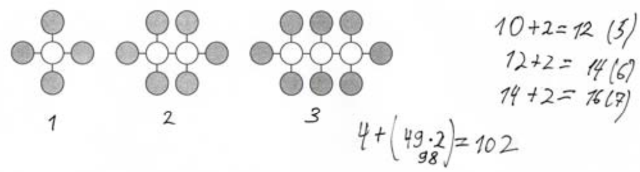


Figurennummer	1	2	3	4	...	n	...	7	...	50
Anzahl der gelben Kreise	1	2	3	4		n		7		50
Anzahl der blauen Kreise	4	6	8	10		n+n+2		7+7+2		50+50+2
Anzahl der Kreise insgesamt	5	8	11	14		n+n+n+2		23		152

Abb. 1: *Verenas Bearbeitung*

In Interviews wurden den Probanden keine Anweisungen gegeben, in welcher Reihenfolge die Spalten der Tabelle auszufüllen waren. Die 50er-Spalte stellt eine Bewährungsprobe für alle bisher angestellten Überlegungen dar; sie kann durch intuitive Verallgemeinerung der erworbenen Zählstrategie oder durch Anwendung der aufgestellten Formel beantwortet werden, und sie kann zu einer bewussten Verknüpfung beider Wege veranlassen. Geometrische Figurenfolgen wie die KREISE bilden eine gute intuitiv-anschauliche Grundlage, um innewohnende Muster zu erkennen und fortzusetzen. Die wachsende Anzahl der Bauteile lässt sich durch eine Zahlenfolge erfassen, deren Bauprinzip dem der Figurenfolge entspricht. So gelangt man vom Bauplan zur Formel. Die erfassten Baupläne erscheinen in unterschiedlichen Strukturierungen, denen verschiedene Formelausdrücke entsprechen.

In den unterschiedlichen Herangehensweisen der Kinder lassen sich zwei verschiedene Grundtypen des gedanklichen Zurechtlegens erkennen. Zum einen wird das Strukturmuster in Form und Zusammenbau einer jeden Figur der Figurenfolge in Betracht gezogen, indem Kreise in bestimmten Positionen zu größeren Konfigurationen zusammengefasst werden (so bei Verena, Abb. 1). Zum anderen wird ein Veränderungsmuster in den Fokus genommen, welches sich bei dem Übergang von einer Figur der Figurenfolge zur nächsten zeigt. Dabei wird die Dynamik der Veränderungen untersucht (so bei Nikita, Abb. 2).



Номер фигуры	1	2	3	4	...	n	...	7	...	50
Количество желтых кружков	1	2	3	4		n		7		50
Количество синих кружков	4	6	8	10		4+(n-1)·2		16		102
Общее количество кружков	5	8	11	14		n+(4+(n-1)·2)		23		152

5+(n-1)·3

Abb. 2: *Nikitas Bearbeitung*

3. Stufen der algebraischen Denkentwicklung

Die Probanden kommen im Lösungsprozess unterschiedlich weit. Dabei lassen sich verschiedene Stufen beobachten.

- ***Vorbewusste Auseinandersetzung mit dem Material:***

Es findet eine intuitive Annäherung an eine Methode des Strukturierens bzw. Abzählens statt, welche dem Handelnden noch unbewusst bleibt, dem Betrachter jedoch durch Gestik, Mimik und Zeigetechnik des Kindes sichtbar wird. Wenn diese Annäherung nicht zu einer Bewusstheit der Vorgehensweisen und Beobachtungen gelangt, stagniert der Arbeitsprozess nach der Betrachtung der ersten konkreten Figuren.

- ***Entwickeln einer bewussten Perspektive, Beobachten von Mustern:***

Das Kind erkennt, dass seine Methode des strukturierten Zählens ihm die Bearbeitung der Aufgabe erleichtert und setzt sie im weiteren Verlauf bewusst ein. Die begleitenden Beschreibungen bleiben jedoch auf dieser Stufe weitgehend vorbegrifflich und auf die Verwendung der eigenen kindlichen Sprache und Zeigetechnik begrenzt.

– ***Erkennen von Zusammenhängen, Durchschauen von Mustern:***

Es wird erkannt, warum beobachtete Gesetzmäßigkeiten gelten und angewandte Strategien funktionieren. Ob das Kind ein Strukturmuster oder ein Veränderungsmuster erkennt, hängt von seiner statischen oder dynamischen Deutung der Situation ab. Auf der Beschreibungsebene werden strukturelle Einsichten thematisiert. Diese können exemplarisch, begrifflich oder formal-symbolisch artikuliert werden. Bleibt ein Kind jedoch auf der vorbegrifflichen Stufe des Beschreibens und gelangt nicht zur Verwendung von Fachbegriffen oder selbst geschaffenen gleichwertigen Ausdrucksweisen, kann es den Schritt zur symbolischen Darstellung nicht schaffen, weil die erforderlichen Konzepte fehlen.

4. Fazit

Es zeigt sich, dass die Entwicklung des algebraischen Denkens als progressive Bewusstwerdung des Handelns und Denkens mit einer begleitenden Versprachlichung und einer schrittweise erfolgenden Lösung vom Gegenstand betrachtet werden kann. Vor dem Hintergrund der empirischen Befunde der Studie lässt sich behaupten, dass die ersten Begegnungen mit algebraischer Formelsprache schon in die früheren Schuljahre verlagert werden können. Es sollten Lernumgebungen (vgl. Fischer u.a., 2010) im Unterricht angeboten werden, die einerseits individuelle Wege bei der Konstruktion des neuen Wissens, andererseits eine Bereicherung für die Unterrichtsteilnehmer auf der intersubjektiven Ebene durch den Austausch von verschiedenen Lösungswegen und Darstellungen ermöglichen. Dies kann dadurch geschehen, dass Muster und Strukturen thematisiert werden. Die Lehrkräfte müssen der Anforderung gerecht werden, den jeweiligen Stand der Denkentwicklung ihrer Schülerinnen und Schüler zu diagnostizieren und den Übergang zur nächsten Stufe anzuregen.

Literaturverzeichnis

Berlin, T. / Fischer, A. / Hefendehl-Hebeker, L. / Melzig, D. (2009). Vom Rechnen zum Rechenschema - zum Aufbau einer algebraischen Perspektive im Arithmetikunterricht. In: Fritz, A. / Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Weinheim: Beltz, S. 270 – 292.

Berlin, T. / Hefendehl-Hebeker, L. (2011). Stufen der algebraischen Denkentwicklung. In: MU Heft 2 (im Druck).

Fischer, A. / Hefendehl-Hebeker, L. / Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. In: PM 52 (33); S. 1 – 7.

Nina BERLINGER, Münster

Untersuchungen zum räumlichen Vorstellungsvermögen mathematisch begabter Dritt- und Viertklässler

In umfangreichen Untersuchungen konnte Käpnick spezifische Merkmale mathematisch begabter[1] Dritt- und Viertklässlern herausstellen (vgl. Käpnick 1998). Während in seinem Modell Strukturierungsfähigkeiten oder mathematische Sensibilität z.B. relativ unbestritten als mathematikspezifische Begabungsmerkmale gelten, ist ungeklärt, inwiefern das räumliche Vorstellungsvermögen die mathematische Begabung mitbestimmt. Für Bardy (2007, S. 31) stellt diese Fähigkeit z.B. eine der geistigen Grundlagen mathematischen Denkens dar, andere sehen darin jedoch zwar eine günstige aber nicht unbedingt notwendige Komponente (vgl. Krutetzki 1968). Im Rahmen meiner Dissertation soll deshalb untersucht werden, welche Bedeutung das räumliches Vorstellungsvermögen für die Kennzeichnung einer mathematischen Begabung bei Dritt-/Viertklässlern hat.

1. Theoretischer Hintergrund

Käpnick (1998) berücksichtigte das räumliche Vorstellungsvermögen bei einer theoretischen Konstruktion eines Merkmalssystems für mathematisch begabte Dritt- und Viertklässler zunächst. Er begründet dies damit, dass das räumliche Vorstellungsvermögen gerade für mathematische Erkenntnisprozesse von Grundschülern generell sehr wichtig ist. Sie können „*derartige Zusammenhänge häufig erst mittels gegenständlich-praktischer Handlungen oder Veranschaulichungen erfassen*“ und müssen „*dann beim notwendigen Wechseln der Repräsentationsebenen bildliche Darstellungen speichern und mit diesen Vorstellungsbildern gedanklich operieren*“ (Käpnick 1998, S. 115). In seinen empirischen Untersuchungen bestätigte sich diese Annahme allerdings nicht, da die mathematisch begabten Kinder die Indikatoraufgaben zur Raumvorstellung nur leicht besser lösten als die mathematisch durchschnittlich begabten Kinder. Einerseits könnte dies darauf hindeuten, dass die Aufgaben aufgrund des Schwierigkeitsgrads nicht geeignet sind, um signifikante Unterschiede zu ermitteln. Andererseits zeigte sich aber auch, dass sich die mathematisch begabten Kinder bzgl. der Ausprägung des räumlichen Vorstellungsvermögens stark voneinander unter-

[1] Unter einer mathematischen Begabung im Grundschulalter verstehe ich mit Käpnick & Fuchs ein „*sich dynamisch entwickelndes Potential von individuell geprägten, weit überdurchschnittlichen mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen und sich hiermit in wechselseitigen Zusammenhängen entwickelndes begabungsstützenden bereichsspezifischen Persönlichkeitseigenschaften*“ (Fuchs 2006, S. 68).

schieden. Dies könnte im Sinne Krutetzkis interpretiert werden, der das räumliche Vorstellungsvermögen zwar als eine *„günstige jedoch nicht unbedingt erforderliche Komponente*“ für eine mathematische Begabung sieht (Krutetzki 1968). Aufgrund der Untersuchungsergebnisse wurde das räumliche Vorstellungsvermögen nicht in das Modell mathematischer Begabungsentwicklung nach Käpnick & Fuchs aufgenommen (vgl. Fuchs 2006).

In der Literatur existiert keine einheitliche Definition des räumlichen Vorstellungsvermögens, auch wenn das allgemeine Verständnis darüber, was mit räumlichem Vorstellungsvermögen gemeint ist, relativ einheitlich ist: *„Raumvorstellung kann umschrieben werden als die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken. Sie geht über die räumliche Wahrnehmung durch die Sinne hinaus, indem sie nicht nur ein Registrieren der Sinneseindrücke, sondern ihre gedankliche Verarbeitung voraussetzt*“ (Wölpert 1983, S. 9). Da zahlreiche Studien einen intra- und interindividuell variablen Strategieeinsatz[2] zeigen konnten, scheint die folgende Ergänzung von Souvignier überzeugend zu sein: *„wobei Strategien zur Reduzierung der Komplexität der Vorstellungen entwickelt und umgesetzt werden*“ (Souvignier 2000, S. 27). Während eine Definition des räumlichen Vorstellungsvermögens eher mit Bezug auf die Beschreibung kognitiver Prozesse sinnvoll ist, lassen sich konkrete Hinweise zur Operationalisierung in erster Linie aus der psychometrischen Perspektive ableiten. In der Mathematikdidaktik wurde vielfach auf psychometrische Modelle aus der Psychologie zurückgegriffen, die zusammengefasst, leicht verändert und so für mathematikdidaktische Belange modifiziert wurden. Diesbzgl. ist die Modellierung von Maier (1999) stark verbreitet und anerkannt, die fünf Teilkomponenten berücksichtigt: Räumliche Wahrnehmung, Veranschaulichung, Vorstellungsfähigkeit von Rotationen, Räumliche Beziehungen, Räumliche Orientierung. Er betont, dass zwischen diesen Faktoren wechselseitige Beziehungen und Abhängigkeiten vorherrschen (vgl. Maier 1999, S. 50-52). Da in Bezug auf meine Untersuchungen nicht eine strikte faktorenanalytische Trennung von Teilkomponenten, sondern eine möglichst breite Definition des räumlichen Vorstellungsvermögens von Interesse ist, orientiere ich mich bei der Operationalisierung an Maier.

2. Forschungsmethodische Anlage

Im Anschluss an eine Literaturanalyse zu den Komplexen „mathematische Begabung“ und „räumliches Vorstellungsvermögen“ werden sowohl quantitative als auch qualitative Untersuchungen durchgeführt.

---

[2] Auch Beobachtungen im Projekt „Mathe für kleine Asse“ haben individuell unterschiedliche Strategien gezeigt (siehe dazu Berlinger 2010 und 2011).

Für die quantitativen Untersuchungen mussten zunächst Raumvorstellungsindikatoraufgaben[3] entwickelt, erprobt und anschließend leicht überarbeitet werden. In der Hauptuntersuchung im Mai/Juni 2010 wurden diese dann in den Dritt- und Viertklässlergruppen des Projekts „Mathe für kleine Asse“ (62 mathematisch begabte Kinder) sowie in heterogen zusammengesetzten dritten und vierten Klassen (111 Kinder) eingesetzt. Eine der Aufgaben zur Teilkomponente Veranschaulichung lautete: *ein Bogen Papier wird zuerst mehrfach gefaltet und anschließend werden Ecken abgeschnitten. Wie sieht das Blatt Papier nach dem Auffalten aus?* (vgl. Abb. 1)

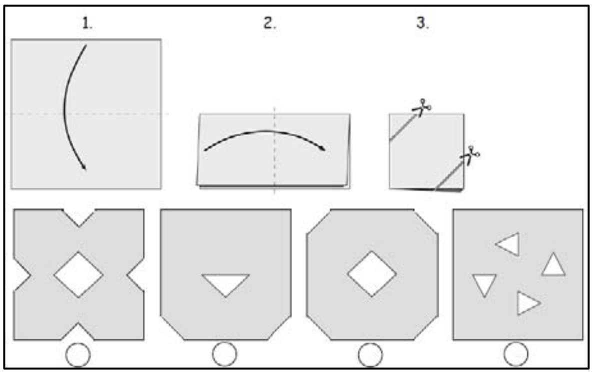


Abb. 1: Faltaufgabe (Veranschaulichung)

Die Durchführung und die Auswertung der Indikatoraufgaben wurden jeweils von mir selber durchgeführt. Anschließend wurde überprüft, ob sich die Ergebnisse der mathematisch begabten Kinder signifikant von den Ergebnissen der Vergleichsgruppe unterscheiden, um klären zu können, ob es sich beim räumlichen Vorstellungsvermögen um ein mathematikspezifisches Begabungsmerkmal handelt[4].

3. Erste Ergebnisse

Die nachfolgende Tabelle enthält einen Überblick über einen aufgabenbezogenen Vergleich bei fünf verschiedenen Indikatoraufgaben.

Aufgabe	**Teilkomponente des räumlichen Vorstellungsvermögen**	**Sig.**
Aufgabe 1	Räumliche Wahrnehmung	0,256
Aufgabe 2	Veranschaulichung	0,000
Aufgabe 3	Räumliche Beziehungen	0,000
Aufgabe 4	Vorstellungsfähigkeit von Rotationen	0,001
Aufgabe 5	Räumliche Orientierung	0,010

Tab. 1: Aufgabenbezogener Vergleich zwischen den Ergebnissen der mathematisch begabten Kinder und der Vergleichsgruppe

[3] Zu jeder Teilkomponente des räumlichen Vorstellungsvermögens nach Maier (1999) wurden zwei Aufgaben entwickelt.

[4] Zunächst wurde die Homogenität der Daten bzgl. Geschlecht und Klassenstufe sichergestellt. Die statistische Auswertung erfolgte dann mit dem Mann-Whitney-U-Test für zwei unabhängige Zufallsstichproben.

Es zeigt sich ein hoch signifikanter Unterschied hinsichtlich der Ergebnisse bei den Aufgaben 2 bis 5 (Veranschaulichung, räumliche Beziehungen, Vorstellungsfähigkeit von Rotationen, räumliche Orientierung) zwischen beiden Gruppen zugunsten der mathematisch begabten Kinder. Lediglich bzgl. der Ergebnisse der Aufgabe 1 (räumliche Wahrnehmung) sind keine signifikanten Unterschiede festzustellen. Dies ist vermutlich dadurch zu erklären, dass diese Teilkomponente des räumlichen Vorstellungsvermögens vielfach auch als Voraussetzung gesehen wird, um in den anderen Bereichen gute Fähigkeiten zu entwickeln. Viele Kinder haben die Aufgabe daher sehr gut lösen können.

Insgesamt zeigte sich, dass zwar viele mathematisch begabte Kinder über ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen verfügen, dass aber einige von ihnen auch Schwächen in diesem Bereich haben. Diese Ergebnisse werfen die Frage auf, ob es sich beim räumlichen Vorstellungsvermögen evtl. eher um ein typdifferenzierendes mathematikspezifisches Begabungsmerkmal handelt. Zudem bleibt offen, ob es Wechselwirkungen zu anderen Begabungsmerkmalen (z.B. Wechseln der Repräsentationsebene) und zu Vorgehensweisen bei Aufgaben aus anderen mathematischen Bereichen gibt. Auch die Erfassung von Strategien von mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlern beim Lösen von Raumvorstellungsaufgaben lässt interessante Ergebnisse erwarten. Diesen Fragen soll in qualitativen Untersuchungen in Form von komplexen Einzelfallstudien nachgegangen werden.

Literatur

Bardy, P. (2007): Mathematisch begabte Grundschulkinder - Diagnostik und Förderung. München: Spektrum.

Berlinger, N. (2010): Räumliches Vorstellungsvermögen - wichtig oder wesentlich für die mathematische Begabungsentwicklung im Grundschulalter? In F. Käpnick (Hrsg.): Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse“. Münster: WTM, 138-149.

Berlinger, N. (2011): Wenn sich das Gehirn verknotet - Zum räumlichen Vorstellungsvermögen mathematisch begabter Grundschulkinder. In: Grundschule, 1, 36-38.

Fuchs, M. (2006): Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Berlin: Lit.

Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Krutetzki, V. A. (1968): Altersbesonderheiten der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten bei Schülern. In: Mathematik in der Schule, 6, 44-58.

Maier, P. H. (1999): Räumliches Vorstellungsvermögen – Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen. Donauwörth: Auer.

Souvignier, E. (2000): Förderung räumlicher Fähigkeiten. Münster: Waxmann.

Wölpert, H. (1983): Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht (MU), 29 (6), 7-42.

Carola BERNACK, Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS, Pädagogische Hochschule Freiburg, Alexander RENKL, Universität Freiburg

Veränderung des Mathematikbildes in der Lehrerausbildung? Erste Ergebnisse des BMBF-Projektes „Forschende MathematiklehrerInnen“ (FORMAT[i])

1. Ausgangslage

Im Lehramtsstudium sollen von den Studierenden pädagogische, fachdidaktische und fachbezogene Kompetenzen erworben werden. Die fachbezogenen Kompetenzen schließen auch das Wissenschaftsverständnis und Einstellungen (Beliefs) zur Mathematik ein. Im Zusammenhang mit einem eher statischen Mathematikbild bei Lehramtsstudierenden (Pehkonen & Törner 2004) wird die Dominanz des rezeptiven Kalküllernens in der (später von ihnen gestalteten) Unterrichtspraxis gesehen (Staub & Stern 2002). Daher wird an der Pädagogischen Hochschule Freiburg die epistemologische Reflexion und das Erleben des aktiven Mathematiktreibens in alle Veranstaltungen integriert. Dazu gehört u.a. ein Problemlöseseminar, in dem die Teilnehmerinnen und Teilnehmer selbstständig mathematische Probleme bearbeiten und dies kontinuierlich in Forschungsheften dokumentieren und reflektieren. Wirken solche fachlichen Studienelemente auf die Kompetenzen der Teilnehmer und verändern sie insbesondere deren epistemologische Überzeugungen?

2. Veränderung von Beliefs in der Lehreraus- und -fortbildung

Zu den zentralen Fragen der Beliefforschung zählt die nach der Veränderbarkeit von fachbezogenen Überzeugungen in unterschiedlichen Ausbildungsformen. Vier Auslöser für eine Veränderung von Beliefs werden hier benannt: (1) mit Emotionen verbundene Erfahrungen (Lernen, Interagieren,…), (2) unreflektierte Übernahme insbesondere von Autoritäten, (3) das Bewusstmachen von Beliefs durch Reflexion und (4) die Neustrukturierung des Belief Systems nach Reflexion und Erfahrung (Furinghetti & Pehkonen 2002, Ambrose 2004). Bei Durchsicht verschiedener Studien, die von einer Beliefänderung berichten, finden sich immer wieder folgende Elemente im Lehrdesign (Ambrose 2004; Chapman 1999; DeBellis & Rosenstein 2004; Liljedahl, Rösken & Rolka 2007): Reflexion und Dokumentation der gemachten Erfahrungen; eigene mathematische Erfahrungen bzw. sich selbst als Lerner erfahren (Problemlöseseminare, offene Aufgabenformate); Auseinandersetzung mit dem mathematischen Denken von Schülern; Austausch und Kooperation mit anderen Teilnehmern des Seminars bzw. Programms; Unterstützung und Anleitung zur Implementierung und Entwicklung von neuen Unterrichtskonzepten. Auf einigen dieser Konzepte basiert auch die von uns untersuchte Annahme, dass Problemlösen mit Forschungsheften eine Änderung von Beliefs bewirkt (DeBellis & Rosenstein 2004; Liljedahl, Rösken & Rolka 2007).

3. Studiendesign

Die spezifischen Wirkungen von aktivem und reflexionsbegleitetem Problemlösen wurden in einem experimentellen Lehrexperiment untersucht. Tabelle 1 zeigt den Ablauf der Studie im Sommersemester 2010. In einem Kreuzdesign wechselten Vorlesung und Problemlösen ab, da es Ziel war die Beliefveränderung im Vergleich zu einer klassischen Vorlesung mit nur kurzen Aktivitätsphasen zu erfassen.

<table>
<tr><th>Zeitraum</th><th>Woche 1 (t_1)</th><th>Woche 2-5</th><th>Woche 6 (t_2)</th><th>Woche 7-10</th><th>Woche 11 (t_3)</th></tr>
<tr><td>Gruppe 1</td><td rowspan="2">Reflexion/ Fragebogen</td><td>Problemlösen mit Forschungsheften</td><td rowspan="2">Reflexion/ Fragebogen</td><td>Vorlesung „Mathematisch Denken“</td><td rowspan="2">Reflexion/ Fragebogen</td></tr>
<tr><td>Gruppe 2</td><td>Vorlesung „Mathematisch Denken“</td><td>Problemlösen mit Forschungsheften</td></tr>
</table>

Tabelle 1: Ablauf der Studie

In der **Problemlösegruppe** bearbeiteten Studierende in Einzelarbeit vier vergleichsweise elementare, aber offene arithmetische und geometrische Probleme ohne eine feste Zielvorgabe (wie z.B. bei Mason et al. 2006). Dabei sollten sie alle Lösungswege, Gedanken und Gefühle in Forschungsheften verschriftlichen. In der **Vorlesungsgruppe** wurden mathematische Prozesse wie z.B. Begriffsbilden und Problemlösen theoretisch thematisiert und jeweils sitzungsvorbereitend thematisch passende Artikel gelesen. In den **Reflexionsphasen** erstellten beide Gruppen concept maps und schriftliche Reflexionen zu ihrem Mathematikbild. Zur Erfassung der Beliefs wurden etablierte Skalen zum Mathematikbild (Baumert et al. 2009) sowie das Semantische Differential zum Wissenschaftsverständnis (Stahl & Bromme 2007) eingesetzt, welche zuvor in einer Pilotstudie optimiert wurden (vgl. Bernack et al. 2011).

Im Folgenden berichten wir über die Belief-Struktur und die Veränderung zwischen den ersten beiden Messzeitpunkten sowie über die Identifikation von Typen. Zusätzlich ziehen wir vier Einzelfallinterviews am Ende des Semesters heran, um mögliche Erklärungen für die Einstellungsänderung zu finden.

4. Ergebnisse zur Struktur und zur Veränderung der Beliefs

In einer hierarchische Clusteranalyse zum Messzeitpunkt t_1 wurden vier Typen mit jeweils charakteristischem Profil identifiziert, die wir als die

Ausgeglichenen, die *Prozessanhänger*, die *Systemanhänger* (bei gleichzeitiger Zustimmung zum Prozessaspekt) und die *System- und Toolboxanhänger* charakterisieren – letztere Gruppe stellt die Zielgruppe der Intervention dar. Wie in der mit 14 Wochen wesentlich längeren Pilotstudie (Bernack et al. 2011), in der die Teilnehmer ausschließlich Probleme bearbeiteten, erwarteten wir Effekte bei der Veränderung von Beliefs insbesondere hin zu der Einstellung Mathematik als Prozess und weg von der Einstellung Mathematik als Toolbox. Da hier aber keine signifikanten Effekte zu beobachten waren, untersuchten wir die einzelnen Typen näher. Hierbei zeigten sich signifikante Unterschiede hinsichtlich der vier Cluster über den Zeitraum zwischen t_1 und t_2 in mehreren Skalen. Gerade der Cluster *System- und Toolboxanhänger* änderte die Einstellung hin zu Mathematik als Prozess signifikant im Unterschied zu den anderen Clustern. In dieser Gruppe zeigen sich Effekte in mehreren Teilskalen, allerdings *ohne* eine Varianzerklärung im Vergleich der *Lehrformen* (Problemlösen vs. Vorlesung). Es ist allerdings anzunehmen, dass der Veränderungsprozess in Problemlöse- und Vorlesungsgruppe unterschiedlich erfolgt ist, was durch eine Analyse der Einzelfallinterviews untersucht werden sollte.

5. Erklärungshypothesen basierend auf Einzelfallinterviews

Die Einzelfallinterviews wurden hinsichtlich der Frage, was die Teilnehmer subjektiv als einstellungsändernd empfanden, ausgewertet. Im Falle der Vorlesung wurde hier der Einfluss der Dozenten genannt, die „missionierend“ aufgetreten seien. Zudem rege die gelesene Literatur zum Überdenken eigener Beliefs an. Im Falle des Problemlöseseminars wurde insbesondere genannt, dass man sich selbst als Problemlöser erleben und diesen Prozess reflektieren konnte. Demnach scheint der Prozess der Beliefänderung je nach Lehrform unterschiedlich verlaufen zu sein. In der Vorlesung ist theoriekonform der Einfluss von Autoritäten zu verzeichnen, ein Prozess der personengebunden ist und eine eher unreflektierte Übernahme bewirkt (Furinghetti & Pehkonen 2002), wohingegen anzunehmen ist, dass das eigene Erleben als Problemlöser und die Reflexion eher den individuellen Umbau von Beliefstrukturen fördert.

6. Fazit und Ausblick

Gerade bei Studierenden mit einem statisch geprägten Mathematikbild lassen sich durch Problemlösen mit Forschungsheften, aber auch durch eine entsprechende Vorlesung, Veränderungen erzielen. Die beiden Lehrformen können trotz dieses quantitativen Ergebnisses nicht als gleichwertig betrachtet werden, da durch die Einzelfallinterviews deutlich wird, dass beim Problemlösen mit Forschungsheften eher eine Integration der veränderten

Einstellung in das Belief System durch Reflexion und die eigenen Erfahrungen als Problemlöser stattfindet, wohingegen es in der Vorlesung eine Autorität von außen braucht.

In einer folgenden Studie soll der Veränderungsprozess qualitativ längsschnittlich durch weitere Interviews genauer erfasst werden um zu detaillierteren Erkenntnissen zu gelangen.

Literatur

Ambrose, R. (2004). Initiating change in prospective elementary school teachers' orientations to mathematics teaching by building on beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *7*(2), 91–119.

Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Dubberke, T., Jordan, A., Klusmann, U., et al. (2009). *Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz (COACTIV): Dokumentation der Erhebungsinstrumente (Materialien aus der Bildungsforschung Nr.83).* Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Bernack, C., Holzäpfel, L., Leuders, T., & Renkl, A. (2011). Initiating change on preservice teachers' beliefs in a reflexive problem solving course. In Kirsti Kislenko (Ed.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVI. Proceedings of the MAVI-16 Conference June 26-29, 2010, Tallinn, Estonia* (pp. 27–43). Tallinn, Estonia: Institute of Mathematics and Natural Sciences, Tallinn University.

Chapman, O. (1999). Inservice Teacher Development in Problem Solving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *2*, 121–142.

DeBellis, V. A., & Rosenstein Joseph G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *36*(2), 46–55.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. K. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Mathematics education library: Vol. 31. Beliefs. A hidden variable in mathematics education?* (pp. 39–57). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Liljedahl, P., Rolka, K., & Rösken, B. (2007). Affecting Affect: The Reeducation of Preservice Teachers' Beliefs about Mathematics and Mathematics Learning and Teaching. In W. G. Martin, M. E. Strutchens, & P. C. Elliott (Eds.), *The Learning of Mathematics. Sixty-ninth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 319–330).

Mason, J., Burton, L.,& Stacey, K. (2006). *Mathematisch denken. Mathematik ist keine Hexerei*. Oldenbourg Verlag

Stahl, E., & Bromme, R. (2007). The CAEB: An instrument for measuring connotative aspects of epistemological beliefs. *Learning and Instruction*, (17), 773–785. Staub, F. C., & Stern, E. (2002). The Nature of Teachers' Pedagogical Content Beliefs Matters for Students' Achievment Gains: Quasi_Experimental Evidence From Elementary Mathematics. *Journal of Educational Psychology*, *94*(2), 344–355.

[i] Gefördert durch das BMBF, Förderkennzeichen 01JH0913

Michael BESSER, Kassel, Malte KLIMCZAK, Frankfurt, Werner BLUM, Kassel, Dominik LEISS, Lüneburg, Eckhard KLIEME, Frankfurt, Katrin RAKOCZY, Frankfurt

Lernprozessbegleitendes Feedback als Diagnose- und Förderinstrument: Eine Unterrichtsstudie zur Gestaltung von Rückmeldesituationen im kompetenzorientierten Mathematikunterricht

Die interdisziplinäre Studie Co²CA[1] (Conditions and Consequences of Classroom Assessment) untersucht u.a., wie Leistungsmessung und Leistungsrückmeldung im Mathematikunterricht gestaltet werden können, um sowohl Möglichkeiten für präzise und detaillierte Leistungsdiagnostik zu schaffen als auch eine positive Wirkung auf zukünftige Lernprozesse von Schüler(inne)n zu erreichen. In diesem Kontext wurden im Herbst/Winter 2010/11 40 neunte Realschulklassen im Rahmen einer etwa vierwöchigen Unterrichtseinheit zum Thema „Satz des Pythagoras“ in unterschiedlichen Untersuchungsgruppen durch regelmäßige, in den normalen Unterricht eingebettete Diagnose- und Rückmeldesituationen begleitet.

1. Feedback als zentrales Element von formativem Assessment im Kontext kompetenzorientierten Mathematikunterrichts

Basierend auf Überlegungen des dänischen KOM-Projekts (Niss 2003) und eng verbunden mit Ergebnissen der großen internationalen Vergleichsuntersuchungen (TIMSS, PISA) liegt ein Fokus aktueller mathematikdidaktischer Diskussionen auf der Auseinandersetzung mit Möglichkeiten und Grenzen des Aufbaus inhaltlicher sowie prozessbezogener Kompetenzen in mathematischen Lehr-Lern-Prozessen. Im Spannungsfeld kognitionspsychologischer Betrachtungen zu „unguided learning“ und „instructional guidance“ (DeCorte 2007, Mayer 2004) erfolgen auch in der Mathematikdidaktik Untersuchungen zur adäquaten Förderung mathematischer Kompetenzen (siehe beispielhaft Schukajlow et al. 2010). In diesem Zusammenhang kristallisiert sich kontrastierend zur verbreiteten Praxis der zusammenfassenden Diagnose und Rückmeldung von Schülerleistungen „am Ende einer Lernphase“ („summatives Assessment“) etwa in Form von Klassenarbeiten, Lernstandserhebungen oder Vergleichsarbeiten in theore-

[1] Gefördert von der DFG im Rahmen des Schwerpunktprogramms „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“. Projektleitung: E. Klieme, K. Rakoczy, W. Blum, D. Leiss.

tischen Überlegungen vor allem die Idee einer kontinuierlichen, den Unterricht begleitenden Leistungsbewertung heraus („formatives Assessment“). Hier stellt vor allem die Idee des Rückgriffs auf informierendes, auf Aufgaben- bzw. Verarbeitungsebene gegebenes, individuelles Feedback ein zentrales Element solch „formativen Assessments“ dar (Kluger & DeNisi 1996, Deci, Koestner & Ryan 1999). Ein derart in den alltäglichen Unterricht eingebettetes Feedback sollte dabei stets versuchen, die Lernenden darin zu unterstützen, die Diskrepanz zwischen aktuellem Leistungsstand und Lernziel zu reduzieren, indem der/dem Lernenden aufgezeigt wird, wie das Lernziel erreicht werden kann (Hattie & Timperley, 2007).

2. Das Forschungsprojekt Co²CA

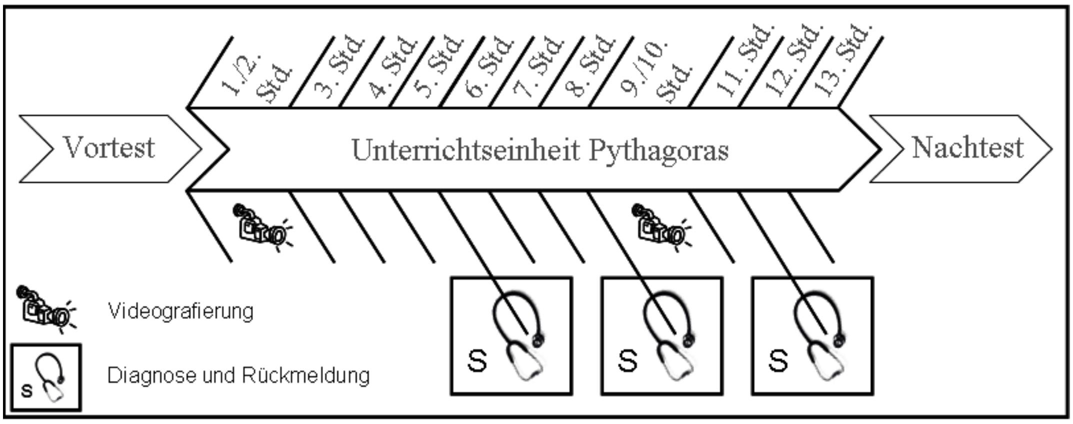
Aufbauend auf diesen Überlegungen stellt die Idee der Gestaltung und Implementierung von formativem Assessment im Rahmen eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts in alltägliche Lehr-Lern-Prozesse einen der Schwerpunkte des Forschungsprojekts Co²CA dar. Neben der Auseinandersetzung mit motivationalen und emotionalen Elementen gilt es dabei im Speziellen zu untersuchen, inwieweit es gelingt, ein für Schüler verständliches und für Lehrer praktikables Instrument zur Diagnose und zur Rückmeldung von Schülerleistungen, d.h. zum formativen Assessment, zu entwickeln, welches sich als lernförderlich herausstellt. Zur Vorbereitung hierauf wurde in den Jahren 2007 bis 2009 zunächst ein Pool kompetenzorientierter Mathematikaufgaben zu den Themenbereichen „Lineare Gleichungssysteme“ und „Satzgruppe des Pythagoras“ entwickelt und pilotiert. Unter Rückgriff auf diese wurden dann im Winter 2009/10 verschiedene Arten kompetenzorientierter Rückmeldungen zu erbrachten Schülerleistungen in Laborsituationen erprobt. Hier hat sich gezeigt, dass eine an Lösungsprozessen orientierte Rückmeldevariante von Schülern als besonders kompetenzunterstützend wahrgenommen wird und sich positiv auf die Bearbeitungsqualität von Mathematikaufgaben auswirkt (zu Gestaltung, Möglichkeiten und Grenzen standardisierter, prozessbezogener Leistungsrückmeldung im Labor siehe Besser et al. 2010). Die Erfahrungen der Laborsitzungen in den realen Unterrichtsalltag übertragend ist schließlich im Rahmen einer Unterrichtsstudie zum Thema „Satz des Pythagoras“ im Winter 2010/11 der Versuch unternommen worden, formatives Assessment in den Unterricht zu implementieren.

Forschungsprojekt Co²CA (2007 bis 2011)

3. Teilstudie von Co²CA: Unterrichtsstudie zur Gestaltung von formativem Assessment im kompetenzorientierten Mathematikunterricht

Eingebettet in die das Forschungsprojekt leitende Fragestellung nach einer mit Bezug auf Kognition, Emotion und Motivation möglichst „optimalen Gestaltung von Diagnose- und Rückmeldesituationen“ im Kontext eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts wurden in Co²CA im Winter 2010/11 im Rahmen einer Unterrichtsstudie 40 neunte Realschulklassen über einen Zeitraum von 13 Unterrichtsstunden begleitet. In einem Pretest-Posttest-Design wurden – operationalisiert durch verschieden umfangreiche und inhaltlich ausgerichtete Lehrerfortbildung zu Beginn der Studie – zwei unterschiedliche Untersuchungsbedingungen realisiert und mit einer Kontrollgruppe kontrastiert. In allen Bedingungen wurde der Unterricht zum Thema „Satz des Pythagoras“ nach einem weitgehend standardisierten Verlaufsplan (siehe Abbildung) gestaltet, Unterschiede in den Bedingungen wurden in der Umsetzung verschiedener Elemente zur Diagnose und Rückmeldung von Schülerleistungen realisiert.

- Kontrollgruppe: Die Lehrkräfte setzen eine kompetenzorientierte, auf kumulativen Wissensaufbau ausgelegte Unterrichtssequenz nach teils standardisierten Richtlinien um.
- Untersuchungsbedingung I: Zusätzlich zu den in der Kontrollgruppe umgesetzten Elementen kompetenzorientierten Mathematikunterrichts erfolgt hier eine Implementierung schriftlicher Diagnose- und Rückmeldesituationen.
- Untersuchungsbedingung II: Zusätzlich zu den in der Kontrollgruppe und Untersuchungsbedingung I umgesetzten Elementen werden Lehrkräfte dieser Bedingung vor Beginn der Studie gezielt bezüglich Möglichkeiten lernprozess- förderlicher Interventionen fortgebildet.



Ablaufplan: Kompetenzorientierte Unterrichtseinheit zum Satz des Pythagoras

4. Erste Ergebnisse

Erste Sichtungen schriftlich erstellter Rückmeldungen und videografierter Schulstunden ermöglichen es, Einblicke in den tatsächlichen Verlauf des Unterrichts im Rahmen unserer Studie zu erhalten. Dabei zeigt sich, dass Lehrkräften die generelle Umsetzung der Ideen zum formativen Assessment im Kontext eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts nach vorgelagerter, intensiver Fortbildung offenbar in großen Teilen zu gelingen scheint. Antworten auf zentrale Fragen nach der Auswirkung individuellen, prozessbezogenen Feedbacks auf die Bearbeitungsqualität von Aufgaben bzw. auf die Leistungsentwicklung von Schülern stehen noch aus, ebenso wie die Analyse erhobener Daten zu Motivation und Interesse der Schüler sowie die Akzeptanz der Umsetzung formativer Leistungsdiagnose durch Lehrkräfte. Hierüber wird an anderer Stelle berichtet werden.

Literatur

Besser, M., Leiss, D., Harks, B., Rakoczy, K., Klieme, E. & Blum, W. (2010): Kompetenzorientiertes Feedback im Mathematikunterricht: Entwicklung und empirische Erprobung prozessbezogener, aufgabenbasierter Rückmeldesituationen. *Empirische Pädagogik*, 24 (4), 404-432.

Deci, E. L., Koestner, R. & Ryan, R. M. (1999). A Meta-Analytic Review of Experiments Examining the Effects of Extrinsic Rewards on Intrinsic Motivation. *Psychological Bulletin*, 125, 627-668.

DeCorte, E. (2007). Learning from instruction: the case of mathematics. *Learning Inquiry*, 1, 19-30.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77, 81-112.

Kluger, A. N. & DeNisi, A. (1996). The Effects of Feedback Interventions on Performance: A Historical Review, a Meta-Analysis, and a Preliminary Feedback Intervention Theory. *Psychological Bulletin*, 119, 254-284.

Mayer, R. E. (2004). Should There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? The Case of Guided Methods of Instruction. *American Psychologist*, 59, 14-19.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), Mediterranean Conference on Mathematical Education. Athen: 3rd Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

Schukajlow, S., Krämer, J., Blum, W., Besser, M., Brode, R., Leiss, D. & Messner, R. (2010): Lösungsplan in Schülerhand: zusätzliche Hürde oder Schlüssel zum Erfolg? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*. Münster: WTM Verlag, 775-778.

Bianca BEUTLER, Braunschweig

Vorschulkinder integrieren Mengen- und Zahlenwissen beim Vergleichen und Verändern von Punktmustern

Arithmetische und geometrische Fähigkeiten werden in der Mathematik der Grundschule klassisch als zwei getrennte Bereiche behandelt. In der jüngeren Mathematikdidaktik lässt sich jedoch eine Verschmelzung beider Bereiche beobachten. So wird in den Bildungsstandards der Grundschule zumindest mit der inhaltsbezogenen Kompetenz „Muster und Strukturen" eine übergreifende Kompetenz formuliert. Bei welchen mathematischen Fähigkeiten sind solch übergreifende Kompetenzen überhaupt entwicklungspsychologisch begründbar? Lassen sich diese auch empirisch nachweisen?

1. Theoretische Zusammenhänge zwischen der Zahlbegriffsentwicklung und geometrischen Fähigkeiten

Bereits Säuglinge besitzen die Fähigkeit zur Mengendiskrimination. Bei sehr kleinen Mengen ist diese Unterscheidung exakt, bei größeren Mengen ist sie nur ab gewissen numerischen Distanzen möglich (z. B. Wynn 1995, Feigenson, Carey & Spelke 2002). Ob diese Fähigkeiten auf ein mentales Konzept von Anzahligkeit beruhen, ist umstritten. Sicher ist, dass Kinder auch auf die Fähigkeit zur Wahrnehmung räumlicher Gegebenheiten und die Kenntnis physikalischer Gesetzmäßigkeiten zurückgreifen, um Gegenstände sowie kontinuierliche und diskrete Mengen zu beurteilen. Insbesondere berücksichtigen die Kinder räumliche Eigenschaften wie Ausdehnung, Dichte, Fläche oder Volumen und auch zeitliche Eigenschaften wie die Dauer. Resnick (1989) konkretisiert dieses frühe Mengenwissen durch die Annahme dreier *räumlich-anloger Schemata*, dem *Vergleichsschema*, dem *Vermehrungs-/Verminderungsschema* und dem *Teil-Ganzes-Schema.*

Dem gegenüber steht das kulturell erworbene sprachliche Zahlenwissen, d. h. die Kenntnis von Zahlwörtern und Zahlwortreihe sowie die Beherrschung der Zählprinzipien. Resnick bezeichnet dieses als *digital-sequenzielle Schemata*; sie stehen zunächst in keinem Zusammenhang zu räumlichen Vorstellungen. Im Laufe der Zahlbegriffsentwicklung gilt es nun, das Zahlenwissen und das frühe Mengenwissen zu integrieren, sodass schlussendlich ein umfassender Zahlbegriff entwickelt wird. Laut dem Neurowissenschaftler Dehaene (1992) besteht dieser aus der Vernetzung dreier verschiedener mentaler Zahlenrepräsentationen: die räumliche Zahlenvorstellung *(analog magnitude representations*), die durch von Aster (2005) auch als frühes Mengenwissen interpretiert wird und die Entwicklung eines mentalen Zahlenstrahls beinhaltet, das sprachliche Zahlenwissen (*auditory verbal word frame*) und die Repräsentation der Ziffern (*visual arabic number form*). Somit lässt sich herleiten, dass all diejenigen Teilbereiche der Zahlbegriffsentwicklung, die direkt auf das frühe Mengenwissen aufbauen, mit räumlichem Wissen in Verbindung stehen.

Aus verschiedenen Modellen zur Zahlbegriffsentwicklung, z. B. von Krajewski und Schneider (2006), sind für die vorliegende Studie drei arithmetische Prinzipien isoliert worden, welche in direktem Bezug zu räumlich-analogen Schemata stehen und von besonderer Relevanz für die mathematische Entwicklung bei Vorschulkindern sind: das Prinzip des Um-eins-mehr/weniger-Werdens, der Kardinalzahlaspekt und die Teil-Ganzes-Beziehungen.

2. Welche Rolle spielen arithmetische Prinzipien, wenn Vorschulkinder geometrische Aufgaben bearbeiten?

Um die theoretisch entwickelten arithmetischen Prinzipien auf ihre empirische Existenz hin zu überprüfen und sodann Hypothesen über mögliche Zusammenhänge zu geometrischen Lösungsstrategien zu bilden, wurde ein Aufgabenkompendium für Vorschulkinder erstellt, welches diverse geometrische Inhalte umfasst und gleichzeitig das Nachdenken über arithmetische Zusammenhänge anregen kann. Weiterhin dienen alle Untersuchungen der Evaluation eines bestehenden Frühförderprogramms, welches u. a. Zahl- und Zahlraumvorstellungen über geometrische Handlungserfahrungen initiiert. In einem Vorher-Nachher-Vergleich wird eine Veränderung von Lösungsstrategien und Fähigkeiten beobachtet und es besteht die Möglichkeit, Rückschlüsse auf Entwicklungszusammenhänge zu ziehen.

Für die hier zu referierende Vorstudie zur Konzept- und Aufgabenerprobung ist eine Gruppe von zunächst 12 Vorschulkindern mittels halbstandardisierter, materialgestützter Einzelinterviews vor und nach dem Durchlaufen des Förderprogramms untersucht worden. Zur Verortung der Kinder und Sicherstellung einer ausreichenden Zählkompetenz wurde zu beiden Zeitpunkten zusätzlich der Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung durchgeführt. Für jedes Kind standen pro Testzeitpunkt mindestens drei Interviews zu maximal 30 Minuten an.

Die geometrischen Aufgaben bedienen verschiedene Fähigkeitsbereiche der Raumvorstellung, den Umgang mit Mustern, das Strukturieren von Flächen und Volumina auch im Sinne von Abmessungen und Übersetzungen zwischen verschiedenen Einheiten sowie das Verständnis für Seriation und Halbierungen. Beispielsweise wurde eine Aufgabe zu räumlichen Beziehungen in Punktmustern in Anlehnung an figurierte Zahlen und der Kompetenz „Muster und Strukturen“ der Bildungsstandards konzipiert: Den

Vorschulkindern wurden hierzu nacheinander zwei A4-Blätter mit je zwei Punktmustern gezeigt, jedes Mal mit der Aufforderung: „Verändere das (linke) Bild so, dass es aussieht wie das (rechte) Bild. Male was du verändern willst.“ Jedes Muster besteht aus sechs Punkten.

Als naheliegende Lösungsstrategien gelten für beide Aufgaben einerseits die Andeutung einer dynamischen Verschiebung eines Punktes unter Berücksichtigung der globalen Gesamtkonfiguration und andererseits das Streichen und/oder Hinzufügen von Punkten unter Berücksichtigung der einzelnen lokalen Veränderungen im statisch gedeuteten Muster. Weiterhin können die Punktmuster in Zeilen oder Spalten strukturiert und so die nötige Veränderung des Musters begründet werden. Bei Aufgabe A1 kann weiterhin die Kenntnis über das Würfelbild der Zahl 6 als Hilfe dienen.

Tatsächlich finden sich in den kindlichen Lösungen alle angenommenen Strategien bei beiden Aufgaben im Vor- und im Nachtest der Vorstudie wieder. Hinzu kommen Lösungsversuche, die nicht zur korrekten Lösung führen. Ursache ist hier immer eine zu einseitige Fokussierung nur der Form oder nur der Anzahl.

Die arithmetischen Kategorien des Prinzips des Um-eins-mehr/weniger-Werdens, des Kardinalzahlaspekts und der Teil-Ganzes-Beziehungen fanden in den Lösungsstrategien in dieser und anderen gestellten Aufgaben eine breite Anwendung. Aus den kindlichen Aussagen ergibt sich eine Abstufung, die sich von der Betrachtung des einzelnen geometrischen Kontextes bis hin zur Argumentation mittels eines tatsächlich arithmetischen Prinzips inklusive der Integration von Mengen- und Zahlenwissen erstreckt:

Um 1 mehr/weniger	**Kardinalzahlaspekt**	**Teil-Ganzes-Beziehungen**
1. Ein Punkt zu viel/wenig handelnd berichtigt 2. Begründung, dass ein Punkt zur Gleichheit mit einem anderen (Teil-)Muster fehlt/zu viel ist 3. Unterschied von 1 bei benachbarten Zahlen genannt	1. Abzählen (aller Punkte), keine weitere Verbindung zu Mengen/ Anzahlkonzepten 2. Nennung einer Anzahl eines (Teil-)Musters bei mengen-/ formbasierter Begründung 3. Vergleich von Anzahlen (gleiches Muster → gleiche Anzahl, nicht umgekehrt)	1. Strukturierung in Teile (Teilanzahlen) ohne Bezug zum Ganzen 2. Herstellen von Beziehungen zwischen Teilanzahlen und der Gesamtanzahl

3. Ergebnisse der Vorstudie

Aufgrund der gewählten offenen Aufgabenstellung können die unterschiedlichen Lösungsstrategien und arithmetischen Kategorien nicht zur Beurteilung der Kompetenz des einzelnen Kindes dienen. Vielmehr kann einerseits die Wirkungsweise und Verknüpfung einzelner Strategien analysiert werden, andererseits lässt sich abbilden, welche Aufgabenaspekte das einzelne Kind als besonders wichtig erachtet und zur Lösungsfindung hervorhebt.

Die Vorstudie hat gezeigt, dass Vorschulkinder auf vielfältige Weise Mengen- und Zahlenwissen zur Lösung geometrischer Aufgaben hinzuziehen. Die Kinder quantifizieren hier nicht nur kontextbezogene Mengenbetrachtungen, sondern nutzen vereinzelt auch Kenntnisse über arithmetische Zusammenhänge für die Erschließung des geometrischen Problems. Besonders bei der geometrischen Strukturierung der Punktmuster scheinen die Kinder zugleich Anzahl- und Formaspekten betrachten zu müssen (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2001). Die Kinder sind gefordert, über den Zusammenhang von Anzahlen und räumlicher Anordnung nachzudenken, sodass die geometrische Aufgabe auch einen Übergang vom Ordinal- zum Kardinalzahlaspekt anregt. Im Vergleich vom Vor- zum Nachtest ist sowohl eine Verbesserung in der Integration von Anzahl- und Formaspekten als auch in der Ableitung nötiger quantitativer Veränderungen aus Anzahlvergleichen feststellbar. Strukturierungen erfolgen schneller und sicherer.

Literatur

Aster, M. v. (2005): Wie kommen Zahlen in den Kopf? Ein Modell der normalen und abweichenden Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen. In: Aster, M. v. & Lorenz, J. H. (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 13-33.

Dehaene, S. (1992): Varieties of numerical abilities. In: Cognition, 44, 1-42.

Feigenson, L.,Carey, S. & Spelke, E. (2002): The Representations Underlying Infant's Choice of More: Object Files Versus Analog Magnitudes. In: Psychological Science, 13/2, 150-156.

Krajewski K. & Schneider, W. (2006): Mathematische Vorläuferfähigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistung bis zum Ende der Grundschulzeit. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht, 53, 246-262.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2001): Räumliche Strukturierungsprozesse bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen - Empirische Untersuchungen mit Augenbewegungsanalysen. Frankfurt a. M.: Lang.

Resnick, L. B. (1989): Developing mathematical knowledge. In: American Psychologist, 44, 162-169.

Wynn, K. (1995): Origins of numerical knowledge. In: Mathematical Cognition, 1, 35-60.

Rolf BIEHLER, Paderborn, Reinhard HOCHMUTH, Kassel, Pascal R. FISCHER, Kassel, Thomas WASSONG, Paderborn

Transition von Schule zu Hochschule in der Mathematik: Probleme und Lösungsansätze

1. Einleitung

Der Übergang von der Schule zur Hochschule ist gekennzeichnet durch verschiedene Problemlagen. Die Unterschiede zwischen schulischen und universitären Lehr-Lernformen sind phänomenologisch bekannt, aber noch nicht hinreichend analysiert. Die Verkürzung der Schulzeit setzt einen vorläufigen Endpunkt der Rücknahme der Oberstufenreformen aus dem Jahr 1972. Anspruchsvolle „Studierfähigkeit" der Abiturienten kann kaum realisiert werden. Seitens der Hochschulen ist in diesem Bereich auf die Nicht-Akzeptanz der Notwendigkeit der bewussten Gestaltung einer Transitionsphase hinzuweisen, ferner auf die immer größer werdende Heterogenität der Studierenden. Richtet man den Blick speziell auf die fachspezifischen Aspekte, so zeigt sich Mathematik nicht nur in den MINT-Fächern, sondern auch in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften und der Psychologie als wesentliche Hürde des Studiums. Selbst in den Lehramtsstudiengängen wird Mathematik zum Teil zum Pflichtfach – wie beispielsweise im Grundschullehramt in Hessen und NRW – was (vermutlich) diverse Konsequenzen hinsichtlich der Motivation und der Leistung der Studierenden nach sich zieht.

Zur Lösung dieser Transitionsprobleme werden an verschiedenen Universitäten neben den etablierten mathematischen Vorkursen nun auch zusätzliche Maßnahmen im ersten Studienjahr angeboten. Als Beispiele sei an dieser Stelle auf einen Brückenkurs im Bereich von Ingenieurstudiengängen an der Universität Kassel oder an die Veranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" der Universität Paderborn verwiesen. Weitere Projekte, die sich dieser Thematik widmen, sind die von der Telekom-Stiftung geförderten Projekte „Mathematik Neu Denken" und „Mathematik Besser Verstehen". Das neu gegründete Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (KHDM) der Universitäten Kassel und Paderborn vereinigt eine Reihe von Projekten, die sich mit Lösungen für die Übergangsproblematik beschäftigen.

2. Das Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik

Das KHDM ist eine gemeinsame Einrichtung der Universitäten Kassel und Paderborn unter der Leitung von Rolf Biehler und Reinhard Hochmuth und wird aus Mitteln der Stiftung Mercator sowie der VolkswagenStiftung im

Rahmen des Programms „Bologna – Zukunft der Lehre“ gefördert. Das Kompetenzzentrum besteht, neben der geschäftsführenden Leitung, aus vier Arbeitsgruppen, die sich mit der Verbesserung der universitären Mathematikausbildung in allen Studiengängen mit mathematischen Inhalten beschäftigen. Orthogonal zu diesen Arbeitsgruppen gibt es vier verschiedenen „Querschnittsarbeitsgruppen“, die sich mit fachübergreifenden Themen, wie Methoden und Instrumenten empirischer Lehr-Lern-Forschung, Fachdidaktischer Analyse und Aufbereitung mathematischen Wissens, Hochschuldidaktischen Lehr-Lern-Methoden und Einsatz von eLearning in universitären Lehrveranstaltungen beschäftigen.

Die zentralen Projektvorhaben zielen ab auf eine kompetenz- und adressatenorientierte und zugleich empirisch kontrollierte Curriculumentwicklung, die Förderung von universitären Lernstrategien und Arbeitstechniken, die Schaffung visuell-experimenteller Zugänge zur Mathematik mit Brückenfunktion zur formalen Darstellung sowie die Entwicklung studiengangspezifischer „Schnittstellen-Module“ mit Brückenfunktion zwischen Fachwissen und Fachdidaktik, Schul- und Hochschulmathematik und zwischen den verschiedenen Studiengängen. Die entwickelten Materialien sollen möglichst flexibel in verschiedenen Blended-Learning-Szenarien einsetzbar sein.

Die zentralen Forschungsfragen des KHDM richten sich nach den Zielen der jeweiligen Arbeitsgruppen. So sind z.B. zentrale Fragen „*Wie kann der „Kulturschock“ zwischen schulischer und universitärer Mathematik überwunden werden*“, oder „*Wie lassen sich fachspezifische Arbeitstechniken und Lernstrategien in heterogenen Lerngruppen effektiv fördern und Selbstwirksamkeitserwartungen beeinflussen?*“. In der AG Mathematik in den Ingenieurwissenschaften wird u.a. untersucht: „*Wie können Modellierungskomponenten in Mathematik-Vorlesungen und umgekehrt Mathematik-Komponenten in ingenieurwissenschaftlichen Vorlesungen situativ interdisziplinäres Lernen fördern?*“

Im Rahmen des KHDM werden dazu verschiedene anwendungsorientierte Forschungs- und Entwicklungsprojekte durchgeführt, deren Erkenntnisse zusammengeführt und damit auch wissenschaftliche Grundlagen zur Entwicklung einer fachbezogenen Hochschuldidaktik geschaffen. Das Zentrum soll hierauf aufbauend als Serviceeinrichtung hochschuldidaktische Weiterbildungsmaßnahmen anbieten und über ein Webportal Materialien zur Verfügung stellen. Zugleich soll damit ein nationales und internationales Netzwerk zur Hochschuldidaktik aufgebaut werden. Bereits mit der Gründung des Zentrums kann dabei auf Kompetenzen und Erfahrungen aus verschiedenen hochschuldidaktischen Projekten zurückgegriffen werden, von denen im Folgenden drei Beispiele herausgegriffen und kurz erläutert werden.

Beispiel 1: Curriculumreform

Das Projekt LIMA - Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium" (Biehler, Eilerts, Hänze & Hochmuth, 2010; http://lima-pb-ks.de/) beschäftigt sich mit einer wissenschaftlich fundierten Verbesserung der Lehre im Kontext einer Mathematikanfängervorlesung für Studierende des Lehramts Haupt- und Realschule. Im Projekt kooperieren Fachdidaktiker, Fachmathematiker und Psychologen der Universitäten Kassel und Paderborn. Einer der Foki des Projekts ist die Verbesserung der Schlüsselstelle „Übungsbetrieb". Dazu werden die Übungsblätter selbst mit Blick auf eine verstärkte Kompetenzorientierung überarbeitet. Den Korrekteuren werden statt einfacher Musterlösungen didaktisch orientierte Aufgabenanalysen unter Einbezug ehemaliger „Studierendenlösungen" zur Verfügung gestellt, auf deren Basis dann ein differenzierteres Feedback zu den eingereichten studentischen Lösungen erfolgen kann. Die Tutorien selbst werden dabei ebenfalls umgestaltet und durch weitere „Drop-in-Lernzentren" für zusätzliche Fragemöglichkeiten an Tutoren ergänzt („Mathe-Treff"). Ein weiterer Fokus des Projekts liegt in der Entwicklung einer fachspezifischen Tutorenausbildung. Dabei werden den studentischen Tutoren auf Basis einer Rollenanalyse und unter Einbezug verschiedener fachspezifischer wie fachübergreifender Methoden geschult. Neben Einführungs-Workshops werden wöchentliche Begleitseminare sowie Hospitationen mit Beratung angeboten (vgl. Klemm, Schreiber, Biehler & Hochmuth, 2011).

Beispiel 2: Mathematische Vorkurse

Das Projekt VEMA – Virtuelles Eingangstutorium Mathematik ist ein Kooperationsprojekt der Universitäten Kassel und Paderborn sowie der TU Darmstadt (http://www.mathematik.uni-kassel.de/~vorkurs/). VEMA hat mit Blick auf die inhaltlich unterschiedlichen Anforderungen schulischer und universitärer Mathematik ein interaktives Multimediaskript entwickelt, das sowohl zum selbstständigen Lernen wie auch zum Einsatz in verschiedenen Blended-Learning Szenarien geeignet ist und durch Verwendung des SCORM-Formats auch in alle gängigen Lernplattformen integriert werden kann.

Für den Einsatz des Materials wurden in der Lernplattform Moodle zusätzlich computergestützte, diagnostische Selbsttests entwickelt, die ein sofortiges inhalts- und kompetenzbezogenes Feedback ermöglichen und den Lerner bei der konkreten Gestaltung seines individuellen Lernens unterstützen. In diesem Zusammenhang wurden auch verschiedene Blended-Learning-Szenarien für den Einsatz der Materialien in mathematischen Vorkursen entwickelt und beforscht (vgl. Fischer & Biehler 2010).

Beispiel 3: Math-Bridge

Das dritte Projekt des KHDM zur Übergangsproblematik ist das EU-Projekt Math-Bridge. Hier kooperieren verschiedene Universitäten aus insgesamt sieben Ländern der EU unter der Leitung des DFKI in Saarbrücken (http://www.math-bridge.org/). Das Projekt hat das Ziel, international verwendbares Material für mathematische Brückenkurse bereitzustellen und Empfehlungen für dessen Einsatz zu geben. Der in mehreren Sprachen verfügbare Content ist dabei in ein adaptives Lernsystem eingebunden, das sich dem Studenten beim selbstständigen Lernen anpasst und dessen Kompetenzen hinsichtlich der Selbstregulation und der Selbsteinschätzung fördert (vgl. Hochmuth, Biehler, Fischer, Wassong 2011)

3. Fazit

Zur Lösung der verschiedenen im Kontext des Übergangs von Schule zur Hochschule auftretenden fachübergreifenden und fachbezogenen Probleme stellen die hier kurz vorgestellten Projekte Lösungsansätze in verschiedenen Richtungen dar: Sowohl hinsichtlich der Lehre, der inhaltlichen Gestaltung aber auch hinsichtlich der für das Studium erforderlichen Selbstlernkompetenzen werden hier Lösungsansätze aufgezeigt. Die Erkenntnisse dieser wie auch weiterer Projekte fließen in die gemeinsame Arbeit im Rahmen des KHDM ein, das in diesem Jahr auch eine Tagung zu mathematischen Brücken- und Vorkursen plant. Diese wird voraussichtlich vom 03. – 05.11.2011 in Kassel stattfinden. Nähere Informationen finden sich unter http://www.khdm.de/.

Literatur

Biehler, R., Eilerts, K., Hänze, M. & Hochmuth, R. (2010). Mathematiklehrerausbildung zum Studienbeginn: Eine empirische Studie zu Studienmotivation, Vorwissen und Einstellungen zur Mathematik (BMBF-Projekt LIMA). Beiträge zum Mathematikunterricht 2010 (S. 269-272).

Fischer, P. R. & Biehler, R. (2010): Ein individualisierter eVorkurs für 400 Studierende und mehr. Ein Lösungsansatz für mathematische Brückenkurse mit hohen Teilnehmerzahlen. Beiträge zum Mathematikunterricht 2010 (S. 297-300). München 2010.

Hochmuth, R., Biehler, R., Fischer, P.R., Wassong, Th. (2011). Individuelles Lernen im Rahmen von mathematischen Brückenkursen – Math-Bridge: Ein Werkstattbericht. Beiträge zum Mathematikunterricht 2011.

Klemm, J. Schreiber, S., Biehler, R. & Hochmuth, R. (2011) Qualifizierung von TutorInnen im LIMA-Projekt. Beiträge zum Mathematikunterricht 2011.

Ulrich BÖHM, Darmstadt

Langfristige Förderung von Modellierungskompetenzen: Eine Betrachtung aus sportdidaktischer Perspektive

Nach Reiss (2009, S. 200) ist der Kenntnisstand zur langfristigen Kompetenzentwicklung nicht zufriedenstellend, so dass es dringend erforderlich ist „gezielt an entsprechenden Kompetenzstruktur- und Kompetenzentwicklungsmodellen zu arbeiten“. Dies gilt auch für das mathematische Modellieren. Borromeo Ferri (2011, S. 174f) weist auf Entwicklungsbedarf zur Konzeptualisierung von Modellierungskompetenzen hin, sowie auf den Bedarf einer angemessenen Stufung in der Sekundarstufe I. Ein theoretischer Rahmen für ein solches Kompetenzentwicklungsmodell zum mathematischen Modellieren ist Gegenstand meines Promotionsvorhabens (Böhm, 2009 und 2010). Ein aus der Sportdidaktik stammendes Konzept zur langfristigen Vermittlung von Sportspielen wird in diesem Beitrag als konzeptioneller Rahmen für einen langfristig angelegten Kompetenzerwerb auf das mathematische Modellieren übertragen.

1. Modellierungskompetenz und deren Förderung

Nach Leiß und Blum (2006, S. 40) wird das Bearbeiten realitätsbezogener Probleme mit mathematischen Mitteln als mathematisches Modellieren bezeichnet. Modellierungskompetenzen beschreiben Voraussetzungen zur Bewältigung von Modellierungsanforderungen. Dabei differenzieren Blomhøj und Jensen (2007, S. 51) drei Dimensionen von Modellierungskompetenz: 1. Auf den Modellierungsprozess bezogenes Wissen und Können (degree of coverage), 2. Mathematische Inhalte (technical level) und 3. Situationen und Kontexte, aus denen das reale Problem stammen kann (radius of action). Der Beitrag von Maaß (2006, S. 136-139) differenziert die erste Dimension weiter aus, indem u.a. metakognitive Modellierungskompetenzen als Aspekte von Modellierungskompetenzen genannt werden.

Solche Modellierungskompetenzen stehen in Verbindung mit Aufgaben, die zum Einen Modellierungskompetenzen fördern, zum Anderen Rückschlüsse auf individuelle Modellierungskompetenzen ermöglichen sollen. Um die Vielfalt an Aufgaben zum mathematischen Modellieren zu klassifizieren, schlägt Maaß (2010) ein Schema vor. Die verschiedenen Aufgabentypen sind jedoch bislang nicht in einem Konzept zur Förderung von Modellierungskompetenzen integriert. Die Vielfalt zeigt sich an Aufgabenbeispielen aus den Beiträgen im JMD Themenheft zum mathematischen Modellieren. Das Spektrum reicht von Sachaufgaben bis hin zu authentischen Problemen (vgl. Biehler & Leiss, 2010, S. 7).

Ebenfalls an Aufgaben orientiert, beschreiben Blomhøj und Jensen (2003, S. 128f) kontrastierend zwei Extrempositionen zur Vermittlung von Modellierungskompetenzen. Zum Einen den „holistic approach“, in dem die Aufgabe so offen formuliert ist, dass alle Schritte eines Modellierungsprozesses absolviert werden müssen, um die Aufgabenstellung zu bearbeiten. Zum Anderen den „atomistic approach“, in dem die Aufgabe so gestellt ist, dass nur ein Teil des Modellierungsprozesses bei der Bearbeitung notwendig ist. Nach Blomhøj und Jensen (2003, S. 137) sowie Maaß (2007, S. 24) ist eine Kombination beider Ansätze für den Erwerb von Modellierungskompetenzen sinnvoll.

2. Sportdidaktische Perspektive: Das spielgemäße Konzept

Die beiden Vermittlungskonzepte (holistic und atomistic), sind vergleichbar mit Konzepten zur Vermittlung von Sportspielen. Der holistische Ansatz entspricht der Spielreihe, der atomistische Ansatz der Übungsreihe. Aus der Integration beider Positionen hervor geht das Spielgemäße Konzept, dass im Folgenden dargestellt wird (vgl. Dietrich, 2007).

Nach Kuhlmann (2003, S. 135) geht das Erlernen von Sportspielen „über den Erwerb von geschlossenen bzw. offenen Fertigkeiten hinaus. Spielen steht in einem komplexen Handlungszusammenhang, der es erforderlich macht, nach solchen Vermittlungssituationen zu suchen, die auf der einen Seite dem Lernenden ein befriedigendes Spielerlebnis ermöglichen und auf der anderen Seite Überforderungen vermeiden helfen sollen.“ Im Mittelpunkt stehen also Spielformen, um Lerngelegenheiten zum Erwerb von Fähigkeiten zum spielspezifischen Entscheidungshandeln zu schaffen. Leitend bei der Gestaltung der Spielreihe ist dabei, dass die Spielidee von Anfang an als „Kern“ erkennbar ist. Damit die Spielformen in der Spielreihe entwicklungsgemäß und entwicklungsfördernd sind, gibt es Vereinfachungsstrategien, die über veränderte Regeln und Rahmenbedingungen technische und taktische Anforderungen im Vergleich zum „großen“ Spiel reduzieren. Dabei werden ergänzend Fertigkeiten in Übungsreihen erlernt, wenn diese im Rahmen der Spielreihe notwendig sind (vgl. Kuhlmann, 2003; Dietrich, 2007) (siehe Abb.1). Primat hat dabei die Spielreihe, denn „Spielen lernt man am besten, indem man selbst spielt“ (Kuhlmann, 2003, S. 139f).

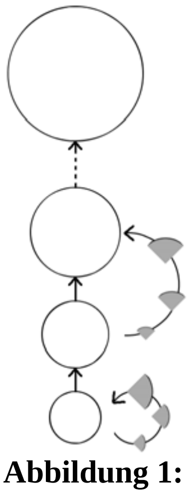


Abbildung 1: Spielreihe mit ergänzenden Übungsreihen

3. Kompetenzgemäße Förderung von Modellierungskompetenzen

Das Spielgemäße Konzept zur Vermittlung von Sportspielen zielt neben der Vermittlung von motorischen Fähigkeiten und Fertigkeiten ausdrücklich auch auf die Vermittlung kognitiver Fähigkeiten und Fertigkeiten, sowie metakognitive, soziale und motivationale Aspekte (vgl. Dietrich, 2007, S. 16). Es geht also um solche Aspekte, die der Kompetenzbegriff von Weinert (2001, S. 27f) enthält. Die Orientierung an Kompetenzen soll im Unterricht dazu führen, dass „das Lernen auf die Bewältigung von Anforderungen und nicht nur auf den Aufbau von zunächst ungenutztem Wissen ausgerichtet“ (KMK, 2005, S. 16) ist. Einen solchen Anspruch hat auch das spielgemäße Konzept. Daher wird das spielgemäße Konzept zur Realisierung einer kompetenzgemäß, langfristige Förderung übertragen.

Das Konzept wirft zwei zentrale Fragen auf: 1.) Was ist der Kern des mathematischen Modellierens? Kern sind die Übersetzungsprozesse (vgl. Leiß & Blum, 2006, S. 41). 2.) Wie lassen sich entwicklungsgemäße und entwicklungsfördernde Anforderungen beschreiben, so dass der Kern erhalten bleibt und langfristig eine Kompetenzentwicklung beschreibbar ist?

Diese Frage zielt auf ein gestuftes Kompetenzentwicklungsmodell für einen langfristigen Aufbau. Das spielgemäße Konzept bietet nun ein theoretisches Gerüst zur Orientierung.

Wie eine Konkretisierung anhand eines Aspektes von Modellierungskompetenzen aussehen kann, soll an der Idee der Approximation gezeigt werden. Diese Idee kann der Metakognition (vgl. Maaß, 2006) im Sinne der Dimension Degree of coverage (Blomhøj & Jensen, 2007, S. 51) zugeordnen werden. In der Primarstufe oder zu Beginn der Sekundarstufe I sollten Lernende wissen, dass sich Sachaufgaben nicht immer exakt mit Hilfe der Mathematik lösen lassen. Zum Teil können solche Aufgaben nur näherungsweise oder auch gar nicht gelöst werden. Ein Kompetenzzuwachs zu dieser Idee ist darin zu sehen, wenn nun zum Bewusstsein für Ungenauigkeit, Konzepte zur Kontrolle der Ungenauigkeit hinzukommen. Ein solches Konzept ist z.B. das Arbeiten mit oberen und unteren Schranken, so dass ein Intervall angegeben werden kann, in dem der exakte Wert liegen muss. Auch die Kontrolle von Fehlern im Sinne der Fehlerfortpflanzung ist ein Konzept, an dem sich ein weiterer Kompetenzzuwachs, an dieser für das mathematische Modellieren typischen Idee, zeigen kann.

Neben der Orientierung zur Gestaltung der langfristigen Förderung von Kompetenzen besteht ein weiterer Mehrwert einer Orientierung am spielgemäßen Konzepts für das mathematische Modellieren darin, dass sich die verschiedenen Aufgaben zur Förderung von Modellierungskompetenzen (vgl. Maaß, 2010) in einem Konzept zur langfristigen Förderung integrieren lassen. Sachaufgaben, in denen einen Übersetzungsleistung erbracht werden muss, können den Kern des mathematischen Modellierens bereits in der Primarstufe erkennen lassen. Solche „Übersetzungsaufgaben“ strukturieren den langfristigen Kompetenzaufbau bis hin zu authentischen Problemen. In Abbildung 1 werden solche Aufgaben durch die Kreise repräsentiert. Aufgaben zur Förderung bestimmter Aspekte zum Modellieren (z.B. einzelne Schritte im Modellierungsprozess) sind ergänzende Aufgaben, dargestellt durch die grauen Kreissegmente in Abbildung 1.

Literatur

Biehler, R., & Leiss, D. (2010). Empirical Research on Mathematical Modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 5-8. doi:10.1007/s13138-010-0004-0

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123-139. doi:10.1093/teamat/22.3.123

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the Fuss about Competencies? In W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (S. 45-56). New York: Springer.

Böhm, U. (2009). Ein online-Lehrerfortbildungskurs zum mathematischen Modellieren. In *Beiträge zum Mathematikunterricht.* (S. 479-482).

Böhm, U. (2010). Modellierungskompetenzen mit geeigneten Aufgaben langfristig entwickeln. In *Beiträge zum Mathematikunterricht.* (S. 177-180).

Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Dietrich, K. (2007). *Die großen Spiele*. Aachen: Meyer & Meyer.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., u. a. (2009). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: Expertise*. Berlin: BMBF.

KMK (Hrsg.). (2005). *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz - Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung*. München: Luchterhand.

Kuhlmann, D. (2003). Wie führt man Spiele ein? In Bielefelder Sportpädagogen (Hrsg.), *Methoden im Sportunterricht* (S. 135-147). Schorndorf: Karl Hofmann.

Leiß, D., & Blum, W. (2006). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret* (S. 33 - 50). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142. doi:10.1007/BF02655885

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren: Aufgaben für die Sekundarstufe I*. Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(2), 285-311. doi:10.1007/s13138-010-0010-2

Reiss, K. (2009). Erwerb mathematischer Kompetenzen in der Sekundarstufe: Zusammenfassung und Forschungsdesiderate. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 199-202). Berlin: Waxmann.

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen - eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F.E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 17-32). Weinheim: Beltz.

Claudia BÖTTINGER[1], Essen

Ein Fragebogen zur professionsorientierten Evaluation von mathematischen Lehramtsveranstaltungen-orientiert an den Zielen des Studiengangs Grund-Haupt-und Realschule (NRW)

In diesem Beitrag wird ein Fragebogen vorgestellt, mit dem Einstellungen und Haltungen von Lehramtsstudierenden im Studiengang Grund-, Haupt- und Realschule (GHR) erfasst werden sollen. Ziel ist, substanziellere und differenziertere Hintergrundinformationen darüber zu erhalten, wie sich diese im Laufe unseren eigenen universitären Veranstaltungen entwickeln.

1. Anlage des Fragebogens

Mathematische Lernprozesse werden zunehmend als aktive Wissenskonstruktionen der Schülerinnen und Schüler begriffen, wobei diese selbst aktiv werden, Entdeckungen vornehmen und durch gemeinsame Reflexion verallgemeinerte Einsichten gewinnen. (Steinbring, 2003)

Diese Sichtweise sollen Lehramtsstudierende einerseits selbst erleben und andererseits sollen sie als angehende Lehrkräfte auf der Basis dieser Sichtweise selbst unterrichten und Unterrichtsprozesse verstehen.

Dies führt zu vier Bereichen, die der Fragebogen abdeckt:

- Persönliche Auffassung zur Mathematik
- Persönliche Einstellung zum eigenen Lernen von Mathematik
- Persönliche Einstellung zum Unterrichten von Mathematik
- Persönliche Einstellung zur Lehrer-Schüler-Beziehung im Mathematikunterricht

Diese Unterscheidung des professionellen Lehrerwissens ist – bis auf die Reflexion des eigenen Mathematiklernens, die hier zusätzlich aufgenommen wurde – Konsens in unterschiedlichen Studien bzw. Grundlagen zum Lehrerwissen, (z. B. Blömeke, Kaiser, Lehmann 2008)

Der Fragebogen wurde als Vor- und Nachtest[2] in Arithmetik, Didaktik der Arithmetik, Mathematik lehren und lernen eingesetzt.

[1] An der Entwicklung des Fragebogens waren außerdem Caren Behnke, Kerstin Bräuning, Marcus Nührenbörger, Elke Söbbeke und Heinz Steinbring beteiligt.

[2] Der Begriff „Test“ dient der Vereinfachung, es handelt sich um einen „Fragebogen“.

2. Anlage der Fragen

Der Fragebogen wurde als Two-Tiers-Test angelegt, wie er aus den Naturwissenschaften bekannt ist, (Treagust 2006). Im ersten Schritt wird eine fachliche Frage gestellt und im zweiten wird nach der Begründung für die Wahl der Antwort gefragt. Hintergrund ist, dass man auf der Basis einer fachlichen Frage meist nicht entscheiden kann, welches Mathematikbild zugrunde liegt und umgekehrt ist nur schwer vorhersagbar, wie eine fachliche Frage auf der Grundlages eines bestimmten Mathematikbildes beantwortet wird. Um sicherzustellen, dass sich die Studierenden inhaltlich mit der Frage beschäftigen, wurden die Frage zunächst offen beantwortet und anschließend die am besten passende ausgewählt. Jede Begründung wurde in einer Skala von „trifft zu“ bis „trifft gar nicht zu“ eingeordnet.

Am Beispiel „Binomische Formel“ aus dem Bereich „Sichtweise auf Mathematik“ wird dies nun näher erläutert.

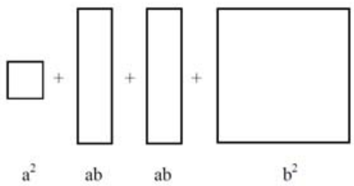
Teil a) Erklären Sie die Formel „$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$“. Bitte notieren Sie! Diese Antworten werden nicht ausgewertet.

Teil b) Welche der folgenden Antworten entspricht am ehesten Ihrer Erklärung? Vorgegeben waren:

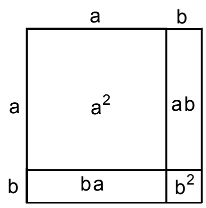
Beispiel: $a = 5$, $b = 7$: $(5+7)^2 = 12^2 = 144$

Formel: $(a+b) \cdot (a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$

unstrukturiertes Bild:



strukturiertes Bild:



Typisch bei der „Sichtweise auf Mathematik“ ist, dass es immer zwei visuelle Darstellungen gibt, die eher inhaltlicher, begrifflicher Natur sind und zwei Antworten prozeduraler Natur – hier das Beispiel und die Formel. Die Antworten innerhalb eines Typs unterscheiden sich im Strukturierungsgrad.

Im Rahmen der Veranstaltungen gibt es eine Wertigkeit der Antworten: 1. Beispiel, 2. Unstrukturiertes Bild, 3. Formel, 4. Strukturiertes Bild, da begriffliche Erklärungen höher gewertet werden als prozedurale. Dies bedeutet, dass die fachlichen Fragen ordinal skaliert sind.

Teil c) Die folgenden Begründungen sind für alle 4 fachlichen Fragen (binomische Formel, Multiplikation von Brüchen, Gesetz von der Konstanz der Differenz, Flächeninhalt von Dreiecken) identisch.

Warum haben Sie Ihre Antwort gewählt? Ich habe diese Antwort gewählt, weil ich

	trifft zu			**trifft gar nicht zu**
	1	2	3	4
die Aussage auf der Grundlage von elementaren mathematischen Kenntnissen herleite.				
die in der Aussage ausgedrückten Beziehungen in einen mathematischen Zusammenhang stellen kann.				
die Aussage an einem oder mehreren konkreten Beispielen überprüfe.				
mir das mathematische Verfahren merken kann.				

3. Erste Auswertung

Im ersten Auswertungsschritt geht es darum, beide Aufgabenteile b) „fachlicher Teil“ und c) „Begründungen“ getrennt zu untersuchen: Welche Zusammenhänge gibt es zwischen den gleichen Fragen im Vor- und im Nachtest? Welche Zusammenhänge gibt es innerhalb der Fragen des Vortests bzw. innerhalb des Nachtests?

Anhand der Frage zur binomischen Formel und den Daten aus der Veranstaltung „Didaktik der Arithmetik“ (159 TN) sollen zwei typische Merkmale dargestellt werden, wie sie sich auch bei anderen Fragen zeigen.

Folgenden Tabelle zeigt das Antwortverhalten im Vor- und Nachtest.

		Bin. Formel Nachtest				
		Zahlen einsetzen	strukturiertes Diagramm	unstr. Diagramm	Formel	Gesamt
Bin. Formel Vortest	Zahlen einsetzen	0	8	2	5	15
	strukturiertes Diagramm	1	15	1	2	19
	unstr. Diagramm	3	7	6	3	19
	Formel	2	46	5	46	99
Gesamt		6	76	14	56	152

Auffällig ist die Wanderung von 46 Studierenden, die im Vortest die Formel und im Nachtest das strukturierte Diagramm angekreuzt haben, was mit der Veranstaltung zu begründen ist. Eine derartig herausragende Wanderung lässt sich bei fast allen Fragen finden. Ein weiteres durchgängiges Merkmal ist ein hoher Anteil (40-60 %)von Studierenden, die Ihr Antwortverhalten gar nicht ändern, hier 0+15+6+46=67.

Da die Variablen ordinalskaliert sind, lässt sich der Zusammenhang statistisch mithilfe der Rangkorrelation fassen. Die Werte für die fachlichen Fragen vom Vor- zum Nachtest sind durchweg hoch signifikant, die Werte für die Fragen innerhalb des Vor- bzw. Nachtests nicht.

Zur Datenreduktion im letzten Teil wurden die Antworten dichotomisiert und die strukturorientierten Begründungen und die beispiel- und regelorientierten Begründungen zusammengefasst. Bei den Rangkorrelationen ergibt sich ein genau umgekehrtes Muster wie beim fachlichen Teil.

Zusammenfassung: Signifikante Rangkorrelationen

	Innerhalb der Fragen des Vortests	Zwischen gleichen Fragen in Vor-/Nachtest	Innerhalb der Fragen des Nachtests
Fachliche Frage	nein	ja	nein
Begründung durch Beispielorientierung	ja	nein	ja
Begründung durch Strukturorientierung	ja	nein	ja

Daraus lässt sich ableiten, dass die Antworten auf fachliche Fragen sehr inhaltsspezifisch sind. Sie entwickeln sich durch die Veranstaltungen eher in bestimmte Richtungen während die Begründungen weniger inhaltsspezifisch sind und auf allgemeine Konzepte zum Begründen hindeuten.

4. Ausblick

Es soll herausgearbeitet werden, wie sich innerhalb der Studierenden die Sichtweisen auf Mathematik im Rahmen der Veranstaltungen entwickeln.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G., Lehmann, R. (Hrsg.) (2008), Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer, Münster, Waxmann

Treagust, D. (2006) Diagnostic assessment in science as a means to improving teaching, learning and retention, UniServe Science Assessment Symposium Proceedings, http://sydney.edu.au/science/uniserve_science/pubs/procs/2006/treagust.pdf [10.3.2011]

Steinbring, H., (2003), Zur Professionalisierung des Mathematiklehrerwissens, In: Baum, M. & Wielpütz, H. (Eds.) *Mathematikunterricht in der Grundschule - ein Arbeitsbuch*. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, S. 195 – 219.

Dace BONKA, Zane KAIBE, Riga, Lettland

Mathematikwettbewerbe für die Schüler in Lettland

System für die vertiefte Mathematikbildung in Lettland

In Lettland ist ein breites System für vertiefte Mathematikbildung entwickelt. In diesem System werden folgende Aktivitäten entwickelt:

- mathematische Wettbewerbe für die Schüler der Grundschule:
  - (Wettbewerb für die Schüler der 4.Klasse “Tik vai cik?” (“*So viel oder wie viel?*”),
  - Wettbewerb für die jungen Mathematiken,
  - Klub von Professor Zifferchen,
- Mathematikolympiaden:
  - die Staatsolympiade (in drei Stufen)
  - die offene Mathematikolympiade (f ür alle)
- Direkt- und Fern-unterricht für Schüler,
- Weiterbildung für Lehrer,
- Richtung für Magisterstudium und Doktorstudium “Moderne Elementarmathematik und Mathematikdidaktik”,
- Vorbereitung der Lernmittel für die vertiefte Mathematikbildung

Die meisten von diesen Unterfangen werden von der „A.Liepas Fernunterrichts Mathematikschule der Lettischen Universität” unter der Leitung von Agnis Andžāns gesichert und geleitet.

Prinzipe der Zusammenstellung eines Wettbewerbsaufgabenkomplekts

Bei der Zusammenstellung der Aufgaben werden folgende Prinzipien eingehalten:

- Die erforderlichen Kenntisse für alle Aufgaben sind im Lehrprogramm enthalten.
- Die Aufgaben beziehen sich auf verschiedene Themen:
  - Algebra,
  - Geometrie,
  - Zahlentheorie,
  - Kombinatorik,

    - Algorithmentheorie.
- Sowohl **diskrete** wie auch **kontinuierliche Mathematik** sollen vertreten sein.
- Die Aufgaben sollen sowohl von **deduktiver,** als auch von **algorithmischer** Natur sein.
- Aufgabensatz soll sowohl ganz **leichte** Aufgaben, die alle Schüler lösen können, wie auch **komplizierte** Aufgaben enthalten.

In Lettland unterscheiden sich die Thematik und die Form von den Aufgaben in Olympiaden und Wettbewerben stark von den Aufgaben in den Mathematikstunden. Ein grosser Teil von den Aufgaben in Olympiaden besteht aus Aufgaben mit kombinatorischen Elementen, die auf realen Problemen basieren und von allgemeinen Methoden gelöst werden können, dagegen im Schulprogramm sind diese Themen nur kurz behandelt, und wegen der wenigen Stundenzahl wird die Theorie nicht in genügendem Umfang mit den Beispielen aus dem realen Leben unterstützt.

Übliche allgemeine bei der Lösung der Olympiadaufgaben angewandte kombinatorische Methoden sind:

- Invariantenmethode,
- Mittelwertmethode,
    - für die Grundschule wird häufig die Spezialfall Schubfachprinzip benüzt,
- Methode der Extremalen Elementen,
- die Interpretationsmethode (dür die Grundschüle häufig wird die Interpretationen mit Graphen benützt),
- mathematische Induktion.

Pädagogische Bedeutung der Mathematikwettbewerbe

- Mathematikwettbewerbe erwecken und verstärken Interesse für Mathematik.

Die Aufgaben werden oft in interessanter Form und Inhalt aufgegeben, um die Schuler fortreißen und herausfordern.

- Mathematikwettbewerbe entwickeln mathematische und logische Denkweise und regen kreative Sinnen an.

Während der mathematischen Wettbewerben und Olympiaden sind die Aufgaben nicht in der üblichen Form formuliert – so sollten die auch anders behandelt werden.

– Mathematikwettbewerbe entwickeln die Begründungsfähigkeit.

Die letzten Veränderungen im Schulprogram der Mathematik setzen die Bedeutung der Begründung und des Beweises herab, aber alle Antworte in der Mathematikolympiaden sollten begründet sein.

– Mathematikwettbewerbe gewöhnen an regelmäßige und systematische Arbeit.

Wettbewerbe haben 5 – 6 Runden während des Schuljahrs.

– Aus diesen Wettbewerben entsteht ergänzendes Lehrmaterial für die Arbeit mit begabten Schülern.

Beispiele

Aufgabe 1. *(Wettbewerb “So oder wie viel?”, 2010)*

Wie alt ist unsere Großmutter?

Sumiere alle Ziffern!

A 58 **B** 60 **C** 62 **D** 80 **E** 161

(Die Aufgaben findet man ja überall.)

Aufgabe 2. (Wettbewerb für die jungen Mathematiken, 2010)

Ingrida unternimmt eine Seereise. Wenn sie an Bord antritt, zeigt ihre Digitaluhr genau x Stunden und y Minuten. Die Seereise dauert x Stunden und y Minuten, und nach der Reise hat Ingridas Uhr y Stunden und x Minuten gezeigt. Wie lange dauerte Ingridas Seereise?

(x und y umstellen ist häufig sehr interessant.)

Aufgabe 3. *(Klub von Professor Zifferchen, 2010)*

Romas rechnet eine Aufgabe. Er hat eine falsche Verkürzung des Bruches $\frac{16}{64}$ gemacht, aber doch die richtige Antwort bekommen: $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$.

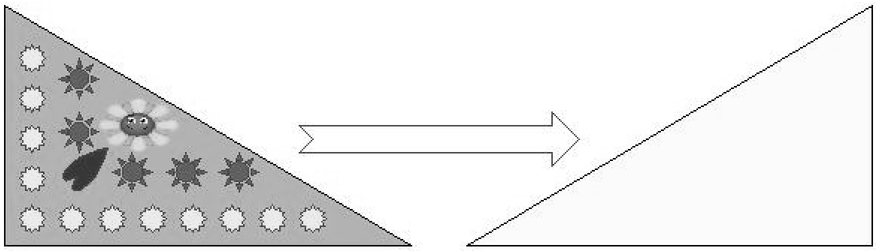
Finden Sie alle Brüche mit dieser Eigenschaft, deren Zähler und Nenner zweistellige Zahlen sind!

(Ende gut – alles gut!)

Aufgabe 4. *(Klub von Professor Zifferchen, 2009)*

Zane hat einen dreieckigen Kuchen gebacken (alle Seiten sind verschieden). Dace hat eine Schachtel gemacht, aber – wie schade! – sie ist spiegelsymmetrisch zum Kuchen.

Wie kann man Zanes Kuchen in Daces Schachtel einpacken? Kuchen darf man in Stückchen schneiden, aber es ist nicht erlaubt den Kuchen umzukehren.



(Die Übung macht den Meister!)

Aufgabe 5. *(Bezirkolympiade, Klasse 9, 2010)*

An einem Wettbewerb haben sich 9 Schlittensportlerinnen teilgenommen. Jede machte 4 Fahrten und die Zeiten wurden summiert. Die Siegerin war diejenige mit der kleinsten Summe.

Alle Sportlerinnen hatten verschiedene Resultate in jeder Fahrt und auch die Summen waren verschieden.

Maija hat an jeder Fahrt den Platz N eingenommen. Für welchen möglichst größten N hätte Maija doch die Möglichkeit den ersten Platz einzunehmen?

(Manchmal entscheidet eben die Stabilität!)

Anmerkungen

Die Arbeit, die in diesem Artikel beschrieben wurde, ist auch durch das ESF Projekt No. 2009/0223/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/008 unterstützt.

Literatur

A.Liepas Fernunterrichts Mathematikschule der Lettischen Universität: http://nms.lu.lv

Rita BORROMEO FERRI, Hamburg, WERNER BLUM, Kassel

Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe

Einführung und theoretischer Hintergrund

„Das „Ist-Gleich“ muss nach hinten, das ist immer so!“ (Lotta, Klasse 3)

Lotta, eine Schülerin aus unserer Studie, hat genaue Vorstellungen, wo das Gleichheitszeichen gesetzt werden muss – immer hinter dem Rechenterm, als reines Zuweisungszeichen. Ihre Aufgabe-Ergebnis-Deutung wird auch aus ihrem Testergebnis ersichtlich, u.a. dahingehend, dass sie Gleichungen der Form $x = a + b$ stets in die ihr bekannte Struktur $a + b = x$ umschreibt.

Die wissenschaftliche Diskussion zum Verständnis des Gleichheitszeichens bei Lernenden von der Vorschule bis zur Universität ist auf nationaler wie auf internationaler Ebene nicht neu. Viel zitiert ist die in den siebziger Jahren durchgeführte Studie von Behr, Erlwanger & Nichols (1980), in der 6- bis 12-Jährige zu ihrem Verständnis des Gleichheitszeichens befragt wurden, ebenso wie die Studie von Kieran (1981), die Vorschul-, Grund- und Sekundarstufenlernende sowie College Students umfasste. Die Methoden zur Erhebung der Vorstellungen der Probanden reichten von klinischen Interviews über Videographien bis zu standardisierten Tests mit offenen und geschlossenen Items. Die zentralen Ergebnisse der genannten und vieler weiterer Studien zeigen große Ähnlichkeiten und sollen in ihren Hauptpunkten kurz zusammengefasst werden:

- Das Gleichheitszeichen wird vornehmlich als *Handlungszeichen*, als „ergibt“ verstanden und nicht als *Beziehungsszeichen*; demnach wird z.B. eine Gleichung wie 3+2=2+3 nicht akzeptiert, sondern neu dargestellt als 3+2=5 und 2+3=5.
- Darstellungen wie 3=3, ohne Operationszeichen, werden nicht akzeptiert, da sie zu keiner Handlung anregen.
- Die Vorstellungen vom Gleichheitszeichens als Handlungszeichen ändern sich nicht wesentlich von der Grundschule bis in den Sekundarbereich (siehe auch Knuth et al. 2006), zum Teil sogar nicht bis in den tertiären Bereich.

Vor allem die Vernachlässigung, beide Vorstellungen vom Gleichheitszeichen, als Zuweisungs- und als Beziehungszeichen (u.a. Malle 1993) bereits in der Grundschule zu thematisieren, hat zur Folge, dass Fehlvorstellungen vom Gleichheitszeichen ein sicheres Verständnis beim Umgang mit Variablen und algebraischen Gleichungen behindern können (siehe auch Mevarech & Yitschak 1993). U.a. schon Winter (1996) hat betont, dass in der Grundschule beide Vorstellungen vom Gleichheitszeichen aufgebaut werden müssen, sowohl die genetisch primäre als Handlungszeichen als auch die kognitiv auf höherer Ebene angesiedelte als Relationszeichen, auch um den Übergang von der Arithmetik zur Algebra angemessen vorzubereiten. Der Wechsel zwischen beiden Vorstellungen wird von Lernenden in der Regel nicht alleine vollzogen und bedarf, so Malle (1993), extrinsischer Anstöße. Ein Blick in den Rahmenplan für die Primarstufe in Hamburg verdeutlicht die verbindliche Einführung des Gleichheitszeichens (im Sinne einer „Waage“) in den ersten beiden Jahrgängen der Grundschule. In den Rahmenplänen der weiterführenden Schulen wird jedoch nicht mehr spezifisch auf das Gleichheitszeichen eingegangen – seine Bedeutung und Verwendung (und damit auch eine mögliche Einseitigkeit) werden vorausgesetzt und nicht mehr gesondert thematisiert.

Die hier kurz aufgezeigten Hintergründe der genannten empirischen Studien zum Gleichheitszeichen haben uns dazu veranlasst, an jene Studien anzuknüpfen, um einen Eindruck davon zu erlangen, inwieweit sich an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe die Vorstellungen vom Gleichheitszeichen, auch im Zuge eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts, inzwischen womöglich geändert haben.

Hypothesen und Methoden der Studie

Folgende zentrale Hypothesen sollten überprüft werden:

- Die Vorstellung der Lernenden vom Gleichheitszeichen als Handlungszeichen hat in der Grundschule (immer noch) Priorität, aber nicht mehr in der Sekundarstufe.
- Im querschnittlichen Vergleich der Klassen 3-6 zeigen sich jeweils bedeutsame Unterschiede bei der Sicherheit im Umgehen mit dem Gleichheitszeichen.

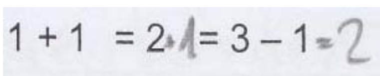
Die Studie umfasste insgesamt N=188 Lernende aus verschiedenen Grund- und Stadtteilschulen aus Hamburg. Davon waren 51 Kinder aus der 3. Klasse, 69 aus Klasse 4, 45 aus Klasse 5 und 23 aus Klasse 6.

Die Testitems wurden zum Teil aus bestehenden Studien entnommen und mit neu entwickelten Items ergänzt, damit verschiedene Facetten der Vorstellungen vom Gleichheitszeichen erhoben werden konnten. Der Test wurde auf 20 min konzipiert und besteht aus drei Blöcken. Im ersten Teil sollten die vorhandenen Vorstellungen zum Gleichheitszeichen erhoben werden. So mussten u.a. folgende Aussagen bewertet werden: a) Das

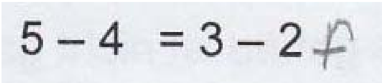
Gleichheitszeichen führt immer von einer Aufgabe zum Ergebnis. b) Es kann wie eine Waage verstanden werden; alles, was links davon steht, hat denselben Wert wie das, was rechts davon steht. Zudem sollten die Lernenden die Aussage „1+1=2“ in eigenen Worten ausdrücken. Dann folgten im zweiten Block so genannte „Kettenaufgaben“ wie z.B. „1+1=2+1=3+1=4“, die nach ihrer Richtigkeit beurteilt werden sollten, sowie Aufgaben, bei denen das Additions-, das Subtraktions- und das Gleichheitszeichen in Lücken eingesetzt werden mussten, z.B.: „3__5__9__1“. Letztgenannte Aufgaben beinhalten somit auch eine substantielle Problemlösekomponente. Im dritten Block gab es zwei Anwendungsaufgaben. Zusätzlich wurden vier Schüler- und drei Lehrerinterviews auf der Basis eines Leitfadens geführt. Die Items wurden alle mit 0/1 kodiert und mit dem dichotomen Raschmodell skaliert (Reliabilität: (.714).

Ergebnisse

Wie bereits im Eingangszitat verdeutlicht, repräsentiert Lotta den Großteil der Schülerinnen und Schüler der Studie, die das Gleichheitszeichen vorrangig als Handlungszeichen verstehen. Dass diese Priorität immer noch besteht, zeigte sich durch verschiedene Testitems. So gab es im ersten Testblock mit 67% eine deutliche Präferenz für Aussage a), bei der die Handlungsvorstellung betont wird. Auch bei der Verbalisierung von „1+1=2“ offenbarte ein Viertel der Probanden die „Ergibt-Vorstellung“, was sich u.a. so ausdrückte: „eins plus eins ergibt zwei“ oder „eins addiert mit eins ist zwei.“ Die Hypothese der starken Ergebnisorientierung zeigte sich vor allem bei den Resultaten im zweiten Testblock. Es zeigte sich, dass folgende Aufgabe die schwierigste für die Lernenden war: „3__5__9__1“, gefolgt von „1+1=2+1=3+1=4“. Das erstgenannte Item wurde nur von 13% der Lernenden richtig gelöst, zudem zeigten sich keine Effekte über die Klassenstufen hinweg, d.h. die Sechstklässler waren nicht besser als die Drittklässler. Generell konnte nur ein statistisch signifikanter Unterschied mit .18 zwischen Klasse 3 und 4 festgestellt werden, nicht aber zwischen den Klassen 4 und 5 sowie zwischen 5 und 6. Dies widerlegt somit die eingangs genannte Hypothese, dass im Sekundarstufenbereich die Handlungsvorstellung nicht mehr dominiert. Ein genauerer Blick in die Testbögen der Lernenden offenbart dabei nicht nur, ob die Items richtig oder falsch gelöst sind. Fast noch aufschlussreicher war der Eingriff der Schülerinnen und Schüler in die Gleichungen, damit diese ihren Vorstellungen von der Bedeutung des Gleichheitszeichens entsprechen, wie das obige Beispiel eines Fünftklässlers zeigt. Interessant ist z.B. auch die folgende, von einem Drittklässler als falsch markierte Gleichung, die offen-



bart, wie sehr der Schüler das Zuweisungszeichen verinnerlicht hat. Das



obige Zitat von Lotta war das Ende einer vorhergehenden Konversation, bei der sie vom Interviewer gefragt wurde, ob man auch „11 = 5 + 6" schreiben kann. Sie zögerte und antwortete. „Nein, ich glaub' nicht. Das ist doch unlogisch. Das ist doch keine Aufgabe und ein Ergebnis hat die auch nicht."

Resümee

Die Ergebnisse unserer Untersuchung fassen wir wie folgt zusammen:

- Die Vorstellung der Lernenden vom Gleichheitszeichen als Handlungszeichen hat (immer noch) Priorität, auch in Klasse 5/6.
- Im querschnittlichen Vergleich der Klassen 3-6 zeigen sich einerseits sichtbare Unterschiede beim Umgehen mit dem Gleichheitszeichen, andererseits noch keine substantiellen Veränderungen bei den Vorstellungen zum Gleichheitszeichen.

Die Konsequenzen für Schule und Lehrerausbildung liegen auf der Hand: Zum einen die bewusste Vermittlung von „=" als Relationszeichen schon in der Grundschule (Winter 1982 spricht von einer „Algebraisierung des Arithmetikunterrichts") und ein ebenso bewusstes Wiederaufgreifen in der Sekundarstufe, und zum anderen eine Bewusstmachung dieser Problematik, v.a. auch im Hinblick auf Diagnostik, und ein Aufzeigen passender Lernumgebungen für die Klassen 3-6 in der Lehreraus- und -fortbildung.

Literatur

Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1980): How children view the equal sign. In: *Mathematics Teaching*, 92, 13-18.

Malle, G. (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg

Mevarech, Z.; &Yitschak, D. (1993): Students: misconceptions of equivalence relationship. In: Hershkowitz, R., *Proceedings of PME 7 (Israel)*, 313-318.

Kieran, C. (1981): Concepts Associated with the Equality Symbol. In: *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

Knuth, E. et al. (2006): Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.

Winter, H. (1982): Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. In: *mathematica didactica* 5(4), 185-211

Winter, H. (1996): *Mathematik entdecken*. Frankfurt a.M.: Cornelsen

Thomas BORYS, Karlsruhe

Codes und Verschlüsselungen integrativ im Mathematikunterricht: Vorschlag für ein Curriculum

Der berühmte französische Diplomat und Kryptograf Blaise de Vigenère (1523-1596) schreibt in seinem wichtigsten Werk „Traicté des Chiffres“ von 1586: „Toutes les choses de ce monde ne sont qu’un vray chiffre.“ Aus der Sicht des modernen Menschen ist dieser Satz heute bedeutender denn je, so finden sich im Alltag sehr viele Codierungen z. B. Strichcodes, EAN, ISBN, Brailleschrift. Neben diesen offensichtlichen Codierungen gibt es im Umfeld der modernen Medien eine Vielzahl von Codierungen, die eher versteckt sind z. B. ASCII-Code, Unicode. Des Weiteren gibt es in diesem Zusammenhang auch Codierungen, die das Ziel der Geheimhaltung von Informationen haben z. B. https, Onlinebanking. Im Allgemeinen bezeichnet man diese als Verschlüsselungen. Ziel dieses Artikels ist der Vorschlag eines Curriculums zur integrativen Behandlung der Themen Codierung und Kryptologie im Mathematikunterricht.

1. Didaktische Ausgangspunkte

Der erste Ausgangspunkt bildet das genetische Prinzip. Dieses bezeichnet Erich Wittmann in seinem populären Werk zur Mathematikdidaktik „Grundfragen des Mathematikunterrichts“ als „oberstes Unterrichtsprinzip“. Dank dieser Bedeutung für den Unterricht hat es eine sehr lange Tradition in der pädagogischen und didaktischen Diskussion. Dem genetischen Prinzip begegnet man in verschiedenen Facetten beispielsweise in Form des historisch-, organisch-, logisch- und psychologisch-genetischen Prinzips. Vor allem das historisch-genetische Prinzip wird bei der Erstellung des Curriculums berücksichtigt. Darunter versteht man beispielsweise nach Felix Klein: „Er [der Unterricht] sollte, an die natürliche Veranlagung der Jugend anknüpfend, sie langsam auf demselben Wege zu höheren Dingen und schließlich auch zu abstrakten Formulierungen führen, auf dem sich die ganze Menschheit aus ihrem naiven Urzustand zu höheren Erkenntnis gerungen hat!“ (Klein 1908).

Der zweite Ausgangspunkt bildet die Feststellung, dass man mit Inhalten aus der Codierung und Kryptologie in der Lage ist, die fundamentalen Ideen der Mathematik zu thematisieren (vgl. dazu Borys 2009, 2010), daher bietet sich gerade der Mathematikunterricht für die integrative Behandlung dieser Thematik an.

Der dritte Ausgangspunkt bildet die folgende Überlegung von Heinrich Winter: „Der Mathematikunterricht sollte anstreben, ... Erscheinungen der

Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen, ...“ (Winter 1995). Um diesem Anspruch gerecht zu werden, fordern die GDM und die MNU in einer Stellungnahme zur „Empfehlung der Kultusministerkonferenz zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlichen-technischen Bildung“ von 2010: „Ein zeitgemäßer Mathematikunterricht muss die von digitalen Medien geprägte Lebenswelt von Schülerinnen und Schüler berücksichtigen“. (Weigand 2010) Das bedeutet, dass die Thematik Codierung und Kryptologie entsprechend beachtet werden muss. Diesen Techniken, bedienen sich täglich die „modernen Menschen“, allerdings ohne sich dessen bewusst zu sein. Des Weiteren sind diese Themen sehr mathematikhaltig, Hans Werner Heymann meint dazu, „Diejenige Mathematik, auf der unser Lebensstandard beruht, ist in der Technik, die wir nutzen, sozusagen unsichtbar eingebaut. Sie macht sich selbst, aus der Sicht des Techniknutzers, überflüssig.“ (Heymann 1996) Timo Leuders meint dazu, dass an exemplarischen Beispielen eine Weltorientierung vermittelt werden soll, die die Zusammenhänge zwischen Mathematik und Technologie wieder offenbar werden lassen. (Leuders 2003) Genau dieses Ziel ist mit dem folgenden Curriculum beabsichtigt. Weitere Ausgangspunkte sind das Spiralprinzip nach Bruner, Vernetzungen von Mathematik mit anderen Gebieten, etc.

2. Vorstellung des Curriculums

Für die integrative Behandlung der Codierung und Kryptologie im Mathematikunterricht ist gedacht, dass sich diese Themen wie ein roter Faden durch den Mathematikunterricht der Klassen 5-12 ziehen.

Das Kernziel ist in Form einer Leitidee formuliert: *Codierung und Kryptologie sind fundamentale, historisch bedeutsame und facettenreiche Kulturtechniken mit wichtigen Anwendungen in der modernen Kommunikations- und Wissensgesellschaft.*

Der Kursus beginnt in den Klassen 5/6 mit einfachen binären Codierungen, z. B. der Blindenschrift und dem ASCII-Code. Bei den genannten Beispielen handelt es sich um Codes, die im Alltag der Schüler vorkommen und einen starken Bezug zum Binärsystem aufweisen. Der Morsecode stellt in diesem Zusammenhang ein weiteres Beispiel dar, allerdings weist dieser keinen Alltagsbezug auf. Wenn man die Idee der Codierung sehr eindrucksvoll unterstützen möchte, bieten sich das Flaggenalphabet oder ein Fackelcode an. Schließlich wird das Thema Codierung durch die Codes im Supermarkt (EAN) und im Buchhandel (ISBN) sehr alltagsnah abgerundet.

Dabei ist aus der Seite der Codierungstheorie vor allem die Fehlererkennung durch die Prüfzifferberechnung hervorzuheben.

Klassenstufe	Thema	mathematische Inhalte
5/6	einfache Codierungen: – Blindenschrift, *Morsecode*, ASCII – *Flaggenalphabet* – EAN/ISBN kombiniert mit Strichcodes einfache Transpositionsverfahren: – Anagramme, Skytale – Fleissner-Schablone einfache Substitutionsverfahren (monoalphabetische Verschlüsselungen): – z. B. Freimaurerverschlüsselung – Cäsar-Verschlüsselung einfache Kryptoanalyse homophone Verschlüsselungen	Binärsystem geometrische Mustererkennung Grundrechenarten Permutation geometrische Abbildungen Division mit Rest Häufigkeitsanalyse
7/8	Polyalphabetische Verschlüsselung – Vigenère-Verfahren – Einmalschlüssel (One-Time-Pad) – Kasiski-Test	Modulorechnung
9/10	Huffman-Codierung Schlüsselaustauschverfahren nach Diffie-Hellman	Wurzelbäume Potenzieren, Modulorechung
11/12	RSA-Verfahren El Gamal-Verschlüsselung	Potenzieren, Modulorechnung

Übersicht des Curriculums zur integrativen Behandlung der Codierung und Kryptologie mit exemplarischen Bezügen zu mathematischen Inhalten.

Im ersten Durchgang durch die Kryptologie sollten die beiden Basisverschlüsselungen Transposition und Substitution thematisiert werden. Die Reihenfolge, ob Transposition oder Substitution zuerst behandelt wird, spielt keine Rolle. Beginnt man beispielsweise mit den Transpositions-verschlüsselungen, bieten sich Anagramme und die Skytale als Einstieg in dieses Thema an. Auch die Gartenzaunmethode und geometrische Verschlüsselungen sind dafür geeignet. Allerdings ist die Skytale wegen ihres tatsächlich in der Geschichte nachgewiesenen Einsatzes zu bevorzugen. Erst in einem zweiten Schritt sollte die Fleissner-Verschlüsselung behandelt werden. Diese ist gerade wegen ihrer Bezüge zur Mathematik genauer gesagt zur Geometrie sehr interessant. Zur Einführung in die Substitutionsverfahren sind Verschlüsselungen mit Fantasiezeichen sehr geeignet, da sie in besonderem Maße den Rätselinstinkt der Schüler wecken und andererseits ihre Kreativität beim Erfinden eigener Zeichen fördern. Erst in einem zweiten Schritt sollte die Cäsar-Verschlüsselung behandelt werden, da es sich hierbei um eine systematische Substitution handelt. Durch eine einfache Häufigkeitsanalyse und homophoner Verschlüsselung wird der erste Durchgang durch die Kryptologie abgerundet. Zur Fortsetzung der Kryptologie in den Klassen 7-8 empfiehlt sich das Vigenère-Verfahren, es knüpft passgenau an die Idee des Cäsar-Verfahrens aus den Klassen 5/6 an. Die Verschlüsselung mit Einmalschlüsseln ist in diesem Zusammenhang das Paradebeispiel für einen unknackbaren Code und sollte deshalb nicht vergessen werden. Die Idee der Kryptoanalyse wird durch den Kasiki-Test passend fortgesetzt. Durch die bisherigen Themen in den unteren Klassen ist die Behandlung symmetrischer Verschlüsselungen abgeschlossen. Weitere Verfahren, wie z. B. DES oder AES, bringen nicht wesentliche neue Ideen, sie bedienen sich auch nur der Substitution und der Transposition als Verschlüsselungsmethode. Die ASCII-Codierung und der Morsecode werden sehr gut durch den Huffman-Code in den Klassen 9/10 weitergeführt und rücken vor allem den Aspekt der Datenkompression in den Fokus der Schüler. Außerdem bedient man sich dabei moderner mathematischer Hilfsmittel wie Graphen. Zur Fortführung der Kryptologie ist das Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch-verfahren geeignet, da es den alten kryptologischen Traum, die öffentliche Vereinbarung eines geheimen Schlüssels verwirklicht und ihm eine besondere mathematische Modellierung zugrunde liegt. Schließlich wird durch die RSA- und El Gamal-Verschlüsselungen in der Oberstufe (Klasse 11-12), die in den alltäglichen Computeranwendungen vorkommen, der integrative Kursus durch die Kryptologie abgerundet.

Literatur

Borys, T. (2009): Codierungen im Spiegel der fundamentalen Ideen der Mathematik. In: Beiträgen zum Mathematikunterricht

Borys, T. (2010): Welche Vernetzungsmöglichkeiten bietet die Kryptologie? In: Beiträgen zum Mathematikunterricht

Heymann, H.W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Aus der Reihe: Studien zur Schulpädagogik und Didaktik Band 13, Weinheim und Basel: Beltz Verlag

Klein, F. (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Teil 1: Arithmetik, Algebra, Analysis. Leipzig: B. G. Teubner

Leuders, T. (Hrsg.) (2003). Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Scriptor

Weigand, H.-G., & Langlet, J. (2010). Stellungnahme der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik ..., Mitteilungen der GDM, 89, S. 32-33

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Bezugsquelle: Universität Bayreuth
URL: http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/46/muundallgemeinbildung.pdf
(Stand: 24.02.2011)

Wittmann, E. (1981). Grundfragen des Mathematikunterrichts (6. Auflage). Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH

Birgit BRANDL, Augsburg

Das räumliche Vorstellungsvermögen im Mathematikunterricht fördern

1. Empirische Befunde zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Unter räumlichem Vorstellungsvermögen (Synonyme: Raumvorstellung, Raumvorstellungsvermögen) versteht man die „Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken“ (Wölpert, 1983, S. 9). Raumvorstellung wird in fast allen faktorenanalytischen Intelligenzmodellen als separater Faktor ausgewiesen und gilt als einer der am besten untersuchten Fähigkeiten menschlicher Begabung (Maier, 1999a).

Ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen ist nur zum Teil angeboren (Maier, 1996c) und muss im Verlauf der weiteren Entwicklung erlernt werden (Maier, 1996b). Bis zu einem Alter von 9 bis 10 Jahren sind ca. 50% und bis zum Alter von 12-14 Jahren ungefähr 80% der Raumvorstellungsfähigkeit (bezogen auf die Leistung von Erwachsenen) entwickelt (Bloom, 1979, zitiert nach Wölpert, 1983). Da die Steigerung des räumlichen Vorstellungsvermögens, auch im Vergleich zu anderen Intelligenzfaktoren, in den Klassen 5 bis 8 am größten ist, erscheint eine besondere Förderung im Mathematikunterricht in diesen Jahrgangsstufen sinnvoll und wichtig (Müller, 1986).

Über 120 Studien belegen, dass Frauen eine schlechter ausgeprägte Raumvorstellung haben als Männer (Maier, 1999a). Damit sind die Geschlechtsunterschiede auf diesem Gebiet der Mathematik vergleichsweise stark ausgeprägt. Allerdings lassen sich die Geschlechtsunterschiede in Bezug auf die Raumvorstellung erst ab der Pubertät beobachten (Müller, 1986). Studien belegen interessanterweise eine stärkere Leistungssteigerung weiblicher Probanden (im Vergleich zu den männlichen Teilnehmern) durch Training (Maier, 1999a). Wichtig festzuhalten ist außerdem, dass starke Geschlechtsunterschiede vorwiegend bei Speed-Tests, bei denen die Bearbeitungszeit begrenzt ist, jedoch nicht so sehr bei Power-Tests, zu deren Bearbeitung kein zeitliches Limit vorgegeben wird, beobachtet werden konnten (Maier, 1999a). Für den Schulalltag bedeutet dies, dass man den Schülerinnen und Schülern gerade im Bereich der Förderung der Raumvorstellung stets ausreichend Zeit gewähren sollte.

Untersuchungen zum Geometrieunterricht zeigen, dass Raumvorstellung und Raumgeometrie im Geometrieunterricht eine untergeordnete Rolle spielen und der Schwerpunkt auf der zweidimensionalen Geometrie liegt (Maier, 1999b). In der Raumgeometrie dominieren Berechnungen, während formenkundliche und zeichnerische Inhalte stark vernachlässigt werden (Maier, 1999b). Die am intensivsten behandelten Inhalte der Raumgeometrie fördern also die Entwicklung der Raumvorstellung nur sehr unzureichend (Maier, 1997).

Daher stellt sich nun die Frage, wie ein Geometrieunterricht aussieht, der das räumliche Vorstellungsvermögen fördert. In Studien wurde gezeigt, dass ein Training, das auf handlungsorientierten Aktivitäten mit Modellen und Medien basiert, starke bis sehr starke Effekte zeigt (Maier, 1996a & Maier, 1997). Die Trainingsphase darf nicht zu kurz sein und die Inhalte müssen echten räumlichen Charakter haben. Bei der Einführung neuer Körper sollte so z.B. der Schwerpunkt auf deren räumlichen Eigenschaften, und nicht auf den neuen Bezeichnungen liegen.

2. Fördermöglichkeiten in der Praxis

Von den zahlreichen Möglichkeiten, die Raumvorstellung im Geometrieunterricht angemessen und effektiv zu fördern, sollen hier die Möglichkeiten der Förderung mittels Kopfgeometrie mit Würfeln und der Einsatz von Pentakuben näher beschrieben werden.

Unter **Kopfgeometrie** versteht man das Lösen geometrischer Aufgaben im Kopf. Dies „erfordert die Fähigkeit, sich geometrische Gebilde vorstellen zu können, ihre Lage, ihre Größe und ihre Form zu variieren, sie zu kombinieren und dabei das Wissen über sie anzuwenden“ (Gimpel, 1992, S. 257). Zu Beginn sollte Kopfgeometrie zunächst handelnd mit Material betrieben werden. Langsam kann dann eine Loslösung vom konkreten Tun erfolgen.

Eine schöne kopfgeometrische Aufgabe, die z.B. zu Beginn einer Mathematikstunde einige Minuten lang durchgeführt werden kann, ist die folgende: die Lehrkraft beschreibt die Ausgangsposition eines Würfels („Die Drei liegt vorne, die Sechs oben und die Fünf rechts.“) und gibt eine Kippfolge vor (z.B. „Nun wird der Würfel zuerst nach rechts und dann nach hinten gekippt.“). Die Frage ist nun, welche Zahl am Ende oben liegt. Erfahrungen aus dem Unterricht zeigen, dass Schülerinnen und Schüler viel Freude an dieser Aufgabe haben und die Kippfolgen mit zunehmender Übung immer komplizierter werden können. Neben der Raumvorstellung werden zugleich Merk- und Konzentrationsfähigkeit trainiert.

Auch Würfelnetze eigenen sich für kopfgeometrische Aufgabenstellungen. Mittels sechs quadratischen Notizzetteln lassen sich 35 verschiedene Anordnungen finden, bei denen je zwei der sechs Quadrate mindestens eine Kante gemeinsam haben. Unter diesen 35 Anordnungen lassen sich nun die elf nicht-kongruenten Würfelnetze identifizieren (Ilgner, 1974).

Weiter kann an dieser Stelle eine Aufgabenstellung zur Vernetzung von Raumvorstellung und Kombinatorik im Unterricht behandelt werden (Besuden & Flachsmeyer, 1996): Um aus dem in Abb. 1 gezeigten Würfelnetz wieder einen Würfel herzustellen, benötigt man sieben Klebelaschen. Die Frage ist nun, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, diese Laschen anzubringen. Lässt man kongruente Würfelnetze zu (denkt sich die Quadratseiten also als unterscheidbar), kommt man auf $2^7 = 128$ Möglichkeiten. Lässt man nur nicht-kongruente Würfelnetze zu, verringert sich die Anzahl auf 72 Möglichkeiten.

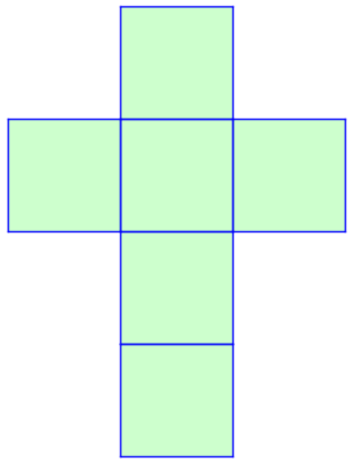


Abb. 1

Auch kopfgeometrische Aufgaben, bei denen den Lernenden keine Hilfsmittel zur Verfügung gestellt werden und die rein mündlich vorgetragen werden, sind eine reizvolle Übung. Die folgende Aufgabe stammt aus Gimpel (1992): „Man stelle sich in der Grundfläche eines Würfel eine Diagonale und in seiner Deckfläche eine zweite Diagonale vor, die zur ersten nicht parallel, sondern windschief verläuft. Was für ein Körper entsteht, wenn man jeden Eckpunkt der einen Diagonale mit den beiden Eckpunkten der anderen Diagonale verbindet?“ (ebd., S. 262).

Neben kopfgeometrischen Aufgaben lassen sich **Pentakuben** vielfältig zur Förderung der Raumvorstellung einsetzen. Pentakuben sind zusammengesetzte geometrische Körper aus fünf kongruenten Würfeln, bei denen je zwei Würfel immer eine Seitenfläche gemeinsam haben (vgl. Abb. 2). Insgesamt gibt es 29 verschiedene Anordnungen von Pentakuben.

Zum Kennenlernen der Pentakuben ist es sinnvoll, die Lernenden erst einmal möglichst viele verschiedene Pentakuben finden zu lassen, diese zu klassifizieren und auf Symmetrie (z.B. mit Spiegelkacheln als Hilfsmittel) untersuchen zu lassen. Eine Übung, die die Raumvorstellung schult, ist das Zeichnen von Pentakuben im gewöhnlichen Schrägbild oder auf Punktepapier. Der Schwierigkeitsgrad dieser Übung lässt sich steigern, wenn die Pentakuben aus dem Gedächtnis gezeichnet oder vor dem geistigen Auge gedreht werden müssen, bevor sie zu Papier gebracht werden.

Weiter bieten sich das Bauen von Gebäuden aus Pentakuben (vgl. hierzu Künzell, 1995 und Brandl & Brandl, 2010) und das Spiel „Pentakubenquartett“ als förderliche Übungen an (Brandl & Brandl, 2010). Für die einzelnen Quartette wurde jeweils ein Pentakubenstein aus vier verschiedenen Perspektiven (vgl. Abb. 2) fotografiert. Aufgabe ist es nun, wie beim gewöhnlichen Quartettspiel die vier zusammengehörigen Karten zu finden. Kopiervorlagen für dieses Spiel finden sich in Brandl & Brandl (2010).

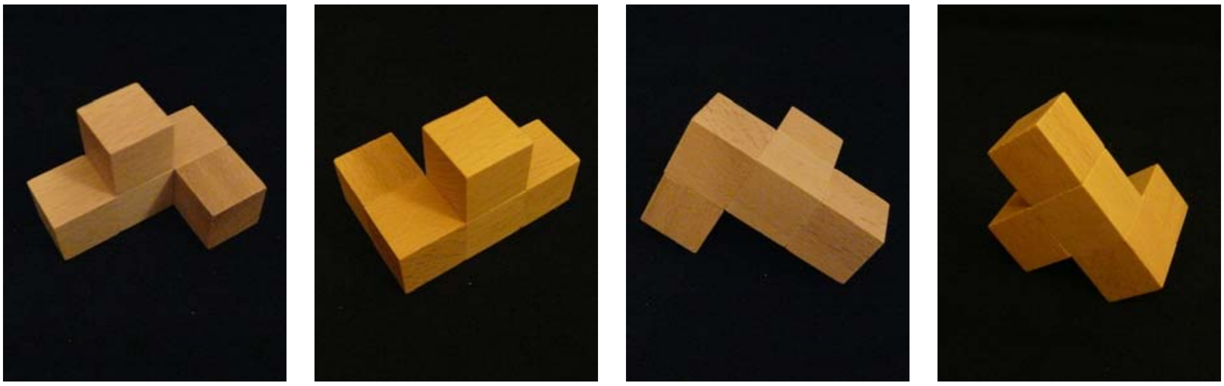


Abb. 2 (Fotos: B. Brandl)

Literatur

Besuden, H. & Flachsmeyer, J. (1996). Der gefaltete Würfel (Folge 1). Mathematik in der Schule, 34 (10), 546-550.

Brandl, B. & Brandl, M. (2010). Kopfakrobatik mit Pentakuben. In V. Ulm (Hrsg.), Mathematische Begabungen fördern (S. 68-77). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Gimpel, M. (1992). Was ist und was soll Kopfgeometrie. Mathematik in der Schule, 30(5), 257-265.

Ilgner, K. (1974). Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens von Klasse 1 bis 10. Mathematik in der Schule, 12, 693-714.

Künzell, E. (1995). Spiele mit Pentakuben (5. Auflage). Aachen: E. Künzell.

Maier, P.H. (1999a). Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriß des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen (1. Aufl.). Donauwörth: Auer.

Maier, P.H. (1999b). Raumgeometrie mit Raumvorstellung – Thesen zur Neustrukturierung des Geometrieunterrichts. Der Mathematikunterricht, 45(3), 4-17.

Maier, P.H. (1997). Raumvorstellung schulen – Geometrische Körper selber bauen. Beiträge zum Mathematikunterricht, 347-350.

Maier, P.H: (1996a). Kopfgeometrie – Handlungsorientierte und visuelle Aufgabenstellungen. Mathematik in der Schule, 34, 276-284.

Maier, P.H. (1996c). Die Trainierbarkeit der Raumvorstellung in der Hauptschule. Pädagogische Welt, 50(2), 50-54.

Maier, P.H. (1996d). Ist das räumliche Vorstellungsvermögen trainierbar? Grundschule, 3, 9-11.

Müller, K.P. (1986). Raumvorstellung. Was ist das, und warum ist sie wichtig? Pädagogische Welt, 40, 23-26.

Wölpert, H. (1983). Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht. Der Mathematikunterricht, 6, 7-42.

Matthias BRANDL, Erlangen-Nürnberg

Manifestation mathematischer Begabung an einem Oberstufeninternat für Hochleistende

Ausgehend von einem systemtheoretischen Verständnis des offenen Konstrukts „Mathematische Begabung“ wurde dessen Manifestation in der Umwelt eines Oberstufeninternats für hochleistende Schülerinnen und Schüler untersucht. Dafür wurden qualitative Methoden in Form von problemzentrierten Lehrer- und Schülerinterviews mit quantitativen Fragebogen-Erhebungen kombiniert.

1. Systemtheoretische Sichtweise

Aus der globalen Sichtweise eines *anthropologischen Ansatzes* (Sternberg 1996) in Bezug auf mathematisches Denken widerspricht auch Zimmermann (1992) im Rahmen eines Popperschen Falsifikationsansatzes der landläufigen Auffassung, dass mathematische Begabung eine fest umrissene menschliche Eigenschaft sei, die man mehr oder weniger hat oder nicht. Stattdessen würden „unterschiedliche Vorstellungen über Mathematik nicht nur unterschiedliche mathematische Begabungen als Grundlage, sondern auch entsprechende Konzeptionen über mathematische Begabung zur Folge haben“ (Zimmermann 1992, S. 19). Diese Sichtweise lässt sich einbetten in einen systemtheoretischen Begriffsapparat (Brandl 2010, 2011). Da unterschiedliche Vorstellungen von Mathematik entsprechend unterschiedliche Konzepte mathematischer Begabung konstituieren bzw. konstruieren können, wird zum einen eine Bindung zwischen der „Welt der Mathematik“ und dem *Konstrukt* „Mathematische Begabung“ nahe gelegt, zum anderen muss zwischen „Mathematik“ und „Mathematischer Begabung“ unterschieden werden. Durch diese beobachtbare Differenz kommt im Sinne Luhmanns ein Beziehungsgeflecht zwischen einem *System* und dessen *Umwelt* zustande. Zur Beschreibung der Beziehung zur Umwelt verwendet Luhmann den auf Maturana zurückgehenden Begriff der *strukturellen Kopplung*. Strukturell gekoppelte Systeme sind aufeinander angewiesen – und bleiben zugleich füreinander Umwelt. Aufgrund der in (Zimmermann 1992) postulierten und im Sinne von Foucault verstandenen Einflussmöglichkeit der vorherrschenden mathematikphilosophischen Strömung auf die Konzeption einer mathematischen Begabung kann es zu einer Strukturveränderung des Systems wegen der strukturellen Kopplungen mit dessen Umwelt kommen. Dadurch ist „Mathematische Begabung“ *viabel*, d.h., wie immer sich das System strukturell ändert, es wird immer den einschränkenden Bedingungen der Umwelt gerecht werden (Krieger 1996, S. 41). Diese systemtheoretische Viabilität entspricht damit der aus wissenschaftstheoretischer und psychologischer Sicht geforderten Offenheit von Konstrukten (Brocke & Beauducel 2001). Desweiteren stellt sich die Situation aus systemtheoretischer Sicht so dar, dass die Mathematik für das System „Mathematische Begabung“ eine so genannte *Umwelt 2* ist, „das heißt die ‚Welt’, die für das System einen Sinn hat. […] Sie ist der ‚Raum’, innerhalb dessen Konditionierungen und Relationierungen möglich sind“ (Krieger 1996, S. 81). Die restlichen Umweltfaktoren, die zwar ebenfalls konstruierend auf das System „Mathematische Begabung“ wirken können, allerdings nicht zwingend sinnstiftend dafür sind, sammeln sich in *Umwelt 1*.

Die potenziell in einem zu untersuchenden Feld vorherrschende Sichtweise im Hinblick auf „Mathematische Begabung“ erfordert somit eine empirische Auseinandersetzung mit den Protagonisten in deren Wechselspiel sich dieses viable Konstrukt manifestiert.

2. Feld und methodisches Vorgehen

Mit dem Ziel eines optimal angepassten Förderkonzepts für die Schülerschaft eines Oberstufen-Internats für hochleistende Schülerinnen und Schüler wurden sämtliche Lehrkräfte der Fachschaft Mathematik in Form von problemzentrierten Einzelinterviews zu verschiedenen Aspekten der vorherrschenden Situation im Mathematikunterricht befragt. Ebenso fanden Schüler-Gruppendiskussionen zu denselben Themen statt, getrennt nach leistungsschwachen und leistungsstarken Schülerinnen und Schülern der Klassen 11 und 12. Flankierend erhielten die Schülerinnen und Schüler dieser Jahrgangsstufen einen Fragebogen u.a. hinsichtlich ihres mathematischen Interesses, ihrem Bild von Mathematik, ihrer Selbsteinschätzung, …

3. Manifestation von „Mathematischer Begabung“

Die folgende Tabelle illustriert mittels Pfeilen die strukturelle Kopplung zwischen dem Bild, das der interviewte Lehrer A von Mathematik hat, und dessen Sichtweise von Mathematischer Begabung:

Bild von Mathematik	Mathematische Begabung
Philosophische Überlegungen	Betonung des Sinnaspekts von Problemen
Logisch klar definiertes und auch kommunikatives intellektuelles reizvolles Spiel	Interesse an alternativen Definitionen und den Konsequenzen
Intellektuell reizvolle Gedankenwelt	
Ziel: intellektueller Spaß, Freude	Ästhetisches Empfinden und Freude daran

4. Exemplarische Resultate

Im Hinblick auf den Unterschied zwischen mathematisch hochleistenden und mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern gilt der in Abb. 1 illustrierte Zusammenhang (vgl. Brandl 2011), der die systemtheoretische Sichtweise integriert und dadurch eine Erweiterung der Schemata in Heller & Perleth (2007) und Ulm (2010) darstellt.

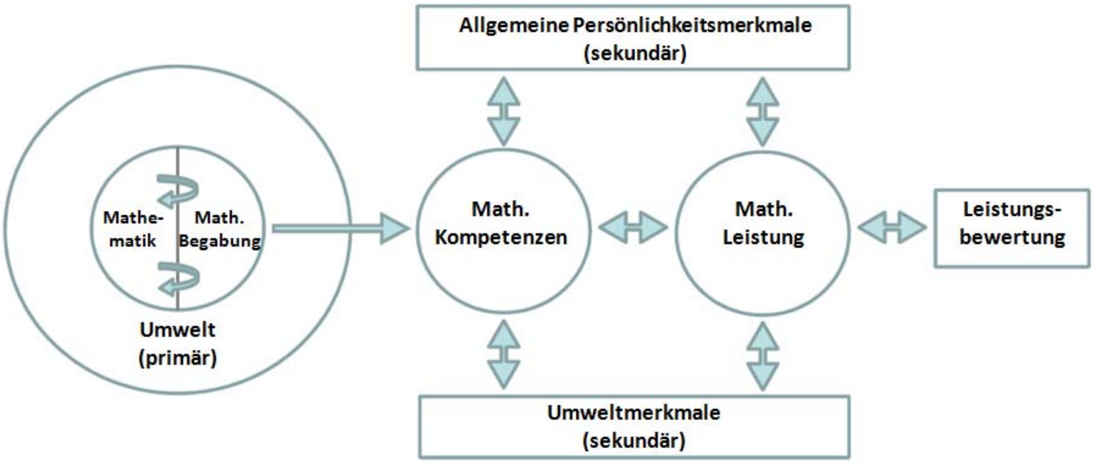


Abb. 1: Kausalzusammenhang zwischen math. Begabung und Leistung

Im Rahmen der Lehrer-Interviews wurden hochleistende Schülerinnen und Schüler mit folgenden Worten beschrieben: *wollen eine exakte, genau Behandlung mathematischer Themen im Unterricht; wollen aktiv sein; sind motiviert (überwiegend intrinsisch); können im Team arbeiten; setzen sich einem introjezierten Leistungsdruck aus; haben extreme Anforderungen an sich; haben keine Scheu davor, selbständig zu arbeiten; wollen sich nicht isolieren; wollen im Unterricht nichts verpassen; sind in allen Fächern gut; sind eher weniger unangepasst; sind interessiert; sind sehr höflich, respektvoll, sensibel; sind sowohl auf der emotionalen wie auch auf der kognitiven Ebene äußerst stur; eignen sich weniger als Angestellte; sind Lehrer-orientiert; sind sehr pflichtbewusst; sind resistent gegenüber psychischem Stress; sind auf Sicherheit aus; wollen gute Klausuren schreiben.*

Dahingegen zeichnen sich mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler durch zusätzliche und andere Attribute aus: *besitzen mathematische Intuition, erahnen den übergreifenden Gedankengang; interessieren sich für alternative Definitionen und die damit zusammenhängenden Konsequenzen; intensiveres ästhetisches Empfinden und Freude darüber als bei anderen; sind mit hoch abstrakten Objekten zufrieden; sind kreativ; zeigen Neugierde; können querdenken; sehen innermathematische Zusammenhänge; finden unerwartete Lösungen für Probleme; sind das Gegenteil von brav.*

Als besonders interessantes Resultat aus den Schülerfragebögen stellte sich heraus, dass zum einen so gut wie durchwegs die eigene Einstellung positiver als die der aktuellen Klassenkameraden gesehen wird, und zum anderen die Einstellung der Gesellschaft gegenüber Mathematik positiver beurteilt wird als die der Klassenkameraden in der Regelschule, aus der auf das Internat gewechselt wurde, vgl. Abb. 2.

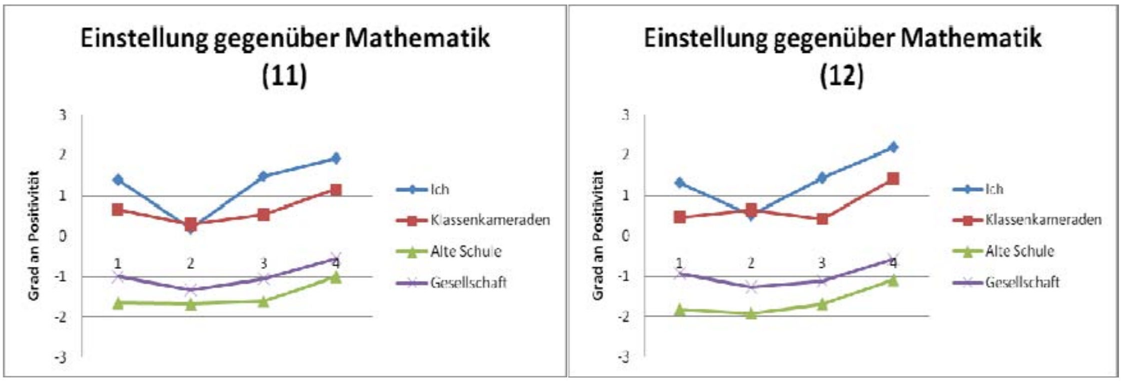


Abb. 2: Aufgetragener Grad an Positivität der Einstellung gegenüber Mathematik in Klasse 11 (links) und 12 (rechts) mit den Kategorien 1 (hässlich --- schön), 2 (schwierig --- leicht), 3 (langweilig --- spannend) und 4 (unverständlich --- logisch).

Literatur

Brandl, M. (2011): High attaining versus (highly) gifted pupils in mathematics: a theoretical concept and an empirical survey, accepted Nov. 21st , 2010, for publication in the proceedings of CERME 7 (url: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/7/Brandl_Paper_CERME7_WG7.PDF)

Brandl, M. (2010): A Constructive Approach to the Concept of Mathematical Giftedness based on Systems Theory, paper presented at the 6th International Conference on Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students (url: http://nms.lu.lv/mcg_10/2day-12/Matthias_Brandl.pdf), Riga, Latvia, submitted for publication in the proceedings, 2010, August 3.

Brocke, B. & Beauducel, A. (2001): Intelligenz als Konstrukt. In: E. Stern & J. Guthke (Hrsg.): Perspektiven der Intelligenzforschung. Lengerich: Pabst Science Publishers, S. 13-42.

Heller, K. & Ziegler, A. (2007) (Hrsg.). Begabt sein in Deutschland. Berlin: LIT Verlag.

Krieger, D.J. (1996): Einführung in die allgemeine Systemtheorie. München: W. Fink Verlag.

Sternberg, R. J. (1996): What is Mathematical Thinking? In: R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (1996) (Eds.): The nature of mathematical thinking. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Publishers, S. 303 – 318.

Ulm, V. (2010): Mathematisches Denken und mathematische Begabung. In V. Ulm (Hrsg.). Mathematische Begabungen fördern (S. 3-7). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Zimmermann, B. (1992): Profile mathematischer Begabung. In MU Jg. 38 Heft 1, S. 19-41.

Matthias BRANDL, Erlangen-Nürnberg, Swetlana NORDHEIMER, Berlin

Zufällig vernetzt? Vernetzungen mit Stochastik im Lehrplan und darüber hinaus

Spätestens seit PISA gilt das Vernetzen verschiedener mathematischer Aspekte und Teilgebiete in der Schule als eine bedeutende und typische Eigenschaft von Mathematik bzw. mathematischem Denken weltweit. Nichtsdestotrotz stellt dies eine Herausforderung für Theorie und Praxis des Unterrichts dar. In diesem Beitrag sollen einerseits Möglichkeiten einer theoretischen Einordnung, andererseits konkrete Beispiele skizziert werden.

1. „Verstehens-Shift" durch Vernetzung

Lietzmann, Wittenberg, Wagenschein, Vollrath, Wittmann und andere vergleichen Mathematik metaphorisch mit einem Netz und zeigen an konkreten Beispielen, wie vor allem Geometrie, Arithmetik und Algebra im Unterricht miteinander verknüpft werden können. Ausgehend von diesen Ansätzen illustriert Abb. 1 unser Verständnis von so genannter Vernetzung:

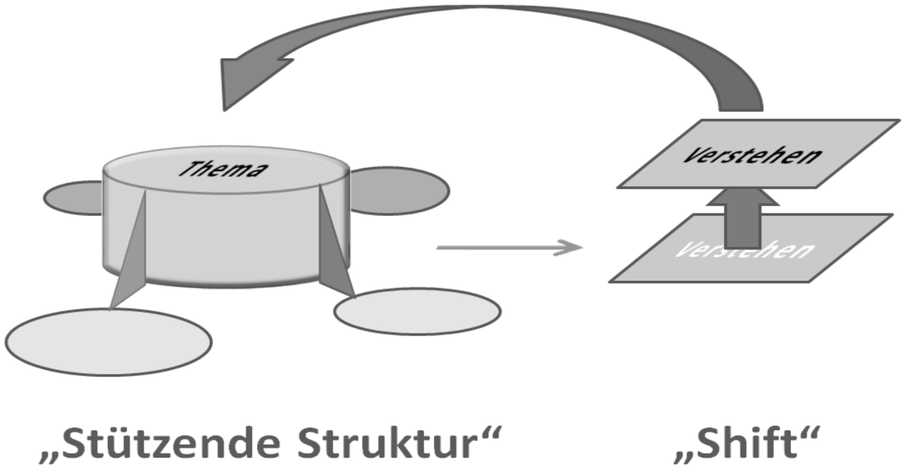


Abb. 1: Verstehens-Shift durch Vernetzung eines Themas

Durch die Vernetzung eines bestimmten Themas mit benachbarten mathematischen Teilgebieten findet auf der Ebene des Verstehens ein „Shift" statt, der es den Lernenden ermöglicht, das Thema sozusagen von einer höheren Warte aus besser zu verstehen. Im fortgeführten Lernprozess werden die Nachbargebiete zwar „verblassen", doch sie bleiben weiterhin eine stützende Struktur für das zentrale Themengebiet. In diesem Sinne sehen wir in der „Vernetzung" eine Möglichkeit zwischen den aktuellen Herausforderungen der schulischen Praxis und den Ideen von Wagenschein („Einwurzelung") und Bruner („scaffolding") zu vermitteln (siehe Wagenschein, 1968; Bruner, 1976).

2. Vernetzungen in den Rahmenlehrplänen

In den Lehrplänen deutscher Bundesländer finden sich verschiedene Auffassungen von Vernetzungen. Demnach kommt Vernetzung als eine der fünf Leitideen im Bildungsplan für Gymnasien in *Baden-Württemberg* vor. In *Sachsen* wird für die Gymnasien am Ende jedes Schuljahres ein Lernbereich „Vernetzung" mit einer bestimmten Pflichtstundenzahl vorgeschrieben. Dabei sollen beispielsweise die sächsischen Gymnasiasten am Ende der Klasse 6 im Rahmen des Lernbereichs „Anteile" Bruchrechnung, Stochastik und Geometrie wiederholen und vernetzen. In den gymnasialen Lehrplänen für *Bremen* und *Mecklenburg-Vorpommern* wird Vernetzen als Teilkompetenz der prozessbezogenen Kompetenz *Argumentieren* gesehen. Im Rahmenlehrplan des *Saarlands* werden inhaltliche Hinweise auf die Vernetzungen für Gymnasien gegeben. In *Bayern* finden Gymnasiallehrer das Wort „Vernetzung" nicht so häufig in den Rahmenlehrplänen. Dafür werden dort Aufgabenbeispiele angeboten, die verschiedene Themenbereiche mit einbeziehen.

Zwar wird Vernetzung häufig eher in den gymnasialen Lehrplänen explizit thematisiert, man findet dieses Prinzip aber auch in einigen Lehrplänen für die anderen Schularten. So gilt beispielsweise in *Hessen* Vernetzung als eines der Ziele des Mathematikunterrichts in der Hauptschule. In *Berlin*, *Brandenburg*, *Hamburg*, *Rheinland-Pfalz* werden mögliche fachinhaltliche Vernetzungen zwischen den Themenbereichen und Leitideen genannt. Die ausgewiesenen Vernetzungen verbinden häufig algebraische und geometrische Themen. Ein klassisches Beispiel dafür ist die Trigonometrie. Veranschaulichung von Brüchen und Wahrscheinlichkeiten, Kreisdiagramme sind weitere Beispiele für häufig empfohlene Vernetzungen. Für die Klassen 5/6 werden in *Berlin* und *Brandenburg* sogar verbindliche innermathematische Verknüpfungen vorgeschrieben.

Was unter Vernetzung jeweils konkret verstanden wird, ist selten explizit beschrieben und erschließt sich nur mit Hilfe von Beispielen. Der Konkretisierungsgrad dieser variiert von der Angabe von Themenüberschriften bis hin zu konkreten Aufgaben. Dabei wird aber z.B. das reichhaltige Potenzial für die Vernetzung von Inhalten aus der Stochastik mit anderen Inhalten bei weitem nicht ausgeschöpft (siehe Engel 2007).

3. Beispiel: Pythagoras-Bäume zu den Zufallsexperimenten

In Analogie zur Veranschaulichung von arithmetischen Konzepten (z.B. Brüchen) bzw. algebraischen Konzepten (z.B. Termen), kann auch nach einer geometrischen Veranschaulichung von Wahrscheinlichkeiten bzw. relativen Häufigkeiten gesucht werden. So können beispielsweise Pythagoras-Bäume als Alternative zu Baumdiagrammen mögliche Ausgänge eines mehrstufigen Zufallsexperiments darstellen.

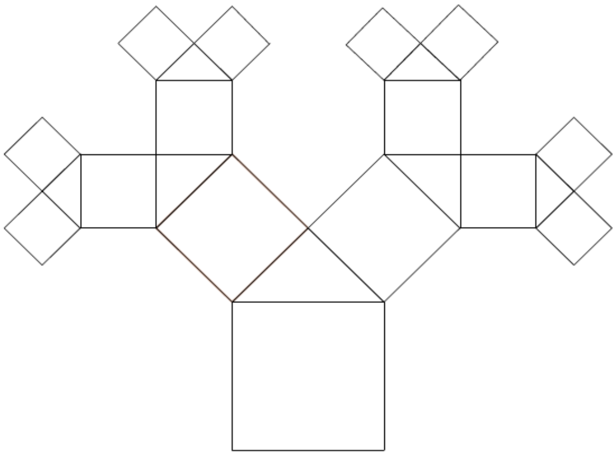


Abb. 2: Symmetrischer Pythagoras-Baum

In Abbildung 2 wird ein dreimaliger Münzwurf mit einem Pythagoras-Baum veranschaulicht. Die dem zeitlichen Ablauf entsprechende Leserichtung ist von unten nach oben. Für die Darstellung eines Versuchs in den höheren Stufen steht wie am Anfang ein Quadrat zur Verfügung. Mit jeder Stufe halbiert sich der Flächeninhalt der entstehenden Quadrate. Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate bleibt innerhalb einer Stufe gleich. Wird ein Spielwürfel viermal hintereinander geworfen und gefragt, wie oft die Zahl sechs vorkommt, so kann das Experiment nicht mehr mit einem symmetrischen Pythagoras-Baum dargestellt werden. Wie würde der Pythagoras-Baum aussehen, der zu diesem Experiment passen würde? Schüler der Mathematischen Schülergesellschaft der HU-Berlin haben das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck mit einem nicht-gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck ersetzt. Dadurch sind in der zweiten Stufe zwei Quadrate entstanden, deren Flächeninhalte im Verhältnis 1:5 standen. Somit haben sie das Modell mit Hilfe von Thaleskreis und Pythagoras auf andere Bernoulli-Experimente übertragen.

4. Beispiel: Bestimmung von Pi

Ausgangspunkt einer stochastischen Bestimmung von Pi ist ein Quadrat der Seitenlänge a mit einbeschriebenem Kreis. Auf dieses Quadrat fallen zufällig *n* Regentropfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen diese in den Kreis? Die Kombination zweier unterschiedlicher Betrachtungsweisen seitens der Geometrie und der Stochastik liefert einen Näherungswert für Pi:

$$\pi \approx 4 \cdot (\text{Zahl der Tropfen, die in den Kreis fallen} / n)$$

Dies kann nun mittels eines Tabellenkalkulationsprogramms berechnet werden. Hilfreich hierfür ist die Ausnutzung der Symmetrie, indem nur ein Viertelkreis betrachtet wird, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt. Radius 1 ermöglicht die direkte Verwendung von Zufalls zahlen in MS Excel; die Entscheidungsregel ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras: $x^2 + y^2 \leq 1$.

Detailliertere und weiterführende Hinweise zur praktischen Durchführung im Unterricht finden sich z. B. in Müller (2006).

5. Beispiel: Vom Lotto zum Pascalschen Dreieck

In Brandl (2011) geht es um die Ausgangsfrage: „Steigt die Wahrscheinlichkeit, dass ich meinen Jackpot-Gewinn teilen muss mit der Anzahl der Teilnehmer?“ Die Antwort lautet zunächst: Ja, natürlich. Aber: Wie genau hängt diese Tatsache von der Zahl *n* der Teilnehmer ab?

Zunächst ergibt sich hier als mathematisches Modell für die zu erwartende Wahrscheinlichkeit eine Kombination aus hypergeometrischer und Binomialverteilung. Unter dem analytischen Blickwinkel funktionaler Abhängigkeiten ergibt sich sodann die Antwort aus einer Kurvendiskussion.

Im weiteren Verlauf der Lerneinheit wird die Ausgangsfrage verallgemeinert: „Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeit, dass sich ***k*** Teilnehmer bei steigender Teilnehmerzahl *n* einen Jackpot teilen müssen?“ Hier kommt nun der Binomialkoeffizient mit ins Spiel. Auch dieser wird nun unter funktionalen Gesichtspunkten betrachtet, als Polynom vom k. Grad in n interpretiert, und anhand des Pascalschen Dreiecks, iterativen Folgen und Dreieckszahlen illustriert. Das Thema sorgt damit für eine fachinhaltliche Vernetzung von Stochastik, Analysis, Algebra und Geometrie.

Literatur

Brandl, M. (2011): Der Lotto-Jackpot in der (Kurven-)Diskussion – eine vernetzende Unterrichtseinheit für den Stochastik- und Analysisunterricht der Oberstufe, in A. Brinkmann, J. Maaß, H.-S. Siller (Hrsg.): Mathe vernetzt - Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Schriftenreihe des Arbeitskreises "Vernetzungen im Mathematikunterricht" der GDM, Band 1. Köln: Aulis Verlag, S. 99 – 108.

Bruner, J.S.; Ross, G.; Wood, D. (1976): The role of tutoring and problem solving, in: Journal of Child Psychology and Psychiatry.

Engel, J. (2007): Daten, Funktionen, Zufall, Modelle: Vernetzung von Leitideen des Mathematikunterrichts. Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 4 - 13.

Müller, J. H. (2006): Reis im Kreis, in mathematik lehren, 138, S. 23 - 43.

Wagenschein, M. (1968): Verstehen lehren. Genetisch - Sokratisch – Exemplarisch. Weinheim, Basel: Beltz.

Birgit BRANDT, Frankfurt

„Ich hab' da eine kleine Aufgabe für euch"

Erzieherinnen gestalten mathematische Situationen mit Kindergartenkindern

Mit der Veröffentlichung internationaler Vergleichstudien ist frühe Bildung in den Fokus des wissenschaftlichen und öffentlichen Interesses gerückt. Es wurden neue Bildungspläne für Kindertagestätten formuliert, die mehrheitlich auch Mathematik als eigenständigen Bildungsbereich beinhalten. Im Zuge dieser Fokussierung auf den Elementarbereich finden sich zahlreiche Konzeptionen für die mathematische Bildung in Kindertagestätten auf dem Markt – von engen lehrgangsartigen Lehr-Lernprogrammen, vornehmlich im arithmetischen Bereich, bis hin zu sehr offenen Ansätzen einer in den Alltag und das kindliche Spiel integrierten mathematischen Bildung.

Relativ wenig Erkenntnisse gibt es hingegen über die aktuelle Praxis mathematischer Bildung im Kindergartenalltag als Ausgangspunkt für mögliche Veränderungen, und zwar sowohl in Hinblick auf die Umsetzung konkreter Programme als auch in Hinblick auf die in den Kindergärten selbst erzeugten Praktiken im Einsatz didaktischer Materialien, in selbstinszenierten Lernarrangements und im freien Spiel. Das Forschungsprojekt erStMaL (early Steps in Mathematical Learning)[1], das in einer longitudinal angelegten Studie die frühe mathematische Denkentwicklung unter Beachtung der wechselseitigen Beziehungen verschiedener mathematischer Bereiche und verschiedenen sozialen Kontexten erforscht, verschafft sich mit der Erhebung sogenannter „Erzieherinnen-Situationen" Einblick in derartigen Kindergartenalltag: In 12 Kindertagestätten im Frankfurter Raum werden zu insgesamt vier Erhebungszeitpunkten in zwei Jahren alltagsnahe Kindergartensituationen, deren Gestaltung den Erzieherinnen selbst überlassen bleibt, videografiert. Es werden Situationen mit Kinderpaaren und mit Kleingruppen (3-5 Kinder) aufgenommen. Zum Einsatz kommen dabei in den Kindertagesstätten vorhandene kommerzielle und selbstgefertigte di-

[1] Das Projekt erStMal wird seid 2008 am IDMI der Goethe-Universität Frankfurt. Es ist eingebunden in das Forschungszentrum IDeA (Individual Development and Adaptive Education of Children at Risk), das auf Initiative des hessische Exzellenzprogramms LOEWE (Landes-Offensive zur Entwicklung Wissenschaftlich-ökonomischer Exzellenz) eingerichtet wurde. Das Zentrum ist eine Kooperation des Deutschen Instituts für Internationale Pädagogische Forschung, des Sigmund-Freud-Instituts und der Goethe-Universität in Frankfurt.

daktische Materialien, Regel- und Lernspiele sowie vielfältige Lege-, Bastel- und Baumaterialien.

In den ersten beiden Erhebungszeitpunkten haben wir so „Erzieherinnen-Situationen“ aus den mathematischen Bereichen a) Zahlen und Operationen, b) Geometrie, c) Messen und Größen, d) Muster und Strukturen sowie e) Datenanalyse erfasst. Einige Situationen fokussieren auf einen einzigen Bereich, während andere Situationen eher bereichsübergreifend angelegt sind. Neben dieser inhaltlichen Vielfalt weisen die von den Erzieherinnen in Szene gesetzten Situationen mit Potential für die Ermöglichung mathematischen Lernens auch eine große Spannbreite in der zeitlichen Dauer auf: Mit knapp 5 Minuten am kürzesten ist eine Sortiersituation mit Tierfiguren (Bereich Datenanalyse), fast 45 Minuten dauert dagegen eine Spiel- und Bausituation mit zusammensteckbaren geometrischen Grundformen für zwei- und dreidimensionale Lege- und Bautätigkeiten (Bereich Geometrie).

Mit Hilfe mikrosoziologischer Analysen, die auf die Handlungen der Erzieherinnen und den damit verbundenen pädagogischen Konzepten und mathematischen Ideen ausgerichtet sind, kann aus diesen sehr unterschiedlichen Situationen Einblick in die aktuellen mathematischen Vermittlungsprozesse im Kindergartenalltag gewonnen werden. Ein Anknüpfungspunkt für die Analysen bietet die von Olson und Bruner (1996) eingeführte „Alltagspädagogik“ (Original: folk pedagogy) als der Aspekt einer „Kultur-Psychologie“ (Bruner 1997), der uns im Alltag ‚erklärt’, welche Handlungen in pädagogischen Situationen möglich bzw. zu erwarten sind:

… we are steered in the activity of helping children learn about the world by a body of assumptions that make up what we may call ‚folk pedagogy‘. (...) Watch any mother, any teacher, even any baby-sitter with a child and you will be struck at how much of what they do is guided by notions of what children’s minds are like and how one may help them learn, even though they may not be able to verbalize their pedagogical principles. (Olson & Bruner 1996, S. 10)

Sie beschreiben vier alltagspädagogische Konzepte, die sich in den den Handlungen zugrunde gelegten Überzeugungen, wie Lehren und Lernen funktioniert und von welcher Art das zu übermittelnde bzw. zu erwerbende Wissen ist, unterscheiden. Bezugspunkt für die Bezeichnung der Konzepte ist das Kind als lernendes Subjekt, auf das die Tätigkeiten der erwachsenen Bezugsperson ausgerichtet sind: „Kind als Handelnder“, „Kind als Wissender“, „Kind als Denker“ und „Kind als Sachkundiger“. Während das eher auf handwerkliche Lernprozesse ausgerichtet Konzept „Kind als Handelnder“ sich kaum in unseren Szenen wieder findet, lassen sich die anderen

Konzepte als jeweils mögliche Deutungshintergründe für die Handlungen der Beteiligten rekonstruieren.

Als Illustration dieser Konzepte dienen drei Situationseröffnungen, die jeweils ‚typisch' für die nachfolgende Gesamtsituation waren. Generell sind jedoch immer auch situationale Verschiebungen möglich:

Kind als Wissender	Kind als Denker	Kind als Sachkundiger
		
ihr steckt jetzt nicht gleich drauf los, sondern, ihr habt jetzt eine kleine Aufgabe ich hab' hier ein bisschen was vorbereitet	*dann könnt ihr mal gucken, ob ihr eine Idee habt, was ihr damit machen könnt*	*wisst ihr, was wir heute machen? (...) wir wollen einen Schmetterling legen*

Die folgende Tabelle gibt die Rollen der Kinder und der erwachsenen Bezugsperson wieder und beschreibt den damit erwartbaren Handlungsspielraum der Akteure:

	Erwachsener	Kind
Kind als Wissender	**Wissensvermittler** Experte („transmission“) - präsentiert Fakten, Normen, Handlungsregeln - kontrolliert, evaluiert, motiviert - ist verantwortlich für Zielerreichung	**Wissensempfänger** „tabula rasa“ mit Fähigkeit zur Wissensaufnahme - speichert und erinnert Wissen (Anwendung) - passt sich der Situation ein - ‚erfüllt' gestellte Aufgaben
Kind als Denker	**Diskurspartner** Kollege - Gestaltung anregungsreicher Umgebungen - versucht, Gedanken des Kindes zu verstehen und daran mitzuarbeiten	**Wissenskonstruktuer** Autodidakt - entwickelt und integriert Deutungen in eigenen Überzeugungskanon

<table>
<tr><td></td><td>Erwachsener</td><td>Kind</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Kind als Sachkundiger</td><td>Informationsmanager
Experte
- ermöglicht Teilhabe an Kultur</td><td>Wissenrekonstruktuer
Aneignen von Sachwissen
- ausgerichtet auf Teilhabe an Kultur</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gemeinsame Handlung
zur Bewältigung einer kulturellen Praktik</td></tr>
</table>

Ziel dieser alltagpädagogischen Betrachtungen ist es nicht, die herausgearbeiteten Konzepte im Sinne einer ‚guten' oder ‚schlechten' Praxis gegeneinander auszuspielen. Vielmehr geht es darum, die jeweiligen Stärken und Schwächen einzelner alltagspädagogischer Konzepte zu erkennen und hinsichtlich ihrer Auswirkungen für die in den Situationen vermittelte bzw. konstruierte Mathematik herauszuarbeiten. Nur so kann die vorhandene Alltagspraxis der Erzieherinnen für eine veränderte Praxis mathematischer Bildungsprozesse genutzt werden. So führt das alltagspädagogische Konzept „Kind als Wissender" häufig zu einer sehr engen, kleinschrittigen Bearbeitungsweise der von der Erzieherin gesetzten Aufgabe und damit zu einer Mathematik, die sich aus einem Regelwerk propositionalen Wissens zusammen setzt. Allerdings zeigt sich häufig in diesen Situationen eine hohe Kompetenz in der Organisation von Lernsituationen und in der Motivierung der Kinder für die gesetzte Aufgabe. Bei der Vorstellung „Kind als Denker" gewinnen hingegen die Ideen der Kinder einen hohen Stellenwert; Mathematik wird zu einem kreativen Umgang mit gegebenen Objekten, bei dem die Kinder Zeit für eigene Explorationen haben. Jedoch fehlt häufig ein von den Eigenkreationen der Kinder ausgehender Impuls für weitergehende Erkundungen. Und in Situationen, die sich dem Konzept „Kind als Sachkundiger" einordnen lassen, können sich mögliche mathematische Lernmomente nur entfalten, wenn die Erzieherin den mathematischen Gehalt der kulturellen Praxis in der gemeinsamen Bewältigung auch zu fokussieren vermag.

Literatur

Bruner, J. (1996): *The Culture of Education*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Olson, D. & Bruner, J. (1996): Folk psychology and folk pedagogy. In D.R. Olson & N. Torrance (Hrsg), *The handbook of education and human development.* Cambridge, Mass.: Blackwell.

Hans-Joachim BRENNER, Erfurt

Zur Rolle der Physik im Mathematikunterricht

1 Rahmen

Ein Schwerpunkt des Mathematikunterrichts ist die Erarbeitung von tragfähigen Vorstellungen zu grundlegenden Konzepten der Mathematik. Besonders geeignet dafür ist die Beschäftigung mit denjenigen naturwissenschaftlichen Phänomenen, die ein Hineindeuten von fundamentalen Mustern in einem entdecken lassenden Unterricht ermöglichen, bei denen Schlussfolgerungen eindrucksvoll bestätigt werden können und die vielfältiges Vernetzen von Wissen gestatten. Mit bekannten und weniger bekannten Beispielen hierfür müssen Lehrerinnen und Lehrern eng vertraut sein, um die Untersuchung dieser Erscheinungen für die jeweilige Klassen- und Unterrichtssituation modifizieren zu können.

2. Ausgangspunkte

Die Mathematik als formale Wissenschaft untersucht Phänomene zwischen uninterpretierten Objekten und Begriffen; die Anwendung der Erkenntnisse erfolgt häufig erst mithilfe der entwickelten Theorie. In der Schule gewinnt in den Sekundarstufen I und II das Lernen vom Allgemeinen zum Konkreten zunehmend an Bedeutung, ohne dass der umgekehrte Fall an Bedeutung verliert! Das Verhältnis von theoretischem und empirischem Lernen ist entsprechend der Lernsituation auszugestalten. Dabei sind auch in der Sekundarstufe II wichtige Phänomene der Naturwissenschaften Ausgangspunkte von Mathematisierungen. Insbesondere gilt es das Potenzial unserer physikalischen Intuition im viel größeren Umfang im Unterricht zu nutzen. „Mechanical intuition is a basic attribute of our intellect, as basic as our geometrical imagination, and not to use it is to neglect a powerful tool we possess.“(Levi 2009) G. Polya zitiert in seinem Buch „Mathematik und plausibles Schließen“ H. Poincare: „Sie (die Physik, HJB) lässt uns die Lösung vorausahnen, sie legt uns passende Ideenverbindungen nahe.“ und führt einige Beispiele an, die Ausgangspunkte für die Entwicklung von Unterricht sein sollten. Die Physik schenkt uns die Möglichkeit, plausibles Argumentieren zu üben und so stärker als bei demonstrativen Argumentationen Inhalte zu vernetzen (Polya 1962). Es gilt zu beachten, dass „The two objects (Ma/Ph, HJB) are so intimately intertwined that both suffer if separated.“ (Levi 2009)

Beispiel Ableitung des Sinusfunktion: Die Schüler untersuchen die gleichförmige Kreisbewegung (in gleichen Zeiten werden gleich lange Bögen zurückgelegt). Zu Beginn nehme ich ein Rad eines Fahrrades und befestige an der Felge eine rote Klammer (nach der Einführung leistet der Computer gute Dienste, z.B. bei der rationellen Berechnung von Durchschnittsgeschwindigkeiten und deren graphischer Darstellung). Die Bewegung des gewählten Punktes wird in Richtung der Achse und senkrecht zur Achse und einer beliebigen Richtung der Ebene beobachtet: gleichförmige Kreisbewegung bzw. Hoch- und Hinunterbewegung auf einer Strecke. Die Ableitung der Sinusfunktion $y = r \cdot sin\alpha$ **ist** die Momentangeschwindigkeit des Punktes auf der Strecke (im Unterricht zunächst so; mit wachsender Formalisierung: lässt sich als … interpretieren). Man zeichnet zwei gleich lange Pfeile für die Umlaufgeschwindigkeiten mit der Länge v an die Kreisbahn: beim Durchgang durch die Nulllage und in einem beliebigen Punkt P. Der Pfeil in P wird in Komponenten in Richtung der gewählten Achsen zerlegt und gedeutet. Die Komponente in y-Richtung der Länge $v \cdot cos\alpha$ (folgt aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke) beschreibt die Geschwindigkeit des sich bewegenden Punktes bei der Bewegung auf der Strecke. Die Länge der y-Komponente ist $\omega \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t)$ - erstes Beispiel für die Kettenregel.

3. Situation und Probleme

Ich wähle meine Ziele gemäß dem Allgemeinbildungskonzept von H. Winter (Mathematik als Schule der Anschauung): „Mittels begrifflicher Instrumente der Elementarmathematik können und sollen strukturelle Züge in wichtigen Phänomenen und Lebensbereichen unserer Welt aufgedeckt werden, so dass Verständnis, Aufklärung und Anteilnahme möglich werden.“ Eine wichtige Rolle dabei spielt die Entwicklung von Vorstellungen. Vom Hofe betont (vom Hofe 2005), dass mathematische Grundvorstellungen aktuell „konstruktivistisch interpretiert“ werden, also „nicht als rezeptiv erworbene stabile Repräsentationen mathematischer Inhalte“ angesehen werden, sondern betont die Ausbildung eines „Netzwerkes, das sich durch Erweiterung von alten und Zugewinn von neuen Vorstellungen zu einem immer leistungsfähigeren System mentaler mathematischer Modelle entwickelt.“

Der Folgerung stimme ich im vollen Umfang zu; der zu Grunde liegenden einseitigen Interpretation konstruktivistischer Lerntheorien ausdrücklich nicht. Lernen ist immer ein aktiver Prozess, in dem wir uns in der Schule vorrangig mit der Aneignung des Bildungsgutes - den Erfahrungen der vor uns lebenden Menschen (Poppers dritte Welt) - beschäftigen. Ein Hauptproblem des Lehrens besteht darin, eine aktive und auf Vernetzung gerichtete Aneignung des Lehrstoffs zu *ermöglichen*. (Die Wahl der Lernformen entsprechend der Klassensituation liegt ebenfalls in der Hand des Lehrers.)

Den Zusammenhängen zwischen Modellbildungsprozessen und dem Beweisen ist im Unterricht mehr Aufmerksamkeit zu schenken, um den Mangel an Begründungen für mathematische Konzepte und Kalküle wirksam entgegentreten zu können. (H. N. Janke 2008, M. Niss 2005)

Mikelskis-Seifert fordert, das Arbeiten mit Modellen anhand von vielfältigen Themen zu üben, weil „das Modellieren eher stiefmütterlich im Physikunterricht behandelt wird" und um den naiven Realismus der Schüler (und Lehrer, HJB) bezogen auf die naturwissenschaftliche Erkenntnisgewinnung überwinden zu können (Mikelskis-Seifert 2010). Weil die Erarbeitung von Realmodellen sehr schwierig ist, ist der Mathematikunterricht auf die Vorleistungen der naturwissenschaftlichen Fächer angewiesen, um Lernzeit zu gewinnen und das zu Lernende in der Lebensumwelt der Schüler verankern zu können. Neben der Entwicklung von mathematischen Modellen steht mit zunehmenden Schulalter die Erarbeitung einer „anwendungsfähigen Mathematik" (E. Wittmann 2005) immer mehr im Vordergrund. K.-H. Lotze schreibt über die Situation des Physikunterrichts (Jena 2010): „Von Seiten der Fachdidaktik wird der Vorwurf erhoben, die Physik werde „zerrechnet", Lehrplankommissionen formulieren die Entmathematisierung" des Physikunterrichts als Ziel, und sogar die Forderung eines „absoluten Formelverbots bis zum Ende der Jahrgangsstufe 10" wurde laut. Etwas moderater heißt es, dass im Zentrum des Physikunterrichts das Experiment zu stehen habe und die Mathematik in ihm auf das unbedingt Notwendige zu reduzieren sei." Der Vorwurf des „Zerrechnens" für beide Fächer gerechtfertigt. Weiterhin sollten im Mathematik- und im Physikunterricht Formelwerke in der Regel nicht zugelassen sein, damit die Schüler immer wieder Gelegenheit haben, am konkreten Beispiel die Zusammenhänge herzuleiten und die Formeln zu abstrahieren. Erst wenn das langweilig wird, greift man zur Formel. *Die Reduzierung des jeweils anderen Faches auf das Notwendigste hat im Mathematik- und im Physikunterricht unglaublichen Schaden angerichtet!*

4. Beispiele (um deren größere Bekanntheit ich mich bemühe)

Lineares Wachstum: Ausgangspunkt der Untersuchungen ist die Funktionalgleichung. Die Analyse von Bewegungsvorgängen gestattet Sinngebung und intuitive Verankerung. Dabei bedeutet eine Beschleunigung $a = 3\frac{m}{s^2}$, dass sich die Geschwindigkeit um $3\frac{m}{s}$ in jeder Sekunde vergrößert, wenn sie gleichmäßig wächst.

Exponentielles Wachstum/Abnahme: Ausgangspunkt ist wieder die Funktionalgleichung. Die Schüler erhalten zunächst die Aufgabe, einen gut springenden Ball aus 1m Höhe fallen zu lassen und die maximale Höhe nach dem Aufprall zu bestimmen. Problem: Sage die maximale Sprunghöhe nach dem 2. Aufprall voraus. Die weiteren Sprunghöhen sind experimentell zu bestimmen, mit den Ergebnissen der Rechnungen im Modell zu vergleichen und graphisch darzustellen. Beim radioaktiven Zerfall gehen wir davon aus, dass pro Zeiteinheit der gleiche Anteil von Kernen zerfällt. $N(t) = N_0 \cdot e^{-\vartheta t}$

Modell des Kontinuums: Beim freien Fall aus der Ruhelage nehmen wir an, dass sich durch eine gleichbleibende Kraft die Geschwindigkeit pro Zeiteinheit stets um den gleichen Betrag vergrößert. Den zurückgelegten Weg kann man mit Hilfe der *Durchschnittsgeschwindigkeit* bestimmen, die in diesem Fall das arithmetische Mittel von 0 und der Endgeschwindigkeit *v* ist. In einer Formel: $s = \frac{v}{2} \cdot t$. *Mittelwerte* treten auch beim Mischen auf. In eine Badewanne werden 8 Eimer Wasser von jeweils 50°C gegossen. Da das zu heiß wird, gießt man noch 2 Eimer von 20°C hinzu. Reicht das? Hinweis auf die Analogie (falls die Schüler nicht schon längst selbst darauf gekommen sind): 8 Mann mit je 50€ und 2 Mann mit je 20€; wie viel erhält jeder, wenn sie das Geld gleich aufteilen? (Graphische Lösung dieses Problems – mit Hilfe der Diagonale im Rechteck – in alten Physikbüchern)

Zwei Personen P1 und P2 laufen von A nach B; sie starten gleichzeitig und kommen auch zur gleichen Zeit an. P1 läuft mit gleichbleibender Geschwindigkeit; bei P2 ändert sich die Geschwindigkeit während des Laufes. Dann gibt es mindestens einen Zeitpunkt, zu dem P2 die Geschwindigkeit von P1 hat (MWS). Die reellen Zahlen als Objekte unseres Geistes haben wunderbare Eigenschaften. Strecken der Länge $\sqrt{2}$ gibt es; Objekte in der Natur dieser Länge gibt es aber nicht.

Modell der Unabhängigkeit, Superpositionsprinzip: Eine kleine und eine große Stahlkugel fallen aus gleicher Höhe und schlagen hörbar zur gleichen Zeit auf. Stößt man die kleinere durch die größere vom Tischrand, dann schlagen beide immer noch gleichzeitig auf, obwohl sie unterschiedliche Parabelbahnen durchflogen haben.

Exponentielle Verteilung: Die Lebensdauer von Kernen radioaktiver Isotope hängt nicht vom „Alter“ des Kerns ab. Ist $P(T > r)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer T > *r* ist, dann gilt
$P(T > r + s) = P(T > r) \cdot P(T > r + s | T > r) = P(T > r) \cdot P(T > s)$
und somit $N(T > t) = N_0 \cdot c^t = N_0 \cdot e^{-\vartheta t}$ (Erwartungswert).

5. Literatur

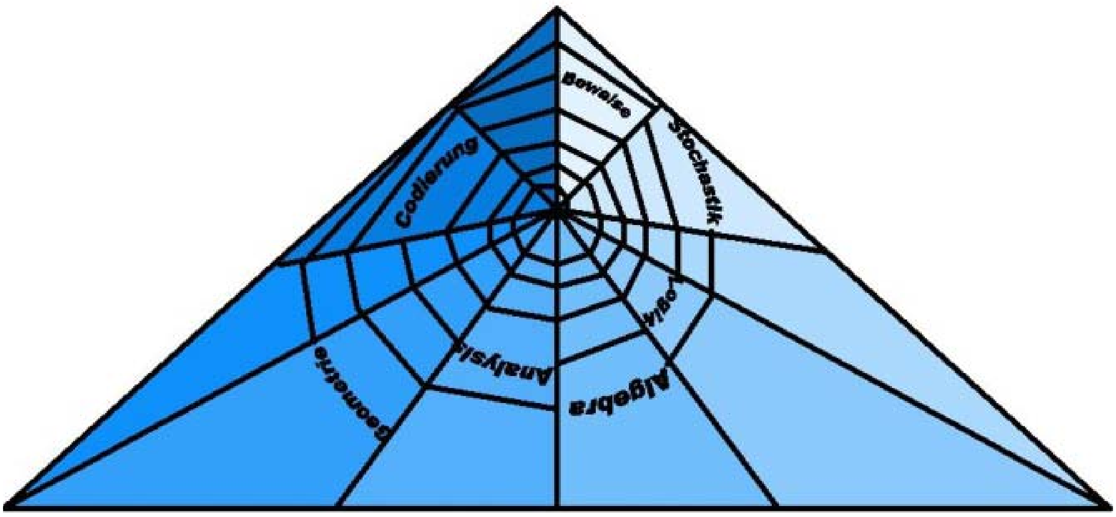
Mark Levi; The Mathematical Mechanic; Princeton University Press; 2009

Astrid BRINKMANN, Münster; Jürgen MAASS, Linz;
Hans-Stefan SILLER, Salzburg

Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“

1. Einleitung

In der Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ [1] wird eine altbekannte und zentrale Forderung an das Lernen von Mathematik neu betrachtet: Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sollen nicht isoliert voreinander, sinnlos und beziehungslos nebeneinander gelehrt und gelernt werden, sondern in ihrer Wechselbeziehung zueinander, also vernetzt.



Viel Kritik am Mathematikunterricht bezieht sich auf eine weit verbreitete Unterrichtsgestaltung, in der jeweils für einige Wochen ein oder zwei Typen von Algorithmen eines Kalküls für die nächste Leistungsüberprüfung antrainiert und dann wieder vergessen werden.

Inhaltlich geht es in der Schriftenreihe darum, innermathematische Beziehungen zwischen den üblicherweise zu unterrichtenden Teilgebieten aufzuzeigen und deren Vernetzungsmöglichkeiten ins Bewusstsein der Lehrenden zu rücken. Beim Erwerb zentraler Kompetenzen wie Modellieren und Problemlösen sollen möglichst viele Gebiete der Schulmathematik vernetzt werden, um einen reichhaltigen Vorrat an Werkzeugen und Problemlösetechniken zu erhalten. Es geht aber auch um eine ganzheitliche (Ein-)Sicht in die Mathematik. Es soll der vollständige und vernetzte Weg vom Auffinden einer Fragestellung, über das Suchen nach Daten, die Präzisierung von Fragen sowie die (Grund-)Tätigkeiten des Modellierens, Berechnens, Interpretierens und des Visualisierens umgesetzt werden. Annahmen, Modelle, Berechnungsergebnisse sowie deren Interpretation und Darstellung sollen miteinander in Beziehung gesetzt werden. Schüler/innen sollen erkennen, dass Mathematik weit mehr ist als das Berechnen von (numerischen) Ergebnissen mit Hilfe vorgegebener Formeln.

Die Leitidee Vernetzung wird im Unterricht auch eigenständig thematisiert. Das betrifft sowohl Methoden zum Erkennen und Lernen von Zusammenhängen und Vernetzungen, wie Mind Mapping, Concept Mapping oder Lernlandkarten, als auch System Dynamics als Schlüssel zur Modellierung und zum Verständnis von vernetzten Problemen unserer Welt, insbesondere aus Umwelt, Natur und Ökonomie.

Methodisch wirkt der Anspruch „vernetzendes Lernen“ zunächst wie eine weitere schwer erfüllbare Forderung der Mathematikdidaktik an die ohnehin schon stark geforderten Mathematiklehrer/innen. Tatsächlich zeigen aber Unterrichtserfahrungen, die wir gesammelt haben und vermitteln wollen, dass gerade die Bemühungen um vernetzenden Mathematikunterricht entlastend und motivierend wirken – wer vernetzend unterrichtet, macht es den Lernenden, aber auch sich selbst leichter!

Die Herausgeber/innen und Autor/innen der Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ gehören dem 2009 gegründeten Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ der GDM an. Mit dem Anspruch einer „sozialen Vernetzung“ werden hier vielfältige Ideen und Vorschläge zum Mathematikunterricht in kooperativer und kollegialer Form aufgenommen und diskutiert. Die Ergebnisse fließen in diese Schriftenreihe ein und werden so aufbereitet, dass Lehrende sie möglichst unmittelbar und gewinnbringend in ihrem Unterricht einsetzen können.

2. Innere Struktur der Bände

Die einzelnen Bände der Schriftenreihe gliedern sich jeweils in drei Kapitel zur Unterrichtspraxis, denen ein theoriegeleiteter Artikel vorangestellt ist.

Im *Kapitel I* werden spezielle *Unterrichtsmethoden* für einen vernetzenden Mathematikunterricht vorgestellt. *Kapitel II* zeigt für einen Mathematikunterricht gewinnbringende *mögliche inhaltliche Vernetzungen* auf, insbesondere auch zwischen verschiedenen Gebieten der Schulmathematik (z. B. Algebra, Geometrie und Stochastik) und zwischen verschiedenen Repräsentationen mathematischer Objekte (z. B. graphische/bildliche und algebraische Repräsentationen). *Kapitel III* befasst sich mit der *Förderung vernetzten Denkens*, speziell auch mit der mathematischen Modellierung vernetzter Systeme unserer Lebensumwelt.

3. Beiträge im Band 1

Der *einleitende Artikel* in Band 1 [2] (von Astrid Brinkmann, Jürgen Maaß, Günther Ossimitz, Hans-Stefan Siller) führt in die Thematik der Vernetzungen und des vernetzten Denkens im Mathematikunterricht ein und liefert entsprechende begriffliche Grundlagen. Es werden mögliche Defizite in Lehr- und Lernprozessen, Vernetzungen betreffend, aufgezeigt, woraus sich entsprechender Handlungsbedarf ergibt. Damit wird gleichzeitig die Motivation für den Beginn dieser Schriftenreihe dargestellt.

Kapitel I zu *Unterrichtsmethoden* liefert zunächst zwei Beiträge zu graphischen Repräsentationen von Vernetzungen, welche mit unterschiedlichen Zielsetzungen im Unterricht eingesetzt werden: Astrid Brinkmann stellt Mind Maps und Concept Maps als Darstellungen heraus, die sich sowohl zum Visualisieren als auch zum Lernen vernetzten mathematischen Wissens in besonderer Weise eignen. Michael Wildt beschreibt sog. Lernlandkarten als Arbeitsmittel zur Selbststeuerung beim Lernen. Lernlandkarten visualisieren mögliche Lernwege; selbsterstellte Lernlandkarten bilden gleichzeitig auf den eigenen Lernprozess bezogene kognitive Strukturen der sie erstellenden Subjekte ab.

Desweiteren stellt Swetlana Nordheimer eine von ihr entwickelte und erprobte Unterrichtsmethode, die „Kapitelübergreifende Rückschau“, vor, bei der Lernende selber Aufgaben erstellen, welche Inhalte verschiedener Schulbuchkapitel vernetzen.

Das zweite Kapitel zu *möglichen inhaltlichen Vernetzungen* besteht aus vier Beiträgen. Christoph Ableitinger stellt ein stark vereinfachtes Modell des Billards vor, das eine Möglichkeit eröffnet, Problemlösefähigkeiten auf unterschiedlichen Niveaus zu trainieren und über sie zu reflektieren. Dabei ergeben sich in natürlicher Weise interessante Vernetzungen mathematischer Inhalte und Beweistechniken, aber auch Vernetzungen genuin mathematischer Tätigkeiten und Handlungsweisen.

Hans Humenberger und Berthold Schuppar befassen sich mit Problemlösen und Vernetzungen bei Zerlegungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in summengleiche Teilmengen.

Reinhard Oldenburg stellt mathematische Beschreibungen mathematischer Objekte als innermathematische Modellbildungen heraus. Diese sind besonders interessant, weil sie oft verschiedene Gebiete wie etwa Algebra und Geometrie vernetzen, und weil sie meist nicht eindeutig sind.

Eine vernetzende Unterrichtseinheit für den Stochastik- und Analysisunterricht der Oberstufe zum Thema des Lotto-Jackpots wird von Matthias Brandl diskutiert.

Kapitel III liefert Beispiele zum *Fördern vernetzten Denkens*. Jürgen Maaß und Hans-Stefan Siller beschreiben ein (größeres) Unterrichtsprojekt rund um eine Wirtschaftssimulation namens „Hunger in Afrika“, das in mehrfacher Hinsicht zum vernetzenden Unterricht zählt. Es werden verschiedene Unterrichtsfächer (Mathematik, Geografie, Wirtschaftskunde) miteinander in Verbindung gebracht, zunächst, um das Computerspiel zu verstehen, später, um zu gewinnen. Methoden zur systemdynamischen Steuerung als Aspekt vernetzenden Denkens kommen zum Tragen und Methoden aus verschiedenen Teilgebieten des Mathematikunterrichts werden vernetzt, um die Black Box „Hunger in Afrika“ als Computersimulation zu analysieren.

Günther Ossimitz stellt heraus, dass unter den vier Dimensionen systemischen Denkens (vernetztes Denken, Denken in Zeitabläufen, Denken in Modellen, systemgerechtes Handeln) der Aspekt des Verstehens von Zeitabläufen bzw. der Modellierung von Zeit von besonderer Bedeutung ist, und zeigt, dass eine Unterscheidung von Bestands- und Flussgrößen (stocks und flows) sowie entsprechende Darstellungsmittel (Stock-Flow-Diagramme) sehr hilfreich sind, um zeitliche Prozesse richtig zu beurteilen.

4. Ausblick

Das Thema Vernetzung(en) wird für den Mathematikunterricht, hinsichtlich Wünschen der Wirtschaft, der Universitäten bzw. den alltäglichen Anforderungen, immer wichtiger. So kommt dieser Band der Vielfältigkeit des Themas nach, kann jedoch keinesfalls alle (notwendigen und wichtigen) Bereiche abdecken. Band 1 stellt lediglich den Auftakt der Schriftenreihe dar, in der beabsichtigt ist, die Thematik prominent für Lehrer(innen) darzustellen und aufzubereiten. Die nächsten Bände sind daher bereits in Arbeit und Planung. Um das Augenmerk praktizierender Lehrer(innen) hinsichtlich dieser wichtigen Thematik zu erhöhen, ist ebenfalls geplant Lehrerfortbildungen durchzuführen, um den notwendigen und wichtigen Austausch mit dem Zielpublikum der Lehrer(innen) zu gewährleisten. Um diese umfassenden Arbeiten und Planungen erfolgreich durchführen zu können, sind weitere Beiträge von interessierten Personen ge- bzw. erwünscht.

Literatur

[1]Brinkmann, Astrid (Reihenhrsg.). Schriftenreihe: Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. München: Aulis Verlag.

http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

[2]Brinkmann, Astrid; Maaß, Jürgen; Siller, Hans-Stefan (Hrsg.). 2011. Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 1. München: Aulis Verlag. ISBN 987-3-7614-2836-8.

Dirk Brockmann-Behnsen, Hannover

Löseverhalten bei geometrischen Problemaufgaben mit und ohne den Einsatz von DGS

1. Theorie

Ein zentraler Bereich mathematischen Arbeitens ist das Lösen von Problemen und das damit verbundene Anwenden heuristischer Strategien. Diese Aspekte sollen den Schülerinnen und Schülern auch im Mathematikunterricht vermittelt werden. So findet sich beispielsweise im niedersächsischen Kerncurriculum in der Beschreibung der prozessbezogenen Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ folgende Formulierung: Die Schülerinnen und Schüler *„wählen geeignete heuristische Strategien wie Zerlegen in Teilprobleme, Spezialisieren und Verallgemeinern, Systematisieren und Strukturieren zum Problemlösen“* (Niedersächsisches Kultusministerium, 2009, S.12). Durch den Computereinsatz im Unterricht bleibt das Anstreben dieser Kompetenzen unangerührt, es ergibt sich allerdings die Frage, wie ein didaktisch sinnvoller Einsatz des Computers aussehen kann (vgl. Weigand, Weth 2002, S.26).

Problemlöseprozesse können beispielsweise durch eine Einteilung in Phasen oder Episoden beschrieben werden, wie Schoenfeld dies im Rahmen seiner „time-line-parsings“ macht (Schoenfeld 1985, 1992). Dabei stellt er fest, dass sich etwa 60% seiner über hundert untersuchten Prozesse einem Typ zuordnen lassen, den er an einem Beispiel erläutert: *„In its most telegraphic form, the time-line representation of their protocols shows that they read the problem, picked a particular direction to work on, and pursued that direction until they ran out of time."* Er nennt diesen Typ „wild goose chase“ (Schoenfeld 1992, S. 190 f.). Rott (2011) operationalisiert diesen Typ anhand des ausschließlichen Auftretens der kodierten Episodentyps „Exploration“ bzw. „Analysis“ und „Exploration“. In diesen Prozessen wurden also keine Pläne aufgestellt oder durchgeführt und es wurde, im Sinne von Pólya, auch keine Rückschau gehalten.

Speziell für den Einsatz von Dynamischer Geometrie Software (DGS) greifen Arzarello et al. (2002) ein kognitives Modell für den Löseprozess mathematischer Problemaufgaben auf, der durch ein Wechselspiel zwischen einer Ebene der Wahrnehmung und einer der Theoriebildung gekennzeichnet ist: *„These computer-supported practises can be framed within a cognitive evolution back and forth from perceptions to abstract ideas“*(ebd., S.66). Prozesse von der Wahrnehmungsebene hin zur Ebene der Theoriebildung, wenn Schüler also beispielsweise auf Grund einer beobachteten Invarianz in ihrer konstruierten Figur eine Vermutung aufstellen, werden als aufsteigende Prozesse bezeichnet (ascending processes). Entgegengesetzt verlaufende als absteigende Prozesse (descending processes), also wenn Schüler beispielsweise eine formulierte Vermutung durch eine gezielt konstruierte Figur am Bildschirm zu bestätigen versuchen. Auf- und absteigende Prozesse äußern sich durch die unterschiedliche Verwendung des Zugmodus durch die Schülerinnen und Schüler: *„Ascending and descending processes shown by dragging practises in Cabri reveal cognitive shifts from the perceptual level to the theoretical one and back in students' mathematical acticity"* (ebd., S. 67). Nach Olivero (1999) spiegelt die unterschiedliche Verwendung des Zugmodus kognitive Prozesse wieder.

2. Die Studie

In einer Pilotstudie wurden sechs Schülerpaare der zehnten Jahrgangsstufe (S01 bis S06) bei der Bearbeitung von sechs Geometrieaufgaben (P01 bis P06, P03 und P04 bzw. P05 und P06 sind inhaltlich ähnlich) untersucht. Dabei wurde im Rahmen eines symmetrischen Crossover-Designs das Medium Papier und Bleistift (P) bzw. DGS (D) gezielt gewechselt. Die nachstehende Tabelle gibt eine Übersicht:

	P01	P02	P03	P04	P05	P06
S01	**P**	**D**	**P**	**D**	**D**	**P**
S02	**P**	**D**	**D**	**P**	**P**	**D**
S03	**P**	**D**	**P**	**D**	**D**	**P**
S04	**P**	**D**	**D**	**P**	**P**	**D**
S05	**P**	**D**	**P**	**D**	**D**	**P**
S06	**P**	**D**	**D**	**P**	**P**	**D**

Für die DGS-unterstützten Prozesse wurde zunächst der Frage nachgegangen, ob sich der bei Schoenfeld beschriebene und im Sinne von Rott operationalisierte Prozesstyp „wild goose chase" wiederfinden lässt, und darauf aufbauend, ob es einen Zusammenhang zwischen diesem Typ und dem Bearbeitungserfolg gibt. Um ein Maß für den Bearbeitungserfolg zu finden, wurden u.a. im Rahmen einer Bachelorarbeit (Köhler 2010) Bewertungsschemata für die Aufgaben erstellt, mit deren Hilfe die untersuchten Prozesse bewertet werden konnten. Als erfolgreich wurden dabei Prozesse eingestuft, deren Bewertung nach erreichten Prozentsätzen überdurchschnittlich im Vergleich zu allen Ergebnissen bei der Aufgabe ausfiel.

3. Ergebnisse

Für 50 von den 72 Schülerinnen und Schülern wurden bislang Prozesseinteilungen vorgenommen. 28 dieser Prozesse (56%) entsprachen dem Typ „wild goose chase“, die Schoenfeldepisode „Verification“, also eine bewusste Rückschau, fand sich in nur 10% der untersuchten Prozesse.

Bezüglich der weiterführenden Forschungsfrage wurde nach einem Zusammenhang zwischen den Merkmalen „wild goose chase“ und „Prozess nicht erfolgreich“ gesucht. Für 20 Schülerinnen und Schüler wurden bislang Prozessbewertungen vorgenommen. Dabei ergab sich folgendes Bild:

Paar	Prb:	Bewertung		Bewertung	
S01	A	17,14%	+		
	B	17,14%	+		
S02	A	37,14%	+	17,30%	+
	B	37,14%	+	17,30%	+
S03	A	11,43%	-	3,85%	-
	B	11,43%	-	3,85%	-
S04	A	0,00%	-	7,69%	-
	B	0,00%	-	7,69%	-
S05	A	5,71%	-	11,54%	+
	B	5,71%	-	11,54%	+
S06	A			15,38%	+
	B			15,38%	+
		14,28%		11,15%	

Überdurchschnittliche Bewertungen wurden mit “+” bezeichnet, durchschnittliche und unterdurchschnittliche entsprechend mit einem “-“. Trotz der noch geringen Stichprobe wurde nun ein möglicher Zusammenhang zwischen den oben beschriebenen, nominalskalierten Merkmalen mittels eines χ^2-Tests untersucht:

	(unter)durchschnittlich (-)		überdurchschnittlich (+)		
„wild goose chase“	**10**	(8)	**6**	(8)	**16**
Sonstige	**0**	(2)	**4**	(2)	**4**
	10		**10**		**20**

Ein Zusammenhang zwischen den Merkmalen „wild goose chase“ und unterdurchschnittliche Aufgabenbewertung konnte auf einem 5% Niveau gezeigt werden (p=0,025).

4. Ausblick

Als unmittelbar folgende Arbeitsschritte müssen nun die verbleibenden Prozesse bewertet und die gewonnen Ergebnisse in die Statistik eingepflegt werden.

Mittelfristig wird an einem auf den Erkenntnissen von Olivero (1999) und Arzarello et al. (2002) aufbauenden Schema zur Einteilung der Prozesse nach unterschiedlichen Zugweisen gearbeitet. Dazu ist zunächst eine genauere Operationalisierung dieser Zugweisen erforderlich. Erste Vorarbeiten dazu wurden schon im Rahmen einer Bachelorarbeit geleistet (vgl. Partsch 2010). Danach soll nach einem Zusammenhang zwischen den Schoenfeld-Episoden und der Verwendung der Zugweisen durch die Probanden geforscht werden.

Literatur

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002): *A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments*, ZDM 2002 Vol. 34 (3), S. 66 – 72

Clauß, G., Finze, F.-R. & Partzsch, L. (2004[5]) : *Statistik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main

Köhler, K. (2010): *Einteilung ausgewählter Problemlöseprozesse mit Dynamischer Geometriesoftware in Episoden nach Schoenfeld*, unveröffentlichte BA-Arbeit an der Leibniz Universität Hannover

Niedersächsisches Kultusministerium (2009): *Kerncurriculum für das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe, ..., Mathematik*, Hannover

Olivero, F. (1999): Cabri-Géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations, in: *Proceedings of ICTMT4* Plymouth, 9. – 13. August 1999

Partsch, M. (2010): *Die Rolle der Zugweisen nach Arzarello bei ausgewählten Problemlöseprozessen mit Dynamischer Geometriesoftware*, unveröffentlichte BA-Arbeit an der Leibniz Universität Hannover

Rott, B. (2011): Erste Ergebnisse der Analyse der Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern. In: *BzMU 2011*.

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando

Schoenfeld, A. H. (1992): On Paradigms and Methods: What Do You Do When the Ones You Know Don't Do What You Want Them to? In: *The Journal of the Learning Sciences 2* (1992), Nr. 2. S. 179 – 214.

Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002): *Computer im Mathematikunterricht: neue Wege zu alten Zielen*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

Georg BRUCKMAIER, Regensburg, Martin BRUNNER, Luxemburg, Stefan KRAUSS, Regensburg

Linda, Ziegen und Krankenhäuser – Neues aus dem PROLOG-Projekt

Zusammenfassung

Bei der letztjährigen GDM-Tagung in München (2010) haben wir das PROLOG-Projekt zum logischen und probabilistischen Denken vorgestellt. Das wichtigste Ergebnis war, dass berühmte kognitive Täuschungen (z.B. das „Ziegenproblem“, die „Linda-Aufgabe“, „Wasons Kartenwahlaufgabe“ etc.), die in PROLOG erstmalig gemeinsam eingesetzt und untersucht wurden, nicht systematisch miteinander korrelieren. Es scheint also kein spezifisches Fähigkeitskonstrukt für die Lösung solcher Aufgaben zu geben.

Im diesjährigen Vortrag sollen die Ergebnisse zu den eingesetzten stochastischen Täuschungen im Einzelnen analysiert werden. Es stellt sich heraus, dass systematische Zusammenhänge gerade dann auftauchen, wenn die Aufgaben mit didaktischen Hilfsmitteln kognitiv vereinfacht repräsentiert werden (z.B. mit natürlichen Häufigkeiten statt mit Wahrscheinlichkeiten oder mit reellem statt abstraktem Kontext). Während die Originalversionen der kognitiven Täuschungen also eher „zufällig“ gelöst werden, können stochastische und logische Fähigkeiten insbesondere dann greifen, wenn bereits bei der Aufgabenformulierung „didaktische Werkzeuge“ eingesetzt wurden.

1. Einleitung: Die PROLOG-Studie

PROLOG ist eine Studie zum *P*robabilistischen und *L*ogischen Denken, an der etwa 2000 Luxemburger Jugendliche in Ergänzung zu PISA 2009 teilnahmen. Die 14 bis 16-jährigen Schüler bearbeiteten dabei u.a. eine umfangreiche Sammlung von Aufgaben aus den drei folgenden, miteinander verwandten Bereichen (im Folgenden kurz „P“, „L“ und „T“ genannt):

Probabilistisches Denken (P) entspricht typischen Aufgaben aus der Schulstochastik und wurde durch PISA-Aufgaben zur Leitidee 5 „Daten und Zufall“ der Bildungsstandards erfasst („statistical literacy“). Der zweite Bereich *Logisches Denken* (L) umfasst Aufgaben zum schlussfolgernden Denken (z.B. Figurenanalogien und Zahlenreihen). Dieser Kompetenzbereich, der auch allgemeine kognitive Fähigkeit (bzw. einfach IQ) genannt wird, wurde in PROLOG durch typische Intelligenztestaufgaben gemessen. Weiterhin wurde der Versuch unternommen, einen dritten Bereich, nämlich *stochastische und logische kognitive statistische Täuschungen* (T) zu erfassen, indem berühmte „Kopfnüsse“ wie z.B. die „Linda-Aufgabe“, das

„Ziegenproblem“, „Wasons Kartenwahlaufgabe“ oder die „Krankenhaus-Aufgabe“ eingesetzt wurden.

2. Theorie und Forschungsstand

Berühmte kognitive Täuschungen logischer und stochastischer Art werden üblicherweise experimentell einzeln untersucht (vgl. z.B. das Forschungsprogramm von Kahneman und Tversky; Kahneman, Slovic & Tversky, 1982). Im letztjährigen Vortrag haben wir Ergebnisse zum erstmaligen gemeinsamen Einsatz solcher Aufgaben vorgestellt. Dabei haben wir u.a. untersucht, ob es sich bei T um eine eigenständige Kompetenz handelt, das heißt, ob es Personen gibt, die sich *grundsätzlich* kompetent (bzw. grundsätzlich nicht kompetent) bei solchen Aufgaben erweisen. Es zeigte sich, dass es sich bei T um *kein* reliables Fähigkeitskonstrukt handelt (Cronbachs $\alpha = .15$). Im Gegensatz dazu erwiesen sich – völlig im Einklang mit der Theorie – Probabilistisches Denken (P) sowie Logisches Denken (L) als eigenständige, reliable Fähigkeitskonstrukte (für P war Cronbachs $\alpha = .71$ bzw. für L war $\alpha = .81$; die Skalen bestanden aus 12 bzw. 31 Aufgaben). Das bedeutet, dass man – im Gegensatz zu P und L – *nicht* von einem Konstrukt „Täuschungsresistenz“ sprechen kann: Die Lösung von Items aus T erfolgt eher „zufällig“. Weiterhin zeigte sich kein systematischer Zusammenhang der Items von T mit P bzw. L (demnach „helfen“ P und L nicht systematisch bei der Lösung von Items von T). Für eine detaillierte Darstellung der bisherigen Ergebnisse siehe Bruckmaier, Krauss und Brunner (2010).

3. Fragestellung

Aufbauend auf den bisherigen Ergebnissen werden im diesjährigen Vortrag die Korrelationen der einzelnen „stochastischen kognitiven Täuschungen“ mit logischem (L) und probabilistischem Denken (P) betrachtet. Da es kein „Gesamtkonstrukt“ T gibt, soll dabei untersucht werden, welche Items von T gegebenenfalls mehr und welche weniger mit P bzw. L zusammenhängen und ob für diese differentiellen Befunde Gründe (z.B. in der Formulierung der Items) gefunden werden können.

4. Methode: Stichprobe und Instrumente der PROLOG-Studie

Stichprobe

Eine detailliertere Beschreibung der bei PROLOG verwendeten Stichprobe von knapp 2000 luxemburgischen Schülern findet sich in Bruckmaier, Krauss und Brunner (2010).

Instrumente

In PROLOG wurden neben zahlreichen typischen PISA-Fragebögen Aufgaben aus den Bereichen P, L und T gestellt. Wie bereits erwähnt, wurde P dabei durch PISA-Aufgaben aus dem Bereich Stochastik und L durch Intelligenztestaufgaben operationalisiert. Neben den fünf Aufgaben zu T, die bereits im letztjährigen Beitrag diskutiert wurden („Linda“, „Krankenhaus“, „Wason“ (klassisch), „Wason“ (Kontext) und eine vereinfachte Version des „Ziegenproblems“) wurde zudem die einschlägige bayesianische AIDS-Aufgabe in zwei Fassungen eingesetzt (einmal in einer Wahrscheinlichkeits- und einmal in einer Häufigkeitsversion). Da diese Aufgabe unserer Meinung nach nicht eindeutig dem Kompetenzbereich T zugeordnet werden kann, wurde sie in den bisherigen Analysen nicht berücksichtigt, soll jetzt aber für Analysen auf Itemebene mit einbezogen werden (für Beispielaufgaben für die Bereiche P, T und L siehe die entsprechende Veröffentlichung im letztjährigen Tagungsband, Bruckmaier, Krauss und Brunner, 2010; für die vereinfachte Version des Ziegenproblems siehe Atmaca und Krauss, 2001).

5. Ergebnisse

Wie Tabelle 1 verdeutlicht, ergeben sich differentielle Befunde zum Zusammenhang der einzelnen „stochastischen kognitiven Täuschungen“ (T) mit logischem (L) und probabilistischem Denken (P). Erstaunlicherweise zeigen sich für die Aufgaben aus T, die im „klassischen Format“ („Tversky & Kahneman-Version“) gestellt wurden, eher niedrige Korrelationen mit P und L (im Fall der AIDS-Aufgabe ergibt sich sogar eine leichte Negativkorrelation). Bei diesen Items tragen probabilistische und logische Kompetenzen offensichtlich nicht bzw. nur wenig zum „Durchschauen“ dieser Täuschungen bei.

Tabelle 1: Korrelationen der Einzelitems aus T mit Probabilistischem (P) und Logischem Denken (L)

	„Tversky & Kahneman“-Versionen (N = 631)				„Erleichterte“ Versionen (N = 637)		
*Korrelationen **r***	Linda	Krankenhaus	Wason (klass.)	AIDS (Wsk.)	Ziegenproblem	Wason (Kontext)	AIDS (Häufigk.)
Probabil. Denken **P**	.00	.03	.11	-.08	.19	.28	.20
Logisches Denken **L**	.03	.06	.09	-.05	.19	.24	.21
Lösungsrate	12%	11%	16%	3%	44%	32%	13%

Höhere Korrelationen ergeben sich interessanterweise gerade bei den Items, die durch Rückgriff auf die „didaktische Trickkiste“ bereits in einer erleichterten Version gestellt wurden (z.B. wurde die AIDS-Aufgabe auch in einer Häufigkeitsversion und die Wason-Aufgabe auch mit reellem Kontext gestellt). Das Ziegenproblem wurde sogar nur in einer vereinfachten Version gestellt, da aufgrund bisheriger Forschung davon auszugehen war, dass dieses Problem ansonsten gar nicht gelöst werden würde und somit das Item keine (oder nur sehr wenig) Varianz erzeugen würde (z.B. Atmaca & Krauss, 2001). Tatsächlich haben die erleichterten Versionen auch vergleichsweise höhere Lösungsraten (Tabelle 1, untere Zeile).

Die entscheidende neue Erkenntnis ist aber, dass durch diese kognitiven Erleichterungen der Zusammenhang von Aufgaben aus T mit logischem und probabilistischem Denken deutlich erhöht wurde: Die Korrelationen bewegen sich nun im Bereich von $r = .20$, was einem substantiellen positiven Zusammenhang entspricht. Demzufolge werden Items aus dem Bereich T durch eine Vereinfachung (z.B. mit natürlichen Häufigkeiten bzw. mit Kontext) nicht „zerstört“, sondern einer stochastischen bzw. logischen Bearbeitung durch Schüler(innen) überhaupt erst zugänglich gemacht.

6. Fazit

Wenn die „didaktische Trickkiste“ (im Wesentlichen hier die oftmals vorgeschlagene Verwendung von Häufigkeiten bzw. eines reellen statt abstrakten Aufgabenkontextes) eingesetzt wird, können „kognitive stochastische Täuschungen“ tendenziell eher mit logischen und stochastischen Fähigkeiten gelöst werden. In dieser Form „passen“ solche Aufgaben also interessanterweise sowohl eher in den Stochastikunterricht als auch in Intelligenztests. Bei ein- und derselben Aufgabe kann also – je nach Format – sowohl eine vergleichsweise hohe als auch eine niedrige Korrelation zu P bzw. L gefunden werden. Diese Ergebnisse, die in einer explorativen Analyse der PROLOG-Daten gewonnen wurden, müssen nun in einem nächsten Schritt systematisch in einem spezifisch zugeschnittenen Design bestätigt werden.

Literatur

Atmaca, S. & Krauss, S. (2001): Der Einfluss der Aufgabenformulierung auf stochastische Performanz – Das “Drei-Türen-Problem”. In: Stochastik in der Schule, 21, 3, 14-21.

Bruckmaier, G., Krauss, S. & Brunner, M. (2010): PROLOG: Eine Studie zum probabilistischen und logischen Denken von Jugendlichen in Luxemburg. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, 205-208.

Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (Eds.) (1982): Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. New York: Cambridge University Press.

Lisa Kathrin BRÜCKEL, Osnabrück

Spuren arithmetischen Denkens bei Vorschulkindern

Spuren sind vielseitig. Wir treffen auf sie nicht nur im Sand oder im Schnee, sondern auch im Bildungswesen in Form von „Denkspuren“, die Wissen, Fähigkeiten und entwickelte Vorstellungen anzeigen.

Im Osnabrücker Treffpunkt für mathematische Frühförderung *Mathe-Magie* unter Leitung von Prof. Dr. Schwank interessieren wir uns für solche „Denkspuren“ bei Kindern bezogen auf Mathematik. In stetiger Verknüpfung von Theorie und Praxis setzen wir uns insbesondere mit den ersten Ansätzen zahlbezogenen Denkens auseinander und versuchen, möglichst vielen Kindern den Einstieg in den Umgang mit Zahlen zu erleichtern und frühzeitig Fehlvorstellungen vorzubeugen.

Dazu gehört auch, dass wir uns für das interessieren, was im Bereich der mathematischen Frühförderung außerhalb unseres Treffpunkts an Förder- und Diagnosematerialien angeboten wird. Da unser Interesse schwerpunktmäßig auf dem einzelnen Kind liegt, wenden wir uns bevorzugt Testinstrumenten zu, die bereits existieren und als diagnosegeeignet angesehen werden und setzen sie für Einzelfallanalysen ein. Im Vordergrund steht bei der Interpretation der Testverläufe vor allem der mathematische Gehalt der Testaufgaben sowie diagnostische Erkenntnisse über das Denken der Kinder.

In unseren Praxisphasen haben wir gezielt den seit 2009 auf dem deutschen Markt erhältlichen TEDI-MATH (*Test Diagnostique des Compétences de Base en Mathématiques)* betrachtet. Dieser Test wird eingesetzt zur Erfassung numerisch-rechnerischer Fertigkeiten vom vorletzten Kindergartenjahr bis zur 3. Klasse. Laut Handbuch ist der Test für die Klassifikation im mittleren bzw. unteren Feld der mathematischen Leistungen und zur Feststellung von Dyskalkulie gut geeignet.

Bei der Testaufgabe *Klassifizieren nach numerischer Größe* werden neun Karten mit ungeordnet aufgedruckten Kreuzen vor das Kind auf den Tisch gelegt; es gibt jeweils drei Karten mit 3, 4 bzw. 5 Kreuzen. Der Auftrag an das Kind lautet, diejenigen Karten auf einen Stapel zu legen, die zusammengehören. Es wird hierbei nicht vorgegeben, nach welchen Kriterien zu ordnen ist, es wird jedoch im Sinne des Testkonzepts eine numerische Klassifikation erwartet. Als richtig gewertet werden folgende Sortierungsarten: 3,3,3///4,4,4///5,5,5 bzw. 3,4,5///3,4,5///3,4,5.

Wir haben den Test u.a. mit der 5-jährigen Mandy, die wir bereits durch eine andere Studie kennen, in ihrem letzten Kindergartenjahr durchgeführt.

Die Spiel-<u>L</u>eiterin verteilt die Karten auf dem Tisch und fordert <u>M</u>andy auf, die Karten zu ordnen:

M: [*nimmt zwei Karten, auf denen jeweils drei Kreuze abgebildet sind und legt sie vor sich hin*] Hier sind beides drei.

L: [*zustimmend*] Mhm.

M: [*nimmt eine Karte mit vier Kreuzen*] Hier sind vier. Sieht so aus wie mein letzter Buchstabe, weil da geht auch so ein Strich hoch ... und dann nach da und dann nach da [*zieht mit dem Finger auf der Karte eine Verbindung zwischen den Kreuzen, so dass ein „Ypsilon“ erkennbar wird*].

L: Stimmt, das „Ypsilon“, nicht?

M: Ja. Das „Ypsilon“. [*schaut auf die restlichen Karten und nimmt eine weitere Karte in die Hand*] Das [ist] kein „Ypsilon“. [*dreht die Karte*] Doch.

L: Stimmt. Ja, sieht so ähnlich aus. [...] Die gehören zusammen?

M: Ja. [*legt die beiden Karten zur Seite und sortiert die restlichen Karten zum Teil nach dem numerischen Kriterium. Zum Schluss nimmt sie die einzig verbleibende, mit drei Kreuzen bedruckte Karte hoch*] Der [ist] ganz alleine ... der gehört dann zu denen [*legt die letzte Karte zu den "Ypsilon"-Karten*].

L: Warum zu denen?

M: Weil der auch so welche Striche hat. So wie ein „I“.

L: Ah, wie ein „Ypsilon“ meinst du?

M: Ja.

Das Mädchen löst die Aufgabe auf eine andere Art und Weise, als von den Autoren des Tests gedacht. Neben der fast komplett durchgehaltenen Strategie, die Karten nach numerischen Kriterien zu ordnen, zieht sie eine Verbindung zum letzten Buchstaben ihres Namens (dem "Ypsilon"). Diese Vorstellung einmal gewonnen, sucht sie nach weiteren Karten, die ihr Denkkonzept unterstützen und greift nur gelegentlich auf den zunächst begonnenen Ansatz einer numerischen Klassifikation zurück. Obwohl im Arbeitsauftrag ein Sortieren nach numerischen Kriterien nicht explizit eingefordert wird, würde sie laut Testauswertung für diesen Aufgabenteil keine Punkte erhalten. Da Mandy im Verlauf der Aufgabenbearbeitung jedoch zwei Dreier- und zwei Fünferkarten richtig zuordnet, stellt sich die Frage, ob ihre "Y-Strategie" ihre numerisch-rechnerischen Fähigkeiten verschleiert und sie mit anders aufgedruckten Kreuzen die Aufgabe durchgehend "korrekt" gelöst hätte. Diese Art der Aufgabe scheint also für eine Diagnose der mathematischen Fähigkeiten dieses Kindes eher ungeeignet zu sein, da die Auswertungsvorgaben es nicht vorsehen, näher auf den Bearbeitungsprozess der Aufgabe einzugehen und diesen mit in die Bewertung einzubeziehen.

Darüber hinaus fokussiert die Aufgabe vorrangig auf Zuordnungs- und Mengenvorstellungen und damit auf den Kardinalzahlaspekt der Zahlen. Es wird also verstärkt Wissen bezüglich des Ansatzes "Wie viele Objekte sind vorhanden?" abgerufen. Zum Lösen der Aufgabe reicht das Zählen bis fünf oder ein Vergleich „Kreuz für Kreuz“ auf den unterschiedlichen Karten vollkommen aus. Sollte ein Kind also die Aufgabe im Sinne des Testkonzepts korrekt lösen, könnten wir daraus kaum schließen, dass es etwas von dem Aufbau der Zahlen versteht und in Zahlen denken kann, was für spätere mathematische Operationen dringend erforderlich ist.

Zum Denken in Zahlen ist vielmehr ein Verständnis für den Dedekindschen Ordinalzahlaspekt (1969/1887) notwendig, d.h. für die Abfolge der Zahlen und ihre Nachbarschaftsbeziehungen. Dies ist nicht zu verwechseln mit den Ordnungszahlen (der erste, der zweite, der dritte, usw.). Charles Brainerd (1973, 1979) zeigte schon in den siebziger Jahren in seinen Studien zur Entstehung des Zahlkonzepts bei Kindern, dass ein Sinn für Ordinalität vor dem Kardinalzahlaspekt erworben wird. Es stellte sich zudem heraus, dass es Kindern, die im Bereich der Ordinalität gefördert wurden, leichter fällt, Rechenaufgaben korrekt zu lösen, als Kindern, bei denen verstärkt Mengenvorstellungen trainiert wurden. Leider beziehen sich einige der Aufgaben in den derzeit erhältlichen Diagnose- und Fördermaterialien vorrangig auf Mengenvorstellungen und zeigen somit das Potenzial von Kindern im Ordinalzahlbereich nur unzureichend auf bzw. tragen zu einer Weiterentwicklung in diesem Bereich kaum bei.

Einige Vorschulkinder sind jedoch nicht nur im ordinalen Bereich schon zu bemerkenswerten Leistungen in der Lage. So lässt sich durch die Testauswertung aller vorgesehenen Aufgaben von TEDI-MATH erkennen, dass Mandy ihrem Alter gemäß insgesamt durchschnittliche numerisch-rechnerische Fertigkeiten besitzt. Schaut man sich allerdings den Testablauf genauer an, kann man feststellen, dass ihre Einsichten bereits weitreichender sind.

In dem Testabschnitt *Rechnen mit Objektabbildungen* wird dem Kind u.a. eine Zeichnung mit einer Person gezeigt, die fünf Bälle übereinander jongliert, und folgende Frage gestellt: "Wie viel sind fünf Bälle minus zwei Bälle?" Bei Mandy zeigt sich die Schwierigkeit, dass sie als Kindergartenkind zunächst mit der Vokabel "minus" nichts anfangen kann, obwohl sie eine Einsicht in den Vorgang des Subtrahierens hat. Sie vermutet daher, dass sie aufgefordert ist, die beiden Anzahlen an Bällen zu addieren, wie dies auch bei den Aufgaben davor der Fall gewesen ist. Erst nach Verändern der Fragestellung versteht Mandy den Rechenauftrag:

L: Dann zeige ich dir jetzt noch was anderes. Fünf Bälle minus zwei Bälle.

M: Das gibt ... [*überlegt, rechnet dann mit ihren Fingern*] Sieben.

L: Mhm. [*zeigt auf die Abbildung*] Und wenn ich jetzt fünf Bälle hab ... und nehme zwei Bälle davon weg, zum Beispiel die obersten beiden?

M: Mhm ... dann hast du noch drei.

L: [*zustimmend*] Mhm. Und woher weißt du das?

M: Weil wenn man zwei da weg nimmt [*zeigt auf die obersten Bälle*] ... das hab ich auch schon mal gemacht. Ich hab fünf Bälle, nein ich hab fünf Irgendwas und dann ... wenn ich dann zwei wegnehme, dann sind das nur noch drei.

Bei der Begründung ihrer Rechenweise erwähnt Mandy, dass sie selbst einmal eine ähnliche Handlung durchgeführt hat, löst sich hierbei jedoch von den konkreten Objekten und spricht nicht mehr von fünf Bällen, sondern von fünf Irgendwas. Irgendwas dient hier als Platzhalter, der im Verständnis des Mädchens durch beliebige Objekte ersetzt werden kann und den allgemeingültigen Charakter ihrer Rechnung aufzeigt. Ein erster Schritt auf dem Weg zum Variablenverständnis ist spürbar. Das Einfordern von Begründungen bietet uns also hierbei die Möglichkeit, verstärkt die Vorgehensweise des Kindes in den Blick zu nehmen und so etwas über die ersten Spuren arithmetischen Denkens von Kindern zu erfahren.

Auf der Basis der bislang gewonnenen Erkenntnisse durch den Einsatz von verschiedenen mathematikdidaktischen Materialien werden in meinem Promotionsprojekt Förder-Spielstunden speziell für Kinder mit Lernschwierigkeiten entwickelt. In diesen Spielstunden wird das Zahlverständnis und der darauf aufbauende Zahlenkonstruktionssinn (vgl. Schwank 2005, 2011) sowie das logisch schlussfolgernde Argumentieren in den Mittelpunkt gestellt.

Literatur

Brainerd, C. (1973): The Origins of Number Concepts. In: Scientific American, 228 (3), 101-109.

Brainerd, C. (1979): The Origins of the Number Concept. New York: Praeger.

Dedekind, R. (1969/1887): Was sind und was sollen die Zahlen? Studienausgabe der 10. Auflage. Braunschweig: Vieweg.

Schwank, I. (2005): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. von Aster & J.-H. Lorenz: *Rechenstörungen bei Kindern - Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 93-133.

Schwank, I. (2011): Mathematisches Grundverständnis: Denken will erlernt werden. In H. Keller (Hrsg.): *Handbuch der Kleinkindforschung.* 4. korrigierte, überarbeitete und erweiterte Auflage. Bern: Huber.

Nils BUCHHOLTZ, Hamburg

Professionelles Wissen in Zeiten von Bachelor und Master – Konzeptualisierung der Vergleichsstudie TEDS-LT in der Deutsch-, Englisch- und Mathematiklehramtsausbildung

Die Studie **T**eacher **E**ducation **D**evelopement **S**tudy – **L**earning to **T**each (TEDS-LT) basiert auf der Konzeptualisierung der professionellen Kompetenz zukünftiger Mathematiklehrerinnen und -lehrer, wie sie von Weinert (1999) und Bromme (1992, 1997) als multidimensionales Konstrukt entwickelt wurde und auch in den Vorläuferstudien MT21 (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2008) und TEDS-M 2008 (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010) Anwendung gefunden hat. Die Konzeptualisierung der Studie TEDS-LT sowie erste Ergebnisse finden sich in Blömeke et. al. (2011).

1. Ziele und Anlage der Studie

Ziel der über drei Jahre vom BMBF geförderten und durch ein großes Konsortium von Kolleginnen und Kollegen der Fachdidaktiken und Erziehungswissenschaften mitgetragenen Studie ist es, die im Bereich des Fachs Mathematik inzwischen deutlich fortgeschrittene empirische Bildungsforschung im Bereich der *large scale* Untersuchungen auf die Fächer Deutsch und Englisch zu übertragen, sowie den Kompetenzerwerb der Studierenden nach der bereits an vielen Universitäten erfolgten Umstellung der Lehramtsstudiengänge auf Bachelor und Master unter den neuen Studienbedingungen zu untersuchen.

Die geplante Längsschnittstudie untersucht den Kompetenzerwerb von Studierenden verschiedenster Lehramtsstudiengänge an acht deutschen Universitäten. Die Zielgruppe des ersten Messzeitpunktes im WS 2009/2010 lag bei Studierenden der Facher Deutsch, Englisch und Mathematik, die sich im 3. – 5. Semester in Lehramtsstudiengängen mit angestrebter Lehrbefähigung für die Sekundarstufe I befinden. Dabei wurden sowohl Bachelorstudiengänge als auch traditionelle Staatsexamensstudiengänge berücksichtigt. Insgesamt nahmen 1568 Studierende an der Studie teil (N = 500 im Fach Mathematik). Ein weiterer Messzeitpunkt im SS 2011 mit der Zielgruppe der Lehramtsstudierenden des 6. – 8. Semesters befindet sich derzeit in Planung. Für Aussagen über die Kompetenzentwicklung von Studierenden sind damit sowohl der Bachelorstudiengang als auch der Masterstudiengang repräsentiert.

In der Studie wird sich auf zentrale Aspekte des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern konzentriert, die von Shulman (1986) herausgearbeitet wurden und den theoretischen Rahmen der Konzeptualisierung des professionellen Wissens in TEDS-LT bilden:

- Fachwissenschaftliches Wissen
- Fachdidaktisches Wissen
- Pädagogisches Wissen

Diese Wissensdimensionen wurden zunächst für eine geeignete Operationalisierung nach fachspezifisch-inhaltlichen Gesichtspunkten weiter ausdifferenziert. Für die Konzeptualisierung der *fachwissenschaftlichen* Skalen der Studie wurden zwei verschiedene grundlegende Teilbereiche der Mathematik herangezogen: *Algebra* und *Arithmetik*. Diese beiden Inhaltsbereiche umfassen erstens das universitäre mathematische Wissen, das bis zum fünften Semester universitärer Mathematikbildung erworben sein soll, zweitens bilden diese Bereiche auch die thematische Schwerpunktsetzung in den unterschiedlichen Studiengängen für das Grund-, Haupt- und Realschullehramt und das Gymnasiallehramt ab. Drittens werden mit dieser Auswahl zwei spezielle Inhaltsbereiche aufgegriffen, die bereits in vorangegangenen Vergleichsstudien wie etwa TEDS-M 2008 (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010) als relevant für das mathematische Wissen angesehen wurden. Auf diese Weise wird durch eine parallele Konzeptualisierung der Wissensdimensionen ein Anschluss der Studie speziell an TEDS-M 2008 ermöglicht.

Die verschiedenen Gegenstandsbereiche des *mathematikdidaktischen* Wissens orientieren sich in ihren Anforderungen an vier allgemeinen Perspektiven. Diese sind:

- eine mathematisch geprägte Perspektive
- eine psychologisch geprägte Perspektive
- eine erziehungswissenschaftlich geprägte Perspektive
- eine allgemein-didaktisch geprägte Perspektive

Es wurden darüber hinaus spezielle Bereiche der Didaktik besonders betont:

- Umgang mit heterogener Schülerschaft
- Beurteilung von Leistungen der Schülerinnen und Schüler

Mit Hilfe eines weiterentwickelten Kognitionsmodells von Anderson & Krathwohl (2001) wurden die einzelnen Wissensdimensionen über die inhaltliche Differenzierung hinaus bei der Erstellung von geeigneten Testitems mit Hilfe einer Beschreibung von kognitiven Prozessen klassifiziert.

Neben Fakten-, begrifflichem, prozeduralem und metakognitivem Wissen fanden Prozesse des Erinnerns, Verstehens, Anwendens, Analysierens, Bewertens und Erschaffens Berücksichtigung.

Um den im Fach Mathematik deutlich ausgeprägten Unterschieden in den Studiengängen des Lehramts für Grund-, Haupt- und Realschule (GHR) und gymnasialer Oberstufe (GyGS) gerecht zu werden, wurden für die erste Erhebung zwei unterschiedliche Testhefte konzipiert, die verschiedene studiengangsspezifische inhaltliche Schwerpunkte beinhalten, aber über einen gemeinsamen Itemkern testtheoretisch miteinander verankert sind. Es wurden in den auf 90 min. Testzeit ausgelegten Testheften dabei neben einigen offenen Items mehrheitlich geschlossene Multiple-Choice-Items eingesetzt.

Für TEDS-LT stehen in Hinblick auf die curriculare Validität der Testkonstruktion drei verschiedene theoretische Referenzen im Vordergrund. Die Inhalte, die mit den eingesetzten Testitems abgedeckt werden, ergeben sich aus den „Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik“ (DMV, GDM & MNU, 2008), die als Ergänzung des zweiten wichtigen Bezugspunktes – den Lehrerbildungsstandards der KMK (KMK, 2008) – anzusehen sind, in denen mit der fachdidaktischen Expertise aber noch einmal explizit die zentralen Zusammenhänge der in den KMK-Standards beschriebenen Kompetenzen und der Fachmathematik herausgearbeitet wurden. Einen dritten Bezugspunkt bildet das TEDS-M 2008-Framework.

2. Ergebnisse des ersten Messzeitpunkts

Die Testdaten zur Erfassung der verschiedenen Wissensdimensionen wurden einer Rasch-Skalierung unterzogen, wobei alle Skalen getrennt eindimensional und jeweils für die Gesamtgruppe skaliert wurden. Die Reliabilität der Skalen ist dabei durchgängig als zufriedenstellend anzusehen (Skalen-Reliabilitäten zwischen 0,74 und 0,77). Alle Skalierungen erfolgten in ConQuest.

Es ergaben sich für die einzelnen getesteten Dimensionen auf der Ebene der Fähigkeitsparameter Gesamtscores, die miteinander in Beziehung gesetzt werden können. Die (Pearson-)Korrelationen zwischen den unterschiedlichen Wissensdimensionen fallen dabei durchgängig im Bereich von .523 bis .647 aus. Alle Korrelationen sind auf dem Niveau von 0,01 (2-seitig) signifikant. Außerdem sind alle Korrelationen – wie erwartet – positiv. Dies stützt die Annahme, dass es sich bei dem professionellen Wissen von angehenden Mathematiklehrkräften um ein Konstrukt handelt, bei dem sowohl fachliche als auch fachdidaktische Wissensanteile eng miteinander zusammenhängen.

Ferner zeigten sich im Bereich des mathematischen und mathematikdidaktischen Fachwissens signifikante Leistungsunterschiede zwischen den GyGS-Studierenden und den GHR-Studierenden zugunsten Ersterer. Begleitende Varianzanalysen, die den Einfluss der Hochschulen und der Semesterzahl aus den Testergebnissen herauspartialisierten, stützen die Annahme eines signifikanten Studiengang-Einflusses auf die Mittelwertsunterschiede in allen getesteten Wissensdimensionen.

Literatur

Anderson, L. W. & Krathwohl, D. R. (2001): A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom´s taxonomy of educational objectives. New York: Addison – Wesley.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2008): Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematik-Studierender und -referendare – Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung. – Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann R. (Hrsg.) (2010): TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Bremerich-Vos, A., Haudeck, H., Kaiser, G., Lehmann, R., Nold, G., Schwip-pert, K. & Willenberg, H. (Hrsg.) (im Druck): Messung von Lehrerkompetenzen in gering strukturierten Domänen. Testkonzeption und erste Ergebnisse zur Deutsch-, Englisch- und Mathematiklehrerausbildung sowie zum Studierverhalten angehender Lehrkräfte. Münster: Waxmann.

Bromme, R. (1992): Der Lehrer als Experte: Zur Psychologie des professionellen Wissens. Bern: Huber.

Bromme, R. (1997): Kompetenzen, Funktionen und unterrichtliches Handeln des Lehrers. In: Weinert, F. E. (Hg.): Enzyklopädie der Psychologie: Psychologie des Unterrichts und der Schule. Bd. 3. Göttingen: Hogrefe, S. 177–212.

DMV, GDM & MNU (2008): Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM, MNU. http://www.math.uni-sb.de/ag/lambert/LAHLAR/ StandardsLehrerbildungMathematik.pdf. Letzter Zugriff 14.09.2010.

KMK (2008) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.): Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.2008 i.d.F. vom 08.12.2008. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2008/2008_10_16-Fachprofile-Lehrerbildung.pdf. Letzter Zugriff 22.10.2010.

Shulman, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching. In: Educational Researcher, 15(2), S. 4–14.

Weinert, F.E. (1999): Konzepte der Kompetenz. Gutachten zum OECD-Projekt „Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations (DeSeCo)“. Neuchatel, Schweiz: Bundesamt für Statistik.

Andreas BÜCHTER, Dortmund

Mathematikleistung und Raumvorstellung – Ergebnisse einer empirischen Untersuchung

In der mathematikdidaktischen und psychologischen Literatur findet man zahlreiche Befunde zu Geschlechterunterschieden in der Mathematikleistung und zu Geschlechterunterschieden in der Raumvorstellung. Obwohl die Befundlage dabei heterogen und scheinbar widersprüchlich ist, werden Geschlechterunterschiede in der Mathematikleistung häufig auf entsprechende Unterschiede in der Raumvorstellung zurückgeführt:

> „Diese Ergebnisse weisen darauf hin, dass Leistungsnachteile für Mädchen insbesondere bei Aktivitäten zu beobachten sind, die sich auf Modellierungen beziehen (Heranziehen eines mentalen Modells in den Naturwissenschaften, rechnerisches Modellieren sowie Mathematisierung von Situationen in der Mathematik). Dies wiederum dürfte zumindest teilweise auf die in der Literatur beschriebene relative Schwäche von Mädchen im räumlichen Vorstellungsvermögen zurückzuführen sein“ (Stanat & Kunter, 2001, S. 267).

Da solche Erklärungsversuche bislang weder theoretisch noch empirisch hinreichend abgesichert sind, ist der Autor in einer eigenen Untersuchung (Büchter, 2011) der Frage nachgegangen, inwieweit sich Geschlechterunterschiede in der Mathematikleistung durch entsprechende Unterschiede in der Raumvorstellung statistisch erklären lassen („Spatial Mediation Hypothesis“, vgl. Burnett et al., 1979). Passend zu dieser Fragestellung wurden sowohl Mathematikleistung als auch Raumvorstellung quantitativ mit psychometrisch abgesicherten Tests erfasst. Als Mathematiktest wurden dabei die nordrhein-westfälischen *Lernstandserhebungen in der Jahrgangsstufe 9 (LSE 9)* verwendet. Ein Instrument zur differenzierten Erfassung der Raumvorstellung wurde in einer Voruntersuchung entwickelt. Im Rahmen der Hauptuntersuchung wurden die Testleistungen von insgesamt 464 Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 9 (aus allen Schulformen) zunächst für Raumvorstellung und Mathematikleistung separat und dann mit Blick auf die *Spatial Mediation Hypothesis* ausgewertet.

1. Befunde zur Raumvorstellung

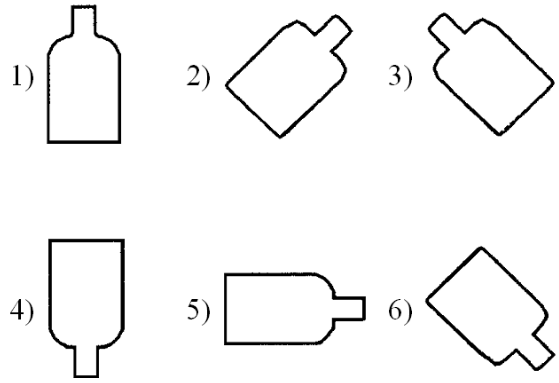
Für das Konstrukt *Raumvorstellung* liegt kein allgemein akzeptiertes Komponenten-Modell vor. Für die Untersuchung von Geschlechterunterschieden in der Raumvorstellung haben Linn & Petersen (1985) im Rahmen einer Meta-Analyse ein 3-Komponenten-Modell entwickelt, das sowohl kognitionspsychologisch (mit Blick auf die idealtypisch ablaufenden mentalen Prozesse) plausibel als auch psychometrisch (im Sinne relativ homogener Befunde zu Geschlechterunterschieden) abgesichert ist.

3-Komponenten-Modell der Raumvorstellung (Linn & Petersen, 1985)

Spatial Perception

Die Fähigkeit, räumliche Beziehungen unter Bezugnahme auf den eigenen Körper und trotz ablenkender Informationen zu bestimmen.

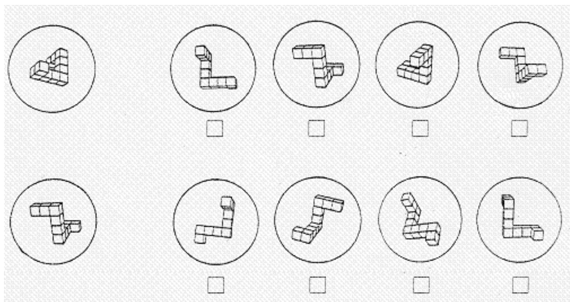
Test: *Water-Level-Tasks (WLT)*



Mental Rotation

Die Fähigkeit, vorgegebene (zwei- oder dreidimensionale) Objekte (schnell und präzise) mental zu rotieren.

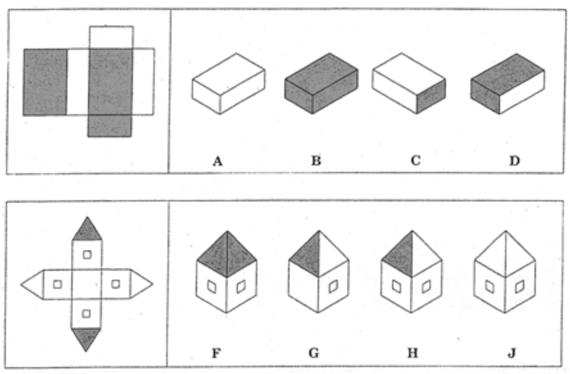
Test: *Mental Rotation Test (MRT)*



Spatial Visualization

Die Fähigkeit, komplexere und mehrschrittige Bearbeitung räumlicher Informationen mental durchzuführen. Dabei können Teilprozesse *Spatial Perception* oder *Mental Rotation* benötigen.

Test: *Differential Aptitude Test – Subtest Spatial Relations (DAT:SR)*



Mit den in der obigen Tabelle angegebenen Referenztests konnten die Befunde von Linn & Petersen zu Geschlechterunterschieden in den drei Komponenten der Raumvorstellung repliziert werden. Dabei war war die Effektstärke (zugunsten der männlichen Versuchspersonen) in der Komponente *Mental Rotation* mit d = 0,80 am größten. Die eingesetzte Version des *MRT* enthielt zehn Items, die ohne relevante Zeitrestriktion bearbeitet werden konnten. Die Standardabweichung für die Anzahl richtig gelöster Testitems betrug s = 2,94, sodass die genannte Effektstärke einem Mittelwertunterschied (zwischen den Gruppen der männlichen und weiblichen Versuchspersonen) von fast 2,5 richtig gelösten Items entspricht und somit zweifellos nicht nur signifikant, sondern auch praktisch bedeutsam ist.

Die folgende Tabelle gibt die Effektstärke für alle drei Komponenten wieder. Dabei muss beachtet werden, dass die Effektstärke für den *DAT:SR* nicht signifikant von Null verschieden ist.

Geschlechterunterschiede in der Raumvorstellung (n = 466)

Komponente (Test)	Effektstärke	Signifikanz
Spatial Perception (WLT)	0,40	ja (p = 0,002)
Mental Rotation (MRT)	0,80	ja (p = 0,000)
Spatial Visualization (DAT:SR)	0,08	nein (p = 0,462)

Die in der obigen Tabelle dargestellten Ergebnisse zu den drei eingesetzten Tests deuten darauf hin, dass der *DAT:SR* als Referenztest für *Spatial Visualization* nicht als potenzieller Mediator für Geschlechterunterschiede in der Mathematikleistung infrage kommt. Das größte Potenzial dürfte den Ergebnissen und auch den Befunden in der Literatur zufolge der *MRT* als Referenztest für *Mental Rotation* haben.

2. Befunde zur Mathematikleistung

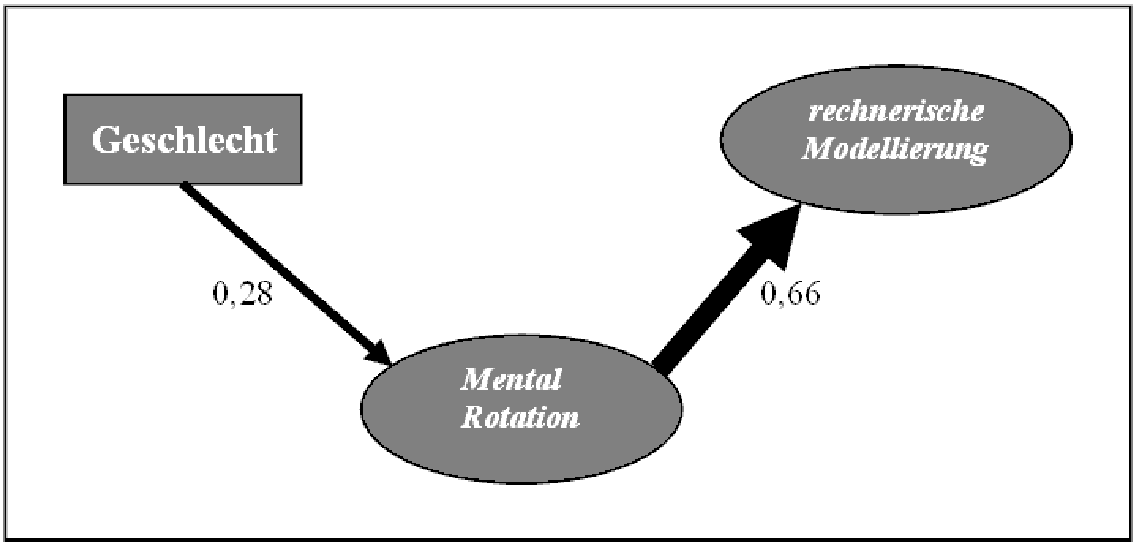
Der *LSE 9*-Mathematiktest basiert in seiner Zusammenstellung (und seiner Auswertung als Vergleichsarbeit in Nordrhein-Westfalen) auf einer Skalierung nach dem eindimensionalen Rasch-Modell. Daher ist es für die Diskussion um die Dimensionalität von Fachleistungen umso interessanter, dass eine Skalierung nach dem dreidimensionalen Rasch-Modell mit den *Typen mathematischen Arbeitens* (*technische Aufgaben*, *rechnerische Modellierungsaufgaben* und *begriffliche Modellierungsaufgaben*; vgl. Neubrand et al., 2002) als Dimensionen bessere Fit-Werte liefert als die eindimensionale Modellierung der Daten (vgl. Büchter, 2011, S. 230 f.).

Auch für die Frage der Geschlechterunterschiede liefern die *Typen mathematischen Arbeitens* eine ergiebige Ausdifferenzierung, die den im Eingangszitat von Stanat & Kunter (2001) berichteten Befund bestätigt: Während die Effektstärke für Geschlechterunterschiede (zugunsten männlicher Versuchspersonen) im gesamten *LSE 9*-Mathematiktest $d_{\text{ges}} = 0{,}63$ beträgt, sinkt sie für den Subtest der *technischen Aufgaben* auf $d_{\text{tech}} = 0{,}48$ und steigt sie für den Subtest der *rechnerischen Modellierungsaufgaben* auf $d_{\text{r\_mod}} = 0{,}72$.

Bei der (zunächst statistischen) Erklärung von Geschlechterunterschieden in der Mathematikleistung dürften also *rechnerische Modellierungsaufgaben* von besonderem Interesse sein.

3. Befunde zur Spatial Mediation Hypothesis

Die *Spatial Mediation Hypothesis* lässt sich empirisch gut mithilfe entsprechender Strukturgleichungsmodelle überprüfen, in denen das Strukturmodell (Raumvorstellung als Mediator zwischen Geschlecht und Mathematikleistung) und das Messmodell (beobachtetes Testverhalten wird jeweils rechnerisch auf die latenten Variablen Raumvorstellung bzw. Mathematikleistung zurückgeführt) enthalten sind. Die folgende Abbildung enthält das entsprechend bestimmte Modell für den Raumvorstellungstest *MRT* als Referenztest für *Mental Rotation* und die *rechnerischen Modellierungsaufgaben* als Mathematik-Subtest. Tatsächlich existiert statistisch kein eigenständiger Effekt der Variable Geschlecht auf die Leistung bei *rechnerischen Modellierungsaufgaben*, wenn *Mental Rotation* in einem gemeinsamen Modell berücksichtigt wird.



Literatur

Büchter, A. (2011). *Zur Erforschung von Mathematikleistung. Theoretische Studie und empirische Untersuchung des Einflussfaktors Raumvorstellung*. Dortmund: Technische Universität Dortmund. (Dissertation; online verfügbar über die Deutsche Nationalbibliothek)

Burnett, S. A., Lane, D. M. & Dratt, L. M. (1979). Spatial Visualiziation and Sex Differences in Quantitative Ability. *Intelligence, 3*, 345-354.

Linn, M. A. & Petersen, A. C. (1985). Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability. A Meta-Analysis. *Child Development, 56 (6),* 1479-1498.

Neubrand, M., Klieme, E., Lüdtke, O., & Neubrand, J. (2002). Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. *Unterrichtswissenschaft, 30,* 100–119.

Stanat, P. & Kunter, M. (2001). Geschlechterunterschiede in Basiskompetenzen. In Deutsches PISA-Konsortium (Hg.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 249-269). Opladen: Leske+Budrich.

Michael BÜRKER, Freiburg; Jürgen KURY, Freiburg

Mathematik am Freiburger Münster – Anregungen für einen projektorientierten Mathematikunterricht

Im Folgenden soll den Lehrerinnen und Lehrern Anregungen für einen fächerübergreifenden Unterricht rund um das Thema „Mathematik am Freiburger Münster“ gegeben werden. Dabei geht der Blick über das Fach Mathematik hinaus und umfasst theologische, geschichtliche und kunsthistorische Aspekte.

Wir gliedern den Beitrag in folgende Teile:

- Zahlensymbolik
- Goldener Schnitt
- Materialien für Schülerinnen und Schüler

Die mittelalterliche **Zahlensymbolik** spielt bei der Architektur des Freiburger Münsters eine wesentliche Rolle. Hier die Bedeutung der Zahlen für die Menschen des Mittelalters im Überblick (Bezüge zum Freiburger Münster sind durch Fettdruck gekennzeichnet):

1: Symbol für die Einheit des Universums

2: Symbol der Dualität, von Gegensatzpaaren wie z. B. Gut und Böse, Mann und Frau, Tag und Nacht, **Selige und Verdammte im Tympanon der Portalhalle**

3: Symbol der Trinität (dreieiniger Gott)

4: Symbol des Irdischen, der 4 Himmelsrichtungen, 4 Elemente,

4 Jahreszeiten

Himmelsrichtungen:

- Osten: Sonnenaufgang, Geburt Jesu
- Süden: Strahlende Sonne am Mittag, Liebe Gottes zu den Menschen
- Westen: Sonnenuntergang, Wiederkunft Jesu beim Weltgericht
- Norden: Nacht, Kälte, Tod

Diese Bedeutung der 4 Himmelsrichtungen können auch in der Architektur der 4 Seiten des Münsters (wie in allen älteren Kirchenbauten) abgelesen werden: Z. B. innerhalb des Münsters befindet sich im **Osten der Chor**, **auf der Westseite** das **Weltge-**

richt im Tympanon der Portalhalle, außerhalb des Münsters findet an der **Südseite des Münsters** täglich der Markt als Symbol menschlicher Geschäftigkeit statt.

5: Die Zahl 5 taucht in der Bibel u. a. im Zusammenhang mit den „5 Büchern Mose“ auf. Die „**5 klugen und 5 törichten Jungfrauen**“ treten als Figurenzyklus in der **Portalhalle des Münsters** auf**.**

6: Vollkommenheit, 6 als vollkommene Zahl: = 1 + 2 + 3,
6 Schöpfungstage, 6 Werke der Barmherzigkeit.

7: heilige Zahl, 7 = 3 + 4, 7 Bitten im Vaterunser, 3 in Bezug auf Gott, 4 in Bezug auf die Menschen, **3-gliedrige Fenster auf der Nordseite, 4-gliedrige Fenster auf der Südseite des Münsters, die 7 freien Künste des Mittelalters, die in der Portalhalle durch Frauenfiguren dargestellt sind (Grammatik, Dialektik, Rhetorik, Geometrie, Musik, Arithmetik, Astronomie)**

8: Verdopplung der 4, **Münsterturm unterhalb der Sterngalerie viereckig, oberhalb achteckig.** Das Achteck ist Zwischenstadium zwischen Welt (4-eckig) und Himmel (Kreis als Symbol der Vollkommenheit).

12: 12 = 3 · 4, 12 Stämme Israels, 12 Apostel, 12 Monate.

Grundmaß des Freiburger Münsters ist die Elle (54 cm). Das Freiburger Münster ist 210 Ellen lang (Langhaus + Chor) und der Turm 210 Ellen hoch.

Der Goldene Schnitt (GS).

Der GS taucht in der Gotik und vor allem Renaissance immer wieder in der Sakralarchitektur auf, so auch beim Freiburger Münster.

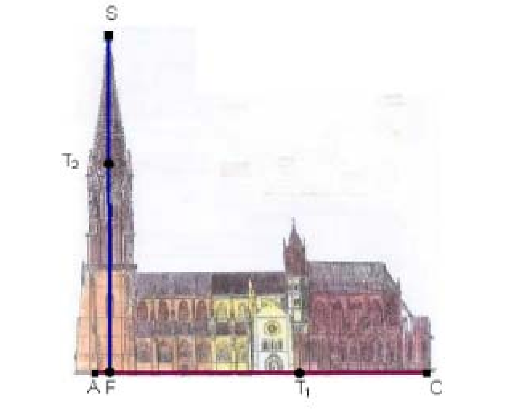


Abb.1 (Quelle der Bildvorlage: http://www.freiburgermuenster.info/muenster.php?id=bauphasen)

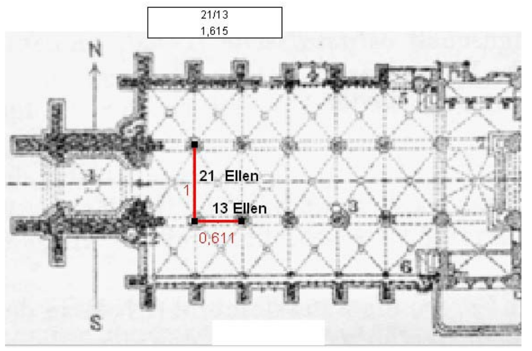


Abb.2 (Quelle der Bildvorlage: http://lexikon.freenet.de/Datei:Freiburg_Muenster_Plan.png

Das Münster ist in seiner Länge (Strecke AC) durch den Punkt T_1, der Turm in der Höhe (Strecke FS) durch den Punkt T_2 im GS geteilt, genaueres s. [1]. Die Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… wurde von den Baumeistern oft als ganzzahlige Annäherung an den GS benutzt. So ist auch das aus benachbarten Säulen des Hauptschiffs gebildete Rechteck (Abb. 2) näherungsweise ein goldenes mit den Seitenlängen 21 und 13 Ellen (es ist $\frac{13}{21} \approx 0{,}611$). Bekanntlich strebt die Folge der Quotienten zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen die Goldene Zahl $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$ bzw. gegen den Kehrwert von Φ, also gegen 0,618…

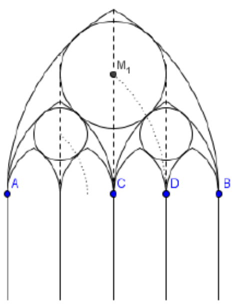
Interessant ist, dass für die Konstruktion des Münstergrundrisses vermutlich die in [1] beschriebene Idee benutzt wurde. Erstaunlicherweise stehen die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 1 und die Diagonale eines Einheitsquadrats im Verhältnis 0,612, also fast genau im Verhältnis des GS! Das muss den mittelalterlichen Baumeistern bekannt gewesen sein.

Materialien für Schülerinnen und Schüler.

Ein Projekttag zum Freiburger Münster lohnt sich auf jeden Fall, vor allem fächerübergreifend in Verbindung mit Religion, Geschichte und Kunst. Die beiden Autoren dieses Beitrags haben dies selbst mit Oberstufenklassen durchgeführt, Jürgen Kury in den 90iger Jahren, Michael Bürker mit Studierenden des Seminars über den „Einsatz unterschiedlicher Unterrichtsmethoden“ im SS 2009 und SS 2010. Ein möglicher Ablaufplan steht in [3]. Im Folgenden soll noch auf einige Aufgaben für SuS verschiedener Altersstufen verwiesen werden (ausführlich in [2]).

Aufgabe 1 (Für SuS der Klassenstufe 7)

Lammportal des Münsters Freiburg I

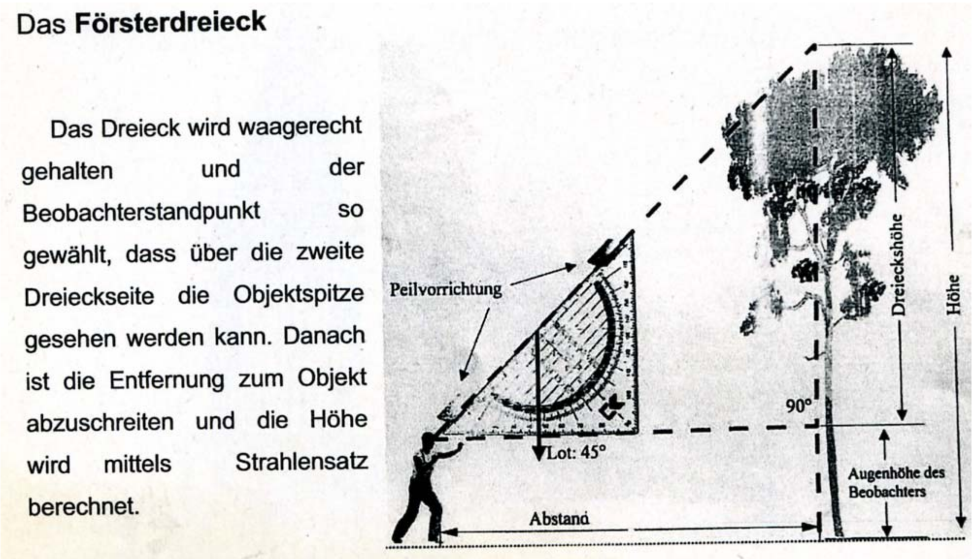


Zeichne nach für $|AB| = 8$ cm.

Quelle 1: http://www.freiburgermuenster.info/index.php?id=176 (Ausschnitt)

Die Höhenmessung des Turms kann auf verschiedene Weise erfolgen, z. B. mit dem Försterdreieck. Die SuS mussten herausfinden, an welchen Stellen im Umkreis des Münsters sie die Messung durchführen mussten.

Aufgabe 2 (Für SuS der Klassenstufe 10)



Die folgende Aufgabe ist eine Fermi-Aufgabe, bei der die SuS etliche Randbedingungen abschätzen mussten.

Aufgabe 3 (für SuS der Klassenstufe 10)

Bestimme das Volumen des Münsters und die Masse des Münsters.

Als Ergebnisse kamen für das Volumen Werte zwischen 95 000 m³ und 140 000 m³, für die Masse Werte zwischen 15 000 t und 30 000 t heraus. Die unterschiedlichen Ergebnisse resultieren aus den Ansätzen für die durchschnittliche Mauerdicke.

Die Unterrichtsmaterialien zum Thema „Mathematik am Freiburger Münter

Literatur:

[1]Brinkmann, A.; Bürker, M.: Bericht des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathema tikunterricht“- In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Franzbecker, Hildesheim.

[2]Bürker, Michael: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/infos.html#Lehrerfortbildungen

[3]Kury, Jürgen: http://www.zum.de/Faecher/M/BW/M9N/LP5/muenster.html

Elmar COHORS-FRESENBORG, Osnabrück

Metakognitive und diskursive Aktivitäten im Unterricht der Mathematik und anderer geisteswissenschaftlicher Fächer

Einleitung

In internationalen wissenschaftlichen Diskussionen darüber, wie das Lernen (von Mathematik) verbessert werden kann, wurde in den letzten 15 Jahren verstärkt das Augenmerk auf metakognitiven Aktivitäte der Lernenden gelegt. Einen Überblick findet man z.B. bei Veenman et al. (2006) und Schneider & Artelt (2010). Veenman et al. (2004) stellen als Ergebnis ihrer Forschungsarbeit heraus, dass Metakognition noch vor Intelligenz einen Einfluss auf Lernerfolg hat. Trotzdem muss Veenman (2011) auf seiner Website feststellen: „ ... Yet, metacognition is largely ignored as an educational goal in school practices.“ Obwohl die Erziehung der Lernenden zum vermehrten Einsatz metakognitiver Aktivitäten in unterschiedlichen Fachdidaktiken thematisiert wird, fehlt bisher sowohl eine fächerübergreifende Debatte, inwieweit solche Aktivitäten einen gemeinsamen Kern von Unterricht in verschiedenen Fächern bilden, als auch eine Auswirkung in der Schulpraxis.

Im Kompetenzzentrum Unterrichtsqualität der Universität Osnabrück arbeiten in der Forschungsgruppe MeDUQua (**Me**takognitive und **d**iskursive Aktivitäten als Indikatoren für **U**nterrichts**qua**lität) Fachdidaktiker daran, das herauszuarbeiten, was an metakognitiven Aktivitäten im Unterricht unterschiedlicher Fächer gemeinsam ist.

Klassifikation metakognitiver und diskursiver Aktivitäten

Während in der internationalen Debatte (vgl. z.B. Depaepe et al., 2010) metakognitive Aktivitäten hauptsächlich dann untersucht werden, wenn sie Lernenden Unterstützung beim Problemlösen (darunter wird schwerpunktmäßig das Bearbeiten von Aufgaben verstanden) geben, legen wir unser Augenmerk bei der Analyse metakognitiver Aktivitäten – dekomponiert in die Komponenten *Planung*, *Monitoring* und *Reflexion* – generell auf Unterrichtsgespräche. Hier kann es – neben der Bearbeitung von Aufgaben – auch um das Verstehen von Begriffen, den verständigen und begründeten Gebrauch algebraischer Werkzeuge, das Erfinden von Definitionen und Beweisen sowie deren Verständnis gehen. Aber auch die Beurteilung der Adäquatheit von gewählten Repräsentationen, von mathematischen Ideen oder die Analyse des Zusammenspiels von Darstellungen und dahinter liegenden Vorstellungen, sowohl eigener als auch der von Mitschülern, können Unterrichtsthema sein. Ausgewählte Unterrichtsszenen, in denen die

Debatte der Lernenden untereinander über das Wechselspiel zwischen Darstellungen und Vorstellungen eine besondere Rolle spielt, findet man z.B. in Cohors-Fresenborg & Kaune (2003a) und in Kaune & Cohors-Fresenborg (2010, S. 274-278).

Ein tieferes Verständnis von Begriffen, eingeschlagenen Vorgehensweisen und benutzten geistigen Werkzeugen ist aber nur möglich, wenn sich Monitoring und Reflexion präzise auf das beziehen, was gerade im Unterricht thematisiert wird. Wir haben deshalb die dazu notwendigen Kompetenzen von Lehrenden und Lernenden ebenfalls im Fokus. Sie werden unter dem Begriff „diskursive Kompetenzen“ subsumiert.

Im Rahmen des von der DFG geförderten Projektes „Analyse von Unterrichtssituationen zur Einübung von Reflexion und Metakognition im gymnasialen Mathematikunterricht der SI“ wurde ein Kategoriensystem entwickelt (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007), mit dem sich das Vorkommen metakognitiver und diskursiver Aktivitäten im Mathematikunterricht messen lässt. Im Kategoriensystem sind die Kategorien Planung, Monitoring, Reflexion und Diskursivität in Unterkategorien dekomponiert und einige von diesen auch noch einmal nach interessanten Teilaspekten aufgeschlüsselt. Bei jeder Kategorie wird festgestellt, ob die entsprechende Aktivität von einem Lernenden oder Lehrenden ausgeführt wird. Mit dieser Einteilung ist es möglich, metakognitive oder diskursive Aktivitäten von Lernenden und Lehrenden mit einem gemeinsamen Kategoriensystem zu klassifizieren. Es ist kenntlich gemacht, wenn die Aktivität eine Begründung enthält oder wenn zu einer Aktivität aufgefordert wird.

Die Art der gewählten Formalisierung der klassifizierten Aktivitäten und deren prozessorientierte graphische Darstellung ermöglichen einen Überblick über vorherrschende Aktivitäten und deren Verteilung im Unterrichtsprozess. Sie erlauben es, für Interpretationen der Schüler-Lehrer-Interaktionen genügend detaillierte Informationen aus den sich zeigenden Mustern rückwärts herauslesen zu können. So sieht man z. B. leicht, ob Aufforderungen der Lehrkraft zur Reflexion oder zum Monitoring auf Seiten der Lernenden eine Aktivität auslösen oder ob es sich eigentlich um verkappte Monologe der Lehrkraft handelt. Auch sieht man bei genauerer Analyse, inwiefern sich die Schüleraktivitäten genau auf die Lehrerinitiativen beziehen. Damit wird die Identifikation von metakognitiven/ diskursiven Schüler-Lehrer-Interaktionsmustern möglich. Daraus lassen sich typische Lehrerskripte von Unterricht gewinnen.

In der Analyse zahlreicher Mathematikstunden von Klasse 1 bis Klasse 13 hat sich dieses Kategoriensystem und die daran anschließende Auswertungsmethode bewährt (Kaune & Cohors-Fresenborg, 2010).

Metakognitive und diskursive Aktivitäten: ein gemeinsamer Kern geisteswissenschaftlicher Fächer

Analysen zeigen, wie diskursive und metakognitive Aktivitäten in einem anspruchsvollen Mathematikunterricht ineinander verwoben sind (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007, S. 74-87; Kaune & Cohors-Fresenborg, 2010, S. 274-278): Beim Aufschreiben (bzw. Lesen) mathematischen Wissens und beim Argumentieren (bzw. Zuhören) in einer Diskussion im Mathematikunterricht ist die Fähigkeit der präzisen (Erfassung der) Darstellung erforderlich, um z. B. den Unterschied zwischen Dargestelltem und Intendiertem im Diskurs erfassen und thematisieren zu können. Auch das komplexe Argumentieren bei der Herausarbeitung mathematisch relevanter Ideen, sowohl im innermathematischen Kontext als auch bei der mathematischen Modellierung erfordert präzise Verankerungen.

Diskursivität ist also für eine Unterrichtskultur zentral, die die metakognitiven Aktivitäten der Lernenden fördern soll (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2003b). Es bedarf einer Vorbildfunktion der Lehrkraft durch eigenes kompetentes Tun, auf Kompetenzsteigerung ausgerichtete Interaktionen und eine emotionale Beeinflussung des Wertesystems der Lernenden.

Mit einem solchen Blick auf Mathematikunterricht ist es nicht erstaunlich, dass Pilotstudien erfolgreich waren, in denen jeweils in Zusammenarbeit mit Fachdidaktikern anderer geisteswissenschaftlicher Fächer gezeigt werden konnte, dass sich das Kategoriensystem – nach geringfügiger Abstraktion der Beschreibung dessen, worauf sich Monitoring und Reflexion inhaltlich beziehen[1] – auch eignet, solche Aktivitäten in Unterrichtsstunden (des Gymnasiums) der Fächer Deutsch, Geschichte, Musik und Religion zu klassifizieren (Kaune, 2010). Der gemeinsame intellektuelle Kern des Unterrichts in Mathematik und in anderen geisteswissenschaftlichen Fächern lässt sich also mit einem einzigen Messinstrument analysieren.

Die Forschungsgruppe MeDUQua arbeitet zurzeit daran, mit einem verbesserten Kategoriensystem fachübergreifend Unterrichtsstunden zu analysieren, in denen schrittweise kontrollierbares Argumentieren praktiziert wird. Von besonderem Interesse ist dabei die Frage, was in verschiedenen Fächern dann – nach Herausarbeiten des gemeinsamen intellektuellen Kerns einer Unterrichtskultur – unter dem in neuerer Zeit oft herausgestellten Be-

---

[1] Beispielsweise wurden bei *Monitoring* die Unterkategorien „Rechnung kontrollieren“ und „Fehler feststellen“ ersetzt durch „Kontrolle fachspezifischer Tätigkeit“; bei *Reflexion* wurde „Strukturanalyse eines Terms“ ersetzt durch „Strukturanalyse einer fachspezifischen Darstellung“, „Benutzung mathematischer Werkzeuge kommentieren“ wurde ersetzt durch „Wirkungsweise von fachspezifischen Methoden einschätzen“.

griff der Fachlichkeit jenseits der Inhaltsbezogenheit verstanden werden soll.

Das hier vorgestellte Vorgehen eröffnet einmal neue Möglichkeiten für interdisziplinäre fachdidaktische Unterrichtsforschung. Es ist aber auch daran gedacht, Erkenntnisse dieser Forschungen in die Lehreraus- und Weiterbildung einfließen zu lassen, und zwar mit dem Ziel, den gemeinsamen Kern im Unterricht von traditionell als unterschiedlich angesehenen Schulfächern für die Lernenden bewusster zu machen. Auf Seiten der Lehrenden ist die Betonung dieses Kerns vielversprechend, weil wegen der Tatsache, dass die Lehrenden in der Regel zwei Fächer unterrichten, durch Interventionen die Unterrichtsqualität in beiden Fächern verbessert werden kann.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2003a). Mechanismen des Wirksamwerdens von Metakognition bei Verstehensprozessen im Mathematikunterricht. In L. Hefendehl-Hebeker & S. Hußmann (Hrsg.): Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie. Hildesheim: Franzbecker, 21 – 34.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2003b). Unterrichtsqualität: Die Rolle von Diskursivität für "guten" gymnasialen Mathematikunterricht. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2003. Hildesheim: Franzbecker, 173-180.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007). Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht, 2. überarbeitete Auflage. Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Depaepe, F., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2010). Teachers’ metacognitive and heuristic approaches to word problem solving: analysis and impact on students’ beliefs and performance. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 42 (2), 205-218.

Kaune, C. (2010). Videoanalyse von (Mathematik-)Unterricht hinsichtlich metakognitiver und diskursiver Aktivitäten. SEMINAR - Lehrerbildung und Schule, (2), 75-84.

Kaune, C. & Cohors-Fresenborg, E. (Hrsg.) (2010). Mathematik Gut Unterrichten - Analyse von Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Aktivitäten. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schneider, W. & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 42 (2), 149-161.

Veenman, M. V. J., Wilhelm, P. & Beishuizen, J. J. (2004). The relation between intellectual and metacognitive skills from a developmental perspective. Learning and Instruction, 14, 89–109.

Veenman, M. V. J., Van Hout-Wolters, B., & Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: conceptual and methodological considerations. Metacognition and Learning, 1 (1), 3–14.

Veenman, M. V. J (2011). http://www.socialsciences.leiden.edu/psychology/organisation/dev/staff/veenman.html.

Julia CRAMER, Bremen

„Ausnahmen bestätigen die Regel!“ – Die Rolle von Alltagsargumentationen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben

1. Ziele und Fragestellungen

Ziel dieser Studie ist es, Beziehungen zwischen Argumentation und Wissenskonstruktion näher zu untersuchen. Dabei stellt sich nicht die Frage, ob durch Argumentationen Wissen aufgebaut werden kann, sondern wie dies geschieht. Bisher fehlen in der Forschung Verknüpfungen zwischen Theorien der Wissenskonstruktion und der Argumentation. Ein erster Ansatz, wie solche Beziehungen untersucht werden können, wird in diesem Beitrag vorgestellt. Da verschiedene Beispiele in der Literatur (Martin & Harel 1989, Galbraith 1981) zeigen, dass Schüler/Innen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben Erfahrungen aus Alltagsargumentationen nutzen, soll in dieser Untersuchung auch die Rolle von Alltagsargumentationen in den Blick genommen werden. Hierzu werden die verwendeten Schlussregeln mit Hilfe einer Sammlung topischer Schemata aus der Rhetorik beschrieben. Insgesamt werden drei Analyseinstrumente komplementär eingesetzt um den folgenden Fragestellungen nachzugehen:

- Wie verlaufen in diesen Situationen Prozesse der Argumentation und der Wissenskonstruktion? Zeigen sich charakteristische Muster? Welche Beziehungen zwischen diesen Prozessen bestehen?
- Wie schließen die Schüler/Innen in den untersuchten Situationen? Welche Schlussweisen aus dem Alltag nutzen sie? Wie hängt dies mit den epistemischen Prozessen zusammen?

2. Theoretischer Hintergrund

Argumentation

In vielen Untersuchungen zu Beweis- und Argumentationsprozessen wird das Toulmin-Schema (Toulmin 1996) als Analyseinstrument eingesetzt, um die Struktur von Argumentationen zu beschreiben. In diesem Schema werden Bestandteile von Argumentationen hinsichtlich ihrer Funktion in Datum, Konklusion, Schlussregel, Stützung und Operator unterschieden. Die Konklusion ist die Behauptung, die hergeleitet werden soll. Daten sind unbestrittene Fakten, auf die die Konklusion zurückgeführt wird. Der Schritt vom Datum auf die Konklusion wird durch eine Schlussregel erklärt. Die Anwendung dieser Schlussregel kann durch eine Stützung begründet werden. Ein Operator schränkt die Gültigkeit der Konklusion ein oder gibt

Ausnahmebedingungen an. Konklusionen, die im Argumentationsprozess als geltend akzeptiert werden, können im Folgenden als Daten oder Schlussregeln verwendet werden. Wird ein Element (z.B. ein Datum) der Argumentation in Frage gestellt, wird es zu einer Konklusion, die nun selbst hergeleitet werden muss.

Das Toulmin-Schema erfasst jedoch nicht, welche Arten von Schlussregeln verwendet werden. Diese werden mit Hilfe eines Katalogs topischer Schemata (Ottmers 2007) beschrieben. Ottmers beschreibt zwei Großklassen: alltagslogische und konventionalisierte Schlussweisen. Die alltagslogischen Schlüsse basieren dabei auf Strukturen, die logischen Schlussweisen ähneln. Hierzu zählt Ottmers Kausal-, Vergleichs-, Gegensatz- und Einordnungsschlüsse sowie Beispielargumentationen. Die ersten vier Schlüsse sind eher deduktiver Natur, die Beispielargumentation induktiver Natur. Kausalschlüsse nutzen Ursache-Wirkungs-, Grund-Folge- oder Mittel-Zweck-Relationen. Vergleichsschlüsse stellen Beziehungen zwischen gleichen, ähnlichen oder verschiedenen Situationen her und schließen dann auf gleiche, ähnliche oder verschiedene Eigenschaften oder Bedingungen der Situationen. Gegensatzsschlüsse beziehen sich auf eine Situation, in der nicht gleichzeitig gegensätzliche Bedingungen oder Eigenschaften vorliegen können. Bei einem Einordnungsschluss wird von Definitionen auf die Eigenschaften eines Objekts geschlossen. Hinsichtlich der Beispielargumentationen unterscheidet Ottmers illustrative und induktive Beispiele. Illustrative Beispiele zeigen, dass eine Behauptung in verschiedenen, konkreten Fällen gilt. Bei einem induktiven Beispiel ist erkennbar, inwiefern es verallgemeinert und auf andere Fälle übertragen werden kann. Da solche Beispiele in der mathematikdidaktischen Forschung als generische Beispiele (z.B. Bills et al. 2006) bezeichnet werden, daher behalte ich die Bezeichnung des generischen Beispiels bei.

Die konventionalisierten Schlussweisen beruhen auf Konventionen, die sich innerhalb einer Gruppe herausgebildet haben. Daher kann es keine vollständige Aufzählung dieser Schlussweisen geben. Als Beispiele nennt Ottmers den Autoritätsschluss, der eine Behauptung durch den Verweis auf eine andere Autorität begründet, oder den Analogieschluss, der eine Behauptung durch eine metaphorische Analogie herleitet. Da der Begriff Analogie in der Mathematik anders behaftet ist, bezeichne ich diesen Schluss als metaphorischen Schluss.

Wissenskonstruktion

In ihrer Theorie der interessendichten Situationen hat Bikner-Ahsbahs (2005) ein Modell zur Beschreibung kollektiver epistemischer Prozesse entwickelt. Dieses Modell besteht aus drei wesentlichen epistemischen

Handlungen: das Sammeln mathematischer Bedeutungen (Lösungen, Assoziationen, (Gegen-)Beispiele, Muster, Lösungswege, Feststellungen, usw.) bildet die Basis des Konstruktionsprozesses. Im Folgenden können diese mathematischen Bedeutungen auf vielfältige Weisen verknüpft werden, was zu Struktursehen führen kann. Unter Struktursicht wird nicht nur die Wahrnehmung von mathematischen Regelmäßigkeiten verstanden, sondern auch das Konkretisieren, Begründen und Überprüfen der Gesetzmäßigkeit.

3. Methodische und Methodologische Überlegungen

Diese Untersuchung ist in das Forschungsprojekt „Effective mathematical knowledge construction in interest-dense situations“[1] eingebettet, in dem Prozesse der mathematischen Wissenskonstruktion durch die Verknüpfung zweier Modelle genauer untersucht werden (siehe Bikner-Ahsbahs 2011). In diesem Projekt wurden drei Lernumgebungen zu verschiedenen Themen entwickelt, in denen die Möglichkeit und der Anlass zur Konstruktion neuen Wissens gegeben werden. In Deutschland und Israel sind 3, bzw. 4 leistungsstarke Schülerpaare der 10., bzw. 11. Klasse bei der Bearbeitung dieser drei Aufgaben videografiert worden. Für diese Untersuchung werden die Transkripte der Aufgabenbearbeitung der deutschen Schüler/Innen herangezogen. In interpretativen Turn-by-turn-Analysen wird im ersten Schritt der Erkenntnisprozess und im zweiten Schritt der Argumentationsprozess sowie die Schlussweisen rekonstruiert. Die Ergebnisse dieser Analysen werden in Verlaufsdiagrammen komprimiert dargestellt, die anschließend verglichen und kontrastiert werden können.

4. Erste Ergebnisse und Ausblick

In ersten Fallstudien (Cramer 2010, Cramer 2011) hat sich gezeigt, dass, offenbar unabhängig von den verwendeten Schlussweisen, zu Beginn von Argumentationsprozessen Argumentationsstränge mit einem hohen Anteil an Daten („Datendichte“) vorherrschen. Dies passt zu den Ergebnissen der interessendichten Situationen, dass Sammeln bis zu einem gewissen Sättigungsgrad notwendig ist für weitere Konstruktionsprozesse. Weitere Zusammenhänge zwischen Argumentations- und Wissenskonstruktionsprozessen lassen sich derzeit noch nicht erkennen. Bei lang andauernden und ineinander verschachtelten Argumentationen erscheint es notwendig, Handlungen wie z.B. Anzweifeln, Verneinen, explizites Einfordern, Wiederholen oder Präzisieren von Elementen der Argumentation in das Toulmin-Schema zu integrieren.

[1] Dieses Projekt wird von der German-Israeli Foundation for Scientific Research and Development gefördert (Grant 946-357.4/2006).

Bezüglich der Schlussweisen lässt sich für die bisherigen Analysen feststellen, dass die leistungsstarken Schüler/Innen in dieser Untersuchung kaum konventionalisierte Schlüsse nutzen. Insbesondere nutzen sie solche Schlussweisen nicht, wenn sie begründen wollen, wieso eine Behauptung gilt. Konventionalisierte Schlussweisen nutzen sie, um Vermutungen auszuformulieren. So wird bspw. ein Operator mit dem Sprichwort „Ausnahmen bestätigen die Regel" gerechtfertigt. Überwiegend nutzen die Schüler/Innen in dieser Untersuchung jedoch alltagslogische Schlüsse. In der Phase des Aufstellens von Vermutungen nutzen sie überwiegend beispielbasierende Schlüsse, in den Phasen des Begründens dagegen eher andere alltagslogische Schlussweisen. Die alltagslogischen Schlussweisen werden von den Schülern/Innen dabei offenbar als heuristische Strategien zum Verknüpfen von Daten für das Aufstellen von Vermutungen und für das Finden von Schlussregeln genutzt. Von mathematischen Argumentationen scheinen sie sich weniger in der Struktur als vielmehr in ihrer Strenge zu unterscheiden. Die alltagslogischen Schlussweisen könnten also ein Weg sein, um Argumentation zu entwickeln und allmählich auszuschärfen.

Literatur

Bills, L.; Dreyfus, T.; Mason, J.; Tsamir, P.; Watson, A. & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In: Novotná, J.; Moraová, H.; Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education, vol. 1. Prague: Charles University, Faculty of Education, 126 – 154.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen - Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie. Hildesheim: Franzbecker.

Bikner-Ahsbahs, A. (2011) [im Druck]. Epistemisch handeln können – aber wie? In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 45. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 21.-25.02.2011 in Freiburg.

Cramer, J. (2010). Induktion durch vollständiges Zeigen. Schlussweisen in Argumentationsprozessen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 44. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 08.-12.03.2010 in München, 229 – 232.

Cramer, J. (2011) [im Druck]. Everyday argumentation and knowledge construction in mathematical tasks. In: Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Rzeszów: University of Rzeszów, Departments of Mathematics and Natural Science.

Galbraith, P. L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. In: Educational Studies in Mathematics, 12, 1 – 29.

Martin, G. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. In: Journal for Research in Mathematics Education, 20(1), 41 – 45.

Ottmers, C. (2007). Rhetorik. Stuttgart: Metzler.

Theresa DEUTSCHER, Dortmund

Zusammenhänge zwischen den arithmetischen und geometrischen Lernständen von Schulanfängern

1. Theoretisch-empirische Ausgangsbasis

Der Mathematikunterricht der Grundschule setzt sich zu einem großen Teil aus arithmetischen und geometrischen Inhalten zusammen, die nicht selten enge Bezüge aufweisen. In der Arithmetik ist eine mäßige, positive Korrelation zwischen dem Zahlen- und Mengenvorwissen von Schulanfängern nachgewiesen (vgl. Krajewski 2003). Kenntnisse über Zahlen und Mengen stellen wiederum für das Rechnen eine notwendige Voraussetzung dar. Bereichsübergreifend besteht insbesondere eine enge Verbindung zwischen der arithmetischen Begriffsbildung und geometrischen Vorstellungen (vgl. Bauersfeld 1992).

Aufgrund des genetischen Zusammenhangs der verschiedenen Inhaltsbereiche scheinen die Fähigkeiten von Lernenden in benachbarten Inhaltsgebieten aufeinander Einfluss haben zu können. Über welche Fähigkeiten Schulanfänger in den einzelnen Inhaltsbereichen der Arithmetik und der Geometrie verfügen und inwieweit bereichsspezifische und bereichsübergreifende Zusammenhänge zwischen den Lernständen der Kinder bestehen, wurde in der folgenden Untersuchung (vgl. Deutscher 2011) nachgegangen.

2. Untersuchung mit 108 Schulanfängern

Um der inhaltlichen Spannbreite des Unterrichtsfachs und den Kindern in ihren verschiedenen Kompetenzen gerecht zu werden, wird auf die Grundideen-Tests Arithmetik und Geometrie (vgl. Wittmann & Müller 2004; Waldow & Wittmann 2001) als strukturgleiche Testinstrumente zurückgegriffen. Diese wurden in leicht überarbeiteter Fassung als klinische Leitfadeninterviews mit jeweils denselben 108 Schulanfängern durchgeführt. Die Testinhalte beziehen sich dabei auf Stoff des Anfangsunterrichts und kommen damit der Erkenntnis – dass Schulanfänger mit erheblichen Vorerfahrungen in die Schule kommen (vgl. Selter 1995; Grassmann 1996) – nach und ergänzen diese hinsichtlich des weiterführenden Anforderungsniveaus.

3. Lernstände insgesamt

Trotz der hohen Testanforderungen erreichen die Kinder zu Schulbeginn im Arithmetiktest durchschnittlich 32,1 (s = 9,4) und im Geometrietest 31,4 (s = 7,8) von insgesamt 50 Punkten. Die Heterogenität wird anhand der erreichten Testpunktzahlen in den beiden unteren Diagrammen deutlich.

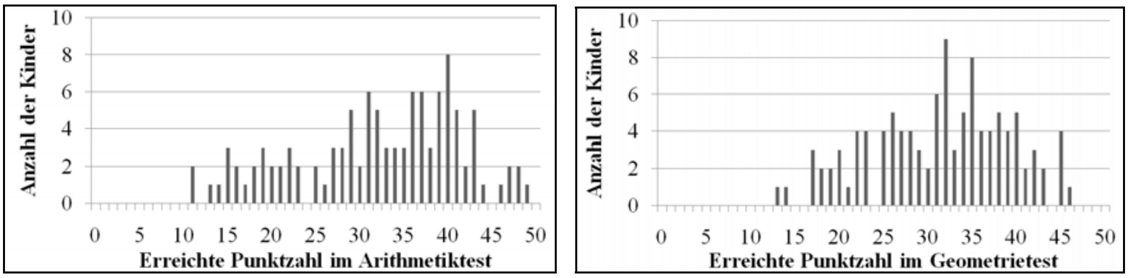


Abb. 1 Punktzahlen der Schulanfänger im Arithmetik- und Geometrietest

4. Lernstände in Abhängigkeit vom sozialen Einzugsgebiet, Geschlecht und Alter

Das soziale Einzugsgebiet der besuchten Schulen steht in einem signifikanten Zusammenhang mit den Lernständen der jeweiligen Kinder (Arithmetiktest: $F = 6{,}571$, $n = 108$, $p = 0{,}002$; Geometrietest: $F = 8{,}253$, $n = 108$, $p < 0{,}0001$). Die Schulanfänger aus Schulen mit sozial starkem Einzugsgebiet erreichen durchschnittlich die höchsten Testpunktzahlen (Arith.: 35,4 P.; Geom.: 34,0 P.). Kinder aus Schulen mit mittlerem sozialen Einzugsgebiet zeigen mittlere (Arith.: 32,9 P.; Geom.: 32,7 P.) und Schülerinnen und Schüler aus Schulen mit sozial schwachem Einzugsgebiet die niedrigsten (Arith.: 27,9 P.; Geom.: 27,4 P.) Lernstände (Zuordnung nach dem Belastungsindex des Instituts für Schulentwicklungsforschung, TU Dortmund).

In Abhängigkeit vom Geschlecht der Schulanfänger ergeben sich für den Arithmetik- und den Geometrietest unterschiedliche Befunde. Während die Jungen im Arithmetiktest mit 35,3 Punkten signifikant höhere Leistungen als die Mädchen mit 28,9 Punkten erreichen ($t = 3{,}7$, $n = 108$, $p < 0{,}0001$), liegen im Geometrietest mit 31,8 (Jungen) und 31,0 (Mädchen) Punkten keine Leistungsunterschiede vor ($t = 0{,}5$, $n = 108$, $p = 0{,}6$).

Das Alter der Schulanfänger, welches zwischen 5 Jahren und 8 Monaten und 7 Jahren und 7 Monaten liegt, weist weder im Bereich der Arithmetik ($r = 0{,}113$, $n = 108$, $p = 0{,}246$) noch in der Geometrie ($r = 0{,}129$, $n = 108$, $p = 0{,}183$) einen Zusammenhang mit den Testleistungen auf.

5. Bereichsspezifische Zusammenhänge und Differenzen

Im Bereich der Arithmetik zeigen die Schulanfänger in den unterschiedlichen Inhaltsbereichen tendenziell vergleichbare Lernstände auf (vgl. Tabelle 1).

Der Aufgabenblock ‚Zahlenreihe' zeigt besonders starke, positive Korrelationen mit den Aufgabenblöcken ‚Rechnen', ‚Zehnersystem' und ‚Sachaufgaben'. Auch zwischen den Aufgabenblöcken ‚Zehnersystem' und ‚Rechenverfahren' besteht ein auffallend hoher, positiver Zusammenhang.

	Zahlen-reihe	Rechnen	Zehner-system	Rechen-verfah-ren	Arith. Muster	Zahlen in der Umwelt	Sach-aufgaben
Zahlenreihe		0,650**	0,612**	0,474**	0,418**	0,426**	0,663**
Rechnen	0,650**		0,585**	0,513**	0,437**	0,499**	0,588**
Zehnersystem	0,612**	0,585**		0,629**	0,318**	0,519**	0,572**
Rechenverfah-ren	0,474**	0,513**	0,629**		0,312**	0,489**	0,553**
Arith. Muster	0,418**	0,437**	0,318**	0,312**		0,206*	0,401**
Zahlen in der Umwelt	0,426**	0,499**	0,519**	0,489**	0,206*		0,423**
Sachaufgaben	0,663**	0,588**	0,572**	0,553**	0,401**	0,423**	

Tab. 1: Korrelationen der Erfolgsquoten in den Inhaltsbereichen des Arithmetiktests

Die Fähigkeiten der Schulanfänger zu den Grundideen der Geometrie zeigen zwar oft auch signifikante, aber insgesamt geringere Korrelationen auf.

	Formen und Kon-struktion	Operie-ren mit Formen	Koordi-naten	Maße	Geom. Muster	Formen in der Umwelt	Sach-situatio-nen
Formen und Konstruktion		0,466**	0,373**	0,480**	0,335**	0,192*	0,268**
Operieren mit Formen	0,466**		0,406**	0,363**	0,384**	0,101	0,130
Koordinaten	0,373**	0,406**		0,405**	0,430**	0,149	0,182
Maße	0,480**	0,363**	0,405**		0,240*	0,156	0,252**
Geom. Muster	0,335**	0,384**	0,430**	0,240*		0,119	0,229*
Formen in der Umwelt	0,192*	0,101	0,149	0,156	0,119		0,77
Sachsituationen	0,268**	0,130	0,182	0,252**	0,229*	0,77	

Tab. 2: Korrelationen der Erfolgsquoten in den Inhaltsbereichen des Geometrietests

Bei Betrachtung der Lernstände einzelner Kinder, werden jedoch auch erhebliche intraindividuelle Unterschiede deutlich. So zeigt Abbildung 2 exemplarisch die Erfolgsquoten von drei Schulanfängerinnen in den sieben Aufgabenblöcken des Arithmetiktests. Aus den variierenden Lernständen werden individuelle, inhaltliche Förder- und Fordermöglichkeiten deutlich.

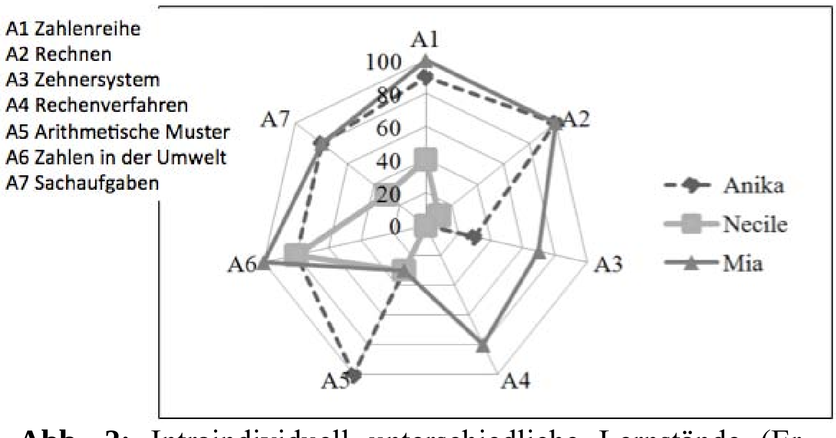
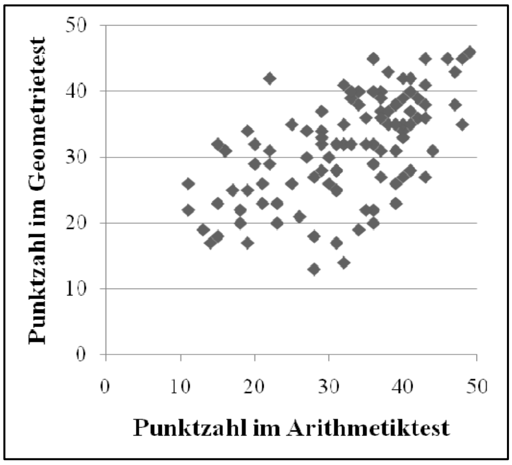


Abb. 2: Intraindividuell unterschiedliche Lernstände (Erfolgsquoten in den Inhaltsbereichen des Arithmetiktests)

6. Bereichsübergreifende Zusammenhänge und Differenzen



Zwischen den arith. und geom. Lernständen der Schulanfänger kann eine mittelstarke, positive Korrelation nachgewiesen werden ($r = 0{,}571$, $n = 108$, $p < 0{,}0001$). Wird das Geschlecht der Kinder in die Analyse mit einbezogen, so weisen die Fähigkeiten der Mädchen in beiden Inhaltsbereichen ($r = 0{,}712$, $n = 54$, $p < 0{,}0001$) einen wesentlich stärkeren Zusammenhang auf als die der Jungen ($r = 0{,}484$, $n = 54$, $p < 0{,}0001$).

Abb. 3: Zusammenhang arith. und geom. Fähigkeiten

7. Zentrale Schlussfolgerungen

- Ein besonderer Handlungsbedarf wird in der mathematischen Frühförderung von sozialbenachteiligten Kindern sowie von Mädchen deutlich.
- Insbesondere für leistungsschwache Kinder, die häufig sowohl in der Arithmetik als auch in der Geometrie über geringe Vorerfahrungen verfügen, ist die parallele Förderung arith. und geom. Fähigkeiten – bedingt durch ihren genetischen Zusammenhang – von besonderer Bedeutung.

Literatur

Bauersfeld, H. (1992): Drei Gründe, geometrisches Denken in der Grundschule zu fördern. In K. P. Müller (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 7-33.

Deutscher, Th. (2011): Arithmetische und geometrische Fähigkeiten von Schulanfängern. Eine empirische Untersuchung unter besonderer Berücksichtigung des Bereichs Muster und Strukturen. Wiesbaden: Vieweg.

Grassmann, M. (1996): Geometrische Fähigkeiten der Schulanfänger. In: Grundschulunterricht, 43 (5), 25-27.

Krajewski, K. (2003): Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Kovac.

Selter, Ch. (1995): Zur Fiktivität der ‚Stunde Null' im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Mathematische Unterrichtspraxis, 2, 11-19.

Waldow, N. & Wittmann, E. Ch. (2001): Ein Blick auf die geom. Vorkenntnisse von Schulanfängern mit dem mathe 2000-Geometrie-Test. In W. Weiser & B. Wollring (Hrsg.): Beiträge zur Didaktik für die Primarstufe. Hamburg: Kovac, 247-261.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2004): Der GI-Eingangstest Arithmetik. In E. Ch. Wittmann & G. N. Müller: Das Zahlenbuch 1. Lehrerband. Leipzig: Klett, 222-226.

Miriam DIETER, Universität Duisburg-Essen

Der Studienabbruch in der Studieneingangsphase

Wie erfolgreich sind mathematische Fakultäten in der Ausbildung und Bindung ihrer Studierenden? Dies ist eine Frage, die in den letzten Jahren auch bedingt durch die Umstellung auf die neuen Bachelor- und Masterstudiengänge immer mehr an Bedeutung gewonnen hat.

In diesem Beitrag werden wir die Effektivität der Lehre anhand des Indikators *Studienfachwechselquote* (STF-WQ) messen und der Frage nachgehen, wie viel Prozent eines Studienanfängerjahrgangs in der Mathematik eben dieses Studium nach dem ersten Studienjahr weiter fortsetzen.

Diese Frage ist leicht gestellt, aber schwierig zu beantworten.

Berechnungsmethodik

Zur exakten Beantwortung dieser Frage sind Studienverlaufsanalysen eines jeden Studierenden erforderlich. Diese Daten liegen aber aufgrund des deutschen Datenschutzgesetzes nicht vor. Deshalb greifen wir bei der Berechnung der Studienfachwechselquote auf frei zugängliche Daten der Studierendenstatistik des Statistischen Bundesamtes (Destatis) zurück.

In der Literatur findet man für den Begriff *Studienabbruch* keine einheitliche Definition. Wir übernehmen die Konvention der HIS GmbH (Heublein et al. (2008)) und fassen unter Studienabbruch das endgültige Beenden eines Studiums ohne ersten Abschluss auf. Komplementär dazu verstehen wir unter *Studienerfolg* den erfolgreichen Abschluss eines Studium, unabhängig davon, in welchem Fach man ursprünglich immatrikulierte. Diese Begrifflichkeiten erscheinen aber für unsere Fragestellung nicht adäquat, da uns Studierende interessieren, die ein Studium der Mathematik beginnen und eben dieses Studium erfolgreich abschließen bzw. vorzeitig und ohne Abschluss abbrechen.

Aus diesem Grund führen wir den *Studienfachwechsel* und die damit verbundene *Studienfachwechselquote* ein. Diese ist abhängig von den Parametern (i) Studienfach (STF), (ii) Prüfungsgruppe, (iii) Geschlecht und (iv) Zeithorizont. Die Studienfachwechselquote nach dem n-ten Fachsemester berechnet sich als:

$$\text{STF-WQ}(n) = \frac{\boxed{\begin{matrix}\text{Studierende im}\\ \text{1. FS}\end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix}\text{Studierende im}\\ (n+1)\text{. FS}\end{matrix}}}{\boxed{\begin{matrix}\text{Studierende im}\\ \text{1. FS}\end{matrix}}}$$

Bei einem solchen Ausweis der Studienfachwechselquote ergeben sich methodische Unschärfen, die in Dieter et al. (2008) weiter spezifiziert werden.

Wir beschränken uns an dieser Stelle auf die Studienfächer Mathematik und Wirtschaftsmathematik in den Prüfungsgruppen Diplom und Bachelor. Wir weisen sowohl Gesamtzahlen als auch genderspezifische Werte aus und berechnen STF-WQ nach den ersten beiden Fachsemestern.

Studienfachwechselquoten

Wir wenden uns zunächst den Diplomstudiengängen Mathematik und Wirtschaftsmathematik zu und betrachten die STF-WQ der Wintersemester von 92/93 bis 07/08. Im Mittel beläuft sich die STF-WQ in der Mathematik auf 38,2% und in der Wirtschaftsmathematik auf 32,8%. Wir differenzieren noch zusätzlich nach dem Geschlecht. Die sich ergebenden Durchschnittswerte sind in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

Studienfach	Männer	Frauen
Mathematik	33,9%	45,3%
Wirtschaftsmathematik	30,6%	36,1%

Aus der Tabelle lässt sich ersehen, dass unabhängig vom Studienfach die STF-WQ nach zwei Fachsemestern bei den Frauen in den Diplomstudiengängen stets über denen der Männer liegen. Der Unterschied zwischen den Geschlechtern ist über den betrachteten Zeitraum im STF Mathematik höchst signifikant ($p<0,001$) und im STF Wirtschaftsmathematik stark signifikant ($p<0,01$)[1].

Da die Diplomstudiengänge an den Universitäten auslaufen und durch Bachelor- und Masterstudiengänge ersetzt werden, kommt natürlich die Frage auf, ob mit dieser Umstellung auch Änderungen in den STF-WQ einher gehen. Aus diesem Grund untersuchen wir mit Hilfe des U-Tests die STF-WQ der Wintersemester von 00/01 bis 07/08 für die Prüfungsgruppen Diplom und Bachelor. Weder im STF Mathematik noch im STF Wirtschaftsmathematik lassen sich signifikante Unterschiede feststellen.

Mit Hilfe der Daten des Statistischen Bundesamtes lassen sich keine STF-WQ für die Lehramtsstudiengänge berechnen, da dort für Studienanfänger des Lehramts 29 verschiedene Kategorien geführt werden. Der Übersichtlichkeit halber weist Destatis daher in Veröffentlichungen lediglich gebündelt das *Lehramt* aus und vermischt dadurch die heterogenen Gruppen der

[1] Verwendet wurde der U-Test von Mann und Whitney (vgl. Toutenberg et al. (2006)) als verteilungsfreier Test für den Vergleich der STF-WQ der männlichen und weiblichen Studierenden.

Grundschul- und Gymnasiallehrer. Um Lehramtsstudiengänge mit Blick auf unsere Fragestellung betrachten zu können, benötigen wir folglich anderes Datenmaterial.

Die Zahlen einer Universität

Weil für unsere Untersuchungen zum Studienfachwechsel nicht nur die Diplom- und Bachelorstudiengänge, sondern auch die Lehramtsstudiengänge von Interesse sind und das Datenmaterial von Destatis dafür nicht geeignet ist, haben wir nach einer Möglichkeit gesucht, STF-WQ auch für das Lehramt ermitteln zu können. Die einzige verbleibende Möglichkeit bestand in einer Analyse der Daten einer einzelnen mathematischen Fakultät, die wir im Folgenden präsentieren werden.

Alle Daten stammen aus dem hochschulinternen Informationssystem SuperX und erlauben eine detailliertere Analyse als die Daten von Destatis; d.h. wir sind in der Lage, die STF-WQ in eine Abbrecherquote (Exmatrikulationen) und eine Studiengangwechselquote (Wechsel innerhalb der Universität) aufzusplitten. Wir werden uns auf die Diplom- (Daten ab WS 96/97) und Lehramtsstudiengänge (Daten ab WS 03/04) beschränken, da erst im WS 07/08 an dieser Fakultät der Bachelor eingeführt worden ist. Weiter ist zu beachten, dass die STF-WQ auf Universitätsebene ausgewiesen werden und damit höher ausfallen als die gesamtdeutschen STF-WQ, die wir im vorigen Abschnitt präsentiert haben. Dies liegt daran, dass ein Universitätswechsel ohne Änderung des Studiengangs für die betrachtete Universität als Exmatrikulation gewertet wird, während dies jedoch keine Auswirkung auf die Daten von Destatis hat.

Im Diplomstudiengang Mathematik haben sich im Durchschnitt nach den ersten beiden Fachsemestern 26,2% der männlichen Studienanfänger exmatrikuliert und weitere 17,6% haben den Studiengang innerhalb der Universität gewechselt. Bei weiblichen Studienanfängern zeichnet sich ein ähnliches Verhalten ab. Hier wechselten im Schnitt 13,3% das Fach und 27,2% verließen die Universität. Im Diplomstudiengang Wirtschaftsmathematik dagegen wird eine Kluft zwischen den Geschlechtern sichtbar. Die STF-WQ beträgt bei männlichen Studienanfängern 38,4% (Exmatrikulationen: 26,1% und Fachwechsel: 12,3%) und bei weiblichen 49,8% (Exmatrikulationen: 32,0% und Fachwechsel: 17,8%).

Abschließend kommen wir zu den Lehramtsstudiengängen und beginnen mit der Primarstufe. Nach dem ersten Studienjahr haben 14,8% der Männer und 12,1% der Frauen dieses Studium aufgegeben. Etwas höher sind die STF-WQ für das Lehramt an Haupt-, Real- und Gesamtschulen. Hier beträgt die STF-WQ nach den ersten beiden Fachsemestern für männliche

Studierende 22,0% und für weibliche Studierende 24,6%. Beim Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen liegen diese Quoten in einer völlig anderen Größenordnung. 36,6% der Männer und 46,0% der Frauen brachen während des ersten Studienjahres dieses Studium ab und exmatrikulierten sich oder wechselten das Studienfach.

Über SuperX können wir außerdem ermitteln, wohin die Fachwechsler gewechselt sind. Es stellt sich heraus, dass fast alle Lehramtswechsler dem Berufswunsch „Lehrer“ treu bleiben und stattdessen nur ein anderes Fach belegen.

In den Studiengängen des Lehramts für die Primarstufe und die Sekundarstufe I sind die Abbruch- und Fachwechselquoten nach dem ersten Studienjahr sehr gering und es sind keine Genderunterschiede erkennbar. In der Sekundarstufe II dagegen beträgt der Unterschied zehn Prozentpunkte zu Ungunsten der Frauen. Weiter fällt auf, dass die Quoten für das Lehramt SII und für die Diplomstudiengänge auf einem vergleichbaren Niveau liegen.

Zusammenfassung und Ausblick

Wir konnten den Studienfachwechsel einerseits bundesweit und andererseits für eine mathematische Fakultät quantitativ beziffern. Dabei haben wir Unterschiede zwischen den einzelnen mathematischen Studiengängen ausmachen können und zudem Unterschiede zwischen den Geschlechtern, die zu Ungunsten der Studienanfängerinnen ausfielen, festgestellt. Vor allem in den Diplom-/Bachelor- und SII-Studiengängen waren die STF-WQ sehr hoch. Da diese Studierenden in denselben Anfängervorlesungen sitzen, drängt sich die Frage auf, worin die Ursachen liegen, dass grade diese Studierenden zu einem großen Teil schnell dieses Studium wieder aufgeben.

Nächste Schritte müssen demnach in einer Ermittlung und anschließenden Untersuchung der fachspezifischen Gründe bestehen, die zu den frühen Studienabbrüchen und –wechseln führen.

Literatur

Dieter, M., Brugger, P., Schnelle, D. & Törner, G. (2008): Zahlen rund um das Mathematikstudium - Teil 3. In: MDMV, 16.3, 176-182.

Heublein, U., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2008): Die Entwicklung der Studienabbruchquote an den deutschen Hochschulen. HIS: Projektbericht, Februar 2008.

Toutenberg, H., Schomaker, M. & Wissman, M. (2006): Arbeitsbuch zur deskriptiven und induktiven Statistik. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Martina DÖHRMANN, Vechta

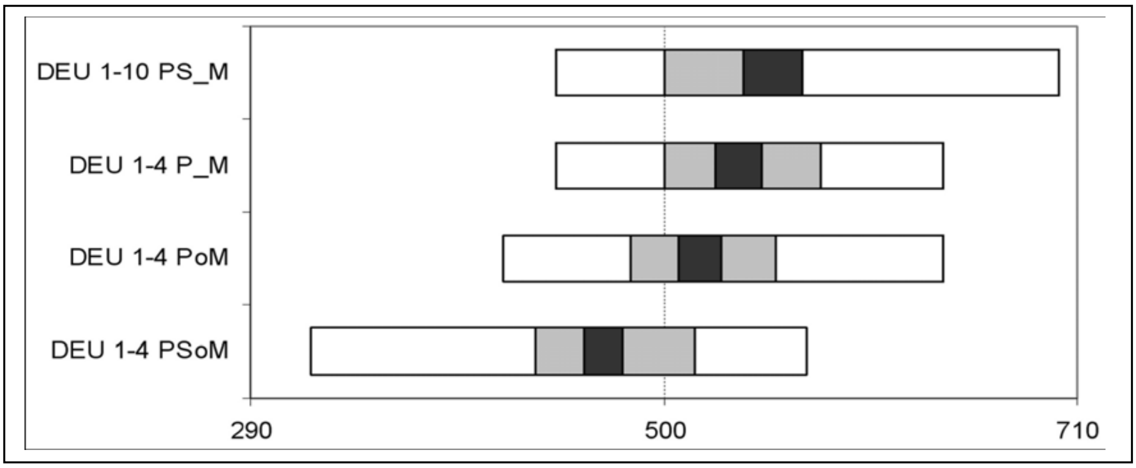
TEDS-M: Differenzierte Analysen des mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens angehender Mathematik-lehrkräfte

Im April 2010 wurden die ersten Ergebnisse der IEA-Studie TEDS-M 2008 (***T**eacher **E**ducation and **D**evelopment **S**tudy in **M**athematics*) veröffentlicht (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010a,b). TEDS-M hat sich zum Ziel gesetzt, die Mathematiklehrerausbildung für die Primarstufe und die Sekundarstufe I in verschiedenen Ländern zu erfassen und unter dem Aspekt ihrer Wirksamkeit zu vergleichen.

In Deutschland existiert ein vielfältiges Angebot an Ausbildungsgängen mit unterschiedlichen Abschlüssen sowie fachlichen und fachdidaktischen Anteilen, die mit einer Lehrberechtigung in Mathematik für die Primarstufe und / oder Sekundarstufe I abschließen. Daher fand im Vorfeld von TEDS-M eine Typisierung der relevanten Ausbildungsgänge aller Bundesländer statt, die auch einen internationalen Vergleich einzelner Typen ermöglichen sollte. Insgesamt konnten im Jahre 2008 in Deutschland 80 entsprechende Ausbildungsgänge identifiziert werden. Es fanden dabei nur Ausbildungsgänge eine Berücksichtigung, für die im Jahre 2008, dem Jahr der Durchführung von TEDS-M, mit Absolventinnen und Absolventen zu rechnen war (unberücksichtigt blieben z.B. BA-/MA-Studiengänge). Diese 80 Ausbildungsgänge wurden auf der Basis der Vorgabe der Kultusministerkonferenz für die gegenseitige Anerkennung von Lehramtsprüfungen und Lehramtsbefähigungen von 2002 vier Typen zugeordnet (für eine Übersicht der erfassten Ausbildungsgänge und Zuordnung zu den Ausbildungsgangtypen s. Döhrmann, 2010a,b). Eine weitere Differenzierung der für die Primarstufenstudie relevanten Typen fand im Hinblick auf die fachbezogene Ausbildung statt, da ein positiver Zusammenhang zwischen dem Umfang der mathematischen und mathematikdidaktischen Ausbildung und den erworbenen Kompetenzen in diesen Domänen erwartet wurde. Unterschieden wurden daher Ausbildungsgänge, die nur eine geringe oder keine Ausbildung in Mathematik vorsehen, in denen Mathematik z.B. als Didaktikfach oder Lernbereich studiert wird, und Ausbildungsgänge mit Mathematik als Fach oder Schwerpunkt. Die folgende Tabelle zeigt alle für TEDS-M definierten Ausbildungsgangtypen, die ein explizites Stratifizierungskriterium darstellten. In die Primarstufenstudie von TEDS-M wurden die Typen *Primarstufe mit Mathematik, Primarstufe ohne Mathematik, GHR mit Mathematik* und *GHR ohne Mathematik* einbezogen, in die Sekundarstufenstudie die Typen *GHR mit Mathematik, Sek I* und *Sek I und Sek II* .

Ausbildungsgangtyp	*Beschreibung*
Primarstufe mit Mathematik	Ausbildung als Lehrkraft für die Primarstufe mit Mathematik als Schwerpunkt- oder Unterrichtsfach
Primarstufe ohne Mathematik	Ausbildung als Lehrkraft für die Primarstufe ohne Mathematik als Schwerpunkt- oder Unterrichtsfach
GH(R) mit Mathematik	Ausbildung als Lehrkraft für die Primar- und Sekundarstufe I mit Mathematik als Unterrichtsfach
GH(R) ohne Mathematik	Ausbildung als Lehrkraft für die Primar- und Sekundarstufe I ohne Mathematik als Unterrichtsfach
Sek I	Ausbildung als Lehrkraft für alle oder einzelne Schulformen der Sekundarstufe I
Sek I und Sek II	Ausbildung als Lehrkraft für die Sekundarstufe II (allgemeinbildende Fächer) oder für das Gymnasium

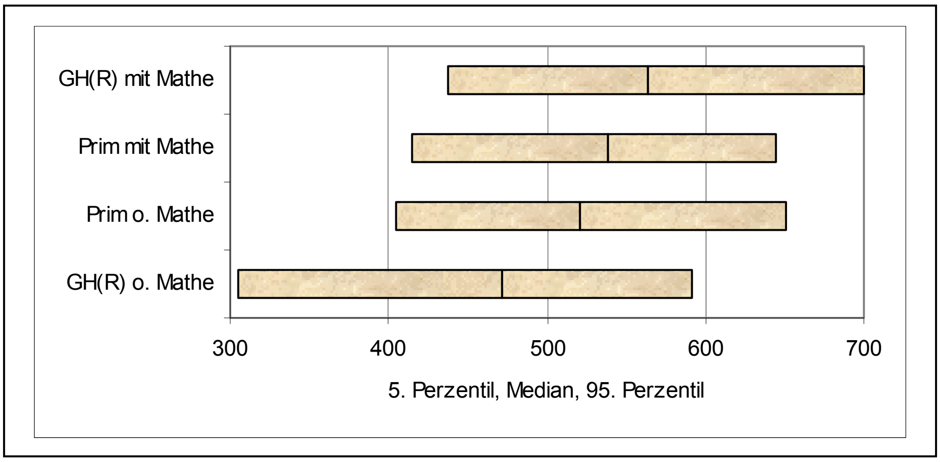
Für TEDS-M wurden nationale und institutionelle Merkmale der Mathematiklehrerausbildung als Bedingungsfaktoren des professionellen Kompetenzerwerbs von zukünftigen Lehrerinnen und Lehrern erhoben. Gleichzeitig fand eine Befragung und Testung von Absolventinnen und Absolventen im letzten Jahr ihrer Ausbildung in repräsentativen Stichproben statt. An der Primarstufenstudie nahmen 1032 Lehramtsanwärterinnen und –anwärter aus allen 16 Bundesländern teil. Dabei wurden insbesondere das mathematische und das mathematikdidaktische Wissen als substantielle Komponenten professioneller Lehrerkompetenz und Indikatoren für die Wirksamkeit der Lehrerausbildung erhoben. Die folgende Abbildung zeigt die Ergebnisse des mathematischen Leistungstests der Primarstufenstudie, differenziert nach Ausbildungsgangtypen (entnommen aus Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010 a).



Perzentilbänder für das mathematische Wissen angehender Primarstufenlehrkräfte nach Ausbildungsgangtyp (5., 25., 75. und 95. Perzentil, sowie – schwarz hervorgehoben – arithmetischer Mittelwert mit Konfidenzintervall)

Die Probandinnen und Probanden, die eine fachliche Ausbildung in Mathematik erhalten haben (*GH(R) mit Mathematik*, hier: DEU 1-10 PS_M und *Primarstufe mit Mathematik*, hier: DEU 1-4 P_M) zeigten im Test eine gute mathematische Leistung, die signifikant über dem internationalen Mittelwert von 500 Punkten liegt. Überraschend gut sind auch die Leistungen der Primarstufenanwärterinnen und –anwärter ohne mathematischen Schwerpunkt (DEU 1-4 PoM). Personen des stufenübergreifenden Typs *GH(R) ohne Mathematik* (DEU 1-4 PSoM), die in der Primarstufe als Klassenlehrkraft in der Regel Mathematik fachfremd unterrichten, aber keine oder nur eine geringe mathematische Ausbildung erhalten haben, zeigen hingegen besorgniserregende Leistungen, die signifikant unter dem internationalen Durchschnitt liegen. Auch in Bezug auf das mathematikdidaktische Wissen zeigt dieser Typ im Test große Defizite.

Welche Unterschiede zeigen sich qualitativ im Wissen zukünftigen Lehrerinnen und Lehrern verschiedener Ausbildungsgangtypen? Wo liegen ihre Stärken und Schwächen? Wie wirken sich unterschiedliche Schwerpunktsetzungen in den Ausbildungscurricula auf das Professionswissen der Lehramtsanwärterinnen und –anwärter aus? Die Testung des mathematischen Wissens umfasste die Inhaltsbereiche Algebra, Arithmetik, Geometrie und Stochastik. Die Konzeptualisierung des Leistungstest lässt eine Subskalenbildung für die Domänen Algebra, Arithmetik und Geometrie, aufgrund der Itemanzahl jedoch nicht für Stochastik zu. Gemäß den Schwerpunkten der Ausbildungscurricula war zu erwarten, dass Absolventinnen und Absolventen der Primarstufenausbildungsgänge eher höhere Leistungen in den Bereichen Geometrie und Arithmetik zeigen, Absolventinnen und Absolventen des Typs *GH(R) mit Mathematik* eher im Bereich Algebra. Die folgende Abbildung zeigt die mathematischen Leistungen der Probandinnen und Probanden im Bereich Geometrie differenziert nach Ausbildungsgangtyp.



Auch hier zeigen die Absolventinnen und Absolventen des Typs *GH(R) mit Mathematik* wieder die stärksten Leistungen, dicht gefolgt vom Typ *Primarstufe mit Mathematik* und *Primarstufe ohne Mathematik.* Insgesamt lässt sich in der Verteilung kein signifikanter Unterschied zur Gesamtmathematikskala ausmachen. Das Gleiche gilt für die Leistungen in den Subdomänen Algebra und Arithmetik. Die Ergebnisse sprechen somit gegen einen Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen inhaltlichen Schwerpunkten der Ausbildungsgänge und den mathematischen Leistungen in den Subdomänen. Erste Analysen der Items hinsichtlich weiterer inhaltlicher und allgemeinmathematischer Merkmale lassen dennoch eine Identifizierung spezifischer Stärken und Schwächen der zukünftigen Lehrkräfte verschiedener Ausbildungsgangtypen zu. So zeigen z.B. angehende Lehrkräfte des Typs *Primarstufe mit Mathematik* größere Schwierigkeiten als die des Typs *GH(R) mit Mathematik* bei Items, die das Überprüfen von Aussagen über Terme und Gleichungen erfordern. Leichter als den Lehrkräften des Typs *GH(R) mit Mathematik* fallen ihnen dagegen Items, bei denen Terme aus einer verbalen Darstellung entwickelt oder in eine verbale Darstellung übersetzt werden müssen. Ein besseres Abschneiden der stufenübergreifenden Lehramtsanwärterinnen und –anwärter, die in der Regel eine umfangreichere mathematische Ausbildung genossen haben, bei formalen Aspekten der Algebra ist nicht verwunderlich, als problematisch einzustufen ist jedoch die Schwäche dieser Personengruppe beim Wechsel zwischen den Darstellungsformen, da gerade dies einen zentralen Unterrichtsgegenstand der Sekundarstufe I darstellt, in der diese Gruppe unterrichten wird.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010a): TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010b): TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Döhrmann, M., Hacke, S. & Buchholtz C. (2010a): Nationale und internationale Typen an Ausbildungsgängen zur Primarstufenlehrkraft. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg.): TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann, S. 55-72.

Döhrmann, M., Buchholtz, C. & Hacke S. (2010b):: Nationale und internationale Typen an Ausbildungsgängen zur Sekundarstufen-I-Lehrkraft. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg.): TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann, S. 55-72.

Willi DÖRFLER, Klagenfurt

Formen der Referenz in der Mathematik

Mathematischen Texten ist zweifelsfrei zu entnehmen, dass sie von ganz bestimmten Gegenständen oder Objekten und deren Eigenschaften handeln. Oder zumindest sind diese Texte so geschrieben, dass sie vorgeben derartige Gegenstände zu untersuchen, zum Beispiel dadurch, dass diese Gegenstände durch Substantive benannt werden. Zu diesen Gegenständen gehören alle Arten von Zahlen, (seit Cantor) endliche und unendliche Mengen (auch von mathematischen Objekten: Zahlenmengen), Funktionen, Relationen, algebraische Strukturen, geometrische Figuren, so genannte Räume aller Art, etc. Nach allgemeinem Verständnis sind diese mathematischen Objekte nicht direkt als solche, sondern nur als Referenten von Zeichen (Symbolen, Darstellungen) begreifbar und zu untersuchen. Dabei spare ich hier (auch aus Platzgründen) die philosophische Frage nach der Existenzform der mathematischen Objekte gänzlich aus, siehe aber dazu etwa Otte (2003), Krämer (1988, 1991). Für meine Fragestellung ist es weitgehend irrelevant, ob man Realist oder Fiktionalist hinsichtlich mathematischer Objekte ist, also ob man eine unabhängige Existenz mathematischer Gegenstände annimmt oder diese als Konstruktionen oder Erfindungen des menschlichen Denkens ansieht. Im ersten Fall ist Mathematik deskriptiv und die verwendeten Zeichen gewinnen ihre Bedeutung durch die Beschreibung der von ihnen unabhängigen Objekte. Im zweiten Fall sind die Zeichen selbständig und legen die Objekte fest („symbolische Konstitution" nach Krämer). Hier möchte ich untersuchen, wie in der Mathematik Zeichen und Zeichensysteme eine Referenz auf eben diese Objekte herstellen unabhängig von deren Existenzform. Referenz kann es ja auch auf fiktionale Objekte geben („Einhorn" als Beispiel). Im Gegensatz zu den mathematischen Objekten sind jedenfalls die verwendeten Zeichen innerhalb einer großen Vielfalt von Zeichen- und Notationssystemen als Inskriptionen (auf Papier oder in einem anderen Medium) wahrnehmbar und konkret manipulierbar (etwa durch Rechnen). Zumindest ist das Geschriebene oder Gedruckte die materielle Basis einer oft komplexen Praxis des Umgangs mit und der Verwendung von jeweiligen Zeichen nach mehr oder weniger expliziten Regeln. Zum Begriff „Inskription" siehe Roth und McGinn (1998).

Als theoretische Basis für meine Analyse verwende ich die Begriffe aus der Semiotik von Charles S. Peirce, (siehe dazu Hoffmann, 2005), insbesondere jedoch die Unterscheidung der Zeichentypen Diagramm, Index und Symbol (siehe auch Dörfler, 2006).

Eine Art der Bezugnahme auf (mathematische) Objekte, die ich nur der Vollständigkeit halber erwähne, erfolgt durch Namensgebung. Dazu zähle ich beispielsweise: deutsche Zahlwörter, „Eulersche Zahl" oder kurz e, π, Exponentialfunktion, Ableitung, Integral, Banach-Raum, etc. Ihre wesentliche Funktion liegt in der Kommunikation über Mathematik und man kann auch sagen, dass diese Namen nicht zur Mathematik selbst gehören. Auch kommt ihnen eine Abkürzungsfunktion zu, indem sie oft für komplexe Formeln oder Definitionen stehen, die dann die eigentlichen Zeichen für die durch die Namen nur benannten mathematischen Objekte darstellen. Anders gewendet, ich interessiere mich primär für solche Zeichen in mathematischen Texten, an denen und mit denen Operationen ausgeführt werden, die zu Ergebnissen über Eigenschaften der bezeichneten mathematischen Objekte führen (können).

In mathematischen Texten lassen sich nun zwei ganz wesentlich verschiedene Arten von Zeichen für mathematische Objekte beobachten. Oder, man könnte auch sagen, die letzteren treten in den Texten in (zumindest diesen) zwei verschiedenen Formen auf. Eine nenne ich diagrammatische Referenz (d. R.) und die andere indexikalische Referenz (i. R.). Für erstere führe ich als erstes Beispiel die figurierten Zahlen an (etwa Dreieckszahlen), wo Zahlen als Punktmengen (oder Strichlisten) auftreten (aber nicht durch diese bloß veranschaulicht werden!). Diese Punktmengen sind im Sinne von Peirce Diagramme, deren Objekt die jeweilige Zahl ist (bei Pythagoras dürfte eher noch eine Identifizierung des Diagramms mit seinem Objekt gedacht worden sein). Eine indexikalische Referenz dagegen erfolgt etwa in der Formulierung des „Kleinen Fermat": Ist $a \in \mathrm{N}$, p prim, $(a, p) = 1$, so ist $a^{p-1} \equiv 1(p)$. Hier sind a und p im Sinne von Peirce Indizes, die auf Zahlen verweisen. Diese Indizes (mit Variablencharakter) treten ihrerseits wiederum in Diagrammen auf (die Formeln im obigen Satz).

Ein wesentlicher Unterschied zwischen d. R. und i. R. ist somit, dass in ersterer die auf mathematische Objekte verweisenden Diagramme (Zeichen) selbst eine innere Struktur haben, die bei allen Operationen mit ihnen ganz wesentlich benützt wird (beim Addieren; in Beweisen etwa von Sätzen über „gerade" und „ungerade"). Bei d. R. werden den Zeichen selbst Eigenschaften zugeschrieben bzw. werden mit ihnen dann Eigenschaften der referenzierten Objekte (hier die Zahlen) festgelegt. Nach Peirce konstituieren die Diagramme in dieser d. R. eine Sichtweise auf das (sonst unbekannte) Objekt. Das unterscheidet auch diesen semiotischen Zugang von der Begrifflichkeit der „Darstellungen", bei denen (implizit wenigstens) ein schon strukturiertes Objekt seine möglichen Diagramme bestimmt. Da man bei der d. R. von einer strukturellen oder relationalen Ähnlichkeit oder sogar Isomorphie zum referenzierten Objekt ausgeht (zumindest metaphorisch), ist das Operieren mit den Diagrammen gleichsam ein direktes Operieren mit mathematischen Objekten. In diesem semiotischen Sinne sind dann die Diagramme die Objekte, oder etwas differenzierter, sie sind Prototypen der referenzierten Objekte. Die d. R. der jeweiligen Zeichen/ Diagramme ist dabei konstitutiver und konstituierter Bestandteil und/oder Funktion einer umfassenden (sozialen) Praxis des Handelns mit den Zeichen („Strichlistenpraxis"); d. h. die d. R. „gibt" es nur innerhalb dieser Praxis, sie ist keine absolute Eigenschaft etwa der Punktmengen/ Strichlisten. Zu dieser Praxis gehört dann das Rechnen mit den Zeichen, aber auch die „Anwendung" beim Zählen sowie Beweise mit figurierten Zahlen. In dieser Praxis gibt es dann auch die Rede von beliebig langen Strichlisten (Punktmengen), angedeutet durch die notorischen drei Punkte. Deren Eigenschaften und Operationen werden analog zu den überblickbaren („kleinen") Diagrammen vorgestellt (oder postuliert oder vereinbart). Man könnte hier auch schon den ersten Hinweis auf Fiktionalität in der Mathematik sehen.

Im Falle der i. R. hat nun das Zeichen, also der Index keine (mathematisch relevante) innere Struktur und die Indexfunktion des Zeichens muss vereinbart oder angekündigt werden: Sei n eine natürliche Zahl, sei x eine reelle Zahl, usf.. Hilbert (in Hilbert und Bernays (1936)) beschreibt einen Übergang von d. R. zu i. R., wobei die Indizes dann in Formeln (etwa Assoziativgesetz) auftreten, die „Rechenregeln" allgemein formulieren. Und diese Rechenregeln sind es dann auch, die das Operieren mit den Indizes regeln. Die Indizes bzw. die durch sie indizierten mathematischen Objekte sind hier also durch ein formales Regelsystem konstituiert, wie das typischerweise durch Algebraisierung und Axiomatisierung erfolgt. Ich halte dies für einen großen Kontrast zur d. R.: Diagramme beschränken gewissermaßen durch ihre Struktur die möglichen und sinnvollen Handlungen mit ihnen, die Regeln sind zwar oft implizit, aber „anschaulich". Ein Index beinhaltet zunächst keinen Hinweis, was mit ihm getan werden kann oder soll, prinzipiell ist „alles" möglich (deswegen die vielen Schülerfehler in der Algebra?). Er erhält seine Rolle oder Referenz erst durch das auf ihn anzuwendende (Rechen-)Regelsystem. Dies unterscheidet die semiotische Sicht mit Indizes vom Standpunkt der „Variablen". Für Funktionszeichen wie f, g wird das in Dörfler (2010) an Beispielen untersucht. Wichtig ist aber, dass Indizes nicht isoliert auftreten, sondern stets eingebunden als „Bauteile" von Diagrammen, die Relationen zwischen den Indizes festlegen (auch wieder nach vereinbarten Regeln); etwa f, g in den typischen Ungleichungen der Analysis.

Weitere Beispiele für diagrammatische Referenz: Dezimalzahlen, Brüche, komplexe Zahlen $a + \mathrm{i}b$ (mit a, b als Indizes auf reelle Zahlen), Matrizen, Funktionsterme einschließlich unendliche Reihen, Funktionsgraph, geometrische Figuren. Zu jedem Beispiel gehört eine komplexe Praxis, in die die d. R. eingebettet ist. Und in allen Fällen gibt es eine dazu korrespondierende Praxis mit i. R., wo die Referenz der Indizes durch Regeln aus der diagrammatischen Praxis festgelegt wird (sei z eine komplexe Zahl, sei A eine Matrix); vgl. Dörfler (2007) zu den Matrizen.

Beide Formen der Referenz kommen schon in der Schule vor, auch wenn die i. R. dann in der höheren Mathematik dominiert. Jedenfalls ist es sinnvoll, die genannten Unterschiede bewusst zu machen, weil den beiden Referenzformen sehr unterschiedliche Auffassungen von mathematischen Objekten entsprechen. In der Arithmetik treten die (natürlichen) Zahlen letztlich immer in d. R. auf (Dezimalzahlen, Punktmengen, Strichlisten, etc.) und das Rechnen benutzt ganz wesentlich die innere Struktur dieser Diagramme. Demgegenüber findet sich in der Algebra typischerweise fast ausschließlich eine i. R. (auf Zahlen überhaupt). Dieser Wechsel geht dann so weit, dass die Indizes (Buchstaben) selbst zu „Rechenobjekten" werden (ohne Referenz), deren Rolle durch Rechenregeln festgelegt wird. Vor diesem Hintergrund sind die massiven Lernprobleme des Übergangs von der Arithmetik zur Algebra nicht verwunderlich (vgl. dazu Filloy u. a., 2008).

Literatur

Dörfler, W. (2006): Diagramme und Mathematikunterricht. In: JMD, 27, 200 - 219.

Dörfler, W (2007): Matrizenrechnung: Denken als symbolisches Handwerk. In B. Barzel & al. (Hrsg.): Algebraisches Denken. Festschrift für L. Hefendehl-Hebeker. Hildesheim: Franzbecker, 53-60.

Dörfler, W. (2010): Mathematische Objekte als Indizes in Diagrammen. Funktionen in der Analysis. In G. Kadunz (Hrsg.): Sprache und Zeichen. Hildesheim und Berlin: Franzbecker, 25-48.

Filloy, E., Puig, L. und T. Rojano (2008): Educational Algebra. Mathematics Education Library. New York: Springer.

Hilbert, D. und P. Bernays (1936): Grundlagen der Mathematik I. Berlin: Springer.

Hoffmann, M. (2005): Erkenntnisentwicklung. Philosophische Abhandlungen, Band 90. Frankfurt am Main: Klostermann.

Krämer, S. (1988): Symbolische Maschinen. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Krämer, S. (1991): Berechenbare Vernunft. Berlin und New York: de Gruyter.

Otte, M. (2003): Does Mathematics have Objects? In What Sense? In: Synthese, 134, 181 - 216.

Roth, W.-M. und M. K. McGinn (1998): Inscriptions: Toward a Theory of Representing as Social Practice. In: Review of Educational Research, 68/1, 35 - 59.

Deborah DÖTSCHEL, Nürnberg

Zum Verständnis der Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht

Hermann Weyl bezeichnet „Mathematik [als] die Wissenschaft der Unendlichkeit.“ Unendlichkeit hat nach David Hilbert zudem außerhalb der Mathematik „wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen“ beschäftigt. In der Religion wird das Unendliche als elementarer Grundstein für das Gottesbild gesehen; Künstler wie Escher verarbeiten “Unendlich“ in ihren Werken und bereits Aristoteles beschäftigte sich mit Fragen nach dem „aktual“ und „potentiell Unendlichen“.

Dass Unendlichkeit auch für Schüler ein interessantes Themengebiet ist, scheint eine logische Konsequenz, welche vom Unterricht allerdings weitgehend unbeachtet bleibt: : *„Immer dann, wenn Mathematik einmal interessant wurde, hörte der Unterricht auf, genauer hinzusehen. Das fand ich ziemlich ärgerlich.“* (Zitat eines angehenden Referendars)

Ausgehend von der Kluft zwischen mathematischem und allgemeinen Interesse einerseits und schulischer „Nichtbehandlung“ andererseits stellen sich Fragen wie: Wo und wie wird im heutigen Unterricht der Unendlichkeitsbegriff thematisiert? Welches Verständnis haben Schüler unterschiedlicher Schulformen vom Unendlichkeitsbegriff? Wie stellt sich eine angemessene Stoffauswahl zum Unendlichkeitsbegriff für die Schule dar?

Der Unendlichkeitsbegriff im Unterricht

Betrachtet man Mathematikbücher unterschiedlicher Jahrgangsstufen, so trifft man bereits vor und in der Primarstufe auf das Phänomen „Unendlich“. Mit Aussagen wie „1,2,3 und immer weiter zählen“ oder „unendlich viele Symmetrieachsen des Kreises“ setzen sich Kinder mit dem Begriff auseinander. In der Sekundarstufe I begegnen Schüler dann beispielsweise Vorstellungen zur „unendlichen“ Ausbreitung von Geraden und Ebenen im Raum oder unendlich vielen Nachkommastellen irrationaler Zahlen , während in der Analysis der Sekundarstufe II sogar ganze Lehrgänge dem „Unendlichen“ gewidmet sind. Die entscheidenden Fragen zu diesem Thema bleiben jedoch unbeantwortet: Was *ist* Unendlich? Was beschreibt aus Sicht der Mathematik der Begriff „Unendlich“?

Vorstellungen zu Unendlich

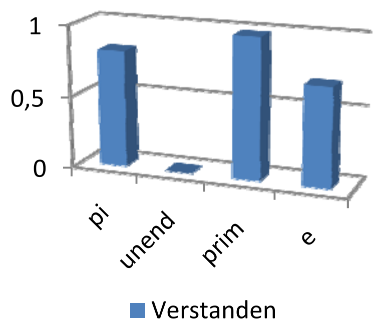
Dass der Unendlichkeitsbegriff einerseits im Unterricht an verschiedensten Stellen auftritt und in der Sekundarstufe II sogar intensiv benutzt wird, andererseits aber nicht thematisiert und zum eigenständigen Objekt von Reflexionen erhoben wird, wirft zunächst die Frage auf, mit welchen Vorstellungen Schüler „Unendlich“ assoziieren. In einer ersten Vorstudie (im Rahmen eines Dissertationsprojekts) zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriff wurden 77 Hauptschüler aus allen Klassenstufen, 48 Gymnasiasten (Mathe-LK 13) und 26 Studenten aus dem 7. Semester für das Gymnasiale Lehramt Mathematik die Frage gestellt: „Was verstehst Du unter unendlich?“ Zumindest an den beiden „Enden des Spektrums“, also auf der einen Seite die Hauptschüler, auf der anderen Seite die angehenden Mathematiklehrer müssten und sollten sich verschieden ausgeprägte Verständnisniveaus erwarten lassen. Die befragten Hauptschüler gaben (erwartungsgemäß) „unmathematische“ Antworten, wie etwa: unendlich sei „die größte Zahl der Welt“; „Hört nie auf“ oder irgendetwas mit diesem Symbol „∞“. Der Versuch einer Einordnung der Antworten in Kategorien wie „Größenvorstellung“, „Iteration“, … ergibt:

Hauptschüler		**Mathematikstudenten**
„Hört nie auf.“	**Iteration**	*„Man fängt an zu zählen und kann niemals aufhören.“ „ohne Ende“*
„Das Universum ist unendlich.“	**Metaphysisch**	*„Das Weltall und der liebe Gott“*
„Eine 1 mit ewig viel Nullen“	**Ziffernaspekt**	*„Man hängt 1 Jahr lang immer wieder 0er an die eins und dann noch weiter…“*
„Das Symbol ∞ “	**Formalsymbolisch**	*„ ∞ +1“*
„Die größte Zahl der Welt“	**Größenvorstellung**	*.“..unvorstellbar groß“*

Ordnet man nun die Antworten der Mathematikstudenten (7.Sem.) in diese Kategorien ein, so zeigt sich erstaunlicherweise, dass sie sich nicht merklich unterscheiden. Auch die „Mathematiker“ gaben *ausschließlich* „unmathematische“, eher intuitive, umgangssprachliche Antworten wie etwa: „Unendlichkeit ist unendlich groß, unvorstellbar groß“ oder „Das Weltall und der liebe Gott“; „Man hängt 1 Jahr lang immer wieder 0er an die eins und dann noch weiter…“. Keine einzige Formulierung zielt auf eine mathematische Definition, wie sie beispielsweise von Cantor gegeben ist.

Um bei der Auswertung Missverständnisse auszuschließen bzw. zu überprüfen, ob etwa generell von den Befragten mathematischen Antworten gemieden werden, wurde parallel zu „Unendlich“ nach dem Verständnis zu „Pi“, „Primzahl“ und „e“ gefragt.

Anders als bei „Unendlich“ fielen die Antworten hier „mathematisch“ aus: Beispiele hierfür wären, „das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser“ oder „eine Zahl, die durch sich selbst und 1 teilbar ist“.

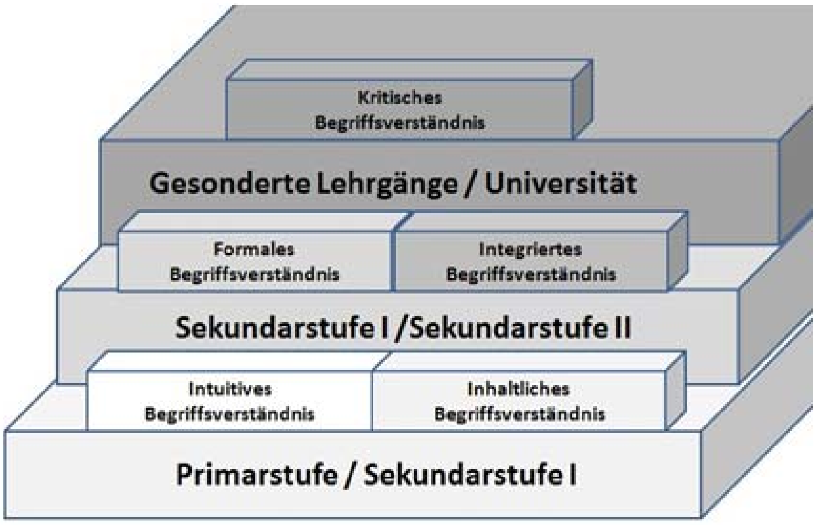


Entsprechend ergibt sich bei der Auswertung nach - Begriff „mathematisch“ beantwortet / Begriff nicht „mathematisch“ beantwortet - nebenstehendes Bild. (Auf der Abszisse ist der Anteil „mathematisch“ korrekter Antworten aufgetragen).

Überlegungen zu einer Lehrgangskonzeption

Angesichts der Situation, dass ein zentraler Begriff der Mathematik im Unterricht zwar verwendet, aber offensichtlich an keiner Stelle thematisiert wird und dass Abiturienten (und wie bei der vorliegenden Befragung selbst Studierende des Faches Mathematik) also nur über dasselbe intuitive Begriffsverständnis wie Hauptschüler verfügen, stellt sich die Frage, ob und wie sich der Unendlichkeitsbegriff in ein Curriculum einbetten lässt.

Beim „langfristigen“ Lernen von Begriffen liefert ein Stufenmodell (hier von Vollrath) einen Rahmen, der beim Unendlichkeitsbegriff aufgrund chronologischer, geschichtlicher Entwicklungen und didaktischen Überlegungen gefüllt werden und so als Basis für ein Lehrgangskonzept dienen kann.



Im vorliegenden Fall zeigt eine Begriffsanalyse, dass das ursprüngliche Stufenmodell für eine Einordnung des Unendlichkeitsbegriffs aus Gründen mathematischer Überlegungen modifiziert werden sollte und in etwa obige Gestalt annehmen könnte.

Wendet man diese Stufung auf die zentralen mathematischen Aspekte zum Begriff „Unendlich“ an, ergibt sich folgende grobe Gliederung, die als Grundlage für eine nachhaltige Vermittlung des Begriffs in der Schule dienen könnte.

Intuitives / Inhaltliche Begriffsverständnis

- „…“ wird als unendliches Weiterzählen verstanden
- Existenz unendlich großer Zahlenbereich
- Unterscheiden endlicher und unendlicher Mengen
- 1 zu 1 Zuordnungen vornehmen (Bijektion)
- Periodische Zahlen
- Rechnen mit periodischen Zahlen
- Phänomenologie/Paradoxa

Formales / Integriertes Begriffsverständnis

- Mächtigkeit von □ (abzählbare Mengen)
- 1. und 2. Diagonalverfahren nach Cantor
- Definition von Unendlichkeit nach Cantor
- Verständnis „es existieren mind. 2 Unendlichkeiten“
- Beweis zur Überabzählbarkeit von □
- Phänomene in □ („Dimensionsproblem“)
- Beweis zur Mächtigkeit der Potenzmenge
- Verständnis „es existieren unendlich viele Unendlichkeiten“

Kritisches Begriffsverständnis

- Mengenparadoxon (Auswahlaxiom)
- Menge aller Mengen
- Banach-Tarski-Paradoxon
- Axiomatische Mengenlehre
- Diskussion der Kontinuumshypothese
- Intuitionismus (Brouwer) / Konstruktivismus

Offen bleiben an dieser Stelle noch Fragen nach einer für verschiedene Schularten und Schulstufen geeigneten Stoffauswahl, Einbettung und Vernetzung in das übliche Curriculum, um zu vermeiden, dass „Unendlichkeit“ als „Fremdkörper“ bzw. „totes Thema“ im Mathematikunterricht erscheint.

Literatur

Deiser,O., (2004): Einführung in die Mengenlehre. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Meschkowski, H. (1973): Hundert Jahre Mengenlehre. Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG. München.

Vollrath, H.-J. (1995): Didaktische Probleme langfristiger Lernprozesse im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. S. 54-61

Christina DRÜKE-NOE, Kassel

Alle sechs Wochen eine andere Klassenarbeit – oder doch nicht?

In diesem Beitrag soll der Blick von einer eher stoffinhaltlich geprägten Betrachtung von Klassenarbeiten hin zu den mathematischen Tätigkeiten gelenkt werden, die die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der Aufgaben ausführen müssen. Die Analysen geben Auskunft über die Kombinationen dieser Tätigkeiten und ihre jeweils realisierten Niveaus und damit über das in Klassenarbeiten realisierte kognitive Anspruchsniveau.

1. Datengrundlage, Vorgehen und Methoden

Die Untersuchungsergebnisse beruhen auf zwei Datensätzen (s. Tabelle). Zum einen sind dies die Aufgaben jener Klassenarbeiten, die im Rahmen der COACTIV[1]-Studie von einer repräsentativen Stichprobe von Schulen eingesammelt wurden. Zum anderen sind dies die Aufgaben der Klassenarbeiten einer Konvenienzstichprobe jener hessischen Schulen, die von 2007 bis 2009 an der Fortbildungsinitiative KUMN[2] teilgenommen haben. Alle Aufgaben wurden nach dem Klassifikationsschema aus COACTIV (vgl. Jordan et al., 2006) kodiert, das für diese Zwecke noch erweitert wurde.

Projekt	Klasse	Anzahl Klassenarbeitsaufgaben	Anzahl Klassen (gesamt)	Anteil Gym-Klassen
COACTIV	9	14744	259	ca. 34 %
COACTIV	10	10863	202	ca. 41%
KUMN	9	2986	51	ca. 51 %
KUMN	10	2834	40	50 %

Der kognitive Blick auf jede einzelne Teilaufgabe umfasst im COACTIV-Klassifikationsschema vier Dimensionen: den inhaltlichen und den kognitiven Rahmen, den Lösungsraum und die Elemente des Modellierungskreislaufs. Letztere werden u. a. durch vier mathematische Tätigkeiten (*Außermathematisches Modellieren, Innermathematisches Modellieren*, *Mathema-*

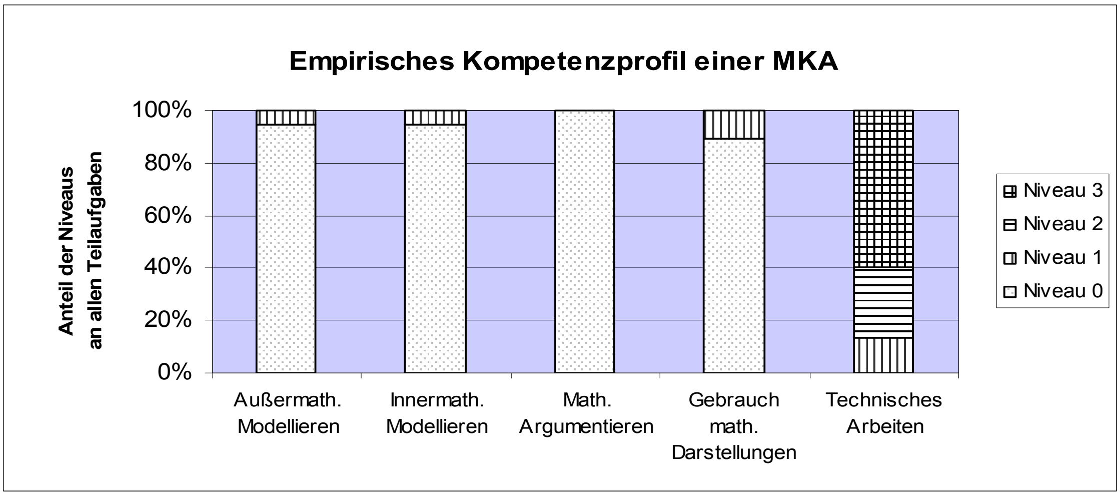
[1] In dieser Studie zu „*Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz*" (COACTIV, Projektleitung: Jürgen Baumert, Werner Blum und Michael Neubrand) wurden alle Klassenarbeiten und eine Auswahl der Hausaufgaben und der Unterrichtsaufgaben der deutschen PISA-Klassen 2003/2004 (9. und 10. Schuljahr) eingesammelt und analysiert.

[2] Fortbildungsinitiative *Kompetenzorientiert Unterrichten in Mathematik und Naturwissenschaften* (ca. zwei Jahre Dauer, durchschnittlich vier Fortbildungstage).

tisches Argumentieren und *Gebrauch mathematischer Darstellungen*) erfasst, die jeweils auf vier möglichen Niveaus realisiert werden können. Am Beispiel des außermathematischen Modellierens: Zu Niveau 1 (einfaches Niveau) gehören Standardmodelle, zu Niveau 2 (mittleres Niveau) mehrschrittige Modelle und zu Niveau 3 (höheres Niveau) die Verwendung komplexer Modelle oder das kritische Beurteilen von Modellen. Wird einer mathematischen Tätigkeit das Niveau 0 zugewiesen, so bedeutet dies, dass diese Tätigkeit für die Bearbeitung einer Aufgabe nicht oder nur in sehr geringem Umfang nötig ist (ebd.)[3].

Für eine differenziertere Beschreibung des kognitiven Potentials der Klassenarbeitsaufgaben wurde neu das *Technische Arbeiten* als weitere mathematische Tätigkeit operationalisiert, um die rein technische Komplexität des Rechnens zu erfassen. Diese Tätigkeit war im COACTIV-Schema nicht enthalten. Die Komplexität z.B. des Algebraisierens, aber auch kognitive Aspekte, wie konzeptuelles oder begriffliches Verstehen oder Entscheiden und Reflektieren, bleiben auf allen vier Niveaus dieser Tätigkeit unberücksichtigt. Die Operationalisierung erfolgte in einem Wechselspiel aus dem systematischen Variieren von Aufgaben verschiedener Stoffgebiete und theoriegeleiteten Überlegungen (u. a. nach Cohors-Fresenborg et al., 2004, und Sjuts, 2003).

Die Analysen basieren auf Serien von Klassenarbeiten, die es erlauben, stoffgebietsspezifische Einflüsse zunächst auszublenden. Eine solche, jeweils auf eine Klasse bezogene Gesamtheit aller Klassenarbeitsaufgaben eines Schuljahres wird als Masterklassenarbeit (kurz: MKA) bezeichnet und bildet im Folgenden die Analyseeinheit.



[3] Vgl. hierzu auch Drüke-Noe, 2009.

Jede MKA wird mittels der realisierten Kombinationen der Tätigkeiten und ihrer Niveaus charakterisiert. Dazu wird zu jeder MKA ein sog. Empirisches Kompetenzprofil erstellt, das in Form einer 5x4-Matrix die Verteilung der prozentualen Anteile der fünf mathematischen Tätigkeiten auf den jeweils vier Niveaus angibt. Dies veranschaulicht die obige Grafik[4].

Schließlich wird das kognitive Anspruchsniveau einer MKA mit zwei Empirischen Kompetenzmaßen beschrieben. Um die Gesamtheit der realisierten Niveaus über alle Teilaufgaben zu erfassen, wird mit einem ersten, relativ groben Maß die einfache Summe der realisierten Niveaus ermittelt. Ein zweites, gewichtetes Maß berücksichtigt zusätzlich die prozentualen Anteile der je Tätigkeit realisierten Niveaus[5]. Die folgende Tabelle zeigt eine schulformbezogene Zusammenstellung dieser Maße. Dabei bedeuten höhere Maße also ein höheres kognitives Anspruchsniveau einer MKA.

		COACTIV		**Hessen**	
		Klasse 9	**Klasse 10**	**Klasse 9**	**Klasse 10**
Gym	$\Sigma_{\text{Niveaus min}}$	6	9	9	14
	$\Sigma_{\text{Niveaus max}}$	24	22	27	25
	$\Sigma_{\text{gewicht. Niveaus min}}$	2,10	2,44	2,65	2,97
	$\Sigma_{\text{gewicht. Niveaus max}}$	4,51	4,50	3,98	4,38
Nicht-Gym	$\Sigma_{\text{Niveaus min}}$	4	9	10	11
	$\Sigma_{\text{Niveaus max}}$	21	20	30	27
	$\Sigma_{\text{gewicht. Niveaus min}}$	1,16	2,00	2,13	2,05
	$\Sigma_{\text{gewicht. Niveaus max}}$	4,35	5,03	3,92	4,63

2. Auswertung

Global betrachtet sind die schulformbezogenen Unterschiede der Kompetenzprofile deutlich geringer als erwartet. Entgegen ursprünglicher Vermutung gibt es in allen Schulformen MKA mit höherem kognitivem Anspruchsniveau, d.h. es werden offenbar auch in schwächeren Lerngruppen vereinzelt kognitiv anspruchsvolle Aufgaben gestellt.

---

[4] Etwa 5 % aller Teilaufgaben dieser MKA erfordern Außermath. Modellieren auf Niveau 1, die übrigen nur auf Niveau 0. Ähnlich ist es beim Innermath. Modellieren und beim Gebrauch von Darstellungen. Math. Argumentieren ist nirgends erforderlich. 15 % erfordern Technisches Arbeiten auf Niveau 1, 25 % auf Niveau 2, 60 % auf Niveau 3.

[5] In dieser MKA beträgt die einfache Summe $\Sigma_{\text{Niveaus}} = 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 3 = 9$ und die Summe der anteilig gewichteten Niveaus $\Sigma_{\text{gewichtete Niveaus}} \approx 2{,}68$.

Zwar lassen die hier verwendeten Datensätze keine Aussagen über längsschnittliche Entwicklungen zu, eine Gegenüberstellung der Klassen 9 und 10 zeigt jedoch zum einen, dass die Spannweiten beider Kompetenzmaße geringer werden. Zum anderen sind zumindest die minimalen Werte der Empirischen Kompetenzmaße in den MKA der Klasse 10 jeweils höher, d.h. das kognitive Niveau der Klassenarbeitsaufgaben in Klasse 10 ist insgesamt etwas höher als in Klasse 9.

Obwohl der hessische Datensatz nicht repräsentativ ist, fällt auf, dass die Summen der Niveaus höher sind als im COACTIV-Datensatz. Zumindest einzelne MKA weisen ein hohes kognitives Anspruchsniveau auf, und sogar 30, als maximal möglicher Wert der einfachen Summe der Niveaus, wird erreicht. Diese Werte lassen vermuten, dass die Fortbildungen positive Effekte im Hinblick auf das realisierte Anspruchsniveau hatten, was jedoch anhand weiterer Daten genauer zu untersuchen ist. Ebenso ist genauer zu untersuchen, inwieweit zentrale Abschlussprüfungen – zumindest im nicht-gymnasialen Bereich – einen Einfluss gehabt haben können.

Insgesamt ist das kognitive Anspruchsniveau aller untersuchten Klassenarbeiten beider Datensätze jedoch als eher gering zu bezeichnen.

3. Ausblick

Zur Weiterentwicklung der Aufgabenkultur in Klassenarbeiten werden Normative Kompetenzprofile erstellt. Diese sind durch eine ausgewogene(re) Verteilung der Tätigkeiten und Niveaus charakterisiert und zielen so auf ein angestrebtes höheres kognitives Anspruchsniveau der MKA ab. Sie können als Reflexionsinstrument bei der Konzeption von Klassenarbeiten dienen, um perspektivisch z.B. den Anteil von Aufgaben zum Mathematischen Argumentieren oder von Aufgaben auf höheren Niveaus zu steigern.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J., Sommer, N. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In M. Neubrand (Hrsg.), Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften, 109-144.

Drüke-Noe, C. (2009): Ein prüfender Blick auf (kompetenzorientierte?) Klassenarbeiten. In: M. Neubrand (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 2, 535-538.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M., Kunter, M. (2006). Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben. Materialien aus der Bildungsforschung. Berlin: Max-Planck-Institut.

Sjuts, J. (2003) Formalisierung von Wissen – ein probates Werkzeug zur Bewältigung komplexer Anforderungen. In: mathematica didactica 26, 2, 73-90.

Christoph DUCHHARDT[1], Timo EHMKE[2], Irene NEUMANN[1], Eva KNOPP[1], [1] Kiel / [2] Lüneburg

Use it or lose it? – Die Nutzung von Mathematik im Alltag und ihr Zusammenhang mit mathematischer Kompetenz bei Erwachsenen

Das Nationale Bildungspanel (NEPS) ist eine Längsschnittstudie im deutschen Bildungswesen. Gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung hat sie das Ziel, individuelle Lebensläufe vom Kindergarten- bis ins Erwachsenenalter unter bildungswissenschaftlichen Fragestellungen zu dokumentieren (vgl. Blossfeld, 2008). Um dieses Ziel zu verfolgen, wurde ein interdisziplinäres Cluster aus verschiedenen Forschungseinrichtungen und –gruppen in Deutschland gebildet, das zentral vom Institut für bildungswissenschaftliche Längsschnittforschung (INBIL) an der Universität Bamberg koordiniert wird.

Das Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) in Kiel ist hierbei unter anderem für die Erfassung mathematischer Kompetenz über die Lebensspanne zuständig. Dazu wurde zunächst eine altersübergreifende Rahmenkonzeption ausgearbeitet, die sich an die PISA-Definition von *Mathematical Literacy* (vgl. OECD, 2003) anlehnt und strukturell zwischen inhaltlichen Bereichen und kognitiven Komponenten unterscheidet (vgl. Ehmke, Duchhardt, Geiser, Grüßing, Heinze & Marschick, 2009). Die Testitems, in denen diese Konzeption umgesetzt ist, sind dabei in authentische, alltagsnahe Situationen eingebettet.

Seit 2009 werden in verschiedenen Altersgruppen – u.a. Kindergartenkinder, Schülerinnen und Schüler verschiedener Klassenstufen – auf dieser Konzeption basierende Kompetenztests eingesetzt. Eine weitere Gruppe, die im Winter 2010/2011 in einer Hauptstudie des NEPS getestet wurde, sind Erwachsene im Alter zwischen 24 und 65 Jahren. Die im Folgenden vorgestellten Ergebnisse beziehen sich auf eine Vorstudie dazu, die im Winter 2009/2010 durchgeführt wurde. Der Fokus lag auf der Erprobung und Auswahl der Mathematikitems für die folgende Hauptstudie. Im Rahmen dieser Vorstudie wurde neben den Testitems ein Fragebogen eingesetzt, der unter anderem auch eine Skala zur Nutzung von Mathematik in Beruf und Alltag enthielt. Damit sollte der Frage nachgegangen werden, wie wichtig diese Nutzung zur Vorhersage von Mathematikleistung bei Erwachsenen ist – in welchem Umfang die Regel *Use it or lose it* gültig ist.

Die Stichprobe setzte sich aus 461 Erwachsenen (ca. 55% davon weiblich) aus ganz Deutschland zusammen. Die Altersverteilung orientierte sich dabei an den Anforderungen der Hauptstudie, vgl. Tabelle 1.

Alter (in Jahren)	-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-
N	14	115	100	113	94	15
Prozent	3,0%	24,9%	21,7%	24,5%	20,3%	3,3%

Tabelle 1: Altersverteilung der Erwachsenenstichprobe

Geschulte Testleiterinnen und Testleiter des Erhebungsinstituts infas führten die Mathematikkompetenztests standardisiert bei den Probanden zu Hause durch. Alle Erwachsenen bearbeiteten neben dem Fragebogen in 2 x 30 Minuten etwa 40 Items des Tests zur mathematischen Kompetenz.

Die Auswertung der Ergebnisse dieses Mathematiktests mit dem Programm ConQuest (vgl. Wu, Adams & Haldane, 2007) ergab, dass der Gesamttest das Kompetenzspektrum der Teilnehmerinnen und Teilnehmer sehr gut abbildete und mit einer EAP/PV-Reliabilität von 0.92 erfreulich zuverlässig war. Dabei wurde der Test in Übereinstimmung mit den empirischen Ergebnissen als eindimensional angenommen.

Wie häufig benötigen Sie folgende mathematische Inhaltsbereiche in Ihrem Beruf bzw. in Ihrem Alltag?				
	mind. 1x pro Woche	mind. 1x pro Monat	mind. 1x pro Jahr	seltener als 1x pro Jahr
Wahrscheinlichkeitsrechnung	☐	☐	☐	☐

Abbildung 2: Fragen zur Nutzung von Mathematik

Die Skala zur Nutzung von Mathematik umfasste insgesamt zwölf Items. Ein Beispielitem ist in Abbildung 2 abgebildet. Da die Antwortkategorien nicht äquidistant sind, wurde abermals eine Auswertung mit ConQuest vorgenommen, um die Antworten der Erwachsenen zu einem Nutzungswert zu aggregieren. Wie zu erwarten, passte das Rating-Scale-Modell, das für alle Items gleiche Schwellendistanzen zwischen den Antwortkategorien annimmt, nicht gut zu den Daten, stattdessen aber das Partial-Credit-Modell, das diese Einschränkung gerade nicht macht. Die EAP/PV-Reliabilität lag hier bei 0.85.

Von der oben aufgeworfenen Fragestellung geleitet, wurde nun unter Einbezug von üblichen Hintergrundvariablen eine Regressionsanalyse durchgeführt um herauszufinden, ob es im Kontext dieser Hintergrundvariablen überhaupt einen Zusammenhang zwischen der Nutzung von Mathematik im Alltag und mathematischer Kompetenz gibt und wie groß dieser gegebenenfalls ist. Die abhängige Variable *Kompetenz* war bei dieser Analyse der wle-Schätzer des (eindimensionalen) Mathematik-Kompetenzwertes, für die Variable Nutzung wurde der wle-Schätzer des oben beschriebenen Partial-Credit-Modells verwendet.

Es zeigt sich eine mittlere Korrelation zwischen Nutzung und Kompetenz. Die Beta-Koeffizienten legen ebenfalls nahe, dass der Nutzung eine besonders große Rolle bei der Erklärung mathematischer Kompetenz zukommt. Insgesamt konnten mit dieser Analyse etwa 36% (korrigiertes $R^2 = .363$) der Varianz in den Mathematikleistungen der Erwachsenen erklärt werden. Es verringert sich der Anteil der aufgeklärten Varianz auf 26%, also um mehr als ein Viertel, wenn man Nutzung als unabhängige Variable in der Analyse nicht berücksichtigt – ein weiteres Indiz für die Bedeutung der Nutzung. Die Ergebnisse finden sich in Tabelle 3.

Prädiktor	Korrelation mit *Kompetenz* (Pearson's ρ)	(standardisierter) Beta-Koeffizient der Regressionsanalyse
Nutzung	.493**	.348**
Bildungsdauer (in Jahren)	.399**	.218**
sozioökonomischer Status (ISEI)	.388**	.182**
Alter (in Jahren)	-.085	-.161**
Geschlecht (0 = weiblich, 1 = männlich)	.192**	.149**

** p < .001

Tabelle 3: Vorhersage der mathematischen Kompetenz von Erwachsenen.

Zusammenfassend lässt sich somit sagen, dass die naheliegende Vermutung – Nutzung von Mathematik beeinflusst mathematische Kompetenz positiv bzw. mindert deren Rückgang nach Schule und Studium – in dieser Studie bestätigt werden konnte. Allerdings sollte man bei der kausalen Interpretation der obigen Ergebnisse vorsichtig sein. Da es sich hier um eine querschnittliche Studie handelt, können letztlich keine sicheren Aussagen zur Wirkrichtung gemacht werden. Gerade im Wechselspiel Nutzung–Kompetenz scheint es naheliegend, auch eine Beeinflussung in die andere Richtung anzunehmen: Hohe mathematische Kompetenz könnte die Nutzung von Mathematik in Alltag und Beruf erleichtern.

Weitere angrenzende Forschungsfragen sollen in nachfolgenden Studien untersucht werden:

- Inwieweit lassen sich inhaltsbezogene Zusammenhänge zwischen Nutzung und mathematischer Kompetenz empirisch aufklären?
- Inwieweit Lassen sich Zusammenhänge zwischen spezifischen Berufen (und der damit zusammenhängenden Nutzung von Mathematik) und Kompetenz empirisch aufklären?
- Wie eng hängen Antworten in einem Fragebogen zur Nutzung von Mathematik mit tatsächlicher Nutzung zusammen? Gibt es hier systematische Unterschiede zwischen verschiedenen Gruppen Erwachsener?

Zumindest der zweite Punkt wird sich mit den Daten der NEPS-Haupterhebung, in der sehr viel differenziertere Hintergrunddaten und eine erheblich größere Stichprobe – mehrere Tausend Erwachsene nehmen teil – vorliegen werden, untersuchen lassen.

Literatur

Blossfeld, H.-P. (2008). *Education as a Lifelong Process. A Proposal for a National Educational Panel Study (NEPS) in Germany. Part A: Overview*. Unveröffentlichter BMBF-Antrag. Bamberg: Universität Bamberg.

Ehmke, T., Duchhardt, Ch., Geiser, H., Grüßing, M., Heinze, A. & Marschick, F. (2010). Kompetenzentwicklung über die Lebensspanne – Erhebung von mathematischer Kompetenz im Nationalen Bildungspanel. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.). *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium.* (S. 313 – 327). Münster: Waxmann.

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD.

Wu, M., Adams, R. & Haldane, S. (2007).ACER ConQuest [computer software]. Melbourne: Australian Council for Educational Research.

Carola EHRET und Timo LEUDERS, Freiburg

Kompetenzen und Hürden beim Schreibenlernen im Mathematikunterricht der Hauptschule

Der Mehrwert des Schreibens auch und gerade im mathematischen Fachunterricht ist inzwischen weitgehend Konsens in der Mathematikdidaktik (z.B. Barzel/Ehret 2009). Die Alltagspraxis in den Hauptschulen hingegen sieht anders aus. Lehrerinnen und Lehrer fürchten, die Lernenden mit zu hohen sprachlichen Ansprüchen zu überfordern und konzentrieren sich erfahrungsgemäß stark an inhaltlichen Basiskompetenzen. Doch brauchen gerade schwache Schülerinnen und Schüler auch Unterstützung beim Erwerb von Prozesskompetenzen, um sie im Lernprozess zu fördern.

1. Bestehende Konzepte

Insbesondere im englischen Sprachraum hat das Schreiben zur Unterstützung des fachlichen Lernens eine lange Tradition. Bereits in den 1970er und 80ern wurde im Rahmen der Bewegung „writing to learn“ versucht, das Schreiben in verschiedenste Bereiche des institutionalisierten Lernens zu integrieren. Während sich Arbeiten aus dem US-amerikanischen und australischen Raum durch ihre große Breite im Quer- wie im Längsschnitt auszeichnen (z.B. Waywood 1992) liegen deutschsprachigen Studien meist sehr kleine Stichproben zu Grunde (z.B. Selter 1993, Fetzer 2007). Desweiteren spielen hier der inhaltliche Aspekt bzw. die Schreibanlässe gegenüber dem reflexiven Schreiben eine größere Rolle.

Das dialogischen Lernen (Gallin/Ruf 1998) als didaktische Unterrichtskonzeption regt im Rahmen der Reisetagebücher mit den sogenannten Aufträgen sowohl inhaltliches als auch reflexives Schreiben an. Hingegen konzentrieren sich andere Arbeiten oft stark auf inhaltliche Aspekte (z.B. Selter 1993). Wenig Aufschluss geben die vorhandenen Studien über Schwierigkeiten die Lernende im Bezug auf das Schreiben bewältigen müssen sowie methodisch-didaktische Möglichkeiten zur Überwindung dieser Schreibhürden. Grundannahme der meisten Studien ist, dass Schülerinnen und Schüler im Prinzip bereits schreiben können, und diese Fähigkeit nun für den mathematischen Lernprozess nutzen werden. Insbesondere in der Arbeit mit schwächeren Lernenden stößt dies schnell an Grenzen.

2. Schreibhürden

Die Behauptung, fachlich schwächere Lernende könnten und wollten im Mathematikunterricht nicht auch noch schreiben, steht sowohl im Gespräch mit Praktikern als auch mit Didaktikern im Raum. Die Gründe und Ursachen scheinen so trivial, dass sie in der Fachliteratur oft nur zwischen den Zeilen zu lesen sind. Doch ist gerade diese Kenntnis notwendig, um unterstützende Schreibanlässe und Methoden zum Schreiben zu entwickeln und förderlich zu gestalten. In der aktuellen Vorstudie zu einem umfassenden Förderkonzept wurden sowohl Lehrerinnen und Lehrer als auch Schülerinnen und Schüler zu vorhandenen Schreibhürden befragt.

Im Rahmen von zwei Fortbildungsveranstaltungen zum Thema wurden Lehrerinnen und Lehrer in Form einer Kartenabfrage gebeten, eigene Hemmnisse gegenüber dem Schreiben im Fachunterricht sowie Hürden auf Seiten der Lernenden zu verbalisieren. Die Auswertung erfolgte mit Hilfe von Clustern und concept maps. Dabei ergaben sich im Wesentlichen drei Kernbereiche, die Lehrende sowohl für Schülerinnen und Schüler als auch für sich selbst als mögliche Hindernisse betrachten. Zunächst ist die Vorstellung von Mathematik und Mathematikunterricht stark geprägt von fertigen Produkten und Perfektion, einer Mathematik „wie sie im Buche steht“ (vgl. Gallin/Ruf, 1998). Dieses Bild prägt sowohl die Ziele, die Lehrende anstreben, als auch die Erwartungen an die Produkte der Lernenden. In der Wahrnehmung der Lehrenden wird dadurch auch die Erwartung der Lernenden an den Unterricht und ihre eigenen Leistungen stark beeinflusst. Der Anspruch, „fertige“ Mathematik zu produzieren steht in starkem Kontrast zum Lernprozess und den daraus entstehenden Schülerprodukten. Diese Kluft erschwert es den Lehrenden, Qualitäten der Schülerprodukte und Lernfortschritte zu erkennen sowie demzufolge, den Lernenden hilfreiche Rückmeldungen zu geben. Dabei ist den Lehrenden durchaus bewusst, dass gerade diese Rückmeldung unverzichtbar für die Motivation und den Erfolg der Lernenden ist. Soweit konnten die Vermutungen der Fachliteratur hier empirisch bestätigt werden.

Es wurde weiter mit drei fünften Hauptschulklassen jeweils eine Unterrichtsstunde mit ausgewählten Schreibanlässen durchgeführt. Auf dieser Grundlage wurden einzelne Lernende im Sinne eines stimulated recalls interviewt. Es hat sich gezeigt, dass es den Lernenden altersentsprechend – und konform mit der Literatur – sehr schwer fällt, über ihren eigenen Arbeitsprozess zu reflektieren und auftretende Schwierigkeiten auf den Punkt zu bringen. Zu erklären ist dies auch daraus, dass die Lernenden aller drei Klassen kaum Vorerfahrungen mit dem Schreiben im Mathematikunterricht hatten und somit die vorausgegangenen Aufgaben kaum mit ihrem Bild des Mathematikunterrichts in Verbindung bringen konnten. Trotzdem bereitete es ihnen überraschend wenig Schwierigkeiten, sich auf die vorausgehenden Schreibaufgaben einzulassen. Ein deutlicher Widerspruch zu den gängigen Erwartungen an Lernende dieser Schulart.

3. Kompetenzmodell Schreiben

Um das mathematische Schreiben zu fördern und die Qualität der Produkte sowie den Fortschritt der Lernenden zu bestimmen, ist zunächst eine Präzisierung dessen notwendig, was genau erreicht werden soll. Die vorliegenden Studien betrachten das mathematische Schreiben aus verschiedenen Blickwinkeln. Eine Perspektive, die auch in sprachdidaktischen Modellen weit verbreitet ist, widmet sich dem **Schreibprozess** und damit den Entstehungsphasen eines Textes (z.B. Fetzer 2007, Pugalee 2005), mit denen die Lernenden vertraut werden sollen. Eine weitere Ausgangsposition betrachtet das Schreiben hauptsächlich von den **Produkten** her (z.B. Waywood 1992), die, ähnlich der Niveaustufen der Bildungsstandards, verschiedenen Kompetenzstufen zugeordnet werden. Eine dritte Perspektive, die insbesondere den mathematischen Fachbezug stärkt, ist die Orientierung an **inhaltlichen Kompetenzen**, die in den Schülerprodukten sichtbar werden (z.B. Selter 1993).

Alle drei Sichtweisen sind gleichermaßen bedeutsam für das Schreiben. In ihnen findet man jedoch kaum systematische Aussagen zu den Kompetenzen, die die **Schreibenden** selbst benötigen. Zunächst wird ein grundlegendes Maß an **schriftsprachlicher Kompetenz** vorausgesetzt. Gleichzeitig ist die sprachliche Förderung auch ein Ziel des fachlichen Schreibens. Je nach Schreibanlass tritt der Sprachgebrauch stark in den Vordergrund, beispielsweise bei Reflexionsanlässen wie auch im Rahmen der Begriffsentwicklung, oder er tritt zu Gunsten der verbal knapp gefassten mathematischen Inhalte zurück. In allen Fällen wird angestrebt, dass die Lernenden in der Lage sind, sich verständlich auszudrücken. Je nach Zeitpunkt im Lernprozess kann das in der natürlichen Umgangssprache oder durch den korrekten Gebrauch der Fachsprache konkretisiert werden. Die Beteiligung der **mathematischen Kompetenz** begründet den Fachbezug und unterscheidet das mathematische Schreiben klar vom literarischen Schreiben. Abhängig vom Zeitpunkt im Lernprozess sowie von der konkreten mathematischen Tätigkeit (z.B. beschreiben, bewerten oder dokumentieren) können auf inhaltlicher Ebene eher singuläre oder mehr reguläre Aspekte (Gallin/Ruf 1998) im Vordergrund stehen. Unabhängig davon, ob der Schwerpunkt des Schreibanlasses mehr im sprachlichen oder eher im fachlichen Bereich liegt, spielt drittens die **metakognitive Kompetenz**, das „sich selbst über die Schulter schauen", eine wichtige Rolle. Dabei können sowohl Inhalte hinterfragt als auch der eigene Arbeitsprozess kommentiert werden. Besonders fruchtbar wird dieser Bereich bei Aufgaben mittlerer Schwierigkeit (Weinert 1984), die die Lernenden weder unter- noch überfordern aber dennoch herausfordern.

Für die weitere Konzeption und Evaluation der Fördermaßnahme braucht es ein umfassendes Kompetenzmodell für das mathematische Schreiben, das alle vier genannten Perspektiven auf das Schreiben berücksichtigen muss. Die Gestaltung des Schreibprozesses geschieht mit Hilfe von Lernumgebungen in die Schreibanlässe und Methoden als Operationalisierung der Schreibkompetenz eingebettet sind. Die Schreibprodukte dienen als Indikator für die fortschreitende Entwicklung der Lernenden. Die Schreibkompetenz selbst wird konkretisiert durch die notwendigen inhaltlichen Kompetenzen, die den Fachbezug schaffen sowie schriftsprachliche und metakognitive Kompetenzen. Alle drei Kompetenzbereiche sind sowohl Voraussetzung als auch Ziel der Schreibförderung und müssen für verschiedene mathematische Tätigkeiten ausgearbeitet werden.

Im weiteren Verlauf des Projekts werden unter Berücksichtigung der Erkenntnisse über Schreibhürden sowie auf der Basis des Kompetenzmodells erarbeitete Lernumgebungen in mehreren Hauptschulklassen erprobt und in ihrer Wirkung evaluiert werden.

Literatur

Barzel, Bärbel; Ehret, Carola (2009): Mathematische Sprache entwickeln. In: Mathematik lehren, H. 156, S. 4–9.

Fetzer, Marei (2007): Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule. Bad Heilbrunn: Klinkhardt (Klinkhardt Forschung).

Gallin, Peter; Ruf, Urs (1998): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz ; illustriert mit sechzehn Szenen aus der Biographie von Lernenden. Seelze: Kallmeyer.

Hoffman, M. R., & Powell, A. B. (1989): Mathematical and commentary writing: Vehicles for student reflection and empowerment. In: Mathematics Teaching, H. 126, S. 55–57.

Pugalee, David K. (2005): Writing to develop mathematical understanding. Norwood, Mass.: Christopher-Gordon Publ.

Selter, Christoph (1993): Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr. Wiesbaden: Dt. Univ.-Verl. (DUVMathematik).

Waywood, Andrew (1992): Journal Writing and Learning Mathematics. In: For the Learning of Mathematics, H. 12 (2) June, S. 34–43.

Weinert, Franz Emanuel; Kluwe, Rainer H.; Brown, Ann L. (Hg.) (1984): Metakognition, Motivation und Lernen. Stuttgart: Kohlhammer.

Nadine EHRLICH, Münster

Untersuchungen zu „Strukturierungskompetenzen" mathematisch begabter Sechst- und Siebtklässler

Seit längerer Zeit existieren Projekte mit begleitender Forschung für mathematisch begabte Schüler **ab der 8. Klassenstufe** (Krutetzki, Kießwetter), seit etwa 15 Jahren v.a. in Deutschland auch für den **Grundschulbereich** (Käpnick, Nolte, Bardy, Schmidt & Weiser, Fritzlar). Diese brachten mathematikdidaktisch und kognitionspsychologisch geprägte Merkmalsmodellierungen hervor. Aktuell ist im deutschsprachigen Raum ein Bemühen um eine immer differenziertere und komplexere Kennzeichnung mathematischer Begabung (vgl. das Merkmalsmodell von Käpnick & Fuchs, vgl. Fuchs 2006) und um eine **genauere begriffliche Festlegung** verschiedener mathematikspezifischer Begabungsmerkmale (z.B. Aßmus zum „Umkehren von Gedankengängen") feststellbar.

Ein **Forschungsdefizit** besteht aber im Fehlen einer wissenschaftlich begründeten differenzierten Kennzeichnung der Entwicklung mathematischer Begabungen im fünften bis siebten Schuljahr sowie einer Charakterisierung des Merkmals „Fähigkeit im Strukturieren mathematischer Sachverhalte" für diesen Altersbereich. Da Mathematik heute oft als „Wissenschaft der Muster und Strukturen" gekennzeichnet wird (vgl. Devlin 2002)[1] und Strukturierungsfähigkeiten somit das wahrscheinlich wesentlichste mathematikspezifische Begabungsmerkmal darstellen (vgl. Käpnick 2006), wären Untersuchungen zum genannten Forschungsdefizit wünschenswert.

Dementsprechend bestehen die **Hauptziele meiner Untersuchungen** in einer theoretischen Modellierung des Konstruktes „Strukturierungskompetenzen" als wesentliches Merkmal mathematischer Begabungen bei Sechst- und Siebtklässlern und einer diesbezüglichen differenzierten Kennzeichnung von Herangehensweisen und Niveaus. Das **forschungsmethodische Vorgehen** ist so angelegt, dass auf Basis der Literaturanalyse eine theoretische Modellierung vorgenommen wird, die dann durch quantitative und qualitative empirische Untersuchungen überprüft und vertiefend erkundet wird. Aus der Synthese der theoretisch-analytischen und konstruktiven sowie der empirischen Untersuchungen sollen dann begründete Ergebnisse zu den Hauptzielen der Arbeit gewonnen werden.

[1] Aufgrund des begrenzten Umfangs dieses Aufsatzes wird hier nur eine sehr geringe Anzahl an weiterführenden Literaturhinweisen gegeben; ausführlichere Verweise erhält man in Ehrlich 2010 oder auf Anfrage an mich per E-Mail.

1. Theoretischer Hintergrund

Die **theoretischen Grundpositionen** meiner Untersuchungen[2] sind stichpunktartig zusammengefasst: Berücksichtigung des komplexen Charakters von Begabung (unter Einbezug co-kognitiver Faktoren), der Bereichsspezifik, der dynamischen Entwicklung (Unterscheidung von Kompetenz und Performanz), der Möglichkeit und Notwendigkeit einer frühen Diagnostik, der Existenz unterschiedlicher Begabungsausprägungen und der Kombination quantitativer und qualitativer Untersuchungsmethoden. Entsprechend meiner Ausgangspositionen verstehe ich weiterhin mit Käpnick (2006, S. 5) *„unter einer mathematischen Begabung im Schulalter im Kern ein sich entwickelndes Potential von individuell geprägten weit überdurchschnittlichen mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen und sich hiermit in wechselseitigen Zusammenhängen entwickelnden begabungsstützenden bereichsspezifischen Persönlichkeitseigenschaften"*.

Schließlich gehe ich davon aus, dass es sich bei Strukturierungsfähigkeiten um ein Begabungsmerkmal handelt, dies ist unter Begabungsforschern unumstritten. In der Merkmalsmodellierung Käpnicks sowie in denen anderer Begabungsforscher nehmen Strukturierungsfähigkeiten eine **zentrale Position** ein (z.B. Kießwetter 1985). Meine Literaturrecherche ergab, dass Kognitionspsychologen Fähigkeiten im Strukturieren ebenfalls als wesentliches Merkmal mathematisch begabter Kinder herausstellen (vgl. z.B. van der Meer 1985). Darüber hinaus haben Muster und Strukturen im **Kontext mathematischer Allgemeinbildung** durch die Einführung in die Bildungsstandards schulpolitische Relevanz erhalten. Fachdidaktiker betonen zudem den hohen Stellenwert von „Strukturierungskompetenzen" für mathematisches Tätigsein und legen z.T. Definitionen für die Begriffe „Muster" und „Struktur" fest. Gleichzeitig wird die Schwierigkeit der begrifflichen Modellierung hervorgehoben (vgl. Wittmann & Müller 2007). Selten werden beide Begriffe aber definiert und bestehende Definitionen sind uneinheitlich. Auch im **Kontext spezieller mathematikdidaktischer Untersuchungen** finden „Strukturierungskompetenzen" Berücksichtigung (z.B. Steinweg 2001). „Strukturierungskompetenzen" spielen aber nicht nur in den genannten Wissenschaftsdisziplinen eine Rolle, sie sind in allen Bereichen wichtig, bei denen es um geordnet aufgebaute Ganzheiten geht. Im wissenschaftstheoretischen und allgemeinen Sprachgebrauch wird unter „Struktur" u.a. die *„Ordnung eines geordnet aufgebauten Ganzen"* und unter „Muster" u.a. ein *„charakteristischer Ausschnitt"* verstanden.

[2] Es handelt sich hier um eine sehr knappe Darstellung, für ausführlichere Beschreibungen vgl. Fuchs 2006.

2. Theoretische Modellierung von „Strukturierungskompetenzen“

Im Ergebnis der theoretisch-analytischen und konstruktiven Untersuchungen verstehe ich im Kontext meiner Untersuchung unter **Struktur** *„eine allgemein formulierte mathematische Beziehung zwischen mindestens zwei Elementen in einem mathematischen Kontext“* [3].

Da Strukturen auf Verallgemeinerungen und oft auch auf Abstraktionen zielen, dienen sie dazu, Ordnungen in komplexen Situationen zu schaffen und auf diese Weise Wesentliches eines Themenbereiches unter einer bestimmten Zielstellung hervorzuheben. Mithilfe von Strukturen können auf sehr effektive Weise Probleme gelöst, Zusammenhänge zwischen Fakten herausgestellt oder Systeme entwickelt werden. Dies trägt zugleich dem Bedürfnis der Menschen nach Vorhersehbarkeit und Orientierung in komplexen Situationen Rechnung und entspricht ihrem natürlichen ästhetischen Empfinden für Regelmäßigkeiten. Strukturen können in Formeln dargestellt oder verbal beschrieben werden.

Unter **„Muster“** verstehe ich im Kontext meiner Untersuchungen *„mindestens einen konkreten Repräsentanten einer mathematischen Struktur“*. Ein Muster kann bspw. mithilfe einer Tabelle, einer Zahlenfolge, einer Zeichnung oder verbal dargestellt werden.

Beispiel: Die Struktur der Dreieckszahlen[4] lässt sich in einem Muster etwa ikonisch durch das entsprechende Punktmuster und symbolisch mithilfe der Zahlenfolge 1, 3, 6, 10, … darstellen.

Charakteristisch für die o.g. Definitionen ist die **Unterscheidung zwischen Konkretem und Abstraktem**. Damit können im Sinne des zweiten Hauptziels der Arbeit die (meist) weniger anspruchsvolle „Musterebene“ und die qualitativ hochwertigere „Strukturebene“ unterschieden und begrifflich differenziert gekennzeichnet werden. [5]

---

[3] *„Allgemein formuliert“* bedeutet dabei, *„dass die Beziehung nicht nur anhand konkreter Beispiele beschrieben wird. Die mathematische Beziehung kann dabei aus allen Bereichen der Mathematik stammen, das gleiche gilt für die Elemente und den mathematischen Kontext“*.

[4] Die n. Dreieckzahl entspricht der Summe aller natürlichen Zahlen beginnend bei 1 bis zur Obergrenze n.

[5] Demnach beschreibt das Konstrukt **„Strukturierungskompetenzen“** im Rahmen meiner Untersuchungen, *„dass ein Individuum über das Wissen verfügt, „Strukturieren“ zu können“*. Dies bezieht sich auf mathematisch begabte Sechst- und Siebtklässler beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben. Mit obiger Definition verstehe ich in Anlehnung an Käpnick (2006) unter **„Strukturieren“** das *„Erkennen, Nutzen und Bilden von Mustern und Strukturen. Weiterhin zählt dazu das Speichern gegebener Sachverhalte im Kurzzeitgedächtnis unter Nutzung erkannter Strukturen“*.

Die „Strukturebene“ ist insbesondere für die Untersuchung mathematisch begabter Sechst- und Siebtklässler relevant, weil nach den Stadien der kognitiven Entwicklung nach Piaget sich die Probanden dieses Alters auf der höchsten Stufe, dem Stadium der formalen Operationen befinden. Damit sind sie zum abstrakten Denken, dem Umgang mit Variablen, dem flexiblen Bilden von „Superzeichen“ und dem Aufstellen eigenständiger Theorien in der Lage. Darüber hinaus ist die beschriebene Denkweise charakteristisch für mathematisch begabte Schüler.

3. Ausblick

Die bisherigen empirischen Ergebnisse geben übereinstimmend mit anderen Untersuchungen (z.B. Amit & Neria 2008) Hinweise darauf, dass die beschriebenen „Muster- und Strukturebenen“ einen geeigneten begrifflichen Rahmen darstellen. Darüber hinaus bestätigte sich bisher, dass die Probanden unterschiedliche Herangehensweisen bei der Aufgabenbearbeitung zeigen, was weitere interessante Ergebnisse erwarten lässt.

Literatur

Amit, M., Neria, D. (2008): „Rising to the challenge”: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. In: ZDM, 40, 111-129.

Devlin, K. (2002): Muster der Mathematik. Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Ehrlich, N. (2010): Strukturierungsfähigkeiten mathematisch begabter Sechst- und Siebtklässler. In F. Käpnick (Hrsg.): Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse“. Münster: WTM, 125-137.

Fuchs, M. (2006): Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Berlin: Lit.

Käpnick, F. et al. (Hrsg.) (2006): Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler im 5. und 6. Schuljahr. Berlin: Cornelsen.

Kießwetter, K. (1985): Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern – ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem. In: MNU, 38(5), 300-306.

Meer, E. van der (1985): Mathematisch-naturwissenschaftliche Hochbegabung. In: Zeitschrift für Psychologie, 193, 3, 229-258.

Steinweg, A. S. (2001): Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung. Münster: Lit.

Wittmann, E. Ch., Müller, G. N. (2007): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther & al. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen, 42-65.

Andreas EICHLER, Boris GIRNAT, Freiburg

Mathematik ist nicht gleich Mathematik – Subjektive Theorien von Lehrkräften zu verschiedenen mathematischen (Schul-)Disziplinen

In der mathematikdidaktischen Forschung wird die Bedeutung betont, Wissen zu den Vorstellungen von Lehrkräften zu erzeugen, da diese Vorstellungen

- wesentlich die Planung und Durchführung des Mathematikunterrichts beeinflussen (Philipp, 2007),
- mittelbar über die Unterrichtspraxis einen erheblichen Einfluss auf die mathematikbezogenen Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern haben (Hiebert & Grouws, 2007) und
- den entscheidenden Ansatzpunkt für eine Veränderung der Unterrichtspraxis durch die Lehrkräfte darstellen (Franke et al., 2007).

Aufgrund dieser Bedeutung ist die Anzahl der Untersuchungen zu den Vorstellungen von Mathematiklehrkräften in den vergangenen beiden Jahrzehnten erheblich angestiegen (Philipp, 2007). Allerdings sind diese zumeist auf die Mathematik allgemein bezogen, obwohl es Hinweise darauf gibt, dass es nicht *die* Vorstellung zur Mathematik gibt, sondern das Vorstellungen zur Mathematik erheblich von einzelnen mathematischen Teildisziplinen abhängen (Franke et al., 2007).

In diesem Beitrag werden wir daher diskutieren, inwieweit sich mathematikbezogene Vorstellungen von Lehrkräften bezogen auf verschiedene mathematische Teildisziplinen unterscheiden.

Theoretischer Rahmen

Die im Folgenden diskutierten Ergebnisse stammen aus einem breiter angelegten Forschungsprogramm, bei dem es um die Untersuchung des Transformationsprozesses eines Curriculums (Stein et al., 2007) von staatlichen Vorgaben (written curriculum) über die Planung von Lehrkräften (teacher's intended curriculum) und die Unterrichtspraxis (teacher's enacted curriculum) bis hin zum Lernen der Schüler (students' learning) geht (Abb. 1; Eichler, 2011).

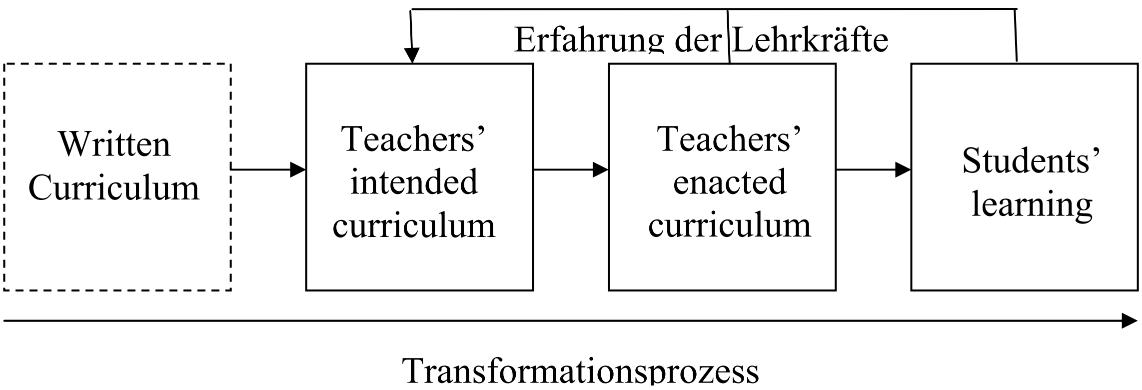


Abbildung 1: Transformationsprozess eines Curriculums

Bezogen auf dieses Forschungsprogramm werden wir in diesem Beitrag allerdings alleine die Vorstellungen von Lehrkräften zur Planung von Geometrie- und Stochastikunterricht (teacher's intended curriculum; Eichler, 2011; Girnat, 2009) betrachten.

Als zentrale Bestandteile der Vorstellungen von Lehrkräften zur Planung von Mathematikunterricht fassen wir einerseits die von den Lehrkräften intendierten Inhalte sowie die damit verbundenen Unterrichtsziele auf. Diese international unter dem Schlagwort beliefs oder belief systems (Philipp, 2007) einzuordnenden Komponenten der individuellen Planung von Lehrkräften erfassen wir mit dem Konstrukt der Subjektiven Theorien (Groeben et al., 1988), mit dem das rationale Handeln von Menschen bezogen auf Handlungsziele und Mitteln, solche Ziele zu erreichen, strukturiert und beschrieben werden kann. Die Erhebung der Subjektiven Theorien zur Planung des Geometrie- und Stochastikunterrichts basiert hier auf der Analyse von halbstrukturierten Leitfadeninterviews (9 Geometrie- und 13 Stochastiklehrkräfte der Sekundarstufen I und II; vgl. Eichler, 2011; Girnat, 2009).

Ergebnisse

Um die Unterschiede von Subjektiven Theorien hinsichtlich der Planung von Mathematikunterricht bezogen auf Geometrie und Stochastik deutlich zu machen, haben wir die Aspekte Anwendung, Problemlösen, Formalismus und Schemaorientierung gewählt, die als Kernkomponenten der mathematikbezogenen Vorstellungen von Lehrkräften bezeichnet werden können (Philipp, 2007).

Anwendung: Die Geometrielehrkräfte in der Stichprobe zweifeln durchweg an der Eignung der Schulgeometrie, den Anwendungsgedanken zu betonen:

Interviewer: „Wo ist es denn einfacher, gute Anwendungsaufgaben zu finden?“

Herr. A: „Also gefühlt würde ich sagen, in der Algebra oder der Stochastik. Prozentrechnung ist natürlich etwas, lineares Optimieren, und ich muss hinterher schlauer sein als vorher, d.h. ich muss ein echtes Problem gelöst haben mit einer Anwendungsaufgabe. Wie kann es sein, dass ich bei einer Pizza plötzlich anfange, einen Zirkel anzulegen, um sie zu teilen? Ja, das habe ich mal in einer Lehrprobe erlebt. Ja, das ist völlig weltfremd. Also, in der Geometrie sehe ich das eher nicht."

Bezogen auf die Geometrie-Lehrkräfte kann der Realitätsbezug zwar die mathematische Analyse geometrischer Objekte motivieren, die Schulgeometrie ist aber, wie es auch im angeführten Zitat deutlich wird, im Gegensatz zu anderen mathematischen Teildisziplinen nicht geeignet, tatsächlich reale Probleme (nachvollziehend) zu lösen.

Im Gegensatz dazu wird von den Lehrkräften der Realitätsbezug der Stochastik nicht in Frage gestellt. Lediglich im Grad der Betonung des Anwendungsbezugs wie auch in der Auswahl von Aufgaben, um diesen Realitätsbezug aufzuzeigen, unterscheiden sich die Lehrkräfte (Eichler, 2011).

Problemorientierung: Die Problemorientierung ist für die Lehrkräfte ein entscheidender Aspekt des Geometrie-Unterrichts:

Frau G: „Problemlösen, das ist neben Beweisen die wichtigste Sache, die ich eigentlich im Mathematikunterricht vermitteln möchte. Unter Lehre vom Anschauungsraum kann ich mir nicht so richtig was vorstellen, also macht man ja eigentlich wenig."

Während die Geometrie-Lehrkräfte die Problemorientierung unabhängig von einem Realitätsbezug ansehen, ist dagegen eine Problemorientierung für die Stochastiklehrkräfte stets unmittelbar mit einem Anwendungsbezug verbunden:

Herr. e: „Problemlösen in der Stochastik meint, dass man in realistischen Situationen lernt, mit den Mitteln der Mathematik zu argumentieren.

Formalismus, Schema: Wie bei den zuvor genannten Aspekten unterschieden sich die Lehrkräfte erheblich bezogen auf den Stellenwert der formalen Betrachtung von Mathematik (Stochastik: keine Bedeutung; Geometrie: Ansatzpunkt, um formale Beweise vorzubereiten). Die Schema-Orientierung, die die individuelle Schwerpunktsetzung von Lehrkräften bei der Betonung des Einübens und Beherrschens von Algorithmen umfasst, spielt schließlich werden bei den Geometrie- noch den Stochastiklehrkräften eine Rolle. Allerdings wird erwartet, dass etwa in einem derzeit laufenden Forschungsprojekt zu den Subjektiven Theorien von Lehrkräften zur Arithmetik in der Primar- und unteren Sekundarstufe (Bräuning in diesem Band) die Schema-Orientierung tatsächlich eine zentrale Rolle spielt.

Diskussion

„Das heißt, ihnen auch zu zeigen, dass Mathematik, wenn sie in den Anwendungen stattfindet, doch eine ganz breite Palette beinhaltet, dass es da auch durchaus mit ihren Möglichkeiten Aufgabenstellungen gibt, die man lösen kann."

Wovon spricht diese Lehrkraft, wenn diese sich auf Mathematik bezieht? In diesem Zitat meint die Lehrkraft keinesfalls Mathematik allgemein, sondern sie bezieht sich allein auf die Stochastik. Bei dem Bezug auf die Geometrie oder die Analysis, spricht die Lehrkraft ebenso von Mathematik, verbindet aber dort mit „Mathematik" ganz andere Vorstellungen. Kurz: Die Vorstellungen von Lehrkräften können zwar deren Planung und Unterricht und das Lernen der Schüler beeinflussen, untersucht man aber diese Vorstellungen, so muss auf deren spezifische Ausprägung in unterschiedlichen mathematischen Disziplinen geachtet werden.

Literatur

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Hrsg.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*. New ICMI Study Series, Bd. 15. Heidelberg, New York: Springer (im Druck).

Franke, K.E., Kazemi, B.D., & Battey, M.L. (2007). Understanding teaching and classroom practices in mathematics. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 225-256). Charlotte: Information Age Publishing.

Girnat, B. (2009). Ontological beliefs and their impact on teaching elementary geometry. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Hrsg.), *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Bd. 2, S. 89-96). Thessaloniki, Griechenland: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Groeben, N., Wahl, D., Scheele, B. & Schlee, J. (1988). *Forschungsprogramm Subjektive Theorien. Eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts*. Tübingen: Franke.

Hiebert, G.D., & Grouws, J. (2007). The effect of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 371-404). Charlotte: Information Age Publishing.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. (S. 257-315). Charlotte: Information Age Publishing.

Stein, M.K., Remillard, J., & Smith, M.S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 319-369). Charlotte: Information Age Publishing.

Katja EILERTS, Bernd WOLLRING, Universität Kassel

Mathematische Professionalisierung von Grundschullehrkräften - Kompetenzentwicklung durch Fachwissenschaft, Fachdidaktik, innovative LL und Assessment

In diesem Projekt kooperieren interdisziplinär zwei Mathematik-Didaktiker (Dr. Katja Eilerts und Prof. Dr. Bernd Wollring, Kassel) und zwei Pädagogische Psychologen (Prof. Dr. Niclas Schaper und Dr. Andreas Seifert, Paderborn) an der Entwicklung eines Kompetenzstruktur- und Kompetenzniveaumodells und eines Messinstrumentes zur professionellen Lehrkompetenz im Inhaltsbereich „Raum und Form“ für Primarstufenlehrkräfte (im Folgenden kurz P-Lehrkräfte genannt).

Eine zentrale Forschungsfrage ist: Können die postulierten Kompetenzdimensionen der drei Wissensdomänen *Fachwissenschaft*, *Fachdidaktik und pädagogisches Unterrichtswissen* valide in einem zusammenhängenden Itemformat operationalisiert und ermittelt werden?

1. Stand der internationalen Forschung

Analysen zur Mathematiklehrerausbildung betreffen die Ausbildungskomponenten Mathematik, Mathematikdidaktik und Erziehungswissenschaft. Im englischsprachigen Raum liegen mehr Erkenntnisse vor als im deutschsprachigen (vgl. Abell Foundation, 2001; Darling-Hammond & Youngs, 2002; Akiba, LeTendre & Scribner, 2007). Nicht festgestellt wird, dass die Qualität der Mathematikausbildung mit Schülerleistungen und Lehrerhandeln durchgehend positiv zusammenhängt, dagegen belegen die wenigen mathematikdidaktisch ausgerichteten Studien einen konsistent positiven Zusammenhang mit Schülerleistungen bzw. Lehrerhandeln. Im deutschsprachigen Raum testen zwei Studien Lehrerkompetenzen in einem large-scale-Design: die IEA-Studie „TEDS-M“ (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010) und das Projekt „COACTIV“ (Baumert et al, 2010). Der aktuelle Wandel in der Lehrerausbildung - Umdenken hin zur Output-Steuerung; Orientierung der Curricula an Standards und Kompetenzen - geht einher mit einer Umorientierung in der Forschung zur Lehrerbildung. Desiderata der Forschung sind nun Testverfahren, die standardisiert professionelle Kompetenzen angehender Lehrkräfte erfassen (Schaper, 2009). Ziele dabei sind zum einen das empirische Überprüfen der Wirksamkeit universitärer Lehrerausbildung (vgl. Blömeke, 2004), zum anderen das Evaluieren von Ansätzen zur Output-Steuerung (z. B. Darling-Hammond & Bransford, 2005).

2. Forschungsvorhaben

Die Professionalisierung von Mathematiklehrkräften für die Grundschule zielt auf eine individuelle Kompetenzentwicklung durch Verzahnen der Wissensdomänen *Fachwissenschaft, Fachdidaktik* und *pädagogisches Unterrichtswissen*. Vorrangige Inhaltsbereiche sind dabei „Zahlen und Operationen“ und „Raum und Form“. „Zahlen und Operationen“ erfahren stets eine fachliche und fachdidaktische Widmung in der Ausbildung, „Raum und Form“ oft nur eingeschränkt. Dies mag einer der Gründe sein für eine untergeordnete und nicht angemessen kohärente Würdigung von „Raum und Form“ im Mathematikunterricht der Grundschule. Zentrale Ziele des Projektes sind dementsprechend die Konzeption eines spezifischen Kompetenzstrukturmodells zum Inhaltsbereich „Raum und Form“ für P-Lehrkräfte und die Entwicklung eines Messinstruments dazu. Die Studie ist national repräsentativ angelegt, um die Validität des Kompetenzstrukturmodells und der entsprechenden Testinstrumente zu testen und einen Transfer für alle nationalen Standorte vorzubereiten. Ein Fernziel ist die Ermittlung langfristiger Wirksamkeit der Lehrerausbildung, die sich in Form unterschiedlicher Grade an Berufserfolg äußert. Wir vermuten einen systematischen Zusammenhang zwischen Ausbildungsmerkmalen, Kompetenzerwerb und Berufserfolg.

3. Entwicklung eines Kompetenzstrukturmodells

In Anlehnung an Shulman (1986) gehen wir davon aus, dass Kompetenzen von Lehrpersonen aus wissensbasierten Anteilen (*fachliches, fachdidaktisches* und *erziehungswissenschaftliches Wissen*) bestehen, sowie aus darüber hinausgehenden Bereitschaften und Einstellungen (beliefs und motivationale Orientierungen). Das mehrdimensionale Kompetenzstrukturmodell unterscheidet entsprechend drei Wissensdomänen[1] (vgl. Abb. 1). Basis des Forschungsprojekts ist der theoriegeleitete Entwurf eines Kompetenzstrukturmodells auf der Grundlage einschlägiger Konzepte zur inhaltlich-di-

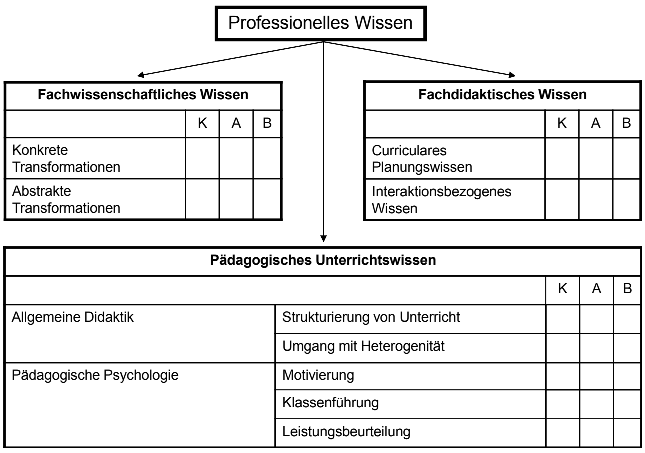


Abb. 1: Kompetenzstrukturmodell

[1] Weitere Ausführungen zu den Kompetenzfacetten, -dimensionen und Niveaustufen vgl. Eilerts, Rinkens & Wollring 2011 (in Vorbereitung)

mensionalen sowie entwicklungsbezogenen Strukturierung von Unterrichtskompetenzen von P-Lehrkräften im Bereich Mathematik. Hierbei werden Konzepte zur Strukturierung professioneller Lehrkompetenzen genutzt: Aufteilung in die drei Wissensdomänen *Fachwissen, Fachdidaktik* und *pädagogisches Unterrichtswissen*; inhaltliche bzw. anforderungsbezogene Dimensionierung des Wissens; Benennung von Niveaustufen. Zwei Zwecke erfüllt das Kompetenzstrukturmodell: Es beschreibt das Gefüge professioneller Handlungskompetenz, die angehende Lehrerinnen und Lehrer erreichen sollen. Ferner liefert es eine wissenschaftlich fundierte Vorstellung, welche Abstufungen eine Kompetenz annehmen kann, bzw. welche Grade und Niveaustufen sich feststellen lassen. Kompetenzen sind nicht durch einzelne, isolierte Leistungen zu messen, sondern u. E. in einem Rahmen von Anforderungssituationen, in denen Kompetenz zum Tragen kommt und die ein breites Leistungsspektrum umfassen. Das in diesem Forschungskontext naturgemäß auch normativ geprägte Kompetenzmodell soll daher in einem weiteren Schritt empirisch validiert werden. Für die Konstruktion der Testaufgaben zur Messung der professionellen Handlungskompetenz werden an der Schnittstelle zwischen Fach, Fachdidaktik und pädagogischem Unterrichtswissen *Situational Judgement Tests* entwickelt, welche die verschiedenen Teilkompetenzen unter einem inhaltlichen Dach in einem Item abprüfen.

Szenario-basierte Items (Vgl. Weekley & Ployhart, 2006; Oser, Heinzer & Salzmann 2010): In standardisierter Form werden Anforderungssituationen bzw. hypothetische Szenarien vorgegeben, bei denen die Probanden gefordert sind, die (Unterrichts-)Situation zu analysieren und angemessene Verhaltensweisen zur Problemlösung zu generieren. Mithilfe solcher Szenarien wird daher von den Testteilnehmern verlangt, dass sie ihr Wissen situationsangemessen anwenden können. Dabei wird von den beschriebenen Situationsanalysen, Handlungsabsichten und hypothetischen Handlungen auf Kompetenzen geschlossen. Zentrales Merkmal des zu entwickelnden Erhebungsinstruments ist die schriftliche Erhebung der Kompetenzen mit ***Domain-integrierenden Itempaketen***, welche die Abfrage des fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen Unterrichtswissens in spezifischer Weise miteinander verbinden (vgl. Marx & Rinkens, 2008). Sie sind so konzipiert, dass ausgehend von einem integrierenden Szenario ein Set von Einzel-Items in Form von Fragen-Bündeln zu bearbeiten ist. Die Einzel-Items stehen unter einem gemeinsamen inhaltlichen Bezug, so dass sie einen Anforderungsbogen vom fachlichen Wissen zum fachdidaktischen und zum pädagogischen Unterrichtswissen aufspannen.

4. Erwartete Ergebnisse und Perspektiven

Die Ergebnisse des Projektes sollen die Kompetenzorientierung im Studiengang Mathematik für das Grundschullehramt mit Bezug zur Elementarmathematik vorantreiben und seine nachhaltige Optimierung auf struktureller, organisatorischer und individueller Ebene ermöglichen, ferner zur Verbesserung der Lehre beitragen durch die Entwicklung und Implementierung innovativer Lehr-Lern-Formen.

Literatur

Abell Foundation (2001): Teacher Certification Reconsidered: Stumbling for Quality. Baltimore: Abell [letzter Zugriff 08.01.2011], unter http://www.abell.org /pubsitems/ed_cert_1101.pdf.

Akiba, M., LeTendre, G. & Scribner, J.P. (2007): Teacher Quality, Opportunity Gap, and National Achievement in 46 Countries. Educational Researcher, 36(7), 369-387.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., et al. (2010): Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. American Educational Research Journal, 47(1), 133-180.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010): TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Darling-Hammond, L. & Youngs, P. (2002): Defining “Highly Qualified Teachers”: What Does “Scientifically-Based Research” Actually Tell Us? Educational Researcher, 31, 13-25.

Darling-Hammond, L. & Bransford, J. (Eds.). (2005): Preparing teachers for a changing world: What teachers should learn and be able to do. San Francisco: Jossey-Bass.

Eilerts, K., Rinkens, H.-D. & Wollring, B. (2011 in Vorbereitung): Domänenintegrierende-Itembündel im Bereich Raum und Form zur Erfassung professionellen Wissens angehender Primarstufenlehrkräfte. Vieweg & Teubner.

Marx, A. & Rinkens, H.-D. (2008): Anforderungsmerkmale der MT21-Testitems und ihre Weiterentwicklung aus mathematikdidaktischer Sicht. In: S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg.): Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und -referendare – Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung. Münster/ New York/ München/ Berlin Waxmann 2008, 425-452.

Oser, F., Heinzer, S. & Salzmann, P (2010): Die Messung der Qualität von professionellen Kompetenzprofilen von Lehrpersonen mit Hilfe der Einschätzung von Filmvignetten: Chancen und Grenzen des advokatorischen Ansatzes. Unterrichtswissenschaft, 38(1), 5-28.

Schaper, N. (2009): Aufgabenfelder und Perspektiven bei der Kompetenzmodellierung und -messung in der Lehrerbildung. Lehrerbildung auf dem Prüfstand, 2(1), 166-199.

Shulman, L.S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Reseacher, 15(2), 4-14.

Weekley, J.A. & Ployhart, R.E. (2006): Situational judgement tests. Theory, measurement and application. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Joachim ENGEL, Ludwigsburg

Über ikonische Repräsentationen von zufallsbedingter Variabilität

1. Statistisches Denken und Zufallsvariabilität

Messungen von Objekten – selbst wenn unter den gleichen Bedingungen wiederholt dasselbe gemessen wurde – unterscheiden sich. Der wohl wichtigste Grund für die Bedeutung und Nützlichkeit von Statistik ist die bunte Vielfalt und der Mangel an Uniformität von Eigenschaften aller Geschöpfe und Objekte dieser Welt. Menschliche Wesen unterscheiden sich, z.B. hinsichtlich ihrer Körpergröße, Gewicht, IQ, Einstellungen etc. Selbst in der Fabrik hergestellte Gegenstände wie 35mm lange Nägel unterscheiden sich in ihrer Länge! Statistisches Denken bezieht sich auf das Lernen und das Entscheidungen-Treffen unter Unsicherheit. Der größte Teil der Ungewissheit rührt von der Allgegenwart von Variabilität (Wild, Pfannkuch, 1999). Jede ernsthafte Diskussion statistischen Denkens muss daher die Rolle der Variabilität in Daten diskutieren (Watson & Callingham, 2003). Der Umgang mit statistischer Variabilität ist neben dem eher algorithmischen Umgang stark von individuellen Sichtweisen und Überzeugungen geprägt. Engel und Sedlmeier (2005) fanden heraus, dass Lernende oft an Grundüberzeugungen eines deterministisch geprägten Weltbilds festhalten, das der Entwicklung eines Verständnisses für zufällige Variabilität oft im Wege steht. Lernende bevorzugen oft sehr reguläre deterministische Muster in Verteilungen selbst wenn ein eher unregelmäßiges Ergebnis wahrscheinlicher ist. Wenn Lernende in solch deterministisch geprägten Ansichten verharren, dann wird man eher Schwierigkeiten erwarten, wenn sie mentale Modelle konstruieren sollen, die mit statistischer Variabilität in Verbindung stehen.

2. Forschungsfrage:

Vor dem Hintergrund der Bedeutung von Variabilität fassen wir hier einige Ergebnisse aus Untersuchungen (Engel, 2011; Engel & Sedlmeier, 2005; Kuntze et al., 2010; Wünsch, 2009) exemplarisch zusammen, bei denen folgende Fragen im Vordergrund standen. Für Details muss auf die angegebene Literatur verwiesen werden

- Wie stellen Probanden (Kinder, Schüler, Studierende) Variabilität von zufallsbedingten Ereignissen dar?
- Welche Rolle spielt dabei das Format, mit dem zufallsbedingte Variabilität repräsentiert wird?

3. Methode

Verschiedenen Gruppen von Versuchspersonen wurden mehrere Items vorgelegt, bei denen sie aufgefordert waren, ihre Intuitionen bezüglich zufälliger Vorgänge darzustellen. Der Typ der Fragestellungen ließ nicht eine Bewertung der Antworten gemäß den Kategorien richtig/ falsch zu, sondern die Antworten sind eher als Ausdruck von Überzeugungen anzusehen, wie stark das Denken der Probanden von deterministischen Überzeugungen geprägt ist. Wir können hier nur ein Item zur Diskussion stellen. Für weitere Diskussionen wird auf die genannten Publikationen verwiesen.

Beispiel 1: Männer mit Hut:

Die Aufgabe verlangt eine Kennzeichnung zufälliger Elemente (hier das Einzeichnen von Hüten) in einer diskreten, linearen Anordnung. Strukturell kann die Aufgabe, eine ausgedachte Münzwurfreihe der Länge 18 zu notieren als äquivalent angesehen werden, wobei eine Münze, die mit 1/3 Wahrscheinlichkeit „Kopf“ und mit 2/3 Wahrscheinlichkeit Zahl produziert, eingesetzt wurde. Andere Aufgaben in den oben zitierten Untersuchungen präsentierten ähnliche Situationen, entweder in anderen Kontexten oder in anderen Formaten (diskret planar, stetig planar).

4. Resultate

Beim Betrachten der Antworten von 265 Schülerinnen und Schülern von Neunten Klassen sind zwei verschiedene Vorgehensweisen zu erkennen. Eine Gruppe von Schülern, die „Deterministen“, zeichnet ein sehr regelmäßiges Muster ein, so setzen sie beispielsweise genau jedem dritten Männchen in der Reihe einen Hut auf. Andere Schüler wiederum versuchen gerade ein derartiges Muster zu vermeiden, indem sie die Hüte eher unregelmäßig auf die Strichmännchen verteilen. Zur genaueren Analyse wurden die Antworten in fünf Gruppen kategorisiert:

Strenger Determinist: Immer das erste, zweite oder dritte Männchen in einer Gruppe trägt einen Hut.

Gemäßigter Determinist: Die Hüte sind in einer anderen, aber regelmäßigen Anordnung verteilt (beispielsweise in der ersten Gruppe trägt das erste Männchen einen Hut, in der zweiten der zweite etc.).

Anfänger: In jeder Dreiergruppe trägt ein Männchen einen Hut, aber ohne erkennbares Muster.

Könner: Die Gesamtzahl der Hüte entspricht dem Durchschnitt, doch nicht in jeder Dreiergruppe trägt ein Männchen einen Hut.

Experte: Die Gesamtzahl der Hüte weicht vom Durchschnitt nach oben oder nach unten ab.

	Anzahl der Schüler	Anteil in Prozent
Strenger Determinist	197	74,3 %
Gemäßigter Determinist	3	1,1 %
Anfänger	26	9,8 %
Könner	26	9,8 %
Experte	10	3,8 %
Nicht auswertbar	3	1,1 %
Gesamtzahl der Schüler	**265**	**100 %**

Tab. 1: Klassifizierung der Schülerantworten

Tabelle 1 zeigt die Klassifizierung der Schülerantworten. Es fällt auf, dass ein Großteil der Schüler (74 %) eine streng deterministische Vorgehensweise verfolgte. Nur 36 Schüler haben unregelmäßige Muster eingezeichnet und nur zehn der 265 Schüler haben eine von der Durchschnittszahl sechs abweichende Anzahl von Hüten eingezeichnet. Anstatt diesen Schülern einen Rechenfehler zu unterstellen, würdigten wir ihre Darstellung als eine Anerkennung der Unterscheidung zwischen Stichprobe (18 Männer im Bild) und umfassenderer Grundgesamtheit, auf die die Kennzeichnung ovn 1/3 Hutträger zutrifft.

5. Zusammenfassung:

- Die Schüler tendieren sehr stark zu deterministischem Denken
- Über die Frage, inwieweit der Kontext der Aufgaben die Antworten der Schüler beeinflusste, kann man nur Vermutungen äußern
- Möglicher Zusammenhang mit der Art, wie Schüler in der Schule zu denken gelehrt werden
    - Zufall und Variabilität werden in den seltensten Fällen beim Erklären von Beobachtungen und Erscheinungen in der Natur, von Versuchsergebnissen oder beim Auswerten von Statistiken diskutiert.

- So ist es auch nicht verwunderlich, wenn die Schüler beim Erstellen von typischen Verteilungen strikt nach ihrer kausalen Denkweise vorgehen und den Einfluss des Zufalls nicht mit in Betracht ziehen.
- Dieses begründende Denken ist besonders im Mathematikunterricht verankert; die Schüler haben gelernt, dass es für alles eine rationale, und das heißt für viele auch eine deterministische und kausale Begründung gibt.

Das abschließende Zitat von Ephraim Fischbein (1975) fasst diese Überlegungen präzise zusammen:

The child is taught [in school] that explanation consists in specifying a cause; that a scientific prediction must be a certainty; that ambiguity and uncertainty are not acceptable in scientific reasoning and so on. Even if all this is not explicitly stated, it is implied in all that is taught in school.

Literatur

Engel, J. (2011): Der Fehlschluss des Spielers: Ist das vierte Kind ein Junge? In: Praxis der Mathematik in der Schule (eingereicht).

Engel, J. & Sedlmeier, P. (2005): On middle-school students' comprehension of randomness and chance variability in data. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37 (3), 168-179.

Fischbein, E. (1975): The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children. Reidel: Dordrecht-Holland.

Kuntze, S., Engel, J., Gundlach, M. & Martignon, L. (2010): Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge – empirical research in the project "RIKO-STAT". Proceedings of 8th International Conference of Teaching Statistics, Ljubljana, Slovenia. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999): Statistical thinking in empirical enquiry. In: International Statistical Review, 3, 223-266.

Watson, J., & Callingham, R. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. In: Statistics Education Research Journal, 2 (2), 3-46.

Wünsch, M. (2009): Zufall und Variabilität in statistischen Daten: Grundvorstellungen und Kompetenzen von Realschülern. Wissenschaftliche Hausarbeit. Pädagogische Hochschule Ludwigsburg.

Christian FAHSE, Landau

Sonden - eine Möglichkeit für die empirische Unterrichtsforschung? – Das Beispiel Division durch Null

Sonden werden in der Astronomie, Medizin oder Verfahrenstechnik mit dem Ziel eingesetzt, durch eine detaillierte Erkundung eines kleinen Bereichs umfassende Aussagen über einen größeren Zusammenhang zu ermöglichen. Dies gelingt, indem lokal sehr spezifische Daten gesammelt werden, die indirekt die gewünschten Informationen liefern. Fasst man den Begriff der Sonde etwas weiter, dann findet man diese auch im Alltag. Kraftfahrzeugversicherungen nutzen zur Festlegung der Beitragshöhe unter anderem folgende Frage als Sonde: Steht der Wagen regelmäßig in einer Garage? Von Interesse ist dabei nicht der kausalen Zusammenhang zwischen der Antwort auf diese Frage und dem Unfallrisiko, sondern allein die Tatsache, dass eine gesicherte Korrelation zwischen diesen beiden Größen besteht.

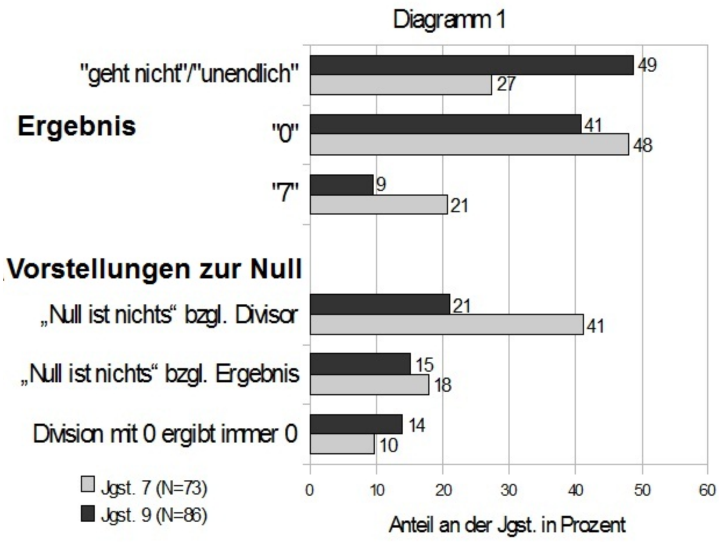
Im Hinblick auf die empirische Unterrichtsforschung könnte man in einem ersten Anlauf formulieren: Sonden sind die Garagenfragen für den Unterricht. Um zu klären, ob die Metapher der Sonde Anregungen für die empirische Unterrichtsforschung geben kann, wird zunächst mit dem Beispiel der Division durch Null ein noch unvollkommener Prototyp einer Sonde betrachtet. Im Folgenden werden erste Ergebnisse einer laufenden empirischen Untersuchung zu dieser Fragestellung referiert. Im Anschluss daran wird reflektiert, welche Aspekte der Untersuchung es rechtfertigen, von einer Sonde zu sprechen und wo noch weitere Entwicklungsarbeit notwendig ist. Infolge der noch nicht abgeschlossenen Auswertung sind alle Ergebnisse als vorläufig zu betrachten.

Die Aufgabe 7:0

Mit Hilfe von Fragebögen wurden 73 bzw. 86 Schüler/innen der Jahrgangsstufen 7 und 9 eines rheinland-pfälzischen Gymnasiums aufgefordert, das Ergebnis der Aufgabe 7:0 anzugeben und ihre Aussage zu begründen. Daneben wurden u. A. Aussagen zur Eigenständigkeit ihrer Überlegungen, zur Erinnerung an den Unterricht zu dieser Thematik und zur Selbsteinschätzung ihrer mathematischen Leistungsstärke erhoben.

Schülerangaben zum Ergebnis der Aufgabe „7:0 = ?“

Als ein Ergebnis der Studie lässt sich festhalten (vgl. Diagramm 1), dass bei der Frage zum Ergebnis der Aufgabe „7:0 = ?“ die relative Häufigkeit der Antworten „geht nicht“ bzw. „unendlich“ im Laufe der Schulzeit zwar zunimmt, aber selbst in der 9. Jahrgangsstufe noch unter 50% bleibt.

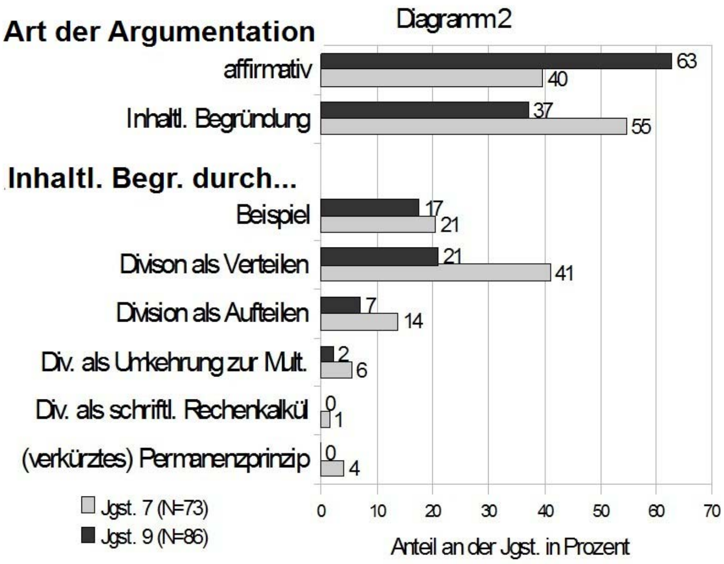


Der Anteil der Antworten „0“ und „7“ ist auch nach der Orientierungsstufe noch sehr hoch. Er wird verursacht durch die Vorstellung „Null ist Nichts“ einerseits bezüglich des Divisors („es wird nicht geteilt“) und andererseits bezüglich des Ergebnisses („‚es geht nicht‘ ist 0“) sowie vermeintlichen formalen Argumenten wie „Division mit 0 ergibt immer 0“ oder rein affirmativer Argumentation (z. B. „so gelernt“), wie die Analyse der gelieferten Begründungen zeigt.

Art der Argumentation bei „7:0 =?“

Die Untersuchung zielt vorrangig auf die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zum Begründen ab. Etwa die Hälfte hält Affirmation („es ist so, weil wir es so gelernt haben“) für eine Begründung (vgl. Diagramm 2). Die andere Hälfte begründet inhaltlich, unter ihnen haben allerdings weniger als 20 Prozentpunkte ein richtiges Ergebnis. „Inhaltlich“ begründet wird häufig anhand eines Beispiels („7 Äpfel durch 0 Personen teilen“) und über die Sicht der Division als Verteilen oder als Aufteilen/Messen („Hineinpassen“). Selten vorkommend, aber nachweisbar sind inhaltliche Argumentationen über die Division als Umkehrung der Multiplikation („Probe“), über die Division als Kalkül (schriftliche Rechenverfahren, die auf Konstrukte wie „$0{,}\overline{0}$" führen) oder über ein verkürztes Permanenzprinzip bzw. eine indirekte Argumentation („7:0 kann nicht 7 sein, da 7:1 bereits 7 ergibt“).

Der hohe Anteil an Begründungen mittels Handlungsvorstellungen über das (als unmöglich angesehene) Verteilen, kann zu allen drei Ergebnissen führen: Die Unmöglichkeit kann korrekt in „geht nicht“ umgesetzt werden oder in „0“, wenn Null als gleichbedeutend für „kein Ergebnis“ angenommen wird. Gerade in Jgst. 7 wird häufig „es wird nicht geteilt, also bleiben 7 übrig“ geschlossen. Dieser sehr anschauliche Gedankengang tritt in der Jgst. 9 zurück und findet sich in der ebenfalls untersuchten 13. Jgst. gar nicht mehr. Gängige mathematische Begründungen über den Widerspruch durch Probe kommen vereinzelt vor, spielen insgesamt aber kaum eine Rolle.



Es zeigt sich, dass alle für die Primarstufe etwa von Hefendehl-Hebeker (1982) und Padberg (2005) beschriebenen Begründungen und Fehlvorstellungen auch bei Gymnasiasten anzutreffen sind. Zumindest in dieser Erhebung ist auch auf der Sekundarstufe die Vermischung von operationalen („es wird nicht geteilt“, „es kommt nichts heraus“) und kardinalen Aspekten der Zahl 0 dominant, vergleichbar etwa dem Übergang in der Auffassung des Gleichheitszeichens von der handlungsbezogenen Vorstufe „ergibt“ zur Gleichwertigkeit von Termen (zu dieser Thematik siehe auch Borromeo Ferri/Blum (2011)).

Erinnerungen an den Unterricht zum Thema „Division durch Null“

An einen Unterricht zum Thema „Division durch Null“ erinnern sich in der 7. Jahrgangsstufe nur ca. 37% und in der 9. Jahrgangsstufe ca. 26% der befragten Schülerinnen und Schüler. Von diesen geben aber über 80% in Jgst. 7 bzw. 45% in Jgst. 9 eine falsche Antwort auf die Frage „7:0 = ?“. Erinnert werden offensichtlich eher Prozesse als Unterrichtsergebnisse. Nur einzelne führen ihre richtige Begründung auf den Unterricht zurück, ohnehin gibt ein sehr hoher Anteil aller Schülerinnen und Schüler an, die Begründung selbstständig überlegt zu haben (49% in Jgst. 7 und 29% in Jgst. 9). Dies spricht dafür, dass im Unterricht – zumindest der hier untersuchten Schule – im Laufe der Zeit zwar die Unmöglichkeit der Division durch Null als Faktum wiederholt, aber nicht begründet wird.

Auffallend ist die Bedeutung der Grundschule bei diesem Thema. Etwa ein Zehntel der Schülerinnen und Schüler der 9. Jgst. erwähnte die Grundschule, ohne explizit nach ihr gefragt worden zu sein. 53% der explizit nach ihr gefragten Schülerinnen und Schüler der 7. Jgst. führten ihre Kenntnis des Ergebnisses auf sie zurück.

Ist die Aufgabe „7:0 = ?“ eine Sonde? – Wie geht es weiter?

Die untersuchten Klassen zeigen sehr unterschiedliche Muster hinsichtlich der Bearbeitung des Fragebogens. Dies gilt für die bevorzugten Lösungen der Aufgabe „7:0 = ?“, aber noch deutlicher und interessanter für die Art der Begründung. In 8 Lerngruppen schwankte der Anteil der inhaltlich Begründenden zwischen 4% und 75%, eine affirmative Auffassung vom Begründen zwischen 15% und 89%. Hier setzt die Möglichkeit an, diese Untersuchung als Sonde aufzufassen. Die Unterschiede zwischen den Klassen bei der speziellen Aufgabe „7:0 = ?“ könnten Hinweise auf einen verschiedenen Stand der Kompetenzentwicklung, z. B. im Hinblick auf das mathematische Argumentieren geben. Zentral könnte hierbei die Art der Begründung sein, wobei z. B. die Leistungsstärken herauszurechnen wären. Wichtig bei der Auswertung einer Sonde ist, dass nicht einzelne Items betrachtet werden, sondern die Muster, die sich in der Kombination verschiedener Items finden. Dies wird an folgendem Beispiel deutlich: Wenn in einer Klasse die Unmöglichkeit der Division im aktuellen Unterricht sehr betont wurde, entfällt das Ergebnis „7“, das allerdings relativ leicht inhaltlich begründet werden kann. Solche Verzerrungen müssen herausgerechnet werden. Das Ziel ist also, Bewertungen für die Muster in einer Gesamtheit von Items zu finden.

Nach solch einer „Entwicklungsphase“ einer Sonde ist deren Validität in einer „Kalibrierungsphase“ zu klären: Die Sonde wird in Lerngruppen eingesetzt, deren Stand der Kompetenzentwicklung durch ausgedehnte Untersuchungen, ggf. auch Hospitationen bekannt ist.

Falls der hier angedeutete Prozess erfolgreich durchlaufen wird, könnte eine Sonde mit wenig Aufwand durch ihre selektive Sicht (**Minimalität**) dennoch zu validen Informationen über den Kompetenzstand in einer Lerngruppe kommen. Dieser Spagat, der die **Effektivität** der Sonde ausmacht, kann dadurch gelingen, dass lediglich **indirekt** Schlüsse aus **Muster**n in den **vielfältig**en Einzelbeobachtungen gezogen werden. Der Focus beim Begriff der Sonde liegt darauf, dass man auf einen offensichtlichen kausalen Zusammenhang der Items zum Ziel der Untersuchung verzichtet und stattdessen die Korrelationen sichert. Dies könnte gleichzeitig ökonomischer und genauer sein. Als leicht einzusetzendes begleitendes Werkzeug könnten Sonden in anderen Untersuchungen oder als Diagnoseinstrument für die Lehrkraft nützlich sein.

Literatur

Hefendehl-Hebeker, L. (1982): Die Zahl Null im Bewußtsein von Schülern. Eine Fallstudie. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 3, Heft 1, S. 47-65.

Padberg, F. (2005): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.

Borromeo Ferri, R./Blum, W. (2011): Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. Erscheint im vorliegenden Tagungsband.

Maria FAST, Wien, Barbara RIEHS, Wien

Bildungsstandards Mathematik 4. Unterrichtsvideos und Begleitmaterialien

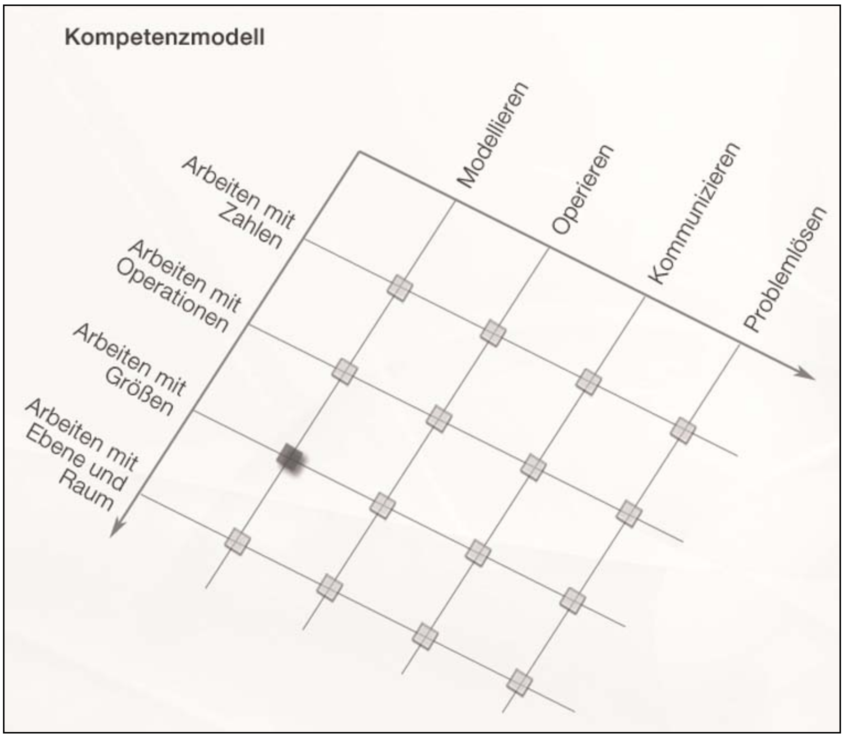
Mit der gesetzlichen Verankerung der Bildungsstandards in Österreich 2008/2009 ergeht der Auftrag, diese politischen Grundsatzbeschlüsse auch im Unterricht umzusetzen. Dies betrifft unter anderem die Kernprozesse des Lehrens und Lernens und stellt so eine auf den Unterricht zielende pädagogische Qualitätsentwicklung dar.

Lehrerinnen und Lehrer sind durchwegs engagiert. Sie setzen sich in Fortbildungsveranstaltungen mit den Anforderungen kompetenzorientierten Unterrichts auseinander und entwickeln Möglichkeiten der Realisierung. Als Grundlage gemeinsamer fachlicher Diskussion bieten sich Unterrichtsvideos an.

In einem Projekt von vier Pädagogischen Hochschulen in Österreich, finanziell unterstützt durch das Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE), wurde die DVD „Bildungsstandards Mathematik 4. Unterrichtsvideos und Begleitmaterialien" zum Einsatz in der Lehrer/innen-Fortbildung entwickelt.

1. Bildungsstandards Mathematik 4 in Österreich

Durch die Standards im Mathematikunterricht sind auch in Österreich prozessorientierten Kompetenzen aufgewertet worden. Sie finden sich im



Kompetenzmodell der österreichischen Bildungsstandards Mathematik 4 neben den inhaltlichen Kompetenzbereichen („Arbeiten mit Zahlen“, „Arbeiten mit Operationen“, „Arbeiten mit Größen“ und „Arbeiten mit Ebene und Raum“) als allgemein mathematischen Kompetenzbereiche: „Modellieren“, „Operieren“, „Kommunizieren“ und „Problemlösen“(BIFIE, BMUKK 2009). Daraus ergeben sich 16 Knoten, die sich jeweils aus einem allgemeinen und einem inhaltlichen Kompetenzbereich zusammensetzen. Einer ist in der Abbildung beispielhaft sichtbar.

Die allgemeinen Kompetenzen sind im Lehrplan nicht explizit angeführt und daher für Lehrerinnen und Lehrer weniger präsent. Allgemeine Kompetenzen sind jedoch genauso wie inhaltliche mathematische Kompetenzen systematisch aufzubauen und „bei der Planung und Gestaltung der Unterrichtsarbeit zu berücksichtigen“ (§ 3, Abs. 2 der Verordnung zu Bildungsstandards im Schulwesen). Dazu soll die DVD einen Beitrag leisten.

2. Kompetenzorientierter Unterricht

In einem kompetenzorientierten Unterricht gilt nach Heymann (2004, S. 8) die Aufmerksamkeit „dem anzustrebenden Können der Schüler und nicht den im Unterricht zu behandelnden Inhalten“. Die Kinder sollen durch den Einsatz geeigneter Aufgaben und entsprechender Methoden Wissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die langfristig zur Verfügung stehen und flexibel einsetzbar sind, aufbauen und entwickeln.

Der Erwerb von Kompetenzen wird unter anderem angestrebt durch

- Aufgaben, die offen, problemhaltig und anwendungsorientiert sind ,
- eine Inszenierung des Lernens, die das Denken des Kindes und nicht nur das Ergebnis der Rechnung einbezieht,
- den Aufbau eines gesicherten Maßes an Kommunikationsfähigkeit, um sich über mathematisches Vorgehen und Analysieren austauschen zu können,
- Methoden, welche die Selbstständigkeit, Eigenaktivität und Kreativität der Kinder fördern,
- kooperative Lernformen, um sich miteinander über mathematische Inhalte und Vorgangsweisen auszutauschen.

Unsere Sicht auf Lernen bezieht sich in den gezeigten Unterrichtseinheiten nicht nur auf die Inhalte, welche die Kinder lernen, sondern fokussiert auch das Können der Kinder. Dieses zeigt sich nicht nur durch das errechnete Ergebnis, sondern auch im Prozess des Lösens (Fast et al. 2010).

Wurden bisher verstärkt die inhaltlichen Kompetenzen beachtet, so liegt im Sinne der Bildungsstandards der Blick auch auf den prozessorientierten allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Diese veränderte Sicht gilt es, in Lehrerfortbildungen zu thematisieren, sodass Lehrerinnen und Lehrer im Unterricht verstärkt den Kompetenzerwerb beobachten und so passende Maßnahmen für das weitere Lernen planen und gestalten können.

3. Einsatz von Videos in der Lehrerbildung

Lernen mit Unterrichtsvideos bedeutet, das Unterrichtsgeschehen in seiner Komplexität und Alltagsnähe zum Gegenstand der Reflexion über die Qualität didaktischen Handelns zu machen (Reusser 2004, S. 1).

Somit wird es möglich, dass Unterrichtssituationen wiederholt betrachtet, unterrichtsbezogene Denk- und Handlungsmuster objektiviert und verschiedene Analysemethoden miteinander verbunden werden können (Reusser 2005).

Fortbildungsveranstaltungen sollten im Sinne von Kompetenzorientierung die Fähigkeiten und Fertigkeiten der Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit einbeziehen. So sollen die Videos nicht nur anregen, gesehenen Unterricht zu analysieren, sondern von den Filmen ausgehend konzipieren die Teilnehmer/innen in Ansätzen eigenen Unterricht, durch den die Kinder grundlegende Kompetenzen aufbauen können.

Nachdem die Teilnehmer/innen Unterrichtssequenzen betrachtet und angeleitet analysiert haben, können sie feststellen, was in dem angestrebten Unterrichtskonzept für sie

- bereits „Allgemeingut“ ist und von Ihnen durchgeführt wird,
- neu und leicht umsetzbar sind,
- ungewohnt und eine Änderung der eigenen Unterrichtskultur notwendig macht.

Videobasierte Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrer bieten so ideale Voraussetzungen für professionelles Handeln.

4. Aufbau der DVD

Die DVD zeigt Szenen aus acht Unterrichtsstunden verschiedener Schulstufen der Grundschule und beinhaltet Unterrichtsentwürfe, eingesetzte Arbeitsblätter, Arbeiten der Kinder, Transkripte, didaktisch-methodische Hinweise und Anregungen für die Lehrerfortbildner/innen.

Alle Aufnahmen stammen aus dem Unterrichtsalltag und stellen keine inszenierten Situationen dar. Die Sequenzen sind meist aus einer einzigen Unterrichtseinheit, die in einem gesamten Themenbereich eingebettet ist.

Folgende Unterrichtseinheiten inklusive Begleitmaterialien sind auf der DVD zu finden:

1. und 2. Schulstufe	*Allg. math. Kompetenzbereiche*
Arithmetische Muster	O, K, P
Rechenbildgeschichten	M, K
Flexibles Rechnen im Zahlenraum 100	O, K, P
3. und 4. Schulstufe	
Ausschneidebogen für ein Haus	K, P
Arbeiten mit Größen (Gewicht)	O, K
Dividieren selbst entdecken	O, K, P
Im Restaurant	M, O, K
Würfelgebäude	O, K, P
Modellieren (M), Operieren (O), Kommunizieren (K), Problemlösen (P)	

Die DVD kann über i.benischek@bifie.at bestellt werden.

Literatur

BIFIE, BMUKK (Hrsg., 2009): Praxishandbuch für "Mathematik" 4. Schulstufe. Bildungsstandards – für höchste Qualität an Österreichs Schulen. Information für Lehrer/innen. Graz: Leykam URL: http://www.bifie.at/sites/default/files/aufgabensammlung /handbuch-bist-m4-2009.pdf [12. 03. 2011].

Fast, M. et al. (2010): Bildungsstandards Mathematik 4. Unterrichtsvideos und Begleitmaterialen. Wien: Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens.

Heymann, H. W. (2004): Besserer Unterricht durch Sicherung von „Standards“? Pädagogik, 56 (6), 6-9.

Reusser, K. (2004): Allgemeine Impulse zur Arbeit mit den Lektionsausschnitten. In: Reusser, K., Pauli, C, Krammer, K. (Hrsg.): Unterrichtsvideos für die Aus- und Weiterbildung von Lehrpersonen: Einführungssequenzen. Universität Zürich: Pädagogisches Institut.

Reusser, K. (2005): Situiertes Lernen mit Unterrichtsvideos in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung. Journal für Lehrerinnen- und Lehrerbildung, 5 (2), 8-18.

Verordnung der Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur für Bildungsstandards im Schulwesen. BGBl. II Nr. 1/2009 v. 2.1.2009. URL: http://www.bmukk.gv.at/schulen/recht/erk/vo_bildungsstandards.xml [12. 03. 2011].

Heiko FEY, Regina BRUDER, Darmstadt

Messung diagnostischer Kompetenz in der Lehramtsausbildung Mathematik

Ziel des vom BMBF geförderten Projektes ist die Entwicklung und Erprobung eines Instrumentes zur Messung diagnostischer Kompetenzen von zukünftigen Lehrerinnen und Lehrern für Mathematik an Gymnasien und an beruflichen Schulen. Das Instrument soll in der ersten und in der zweiten Phase der Lehrerausbildung eingesetzt werden, um das individuelle diagnostische Wissen und Können der Studierenden und Referendare zu beschreiben und Entwicklungsfortschritte sichtbar zu machen.

1. Forschungsrahmen und Forschungshintergrund

Die diagnostische Kompetenz und deren Qualität einer (zukünftigen) Lehrkraft wird durch normative Setzungen, empirische Ergebnisse und das diagnostische Handeln der Lehrkräfte selbst bestimmt.

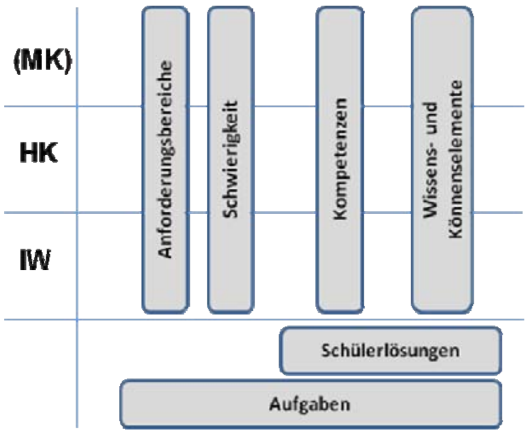
In den KMK Standards (2004) für die Lehrerausbildung im Kompetenzbereich *Beurteilen* wird gefordert: „Lehrerinnen und Lehrer diagnostizieren Lernvoraussetzungen und Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern; fördern Schülerinnen und Schüler gezielt und beraten Lernende und deren Eltern“. In den Modulbeschreibungen zur Lehrerausbildung im Referendariat wird an verschiedenen Stellen auf die diagnostische Kompetenz hingewiesen. Die empirischen Ergebnisse zum Thema „Diagnostische Kompetenz“ reichen von der Erforschung von Schülerkompetenzmodellen über diagnostische Kompetenz als Beurteilungskompetenz bis hin zu Unterrichtsreflexionen. Eine genauere Analyse der diagnostischen Kompetenz im Mathematikunterricht soll über das diagnostische Handeln der Lehrkraft erfolgen.

2. Diagnostische Kompetenz

Die diagnostische Kompetenz (Weinert und Schrader 1986, Helmke 2009) enthält Elemente der pädagogischen und psychologischen Diagnostik. Die grundlegende Definition von Ingenkamp (2008) vereint alle relevanten Elemente der diagnostischen Kompetenz und soll im Forschungsprojekt Verwendung finden. Die wichtigsten diagnostischen Elemente in Bezug auf einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht sind *Lernprozesse analysieren*, *individuelles Lernen optimieren* und *individuelle Förderungsprogramme ermöglichen.*

Der Unterrichtsverlauf wird nach Weinert & Schrader (1986) als eine ständige Optimierung mit einer Klassen- oder individuellen Rückführung beschrieben. Hierbei können diagnostische Handlungen einer Lehrkraft identifiziert werden. Mit dem Förderkreislauf nach Zaugg (2004) können diese Handlungen speziell in einem auf Förderung ausgerichteten Unterrichtskonzept genauer begründet werden. Das zentrale didaktische Element des Mathematikunterrichtes mit dem diese diagnostischen Handlungen vollzogen werden sind Aufgaben (Bruder 2003). Das Bearbeiten von Aufgaben kann als Mittel (Weg), als Könnensziel und als Diagnoseinstrument im Unterricht eingesetzt werden. Hierbei ist nicht nur der Einsatz von Aufgaben sondern auch deren Schülerlösung zentraler Bestandteil der diagnostischen Kompetenz und Schwerpunkt des Projektes.

3. Messung diagnostischer Kompetenz



Zur Messung diagnostischer Kompetenz wird ein Profil mit den Aspekten Aufgabenschwierigkeit, mathematische Wissens- und Könnenselemente, Anforderungsbereiche und fachliche Kompetenzen zugrunde gelegt.

Diese Aspekte werden nach Weinert (1999) in Intelligentes Wissen (IW), Handlungskompetenz (HK) und Metakompetenz (MK) unterteilt. Metakompetenzen sollen in dem Projekt nicht näher spezifiziert werden, weil sie nicht im Zentrum der Lehramtsausbildung an der Universität stehen.

Die Erfassung der diagnostischen Kompetenz künftiger Lehrkräfte erfolgt mit zwei Methoden. Mit der Methode des Repertory Grid wird insbesondere der Bereich des Intelligenten Wissens erfasst und mit einem Test soll ansatzweise auch Handlungskompetenz untersucht werden. Die dazu durchgeführten beiden Pilotierungen werden im Folgenden beschrieben.

Eine Pilotstudie (n=78) zum Kompetenzaspekt „Aufgaben“ wurde mit der Methode des Repertory Grid nach Kelly (1955) durchgeführt. Die Methode sieht vor, Objekte miteinander zu vergleichen, um persönliche Konstrukte erfassen zu können. Zu diesem Zweck haben Studierende in didaktischen Lehrveranstaltungen jeweils zwei Mathematikaufgaben (Bruder et al. 2003) miteinander verglichen. Hierbei nannten sie Merkmale, in denen sich die beiden Aufgaben unterscheiden. Die Analyse dieser Aufgabenmerkmale gibt Aufschluss über die Sichtweise und die im Mittelpunkt stehenden Aufgabenmerkmale, die die Aufgabenauswahl für den Unterricht und damit direkt den Lernprozess der Lernenden beeinflussen.

Die Studierenden nannten im Mittel sieben Aufgabenmerkmale, das Maximum lag bei 15 Aufgabenmerkmalen. Ordnet man die Aufgabenmerkmale „äußeren Aspekten", „inneren Aspekten" und „übergeordneten Aspekten" von Aufgaben zu, so ergeben sich im Durchschnitt jeweils drei Nennungen der äußeren und inneren Aspekte und eine Nennung der übergeordneten Aspekte. Die Ergebnisse zeigen auch, dass Studierende mit steigender Anzahl von didaktischen Lehrveranstaltungen mehr Aufgabenmerkmale nennen.

Diagnostische Handlungskompetenzen in Bezug auf Aufgaben und Schülerlösungen sollen mit einem Test erfasst werden. Die unterschiedlichen Schüleraufgaben und/oder Schülerlösungen werden den Studierenden mit Informationen zur Klassenstufe und zur Unterrichtssituation präsentiert. Folgende inhaltlichen Frageformate werden den Studierenden vorgelegt:

- Analysieren Sie die gegebene Aufgabe hinsichtlich der geforderten Kompetenzen.
- Welche Wissens- und Könnenselemente können Sie beim Aufgabenlöser anhand der präsentierten Lösung identifizieren?
- Stellen Sie auf Grundlage der dokumentierten Aufgabenbearbeitung eine Vermutung an, welche Kompetenzen beim Aufgabenlöser weiter gefördert werden sollten.
- Schreiben Sie möglichst viele verschiedene Lösungsmöglichkeiten zur gegebenen Aufgabe auf.

Der Test enthält sowohl Aufgaben mit vorgegebenen Antwortmöglichkeiten als auch Aufgaben, die frei beantwortet werden sollen. In beiden Fällen wird der Testkandidat zusätzlich aufgefordert, seine Wahl bzw. seine Antwort kurz zu begründen.

Eine Pilotierung des Tests fand mit n=28 Studenten statt. Die Pilotierung wurde mit einem Leitfadeninterview begleitet. Hieraus ergaben sich einige wichtige Hinweise zur Verbesserung der Aufgaben und als erstes Fazit lässt sich Folgendes festhalten:

Einige Schüleraufgaben eignen sich nur bedingt zur Einschätzung der zur Lösung geforderten Kompetenzen. Die unterschiedlichen Einschätzungen der Studierenden zum Kompetenzprofil von Aufgaben sind nur bedingt auf ihre diagnostische Kompetenz zurückzuführen und werden vielmehr als ein (Konstruktions-)Problem der Bildungsstandards angesehen.

Die eingesetzte Methodentriangulation eignet sich sehr gut für eine differenzierte Analyse, sowohl auf qualitativer als auch auf quantitativer Ebene. Außerdem gibt die Methode im Gegensatz zu einem Test keine Konstrukte, wie etwa den Kompetenzbegriff, vor und eignet sich somit genauso gut für den oft noch sehr oberflächlichen Blick von Erstsemestern wie auch zur Erfassung von differenzierteren Aufgabenanalysen.

4. Verwendung von Ergebnissen aus Kompetenzmessungen

Die Ergebnisse des Repertory Grid werden den Studierenden in einem allgemeinen und einem individuellen Teil zurückgemeldet. Diese Rückmeldung kann in das individuelle Prüfungsportfolio, aber auch in das phasenübergreifende Portfolio, aufgenommen werden. Die Ergebnisse der Kompetenzmessung machen nicht nur individuelle Entwicklungsfortschritte sichtbar und unterstützen weitere, sondern liefern auch verallgemeinerte Aussagen über die Entwicklung der diagnostischen Kompetenz im Studium. Diese Ergebnisse sollen zur Verbesserung der Lehrerausbildung an der TU Darmstadt genutzt werden.

Literatur

Zaugg, F. (2004): Mitschrift von Detlef E. Peukert am 23.11.2004 RWS Fuldatal http://www.studienseminar-eschwege.de/WebServerSTS/filebase/Seminar/Materialien/DFB/ZAUGG_PHASENMODELL_FOERDERK.pdf aufgerufen am 14.03.2011

Bruder, R. (2003): Konstruieren - auswählen - begleiten. Über den Umgang mit Aufgaben. In: Friedrich-Jahresheft "Aufgaben. Lernen fördern - Selbstständigkeit entwickeln", Friedrich Verlag 2003, S. 12 – 15

Bruder, R.; Lengnink, K.; Prediger, S. (2003): Wie denken Lehramtsstudierende über Mathematikaufgaben? Ein methodischer Ansatz zur Erfassung subjektiver Theorien mittels Repertory-Grid-Technik. In: mathematica didactica 26 (2003) Bd.1, S. 63-85

Helmke, A. (2009): Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. Franz Emanuel Weinert gewidmet. 1. Aufl. Seelze: Klett Kallmeyer.

Ingenkamp, K. & Lissmann, U. (2008): Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik. 6., neu ausgestattete Aufl. Weinheim: Beltz.

Kelly G. A. (1955): The psychology of personal constructs. Norton, New York.

KMK Standards für die Lehrerbildung (2004). Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004) Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften Kompetenzen und Standards für die Lehrerbildung

Weinert, F. E.; Schrader, F.-W.: Diagnose des Lehrers als Diagnostiker. In: Petillon, H.; Auffenfeld, A.; Ingenkamp, K. (1986): Schülergerechte Diagnose. Theoretische und empirische Beiträge zur pädagogischen Diagnostik ; Festschrift zum 60. Geburtstag von Karlheinz Ingenkamp. Weinheim: Beltz

Weinert, F.E. (1999). Die fünf Irrtümer der Schulreformer. Welche Lehrer, welchen Unterricht braucht das Land? *Psychologie heute, 26(7), 28-34.*

Astrid FISCHER, Oldenburg

Von der Hochschule zurück in die Schule: Wie bereitet das Mathematikstudium auf mathematische Anforderungen an Mathematiklehrerinnen und –lehrer vor?

In ihrem Mathematikstudium hören angehende Gymnasiallehrerinnen und –lehrer viele Veranstaltungen zu höherer Mathematik. Weder inhaltliche noch prozessbezogene Kompetenzen, die sie später ihre Schülerinnen und Schüler lehren sollen, erhalten in diesem Studium einen großen Raum. Bereitet das Studium sie dennoch gut auf die mathematischen Anforderungen vor, denen sie sich später in ihrem Beruf stellen müssen?

In dem Beitrag werden Ergebnisse einer Studie vorgestellt, in der Mathematikstudentinnen und -studenten eine elementaralgebraische Aufgabe bearbeiten, die in der Sekundarstufe I im Mathematikunterricht gestellt werden könnte. Die Studie geht der Frage nach, welche mathematischen Aktivitäten die Probanden einsetzen, um die Aufgabe zu lösen, und welche Hinweise diese Aktivitäten auf ihre mathematischen Kompetenzen geben.

1. Anforderungen an Mathematiklehrerinnen und -lehrer

Die COACTIV-Studie weist nach, dass mathematisches Fachwissen von Lehrerinnen und Lehrern eine entscheidende Komponente für das erfolgreiche Mathematiklernen ihrer Schüler darstellt (vgl. Jordan u.a. 2008). Mit den Bildungsstandards (KMK 2003) und Vorgaben zur Lehrerbildung (KMK 2008) werden zudem Anforderungen an Mathematiklehrerinnen und –lehrern formuliert, für die Wissen und Verstehen von mathematischen Inhalten und Prozeduren allein nicht qualifiziert: Wenn Lehrer ihre Schüler prozessbezogene mathematische Kompetenzen lehren sollen, müssen sie selbst diese Kompetenzen besitzen. Und wenn Lehrer die individuellen Vorstellungen und Denkwege ihrer Schüler diagnostizieren und daran individuell passende Aufgaben anschließen sollen, brauchen sie Erfahrungen mit Zugängen zu mathematischen Fragestellungen, die unterschiedliche Denkansätze und Niveaus erfassen (vgl. Sjuts 2006). Eine Grundlage für solche fachdidaktischen Reflexionen bilden mathematisches Fachwissen und elementare Kompetenzen in mathematischem Denken.

2. Rahmenbedingungen der Untersuchung

Die Probanden der Untersuchung waren die 17 Teilnehmer an einem mathematikdidaktischen Seminar, das für das erste Semester im Masterstudiengang für angehende Gymnasiallehrer vorgesehen ist. Sie richtet sich somit an Studierende, die ein Zwei-Fächer-Bachelorstudium mit dem Fach

Mathematik erfolgreich durchlaufen haben, und auf deren mathematische Expertise im Masterstudiengang fachdidaktische Veranstaltungen aufbauen sollen.

Zu Beginn des Seminars erhielten die Studierenden einen Arbeitsauftrag, den sie in schriftlicher Form und in Einzelarbeit ausführen sollten, und für den sie 25 Minuten Zeit hatten. Die meisten von ihnen hatten ihre Arbeit jedoch nach spätestens 20 Minuten beendet. Der Arbeitsauftrag bettet eine elementaralgebraische Aufgabe in einen Unterrichtskontext ein, in der der Proband oder die Probandin die Rolle einer Lehrperson einnimmt, die das Lernpotential einer mathematischen Aufgabe einschätzt. Der Auftrag lautet:

Aufgabe für Klasse 8:

a, b, c sind natürliche Zahlen, für die folgende Beziehung gilt: $3a = 2b+6c$
Was kannst du daraus schließen über die Teiler von a, von b und von c?

Auftrag:

1. Lösen Sie die Schüleraufgabe. Bitte dokumentieren Sie nicht nur Ihre fertige Lösung, sondern auch Ihre anderen Überlegungen.

2. Welche anderen Lösungsstrategien fallen Ihnen ein, die Schüler wählen könnten?

3. Wie beurteilen Sie den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe? Würden Sie die Aufgabe in Klasse 8 stellen?

3. Analyse der mathematischen Aufgabe

Das Inhaltswissen, das zur Lösung der Aufgabe erforderlich ist, ist einfach: der Teilerbegriff, die natürlichen Zahlen und der Variablenbegriff. Das Finden eines Lösungswegs wird zudem dadurch erleichtert, dass sehr unterschiedliche Ansätze zum Ziel führen, es also nicht darauf ankommt, eine ganz bestimmte originelle Idee zu finden. Herausfordernd ist an der Aufgabe die Tatsache, dass zwei Inhaltsbereiche, die in der Schule üblicherweise nicht mit einander verbunden gelernt werden, in dieser Aufgabe mit einander verwoben sind, so dass zu erwarten ist, dass den Studierenden – zumindest aus ihrer Schulerfahrung – kein Standardlösungsweg für die Aufgabe bekannt ist. Herausfordernd ist auch die Notwendigkeit, einen Gedankengang zu führen, der mehrere unterschiedliche Problemlöse- bzw. Argumentationsschritte beinhaltet. (Zur Erläuterung dieser Merkmale siehe auch die Klassifikation von Aufgaben in Jordan u.a. (2006)). Zudem kann die Aufgabe auf unterschiedlichen Niveaus bearbeitet werden, so dass sie sowohl für starke als auch für schwache Problemlöser eine angemessene Herausforderung bietet.

Eine Lösung der Aufgabe kann wie folgt aussehen:

3a = 2b+6c = 2(b+3c). Also ist 3a durch 2 teilbar (denn b+3c ist eine natürliche Zahl). Nun ist ein Produkt nur dann durch 2 teilbar, wenn einer der Faktoren durch 2 teilbar ist, also ist a durch 2 teilbar. Entsprechend kann man für b schließen: 2b = 3a-6c = 3(a-2c). Also ist 2b und damit b durch 3 teilbar. Für c ist eine analoge Überlegung nicht möglich. Hier stellt sich die Frage: Gibt es für c keine Teilerbedingung? Und ebenso: Ist es möglich, dass a oder b sogar noch schärfere Teilerbedingungen erfüllen müssen? Eine Antwort kann man aufgrund von Gegenbeispielen geben: Wenn a=2 und b=3 gewählt wird, dann wird die Gleichung mit c=0 erfüllt. Ebenso: Wenn c=1 und b=3, dann ist die Gleichung mit a=4 erfüllt. Das Fazit ist also: Die einzigen Teilerbedingungen, die die Gleichung stellt, sind 2|a und 3|b.

4. Überblick über die Bearbeitungen

Von den 17 Probanden der Studie haben acht die Teilerbedingungen 2|a und 3|b mit einer richtigen Schlusskette begründet, einer nur die Bedingung 2|a. Zwei weitere Probanden haben die beiden Bedingungen zwar korrekt angegeben, aber mit einer fehlerhaften Begründung.

Auch unter denen, die die Teilerbedingungen gefunden haben, gibt niemand einen Hinweis darauf, dass er oder sie reflektiert, ob die gefundenen Bedingungen die einzigen sind, die die Variablen erfüllen müssen. Möglicherweise sehen einige das Problem (ohne es explizit anzusprechen), aber keinen Weg, wie sie diese Frage untersuchen können. Andere erkennen vielleicht gar nicht die Relevanz dieser Fragestellung.

Insgesamt sind bei der Probandengruppe Schwachstellen im Problemlösen und Begründen ganz unterschiedlicher Art zu beobachten. Sie werden im Folgenden benannt, ohne auf die Häufigkeit des Auftretens einzugehen:

(a) Mathematisches Wissen: Manchen Probanden fehlt ein gutes Verständnis des Teilerbegriffs. Das zeigt sich z.B., wenn eine Bruchzahl als Teiler einer Zahl bezeichnet wird. Zudem treten Fehldeutungen der Variablenterme auf.

(b) Problemlöseaktivitäten: Einigen Probanden gelingt es nicht, die beiden Inhaltsbereiche „Teiler“ und „algebraische Gleichung“ mit einander in Beziehung zu setzen. Die Strategie, aus Beispielen Hypothesen zu gewinnen, ist nicht verbreitet. Ein einziger Proband erzeugt Beispiele die vielleicht dieser Absicht dienen. Auch solche Probanden, die keine direkten Schlussfolgerungen über Teiler aus der Gleichung ableiten können, wählen nicht die Strategie, Beispiele zu erzeugen, etwa um sich einen Überblick zu verschaffen oder um die Beispiele auf Teilereigenschaften hin zu analysieren. Eine weitere Auffälligkeit bei den Bearbeitungen ist, dass einige Probanden geeignete Beobachtungen machen, diese jedoch nicht über mehrere Problemlöse- bzw. Argumentationsschritte hinweg weiterführen.

(c) Präsentation einer Begründung: Viele Probanden notieren ihre Überlegungen quasi für sich selbst, ohne ihre Ideen für einen Leser explizit zu machen. Dieser ist darauf angewiesen, Gedankengänge aus impliziten Signalen zu rekonstruieren. Von diesen Autoren wird z.B. nicht ausgewiesen, welche Überlegungen vorläufig oder endgültig sind und wie der Begründungszusammenhang zu lesen ist. Verschiedentlich treten auch logisch falsche Darstellungen auf.

(d) Kontrollaktivitäten: Nur bei wenigen Probanden sind Kontrollaktivitäten zu rekonstruieren, etwa wenn fehlerhafte oder sich widersprechende Äußerungen durchgestrichen sind. Ausgewiesene Überprüfungen von Überlegungen oder von Zwischen- oder Endergebnissen sind gar nicht zu finden.

Literatur

Jordan, A. & Ross, N. & Krauss, S. & Baumert, J. & Blum, W. & Neubrand, M. & Löwen, K. & Brunner, M. & Kunter, M. (2006): Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenklassifikation im COACTIV-Projekt. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

KMK (2003): Vereinbarung über Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003.

KMK (2008): Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.2008.

Krauss, S. & Neubrand, M. & Blum, W. & Baumert, J. & Brunner, M. & Kunter, M. & Jordan, A. (2008): Die Untersuchung professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und –Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 29(2008)3/4, 223 – 258.

Sjuts, J. (2006): Unterrichtliche Gestaltung und Nutzung kompetenzorientierter Aufgaben in diagnostischer Hinsicht. In: Blum, W. & Drücke-Noe, Ch. & Hartung, R. & Köller, O (Hrsg): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin. 96 – 112.

Pascal Rolf FISCHER, Kassel, Rolf BIEHLER, Paderborn

Über die Heterogenität unserer Studienanfänger. Ergebnisse einer empirischen Untersuchung von Teilnehmern mathematischer Vorkurse

1. Einleitende Gedanken und Hintergründe

Mathematische Brückenkurse werden inzwischen an fast allen Hochschulen in unterschiedlichen Kursformaten und auf Basis unterschiedlicher Materialien angeboten. Allen gemein sind dabei die hohen Anforderungen, die an die Kurse gestellt werden: Zum einen sollen sie sich den unterschiedlichen mathematischen Anforderungen der betreuten Studiengänge orientieren *(Outputorientierung)* zugleich aber auch auf die individuellen Defizite und im Idealfall auch die persönlichen Lernpräferenzen der Studienanfänger eingehen *(Inputorientierung)*. Zum anderen haben mathematische Brückenkurse mit organisatorischen Rahmenproblemen u.a. aufgrund wachsender Teilnehmerzahlen zu kämpfen. Eine zielgerichtete (Weiter-) Entwicklung der Kurse setzt daher eine Analyse deren Teilnehmer voraus.

Die hier kurz vorgestellte Studie ist ein Teilausschnitt des Dissertationsprojekts des ersten Autors unter Betreuung des zweiten Autors, das sich mit der Entwicklung von Blended-Learning-Vorkursen sowie deren Beforschung beschäftigt. Das Vorhaben ist eingebettet in das Projekt VEMA – Virtuelles Eingangstutorium Mathematik, in dem ein interaktives Multimediaskript für Mathematikvorkurse und Kursszenarien für dessen Einsatz entwickelt wurden. Im Rahmen des Dissertationsprojekts wurden hierzu computergestützte, diagnostische Selbsttests in der Lernplattform Moodle sowie ein neues Blended-Learning-Design der Vorkurse entwickelt und eingesetzt (vgl. Biehler, Fischer, Hochmuth, Wassong (in press)). Seit 2008 haben so die Studienanfänger in Kassel die Wahl zwischen eher lehrerzentrierten P-Kursen mit einem erhöhten Präsenzanteil und den mehr selbstständigkeitsorientierten E-Kursen mit erhöhten eLearning-Anteil.

Da in beiden Kursvarianten jeweils 4 studiengangbezogene Teilgruppen gebildet werden, konzentriert sich die Studie nicht nur auf die Vorkursteilnehmer als Gesamtgruppe sowie die beiden Teilgruppen nach Kursvarianten, es erfolgt auch eine Untersuchung der folgenden Studienganggruppen über die gewählte Kursvariante hinweg: 1) Elektrotechnik & Informatik, 2) Bauingenieure & Maschinenbau, 3) Mathe Bachelor, Lehramt Gymnasium, Naturwissenschaften sowie 4) Lehramt Grund-, Haupt- und Realschule.

2. Aufbau der Studie

Die Studie untersucht die Vorkurse auf drei Ebenen: In *Ebene I* wird das konkrete Lehr-Lernszenario beforscht, auf *Ebene II* werden summative und formative Evaluationskonzepte für die Blended Learning Kurse entwickelt und auf *Ebene III* erfolgt eine Analyse der Übertragbarkeit des Kursdesigns und der Evaluationskonzepte auf veränderte Rahmenbedingungen, auf andere Blended-Learning-Szenarien und auf andere Hochschulen.

In Ebene I werden dabei die folgenden vier Teilbereiche untersucht:

- (A) *Der Lerner* wird hinsichtlich seiner Leistung, personenbezogener Merkmale, metakognitiver Fähigkeiten, Lernerfahrungen und den Motiven seiner Kurswahl untersucht.
- (B) *Das Lernen*: Wie wird innerhalb der Kurse gelernt? Lassen sich typische Lernstrategien oder Nutzertypen identifizieren? Wo findet das Lernen statt und was sind motivationale Elemente des Lernens?
- (C) Die Untersuchung von *personenbezogenen Bedingungen* als Faktor für ein bestimmtes Lernverhalten
- (D) Eine Analyse der *Auswirkungen des Lernens* auf die Einstellung, die Leistung sowie metakognitive Fähigkeiten des Lerners

Die Studie wurde im Rahmen der Kasseler Vorkurse 2008 durchgeführt, die über einen Zeitraum von 4 Wochen vor dem Beginn des Wintersemesters stattfanden. Mit den Teilnehmern wurden dabei zu Beginn ein computergestützter Test sowie eine Online-Befragung durchgeführt, ab dem Ende der zweiten Kurswoche wurde dann eine Zwischenbefragung zur Erhebung der Lernstrategien freigeschaltet. Darüber hinaus liegen Daten zum Lernverhalten in Moodle vor. Am Ende des Kurses wurden ein Abschlusstest im Computerraum sowie eine Endbefragung der Teilnehmer durchgeführt.

3. Ausgewählte Ergebnisse

Die hier zusammengetragenen Ergebnisse konzentrieren sich ausschließlich auf die Eingangsmerkmale der Kursteilnehmer und stellen nur eine geringe Auswahl der vorliegenden Ergebnisse dar.

Personenbezogene Merkmale: Diesbezüglich ist auffällig, dass der Frauenanteil bei der gesamten Gruppe der Vorkursteilnehmer bei 33,5% lag. Im Vergleich der Kursvarianten wiesen die E-Kurse mit 42,9% einen wesentlich höheren Frauenanteil auf als die P-Kurse (28,3%). Bezogen auf die vier studiengangbezogenen Teilgruppen zeigte sich ein niedriger Frauenanteil bei den technisch orientierten Studiengängen der Gruppen 1 (Eltech/Inf; 10%) sowie der Gruppe 2 (Ingenieure; 22,8%). Bei Gruppe 3

(MatheBach & LA Gym) lag der Anteil mit 41,9% bereits über dem Gesamtdurchschnitt, die Gruppe 4 (GHR) stach dann mit dem höchsten Frauenanteil von 84,6% hervor. Betrachtet man die Altersverteilung, so ließen sich bzgl. der Kursvarianten keine Unterschiede feststellen. Nach Studienganggruppen getrennt zeigten alle Gruppen ein mittleres Alter von 21,4 bzw. 21,7 Jahren, wobei die Gruppe 4 mit der höchsten Streuung von 4,36 Jahren gegenüber den anderen Gruppen mit einer Streuung zwischen 2,7 und 3,2 Jahren hervorstach (Streuungsmaß: Standardabweichung).

Leistungsbezogene Daten: Sowohl hinsichtlich der Abiturnoten als auch der Noten aus dem letzten schulischen Mathematikkurs in Punkten zeigten die E-Kurse signifikant bessere Ergebnisse als die P-Kurse:

	E-Kurse			**P-Kurse**		
	M	**SD**	**N**	**M**	**SD**	**N**
Abiturnote	2,44	0,67	179	2,6	0,59	363
Letzte Mathenote	10,2	3,35	181	9,49	3,04	372

Betrachtet man die verschiedenen Studiengänge, so zeigten die Gruppen 3 (M=2,36; SD=0,72) und 4 (M=2,35; SD=0,57) bessere Abiturnoten als die Gruppen 1 (M=2,62; SD=0,6) und 2 (M=2,65; SD=0,59). Bei der letzten schulischen Mathematiknote schnitten die Gruppen 1 (M=9,33) und 2 (M=9,46) ebenfalls schlechter ab als die Gruppen 3 (M=10,63) und 4 (M=10,4). Bzgl. der Gruppe 4 ist darauf hinzuweisen, dass für die Zulassung zum Lehramt Grundschule ein interner n.c. verwendet wird. Die bessere Mathematiknote in Gruppe 3 erhält ein zusätzliches Gewicht, da der Großteil dieser Studenten zuvor einen Mathematikleistungskurs besuchten, während Gruppe 4 vorwiegend aus dem Mathematikgrundkurs stammten.

Um ein weiteres Leistungsmaß zum Vergleich der Teilnehmer zu haben, wurde zu Beginn des Kurses ein Multiple-Choice Test mit 19 Mathematikaufgaben aus der Sekundarstufe I und II durchgeführt. Die Items wurden aus TIMSS und PISA übernommen und um eigene Items erweitert. Bei maximal 19 Punkten galt der Test ab 9,5 Punkten als bestanden, woraus sich die „Bestehensquote“ (BQ) je Gruppe berechnen lässt. Der Test ergab anders als bei den schulischen Leistungsdaten keine signifikanten Unterschiede zwischen E- und P-Kursen.

	M	**SD**	**BQ**	**N**		**M**	**SD**	**BQ**	**N**
Grp. 1	7,98	3,11	31,5%	149	**Grp. 3**	9,83	3,38	56,1%	107
Grp. 2	8,78	2,94	40,4%	255	**Grp. 4**	7,0	2,79	20,2%	99

Betrachtet man die Studienganggruppen, zeigen die GHR-Studierenden trotz besserer schulischer Leistungsdaten mit Abstand die schlechtesten Testergebnisse.

Selbsteinschätzung: Zur Messung der Selbsteinschätzung wurden bei der Eingangsbefragung die Skalen „Selbstwirksamkeit" sowie „Selbstkonzept Mathematik" aus PISA (vgl. PISA-Konsortium 2006) übernommen. Im Vergleich der Kursvarianten ergab sich lediglich ein signifikant niedrigerer Wert bei den E-Kursen bzgl. der Selbstwirksamkeit. Im Vergleich der Studiengänge stach erneut die Gruppe 4 (GHR) hervor, die hier deutlich niedrigere Werte als alle übrigen Gruppen zeigte. Dies gilt auch in Bezug auf das mathematische Selbstkonzept, bei dem zudem die Gruppe 3 das positivste Selbstbild aller Gruppen zeigte. Dabei weisen die Ergebnisse der Vorkursteilnehmer keine bedeutsamen Unterschiede zu den Ergebnissen aus PISA 2003 auf. Um die Selbsteinschätzung mathematischer Studierfähigkeit zu messen, wurde auf Basis der Dissertation von C. Bescherer (vgl. Bescherer 2003) eine neue Skala entwickelt. Auch hier ergaben sich lediglich Unterschiede bzgl. der Studienganggruppen: Die Gruppen 1 und 4 haben ein im Mittel leicht negativeres Selbstbild als die Gruppen 2 und 3.

4. Fazit und Ausblick

Bei den studiengangspezifischen Gruppen stach stets die Gruppe der GHR-Studenten hervor: Diese Gruppe wies den mit Abstand höchsten Frauenanteil sowie mit die besten schulische Leistungsdaten auf, hatte jedoch schlechte Testergebnisse und eine niedrigere Selbsteinschätzung.

Darüber hinaus war bei allen untersuchten Merkmalen die große Streuung der Ergebnisse auffällig, sowohl bei Betrachtung der Vorkursteilnehmer als Gesamtgruppe als auch bei der Analyse der Teilgruppen. Dies zeigt die extreme Heterogenität der Kasseler Vorkursteilnehmer in verschiedensten Bereichen und hebt die Bedeutung des Themas „Heterogenität" für die Studieneingangsphase hervor.

Literatur

Bescherer, C. (2003): Selbsteinschätzung mathematischer Studierfähigkeit bei Studienanfängerinnen und –anfängern. Empirische Untersuchung und praktische Konsequenz. Ludwigsburg.

Biehler, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., & Wassong, Th. (in press): Self-regulated learning and self assessment in online mathematics bridging courses. *In:* A.A. Juan, M.A. Huertas, S. Trenholm, & C. Steegmann (Eds.), Teaching Mathematics Online – Emergent Technologies and Methodologies. Hershey, PA: IGI Global.

PISA-Konsortium Deutschland [Hrsg.] (2006): PISA 2003. Dokumentation der Erhebungsinstrumente. Münster.

Astrid FISCHER, Oldenburg; Johann SJUTS, Leer

Diagnostische Kompetenz und die Schwierigkeit der Überprüfung

Die Orientierung an Kompetenzen und Standards ist das derzeit vorherrschende Thema in der Lehrerbildung. Durchaus einsichtig ist es, den Anschluss beim Übergang von Ausbildungsphase zu Ausbildungsphase in Studium und Vorbereitungsdienst oder von der Ausbildung in den Berufseinstieg durch Kompetenzen auszudrücken. Ob sich indes die Erwartung erfüllen lässt, Kompetenzen und Teilkompetenzen verlässlich festzustellen und in Abschlüssen zu bescheinigen, ist offen.

Nachfolgend sollen Ansätze und Schwierigkeiten am Beispiel der für Lehrpersonen so wichtigen diagnostischen Kompetenz und ihrer Überprüfung mittels Fallanalysen aufgezeigt werden. Sie beziehen sich auf erste Ergebnisse eines vom *Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft* ausgezeichneten Projekts zur Verzahnung der Lehrerausbildungsphasen.

Der *Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft* hat im Jahr 2009 mit der Ausschreibung *Von der Hochschule in den Klassenraum: Neue Wege der Zusammenarbeit zwischen Hochschulen und Studienseminaren in der Lehrerausbildung* eine ganz neue Initiative gestartet, um die gezielte Kooperation der für Lehrerausbildung zuständigen Institutionen zu fördern. Vier Projekte hat der Stifterverband prämiert, neben den Projekten in Jena, Magdeburg und Stuttgart das *Modellvorhaben Nordwest: Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenz im Unterricht und in Lehr-Lern-Laboren* der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg in Zusammenarbeit mit dem Studienseminar Aurich für das Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen, den Studienseminaren Leer, Oldenburg und Wilhelmshaven für das Lehramt an Gymnasien und neun Kooperationsschulen der Region.

Das Verbundprojekt trägt zum Aufbau professioneller Fähigkeiten durch die Gestaltung und den Einsatz von Aufgaben zum fachbezogenen Diagnostizieren und Fördern bei (Sjuts 2010) und befähigt zur theoriegeleiteten und methodenbewussten Aufnahme von Ergebnissen aus Forschungsprojekten und Schulleistungsstudien. Es ermöglicht eine selbstgesteuerte und forschungsorientierte Beobachtung und Auswertung von Lehr-Lern-Prozessen im Unterricht sowie in naturwissenschaftlichen Lehr-Lern-Laboren und Problemlöseseminaren zur Mathematik (Kiper & Komorek & Sjuts 2010).

Es sei darauf hingewiesen, dass, wenn vom Aufbau von Kompetenzen und ihrer Überprüfung hier die Rede ist, stets zwei Gruppen zu unterscheiden sind, die der Lernenden und die der Lehrenden, also die der Schülerinnen und Schüler und die der angehenden Lehrerinnen und Lehrer, die indes ihrerseits in der Ausbildung stehen.

Lehramtsstudierende und Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst sollen Kompetenzen zum Unterrichten aufbauen. Sie sollen insbesondere Lehr-Lern-Prozesse gestalten können, mittels derer Schülerinnen und Schüler die für sie geltenden Kompetenzen erwerben. Um die Kompetenzentwicklung von Schülerinnen und Schülern zu diagnostizieren, bedarf es dann der diagnostischen Kompetenz auf Seiten der Lehrerinnen und Lehrer. Auch die Aufgabe der Lehrerausbildung ist eine doppelte, den Aufbau diagnostischer Kompetenz zu ermöglichen und das Ergebnis zu überprüfen.

Der hier dargelegte Ansatz zur diagnostischen Kompetenz angehender Lehrkräfte unterscheidet drei Stufen,

- die Stufe der <u>Leistungsfeststellung</u>, die Endergebnisse des Lernens von Schülerinnen und Schülern, Produkte und Resultate von direkter Sichtbarkeit beinhaltet,
- die Stufe der <u>Lernprozessanalyse</u> im Unterricht, die sich auf Lernzwischenstände, auf Denk- und Verstehensvorgänge von nicht unmittelbarer Erschließbarkeit bezieht,
- die Stufe der <u>Förderdiagnose</u>, die vorab zu durchdenkende Lernprozessvarianten und dazu passende Interventions- und Unterstützungsmaßnahmen von zunächst ungesicherter Einsetzbarkeit betrifft.

Es liegt auf der Hand, dass Theoriereichweite und -inanspruchnahme von Stufe zu Stufe zunehmen. Damit steht die Mathematikdidaktik in der Pflicht, Diagnostik zu erforschen und wirksame Konzepte für Lernprozessanalyse und Förderdiagnose bereitzustellen. Anregungen zur Gestaltung von Instrumenten liegen auch recht zahlreich vor (Hußmann & Leuders & Prediger 2007), zur Wirkung förderdiagnostischer Interventions- und Unterstützungsmaßnahmen gibt es indes wenig gesicherte Erkenntnisse.

Die genannten Stufen seien nun an einer Fallanalyse (mit Aufgaben aus dem Känguru-Wettbewerb) illustriert. Gegeben ist die Aufgabe **„Quiz“**:

Svens Vater nimmt an einem Quiz teil. Er erhält für eine richtige Antwort 2 Punkte, bei einer falschen werden 4 Punkte abgezogen. Nach den 18 Fragen des Quiz hat er 0 Punkte. Wie viele seiner Antworten waren korrekt?

Von einem Schüler aus dem Schuljahrgang 6 stammt folgende Aufgabenbearbeitung:

Richtige Antworten	Zwischen-Punkt-zahl	Falsche Antworten	Zwischen-Punkt-zahl	Insgesamt
9	18	9	−36	−18
10	20	8	−32	−12
11	22	7	−28	−6
12	24	6	−24	0
13	26	5	−20	+6

Antwort: Svens Vater hatte 12 richtige Antworten.

<u>Teil 1</u>: Die vorliegende Aufgabenbearbeitung ist

- □ als richtige Lösung,
- □ nicht als richtige Lösung zu bewerten.

<u>Teil 2</u>: Angenommen, in der Aufgabenstellung hätte außerdem gestanden: *Begründe dein Ergebnis.* Die vorliegende Aufgabenbearbeitung wäre dazu

□ eine richtige Lösung, □ keine richtige Lösung,

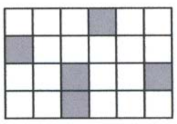
denn …

<u>Teil 3</u>: Der Schüler, von dem die obige Aufgabenbearbeitung stammt, hat Förderbedarf vor allem

□ im Problemlösen, □ im Kommunizieren,

denn …

Gegeben ist die Aufgabe „Weiße und graue Kästchen“:

> In dem abgebildeten Rechteck sind die Kästchen grau gefärbt oder weiß. Wie viele der weißen Kästchen muss man noch grau malen, um zu erreichen, dass es doppelt so viele weiße wie graue Kästchen sind?
>
> 

<u>Teil 4</u>: Wie sähe eine Lösung dieser Aufgabe durch den oben erwähnten Schüler aus?

<u>Teil 5</u>: Wie sähe eine Lösung dieser Aufgabe mit einem ganz anderen Gedankengang aus?

Teil 1 berücksichtigt die schulisch fest etablierte Lernergebnisüberprüfung in Klassenarbeiten und Klausuren. Dabei geht es darum, inhaltliche Richtigkeit festzustellen. Unbedingt erforderlich ist fachliche Sicherheit.

Teil 2 steht für eine Schwierigkeit, die mit der Unterschiedlichkeit des Darstellungsniveaus im unterrichtlichen Kontext zusammenhängt. So könnte man die vorliegende Schülerlösung mit der systematischen Darstellung einerseits als Begründung gelten lassen; andererseits ließen sich Strategie der Lösung und Vollständigkeit der Begründung durch eine ergänzende Erläuterung zum Ausdruck bringen. Aus diesem Grund ist eine schriftliche Argumentation für die angekreuzte Bewertung gefordert.

Teil 3 testet eine Einordnung von Kompetenzen im Sinne der Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Als Kriterien können herangezogen werden: Problemlösen erfordert eine Strategie (die hier erkennbar ist), Kommunizieren eine Adressatenorientierung (die hier allenfalls in der Übersichtlichkeit der Tabelle und der Hervorhebung einer Zeile vorliegt).

Teil 4 widmet sich der Identifizierung eines Gedankengangs, der in diesem Fall zwar nicht zu explizieren, aber an einer analogen Aufgabe durch eine entsprechende Lösung nachzuweisen ist. Es geht folglich um eine theoretische Einordnung und eine praktische Konkretisierung.

Teil 5 weitet die theoretische Analyse zu einer alternativen Lösungsidee aus, die sich in kognitiver Hinsicht abgrenzen soll.

Derartige Fallanalysen zur Überprüfung diagnostischer Kompetenz angehender Lehrkräfte können verlässliche Ergebnisse nur in einem gewissen Maße erbringen. Sie erfassen zudem nur einen Teil von inhalts- und prozessbezogenen Zielen des Mathematikunterrichts und damit nur einen Ausschnitt der Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern.

Literatur:

Hußmann, Stephan & Leuders, Timo & Prediger, Susanne (2007): Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 15, 49. Jahrgang, 2007, S. 1-8

Kiper, Hanna & Komorek, Michael & Sjuts, Johann (2010): Modellvorhaben Nordwest: Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenz im Unterricht und in Lehr-Lern-Laboren. Verbundprojekt zur Verzahnung der Phasen in der Lehrerausbildung – prämiert vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. In: SEMINAR – Lehrerbildung und Schule, Heft 2, 2010, S. 115-122

Sjuts, Johann (2010): Aufgabenkompetenz erwerben – ein modellhafter Berufsfeldbezug in der Lehrerausbildung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, S. 807-810

Klaus-Tycho FÖRSTER, Hildesheim

Neue Möglichkeiten durch die Programmiersprache Scratch: Algorithmen und Programmierung für alle Fächer

Das Institut für Mathematik und Angewandte Informatik (IMAI) ist an der Universität Hildesheim seit mehr als 10 Jahren zuständig für die Ausbildung in Informations- und Kommunikationstechnologie (IuK) für alle Studierenden des Lehramtes an Grund-, Haupt- und Realschulen. Wie in den meisten lehramtsausbildenden Studiengängen werden auch in Hildesheim in der IuK-Ausbildung grundlegende IT-Kompetenzen für den späteren schulischen Alltag bereitgestellt. Seit diesem Wintersemester vermitteln wir erstmals vertieft auch IT-Basiskompetenzen im Bereich Algorithmen und Programmierung – ermöglicht durch die visuelle Programmiersprache Scratch: nicht nur für unsere zukünftigen Mathematiklehrer, sondern auch für die Lehramtsstudierenden aller Fächer – also z.B. auch für die zukünftigen Grundschullehrer mit den Fächern Deutsch und Religion.

Algorithmen und Programmierung in Mathematik und Informatik

Schon 1981 forderte die GDM für die Ausbildung aller Mathematiklehrer, dass diese mindestens eine Programmiersprache beherrschen sollen und darin die Algorithmen ihres Unterrichts programmieren und realisieren können sollen (vergl. Weigand 1989). Die Bedeutung von Algorithmen für die mathematische oder informatische Ausbildung ist seit langem bekannt, siehe z.B. Tietze/Klika/Wolpers 1997, Modrow 2006 oder Schwill 1995.

Eine der zentralen Begründungen für das Programmieren im mathematischen Unterricht sind häufig auftretende Schwierigkeiten der Schüler beim Problemlösen. Programmieren kann hierbei helfen, da es eine gemeinsame Sprache bietet, eigene Erfahrungen ermöglicht und man über Programme leichter reden kann – insbesondere über ihre Struktur, ihre Entwicklung und ihre Beziehungen zu anderen Programmen (vergl. Feurzeig und Papert 1969). Programmieren ist aber auch hilfreich für eine Überprüfung und Bewertung komplexer Modellierungen und ist förderlich für die Kritikfähigkeit am (richtigen?) Ergebnis. So führten etwa schon Howe et. al. 1988 aus, dass Schüler beim Programmieren ausgehend vom gesehenen Ergebnis ihre Ideen wiederholt modifizieren. Ebenso finden sich bei der Programmierung Parallelen zum mathematischen Beweisen: *"Das Finden einer Transformation, die Eingabewerte auf Ausgabewerte abbildet, das Finden eines Algorithmus oder einer Konfiguration, kann man mit einer Beweisaufgabe im Mathematikunterricht vergleichen. [...] Dieser Vergleich ergibt sich aus den Arbeiten von Regina Bruder (Bruder, Leuders, Büchter*

2008)." (Strecker 2009, S. 47). Das Thema der Programmierung im mathematischen Unterricht ist uneingeschränkt aktuell (s. Kortenkamp 2008).

Trotz aller geschilderten Argumente ist im mathematischen Unterricht heutzutage das Programmieren aber eher auf dem Rückzug. Dieses ist unter anderem bedingt durch die Verbreitung von mathematischer Spezialsoftware, aber auch insbesondere vermutlich durch den zu hohen Aufwand des Erlernens einer (Standard-) Programmiersprache durch die Schüler.

Algorithmen & Programmieren für alle Fächer

Die Befähigung von Schülern zu vertieftem algorithmischen Denken bzw. konstruktivem Problemlösen ist natürlich auch eine Grundforderung in allen Unterrichtsfächern. Dass Algorithmen im Alltag des 21. Jahrhunderts wichtig sind, sehen auch mathematikferne Schüler und Lehrer spätestens dann ein, wenn man sie mit den uns allen bekannten Beispielen konfrontiert wie etwa dem Aufbauen eines Ikea-Möbels, dem Programmieren einer Videoaufnahme oder dem Backen eines Kuchens. Man vergleiche hierzu insbesondere die Ausführungen in Schmidt-Thieme 2005, wo über die große Bedeutung einer fächerübergreifenden Algorithmenausbildung vom Mathematik- bis zum Deutschunterricht berichtet wird.

Algorithmen & Programmieren: eine grundlegende IT-Kompetenz

Die Grundlage jeglicher moderner IT-Anwendungen sind seit jeher Algorithmen und Programmierung. Nur wer mit deren Basiskonzepten in Berührung gekommen ist, kann vertieft Chancen und Risiken unserer modernen Informationsgesellschaft beurteilen und die sich hierdurch neu ergebenden Möglichkeiten konstruktiv und kritisch einsetzen. Die Bandbreite der Beispiele ist nahezu unüberschaubar: Sie reicht vom Onlinebanking über gezielte Werbung, Expertensysteme in der Medizin, Suchmaschinen, Wirtschaftssimulationen, Wahlcomputern bis hin zu Computerspielen – eben alles was zwischen Einschalten und Ausschalten eines Computers passiert. Aus diesen Überlegungen resultiert naheliegenderweise die Forderung nach Basiskenntnissen in Algorithmen und Programmierung für jeden, der moderne IT-Systeme verwendet – und die ebenso naheliegende Frage, wie man dieses realisieren kann.

Warum gerade Scratch?

Überlegungen zum schulischen Programmieren sind nicht neu, beginnend mit Logo (1969) gibt es mit Karel the Robot (1981), Etoys und Squeak (1994), Lego Mindstorms (1998), Kara (2000), Greenfoot (2006) und vielen anderen eine große Anzahl von Programmierumgebungen. Diese Ansätze richten sich jedoch eher an den Anforderungen mathematischen bzw.

informatischen Unterrichts aus bzw. erfordern für Schüler eine längere Einarbeitungszeit oder für die Lehrkraft vertiefte Programmierkenntnisse.

Idealerweise sollte die Programmierumgebung für Schüler und Lehrer schon in der ersten Unterrichtsstunde produktive schulfachbezogene Ergebnisse ermöglichen. Für beide Zielgruppen steht hier im Vordergrund, dass es um Algorithmen und Programmierung geht – nicht um eine „Produktschulung“. Die Programmierumgebung an sich ist nur das Werkzeug zum Zweck. Jeglicher Aufwand zum Erlernen der Programmiersprache an sich wie auch zur Behebung von Syntaxfehlern sollte minimiert werden:

Java	**Scratch**
public class Hallo {public static void main (String argv[]) {System.out.println("Hallo Welt");}}	

Scratch bietet die Vorteile, dass Befehle selbsterklärend sind, Syntaxfehler nicht existieren, logische Fehler oft „(ein)gesehen“ werden und schnelle Erfolgsmöglichkeiten sowie hohe Schülermotivation Hand in Hand gehen.

Scratch wurde von der Lifelong Kindergarten research group am Massachusetts Institute of Technology 2007 veröffentlicht und steht für Windows, Mac OSX und Linux kostenlos zur Verfügung. Neben dem schulischen Unterricht (siehe etwa Romeike 2007) wird Scratch bzw. Modifikationen davon auch an Universitäten zur Einführung in die Programmierung verwendet (vergl. Resnick et. al. 2009 bzw. Harvey/Mönig 2010).

Algorithmen & Programmieren in der IuK-Ausbildung

Gemäß obigen Ausführungen lässt sich Scratch für den Bereich Algorithmen und Programmierung nicht nur im Mathematik- oder Informatikunterricht einsetzen, sondern könnte sich auch eignen, diesen Bereich als gewünschte IT-Basiskompetenz für alle Lehramtsstudierenden zu realisieren.

Das Pflicht-Computerpraktikum IuK ist an der Universität Hildesheim für alle Lehramtsstudierende im zweiten Studienjahr vorgesehen. Für die Realisierung der fächerübergreifenden und alltagsrelevanten Algorithmen- und Programmierausbildung wird Scratch an drei Terminen eingesetzt.

Beim ersten Termin erkennen die Studierenden nach einer theoretischen Einführung in grundlegende Konzepte an kleineren Beispielen selbst die Möglichkeiten von Scratch und setzen sie in ersten Programmierprojekten um. Beim zweiten Termin erstellen die Studierenden eigenständig ein eigenes Konzept zur Einführung in Scratch für Schulkinder – mit Bezug zu ihren jeweiligen Unterrichtsfächern. Ausgehend von ihren fachlichen und fachdidaktischen Kenntnissen werden diverse Einstiege und Umsetzungen für konkrete Unterrichtssituationen konzipiert. Beim dritten Termin wird ihr Konzept gemeinsam in der Praxis mit einer Schulklasse erprobt, damit die Studierenden gemeinsam mit den Schülern den Startpunkt für nachhaltiges Lernen setzen können. Hierbei überrascht die Studierenden, dass es den Schülern oft leichter fällt als ihnen selbst, mit Scratch zu arbeiten. Die bisherigen Erfahrungen sind sowohl für Lehrende wie auch für Studierende sehr vielversprechend. Wir beabsichtigen daher in den kommenden Semestern diesen Ansatz vertieft zu erproben und werden hierüber an geeigneter Stelle ausführlich weiter berichten.

Literatur

Bruder, R., Leuders, T., Büchter, A. (2008): Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten, Berlin: Cornelsen-Verlag.

Feurzeig, W., Papert, S. (1969): Programming-languages as a conceptual framework for teaching mathematics. In: Programmed Learning Research: Paris: Dunod.

Harvey, B., Mönig, J. (2010): Bringing “No Ceiling” to Scratch: Can One Language Serve Kids and Computer Scientists? Constructionism 2010 conference, Paris.

Helmke, A. (2011): Mathematische Begabung - typisch Mädchen oder typisch Junge? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011 (in Vorbereitung).

Howe, J. A. M. et. al. (1988): Teaching Mathematics Through Programming in the Classroom. In: Soloway, E., Spohrer J.C. (Hrsg.): Studying the Novice Programmer. Hillsdale: L. Erlbaum Associates Inc.

Kortenkamp, U. (2008): Strukturieren mit Algorithmen. In: Kortenkamp et. al. (Hrsg.): Informatische Ideen im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 77-85.

Modrow, E. (2006): Zur Ordnungswirkung fundamentaler Ideen der Informatik am Beispiel der theoretischen Schulinformatik. informatica didactica 6, 2006.

Resnick, M. et. al. (2009): Scratch: Programming for All. Communications of the ACM, November 2009, 60-67.

Romeike, R. (2007): Animationen und Spiele gestalten – ein kreativer Einstieg in die Programmierung. http://www.funlearning.de/ (Zuletzt abgerufen am 11.3.11).

Schmidt-Thieme, B. (2005): Algorithmen – fächerübergreifend und alltagsrelevant? In: Engel, Joachim u. a. (Hrsg.): Strukturieren - Modellieren - Kommunizieren. Leitbilder mathematischer und informatorischer Aktivitäten. Hildesheim 2005, 177-188.

A. Schwill (1995): Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik. In: Bericht über die 12. Arbeitstagung des AK "Mathematikunterricht und Informatik" der GDM (H. Hischer, M. Weiß, eds.), 18-25.

Strecker, K. M. (2009): Informatik für Alle – Wie viel Programmierung braucht der Mensch? Dissertation, Georg-August-Universität Göttingen.

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H. (1997): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Band 1. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlagsgesellschaft.

Weigand, H.-G. (1989): Algorithmen und Computer im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1989, 386 – 389.

Anneke FREDEBOHM, Regina BRUDER, TU Darmstadt
Timo LEUDERS, Markus WIRTZ, PH Freiburg

Empiriegestützte Itementwicklung für die Kompetenzmodellierung des Arbeitens mit algebraischen Repräsentationen von funktionalen Zusammenhängen

Im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ beschäftigt sich das Projekt HEUREKO[1] mit dem *HEUristischen Arbeiten mit REpräsentationen funktionaler Zusammenhänge* und der *Diagnose mathematischer KOmpetenzen von Schülerinnen und Schülern* in diesem Bereich. Nachdem in der ersten Projektphase ein theoretisches Kompetenzstrukturmodell entwickelt und erstmals empirisch überprüft wurde (Bruder, Leuders & Wirtz, 2009), wird anhand der daraus gewonnenen Erkenntnisse dieses Modell in der zweiten Phase ergänzt und ebenfalls wieder empirisch untersucht.

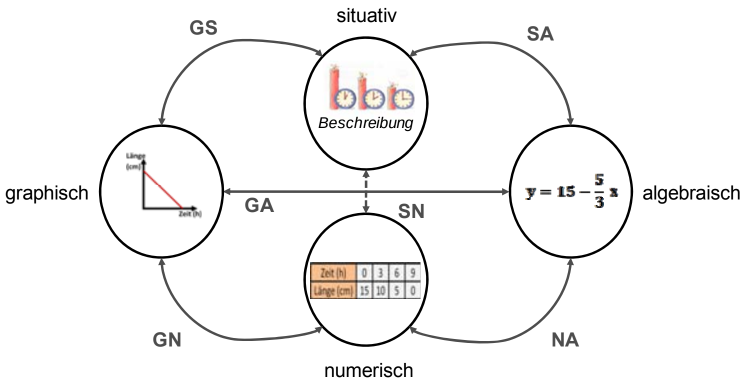
1. Kompetenzmodellierung

Für den erfolgreichen Umgang mit Funktionen zum mathematischen Modellieren und Problemlösen sind ein ganzheitliches Begriffsverständnis sowie das Wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen wichtig. Nach Vollrath (1989) spielen die folgenden drei Aspekte des funktionalen Denkens eine tragende Rolle für das ganzheitliche Verständnis von Funktionen: *Zuordnungsaspekt*, *Kovariationsaspekt* und *Objektaspekt*. Diese drei Aspekte werden durch die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen unterschiedlich gut repräsentiert. Während bei einer Darstellung als Graph alle drei Aspekte erkennbar sind (hier insbesondere der Zuordnungsaspekt), können beispielsweise in einer Wertetabelle zwar Zuordnungs- und Kovariationsaspekt wiedererkannt werden, der Objektaspekt der Funktion ist hierbei jedoch äußerst schwer wiederzufinden, da eine Wertetabelle immer nur einen kleinen Ausschnitt der Funktion darstellen kann. Dagegen ist der Objektaspekt besonders gut in der algebraischen Darstellung über die Funktionsgleichung erkennbar. In Erweiterung der Kompetenzmodellierung in der ersten Phase des Projekts ab der Klassenstufe 7 enthält das erweiterte Kompetenzstrukturmodell der zweiten Phase

[1] Diese Veröffentlichung wurde ermöglicht durch eine Sachbeihilfe der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Kennzeichen: LE 2335/1-1) im Schwerpunktprogramm „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ (SPP 1293).

auch die algebraische Darstellung mit den relevanten Darstellungswechseln.

Folgende Darstellungen werden im Projekt HEUREKO betrachtet: *Graph (G), Wertetabelle (N – numerisch), Funktionsgleichung (A – algebraisch)* und *Situationsbeschreibung (S)*. Die verschiedenen Darstellungswechsel bilden in dem postulierten Kompetenzstrukturmodell (siehe Abb. 1) die unterschiedlichen Dimensionen.



untersuchte Darstellungswechsel:

- GS – graphisch-algebraisch
- GN – graphisch-numerisch
- GS – graphisch-situativ
- NA – numerisch-algebraisch
- SA – situativ-algebraisch

Abbildung 1 Kompetenzmodell (Darmstadt, 2. Phase)

Ziel der Studie ist zunächst die empirische Untersuchung des Kompetenzstrukturmodells. Langfristig ist geplant, ein Diagnose-Instrument für den Einsatz im Mathematikunterricht zu entwickeln, um Lehrkräften die Möglichkeit zu geben, den aktuellen Stand sowie spezifische Stärken und Schwächen ihrer Schülerinnen und Schüler[2] festzustellen.

2. Aufgabenkonstruktion

Für die empirische Untersuchung wurden insgesamt 278 mathematische Aufgaben konstruiert. Um dabei eine gewisse Bandbreite an unterschiedlichen Aufgabenschwierigkeiten zu gewährleisten, wurden unterschiedliche Handlungsanforderungen eingeführt (Bruder & Brückner, 1989). Aufgaben können damit sowohl einem Darstellungswechsel sowie einer der folgenden vier Handlungsanforderungen zugeordnet werden: Identifizieren, Realisieren, Erklären – Beschreiben oder Erklären – Argumentieren.

In einer Pilotierung an zwei Gymnasien (N=87) wurden 168 der konstruierten Aufgaben stellvertretend untersucht. Die Schüler wurden zu den Aufgaben sowie ihren Vorgehensweisen befragt um Schwierigkeiten und Probleme festzustellen. Die Aufgaben wurden daraufhin für die Hauptstudie

[2] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im Folgenden der Begriff Schüler benutzt. Damit sind sowohl Schülerinnen als auch Schüler gemeint.

überarbeitet. Auf diese Weise konnten ungewollte Schwierigkeitsfaktoren (wie z.B. den Schülern unbekannte Begriffe) ausgeschlossen werden.

3. Durchführung der empirischen Studie

An der Studie nahmen 9. und 10. Klassen von 8 Gymnasien aus dem Raum Südhessen teil. Die von uns eingesetzten Instrumente umfassten einen im Vorfeld eingesetzten Schülerfragebogen sowie einen Grundwissentest, einen Lehrerfragebogen und den Haupttest. Die Stichprobe des Haupttests bestand aus N=645 Schülern.

4. Erste Ergebnisse

Im Mittel bearbeiteten die Schüler 19,31 Aufgaben. Davon lösten sie im Durchschnitt 7,62 Aufgaben richtig. Die Leistung der 9. Klassen unterschied sich dabei nicht signifikant von der Leistung der 10. Klassen. Betrachtet man die in den Aufgaben geforderten Darstellungswechsel so zeigen sich bezüglich der Lösungsrate (Anzahl der Schüler, die die Aufgabe gelöst haben im Verhältnis zur Anzahl der Schüler, die diese bearbeitet haben) zwar Unterschiede, diese sind jedoch relativ gering (siehe Tabelle 1). Eine relativ hohe Streuung zeigt, dass eine hohe Breite an Schwierigkeitsgraden erreicht werden konnte.

Darstellungswechsel	mittlere Lösungsrate & Streuung s
GN	48% (s=25,04)
GS	41% (s=22,54)
GA	38% (s=19,1)
SA	34% (s=24,55)
NA	33% (s=19,27)

Tabelle 1

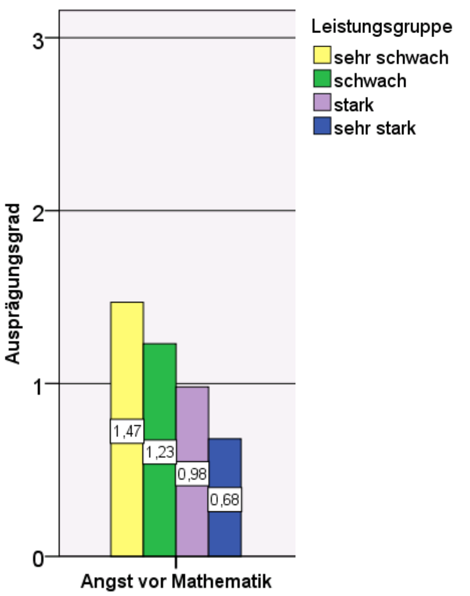


Abbildung 2 SFB-Skala Angst vor Mathematik im Zusammenhang mit der Testleistung

Der eingesetzte Schülerfragebogen beinhaltete 52 Fragen zu Lerngewohnheiten und zur Einstellung zum Mathematikunterricht. Zusammenhänge mit der erreichten Testleistung (hier als die individuelle Lösungsrate = *gelöste Aufgaben / bearbeitete Aufgaben* definiert) lassen sich bei verschiedenen, im Schülerfragebogen erfassten, Skalen erkennen. Besonders auffällig ist hierbei die Skala *Angst vor Mathematik*. Schüler mit einer schwachen Testleistung zeigen eine signifikant höhere Ausprägung auf dieser Skala als Schüler mit einer starken Testleistung (siehe Abb. 2). Weiterhin auffällig sind die empfundene Kompetenzunterstützung von Seiten der Lehrkraft (leistungsstarke Schüler

fühlen sich signifikant besser unterstützt), die Selbstwirksamkeit (leistungsstarke Schüler haben eine signifikant höhere Ausprägung) sowie die Anwendung von Wiederholungsstrategien beim Lernen (diese werden signifikant häufiger von leistungsschwachen Schüler genutzt).
Um zu ermitteln, ob die Schüler über die nötigen Grundkompetenzen im Umgang mit Funktionen verfügen, wurde im Vorfeld ein Grundwissentest mit 15 Aufgaben eingesetzt. Von diesen lösten die Schüler im Mittel 9,24 Aufgaben richtig. Die Ergebnisse des Grundwissentests spiegeln Schwierigkeiten der Schüler im Haupttest wider. So wurden beispielsweise kontexthaltige Aufgaben von weniger Schülern richtig gelöst als andere Aufgaben. Auffällig ist, dass die Schüler Schwierigkeiten hatten, anhand eines vorgegebenen Graphen die Steigung zu ermitteln. Kaum Schwierigkeiten machte ihnen dagegen die Aufgabe, anhand einer graphischen Darstellung im Koordinatensystem zu entscheiden, ob es sich um eine Funktion handelt oder nicht. Es zeigte sich außerdem ein signifikanter Zusammenhang zwischen der Leistung im Grundwissentest und der Leistung im Haupttest.

5. Ausblick

Um das Kompetenzstrukturmodell empirisch zu überprüfen ist geplant, ein Einparameter-Logistisches Modell (1PL-Modell) nach Rasch zugrunde zu legen. Dafür wird ein Modellvergleich durchgeführt, bei dem berechnet wird, inwiefern die empirisch ermittelten Daten zum postulierten Modell passen oder inwiefern verschiedene Alternativmodelle die Daten besser erklären können. Verglichen werden das 5-dimensionale postulierte Modell, ein 1-dimensionales Modell und verschiedene 2-dimensionale Modelle. Diese Modellüberprüfung wird mittels der Software *ConQuest* und *MPlus* durchgeführt. Desweiteren werden in Hinblick auf das geplante Diagnose-Instrument in einem nächsten Schritt ungeeignete Aufgaben identifiziert. Weitere Auswertungen betreffen die Lehrerbefragungen und könnten Aufschluss geben über Zusammenhänge von Testleistung und Lehrbuch, Bekanntheitsgrad der Aufgaben sowie Zeitpunkt der Unterrichtung.

Literatur

Bruder, R. & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht – ein allgemeiner Ansatz. In: Pädagogische Forschung, Berlin 30 (1989) 6, 72-82.

Vollrath, H. J. (1989). Funktionales Denken, Journal für Mathematikdidaktik, (10), 3-37.

Bruder, R., Leuders, T., & Wirtz, M. (2009). Ein diagnostisches Kompetenzstrukturmodell für ein heuristisches Arbeiten mit Repräsentationen von Funktionen und seine empirische Überprüfung. In: M. Neubrand (Ed.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2009 (pp. 485–488). Münster: WTM Verlag.

Anja FRIED, Hildesheim

Mathematische Grundbildung in niedersächsischen Kindertageseinrichtungen – Ein Blick in die Praxis

Seit der Einführung des Orientierungsplanes für niedersächsische Kindertageseinrichtungen stehen die Erzieherinnen und Erzieher vor der Forderung der Umsetzung des Bildungsauftrages. Die einzelnen Lernfelder und Erfahrungsbereiche müssen mit in den Alltag der Einrichtungen eingebracht werden. Innerhalb der Fragebogenstudie Mathematische Erfahrungen im Kindergarten (MEiK) konnten sich die Erzieherinnen und Erzieher zu dieser Thematik speziell dem mathematischen Bereich äußern.

1. Projektdesign der Studie Mathematische Erfahrungen im Kindergarten

Das Ziel des Projekts ist die Erfassung subjektiver Einschätzungen von Erzieherinnen und Erzieher zur Situation der mathematischen Bildung im Kindergarten. Dieser Blick in die Praxis ist notwendig, wenn das Fort-, Weiter- und Ausbildungsangebot den Bedürfnissen des Fachpersonals angepasst ausgerichtet sein soll. Das Projekt ist als Fragebogenstudie für das Jahr 2010 angelegt. Dabei stehen die Voraussetzungen, Möglichkeiten, Einstellungen und Interessen zum Thema Mathematik und Mathematik im Kindergarten einerseits und die mathematische Umgebungsgestaltung andererseits im Mittelpunkt der Betrachtung.

Der Fragebogen ist in Anlehnung an die *Begleitstudie zur Umsetzung des „Orientierungsplans " in Niedersachsen* von Honig, Schreiber und Netzer (vgl. Honig et al. 2006) entstanden. Er ist in drei Teile gegliedert mit Fragen zur allgemeinen Situation, Mathematik und statistischen Angaben. Um eine Evaluation des Instruments durchzuführen, fand im März/April 2010 im nördlichen Sachsen-Anhalt (außerhalb von Niedersachsen, um die Stichprobe „rein" zu halten) eine Pilotstudie[1] statt. Im Herbst 2010 wurden dann 601 Einrichtungen in Niedersachsen angeschrieben, von denen insgesamt 367 Antworten vorliegen.

2. Deskriptive Ergebnisse

Bei der Betrachtung der Institution Kindertageseinrichtung gilt es die Rahmenbedingungen im Blick zu behalten, um die Einschätzungen der Erzie-

[1] Die inhaltliche Auswertung erscheint im Onlinemagazin des Forums Fachdidaktische Forschung im Lauf des Jahres 2011. Siehe http://www.uni-hildesheim.de/index.php?id=2580

herinnen und Erzieher in einen Gesamtkontext setzen zu können. Die untenstehende Grafik zeigt das Spektrum von den einrichtungsbezogenen stabilen Parametern über die gesetzlichen Vorgaben bis zur Person der Erzieherin bzw. des Erziehers. Diese Faktoren wirken auf unterschiedliche Art und Weise auf die Institution und die Umsetzung des Orientierungsplans ein.

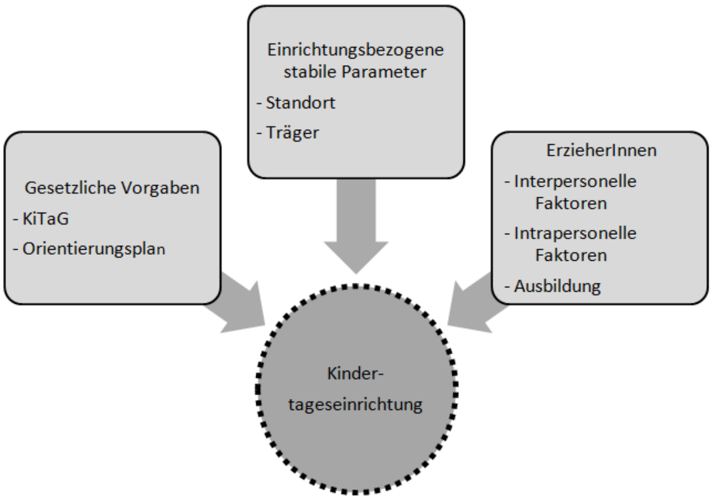


Abb. 1 Übersicht der Rahmenfaktoren der Institution Kindertageseinrichtung

Bei der Betrachtung erster deskriptiver Ergebnisse der Studie MEiK wird deutlich, dass die Einschätzung der Fachkräfte in Bezug auf die Veränderung der pädagogischen Arbeit seit der Einführung des Orientierungsplanes als unverändert (39%) bis etwas verbessert (41,4%) ausfällt. Die Einschätzung „unverändert" stellt nicht unbedingt einen negativen Aspekt dar, da immerhin 43,4% (entspricht 17,6% der Grundgesamtheit) von diesen Einrichtungen angeben, sich stark am Orientierungsplan zu orientieren. Das Fachpersonal könnte der Meinung sein, sie hätten vor der Einführung des Bildungsplanes schon die dort geforderte pädagogische Arbeit geleistet.

Bei der Bewertung der Rahmenbedingungen lassen sich zwei Arten unterscheiden: jene Bedingungen, die in irgendeiner Weise von den Erzieherinnen und Erziehern beeinflusst werden können und diejenigen, die von „außen" vorgegeben sind. Zu ersteren zählen die Ausbildung der Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter, das Material und die Zusammenarbeit mit den Eltern und den Lehrkräften. Diese wurden positiv bewertet und lagen im guten Bereich. Zu den äußeren Bedingungen gehören die Zeit, die Gruppengröße, die räumlichen Bedingungen und die Anzahl der Erzieherinnen und Erzieher pro Gruppe. Innerhalb der Begleitstudie von Honig, Schreiber und Netzer wurden die Faktoren Zeit, Gruppengröße und räumliche Gegebenheiten als nicht signifikante Faktoren zur Rezipierung des Orientierungsplanes identifiziert (vgl. Honig et al. 2006). Mit der Einführung der Begriffe „mittelbare pädagogische Arbeit“ und „Fachkraft-Kind-Relation“ durch die Studie *Schlüssel zu guter Bildung, Erziehung und Betreuung* von Viernickel und Schwarz scheint eine Erklärung für diese schlechte Bewertung möglich. Zur mittelbaren pädagogischen Arbeit zählen die Aufgaben, die unmittelbar zur Bildungsarbeit gehörten, wie Dokumentationen, Elternarbeit, Zusammenarbeit mit Lehrkräften usw., die aber nicht in direktem Kontakt mit dem Kind stattfinden. Daraus resultiert letztlich die Fachkraft-Kind-Relation, die aus Sicht der Erzieherinnen und Erzieher subjektiv negativ angesehen wird (vgl. Viernickel und Schwarz 2009).

Im Bereich der Fortbildungen lassen sich drei thematische Schwerpunkte erkennen: Sprache und Sprechen (85,2%), Beobachtung und Dokumentation (81,3%) und die Zusammenarbeit mit der Grundschule (80,5%). Dies sind drei der Themen[2], die von Viernickel und Schwarz als bedeutsam aus allen Bildungsplänen herausgefiltert wurden (vgl. Viernickel 2010). Die mathematische Grundbildung liegt eher im Mittelfeld und wurde von 63,7% besucht. Immerhin 30,1% gaben dieses Thema als Fortbildungswunsch an.

Bei der Äußerung zur Einstellung zur Mathematik ließ sich eine deutliche Ablehnung folgender Aussagen erkennen: „Mathematische Bildung …

- hat im Kindergarten nichts zu suchen.“ (92,1%)
- im Kindergarten ist überflüssig.“ (80,7%)
- zieht schulische Inhalte in die Kindergartenzeit.“ (52,6%)

Das letzte Item kann aus Sicht der Erzieherinnen und Erzieher in zwei Richtungen interpretiert werden: Einerseits grenzt sich der Kindergarten von der Grundschule ab und möchte keine Inhalte der Schule übernehmen. Andererseits könnten einige Fachkräfte mit Stolz angeben, dass sie „schon“ schulische Inhalte im Kindergarten behandeln.

Tendenzen der Zustimmung zeigten sich bei den Aussagen, dass Mathematik im Kindergarten Auswirkungen auf den Schulerfolg im Fach Mathematik hat und dass Mathematik sowieso schon im Kindergarten passiert.

Zur Einschätzung des Maßes an Förderung der mathematischen Grundbildung wurde im Fragebogenteil zur Mathematik im Kindergarten eine Frage doppelt gestellt: Erst als Spontanantwort am Anfang und nach einem gewissen Selbstreflexionsprozess durch die Fragen zur Mathematik in der jeweiligen Einrichtung am Ende. Die Hypothese bestand, dass den Erziehe-

[2] Die anderen zwei waren Zusammenarbeit mit den Familien und Qualitätsentwicklung und –sicherung.

rinnen und Erziehern nicht bewusst ist, wie viel Mathematik in ihrem Kindergartenalltag vorkommt und sie deshalb am Ende eine stärkere Förderung angeben. Insgesamt hat sich gezeigt, dass es hier kaum zu Unterschieden kommt. Demnach kann das Fachpersonal seine Arbeit sehr gut einschätzen. Weiterhin wird deutlich, dass die Hälfte aller Einrichtungen angeben, die mathematische Grundbildung stark zu fördern. Auf die Frage wie diese Förderung stattfindet, liegen die Antworten *Aufgreifen von Alltagssituationen*[3]*, die Förderung des letzten Kindergartenjahres* und *das Aufgreifen der Mathematik in anderen Projekten* in der Bewertung vorn. Eine deutliche Ablehnung erhalten die mathematischen Förderprogramme (Lehrgänge) mit 53,1%.

3. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend zeigt sich demnach, dass der Orientierungsplan mit seinen Veränderungen Einzug in die Kindertagesstätten nimmt und eine Auseinandersetzung stattfindet. Die mathematische Bildung scheint nach Aussagen der Erzieherinnen und Erzieher in irgendeiner Weise vorhanden zu sein. Über die objektive Qualität dieser lässt sich innerhalb der Studie keine Aussage treffen. Mit diesen subjektiven Erkenntnissen werden allerdings die Empfindungen des Fachpersonals erfasst. Denn diese müssen mit den wachsenden Anforderungen umgehen und diese erfüllen. Letztlich soll dies der Ausgangspunkt für die Gestaltung eines Fortbildungsprogrammes sein, das eben genau an diese Bedürfnisse anknüpft.

Literatur

Honig, Michael-Sebastian; Netzer, Kristiana; Schreiber, Norbert (2006): Begleitstudie zur Umsetzung des „Orientierungsplans für Bildung und Erziehung im Elementarbereich niedersächsischer Tageseinrichtungen für Kinder". Ergebnisse der Leitungsbefragung. Trier. Online verfügbar unter: http://www.mk.niedersachsen.de/live/live.php?navigation_id=25428&article_id=86998&_psmand=8, zuletzt geprüft am 16.12.2010.

Viernickel, Susanne (2010): Die Fachkraft-Kind-Relation. In: nifbe (Hg.): Starke Kitas - starke Kinder. Wie die Umsetzung der Bildungspläne gelingt. Unter Mitarbeit von Hilmar Hoffmann, Ursula Rabe-Kleberg, Susanne Viernickel, Ilse Wehrmann und Renate Zimmer. Freiburg, Br, Basel, Wien: Herder, S. 61–73.

Viernickel, Susanne; Schwarz, Stefanie (2009): Schlüssel zu guter Bildung, Erziehung und Betreuung. Wissenschaftliche Parameter zur Bestimmung der pädagogischen Fachkraft-Kind-Relation. Berlin. Online verfügbar unter: http://www.gew.de/Binaries/Binary47887/expertise_gute_betreuung_web.pdf, zuletzt geprüft am 16.02.2011.

[3] Die Auswertung der offenen Frage, welche Alltagssituationen das sind, liegt noch nicht vor.

Daniel FRISCHEMEIER, Rolf BIEHLER, Paderborn

Spielerisches Erlernen von Datenanalyse mit der Software TinkerPlots - Ergebnisse einer Pilotstudie

Einführung

TinkerPlots™ ist eine in den USA entwickelte, dynamische Datenanalyse- und Simulationssoftware, die für den Stochastikunterricht in den Klassen 3-8 vorgesehen ist (Biehler, 2007). Im Folgenden wird von einer Pilotstudie zum Einsatz der Software in einem fachdidaktischen Seminar an der Universität Paderborn berichtet.

Das Seminar „Leitidee Daten und Zufall in Klasse 3-8“

Das Seminar „Leitidee Daten und Zufall in Klasse 3-8“ wurde im Wintersemester 2010/2011 an der Universität Paderborn für Studierende des Lehramts Mathematik für Grund-, Haupt-, Real,- und Gesamtschulen angeboten und umfasste nach einer Einführungsveranstaltung in der ersten Semesterwoche unter anderem drei Sitzungen zur Datenanalyse, welche mit der Betaversion der bisher unveröffentlichten Version TinkerPlots 2.0 durchgeführt wurden. In diesen sollte untersucht werden, inwieweit eine tiefergehende, komplexe Analyse eines Datensatzes mit der Software TinkerPlots nach einer kurzen Einführung möglich ist. Nach dieser Einführung in der ersten und einigen selbstständig bearbeiteten Aufgaben in der zweiten Sitzung haben die Teilnehmer in der dritten und letzten Sitzung eine umfangreiche Projektaufgabe bearbeitet. Die Bearbeitungen dieser Projektaufgabe wurden anhand von Camtasia-Mitschnitten, Mitschriften und TinkerPlots-Graphiken analysiert.

Die drei Sitzungen zur Datenanalyse mit TinkerPlots

Die erste Sitzung des Seminars sah eine Einführung der Teilnehmer in die Software TinkerPlots nach dem Vorbild der TinkerPlots-Movies der US-Entwickler (Konold, 2007) vor. Dabei wurden die wesentlichen Elemente der Software vom Dozenten vorgestellt und von den Teilnehmern simultan am Computer nachvollzogen. Nach jeder Aktivität konnten die Teilnehmer Aufgaben bearbeiten, um ihre bis dahin gewonnen Fähigkeiten zu prüfen und zu festigen. In der zweiten Sitzung stand die Bearbeitung von Aufgaben mit TinkerPlots im Vordergrund. In Partnerarbeit haben die Teilnehmer einen Gruppenvergleich durchgeführt und die dort entstandenen Graphiken im Plenum diskutiert. Hierdurch sollten normativ Einsichten in die Leistungsfähigkeit der unterschiedlichen Graphiktypen für die Datenanalyse erarbeitet werden. Die dritte Sitzung sah als Abschluss der Datenanalysesitzung die Bearbeitung von Projektaufgaben vor. Dabei sollten die Teilnehmer Fragestellungen zum Freizeitverhalten von Jugendlichen, wie zum Beispiel „Telefonierverhalten von Jugendlichen“ im Datensatz MUFFINS (Biehler, Kombrink & Schweynoch, 2003) untersuchen und ihre Erkenntnisse in einem Report niederschreiben. Insgesamt beinhaltete die Projektaufgabe die Bearbeitung von fünf unterschiedlichen Fragestellungen sowie das Verfassen eines zusammenfassenden Reports. Als Unterstützung bekamen die Teilnehmer strukturelle Vorgaben beim Verfassen eines Reports. Die Bearbeitung der Projektaufgaben erfolgte in Partnerarbeit und wurde mit Camtasia videographiert.

Erste Ergebnisse der Pilotstudie

Die mit Camtasia aufgezeichneten Bildschirmaktivitäten, die Kommunikation untereinander sowie die in Word verfassten Reports wurden anhand von zwei zentralen Fragestellungen ausgewertet: Zum einen sollte untersucht werden, welche Graphiken in TinkerPlots erstellt und welche Features von TinkerPlots benutzt wurden, zum anderen wie die Teilnehmer den jeweiligen Report erstellt haben. Für ersteres wurde das Schema von Fitzallen und Watson (2010) übernommen und leicht modifiziert. Der folgenden Tabelle (Abb. 1) kann entnommen werden, welche Graphiken die Teilnehmer bei der Bearbeitung ihrer Projektaufgaben erstellt haben.

Team	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Kreisdiagramm (K) Histogramm (H)	H	---	---	---	---	---	K	---	K, H
Mittelwert (Mod, Med, Ari)	Ari	Ari	Med, Ari	Med, Ari	Ari	Med	Mod, Ari	Ari	---
Hatplot (H), Boxplot (B)	---	---	B	B	---	---	---	---	H
Dividers	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Reference Lines	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Abbildung 1. Verwendete Reportgraphiken der einzelnen Gruppen (G)

Es wird ersichtlich, dass nur drei von neun Zweierteams beim Gruppenvergleich einer kategorialen mit einer numerischen Variablen einen Hatplot (Vorstufe eines Boxplots) oder einen Boxplot benutzt haben. Dieses ist aus zweierlei Hinsicht verwunderlich. Zum einen haben die Teilnehmer den Boxplot als Instrument für einen Gruppenvergleich bereits in der Veranstaltung „Elemente der Stochastik“ kennen gelernt, zum anderen wurde der Boxplot in der vorherigen Sitzung während der Diskussion noch als besonders geeignete Graphik hervorgehoben. Hiermit werden andere Studien bestätigt, die Schwierigkeiten mit den Boxplots und eine Neigung, eher andere Darstellungen zu benutzen, zeigen (Bakker et al., 2005). Ebenfalls auffällig ist, dass bei der Untersuchung eines Zusammenhangs zweier numerischer Variablen (nicht in der Tabelle enthalten) von keinem Teilnehmer ein

Streudiagramm benutzt wurde, obwohl auch dieses schon vorher als geeignete Darstellung bekannt war. Eine weitere interessante Beobachtung ist die Verwendung der sogenannten Value Bars („Wertebalken“) bei der Erstellung von Graphiken. Beispielsweise benutzt ein Team die untenstehende Graphik (Abb.2) um eine Aussage zur geschlechter-differenzierten Computernutzung (Variable Zeit_Comp) zu machen. Die mit den Value Bars erzeugte Graphik könnte wesentlich verbessert werden. Die Teilnehmer selbst argumentieren in ihrem Report nicht mit der Graphik sondern nur mit dem arithmetischen Mittel. Monteiro et al. (2010) haben ähnliche Entdeckungen gemacht, als sie die Software mit Referendaren erprobt haben. Weiterhin haben wir die Reports ausgewertet. Als Hilfestellung bekamen die Teilnehmer ein Schema mit den wichtigsten Komponenten eines Reports. Um die Reports zu analysieren, wurden die Kriterien von Heckl (2004) benutzt und entsprechend modifiziert. Die Auswertung der einzelnen Fragestellungen (die Projektaufgabe bestand aus fünf Fragestellungen) anhand dieser Kriterien zeigt, dass in sechs Reports die Graphik zur Fragestellung 1 geeignet beschrieben und erläutert wurde. Bei den Fragestellungen 2 und 3 wurden diese nur unzureichend erklärt: vier von neun Teams haben die Graphik zur Fragestellung2, zwei von neun Teams haben die Graphik zur Fragestellung3 ausreichend erklärt. Insgesamt haben sechs von neun Teams die Fragestellung1 im Report zufriedenstellend bearbeitet. Bei den Fragestellungen 2 und 3 ist der Trend rückläufig, denn bei der Fragestellung 2 waren es noch fünf von neun, bei der Fragestellung 3 nur noch vier von neun Teams, die die Fragestellung entsprechend berücksichtigt haben. Die Fragestellungen 4 und 5 wurden aus Zeitmangel von keinem Team bearbeitet. Insgesamt geben die Auswertungen folgenden Überblick über die von den Teilnehmern verfassten Reports: Jeder Report enthält eine Einleitung und zu jeder bearbeiteten Fragestellung wurde auch eine Graphik erstellt. Eine weitere generelle Auffälligkeit ist, dass keines der Teams die Untersuchung mit einer Hypothese beginnt und dass keines der Teams die Graphiken interpretiert, obwohl dies als wichtige Komponente eines Reports vorgegeben wurde. Alles in allem scheint der Grund für die Schwierigkeiten bei der Reporterstellung zum einen die für einige Teilnehmer ungewohnte und wenig eingeübte Aufgabe, zum anderen aber auch die teils zu knappen Zeitvorgaben, wie die Ausgangsbefragung am Ende des Seminars enthüllt, zu sein. In der Ausgangs-

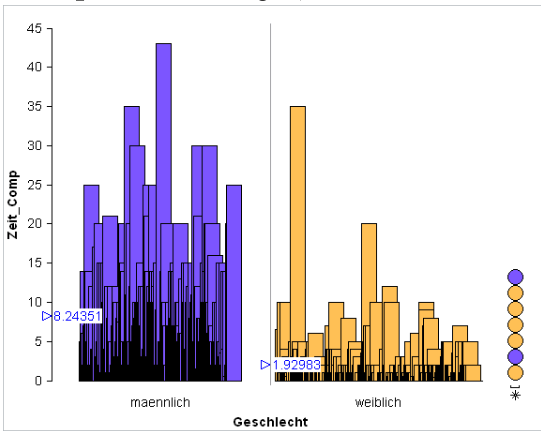


Abbildung 2. Reportgraphik mit Value Bars

befragung zum Seminar kritisierten die Teilnehmer neben den engen Zeitvorgaben auch zu wenig Feedback zu den Aufgabenbearbeitungen im Seminar, sowie bei den Hausaufgaben. Auch die Diskussion in der zweiten Sitzung, in der geeignete und aussagekräftige Graphiken diskutiert worden sind, wurde nicht ausreichend, weil nur mündlich, vertieft. Die Erstellung und Beurteilung aussagekräftiger Graphiken und somit auch die Bearbeitung der Aufgaben fiel den meisten Teilnehmern schwer.

Ausblick

Im kommenden Wintersemester WS 2011/2012 soll erneut ein Seminar zur Datenanalyse mit TinkerPlots an der Universität Paderborn angeboten werden. Dieses soll aufgrund der in der Pilotstudie gemachten Erfahrungen konzipiert und entsprechend weiterentwickelt werden. In diesem sollen Schwachpunkte wie mangelndes Feedback oder mangelnde Zeit behoben und den Teilnehmer mehr Unterstützung bei den Aktivitäten geboten werden. In einzelnen Aktivitäten sollen die Teilnehmer dann auch im Verfassen eines Reports unterstützt werden. Außerdem sollen die Projektaufgaben über einen längeren Zeitraum bearbeitet werden.

Software

TinkerPlots™.1.0 Cliff Konold et al. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

TinkerPlots™.2.0 Beta. Cliff Konold et al., Amherst: University of Massachusetts

Literatur

Bakker, A., Biehler, R., & Konold, C. (2005). Should young students learn about box plots? In G. Burrill & M. Camden (Hrsg.), Curricular Development in Statistics Education: International Association for Statistical Education (IASE) Roundtable, Lund, Sweden, 28.6.-3.7.2004 [www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php] (S. 163-173). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Biehler, R. (2007). TINKERPLOTS: Eine Software zur Förderung der Datenkompetenz in Primar- und früher Sekundarstufe. Stochastik in der Schule, 27(3), 34-42.

Biehler, R., Kombrink, K., & Schweynoch, S. (2003). MUFFINS – Statistik mit komplexen Datensätzen – Freizeitgestaltung und Mediennutzung von Jugendlichen. Stochastik in der Schule, 23(1), 11-25.

Fitzallen, N., Watson, J. (2010). Developing statistical reasoning facilitated by TinkerPlots. In Reading, C. (ed). Proc. of ICoTS 8, Ljubljana, July 2010. Voorburg: IASE

Heckl, R. (2004). Die Bewertung von Projektarbeiten zur Explorativen Datenanalyse in der schulischen und universitären Ausbildung. Examensarbeit, Universität Kassel.

Konold, C. (2007). Designing a data analysis tool for learners. In: Lovett, M.C., Shah, P. (Hrsg.), Thinking with data (S. 267-292). New York: Lawrence Erlbaum

Monteiro, C., A. Asseker, et al. (2010). Student teachers developing their knowledge about data handling using TinkerPlots. Proceedings of ICoTS 8, Ljubljana, July 2010. Voorburg: IASE (CD-ROM)

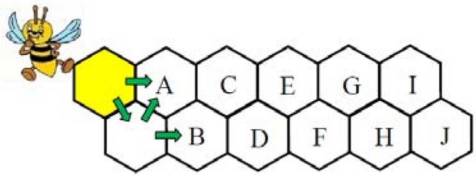
Torsten FRITZLAR, Halle an der Saale

Zum Beweisbedürfnis im jungen Schulalter

Das Beweisen oder argumentierende Begründen – zumindest an dieser Stelle möchte ich dazwischen nicht unterscheiden (vgl. Ambrus, 1992) – hat für die Mathematik und den Mathematikunterricht eine enorme Bedeutung, weshalb an der Entwicklung entsprechender Fähigkeiten und Bereitschaften bereits von der ersten Klasse an gearbeitet werden sollte (z. B. Rehm, 1992; Winter, 1983). Ein wichtiges Ziel ist dabei die Ausbildung eines Beweisbedürfnisses: Die Lernenden sollen zum einen erkennen und anerkennen, dass mathematische Aussagen auf „fachmathematische Art" bewiesen werden müssen (objektives Beweisbedürfnis) und zum anderen einen persönlichen Drang entwickeln, einen Beweis zu finden oder zu erfahren (subjektives Beweisbedürfnis) (Winter, 1983). Aus verschiedenen Untersuchungen weiß man allerdings, dass das Beweisbedürfnis bei jungen Mathematiklernenden in der Regel nur sehr gering ausgeprägt ist (z. B. Bezold, 2008; Steinweg, 2001).

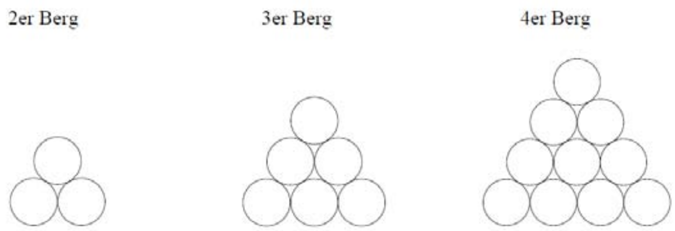
Zur Beschreibung mathematischer Begabungen gibt es verschiedene fachdidaktische Ansätze. Im Modell von Käpnick und Fuchs zur Entwicklung mathematischer Begabungen im Grundschulalter und darüber hinaus (Fritzlar et al., 2006) finden sich keine Hinweise zu besonderen argumentativen Fähigkeiten oder zu einem stärker ausgeprägten Beweisbedürfnis, im Modell von Heinze wird dagegen das „Bedürfnis nach plausiblen, mathematischen Erklärungen und Streben nach Erkenntnissen" als Merkmal eines mathematischen Talents im Grundschulalter benannt (Heinze, 2005, S. 39).

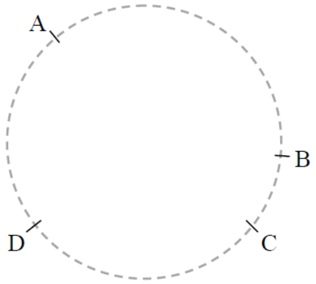
Das bisher Skizzierte motivierte mich, in einer Fallstudie nach möglichen Unterschieden hinsichtlich des Beweisbedürfnisses zu suchen zwischen nicht ausgewählten Lernenden und Schülerinnen und Schülern, die aufgrund eines mathematikspezifischen Tests als mathematisch begabt oder zumindest sehr leistungsstark gelten. In diesem Rahmen wurde in verschiedenen regulären Klassen der dritten, vierten und fünften Jahrgangsstufe, in Fördergruppen für mathematisch interessierte oder begabte Dritt- und Viertklässler sowie in den fünften Klassen eines Spezialgymnasiums mit mathematisch – naturwissenschaftlicher Schwerpunktsetzung ein zweistündiger Unterrichtsversuch durchgeführt. In jeder Gruppe wurden vier Problemstellungen eingesetzt, bei deren Bearbeitung auch jüngere Lernende schnell Zahlenmuster konstruieren können, die einfach zu beschreiben und durch Rückgriff auf den durchschaubaren Entstehungsprozess leicht zu begründen sind. Die jeweils zu bearbeitenden Situationen und einführenden Fragen zeigt die Abbildung auf der folgenden Seite.



Eine Biene läuft über ihre Waben. Sie beginnt ganz links und bewegt sich immer nach rechts: genau nach rechts, nach rechts oben oder nach rechts unten.
Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann die Biene die Waben A, B, C, D, … erreichen?

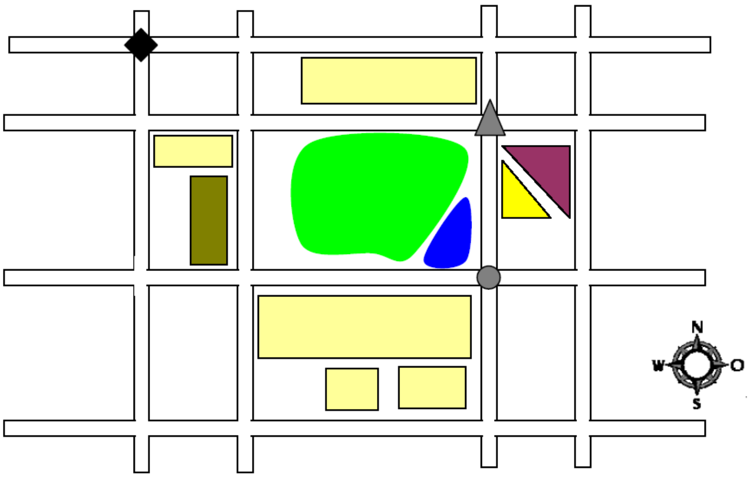
Ein Wanderer möchte von der Bergspitze auf dem kürzesten Weg nach unten laufen. Dort wo sich die Kreise berühren, darf er von Kreis zu Kreis wandern.
Wie viele verschiedene Wege gibt es bei den abgebildeten Bergen jeweils?





Auf einem Kreis wurden vier beliebige Punkte ausgewählt. Wie viele Linien werden benötigt, um jeden dieser Punkte mit jedem anderen zu verbinden?

Johannes verbringt den Urlaub mit seinen Eltern in einer amerikanischen Großstadt. Die Abbildung zeigt einen kleinen Ausschnitt aus dem Stadtplan. Die Straßen bilden in diesem Stadtviertel ein rechteckiges Muster.
Johannes befindet sich auf der Kreuzung, die mit dem schwarzen Quadrat gekennzeichnet ist.
Er möchte zur Kreuzung mit dem grauen Dreieck, denn dort ist das Hotel.
Wie viele Wege kann Johannes nehmen, wenn er keinen Umweg gehen will?



Begonnen wurde stets mit den „Bienenwaben“. Bei der Auseinandersetzung damit konstruierten die Lernenden in allen Gruppen verschiedene Zahlenmuster, die zu unterschiedlichen Fortsetzungsmöglichkeiten (12 oder 13 Wege in die Wabe F) führten.

Zur Entscheidungsfindung hinsichtlich der Anzahl der Wege in die Wabe F schlugen die Schüler(innen) neben dem aufwändigen und fehleranfälligen Probieren zunächst oft eine „demokratische Abstimmung“ oder die leichtere Verständlichkeit eines Musters als Kriterium vor. In einem anschließenden Unterrichtsgespräch wurde das diesbezügliche Potenzial einer begründenden Argumentation beispielsweise ausgehend vom Entstehungsprozess der Zahlenfolge herausgearbeitet und so die Suche nach einer Begründung für die Allgemeingültigkeit eines Musters für die Lernenden nach Möglichkeit sinnvoll gemacht. In der Tat konnte auch in allen Schülergruppen eine Begründung für das Fibonacci-Muster – gelegentlich mit leichter Unterstützung durch die Lehrperson – gefunden werden.
Im Anschluss wählten die Schüler(innen) weitere Problemstellungen zur Bearbeitung aus, wobei sie jeweils ein Muster in den Anzahlfolgen konstruieren und begründen sollten, warum dieses auch für hohe Berge, viele Punkte auf dem Kreis bzw. weit entfernte Kreuzungen gilt. Mich interessierte insbesondere: *Lassen sich zwischen den Schülergruppen Unterschiede identifizieren hinsichtlich der Begründungen für die Allgemeingültigkeit der Muster,* nachdem anhand der „Bienenwaben“ herausgearbeitet wurde, welche Bedeutung Begründungen in diesem Zusammenhang haben?

An dieser Stelle kann ich lediglich Erfahrungen andeuten, die ich im fünften Jahrgang an einem regulären (zwei Klassen) und einem Spezialgymnasium mit mathematisch – naturwissenschaftlicher Ausrichtung und entsprechendem Aufnahmeverfahren (drei Klassen) sammeln konnte.
In allen Klassen fanden viele Schülerinnen und Schüler bei mehreren der zur Auswahl stehenden Problemstellungen passende Zahlenmuster, auch das vielleicht etwas schwierigere Additionsmuster zu den „kürzesten Wegen“ wurde in allen Klassen gefunden. Eine Begründung für die vermutete Allgemeingültigkeit oder auch nur Begründungsansätze (im mathemati-

schen Sinne) wurden allerdings ausgesprochen selten notiert, in der Regel wurde auf entsprechende Aufforderung das bereits konstruierte Muster noch einmal beschrieben, dessen prinzipielle Fortsetzbarkeit „bis ins Unendliche“ angeführt oder angegeben, dass weitere Beispiele positiv getestet wurden. Und hinsichtlich meiner Fragestellung wesentlich: Zwischen der Gruppe der mathematisch begabten (oder zumindest sehr leistungsstarken) und der Gruppe der nichtausgewählten Lernenden deuteten sich *weder quantitative noch qualitative Unterschiede im Streben nach einer Begründung im mathematischen Sinne* an.

Auch wenn aus dieser Fallstudie aufgrund der geringen Teilnehmerzahl und der Verwendung nur eines Typs von Problemstellungen lediglich erste Eindrücke gewonnen werden können, deutet sich für mich zum einen an, dass auch das Beweisbedürfnis von Lernenden stärker erfahrungs- (statt begabungs-) abhängig sein könnte. Zum anderen können die Ergebnisse auch als weiteres Indiz dafür gesehen werden, dass logische Argumentationen bei jungen Schülerinnen und Schülern nur einen geringen Stellenwert und wenig Überzeugungskraft im Vergleich zu empirischen Daten haben (vgl. Stein, 1999, S. 25).

Literatur

Ambrus, A. (1992). Indirektes Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Bezold, A. (2008). Beweisen – argumentieren – begründen: Entwicklung von Argumentationskompetenz im Mathematikunterricht. Grundschulmagazin, 76 (6), 35 – 40.

Fritzlar, T., Rodeck, K., & Käpnick, F. (2006). Mathe für kleine Asse. 5. / 6. Schuljahr. Berlin: Cornelsen.

Heinze, A. (2005). Lösungsverhalten mathematisch begabter Kinder – aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen. Münster: LIT Verlag.

Rehm, M. (1992). Beweisen und Begründen bereits in der Grundschule? Überlegungen und Beispiele. Mathematik in der Schule, 30 (3), 148 – 155.

Stein, M. (1999). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: logisches Denken und Argumentieren. Journal für Mathematikdidaktik, 20 (1), 3 – 27.

Steinweg, A. S. (2001). Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Münster: LIT Verlag.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. Journal für Mathematikdidaktik, 4 (1), 59 – 95.

Marina FROMME, Karlsruhe

Lösungsstrategien von Kindergartenkindern in Additions- und Subtraktionskontexten

In zahlreichen Untersuchungen wurden arithmetische Vorkenntnisse von Schulanfägerinnen und Schulanfängern[1] empirisch erhoben. In Studien von Selter (1995) und Rinkens (1996) wurden nicht nur Vorkenntnisse zum Zahlbegriff, sondern auch zu Aufgaben in Additions- und Subtraktionskontexten untersucht. Eine gemeinsame Botschaft dieser und weiterer Untersuchungen ist, dass Schulanfänger über „hohe mathematische Kompetenzen“ (Schipper 2002: 119) verfügen. Zu dieser Aussage hat unter anderem Schipper Kritik geäußert. Sie sei in ihrer pauschalen Form nicht haltbar, weil man nicht von allgemein hoher mathematischer Kompetenz sprechen könne, sondern nur von hoher Kompetenz, die sich auf die Bearbeitung kontextgebundener Aufgabenstellungen beziehe (Schipper 2002). Dieser Kritikpunkt bezieht sich auf die Unterscheidung zwischen kontextbezogenen und mathematisch-symbolisch formulierten Aufgabenstellungen.

1. Fragestellung

In Anlehnung an diesen Kritikpunkt wurden im Rahmen einer qualitativen empirischen Studie folgende Fragestellungen untersucht: Welche Rolle spielt der Abstraktionsgrad der Formulierung von Aufgabenstellungen? Können Kinder vor Schuleintritt nur Aufgaben lösen, die im Kontext formuliert werden, oder können sie bereits Aufgabenstellungen bearbeiten, die mathematisch-symbolisch formuliert werden? Ein weiterer Aspekt der Studie ist die Frage nach den Herangehensweisen und Strategien, die die Kinder zur Lösungsfindung verwendet haben. In diesem Zusammenhang wurde auch die Beziehung zwischen den beiden Fragestellungen näher betrachtet. Hat insbesondere der Abstraktionsgrad der Formulierung der Aufgabe Auswirkungen auf den Abstraktionsgrad der Bearbeitungswege?

2. Forschungsdesign und Testinstrument

Im Raum Bielefeld wurden mit 24 Kinder im Alter von 5 bis 6 Jahren 3 Monate vor ihrer Einschulung halbstandardisierte Interviews durchgeführt, die videographiert wurden. Die Schulanfänger bearbeiteten 5 Aufgabenblöcke mit insgesamt 7 Additions- und 7 Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau der Aufgabenstellung.

[1] Im Folgenden wird nur noch die männliche Form für beide Geschlechter verwendet.

Die Aufgabenstellungen des Testinstruments unterscheiden sich sowohl aufgrund ihrer sprachlichen Formulierung in kontextbezogen und mathematisch-symbolisch, als auch durch Anbieten und Entziehen von Material. Als Repräsentantionshilfe wurden in diesem Testinstrument die Bären aus dem Elementarmathematischen Basisinterview (EMBI) (Peter-Koop, 2007) verwendet. Beispiele für die sprachliche Formulierung der Aufgabenstellungen auf den unterschiedlichen Abstraktionsgraden:

Aufgabenblock 1: **7 – 3** „Weißt du schon wie viel sieben *minus* drei ist?“

Aufgabenblock 2: **6 – 2** „Stell mal sechs Bären hin. Wenn man zwei davon *wegnimmt*, wie viele blieben dann noch stehen?“

Aufgabenblock 3: **4 + 2** „Vor mir stehen vier Bären. Wenn ich zwei *dazu tun* würde, wie viele blieben dann noch stehen.“

Aufgabenblock 4: **3 + 4** „Hinter dem Sichtschirm stehen drei Bären. Jetzt *stelle* ich noch vier [diese werden dem Kind gezeigt] *dazu*. Wie viele stehen nun hinter dem Sichtschirm?“

Aufgabenblock 5: **8 – 5** „Hinter dem Sichtschirm stehen acht Bären. Jetzt *nehme* ich fünf davon *weg*. Wie viele stehen nun hinter dem Sichtschirm?“

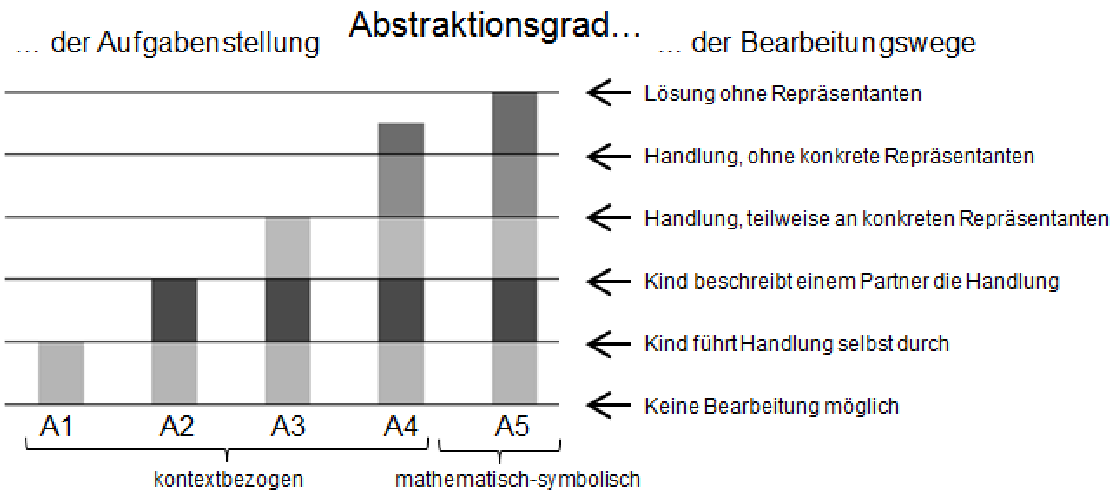


Abb. 1: Abstraktionsgrad der Aufgabenstellung in Bezug zum Abstraktionsgrad der Lösungsmöglichkeiten

Die Einordnung des Abstraktionsgrads der Aufgabenstellung orientiert sich an den nahe liegenden Bearbeitungswegen. Beispielhaft lässt sich das am zweiten Aufgabenblock zeigen (Fragestellung s.o.). Ein typischer Bearbeitungsweg ist das konkrete Nachspielen der Aufgabenstellung. Im vierten Aufgabenblock wird eine Handlung beschrieben, jedoch nur teilweise an konkreten Repräsentanten durch den Interviewer dargestellt. Die EMBI-Bären waren für die Kinder zu diesem Zeitpunkt zwar sichtbar, jedoch nicht mehr durch eigene Handlung veränderbar. Das wurde in dieser Studie als abstraktere Bearbeitung eingestuft als die konkrete Handlung an allen Repräsentanten. Der nahe liegende Lösungsweg für die Kategorisierung der Aufgaben ist nicht zwangsläufig die Bearbeitungsstrategie der Kinder. Ein Kind könnte die Aufgabe 7 – 3 (mathematisch-symbolisch) auf höchstem Grad der Abstraktion verstehen und auf niedrigstem Abstraktionsgrad lösen, durch Abzählen an Material.

3. Ergebnisse

Zur Kategorisierung der Lösungswege wurden *Zählstrategien* (Alleszählen und Weiterzählen) und *Abrufstrategien* unterschieden. Die Schulanfänger wandten jedoch selten reine Zählstrategien zur Lösungsfindung an. Ihre Strategien waren bereits vielfältiger als reine Zählstrategien. Aus diesem Grund wurden die einzelnen Teilschritte im Lösungsprozess näher betrachtet. Daraus bildeten sich zwei weitere Strategiegruppen, die mit *visuellen Strategien* und *Mischstrategien* bezeichnet werden können. Unter visuelle Strategien werden alle Lösungswege gruppiert, die ohne jeden Zählprozess stattfanden, wie z.B. 5 + 2 am Fingerbild zu erkennen, oder auch kleinere Mengen (< 5) von EMBI-Bären simultan zu erfassen. Unter Mischstrategien wurden die Herangehensweisen zusammengefasst, bei denen im Lösungsprozess sowohl gezählt als auch einzelne Teilschritte visuell (simultan) bearbeitet wurden. In der Studie sind sechs dieser Mischstrategien aufgetreten. Der Begriff ‚simultan' in Tabelle 1 bezeichnet die visuelle Auffassung der Anzahl an EMBI-Bären oder der Fingerbilder ohne Zählprozess. ‚Zählen' bezeichnet den Zählprozess im jeweiligen Teilschritt.

1. Zahl erster Summand, Minuend	2. Zahl zweiter Summand, Subtrahend	Ergebnis Summe, Differenz
zählen	zählen	simultan
zählen	simultan	zählen
zählen	simultan	simultan
simultan	simultan	zählen
simultan	zählen	simultan
simultan	zählen	zählen

Tab. 1: Mischstrategien

Zur Verwendungshäufigkeit der Strategien lässt sich beobachten, dass die Mischstrategien am häufigsten verwendet wurden. Eine weitere Auffälligkeit ist die zahlreiche Verwendung von Abrufstrategien. Diese scheinen auch durch eine Verdopplungsaufgabe im Interview begünstigt worden zu sein (vgl. Abb. 2, A5).

Im mathematisch-symbolisch formulierten Aufgabenblock (A1) erwähnten einige Kinder, dass sie minus noch nicht rechnen könnten. Diese Aussage findet sich unter ‚kein Lösungsversuch' wieder.

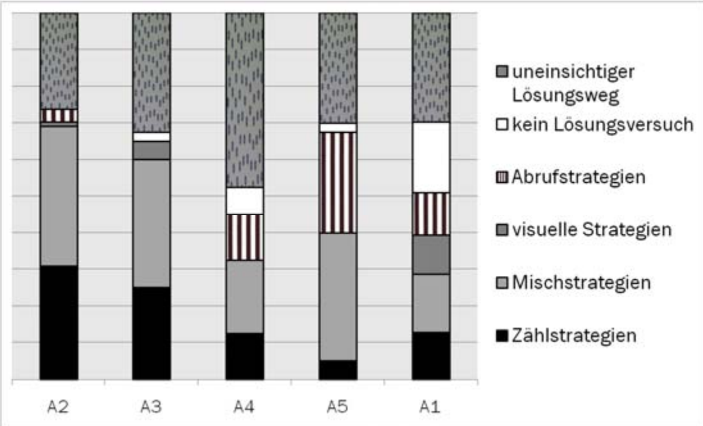


Abb. 2: Lösungsstrategien in den Aufgabenblöcken

In Abbildung 2 wurden die verwendeten Strategien in Bezug zum Abstraktionsgrad der Aufgabenstellung gesetzt. Man kann erkennen, dass die abgelehnten Lösungsversuche in A1 am häufigsten auftraten. Dieses kann auf die Schwierigkeit bei der Verwendung mathematisch-symbolischer Sprache zurückgeführt werden. Eine weitere Auffälligkeit ist die tendenzielle Abnahme an reinen Zählstrategien mit steigendem Abstraktionsgrad der Aufgabenstellung. Die Kinder scheinen ihre Bearbeitungsstrategie von der Formulierung der Aufgabenstellung abhängig zu machen und wählen Strategien bei denen häufiger nicht-zählende Verfahren eingesetzt werden, wenn die Aufgabenstellung abstrakter formuliert wurde.

4. Zusammenfassung

Viele Kinder können bereits Aufgabenstellungen ohne Kontexteinbildung verstehen und verfügen bereits vor ihrer Einschulung über nicht-zählende Bearbeitungsstrategien zu Aufgabenstellungen. Bezugnehmend auf den Zusammenhang zwischen dem Abstraktionsgrad der Aufgabenstellung und des Lösungswegs lässt sich festhalten: Je abstrakter die Formulierung der Aufgabenstellung, desto weniger reine Zählstrategien werden verwendet.

Literatur

Peter-Koop, A. (2007). Elementarmathematisches Basisinterview. Offenburg: Mildenberger.

Rinkens, H.-D. (1996). Arithmetische Fähigkeiten am Schulanfang. Paderborn: unveröffentlichtes Manuskript.

Schipper, W. (2002). „Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen.“ – Eine Auseinandersetzung mit dem Mythos. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule*. (117 – 131). Offenburg: Mildenberger.

Selter, C. (1995). Zur Fiktivität der ‚Stunde Null‘ im arithmetischen Anfangsunterricht. *Mathematische Unterrichtspraxis*, 16, Heft 2, 11 - 19.

Hedwig GASTEIGER, LMU München

Strategieverwendung bei Aufgaben zum kleinen Einmaleins

Die Erarbeitung der Aufgaben des kleinen Einmaleins erfolgte lange Zeit über eine eher isolierte Behandlung der Einmaleinsreihen. Im Sinne des aktiv-entdeckenden Lernens wird seit einigen Jahren ein ganzheitliches Vorgehen vorgeschlagen, bei dem mit Hilfe bereits bekannter Einmaleinssätze andere erschlossen werden (vgl. Wittmann, Müller 1994). Wovon die Strategiewahl beim Lösen von Einmaleinsaufgaben abhängt und welche Strategien Kinder wählen, sind Fragestellungen, die hier erörtert werden.

Erarbeitung des kleinen Einmaleins

Die Verwendung von Strategien spielt beim Kopfrechnen und beim halbschriftlichen Rechnen eine zentrale Rolle. Grundvoraussetzung dafür ist es, operative Zusammenhänge zu verstehen und nutzen zu können (vgl. Wollring 2009). Insofern besteht in der deutschen mathematikdidaktischen Literatur weitgehend Konsens, das Einmaleins zu erarbeiten, indem ein „Netz von Beziehungen zwischen den Aufgaben zur Multiplikation“ (Schipper 2009, S. 154) geschaffen wird. Aufgrund dieser Beziehungen werden mithilfe geeigneter, auf den Rechengesetzen basierender Strategien die Ergebnisse von Einmaleinssätzen ermittelt. Die Erarbeitung des kleinen Einmaleins erfolgt in der Regel über einen zunächst ganzheitlichen Zugang zu allen Einmaleinssätzen. Die systematische Erarbeitung der Zusammenhänge schließt sich an. Auf der Basis sogenannter Kernaufgaben (Einmaleinssätze mit 1, 2, 5, 10 und ggfs. Quadrataufgaben) werden die restlichen Einmaleinssätze erschlossen. Steht nach wie vor der Reihengedanke im Vordergrund, spricht man auch von „kurzen Reihen“ (Wittmann, Müller 1994, S. 110). Darunter versteht man die Ergebnisse der Kernaufgaben einer Einmaleinsreihe. Mögliche Strategien zur Erschließung von Einmaleinssätzen über Kernaufgaben werden exemplarisch am Beispiel $7 \cdot 8$ aufgezeigt:

Strategie	*mögl. Lösung*
Nachbaraufgabe: additive oder subtraktive Veränderung des ersten oder zweiten Faktors um 1	$7 \cdot 7 + 7$ $8 \cdot 8 - 8$
Sukzessive Verdoppelung/Halbierung eines Faktors	14, 28, 56
Gegensinniges Verändern: Vervielfachung eines Faktors mit x bei Teilung des zweiten Faktors durch x	$14 \cdot 4$ $28 \cdot 2$
Zerlegung eines Faktors: additive oder subtraktive	$5 \cdot 8 + 2 \cdot 8$

Veränderung des ersten oder zweiten Faktors $10 \cdot 7 - 2 \cdot 7$

Ziel der Erarbeitung des Einmaleins auf diese Art und Weise ist es, mit dem Durchdringen der operativen Beziehungen eine Grundlage für strategisches Rechnen über das kleine Einmaleins hinaus zu schaffen und zudem auch zu einer Automatisierung der Einmaleinssätze zu gelangen. Letzteres wird vor allem im Zusammenhang mit dem Überschlagsrechnen, den schriftlichen Rechenverfahren und dem Aufbau von Zahl- und Größenvorstellung nach wie vor als wichtig erachtet (vgl. Padberg 2005).

Forschungsergebnisse

Einige Forschungsergebnisse dienen als Argumente für eine Erarbeitung des Einmaleins über operative Beziehungen. Zunächst gibt es Untersuchungsergebnisse zur Informationsverarbeitung, die einen Hinweis darauf geben, dass bewusste und kontrollierte mentale Vorgehensweisen einen Automatisierungsprozess initiieren können (Shriffin, Schneider 1977). Erachtet man die Automatisierung der Einmaleinssätze als wichtiges Ziel, ist dadurch ein grundlegendes Argument gegeben, dass auch in diesem Sinne die Herleitung von Einmaleinssätzen über Strategien erfolgreich sein kann.

Neben informellen Strategien, wie beispielsweise sukzessive Addition, Aufsagen der Einmaleinsreihe oder direktes Modellieren von Aufgabenstellungen mit Material, sind weitere Strategien wichtig. Dies wird durch Untersuchungsergebnisse gestützt, die zeigen, dass informelle Strategien, vor allem wenn sie fehlerhaft ausgeführt werden, zu einem geringeren Automatisierungsgrad führen (Lemaire, Siegler 1995).

Darüber hinaus scheint Strategielernen in Verbindung mit automatisierendem Üben vor allem bei Aufgabenstellungen zur Übertragung von Strategien und zum Überschlagen in jeweils größeren Zahlbereichen zu besseren Ergebnissen zu führen, als rein automatisierendes Üben (Woodward 2006).

Einflüsse auf die Strategiewahl

Obwohl das oben geschilderte Vorgehen zur Erarbeitung des Einmaleins in Deutschland weitgehend unumstritten ist, gibt es bislang kaum Erkenntnisse darüber, ob und welche Strategien zur Lösung von Einmaleinsaufgaben von Kindern verwendet werden. Allerdings gibt es – in der Regel aus Untersuchungen zur Addition und Subtraktion im zwei- und dreistelligen Bereich – einige Aussagen darüber, welche Faktoren die Strategiewahl beeinflussen. Das Zahlenmaterial in der Aufgabenstellung wird von manchen Kindern berücksichtigt und als Entscheidungsgrundlage für die Wahl der Strategie herangezogen. Ebenso gibt es individuell bedingte Entscheidungskritierien. Dazu gehören z.B. die Sicherheit und Schnelligkeit, mit der eine Aufgabe mit einer bestimmten Strategie gelöst werden kann, aber auch die individuell verfügbaren Basisfakten. Auch sozio-mathematische Normen oder unterrichtliche Gegebenheiten, wie z.B. die explizite Vermittlung einer Strategie, spielen eine Rolle bei der Strategiewahl (vgl. Torbeyns, Verschaffel, Ghesquière 2006; Threlfall 2002). Die Bereitschaft, einen Strategiewechsel zu vollziehen, steigt durch die individuelle Erkenntnis, dass bestimmte Aufgaben mit einer neuen Strategie schneller und erfolgreicher gelöst werden können (vgl. Lemaire, Siegler 1995).

Ergebnisse aus einer Interviewstudie

Um Aufschluss über die Strategieverwendung bei verschiedenen Einmaleinsaufgaben gewinnen zu können, wurden 22 Kinder (12 Mädchen, 10 Jungen) in Einzelinterviews über ihre Lösungswege befragt (Paluka-Grahm 2010). Unter anderem sollten folgende Fragestellungen geklärt werden:

– Wie werden die Multiplikationsaufgaben gelöst?
– Zeigen sich bei der Strategiewahl Abhängigkeiten von der Aufgabenstellung und/oder individuelle Präferenzen?

Die Multiplikationsaufgaben wurden mit 8⊕□, □⊕□, □⊕□, □⊕□ und □⊕□ so ausgewählt, dass bei jeder Aufgabe verschiedene Strategien möglich sind. Darüber hinaus wurde die Fähigkeit, Strategien übertragen zu können, ermittelt, indem die Kinder gefragt wurden, ob sie eine Lösungsidee für die Aufgabe 19 ⊕□ hätten. Von den insgesamt 110 (richtig) gelösten Aufgaben zum kleinen Einmaleins erfolgte die Lösung bei 66% der Aufgaben über Strategien auf der Basis operativer Beziehungen, 14 % wurden über sukzessive Addition gelöst und 20 % waren bereits automatisiert. Im Einzelnen kamen folgende Strategien zum Einsatz (Prozentzahlen im Uhrzeigersinn, beginnend mit: Nachbaraufgabe additiv, 26%):

Die Nachbaraufgabe war somit mit 41% die am häufigsten angewandte Strategie. Diese bot sich aber auch bei vielen Aufgaben an (8⊕□, □⊕□, □⊕□, □⊕□. Sie ist ein Sonderfall des Zerlegens. Das Zerlegen ohne Verwendung einer Nachbaraufgabe wäre bei 8⊕□, □⊕□, 5⊕8 denkbar. Diese

Strategie kam mit 8% seltener vor, wurde jedoch ebenfalls aufgabenadäquat eingesetzt. Bei der Strategiewahl lässt sich insgesamt eine Aufgabenabhängigkeit erkennen. Deutlich mehr als die Hälfte aller Kinder lösten z.B. 8⊕□ und □⊕□ mit einer Nachbaraufgabe. Mit etwas über einem Drittel aller Kinder war das Verdoppeln die Hauptstrategie bei den Aufgaben □⊕□ und 5⊕8. Individuelle Strategiepräferenzen zeigten sich wenig. Ein Kind löste 4 der 5 Aufgaben über sukzessive Addition, ein Kind hatte bereits 4 Aufgaben automatisiert und 2 Kinder lösten 5 bzw. 4 Aufgaben über Nachbaraufgaben. 8% der Lösungen wurden über Aufgaben erschlossen, die keine Kernaufgaben sind. Mit neun Kindern konnten 41% der Kinder ihr Strategiewissen auch übertragen und eine auf operativen Beziehungen beruhende Lösungsidee zur Aufgabe 19⊕8 nennen. Die Ergebnisse zeigen, dass Strategien adäquat zum Einsatz kommen und zu richtigen Lösungen führen. Inwieweit die Erarbeitung über operative Beziehungen zur Automatisierung führt, bleibt ebenso noch zu untersuchen wie Unterschiede zwischen leistungsschwachen und leistungsstarken Kindern und der Einfluss des Unterrichts.

Literatur

Lemaire, P. & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. In: Journal of Experimental Psychology, 124/1, 83-97.

Padberg, F. (2005). Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. 3. Auflage. Spektrum: München.

Paluka-Grahm, S. (2010). Multiplikationsstrategien von Grundschülern. Eine Interviewstudie in Jahrgangsstufe 3. Unveröffentlichte Examensarbeit.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Shriffin, R. M. & Schneider, W. (1977). Controlled and automatic human information processing: II. Perceptual learning, automatic attending, and a general theory. In: Psychological Review, 84/2, 127-190.

Threlfall (2002). Flexible mental calculation. In: Educational Studies in Mathematics, 50, 29-47

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2006). The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. In: Cognition and Instruction, 24/4, 439-465

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1994). Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. 2. überarb. Auflage. Stuttgart: Klett.

Wollring, B. (2009). Muster und Strukturen in operativen Übungen. Persönliche Mitteilung.

Woodward, J. (2009). Developing automaticity in multiplication facts: Integrating strategy instruction with timed practice drills. In: Learning Disability Quarterly, 29, 269-289.

Thomas GAWLICK, Diemut LANGE, Hannover

Mathematisches vs. fächerübergreifendes Problemlösen - individuell und kooperativ

Im Rahmen des MALU-Projekts (Lange 2010), in dem mathematisch verschieden interessierte Fünftklässler in Paaren mathematische Problemaufgaben bearbeiten sollten, stellte sich die Frage nach der Vorhersagbarkeit dieser Paar-Problemlöseleistung mit Hilfe von Tests. Gawlick und Lange (eingereicht) konnten zeigen, dass sich weder Schulnoten (in Mathematik und Deutsch) noch allgemeine oder mathematikspezifische Begabungstests zur Vorhersage eignen. Auch im Rahmen der PISA-2000-Erweiterungsstudie konnten individuelle kognitive Merkmale die Varianz in den Gruppenergebnisse der fächerübergreifenden Problemlösekompetenz nur zu einem geringen Teil erklären (Kunter et al. 2005, S. 114). Denkbar wäre folglich, dass fächerübergreifendes Problemlösen sensu PISA und mathematisches Problemlösen verwandte Konstrukte darstellen.

1. Theoretischer Hintergrund

Das *Mathematische Problemlösen* (MPL) lässt sich wie folgt konzeptualisieren: „Im folgenden verstehen wir unter einem Problem eine Aufgabe, die dem Bearbeiter beim Lösen eine Barriere entgegenstellt. Ob eine Aufgabe ein Problem darstellt, hängt von den Erfahrungen, Kenntnissen und Fähigkeiten des Problemlösers ab.“ (Vollrath 1992) Demzufolge kann man a priori nicht anhand von Aufgabenmerkmalen festlegen, was eine Problemaufgabe ist. Daher ist folgende Definition sinnvoll:

i) Eine Aufgabe ist für ihren Bearbeiter genau dann eine ***mathematische Problemaufgabe***, wenn bei ihrer Bearbeitung ein Prozess des Problemlösens stattfindet (im Gegensatz zu einem Routineprozess).

Problemlöseprozesse werden charakterisiert mittels des Schemas von Polya (1949), operationalisiert nach Schoenfeld, vgl. Rott (in diesem Band):

ii) Ein ***Problemlöseprozess*** ist ein Bearbeitungsprozess mit heuristischen Phasen: also eine Explorations-, evtl. auch eine ausführliche Analysephase.

Dem gegenüber steht das Konzept des *fächerübergreifenden Problemlösens* der PISA-Studie (PPL). Dieses baut auf dem psychologischen Problemlöseverständnis auf: „Ein 'Problem' entsteht z.B. dann, wenn ein Lebewesen ein Ziel hat und nicht 'weiß', wie es dieses Ziel erreichen soll. Wo immer der gegebene Zustand sich nicht durch bloßes Handeln (Ausführen selbstverständlicher Operationen) in den erstrebten Zustand überführen lässt, wird das Denken auf den Plan gerufen.“ (Duncker 1935, S. 1) Wie anhand der Blaufärbung ersichtlich, stimmt dieses Konstrukt formal weitgehend mit MPL überein. Inhaltlich wird PPL im Rahmen von PISA so definiert – die Abweichung von MPL ist rot gekennzeichnet: „Problem solving is an individual's capacity to use cognitive processes to confront and resolve real, cross-disciplinary situations where the solution path is not immediately obvious and where the literacy domains or curricular areas that might be applicable are not within a single domain of mathematics, science or reading.” (OECD 2003, S. 156) Konkretisiert wird dies etwa in der PISA-Projektaufgabe „Energie- und Wassersparen in der Schule“ (Klieme et al. 2005, S.42ff) – nachfolgend ein Ausschnitt:

Vorschläge sammeln

Ihr habt folgende sechs Vorschläge zum Energie- und Wassersparen gesammelt:

1. Im Lehrerzimmer statt der Wärmhalteplatte der Kaffemaschine die vorhandene Thermoskanne nutzen.
2. Isolierglas in die Fenster einbauen.
3. Ein großes Becken bauen, Regenwasser darin sammeln und in die Toilettenspülung pumpen.
4. Spartasten in die Toilettenspülung einbauen.
5. Die Getränkeautomaten in schulfreien Zeiten abschalten.
6. Im Winter lieber kurz und kräftig lüften und dann die Fenster wieder schließen.

Ihr wollt
- die Vorschläge danach sortieren, was sie sparen: Strom, Wasser oder Heizenergie, und
- entscheiden, für welche Vorschläge bauliche oder technische Veränderungen nötig sind und für welche nicht.

Dazu habt ihr folgende Tabelle erstellt:	Der Vorschlag spart Strom	Der Vorschlag spart Wasser	Der Vorschlag spart Heizenergie
Ohne Vorbereitung umsetzbar	a	b	c
Benötigt bauliche oder technische Veränderungen	d	e	f

Welche Vorschläge gehören in welche Felder? Markiere jeweils eine Antwort!

1. Der 1. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f
2. Der 2. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f
3. Der 3. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f
4. Der 4. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f
5. Der 5. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f
6. Der 6. Vorschlag gehört in Feld	a	b	c	d	e	f

Eine weitere Differenzierung ist, ob Aufgaben individuell oder kooperativ bearbeitet werden. Kunter et. al (2005) diskutieren verschiedene Möglichkeiten, individuelle Prädiktoren zur Vorhersage des Paarergebnisses zu aggregieren (Mittelwert, Maximum, Minimum der Prädiktoren), erzielen damit aber jeweils nur eine geringe Varianzaufklärung. Wir haben daher eine andere Vorgehensweise gewählt: Neben das Konstrukt iMPL der ***individuellen*** *mathematischen Problemlöseleistung* tritt das Konzept kMPL der ***kooperativen*** *mathematischen Problemlöseleistung*. Dies wird operationalisiert durch die ***individuellen*** Ergebnisse eines Probanden, die er in einem ***kooperativen***. Problemlöseprozess erzielt hat Entsprechend für PPL.

Auf diesem theoretischen Hintergrund formulieren wir nun folgende

2. Fragestellung

Sind die Konstrukte iMPL und iPPL bzw. kMPL und kPPL durch ihre formalen Gemeinsamkeiten überwiegend identisch oder sind sie aufgrund der Inhaltsunterschiede eher voneinander verschieden?

3. Die Studie

Dazu wurden in vier sechsten Klassen eines Hannoveraner Gymnasiums die vier Teilaufgaben der PISA-2000-Projektaufgabe „Energie- und Wassersparen“ sowie zwei Begabungstests (CFT-20R und eine verkürzte Version des Indikatoraufgabentests von Käpnick (1998)) und insgesamt acht mathematische Problemaufgaben bearbeitet. Zur Auswahl der Tests vgl. Lange & Gawlick (eingereicht), zur Aufgabenauswahl Lange (2009). Zusätzlich wurden die Halbjahresschulnoten in Mathematik und Deutsch erhoben. Von insgesamt 84 Sechstklässler existieren alle Daten.

Zwei der acht gewählten mathematischen Problemaufgaben der MALU-Förderung waren die Schachbrettaufgabe (Lange 2009) und die Schüler-AG-Aufgabe (Lange 2010). Bewertet wurde jeder Erkenntnisschritt, der bei Sechstklässlern aufgrund des Vorwissens beim Lösen der Aufgabe zu erwarten ist (s. auch Lange & Gawlick (eingereicht)). Es wurden vier Aufgaben individuell und vier andere im Paar bearbeitet. In den Paarbearbeitungen wurden die Bearbeitungen der Schüler individuell bewertet. Diese individuelle Paar-Problemlöseleistung misst also das oben definierte Konstrukt kMPL. Die vier individuell bearbeiteten Aufgaben messen iMPL, die PISA-Projektaufgabe misst iPPL. Es wäre naheliegend gewesen, zum Vergleich auch kPPL zu erheben, allerdings lag uns zum Testzeitpunkt die dazu in PISA verwendete „Schulgartenaufgabe“ nicht vollständig vor.

4. Ergebnisse und Diskussion

Die Testergebnisse, Noten und Problemlöseleistungen wurden bivariat korreliert (die Schulnoten wurden umgepolt):

N=84	**iPPL**	**iMPL**	**kMPL**
CFT-20R	r = .265*	r = .204	r = .102
Käpnicktest	r = .246*	r = .243*	r = .170
Mathematiknote	r = .153	r = .303**	r = .430**
Deutschnote	r = .249*	r = .241*	r = .260*
iPPL	--	r = .162	r = .150
iMPL	--	--	r = .330**

Die schwache Korrelation der iPPL und der iMPL von r = .162 bestätigt die Vermutung, dass die Inhaltsunterschiede der Konstrukte gegenüber ihren formalen Gemeinsamkeiten überwiegen. Vergleicht man die bivariaten

Korrelationen der Prädiktoren mit der iPPL und die mit der iMPL (1. und 2. Tabellenspalte) miteinander, so fällt der unterschiedlich hohe Zusammenhang mit der Mathematiknote auf: Die Mathematiknote hängt näher mit der iMPL zusammen als mit der iPPL, wofür auch die Höhe der Korrelation mit der kMPL (3. Spalte) spricht. Es ist einsichtig, dass der letzte Wert höher ist, da ja in die Mathematiknote auch kooperative Beiträge eingehen („mündliche Note"). Dass die Korrelation von Mathematiknote mit kMPL nur von mittlerer Größe ist, erscheint ebenfalls als sehr plausibel: Im Mathematikunterricht spielen die Bearbeitung von Standardaufgaben und das dazu nötige Vorwissen eine weit größere Rolle als im mathematischen Problemlösen – Wettbewerbs- und Förderaufgaben sollen ja stufenübergreifend einsetzbar und gerade nicht routinemäßig lösbar sein.

Insgesamt scheint damit die Vermutung bestätigt, dass Mathematisches Problemlösen ein eigenständiges Konstrukt ist, das sich in eine individuelle Komponente iMPL und eine kooperative Komponente kMPL differenziert.

Es ist überraschend, dass iMPL und kMPL mit $r = .330$ lediglich mittel schwach korreliert sind, da ja die iMPL aufgrund der inhaltlichen Nähe der beste Prädiktor für die kMPL darstellen müsste – in PISA lag der Zusammenhang zwischen den aggregierten individuellen und dem Gruppen-Problemlösergebnis mit Werten zwischen .29 und .35 jedoch vergleichbar niedrig (Kunter et al. 2005, S. 111). Denkbar wäre, dass in der kMPL neben der iMPL die Kooperation als ein weiterer Faktor eingeht. Da sich bei PISA-2000 die Varianzerklärung durch Einbezug individueller sozialer Merkmale der Schüler kaum verbessern ließ (ibid., S. 113), liegt es nahe, sich die Merkmale der Kooperationsphasen in den Bearbeitungsprozessen näher anzuschauen (vgl. Beitrag von Lange in diesem Band).

Enttäuschend ist, dass sich iMPL und v.a. kMPL kaum durch Begabungstests vorhersagen lassen. Wenn für eine Begabtenförderung diejenigen Schülerinnen ausgewählt werden sollen, die mit den dort gestellten Aufgaben „etwas anfangen" können, ist es daher naheliegend, bei der Auswahl stärker auf Aufgaben zu setzen, die denen in der Förderung ähneln. Dementsprechend haben wir bei neueren Durchgängen von MALU auch Aufgaben zur Messung von MPL eingesetzt und werden demnächst über die Vorhersage des Fördererfolgs berichten.

Literatur

Siehe Langfassung des Artikels unter: www.idmp.uni-hannover.de

Andrea GELLERT, Essen

Kleingruppendiskussionen über strittige mathematische Deutungen

Als interpersonelles Koordinationsproblem wird der Begriff *Strittigkeit* in schulischen Kontexten auf der sozialen Ebene genutzt. Gemeint sind z.B. Auseinandersetzungen zwischen Kindern, die anschließend möglichst diskursiv ausgeräumt werden. Diskurse in alltäglichen Situationen sind Gegenstand der Untersuchungen von Miller (1986). Das primäre Handlungsziel eines Diskurses ist nach Miller eine strittige Frage, die Quaestio, die von den daran Beteiligten gemeinsam beantwortet wird (Miller 1986, 143). Dieses Aushandeln der Strittigkeit – so Miller – ist für das Lernen fundamental. Die Kinder müssen entsprechend versuchen, ihre auseinandergehenden Perspektiven anzunähern.

Im Forschungsprojekt “Erprobung und Evaluation fokussierender Lehrstrategien in der Grundschule (ErfoLG)” [seit 2009] werden Strittigkeiten gezielt zum Gegenstand des speziell *mathematischen* Diskurses gemacht. Dieser – realisiert in Kleingruppengesprächen mit 4 Schülern und 1 Lehrerin – dient vor allem der Klärung gemeinsam identifizierter Fragen und Aussagen, die auf den mathematischen Inhalt einer Aufgabe bezogen sind und nicht von allen Beteiligten als kollektiv geltend angesehen werden.

Deutungen mathematischer Zeichen und Symbole

Zeichen und Symbole haben im Mathematikunterricht eine zentrale Bedeutung. Schulkinder werden in den Gebrauch von mathematischen Symbolen eingeführt und mathematische Kommunikationen beziehen sich auf deren Deutung (vgl. Steinbring 2009). Je individuelle Deutungen unterscheiden sich zum Teil fundamental, da sie mit bisheriger Erfahrung verknüpft werden. Im Mathematikunterricht zielt der Lehrer jedoch häufig auf eine vermeintliche Eindeutigkeit mathematischer Objekte, obwohl diese mehrdeutig interpretiert werden können und zahlreiche Anknüpfungspunkte für Unterrichtsgespräche bieten (siehe bspw. Voigt 1990; Steinbring 1994). Aber welche unterschiedlichen Deutungen sind möglich?

Deutungen mathematischer Objekte liegen unterschiedliche, mitgelernte *Konventionen* zugrunde, aus denen weitere mathematische Zusammenhänge *deduktiv abgeleitet* werden können. Wird beispielsweise eine offene Aufgabe zur unterschiedlichen Beschriftung eines leeren Zahlenstrahls gestellt (vgl. Söbbeke & Steenpaß

Abbildung 1: Beschriftung leerer Zahlenstrahl

2010, 226f; Abb. 1), so sind strukturelle Deutungen notwendig. Dabei können unterschiedliche *Konventionen* zur Deutung herangezogen werden. Vereinbarungen können sich auf den ersten Strich, die unterschiedliche Länge der Striche oder die Skalierung beziehen: Muss ein Zahlenstrahl immer mit der Null oder der Eins beginnen oder darf auch mit anderen Zahlen begonnen werden? Welche Zahlen dürfen an die leeren Rangplätze geschrieben werden? Welchen Konventionen liegt die Skalierung zugrunde? Welche Bedeutung bekommen die hervorgehobenen Striche? Welche Konvention hat Vorrang? Auf der Grundlage von getroffenen *Konventionen* können dann unterschiedliche mathematische *Deduktionen* erfolgen, z.B. indem Analogien innerhalb eines Zahlenstrahls oder zwischen verschiedenen Zahlenstrahldiagrammen hergestellt und zum Gegenstand des Unterrichtsgesprächs werden.

Kommunikation über Strittigkeit

Grundschulkinder sind in ihrem Lernprozess auf den Austausch mit anderen Personen angewiesen, seien es Mitschüler, Eltern, Lehrer und auch andere, denn fundamentales Lernen erfordert neue verallgemeinernde Beziehungen zwischen vorhandenen Wissenselementen aktiv zu konstruieren und dialogisch auszuhandeln (siehe auch Miller 1986).

Der Lehrperson kommt eine wesentliche Aufgabe zu. Sie soll Unterrichtssituationen schaffen, die echte Lernprozesse initiieren:

> The teacher is viewed as providing learning situations in which students have to contribute their own potential for actively reconstructing knowledge, for establishing a personal relationship toward his knowledge (Steinbring 1994, 91).

Wie kann neues mathematisches Wissen im Unterrichtsdiskurs entwickelt werden und die Lehrperson ihren Beitrag dazu leisten, Kinder auf ihrem Weg zum autonomen Lernen zu begleiten? Bromme et al. (1990, 2f.) sprechen von einem epistemologischen Dilemma der Lehrer-Aufgabe und der Lehrer-Tätigkeit. Der Lehrer bewegt sich stets in einem Zwischenbereich zwischen dem eigenen Wissen um die Wissenschaft Mathematik und dem bereits vorhandenen Wissen der Schüler. Inwiefern sind aber die Lehrpersonen in der Lage, sich von ihren eigenen Vorstellungen und Intentionen zu lösen und für die Wissenskonstruktionen der Kinder offen zu sein? „Will der Lehrer sinnvolle Hilfen geben, so werden als Voraussetzungen eine theoriegeleitete Aufmerksamkeit gefordert und eine erhebliche Zurückhaltung und Überprüfung von rasch sich einstellenden Deutungen des auffälligen Handelns der Kinder“ (Bauersfeld 1983, 54).

Auch Schulkinder sind an sich daraus ergebende Routinen gewöhnt und nehmen unterschiedliche Deutungen häufig einfach hin. Anhand von kleinen videografierten Beispielepisoden lässt sich beobachten, dass dies nicht so sein muss. Werden Kinder dazu aufgefordert, sich über ihre Deutungen auszutauschen, lassen sie sich auch auf Deutungen anderer ein. Kevin beispielsweise begründet seine Beschriftung des Zahlenstrahls mit Bezug auf die *Konvention* der hervorgehobenen Striche („Also, ich hab hier zum Beispiel mit der Fünf begonnen, weil ich ja immer das als Zehner genommen hab.“, Abb. 2). *Deduktiv* leitet er die 55 aus dem 25er-Abstand zwischen der 5 und der 30 her („Das hier ist plus 25 und das hier ist plus 25“). Ähnliche Analogien erkennt er auch an dem zweiten den Kindern vorliegenden Zahlenstrahl (Abb. 3), indem er sagt: „Das ist auch der gleiche 25er-Abstand.“

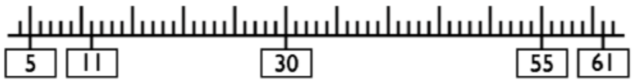


Abbildung 2: Zahlenstrahl von Kevin

Ferdi und Frank begründen die Beschriftung des Zahlenstrahls in Abbildung 3 mit Bezug auf die *Konvention*, dass der Zahlenstrahl mit der 1 anfängt. Dieser Deutung stimmt auch Kevin zu, obwohl er die Beachtung der Konvention über die Bedeutung der hervorgehobenen Striche als „logischer“ bezeichnet. Analogien sieht vor allem Frank zwischen den beiden Zahlenstrahldiagrammen (Abbildung 2 & 3), indem er darauf aufmerksam macht, dass an jedem Platzhalter die Zahl am Zahlenstrahl in Abbildung 3 plus 3 die entsprechende Zahl am Zahlenstrahl in Abbildung 2 an gleicher Stelle ergibt. Kevin erkennt diese Analogie nicht („Ich versteh das einfach nicht, was der Ferdi meint.“). In dieser Situation werden Ferdis Beiträge also nicht kollektiv akzeptiert, sondern sind insofern strittig, da in Frage steht, ob eine Deutungsweise wie sie Ferdi vornimmt, gemeinsam akzeptiert werden kann oder nicht.

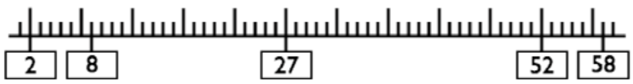


Abbildung 3: Kontrastierender Zahlenstrahl

Fokussierende Lehrstrategien

Eine fokussierende Lehrstrategie wird als alternative mathematische Diskursform verstanden zu bekannten, kleinschrittig lenkenden Interaktionsmustern – wie dem Trichtermuster (Bauersfeld 1988) – sowie zu weitgehend offenen, eigenständig entdeckenden Lernaktivitäten der Kinder. In einer fokussierenden Interaktion lenkt die Lehrperson gezielt die Aufmerksamkeit der Kinder auf zu erkennende und zu klärende mathematische Strittigkeiten. Die Lehrerintention ist somit eine andere: die Aufmerksamkeit der Schüler auf einen kritischen Punkt des mathematischen Problems zu fokussieren, eine Frage aufzuwerfen, die dazu dient, die Diskussion an die Schüler zurückzugeben und ihnen damit die Verantwortung für die Klärung der Situation zu geben (Wood 1994). In der Szene mit Kevin und Ferdi ist es die Lehrerin, die beide Sichtweisen (+3 und +25) ins Zentrum der Aufmerksamkeit der Kinder rückt („Wir haben jetzt plus drei, plus fünfundzwanzig, dass wir das vielleicht noch mal klar kriegen.“). Sie kontrastiert die beiden deduktiven Deutungen. Dann fokussiert sie auf die beiden Zahlenstrahldiagramme durch direktes Untereinanderlegen („Dann legen wir erst mal hier das gleich untereinander.“, und weiter: „Es geht jetzt um diese zwei Zahlenstrahle, ne.“) und fordert die Kinder dazu auf, ihre Deutung zu verschriftlichen („Schreib es doch einfach mal drüber.“). Auch bereits akzeptierte Konventionen lässt sie noch einmal wiederholen („Der Zahlenstrahl fängt mit welcher Zahl an? (...) So, und der Zahlenstrahl fängt mit welcher Zahl an?“), um das Gespräch dann wieder an die Kinder zurückzugeben und sie zu erneuten Erklärungen herauszufordern („So, jetzt versuchste noch mal, Ferdi, mit anderen Worten.“). Auf der Basis interaktionstheoretischer und epistemologischer Analysen dieser und weiterer Szenen soll das theoretische Konstrukt »fokussierende Lehrstrategien« im Forschungsprojekt „ErfoLG” genauer ausgearbeitet werden.

Literatur

Bauersfeld, H. (1983): Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: H. Bauersfeld u.a. (Hrsg.): Lernen und Lehren von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 6. Köln: Aulis Verlag Deubner, 1-56.

Bauersfeld, H. (1988): Interaction, Construction, and Knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. In: Cooney, T. J. et al. (Eds.): Perspectives on Research on Effective Mathematics Teaching. Volume 1. Reston: NCTM, 27-46.

Bromme, R. et al. (1990): Aufgaben, Fehler und Aufgabensysteme. In: R. Bromme et al.: Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schu□ler. Köln: Aulis, 1-30.

Miller, M. (1986): Kollektive Lernprozesse. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Söbbeke, E. & Steenpaß, A. (2010): Mathematische Deutungsprozesse zu Anschauungsmitteln unterstützen. In: Böttinger et al.: Mathematik im Denken der Kinder. Seelze: Friedrich Verlag, 216-244.

Steinbring, H. (1994): Frosch, Känguruh und Zehneru□bergang – Epistemologische Probleme beim Verstehen von Rechenstrategien im Mathematikunterricht der Grundschule. In: H. Maier et al.: Verstehen und Verständigung. Köln: Aulis, 182-217.

Steinbring, H. (2009): Ist es möglich mathematische Bedeutungen zu kommunizieren? – Epistemologische Analyse interaktiver Wissenskonstruktionen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht.

Voigt 1990: Mehrdeutigkeit als ein wesentliches Moment der Unterrichtskultur. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 305-308.

Wood, T. (1994): Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In: Lerman, S. (ed.): Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers, 149-168.

Boris GIRNAT, Freiburg

Modellieren im Geometrieunterricht der Sekundarstufe: Ein zwiespältiges Unterfangen aus Lehrersicht

In einer qualitativen Studie, die Lehreransichten über den Geometrieunterricht der gymnasialen Sekundarstufe I erhebt und die subjektive Ziel-, Inhalts- und Methodenauswahl der neun teilnehmenden Lehrkräfte als individuelle Curricula rekonstruiert (vgl. Eichler, 2007), war ein Teilergebnis bemerkenswert und unerwartet: Sieben der neun Teilnehmer haben Vorbehalte, Geometrie anwendungsorientiert zu unterrichten und Aspekte des Modellbildens einzubeziehen. Dieses Teilergebnis wird hier aus dem Begründungskontext der Lehrkräfte heraus betrachtet und mit ausgewählten didaktischen Ansichten verglichen.

1. Bildungsziele des Geometrieunterrichts

Einem Vorschlag Hollands gemäß kann man den Umgang mit Geometrie in vier Hauptkategorien einteilen: Geometrie als Lehre vom Anschauungsraum, als deduktive Theorie, als Übungsfeld für das Problemlösen und als Vorrat mathematischer Strukturen (vgl. Holland, 2007, S. 19). Für fast alle Lehrer der Studie stehen das Problemlösen und die Geometrie als deduktive Theorie im Vordergrund ihres Unterrichts:

> Herr A: In der Analysis und noch schlimmer in der Stochastik wird man sehr viel öfter sagen: Das ist so, das können wir aber nicht beweisen, […] und das ist in der Geometrie hier anders. Also da sehe ich eigentlich jetzt keine großen Lücken.
>
> Frau G: Problemlösen, das ist neben Beweisen die wichtigste Sache, die ich eigentlich im Mathematikunterricht vermitteln möchte.
>
> Herr C: Also so Pythagoras: „Einmal ausgemessen, gilt!“ finde ich: Da geht ein Wert verloren. Also das würde mich stören. Das Pendel schlägt gerade in die Richtung aus […] also sich jetzt da voll auf die eine Seite zu schlagen und zu sagen: Geometrie, das ist für mich nur noch Landvermessung und irgendwie Ausrechnen, wie hoch die Pyramide ist und so, oder Zeichnen und Konstruieren von so was, das finde ich eigentlich auch ein bisschen mager dann.

Beweisen und Problemlösen werden als zentrale Bildungsziele des Geometrieunterrichts angesehen. Mit der Festlegung auf diese beiden Aspekte legt die Zieldimension eine spezifische erkenntnistheoretische Sicht auf die Geometrie nahe: In der Theorie geometrischer Paradigmen und Arbeitsbereiche werden drei Paradigmen innerhalb der euklidischen Geometrie unterschieden (vgl. Houdement und Kuzniak, 2001): Ein formalistischer, ein euklidischer und ein „natürlicher“ Standpunkt. Der formalistische spielt an der Schule keine Rolle; der euklidische geht von einer lokal geordneten Geometrie aus, in der jede Begründung deduktiv an Konfigurations- oder

Konstruktionsbeschreibungen anknüpft und ohne Rekurs auf Beobachtungen und Messungen an realen geometrischen Objekten zu erfolgen hat. Sie sind allenfalls als heuristische Hilfen zugelassen. Die „natürliche“ Geometrie arbeitet hingegen empirisch und baut auf Mess- und Beobachtungsdaten als Argumentationsgrundlage auf.

2. Modellieren versus Beweisen und Problemlösen

Traditionelles Beweisen und Problemlösen, vor allem die typischen Interpolationsprobleme, setzen eine euklidisch-deduktive Sicht der Geometrie voraus (vgl. Holland, 2007, S. 172 – 174). Damit stellt sich unterrichtspraktisch das Problem, welche Argumentationsstandards in der Geometrie eingehalten werden sollen. Strebt man klassisches Beweisen und Problemlösen an, so liegt empirisches Arbeiten nicht in der Intention des Lehrers:

> Herr F: […], wobei ich bei meinen Schülern zumindest schon darauf wert lege, dass man auch auf die abstrakte Ebene kommt, quasi reine Geometrie betreibt, […] um ein bisschen den Anspruch zu haben, wir machen auch schon ein bisschen Wissenschaft. Da sind Zeichnungen, Objekte zum Anfassen, Messen und so weiter keine Hilfen, eher hinderlich.

Das Zitat von Herrn F macht auf ein systematisches Problem aufmerksam, das zwischen den Argumentationsgrundlagen und -standards in einem anwendungsorientierten, auf Modellbildung zielenden und einem auf Beweis- und Problemaufgaben ausgerichteten Geometrieunterricht besteht, so wie sie in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind (vgl. Girnat, 2009):

Aspekt	*Modellbildung*	*Beweis-/ Problemaufgabe*
Gegenstand des Interesses	singuläre Situation	allgemeine Aussage oder Konfiguration
Erkenntnistheoretischer Zugang	durch Messung, Beobachtung und Experimente	durch Konfigurations-/ Konstruktionsbeschreibungen
Modellierung	Durch Vereinfachung	Vereinfachung unzulässig
Mathematische Methoden	Erstellung eines mathematischen Modells	Anwendung bekannter Sätze, Operatoren und Algorithmen
Überprüfung	empirisch	deduktiv

3. Methodologische Folgerungen

Um den Konflikt zwischen verschiedenen Standards und Grundlagen der Argumentation zu vermeiden, geben mehrere Lehrer an, streng zwischen „rein“ geometrischen und anwendungsorientierten Phasen des Geometrieunterrichts zu trennen. Der Anwendungsbezug tritt in der Regel als motivierende Einführung oder als Wiederholung zum Abschluss einer Einheit auf:

> Herr B: [Geometrie] als Mittel, die Welt zu erschließen, wiederum eher stiefmütterlich, aber durchaus auch berechtigt nicht an erster Stelle. Es dient gerne dazu, in ein Sachgebiet einzuführen, die Berechtigung dieses Sachgebietes darzustellen, auch am Ende die Fähigkeiten in der Anwendung dieser Erschließung der Welt zu überprüfen. Aber vieles dazwischen muss einfach auch einmal losgelöst von der Wirklichkeit passieren dürfen. Es ist dann Mathematikunterricht in dem Sinne, dass Rechenverfahren und Argumentationsketten auch einmal losgelöst von viel Beiwerk, was vielleicht für die Aufgabe, für das mathematische Modell nicht so bedeutend ist, auch mal betrachtet werden können.

Eine so verstandenen Anwendungsorientierung ist weit davon entfernt, die Ziele eines auf „authentischen" Realitätsbezug ausgerichteten Unterrichts zu treffen, in dem Anwendungen nicht bloß Veranschaulichungen mathematischer Inhalte und Methoden sein sollen, sondern in dem auch utilitaristische und methodologische Ziele verfolgt werden, wie der Nutzen für reale Lebenssituation oder der Erwerb allgemeiner Modellierungskompetenzen (vgl. Kaiser-Meßmer, 1986, S. 123-126). Auch eine Ausweitung des Problemlösebegriffs über das deduktive Bearbeiten von Interpolationsproblemen tritt bei den befragten Lehrern nicht auf, also beispielsweise eine Erweiterung wie sie Wittmann beschreibt:

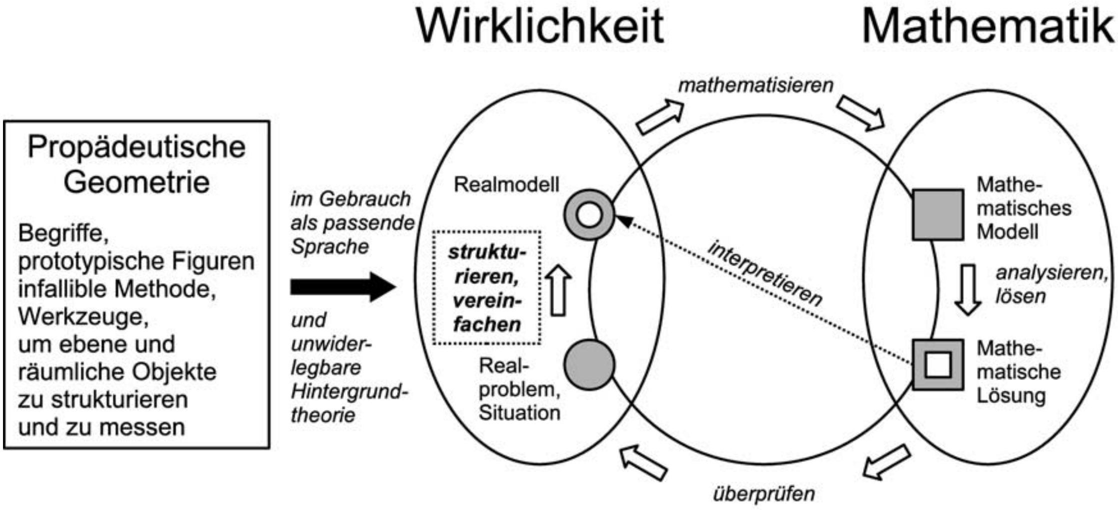
> In der jüngsten Diskussion überwiegt deshalb eine breitere Sichtweise des Problemlösens im Geometrieunterricht sowie – damit einhergehend – eine Verknüpfung mit anderen Aspekten:
>
> – Unter dem Aspekt der Anwendungsorientierung wird das Problemlösen nicht nur auf innermathematische Probleme beschränkt, sondern es kommt der Aspekt der Modellbildung hinzu.
>
> – der Aspekt der Kreativität rückt zunehmend ins Blickfeld; damit gewinnen offenen Probleme und Probleme, die eine Vielzahl von Lösungen auf unterschiedlichen Ebenen zulassen, an Bedeutung. (Wittmann, 2009, S. 87)

Stattdessen lässt sich nicht nur beobachten, dass rein geometrische und anwendungsorientierte Phasen im Unterricht getrennt werden, sondern dass Geometrie in Anwendungskontexten aus einer anderen Perspektive betrieben wird: Steht in der rein geometrischen Phasen das Argumentieren und Problemlösen im Vordergrund, so wird Geometrie bei Anwendungen vorwiegend als Hilfsmittel zur Längen-, Flächen- und Volumenberechnung eingesetzt, und zwar nicht so, dass diese geometrischen Verfahren dann erst anwendungsbezogen eingeführt würden, sondern so, dass sie aus den „rein" geometrischen Verfahren als bekannt vorausgesetzt werden:

> Frau D: Sehen wir uns die folgende Aufgabe an: „Ein Geschäftsmann möchte Salz in kleinen, rechteckigen Päckchen zu 250 Gramm verkaufen. Was würdest du ihm raten?" Das ist durchaus eine interessante Aufgabe mit einigen Heraus-

forderungen, wenn man sie wirklich ernst nimmt. Aber die Geometrie darin ist nicht interessant. Das ist Standard, und das muss man schon vorher gut verstanden haben, bevor man mit dieser Aufgabe anfängt.

Anders als im Modellierungskreislauf (vgl. Kaiser et al., 2006) kann sich diese Art der Anwendung nicht im Kreis wiederfinden lassen, sondern ist ihm logisch und methodisch vorgeordnet, sozusagen „propädeutisch“:



4. Offene Fragen

Mit dieser Beobachtung soll geschlossen und der Anstoß zu didaktischen Diskussionen gegeben werden: Weicht der Anwendungsbezug der Geometrie tatsächlich von Vorstellungen der Modellbildungstheorie ab und wie lassen sich die Leitideen der Anwendungsorientierung und des klassischen Beweisen und Problemlösens im Geometrieunterricht in Einklang bringen?

Literatur

Eichler, A. (2007). Individual curricula – Teachers’ beliefs concerning stochastics instruction. IEJME 2(3). Online: http://www.iejme.com/.

Girnat, B. (2009). Ontological Belief and Their Impact on Teaching Elementary Geometry. In: M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33rd IGPME conference. Thessaloniki: PME, Band 3, S. 89-96.

Holland, Gerhard (2007): Geometrie in der Sekundarstufe. 3. Auflage. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Houdement, C., und Kuzniak, A. (2001): Elementary Geometry Split into Different Geometrical Paradigms. Proceedings of CERME 3, Bellaria, Italy (Web).

Kaiser-Meßmer, G. (1986). Anwendungen im Mathematikunterricht I. Franzbecker: Bad Salzdetfurth.

Kaiser, G., Blomhoj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. ZDM, 38(2), 82-85.

Wittmann, G. (2009): Problemlösen. In: Weigand, H.-G. et al. (Hrsg.): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum, 81–98.

Matthias GLADE, Dortmund

Vom Zeichnen zur Rechenregel – Individuelle Prozesse der fortschreitenden Schematisierung zum Anteil vom Anteil

1. Fortschreitende Schematisierung

Das Prinzip der fortschreitenden Schematisierung ist eines der Kernprinzipien der Unterrichtskonzeption der Realistic Mathematics Education (RME, vgl. Treffers 1987, Streefland 1991). Unter Schematisierungsprozessen werden hier alle Prozesse begriffen, die von individuellen, informellen und durch Anschauungsmittel gestützten Lösungswegen zum Kalkül führen, gleich ob sie sich in Bildern, symbolische Notationen, Sprache oder Handlungen manifestieren (nach Treffers 1987). Damit lässt sich das Schematisieren als vertikale Mathematisierung im RME-Modell charakterisieren: es geht nicht um die Mathematisierung lebensweltlicher Situationen („transforming a problem field into a mathematical problem“), sondern um die innermathematische Weiterentwicklung der ersten Ansätze („processing within the mathematical system“) (Treffers 1987, 247).

2. Forschungsfokus und -design

Während z.B. Streefland (1991) langfristige, über Monate und Jahre angelegte Prozesse der fortschreitenden Schematisierung untersucht, werden in der vom Autor begonnenen Studie kürzere Zeiträume von 1-2 Schulstunden betrachtet. Dabei werden die initiierten Lernprozesse und deren Gelingensbedingungen und Hürden auf einer Mikroebene analysiert.

Die Studie ist im Rahmen des langfristigen Entwicklungsforschungsprojekts KOSIMA (Hußmann / Leuders / Barzel / Prediger in diesem Band) angesiedelt. Sie wurde als „Design Experiment“ (Gravemeijer / Cobb 2006) in 7 halbstandardisierten Interviews an einer nordrheinwestfälischen Gesamtschule durchgeführt. Die Prozesse wurden videographiert, transkribiert und im Hinblick auf die initiierten Teilprozesse und die Rolle des Anschauungsmittels mit Hilfe von Steinbrings (2005) epistemologischem Dreieck qualitativ ausgewertet.

3. Mathematisches Thema: Anteil vom Anteil in Rechteckbildern

Ausgehend von Kontextproblemen wurde zuvor das Konzept des Anteils vom Anteil entwickelt (Aufgabenmaterial nach Prediger et al 2012, auch abgedruckt in Glade / Schink 2011) und Anteile von Anteilen in Rechteckbildern anschauungsgestützt bestimmt (vgl. Rechteckbild zu 1/6 von einem

1/5 in Abb. 2 auf der Folgeseite). Der erste Schematisierungsprozess zielt nun darauf ab, statt der Zeichenmethode eine Rechenregel für den Fall der Stammbrüche (eins durch Nenner mal Nenner) selbst zu finden. Dazu dienen die Schematisierungsimpulse im nebenstehenden Kasten.

Schematisierungsimpulse:

- Kann man das auch einfacher schreiben / lösen?
- Kann man das auch ohne das Zeichnen von Bildern lösen?
- Kannst du eine Regel finden?
- Begründe deine Regel.
- Moderationsimpulse: Vergleicht untereinander. Erklärt einander.

4. Rolle des Anschauungsmittels

Entscheidend für die Schematisierungsprozesse sind die wohl gestufte Deutung, die Strukturierung und die Ablösung vom Anschauungsmittel. Empirische Studien mit Grundschulkindern (z.B. Steinbring 1994) zeigten wiederholt, dass Anschauungsmittel die mathematischen Strukturen, die sie „enthalten", nicht einfach so preisgeben, sondern vielfältigen Deutungsprozessen unterworfen werden müssen, um von Lernenden durchdrungen zu werden. Sonst kann es zu rein empirischen Begründungen der arithmetischen Beziehungen ohne Verinnerlichung der Struktur kommen, so dass die Anschauungsmittel ihre intendierte Wirkung als Vorstellungshilfe nicht entfalten können (ein Beispiel zu Brüchen liefert Prediger 2011).

Zudem werden Anschauungsmittel von verschiedenen Lernenden unterschiedlich gedeutet. Diese sogenannte „Mehrdeutigkeit" von Anschauungsmitteln ist Grundlage für die fortschreitende Schematisierung: in einem wiederholten Deutungsprozess und im Austausch mit anderen Lernenden soll der Einzelne zu vertieften, strukturorientierteren Deutungen des Anschauungsmittels gelangen und diese mit arithmetischen Mustern verknüpfen. Einige Ergebnisse der Studie werden im Folgenden skizziert.

5. Typische und untypische Schematisierungsprozesse

Die Analyse mit dem epistemologischen Dreieck erlaubt das Nachzeichnen der sich verändernden Beziehung zwischen Referenzkontext und Zeichen. Zu Beginn des Prozesses müssen sich die Lernenden das Rechteckbild noch aneignen; es ist zu konstruierendes oder zu deutendes Zeichen, das im Referenzkontext der bekannten arithmetischen Beziehungen erschlossen wird (vgl. Abb.1 auf der Folgeseite). Dabei werden verschiedene Strukturierungen des Rechtecks (rein vertikal, rein horizontal, vertikal-horizontal) ausprobiert. In einem eher untypischen Fall wurden von den Lernenden unnötig große Seitenlängen benutzt, was wiederum eine Fülle an Vereinfachungsprozessen nach sich zog(vgl. Glade /Schink2011).

Sobald ein geeignetes Rechteck gefunden ist und die Anteile markiert sind, so wird das Rechteckbild zum stützenden Kontext, der es ermöglicht den Anteil vom Anteil konkret zu bestimmen (Abb. 2). Dies kann durch Auszählen, zeilenweises Addieren oder Multiplizieren von Höhe und Breite vollzogen werden. Der Optimierung der Lösungswege schließt sich dann eine Phase der Stabilisierung des „besten" Weges an.

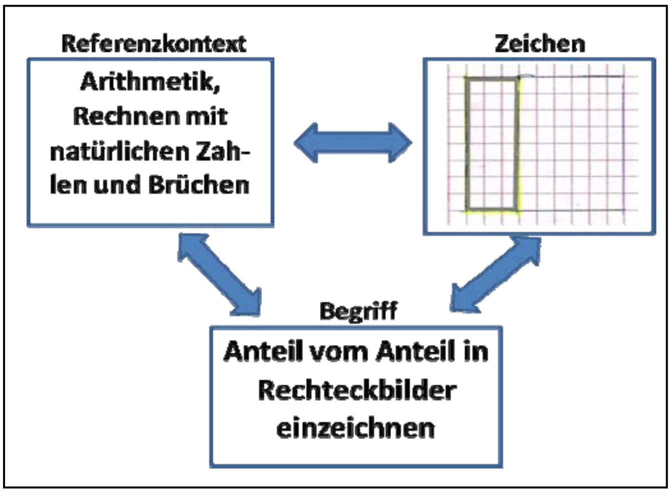


Abb. 1: Rechteck als Zeichen, das gezeichnete Rechteck passt nur zum Teil zur Aufgabe 1/3, davon 1/5

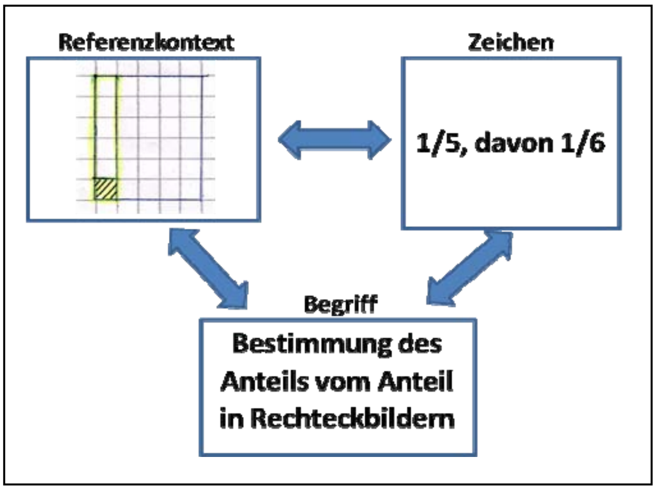


Abb. 2: Rechteck als Referenzkontext

In der Folge erfährt der Referenzkontext Rechteckbild zwei interessante Veränderungen: er wird zunächst in die Vorstellung verlegt, insofern die Lernenden dann alle versuchen, sich von der externen graphischen Darstellung zu lösen, indem sie die Aufgaben im Kopf lösen. Wenn dann eine Regel für Stammbrüche formuliert wurde, verschwindet der Referenzkontext und die nächste Aufgabe kann kalkülmäßig, also durch bloßes Operieren auf der Zeichenebene, gelöst werden.

Kann der Referenzkontext zur Begründung der Gültigkeit der syntaktisch gebildeten Zeichenketten von den Lernenden wieder herangezogen werden, so war ein solcher Schematisierungsprozess erfolgreich.

Dies kann ganz konkret auf das Beispiel bezogen formuliert sein oder Ansätze enthalten, die konkrete Situiertheit der Bilder zu verlassen (Z.B.: „Immer bei einem ganzen hier, (zeigt auf Rahmen) Höhe mal Breite, die oberen muss man dann auch mal einzeichnen und dann hat man eine kleine Fläche und dann auch wieder Höhe mal Breite." als Begründung der allgemeinen Regel zum Anteil vom Anteil als „Multiplikation" von Brüchen).

6. Fazit

Schematisierungs-Teilprozesse – Vereinheitlichen – Verschiedene Strukturen hineinsehen – Vereinfachen – Strukturen etablieren – Lösen von externen graphischen Darstellungen – Lösen von Vorstellungen

In den getätigten Interviews vollzogen die Lernenden ausgehend von den Rechteckbildern eine Vielzahl von Schematisierungsschritten (exemplarisch für einen Fall zweier Kinder im nebenstehenden Kasten). Die Vielzahl der Prozesse und die Wechsel des Referenzkontextes, wie sie durch die Analyse mit dem epistemologischen Dreieck nachvollzogen wurden, zeigen, wie komplex ein solcher Prozess der Regelfindung ist. In ihm ergeben sich wiederholte Deutungen des Anschauungsmittels, wie sie für eine erfolgreiche Verinnerlichung der zugrundeliegenden Struktur notwendig sind, um oberflächliche bloß empirische Deutungen auszuschließen.

Literatur

Glade, Matthias / Schink, Andrea (2011): – Vom Anteile bestimmen zur Multiplikation von Brüchen – Ein Weg mit System: fortschreitende Schematisierung, in: Mathematik lehren 162, S. 43-47.

Gravemeijer, Koeno / Cobb, Paul (2006): Design research from the learning design perspective, in: van den Akker, J, Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Eds.): Educational Design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products. Routledge, London, 45-85.

Prediger, Susanne / Schink, Andrea /Schneider, Claudia / Verschraegen, Jan (2012): Kinder weltweit – Anteile in Statistiken, erscheint in: Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.): Mathewerkstatt 6. Cornelsen, Berlin.

Prediger, Susanne(2011): Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen. Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel, erscheint in: Der Mathematikunterricht 56(3).

Treffers, Adri (1987): Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project.- Reidel, Dordrecht.

Steinbring, Heinz (1994): Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule. Zum Unterschied zwischen empirischer und theoretischer Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen, in: Mathematische Unterrichtspraxis 4, 7-19.

Steinbring, Heinz (2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – an Epistemological Perspective, Mathematics Education Library (MELI), No. 38. Berlin, New York: Springer.

Streefland, Leen (1991): Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research, Kluwer, Dordrecht.

Günter GRAUMANN, Bielefeld

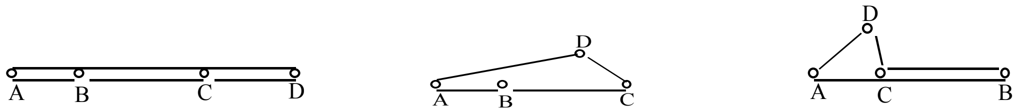
Typen nicht-konvexer Vierecke

In der Schule werden in der Regel nur konvexe Vierecke behandelt. Daran kann man aber ohne großen zeitlichen Aufwand leicht die Behandlung nicht-konvexer Vierecke anschließen, wobei die Schülerinnen und Schüler einerseits ein breiteres Bild erhalten und andererseits (wie in der Mathematik üblich) erfahren, dass Definitionen Setzungen sind, über die man diskutieren kann. Darüber hinaus bietet dieses Problemfeld gute Möglichkeiten für die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten das Training systematischer Vorgehensweisen.

Wir definieren hierbei ein **Viereck** als einen geschlossenen Streckenzug, d.h. als die Vereinigungsmenge $\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CD}\cup\overline{DA}$, wobei A, B, C, D vier beliebige verschiedene Punkte sind. - Diese Definition erlaubt eine einfache Programmierung in einer DGS.

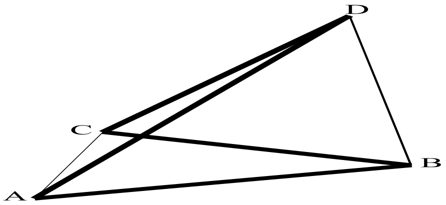
Von einem **ausgearteten Viereck** spricht man, wenn drei aufeinander folgende Eckpunkte kollinear sind. Unter den ausgearteten Vierecken kann man (wie leicht ersichtlich ist) folgende drei Typen feststellen:

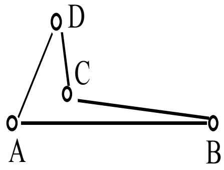
- *Strecke* (alle vier Punkte liegen auf einer Geraden, z.B. A, B, C, D in einer Reihe),
- *Dreieck mit Unterteilung einer Seite* (z.B. A, B, C sind kollinear und C liegt auf der Halbgeraden von A über B und nicht auf $\overline{AB}$),
- *Dreieck mit ausladender Strecke* (z.B. A, B, C sind kollinear und C liegt auf der Strecke $\overline{AB}$ oder auf der Halbgeraden von A, zu der B nicht gehört.)

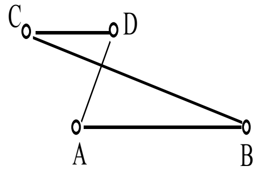


Wir wenden uns nun den **nicht-ausgearteten Vierecken** zu. Neben den bekannten konvexen Vierecken können wir grundsätzlich (d.h. unter affinem Gesichtspunkt) die folgenden drei verschiedenen Typen finden:

- die *räumlichen Vierecke* (z. B. als Streckenzug auf den Kanten einer Dreieckspyramide).
- die *konkaven Vierecke* (auch *Vierecke mit einspringender Ecke* genannt),
- die *Kreuzungsvierecke* (auch *Vierecke mit überschlagenen Seiten* bzw. *Vierecke mit sich schneidenden Seiten* genannt).





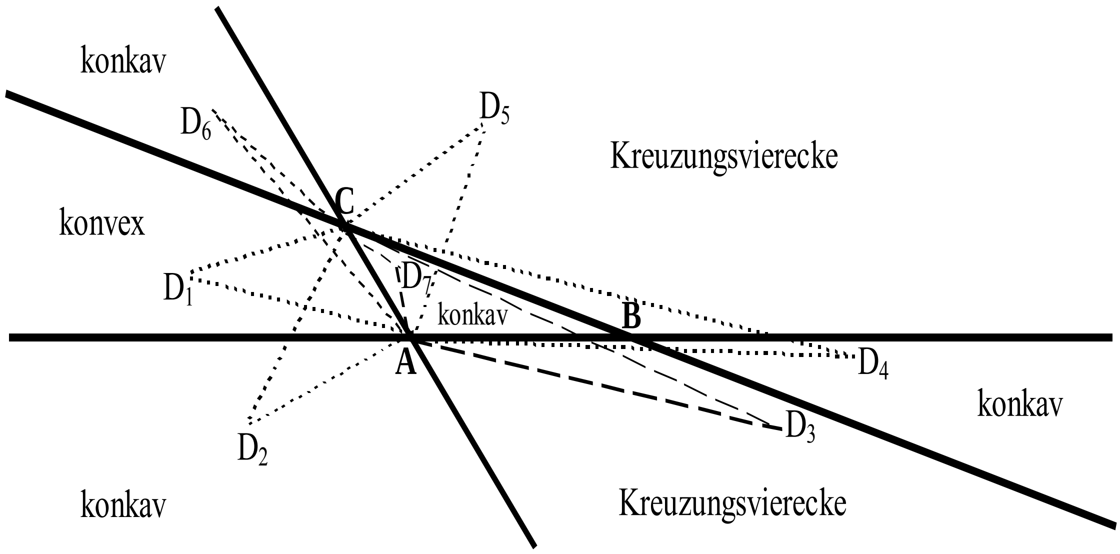


Dass nur diese drei Typen möglich sind kann man leicht durch ein paar systematische Überlegungen heraus bekommen:

Da das Viereck nicht-ausgerartet ist, bilden zunächst je drei Eckpunkte ein Dreieck. Wir können deshalb o.B.d.A. das Dreieck ABC als Ausgangspunkt unserer Überlegungen wählen.

Liegt der Punkt D nicht in der Ebene von ABC, so erhalten wir offensichtlich ein räumliches Viereck.

Liegt der Punkt D in der von ABC bestimmten Ebene, so kann D nicht auf einer der Geraden AB, AC, BC liegen, da das Viereck nicht-ausgeartet sein soll. Die durch ABC bestimmte Ebene wird nun mittels der Geraden AB, AC, BC in sieben Gebiete geteilt. Es sei jetzt D ein Punkt einer dieser sieben Teilgebiete. Man kann sich leicht klar machen, dass bei einer Wanderung von D innerhalb eines Gebietes sich nichts an der Lage der Seiten $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ gegenüber den Seiten des Dreiecks ABC ändert (es gibt keine bzw. keine weiteren Schnittpunkte). D.h. für alle D in einem Gebiet ändert sich der grundsätzliche Typus eines Vierecks nicht. Durch jeweils ein Beispiel ergibt sich dann leicht die folgende Verteilung:

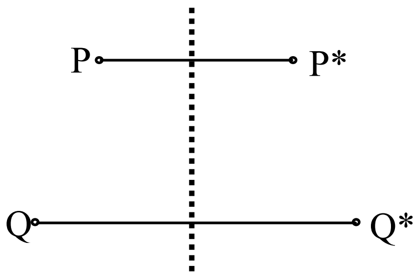


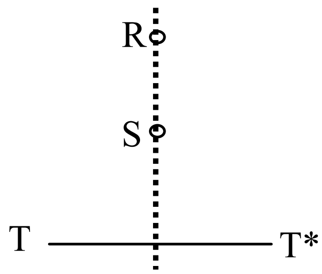
Damit ist klar geworden, dass es unter den nicht-konvexen Vierecken außer den räumlichen Vierecken nur konkave Vierecke oder Kreuzungsvierecke geben kann.

Symmetrische nicht-ausgeartete nicht-konvexe Vierecke

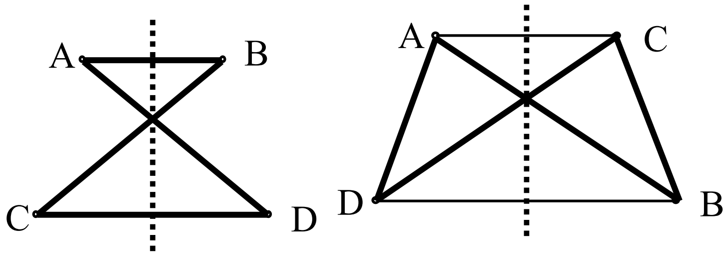
Das bekannte Haus der konvexen Vierecke kann bekanntlich gut anhand der Symmetrien und Schrägsymmetrien gefunden werden. Wir wollen hier Entsprechendes für nicht-konvexe Vierecke durchführen.

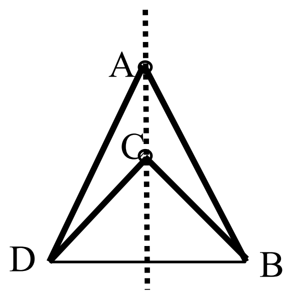
Ist etwa eine Symmetrieachse vorgegeben, so müssen die vier Punkte bezüglich einer Achsenspiegelung zwei Paare Punkt-Bildpunkt (P – P* und Q – Q*) bilden oder zwei Punkte (R, S) liegen auf der Achse und die übrigen beiden bilden ein Paar Punkt-Bildpunkt (T – T*).





Die Punkte A, B, C, D eines beliebigen Vierecks müssen nun auf die Punkte P, P*, Q, Q* bzw. R, S, T, T* (bei der in dieser Reihenfolge fest gelegten Weise) in irgendeiner Weise verteilt werden. Bekanntermaßen gibt es sechs verschiedene Möglichkeiten der Reihung von vier Punkten, wenn man etwa beim Punkt A anfängt. (Man kann o.B.d.A. mit A anfangen, denn eine zyklische Vertauschung der vier Buchstaben ändert nichts an der Form des Vierecks sondern nur die Bezeichnungen der Eckpunkte.) Da das Rückwärtsdurchlaufen wie etwa bei ABCD und DCBA die Form des Vierecks nicht verändert, braucht man nur drei (im Sinne geometrischer Formen echt verschiedene) Belegungen untersuchen, wobei einige Belegungen keine symmetrischen Vierecke und einige symmetrische konvexe Vierecke liefern. Geht man nun systematisch alle möglichen Belegungen durch und sortiert die nicht-symmetrischen Vierecke aus, so erhält man die folgenden **nicht-konvexen achsensymmetrischen Vierecke**:

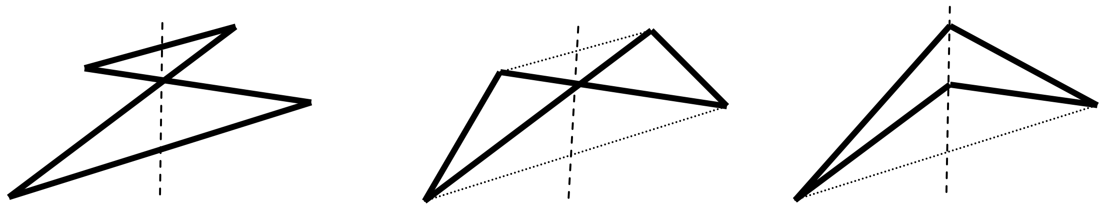




symmetrische Kreuzungsvierecke

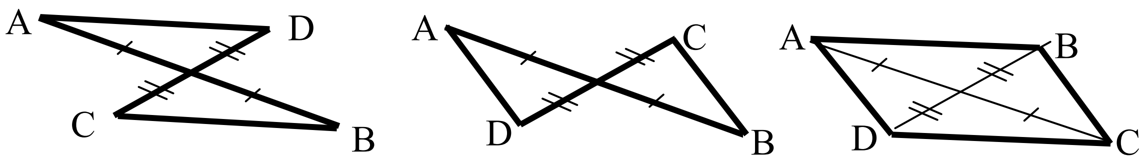
symmetrisch konkav

Ist eine Schrägsymmetrie vorgegeben, so gelten die gleichen Bedingungen wie bei der Achsensymmetrie, nur dass die Verbindung von Punkt und Bildpunkt nicht senkrecht zur Achse sein muss.

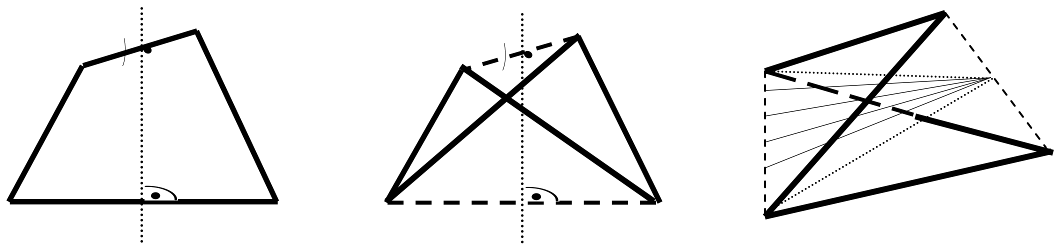


schrägsymmetrische Kreuzungsvierecke   schrägsymm. konkaver Drachen

Ist eine Punktsymmetrie vorgegeben, so müssen sich die vier Eckpunkte in zwei Paare Punkt-Bildpunkt (P – P* und Q – Q*) bezüglich einer Punktspiegelung verteilen. Hierbei kann man dann wieder drei Fälle der Verteilung der Viereckspunkte unterscheiden und erhält neben dem konvexen Parallelogramm **ein punktsymmetrisches Kreuzungsviereck**.



Bei räumlichen Vierecken muss die sie tragende Dreieckspyramide auf sich abgebildet werden. Wie man leicht erkennt, ergibt sich eine Symmetrie für das Viereck auf der Dreieckspyramide entweder mit einer 180°-Drehung um eine Achse durch zwei Seitenmitten bzw. die Mitten der Diagonalen oder mit einer Ebenenspiegelung durch eine Diagonale und die Mitte der anderen Diagonalen, wobei diese senkrecht zu der Spiegelebene sein muss.



Nicht-konvexe ebene Vierecke mit zwei Symmetrieachsen (und einer Punktsymmetrie) sind nur Kreuzungsvierecke, deren vier Punkte ein „Rechteck“ bilden. (Der Sonderfall des „Quadrats“ ergibt hier keine zusätzliche Symmetrien – lediglich gleichlange Strecken und rechte Winkel im Kreuzungspunkt).

Räumliche Vierecke mit zwei oder mehr Symmetrien haben entweder drei 180°-Drehungen („verdrehtes Rechteck“) oder zwei Symmetrieebenen und eine Drehung („Viereck aus zwei kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit gleicher Basis und vier gleichlangen Seiten“). Sind darüber hinaus die beiden Diagonalen gleichlang, so treten die genannten Dreh- und Ebenensymmetrien sowie zwei Drehspiegelungssymmetrien auf. (Bei einem Viereck aus vier Seiten eines (regelmäßigen) Tetraeders kommen für das Viereck keine weiteren Symmetrien hinzu.)

Michael RIESS, Gilbert GREEFRATH, Münster

Das Projekt CASI: Ergebnisse aus dem ersten Projektjahr

1. Konzeption des Projekts CASI

Das Projekt CASI (Computer-Algebrasystem-Einsatz in der Sekundarstufe I) untersucht den dauerhaften Einsatz eines Taschencomputers im Mathematikunterricht an Real- und Gesamtschulen in der 9. und 10. Jahrgangsstufe. Das Projekt CASI knüpft an das Ergebnis anderer Projekte an (vgl. etwa Weigand 2008), die für schwache Schülerinnen und Schüler der Gymnasien überdurchschnittliche Leistungssteigerungen festgestellt haben.

Zurzeit gibt es 6 Projektschulen in Nordrhein-Westfalen, an denen 11 Projektklassen mit dem CAS-Handheld CASIO Classpad ausgestattet sind. Außerdem nehmen 7 Vergleichsklassen an der Untersuchung teil. Insgesamt sind ca. 280 Projektschülerinnen und –schüler sowie ca. 150 Vergleichsschülerinnen und –schüler involviert. 11 Projektlehrkräfte sind an der Erarbeitung und Durchführung von Unterrichtsreihen beteiligt.

Innerhalb der zweijährigen Projektdauer werden 5 Unterrichtsreihen gemeinsam mit allen Projektlehrkräften geplant und durchgeführt. Zusätzlich werden für die entsprechenden Unterrichtsreihen Kompetenzen festgelegt, die die Schülerinnen und Schüler jeweils mit und ohne CAS-Rechner erreichen sollen. Zum Konzept gehört das Ziel, einen vielfältigen Rechnereinsatz zu ermöglichen (s. Greefrath 2010).

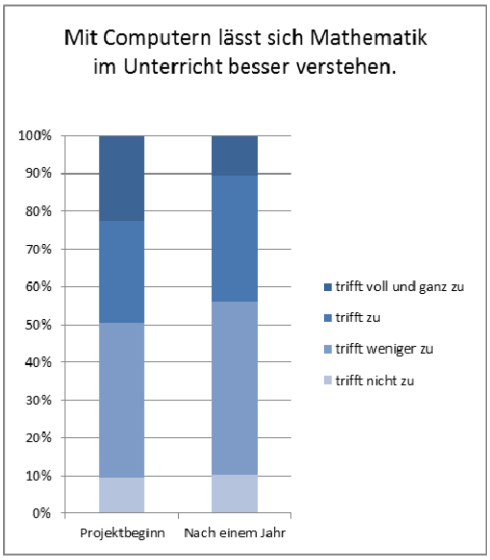
2. Einstellungen und Erfahrungen von Schülerinnen und Schülern

Zur Untersuchung der Einstellungen und Erfahrungen im Zusammenhang mit Computern und Mathematik wird ein Schülerfragebogen zu Beginn, in der Mitte und am Ende der Projektdauer verwendet. Zurzeit sind die Daten aus den ersten beiden Untersuchungen von ca. 140 Schülerinnen und Schülern ausgewertet.

Die untersuchten Schülerinnen und Schüler des 9. Jahrgangs haben vor Projektbeginn nach eigener Einschätzung keine Erfahrung mit dynamischer Geometriesoftware, schreiben sich aber Kenntnisse mit Tabellenkalkulationsprogrammen zu. Auffällig ist außerdem, dass von der überwiegenden Anzahl der Befragen gleichzeitig sowohl der Prozesscharakter von Mathematik als auch die Eindeutigkeit von Ergebnissen gesehen werden. Ein indifferentes Bild zeigt sich bei der Frage, ob man mit Computern Mathematik besser verstehen kann.

Nach einem Jahr blieben viele Antworten auf dieselben Fragen ähnlich, aber es zeigten sich einige Änderungen speziell in der Einstellung zu Computern. Es wird deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler nach einem Jahr computergestützten Unterrichts durchaus die Schwierigkeiten im Umgang mit dem Rechner wahrnehmen, wenn auch die Zustimmung generell bei immer noch 65% der Schülerinnen und Schüler vorhanden ist. Hier ist die Entwicklung im weiteren Projektverlauf zu beobachten. Es bleibt allerdings noch zu klären, in wie fern die Schülerinnen und Schüler das Classpad als Computer im Sinne der Fragen angesehen haben.

Trotz klarer Vorgaben in den Kernlehrplänen Nordrhein-Westfalens, gaben über 60% der befragten Schülerinnen und Schüler zum Projektstart an, keine dynamische Geometriesoftware zu kennen. Dies hat sich durch das erste Projektjahr immerhin auf knapp über 30% reduziert. Interessanter im Hinblick auf die Auswertung der anderen Fragen gestaltet sich die Auswertung der Frage zu den Tabellenkalkulationskenntnissen. Hier gehen nach der Selbsteinschätzung der Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse zurück. Dies stellt ein Indiz dafür dar, dass den Schülerinnen und Schülern zu Beginn des Projekts nicht bewusst war, was gute Kenntnisse bedeuten, und dass sie jetzt nach einem Jahr Arbeit mit dem Classpad nun in der Lage sind, ihre Fertigkeiten im Umgang mit dieser Art Programm realistischer einzuschätzen.



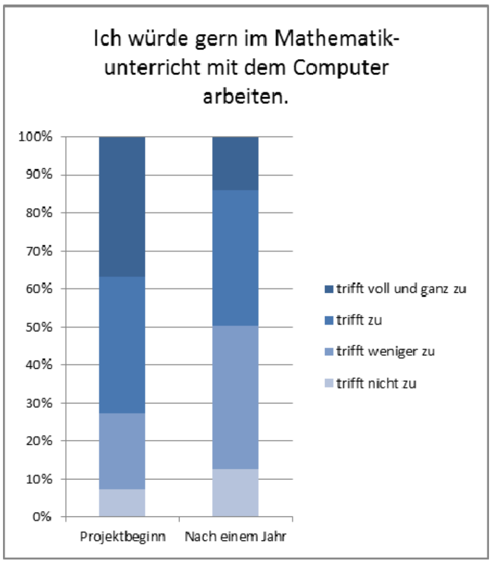


Abb. 1: Auswertung der Fragen 8 und 17 des Schülerfragebogens

Weitere Ergebnisse beziehen sich auf die generelle Einstellung der Schülerinnen und Schüler zur Mathematik und belegen, dass das Schuljahr mit Classpad-Einsatz dazu beigetragen hat, das Bild von Mathematik zu verändern. Die Schülerinnen und Schüler erklären, dass Mathematik eine kreative Seite hat und auch verschiedenen Lösungsansätze zu einem Problem möglich sein können. Es scheint sich außerdem ein Wechsel der Sichtweise auf Ergebnisse anzudeuten, da man in einem computergestützten Unterricht weniger Energie auf das Vergleichen von Rechenergebnissen verwenden muss, sondern sich der Interpretation von Ergebnissen widmen kann.

Die Antworten auf die Fragen, deren Ergebnisse in Abbildung 1 dargestellt sind, zeigen ebenfalls, dass die anfängliche Euphorie dem Werkzeugeinsatz gegenüber einer gemäßigteren Meinung über dessen Einsatz gewichen ist. Trotzdem sind die Zustimmungswerte immer noch hoch. Besonders bei Frage 17 (siehe Abb. 1 rechts) wird außerdem sehr wichtig sein, in wie weit das Classpad von den Schülerinnen und Schülern als Computer wahrgenommen wird.

3. Unterrichtsinhalte und -methoden

Zur Erhebung von Unterrichtsinhalten und Unterrichtsmethoden sowie deren Zusammenhang mit Art und Dauer des Rechnereinsatzes wurden von einigen Lehrkräften in ausgewählten Unterrichtseinheiten Stundenprotokolle geführt. Bereits ausgewertet sind die Stundenprotokolle von vier Lehrern mit insgesamt 164 Unterrichtsstunden aus der Unterrichtseinheit zu linearen Funktionen und Gleichungen, die ca. einen Monat nach Einführung des Rechners begann, und der Unterrichtseinheit zu quadratischen Funktionen und Gleichungen, die zu Beginn des zweiten Projektjahres stattfand.

Das Classpad wurde demnach in der Einheit zu linearen Funktionen in 80% der Stunden und insgesamt der Hälfte der gesamten Unterrichtszeit eingesetzt. Die Protokolle aus dem Thema quadratische Funktionen zeigten Classpad-Einsatz in 93% der Stunden und 43% der gesamten Unterrichtszeit. Dies lässt die Deutung zu, dass der Rechner nach längerer Nutzung häufiger aber punktueller eingesetzt wird als zu Beginn des Projekts.

Die weitere Auswertung der Stundenprotokolle erfolgte mit der Methode von Kendalls Tau bei Rangkorrelationen mit mehrfachen Rangbindungen. In den Tabellen (Abb. 2 und Abb. 3) gibt p die Irrtumswahrscheinlichkeit an. Der Betrag der Korrelationskoeffizienten liegt, falls im Text nicht anders angegeben, zwischen 0,3 und 0,4 und hat sich zwischen den zwei Zeitpunkten nur wenig geändert. Man kann somit von Korrelationen mittlerer Stärke sprechen.

Werkzeuggebrauch	Gering	Stark
Inhalte	Einführung neuen Stoffs ($p<0.001$)	Übungen & Vertiefungen ($p<0.05$)
Methode	Lehrervortrag ($p<0.05$)	Gruppenarbeit ($p<0.01$)

Abb. 2: Auswertung der Stundenprotokolle zu linearen Funktionen

In dieser Unterrichtseinheit (Abb. 2) wurde der Rechner in Stunden, deren inhaltlicher Schwerpunkt auf der Einführung neuen Stoffes lag, tendenziell weniger eingesetzt und dafür mehr während Übungen und Vertiefungen. Unterrichtsstunden, die von Lehrervorträgen geprägt waren wiesen einen eher geringen Classpad-Einsatz auf. Dieser war bei Stunden, die vermehrt in Gruppenarbeit stattfanden, stärker ausgeprägt, wobei der Korrelationskoeffizient bei diesem Punkt nur zwischen 0,2 und 0,3 liegt. Dies änderte sich beim zweiten Messzeitpunkt: Hier lag dann auch diese Korrelation deutlich über 0,3.

Werkzeuggebrauch	Gering	Stark
Inhalte	Einführung neuen Stoffs (p<0.001)	
Methode	Lehrervortrag (p<0.001)	Gruppenarbeit (p<0.001)

Abb. 3: Auswertung der Stundenprotokolle zu quadratischen Funktionen.

Die Tabelle zu dieser Unterrichtseinheit (Abb. 3) weist bis auf eine Abweichung und die Irrtumswahrscheinlichkeiten dieselben Einträge wie die erste auf, wodurch die Beobachtungen aus dem ersten Messzeitpunkt bestätigt wurden. Einzig die positive Korrelation zwischen Rechnereinsatz und Übungen & Vertiefungen konnte für diese Unterrichtseinheit aufgrund einer zu hohen Irrtumswahrscheinlichkeit nicht festgestellt werden.

4. Ausblick

Die Auswertung der Fragebögen zum Projektende wird dazu verwendet werden, um die bisher entstandenen Fragen und Unstimmigkeiten näher zu betrachten und eventuell zu klären. Von besonderen Interessen sind auch die möglichen Vergleiche von Lehrertypen in Bezug auf den Rechnereinsatz und die korrelierenden Unterrichtsinhalte und –methode. Diese Auswertung der Protokolle steht ebenso noch aus, wie die Betrachtung der anderen Projektlehrer, deren Protokolle aus Kontinuitätsgründen in den hier vorgestellten Vergleich nicht eingepflegt werden konnten. Es wird weiterhin einen Abgleich der Lehrerprotokolle mit Schülerprotokollen zu denselben Stunden geben.

Literatur

Greefrath, G. (2010): Mit dem Computer qualitativ arbeiten?, Praxis der Mathematik in der Schule 52 Bd. 31, 20-24.

Weigand, H.-G. (2008): Teaching with a Symbolic Calculator in 10th Grade - Evaluation of a One Year Project, International Journal for Technology in Mathematics Education, 15(1), 19-32.

Eva Maria GRETZMANN, Osnabrück

Muster des Auftretens metakognitiver Aktivitäten im Unterrichtsgespräch des Mathematikunterrichts

Der Einsatz metakognitiver Aktivitäten hat sich nicht nur als die mathematische Leistung positiv beeinflussend erwiesen, sondern auch als gezielt förderbar (vgl. z. B. Veenman et al., 2006, S. 9f.). Dies zeigen Evaluationen von durch Metakognition geprägten Instruktionsprogrammen (vgl. z. B. Mevarech & Kramarski, 2003). Was derartige Evaluationen jedoch häufig vermissen lassen, ist eine tiefenorientierte Analyse der Mechanismen, die durch das Instruktionsprogramm tatsächlich in Gang gesetzt werden. Vor allem über solche Analysen werden aber Aussagen darüber erst möglich, wie und folglich warum das Programm funktioniert.

Im Folgenden wird der Fokus zunächst auf Studien von Depaepe et al. (2007, 2010) liegen. Vor dem Hintergrund von Reformbemühungen im flämischen Mathematikunterricht, mit denen u. a. das Ziel der Aneignung metakognitiver Strategien durch Schüler verfolgt wird, untersuchen diese Autoren Zusammenhänge zwischen dem zur Metakognition anleitenden Verhalten des Lehrers und der Schülerleistung. Ausgehend von einer Pilotstudie mit zehn Lehrern wird der Fokus schließlich auf den Unterricht zweier Lehrer, Peter und Anna, in Klassen des 6. Jahrgangs gelegt (Depaepe et al., 2010). Über sieben Monate hinweg erhobene Videodaten zeigen, dass Anna den Einsatz metakognitiver Aktivitäten beim Lösen mathematischer Aufgaben in ihrem Unterricht sehr viel stärker anspricht als Peter. Zusätzlich erhobene Leistungsdaten der Schüler offenbaren jedoch trotz genannter Unterschiede im Ansprechen metakognitiver Aktivitäten im Unterrichtsgespräch keine verschiedenen Resultate für beide Klassen. Zur Erklärung dieses Ergebnisses fordern Depaepe et al. (2010, S. 217) selbst weitergehende Analysen aus qualitativer Perspektive.

Hierzu wird im Folgenden ein Beitrag geleistet: Durch qualitative Analysen von Mustern des Auftretens metakognitiver Aktivitäten im Unterrichtsgespräch soll verdeutlicht werden, dass sich von Peters Unterricht zu jenem von Anna zwar eine Steigerung ausmachen lässt, wünschenswert aber wohl noch ein anderes Verhalten ist. So erreicht auch Anna nicht, dass sich ihre Schüler aus eigener Initiative heraus metakognitiv aktiv zeigen.

Analyse des zur Metakognition anleitenden Lehrerverhaltens

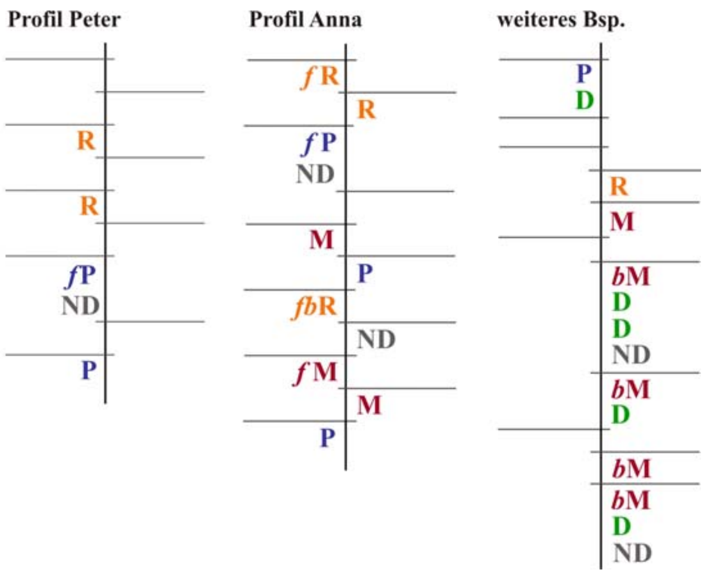
Zentrale Idee der Studie von Depaepe et al. (2010, S. 209) ist, dass der Lehrer die Schüler auf Handlungsanweisungen bzgl. metakognitiver Aktivitäten hinweist: "build a mental representation of the problem", "decide how to solve the problem", "interpret the outcome and formulate the answer" und "evaluate the solution". Zur transkriptgestützten Analyse des Unterrichts von Peter und Anna sind diese Handlungsanweisungen zu vier Kategorien umfunktioniert worden. Hinzu kommt eine fünfte Kategorie, mit der Verweise auf die Gesamtheit der Aktivitäten gekennzeichnet werden können. Die Transkriptanalysen erfolgen nun dadurch, dass für jede im Unterrichtsgespräch thematisierte Aufgabe vermerkt wird, welche der den Kategorien entsprechenden Verweise der Lehrer zeigt. Zusätzlich wird erhoben, ob der Lehrer lediglich auf die Aktivität verweist oder ob er auch erklärt, wie oder warum diese Aktivität durchzuführen ist. So zeigt sich, dass Anna prozentual betrachtet deutlich häufiger Bezug auf die metakognitiven Aktivitäten nimmt und auch bzgl. der Fragen nach dem „Wie“ und „Warum“ höhere Werte erzielt.

Es sind kurze Transkriptauszüge publiziert (Depaepe et al., 2007), die nach persönlicher Mitteilung der Autoren dem Unterricht von Peter und Anna entstammen. Sie werden im Folgenden herangezogen, um einen anderen Blickwinkel vorzustellen als der im Rahmen der Studie eröffnete.

Analyse metakognitiver Aktivitäten im Unterrichtsgespräch

Zentral für die Einnahme des angekündigten "anderen Blickwinkels" ist, dass nicht nur Handlungsanweisungen des Lehrers beschrieben werden, sondern unterrichtliche Interaktionen in den Blick geraten. Zur Analyse wird hier eine Vereinfachung des von Cohors-Fresenborg & Kaune (2007) vorgeschlagenen und von Gretzmann (2010) modifizierten Kategoriensystems für metakognitive und diskursive Aktivitäten herangezogen. Metakognitive Aktivitäten werden dekomponiert in **P**lanungs-, **M**onitoring- und **R**eflexionsaktivitäten. Soll das Ausüben dieser Aktivitäten zu einem tieferen Verständnis führen, so setzt dies voraus, dass sich die Aktivitäten präzise auf das beziehen, was zur Debatte steht. Die hierfür notwendigen Kompetenzen des Präzisierens in der Darstellung und des Verankerns in der Debatte subsumieren Cohors-Fresenborg und Kaune unter dem Begriff "diskursive Kompetenz". Dementsprechend umfasst das Kategoriensystem zusätzlich die Kategorie **D**iskursivität. Über die Kategorie **N**egative **D**iskursivität können schließlich noch Beiträge gekennzeichnet werden, die den Diskurs stören, weil sie sich bspw. nicht nachvollziehbar einfügen.

Das Analyseverfahren sieht vor, die über die Anwendung des Kategoriensystems entstandenen Kodierungsdaten in sogenannten graphischen Profilen aufzubereiten (siehe Abbildung). Die grauen Striche nach links zeigen Lehrerbeiträge, jene nach rechts Schülerbeiträge an. Unter den Strichen sind die Kategorien vermerkt, die für den zugehörigen Beitrag vergeben worden sind. Anhand dieser Darstellung kann nun über Muster des Auftretens metakognitiver Aktivitäten gesprochen werden.



In dem Unterrichtsgespräch, das sich hinter dem ersten graphischen Profil verbirgt, beginnt Peter mit seiner Klasse einen Lösungsweg für eine Aufgabe zu entwickeln. Es fällt auf, dass sich keinerlei metakognitive Aktivitäten in den Beiträgen der Schüler zeigen, auch nicht nach der Aufforderung zu einer Planungsaktion, erkennbar an dem "*f*" in Präfixnotation. Allein der Lehrer zeigt sich hier metakognitiv aktiv. Dabei treten seine Aktivitäten nie zusammen mit Begründungen, erkennbar an einem "*b*" in Präfixnotation, auf. Seine Reflexions- und Planungsaktivitäten erreichen das Niveau von Argumentationen also nicht. Sie bleiben reine Behauptungen. Des Weiteren weist dieses graphische Profil nicht auf das Vorhandensein diskursiver Aktivitäten hin; die Kategorie **D** wurde nicht vergeben. Diese Ebene von Präzision im Gespräch wird also nicht erreicht, schon aber fällt ein Beitrag des Lehrers durch negativ Diskursives auf.

In der Szene, zu der das zweite graphische Profil gehört, beginnt Anna mit ihrer Klasse einen Lösungsweg für dieselbe Aufgabe zu besprechen wie Peter zuvor. In den Beiträgen der Schüler zeigen sich hier sehr wohl metakognitive Aktivitäten. Jeder vergebenen Metakognitionskategorie auf der Schülerseite geht jedoch auf der Lehrerseite eine Kategorisierung voran, die anzeigt, dass die entsprechende metakognitive Aktivität gefordert wurde. Des Weiteren zeigen sich auch hier keine diskursiven Aktivitäten. Begründungen treten ebenfalls nicht auf, obwohl der Lehrer in einem Beitrag sogar eine Begründung einfordert (erkennbar an dem "*fb*" in Präfixnotation). Der darauf folgende Beitrag eines Schülers fügt sich allerdings nicht nahtlos in den Diskurs ein. Er ist mit der Kategorie **ND** gekennzeichnet.

Insgesamt zeigen sich also in den ersten beiden graphischen Profilen verschiedene Muster des Auftretens metakognitiver Aktivitäten im Diskurs. Auch im Unterricht von Anna fehlen aber selbstständig erbrachte Aktivitäten, Begründungen und Diskursives. All dies scheinen die Schüler (noch) nicht in ihren Habitus übernommen zu haben. Die fehlende Selbstständigkeit im Einsatz metakognitiver Aktivitäten bestätigen die Autoren der Studie auch mit Blick auf das gesamte ihnen vorliegende Datenmaterial.

Wie ein graphisches Profil aussehen kann, wenn die Schüler die genannten Aktivitäten in ihren Habitus übernommen haben, zeigt das weitere Beispiel in obiger Abbildung. Es ist im Rahmen eines eigenen, noch laufenden Projekts aufgetreten. Hier scheinen die Schüler durchaus trainiert, Beiträge zu formulieren, anhand derer metakognitive Aktivitäten erkennbar werden, und zwar ohne stetige Aufforderungen dazu. Dabei nennen sie auch Begründungen und verankern ihre Wortmeldungen im Diskurs. Auch in dieser Szene fallen allerdings negativ diskursive Aktivitäten auf, konkret die Wahl inadäquater Wörter.

Abschließende Bemerkungen

Insgesamt geben diese Beispiele Hinweise darauf, dass das Aufdecken der genauen Auftretensart metakognitiver Aktivitäten im Unterrichtsgespräch weiteres Erklärungspotenzial bieten kann. Im Anschluss an Studien, wie sie von Depaepe et al. (2010) berichtet werden, könnte ein solcher Blick in tieferliegende Strukturen des Gesprächs dazu beitragen, Mechanismen zu identifizieren, die verantwortlich sind für das Wirksamwerden metakognitiver Aktivitäten im Verstehensprozess, um diese Erkenntnisse dann auf neue Projekte rückwirken zu lassen.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007). *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht. Arbeitsbericht Nr. 44.* Osnabrück: FMD.

Depaepe, F., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2007). Unravelling the culture of the mathematics classroom: A video-based study in sixth grade. *International Journal of Educational Research, 46,* 266-279.

Depaepe, F., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2010). Teachers‘ metacognitive and heuristic approaches to word problem solving: analysis and impact on students‘ beliefs and performance. *ZDM, 42 (2),* 205-218.

Gretzmann, E. (2010). Analyse und Diagnose metakognitiver und diskursiver Aktivitäten auf Video-Basis. In Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V. (Hrsg.)*, Lehrerkompetenzen in der Mathematiklehrerausbildung* (S. 24-31). Neuss: Seeberger.

Kramarski, B. & Mevarech, Z. (2003). Enhancing Mathematical Reasoning in the Classroom: The Effects of Cooperative Learning and Metacognitive Training. *American Educational Research Journal, 40 (1),* 281-310.

Veenman, M., Van Hout-Wolters, B. & Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: conceptual and methodological considerations. *Metacognition and Learning, 1,* 3-14.

Birgit GRIESE, Eva GLASMACHERS, Michael KALLWEIT, Bettina RÖSKEN, Ruhr-Universität Bochum

Mathematik als Eingangshürde in den Ingenieurwissenschaften

Die Forderung nach mehr Absolventen in den MINT-Fächern hallt aktuell durch die Medien und die Hochschullandschaft. Vor diesem Hintergrund sind die Studienabbruchzahlen ein Alarmsignal. Das Projekt MP² (Mathe/Plus/Praxis) der Ruhr-Universität Bochum[1] *wurde für seine Konzeption zur Vermeidung unnötiger Studienabbrüche in den Ingenieurwissenschaften vom „Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft" ausgezeichnet. MP² basiert auf der Grundannahme, dass Studierende in der Studieneingangsphase häufig aufgrund mangelnder Lern- und Arbeitsorganisation (Mathe/Plus) scheitern, oder weil sie keinen ausreichenden Praxisbezug erkennen können (Mathe/Praxis). Wir stellen Mathe/Plus im Detail vor. Interessant ist, ob das Führen eines Lerntagebuchs, insbesondere in Kombination mit anderen Maßnahmen, Studierende effektiv unterstützen kann, und wie die bewährten Elemente des Projektes in Zukunft nachhaltig umgesetzt werden können.*

Ursachen des Studienabbruchs

Es gibt zahlreiche Studien zur zeitlichen Entwicklung, zu fachspezifischen Charakteristika und zu den Ursachen des Studienabbruchs. Meist liegen mehrere Gründe vor. Als besonders entscheidend wurden Leistungsprobleme, Finanzierung / ausgedehnte Erwerbstätigkeit und mangelnde Motivation (Heublein, Spangenberg & Sommer, 2003; Heublein, Schmelzer & Sommer, 2008) genannt. Insbesondere Leistungsprobleme und mangelnde Motivation bieten die Möglichkeit zur Gegensteuerung, hier setzt MP² an (Dehling, Glasmachers, Härterich & Hellermann, 2010).

Zielgruppe, Zielsetzung und Zeitplanung

Die Zielgruppe des Projektes sind die Studierenden im ersten Semester der Studiengänge „Maschinenbau" (MB), „Bauingenieurwesen" (BI) und „Umwelttechnik/Ressourcenmanagement" (UTRM) an der Ruhr-Universität Bochum. Dabei handelt es sich um annähernd 1000 Studierende, die alle die Pflichtvorlesung „Mathematik I für MB, BI, UTRM" besuchen und die Klausur bestehen müssen, die erfahrungsgemäß eine große Hürde in der Studieneingangsphase darstellt.

[1] www.rub.de/mp2

Die beiden Projektteile Mathe/Plus und Mathe/Praxis starten zeitversetzt. Mathe/Plus wurde im Sommersemester 2010 vorbereitet, im Wintersemester 2010/2011 erstmals durchgeführt, und wird im anschließenden Sommersemester ausgewertet und evaluiert. Mathe/Praxis beginnt jeweils genau ein Semester später mit der Vorbereitungsphase im Wintersemester 2010/2011, der ersten Durchführung im Sommersemester 2011 und einer Evaluation im Wintersemester 2011/2012. Für das akademische Jahr 2011/2012 ist ein weiterer Durchgang beider Projektteile geplant.

Grundannahmen und Organisation

MP² geht von den Grundannahmen aus, dass Studierende häufig bereits zu Beginn ihres Studiums aufgrund mangelnder Lern- und Arbeitsorganisation (Mathe/Plus) scheitern, oder weil sie keinen ausreichenden Praxisbezug erkennen können (Mathe/Praxis). Um für Mathe/Plus treffsicher die Studierenden auszuwählen, die gerade im Bereich der Lern- und Arbeitsorganisation Probleme haben, werden als Auswahlkriterien sowohl die Ergebnisse einer Miniklausur vier Wochen nach Vorlesungsbeginn als auch online-Bewerbungen mit „Motivationsschreiben" herangezogen. Die so angenommenen 180 Studierenden werden zufällig auf drei Gruppen verteilt.

Die am engsten betreute „Supported-Learning-Group" (SLG) besteht aus 60 Studierenden in drei Gruppen zu je 20 Personen. Ebenfalls je 60 Studierende werden der „Self-Directed-Group" (SDG) und der „Monitored-Group" (MG) zugewiesen. Da diese drei Gruppen in den Genuss unterschiedlicher Kern- und Begleitmaßnahmen kommen, kann so die Wirksamkeit der einzelnen Maßnahmen beurteilt werden. Dabei dient die MG als reine Kontrollgruppe, die in ihren Anfangsvoraussetzungen und ihrer Motivationslage mit den erstgenannten beiden Gruppen vergleichbar ist.

Kern- und Begleitmaßnahmen

Zu Beginn des Semesters werden alle Studierenden der betroffenen Vorlesung mit Hilfe eines Fragebogens nach demografischen Variablen befragt, auch um später feststellen zu können, inwiefern sich die Studierenden aus MP² von der Grundgesamtheit unterscheiden. Sämtliche Befragungen werden online mit Hilfe der Befragungs- und Auswertungssoftware EvaSys durchgeführt. Zu Beginn und am Ende des Semesters werden ebenfalls alle Studierenden mit einem Fragebogen zu Lernstrategien im Studium (Wild & Schiefele, 1994) befragt.

Ein Lerntagebuch auf der Grundlage von Landmann und Schmitz (2007) wird von der SLG und der SDG ausgefüllt. Dieses ist täglich auszufüllen und enthält die Abschnitte „Vor dem Lernen" und „Nach dem Lernen" sowie Fragen zur Befindlichkeit und Motivationslage. Es dient als Interventionsinstrument und hat die Selbstregulation (Schmitz & Wiese, 2006) als Ziel, d.h. die Reflexion und ggf. die Modifikation des eigenen Verhaltens. Die Wirksamkeit des Lerntagebuchs kann durch den Vergleich der drei Gruppen trennscharf beurteilt werden.

Nur die Studierenden der SLG treffen sich wöchentlich mit einem Tutor zu einer Vorbereitungsübung. In diesen Sitzungen wird stets eine Lernmethode in Kombination mit einer fachlichen Fragestellung vorgestellt, erarbeitet und erprobt. Die Vorbereitungsübungen sind eine Ergänzung zum normalen Vorlesungsbetrieb. Beispiele für Themen in den Vorbereitungsübungen sind Gestaltung der Arbeitsumgebung, handschriftliche Notizen vs. digitale Dateien, Umgang mit Fachliteratur, Dynamische Geometrie Software (GeoGebra), Computer Algebra Systeme (Sage) sowie Klausurtaktik.

Für die Studierenden aus der SLG wurde ein spezieller Helpdesk eingerichtet, eine Anlaufstelle, wo studentische Hilfskräfte in fachlichen Fragen beraten, Vorlesungsinhalte erklären, bereits gelöste Übungszettel durchsehen und Tipps zum weiteren Vorgehen geben. Hierfür wurden neue Kräfte eingestellt und weitere Sprechzeiten eingerichtet, zusätzlich zum regulären Helpdesk des „Servicezentrum Mathematik und Anwendungen“ der Ruhr-Universität Bochum, der allen Studierenden der Natur- und Ingenieurwissenschaften zur Verfügung steht.

Eine jederzeit bereitstehende Unterstützung zum Einüben der Lerninhalte wurde mit Hilfe zweier Kurse in der eLearning-Plattform Moodle eingerichtet. Dort können die Studierenden der SLG und der SDG umfangreiche Testaufgaben zu allen Stoffgebieten der Vorlesung abrufen und sofort eine Rückmeldung zu ihren Lösungen erhalten. Darüber hinaus gibt es eine Dateiablage sowie Forum und Wiki zum Informationsaustausch und zur Kontaktaufnahme.

Erste Ergebnisse

Eine umfassende Auswertung steht noch aus. Eine erste Sichtung der Daten zeigt, dass in der Skala „Verfügbare Lernstrategien“, einem zentralen Ansatzpunkt von Mathe/Plus, die Studierenden sich tendenziell positiv entwickeln. Auch in den Skalen „Befindlichkeiten/Emotionen“ und „Energie/Anstrengungsbereitschaft“ weist der Trend in die erwünschte Richtung.

Nun müssen noch die Ausprägungen in den drei Gruppen genau betrachtet werden, damit die Einzelmaßnahmen evaluiert werden können. Insbesondere wird dezidiert untersucht werden, ob und wie sich die verfügbaren Lernstrategien verändert und ob und wie die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der einzelnen Gruppen letztendlich die Abschlussklausur bewältigt haben.

Persönliche Interviews mit einigen Studierenden sollen außerdem Aufschluss darüber bringen, wie schwierig sie den Wechsel von der Schule an die Universität erlebt haben, wie sie die Anfangsphase ihres Studiums bewältigt haben und welche der angebotenen Maßnahmen besonders hilfreich waren.

Verstetigung und Transfer

Im Hinblick auf den zweiten Projektdurchgang von MP² ab dem Wintersemester 2011/2012 und eine darüberhinausgehende Verstetigung werden alle Elemente des Projektes daraufhin überprüft, ob sie sich bewährt haben, und wie man sie effizienter gestalten könnte. Hinsichtlich einer nachhaltigen Umsetzung wird auch die Übertragbarkeit der Projektinterventionen auf andere Fachbereiche eine zentrale Rolle spielen.

Literatur

Dehling, H., Glasmachers, E., Härterich, J. & Hellermann, K. (2010). MP² - Mathe/Plus/Praxis: Neue Ideen für die Servicelehre. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 18,* 252.

Heublein, U., Spangenberg & H., Sommer, D. (2003). Ursachen des Studienabbruchs: Analyse 2002. *Hochschulplanung, 163.* Hannover: Hochschul-Informations-System.

Heublein, U., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2008). *Die Entwicklung der Studienabbruchquote an den deutschen Hochschulen: Ergebnisse einer Berechnung des Studienabbruchs auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2006. HIS Projektbericht.* Hannover: Hochschul-Informations-System.

Landmann, M. & Schmitz, B. (2007). Die Kombination von Trainings mit standardisierten Tagebüchern: Angeleitete Selbstbeobachtung als Möglichkeit der Unterstützung von Trainingsmaßnahmen. In: M. Landmann & B. Schmitz (Hrsg.), *Selbstregulation erfolgreich fördern. Praxisnahe Trainingsprogramme für effektives Lernen* (S. 151-163). Stuttgart: Kohlhammer.

Schmitz, B. & Wiese, B.S. (2006). New perspectives for the evaluation of training sessions in self-regulated learning: Time-series analysis of diary data. *Contemporary Educational Psychology, 31,* 64-96.

Wild, K.-P. & Schiefele, U. (1994). Lernstrategien im Studium. Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragebogens. *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie, 15,* 185-200.

Svenja GRUNDEY, Hamburg

Lehrerhandeln in Beweisprozessen im Mathematikunterricht: auf die richtige Balance kommt es an!

Begründen und Beweisen spielt sowohl in der Mathematik als auch in der Mathematikdidaktik eine wichtige Rolle. Diese Tatsache spiegelt sich beispielsweise in den prozessbezogenen Kompetenzen in den deutschen Bildungsstandards (2003) wider. Schwierigkeiten, die Schülerinnen und Schülern mit dem mathematischen Argumentieren und Beweisen haben, konnten in einer Vielzahl von Studien aufgezeigt werden (Reiss, Klieme & Heinze, 2001; Healy & Hoyles, 1998; Harel & Sowder 1998). An diese Ergebnisse schließt sich die Frage an, wie sich die Beweiskompetenz von Schülerinnen und Schülern fördern lässt. Einige erfolgreiche Methoden wie beispielsweise heuristische Lösungsbeispiele und Themenstudienarbeiten von Lernenden wurden bereits von Reiss et al. (Reiss, Klieme & Heinze, 2001) und Kuntze (2006) im Unterricht eingesetzt und evaluiert.

Der Konzeption meines Unterrichtsexperimentes liegt die Annahme zugrunde, dass die deduktive Methode als sozial konstruiert angesehen werden kann und die Frage nach der Gültigkeit von der jeweiligen sozialen Gruppe abhängig ist (Reid & Knipping S. 48ff.). Durch die Konfrontation mit prototypischen Schülerbeweisen wird den Lernenden ermöglicht, ein Beweisverständnis zu entwickeln, das einerseits an ihrem Vorwissen und ihren Vorstellungen anknüpft und andererseits von der Lerngruppe als soziale Gemeinschaft akzeptiert werden kann. Die Frage, welchen Einfluss das Lehrerhandeln in dieser Phase auf die Förderung der Beweiskompetenz, im Besonderen auf die Beweisvorstellungen in dem Unterrichtsexperiment hat, soll mit Hilfe der erhobenen Daten geklärt werden.

Konzeption des Unterrichtsexperiments und Untersuchungsmethode

Als Grundlage für die Konzeption des Unterrichtsexperimentes dienen empirische Ergebnisse aus der mathematikdidaktischen Literatur zum Thema „Beweisen“ (z.B. Healy & Hoyles 1998, Kuntze 2006). Im Zentrum des Unterrichtsexperimentes steht der Wechsel zwischen diskursiven Elementen und Phasen der Metareflexion und Eigenaktivität der Lernenden (Grundey, 2010). Als Ausgangspunkt dienen die aus dem vorangegangen Unterricht vorhandenen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler zu mathematischen Beweisen, die während des Unterrichtsexperimentes reflektiert, revidiert und ergänzt werden. Der Aspekt der Metareflexion spielt besonders in den Unterrichtsgesprächen eine entscheidende Rolle, beispielsweise bei der Entwicklung von Kriterien für mathematische Beweise im

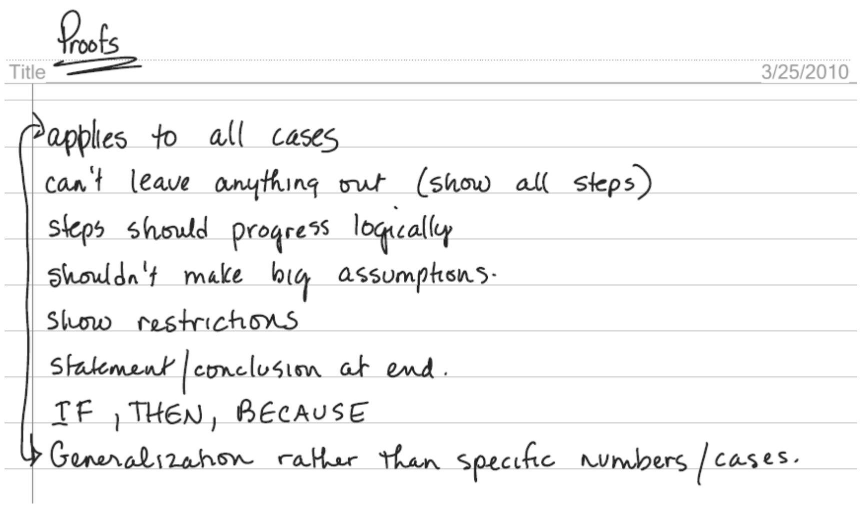
Anschluss an die Diskussion über exemplarische Schülerbeweise, die prototypisch für bestimmte Beweisstrategien stehen (angelehnt an Healy & Hoyles 1998).

Die konzipierte Lernumgebung wurde in zwei deutschen Klassen der Jahrgangsstufe 10 und zwei kanadischen High School Kursen unterrichtet. Als Datengrundlage für die Evaluation des Unterrichtsexperimentes dienen sowohl die schriftlichen Lösungen der Schülerinnen und Schülern als auch Video- und Audioaufnahmen aus den Unterrichtsstunden und Interviews, die zum Abschluss mit einigen ausgewählten Lernenden und den Lehrpersonen Interviews geführt wurden.

Ergebnisse

Zu Beginn des Unterrichtsexperimentes zeigte sich in allen vier Lerngruppen ein sehr homogenes, enges Bild bei der Beweisvorstellung, welches sich als „Beweisen als algebraisch – numerisches Verifizieren“ charakterisieren lässt (Grundey, 2010). Auf Grundlage der Diskussion über die exemplarischen Schülerbeweise als Prototypen für Beweisstrategien wurden in allen Lerngruppen im Unterrichtsgespräch Kriterien für mathematische Beweise entwickelt, wobei sich das Verhalten der Lehrpersonen und das Vorgehen in den Klassen und Kursen deutlich voneinander unterschieden haben.

Exemplarisch für ein sehr gelungenes Lehrerverhalten in dieser Phase bei der Förderung der Beweisvorstellung steht der folgende Auszug aus dem kanadischen Kurs H. In besonderer Weise gelang es der Lehrerin, im Anschluss an die Brainstormingphase, in der zunächst alle Schüleräußerungen gewürdigt wurden, an die Schülerantworten / -vorstellungen anzuknüpfen und gleichzeitig eine Brücke zu den Kriterien in der Mathematik zu schlagen (s. Tabelle 1).


Proofs
Title 3/25/2010
applies to all cases
can't leave anything out (show all steps)
steps should progress logically
shouldn't make big assumptions.
show restrictions
statement/conclusion at end.
IF, THEN, BECAUSE
Generalization rather than specific numbers/cases.

PROOFS

1) Consider the general case [unless you are able to disprove]
(a single case would suffice)

2) Logical progression of thought (without gaps)

3) Be careful not to make assumptions or skip steps necessary for clarification

Tabelle 1: Tafelbild zu den entwickelten Kriterien im Kurs H (aus der Brainstorming Phase (oben) und der Phase der Fokussierung durch die Lehrerin (unten))

Durch die Fokussierung der Lehrerin auf die logisch – deduktive Art des Schließens in mathematischen Beweisen scheint bei den Lernenden der theoretische Begriff ausgeschärft und mit Sinn gefüllt zu werden. Dieser positive Einfluss zeigt sich beispielsweise bei Charlotte (Kurs H).

VORHER: Frage: What is a mathematical proof for you?	***NACHHER: Frage: What is a mathematical proof for you?***
Charlotte: A mathematical proof is a series of steps that shows how a mathematical equation or statement came to be true.	A mathematical proof is a series of logical steps that clearly shows how a statement is true. It must be generalized and no assumptions must be made.

Im Gegensatz zum beschriebenen Ablauf im Kurs H hat die Lehrperson im kanadischen Kurs C im Anschluss an die Brainstormingphase die Schülerantworten nicht weiter strukturiert (s. Tabelle 2), obwohl die Schülerantworten ebenfalls von der Lehrerin auf die logisch – deduktive Art des Schließens als charakteristisches Kriterium für Beweise hätten fokussiert werden können.

Criteria:

- step by step
- mathematically sound
- structure, order
- simple wording
- using formulas

- variables
- solves for <u>all</u> functions
- (not specific examples)
- show any restrictions
- helpful to have comment or explanations

Tabelle 2: Tafelbild zu den entwickelten Kriterien im Kurs C (aus der Brainstorming Phase)

Durch diese fehlende Fokussierung und Strukturierung der Schülerantworten scheinen die Schülerinnen und Schüler aus dem Kurs C größere Schwierigkeiten zu haben, den Begriff des mathematischen Beweises auszuschärfen und ihre anfängliche Beweisvorstellung zu erweitern. Exemplarisch für diese Problematik stehen die folgenden Antworten von Jean, die sich im Gegensatz zu Charlotte auf die Art der äußeren Darstellung und nicht auf die logische Struktur in mathematischen Beweisen beziehen.

VORHER: Frage: What is a mathematical proof for you?	***NACHHER: Frage: What is a mathematical proof for you?***
Jean: *Showing or being able to prove that a mathematical statement or equation is true.*	*A mathematical proof shows that a given statement is true for any given function or value by using variables and giving thorough explanation.*

Diskussion

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass sich die Ausgewogenheit im Lehrerverhalten im Kurs H in der Phase der Entwicklung von Kriterien für mathematische Beweise besonders förderlich auf die Ausschärfung des theoretischen Begriffs des mathematischen Beweises auszuwirken scheint. Der kanadischen Lehrerin im Kurs H gelingt es in besonderer Weise, sowohl eine Brücke zwischen den Schülervorstellungen/ -antworten und den Kriterien in der Mathematik zu schlagen als auch den Lernenden genügend Raum für ihre Ergebnisse und Vorstellungen zu geben. Durch eine fehlende Strukturierung in dieser Phase scheint sich wie im Kurs C beschrieben die Beweisvorstellung wie zu Beginn bei den Schülerinnen und Schülern eher auf die äußere Art der Darstellung als auf die logisch – deduktive Art des Schließens zu beziehen, welches sich mit Ergebnissen bei Harel & Sowder (1998) deckt.

Literatur

Grundey, S. (2010): Eigenständige Beweisaktivitäten im Mathematikunterricht – Schülervorstellungen und Kompetenzen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, 361 – 364, WTM – Verlag, Münster.

Harel, G.; Sowder, L. (1998): Students’ Proof Scheme: Results from Exploratory Studies. In: CBMS Issues in Mathematics Education, American Mathematical Society, 7, 234-283.

Healy, L.; Hoyles, C. (1998): Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey, 1998.

Kuntze, S. (2006). Themenstudienarbeit – Konzeption einer Lernumgebung für den gymnasialen Mathematikunterricht und Evaluation einer Themenstudienarbeit zum mathematischen Beweisen und Argumentieren. [Dissertation]. München: LMU.

Reid, D. A.; Knipping C. (2010): Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching. Sense Publishers, Rotterdam.

Reiss, K.; Klieme, E. & Heinze, A. (2001): Prerequisites for the Understanding of Proofs in the Geometry Classroom. Proceedings of the 25th Conference for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht.

Ján GUNČAGA, Štefan TKAČIK, Ružomberok, Slovakia

Historical remarks to integration methods[1]

This article makes an excursion into the history of integration, from ancient to the present time. Our presentation is based on the exhaustion method invented by Eudoxos and used by Archimedes and Oresme in their integration attempts. The aim of our article is to show that this approach leads to an integral equivalent to the Lebesgue integral. It is based on the summation of infinite series and it has some pedagogical advantages. A weaker form of it completely avoids measure theory and it is simpler than the Riemann integral.

1. Archimedes method for the finding the area of a parabolic section

The proof is one of reductio ad absurdum, and the method is to show that, if the diagonal of a square is commensurable with the side, then the same number must be both odd and even. The understanding that the diagonal of a square is not commensurable with its side lead to the better understanding of numbers: the notion of cardinality in terms of natural (and rational) numbers is not rich enough to express various forms of the length. The calculations by Archimedes provided strong impetus for the development of real number. The method of finding the area of parabolic section as he presented it so far is surely not rigorous by our standards. Archimedes did not stop at the picture, he offered a fine argument. His argument became an important principle of mathematical analysis. He found this important property by calculating the sum of the areas of triangles, which fill parabolic section. We have to calculate the following sum: $A+\frac{1}{4}A+\frac{1}{4^2}A+\frac{1}{4^3}A+\ldots$ He proceeded in an ingenious way illustrated in Figure 1. From a square one corner is removed. The removed corner is a square whose side is half of that of the original square and, hence, its area is $\frac{1}{4}$ of the area of the original square. The resulting area of three squares equals the area of A, so that the area of the original square is $\frac{4}{3}A$. The same is done with the removed square in the

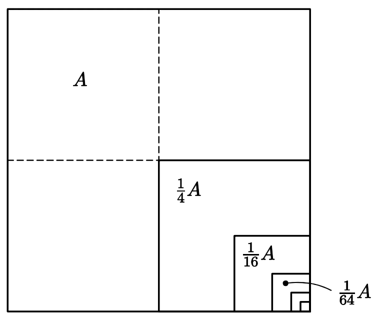


Figure 1

[1] **Remark:** Supported by Grants KEGA Nr. 3/7068/09, Nr.168-010KU-4/2010.

corner, then with the square removed from this square and so on. The union of all figures so obtained is the whole of the original square. Therefore $A+\frac{1}{4}A+\frac{1}{4^2}A+\frac{1}{4^3}A+...=\frac{4}{3}A.$ Archimedes proved, that $\frac{4}{3}A$ is the smallest of all numbers B such that $A+\frac{1}{4}A+\frac{1}{4^2}A+\frac{1}{4^3}A+...+\frac{1}{4^n}A<B, n=0,1,2,...$

Archimedes needed for this purpose the following property of numbers which have now name the principle of Archimedes:

For any numbers $\varepsilon > 0$ and K, there exists $n\in N$ such that $\frac{1}{n}K<\varepsilon$.

By this way we introduce the sum of a sequence of positive numbers.

Archimedean definition. *A number s is called the sum of the sequence of positive numbers $a_0, a_1, a_2,\ldots$ if s is the smallest of all the numbers b such that $a_0 + a_1 + a_2+\ldots + a_n \le b$ for every $n = 0, 1, 2,\ldots$*

If s is the sum of the sequence of numbers $a_0, a_1, a_2,\ldots$, then we write

$a_0 + a_1 + a_2+\ldots = s$.

This approach to infinite sums is easier and avoids limits. The correct definition of the limit of a sequence requires the involvement of three quantifiers. On the other hand, in the Archimedean definition of sum we got away with only 2 quantifiers.

2. “Archimedes” integral - application of the Archimedean methods

Nicole d’Oresme around 1350 has shown that $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...=2.$ The sum was obtained by modifying the geometric method of Archimedes. He divided the same planar region into rectangles in 2 ways. The first way, rectangles have base of length $\frac{1}{2^n}$ and height n, therefore its area is equal $\frac{n}{2^n}$ and the sum of areas of these rectangles is $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...$ The second way, each rectangle has base of length $\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{n+3}}+...=\frac{1}{2^n}$. Hence

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...=2.$$

The determination of area of a parabolic section by Archimedes on Figure 2 and the finding sum by Oresme are both based on the following property of area which is called σ-additivity: If a planar set S is equal to the union of sets S_1, S_2, S_3,… such that the common part of any two of them has the area equal to zero, then the area S is equal to the sum of the areas of the sets S_1, S_2, S_3, … Archimedes and Oresme´s calculations show that this property can be used for determination of areas of planar sets and also for finding sums of sequences. If we interpret the integral of a positive function as the area of "region under its graph", then we can of course use this property for finding integrals.

Let us translate these geometric ideas into analytic language. The length of bounded interval I, that is, the absolute value of the difference of its end-points, is denoted by $\lambda(I)$. Characteristics function of the interval I, we denoted by χ_I, so $\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ 0 & x \notin I \end{cases}$. If c is an positive number and I a bounded interval, then the „region under the graph" of the function $c\chi_I$ is a rectangle whose base has the length $\lambda(I)$, the height is c and the area is $c\lambda(I)$. Using these conventions we can define "Oresme" integral.

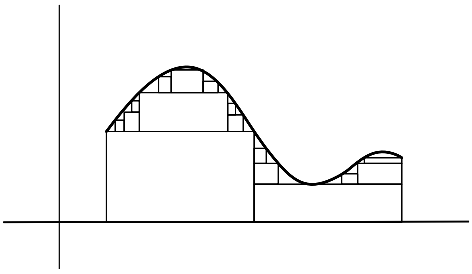


Figure 2

Definition 1. Lets function f is a nonnegative in the interval I. Let c_i nonnegative numbers and intervals $I_i \subseteq I$, i = 1, 2, 3, … such that following condition is satisfy :

$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{I_i}(x)$ for every $x \in I$ and exist the sum $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda(I_i)$.

Oresme integral in the interval I is then defined $(\mathrm{O})\int_I f\, d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda(I_i)$.

This definition is valid for the nonnegative and bounded functions (see Figure 2). Although the class of such functions is already quide wide, Oresme´s derivation suggest that it can be widened. For example, it is possible to include some functions with negative values. When we cover the "region under the graph" of function, we do not have to stay with the rectangles strictly within that region. If we overshoot with some, we subtract the areas of rectangles covering the excess. In figure 3 the subtracted rectangles are shaded. In this case we need following modified definition.

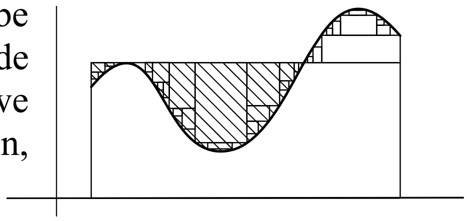


Figure 3

Definition 2 Lets function f is define in the interval I. Let c_i are numbers and intervals $I_i \subseteq I$, i = 1, 2, 3, … such that following condition is satisfy:

1. $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{I_i}(x)$ for every $x \in I$,

2. $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \chi_{I_i}(x) < \infty$ for every $x \in I$,

3. $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \lambda(I_i) < \infty$

Kluvánek integral in the interval I is then defined $(\mathrm{K})\int_I f\,d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda(I_i)$.

For example, it is possible to include some unbounded functions and it is not necessary to assume that the underlying interval I be bounded. But of course, some precautions then have to be taken because the area of the "region under the graph" may be infinite and it may not be possible or easy to cover the "region under the graph" by rectangles without also covering some points off that region. In this case we need following modified definition.

Definition 3.

Lets function f is define in the interval I. Let c_i are numbers and intervals $I_i \subseteq I$, i = 1, 2, 3, … such that following condition is satisfy :

1. $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{I_i}(x)$ for every $x \in I$, for which hold $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \chi_{I_i}(x) < \infty$,

2. $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \lambda(I_i) < \infty$.

Archimedes integral in the interval I is then defined $(\mathrm{A})\int_I f\,d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda(I_i)$.

3. Conclusions.

The last question in our article is about the relation of Archimedes integral to other notions of integrability and integral found in the literature. It turns out that a function is Archimedes integrable if and only if it is Lebesgue integrable and the Archimedes integral of such function coincides with its Lebesgue integral. The approach to integration outlined in our article has a strong historical aspect and presents integration in a simple and effective way, hence it is suitable from educational point of view.

References

[1] Kluvánek, I. (1987): Archimedes was right, Elemente der Mathematik, Vol. 42, Nr.4, 93-114.

[2] Tkačik, Š. (2010): Historické poznámky o metódach integrovania, Scientific Issues, Teaching Mathematics II, Ružomberok, 179-190. ISBN 978-80-8084-645-9

Roland GUNESCH, Landau

Understanding Mathematical Chaos: Impressions from an Experimental Attractor Competition

Abstract and overview

We have observed very complex mathematics, namely attractors of complex Dynamical Systems, being approached experimentally.

German universities are working towards an increased mathematics awareness among schools and the general public. Particularly effective is the organization of a yearly Mathematics Day ("Tag der Mathematik") at universities where classes of high school students participate in mathematics competitions and enjoy various other mathematical exhibitions. At the University of Hamburg such Mathematics Days have been held during the years 2008 through 2010, and each time the author was involved with organizing an "experimental attractor competition". This is a hands-on exploration opportunity where school students (as well as the interested public) can experiment with mathematics, in particular Dynamical Systems, attractors and their graphical representations. The participants included practically all ages, but most of them were between 7 and 20 years old due to the school-focused nature of the events.

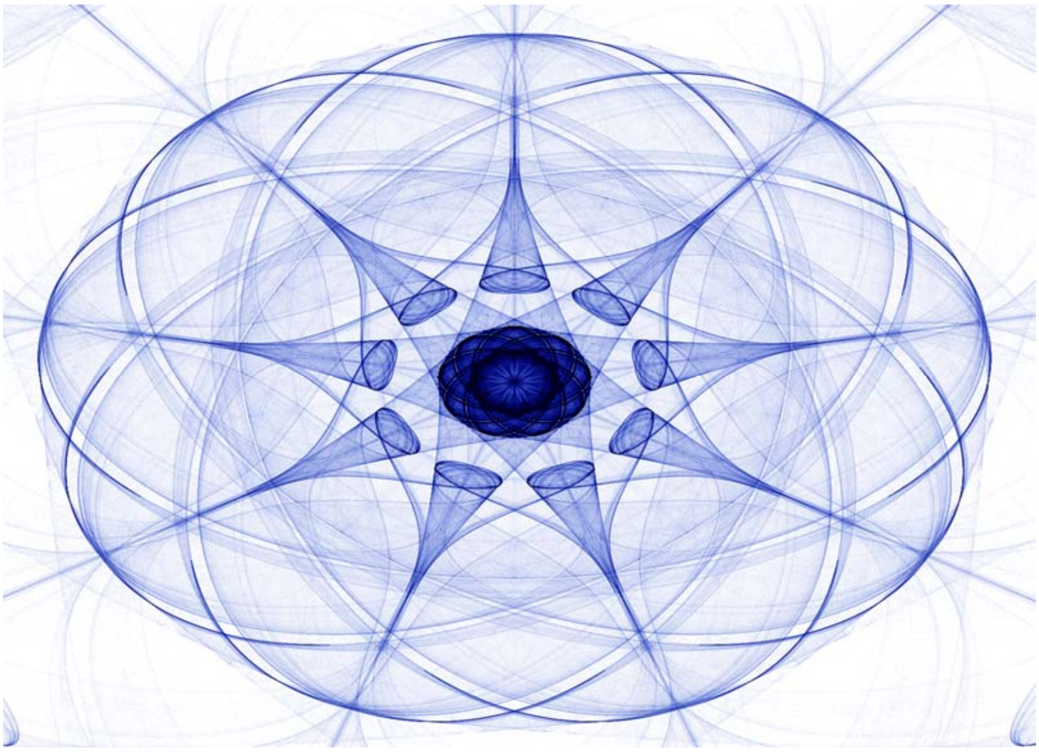


Illustration 1: Attractor with symmetry (chosen by Suzanne Linder)

Dynamical Systems, orbits, and computer images of chaotic attractors

We (Martin Kunkel, Reiner Lauterbach and the author) have created software that plots the *orbit* of certain mappings in the complex plane. The formula of the mapping itself is not actually the object to be studied. It is a fairly simple quotient of two complex-valued polynomials with the degree of the denominator large enough so that the trajectory of any point near the origin stays "on the computer screen". There is no need for the users (henceforth "participants") to know the formula, and it would be misleading since high school students may associate polynomials with the need to "solve them" (find zeroes) whereas here we have something entirely different in mind. What is visible to users of this software are various parameters of the mapping. What we want to investigate are *orbits* of the mapping: If z is a point in the complex plane ("on the computer screen") and the mapping is called f, then the so-called *trajectory* or *orbit* of the point z under f is the sequence of points

$$z, f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), \dots$$

This is an infinite sequence, but a (sufficiently long) part at the beginning will show its geometric structure. It is easy to understand f and to compute $f(z)$ for one single point z, but the whole trajectory of z is very complicated. The image above shows how it can be very convoluted and intricate. This is the image of an *attractor*. (Mathematically speaking, the trajectory is only an approximation of the actual attractor, usually "similarly looking".) Such a mapping, a *Dynamical System*, can be (and in this case is) *chaotic*, meaning that the orbit and hence the shape of the attractor is difficult to predict theoretically (but easy to compute). Most of the resulting images have never before been seen by any human being in the world. This makes the exploration particularly exciting. The rest of this article can be understood without the preceding mathematical explanation.

To increase the visual appeal of the resulting attractors, we constructed the mapping so that the resulting images are symmetric. The participant can choose between several rotational symmetries, e.g. by 1/3 of a full rotation.

The mapping f depends on several parameters which change the shape and appearance of the attractor. The participants control these parameters.

We had set up many computers (PCs, monitor, mouse, keyboard) in a public space, each running our software where participants control several parameters by simply clicking on appropriate control buttons, and our software would automatically create an image of the resulting attractor.

Observations during the experimental phase of attractor exploration

We then left the participants to explore and experiment on their own and in the process create images of different attractors, motivated solely by their own curiosity. We did also announce that people who would create the "most interesting" or "most beautiful" images would at the end of the day win a prize, and created an awards ceremony for this. Watching the participants explore these attractors offered some, possibly very interesting, insights into mathematics teaching and learning.

As already explained, the resulting images can be very beautiful, yet cannot really be predicted without the help of a computer because the underlying mathematics is too difficult. The usual procedures and algorithms that school students have learned and practiced will not work: There is no "standard path" to take to find out what the attractors will look like; however, experiment and exploration work very well in this case.

Note that the whole event focuses on mathematical exploration, and we tried to maximize student involvement, as opposed to merely creating a less appealing test where we could measure more precisely.

This study observed what particular procedures the participants used to create interesting attractor images, the length of their attention span while exploring, how the participants reacted to surprising new discoveries, how "prolific" the participants were, whether the resulting images would show a particular "personal style" of the creator (which actually turned out to be the case), and how the participants organized themselves as teams or sole explorers. The observational findings are as follows:

Procedures: Most participants used the easiest-to-reach controls in the graphical user interface of our software, which were sliders and arrow buttons that can be clicked with the mouse. There are also buttons for predefined values. Some participants were more meticulous, carefully writing down particularly interesting parameter values by hand. Some bypassed the graphical user interface completely and used the keyboard to manually type interesting parameter values, either values which were obtained from other participants on a nearby computer, or promising modifications of values presently in use. Hence some of the participants went beyond merely using a simple user interface and managed to focus their attention more on the underlying mathematics.

Length of attention span: Most participants spent a few minutes at the display, which is already noticeably longer than the time people usually take to look at a single piece of art in a museum, or the time to look at a non-interactive mathematical exhibit. So the user-interactive methods of exploring mathematical content apparently generated more interest and longer attention span than passive presentations typically do. Moreover, some participants returned to the attractor exploration several times. A few also stayed for an extended period of time: In one instance a girl of age 7 tirelessly worked for more than an hour, producing a prolific output of images, systematically exploring wide ranges of parameters and even finding very rare images where the symmetry of the attractor disappears from the computed version.

Reaction to new discoveries: Most participants reacted visibly to some of the attractor shapes, expressing surprise and sometimes open happiness, even though the attractor shapes are completely abstract.

Assessment of "productivity" and development of personal styles: The setup included a color laser printer where participants could print for free as many of their works of art as they wished. These works also entered the prize competition automatically. Most participants produced one single piece of artwork, some produced a small number, and very few participants produced a substantial number of works of art, in some cases more than 20. Observing these latter participants showed (surprisingly) that each "artist" clearly has their own style which is optically evident in the resulting works. Our software encouraged individual styles by giving users some choices (e.g. what color the attractor is drawn in) which were not mathematically relevant but seemed to enhance participants' interest.

Solitary exploration and the organization of teams: Most participants explored alone, each one on a separate PC, and this was in fact what we originally had in mind. However, some teams formed, with participants comparing parameter values and appraising each other's attractors. The effect of the team size could be investigated in further studies.

Conclusions

High school students have graphically explored attractors of chaotic Dynamical Systems, hence are capable of dealing with mathematical content substantially more sophisticated than they have encountered at school. We also observed discovery style, endurance, productivity, artistic styles and teamwork.

References

Hasselblatt, B., Katok, A. (2003): A first course in dynamics with a panorama of recent developments. Cambridge University Press.

Corinna HÄNISCH, Aachen

Denkformen des formalen Denkens – Eine empirische Studie zur spezifischen Kognition von Studienanfängern im Fach Mathematik

Im Wintersemester 2009/2010 wurde an der RWTH Aachen eine qualitative Studie mit Studienanfängern durchgeführt, mit dem Ziel, den Schritt von der Schul- zur Hochschulmathematik näher zu beleuchten. Insbesondere wurden Schwierigkeiten beim Übergang zur formalen Hochschulmathematik untersucht, die in dieser Form für Erstsemester unbekannt ist.

Dazu wurden insgesamt fünf Leitfadeninterviews zu unterschiedlichen mathematischen Themen (Mengenlehre, Vollständige Induktion, Abbildungen, Relationen, Gruppen) geführt, die für die spätere Auswertung darüber hinaus videografiert wurden. Die Interviews lehnten sich inhaltlich an die Pflichtveranstaltung „Mathematische Grundlagen“ an, wobei die Interviews zeitlich nach der Behandlung des jeweiligen Themas in der Veranstaltung durchgeführt wurden. Die Veranstaltung Mathematische Grundlagen wurde mit der Einführung des Bachelor-Studiengangs Mathematik speziell als Brückenveranstaltung von der Schul- zur Hochschulmathematik konzipiert. Insgesamt haben an der Hauptstudie zwölf Studierende teilgenommen, wobei die eine Hälfte in den Studiengang Bachelor Mathematik und die andere in den Lehramtsstudiengang Mathematik für Gymnasien und Gesamtschulen eingeschrieben ist.

Kategorien der Analyse

Die von uns erarbeiteten Kriterien der Analyse orientieren sich an dem gewünschten umfassenden Verständnis eines mathematischen Begriffs. Hierzu gehören nach unserer Auffassung neben der formalen Definition formale Fertigkeiten, Veranschaulichungen, ein umfassender Vorrat an Beispielen bzw. Gegenbeispielen und Verknüpfungen zu anderen Wissensgebieten. Daraus ergeben sich für die Analyse die drei Oberkategorien *Fehlvorstellungen*, *Formale Fertigkeiten* und *Veranschaulichungen*.

Fehlvorstellungen: Das Verständnis mathematischer Begriffe wird durch bereits vorhandene Wissenselemente beeinflusst. Gerade bei dem Interview zum Thema Abbildungen, das im Folgenden etwas ausführlicher dargestellt wird, war davon auszugehen, dass jeder Studienanfänger bereits aus der Schule ein gewisses Vorverständnis hierzu mitbrachte. Durch die Interviews sollte nun das vorhandene mentale Modell (vgl. Johnson-Laird 1983, S. 2) und zugehörige Fehlvorstellungen der Studierenden näher untersucht werden. Unter Fehlvorstellungen werden hierbei sowohl falsche Vorstellungen als auch Wissenslücken gefasst.

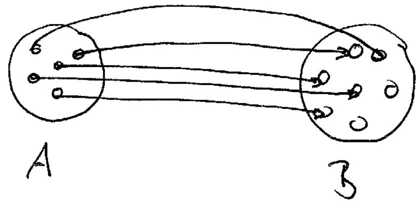
Formale Fertigkeiten: Die formal-syntaktische Ebene mit der Möglichkeit der inhaltslosen Regelanwendung ist ein Charakteristikum der Mathematik. Neben formalen Umformungen soll an dieser Stelle allerdings auch noch die Fähigkeit des Formalisierens und das Verständnis formaler Ausdrücke in den Fokus gerückt werden. Hierzu wurde in den Interviews neben kurzen formalen Beweisen an mehreren Stellen nach der Quantorenschreibweise oder dem Verständnis einer bisher unbekannten formalen Definition gefragt, so dass alle drei Fähigkeiten im Bereich der formalen Fertigkeiten näher beleuchtet werden konnten.

Veranschaulichungen: Hierbei wird unterschieden zwischen exemplarischen Veranschaulichungen und generischen Veranschaulichungen, die eine exemplarische Eigenschaft verdeutlichen. Für beide Arten kann nach Bruner zwischen ikonischen und symbolischen Veranschaulichungen unterschieden werden. So gehören beispielsweise im Bereich Abbildungen sowohl Graphen als auch Abbildungsvorschriften zu den exemplarischen Veranschaulichungen. Veranschaulichungen können von den Studierenden an den unterschiedlichsten Stellen verwendet werden, aber ein besonderes Augenmerk wurde auf jene beim Einstieg in ein neues Themengebiet gelegt. Die Einstiegsfrage wurde immer bewusst allgemein gestellt („Was ist eine Abbildung“), so dass den Studierenden nicht vorgegeben wurde, für ihre Erklärungen die formale Definition oder z. B. eine Veranschaulichung zu wählen.

Einige Ergebnisse aus den Interviews zum Thema Abbildungen

Das dritte der insgesamt fünf Interviews beschäftigte sich mit dem Thema Abbildungen. Zuerst wurde allgemein über Abbildungen gesprochen. Obwohl die Art des Einstiegs den Studierenden selbst überlassen wurde, sollten am Ende sowohl die formale Definition als auch Beispiele und Veranschaulichungen besprochen worden sein. Danach wurden die Begriffe Injektivität, Surjektivität und Bijektivität behandelt, wobei auch Aufgaben gestellt wurden, die über die zuvorige Behandlung in der Veranstaltung hinausgingen. Am Ende der Interviews wurde, wie in allen fünf Interviews, etwas bisher Unbekanntes besprochen; in diesem Fall die Monotonie. Es war zwar davon auszugehen, dass Begriffe wie monoton steigend bereits aus der Schule bekannt waren, aber hier erfolgte der Einstieg über die formale Definition, wobei eine passende Wortmarke von Seiten der Studierenden zu ergänzen war.

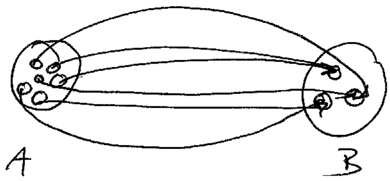
Im Folgenden werden einige exemplarische Ergebnisse des Interviews vorgestellt. Besonders während der Erklärungen zu den Begriffen Injektivität, Surjektivität und Bijektivität kommen Lücken zum Vorschein. Als beispielsweise Sw1 eine Veranschaulichung zu dem Begriff Injektivität zeichnet, erklärt sie ihr Konzept hierzu wie folgt:



Sw1: Also wenn es injektiv ist, dann bilde ich hier jedes Element auf genau ein Element ab und dann hab ich halt hier noch Elemente auf die nichts abgebildet wird.

Das entscheidende Merkmal einer injektiven Abbildung, dass jedes Element des Zielbereichs höchstens einmal angenommen wird, kommt in der Erklärung von Sw1 nicht vor. Insofern ist ihr Konzept unvollständig und teilweise auch falsch, da sie hier heraushebt, dass die Abbildung nicht surjektiv ist. Im ersten Teil betont sie die Wohldefiniertheit der Abbildung ("dann bilde ich hier jedes Element auf genau ein Element ab"); für sie scheint dies ein entscheidendes Charakteristikum für eine injektive Abbildung zu sein.

Ähnliche Schwierigkeiten zeigt die gleiche Studentin auch bei der Surjektivität.



Sw1: Wenn 's, öh, surjektiv ist, dann bilde ich halt z. B. auf ein Element mehrmals ab.

Hier wird die Tatsache, dass ein Element des Zielbereichs mehrmals getroffen werden kann, in den Fokus gerückt („nicht Injektivität“) und dies scheint das dominierende Element des Konzepts von Sw1 zu sein. Diese Fokussierung ist insofern nicht hilfreich, da das entscheidende Merkmal, dass alle Elemente des Zielbereichs mindestens einmal getroffen werden müssen, nicht genannt wird. Stattdessen nennt sie eine Eigenschaft, die nicht auf alle surjektiven Abbildungen zutrifft, siehe beispielsweise den Spezialfall einer bijektiven Abbildung.

Für die Studentin scheinen Injektivität und Surjektivität zwei komplementäre Eigenschaften einer Abbildung zu sein. Diese These lässt sich auch dadurch stützen, dass die Studentin im weiteren Verlauf des Interviews die Frage, ob es Abbildungen gebe, die nicht injektiv und nicht surjektiv sind, zuerst verneint.

Nach der Behandlung der Quantorenschreibweise der drei Begriffe werden den Studierenden formale Ausdrücke vorgelegt und nach einem möglichen Bezug zum bisher Besprochenen gefragt.

$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Sw2: Wir haben das anders rum gesagt, würde sagen, dass das auch injektiv ist.

Mehrere Studierende bezeichnen diesen Ausdruck als Definition der Injektivität, aber gerade bei Sw2 wird deutlich, dass die veränderte Pfeilrichtung nicht lediglich durch zu oberflächliches Hinsehen unbemerkt bleibt. An dieser Stelle hat sie Zeit, sich den Ausdruck in Ruhe anzuschauen, so dass der Schluss nahe liegt, dass sie einen solchen formalen Ausdruck mit einer Folgerungsbeziehung nicht korrekt interpretieren kann. Anderen Studierenden hingegen ist der Unterschied bewusst und sie erläutern direkt den Unterschied zur Injektivität. Allerdings zeigen sich Probleme beim Verständnis von Implikationen auch an anderen Stellen, so dass dies eine Schwierigkeit für Erstsemester zu sein scheint.

Funktionale und prädikative Denkstile

Es soll untersucht werden, inwieweit eine Präferenz für funktionales bzw. prädikatives Denken nach Schwank Einfluss auf den Umgang mit dem formalen Zugang zur Mathematik in der Hochschule hat. Hierzu wird untersucht, ob z. B. Erklärungen oder Veranschaulichungen Indizien für einen der beiden Denkstile enthalten. Für die Klassifizierung wurden am Ende des ersten Interviews neun QuaDiPF-Aufgaben durchgeführt (vgl. Schwank 1999/2000). Hierbei zeigte sich, dass bei den Teilnehmern sowohl Präferenzen für einen prädikativen als auch für einen funktionalen Denkstil erkennbar sind. Entsprechend den Ergebnissen aus vorherigen Studien wurde eine Präferenz für einen funktionalen Denkstil häufiger bei den männlichen Teilnehmern und für einen prädikativen bei den weiblichen festgestellt (vgl. Schwank 2003). Allerdings benutzte ein männlicher Bachelor-Student lediglich prädikative Erklärungsmuster bei allen Aufgaben.

Literatur

Johnson-Laird, P. N. (1983): Mental Models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness. Cambridge: Cambridge University Press.

Schwank, I. (1999/2000): QuaDiPF – Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken. Sets A/B/C/D. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In I. Schwank: ZDM-Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik', ZDM 35(3), 70-78

Uta HÄSEL-WEIDE, Dortmund

Einblick in unterrichtsintegrierte Förderprozesse zur Ablösung vom zählenden Rechnen

Zählendes Rechnen ist für Kinder zu Schulbeginn vielfach der elementare Zugang zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben. Spätestens im Laufe der ersten Grundschuljahre wird dieser Zugang i.d.R. ergänzt und zunehmend ersetzt durch abstrakte strukturelle Einsichten in mathematische Beziehungen. Doch nicht allen Kindern gelingt es, sich ohne gezielte Unterstützung vom zählenden Rechnen zu lösen (vgl. Gaidoschik, 2010; Moser Opitz, 2007).

Im Rahmen eines Forschungsprojekts werden unterrichtsintegrierte, kooperativ angelegte Förderbausteine entwickelt, um Kinder gezielt anzuregen, verschiedene strukturelle Deutungen als Alternative zum zählenden Rechnen zu entwickeln und untereinander zu diskutieren. Einerseits interessiert die Leistungsentwicklung der Kinder (vgl. Wittich, Nührenbörger & Moser Opitz, 2009), anderseits ob und wie sich eine Ablösung vom zählenden Rechnen - initiiert durch die Förderbausteine - beobachten lässt und ob Charakteristika dieses Ablöseprozesses ausgemacht werden können. Dieser qualitative Zugang steht hier im Mittelpunkt. Es geht also darum, die prägenden epistemologischen und sozial-interaktiven Bedingungen der Entwicklung struktur-fokussierender Deutungen genau zu beschreiben und zu analysieren. Die zentrale Grundannahme ist, dass durch eine Irritation, einen überraschenden Moment oder eine kontrastierende Beobachtung eine Um- oder Neudeutung mathematischen Wissens hervorgerufen wird (vgl. Steinbring, 2005). Die Einnahme eines alternativen, erweiterten struktur-fokussierenden Standpunkts zum zählenden Rechnen soll zu einer Weiterentwicklung mathematischer Einsichten in Strukturen und somit zu einer Ablösung vom zählenden Rechnen führen.

Aufbau der Bausteine

Im Mittelpunkt der Förderung steht der intensive Austausch über die unterschiedlichen *Sichtweisen auf* Zahlen bzw. Operationen sowie die Beschäftigung mit der *Beziehung zwischen* Zahlen und Operationen. Dies sind zentrale Kernpunkte bei der Ablösung vom zählenden Rechnen. Der Aufbau des Verstehens von zentralen Zahlbeziehungen wie z. B. das Ganze und seine Teile oder dezimale Zusammenhänge werden angeregt, ebenso wie die Automatisierung von Kernaufgaben (Verdopplungen, Zerlegungen von Zahlen kleiner 10 oder Ergänzungen zum nächsten Zehner).

Aus einer sozial-konstruktivistischen und epistemologischen Perspektive wird auf die Bedeutung der sozial-interaktiven Aushandlungsprozesse von Mathematik hingewiesen. Kinder konstruieren und deuten ihr mathematisches Wissen nicht auf gleiche Weise, sondern eher uneinheitlich, situativ und exemplarisch in kommunikativen Prozessen eingebunden (Steinbring 2005, Nührenbörger 2009). Bei der Konstruktion neuen Wissens spielt damit die Kommunikation zwischen Kind und Lehrperson, aber auch der Austausch unter Kindern eine entscheidende Rolle. In der Grundschule lernen »zählende Kinder« in einem Umfeld, in dem bereits mehrere Kinder alternative Deutungen zum Zählen vornehmen. Dieses heterogene Umfeld kann sich anregend auf die Bereitschaft und Fähigkeit der Kinder auswirken, eigene Deutungen alternativ zum zählenden Rechnen zu entwickeln und zu verfestigen.

Um diese Deutungs- und Aushandlungsprozesse auf unterschiedlichen Ebenen anzuregen, arbeiten diejenigen Kinder, die im Rahmen der quantitativen Analyse als zählende Rechner identifiziert wurden (vgl. Wittich, Nührenbörger & Moser Opitz, 2009), in einem heterogen zusammengesetzten Partnerteam. Dieses Team bleibt über den Zeitraum der Intervention stabil und wird von der Lehrkraft auch in den Reflexionsphasen als Team angesprochen und herausgefordert. In der qualitativen Teilstudie wird die Deutungsentwicklung von fünf Kinderpaaren während der Intervention analysiert.

Einblick in den Baustein: Verwandte Additionsaufgaben

In der Einheit „Verwandte Additionsaufgaben" beschäftigen sich die Kinder mit operativ strukturierten Aufgabenserien, die sie zunächst für sich allein lösen, bzw. zu einer vorgegebenen Aufgabe selbst entwickeln sollen. In einem zweiten Schritt werden strukturell parallele Aufgabenserien miteinander verglichen (vgl. Abb. 1). Ziel ist es, durch die zu findenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede einen Blick über die einzelnen Zahlen und Aufgaben hinaus auf die mathematische Struktur der operativen Serie zu lenken.

Thomas (zählend rechnendes Kind) löst die erste Aufgabenserie folgendermaßen: Zunächst stellt er die Aufgaben im nebenstehenden Zwanzigerfeld dar. Dann beginnt er die Aufgaben zu ermitteln. Das Ergebnis der Aufgabe 3+5 nennt er schnell, bei der Aufgabe 3+6 nimmt er die Finger zur Hilfe und klappt nacheinander Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger aus. Er zählt wahrscheinlich ausgehend von der sechs drei weiter; notiert dann das Ergebnis 9. Er nutzt – trotz des dynamischen Zählvorgangs - die Kommutativität von 3+6 und 6+3, um sich die Aufgabe zu vereinfachen.

Die Ergebnisse der beiden anderen Aufgaben 3+7 und 3+8 notiert er, ohne noch einmal aufzusehen. Die Aufgabe 3+5 hat Thomas mental verfügbar; diese ist von ihm auch als leichteste Aufgabe gekennzeichnet worden. Aus den Ergebnissen der ersten beiden Aufgaben scheint er den Aufbau der Aufgabenserie zu erkennen und für die Bestimmung der nächsten beiden Ergebnisse zu nutzen. Möglich ist jedoch auch, dass er das Ergebnis von 3+7 kennt und daraus dann 3+8 ableitet. An dieser Stelle ist unklar, ob er bereits operative Beziehungen nutzt oder die Ergebnisse in der Zahlenfolge weiterzählt.

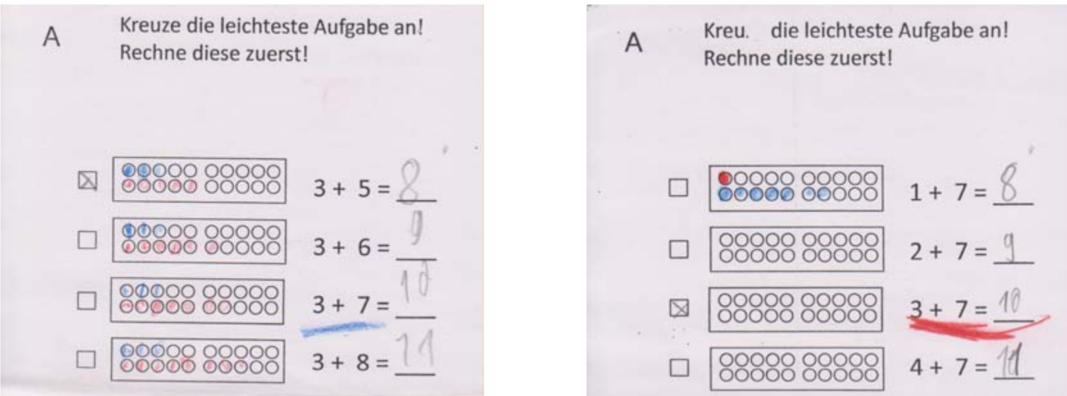


Abb. 1: Bearbeitungen von Thomas und Max

Beim Vergleich der beiden Aufgabenserien gehen Thomas und Max zunächst die einzelnen Aufgaben durch und fragen sich gegenseitig, ob der Partner auch diese Aufgabe bearbeitet hat: Thomas beginnt, indem er Max fragt:„Hast du drei plus fünf?“ Die gefundene, gleiche Aufgabe unterstreichen sie (s. Abb. 1). Als Erstes richten die Kinder den Blick empirisch auf den Vergleich der Aufgaben und suchen nach identischen Zahlensätzen.

Als die Lehrerin sie auffordert zu notieren, was sie sonst noch entdeckt hätten, betrachtet Max die Aufgaben in seinem Päckchen und sagt: „Warte. Ich erklärs dir. Guck mal, hier, hier ist eins plus sieben gleich acht.“ … „Hier ist zwei plus sieben gleich neun.“ Thomas greift die Idee auf, führt sie weiter und sagt: „Drei plus sieben“ … „Ach immer, immer weiter“. Max bringt also eine neue Deutung ein, in der es nicht um gleiche Aufgaben oder Ergebnisse geht, sondern eine operative Folge in den Blick genommen wird. Thomas nimmt die Idee auf und fasst die zu Grunde liegende Struktur der Weiterführung eines Summanden im Sinne der Zahlreihe zusammen: „immer weiter“. Die Lehrerin fordert Thomas auf zu schauen, ob sich ein ähnliches Muster auch bei ihm findet. Thomas überträgt jedoch zunächst nicht das eben wahrgenommene Muster auf seine Serie, sondern vergleicht die Ergebnisse der beiden Serien und bleibt damit im empirischen Vergleich der Zahlen verhaftet. Die Lehrerin beschreibt daraufhin das Muster von Max: „Guck mal, was sich bei Max verändert. Hinten bleibts gleich (*zeigt auf die zweiten Summanden von Max AB*) und vorne?“ Jetzt überträgt Thomas die Idee und formuliert: „Max, bei dir ändert sichs vorne, hinten aber nicht, bei mir ändert sichs hinten, aber vorne nicht“. Mit Hilfe der angebotenen Begriffe durch die Lehrerin ist Thomas nun in der Lage im Vergleich der beiden Serien nicht nur einzelne Zahlen bzw. Aufgaben miteinander zu vergleichen, sondern die untereinanderstehenden Summanden miteinander in Beziehung zu setzen und deren Veränderung bzw. Konstanz zu beschreiben.

Resümee

Der zählende Rechner Thomas wird im Rahmen der kooperativen Lernumgebung und durch die Impulse der Lehrerin ermutigt, eine erweiterte Sichtweise auf die verwandten Additionsaufgaben einzunehmen. Es gelingt ihm, sowohl einige Aufgaben nicht-zählend zu bestimmen als auch die Deutungen seines Partners aufzugreifen und auf die parallele Aufgabenserie zu übertragen. Dabei bleibt an dieser Stelle die Frage offen, ob und inwieweit das Beschreiben und Nutzen der mathematischen Struktur „Zahlreihe“ als Indiz für eine Ablösung vom zählenden Rechnen gewertet werden kann. Möglich ist auch, dass gerade zählend rechende Kinder die Zahlreihe als (einziges) mathematisches Muster erkennen. Im Zuge der Ablösung vom zählenden Rechnen müsste diese Sichtweise dann durch strukturfokussierende Deutungen ergänzt werden.

Literatur

Gaidoschik, M. (2010). Wie Kinder rechnen lernen - oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt a. M: Peter Lang.

Moser Opitz, E. (2007). Rechenschwäche / Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern: Haupt.

Nührenbörger, M. (2009). Interaktive Konstruktionen mathematischen Wissens - Epistemologische Analysen zum Diskurs von Kindern im jahrgangsgemischten Anfangsunterricht. Journal für Mathematikdidaktik, *30* (2), 147-172.

Steinbring, H. (2005). The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction - An Epistemological Perspective. Berlin: Springer.

Wittich, C.; Nührenbörger, M. & Moser Opitz, E. (2010). Ablösung vom zählenden Rechnen – Eine Interventionsstudie für die Grund- und Förderschule. Beiträge zum Mathematikunterricht, 935-938

Heike HAHN, Stefanie JANOTT, Erfurt

Entwicklung der Problemlösefähigkeit – Heuristische Strategien durch geometrische Aufgaben fördern

Zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichtes in der Grundschule ist es, Problemlösefähigkeiten von Kindern zu fördern (KMK 2004). Betrachtet man die Aufgaben, die im Unterricht zum Einsatz kommen, ist eine Konzentration auf Text- bzw. Sachaufgaben mit zumeist arithmetischen bzw. stochastischen Inhalten zu erkennen (u.a. Rasch 2001). Zudem konnten wir im Mathematikunterricht beobachten, dass die Bearbeitung von Problemaufgaben durch Schüler mit mittlerem bzw. niedrigerem Leistungsniveau nach kurzer Zeit oft wieder abgebrochen oder gar nicht erst begonnen wird. Diese Gegebenheiten haben uns veranlasst, weitere Möglichkeiten für die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten zu erschließen. In der Aufbereitung geometrischer Inhalte sehen wir dabei besondere Potenziale.

Geometrische Aufgaben sind zur Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenz des Problemlösens geeignet, weil sie

- ein Bearbeiten auf einer anschaulichen Ebene möglich und somit Ansätze für die Problemlösung unmittelbar sichtbar machen.
- Die Geometrie weist wie kein anderer Bereich einen Reichtum an anschaulichen Problemen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus auf. Die „Gewinnung von Anschauung als universelles Bildungsziel“ (Winter 1997) unterstreicht die Bedeutung dieses Inhaltsbereiches für die Umsetzung der Kompetenzanforderung.
- über Potenzial für das Bewusstmachen heuristischer Strategien und Prinzipien zur Aufgabenbearbeitung verfügen.
- Geometrische Problemaufgaben können genutzt werden, um heuristische Strategien und Prinzipien wie das (systematische) Probieren, Beispiele betrachten, Analogien herstellen u.a. herauszuarbeiten und an erfolgreich gelösten Aufgaben musterhaft für andere geometrische Aufgaben oder sogar für andere Bereiche bewusst zu machen.
- bezogen auf das Vorwissen, welches zur Aufgabenbearbeitung nötig ist, nicht ganz so stark auf verfügbare Kenntnisse und Fähigkeiten angewiesen sind, wie vergleichsweise Problemaufgaben mit arithmetischem Inhalt.
- Diese Einschätzung ist im Zusammenhang mit der Sprache zu betrachten, mit der geometrische Inhalte bezeichnet oder beschrieben werden. Thom konnte zeigen, dass die Sprache der Geometrie eine na-

türliche ist, die immer ihre anschauliche Bedeutung behält (Thom in Wittmann 1999). Zudem ist das geometrische Basiswissen im Umfang überschaubarer und in der anwendungsbezogenen Nutzung keiner so starken Hierarchie unterworfen wie arithmetische Inhalte.

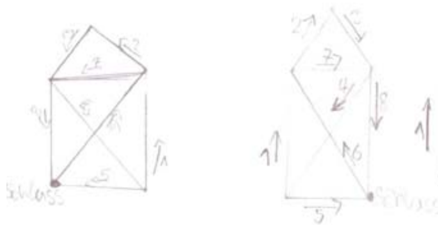
Die Bearbeitung der Problemaufgaben erfolgt nach einem dafür entworfenen Unterrichtskonzept, das in drei Phasen untergliedert ist: In einer ersten Unterrichtsphase werden die Schüler mit einer kurzen Rahmengeschichte in die Problemstellung eingeführt. Im Unterrichtsgespräch wird herausgearbeitet, was genau das Problem ist. Diese Phase ist von besonderer Bedeutung, weil ein Schüler nur dann mit einer Problembearbeitung beginnt, wenn er das Problem auch verstanden hat. Anschließend folgt eine individuelle Arbeitsphase, in der jedes Kind Zeit hat, das Problem auf seine Weise zu bearbeiten und wenn möglich zu lösen. Diese Unterrichtsphase ist dem Prinzip der minimalen Hilfe verpflichtet. Zudem werden die Schüler angehalten, ihre Überlegungen zum Vorgehen zu verschriftlichen, um bei der Aufgabenreflexion darauf zurückgreifen zu können. Aufgabenpräsentation und -reflexion sind Gegenstand der dritten Unterrichtsphase. In einem Gespräch werden verschiedene Vorgehensweisen sowie Aufgabenlösungen thematisiert bzw. vorgestellt. Jedes Kind entscheidet selbst, ob und was es vortragen möchte. Durch die Lehrkraft wird das Gespräch genutzt, um Vorgehensweisen im Sinne bestimmter heuristischer Strategien oder erfolgreicher Ansätze zur Aufgabenlösung hervorzuheben. Dadurch können sowohl heuristische Strategien bewusst gemacht und begrifflich bezeichnet als auch ein Beitrag zur Ausbildung metakognitiver Strukturen geleistet werden. Letztere werden durch die Metakommunikation im Reflexionsgespräch gefördert. Durch die Würdigung von Problembearbeitungen bzw. bestimmten Vorgehensweisen erlangen die Schüler positive Erfahrungen mit erfolgreichen Bearbeitungsansätzen oder Problemlösungen, die für weitere Problemlöseprozesse motivationsfördernd sind.

Die Problemaufgaben, die im Rahmen der Erprobung im Mathematikunterricht 3. und 4. Klassen zum Einsatz kommen, lassen sich zumeist materialgestützt oder anschaulich bearbeiten (z.B. durch Ausschneiden oder Ausmalen von Figuren, durch Zeichnen oder Messen). Sie greifen unterschiedliche geometrische Inhalte auf, wie beispielsweise Flächenvergleiche, Wege und Netze, Symmetrien oder geometrische Muster (vgl. Hahn & Janott 2010). Die Aufgaben sind in ein Gesamtkonzept so eingeordnet, dass mathematische Inhalte und Bearbeitungsweisen in Form heuristischer Strategien wiederholt vorkommen.

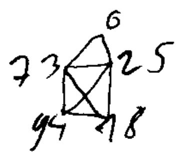
Im Folgenden werden wir anhand von einem Aufgabenbeispiel illustrieren, welcher Art die geometrischen Problemaufgaben sind und wie sie Schüler bearbeitet haben. Dabei geht es darum, ihr Potenzial zur anschauungs- oder materialgebundenen Aufgabenbearbeitung sowie die von den Schülern vorgenommenen Darstellungsarten in ihrer Vielfalt aufzuzeigen.

Eine geometrische Problemaufgabe bestand darin, verschiedene Möglichkeiten vom „Haus vom Nikolaus“ zu zeichnen und die jeweilige Vorgehensweise kenntlich zu machen.

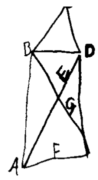
Pascal hat die Linien mit Pfeilen für die Zeichenrichtung versehen und nummeriert, um deren Folge zu veranschaulichen. So findet er verschiedene Varianten für das Zeichnen des Nikolaushauses. Seine ersten beiden Häuser bilden zueinander symmetrische Linienzüge ab. Der Schüler hat demnach den symmetrischen Aufbau der Figur erkannt.



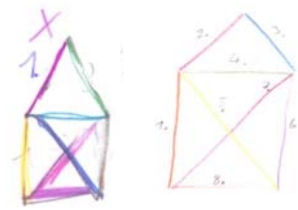
Vincent beschriftet die Ecken mit Nummern. Sie geben die Folge der gezeichneten Linien an.



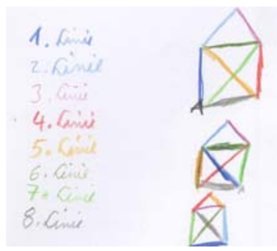
Philip verwendet Buchstaben in der Folge des Alphabetes, um die Reihenfolge der gezeichneten Linien zu markieren.



Holly und Gina haben für die einzelnen Wörter bzw. Silben des Spruches verschiedene Farben gewählt und so unterschiedliche Varianten für das Zeichnen des Nikolaushauses veranschaulicht. Während es für Holly schließlich ausreichend ist, mit Farben zu arbeiten, ergänzt Gina zudem noch Nummern an den Linien.



Hannes fertigt eine Legende an: Er notiert, welche Linie des Linienzuges er in welcher Farbe zeichnet.



Leonie hat besonderen Wert darauf gelegt, Anfang und Ende des Linienzuges hervorzuheben; sie markiert diese Punkte deutlich. Leonie wechselt während der Bearbeitung die Strategie: Sie beginnt damit, die verschiedenen Linien mit unterschiedlichen Farben zu zeichnen, was sie im weiteren Verlauf der Bearbeitung sein lässt. Stattdessen nimmt sie nun für jeden neuen Versuch des Nikolaushauses eine neue Farbe und veranschaulicht den Linienzug durch Pfeile.

Die vorgestellten Problemaufgaben haben Dritt- und Viertklässler probierend gelöst. Dass das Probieren eine bedeutsame heuristische Strategie ist, sei an dieser Stelle nochmals betont. Von besonderem Interesse für die Entwicklung der Problemlösefähigkeit sind die von den Kindern praktizierten Vorgehensweisen, die praktisch-handelnd in Kombination mit einer zeichnerischen Darstellung erfolgten. Sie haben zu anschaulichen Problemlösungen geführt. In der Gesamtheit zeigen die unterschiedlichen Darstellungsvarianten die Vielfalt und Differenziertheit anschaulicher Problemlösungen.

Literatur

Hahn, Heike & Janott, Stefanie (2010): Heuristische Strategien durch geometrische Aufgaben fördern. Tagungsband GDM

KMK (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich

Rasch, Renate (2001): Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Hildesheim: Franzbecker

Winter, Heinrich (1997): Mathematik als Schule der Anschauung oder: Allgemeinbildung im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Bielefeld: IDM Paper 163, S. 27 – 68

Wittmann, Erich Ch. (1999): Konstruktion eines Geometriecurriculums ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie. In: Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung. Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden. Hrsg. Herbert Henning, Oldenburg: Bültmann & Gerriets, S. 205 – 223

Tanja HAMANN, Hildesheim

„Macht Mengenlehre krank?“ – Die Neue Mathematik in der Schule

„Macht Mengenlehre krank?“ Wie kam es dazu, dass *Der Spiegel* am 25.3.1974[1] mit dieser in mehrerlei Hinsicht bemerkenswerten Frage titelte?

Im Jahr 1959 trafen sich in Royaumont Abgeordnete der OEEC – der Vorgängerorganisation der OECD – und beschlossen eine Modernisierung des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen ihrer Mitgliedsländer. Die OEEC folgte damit den USA, die in der Überzeugung, nur eine verbesserte mathematische Bildung könne das Land wirtschaftlich konkurrenzfähig halten, in den 1950er Jahren eine Reform des Unterrichts auf den Weg brachten[2]. Es handelte sich bei dieser Reform um eine Revision des Curriculums, im Zuge derer herkömmliche, „traditionelle“ Stoffe durch „neue“, „moderne“, aus Sicht der Forschung aktuellere Inhalte ergänzt wurden, mit dem vorrangigen Ziel die Kluft zwischen Schule und Hochschule und damit die Studienabbrecherquote zu verringern. Für Deutschland forderte die Kultusministerkonferenz per Erlass vom 3.10.1968 die flächendeckende Einführung der sogenannten „Neuen Mathematik“ ab dem Schuljahr 1972/73 – nun allerdings für alle Schulformen. Hintergrund dieser Entscheidung war die Überzeugung, dass es galt, die durch die neuen Inhalte größer gewordene Kluft zwischen Grund- und höherer Schule ihrerseits zu verringern, indem man die Grundlagen der neuen Begriffe bereits in der Grundschule legte.

Kern der neuen Inhalte war das Konzept der Menge, das besonders aufgrund seiner fächerübergreifenden und fächerverbindenden Eigenschaften neben dem weiteren zentralen Begriff der Struktur (Gruppe, Körper) Leitidee des gesamten Mathematikunterrichts werden sollte. Mit den neuen Inhalten ging eine Formalisierung und Verwissenschaftlichung des Unterrichts einher. Während dies an den höheren Schulen zu einem streng formalen und deduktiven Aufbau der mathematischen Inhalte führte, bedeutete die Reform für die Grundschule nicht weniger als die Einführung der Mathematik in den bis dahin reinen Rechenunterricht. Die Mathematikdidaktik reagierte auf diese neue Herausforderung mit einer hohen Aktivität, die auch verstärkt Methodenfragen einschloss; als wahrscheinlich prominentester Vertreter sei hier nur Z. P. Dienes genannt. Ab 1973 jedoch kam

[1] Der Spiegel 28 (1974), 13.

[2] Dass dies sich zeitlich mit dem „Sputnik-Schock“ überschnitt, mag nach Kline (1974), S. 31, Zufall sein, denn erste Bemühungen gab es bereits 1952.

es in der deutschen Bevölkerung zu beispiellosen Protesten gegen die neuen Inhalte des Mathematikunterrichts in der Grundschule – die Diskussion wurde fortan öffentlich unter dem Schlagwort „Mengenlehre“ geführt[3].

1984 verschwand die Mengenlehre aus den Richtlinien; heute gilt die Neue Mathematik in der Schule als zu Recht gescheitert. Dies steht offenbar im Widerspruch dazu, dass ehemalige Schülerinnen und Schüler, die darin unterrichtet wurden, sich vorwiegend positiv über ihre damaligen Erfahrungen äußern. Wiederum unpassend erscheinen vor diesem Hintergrund die heute so kaum mehr denkbaren Widerstände aus der Elternschaft. Es stellt sich die Frage, woran die Neue Mathematik in der Schule eigentlich gescheitert ist. Folgt ihre Bewertung objektiven Kriterien? Wenn ja, waren die Inhalte einfach nicht kindgerecht und/oder die Vorschläge zur didaktischen und methodischen Umsetzung untauglich? Hat die Lehrerschaft die Vorschläge der Didaktik überhaupt umgesetzt? Und wie sind die massiven Proteste in der Öffentlichkeit zu erklären?

Exemplarisch zur Frage der didaktischen Vorschläge sollen an dieser Stelle einige Bemerkungen von Heinrich Bauersfeld und seinen Mitarbeitern im *Frankfurter Projekt*[4] näher betrachtet werden. Wesentliches inhaltliches Ziel des Unterrichts war es, Zahlen und Rechenregeln nicht als „gottgegeben“ zu präsentieren – ein Missstand, der offenbar in der Praxis existierte –, sondern das Rechnen durch ein entsprechendes begriffliches Vorfeld zu fundieren und somit die Regeln einsichtig zu machen. Sprache sollte planmäßig präzisiert, Strategien und kognitive Schemata gebildet sowie intermodaler Transfer – die Übertragung eines Inhalts von einer Darstellungsform in eine andere – gefördert werden. Soziales Lernen sollte durch häufige Gruppenarbeit erreicht werden, eine positive Einstellung gegenüber der Mathematik durch offene, selbstdifferenzierende, handlungsmäßige Aufgaben und Lernspiele. Neben den konkreten Inhalten, die heute so nicht mehr

---

[3] Obwohl der Unterricht an den höheren Schulen in seiner Formalität äußerst fragwürdig erscheint, richteten sich die Proteste allein gegen die Inhalte der Grundschule. Da der gesellschaftliche Aspekt hier von besonderem Interesse ist, wird auf die höheren Schulen nicht weiter eingegangen.

[4] Im *Frankfurter Projekt* wurde in speziellen Kontrollklassen ab 1967 ein eigens entwickelter Projektlehrgang für die gesamte Zeit der Grundschule durchgeführt. Obwohl das Rechnen hier erst in der 2. Klasse eingeführt wurde, ergab eine Untersuchung am Ende der 4. Klasse keine signifikant schlechtere Rechenfähigkeit der Projektkinder gegenüber herkömmlich unterrichteten Kontrollklassen, wodurch ein häufiges Argument gegen die Mengenlehre – „Die Kinder können nicht mehr rechnen.“ – widerlegt werden konnte. Vgl. dazu und zu dem Folgenden Weis & Bauersfeld (1973); Bauersfeld & Weis (1972).

als Ziel formuliert werden, finden sich in den weiteren Zielen erhebliche Parallelen zur aktuellen Mathematikdidaktik. Tatsächlich wird schon zum damaligen Zeitpunkt von einer „Entwicklung […] von einem stofforientierten zu einem prozessorientierten […] Curriculum“[5] gesprochen, ein Vorhaben, dessen Sinnhaftigkeit aus heutiger Sicht außer Frage steht. Es scheint, dass der häufig kritisierte Umstand, die Reform habe lediglich eine Stoffrevision verordnet ohne auf weitere reformbedürftige Unterrichtsaspekte einzugehen, von den Didaktikern aufgefangen wurde, so dass er für den Unterricht nicht mehr relevant war.

Dass die neuen Inhalte tatsächlich unterrichtet wurden, ergibt sich aus den Reaktionen innerhalb der Elternschaft. Es ist jedoch davon auszugehen, dass die Qualität teils unter fachlichen Defiziten der Lehrerschaft selbst[6] litt; dies ist insbesondere für fachfremd Unterrichtende wahrscheinlich. Zudem ist fraglich, mit welcher inneren Überzeugung die Reform von jenen Grundschulpädagogen mitgetragen wurde, die die Grundschule in ihrer bisherigen Form für so weit entwickelt hielten, dass ihr Unterricht „keiner grundsätzlichen Wandlung mehr“ bedürfe[7].

Was die Proteste in der Bevölkerung betrifft, so sei an dieser Stelle nur ein Zitat aus dem *Spiegel* wiedergegeben: „Laut Mengenlehre-Gegner Hans Stahl […] „sehen die Kinder früh, zu früh, ihre Eltern hilflos und unwissend. Damit schwindet die Achtung, die Kinder können nicht mehr ihre Eltern fragen, deren Vorbild verblaßt“.“[8] Dem von Gegnern häufig hervorgebrachten Argument, die Eltern könnten ihren Kindern nicht mehr bei den Hausaufgaben helfen, scheinen also u. a. gesellschaftliche Aspekte zugrunde zu liegen, die mit den konkreten Unterrichtsinhalten in keinem Zusammenhang stehen.

Insgesamt ist davon auszugehen, dass sich das Scheitern der Neuen Mathematik in der Grundschule auf keine einzelne Ursache zurückführen lässt; eine Kombination verschiedener Faktoren war für die Entwicklung verantwortlich. Nicht zu unterschätzen ist dabei sicher der gesellschaftliche Einfluss in Form der öffentlichen Meinung, dem die Bildungspolitik schließlich nachgab. Einer der Auslöser der starken Tendenz gegen die Mengen-

[5] Bauersfeld & Weis (1972), S. 65.

[6] K. Rickmeyer, einer der Mitarbeiter des *Frankfurter Projekts*, berichtete mir z. B. von mangelndem Verständnis von Lehrern für logische Zeichen in den Fortbildungen.

[7] So der Deutsche Ausschuss für das Erziehungs- und Bildungswesen von 1962, zit. nach Neunzig & Sorger (1969), S. 22.

[8] Der Spiegel (1974), S. 63.

lehre mag dabei gewesen sein, dass die Änderungen zu umfassend waren. Neben der Einführung völlig neuer Inhalte, was in der Grundschule faktisch einer Ablösung des vertrauten Schulfaches „Rechnen“ durch das Schulfach „Mathematik“ gleichkam, standen neuartige Unterrichtsformen. Die Kinder spielten im Unterricht und lösten Aufgaben nicht mehr nur für sich. Die Schulbücher waren bunt und enthielten fremde Symbole statt Zahlen. Bei einigen Eltern müssen diese Umstände echte Ängste ausgelöst haben, ihr Kind würde Lebenswichtiges nicht lernen. Möglicherweise war die Gesellschaft vom Umfang der Neuerungen schlicht überfordert.

Nichtsdestotrotz muss festgestellt werden, dass nicht alles, was im Zuge der Reform neu war, aus dem Unterricht verschwunden ist. Für die Mengenlehre und weitere Inhalte mag das zutreffen, aber z. B. die Geometrie gehört erst seit den 1970ern zum festen Kanon der Grundschule. Das Nachdenken darüber, welche Methode am geeignetsten ist, hat sich etabliert, Lernspiele bei Schulanfängern und Gruppenarbeit werden so wenig in Frage gestellt wie offener Unterricht allgemein. Schulbücher sind weiterhin bunt und enthalten viele Bilder, Begriffe sollen nicht vorgegeben, sondern erarbeitet werden. Eine Rückkehr zum alten Fach „Rechnen“ stand nie ernsthaft zur Debatte. Die Bezeichnung des Faches als „Mathematik“ ist seitdem geblieben und mit ihr die selbstverständliche Integration mathematischer Propädeutik in den Grundschulunterricht. Offenbar hat die Neue Mathematik trotz ihres offiziellen Scheiterns wichtige Impulse in der Mathematikdidaktik gesetzt, die bis heute spürbar sind.

Literatur

Bauersfeld, H. (1970): Mathematik in der Grundschule? In: E. Neuhaus & H. Roth: Die Reform der Grundschule. Hannover [u. a.]: Schroedel, S. 31-41.

Bauersfeld, H. & Weis, V. (1972): Aus dem „Frankfurter Projekt zur Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule“. In: Arbeitskreis Curriculum (Hrsg.): Thema Curriculum : Beiträge zur Theorie und Praxis. Bebenhausen: Rotsch, S. 65-94.

Kline, M. (1974): Warum kann Hänschen nicht rechnen? : das Versagen der Neuen Mathematik. Weinheim [u. a.]: Beltz.

Neunzig, W. & Sorger, P. (1969): Einstieg in die Mathematik : Aufriß eines systematischen Weges für die Grundschule. (2. Aufl.). Freiburg [u. a.]: Herder.

Schöne, H. (Hrsg.) (1966): Synopsis für moderne Schulmathematik. Frankfurt/ M.: Diesterweg.

Der Spiegel (1974), 28, 13.

Weis, V. & Bauersfeld, H. (1973): Neue Mathematik und Rechenfertigkeit : Ergebnisse aus dem „Frankfurter Projekt“. In: Die Deutsche Schule : Zeitschrift für Erziehungswissenschaft und Gestaltung der Schulwirklichkeit 64, 9, S. 589-597.

Mathias HATTERMANN, Bielefeld

Analyse fortgeschrittenen Nutzerverhaltens in 3D-DGS

Im vorliegenden Text werden Ergebnisse eines Dissertationsprojektes zusammengefasst, das sich u.a. mit der Analyse von Verwendungsweisen des Zugmodus in 3D-dynamischen Geometriesoftwaresystemen, im Folgenden mit 3D-DGS abgekürzt, befasst.

Theoretischer Hintergrund

Dynamische Geometriesysteme der Ebene sind speziell in der PME-Gruppe ein gut untersuchtes Forschungsfeld. Von besonderer Bedeutung für dynamische Geometriesysteme ist die Funktion des Zugmodus, zu dessen Verwendung mehrere empirische und theoretische Arbeiten durchgeführt wurden, vgl. exemplarisch Arzarello (2002) und Hölzl (1994). In diesen Studien werden Probleme von Nutzern beschrieben und theoretische Termini geprägt, die die Ausgangsbasis des Dissertationsprojektes bilden. Der Einzug neuer Technologien in den Unterricht erfordert eine Theorie zur adäquaten Beschreibung der Prozesse bei der Interaktion des Nutzers mit dieser neuen Technologie. Hierbei hat sich der instrumentelle Ansatz Rabardels (1995) als nützlich erwiesen, für eine kompakte Darstellung der Theorie siehe Drijvers (2008). Die instrumentelle Genese des Zugmodus wurde bereits in 2D-Umgebungen untersucht, vgl. hierzu Restrepo (2008), wobei ebenfalls neue theoretische Termini zur Verwendungsweise des Zugmodus geprägt wurden.

Methodologie, Probanden und Aufgaben

Das Dissertationsprojekt ist im methodisch qualitativen Paradigma einzuordnen, wobei sich die *Grounded Theory* nach Glaser und Strauss (1967) als dominierende Auswertungsmethode erweist. Das Hauptanliegen der *Grounded Theory* besteht in der Generierung von neuer Theorie, sodass zu Beginn des Forschungsprozesses keine konkreten Forschungsfragen, sondern die Beschreibung des Phänomens der Verwendungsweise des Zugmodus in 3D-Systemen steht. Zusätzlich ist die *Grounded Theory* durch eine während des Forschungsverlaufs vorzunehmende Anpassung des Forschungsdesigns und der Präzisierung bzw. Neuformulierung von Forschungsfragen charakterisiert, um auch weitere Daten (*theoretical sampling*) anhand von vorliegenden Ergebnissen zu erheben. Quantitative Untersuchungen von Verwendungsweisen des Zugmodus ergänzen den qualitativen Ansatz, was die Auswertung, Kombination und Interpretation der Daten betrifft, sodass ein *Mixed-Method-Design* zur Untersuchung des Nutzerverhaltens in 3D-DGS vorliegt. Das Design der Untersuchung setzt sich aus Fallanalysen zusammen, wobei die Erhebungstechnik darin besteht, die Probandengruppen (Lehramtsstudierende der Mathematik, ca. 5.Semester) bei der Bearbeitung von Aufgaben mit einer *Webcam* und einer *Screen-recording* Software zu filmen. Die Aufbereitungstechnik der Daten erfolgt durch die Anfertigung von Verlaufsprotokollen, abschnittsweise kommentierten Transkriptionen und teilweise selektiven Zusammenfassungen. Die quantitativen Daten werden mit einem zuvor konzipierten Analyseinstrument erhoben und mit der Software *Videograph* ausgewertet. Mit Hilfe des erarbeiteten Analyseinstrumentes ist es möglich, 13 verschiedene Verwendungsweisen des Zugmodus zu kodieren. Darüber hinaus erlaubt dieses Instrument die Feststellung der vorliegenden Einschränkung des Freiheitsgrades von bewegten Punkten und eine Kodierung von *Komplexitätsstufen* der Einbindung beweglicher Objekte in explorativen Aufgaben. Pilotstudien im vorliegenden Projekt konnten zeigen, dass die selbstständige Einbindung von höherdimensionalen beweglichen Objekten, wie beispielsweise Ebenen, für Probanden eine Hürde darstellt. Im Hauptteil der Studie wurden 6 Probandengruppen mit je 2 Teilnehmern analysiert, wobei alle Gruppen an einem Seminar zur Raumgeometrie mit DGS teilnahmen und während eines Semesters ein Mal pro Woche im Seminar mit der Software *Cabri-3D* arbeiteten. Die Datenerhebung erfolgte zu Beginn, in der Mitte und am Ende des Semesters, wobei bei jeder Datenerhebung eine explorative und eine Konstruktionsaufgabe zu bearbeiten waren.

Fragestellung

Im Laufe des qualitativen Forschungsprozesses konnten drei Forschungsfragen präzisiert werden:

- Welche Zugmodi sind bei der Lösung von explorativen Aufgaben bzw. Konstruktionsaufgaben in einer Cabri 3D-Umgebung zu identifizieren?
- Inwiefern können Veränderungen im Gebrauch des Zugmodus bei verschiedenen Probandengruppen über einen Zeitraum von 12 Wochen in einer Cabri 3D-Umgebung aufgezeigt werden?
- Anhand welcher Bearbeitungsmerkmale kann eine Typisierung von Probandengruppen vorgenommen werden und inwiefern können diese Typen abstrahiert werden?

Ergebnisse

Die Darlegung der Ergebnisse erfolgt exemplarisch und überblicksartig für die Beantwortung der dritten Forschungsfrage, wobei eine Fokussierung auf die Bearbeitung von Konstruktionsaufgaben vorgenommen wird. Die zu bearbeitenden Konstruktionsaufgaben bestanden in den drei Datenerhebungen aus der Konstruktion eines Tetraeders, eines Oktaeders und eines Würfels. Hierbei ist aufgabenübergreifend zu konstatieren, dass die Verwendung des Zugmodus, sowohl was die Anzahl der verschiedenen Verwendungsweisen als auch die relative Dauer des Einsatzes betrifft mit zunehmender Vertrautheit mit der Software abnimmt. Sind in der ersten Konstruktionsaufgabe (Tetraeder) noch acht verschiedene Verwendungsweisen festzustellen, so reduziert sich der Gebrauch des Zugmodus auf das *validierend abtestende Ziehen* und den *Zugmodus 2.Art*[1]. Mithilfe der quantitativen und qualitativen Datenanalyse können Bearbeitungsmerkmale von Konstruktionsaufgaben festgestellt werden, die sich zur Typengenerierung nach Kelle (2010) eignen. Hierbei wird auf der Ebene des einzelnen Typus eine innere Homogenität hinsichtlich von Merkmalsausprägungen und Eigenschaften ähnlicher Merkmalsträger angestrebt. Unterschiedliche Typen sind durch ihre äußere Heterogenität gekennzeichnet und sollen sich möglichst deutlich unterscheiden. Mit Hilfe der Bearbeitungsmerkmale

- relative Bearbeitungsgeschwindigkeit,
- relative Verwendungszeit des Zugmodus,
- Anzahl verschiedener Verwendungsweisen des Zugmodus,
- Zeitpunkt des Nachweises eines Eltern-Kind-Verständnisses,
- Zeitpunkt zur selbstständigen Konstruktion eines Kreises mit Hilfe von Kreisebene, Mittelpunkt und Randpunkt

kann eine Typisierung von Nutzern vorgenommen werden, wobei die Bearbeitungsmerkmale mit jeweils geeignet definierten Ausprägungen als Entwicklungsstufen der Werkzeugkompetenz und des Umgangs mit 3D-DGS gedeutet werden können. Hinsichtlich dieser Bearbeitungsmerkmale können 4 der 6 Probandengruppen einem Typus mit fortgeschrittenen Kenntnissen und einem Typus mit durchschnittlichen Kenntnissen zugeordnet werden. Zwei weitere Probandengruppen sind in die erarbeitete Typologie nicht einzuordnen.

Ähnliche Typologien lassen sich mit geeigneten Kombinationen von qualitativen und quantitativen Daten für die Bearbeitung von explorativen Aufgaben generieren. Die verschiedenen Typologien für unterschiedliche Aufgabenformate können im Anschluss vom konkreten Datenmaterial abstra-

[1] Unter dem Zugmodus 2.Art ist das Ziehen an noch nicht vollständig definierten Objekten zu verstehen. Beispielsweise zeigt *Cabri 3D* bei der Definition einer Geraden bereits nach der Festlegung eines Punktes eine bewegliche Gerade an, deren zweiter definierender Punkt erst noch zu bestimmen ist.

hiert und aufgabenunabhängig dargestellt werden, sodass drei idealtypische Nutzer eines 3D-DGS charakterisiert werden können. Hierbei sind drei Nutzertypen zu identifizieren, wobei Typ A eher experimentell vorgeht und verschiedene Entwicklungsstufen hinsichtlich von Werkzeugkompetenzen und Anpassungen an die 3D-Umgebung durchläuft. Typ B präferiert statische Betrachtungen bei Aufgabenlösungen und verwendet ein DGS nur dann im dynamischen Sinn, wenn er keine andere Möglichkeit der Aufgabenlösung erkennt. Typ C ist dadurch charakterisiert, dass er aufgrund der intervenierenden Bedingung eines unzureichenden mathematischen Verständnisses ein DGS kaum in ökonomischer Weise verwenden kann.

Weitere Ergebnisse und detaillierte Angaben zur Vorgehensweise sind in Hattermann (2011) nachzulesen.

Literatur

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., Robutti, O. (2002): A cognitive analysis of dragging. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34, 3, 66–71.

Drijvers, P., Trouche, L. (2008): From Artifacts to Instruments. A Theoretical Framework behind the Orchestra Metaphor. In: Heid, M. Kathleen; Glendon, W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics. Research Syntheses. Charlotte, North Carolina: Information Age Publishing, 2, 363–391.

Glaser, B., Strauss, A. (1967): The discovery of grounded theory. Strategies for qualitative research. New York: Aldine.

Hattermann, M. (2011): Explorative Studie zu Nutzungsweisen des Zugmodus. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades an der Justus-Liebig-Universität Gießen, (im Druck).

Hölzl, R. (1994): Im Zugmodus der Cabri-Geometrie. Interaktionsstudien und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Kelle, U., Kluge, S. (2010): Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Rabardel, P. (1995): Les hommes et les technologies. une approche cognitive des instruments contemporains (http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act_group=1, abgerufen am 20.11.2010).

Restrepo, A. (2008): Genèse instrumentale du Déplacement en Géométrie dynamique chez des élèves de 6ème. Thèse pour obtenir le grade de docteur. Université Joseph Fourier. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Stefan HEILMANN, Universität zu Köln

Schätzen: Ein Zugang zur Mathematischen Statistik

1. Motivation

In Schulbüchern, wie z.B. LS Stochastik, Elemente der Mathematik oder Mathematik Stochastik, hat sich der Umgang mit Hypothesentests bzw. Bereichsschätzern zur Thematik Mathematische Statistik etabliert. Punktschätzung findet nur am Rande statt. Effizienzbetrachtungen werden nicht vollzogen. Dabei bietet die Punktschätzung elementare Möglichkeiten in die Mathematische Statistik einzuführen. In diesem Vortrag sollen die Grundideen der Mathematischen Statistik exemplarisch am Versuch *Werfen einer Reißzwecke* mittels Punktschätzung aufgezeigt werden.

2. Reißzweckenwurf

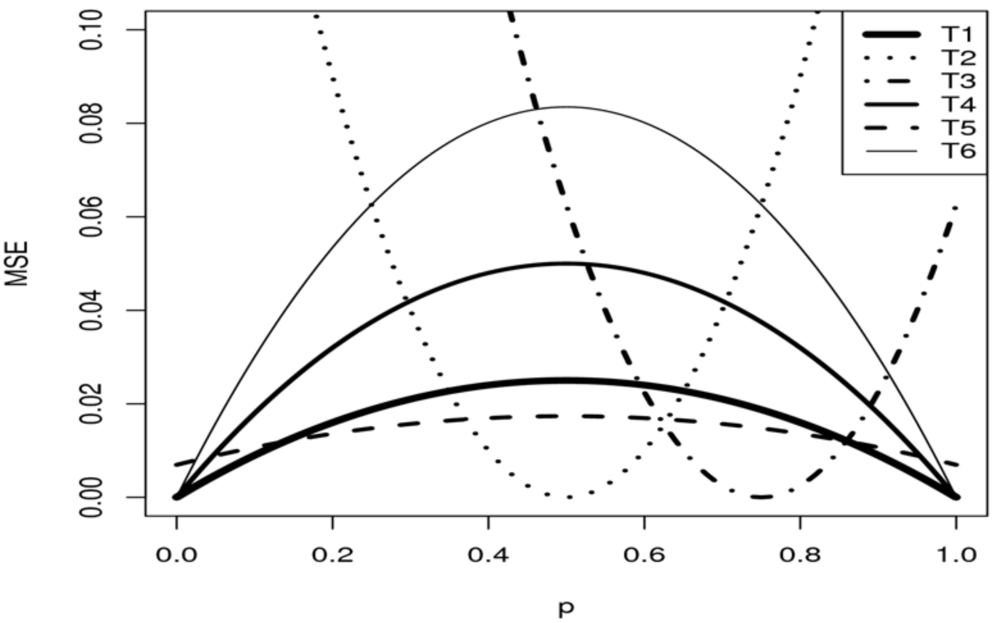
Werfen wir eine Reißzwecke, so wissen wir, dass nur die beiden Ergebnisse *Dorn schräg* oder *Dorn steil* möglich sind. Aber wir kennen die Wahrscheinlichkeit p für *Dorn schräg* nicht. Wir gehen aber davon aus, dass es solch ein p gibt. Unser Ziel ist es nach n-maligem Werfen einer Reißzwecke einen zutreffenden Wert für p zu ermitteln. Das Auffinden von p wollen wir durch einen Schätzer realisieren. Wir codieren *Dorn schräg* mit 1 und *Dorn steil* mit 0. Als Stichprobe erhalten wir nach n Würfen ein n-Tupel aus der Menge $X=\{0,1\}^n$. Auf Grundlage einer solchen Stichprobe wollen wir nun eine Zahl, die $p \in (0,1)$ zutreffend beschreibt, angeben, d.h. wir ordnen einer Stichprobe eine Zahl aus einer Menge D, die (0,1) umfasst, zu. Eine solche Zuordnung nennen wir Schätzer. Damit ist das geeignete Objekt für einen Schätzer T eine Funktion $T{:}X \to D$ (Witting, 1985, S. 11). Ein Kandidat für solch einen Schätzer wäre somit die relative Häufigkeit $T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ für $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$. Jedoch ist für den Fall, dass der Reißzweckenwurf fair, d.h. $p=\frac{1}{2}$ wäre, die relative Häufigkeit bei ungerader Wurfanzahl schlechter als der konstante Schätzer $T_2 = \frac{1}{2}$. Um die Frage nach der Wahl eines besten Schätzers zu beantworten geben wir sechs mehr oder weniger plausible Schätzer an und versuchen Kriterien zu bestimmen, anhand derer wir einen besten Schätzer ausfindig machen können. Die weiteren Schätzer sind $T_3 = \frac{3}{4}$, $T_4 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$ mit Zahlen $m < n$, $T_5 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + 1}{n+2}$ und $T_6 = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ mit $w_i = \frac{2^{n-i}}{2^n - 1}$.

Nun werden wir die Schätzfehler mit der Gauß'schen Verlustfunktion s(T,p)=(T-p)^2 messen (Witting, 1985, S.12). Diese Verlustfunktion ist nicht negativ, nimmt für T=p den Wert 0 an, besitzt dort ein absolutes Minimum und ist als Funktion von p stetig differenzierbar. Nun ist jedoch der Schätzfehler eines Schätzers nicht unabhängig von der Wahl der Stichprobe. Deswegen gehen wir zum mittleren quadratischen Fehler

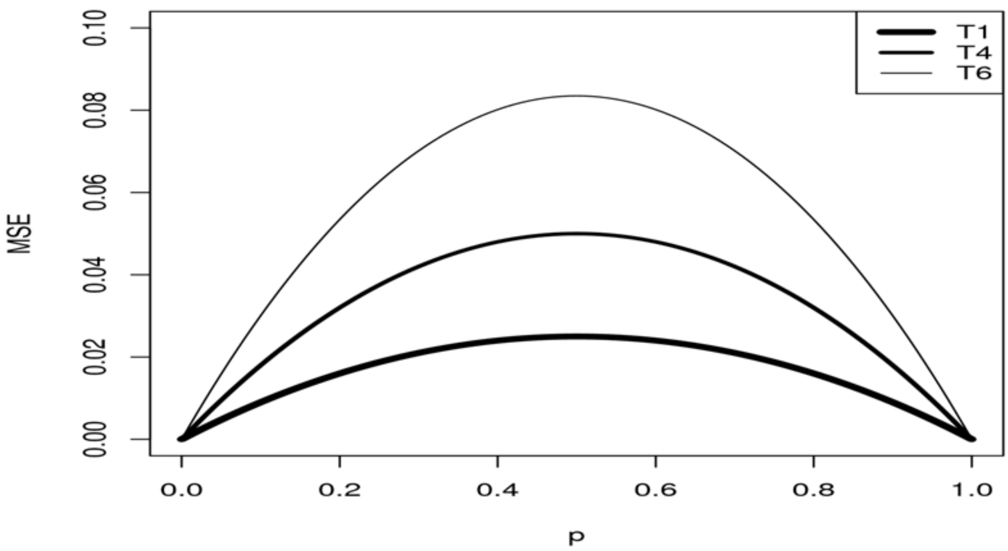
MSE T = E s(T,p)

über (Witting, 1985, S.13). Durch die Erwartungswertbildung hängt der MSE T nun nicht mehr von der Wahl der Stichprobe ab. Damit haben wir ein Vergleichskriterium für Schätzer gefunden.

Die folgende Abbildung zeigt die mittleren quadratischen Fehler unserer sechs Schätzer.



Jedoch sehen wir, dass wir die Schätzer nicht vergleichen können. Betrachten wir die Eigenschaft der Erwartungstreue, d.h. für einen Schätzer T gilt ET=p. Damit ist klar, dass ein erwartungstreuer Schätzer von der Stichprobe abhängen muss. Die Schätzer T_1, T_4 und T_6 sind erwartungstreu, die anderen nicht. Nichterwartungstreue können wir als systematisches Über- bzw. Unterschätzen auffassen und schließen deswegen die nichterwartungstreuen Schätzer von weiteren Betrachtungen aus. Für erwartungstreue Schätzer gilt MSE T = Var T. Die nachfolgende Abbildung zeigt die Varianzen der erwartungstreuen Schätzer T_1, T_4 und T_6 . Weiter sehen wir, dass die relative Häufigkeit T_1 ein bester Schätzer unter den drei Schätzern T_1, T_4 und T_6 ist.



Wünschenswert wäre es nun nachzuweisen, dass T_1 ein bester Schätzer unter allen erwartungstreuen Schätzern ist. Dieses können wir dadurch realisieren, dass wir die Rao-Cramer-Schranke (Georgii, 2002, S. 212) für unsere Situation bestimmen. Sie lautet hier: Für jeden erwartungstreuen Schätzer T für p gilt

$$\operatorname{Var} T \geq \frac{p(1-p)}{n}.$$

Für den Beweis wird lediglich Oberstufenanalysis benötigt. Die Varianz der relativen Häufigkeit nimmt genau die Varianz der Rao-Cramer-Schranke an. Somit ist T_1 ein bester Schätzer unter allen erwartungstreuen Schätzern. Für weitere Betrachtungen siehe (Georgii, 2002, S.193f).

3. Ausblick

Anhand des Beispiels *Werfen einer Reißzwecke* haben wir die Grundideen zur Bestimmung effizienter Punktschätzer kennen gelernt. Diese sind:

- Angabe der Art unserer Entscheidung. Hier ist die Entscheidung eine Zahl.
- Definition eines Schätzers durch eine Funktion
- Quantifizierung von Schätzfehlern durch die Gauß'sche Verlustfunktion

- Bestimmung des mittleren quadratischen Fehlers als Gütekriterium für einen Schätzer
- Erkennen der Nicht-Existenz eines besten Schätzers
- Reduktion auf erwartungstreue Schätzer
- Bestimmung eines besten Schätzers in der reduzierten Klasse

Diese Grundideen können mit anderen Vokabeln und anderen Sätzen auf die Entwicklung bester Hypothesentests übertragen werden (Witting, S.35f, S. 188f).

Hypothesentests sind sicherlich relevanter für den Praxisalltag. Soll deren Einführung auch kritisch nachvollzogen werden und der Stochastikunterricht über das bloße Anwenden hinausgehen, so sind sie schwerer zu verstehen. Aber der Zugang über die Punktschätzung ermöglicht einen anschaulichen Einblick in die Mathematische Statistik. Die Begrifflichkeit ist verständlicher und einsichtiger. Durch die Beschränkung auf Beispielen wie den Reißzweckenwurf, d.h. Beschränkung auf die Bernoulli-Verteilung, wird zur Herleitung eines besten Schätzers nur Oberstufenmathematik benötigt.

Literatur

Baum, M., Brandt, D., Lind, D., Riemer W., Zimmermann P. (2003): LS Stochastik. Stuttgart: Klett

Georgii, H.-O. (2002): Stochstik. Berlin: de Gruyter

Griesel, H., Postel, H., Suhr F. (2003): Elemente der Mathematik, Stochastik Leistungskurs. Braunschweig: Schroedel

Jahnke, T., Wuttke, H. (2005): Mathematik Stochastik. Berlin: Cornelsen

Witting, H. (1985): Mathematische Statistik I. Stuttgart: Teubner

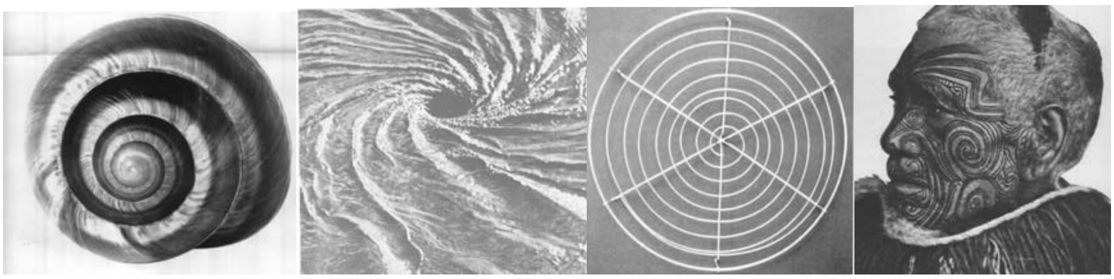
Johanna HEITZER, Aachen

Spiralen – Ebene Kurven bereichern Mathematikgeschichte und Unterricht

Dieser Beitrag behandelt ein Thema, über das ich vor siebzehn Jahren erstmals gearbeitet und seitdem mit unterschiedlichen Schwerpunkten immer wieder veröffentlicht oder vorgetragen habe. Das sagt vielleicht nichts Gutes über mich, sicher aber über das Thema: Denn jedesmal geschah es mit Freude, neuem Erkenntnisgewinn und sehr positiver Resonanz.

Warum hier noch einmal? Zum einen war der Spiralvortrag in Freiburg der erste im größeren mathematikdidaktischen Kreis. Zum anderen stimmt das Verhältnis zwischen Multiplikatorwirkung und Zugänglichkeit der Quellen nicht. Das Buch war schnell vergriffen und wurde nicht wieder aufgelegt. Seitdem aber sind zahlreiche schulische Facharbeiten und Staatsexamensarbeiten zum Thema geschrieben, Seminare an Universitäten gehalten, Exkurse in Schulbücher integriert und die Materialien in unterschiedlichsten Projekten erprobt worden. In Sachsen sind Spiralen in den Wahlpflichtbereich des gymnasialen Lehrplans eingegangen.

Natürlich bin ich bei weitem weder die einzige noch die erste Autorin zum Thema (siehe die Literaturliste in Heitzer, 1998, und die hier genannten neueren Veröffentlichungen). Doch steht meine dank Heinrich Winter erfolgte, gründliche didaktische Aufbereitung offenbar am Anfang einer Renaissance des Themas im deutschsprachigen Raum. Ich habe die letzten eigenen Exemplare des Buches sicher fünfzigmal vertrauensvoll verliehen und werde dies weiter tun: johanna.heitzer@matha.rwth-aachen.de



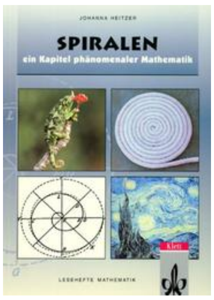
Fachübergreifender, fachhistorischer und fachlicher Hintergrund

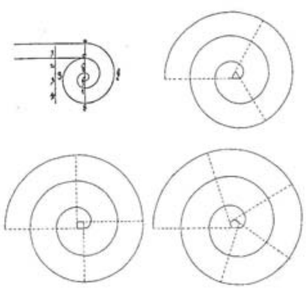
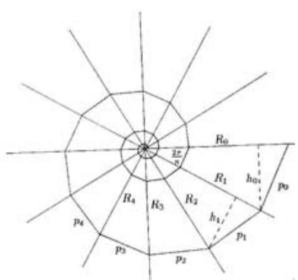
Spiralen sind ein an Vielfältigkeit und Beziehungsreichtum außergewöhnliches Phänomen unserer Lebenswelt. Sie kommen in der Natur und in der Technik; in der Kunst praktisch jedes Kulturkreises und jeder Epoche vor – oft mit starker symbolischer Bedeutung. Bei eingehender Betrachtung führt das Spiralphänomen fast zwingend zu mathematischen Begriffen und Methoden. Umgekehrt lassen sich mit diesen die Fragen nach dem Wie und Warum der Spiralen am besten beantworten.

Tatsächlich haben Spiralen die Mathematikgeschichte extrem bereichert. Sie waren in bedeutenden Entwicklungsphasen Gegenstand des Interesses großer Mathematiker und zählten insbesondere zu den konkreten Objekten, an denen der Infinitesimalkalkül entwickelt und erprobt wurde. Archimedes, Pappos, Galilei, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Descartes, Jakob Bernoulli und Newton sind nur einige der wichtigsten Namen.

Als Spiralen im engeren Sinn bezeichnet man in der Mathematik ebene Kurven, die aus unendlichen vielen Windungen um einen festen Punkt bestehen und aus höchstens zwei Ästen mit streng monotonem Zusammenhang zwischen Drehwinkel und Radius zusammengesetzt sind. Das geeignetste Mittel zur Beschreibung von Spiralen sind Polarkoordinaten, denn dort sind Spiralen die Graphen der einfachsten streng monotonen: Schülern aus der kartesischen Deutung gut vertraut als Gerade, Parabel, Wurzelfunktion, Hyperbel, Exponentialfunktion und so weiter.

Die einzelnen Spiralen haben hoch interessante geometrische Eigenschaften. Teils lassen sich diese mit elementaren Mitteln entdecken und beweisen. Sie führen auf diskrete und stetige Näherungskonstruktionen, anhand derer sich wichtige Fertigkeiten der SekI-Geometrie auf das attraktivste schulen und Erkenntnisse veranschaulichen lassen. Teils betreffen sie die analytischen Grundfragen an Kurven: Tangente, eingeschlossene Fläche, Bogenlänge. Hier stellt die Übertragung wichtiger Sätze und Methoden auf Polarkoordinaten einen gehaltvollen Transfer für die SekII dar. Wesentliche Grundideen wie Superpositionsprinzip, Grenzwert und infinitesimaler Übergang können auf neue Weise repräsentiert und durchdrungen werden.




Vorschläge zur Behandlung in der Unter- und Mittelstufe

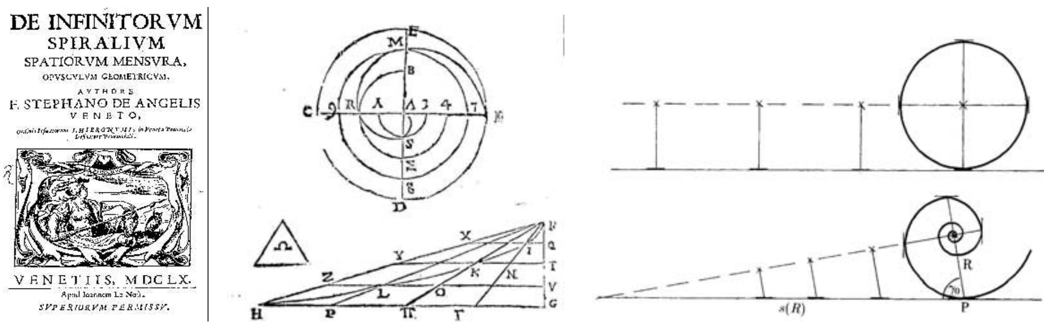
Für die Sekundarstufe I bieten sich vor allem synthetische Auseinandersetzungen mit dem Spiralmotiv an: Entweder bilden Spiralen aus der Erfahrungswelt der Schüler den Ausgangspunkt modellierender Zugänge, bei denen die reale Form durch geometrische Konstruktionen simuliert werden soll, oder vorgegebene iterative Konstruktionsvorschriften führen ‚nebenbei‘ auf Spiralen. Dabei können wichtige curriculare Kenntnisse und Fertigkeiten sinnstiftend geübt und vertieft werden: Messen von Längen und Winkeln, Konstruieren mit Zirkel und Lineal, Abzähl- und Rechenverfahren, Winkelsätze, Ähnlichkeit, arithmetische und geometrische Progression, Pythagoras und vieles mehr. Wichtige Stichworte sind:

- die Wurzelspirale, nach der Theodorus mittels des Satzes von Pythagoras die Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen bis 17 konstruierte,
- (z.B. nach Dürer) aus Kreisbögen zusammengesetzte n-Eck-Spiralen und die Kreisevolvente, auf die manchen Anwendungsaufgabe führt,
- durch Abtragen eines immer gleichen Winkels im Polarkoordinatengitter gewonnene Polygonnäherungen der logarithmischen Spirale,
- goldene Spiralen, die durch sukzessiver Zusammensetzung von Kreisbögen im goldenen Rechteck oder goldenen Dreieck entstehen,
- Phänomene der Phyllotaxis, bei denen Fibonacci-Zahlen von Spiralen in Fruchtständen sichtbar werden (Blattstellung, exp. Wachstum).

Vorschläge zur Behandlung in der Oberstufe

In der Sekundarstufe II stehen analytische Fragen im Mittelpunkt und die algebraische Beschreibung der Spiralen durch in Polarkoordinaten gedeutete Funktionsterme kommt wesentlich hinzu. Allein dieser Transfer ermöglicht einen gehaltvollen und Verständnis erweiternden zweiten Blick auf grundlegende Inhalte des Curriculums. Wichtige Stichworte sind:

- explorative Auseinandersetzungen mit dem Zusammenhang zwischen Term und Graph in Polarkoordinaten unter Nutzung von CAS,
- Transfer der analytischen Formeln für Tangente, Fläche, Bogenlänge, Krümmungsradius auf Polarkoordinaten: Erweiterung und Vertiefung,

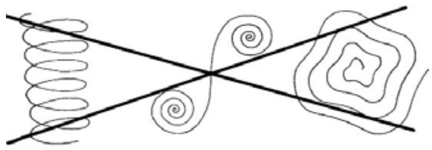


- wichtiger Vorstufen analytischer Beweise nach historischem Vorbild (Superposition, Prinzip des Cavalieri, „Gerademachen“ im Kleinen),
- Revision geometrischer Reihen, Grenzwert- und Endlichkeitsbegriff.

Spiralen, Kompetenzen, Diagnose und Förderung

Die mathematische Auseinandersetzung mit Spiralen führt zur Förderung von drei der vier übergeordneten inhaltsbezogenen Kompetenzen des Matehmatikunterrichts: Geometrie, Funktionen, Arithmetik / Algebra. Wegen der Vielfalt an möglichen Zugängen und Abstraktionsniveaus lassen sich am Spiralphänomen sämtliche prozessbezogenen Kompetenzen schulen: Argumentieren / Kommunizieren, Problemlösen, Modellieren, Werkzeuge. Die Diagnose von Wissenslücken, Fehlvorstellungen, Stärken und Interessen erfolgt in diesem beziehungsreichen Kontext nebenbei statt als verordneter Selbstzweck. Auch individuelle Förderung wird so sehr einfach.





Literatur

Davis, Ph.J. / Gautschi, W. / Iserles, A. (2001): Spirals. From Theodorus to Chaos. Boca Raton: CRC Press.

Freudigmann, H., u. a. (2002): Lambacher Schweizer Analysis Leistungskurs (Spiralen S.170-171). Stuttgart: Klett.

Gächter, A. (2000): Spuren der Mathematik – Spiralen. Aktuell 4|29, St.Gallen: Kant.

Groh, N. / Henning, H. (2011): Spiralen in Kunst und Natur – ein mathematisches Phänomen für „vernetztes" Lernen. In: MNU Tagungsband, 102.

Heitzer, J. (1998): Spiralen – ein Kapitel phänomenaler Mathematik. Leipzig: Klett.

Heitzer, J. (2002): Mathe-Welt „Spiralen". In: mathematik lehren, 111, 23-46.

Heitzer, J. (2005): Kurven als attraktiver und substanzieller Unterrichtsgegenstand. In: mathematik lehren, 130, 4-7.

Heitzer, J. (2005): Spiralen kreieren! Ebene und räumliche Spiralen in Parameterdarstellung. In: mathematik lehren, 130, 20-22 & 47.

Heitzer, J. (2007): Spiralen in Kunst und Mathematik. In: Ausgerechnet – Mathematik und konktrete Kunst! Würzburg, Kulturspeicher.

Heitzer, J. / Jacobs, W. (2009): Kunst mit Kurven – kreative Erfahrungen mit Regelmäßigkeit. In: mathematik lehren, 157, 43-48.

Knichel, H. (1998): Spiralen. Ein fächerübergreifender Zugang in einer siebten Klasse. In: Der Mathematikunterricht, 4-5, 22-37.

Rösler, J. (1994): Geometrie ebener Spiralen als Erfahrungs- und als Erprobungsgebiet von Begriffsbildungen der Analysis. Aachen, Hochschulschriften.

Sächsisches Staatsministerium für Kultus (2004): Lehrplan Gymnasium Mathematik (Spiralen im Wahlpflichtbereich Parameterkurven S.32). Dresden: Saxoprint.

Vollrath, H.-J. (1997): Ein etwas andere Zirkel. In: DMV-Mitteilungen, 1, 28.

Markus HELMERICH, Siegen

Fachmathematische Aspekte eines Bildungsrahmens für die Mathematiklehrer(innen)bildung

1. Forschungsanliegen und Forschungsrahmen

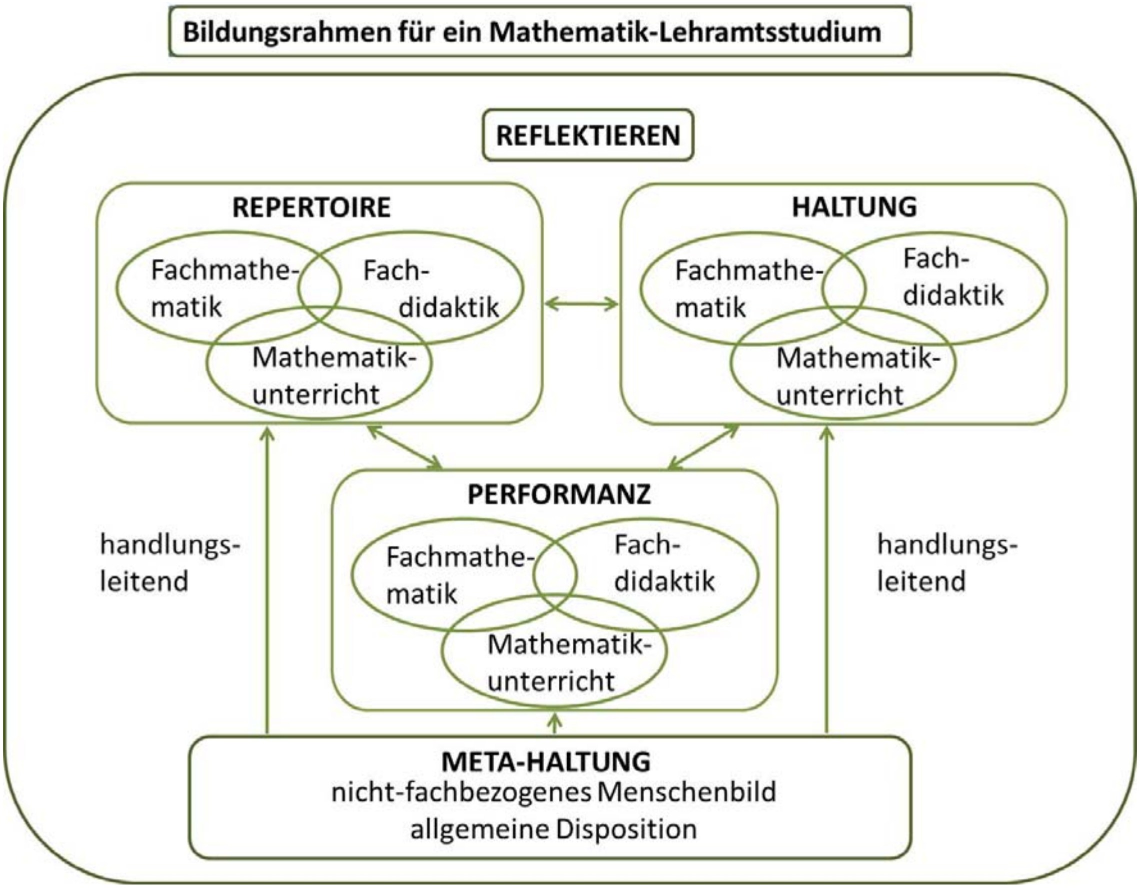
In der Betreuung von Praktika und in Gesprächen mit Absolvent(inn)en erlebt man häufig eine Spannung zwischen den fachdidaktischen Konzepten und Forschungsergebnissen und der beobachtbaren Schulpraxis. An dieser Erfahrung setzt ein Forschungsprojekt der Abteilung für Didaktik der Mathematik an der Universität Siegen in Kooperation mit Forscher(inne)n des österreichischen Kompetenzzentrums für Mathematikdidaktik an der Universität Klagenfurt an, um besser zu verstehen, wie es zu dieser Auseinanderentwicklung von Forschungstand und Schulpraxis kommen kann und welches Wissen Studierende, Lehrer(innen) und Hochschullehrer(innen) für relevant halten und worauf diese Relevanzeinschätzungen aufbauen. Um Rückmeldungen von Studierenden zur Relevanz bewerten zu können, soll in diesem Beitrag zur Klärung unserer Intentionen der Lehrer(innen)bildung ein Rahmen für ein Bildungskonzept als normativer Anspruch an ein Lehramtsstudium in Siegen entwickelt werden.

2. Ein Bildungskonzept für die Mathematiklehrer(innen)bildung

Besonders auch die internationalen Vergleichsuntersuchungen haben in der Folge dazu geführt, dass in den letzten Jahren vermehrt auch über Lehrer(innen)bildung diskutiert wird und Kompetenzen und Standards dafür definiert werden.

Dem Kompetenzmodell nach Weinert wird ein in dem Sinne breites Verständnis des Terminus „Kompetenz“ zugrunde gelegt, als dort auch affektive und soziale Faktoren beim Kompetenzaufbau eine Rolle spielen (vgl. Weinert 2001). Allerdings fokussiert das Modell stark auf das Fachwissen und die damit verbundenen Dispositionen. Im Modell der Lehrerbildungsstandards nach Terhart wird für das Anliegen eines Bildungsrahmens die „Taxonomie von Kompetenzfacetten“ interessant: Wissen – Reflektieren – Kommunizieren – Beurteilen – Können (vgl. Terhart 2002). Hier sticht die Unterscheidung zwischen Wissen und Können, sowie besonders die Betonung des Reflektierens hervor, wird aber nicht konkret auf die Mathematik bezogen.

Auch andere Ansätze zeigen wichtige Aspekte der Lehrer(innen)bildung auf, bleiben aber entweder stark auf der Ebene des mathematischen Wissens verhaftet oder sind zwar breit angelegt, aber nicht weiter fachspezifisch ausgebaut. Für eine systematische Zusammenstellung sei auf die Arbeit von Baumert und Kunter verwiesen (vgl. Baumert/Kunter 2006).



Mit dem hier vorgestellten Bildungsrahmen soll eine breite Sicht auf Bildung eröffnet, und ein einerseits umfassender und andererseits genügend fachspezifisch auf die Mathematik orientierter Anspruch an die Lehrer(innen)bildung formuliert werden. Dieses Bildungskonzept geht über den engen Rahmen von konzeptionalisiertem Fachwissen und fachdidaktischen Wissen hinaus. Die besondere Stärke des Ansatzes liegt in der expliziten Einbeziehung der Haltung gegenüber dem Repertoire, die für eine erfolgreiche Intervention im Mathematikunterricht entscheidend ist.

Dabei erfasst der Bildungsrahmen das Repertoire (das Wissen und Können in der Fachmathematik, der Fachdidaktik, aber auch im Bereich der unterrichtlichen Umsetzung), die Haltung (als Einstellungen zum und Vorstellungen über das Repertoire), sowie die Performanz (das beobachtbare Handeln und Verhalten).

3. Reflektieren als vernetzend wirksame Aufgabe

Diese drei Dimensionen – Repertoire, Haltung und Performanz – sind immer aus einer reflektierenden Sicht zu sehen und bieten die Möglichkeit, das eigene Wissen und Können kritisch zu hinterfragen, das Repertoire auf Sinn und Relevanz zu untersuchen, das subjektive Bild von Mathematik und ihrer Didaktik zu beleuchten und für das eigene Handeln und selbstregulatorische Prozesse wirksam zu machen. Außerdem wirkt die Meta-Haltung im Sinne einer allgemeinen Disposition handlungsleitend auf das Repertoire, die dazugehörigen Haltungen und die daraus resultierende Performanz.

Die reflektierende Sicht auf Repertoire, Haltung und Performanz, sowie Fachmathematik, Fachdidaktik und Mathematikunterricht gewinnt in der Darstellung als Bildungsmatrix mit Leitfragen für die Reflexion an Schärfe:

Reflektieren	Repertoire (R)	Haltung (H)	Performanz (P)
Fachmathematik (M)	Was kann ich? Was noch nicht?	Für wie wichtig halte ich diese mathematischen Aspekte?	Welche Handlungsmöglichkeiten habe ich warum gewählt?
Fachdidaktik (D)			
Mathematikunterricht (MU)			
Meta-Haltung (MH)	Was halte ich für relevant und was bedingt meine Einschätzung?		

Die Felder sind nicht trennscharf voneinander zu sehen, nicht die Isolation der einzelnen Aspekte, sondern gerade ihre Verflechtung, also die Haltung gegenüber Wissen und Können und die daraus resultierende Performanz sind uns wichtig.

Im Folgenden sollen die Felder, die sich auf die Fachmathematik beziehen, genauer betrachtet und mögliche Elemente einer reflektierenden Sicht auf die einzelnen Bereiche aufgezeigt werden:

Für das Feld M/R könnten nun Listen mit konzeptualisierten Wissenselementen wie in den KMK-Empfehlungen (2010) oder die Liste des mathematischen Wissens nach TEDS-M (Blömeke/Kaiser/Lehmann (2010)) zitiert werden. Besonders wichtig ist nach obigem Bildungskonzept aber die reflektierende Sicht auf das mathematische Repertoire in Bezug auf das eigene Wissen und Können.

Bei den mathematischen Haltungen im Feld M/H geht es darum, sich den eigenen Einstellungen und Vorstellungen bewusst zu werden, die Haltungen anderer wahrzunehmen und verstehen zu lernen sowie sich über Wirkungen von Haltungen klar zu werden.

Performanz beschreibt nach Noam Chomsky (vgl. Hillmann 2007, S. 441) das bewusste Handeln in einem Wirkungsbereich soll aus Sicht des Reflektierens auf Mathematik und das Feld M/P anregen, Handlungsspielräume reflektiert wahrzunehmen und begründet zu handeln oder sich zu verhalten, und weiter zu reflektieren, was sich an Repertoire und Haltung im Umgang mit und Einsatz von Wissen an Verhalten und Handeln im Mathematikunterricht zeigt, also ein sachkundiges und flexibles mathematisches Handeln, bedachtes und angemessenes Verhalten der Mathematik und ihren Lehr-Lernprozessen gegenüber und überzeugendes, selbstbewusstes Auftreten in der Vermittlung.

4. Ausblick und weitere Forschungsfragen

Im weiteren Forschungsprojekt soll der Bildungsrahmen zu einer Leitidee für die Lehrer(innen)bildung verdichtet und zu einem Bildungskonzept ausgebaut werden, das auch Hintergründe in Bezug auf gesellschaftliche und institutionelle Bildungsprozesse benennt.

Auf dieser Grundlage soll die Konzeption und Auswertung von Fragebögen und Interviews mit Relevanzeinschätzungen von Studierenden erfolgen, um Aufschluss über die Wirksamkeit unserer eigenen Hochschullehre zu bekommen und um Spannungen zwischen den normativ intendierten Bildungszielen unserer Hochschullehre und den subjektiven Bildungsansprüchen der Lehramtsstudierenden auszumachen. Dies könnte in einen Aushandlungsprozess münden, in dem sich die Wirksamkeit der Lehrer(innen)-bildung positiv entwickelt.

Literatur

Baumert, Jürgen; Kunter, Mareike: Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaften, 9. Jahrg., Heft 4/2006, S. 469-520.

Blömeke, Sigrid; Kaiser, Gabriele; Lehmann, Rainer (Hrsg.) (2010), TEDS-M 2008 - Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Hillmann, Karl-Heinz (2007): Wörterbuch der Soziologie. Stuttgart: Kröner Verlag, 5. Aufl.

KMK (2010): Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.2008 i. d. F. vom 16.09.2010. Berlin.

Terhart, Ewald (2002): Standards für die Lehrerbildung. Eine Expertise für die Kultusministerkonferenz. Münster.

Weinert, Franz E. (Hrsg.) (2001): Leistungsmessung in Schulen. Basel, Weinheim: Beltz Verlag.

Andrea HELMKE, Hildesheim

Mathematische Begabung – typisch Mädchen oder typisch Junge?

Kinder im Grundschulalter unterscheiden sich in ihren Begabungen und Fähigkeiten, in ihren Interessen und Neigungen.

Vergleichsstudien wie TIMSS 2008 zeigten in Deutschland für Jungen insgesamt einen höheren Kompetenzstand in Mathematik als für Mädchen.

Unterscheiden sich auch begabte Mädchen und begabte Jungen im Fach Mathematik? Und wenn dem so ist, wie sehen diese Unterschiede aus?

Welche Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten lassen sich bei Betrachtung der Geschlechter bei mathematisch begabten Kindern entdecken? Oder anders: Existieren Merkmale bei Kindern mit mathematischer Begabung, die als typisch weiblich bzw. männlich eingeordnet werden können?

Im folgenden Beitrag werden die – im Rahmen einer geplanten Dissertation durchgeführte – Untersuchung mathematischer Begabungen und ihrer geschlechtstypischen Merkmale im dritten und vierten Schuljahr (UmaB-Studie) und erste Ergebnisse vorgestellt.

1. Untersuchungsdesign von mathematisch begabten Grundschulkindern und deren geschlechtstypischen Merkmalen

Basierend auf den Aufgabensets von Bardy (2007) wurden Kinder der dritten und vierten Klassen getestet. Die Aufgabensets wurden an 19 Schulen aus Stadt und Landkreis Hildesheim eingesetzt. Insgesamt 307 Aufgabensets in Klasse 3 mit 153 Mädchen und 154 Jungen, sowie 418 Aufgabensets in Klasse 4, mit 181 Mädchen und 237 Jungen, wurden bearbeitet.

Zusätzlich wurden Fragebögen für Eltern und für Fachlehrerinnen und Fachlehrer eingesetzt, die sich an den Merkmalkatalogen für begabte Grundschulkinder von Käpnick (1998) orientierten.

Stichprobenartig wurden zusätzlich Intelligenztests CFT 20-R + ZF-R, nach positivem Ergebnis im Aufgabenset und mit Einverständnis der Erziehungsberechtigten, durchgeführt.

Die Durchführung der Aufgabensets erfolgte im September 2009 und die letzten Intelligenztests erfolgten im April 2010.

2. Einige Ergebnisse der Untersuchung des dritten Schuljahres

An dieser Stelle möchte ich anmerken, dass ich zusammenfassend nur auf einige Ergebnisse der Studie aus dem dritten Schuljahr eingehen werde.

Aufgabe 1 Zahlenfolgen

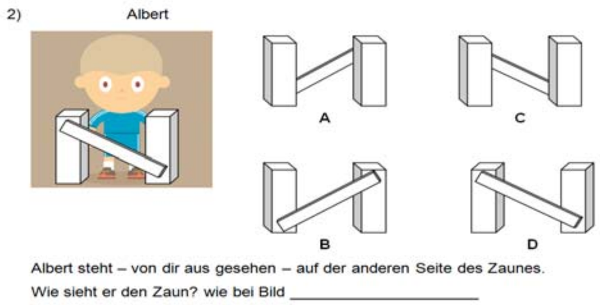
Entdecke die Gesetzmäßigkeiten in der Anordnung der Zahlen in jeder Reihe.

Schreibe jeweils die nächsten zwei Zahlen auf.

a) 6 9 12 15 18 ___ ___ usw.

Hier sind die mathematisch begabten Jungen besser als die mathematisch begabten Mädchen, während bei den mathematisch normal begabten Kindern zwischen Mädchen und Jungen kein Unterschied zu verzeichnen ist. 23,8% der mathematisch begabten Jungen haben die Aufgabe komplett richtig gelöst, sowie 1,51% der mathematisch normal begabten Jungen, wohingegen lediglich ein mathematisch besonders begabtes Mädchen die Aufgabe komplett richtig gelöst hat.

Aufgabe 2 Räumliches Vorstellungsvermögen



Auch bei dieser Aufgabe zeigten mathematisch begabte Jungen bessere Ergebnisse als begabte Mädchen, ebenso wie bei den normal begabten Kindern.

Aufgabe 3 Muster und Strukturen

Diese Formen (hier Krei○ u△d ○re○ck△) si△d ○ e○er○be△tim△nt△n Muster angeordnet.

Welche Folge der folgenden Formen (nun Herzen und Quadrate) hat das gleiche Muster? Kreuze A, B, C oder D an.

A ♥ □ ♥ □ ♥ ♥ □ □ ♥ ♥ □ □ usw.

Bei dieser Aufgabe ergibt sich ein anderes Bild: Die mathematisch begabten Mädchen sind besser als begabte Jungen, während die normal begabten Mädchen allerdings geringfügig schwächer sind als normal begabte Jungen! Auffällig ist, dass alle begabten Mädchen (100 %) die Aufgabe korrekt lösten. Bei den begabten Jungen waren 95 % dazu in der Lage.

Aufgabe 4 Rückwärtsrechnen

?	+ 6	: 2	· 3	- 5	→ 160

Diese Aufgabe zeigt einen deutlichen Vorteil der mathematisch begabten Kinder gegenüber den normal begabten. 46,6% der mathematisch begabten Mädchen, sowie 60% der mathematisch begabten Jungen bearbeiteten die Aufgabe korrekt, während 6,5% der normal begabten Mädchen und 10,4% der normal begabten Jungen die Aufgabe korrekt lösten.

Aufgabe 5 Logisches Schlussfolgern

Anna, Berta, Carola und Diana sitzen in einer Reihe auf vier Stühlen mit den Nummern 1 bis 4. Regina schaut auf sie und sagt: „Berta sitzt neben Carola. Anna sitzt zwischen Berta und Carola.“ Jede Aussage von Regina ist jedoch falsch. Berta sitzt tatsächlich auf Stuhl Nr. 3. Wo sitzen die anderen? (Begründe deine Ergebnisse.)

Das Ergebnis dieser Aufgabe bewies, dass mathematisch begabte Mädchen besser als begabte Jungen abschnitten, ebenso wie bei den normal begabten Kindern.

Aufgabe 6 Heuristische Strategien anwenden

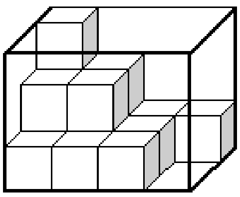
Mama ist zurzeit 28 Jahre alt und Tina 9 Jahre alt. Nach wie vielen Jahren wird Mama (nur noch) doppelt so alt wie Tina sein?

Auch hier ist das bessere Abschneiden der Begabtengruppe auffällig. Die mathematisch begabten Jungen lösten die Aufgabe zu 47,62% korrekt, während die mathematisch begabten Mädchen zu 37,5% die richtige Lösung notierten. In der Gruppe der mathematisch normal begabten Schüler liegen die Prozentsätze der korrekten Lösungen näher beieinander: Korrekte Lösungen zeigten bei den Mädchen 6,6 % und bei den Jungen nur 3,8%.

Aufgabe 7 Räumliches Vorstellungsvermögen

Wie viele Würfel sind schon in der Kiste?

Wie viele Würfel fehlen noch, so dass die Kiste ganz ausgefüllt ist?



Bei dieser Aufgabe herrscht anders als gedacht in der Gruppe der normal begabten Kinder keine Überlegenheit der Jungen, im Gegenteil: ein leichter Vorteil für die Mädchen. In der Gruppe der mathematisch begabten Kinder allerdings haben die Jungen klar die Nase vorn. 57,14% der begabten Jungen und 43,75% der begabten Mädchen waren fähig die korrekte Antwort zu geben.

3. Fazit und Ausblick

Nach der Auswertung der Aufgabensets für das dritte Schuljahr wurde festgestellt, dass von 153 Mädchen 137 mathematisch normal begabt und 16 mathematisch besonders begabt sind. Bei den Jungen wurden von insgesamt 154, nach Auswertung der Aufgabensets, 132 als normal begabt und 22 besonders begabt diagnostiziert.

Nach der quantitativen Auswertung sind die Aufgabensets von Bardy als zweckmäßig anzusehen, um mathematische Begabung zu diagnostizieren. Die stichprobenartig durchgeführten IQ-Tests belegen dies ebenso.

Unter den normal begabten Kindern des dritten Schuljahres sind in der Untersuchung keine geschlechtssignifikanten Unterschiede zu sehen.

In der Gruppe der mathematisch begabten Kinder ist auffällig, dass die Jungen im Schnitt insgesamt besser als die Mädchen sind – ein Phänomen, das lediglich in dieser Gruppe auftritt. Woran könnte das liegen? Man könnte jetzt spekulieren, ob es am Alltagsbezug der Aufgaben liegt. Aber in den Formulierungen der Aufgaben kommen gleich oft Jungen und Mädchen vor. Deshalb scheidet dieser Punkt aus. Lediglich bezogen auf einzelne Aufgabenbereiche sind eher kleine Unterschiede erkennbar. Eine tendenzielle Überlegenheit der Mädchen liegt demnach in den Rechenfertigkeiten, während Jungen bessere Fähigkeiten beim Problemlösen und im räumlichen Denken aufweisen. Ein signifikanter Vorteil bezüglich eines Geschlechts ist hier nicht nachweisbar. Vielmehr sei an dieser Stelle noch einmal allgemein festgehalten, dass Mädchen und Jungen mit grundsätzlich gleichen kognitiven Fähigkeiten bezogen auf die Mathematik ausgestattet sind.

Nebenbei sei angemerkt, dass in den vierten Klassen in meiner Untersuchung die mathematisch begabten Mädchen dagegen besser als die mathematisch begabten Jungen sind.

Literatur

Bardy, P. (2007). Mathematisch begabte Grundschulkinder. München.

Bardy, P., & Hrzan, J. (1998). Zur Förderung begabter Dritt- und Viertklässler in Mathematik. In A. Peter-Koop, Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule (S. 7 – 24). Baden-Baden.

Käpnick, F. (1998). Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt/Main, Berlin, Bern, New York, Paris, Wien.

Herbert, HENNING, Benjamin JOHN, Maik OSTERLAND, Magdeburg

„So wirft Dirk Nowitzki !“ Rekonstruktion der Wurfparabel beim Basketball

Im Rahmen einer Projektwoche wurde mit Schülern einer 9. Klasse eine Untersuchung am Werner-von-Siemens Gymnasium Magdeburg durchgeführt

Der sportliche Aktivitätsgrad der Projektteilnehmer (allesamt Basketballspieler) war Ausgangspunkt der Themenstellung für ein aufgabendifferenziertes Arbeiten in Gruppen. Anregungen innerhalb der Projektinitiative fanden die Schüler in einem Beitrag der Wochenzeitung DIE ZEIT, in dem der Trainer des Basketball-Stars Dirk Nowitzki, Holger Geschwindner, über den „perfekten Freiwurf“ des Superstars der Basketball-Liga NBA in den USA berichtete.

Daraus leitete sich unsere Projektaufgabe ab;

Mathematische Modellierung des „perfekten“ Basketball - Freiwurfs aus experimenteller Sicht und mit theoretischen Erkenntnismethoden (Wurftechnik, Spielbedingungen, objektive und subjektive Einflussfaktoren).

Daraus entwickelten wir eine Modellierungsaufgabe unter Beachtung der Regeln des Basketballspiels (Freiwurftechnik) und der Individualität des Spielers (z.B. Körpergröße)

Die **Arbeitsgruppe I** wird sich zunächst der Lösung der Problemfragen auf dem empirischen Weg nähern (Datenerfassung durch Experimente in der Sporthalle), sodass ihre gefundenen Ergebnisse eine Grundlage für ihre theoretischen Berechnungen bilden.

Die **Arbeitsgruppe II** wagt sich initial an die Beschreibung des Problems mit Hilfe ihres mathematischen und physikalischen Wissens und versuchte eine „Bewegungsgleichung“ zu finden7

Arbeitsgruppe I

Nachdem mehrere Wurftechniken ausprobiert wurden (beidhändige Wurf, erwies sich der Standardwurf als der Wurf mit einer erhöhten Treffsicherheit.Die Projektteilnehmer dokumentieren mehrere Würfe mit unterschiedlichen Abwurfwinkeln. Daraufhin wurden die Würfe am Computer ausgewertet und mittels einer Videosoftware Stroboskopbilder der unterschiedlichen Würfe erstellt.

Abbildung 1: Stroboskopbild - mit flachem Einfallswinkel (links) – mit großem Einfallswinkel (rechts)

Mit Hilfe der Übertragung der Flugkurven auf Kohlepapier ist es möglich, Aussagen über einen minimalen und maximalen Einfallswinkel zu treffen

Diese werden aus den empirisch gewonnenen Datensätzen zu

$$\alpha_{min} = 34° \text{ und } \alpha_{max} = 57°$$

gemessen.

Diese Aussagen werden mit dynamischer Geometriesoftware (GeoGebra, Cinderella) und Tabellenkalkulationsprogramm (Microsoft Excel) durch mathematische Gleichungen und geometrischer Konstruktion validiert.

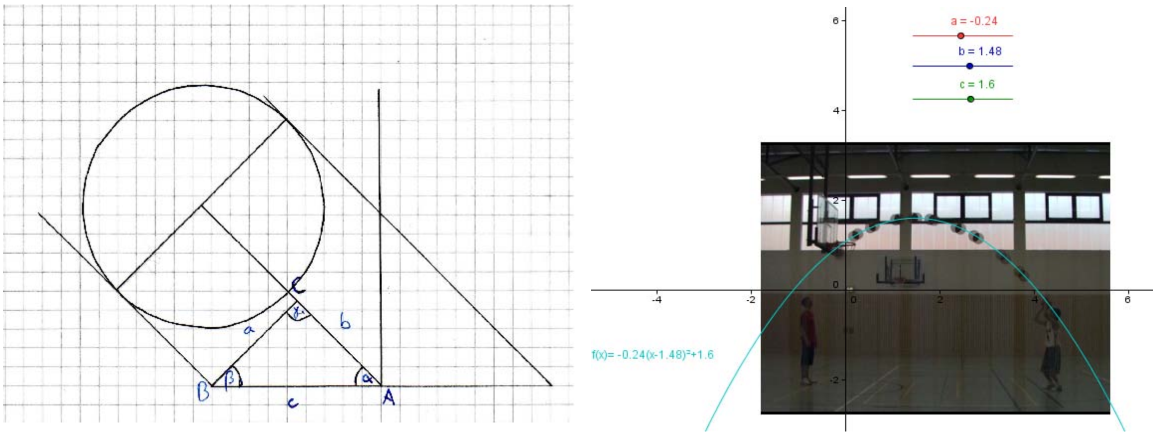
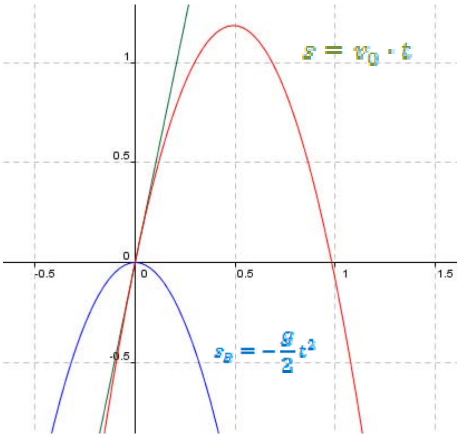


Abbildung 2: Reflexion des empirisch bestimmten Einfallwinkels durch Konstruktion (links) und mit Hilfe dynamischer Geometriesoftware (rechts)

Arbeitsgruppe II

Offensichtlich handelt es sich um ein physikalisches Problem aus der Kinematik. Hierzu werden die Modelle der Kinematik und der Dynamik der Bewegungen zur Beschreibung des Vorgangs herangezogen.



Da es sich um einen beschleunigten Vorgang handelt, weil der Ball anfangs aus der Ruhe in Bewegung gebracht wird und sich somit seine Geschwindigkeit zeitlich ändert. Die Schüler führen im nächsten Schritt demnach eine graphische Addition der beiden Funktionsgleichungen durch. Dies führt zu einer mathematischen Gleichung folgender Form:

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot t$$

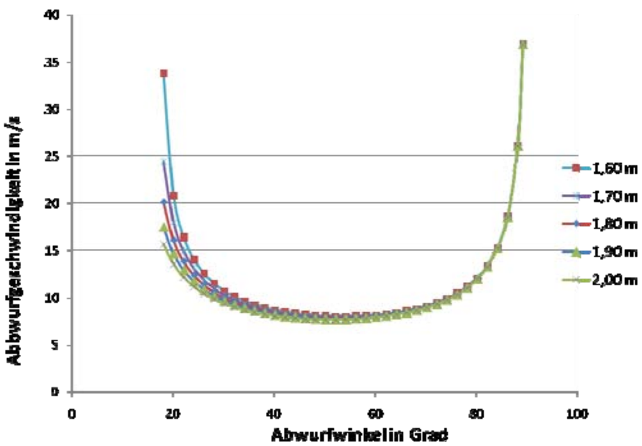
Abbildung 3: Geometrische Addition beider Bewegungsgleichungen

Das Modell der Physik, das am exaktesten eine Überlagerung von zwei Bewegungen in diesem Kontext beschreibt, ist das des schiefen Wurfes. Da die Geschwindigkeiten bei einem schiefen Wurf einer Aufteilung in ihre Komponenten in y- und x-Richtung wiederfahren, muss die Bewegungsgleichung verändert werden, da sie nur die Bewegung in den einzelnen Komponenten beschreibt.

$$y(x) = -\frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{{v_0}^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} + x \cdot \tan(\alpha) \qquad v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot x}{2 \cdot cos^2(\alpha) \cdot \left(\tan(\alpha) - \frac{y}{x}\right)}} = \sqrt{\frac{gx}{A}}$$

Nun wird der funktionale Zusammenhang zwischen der Abwurfgeschwindigkeit und des Abwurfwinkels dargestellt. Hierzu benutzen die Schüler das Tabellenkalkulationsprogramm Excel und betrachten den Winkel als variable Größe. Numerisch kann der Abwurfwinkel bestimmt werden, der durch die minimalste Abwurfgeschwindigkeit erreicht wird..

Tabelle 1: Funktionswerte des Nenner polynoms des Radikanden



α in °	tan (α)	cos (α)	A
46	1,035	0,694	0,748
48	1,110	0,669	0,761
50	1,191	0,642	0,769
51	1,234	0,629	0,771
52	1,279	0,615	0,772
54	1,376	0,587	0,771
56	1,482	0,559	0,764
58	1,600	0,529	0,752
60	1,732	0,5	0,735

Abbildung 4: Darstellung der Abwurfgeschwindigkeit in Abhängigkeit des Abwurfwinkels bei unterschiedlichen Körpergrößen (links), numerische Bestimmung des Minimums der Kurve (rechts)

Da derjenige Wurf, der mit der geringsten Abwurfgeschwindigkeit geworfen wird ein ganzes Spektrum an Abwurfwinkeln bietet (Abb. 5), können hier geringfügige Fehler bei der Berechnung der Abwurfwinkel vernachlässigt werden.

Hieraus ergibt sich ein optimaler Abwurfwinkel bei $\alpha = 52°$ bei einer minimalen Abwurfgeschwindigkeit von $v_{o(min)} = 7{,}8$ m/s. Durch eine genauere Betrachtung des Trefferpunktes wird nun ein mathematischer Zusammenhang zwischen dem Abwurfwinkel und dem daraus folgenden Einfallswinkel, mittels Dynamischer Geometriesoftware (GeoGebra), formuliert. Dazu werden im weiteren Verlauf die Einfallswinkel über den Abwurfwinkeln graphisch dargestellt

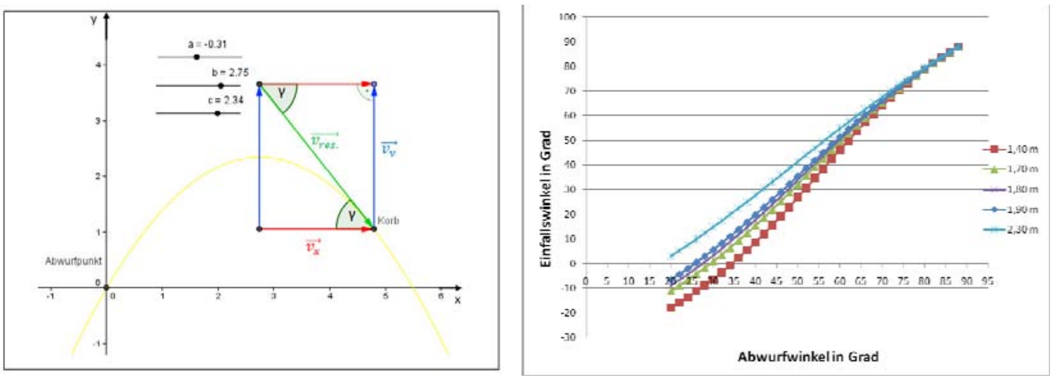


Abbildung 5: Bestimmung des mathematischen Zusammenhanges zwischen Einfallswinkel und Abwurfwinkel (links), graphische Darstellung derselben (rechts)

Die für die Darstellung benötigte Formel ergibt sich aus den trigonometrischen Beziehungen in Abb. 5 (links).

$$\gamma = \arctan\left(\frac{gt}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} - \tan(\alpha)\right)$$

Erkenntnisse der Arbeitsgruppen I und II

Der Wurf, bei dem die geringste Kraft aufgebracht werden muss, vermeidet auch die meisten Fehler, da hier mit der gleichen Abwurfgeschwindigkeit Ballwürfe mit unterschiedlichen Abwurfwinkeln zu einem Treffen.

Durch die Wahl zu großer Abwurfwinkel verlängert sich die Flugbahn des Balles, die eine Verstärkung der Ungenauigkeiten beim Abwurf hervorruft

Es sollten „Ballgefühl" und Abwurfgeschwindigkeit bei einem Spieler trainiert werden, um seine Trefferquote zu erhöhen

Esther HENSCHEN, Ludwigsburg

Mathematisches Potenzial von Spielsituationen im Kindergarten, beispielhaft dargestellt an Aktivitäten in einer „Bauecke“

Seitdem es eine Diskussion über frühkindliche Bildung gibt, existiert auch die Diskussion darüber, Kinder bezüglich ihrer mathematischen Fähigkeiten im Kindergarten zu fördern. Das hat dazu geführt, dass inzwischen diverse Programme zur mathematischen Förderung existieren. Da gibt es z.B. „Komm mit ins Zahlenland“ (Schindelhauer & Friedrich, 2009) oder das „Zahlenbuch Frühförderprogramm“ (Wittmann, 2009), die jeweils bestimmte mathematische Bereiche schwerpunktmäßig in den Blick nehmen. So sieht Wittmann Mathematik als „die Wissenschaft von schönen und nützlichen Mustern und Strukturen“ (S. 55), zu der Kinder besonders gut Zugang durch Zahlen und Formen bekommen. Im „Zahlenland“ geht es darum, den Kindern die Zahlen „ganzheitlich nahezubringen“, jede Zahl soll intensiv in ihrer Bedeutung und in unterschiedlichen Darstellungsformen kennengelernt werden (Schindelhauer & Friedrich 2009, S.44).

Daneben existieren diverse Praxishandbücher, die ein breiteres Spektrum von Mathematik in den Blick nehmen und sich zur Aufgabe gestellt haben, Anregungen zu geben, die jederzeit im Alltag umsetzbar sind und im Gegensatz zu den oben erwähnten keinen Lehrgangscharakter haben. Beispiele für solche Praxishandreichungen sind: „Mathekings“ (Hoenisch & Niggemeyer, 2004) „Jederzeit Mathezeit!“ (Bostelmann, 2009) und „Frühe mathematische Bildung“ (Fthenakis, 2009). Einerseits sehen die Autoren dieser für die Praxis konzipierten Bücher in Mathematik mehr als Zahlen und Rechnen, beschreiben dies andererseits aber nicht systematisch. So werden zum Beispiel von Fthenakis (2009, S. 16) folgende mathematische Zielkategorien benannt: „Sortieren und Klassifizieren, Muster und Reihenfolgen, Zeit, Raum und Form sowie Mengen, Zahlen, Ziffern“. Ganz deutlich vermischen sich hier Ebenen, entsprechen doch einige der Kategorien den für die Primarstufe beschriebenen mathematische Leitideen (s. u.), z. B. Raum und Form oder Muster, andere stehen eher für mathematische Tätigkeiten, wie Sortieren und Klassifizieren und wieder andere stellen ganz konkrete mathematische Inhalte dar, wie Zeit oder Mengen und Ziffern.

Soll das mathematische Potenzial von Alltagssituationen systematisch beschrieben werden, ist diese Vermischung von Beschreibungsebenen problematisch. Mathematische Inhalte für den Kindergarten zu systematisieren ist aber eine unvermeidbare Aufgabe, will man die im Kindergartenalltag vorhandenen Situationen auf deren mathematischen Gehalt hin analysieren und diesen nutzbar machen.

Mathematische Inhaltsbereiche

Wie entkommt man also dem oben beschriebenen Dilemma und gelangt zu geeigneten Beschreibungsdimensionen?

Eine Orientierung an den NCTM-Standards (2005) scheint eine sinnvolle Möglichkeit, wenn man bedenkt, dass diese Standards als Leitlinien für das Mathematiklernen vom Kindergarten bis zur zwölften Klasse konzipiert sind. Hellmich stellt 2007 in seinem Artikel „Möglichkeiten der Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten" die verschiedenen Inhaltsbereiche mit ihren Anforderungen für den vorschulischen Bereich in Anlehnung an NCTM im Überblick dar. Darin werden die Inhaltsbereiche wie folgt benannt (Übersetzung nach Hellmich, ebd.): „Inhaltsbereich Arithmetik", „Inhaltsbereich Geometrie", „Lernbereich Größen", „Inhaltsbereich Muster", „Inhaltsbereich Umgang mit Daten und Wahrscheinlichkeit". Bei einem Vergleich der Leitideen, die in den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich" formuliert wurden, mit den Inhaltsbereichen der amerikanischen Standards sind vor allem Gemeinsamkeiten zu verzeichnen, wenn es um die Wahl der Namen für die Inhaltsbereiche bzw. Leitideen geht. Die Idee des Mathematiklernens an denselben Inhaltsbereichen vom Kindergarten bis zum Schulabschluss spiegelt sich in unseren nationalen Bildungsstandards aber nicht in vergleichbarer Weise wie in den Standards der NCTM wider. Bedenkt man, dass die Inhaltsbereiche darin, was deren Namen angeht, nahezu identisch mit den Leitideen der deutschen Bildungsstandards sind, wird klar, dass eine Anwendung der Leitideen auf den vorschulischen Bereich möglich und sinnvoll ist. Im Sinne einer guten Vernetzung von Kindergarten und Grundschulen ist es dann nur folgerichtig, auch für Deutschland auf die Bezeichnungen der Leitideen zurückzugreifen, die da wären: Zahlen und Operationen, Raum und Form, Muster und Strukturen, Messen und Größen, Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Es scheint naheliegend, das mathematische Potenzial von Situationen und Beispielen aus der Praxis mithilfe dieser Leitideen zu beschreiben, wobei zu berücksichtigen ist, dass es vielfach Überschneidungen zwischen den Leitideen gibt und eine eindeutige Zuordnung einer Spielsituation zu einer Leitidee nicht möglich ist. Beobachtungen verschiedener Spielsituationen in der „Bauecke" machen überdies deutlich, dass der mathematische Gehalt einer Situation nicht nur von den mathematischen Inhalten, denen das Kind im Spiel begegnet, abhängt, sondern auch davon, wie diese Inhalte verfolgt werden. Für eine umfassende Beschreibung und Analyse des mathematischen Potenzials von Spielsituationen reichen demnach die Leitideen nicht aus.

Mathematische Arbeitsweisen

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich" (KMK 2004) werden neben den in den Leitideen formulierten inhaltsbezogenen Kompetenzen allgemeine mathematische Kompetenzen beschrieben, nämlich: Kommunizieren, Argumentieren, Problemlösen, Modellieren und Darstellen. Können diese Begriffe als Dimensionen für die Beschreibung vorschulischer Spielsituationen herangezogen werden? Hier steht man zunächst vor dem Problem, dass sich deren Definitionen auf das Mathematiklernen in der Schule beziehen. Wenn man versucht, die Definitionen auf den Vorschulbereich anzuwenden, steht man vor verschiedenen Schwierigkeiten. Für den Begriff Problemlösen lässt sich feststellen, dass Situationen, in denen Probleme und Anforderungen mithilfe der Mathematik gelöst werden, durchaus einen wichtigen Aspekt mathematischen Lernens im Kindergarten darstellen. Andererseits könnte jede Situation, in der Mathematik verwendet wird, in diesem Sinne verstanden werden, was bedeutet, dass mit diesem Begriff eine differenzierte Beschreibung verschiedener Situationen kaum möglich ist.

Eng verbunden mit dem Problemlösen ist das Modellieren. Grüßing und Peter-Koop (2007, S.172) äußern sich folgendermaßen zum Modellieren: „Mathematisches Modellieren hingegen ist eindeutig eine Kompetenz, die in der Regel erst in der Grundschule angebahnt und im Mathematikunterricht der weiterführenden Schulen weiter ausgebaut wird." Modellieren ist damit als Teil formaler Mathematik keine sinnvolle mathematische Beschreibungsdimension für den vorschulischen Bereich.

Die Kompetenzen Kommunizieren, Argumentieren und Darstellen spielen im Vorschulalter fraglos eine wichtige Rolle. Versteht man Darstellen allerdings, als „jegliche Art der >Veräußerung< des Denkens." (Krauthausen & Scherer 2010, S. 154), wäre Kommunizieren letztlich Teil von Darstellen, was auch für das Argumentieren als besondere Ausprägung der Ausdrucksfähigkeit gelten müsste. Für den vorschulischen Bereich ist eine Differenzierung zwischen diesen dreien darüber hinaus besonders schwierig, da Kinder häufig nonverbal kommunizieren und argumentieren.

Da es für den Kindergarten keine konsensuelle Liste mathematischer Prozesse oder Arbeitsweisen gibt - auch die Bildungspläne für den vorschulischen Bereich bieten hier keine Anhaltspunkte -, müssen konkrete Situationen im Kindergarten als Ausgangspunkt dienen, um zentrale mathematische Arbeitsweisen zu finden. Ein erster Versuch, die Art und Weise der mathematischen Aktivitäten in Spielsituationen zu beschreiben, legt die Verwendung der drei Begriffe Erkunden, Anwenden und Verdeutlichen nahe.

Eine Situation in der Kinder ausprobieren, welche Länge ein Bauklotz haben muss, um als Dach für ein Gebäude zu dienen, ließe sich als „Erkunden“ beschreiben. Die Situation, in der Kinder mit Baumaterialien nach einem ganz bestimmten Schema einen Turm entstehen lassen, könnte man als „Anwenden“ im Sinne des Fortsetzens eines erkannten/ bekannten Musters bezeichnen. Wenn immer zwei Bauklötze der gleichen Länge nebeneinander auf den Boden gelegt werden, dann findet nach erstem Ermessen ein „Verdeutlichen“ einer gefundenen Beziehung statt.

Die Tragfähigkeit dieser drei Bezeichnungen für Arbeitsweisen, die durchaus auch zusammenhängen (siehe Abbildung), muss nun durch die Analyse weiterer Videodokumente untersucht werden.

Literatur

Fthenakis, Wassilios E (2009): Frühe mathematische Bildung. Troisdorf: Bildunsgverl. EINS (Natur-Wissen schaffen, / Wassilios E. Fthenakis (Hrsg.) ; 2).

Hellmich, Frank (2007). Möglichkeiten der Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten im vorschulischen Bereich. In: Bildungsforschung, Jahrgang 4, Ausgabe 1, URL: http://www.bildungsforschung.org/Archiv/2007-01/mathematik/ (01.12.2009)

Hoenisch, Nancy; Niggemeyer, Elisabeth (2004): Mathe-Kings. Junge Kinder fassen Mathematik an. Weimar: Verl. das Netz.

Krauthausen, Günter; Scherer, Petra (2010): Einführung in die Mathematikdidaktik. 3. Aufl., Nachdr. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

(15.10.2004): Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. (Jahrgangsstufe 4). Herausgegeben von Konferenz der Kultusminister (KMK), 15.10.2004. Online verfügbar unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf, zuletzt geprüft am 03.08.2010.

National Council of Teachers of Mathematics: Principles and standards for school mathematics. 4. print. (2005). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Peter-Koop, Andrea; Grüßing, Meike (2007): Bedeutung und Erwerb mathematischer Vorläuferfähigkeiten. In: Brokmann-Nooren, Christiane; Gereke, Iris; Kiper, Hanna; Renneberg, Wilm (Hg.): Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 153–184.

Schindelhauer, Barbara; Friedrich, Gerhard (2009): Komm mit ins Zahlenland. In: Pauen, Sabine; Herber, Viktoria; Brüssel, Pit (Hg.): Vom Kleinsein zum Einstein. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor (Frühe Kindheit), S. 43–54.

Wittmann, Erich Ch (2009): Das Mathe 2000 Frühförderprogramm. In: Pauen, Sabine; Herber, Viktoria; Brüssel, Pit (Hg.): Vom Kleinsein zum Einstein. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor (Frühe Kindheit).

Angela HERRMANN, Essen

Beweisen in der Linearen Algebra – typische Schwierigkeiten von Studierenden im ersten Studienjahr

Das erste Studienjahr des Lehramtsstudiums für Mathematik an Gymnasien bereitet vielen Studierenden Schwierigkeiten, was sich zum Beispiel auch in den Abbrecherquoten widerspiegelt. Ein Grund für die Probleme der Studierenden liegt in den hohen Anforderungen, die von Seiten der Hochschulmathematik an sie gestellt werden. So ist zum Beispiel der Abstraktionsgrad im Gegensatz zur Schulmathematik deutlich größer und führt bei den Studierenden häufig zum „Abstraktionsschock".

Im Rahmen des Projekts „Mathematik besser verstehen", das von der Deutsche Telekom-Stiftung gefördert wird, werden solche Probleme analysiert und Unterstützungsmaßnahmen entwickelt. Dabei hat sich ein differenziertes Bild von den Anforderungen und Schwierigkeiten herausgebildet. Im Folgenden soll anhand des „Beweisens in der Linearen Algebra" die Art dieser Anforderungen und Schwierigkeiten genauer beleuchtet werden.

1. Komponenten des Beweisens

Um die Schwierigkeiten, die Studierende beim Beweisen haben, besser verstehen zu können, schauen wir uns zunächst die Komponenten eines Beweises an.

Jeder Beweis (bzw. Teilbeweis) hat ein *grundlegendes Beweisformat* (direkt, indirekt oder induktiv). Studierenden fällt die Wahl des passenden Beweisformats oft nicht leicht. Während es für den induktiven Beweis noch recht eindeutige Hinweise gibt, ist die Entscheidung zwischen direktem und indirektem (Widerspruch oder Kontraposition) Beweis schwieriger.

Beweise sind aus *elementaren Beweisbausteinen* aufgebaut. Darunter verstehe ich zum Beispiel das Unterteilen eines Äquivalenzbeweises ($A \Leftrightarrow B$) in die beiden Teilschritte „$A \Rightarrow B$" und „$B \Rightarrow A$" oder die Annahme „sei x mit ... beliebig" am Anfang eines Beweises zu einer All-Aussage.

Eine weitere wichtige Komponente beim Beweisen sind die *bereichsspezifischen Beweisstrategien*. Damit sind für ein Gebiet typische Vorgehensweisen des Beweisens gemeint wie der Beweis der linearen Unabhängigkeit von Vektoren.

Schauen wir uns an einem Beispiel die bereichsspezifischen Strategien etwas genauer an. Die folgende Aufgabe stammt aus der Vorlesung „Lineare Algebra I", die von Studierenden des gymnasialen Lehramts im ersten Semester gehört wird:

Sei K ein Körper und $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume des K-Vektorraums K^n?

$$(3) \quad G := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in K \text{ für } 1 \leq i \leq n, \ \sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_n\}$$

Anwendung des Unterraumkriteriums:

(i) $G \neq \emptyset$, da z. B. $(0, \ldots, 0) \in G$ ist.

(ii) Seien $u = (a_1, \ldots, a_n), u' = (a'_1, \ldots, a'_n) \in G$ und $\lambda, \mu \in K$ beliebig. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_n; \quad \sum_{i=1}^{n-1} a'_i = a'_n$$

Für $\lambda \cdot u + \mu \cdot u'$ folgt dann:

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot u' = (\lambda a_1 + \mu a'_1, \ldots, \lambda a_n + \mu a'_n)$$

mit $\lambda a_i + \mu a'_i \in K$ für alle i und

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda a_i + \mu a'_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda a_i + \sum_{i=1}^{n-1} \mu a'_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \mu \sum_{i=1}^{n-1} a'_i \\ &\overset{Vor.}{=} \lambda a_n + \mu a'_n \end{aligned}$$

Daraus folgt also $\lambda \cdot u + \mu \cdot u' \in G$.

Das Anwenden des Unterraumkriteriums besteht aus einer typischen Abfolge bestimmter Schritte. In Teil (ii) ist zu zeigen, dass der Vektor $\lambda \cdot u + \mu \cdot u'$ die definierenden Eigenschaften eines Elements von *G* erfüllt. Der Nachweis erfolgt durch das gezielte Zurückführen auf die Voraussetzung, dass die Vektoren *u* und *u'* diesen Eigenschaften genügen. Um die Eigenschaften selbst und die erforderlichen Umformungsschritte zu erkennen, benötigen die Studierenden „structure sense" (Hoch & Dreyfus 2010).

Schwierigkeiten beim Anwenden bereichsspezifischer Strategien liegen häufig darin, die Strategien auf komplexere Sachverhalte adäquat zu übertragen. Während viele Studierende ohne größere Probleme in der Lage sind, das Unterraumkriterium korrekt für den 2- oder 3-dimensionalen kanonischen Vektorraum anzuwenden, haben sie oft große Schwierigkeiten, wenn die Dimension variabel wird (K^n) oder gar die Vektoren eine ungewohnte Gestalt annehmen (Vektorraum der Abbildungen).

Im Gegensatz zu den typischen bereichsspezifischen Strategien gibt es auch solche *Strategien, für die den Studierenden* - im Gegensatz zum Experten - *zur Zeit der Bearbeitung noch keine Muster zur Verfügung stehen*. Darunter fällt zum Beispiel folgende Aufgabe:

> Ist $A \in K_{(n,n)}$ eine $n \times n$-Matrix mit $AX = XA$ für alle $X \in K_{(n,n)}$, dann ist $A = aI_n$ für ein $a \in K$.

Hier muss erkannt werden, dass das Einsetzen möglichst einfacher Matrizen für X (ein Eintrag 1, der Rest 0) schon die gewünschten Eigenschaften von A liefert.

An den beiden Beispielen sieht man, dass die einzelnen Komponenten beim Beweisen keineswegs separat vorliegen, sondern miteinander verwoben sind. Typische bereichsspezifische Strategien bestehen beispielsweise aus einer bestimmten Abfolge von elementaren Beweisbausteinen („seien u, u' beliebig", etc.).

2. Fachliche Anforderungen

Die Kenntnis von Strategien und dem grundlegendem Aufbau von Beweisen reicht noch nicht, um auch tatsächlich erfolgreich selbst einen Beweis führen zu können. Hinzu kommen noch viele andere fachliche Anforderungen, denen sich die Studierenden zu Beginn ihres Studiums gegenüber sehen und die sie erst zu meistern lernen müssen.

Die Studierenden müssen beispielsweise adäquate Vorstellungen zu Konzepten entwickeln und verschiedene *Ausprägungen dieser Konzepte* kennen. Beim Konzept des Vektorraums als einer Menge mit bestimmten Strukturen müssen sie einerseits die Anschauung des 2- bzw. 3-dimensionalen Raums vor Augen haben. Andererseits müssen die Studierenden erkennen, dass auch Mengen von Abbildungen als Vektorräume aufgefasst werden können.

Der *Umgang mit mathematischen Darstellungsmethoden* fällt vielen Studierenden schwer. Dabei sind Syntax, sprachliche/mathematische Präzision und Strukturiertheit beim Formulieren eines Beweises wichtig.

Auch *formales Operieren* muss von den Studierenden beherrscht werden. Kaum ein Beweis kommt ohne Termumformungen, Ziehen einfacher Schlussfolgerungen, Äquivalenzumformungen oder algorithmischen Methoden aus.

Zu den Anforderungen gehört ebenfalls das *Transferieren des Aufgabentexts* in eine Form, in der die zur Verfügung stehenden Methoden angewendet werden können. Durch diese „Übersetzung" in den mathematischen

Formalismus schafft man sich Zugriff zum Beweis (vgl. Phase Z in Ableitinger 2011). In der folgenden Aufgabe ist es zum Beispiel notwendig die Aussage „unabhängig von der Wahl der Basis“ in die mathematische Sprache zu übersetzen.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Sei $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Ist B eine Basis von V, so bezeichnen wir wie üblich mit $M_B^B(f)$ die Matrix von f bezüglich B.

Zeige: Die Matrix $M_B^B(f)$ ist dann und nur dann für jede Wahl von B dieselbe Matrix (also unabhängig von der Wahl von B), wenn $f = \lambda \cdot id$ für ein λ aus K ist.

Im mathematischen Formalismus lautet die zu beweisende Aussage dann:

$$\forall B, B' \text{ Basen von } V : M_B^B(f) = M_{B'}^{B'}(f) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K : f = \lambda \cdot id$$

Anhand dieser Form kann man besser erkennen, dass ein möglicher Beweis mit Hilfe von Transformationsmatrizen durchführbar ist.

3. Schlussfolgerungen

Diese Aufzählung einiger Anforderungen, die an die Studierenden gestellt werden, zeigt schon ihre Vielseitigkeit. Allein daraus werden schon einige der Schwierigkeiten resultieren. Viele der Dinge müssen zu Beginn des Studiums von den Studierenden neu erlernt werden. Wo genau die Studierenden beim Bearbeiten von Aufgaben scheitern, bleibt noch zu untersuchen. So können dann gezielt Unterstützungsmaßnahmen entwickelt werden. Die „cognitive load theory“ (Sweller et al. 1998) impliziert zum Beispiel die Maßnahme, die verschiedenen fachlichen Anforderungen separat zu thematisieren und den Umgang mit Konzepten, Darstellungsmethoden, etc. einzeln zu schulen. Diese Vorgehensweise würde es den Studierenden ermöglichen, sich zunächst der implizit gestellten Anforderungen bewusst zu werden, um sich dann gezielt darin zu üben.

Literatur

Ableitinger, Ch. (2011): Komplexität von Übungsaufgaben im ersten Jahr des gymnasialen Lehramtsstudiums. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. WTM-Verlag Stein, Münster.

Hoch, M., Dreyfus, T. (2010): Nicht nur Umformen, auch Strukturen erkennen und identifizieren – Ansätze zur Entwicklung eines algebraischen Struktursinns. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 33, 25-29

Sweller, J., van Merrienboer, J., Paas, F. (1998): Cognitive Architecture and Instructional Design. In: Educational Psychology Review, Vol. 10, No. 3, 251 – 296

Kurt HESS, Zug (CH)

Fach- und Kompetenzorientierung im Kindergarten

Es ist oder war ein «Markenzeichen» des Kindergartens, «das Kind ganzheitlich als Kind» zu sehen und es ebenso in die «Zone der nächsten Entwicklung» zu führen (Vygotskij, 1978). Momentane Bildungsreformen differenzieren diesen Anspruch in fachdidaktische Richtungen. Es bedarf allerdings noch einiger Klärungen, bis «schulrelevante» Lernkonzepte zu einer Kindergartenkultur passen (vgl. Hess, 2010a, 2011a, b, c).

1. Vorläuferfertigkeiten als Kompetenzorientierung

«Arithmetische Vorläuferfertigkeiten» – bestehend aus Zahl- bzw. Zähl- und Mengenkonzepten (Krajewski, 2003) – beschreiben Wissens- Verstehens- und Könnensvoraussetzungen der Schulmathematik. Die Bezeichnung richtet sich leider einseitig an die «*nächste* Zone», obwohl auch Vorläufer Vorläufer haben. Die Alternative bestünde aus einem Kompetenzbegriff, der in Richtung Schulmathematik *und* in Richtung basaler Fertigkeiten (z. B. Motorik, Wahrnehmung) eine *vertikale Offenheit* zeigt.

Die «mathematische Sprache» dient der Beschreibung und Interpretation weltlicher Zustände und Beziehungen. Ein adäquates «Sprachverständnis» bedingt ausgiebiger Sinnes- und Handlungserfahrungen, welche durch Reflexion – bzw. Abstraktion und Darstellung – zu begrifflichen Konzepten bzw. mentalen Schemata führen. Es ist also sinnvoll, mathematische Kompetenzen aus weltlichen Bedeutungen zu generieren und umgekehrt zu formalisieren. Daraus können *horizontale* bzw. Fächer verbindende Lernchancen entstehen, die nicht nur zum Kindergarten, sondern generell zu einer flexiblen Mathematisierung und Anwendung gehören (Hess, 2011c).

2. Lernumgebungen: Öffnung des Kompetenzbegriffs

Die folgenden Beispiele illustrieren einen vertikal und horizonal offenen Kompetenzbegriff an Lernumgebungen (Hess & Wälti, 2009), welche unter dem Aspekt des *Teil-Ganzen Schemas* aufscheinen (Resnick, 1989; vgl. Hess, 2010b, 2011c). Das Schema entspricht einem «Präkonzept», welches in der Schulmathematik beispielsweise mit Stellenwerten, Maßeinheiten oder Brüchen eine zunehmende Komplexität und Abstraktion erfährt. Die folgenden Überschriften enthalten die Bezeichnung der Lernumgebung und die Kompetenzaspekte, welche zum Schemaerwerb herausfordern.

Musterschlangen: Ausprobieren und Argumentieren

Die Kinder probieren, in vorgezeichnete Schlangen visuelle, numerische oder operative Muster zu legen. Die einen wechseln zwischen rot und blau ab, andere variieren die Sequenzen oder steigern die Komplexität. Auch numerische und operative Muster reichen von einfachen Abwechslungen und Progressionen bis zu komplexen Strukturen.

Vertikale Orientierung: Ein monotones Muster besteht aus einer konstanten Abwechslung von Elementen oder Sequenzen. Es gewinnt an Übersicht, wenn es in einer hierarchischen Organisation steht. Gegenteiliges Beispiel: Das Alphabet ist als bloße Aneinanderreihung verfügbar. Folge: Der *5.* Buchstabe vor dem «*P*» lässt sich nicht direkt ermitteln. Die *5.* Zahl vor der *97* hingegen schon. Hierarchisch organisierte Begriffe ermöglichen solche Leistungen: Die Verdoppelung des Fünfers ergibt den Zehner, fünf Fünfer den *50*er, deren Verdoppelung den *100*er. Dies ist Ausdruck des Teil-Ganzen Schemas, welches Teile im Ganzen organisiert bzw. «logisch» regelt und dadurch flexibel nutzen lässt. Eine Addition hat z. B. dieselbe Summe, wenn lediglich die Unterbegriffe bzw. die Summanden «drehen».

Die Kinder sammeln in *horizontalen Verbindungen* z. B. Tannzapfen und Steine, welche sie regelmäßig anordnen. Sie erzeugen zu Liedern Bewegungsmuster und zeichnen diese. Sie erfahren, dass Ordnung zu Vereinfachung, Orientierung und Übersicht führt (vgl. Hess, 2009, 2010b, 2011c).

Würfelhäuser: Mathematisieren und Darstellen mit Würfeln

Anschauliche und mentale Orientierungen stehen im Zentrum, während die Kinder nach Planvorlagen Häuser mit Würfeln bauen. Sie übersetzen Zahlen in grafischen Plänen, indem sie entsprechend viele Würfel aufeinander stellen. Sie lernen, die Häuser sprachlich zu beschreiben und nach sprachlicher Anweisung zu bauen. Im Kindergarten fordern die Würfelhäuser zu Differenzierungen und Orientierungen in der Wahrnehmung heraus. Es dominieren (Re-)Konstruktionen im Sinne des Nachbauens, Vergleichens, Abdeckens, Veränderns und Überprüfens. In *vertikaler* Ausrichtung sind verschieden anspruchsvolle bzw. abstrakte Darstellungen und Übersetzungen möglich (sprachlich, grafisch, handelnd). Die gesamte Lernumgebung bietet einige *horizontale Verbindungen* zur Geometrie. In arithmetischer Absicht kann die Anzahlerhaltung sensu Piaget einsichtig werden.

Wege in der Plustafel: Operieren und Benennen

In der ersten Klasse erfinden und lösen die Kinder Rätsel zur Einspluseinstafel. Sie suchen nach Wegen bzw. Ableitungen mit und ohne Vorlage. Sie besprechen, begründen und vergleichen. *Vertikale Differenzierung*: Beim gestützten Üben und beim visuellen Operieren (vgl. Hess, 2011b, c) sind elementare Einsichten in ein operatives Teil-Ganzes Schema möglich. Formale Rätsel ohne eines sichtbaren Einspluseinsplans setzen eine mentale Verfügbarkeit und Flexibilität voraus. *Horizontale Verbin-*

dungen: Im Kindergarten erwerben die Kinder ein operatives Mengenverständnis beim konkreten Tun, beim Ausschenken, Zusammenknüpfen, Abreißen, usw.

Einkaufen: Mathematisieren und Darstellen mit Geld

Die Kinder ordnen und versehen Warenangebote mit Preisschildern. Sie zeichnen oder schreiben Einkaufslisten, bezahlen jedes Produkt einzeln oder als Summe, usw. – *Vertikale Öffnung:* Vorerst erwerben die Kinder ein «Einkaufsschema», sie lernen den Geld-Waren-Austausch in der Logik des Teil-Ganzen Schemas verstehen (vgl. Hess, 2011c). Sie tauschen Waren, visualisieren Preise, und nähern sich Begriffen wie «teuer» und «günstig» an. Steigerungen liegen in gezeichneten und geschriebenen Einkaufslisten, Berechnungen des Totals, des Wechselgeldes oder Rabatten.

3. Nachhaltigkeit als Bildungskontinuität

Ein Unterricht ist nachhaltig, wenn er «nach unten» in Richtung Basisfunktionen und «nach oben» in Richtung Schulmathematik offen ist. Die Kinder knüpfen an bisherigem Wissen und Verstehen an, sie gehen eigenen Motiven nach und beschreiben diese in der «mathematischen Sprache».

Nachhaltigkeit heißt auch, dass Kinder in ihrem eigenen Tempo zu Einsichten gelangen dürfen. Stamm (2005) zeigte eindrücklich auf, dass vorschulisch «beigebrachte» Wissensvorsprünge nur wenige Schulwochen anhalten. Es sind also Zonen und Anreize zu schaffen, damit die Kinder wirklich aus eigenen Motiven heraus am eigenen Wissen, Verstehen und Können anknüpfen bzw. eigene (Prä-)Konzepte erweitern und optimieren.

4. Lernkultur im Kindergarten

Es braucht keinen Schall und Rauch, es braucht keine Verniedlichungen und Emotionalisierungen, um Kinder in eine «mathematische Sprache» einzuführen. Die Kinder sind von sich aus motiviert, alles Mögliche zu zählen, zu ordnen und zu vergleichen. Selbst die Betonung der mathematischen Modellhaftigkeit ist mit dem Argument vereinbar, dass Kinder «ihre» Welt in ihrer Buntheit und Einzigartigkeit formalisieren dürfen. Dies entspricht der Lernkultur eines Kindergartens, welcher sich an eigenen Qualitäten und Potenzialen orientiert und verdünntes schulisches Lernen ablehnt. Darin ist es «normal», mit konkreteren Mitteln – wie Malen, Schneiden oder Legen – über eine Zahl oder eine Form nachzudenken.

5. Curriculare Abbildung

Die Bildungsstandards der Schweizer Schulreform HarmoS beziehen sich zu Recht auf ein institutionelles Lernen, das im Kindergarten beginnt. Curriculare Abbildungen könnten fachdidaktische Bestrebungen stützen und dem Kindergarten eigene Realisierungschancen geben, wenn einzelne Kompetenzaspekte in didaktisch sinnvolle Einheiten eingebunden wären. Operieren und Benennen, Mathematisieren und Darstellen sowie Ausprobieren und Argumentieren könnten solche Kategorien sein.

Fazite

A. Vorläuferfertigkeiten sind Kompetenzen, die in einem Kontinuum von Präkonzepten stehen. «Jeder Vorläufer hat Vorläufer und Nachläufer». Damit ist eine *vertikale Öffnung* nach unten und oben verbunden.

B. Eine «Didaktik mathematischer Vorläuferfertigkeiten» besinnt sich auch auf *horizontale Verbindungen*. Sie führt mit Primärerfahrungen, Reflexions- und Abstraktionsprozessen in eine formale Sprache ein.

C. Eine Lernkultur im Kindergarten strebt Nachhaltigkeit durch Bildungskontinuität bzw. *kontinuierlich erweiterbare Präkonzpte* an.

Literatur

Hess, K. (2009). Muster und Gesetzmäßigkeiten in der Mathematik. *«4 bis 8»*, H. 12, 18-19.

Hess, K. (2010a). Vorwort zur Schweizer Ausgabe. In E. Ch. Wittmann & G. N. Müller. *Das Zahlenbuch. Begleitband zur Frühförderung*. Zug: Klett.

Hess, K. (2010b). Kompetenz orientierte Diagnostik in Lernumgebungen für Kindergärten und erste Grundschulklassen. *Beiträge zum Mathematikunterricht zur 44. Jahrestagung der GDM in München*, *44*, 393-396. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Hess, K. (2011a; im Druck). Kompetenzorientierung im Unterricht mit 4- bis 8-jährigen Kindern. Eine Anregung zum Aufbau einer mathematischen Strategie-*Bewusstheit*. In M. Lüken und A. Peter-Koop (Hrsg.), *Mathematischer Erstunterricht: Empirische Befunde und Konzepte für die Praxis*. Offenburg: Mildenberger.

Hess, K. (2011b; im Druck). Mathematische Einsichten beim visuellen Operieren. Anregungen zur Kompetenzorientierung im Übergang Kindergarten – Grundschule. *Praxis Grundschule*.

Hess, K. (2011c). *Mathematische Muster und Strategien. Eine entwicklungs- und kompetenzorientierte Fachdidaktik für den Unterricht mit 4- bis 8-jährigen Kindern.* Zug: Klett.

Hess, K. & Wälti, B. (2009). *Förderorientiert beurteilen in mathematischen Lernumgebungen für 4- bis 8-jährige Kinder. Schlussbericht «BKS 4-8»*. Aarau: BKS.

Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule.* Hamburg: Kovac.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, *44*, 162-169.

Stamm, M. (2005). *Zwischen Exzellenz und Versagen. Frühleser und Frührechnerinnen werden erwachsen.* Zürich, Chur: Rüegger.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in Society*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Manuela HILLJE, Oldenburg

Wie implementieren Lehrerinnen und Lehrer kognitiv aktivierende Aufgaben in den Mathematikunterricht

Im Rahmen der TIMSS-Video-Studie wurden drei Dimensionen von Unterrichtsqualität herausgearbeitet, die für die Entwicklung der Leistung der Schülerinnen und Schüler im Sinne eines konzeptuellen Verständnisses sowie die Motivation förderlich sind (Klieme, u.a., 2006):

- strukturierende, klare und störungspräventive Unterrichtsführung
- unterstützendes, schülerorientiertes Sozialklima
- kognitive Aktivierung, die sich z.B. durch offene Aufgaben und einen diskursiven Umgang mit Fehlern auszeichnet.

Aus Sicht der Mathematikdidaktik ist vor allem die Dimension der kognitiven Aktivierung interessant. In den Bildungsstandards heißt es zur kognitiven Aktivierung: *„[…] der Unterricht stimuliert geistige Schülertätigkeiten, ermöglicht und ermutigt selbstständiges Lernen und Arbeiten, fördert lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) und fordert stets ein Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten heraus (metakognitive Aktivitäten)“* (Blum u.a. 2006, S. 29).

Die COACTIV-Arbeitsgruppe hat in einem Aufgabenklassifikationsschema Kennzeichen kognitiv aktivierender Aufgaben erarbeitet (Jordan u.a., 2006). Einige dieser qualitativ unterschiedlichen Merkmale sind:

- stoffliche Verbindungen werden zur inhaltlichen Vernetzung des Unterrichts hergestellt
- früher Gelerntes wird zum kumulativen Wissensaufbau herangezogen
- außer- oder innermathematische Modellierungen werden durchgeführt
- Argumentationen und Darstellungen werden verwendet
- verschiedene Repräsentationsformen treten auf
- es wird über mathematisches Denken reflektiert
- die drei Typen mathematischer Denkweisen (prozedural-algorithmisch, begrifflich und technisch) treten im gesamten Aufgabenbestand ausgewogen auf
- es gibt mehrere mögliche Lösungswege.

Die COACTIV-Studie hat durch Analysen des Aufgabenbestandes der Lehrerinnen und Lehrer der PISA-Klassen gezeigt, dass das Vorkommen von Aufgaben mit höherem kognitiven Potenzial im Unterricht einen höheren Leistungszuwachs bewirkt. Es konnte aber auch gezeigt werden, dass im deutschen Mathematikunterricht eine ausgeprägte Einseitigkeit der Aufgabenstellung herrscht: Das kognitive Aktivierungspotenzial ist sehr niedrig und die Aufgaben sind sehr homogen, denn es findet kaum mathematisches Argumentieren statt und es werden wenig außermathematische und innermathematische Bezüge hergestellt (Kunter u.a., 2011).

Entscheidend ist aber vor allem die Art der Bearbeitung im Unterricht (Blum u.a., 2006). Hier zeigt sich kognitive Aktivierung beispielsweise durch Anregung der selbständigen Überprüfung der Gültigkeit der Lösungsvorschläge, Ermutigung zur Erläuterung unterschiedlicher Lösungswege und Förderung der kognitiven Selbstständigkeit der Lernenden (Kunter u.a., 2011).

In Einzelfallanalysen im Rahmen eines Dissertationsprojektes hat sich gezeigt, dass es einigen Lehrerinnen und Lehrern schwer fällt, eine kognitiv aktivierende Lernumgebung zu gestalten, obwohl Aufgaben mit kognitivem Aktivierungspotenzial gestellt werden. Die Lehrkräfte sollten jeweils eine Aufgabe aus einem Pool von Aufgaben, die nach oben genannten Kennzeichen zur kognitiven Aktivierung ausgewählt wurden, in den Unterricht implementieren. Im Vorfeld sollten die Lehrerinnen und Lehrer mögliche Schülerlösungen schriftlich festhalten. Die Unterrichtsstunde wurde videografiert und im Anschluss wurde ein reflektierendes, leitfadengestütztes Interview geführt.

Die Aufgabe ‚Kreise'

Die Aufgabe ‚Kreise' (Abb. 1) ist kognitiv aktivierend, da hier sowohl Verbindungen zwischen Fläche und Umfang als auch innermathematische Zusammenhänge hergestellt werden müssen, es gibt verschiedene mögliche Lösungswege und es ist vor allem begriffliches Denken erforderlich.

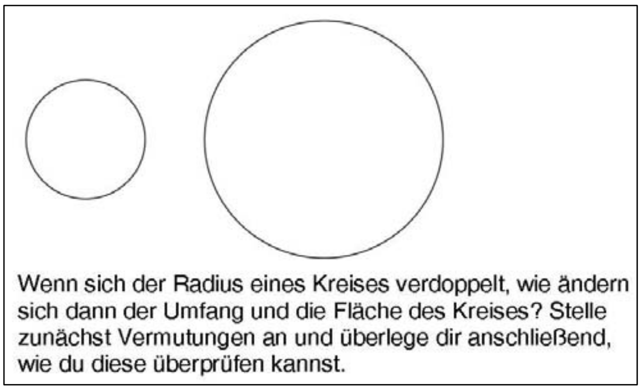


Abb. 1: Aufgabe ‚Kreise' (Idee aus div. Quellen)

Der Hauptschullehrer, der diese Aufgabe im Unterricht eingesetzt hat, erkannte dieses Potenzial aber kaum. Dies zeigte sich zum Beispiel an der Wahl der vorangehenden Aufgabe, in der nur der Umfang thematisiert wurde und die vom Lehrer als *indirekte Hilfestellung*[1] für die Aufgabe ‚Kreise' ange-

[1] Originalaussagen der Lehrkräfte sind kursiv gedruckt

dacht war. Dies könnte ein Grund dafür sein, dass weder Schüler noch Lehrer im Zusammenhang mit der Aufgabe ‚Kreise' die Änderung des Flächeninhalts bearbeiteten oder ansprachen. Obwohl der Lehrer im Interview äußerte, dass die Schüler so *zwei, drei Beispiele* rechnen und *Begründungen* liefern sollten, akzeptierte er im Unterricht die Schülerlösung, die anhand eines Beispiels direkt auf die Umfangsverdoppelung schließt. Es wurden keine alternativen Lösungswege besprochen und der Lehrer ging auch nicht auf die Qualität der Lösung ein, obwohl ein Schüler explizit danach fragte. Im Interview ließ der Lehrer ansatzweise erkennen, dass er das Potenzial der Aufgabe zum Vergleich mehrerer Lösungswege erkannte, da er eine weitere Lösung ansprach, die er aber nicht genau benennen konnte.

Im Unterricht blieb ein Großteil des Potenzials der Aufgabe ungenutzt.

Die Aufgabe ‚Zimmermann'

Die Aufgabe ‚Zimmermann' (Abb. 2) ist kognitiv aktivierend, da hier z.B. verschiedene Figuren miteinander verglichen werden müssen. Es gibt verschiedene Lösungswege, insbesondere müssen die einzelnen Teilaufgaben auf unterschiedliche Arten gelöst werden, wobei teilweise ein innermathematischer Problemlöseprozess nötig ist. Außerdem ist vor allem begriffliches Denken erforderlich.

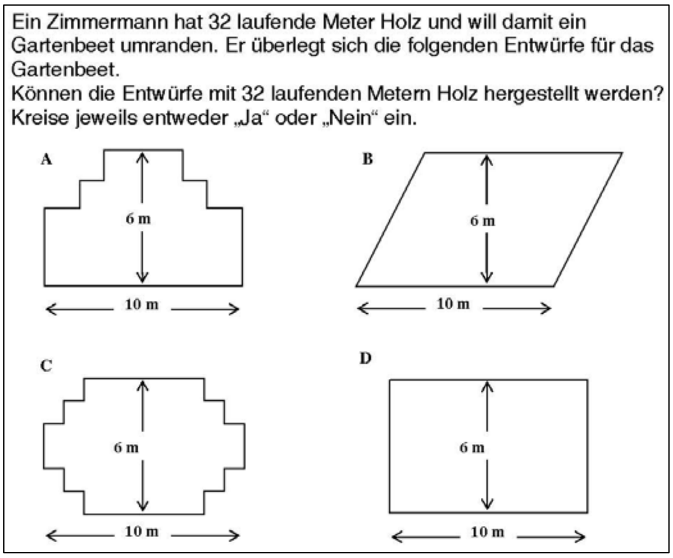


Abb. 2: Aufgabe ‚Zimmermann' (Quelle: PISA 2003)

Die Hauptschullehrerin, die diese Aufgabe im Unterricht eingesetzt hat, erkannte zwar das Potenzial der Aufgabe, setzte dies aber nicht im Unterricht um. Dies zeigte sich beispielsweise im Interview, da sie erkannte, dass die Aufgabe ‚Zimmermann' von den anderen Aufgaben, die sie gestellt hat, *abweicht*. Diese sind sehr prozedural geprägt und fordern *stumpfes Rechnen*. Die Lehrerin erkannte den bei der Aufgabe ‚Zimmermann' nötigen innermathematischen Problemlöseprozess, bei dem die Schülerinnen und Schüler *um die Ecke denken* müssen. Außerdem erkannte sie die mögliche Vernetzung von Wissen und beschrieb verschiedene Lösungswege.

Im Unterricht legte die Lehrerin allerdings einen Fokus auf die Erstellung eines Arbeitsplanes nach folgendem Schema: Flächen – Formeln – Maße –

Rechnung – Kosten. Dieser wurde in den vergangenen Stunden mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet und stellt ein *Raster dar, an dem sie sich langhangeln können*. Allerdings wurde dieser Arbeitsplan nicht individuell an die Aufgaben angepasst, sondern immer in dieser standardisierten Form verwendet. Auch bei der Aufgabe ‚Zimmermann' drängte die Lehrerin die Schülerinnen und Schüler immer wieder zur Anwendung des Arbeitsplanes. Dies führte dazu, dass die Lernenden zwanghaft versuchten, die Umfänge zu berechnen, indem sie z.B. bei Figur A den einzelnen Teilstücken Maße zuordneten und durch „herumlaufen" die einzelnen Teilstücke addierten. Sie wendeten hierbei keine Strategien an, die Ihnen die Rechnung vereinfachen könnten und wurden auch von der Lehrerin nicht zur Reflexion des Lösungsweges angeregt. Desweiteren gab die Lehrerin sehr viel Hilfestellung bis hin zur Erklärung des kompletten Lösungsweges ohne Schülerbeteiligung.

Das Potenzial der Aufgabe blieb auch hier weitgehend ungenutzt.

Dies sind zwar nur zwei kleine Einblicke in die Unterrichtspraxis, aber sie zeigen ein mögliches Problem: Auch wenn Lehrerinnen und Lehrer das kognitive Aktivierungspotenzial von Aufgaben erkennen, setzen sie diese Erkenntnisse nicht unbedingt in die Gestaltung des Unterrichts um.

Es gilt diese Zusammenhänge weiter zu untersuchen und daraus Konsequenzen für die Lehrerbildung zu ziehen.

Literatur

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (2006). Bildungsstandards Mathematik: konkret – Sekundarstufe I : Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S. Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M. & Kunter, M. (2006). Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Klieme, E., Lipowsky, F., Rakoczy, K. & Ratzka, N. (2006). Qualitätsdimensionen und Wirksamkeit von Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und ausgewählte Ergebnisse des Projekts "Pythagoras". In Prenzel, M. Allolio-Näcke, L. (Hrsg.), Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule - Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms (S. 127-146). Münster: Waxmann.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften - Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann.

Horst HISCHER, Saarbrücken

„Vernetzung“ als Bildungsanspruch?

Allenthalben wird in Presse und Wissenschaft von „Vernetzen“ und „Vernetzung“ gesprochen und geschrieben – auch in der Didaktik der Mathematik. Insbesondere drängt sich in der Literatur und bei vielen Vorträgen der Eindruck auf, dass man, wenn von „Vernetzen“ die Rede ist, meist ohne jeden Qualitätsverlust stattdessen von „Verbinden“ sprechen kann. Nun steht aber „Verbinden“ durchaus in der Tradition von Freudenthal, Wittenberg und E. Chr. Wittmann, wenn diese nämlich einen **beziehungshaltigen Unterricht** fordern. Der Terminus „Vernetzen“ wäre dann in Umkehrung von Matthäus 9, 17 nur *„alter Wein in neuen Schläuchen“* – das klingt zwar gut, ist aber nach Fritz Erler „reziplikativ“ (vgl. [Hischer 2010, 4]) und bringt uns in der Wissenschaft nicht wirklich weiter, es sei denn, dass mit „Vernetzen“ tatsächlich ein *Bildungsanspruch* einhergeht, der mit dem „Verbinden“ noch nicht erfasst wird und *der über die teilweise nur statisch interpretierbare „Beziehungshaltigkeit“ erkennbar hinausweist*. Das soll im Folgenden andeutungsweise erläutert werden (vgl. [Hischer 2010]).

1 Grundlegendes: Netz, Netzgraph, Netzwerk, soziales Netzwerk

Dem „Vernetzen“ liegt etymologisch das „Netz“ zugrunde. Eine Analyse der hiermit verbundenen Alltagsvorstellungen führt zu einer Definition von *„**Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext**“*, was hier nur angedeutet sei (ausführlich in [Hischer 2010, 59 ff.]): Ein *materielles Netz* wie beispielsweise ein Fischernetz kann als maschenartiges Gebilde aufgefasst werden, das aus Kanten und Knoten zu bestehen scheint. Betrachten wir z. B. in der Mathematik Definitionen, Sätze, Beispiele usw. als *Knoten* und Zusammenhänge bzw. Beziehungen zwischen diesen als *Kanten*, so liegt es nahe, diese in ihrer Gesamtheit als **Bestandteile** eines *abstrakten Netzes* aufzufassen. Allerdings ist ein solches „Netz“ für sich genommen im pädagogisch-didaktischen Kontext uninteressant, weil es dort nämlich um *Menschen* geht, die damit umgehen, also etwa um die Schülerinnen und Schüler, die als **Benutzer** des Netzes gewissermaßen dessen *Inhalt* bilden und sich durchaus in den Maschen dieses Netzes „verfangen“ können. Dieser Prozess der Netzbenutzung wird ferner meist von „außerhalb“ durch **Betrachter** wahrgenommen und ggf. von diesen gesteuert, beispielsweise durch die Lehrerinnen und Lehrer. – Diese Netzdefinition besteht aus drei, hier nicht näher beschriebenen Aspektgruppen: (1) *Zweck-Aspekte* bezüglich der Bestandteile, Benutzer und Betrachter; (2) *Handlungs-Aspekte* für dessen Benutzer („Vernetzen“, „vernetztes Denken“, „vernetzendes Denken“); (3) *Zustands-Aspekte* („Vernetzt-Sein“, „Im-Netz-Sein“).

Während ein materielles, „greifbares“ Netz mathematisch bei Bedarf oft als *Graph* beschreibbar ist, der aus Kanten und Knoten besteht, scheint dies nach dem hier vorliegenden Ansatz für ein „Netz“ im pädagogisch-didaktischen Kontext unpassend zu sein. Vielmehr liegen zunächst Assoziationen mit dem soziologischen „System“ nahe (bei dem ebenfalls die „Betrachter“ eine wichtige Rolle spielen). Dennoch benötigt man hier den Systembegriff nicht: So bieten sich zur strukturellen Beschreibung der *Bestandteile* (den „Knoten“ und ihren „Verbindungen“, genannt „Kanten“) sog. „einfache“ („mehrfachkantenfreie“) Graphen an, die man sich überlagert bzw. kombiniert denken kann, um auf diese Weise ggf. vorhandene Mehrfachkanten zu erfassen. Die (ebenfalls vielfältig denkbaren) Beziehungen der *Benutzer* zu den Knoten der Bestandteile (oder zu deren Verbindungen) und der Benutzer untereinander lassen sich dann bei Bedarf durch weitere Graphen beschreiben. Hinzu kommen noch Beziehungen der *Betrachter* untereinander, zu den Benutzern und zu den Bestandteilen, so dass etliche Graphen vorliegen können, die insgesamt in ihrer Kombination ein *Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext* ausmachen. Das führt dazu, in einem ersten Schritt *spezielle einfache Graphen* für das *graphentheoretisch „Innerste“ der Netze* (nämlich für ihre *Bestandteile*) axiomatisch zu charakterisieren:

Im *idealtypischen Fall* ist dies ein **Netzgraph** als endlicher, zusammenhängender Graph, bei dem jede Kante „Teil einer Masche“ ist, ergänzt durch die sinnvolle Zusatzforderung, dass jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat. In Netzgraphen gibt es damit *zwischen je zwei Knoten stets mindestens zwei verschiedene Wege*. Ein endlicher, „maschenhaltiger“ Graph (der also mindestens eine Masche enthält) heißt **Netzwerk** und ist eine Bezeichnung für das strukturelle Insgesamt der Bestandteile eines Netzes im pädagogisch-didaktischen Kontext (s. o.). Damit ist jeder Netzgraph ein spezielles Netzwerk. (Die Bezeichnung „Netzwerk“ ist auf zusammenhängende Graphen beschränkbar, was in einer entsprechenden Theorie zu erörtern wäre.) Benutzer und Betrachter können jeweils ein **soziales Netzwerk** bilden: Zwei Knoten (z. B. zwei Benutzer) sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie Mitglied derselben „Zugehörigkeitsgruppe“ sind (z. B. Freundschafts- oder Interessengruppe), wobei jeder Gruppentyp ein eigenes soziales Netzwerk generiert. Soziale Netzwerke sind (hinsichtlich eines Gruppentyps) mathematisch als **bipartite Graphen** („zweigeteilte Graphen“) darstellbar, bei denen also ihre Knotenmengen in zwei Teilmengen derart zerlegbar sind, dass jede dieser Teilmengen kantenfrei ist und Kanten somit nur zwischen den Knoten verschiedener Teilmengen existieren. „Soziale Netze“ sind keine „sozialen Netzwerke“, sondern „Netze“ mit Bestandteilen (Gesetze, Verordnungen, Versicherungen, …), Benutzern (Bürger) und Betrachtern (Legislative, Exekutive, Jurisprudenz, Bürger, …).

2 Vernetzungsgradmaße, Kleine Welten, Naben, Netzwerkstabilität

Das „Vorliegen eines Netzgraphen" ist ein *qualitatives Maß* für das Vorliegen einer Vernetzung. Aber auch Netzwerke können als „vernetzt" angesehen werden, enthalten sie doch mindestens eine Masche. Daher benötigt man auch ein *quantitatives Maß*, genannt „Vernetzungsgrad", deren in der sog. „Netzwerkanalyse" der letzten beiden Jahrzehnte mehrere eingeführt worden sind, insbesondere: *mittlerer Knotenabstand*, *Clusterkoeffizient*, *mittlerer Knotengrad* und *Durchmesser* des Graphen (vgl. [Hischer 2010, Kap. 5]). Diese sog. *Netzwerkstatistiken* können sowohl in ihrer Gesamtheit als auch in ihrer Verschiedenartigkeit zur Beurteilung der jeweils konkreten „Vernetzungsgüte" herangezogen werden. So bildet ein konkretes Netzwerk z. B. eine sog. „Kleine Welt", falls der mittlere Abstand zwischen zwei beliebigen Knoten „klein" ist und sich auch bei Anwachsen des Netzwerks kaum ändert (vgl. das Phänomen "Six degrees of separation"). Das Entstehen Kleiner Welten wird durch Bildung sog. „Naben" begünstigt, also Knoten mit (im Vergleich zu den restlichen Knoten) extrem hohem Knotengrad. Das ist im Zusammenhang mit der „Stabilität" eines Netzwerks zu sehen: Ein solches Netzwerk ist relativ stabil gegenüber der zufälligen Zerstörung von Knoten, jedoch extrem anfällig gegenüber der gezielten Zerstörung von Naben. Entsprechende Netzwerk-Modelle wurden eindrucksvoll empirisch bestätigt, z. B. sowohl beim Internet (einem ungerichteten Graphen) als auch beim WWW (einem gerichteten Graphen).

3 Verbindung, Verzweigung, Vernetzung und das „Netz-Dilemma"

Verbindung: Zwei *Knoten* eines Graphen heißen genau dann *verbunden*, wenn zwischen ihnen (mindestens) ein Weg existiert. | **Verzweigung**: Ein zusammenhängender *Graph* heißt genau dann *verzweigt*, wenn je zwei verschiedene Knoten durch *genau einen Weg* verbunden sind. | **Starke Vernetzung**: Ein *Graph* heißt genau dann *stark vernetzt*, wenn er ein Netzgraph ist. | **Schwache Vernetzung**: Ein *zusammenhängender Graph* heißt genau dann *schwach vernetzt*, wenn er weder verzweigt noch stark vernetzt ist. | **Vernetzung**: Ein *Graph* heißt genau dann *vernetzt*, wenn er entweder schwach vernetzt oder stark vernetzt ist. — Damit folgt u. a.: Genau in *zusammenhängenden* Graphen sind *je zwei Knoten verbunden*. | „Verzweigter Graph" und „Baum" ist dasselbe. | Bäume sind nicht vernetzt.

Kießwetter wies 1993 darauf hin, dass unser *Handeln* grundsätzlich in der Zeit stattfindet (vgl. [Hischer 2010, 185 ff.]) – und damit ist dieses Handeln *„linear"* und *nicht vernetzt*. So liegt also anscheinend eine fatale Situation vor, die „**Netz-Dilemma**" genannt sei und die wie folgt beschreibbar ist:

Man kann zwar ggf. „vernetzend denken", aber nur „monokausal handeln".

4 „Vernetzender Unterricht“ und „Offenheit“

Bereits Klafki forderte 1985 die Entwicklung der Fähigkeit zu „vernetzendem Denken“ und begründete das mit soziologisch-ökonomischen Befunden unserer Welt: *„alles mit allem“ verknüpfen, vielfältige Verflechtungen, Wirkungszusammenhänge*. Die ersten beiden sind idealtypisch mit einem Netzgraphen beschreibbar, und der dritte bedeutet die Modellierung durch einen gerichteten Graphen. Bei der Erörterung der Schlüsselprobleme betont Klafki *„unterschiedliche Wege zur Lösung“* und *„verschiedene Antworten auf die Frage nach Lösungen“* im Zusammenhang mit einer „*Offenheit* der Vorgehensweise“ (auch im Unterricht), womit klar wird: „Offenheit“ und „Vernetzung“ gehören in pädagogischer Sicht zusammen. Ein *„Vernetzender Unterricht“* führt zu Aufgaben für die *Betrachter* (insbes. Lehrpersonen) in Bezug auf die Betreuung der *Benutzer* (insbes. Schülerinnen und Schüler) beim Umgehen mit den *Bestandteilen* eines Netzes. Als *Knoten* sind das z. B. *Themen, Ideen, Begriffe, Definitionen, Vermutungen*, aber auch *Beispiele* und *Übungsaufgaben*. Als *Kanten* sind Beziehungen zwischen diesen Knoten denkbar: *logische* im Sinne des Folgerns bzw. des Folgens, aber auch *emotionale* des Entdeckens, Erlebens, Irrens, Ratlosseins usw., die in ihrer Gesamtheit zu einer individuellen lernpsychologischen „Verankerung“ (der Knoten) beitragen (können). Bereits zur Erfassung bzw. Beschreibung der *Bestandteile* eines Netzes im pädagogisch-didaktischen Kontext können also unterschiedliche Graphen als „sich überlagernde Netzwerke“ auftreten. Hierbei sollten Aspekte der Netzwerkanalyse beachtet werden: *Kleine Welten*, *Naben* und *Stabilität*.

5 Vernetzung als Medium zur Weltaneignung

Im pädagogisch-didaktischen Kontext treten Medien in mehreren Rollen auf: als *Vermittler von Kultur*, als *dargestellte Kultur*, als *Werkzeuge oder Hilfsmittel zur Weltaneignung*, als *künstliche Sinnesorgane* oder als *Umgebungen bei Handlungen*, was wie folgt zusammenfassbar ist: *In und mit Medien setzt der lernende und erkennende Mensch seine Welt und sich selbst in Szene.* Mit Klafkis zitierter „Bereitschaft und Fähigkeit zu vernetzendem Denken“ zeigt sich: *Durch vernetzendes Denken (und damit durch „Vernetzung“) setzt der lernende und erkennende Mensch seine Welt und sich selbst in Szene.* Somit tritt „Vernetzung“ im vorliegenden Kontext mit einem hohen Bildungsanspruch auf und nicht nur als gefällige Floskel:

- Vernetzung begegnet uns als Medium zur Weltaneignung.

Literatur

Hischer, Horst: Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? — Vernetzung als Medium zur Weltaneignung. Hildesheim: Franzbecker, 2010.

Reinhard HOCHMUTH, Kassel, Rolf BIEHLER, Paderborn, Pascal R. FISCHER, Kassel, Thomas WASSONG, Paderborn

Individuelles Lernen im Rahmen von mathematischen Brückenkursen – Math-Bridge: Ein Werkstattbericht

1. Das Projekt Math-Bridge

Betrachtet man mathematische Brückenkurse an europäischen Universitäten, so fällt auf, dass diese in den meisten Fällen weder national noch international vernetzt sind, die Materialien selten mehrsprachig, interoperabel und semantisch durchsuchbar sind und zudem selten adaptiv bzgl. der individuellen Defizite oder des Studiengangs des Lernenden sind. Das von der EU geförderte Projekt Math-Bridge (http://www.math-bridge.org) setzt an diesen Problemen an und versucht Lösungen zu entwickeln. Ziele sind dabei international verwendbares Material für Brückenkurse bereitzustellen, sowie Empfehlungen für den Einsatz der Materialien zu geben. Dazu gehört (1) die Definition einheitlicher, sowohl inhaltlicher als auch didaktischer Rahmenvorgaben zur Strukturierung des Materials, (2) Bereitstellung von mehrsprachigem Content, (3) (Weiter-)Entwicklung des adaptiven Lernsystems ActiveMath (http://www.activemath.org) zur Unterstützung selbständigen Lernens und (4) Beschreibung von Einsatzszenarien für das Material und das Lernsystem.

2. (Meta-)Datenstruktur

Verschiedene Partner des Projektes bringen ihr in Brückenkursen erprobtes Material ein. Dieses Lernmaterial wird in ein einheitliches Format transformiert und muss dafür in Lernobjekte (LO) atomisiert werden. Diese LOs werden mit Metadaten versehen, die es dem Lernsystem ermöglicht, diese später wieder sinnvoll zusammenzusetzen. Hierfür werden zwei Arten von Metadaten benötigt: Struktur-Metadaten und pädagogische Metadaten.

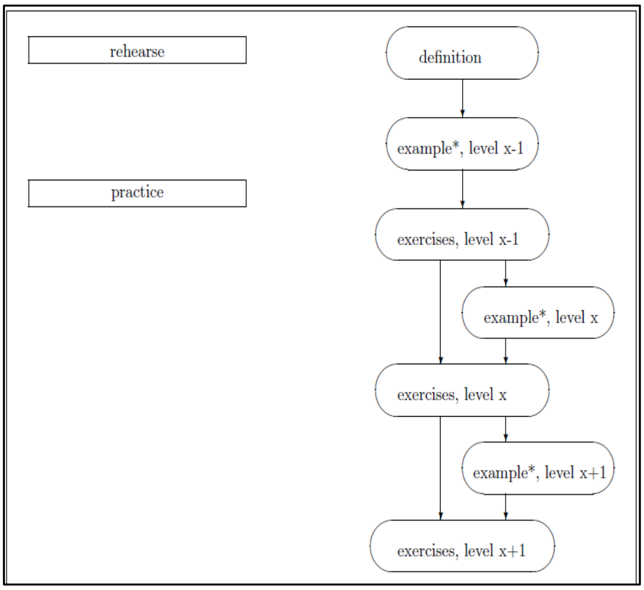
Für die **Struktur-Metadaten** wurde eine Ontologie entwickelt, die die zentralen, im Brückenkurs zu behandelnden Begrifflichkeiten beschreibt (vgl. Biehler et al., 2009). Es wurde eine Auswahl aus der Core Taxonomy for Mathematical Sciences Education auf Grundlage der Erfahrungen und Anforderungen der pädagogischen Partner des Projektes sowie des Curriculums der Europäischen Gesellschaft für Ingenieur-Ausbildung (SEFI) getroffen. Die selektierten Themen werden in ActiveMath in sogenannten „Symbols“ definiert. Zu den Struktur-Metadaten gehört auch die Angabe über die Art des LOs, also ob es sich um ein „konzeptuelles“ LO wie Definition, Axiom, Methode, Satz, Lemma oder Beweis, oder ein „Satelliten“-LO wie Aufgabe, Beispiel oder Text handelt. Mit Hilfe von Relationen zwischen den LOs werden nun zwei Netze über die LOs gespannt: Das äußere Netz definiert die inhaltlichen Abhängigkeiten zwischen den „Symbols“. So ist dort bspw. definiert, dass lineare und quadratische Funktionen ein Teilthema von Funktionen sind. Das innere Netz definiert dann die Zugehörigkeit der einzelnen LOs zu den „Symbols“.

Die **pädagogischen Metadaten** werden bei Aufgaben und Beispielen benötigt, um die Adaptivität des Systems in Bezug auf individuelle Defizite und Studienfächer zu ermöglichen. Dazu werden diese LOs bzgl. 4 Kompetenzen mit jeweils 3 Kompetenzstufen bewertet und jeder Aufgabe eine von 3 Schwierigkeitsstufen zugeordnet. Zudem werden die anwendungsbezogenen LOs einem relevanten Studienfach zugeordnet. Daneben gibt es weitere pädagogische Metadaten, die hier nicht weiter von Interesse sind. Das zugrunde liegende Kompetenzmodell wurde nach Analyse bekannter Modelle (vgl. OECD, 2003; KMK, 2003) entwickelt und beruht auf zwei Grundsätzen: (1) möglichst wenige Kompetenzen zu definieren, um so eine einfache Rückmeldung an die Lernenden zu ermöglichen und (2) möglichst einfach definierte und transparente Kompetenzen zu verwenden, die für den Lernenden ohne didaktische Expertise verständlich und wohl unterscheidbar sind. Diese vier Kompetenzen sind: (1) rechnerisch-technische Kompetenzen, (2) innermathematisches Problemlösen, (3) Modellieren und Lösen außermathematischer Probleme und (4) Kommunizieren, Erklären und Begründen. Diese 4 Kompetenzen werden nun für jede Aufgabe nach den folgenden Kompetenzstufen bewertet: (1) Reproduktion von bekannten Fakten und Algorithmen in gewohnten Kontexten, (2) Verbindung mathematischer Fakten und Routinen sowie mehrschrittige Aufgaben in quasibekannten Kontexten und (3) komplexe Aufgaben, die eine Reflexion von Ergebnisse auch hinsichtlich des eingeschlagenen Lösungsprozesses auf der Metaebene erfordern. Die Schwierigkeitsstufen (Leicht, Normal, Schwer) werden a priori vergeben. Es ist angedacht, diese später durch empirisch gemessene Schwierigkeiten zu ersetzen. Zur Qualitätssicherung bei der Metadatenanreicherung der LOs, die von den verschiedenen Partnern vorgenommen werden, wurde ein Codebook entwickelt, das die Annotation der LOs mit den pädagogischen Metadaten ausführlich an verschiedenen Beispielen erläutert und begründet.

Die beschriebenen Metadaten werden vom adaptiven Lernsystem genutzt, um den Lernstand eines Lernenden zu dokumentieren. Dazu wird im Lernsystem die Bearbeitung einer Aufgabe protokolliert und mit Hilfe der Metadaten (Kompetenz, Kompetenzstufe, Schwierigkeit) sowie der erreichten Punktzahl ein Prozentwert berechnet, der die Kompetenz des Lernenden für den entsprechenden Begriff dokumentiert.

3. Pädagogische Szenarien

Rückmeldungen des Lernermodells von Math-Bridge können nun zum einen vom Lernenden genutzt werden, um seine individuellen Stärken und Schwächen herauszufinden und diesen mit entsprechendem Material und Lernaktivitäten zu begegnen. Zum anderen kann aber auch das Lernsystem selbst die Informationen aus dem Lernermodell nutzen, um aus der Datenbank aller LOs samt ihrer Metadaten ein den Kompetenzen des Lernenden entsprechendes Buch zu generieren. Die Algorithmen, nach denen diese Bücher erstellt werden, werden *Pädagogische Szenarien* genannt. Für Math-Bridge wurden die in ActiveMath existierenden Szenarien (Reiss et al., 2005) auf die Bedürfnisse von Math-Bridge angepasst (Biehler et al., 2010). Dazu gehören Szenarien zum *Begriffe kennenlernen*, *Inhalte wiederholen*, *Aufgaben üben*, *Fähigkeiten trainieren* und *Prüfungen simulieren*. Die obige Grafik zeigt für das Szenario *Fähigkeiten trainieren* das entsprechende Schema, nach dem ein solches Buch vom System zusammengesetzt wird.



Ablaufschema des Szenarios Fähigkeiten trainieren (vgl. Reiss et al., 2005, S. 25)

Bei der Analyse des Kasseler und Paderborner VEMA-Materials (Biehler et al., im Druck) ergab sich, dass sich einige Inhalte nur schwer in LOs zerteilen lassen bzw. nicht alleine stehen können, da sie sich auf andere LOs beziehen: Einige LOs benötigen z.B. spezielles Vorwissen bzw. beziehen sich auf ein spezifisches Beispiel. Zudem sind Teile des Lernmaterials nach einer festen didaktischen Struktur erstellt worden, die als solche erhalten bleiben muss und nicht aufgebrochen werden kann. Für solche Stellen des Lernmaterials wurden die sogenannten *komplexen Lernobjekte* (CLOs) eingeführt, mit denen eine feste Reihenfolge von kleineren LOs definiert werden kann. In Anlehnung an das VEMA-Material haben wir folgende Arten von CLOs identifiziert: *Hinführung-CLO*, *Begründen/Interpretieren/Erklären-CLO*, *Anwendung-CLO*, *typische-Fehler-CLO*, *Aufgaben-CLO* und *Weiterführendes-CLO* (vgl. Biehler et al., 2010). Die Lernenden haben dann die Möglichkeit ihren Bedürfnissen entsprechend die Bereiche des

VEMA-Materials auszuwählen, die sie benötigen. Durch die unterschiedliche Kombination der Bereiche ergeben sich so wiederum verschiedene Szenarien für die Buchgenerierung, z.B. als *Formelsammlung, Übungsbuch* oder zur *Testvorbereitung*.

4. Evaluation

Im Rahmen der Evaluation des Projekts Math-Bridge stehen u.a. folgende Fragen im Mittelpunkt: Wie wird die Benutzbarkeit durch die Lerner bewertet (Usability)? Werden die Pädagogischen Szenarien angenommen und erfüllen sie ihren Zweck (Usage)? Für das Team in Kassel und Paderborn ist zudem relevant, ob Math-Bridge eine vergleichbare oder gar bessere Unterstützung der Lernenden bietet als das bisher eingesetzte VEMA-Material. Dabei werden verschiedene Messinstrumente eingesetzt: Einzelinterviews und Videostudien, um die Verwendung des Systems in Einzelfällen untersuchen zu können; Fragebögen zur quantitativen Beforschung der Nutzung des Lernsystems durch Lernende und Lehrende; Vor- und Nachtests zur Messung des Lernzuwachses. Für die Lernzuwachsmessung wird ein so genanntes Kreuzdesign verwendet, das bereits bei anderen Studien erfolgreich eingesetzt wurde. Mit speziellem Blick auf das VEMA-Material werden die Kurse in Paderborn mit Math-Bridge durchgeführt, während sich Kassel auf VEMA konzentriert.

Das Projekt Math-Bridge wird von der EU im Programm eContentPlus unter der Nummer ECP-2008-EDU-428046-Math-Bridge gefördert.

Literatur

Biehler, R., Hochmuth, R., Fischer, P.R. & Wassong, T. (2009). D1.1: Target Competencies. Abgerufen am 10. März 2011: http://mathbridge.math.upb.de/publ.html

Biehler, R., Hochmuth, R., Fischer, P.R. & Wassong, T. (2010). D1.3: Pedagogical Remedial Scenarios. Abgerufen am 10. März 2011: http://mathbridge.math.upb.de/publ.html

Biehler, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R. & Wassong, T. (im Druck). Self-regulated learning and self assessment in online mathematics bridging courses. In A.A. Juan, M.A. Huertas, S. Trenholm, & C. Steegmann (Hrsg.), Teaching Mathematics Online – Emergent Technologies and Methodologies. Hershey, PA: IGI Global.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Bonn: KMK.

Reiss, K., Moorman, M., Groß, Ch. & Ullrich, C. (2005). D20: Formalized Pedagogical Strategies. Abgerufen am 10. März 2011: http://www.leactivemath.org/publications1.html

OECD (2003). The PISA 2003 Assessment Framework - Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. Paris: OECD.

Andrea HOFFKAMP, Gabriele MOLL, Ludwigsburg

Fortbildungen für Hochschullehrende und Tutoren zu aktivierenden Veranstaltungskonzepten im Mathematikstudium

Fragt man Studierende in Mathematikveranstaltungen der ersten Semester nach ihrem „Bild von Mathematik“, so ist dieses meist vom selbst erlebten Mathematikunterricht geprägt („Einer erklärt vorne und wenige verstehen.“).

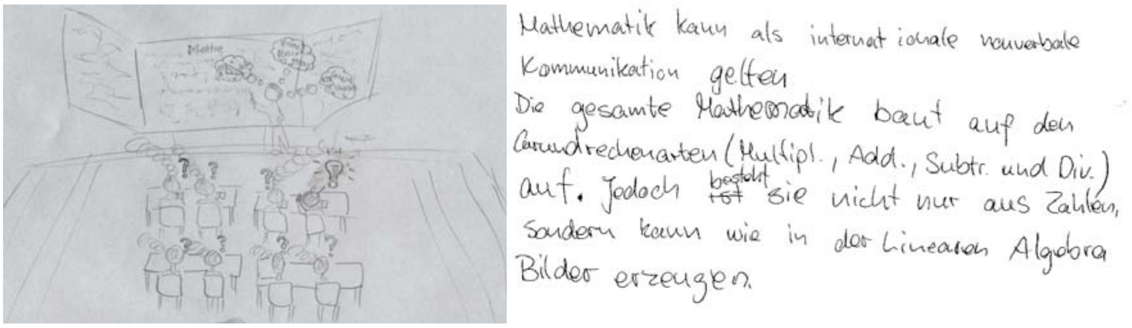


Abb. 1: Studierende zu der Frage „Was ist Ihr Bild von Mathematik?“

Manche sehen Mathematik gar als „nonverbale“ Sprache an, als pure Manipulation von Symbolen und Zeichen. Nicht die Gesetze der Logik seien die Grundlagen für Mathematik, sondern die Grundrechenarten (Abb. 1). Dabei geht es doch gerade in der Mathematik um Kommunikation – um Problemlösen, Argumentieren und Beweisen. Weil die Vorlesungen von großer Stofffülle und hohen Teilnehmerzahlen geprägt sind, wird meist vornehmlich doziert, ohne dabei Studierendenaktivitäten anzuregen. Gerade Studienanfänger in Mathematik scheinen damit große Schwierigkeiten zu haben. Die Abbrecherquoten sind hoch.

Deswegen wurde im Projekt SAiL-M (Semi-automatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik) ein aktivierendes Veranstaltungskonzept entwickelt, welches an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg umgesetzt und evaluiert wurde. SAiL-M ist ein Projekt im BMBF-Förderprogramm „Hochschulforschung als Beitrag zur Professionalisierung der Hochschullehre “. Im Rahmen des Projektes wird derzeit ein Fortbildungskonzept zur Weitergabe und Verbreitung des SAiL-M-Veranstaltungskonzeptes entwickelt.

1. Das SAiL-M Veranstaltungskonzept und dessen Umsetzung an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg

Die Grundphilosophie des Konzeptes orientiert sich an der *Selbstbestimmungstheorie* von Deci und Ryan (1993). Grundlage der Selbstbestimmungstheorie ist die Annahme, dass die Bedürfnisse des Menschen nach

Autonomie, Kompetenz und sozialer Eingebundenheit als Motor für die Weiterentwicklung fungieren. Ob sich jemand als kompetent empfindet, hängt oft von der *Selbstwirksamkeitserwartung*, d.h. der Überzeugung einer Person von sich selbst, (mathematische) Handlungen erfolgreich durchführen zu können, ab (Bandura 1997). Als Quellen zur Steigerung der Selbstwirksamkeitserwartung dienen der Erfolg bei Handlungsausführung, die Beobachtung von Vorbildern (indirekte Erfahrungen) und soziale/verbale Bekräftigung.

In der konkreten Umsetzung orientieren wir uns am *Angebot-Nutzungs-Modell* von Helmke (2006). Dabei wird Unterricht als Angebot verstanden. Die Höhe des Ertrages bzw. die Wirkung von Unterricht ist abhängig von der *Motivation* der Lernenden und wird umso höher sein je höher die *aktive Lernzeit* ist. Im Veranstaltungskonzept werden deswegen in Vorlesung und Übung möglichst viele Gelegenheiten zur aktiven Auseinandersetzung mit Mathematik geboten. *Autonomie* erfahren die Studierenden beispielsweise durch freie Wahl der Übungstage, durch die Möglichkeit der Auswahl an Übungsaufgaben auf den wöchentlichen Übungszetteln. Hilfe erfolgt grundsätzlich bei Bedarf (z.B. im „offenen Matheraum“ oder durch das Bereitstellen der Vorlesungsvideos im Internet).

Eine Steigerung der *Kompetenzwahrnehmung* ist durch folgende Angebote intendiert: kein Vorrechnen in den Übungen, eigenständige Bearbeitung einer selbst erwählten Auswahl von Arbeitsanregungen, Phasen eigenständigen Tuns in der Vorlesung, veränderte Tutorenrolle (Tutor als Coach, der nur soviel Hilfe als nötig gibt). Durch Moodle-Foren und Teamarbeit wird die *soziale Einbindung* erhöht. Teamarbeit ermöglicht aber auch *indirekte Erfahrungen.* Eine wichtige Rolle spielt das Lernen am Modell in der Vorlesung. Die Lehrenden sind sich ihrer Modellfunktion bewusst und zeigen möglichst vielseitige mathematische Wege und auch Irrwege auf (siehe auch Bescherer, Spannagel & Müller 2008, Bescherer & Spannagel 2009).

2. Fortbildungskonzeption

Bei der Konzeption von Fortbildungen, durch die ein solches Veranstaltungskonzept weitergetragen werden soll, sieht man sich verschiedensten Problemen gegenüber. Zum einen scheint es schwer, Hochschullehrende zum Umdenken zu bewegen. Schließlich haben diese selbst ein Mathematikstudium absolviert und die Anfangsschwierigkeiten unter Aushalten von Frustration durch teils harte Arbeit überwunden. Es herrscht die Überzeugung, dass auch Studierende diesen Weg gehen müssen. Weiterhin sind fachwissenschaftlich Lehrende dadurch qualifiziert, dass sie ‚Meister ihres Fachs’ sind. Didaktische Fragestellungen sind eher untergeordnet. Die

Vorgehensweisen in den Veranstaltungen werden durch hohe Teilnehmerzahlen und die Fülle an Stoff gerechtfertigt. Auch die Gewinnung von Tutorinnen und Tutoren für innovative Lehrformen (Tutor als Coach) scheint schwer. Offen gestaltete Lernsituationen werden als schwierig empfunden.

Bei der Planung der Workshops steht natürlich an erster Stelle der Gedanke der Nachhaltigkeit. Dies steht leider im Gegensatz zu einem eher beschränkten Zeitrahmen. Weiterhin sollen die Fortbildungen für eine große Bandbreite von Zielgruppen, wie Lehramts-, Ingenieursausbildende usw., konzipiert sein. Im Sinne des Angebot-Nutzungs-Modells von Helmke (2006) müssen hier verschiedene Vorkenntnisse und Wünsche berücksichtigt werden.

Diesen Problemen begegnen wir mit folgender Grundkonzeption der Fortbildungen: Anstatt das Veranstaltungskonzept von SAiL-M direkt weiterzugeben, soll die Grundphilosophie und das Veranstaltungskonzept auf die Fortbildung angewandt werden. Wir bieten ein zweiteiliges Workshopformat an, bestehend aus einem Workshop für Hochschullehrende und einem für Tutorinnen und Tutoren. Dies trägt der engen Verstrickung zwischen Vorlesung und Übung Rechnung. Durch Aktivität der Teilnehmer und Prozessbegleitung sollen Autonomie, Kompetenz und soziale Eingebundenheit erfahren werden. Unser Selbstverständnis ist das eines Coaches („Coaching statt Teaching"). Als Coach versuchen wir „wichtige Menschen auf angenehme Weise, von dort, wo sie sind, dorthin zu bringen, wo sie sein wollen" (Szabó & Berg 2006, S. 9). Grundsätzlich ist Coaching zukunfts- und lösungsorientiert. Die „Klienten" sind selbst Experten für ihre Probleme und Lösungen, während ein Coach Experte für den Weg zum Auffinden der Lösungen ist. Die Fertigkeiten der „Klienten" werden genutzt, denn nur so findet man Lösungen, die individuell passen und eine Chance haben nachhaltig umgesetzt zu werden. Um dieser Aufgabe gerecht zu werden, wird jeder Workshop durch einen professionellen Coach mitgeplant und begleitet.

3. Die Workshops im Einzelnen

Grundsätzlich werden vorab die Erwartungen der Workshopteilnehmer in Erfahrung gebracht. Der *Dozentenworkshop* gliedert sich in zwei Sitzungen. In der *ersten Sitzung* (ca. 2 Stunden) soll herausgefunden werden, was den Teilnehmern wichtig ist. Probleme werden in Zielverhandlungen umgewandelt. Es geht um die Bestimmung des „Reiseziels" und gleichzeitig um den Anstoß zum Einschlagen eines Lösungsweges. Die *zweite Sitzung* dient der Erarbeitung konkreter und individueller Lösungen. Dabei geht es nicht um die Entwicklung eines groß angelegten Veranstaltungskonzeptes, sondern vielmehr um kleine, realistische und messbare Veränderungen und Ziele. Dahinter steht die Überzeugung, dass kleine äußere Veränderungen oft große innere Veränderungen anstoßen können. Zusätzlich begleiten wir den Prozess durch kollegiales Feedback nach einem halben Semester.

Der *Tutorenworkshop* besteht aus einer 4-stündigen Sitzung mit folgendem Aufbau: Der erste Teil der Schulung dient dazu, die Erfahrungen, welche die Teilnehmer/innen selbst in einem Tutorium gesammelt haben, zu aktivieren. Es werden Strategien ermittelt, wie der Tutor/die Tutorin negative Erfahrungen bei den Studierenden verhindern, positive hingegen fördern kann. Davon ausgehend wird ihre Rolle als Tutor/in reflektiert sowie implizite Lerntheorien aufgedeckt und diskutiert. Der Schwerpunkt des Workshops liegt auf der Simulation und der anschließenden Reflexion einer aktivierenden Mathematikübung nach dem SAiL-M-Konzept. Da einige der Teilnehmer/innen wahrscheinlich selbst klassische Mathematikübungen erlebt haben, die in der Regel hauptsächlich aus dem Vorrechnen der Übungen durch den Tutor bestehen, ist die Bedeutung einer solchen Simulation nicht zu unterschätzen.

Im letzten Teil haben die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Gelegenheit sich in Gruppen methodische Hilfestellungen für eine aktivierende Übungsform zu erarbeiten. Ziel des Workshops ist es, die Tutor/innen für innovative Lehrformen zu sensibilisieren und sie dazu anzuregen, sich als Begleiter selbständiger Lernprozesse zu verstehen.

4. Ausblick

Die erste Durchführung der Workshops wird im April 2011 erfolgen. Nach einer Evaluation werden die Konzepte überarbeitet und an verschiedene Hochschul- und Studiengangsarten angepasst. Die Arbeit wird dokumentiert und Materialien werden erstellt und zugänglich gemacht. Darauf aufbauend sollen weitere Workshops durchgeführt werden.

Literatur

Bandura, A. (1997): Self-efficacy. The exercise of control. New York: Freeman.

Bescherer, C., Spannagel, C. & Müller, W. (2008): Activating students in introductory mathematics tutorials. In: Proceedings of EuroPLOP 2008.

Bescherer, C., Spannagel, C. (2009): Didaktische Entwurfsmuster für technologieunterstützte Übungen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, WTM Verlag.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1993): Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Zeitschrift für Pädagogik, 39(2), 223–238.

Helmke, A. (2006): Was wissen wir über guten Unterricht?, Pädagogik, 2, 42-45.

Szabó, P. & Berg I.K. (2006): Kurz(zeit)coaching mit Langzeitwirkung. SolArgent Media AG, Basel.

Martin Erik HORN, Frankfurt/Main

Mathematische und didaktische Modellierung fünfdimensionaler Räume am Beispiel der Kosmologischen Relativität

Die Geometrisierung unserer Welt ist eines der entscheidenden konzeptionellen Prinzipien, die die moderne Physik nutzt, um unsere Welt beschreibbar und damit auf abstrakter Ebene fassbar zu machen. Zu diesem Zwecke muss „die Geometrie dadurch ihres nur logisch-formalen Charakters entkleidet werden, dass den leeren Begriffsschemen der axiomatischen Geometrie erlebbare Gegenstände der Wirklichkeit (Erlebnisse) zugeordnet werden. [...] Die so ergänzte Geometrie ist offenbar eine Naturwissenschaft; wir können sie geradezu als den ältesten Zweig der Physik betrachten." (Einstein 1921, S. 5/6). Damit wirkt die Physik sehr effektiv der im 19. Jahrhundert einsetzenden „Entgeometrisierung" (Scriba & Schreiber 2010, S. 406) entgegen.

1. Geometrisierung und Algebraisierung

Historisch ist diese „Entgeometrisierung" der Geometrie eng mit der „Algebraisierung der Theorie der geometrischen Konstruktionen" (Scriba & Schreiber 2010, S. 404 ff) verknüpft. Damit rückt das didaktische Problem in den Vordergrund, wie eine Geometrisierung auf Kosten der Algebraisierung und gleichzeitig eine Algebraisierung auf Kosten der Geometrisierung verhindert werden kann. Ziel der Vermittlung von Algebra und Geometrie sollte sein, diese im sich fördernden Wechselspiel und sich nicht gegenseitig kannibalisierend zu vermitteln.

Der amerikanische Physikdidaktiker David Hestenes schlägt deshalb vor, Geometrie und Algebra auf der Grundlage der konzeptionellen Ideen Graßmanns und Cliffords konstruktiv zu verknüpfen. Ein zentraler Aspekt dieses Ansatzes „to redesign mathematics" (Hestenes 2003a, S. 119) stellt die Forderung dar, geometrische Objekte algebraisch direkt verknüpfen zu können, wobei Operationen und Operanten durch gleichartige Objekte dargestellt werden. Diese „Geometrische Algebra" wird im Fall des dreidimensionalen Raums algebraisch durch Pauli-Matrizen aufgespannt (Hestenes 2003a), (Doran & Lasenby 2003), die geometrisch gleichwertig als Basis-Vektoren und Basis-Reflexionen (Horn 2011a, b) interpretiert werden.

2. Modellierung vierdimensionaler Räume

Im Kontext der vierdimensionalen Raumzeit existieren die Einsteinschen „erlebbaren Gegenstände der Wirklichkeit" an – im Rahmen der Messgenauigkeit – jeweils exakt messbaren Orts- und Zeitpunkten. Raumzeitliche

Vektoren werden in der Geometrischen Algebra durch Linearkombinationen von Dirac-Matrizen (Hestenes 2003a), (Doran & Lasenby 2003) gegeben, so dass auch hier eine Zuordnung von leeren Begriffschemata (Dirac-Matrizen) zu erlebbaren Gegenständen der Wirklichkeit stattfindet. Die Dirac-Matrizen werden wieder geometrisch gleichwertig sowohl als Basis-Vektoren wie auch als Basis-Reflexionen (Horn 2011a, b) interpretiert.

Die Geometrisierung unserer vierdimensionalen Welt manifestiert sich in der relativistischen Weltbeschreibung durch eine räumliche Umdeutung von Zeitdauern. Der Zeitdauer von 1 ns entspricht dabei in etwa der Länge eines Lineals (30 cm), da Zeitdauern aufgrund der universell als gültig angenommenen Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c eindeutig den von Licht zurückgelegten Strecken und damit räumlichen Längen zugeordnet werden können. Die Zeit- oder Raumartigkeit einer solchen Länge drückt sich dann durch die jeweilige Signatur der entsprechenden Linearkombination der Basis-Vektoren mit $\gamma_t^2 = -\gamma_x^2 = -\gamma_y^2 = -\gamma_z^2 = 1$ aus.

3. Das Modell bietet zu viel Platz

Zur vollständigen Beschreibung aller geometrischen Objekte der vierdimensionalen Raumzeit sind die folgenden Basis-Objekte notwendig:

- ein Skalar als dimensionsloses Objekt,
- vier Basis-Vektoren in x-, y-, z- und (ct)-Richtung,
- sechs Basis-Bivektoren in Richtung der rein räumlichen xy-, yz- und zx-Ebenen und der raumzeitlichen x(ct), y(ct)- und z(ct)-Ebenen,
- vier Basis-Trivektoren für die dreidimensionale, rein räumliche xyz-Hyperebene und die raumzeitlichen xy(ct)-, yz(ct)- und zx(ct)-Hyperebenen,
- ein Basis-Quadrovektor für das vierdimensionale Volumen xyz(ct).

Das ergibt insgesamt $2^4 = 16$ Basis-Objekte.

Dirac-Matrizen sind jedoch komplexe (4x4)-Matrizen. Da jede Matrizenposition mit einem reellen oder aber einem imaginären Wert belegt werden kann, existieren insgesamt $2^5 = 32$ mögliche linear unabhängige (4x4)-Matrizen. Damit lassen sich fünfdimensionale Räume, die aus einem Skalar, 5 Basis-Vektoren, 10 Basis-Bivektoren, 10 Basis-Trivektoren (bzw. Pseudo-Bivektoren), 5 Basis-Quadrovektoren (bzw. Pseudo-Vektoren) und einem Basis-Pentavektor (bzw. Pseudoskalar) aufgespannt werden, beschreiben.

Die Algebra der Dirac-Matrizen ist somit geeignet, ohne konzeptionelle Probleme fünfdimensionale Räume bzw. Raumzeiten konsistent zu modellieren. Damit bietet sich die Möglichkeit, den Übergang von der vierdimensionalen Erfahrungswelt zu einer abstrakt fünfdimensionalen Welt didaktisch einfach zu bewerkstelligen. Ein solcher Brückenschlag zu höherdimensionalen Räumen ist insbesondere für die Vermittlung moderner Konzepte in der Physik wichtig, da diese Konzepte oft auf Raumzeiten höherer Dimensionen zurückgreifen.

4. Von Einstein zu Carmeli

Ein Prototyp für eine Weltbeschreibung, die aufgrund des Einbezugs einer weiteren Dimension eine geometrische Vereinheitlichung und damit eine konzeptionelle Zusammenführung zweier zuvor getrennter Konzepte schuf, stellt die Spezielle Relativitätstheorie Einsteins und der darauf aufbauenden Arbeiten Minkowskis dar. Der physikalische Kern dieser Theorie basiert auf der Beobachtung, dass die Geschwindigkeit von Licht in jedem Inertialsystem gleich groß ist und diese Geschwindigkeit von materiellen Objekten nicht erreicht werden kann. Im Minkowski-Diagramm stellen die Weltlinien von Licht (siehe Abb. 1 links) somit ausgezeichnete Geraden dar.

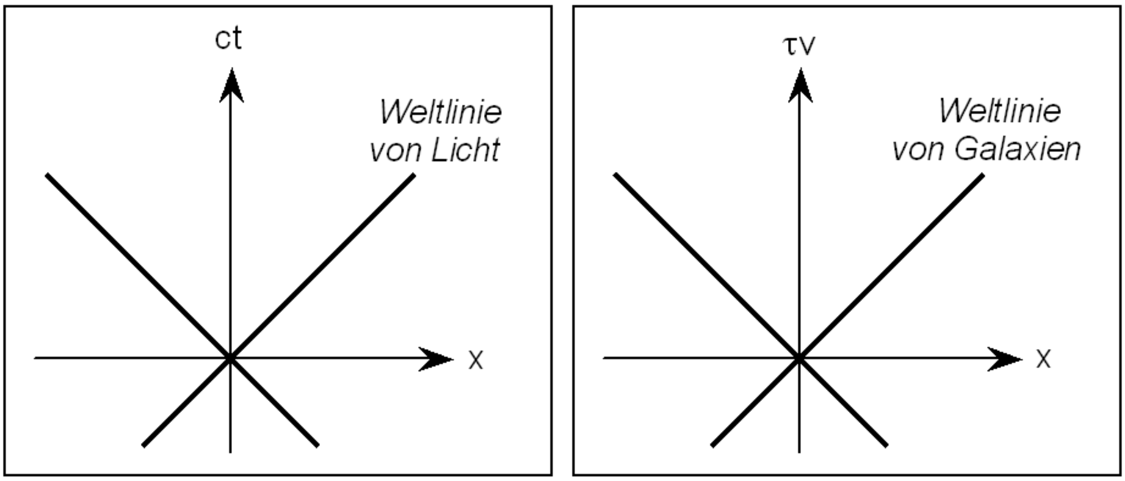


Abbildung 1: Strukturell ähnliches Verhalten von Licht (links) und von Galaxien (rechts) in unserer Welt.

Es ist erstaunlich, dass die Weltlinien von Galaxien ebenfalls strukturell ausgezeichnete Weltlinien darzustellen scheinen. Diese von Hubble erstmals beobachtete Beziehung (siehe Abb. 1 rechts) interpretiert Carmeli als ein Anzeichen für eine geometrisch fünfdimensionale Welt. Die Rolle, die die Lichtgeschwindigkeit im Kontext der Speziellen Relativitätstheorie einnimmt, nimmt im Rahmen der von Carmeli als „Kosmologische Relativität" (Carmeli 2002) bezeichneten Hypothese das Alter des Universums τ ein: Es existiert kein Objekt in unserer Welt, das älter als die Hubble-Zeit (bzw. „big bang time") $\tau = 1/H_0 \approx 12{,}5$ Mrd. Jahre (Carmeli 2006, S. 100) ist. Der relativistische Standpunkt, dass kein Ort gegenüber anderen Orten in unserem Universum ausgezeichnet ist, führt dann zu der Schlussfolgerung, dass eine fünfte Koordinate, die als Geschwindigkeit zu interpretieren ist, der geometrischen Struktur unserer Welt zugrunde liegt.

5. Didaktische Zugänglichkeit weiterer Dimensionen

Obgleich Carmeli eindrucksvoll zeigt, dass mit Hilfe seiner Kosmologischen Relativität die kosmische Inflation, die dunkle Materie im Rahmen der Tully-Fisher-Formel sowie die Pioneer-Anomalie erklärt werden könnten (Carmeli 2002 & 2006), ist sehr zweifelhaft, ob dieser Ansatz letztendlich physikalisch tragfähig ist, da die konventionelle Erklärung der Hubbleschen Rotverschiebung als Expansion des Universums konzeptionell ebenfalls überzeugt.

Dennoch hat die Theorie Carmelis einen hohen didaktischen Wert: sie kann als Brücke zu höherdimensionalen Theorien dienen, ohne dass gleichzeitig die Frage nach einer Kompaktifizierung zusätzlicher Dimensionen diskutiert werden muss. Dies hat den Vorteil, dass die zusätzliche Dimension der Geschwindigkeit im Kontext der Geometrischen Algebra in gänzlich natürlicher Weise eingefügt und der geschwindigkeitsartige Basis-Vektor als fünfte, zu den vier bereits gegebenen Dirac-Matrizen linear unabhängige, zusätzliche (4x4)-Matrix interpretiert werden kann.

Literatur

Carmeli, M. (2002): Cosmological Special Relativity. The Large-Scale Structure of Space, Time and Velocity. Zweite Auflage, Singapore: World Scientific.

Carmeli, M. (2006): Cosmological Relativity. The Special and General Theories for the Structure of the Universe. Singapore: World Scientific.

Doran, Ch. & Lasenby, A. (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Einstein, A. (1921): Geometrie und Erfahrung. Erweiterte Fassung des Festvortrags an der Preußischen Akademie der Wissenschaften vom 21. Jan. 1921. Berlin: Springer.

Hestenes, D. (2003a): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104 - 121.

Hestenes, D. (2003b): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7, S. 691 - 714.

Horn, M. E. (2011a): Grassmann, Pauli, Dirac – Special Relativity in the Schoolroom. In: H.-J. Petsche, A. C. Lewis, J. Liesen, S. Russ (Hrsg.): From Past to Future – Graßmann’s Work in Context. Basel, Berlin: Birkhäuser, S. 435 – 450.

Horn, M. E. (2011b): Die fünfdimensionale Welt der Kosmologischen Relativität. In: D. Höttecke (Hrsg.): Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Potsdam, Band 31. Berlin: LIT-Verlag Dr. W. Hopf, S. 158 – 160.

Scriba, C. J. & Schreiber, P. (2010): 5000 Jahre Geometrie. Erschienen in der Reihe: H.-W. Alten, A. Djafari Naini, H. Wesemüller-Knock: Vom Zählstein zum Computer. Dritte Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer.

Martin Erik HORN, Frankfurt/Main

Wie konstruieren wir eine sieben- oder neundimensionale Welt?

Mit den Worten “Basic Clifford algebra ... can be explained to the first person you meet in the street” unterstreicht Parra Serra (2009, S. 820) eindrücklich die Forderung, die Clifford Algebra als ein Alltagswerkzeug beim Lehren und Lernen von Mathematik und Physik zu verstehen. Er schlägt dabei vor, auf die Pauli-Algebra als Clifford-Algebra des dreidimensionalen Raumes auch schulisch schon frühzeitig konzeptionell hinzuarbeiten und die didaktische Gestaltung des Unterrichts so vorzunehmen, dass ein in höheren Klassenstufen dann erfolgender Einbezug nicht-kommutativer Algebren nicht verunmöglicht wird.

Zum geeigneten Zeitpunkt für die Einführung dieser Algebren schreibt er ausdrücklich: „I will not set lower limits.” (Parra Serra 2009, S. 824). Damit stellt sich die Frage der Anschlussfähigkeit dieses Ansatzes. Wie kann eine schulische Einführung mit den sich im Hochschulbereich ergebenden fachmathematischen und fachdidaktischen Erfordernissen konzeptuell verknüpft werden? Diese Frage soll im Folgenden unter Rückgriff auf das Zehfuss-Kronecker-Produkt aufgearbeitet werden.

Wie gelangen wir von einer drei- zu einer fünfdimensionale Welt?

Ausgangspunkt ist die konzeptionelle Beschreibung unserer dreidimensionalen, euklidischen Welt (in der wir vor Einstein lebten) mit Hilfe der Pauli-Algebra. In diesem Kontext stellen die drei Pauli-Matrizen σ_x, σ_y und σ_z nichts anderes als die Basis-Vektoren des dreidimensionalen Raumes (Cartan 1981, S. 43/44), (Hestenes 2003a), (Doran & Lasenby 2003), (Horn 2011a) dar.

Eine vier- oder fünfdimensionale Welt, also beispielsweise die vierdimensionale Raumzeit (in der wir seit Einstein leben), kann konzeptionell elegant durch die Dirac-Algebra beschrieben werden. In diesem Kontext stellen die vier Dirac-Matrizen γ_x, γ_y, γ_z und γ_t nichts anderes als die Basis-Vektoren der vierdimensionalen pseudoeuklidischen Raumzeit (vorbereitend in Cartan 1981, S. 125 ff), (Hestenes 2003b), (Doran & Lasenby 2003), (Horn 2009, 2010 & 2011a) bzw. die fünf Matrizen γ_x, γ_y, γ_z, γ_t und γ_v die Basis-Vektoren einer fünfdimensionalen Raumzeit der Signatur (–, –, –, +, +) (Horn 2011b) dar.

Zur Verknüpfung drei-, vier- und fünfdimensionaler Räume gibt es prinzipiell zwei Strategien: Zum einen kann die mathematische Welt im dreidimensionalen Fall übergroß gestaltet werden, so dass Pauli- und Dirac-Matrizen durch die Gleichungen

$$\sigma_i = \gamma_i \gamma_t \quad \text{mit} \quad i \in \{x, y, z\}$$

verknüpft werden, siehe (Hestenes 2003b, S. 695, Formel 43), (Gull et al. 1993, S. 1193, nach 5.2), (Doran & Lasenby 2003, S. 135, Formel 5.37).

Da Dirac-Matrizen γ_i nur als komplexe (4x4)-Matrizen, nicht jedoch als komplexe (2x2)-Matrizen darstellbar sind, sind alle Produkte zweier Dirac-Matrizen und die somit erzeugten Pauli-Matrizen in dieser Darstellung ebenfalls (4x4)-Matrizen.

Im Rahmen dieses Ansatzes arbeiten wir unbewusst in einer fünfdimensionalen Welt, wobei im dreidimensionalen Fall nur drei linear unabhängige und im vierdimensionalen Fall nur vier linear unabhängige (4x4)-Matrizen als Basis-Vektoren herangezogen werden. Die zwar mathematisch vorhandenen, aber faktisch nicht benötigten restlichen Basis-Vektoren werden dabei einfach „vergessen".

Da diese Konstruktion jedoch auf konventionellen Matrizenmultiplikationen beruht, die nur immer wieder zu (4x4)-Matrizen führen, sind damit maximal $2^5 = 32$ unterschiedliche Basiselemente zugänglich. Dadurch lassen sich höchstens fünfdimensionale Räume bzw. fünfdimensionale Raumzeiten beliebiger Signatur beschreiben. Wir müssen uns also etwas Neues einfallen lassen, um zu höherdimensionalen Räumen zu gelangen.

Kapern wir die Mathematik des Quanten-Computings!

Eine zweite Strategie zur Verknüpfung drei-, vier- , fünf- und höherdimensionaler Welten ist in der Physik aus dem Bereich der Quantenalgebra bekannt, wobei die Gesetze der Quantenmechanik zur Simulation gedachter bzw. Konstruktion tatsächlicher Quantencomputer herangezogen werden:

„Für unsere Zwecke ist das Tensorprodukt einfach und anschaulich zu handhaben. Aus den Räumen für zwei Quantenbits $|x\rangle$ und $|y\rangle$ mit Basen $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ erhalten wir durch das Tensorprodukt einen Raum für das Register aus diesen beiden Bits" (Homeister 2008, S. 39). Die hier als Tensorprodukt bezeichnete multiplikative Verknüpfung zweier Matrizen ist jedoch weit älter als die Quantenmechanik und wurde erstmals von Johann Georg Zehfuss in (Zehfuss 1858), (Muir 1960, Vol. 2, S. 102) und dann später erneut von Kronecker (Henderson et al. 1983) beschrieben. Die fünf Basis-Vektoren der Dirac-Algebra lassen dabei sich mit Hilfe von

$$\gamma_i = (\sigma_x \sigma_z) \otimes \sigma_i \qquad \gamma_t = \sigma_z \otimes E_2 \qquad \gamma_v = \sigma_x \otimes E_2$$

mit $i \in \{x, y, z\}$ und der (2x2)-Einheitsmatrix E_2 in Anlehnung an (Steeb

1991, S. 71 ff), (Gröbner 1966, S. 246 ff) konstruieren. In gänzlich analoger Weise bauen sich die Basis-Vektoren κ_i höherdimensionaler Räume auf. Die Basis-Vektoren einer siebendimensionalen Raumzeit der Signatur (+, +, +, –, –, +, +) ergeben sich beispielsweise durch

$$\kappa_{j(7\text{-dim})} = (\sigma_x\, \sigma_z) \otimes \gamma_i \qquad \kappa_{6(7\text{-dim})} = \gamma_t \otimes E_2 \qquad \kappa_{7(7\text{-dim})} = \gamma_v \otimes E_2$$

wobei der Einfachheit halber die physikalisch motivierten Indexbezeichnungen $i \in \{x, y, z, t, v\}$ mit Hilfe von $j = 1, 2, ..., 5$ durchnummeriert wurden.

Höherdimensionale Räume und Signaturänderungen

Die rekursiv aus den Basis-Vektoren der siebendimensionalen Raumzeit konstruierten Basis-Vektoren einer neundimensionalen Raumzeit

$$\kappa_{j(9\text{-dim})} = (\sigma_x\, \sigma_z) \otimes \kappa_{j(7\text{-dim})} \quad \text{mit} \quad j = 1, 2, ..., 7$$

$$\kappa_{8(9\text{-dim})} = \kappa_{6(7\text{-dim})} \otimes E_2 \quad \text{und} \quad \kappa_{9(9\text{-dim})} = \kappa_{7(7\text{-dim})} \otimes E_2$$

weisen durch die bei dieser Konstruktion erfolgenden Vorzeichenumkehr eine Signatur von (–, –, –, +, +, –, –, +, +) auf. Auch im höherdimensionalen Fall (mit n ungerade) werden bei der Konstruktion mit Hilfe von

$$\kappa_{j(n\text{-dim})} = (\sigma_x\, \sigma_z) \otimes \kappa_{j(n-2\text{-dim})} \quad \text{mit} \quad j = 1, 2, ..., n-2$$

$$\kappa_{n-1(n\text{-dim})} = \kappa_{n-3(n-2\text{-dim})} \otimes E_2 \quad \text{und} \quad \kappa_{n(n\text{-dim})} = \kappa_{n-2(n-2\text{-dim})} \otimes E_2$$

die Signaturen immer eine paarweise alternierende, vorzeichengemischte Struktur aufweisen. Dies lässt sich jedoch aufgrund der Antikommutativität zweier verschiedener Basis-Vektoren ändern, wenn Basis-Vektoren κ_i durch ihre Duale $\pm\, i\, \kappa_i$ ersetzt werden, so dass das Quadrieren zu einem entgegengesetzten Vorzeichen führt.

Didaktische Einordnung

Die Geometrische Algebra ist auch heute noch, mehr als 150 Jahre nach den ersten Formulierungsansätzen von Graßmann und Clifford, umstritten und wird hinsichtlich ihrer didaktischen Rolle höchst unterschiedlich bewertet. Während beispielsweise Befürworter die strukturelle Gleichwertigkeit von Operatoren und Operanden als entscheidenden fachlichen und didaktischen Vorteil ansehen, verwerfen Skeptiker diesen Sachverhalt als konzeptionell nachteilig.

Auch die Verknüpfung algebraischer und geometrischer Interpretationen wird kontrovers diskutiert. Emotionale Kontroversen gibt es insbesondere über die Frage, ob sich mit Hilfe der Geometrischen Algebra die Struktur des uns umgebenden physikalischen Raumes besser abbilden lässt als mit

Hilfe der konventionellen linearen Algebra. Doch egal, welchen Standpunkt man einnimmt: Die Konstruktion höherdimensionaler Räume mit Hilfe des Zehfuss-Kronecker-Produkts ist elementarer Bestandteil der Quantenalgebra. Sollte es als Aufgabe der Mathematikdidaktik angesehen werden, einen didaktisch tragfähigen Weg zur Mathematik des Quanten-Computings zu eröffnen, dann ist eine didaktische Aufarbeitung des Zehfuss-Kronecker-Produkts und dessen Verallgemeinerung als Tensorprodukt unabdingbar.

Literatur

Cartan, É. (1981): The Theory of Spinors. Unabridged Republication of the Complete English Translation. New York: Dover Publications.

Doran, Ch. & Lasenby, A. (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Gull, S., Lasenby, A. & Doran, C. (1993). Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. Foundations of Physics, Vol. 23, No. 9, S. 1175 - 1196.

Gröbner, W. (1966): Matrizenrechnung. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Henderson, H. V., Pukelsheim, F. & Searle, S. R. (1983): On the History of the Kronecker Product. Linear and Multilinear Algebra, Vol. 14, No. 2, S. 113 - 120.

Hestenes, D. (2003a): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104 - 121.

Hestenes, D. (2003b): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7, S. 691 - 714.

Homeister, M. (2008): Quantum Computing verstehen. Grundlagen – Anwendungen – Perspektiven. 2. Auflage. Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn/GWV-Fachverlage.

Horn, M. E. (2009): Vom Raum zur Raumzeit. In D. Höttecke (Hrsg.): Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung. GDCP-Band 29. Berlin: LIT-Verlag Dr. W. Hopf, S. 455 - 457.

Horn, M. E. (2010): Die Spezielle Relativitätstheorie in der Mathematikerausbildung. PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Hannover 2010. Beitrag 19.35.

Horn, M. E. (2011a): Grassmann, Pauli, Dirac – Special Relativity in the Schoolroom. In: H.-J. Petsche, A. C. Lewis, J. Liesen, S. Russ (Hrsg.): From Past to Future – Graßmann's Work in Context. Basel, Berlin: Birkhäuser, S. 435 - 450.

Horn, M. E. (2011b): Die fünfdimensionale Welt der Kosmologischen Relativität. In: D. Höttecke (Hrsg.): Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Potsdam, Band 31. Berlin: LIT-Verlag Dr. W. Hopf, S. 158 - 160.

Muir, Th. (1960): The Theory of Determinants in the Historical Order of Development. Unabridged and Unaltered Republication. New York: Dover Publications.

Parra Serra, J. M. (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 19, S. 819 - 834.

Steeb, W.-H. (1991): Kronecker Product of Matrices and Applications. Mannheim: Bibliographisches Institut/Wissenschaftsverlag.

Zehfuss, G. J. (1858): Über eine gewisse Determinante. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Vol. 3, S. 298 - 301.

Anna-Marietha HÜMMER, Frankfurt am Main

Der Einfluss von Kodierungen auf supportive Strukturen in frühen mathematischen Lernprozessen

Wie aktuelle Studien im Bereich der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung zeigen, ist das Lernen von Mathematik nicht allein von kognitiver Leistungsfähigkeit moderiert durch Motivation abhängig, sondern zu einem Großteil auch sozial konstruiert. Lernen wird dabei nicht allein als innerpsychischer Aneignungsprozess verstanden. Es konstituiert sich vielmehr durch die Partizipation des Individuums an Interaktionen eines Kollektivs, welches den jeweiligen Diskurs praktiziert (u.a. Sfard 2008). Erfolg im Lernen von Mathematik scheint dabei in einem hohen Maße abhängig von der Fähigkeit relevante Bedeutungen und Partizipationsregeln in mathematischen Diskursen "dekodieren" zu können (vgl. Gellert & Hümmer 2008). Diesen Kodierungen soll hier in Hinblick auf ihr Auftreten in supportiven bzw. lernförderlichen Situationen im Sinne Bruners (1983) im Kindergarten nachgegangen werden. Im Analysefokus dieses Beitrags steht daher, welche (fachspezifischen) Kodierungen sich in Supportsystemen des frühen mathematischen Lernprozesses rekonstruieren lassen und welche Anforderungen diese an die Dekodierungsleistung von Kindern stellen. Ein erster Ansatz soll hier unter Bezugnahme auf mikro-soziologische Analysen ausgewählter Passagen aus mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen der Studie erStMaL dargestellt werden (vgl. Hümmer 2011).

Supports als Ermöglichung des Lernens

Bruner (1983) konzeptualisiert Lernen und Erwerb als Prozesse, die durch ein sogenanntes Support-System ermöglicht werden, welches von einem in der Sache kompetenteren Gegenüber moderiert wird. Auf empirischer Ebene rekonstruiert Bruner „Formate" (ebd., S.33), denen er eine derartige supportive Funktion zuschreibt. Nach Bruner ist ein Format „ein standardisiertes Interaktionsmuster zwischen einem Erwachsenen und einem Kleinkind, welches als ursprünglicher Mikrokosmos feste Rollen enthält, die mit der Zeit vertauschbar werden" (ebd., S.103). Dies bedeutet, der Erwerb von Fähigkeiten und Wissen wird maßgeblich determiniert von einer kognitiven und situativen (Re-)Konstruktion von Aushandlungsprozessen vorheriger Interaktionen. Zunehmende Autonomie innerhalb der Formate wird unter Bruners Perspektive als Indikator eines Lernfortschrittes gesehen. Mathematiklernen besteht somit in der zunehmend kompetenter werdenden Teilnahme an Prozessen des Mathematisierens (in Interaktionen) und der zunehmenden Autonomie bei der Konstruktion und Rekonstruktion von „Interaktionsmustern" (Voigt 1984, S.47ff.).

Klassifikation und Rahmung in supportiven Interaktionen

Aus lerntheoretischer Sicht haben diese Supports somit die Funktion auf einer Strukturebene den Erwerb von mathematischem Wissen bzw. Konzepten und Prozeduren und die Form der anerkannten Partizipation an einem speziellen Diskurs und somit das Lernen zu ermöglichen. Dabei strukturieren sie sowohl die inhaltliche Ebene der Thematisierung mathematischer Bedeutungen, als auch die soziale Ebene der regelgerechten Partizipation, indem Bedeutungen, aber auch Verhaltensweisen konventionalisiert werden (vgl. Krummheuer 1989). Bruner (1983) fokussiert in seinen Arbeiten zu supportiven Strukturen jedoch hauptsächlich auf die *Funktion* dieser Supports in Bezug auf den frühkindlichen (Muttersprach-) Erwerb, die Schwierigkeiten, die durch die *Form* dieser Strukturen (sowohl inhaltlich wie fachspezifisch sprachlich) entstehen sowie ihren Einfluss auf die Entwicklung von Bedeutungen lässt er dabei weitestgehend unbeachtet. Wie solche Schwierigkeiten auf einer sprachlichen Ebene entstehen, wird von Schütte (2009) aufgegriffen. Er bemerkt in seinen Arbeiten zur sprachlichen Pluralität im Mathematikunterricht, dass die Implizitheit in der Vermittlung von Lerninhalten ein wesentliches Phänomen in Interaktionen des Mathematikunterrichts ist. Er stützt sich dabei unter anderem auf die Konzepte von Basil Bernstein (1996), der im Rahmen seiner „Codetheorie“ von einer „invisible pedagogy“ spricht. Nach Bernstein werden pädagogische Situationen bzw. Interaktionen geprägt von regulativen Prinzipien, sogenannten Codes. Diese betrachtet er von einer soziologischen Perspektive. Ein Code ist dabei „ein regulatives Prinzip, welches relevante Bedeutungen, die Form ihrer Realisierung und den ihn [den Code] generierenden Kontext selektieren und integrieren“ (ebd., S.111). Bernstein nennt dies die „Klassifikation und Rahmung pädagogisch vermittelten Wissens“. Die Klassifikation beschreibt, was zu einem speziellen Diskurs gehört und was nicht, d.h. welche Inhalte und Bedeutungen im Rahmen der Interaktion zugelassen sind. Diese Bedeutungen und Inhalte gilt es von den Lernenden zu erkennen. Bernstein nennt die Regel hierfür die „recognition rule“ (ebd., S. 30ff.). Die Rahmung (das zweite abstrakte Theorieelement, welches Bernstein im Rahmen seiner Codetheorie einführt) steuert das sozial akzeptierte Verhalten in Interaktionen innerhalb spezifischer Diskurse. Das Prinzip der Rahmung steuert somit die sozialen Beziehungen, Hierarchien und die Form und Abfolge der präsentierten Inhalte. Die Regeln dieser Rahmung bezeichnet Bernstein mit „realisation rules“, diese gilt es zu erkennen, um in adäquater Form am Diskurs partizipieren zu können (ebd., S.30ff.). Schütte beschreibt in seiner Arbeit zur sprachlichen Pluralität des Weiteren, dass gerade für Kinder mit nicht deutscher Muttersprache die Dekodierung in Hinblick auf implizite Bedeutungen eine besondere Schwierigkeit darstellt. Dabei scheitern die Kinder nicht nur an den impliziten Regeln bestimmt durch Klassifikation und Rahmung, sondern auch an der sprachlichen Kodierung der Bedeutungen. Um die Form von supportiven Strukturen im frühkindlichen Prozess in Anlehnung an Bernsteins Codetheorie auch im Hinblick auf sogenannte Risikofaktoren wie den Zweitspracherwerb, aber auch den von Bernstein selbst thematisierten sozialen Hintergrund untersuchen zu können, soll hier ein weiteres Element des Code-Konzepts vorgestellt werden. Dieses Konzept beschreibt Bernstein in seinen frühen soziolinguistischen Theorien. Konzeptuell entwickelt er dabei den Begriff des elaborierten und des restringierten Codes. Als elaboriert werden dabei die Strategien in der Produktion von Text- oder Redebeiträgen verstanden, die situationsunabhängig und allgemeingültig sind, sowie von einer konkreten Situation abstrahieren. Als restringiert werden solche bezeichnet, die situationsgebunden bleiben und unter anderem mit den gegebenen Symbolen bzw. Bedeutungen „auskommen" (vgl. Bernstein 1996).

Der Einfluss mathematischer Codes auf Strukturen im Interaktionsprozess

In Interaktionen von Kindergartenkindern und Erzieherinnen lässt sich rekonstruieren, dass bereits der frühe mathematische Lernprozess geprägt wird von einer Vielfalt der oben beschriebenen mathematischen Kodierungen und ihrer impliziten Bedeutung, die von Kindern erkannt werden müssen, um Beiträge in entsprechenden Lernsituationen angemessen zu realisieren.[1] Die Codes umfassen dabei nicht nur die Regeln der Thematisierung der Inhalte und deren Präsentation sondern auch die Regularien der adäquaten Partizipation. Diese Regeln scheinen zudem stark mit den Strukturen bzw. Formaten der supportiven Interaktionen verbunden bzw. bedingen diese Strukturen zum Teil sogar. So lässt sich feststellen, dass Diskurse im frühen mathematischen Erwerb zumeist zwar zunächst schwach klassifizierend und regulativ sind, jedoch beim Auftreten von Schwierigkeiten eine Codeänderung auftritt. Dabei wirkt eine starke Klassifizierung und Rahmung auf den Interaktionsprozess ein. Im Zuge dieser Codeänderung ist ebenfalls ein Wechsel der Ausprägung der thematisch inhaltlichen und partizipatorischen Struktur rekonstruierbar. So werden thematisierte mathematische Inhalte „portioniert" und Teilnahmeberechtigungen an der Interaktion auf einen bestimmten Adressatenkreis bzw. einzelne Kinder eingeschränkt. Dabei bleibt diese Ausformung der Klassifikation und der Rahmung zumeist implizit und in der Interaktion verborgen. Sprachlich äußert sich diese Implizitheit zudem durch eine informale Kodierung mathemati-

[1] Eine detaillierte Analyse hierzu findet man in Hümmer 2011.

scher Inhalte und der Partizipationsregeln. Wobei das Regelsystem, welches dem Support zugrunde liegt und die mathematischen Bedeutungen trägt, jedoch als elaboriert zu deuten ist. Die Konsequenzen, die sich dadurch für die Kinder in Bezug auf das Lernen ergeben, sind die folgenden: Zwar kann man sagen, dass in Hinblick auf die ausgeprägte Strukturierung bzw. Formatierung der Supports im Mathematikerwerb Bedingungen geschaffen werden, die als lernförderlich angesehen werden können, jedoch müssen die Kinder auf der inhaltlichen Bedeutungsebene und der sprachlichen Ebene eine große Dekodierungsleistung erbringen, um mathematische Konzepte und ihre Zusammenhänge rekonstruieren zu können. Erschwerend kommt hinzu, dass die implizierten elaborierten Bezugsrahmen und Regelsysteme im formatierten Interaktionsprozess einem häufigen und sich sehr schnell ändernden Entwicklungsprozess unterworfen sind. So werden oftmals sehr allgemeine Bezugsrahmen eingeschränkt bzw. hinsichtlich ihrer prozeduralen oder konzeptuellen Aspekte erweitert, um den Fortlauf der Interaktion zu sichern. Zwar entstehen meist nur geringfügige Diskrepanzen zwischen den aufeinander folgenden Regelsystemen und Bezugsrahmen, die im Sinne von Veranschaulichungen als lernförderlich dienen können, jedoch scheint die implizite Codierung ein Verständnis der Zusammenhänge durch die Kinder zu erschweren (vgl. Hümmer 2011).

Literatur

Bruner, J.S.(1987): *Wie das Kind sprechen lernt*. Bern: Verlag Hans Huber.

Bernstein, B. (1996): Pedagogy, Symbolic Control, and Identity. Lanham M.D.,Rowman & Littlefield.

Gellert, U. & A.-M. Hümmer (2008): Soziale Konstruktion von Leistung im Unterricht. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 11 (2), 288-311.

Hümmer, A.-M. (2011): Die Kodierung mathematischer Supports in frühkindlichen mathematischen Lernprozessen. Krummheuer, G., Brandt, B., Vogel, R. (Hrsg.) In: *Die Projekte erStMaL und MaKreKi - Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education" (IDeA)Bd 1*. Münster, Waxmann, erscheint demnächst.

Krummheuer, G. (1989): Die Veranschaulichung als "formatierte" Argumentation in Mathematikunterricht. *Mathematica Didactica, 12,* 225-243.

Schütte, M. (2009): Sprache und Interaktion im Mathematikunterricht der Grundschule. Münster, Waxmann.

Sfard, A. (2008): Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing. Cambridge, UP.

Voigt, J. (1984): Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Weinheim, Beltz.

Sabrina HUNKE, Dortmund

„Reicht das Geld?“ – wie Viertklässler Überschlagsergebnisse interpretieren

Theoretischer Hintergrund

Das Überschlagsrechnen ist wichtiger Bestandteil der Grundschularithmetik. Nicht selten wird es auf das Rechnen mit gerundeten Zahlen unter Anwendung der Rundungsregeln reduziert, dabei gibt es aber zahlreiche mögliche Strategien eine ungefähre Rechnung durchzuführen (vgl. z.B. Reys et al. 1982). Einige sollen am Beispiel der Aufgabe 239 + 219 + 224 exemplarisch aufgezeigt werden:

240 + 220 + 220 = 680 200 + 200 + 200 = 600 …	Regelkonformes Runden
239 + 219 + 224 = 600	Abbruchverfahren (Rechnen mit führenden Ziffern)
$3 \cdot 230 = 690$ $3 \cdot 200 = 600$ …	Übersetzung der Aufgabe (hier: Mittelwertsbildung)
200 + 200 + 200 = 600, da dreimal abgerundet wurde ≈ 670	Kompensation (Überschlag mit Ausgleichsrechnung)

Welche Strategie sinnvoll ist, hängt von den jeweiligen Zahlenwerten, dem Kontext und dem Aufgabentyp ab. Betrachtet man für die Grundschule typische Aufgaben zum Überschlagen wie „Wie viel ungefähr?“ und „Reicht das?“, so lassen sich diese in sogenannte *direkte* und *indirekte Überschlagsfragen* unterscheiden (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2001, 178).

Direkte Überschlagsfragen („Wie viel ungefähr?“) zeichnen sich dadurch aus, dass eine Zahl als Ergebnis verlangt und somit eine formelle Überschlagsstrategie benötigt wird. *Indirekte* Überschlagsfragen hingegen können auch globaler gelöst werden, da eine Zahl als Ergebnis nicht zwingend erforderlich ist (ebd.). Auch hier ist das Anwenden formaler Überschlagsstrategien (z.B. Rechnen mit gerundeten Zahlen) möglich, der Lösungsprozess kann aber auch enden, sobald feststeht, dass die Summe z.B. über dem vorhandenen Budget liegt (vgl. Trafton 1978). Van den Heuvel-Panhuizen (2001) sieht deshalb in indirekten Überschlagsfragen den geeigneteren Aufgabentyp zum Einstieg ins Überschlagsrechnen.

Dass das Überschlagsrechnen nicht nur ein algorithmisches „Abspulen“ der Rundungsregeln ist, wird nicht nur an den verschiedenen Strategien und Aufgabentypen deutlich. So steht das Überschlagsrechnen auch in Beziehung zu anderen Bereichen, wie z.B. dem Zahlensinn, affektiven Faktoren, und flexiblem Rechnen (vgl. z.B. Sowder 1992; Verschaffel et al. 2007). Insgesamt handelt es sich somit beim Überschlagsrechnen um einen komplexen Prozess, der verschiedene Wissenskomponenten erfordert.

Neben dem Wissen, wie man einen Überschlag durchführt, wird vor allem das Wissen über die Auswirkungen des Überschlagens (Überschlagsergebnis liegt über/unter genauem Ergebnis) als zentral befunden (vgl. z.B. LeFevre et al. 1993). Van den Heuvel-Panhuizen (2001, 184) macht in diesem Zusammenhang auf eine Besonderheit der indirekten Überschlagsfragen aufmerksam. Am Beispiel der Aufgabe „Liegt die Summe von 186, 495 und 197 über oder unter 1000?“, betont sie, dass Schülerinnen und Schüler „must be able to perceive that rounding up three times (besides the fact that the sum of the rounded off numbers is only 900) allows them to be certain that the total must be under 1000” (ebd.).

Hier werden m.E. zwei Aspekte deutlich: nicht nur der o.g. operative Zusammenhang zwischen Überschlag und genauer Rechnung muss hergestellt werden. Vor allem gilt es zu verstehen, dass es einen inhaltlichen Zusammenhang zwischen Überschlag und genauer Rechnung gibt. Um eine indirekte Überschlagsfrage wie „Reicht das?“ sicher beantworten zu können, muss das Überschlagsergebnis noch interpretiert werden.

Eine Untersuchung mit 42 Kindern des vierten Schuljahres

Da bisweilen kaum empirische Daten zum Überschlagsrechnen für den deutschen Sprachraum einerseits und zu den Besonderheiten von direkten und indirekten Überschlagsfragen andererseits vorliegen, wurden im Rahmen meines Promotionsprojekts 42 Kindern des vierten Schuljahres im klinischen Interview je zwölf Aufgaben zum Kontext „Reicht das Geld?“ oder „Wie viel ungefähr?“ vorgelegt. Die Dissertation setzt sich vor allem mit den Vorgehensweisen der Kinder beim Überschlagsrechnen auseinander. Im Rahmen dieses Beitrags ist vor allem von Interesse, inwiefern Kinder ihre Überschlagsergebnisse bei indirekten Überschlagsfragen interpretieren.

Ergebnisse

In der Studie wurden ca. 38 % aller Lösungen der „Reicht das Geld?“-Aufgaben durch Rechnen mit gerundeten Zahlen bestimmt. Im Hinblick auf die Interpretation dieser Überschlagsergebnisse ließen sich zwei wesentlich verschiedene Vorgehensweisen ausmachen. Entweder der Überschlag wird interpretiert oder er wird nicht interpretiert.

Es konnte beobachtet werden, dass die Interpretation entweder in Form der Überschlagsstrategie *Kompensation* stattfindet, durch Kompensation und einer genauen Rechnung oder nur durch eine genaue Rechnung. So zieht bspw. Franziska die Auswirkungen des Rundens in Betracht (Kompensation) und schließt daraus korrekt, dass das Geld vermutlich reiche.

Du hast 30 €. Du kaufst eine CD für 19,95 € und ein Buch für 9,55 €? Reicht das Geld?	
Franziskas Überschlag: 20 + 10 = 30	
F:	Das wären jetzt 30 Euro, **da aber hier aufgerundet und da auch aufgerundet wird, ähm, glaube ich jetzt nicht, dass das alles 30 zusammen ergibt. Moment, ich rechne das jetzt noch mal so** (notiert und löst genaue Rechnung). Ja, weil hier halt wieder aufgerundet und aufgerundet, ist ja dann halt mehr und ähm deshalb auch die 30 Euro.

Obwohl diese Interpretation durch Kompensation schon ausreichend für eine sichere Antwort wäre, überprüft sie diese noch mithilfe einer genauen Rechnung. Ihr ist also bewusst, dass der Überschlag interpretiert werden muss, scheint gleichzeitig aber nicht in ihre Kompensation zu vertrauen.

Jessica hingegen interpretiert den Überschlag nicht. Ihr Überschlag zur Aufgabe „Larissa hat 25 €. Reicht das Geld für sieben Buchstaben aus Holz? Ein Holzbuchstabe kostet 3,55 €“ ist *7 · 4 = 28* und ihre Antwort: „*Da reicht das Geld bei ihr nicht, da hat sie 3 Euro zu wenig gespart*!“. Sie benennt hier die Differenz zwischen dem vorhandenen Budget und dem Überschlagsergebnis, was darauf hinweist, dass sie die Antwort auf die „Reicht das?“-Frage direkt aus dem Überschlagsergebnis ableitet. Sie betrachtet den Überschlag somit als eigenständige Rechnung, unabhängig von der genauen Rechnung.

Solch eine separate Betrachtung kann weitreichende Folgen haben, was am Beispiel von Anna deutlich wird. Anna löst die Aufgaben stets genau und macht nur nach expliziter Aufforderung noch einen Überschlag. Da aber auch sie den Überschlag als eigenständige Rechnung betrachtet, kommt Anna immer dann, wenn der Überschlag zu einer anderen Antwort auf die „Reicht das?“-Frage führt als das genaue Ergebnis, zu dem Entschluss, dass der Überschlag dann nicht möglich sei. Anna ist also einerseits in der Lage einen Überschlag durchzuführen (Anwendung der Rundungsregeln), ist sich aber andererseits nicht der Bedeutung des Überschlags bewusst, was dazu führt, dass der Überschlag aus ihrer Sicht nicht immer möglich ist.

Fazit und Konsequenzen für den Unterricht

Eine zentrale Wissenskomponente des Überschlagsrechnens ist das Wissen, dass der Überschlag eine Modellrechnung für eine genaue Rechnung darstellt und somit insbesondere bei indirekten Überschlagsfragen noch interpretiert werden muss. Während die Kinder in der vorgestellten Studie i.d.R. einen Überschlag durchführen konnten, war die Interpretation nicht selbstverständlich. Dies bestärkt die Vermutung, dass das Überschlagsrechnen häufig nur algorithmisch durchgeführt wird, ohne dass seine Bedeutung umfassend verstanden wird. Gleichzeitig wird deutlich, dass Strategien zum Herstellen der operativen Beziehungen (Kompensation) eine zentrale Rolle spielen, dass Kinder aber nicht immer darauf vertrauen. Ein von Beginn an gezielterer Einsatz dieser Aufgabenformate in Kombination mit einer stärkeren Betonung von Kompensationsstrategien ist somit wünschenswert, um die Bedeutung des Überschlags für Schülerinnen und Schüler transparenter zu machen.

Literatur

LeFevre, J., Greenham, S.L. & Waheed, N. (1993): The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. In: Cognition and Instruction, 11(2), 95-132.

Reys, R.E., Rybolt, J.F., Bestgen, B.J. & Wyatt, J. W. (1982): Processes used by good computational estimators. In: Journal for Research in Mathematics Education, 13(3), 183-201.

Sowder, J. (1992): Estimation and Number Sense. In D. A. Grouws (Hrsg.): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillan, 371-389.

Trafton, P.R. (1978): Estimation and mental arithmetic: Important components of computation. In M.N.Suydam & al. (Hrsg.): Developing computational skills. Reston: The Council, 196-213.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Children learn Mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Utrecht: Freudenthal Institut.

Verschaffel, L., Greer, B. & DeCorte, E. (2007): Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Hrsg.): Second handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publ., 557-628.

Stephan HUSSMANN, Timo LEUDERS, Bärbel BARZEL,
Susanne PREDIGER, Dortmund/ Freiburg

Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs-und Entwicklungsprojekt

Die Fachdidaktik als Wissenschaft hat mehrere „Standbeine“: Ein normatives, curriculares: Was sollen Schülerinnen und Schüler lernen? (z.B. Heymann 1996), ein konstruktives: die Bereitstellung von geeigneten Lernumgebungen (z.B. Wittmann 1976), sowie ein empirisches, nämlich die Erforschung von fachbezogenen Lehr- und Lernprozessen (z.B. Lester 2007). Die besondere Qualität fachdidaktischer Forschung besteht in einer kreativen Kombination dieser Elemente. Als besonders produktiv hat sich dabei der enge Bezug von Forschung und Entwicklung erwiesen, der in den letzten 20 Jahren in verschiedenen Varianten etabliert wurde, u.a. design research (Gravemeijer/Cobb 2006, Cobb et al. 2003), design science (Wittmann 1995), design experiments (Brown 1992). Dieser Beitrag erläutert, wie im Projekt KOSIMA die Grundideen fachdidaktischer Entwicklungsforschung in spezifischer Weise realisiert werden.

Das Projekt verfolgt folgende Ziele:

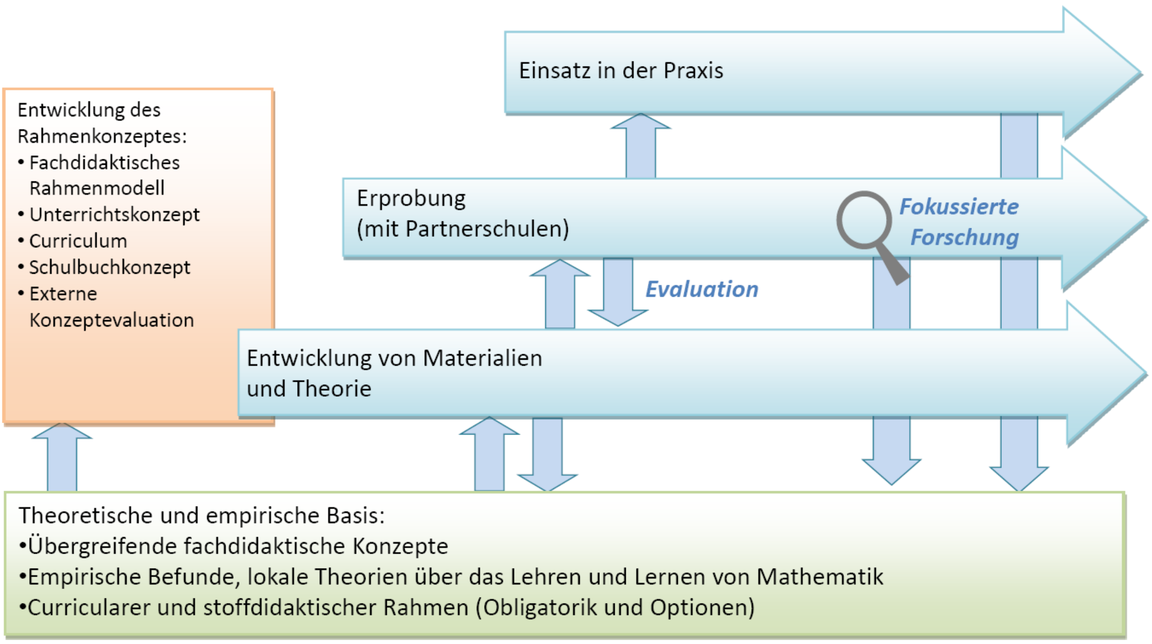
(1) Fachdidaktische Entwicklungsforschung verpflichtet sich dem Ziel der Gestaltung und Veränderung von schulischen Lehr-Lernprozessen. Gemessen wird die Relevanz fachdidaktischer Forschung an ihrem (direkten oder indirekten) Beitrag zur **Steigerung von Unterrichtsqualität**. Das Projekt KOSIMA nimmt Einfluss auf Unterricht über die Konstruktion innovativer Lernarrangements, aber auch über die Verbreitung der dahinter liegenden Ideen über Netzwerke, Fortbildungen und geeignete Handbücher.

(2) Wissenschaftliche Entwicklung von Lernarrangements vollzieht sich im Projekt **theoriegeleitet und empiriegestützt**. Von besonderer Bedeutung sind dabei empirisch gewonnene lokale Theorien, die sich auf *einen spezifischen fachlichen Gegenstandsbereich* beziehen, wie etwa das verständnisorientierte Lernen in der Bruchrechnung (Streefland 1991). Aber auch übergreifende Theorien zur Strukturierung mathematischer Lernprozesse (z.B. problemorientiertes Lernen, Wagenschein 1977, Winter 1989, Freudenthal 1991; Anwendungsorientierung, Blum et al. 1989, de Lange et al. 1993; Kernideen in Rückschau und Vorschauperspektive, Gallin/Ruf 1990) besitzen eine Leitfunktion bei der Entwicklung der Lernarrangements (vgl. Barzel et al., in diesem Band). Als Basis für die Entwicklung werden im Projekt einerseits empirische Ergebnisse zu Lernvoraussetzungen und Lernhindernissen und andererseits systematisch erhobene Evaluationsdaten herangezogen. Auf diese Weise werden sowohl Lernarrangements als auch die zugrunde liegende Theorie im Wechselspiel von Gestaltung, Erprobung und Analyse weiterentwickelt.

(3) Als besondere Chance der Forschung in KOSIMA sehen wir, dass **Forschung in einem Umfeld von gezielt gestalteter Praxis** stattfinden kann. Dadurch können spezifische innovative Lernprozesse in besonderer Weise erforscht werden. Da sich die Entwicklungen in KOSIMA nicht nur auf einzelne Lernumgebungen beziehen, sondern auf ein *durchgehendes* Lehrwerk der Klassen 5-10 (Mathewerkstatt 5-10, Barzel et al. 2012, in Grundzügen vorgestellt von Barzel et al., in diesem Band), ergeben sich besondere Chancen für langfristige Forschungen. So kann beispielsweise der sukzessive Vorstellungsaufbau zu Brüchen oder Variablen über mehrere Jahre verfolgt werden, da die Ausgangsbedingungen für die in dieser Phase wichtigen Lernprozesse eher durch die vorhergehende Lerngeschichte sichergestellt sind.

(4) Forschung in KOSIMA geschieht nicht nur unter Hinzuziehung von fokussierten, drittmittelgeförderten Forschungsprojekten (s.u.), sondern auch mit Lehramtsstudierenden, die unter spezifischen Evaluations- und Forschungsschwerpunkten im Rahmen von Qualifikationsarbeiten vertiefte Untersuchungen vornehmen (s.u.). Durch die inhaltliche und methodische Nähe zum Unterricht ist KOSIMA in besonderer Weise geeignet zu einer solchen **Integration in fachbezogene Lehrerbildung**.

Diese Ziele, insbesondere die langfristig angelegte Entwicklungsforschung haben Konsequenzen und Herausforderungen für die Arbeitsstruktur im Projekt KOSIMA:



Der Anspruch der pragmatischen Evaluation des *gesamten* Konzeptes macht es notwendig, das gesamte Entwicklungsprodukt (kontinuierlich) mindestens einem Erprobungszyklus zu unterziehen. Damit sind die Evaluations- und Forschungszeiträume durch die Frequenz der Schuljahre bestimmt. Einem Jahr der theoretischen Vorbereitung, der Entwicklung der Lernumgebungen und der Vorbereitung der Lehrpersonen folgt ein Jahr der Erprobung und Beforschung in verschiedenen Schulen, deren Ergebnisse in einer Überarbeitung bzw. Neukonzeption der Lernumgebungen mündet. Eingebettet in die Gesamterprobung, aber davon unabhängig, sind tiefergehende lokale Studien mit mehreren Entwicklungs- und Erforschungszyklen.

Theoretische und empirische Basis der Entwicklungsarbeit ist eine breite Analyse des theoretischen, empirischen und curricularen Rahmens.

Die Entwicklung des Rahmenkonzepts wurde unter Einbeziehung externer Expertise von Fachdidaktik und Schulpraxis in einer ersten Phase von zwei Jahren entwickelt. Die hierbei gewonnenen theoretischen Erkenntnisse tragen zur Integration bestehender und Entwicklung neuer fachdidaktischer Konzepte bei, z.B. zum sinnstiftenden Lernen (Leuders et al. 2011) oder zum Konzept des Ordnens unter aktiver Schülerbeteiligung (Prediger et al. 2011).

Die Entwicklungsarbeit mündet in die **Produktion von Lehr-Lernmaterialien**, die den Anspruch haben, eine vollständige Materialbasis für die Gestaltung des Lernprozesses durch die erprobenden Lehrkräfte, darzustellen.

Die **Erprobung** findet mit Lehrpersonen und Klassen statt, die zum Teil jahrgangsweise, zum Teil von Klasse 5 an durchgehend mit dem Konzept arbeiten. Dies erlaubt die oben beschriebene Forschung in gezielt gestalteter Praxis. Die Evaluation erfasst zu jedem Kapitel: Rückmeldungen der Lehrpersonen, Schülerprodukte aus allen Lernphasen, Videos ausgewählter Schlüsselstellen im Lernprozess. Die Daten werden aufbereitet, mit den erprobenden Lehrkräften diskutiert und die Ergebnisse fließen in die Überarbeitung ein. Zusätzlich werden einzelne Ausschnitte des Lernprozesses unter besonderem Forschungsfokus untersucht.

Leitend für die **Forschung** sind grundsätzliche Fragestellungen, die von den Entwicklern im Rahmen von größeren Forschungslinien untersucht werden, wie etwa die Begriffs- und Vorstellungsentwicklung in bestimmten Inhaltsbereichen oder die Förderung von Problemlösekompetenzen. Die so auf empirischer Basis weiterentwickelten lokalen oder übergreifenden Theorien münden mit zeitlichem Versatz in die Entwicklungsarbeit ein, bereichern aber vor allem die fachdidaktische Theoriebildung.

Das ganze mündet in einem **Einsatz in der Praxis**, die nicht mehr gezielt gestaltet ist, sondern den alltäglichen Unterricht widerspiegelt. Dies ermöglicht dann auch Wirkungsstudien mit einer großen Anzahl an Schülerinnen und Schülern.

Beispiele für Forschungsprojekte

Es versteht sich von selbst, dass nur ein kleiner Teil der im Rahmen der Entwicklung und Evaluation aufkommenden Fragen durch systematische Forschungsstudien untersucht werden kann. Methodisch schöpfen die KOSIMA-Projekte aus einem breiten Spektrum von interpretativen und statistischen Methoden als auch deren Zusammenspiel. Folgende Beispiele sind schon abgeschlossen oder werden in diesem Band durch eigene Beiträge dargestellt:

Carola Ehret konzipiert und evaluiert ein Förderkonzept für das Schreiben im Mathematikunterricht der Hauptschule und erfasst dazu zunächst die Schreibhürden, die Lehrende und Lernende wahrnehmen (in diesem Band).

Matthias Glade untersucht durch Design Experiments, wie sich die für Strukturprobleme wichtige fortschreitende Schematisierung in den Lernprozessen der Lernenden ausdrückt und bestmöglich unterstützen lässt (in diesem Band).

Heinz Laakmann analysiert in Design Experiments die Bedeutung von Darstellungswechseln im Bereich der linearen Funktionen und unter besonderer Berücksichtigung von Multirepräsentationsprogrammen (in diesem Band).

Kathleen Philipp und Timo Leuders erfassen in einer Experimentalstudie die Wirksamkeit eines Strategietrainings aus dem Kapitel „Zahlen teilen und zusammensetzen" und setzen dabei auf eine theoretische Konzeptualisierung von „innermathematischem Experimentieren" und einer empiriegestützten Beschreibung entsprechender Denkprozesse (in diesem Band).

Florian Schacht und Stephan Hußmann haben einen theoretischen Rahmen (weiter) entwickelt, mit dem sich individuelle Begriffsbildungsprozesse im Mathematikunterricht beschreiben lassen. Dabei wird die theoretische Perspektive an der Entwicklung des Muster- und Variablenbegriffs untersucht (Schacht 2011).

Maike Schindler geht mit Hilfe von Design Experiments der Frage nach, inwiefern es den Lernenden gelingt, individuelle mathematische Begriffe in verschiedenen Kontexten und Situationen anzuwenden (in diesem Band). Dazu nutzt sie eine Lernumgebung zur Einführung in die negativen Zahlen.

Andrea Schink hat in ihrer Studie zum Umgang mit dem Ganzen bei Brüchen wertvolle empirische Einsichten in individuelle Vorstellungen und Strukturierungen geliefert (in diesem Band), die in die Entwicklung zweier Lernumgebungen eingeflossen ist.

Susanne Schnell analysiert in Design Experiments auf der Mikroebene die Vorstellungsentwicklungsprozesse von Lernenden zum Gesetz der großen Zahlen (in diesem Band). Dazu nutzt sie die in mehreren Entwicklungs- und Beforschungszyklen entwickelte Lernumgebung „Wettkönig" zum Thema Zufall.

All diesen Arbeiten ist gemeinsam, dass sie mit spezifischen Fragestellungen auf Lernprozesse von Schülerinnen und Schüler in gezielt gestalteten Lernumgebungen blicken. Neben der Weiterentwicklung der verwendeten Theorie ist eines der übergeordneten Ziele die Verbesserung der Lernumgebungen.

Anmerkungen

Alle Autorinnen und Autoren haben am Artikel gleichberechtigt mitgewirkt. Die Literatur findet sich in der längeren Fassung des Beitrags unter www.ko-si-ma.de.

Literatur (nur in der Online Fassung)

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. (2012) (Hrsg.): Mathewerkstatt 5. Cornelsen, Berlin. (Ebenso mit anderer Hrsg-Namenreihenfolge Klasse 6-10).

Melanie HUTH, Frankfurt

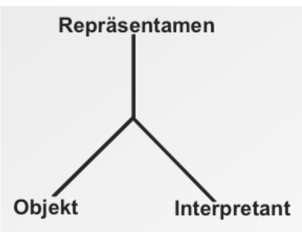
Gestik-Lautsprache-Relationen in mathematischen Gesprächen von Zweitklässlern[1]

Multimodalität - Gestik und Lautsprache

In mathematischen Interaktionen zeigen Grundschüler multimodale Ausdrucksformen, denen hier durch die Betrachtung von Gestik-Lautsprache-Relationen Rechnung getragen wird. Die Perspektive der Multimodalität (vgl. Sabena 2008) schreibt dem Körper eine zentrale Rolle in mathematischen Lernprozessen zu. „[...] the *body* and its activity with artifacts, and the activity with *signs*.“ (ebd., 19) werden dabei als zentrale Quellen mathematischen Wissens bezeichnet. Arzarello und Paola (2007) betonen das Zusammenwirken von Gestik und Lautsprache und ordnen beide als Komponenten eines „semiotic bundles“ (ebd., 19) ein, um unter semiotischer Perspektive die Beschreibung von konventionalisierten und nicht-konventionalisierten Zeichensystemen zu ermöglichen. Auch McNeill (2005) beschreibt Gestik und Lautsprache als integratives Sprachsystem für den Sprecher *und* den Hörer (ebd., 53f.). Modusspezifisch kann die Lautsprache als konventionalisiertes und linear aufgebautes grammatikalisches System beschrieben werden mit der Möglichkeit einer detaillierten Begriffsbildung. Die Gestik ist stärker bildhaft, nicht-konventionalisiert und im Vergleich zur Lautsprache deiktisch präzise. Gestisch ist es u.a. möglich, Referenzpunkte für die weitere Interaktion zu setzen, bspw. durch die Verortung von Personen, Gedanken oder Objekten im Gestenraum.

Ausgewählte Aspekte der Zeichentheorie nach C. S. Peirce

Mir der Zeichentheorie nach C. S. Peirce (vgl. Schreiber 2010) können auch nicht-konventionalisierte Zeichen wie Gesten beschrieben werden. Der Fokus ist auf die Zeicheninterpretation und damit auf den Zeichenleser gerichtet. Ein Zeichen nach Peirce hat eine triadische Struktur (s. Abb.). In der hier vorgestellten Analyse wird mithilfe einer gestischen und einer lautsprachlichen Zeichentriade der „Komplexe Semiotische Prozess“ (Schreiber 2010, 148ff) auf Mikroebene rekonstruiert. „Ein Zeichen oder Repräsentamen ist etwas, das für jemanden [...] für etwas steht. Es wendet sich an jemanden, d.h.,



[1] Die Erstellung dieses Artikels wurde teilweise unterstützt durch das IDeA-Zentrum Frankfurt (www.idea-frankfurt.eu). Eine ausführliche Beschreibung und Analyse des dargestellten Beispiels findet sich in Huth (2011, erscheint demnächst).

es erzeugt im Geist dieser Person ein äquivalentes oder vielleicht ein mehr entwickeltes Zeichen. Das Zeichen, welches es erzeugt, nenne ich den Interpretanten des ersten Zeichens. Das Zeichen steht für etwas, sein Objekt.“ (CP 2.228, aus Schreiber 2010, 32).

Gestik im (mathematischen) Lernprozess

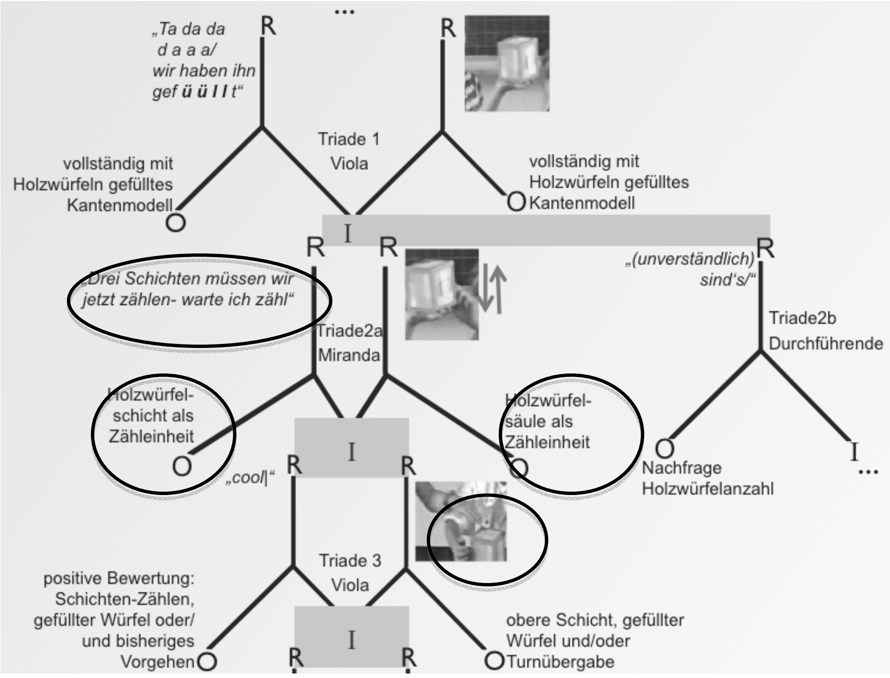
Die Theorie der Gesten-Lautsprache „Mismatches“ (Goldin-Meadow 2003, 23ff) und die Bedeutung von Gestenübernahmen (vgl. Arzarello/Paola 2007) sind für die beschriebene Forschungsarbeit zentral. Mismatches sind Ereignisse, bei denen Gestik und Lautsprache zeitlich kohärent verschiedene Informationen übermitteln. Matches bilden das Gegenereignis (Goldin-Meadow 2003, 23ff). Es konnte gezeigt werden, dass Kinder, die bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen Mismatches produzierten, besonders offen für Instruktion und „ready to learn“ (ebd., 47) waren. Mismatches verweisen damit vermutlich auf Übergänge im Lernprozess, denn beide Modi drücken bereits noch nicht integrierte Ideen zur Problemlösung aus. Des Weiteren ist die Übernahme von Lehrenden-Gesten durch Lernende besonders als Zu-Eigenmachen der Gesten effektiv für das Lernen (Cook/Goldin-Meadow 2007, 212). Arzarello und Paola (2007) beschreiben als „semiotic game“ im Mathematikunterricht die Übernahme von Schüler-Gesten durch den Lehrer. Als fachsprachliches Vorbild integriere er alltagssprachliche „personal signs“ (Gesten) der Schüler in mathematische Argumentationen („institutional signs“) (ebd., 23).

Forschungsfrage, Anlage der Studie und Analyseverfahren

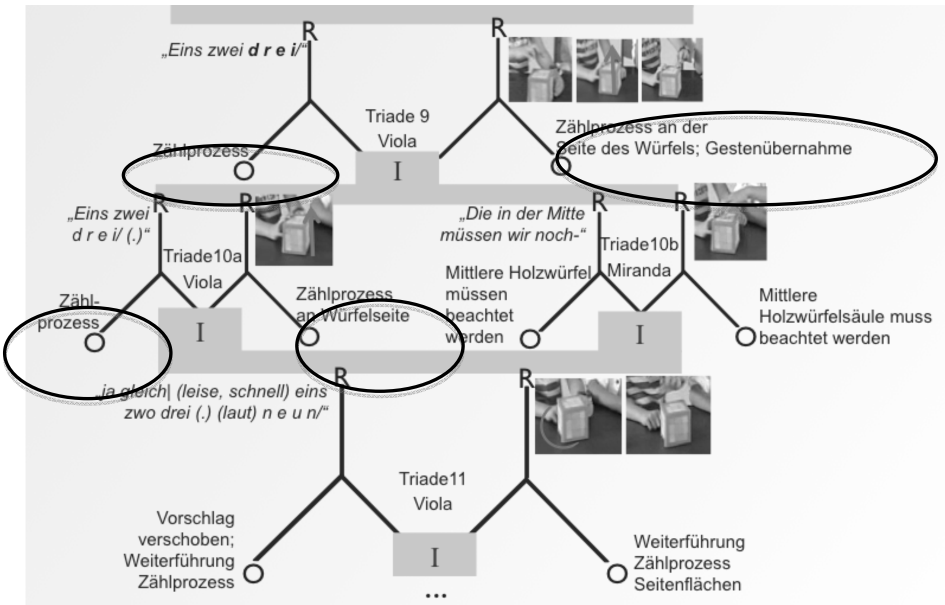
In welchem Modus (Gestik und/oder Lautsprache) werden von den Schülern mathematische Ideen eingebracht, aufgegriffen, weiterentwickelt und/oder verworfen? Mismatches und Gestenübernahmen sollen dabei in ihrer Bedeutung für die Interaktion fokussiert werden. In der Studie beschäftigten sich Paare von Zweitklässlern mit mathematischen Problemen. Diese videografierten Situationen wurden in einer Gestik-Lautsprachen-Trankskriptpartitur verschriftlicht (Huth 2010). Das Analyseverfahren umfasst zwei Schritte: Interaktionsanalyse (vgl. Krummheuer 2010) und Semiotische Analyse (vgl. Schreiber 2010).

Beispiel: Miranda und Viola bestimmen das Würfelvolumen

Auszugsweise werden ausgewählte Aspekte der Semiotischen Analyse beschrieben. Miranda und Viola bestimmen das Würfelvolumen von Kantenmodellen mithilfe von einheitlichen Holzwürfeln. Zu Beginn haben sie das 3x3x3 Holzwürfel-Kantenmodell mit Holzwürfeln gefüllt und bestimmen nun deren Anzahl. Die Analyse wird mit einer lautsprachlichen (links) und einer gestischen Triade (rechts) dargestellt, die über einen gemeinsamen Interpretanten in Relation stehen.



Nach dem Einstieg von Viola wird in Triade2a lautsprachlich auf *Schichten* verwiesen, gestisch auf eine Holzwürfel*säule*.



Die Zeichen beider Modi verweisen also auf verschiedene Objekte (Holzwürfel*schicht*, Holzwürfel*säule*). Der Mismatch führt dazu, dass Viola in Triade3 ihren Interpretant als gestisches Repräsentamen einer Schicht-Geste über dem Modell produziert und lautsprachlich bewertet. Miranda fokussiert eine Holzwürfel*säulen*-Zählstrategie und kommt zum vorläufigen Ergebnis 27. Viola fokussiert die Holzwürfel*schicht*-Zählstrategie, die sie aus Triade 2a von Miranda aufgreift und an den Würfelseitenflächen verortet. Sie integriert am Ende den auf die Mittel*säule* bezogenen Einwand von Miranda (vgl. Triade 10b) in ihre *Schicht*-Zählstrategie.

Fazit

Modusspezifisch werden mathematische Ideen eingebracht, aufgegriffen, weiterentwickelt und in eigene Vorgehensweisen integriert. Beide Modi werden effektiv in ihren Ausdrucksmöglichkeiten in den interaktiven Aushandlungsprozessen genutzt (s. eingekreiste Objekte in Triade 9, 10a). Es lassen sich in einem „semiotic game unter Gleichen“ (Huth 2011) Gestenübernahmen und modusübergreifende Aspekte rekonstruieren. Der Mismatch (Goldin-Meadow 2003, 23) als Ideen-Geber führt am Sequenzende zu einer Integration der Strategien Holzwürfel*schicht* und Holzwürfel*säule*.

Literatur

Arzarello, F. & Paola, D. (2007): Semiotic Games: The Role of the Teacher. In: Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Hrsg.). Proceedings of the 31st Conference, Intern. Group for the Psych. of Math. Education, Vol. 2, Seoul: PME, S. 17-24.

Cook, S. & Goldin-Meadow, S. (2006): The Role of Gesture in Learning: Do Children Use Their Hands to Change Their Minds? Journal of Cognition and Development, 7(2), S. 211–232.

Goldin-Meadow, S. (2003): Hearing Gesture. How Our Hands Help Us Think. Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press.

Huth, M. (2010): Gestik und Lautsprache in mathematischen Gesprächen - multimodale Ausdrucksweisen mathematischer Ideen von Kindern. BzMU. Hildesheim: Franzbecker.

Huth (2011, erscheint demnächst). Das Zusammenspiel von Gestik und Lautsprache in mathematischen Gesprächen von Kindern. In: Brandt, B.; Vogel, R. & Krummheuer, G. (Hrsg.). Die Projekte erstMaL und MaKreKi. Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education“ (IDeA), Bd 1. Waxmann.

Krummheuer, G. (2010): Die Interaktionsanalyse. In: F. Heinzel (Hrsg.). Methoden der Kindheitsforschung. 2. überarb. Auflage, Weihnheim: Juventa (im Erscheinen).

McNeill, D. (2005): Gesture & Thought. Chicago, London: University of Chicago Press.

Sabena, C. (2008): On the Semiotics of Gestures. In: L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Hrsg.): Semiotics in Mathematics Education. Rotterdam: Sense Publishers, S. 19-38.

Schreiber, C. (2010): Semiotische Prozess-Karten - Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik. Band 4, Waxmann: Münster u. a.

Thomas JANSSEN, Bremen

Epistemische Aufbauhandlungen und die Konstruktion mathematischen Wissens. Theorieweiterentwicklung durch Vergleich zweier Modelle

Die Konstruktion mathematischen Wissens kann aus Lehrersicht darin bestehen, eine Schülerin in ihrem individuellen Lernprozess zu unterstützen, oder darin, mit der ganzen Klasse einen Lernfortschritt zu erzielen. Diese beiden Sichtweisen werden durch das individuell-mentale RBC-Modell (Schwarz & al. 2009) einerseits und das sozial-konstruktivistische SVSt-Modell (Bikner-Ahsbahs 2005) andererseits repräsentiert. Ziel der hier vorgestellten Masterarbeit war es, die Beschreibungen der beiden Modelle zu verfeinern, auch um so Möglichkeiten ihrer Vernetzung zu eruieren.

1. Theoretischer Hintergrund und Fragestellung

Beide Modelle verstehen Wissenskonstruktion als einen Prozess, der sich in epistemischen Handlungen vollzieht:

RBC-Modell	**SVSt-Modell**
Recognizing	Sammeln
Building-with	Verknüpfen
Constructing	Struktursehen

Die unmittelbare Gegenüberstellung sollte nicht darüber hinwegtäuschen, dass die Handlungen grundlegend verschieden zu verstehen sind. Das RBC-Modell geht von ineinander verschachtelten individuellen, mentalen Handlungen aus. Recognizing bedeutet, dass ein bestimmtes mathematisches Konstrukt als in der vorliegenden Situation relevant wiedererkannt wird. So wiedererkannte Konstrukte können zu einem bestimmten Ziel zusammengefügt werden und so gegebenenfalls zu neuen Konstrukten führen.

Die Handlungen des SVSt-Modells dagegen sind als kollektive Handlungen zu denken. Es lassen sich demnach Sequenzen rekonstruieren, in denen die Schüler kleinste Sinneinheiten sammeln. Verknüpfen bedeutet dann, dass in begrenztem Umfang Zusammenhänge hergestellt und Schlüsse gezogen werden. Von Struktursicht ist dann die Rede, wenn solchen Zusammenhängen eine allgemeinere Gültigkeit zuerkannt wird.

In meiner Arbeit beschränkte ich mich auf eine intensive Analyse der Aufbauhandlungen Building-with und Verknüpfen. Es sollte untersucht werden, unter welchen Bedingungen sie auftreten und wie sich der Lernprozess unterstützen lässt. Im Vergleich sollte sich dann zeigen, inwiefern sich die Modelle unterscheiden beziehungsweise ergänzen.

2. Methodischer Überblick

Grundlage der Untersuchung waren Videotranskripte, die im Rahmen des israelisch-deutschen Vernetzungsprojekts „Effective Mathematical Knowledge Construction in Interest-Dense Situations“[1] erhoben wurden. Zwei

$$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{\cdots}}$$

Schülerpaare bearbeiteten eine Lernumgebung zu einer Kettenbruchentwicklung (links), die Wissenskonstruktion wie in den beiden Modellen beschrieben ermöglichen sollte. Nachdem die epistemischen Handlungen in einem an die Semiotische Sequenzanalyse von Bikner-Ahsbahs (2006) angelehnten Verfahren identifiziert wurden, konnte ich anhand von Schlüsselszenen Hypothesen zu den Bedingungen der Einleitung und Fortführung der Aufbauhandlungen und zu ihrem Beitrag zur Wissenskonstruktion entwickeln. Diese Hypothesen bildeten die Grundlage für den Vergleich der Modelle.

3. Ergebnisse

Die Analysen ergaben Hypothesen unterschiedlicher Reichweite – hier sollen zwei zentrale und gut belegte Erkenntnisse anhand exemplarischer Transkriptausschnitte (so angepasst, dass sie intuitiv lesbar sind) vorgestellt werden. Sie betreffen einerseits die Art und Weise, wie sich in den epistemischen Aufbauhandlungen auf zuvor erworbene Inhalte bezogen wird, andererseits die Bedeutung der Ziele, unter denen sie durchgeführt werden.

Bezugnahme auf Inhalte

In der im Folgenden dargestellten Transkriptstelle wird deutlich, in welch unterschiedlicher Weise sich der individuelle und der kollektive Wissenskonstruktionsprozess (bei der Berechnung von *f(5)*) auf bekannte Inhalte (die Berechnung von *f(4) = 11/5* und *f(3) = 5/3*) beziehen:

> S: (unterbricht) Das heißt das ganze untere (*zeigt auf die Rechnung zu f(4)*) sind elf Fünftel das heißt... (*zieht das Blatt etwas zu sich*) eins... plus zwei durch elf Fünftel. (2 sec)
>
> K: Ä-h-m...
>
> S: (unterbricht) Hab ich auch em Mein erster Schritt (*zeigt erst auf "5/3" in der Rechnung zu f(3), dann auf die Rechnung zu f(2)*) Diese fünf Drittel hatten wir (unverständlich) hier.

[1] Dieses Projekt wird gefördert von der “German-Israeli Foundation for Scientific Research and Development”, grant 946-357.4/2006.

K: J-a- stimmt.

Dass sich im Building-with auf Inhalte bezogen wird, ist durch die Verschachtelung der Handlungen im RBC-Modell vorgegeben. Hier zeigt sich jedoch eine weitergehende Bedeutung von spezifischen Inhalten, ohne die ein bestimmter Building-with-Prozess sich nicht durchführen lässt: Sören hat hier offensichtlich einen Vorsprung gegenüber Karl, weil er den vorherigen Kettenbruch in *f(5)* wiedererkennt. Wenn eine Lehrerin also einem Schüler bei einer bestimmten Aufbauhandlung helfen möchte, so sollte sie die dazu benötigten Inhalte antizipieren und bereitstellen.

Auch in der sozialen Sicht auf Prozesse der Wissenskonstruktion zeigt sich eine Inhaltsbezogenheit, die über die bisherige Beschreibung des SVSt-Modells hinausgeht: So sind kollektive Sammelhandlungen offenbar *notwendige* Voraussetzung für kollektives Verknüpfen: Um Karl zu vermitteln, welchen Zusammenhang er sieht, braucht Sören die gemeinsam berechneten Werte. Für die Organisation von Unterricht, der kollektive Verknüpfungen ermöglichen soll, bedeutet dies, dass der Lerngruppe Zeit gegeben werden muss, eine hinreichende gemeinsame Basis aufzubauen.

Ziele epistemischer Aufbauhandlungen

Die Rolle die Ziele bei der Ausgestaltung der epistemischen Aufbauhandlungen lässt sich anhand folgender Szene illustrieren. Die Schüler sind hier aufgefordert, ein Muster zur Fortsetzung der Folge zu benennen.

K: Um von eim Term zum nächsten zu komm Genau das hattn wir ja schon gesagt imma jeweils das Ergebnis vom... ersten Term... oder vom vorherigen Term... Ähm...

S: Ja...

K: Setzt man ein. Ähm... (3 sec) Wie sacht man das denn Das Ergebnis vom Vorherigen (*streicht die Bänder seiner Zipperjacke glatt*) (1 sec) Term... (*schüttelt den Kopf leicht*) (2 sec)

S: (*gestikuliert mit dem Stift in der Hand*) Mm... man setzt... (1 sec) f Wir könns ja mal ganz... sachlich (*greift mit den Armen in Richtung der leeren Blätter, nimmt aber keins, zieht das bereits beschriebene Notizblatt zu sich*) Ham wir das nicht auch...

/K: (*gleichzeitig, daher* unverständlich)

S: f x... (*klopft mit dem Stift zweimal auf den Tisch*) gleich eins... (*gestikuliert mit dem Stift in der Luft*) (2 sec) (*schiebt das Notizblatt wieder in die Mitte, I beugt sich nach vorne, legt seine Hand kurz neben das Aufgabenblatt, macht ein Geräusch*) Eins plus... zwei durch (ma*cht eine horizontale Handbewegung in der Luft*) f x minus eins. (2 sec)

K: (*schaut auf die Blätter*) Mm... wie meinst du das? was?

I: (*schaut S an, klopft mit der Hand auf das Notizblatt*) Du kannst hier ruhig äh gerne weiter schreiben (*S setzt den Stift an, K schaut dabei zu*) und dann nachher hier das eintragen was ihr (unverständlich) da hinschreiben wollt. (*S schreibt "1.2" auf das Notizblatt unter die Rechnung zu 1.1*)

S: Das ja theoretisch... (*schreibt "f(x)=1+2/f(x-1)"*) f x (1 sec)

K: Ah ja genau.

Es zeigt sich, dass Building-with nicht nur auf ein Ziel ausgerichtet ist, sondern das Ziel vielmehr den Prozess prägt: Schüler mit unterschiedlichen Zielen (hier: Karls verbale vs. Sörens formale Beschreibung) werden unterschiedliche Aufbauhandlungen durchführen. Daher sollten Schüler befähigt werden, sich ihre Ziele bewusst zu machen und mit anderen abzustimmen.

Im SVSt-Modell wird deutlich, dass die Ziele in der sozialen Interaktion emergieren, und zwar durch Aushandlungen. Schüler müssen lernen, diese sozialen Prozesse mitzugestalten, um sie als Ressource nutzen zu können (vgl. dazu auch Bikner-Ahsbahs in diesem Band).

4. Fazit und Ausblick

Das RBC-Modell liefert also genaue Beschreibungen des mentalen Prozesses der Wissenskonstruktion: Was braucht die Schülerin, wo will sie hin? Das SVSt-Modell hingegen präzisiert die soziale Verortung des Lernens: Das Soziale ist nicht nur Kontext, sondern Ressource.

Individuelle Prozesse der Wissenskonstruktion wirken also im Sozialen, und das Soziale wirkt beim Individuum. Hier setzt mein Promotionsvorhaben an, in dem ich mich damit beschäftigen werde, wie algebraischer Struktursinn (u.a. Hoch & Dreyfus 2010) im Klassenverband vermittelt werden kann.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. (2005): Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Bikner-Ahsbahs, A. (2006): Semiotic Sequence Analysis – Constructing Epistemic Types Empirically. In: J. Novotná & al. (Hrsg.): Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education., Bd. 2, 161-168.

Hoch, M., Dreyfus, T. (2010): Developing Katy’s Algebraic Structure Sense. In: V. Durand-Guerrier & al. (Hrsg.): Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 529-538.

Schwarz, B. B., Dreyfus, T., Hershkowitz, R. (2009): The Nested Epistemic Actions Model for Abstraction in Context. In: B. B. Schwarz & al. (Hrsg.): Transformation of Knowledge Through Classroom Interaction. London: Routledge, 11-41.

Roland JORDAN, Martin STEIN, Münster

Erstellung und Evaluation einer Software zur Förderung des mathematischen Textverständnisses

Problembeschreibung

Ausbilder im Handwerk berichten oft, dass ihre Auszubildenden Defizite in den Bereichen der Lesekompetenz und der mathematischen Grundlagen aufweisen. Von dieser Problematik ausgehend verfolgt das Projekt Mathe-Meister (www.mathe-meister.de) zwei Ziele: zum einen sollen angehende Meisterschüler durch ein Testverfahren über eventuelle individuelle Defizite im mathematischen Grundlagenbereich informiert werden. Der zweite – hier beschriebene Projektteil – widmet sich der Lesekompetenz und dem mathematischen Textverständnis.

Dafür wurde im Rahmen des Projektes eine Übungs-CD zur Förderung des mathematischen Textverständnisses entwickelt. Zielgruppe der Software sind Schüler am Ende der Sekundarstufe I bzw. angehende Meisterschüler, die Probleme haben, aus komplexen Texten verschiedener Art die benötigten Informationen zu extrahieren. Im vorliegenden Beitrag wird zunächst skizziert, mit welchen Textsorten und Leseanforderungen junge Erwachsene in der Berufsausbildung bzw. im Berufsleben konfrontiert werden, bevor ein Einblick in die Entwicklung der Software gegeben wird. Für die summative Evaluation der Software musste ein Testverfahren entwickelt werden, mit dessen Hilfe die erhofften Wirkungseffekte bei der betrachteten Zielgruppe gemessen werden sollten. Dieses Verfahren wurde vom Verfasser im Rahmen einer von Prof. Dr. Stein an der Universität Münster betreuten Dissertation entwickelt [vgl. Jordan (2011)] – die wesentlichen Entwicklungsstufen der Testentwicklung werden in diesem Beitrag ebenfalls kurz dargestellt, bevor abschließend die vorläufigen Evaluationsergebnisse vorgestellt werden.

Leseanforderungen im Berufsalltag

Berufsbezogene Texte unterscheiden sich deutlich von den in der Schule auftretenden meist literarischen Texten. Es handelt sich bei den berufsbezogenen Fachtexten um Texte, „die aus einem Gesamt von schriftlichem Text, Fotos, Zeichnungen, Diagrammen, Tabellen, Grafiken etc. bestehen und die der Leser in einen logischen Zusammenhang bringen muss, um die in solchen Texten enthaltenen Informationen entnehmen und mit seinem Vorwissen in Verbindung bringen zu können“ [Grundmann (2009), S. 186]. Innerhalb der PISA-Untersuchungen wird in diesem Zusammenhang unterschieden zwischen den Textsorten der *„kontinuierlichen Texte“* (Erzählungen, Darlegungen, Beschreibungen, Argumentationen sowie Anweisungen) und der *„nicht-kontinuierlichen Texte"* (Diagramme, Graphen, Tabellen, etc.) [vgl. Kirsch et al. (2002), S. 43]. Insgesamt bleibt aber festzuhalten, dass nur wenige breit angelegte Untersuchungen bzgl. der Leseanforderungen im Berufsalltag existieren. In Deutschland ist dabei in erster Linie die in Hamburg durchgeführte ULME-Studie zu nennen [vgl. Lehmann et al. (2005)] – weltweit sind die Erwachsenenstudien IALS und ihre Nachfolgestudie ALL bzw. PIACC anzuführen. Die Studien unterscheiden sich dabei bzgl. der Operationalisierung des Konstrukts der Lesekompetenz kaum: so wird bei allen angeführten Studien für den Bereich der Lesekompetenz zwischen den oben erwähnten Textsorten der kontinuierlichen Texte („prose literacy") und der nicht-kontinuierlichen Texte („document literacy") unterschieden. Diese beiden Textsorten werden ergänzt durch eine dritte Dimension – der „quantitative literacy", bei der zudem elementare mathematische Operationen beherrscht werden müssen [vgl. OECD (1998), S.17].

Die Entwicklung der Software

Die Softwareentwicklung gliederte sich in insgesamt vier Arbeitsphasen: der Konzeptionsphase, der Entwicklungsphase, der Test- und Evaluationsphase sowie der Phase der Produktfertigstellung der Übungs-CD.

Innerhalb der Konzeptionsphase stand die didaktische Planung im Vordergrund. Schwerpunkt lag in der Auswahl von passenden Aufgabenformaten und Texten, die den oben angedeuteten Anforderungen entsprachen. Insgesamt wurden dabei elf verschiedene Aufgabenformate herausgearbeitet, die zum großen Teil auf bereits bestehende Trainingskonzepte zur Lesekompetenz der Deutsch-Didaktik zurückzuführen sind [vgl. Simon (2006); Grabe, Spanjardt (2004)]. Als Beispiele für mögliche Aufgabenformate sind Lückentexte, Schiebpuzzle und Zuordnungen zwischen Satzteilen zu nennen. In der Endversion werden insgesamt acht verschiedene Texte zu unterschiedlichen Themenbereichen eingesetzt (z. B. Zahlungsformen, Energieverbrauch, Großhandel). Bei der Auswahl der Texte wurde auf die bereits erwähnte Kombination zwischen kontinuierlichen und nicht-kontinuierlichen Texten geachtet. Zu jedem Aufgabentext werden dem Lernenden drei oder vier verschiedene Aufgabenformate angeboten. Weitere konzeptionelle Aufgaben lagen im Grobentwurf der Benutzeroberfläche (GUI) sowie der Benutzerverwaltung.

Innerhalb der Entwicklungsphase wurden die Texte und Aufgabenformate mit der Entwicklungsumgebung „Macromedia-Director" programmiert, wobei auf frühere Entwicklungen von Prof. Dr. Stein zurückgegriffen wurde [vgl. Stein, Blankenagel (2010)]. Dabei wurde während der formativen Evaluation durch Gespräche mit Ausbildern und Schülern verschiedene Änderungen innerhalb der Software vorgenommen (siehe auch Abschnitt „Evaluation der Software“ weiter unten).

Entwicklung des Tests zum mathematischen Textverständnis

Im Dissertationsprojekt des Verfassers wurde ein „Test zum mathematischen Textverständnis“ für Schüler aller Schulformen am Ende der Sekundarstufe I bzw. Schüler der berufsbildenden Schulen entwickelt. Der Test wurde nach der klassischen Testtheorie in zwei Pre-Testphasen und einer Haupttestphase konstruiert. Während der Itemselektion wurde der Testumfang von 30 Items auf insgesamt 18 Items in der Testendversion reduziert. Diese wurde knapp 3.000 Schülern aller Schulformen vorgelegt, um abschließend die Testgüte ermitteln zu können. Bzgl. der Testvalidität konnte mittels der probabilistischen Testtheorie die Gültigkeit des dichotomen Rasch-Modells und somit die Eindimensionalität des Testverfahrens nachgewiesen werden. Dieser Befund wurde desweiteren mittels einer Faktorenanalyse bestätigt. Zudem wurden bzgl. der Testgüte kriterienbezogene Validitätsbetrachtungen hinzugezogen. Die errechneten Validitätskoeffizienten der verschiedenen Außenkriterien (Wortschatztest, Zahlenfolgetest, CFT und LTB) lagen dabei allesamt im hervorragenden Bereich. Das Hauptgütekriterium der Reliabilität konnte mittels der Verfahren der Re-Test-Reliabilität, der Messung der inneren Konsistenz sowie der Testhalbierungs-Reliabilität ebenso mit guten bis sehr guten Reliabilitätskoeffizienten abgeprüft werden. Aufgrund der großen Stichprobenumfänge konnten schulstufen- und schulformabhängige Normtabellen angefertigt werden [vgl. Jordan (2011)].

Evaluation der Software

Die Software wurde sowohl formativ als auch summativ evaluiert. Die formative Evaluation erfolgte in zwei Schritten: einer Expertenevaluation und einer Zielgruppenevaluation. Dazu wurden innerhalb der Konzeptionsphase zunächst Gespräche mit Dozenten, Ausbildern und Lehrern verschiedener berufsbildender Institutionen geführt. Dabei wurden beispielsweise die verschiedenen Aufgabenformate bewertet, so dass einige ursprünglich geplante Aufgabenformate bereits im Vorfeld aussortiert wurden. Zudem erfolgten im Projekt-Team „Mathe-Meister“ und auch durch einige Masterarbeiten bzgl. der Texte, der ausgewählten Aufgabenformate und der Gestaltung der GUI weitere Evaluationsphasen. Die Zielgruppenevaluation fand ebenfalls formativ statt: dabei wurden zunächst der Einsatz der entwickelten Aufgabenformate getestet und später das gesamte Softwarepaket.

Nach Abschluss der CD-Entwicklung erfolgte schließlich eine Wirkungsanalyse zum Einsatz der Software (summative Evaluation). Die Software wurde dabei unter Anleitung von studentischen Hilfskräften bzw. Examenskandidaten zwei verschiedenen Lerngruppen zum Einsatz zur Verfügung gestellt.

Die erste Gruppe, die die Software über einen Zeitraum von einer Woche jeden Tag einige Stunden einsetzte, erzielte eine Steigerung von 5,33 Punkten im Vortest auf 7,08 Punkte im Nachtest. In Gruppe zwei war der Lernzuwachs etwas geringer: die Steigerung betrug hier lediglich einen Punkt. Diese Gruppe setzte die Software über einen Zeitraum von zwei Monaten einmal in der Woche für 1-2 Stunden ein. Die Kontrollgruppe (ohne Softwareeinsatz) erreichte im Nachtest 0,4 Punkte weniger als im Vortest.

Literatur

Grabe, A., Spanjardt, E. (2004): Arbeitstechniken fürs Textverständnis. Mühlheim: Verlag an der Ruhr.

Grundmann, H. (2009): Die lernschwachen Hauptschulabsolventen - die größte Herausforderung für die berufsbildenden Schulen?. In: Die berufsbildende Schule: Eine Zeitschrift des Bundesverbandes der Lehrerinnen und Lehrer an beruflichen Schulen. 61. Jg., Nr. 6, S. 183-189.

Jordan, R. (2011): Entwicklung und Validierung eines Testverfahrens zur Ermittlung der Lesekompetenz und des mathematischen Textverständnisses mit empirischer Untersuchung an allgemeinbildenden und berufsbildenden Schulen (Dissertation). Universität Münster.

Kirsch et al. (2002): Kirsch, I. S., De Jong, J., Lafontaine, D., McQueen, J., Mendelovits, J., & Monseur, C. (2002): Lesen kann dieWelt verändern – Leistung und Engagement im Ländervergleich – Ergebnisse von PISA 2000. Paris: OECD Publications.

Lehmann, R. H., Ivanov, S., Hunger, S., & Gänsfuß, R. (2005): ULME I: Untersuchung von Leistungen, Motivation und Einstellungen zu Beginn der beruflichen Ausbildung. Behörde für Bildung und Sport, Amt für berufliche Bildung und Weiterbildung.

OECD (1998): Grundqualifikationen, Wirtschaft und Gesellschaft: Ergebnisse der ersten internationalen Untersuchung von Grundqualifikationen Erwachsener. Paris: OECD Publishing.

Simon, Peter (2006): Texte erschließen 9/10. Berlin: Cornelsen Verlag.

Stein, M., Blankenagel, K (2010): Lern-CD zum Schulbuch Leonardo 4. Braunschweig: Diesterweg Verlag.

Werner JUNDT, Bern

Mathematische Beurteilungsumgebungen MBU: Mit kompetenzorientierten Aufgaben beurteilen und fördern

1. Fachkompetenz: Modelle

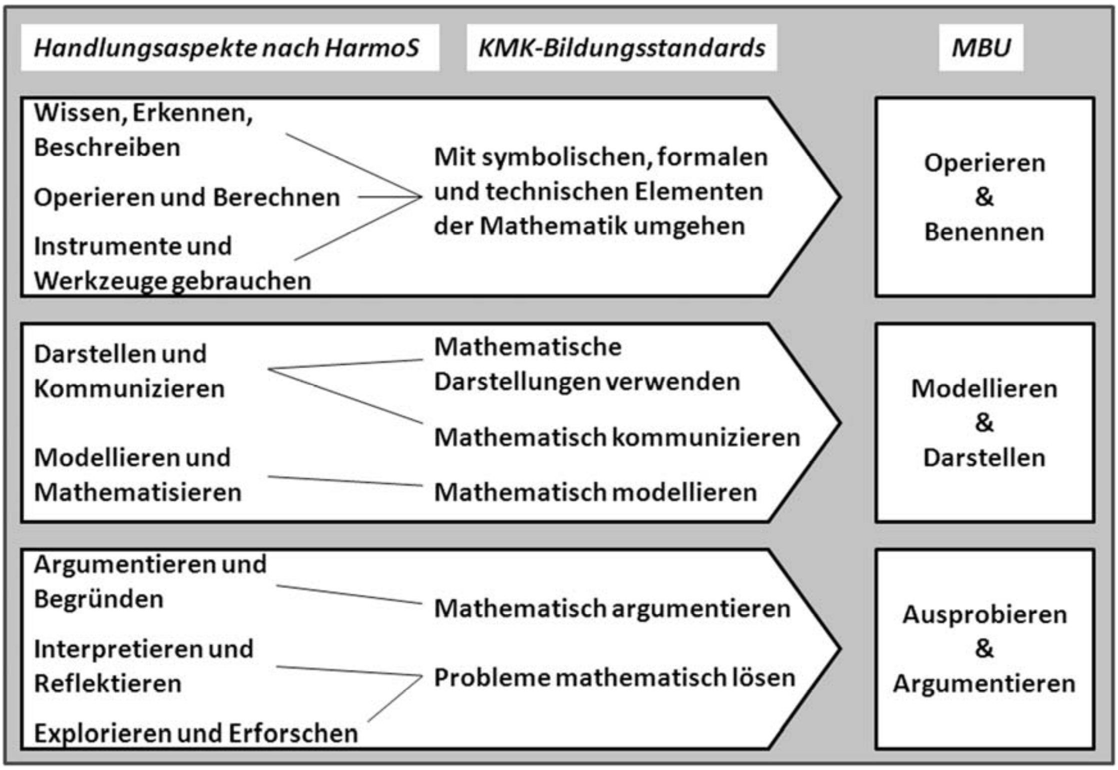
Unterricht hat zum Zweck, dass Schülerinnen und Schüler in einem Fach kompetent werden, also Fachwissen haben, über fachspezifische Fähigkeiten verfügen und mithilfe dieser Fähigkeiten ihr Fachwissen fruchtbar machen können und wollen.

Als Modell für Fachkompetenz – einem Komplex von Wissensstrukturen, Fähigkeiten und Verhaltensweisen – wählen wir ein dickes Bündel von Schnüren (obere Abbildung). Früher bezog sich der Mathematikunterricht nur auf einen schmalen Ausschnitt des Spektrums mathematischer Kompetenzen und dementsprechend eng war auch die Beurteilung. Im Zuge der Fachentwicklung der letzten Jahrzehnte und nicht zuletzt als Folge der Kompetenzdiskussion hat der Unterricht an Breite gewonnen. Die Beurteilung aber hat mit dieser Entwicklung nicht Schritt gehalten. Darum stehen wir heute vielerorts der in der unteren Abbildung dargestellten Situation gegenüber. Da die Beurteilung bekanntermaßen Unterricht und Lernen beeinflusst, machen viele Lehrpersonen so ihre Anstrengungen in Richtung eines kompetenzorientierten Unterrichts durch ihre enge Beurteilungspraxis zunichte.

Die Mathematischen Beurteilungsumgebungen (MBU) zielen auf eine Beurteilung, die besser auf einen zeitgemäßen Unterricht abgestimmt ist. Dazu gehört, dass das ganze Kompetenzspektrum abgedeckt wird. Als Referenz bieten sich die KMK-Bildungsstandards an oder die Kompetenzaspekte nach HarmoS. (HarmoS ist ein Konkordat der Schweizer Kantone zur Harmonisierung der Volksschule. Auf der Grundlage von HarmoS entsteht zurzeit der neue Deutschschweizer Lehrplan.) Während die KMK-

Standards das Kompetenzspektrum in sechs Teilbündel gliedern, sind es bei HarmoS deren acht. Erfahrungen mit dem aktuellen Beurteilungssystem

im Kanton Bern zeigen, dass die Akzeptanz bei den Lehrpersonen schon bei einer Gliederung in vier Teilkompetenzen nur noch gering ist. Darum gehen wir bei den MBU von einer Dreiteilung des Kompetenzspektrums aus. Diese gewinnen wir aus der Zuordnung von konkreten Aufgabenstellungen zu den beiden Modellen von KMK und HarmoS.



Operieren und Benennen: Abrufbare mentale und technische Fähigkeiten und Routinen einsetzen („Know-how“).

Modellieren und Darstellen: Sachverhalte formal aufbereiten, übertragen und der eigenen oder fremden Nutzung zugänglich machen.

Ausprobieren und Argumentieren: Sachverhalte experimentell oder theoretisch durchdringen und klären.

2. Zum Aufbau und Einsatz von MBU

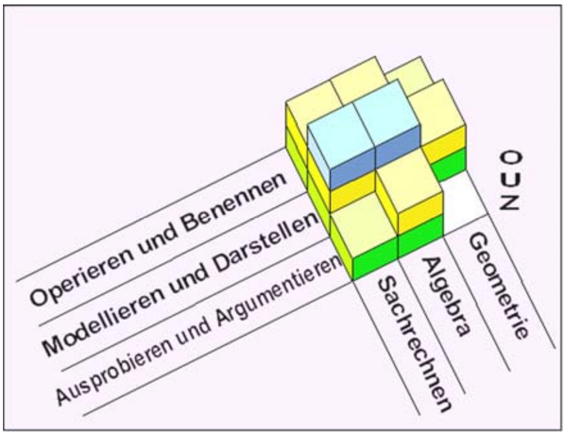
Eine MBU ist eine zweiseitige Lernumgebung zu einem Inhalt aus dem Sachrechnen, der Algebra oder der Geometrie. Die je fünf Teilaufgaben sind drei Leistungs-Erwartungsstufen zugeordnet und mit Erfüllungskriterien versehen. Die drei Erwartungsstufen sind:

- Z (grün)   Dieses Kriterium sollten alle Lernenden erfüllen. Es entspricht in der Regel einem gedanklichen Einstieg in die Problemstellung (Z für Zugang).
- U (gelb)   Eher einfache Kriterien, die von vielen Lernenden erfüllt werden können. (U1 und U2 bezeichnet eine Aufzählung, keine weitere Abstufung.)
- O (blau)   Anspruchsvolle Kriterien, die vorwiegend von leistungsstarken Lernenden erfüllt werden. (O1 und O2 bezeichnet eine Aufzählung, keine weitere Abstufung.)

Die in einer einzelnen MBU erfassten Leistungen lassen keine Einzelbeurteilung – etwa in Form einer Note – zu, da die Kriterien meist auf verschiedene Kompetenzaspekte verweisen. Ihre Bedeutung erhalten die Einzelergebnisse erst im Zusammenhang aller bearbeiteten MBU. Dazu werden sie in ein Sammelraster eingetragen.

....	Masse, Grössen, Daten und funktionale Zusammenhänge						Zahl und Variable										Form und Raum						
Sammelraster 8.Schuljahr	S1	S2	S3	S4	S5	S6	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
....	Zins	Schätzen, Überschlagen	Karten und Profile	Dichte	Bewegung	Häufigkeit	Gewöhnliche Brüche	Dezimalbrüche	Ganze Zahlen	Gleichungen	Zehnerpotenzen	Wurzeln	Binome multiplizieren	Formeln	Terme faktorisieren	Zahlenfolgen	Dreiecke und Trapeze	Satz des Pythagoras	Kreislinien	Orte im Dreieck	Kreisflächen	Prismen und Zylinder	Koordinaten
Operieren und Benennen	Z				Z				Z	Z	Z		Z	Z		Z	Z				Z	Z	
	U1			U1	U1				U1	U1			U1	U1					U1			U1	U1
													U2					U2	U2	U2	U2	U2	
										O1				O1					O1			O1	
									O2				O2					O2		O2			
Modellieren und Darstellen			Z	Z			Z	Z				Z							Z				
		U1	U1				U1	U1			U1	U1				U1							
			U2	U2	U2	U2	U2	U2				U2											U2
	O1	O1	O1	O1	O1		O1	O1			O1	O1				O1							O1
			O2	O2	O2	O2	O2														O2		
Ausprobieren und Argumentieren		Z				Z									Z			Z		Z			Z
						U1									U1		U1	U1		U1	U1		
	U2	U2							U2	U2	U2			U2	U2	U2	U2						
						O1			O1				O1		O1		O1	O1		O1	O1		
	O2	O2						O2		O2	O2	O2		O2	O2	O2	O2		O2			O2	O2

Für jede MBU sind in einer Spalte die fünf beurteilten Kriterien aufgeführt, eines auf Niveau Z, je zwei auf Niveau U und O. Die Lehrperson führt pro Schülerin und Schüler ein Rasterblatt, in welchem sie die erfüllten Kriterien (z.B. mit Markerstiften in den Farben grün, gelb, blau) markiert. Mit der Zeit entsteht in der Matrix der 3 Inhaltsbereiche und der 3 Kompetenzaspekt ein Farbbild, zu dem jede bearbeitete MBU 5 „Pixel" beiträgt.



Das verdichtete Farbbild ergibt zusammen mit den 3 Erwartungsstufen ein dreidimensionales Kompetenzprofil. Dieses gibt Auskunft über Stärken und Schwächen in den Teilkompetenzen wie auch bezüglich der inhaltlichen Bereiche. Die so komprimierte Information kann z.B. am Semesterende als Bestandteil des Beurteilungsmosaiks in eine Gesamtbeurteilung einfließen.

Die Reihe solcher Profile über einen größeren Zeitraum bringt die Kompetenzentwicklung eines Schülers oder einer Schülerin deutlich zum Ausdruck.

Unmittelbare Auswirkung der in einer MBU erbrachten Leistung sollte eine gezielte individuelle Förderung im Bereich von knapp oder teilweise erfüllten Kriterien sein. Dazu enthalten die Unterlagen aufgabenspezifische Förderhinweise.

Die gesammelten MBU, angereichert mit periodischen Reflexionen und Kompetenzprofilen, stellen wertvolle Teile eines Mathematikportfolios dar.

Die eingangs erwähnte Diskrepanz zwischen Unterricht und Beurteilung besteht nicht nur im Bereich der Kompetenzen. Die üblichen Beurteilungssituationen haben wenig mit dem normalen, auf Lernen angelegten Unterricht zu tun. Darum verbinden wir mit den MBU auch Vorstellungen der Durchführung, die sich klar von üblichen Klassenarbeiten unterscheiden. Ausführungen dazu, sowie weiterführende Angaben bezüglich der in diesem Abriss skizzierten Zusammenhänge sind im Grundlagenartikel in den MBU selber oder unter www.zahlenbu.ch zu finden.

Literatur

Jundt,W., Wälti,B. (2011): Mathematische Beurteilungsumgebungen. Bern: Schulverlag plus.

Steffen JUSKOWIAK, Braunschweig

Zur Erkundung selbstreflektorischer Aktivitäten beim Bearbeiten mathematischer Probleme – Vorläufige Befunde

Probleme lösen zu lernen ist seit langem ein wichtiges und anerkanntes Ziel von Mathematikunterricht. Die von Kilpatrick 1985 veröffentlichten Maßnahmengruppen zur Förderung der Problemlösefähigkeit lassen den Schluss zu, dass das Lernen von Problemlösen u. a. auch durch die Reflexion eigener Problemlösetätigkeiten möglich sein kann. Daraus leite ich die Vermutung ab, dass die Selbstreflexion evtl. geeignet zur Förderung der Problemlösefähigkeit von Schülern ist. Der hier verwendete Begriff der Selbstreflexion ist aus der Denkpsychologie entlehnt und wurde dort maßgeblich durch Dörner geprägt (vgl. z. B. Dörner 1994). Unter der Selbstreflexion wird dabei das Auseinandersetzen eines Problembearbeiters mit dem bisher selbst Getanem verstanden. Anhand des Zeitpunktes der Selbstreflexion lassen sich zunächst zwei Arten dieser unterscheiden: Die Selbstreflexion vor Abschluss der Problemlösebemühungen und die Selbstreflexion nach Abschluss der Problemlösebemühungen. Gegenstand der im Folgenden beschriebenen empirischen Erkundungen ist nur die erstgenannte Art von Selbstreflexion, also die Selbstreflexion, die noch einen Einfluss auf den aktuellen Problembearbeitungsprozess haben kann.

Bisher war diese Art von Selbstreflexion vor allem ein Forschungsgegenstand der Denkpsychologie, wobei überwiegend präskriptiv-normative Studien durchgeführt worden sind (vgl. z. B. TISDALE 1998), in denen insbesondere die Wirkung von Selbstreflexionstrainings untersucht wurde. Insgesamt lässt sich sowohl in der Denkpsychologie als auch in der Mathematikdidaktik ein Mangel an Deskription von nicht extern angeregten Selbstreflexionen hinsichtlich ihres Auftretens und ihrer Wirkung auf den Problembearbeitungsprozess ausmachen. Ich erachte gerade die Verringerung dieser Wissenslücke im Hinblick auf mögliche didaktische Schlussfolgerungen zur Förderung der Problemlösefähigkeit durch Selbstreflexion als unbedingt notwendig. Entsprechend führe ich im Rahmen meiner Promotion empirische Erkundungen zur nicht extern angeregten Selbstreflexion beim Bearbeiten mathematischer Probleme durch SchülerInnen durch. Die Ziele dieser empirischen Erkundungen sind dabei, zunächst das Verständnis für das Auftreten und die Wirkung solcher Selbstreflexionen zu erhöhen und davon ausgehend bestehende Modelle zum Problemlösen auszuweiten bzw. zu präzisieren. Am Ende dieses Forschungsprojektes können dann in einem dritten Schritt je nach Lage der Auswertungsergebnisse evtl. Anregungen zur Förderung der Problemlösefähigkeit durch Selbstreflexionen stehen.

Methodologie der eigenen empirischen Erkundungen

Auf der Modellebene dieser empirischen Erkundungen ordne ich die während eines Problembearbeitungsprozesses fakultativ auftretenden Selbstreflexionsszenen in dem von HEINRICH veröffentlichten Steuerungsschritt-Arbeitsschritt-Modell (vgl. HEINRICH 2004) den Steuerungsschritten zu, da ich Selbstreflexion zu den metakognitiven Verhaltensweisen zähle und die Steuerungsschritte Träger solcher Verhaltensweisen sind.

Auf der empirischen Ebene werden die Erkundungen zur Selbstreflexion mit OberstufenschülerInnen Braunschweiger Gymnasien durchgeführt. Bei einer Vorstudie geschah dies mit fünf Elf- und ZwölfklässlerInnen. In einer weiteren, größer angelegten Studie[i] konnten sechszehn ElfklässlerInnen für die Aufnahmen gewonnen werden. Die Probanden absolvierten während der Studien je fünf Problemlösesitzungen mit der Dauer von einer Zeitstunde. Als Probleme wurden dabei ausschließlich geometrische Beweisprobleme verwendet. Während der Problemlösesitzungen wurden die Probanden einzeln gefilmt. Während dieser Videoaufzeichnungen waren die alleine im Raum befindlichen Versuchspersonen aufgefordert, laut zu denken. Das so gewonnene Material wird hinsichtlich des beschrittenen Problembearbeitungsweges und der dabei aufgetretenen Selbstreflexionen mit Hilfe der Methode der konsensuellen Validierung (vgl. MAIER 1991) ausgewertet. Die Identifizierung von Selbstreflexionsszenen erfolgt dabei mit folgendem Arbeitsbegriff: „Selbstreflexion ist das Auseinandersetzen mit bisher Getanem beim Bearbeiten mathematischer Probleme vor Abschluss der Problemlösebemühungen."

Vorläufige Befunde aus einer Vorstudie

Bei der Auswertung der Aufnahmen zur erwähnten Vorstudie konnten im Zusammenhang mit zwei Masterarbeiten (vgl. GERLOF (2010) und RAPKAUSKAS (2010)) folgende vorläufige Befunde hinsichtlich der Auftretens und der Wirkung von Selbstreflexionsszenen erzielt werden:

Durch welche Ereignisse wird Selbstreflexion ausgelöst?

In der überwiegenden Anzahl der Selbstreflexionsszenen wurde ein Misserfolg der jeweiligen Versuchsperson in verschiedenen Ausprägungsformen als Auslöser von Selbstreflexionen identifiziert. Darüber hinaus konnten auch noch zwei weitere Arten von Auslösern identifiziert werden. Zum einen handelt es sich dabei um das „Gewinnen einer weiterführenden Erkenntnis" durch die Versuchsperson: Die Versuchsperson hat hier in einer

Rechnung während der Problembearbeitung eine weitere mögliche, vereinfachende Termumformung erkannt. Sie vollzog daraufhin ihr bisheriges Bearbeitungsvorgehen noch einmal nach, um diese neu erkannte Umformung an allen möglichen Stellen auszunutzen. Zum anderen konnte mehrmals der Auslöser „Kontrollbedürfnis“ identifiziert werden: Dabei führten die Versuchspersonen jeweils anspruchsvolle und teils unübersichtliche Rechnungen durch und entschlossen sich während dieser Rechnungen, ohne dass zuvor ein Fehler aufgetreten war, diese noch einmal hinsichtlich der Korrektheit der vorgenommenen Umformungen zu kontrollieren.

Welche Wirkung für die Zielerreichung hat Selbstreflexion?

Die Beantwortung dieser Forschungsfrage ist m. E. von besonderer Bedeutung für das Verständnis von und die evtl. Förderung der Problemlösefähigkeit durch Selbstreflexion. Von ihrer Beantwortung hängt es ab, ob es sinnvoll erscheint, dass Auftreten von Selbstreflexionen beim mathematischen Problemlösen zur Erhöhung der Problemlöseleistungen zu fördern oder nicht. Gleichzeitig handelt es sich hierbei aber auch um die am schwierigsten zu beantwortende Forschungsfrage. Entsprechend konnten von 18 anhand der Verbalisation identifizierten Selbstreflexionsszenen nur vier als eindeutig lösungsförderlich angesehen werden, während bei den restlichen 14 Szenen zunächst keine eindeutige Einschätzung möglich war. Keine der Szenen wurde vom Auswerterteam als hinderlich für die Zielerreichung angesehen. Aus diesen vorläufigen Erkundungsergebnissen lassen sich zunächst die beiden folgenden Schlüsse ziehen: Zum einen besteht, falls sich diese vorläufigen Ergebnisse im größeren Rahmen bestätigen, die begründete Vermutung, dass eine Förderung der Selbstreflexion bei Problembearbeitern keine negativen Auswirkungen haben kann. Zum anderen zeigt aber die große Anzahl der als zunächst nicht eindeutig beurteilbaren Selbstreflexionsszenen, dass es vor Beginn der Auswertung der Hauptstudie dringend notwendig ist, (konkrete) Kriterien zur Beurteilung der Lösungsförderlichkeit bzw. Lösungshinderlichkeit von Selbstreflexionen zu erarbeiten.

Welche Aspekte des Problembearbeitungsprozesses sind Gegenstand von Selbstreflexionen?

Bei der Beurteilung der identifizierten Selbstreflexionen hinsichtlich dieser Forschungsfrage hat sich gezeigt, dass bei dem überwiegenden Teil der Szenen (16 von 18) mathematische Fertigkeiten bzw. mathematisches Wissen im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen, während nur bei den verbleibenden beiden Szenen strategisch-heuristische Momente betrachtet worden sind. Dies deutet darauf hin, dass es sinnvoll sein kann, SchülerInnen für die Betrachtung ihres eigenen strategischen Vorgehens zu sensibilisieren.

Gibt es verschiedenen Selbstreflexionstypen?

Bei der Auswertung des vorliegenden empirischen Materials ist eine sehr unterschiedliche Verteilung der Selbstreflexionsszenen auf die einzelnen Versuchspersonen deutlich geworden. Während eine der Versuchspersonen während der Problembearbeitung häufig selbstreflektierte, konnten bei zwei anderen Versuchspersonen nur jeweils sehr wenige anhand der Verbalisation erkennbare Selbstreflexionsszenen identifiziert werden. Bei zwei weiteren Versuchspersonen konnten keine Selbstreflexionen erkannt werden. Es liegt daher nahe, die Ausprägung der Selbstreflexion hinsichtlich deren (anhand der Verbalisation erkennbaren) Häufigkeit als von der Persönlichkeit abhängig zu betrachten. Desweiteren besteht die Vermutung, dass das Auftreten von Selbstreflexionen darüber hinaus auch stark situationsabhängig ist.[ii] Die bisherigen Erkundungsergebnisse lassen zunächst den Schluss zu, dass auch zur evtl. möglichen Förderung der Problemlösefähigkeit durch Selbstreflexion auf Grund der Persönlichkeitsausprägung individuelle Lernangebote notwendig sind.

Literatur

Dörner, D. (1994): Selbstreflexion und Handlungsregulation: Die physischen Mechanismen und ihre Bedingungen. In: Lübbe, W.: Kausalität und Zurechnung – über Verantwortung in komplexen kulturellen Prozessen. Berlin: De Gruyter.

Gerlof, B. (2010). Empirische Erkundungen zu selbstreflektorischen Aktivitäten beim Bearbeiten mathematischer Probleme. Technische Universität Braunschweig.

Heinrich, F. (2004). Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme. Hamburg: Dr. Kovac.

Kilpatrick, J. (1985): A Retrospective Account of the Past 25 Years on Teaching Mathematical Problem Solving. In: Silver, E.A. (Ed.): Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives (S. 1 – 15). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Maier, H. (1991). Interpretative Forschung im Bereich der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1991 (S. 97 – 107). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Rapkauskas, A. (2010). Selbstreflexionsphänomene beim Bearbeiten mathematischer Probleme. Technische Universität Braunschweig.

Tisdale, T. (1998): Selbstreflexion, Bewusstsein und Handlungsregulation. Weinheim: Psychologie Verlags Union.

---

[i] Die Durchführung dieser Studie wird vom „Braunschweigischen Hochschulbund“ dankenswerterweise finanziell unterstützt.

[ii] ZIMMERMANN schlug in einem Gespräch außerdem vor, die Häufigkeit der selbstreflektorischen Aktivitäten der jeweiligen Versuchsperson mit der Häufigkeit des lauten Denkens in Verhältnis zusetzen und erwartete dabei eine hohe Korrelation.

Rainer KAENDERS, Köln; Reinhard SCHMIDT, Engelskirchen

Beispiele, Perspektiven und Fragen zur Förderung mathematischer Begriffsentwicklung durch GeoGebra

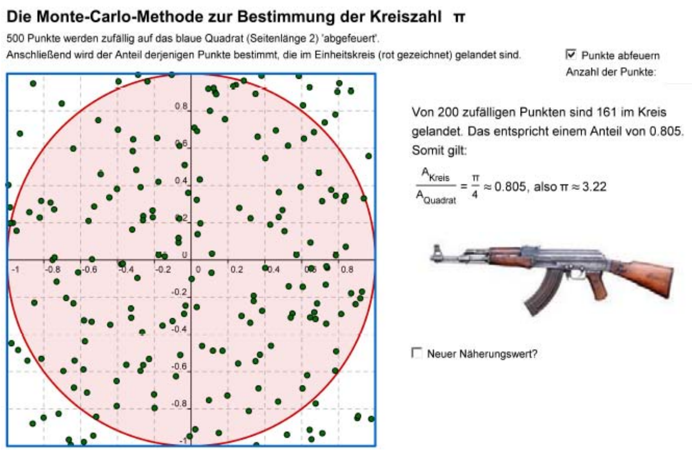
Die dynamische Geometrie Software GeoGebra kann auf vielfältige Weise im Unterricht eingesetzt werden und damit die Begriffsentwicklung auf verschiedenen Niveaus fördern. In diesem Beitrag werden Alltagsbeispiele in Hinblick auf ihren möglichen Beitrag zur *mathematischen Bewusstheit*[1] (Kaenders & Kvasz, 2010) der Lernenden diskutiert. Diese Perspektive erlaubt die Einordnung der Beispiele je nach angestrebter Qualität der mathematischen Bewusstheit, so dass neben hilfreichen Einsatzmöglichkeiten auch Fragen über den förderlichen Einsatz der Software ins Blickfeld rücken. Diese Überlegungen und Fragen sollen zur Schärfung eines Profils des neu gegründeten GeoGebra Instituts Köln/Bonn (http://koeln.geogebra-institut.de) beitragen.

1. Einstiegsbeispiele

Was leistet GeoGebra für einen guten (Mathematik-)Unterricht? Wir betrachten drei Beispiele aus der unendlichen Fülle von GeoGebra-Applets:

Ein Klassiker ist die Illustration der Aussage ‚Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt' mit Hilfe dynamischer Geometrie. Eine solche Veranschaulichung ist einprägsam und überzeugend, unterdrückt jedoch häufig eher das Beweisbedürfnis als dass sie es fördert.

Applets zur Monte-Carlo-Methode sind ebenfalls repräsentativ für eine Reihe von Applets, die mathematische Sachverhalte ansprechend illustrieren. Erstaunlich ist dabei weniger, dass man mit der Monte-Carlo-Methode π annähern kann als vielmehr die schlechte Qualität dieser Näherung.



[1] Im Englischen ist dies ‚mathematical awareness'. In der angegebenen Veröffentlichung wurde das Begriffssystem noch mit ‚mathematisches Bewusstsein' übersetzt. Um eine mögliche Nähe zu Esoterik, verschiedensten Ideologien und bestimmten Bereichen der Psychologie zu vermeiden, haben wir uns für ‚mathematische Bewusstheit' entschieden.

Auch das Newtonverfahren lässt sich gut mit GeoGebra realisieren. Dabei kann mit Hilfe von GeoGebra der Zusammenhang zwischen dem Algorithmus und der Geometrie deutlich gemacht werden. Es bietet Gelegenheit experimentelle Erfahrungen mit der Approximation von Nullstellen zu bekommen und kann Anlass für weitere Fragestellungen sein.

Alle drei Applets gewährleisten, dass die SchülerInnen durch die Visualisierung mathematischer Sachverhalte und Verfahren mathematische Phänomene wahrnehmen. Die technischen Möglichkeiten von GeoGebra sind in dieser Hinsicht nahezu unbegrenzt - das alles ist wunderbar!

Aber was kann ein Programm wie GeoGebra in Hinblick auf mathematische Erkenntnisprozesse leisten?

2. Mathematische Bewusstheit

Was sind mögliche Qualitäten des Mathematikverständnisses der SchülerInnen? Eine Perspektive hierauf bietet das Begriffssystem der mathematischen Bewusstheit (Kaenders & Kvasz, 2010). Ganz bewusst unterscheiden wir die Bewusstheit eines Menschen von seinen Kompetenzen. Dafür gibt es viele gute Gründe, von denen Caleb Gattegnos einen ausdrückte durch: *Only awareness is educable in man!*

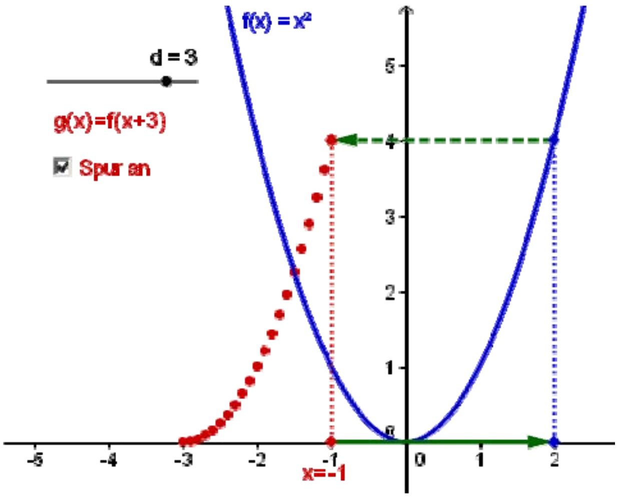
Zur Beschreibung mathematischer Bewusstheit werden verschiedene Qualitäten solcher Bewusstheit unterschieden: soziale, imitative, manipulative, instrumentelle, diagrammatische, intuitive, experimentelle, strategische, kontextuelle, argumentative, logische, theoretische Bewusstheit.

In unserem GeoGebra-Institut haben wir diskutiert, welche Beispiele für GeoGebra-Workshops geeignet sind und sind u.a. auf die Frage gestoßen, welchen Beitrag zur Begriffsentwicklung etwa eine Parabel mit Funktionsvorschrift $f(x)$, die per Schieberegler hin und her bewegt werden kann, leistet. Die dahinterstehende Frage ist: Wie sieht etwa der Graph zur Funktionsvorschrift $g(x)=f(x+3)$ aus? In (Kaenders et al., 2011) wurde dieses Beispiel schon vorher ausführlich und allgemeiner diskutiert.

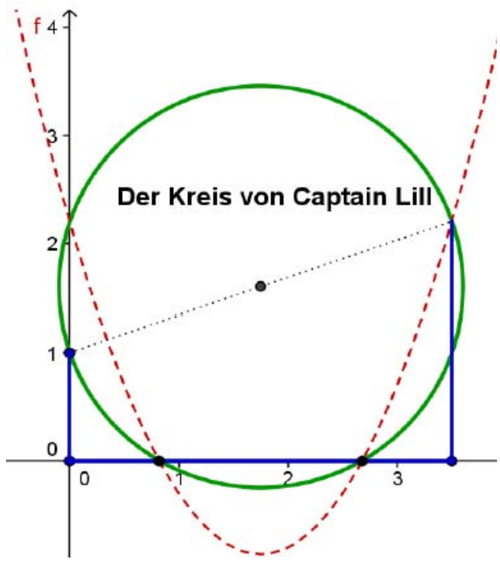
Diese Verschiebung des Graphen kann schlicht auf dem Niveau des Programms verstanden werden: Das Verschieben verursacht bei GeoGebra eine zu beobachtende Veränderung der Funktionsvorschrift (instrumentelle Bewusstheit). Die Schüler können mit verschiedenen Variablensubstitutionen und Verschiebungen experimentieren (experimentelle Bewusstheit). Wird durch eine Variablensubstitution eine bestimmte Verschiebung des Graphen intendiert, entsteht eine Strategie, wie dies zu bewerkstelligen ist (strategische Bewusstheit).

Zur Begriffsentwicklung liefert dies jedoch nur einen beschränkten Beitrag: Die SchülerInnen können über die Beobachtungen reden und der Zusammenhang zwischen Verschiebung und Variablensubstitution kann am Computer *nachvollzogen* werden (soziale und imitative Bewusstheit). Die Intuition '+*3*' ist '3 nach rechts' wird durch diese Variablensubstitution auf die Probe gestellt (intuitive Bewusstheit). Durch ein solches Schiebregler-Applet wird jedoch nicht deutlich, dass man mit einer Substitution $x'=x+3$ einen Punkt $(x-3, f(x))$ in der Ebene zu einem Punkt $(x', f(x'+3))$ umrechnen kann (manipulative Bewusstheit). Die Variablensubstitution wird nicht als Element in einem logischen Rahmen deutlich (logische Bewusstheit) und auch wird nicht deutlich, in welchem Rahmen die Verschiebung eines Graphen ein sinnvoller Begriff ist (theoretische Bewusstheit).

Alternativ zum bloßen Verschieben der Parabel per Schieberegler können wir uns den Sachverhalt in einem Kontext klarmachen: etwa mit Hilfe von Weg-Zeit-Diagrammen zweier Motorradfahrer, die im Abstand von 3 Minuten starten (kontextuelle Bewusstheit). Dies lässt sich leicht mit GeoGebra realisieren.



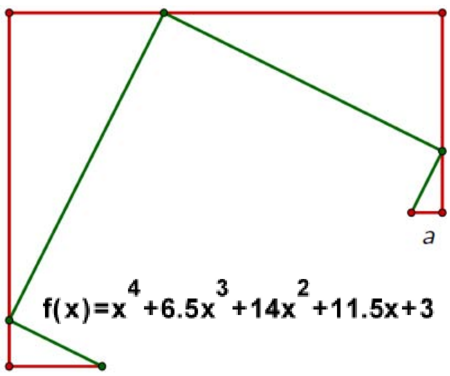
Wir können uns auch argumentativ dieses Zusammenhangs bewusst sein, wenn wir uns beispielsweise vorstellen, dass zur Berechnung von $g(x)$ die Funktionswerte von f jeweils drei Einheiten rechts von x *abgeholt* werden (argumentative und diagrammatische Bewusstheit). Schließlich können wir uns vergegenwärtigen, dass es sich eigentlich um eine Verschiebung des Koordinatensystems handelt, die im Rahmen der Bewegungen der Ebene logisch verstanden werden kann (logische Bewusstheit).



3. Captain Lills Entdeckungen

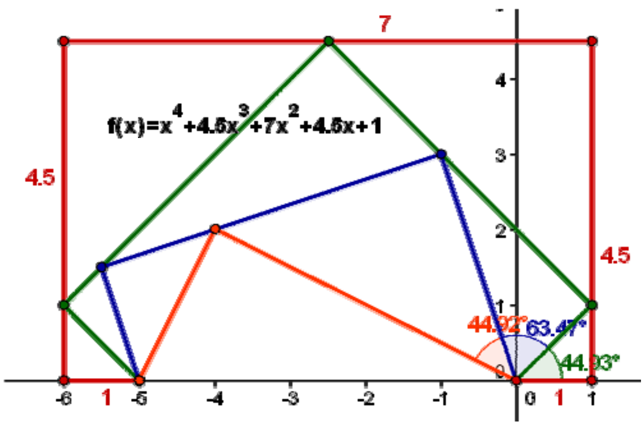
Ein GeoGebra-Applet zum Kreis von Captain Lill (Nullstellenbestimmung bei quadratischen Funktionen) kann als Katalysator vielfältiger mathematischer Tätigkeiten eingesetzt werden, und mathematische Bewusstheit wird in sehr unterschiedlichen Qualitäten gefördert.

Ausgehend von der Beobachtung eines Einzelfalls regt das Applet die SchülerInnen dazu an, Vermutungen über die Verallgemeinerbarkeit ihrer



Beobachtung anzustellen. Diese Beobachtungen lassen sich auf sehr unterschiedlichen Wegen begründen, und in Abhängigkeit von diesen Begründungen können unterschiedliche Qualitäten der mathematischen Bewusstheit entstehen: Durch dieses Applet entstehen: imitative, instrumentelle, diagrammatische, intuitive, experimentelle, kontextuelle, argumentative Bewusstheit. Je nachdem, wie das Applet verwendet wird, kann auch strategische, manipulative und theoretische Bewusstheit erzeugt werden.

Die Methode von Lill bietet eine Vielzahl weiterer spanneder Forschungsanlässe. Die Methode lässt sich auf Polynome beliebigen Grades verallgemeinern und liefert schließlich sogar die Linearfaktorzerlegung von Polynomen (siehe Kalman, 2008).



4. Fragen und Diskussion

GeoGebra ist ein kraftvolles Instrument zur Förderung verschiedenster Qualitäten mathematischer Bewusstheit. Eine besondere Herausforderung besteht darin, GeoGebra so einzusetzen, dass die SchülerInnen mehr lernen, mehr selbst entdecken, mehr selbst vermuten, mehr selbst argumentieren, mehr selbst Theorie bilden, mehr selbst beweisen wollen und können.

Das GeoGebra Institut Köln/Bonn hat es sich zum Ziel gesetzt, dass die SchülerInnen mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen.

Literatur

Kaenders, R.H., Kvasz, L. (2010): Mathematisches Bewusstsein. In K. Lengnink & al. (Hrsg.): Mathematik verstehen - philosophische und didaktische Perspektiven. Siegen, Vieweg.

Kaenders, R.H., Kvasz, L., Weiss-Pidstrygach, Y. (2011): Recovering Mathematical Awareness by linguistic Analysis of Variable Substitution, CERME 7, Rzeszów.

Kalman D. (2008): Polynomia and Related Realms, Math. Association of America.

Gert KADUNZ, Klagenfurt

Sagen und Zeigen

Arbeiten zur Verwendung von Semiotik in der Mathematikdidaktik behandeln auch die Bedeutung des Visuellen für das Lernen von Mathematik. Beispielhaft sei auf Arbeiten unter dem Titel des diagrammatischen Denkens verwiesen (vgl. Dörfler, 2006; Kadunz, 2006). Dort wird über die Bedeutung von Diagrammen zur Gewinnung neuen mathematischen Wissens berichtet. Dieser diagrammatischen Verwendung des Visuellen kann ein weiterer Verwendungsaspekt zur Seite gestellt werden, nämlich das Zeigen (das Deiktische) beim Lernen von Mathematik, das von unterschiedlichen Positionen aus betrachtet wird. So untersucht beispielsweise Melanie Huth (vgl. Huth in diesem Sammelband) von kognitionspsychologisch – semiotischer Seite dieses Phänomen. Eine andere Verwendung des Wortes Index findet sich in aktuellen Überlegungen von Willi Dörfler (vgl. Dörfler in diesem Sammelband). Mein Beitrag stellt nun eine ergänzende Sichtweise dar, wobei in den nachfolgenden Ausführungen das Zeigen oder besser die Bedeutung des Zeigens von drei Positionen aus skizzenhaft beleuchtet wird. Einführend berichtet mein Text knapp vom Zeigen aus semiotischer Sicht. Ein kulturwissenschaftlicher Ansatz zeigt dann die Entwicklung der Bedeutung des Zeigens in der Tradition des abendländischen Denkens. Zuletzt wird ein linguistisch orientierter Blick auf das Zeigen geworfen. Eine Illustrierung der vorgelegten Überlegungen durch videobasierte Daten, wie es im Rahmen eines Vortrages auf der Bundestagung in Freiburg geschah und wo auch das Verhältnis von Sagen und Zeigen exemplarisch vorgestellt wurde, ist aus Platzgründen leider nicht möglich.

1. Eine semiotische Position

Nimmt man diesen Standpunkt ein – hier im speziellen die Semiotik des C.S. Peirce – so sehen wir bei Peirce das „zeigende Zeichen“ als Index in der berühmten Dreiteilung Ikon, Index und Symbol. Kriterium für Peirce in seiner Einteilung der Zeichen ist die Beziehung zwischen Zeichen und Bezeichnetem. Ist nun ein Zeichen ein indexikalisches Zeichen (ein Zeichen wird als Index verwendet), so besteht im Sinne dieses Gebrauchs zwischen Zeichen und Bezeichnetem eine unmittelbare Beziehung. Die Deutung dieser Beziehung ist allerdings nicht reflektierend, sondern unmittelbar reagierend. „Der Index ist mit seinem Objekt physisch verbunden“ (vgl. Nöth, 2000, S.185). Dieses Objekt ist bei indexikalischer Zeichenverwendung ein einzelnes individuelles Objekt. Ein Index lenkt unsere Aufmerksamkeit, er vermittelt aber vorerst keine neue Einsicht. Als Beispiele seien genannt: Spuren, der berühmte Wetterhahn, Rauch oder einfach ein Richtungspfeil.

Solchen gleichsam natürlichen Indizes stellt Peirce Indizes zur Seite, die man als „künstlich“ bezeichnen kann. So sind etwa Beschriftungen in geometrischen Konstruktionen Indizes, welche auf Strecken, Geraden etc. verweisen. Die Sprache selbst enthält in diesem Sinne eine Reihe von möglichen Indizes. Das sind jene Worte, die unmittelbar auf etwas hinweisen. „Hier“, „dort“ sind Worte der deutschen Sprache, die indexikalisch verwendet werden können. Es wäre nicht der Ansatz von Peirce, wenn die eben genannte Sicht auf Indizes nicht noch verfeinert werden könnte. Ich notiere dies, da sich Peirce hier um die Beschreibung der Entstehung neuen Wissens bemüht. Peirce unterscheidet genuine von degenerierten Indizes (vgl. Nöth, 2000, S.186f). Genuine Indizes stehen mit dem bezeichneten Objekt in „existenzieller“ Beziehung. So können etwa physikalische Kausalitätsbeziehungen (natürliche Anzeichen) zur Entdeckung neuer Tatsachen führen. Die Betrachtung des Wetterhahns zeigt nicht nur, dass sich der Wind gedreht hat, sondern lässt auch den Schluss auf die Richtung des Windes zu. Notwendig für eine solche Erkenntnis ist die Vertrautheit mit der Beziehung zwischen einem genuin verwendetem Index und dem von ihm bezeichneten Phänomen (vgl. Nöth, 2000, S.187).

2. Eine kulturwissenschaftliche Position

In der Publikation „Das Zeigen der Bilder“ (vgl. Boehm, 2010) betrachtet Gottfried Boehm das Phänomen des Zeigens aus kulturwissenschaftlicher Sicht. Einen historischen Ausblick stellt er an den Beginn seiner Überlegungen. Paraphrasieren wir ihn. Das Zeigen lag in der abendländischen Tradition des Denkens nicht im Mittelpunkt des wissenschaftlichen Interesses. Nun aber, hervorgerufen durch das Bemühen um Medien und Bild, erwacht dieses Interesse. Um dies zu erläutern, untersucht Boehm die Wechselwirkung zwischen den Kapazitäten des Ikonischen mit der Logik des Zeigens. Insofern versucht er, ein neues Kapitel des Deiktischen zu schreiben. In der Philosophie des 20. Jahrhunderts ist beispielhaft Ludwig Wittgenstein zu nennen, der sich mit dem Verhältnis von Sagen und Zeigen in seinem Frühwerk Tractatus beschäftigt hat. Ich verweise in diesem Fall auf die anregenden Ausführungen von Gunter Gebauer (vgl. Gebauer, 2010). Ein erfolgreicher Zugang zum Phänomen des Zeigens stellt die Untersuchung der Voraussetzungen und Bedingungen von Sprache dar. Insofern kann auf diesem Wege das Vermögen des Zeigens in Augenmerk genommen werden. Dies insofern, da durch die Betrachtung dieses Zeigevermögens eine formale Sicht auf Sprache durch eine Anbindung an Lebenszusammenhänge ergänzt wird. Darauf hat der Philosoph Martin Heidegger zu Beginn des 20. Jahrhunderts hingewiesen (vgl. Boehm, 2010, S.18). Wenige Jahrzehnte später war es Karl Bühler, der den Zusammenhang von Sprache und Zeigen explizierte. Auf Bühler aufbauend entstand in Folge eine konstruktive Sprachkritik, die auch Stimulus, Gebärde und Körper umfasste. Was nun die Mathematik betrifft, so gilt nach wie vor das berühmte quod erat demonstrandum. Es ist diese Zeigeformel, die zumindest seit Euklid darauf hinweist, dass in einem Beweis uns etwas gezeigt werden möchte. Einen weiteren Hinweis führt Boehm an. Auch bei Plato finden sich an ausgewählten Stellen Ausführungen über die erfolgreiche Verwendung des Zeigens. Erinnern wir uns an den Menon Dialog, in welchem ein Lernender durch das Zeigen des Lehrers aber auch durch ein sich selbst zeigen neues Wissen konstruierte. Dass dabei auf die Schau allgemeingültiger Ideen Bezug genommen wurde, ist in unserem Zusammenhang von geringer Relevanz. Trotzdem, so Boehm, blieb das Zeigen über einen langen Zeitraum ein gleichsam schwacher Begriff. Erst die oben erwähnte konstruktive Sprachkritik Bühlers ermöglichte neue Blicke auf das Deiktische, das, so Boehm, eine Leistung des bildlichen Sinnes ist. Diesem konstatierten theoretischen Desinteresse steht gleichzeitig die alltägliche Kultur des Zeigens gegenüber. In der Rede ist das Zeigen eine (vorsprachliche) Basis der Artikulation. Blick, Mimik, Stimme und Geste bestimmen die gesprochene Rede wesentlich mit. Dies lenkt unsere Deutung des Gesprochenen mit. Wobei dieses „Deuten“, so Boehm, schon selbst eine hinweisende Komponente im Sinne von „hindeuten“ besitzt. Davon sind auch die Handlungen von Lernenden bestimmt. Woraus schöpft nun das Zeigen sein Kraft? Sei es im Zeigen auf ein Gegenüber, sei es, dass man sich etwas in einer Konfiguration selbst zeigt, zeigen lebt, so Boehm, von der Auffälligkeit der Dinge. Ich betone die Zusammenführung dieser beiden Komponenten, des Zeigens und der Dinge. Zeigen und damit die Konstruktion von Auffälligkeit, die letztlich auch eine Lenkung der Aufmerksamkeit ist, bedarf des sinnlich Gegebenen. Im Falle der Mathematik sind diese „Dinge“ oft in Gestalt von Inskriptionen gegeben. Dieser Hinweis auf die Bedeutung von Geschriebenem im weitesten Sinne führt mich nun zur dritten der oben erwähnten Positionen.

3. Eine linguistische Position

Sybille Krämer hat in ihrer Publikation „Zur Kinästhesie der verkörperten Sprache“ (vgl. Krämer, 2004) Überlegungen zur Schriftbildlichkeit von Sprache (vgl. Krämer, 2003) fortgesetzt. Im Zentrum ihrer Bemühungen steht das Aufzeigen der Körpergebundenheit von Sprache. Dabei ortet Krämer den Gebrauch von Sprache im Übergang von Sagen und Zeigen. Insofern ist Sprache durch diskursive Anstrengungen alleine nicht beschreibbar. Das Zeigen ist wesentlicher Bestandteil des Sprechens. „Wo auch immer Sprache etwas sagt, zeigt sie auch.“ (Krämer, 2004, S.348).

Ein solches Zeigen entsteht in allen Teilen des Sprachvollzugs. Es lässt sich nicht unmittelbar in Geschriebenes transformieren. Wie oben schon erwähnt, zählt auch Krämer zu diesem nicht Schreibbaren Tonfall, Sprachrhythmus, Mimik und auch Gestik. Insofern besitzt Sprache auch eine physiognomische Dimension, insofern also einen Überschuss, der didaktischen Ertrag liefern kann. Brian Rotman, den Krämer als Befürworter der eben genannten Sicht auf Sprache präsentiert, untersucht in „Virtualisierung der Sprache“ (nach Krämer 2004: Rotman, 2001) die Bedeutung der Entwicklung des Alphabets für das Sprachverständnis. Das lautlich gesprochene Wort und die Gebärde besitzen einen Zusammenhang wie Sagen und Zeigen. Aus dem Zusammenspiel entsteht Sprache. Es war das Aufkommen des Alphabets, so Rotman, welches die ikonisch gestische präsentierende Seite des Sprachvollzugs der symbolisch repräsentierenden Seite unterordnete.

Was kann aus diesen kurzen Skizzen für die Mathematikdidaktik gefolgert werden? Es lassen sich Argumente ableiten, Untersuchungen von Zeigehandlungen bei Lernenden anzustellen. Die Betrachtung des Zeigens im Kielwasser der Betrachtung von Diagrammen könnte Hinweise auf Konstruktion und Gebrauch von visuell wahrnehmbaren Mitteln zum Lernen von Mathematik geben. Wie sich dabei die Mathematik dem Lernenden zeigt, um abschließend nochmals Wittgenstein zu verwenden, ist eine lohnenswerte Fragestellung.

Literatur

Boehm, G. (2010). Das Zeigen der Bilder. In G. Boehm, S. Egenhofer & C. Spies (Hrsg.), *Zeigen. Die Rhetorik des Sichtbaren* (S. 18-53). München: Wilhelm Fink.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 27*(3/4), 200-219.

Gebauer, G. (2010). Sich-Zeigen und Sehen als. Wittgensteins zwei Bildkonzepte. In G. Boehm, S. Egenhofer & C. Spies (Hrsg.), *Zeigen. Die Rhetorik des Sichtbaren* (S. 74-89). München: Wilhelm Fink.

Kadunz, G. (2006). Schrift und Diagramm: Mittel beim Lernen von Mathematik. *Journal für Didaktik der Mathematik, 27*(3/4), 220-239.

Krämer, S. (2004). Zur Kinästhesie der verkörperten Sprache. In C. Lechtermann & C. Morsch (Hrsg.), *Kunst der Bewegung* (S. 343-355). Bern: Peter Lang.

Krämer, S., & Bredekamp, H. (Hrsg.). (2003). *Bild, Schrift, Zahl*. München: Wilhelm Fink Verlag.

Rotman, B. (2001). Der alphabetische Körper. *Archiv für Mediengeschichte, 1*, 125-141.

Hansruedi KAISER, Zollikofen bei Bern

Prozentrechnen in der Berufsbildung: Kann man Lernende überhaupt darauf vorbereiten?

1. Das Problem

Rechnen mit Prozentangaben spielt in vielen Berufen eine Rolle. Prozentangaben werden dabei ganz unterschiedlich eingesetzt. Das gängige Bild – 100% steht für das ‚Ganze', Angaben wie ‚70%' spezifizieren einen Teil daraus – ist dabei oft nicht anwendbar.

Manche Berufe gehen dabei sehr „kreativ" mit der Verwendung von Prozentwerten um. Die Schreiner beispielsweise umschreiben den „Verlust" bei der Herstellung eines Brettes, d.h. die Menge Holz, die weggehobelt werden muss, in Prozent des Gewichts des fertigen Brettes. Das kann auch einmal zu „150% Verlust" führen. Und bei den Bäckern werden in einem professionellen Brotrezept die einzelnen Zutaten in Prozent der Mehlmenge angegeben. Hier sind weder die 100% Mehl in irgendeiner sinnvollen Interpretation das „Ganze", noch sind die 76% Wasser in irgendeiner Form Teil des Mehls. Entsprechend grosse Schwierigkeiten haben Lernende, wenn sie zum ersten Mal mit diesen „Bäckerprozenten" konfrontiert werden. Weitere Beispiele lassen sich in der Küche, auf dem Bau, am Zoll etc. finden.

2. Vertikaler Transfer

Die Frage stellt sich, wie die Schule die Lernenden auf diese Vielfalt von Verwendungen vorbereiten könnte. Es liegt nahe, sich zu wünschen, dass die Lernenden ein allgemeines, flexibles Schema wie „Grundwert/Prozentwert/Prozentsatz" erweben, welches sie dann auf die verschiedenen konkreten Situationen in den einzelnen Berufen anwenden können. Ein solcher Wunsch ist aber mit zwei Problemen konfrontiert:

Erstens: Stark von der konkreten Anwendungssituation abstrahierte Schemata sind im konkreten Berufsalltag nicht besonders nützlich. Sie enthalten beispielweise keine Informationen darüber, in welchem Bereich sich plausible Resultate einer Berechnung bewegen werden. Beim Bild „Teil/Ganzes" – sofern es denn anwendbar ist – kann man erwarten, dass der Teil immer kleiner als das Ganze sein wird und dass sich Prozentsätze zwischen 0% und 100% bewegen. Das abstrakte Schema „Grundwert/Prozentwert/Prozentsatz" lässt keine Abschätzungen dieser Art zu. Entsprechend denken Berufsleute nicht in solch abstrakten Konzepten sondern in Bildern, die viel näher an der konkreten Anwendungssituation sind („situated abstraction", Noss & Hoyles, 1996). So wird das Mehl im Denken des Bäckers nicht zum „Grundwert“, sondern es bleibt eine bestimmte, allerdings variable Menge Mehl. Und der Wasseranteil wird nicht zum Prozentsatz, sondern bleibt ein Verhältnis zwischen Mehl und Wasser, das nur innerhalb relativ enger Grenzen variieren kann.

Zweitens: Es ist überhaupt nicht sicher, ob Lernende solch abstrakte und flexibel einsetzbare Schemata aufbauen können. Vieles deutet darauf hin, dass Wissen situationsgebunden ist und nicht so einfach aus der konkreten Anwendungssituation heraus gelöst werden kann (z.B. Bauersfeld 1983, Greeno et al. 1993, Lakof & Núñez 2000). Dass Lernende Abstraktionen bilden, welche über eine „situated abstraction“ hinausgehen, wäre dann zwar ein wünschbares Ziel, aber leider ein nicht erfüllbarer Wunsch. Jedenfalls lässt die leidvolle Erfahrung vieler Generation von Lehrenden an Berufsschulen vermuten, dass zumindest die Lernenden, welche nicht ins Gymnasium sondern in die Berufsbildung gehen, grosse Mühe haben mit einem derartigen „vertikalen“ Transfer (zuerst kontextfreie Abstraktion, dann Anwendung in neuem Kontext).

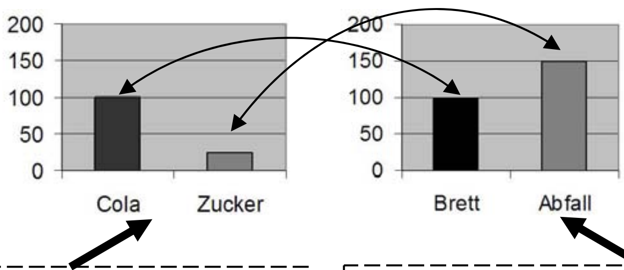
3. Horizontaler Transfer

Aktuell dürfte es so sein, dass viele Lernende im Rahmen der Berufsbildung bezogen auf ihre berufsspezifische Anwendungssituation das „Prozentrechnen“ neu lernen, ohne viel vom in den vorangegangenen Schuljahren Gelernten zu profitieren. Daher auch die nun schon mindestens hundert Jahre anhaltende Klage der Berufsschullehrenden, dass ihre Lernenden nicht (mehr) rechnen können (Lörcher, 1985). Die Frage drängt sich auf, ob die Lernenden dabei nicht durch eine andere Form des Transfers, durch eine Art „horizontaler“ Transfer (Beach 1999), unterstützen könnte, welcher ohne kontextfreie Abstraktion auskommt.

Ein solcher Transfer findet in engem Rahmen immer wieder statt. Ein Bäcker etwa wird, wenn er ein neues Brotrezept vor sich hat, nicht das Konzept eines Grundwertes, einer Referenzgrösse „anwenden“, um die benötigte Menge Wasser zu berechnen. Vielmehr erinnert er sich daran, dass er bei der Herstellung seines üblichen Hausbrotes zu 20 kg Mehl etwa 16 l Wasser hinzufügt. Bei jenem Rezept beträgt der Wasseranteil 80%. Beim neuen Rezept liegt dieser bei 75%, also braucht es etwas weniger Wasser … „80 und dann 16, das ist das Doppelte wegen dem 2 bei 20“ … also braucht es 15 Liter.

Ein horizontaler Transfer dieser Art ist aber nicht mehr so einfach möglich, wenn die Ähnlichkeit zwischen den beiden Situationen nicht mehr so klar erkennbar ist wie beim Übergang von einem Brotrezept zu einem anderen. Das Erkennen der Ähnlichkeit kann man aber als Lehrperson im Unterricht unterstützen. Dazu ist es notwendig, dass man mit den Lernenden die relevanten strukturellen Ähnlichkeiten herausarbeitet. Dies bedingt natürlich eine gewisse Abstraktion, aber eine Abstraktion, welche nur das Ziel hat, genau die für einen Transfer relevanten Aspekte herauszuarbeiten – mehr nicht. Eine solche Abstraktion kann als „boundary object“ im Sinne von Tuomi-Grohn und Engeström (2003) verstanden werden, als eine Art Koffer, in dem man gewisse Dinge von einem Kontext in einen anderen mitnehmen kann.

Nehmen wir an, dass die Lernenden mit dem Kontext „Nahrungsmittel und ihre Bestandteile“ vertraut sind und als angehende Schreiner/Schreinerinnen nun lernen müssen, wie in ihrem Beruf „Verluste“ in Prozentwerten angegeben werden. Ein günstiges „boundary object“ könnte in diesem Fall ein Balkendiagramm sein, an dem sich erkennen lässt, dass in beiden Kontexten die Höhe des einen Balkens relativ zur Höhe des anderen Balkens angegeben wird.



„Gesunde Nahrungsmittel“

- Nahrungsmittel
- Bestandteil
- „Bestandteil“ kleiner als „Nahrungsmittel“
- „Verhältnis“ größer 0% und kleiner 80%

„Bretter machen“

- Brett
- Abfall
- „Brett“ kleiner als „Brett“ und „Abfall“ zusammen
- „Verhältnis“ zwischen 10% und 200%

Horizontaler Transfer, so verstanden, unterschiedet sich in wesentlichen Punkten vom vertikalen Transfer. Auf der einen Seite findet im neunen Kontext wesentliches Neulernen statt. Es wird nicht einfach ein abstraktes Konzept in einem neuen Zusammenhang angewendet, sondern es wird eine neue „situated abstraction“ aufgebaut, die stark mit konkreten Eigenschaften des neunen Kontexts verzahnt ist. Auf der anderen Seite ist das „boundary object“ keine kontextfreie Abstraktion, welche dann auch für weitere Anwendungen zur Verfügung steht. Bei manchen Lernenden mag dies zwar möglich sein. Von der Idee her wirkt das „boundary object“ aber nur als Brücke zwischen den beiden Kontexten und verliert nach Gebrauch, d.h. wenn der zweite Kontext gefestigt ist, seine Bedeutung.

4. Konsequenzen für die Ausbildung

Nimmt man diese Überlegungen ernst, sind die Folgerungen für die Didaktik an der Berufsschule naheliegend: Berufsschulehrende müssen zuerst in Erfahrung bringen, in welchen Kontexten sich ihre Lernenden zuhause fühlen, d.h. in welchen Kontexten sie beispielweise „Prozentrechnen können". Ist das einmal bekannt, geht es dann darum, mit Hilfe eines geeigneten „boundary objects" den Transfer zu unterstützen.

Dies setzt natürlich voraus, dass sich die Lernenden überhaupt mindestens in einem Kontext „zuhause fühlen", also beispielweise im Zusammenhang mit Nahrungsmitteln und in ihren Bestandteilen „Prozentrechnen können". Wichtig wäre daher, dass sie in der Schule eine „situated abstraction" aufbauen und den entsprechenden Kontext alltagstauglich beherrschen.

Nützlich wäre auch, wenn sie bereits Erfahrungen mit dem Vorgang des horizontalen Transfers gemacht hätten, so dass sie im Rahmen der Berufsbildung nicht zum ersten Mal diesem Vorgehen begegnen. Es wäre also wünschenswert, wenn sie bereits in der Schule ein- bis mehrmals „Prozentrechnen" unter Zuhilfenahme von „boundary objects" auf einen anderen Kontext übertragen hätten.

5. Literatur

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Eds.), Lernen und Lehren von Mathematik, Analysen zum Unterrichtshandeln II (pp. 1-56). Köln: Aulis.

Beach, K. (1999). Consequential Transitions: A Sociocultural Expedition Beyond Transfer in Education. In A. Iran-Nejad & P. D. Pearson (Eds.), Review of Research in Education (Vol. 24, pp. 101-139).

Greeno, J. G., Moore, J. L., Smith, D. R., & The Institute for Research on Learning. (1993). Transfer of situated learning. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), Transfer on trial: Intelligence, cognition and instruction (pp. 99-167). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. New York: Basic Books.

Lörcher, G. A. (1985). Mathematische Vorkenntnisse der Berufsschüler. In P. Bardy, W. Blum & H.-G. Braun (Eds.), Mathematik in der Berufsschule. Analysen und Vorschläge zum Fachrechenunterricht (pp. 26-36). Essen: Girardet.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). Windows on Mathematical Meanings. Learning Cultures and Computers. Dordrecht: Kluwer.

Tuomi-Grohn, T., & Engeström, Y. (2003). Conceptualizing transfer: from standard notions to developmental perspectives. In T. Tuomi-Grohn & Y. Engeström (Eds.), Between school and work: new perspectives on transfer and boundary crossing. Oxford: Elsevier.

Romualdas KASUBA, Vilnius, Litauen

Kinderuni oder die neuen Leiden des Lektors

Die allmächtige Statistik weiß über vieles Bescheid. Man kann Bescheid erfahren, wie viel wir durchschnittlich gegessen haben, oder sogar wie viel wir wiegen. Aber so bis zum Ende allwissend ist die Statistik, Gott sei Dank, doch noch nicht. So zum Beispiel, findet man leicht in Wikipedia, dass seit 2002 an mehr als 50 Universitäten und Fachhochschulen sogenannte Kinderuniversitäten als Veranstaltungen entwickelt wurden, die Kindern die Wissenschaft einfach und verständlich vermitteln sollen. Aber ob sich die allmächtige Statistik auch schon darüber entschieden hat, wie viele Lektoren sich dabei beteiligt haben oder wie viele Vorbereitungsstunden durchschnittlich eine Vorlesung an der Kinderuni kostet? Oder im Falle der Mathematik, wer weiß es schon, welche Aufgaben an solchen Veranstaltungen vor allem oder auch immer zu empfehlen wären. Ich kenne eine lineare Gleichung, die sehr gut für die Lösung in jedem deutschsprachigem Land geeignet ist: „Nimm mir ein Nu, so bleib' ich ein Nu.“

Der Schreibende ist bei weitem nicht mehr ein junger Hase in der Vorlesungsindustrie. Darüber hinaus, um das Bild wesentlich zu vervollständigen, sollte auch hingefügt werden, dass ich in meiner Lehrkarriere nicht nur die mathematische Künste unterrichtet habe (und dies nicht nur an der Uni). Das war auch einer der Gründe gewesen, dass ich es nicht abzulehnen wagte, wenn vorgeschlagen wurde, eine Vorlesung an der Kinderuni zu halten und dazu ein Thema zu nennen. Dafür wäre ich ein viel zu erfahrener Lektor gewesen, und es hätte nicht zum Bilde gepasst.

Das war schon nicht die erste Vorlesungsrunde an der Universität Vilnius, übrigens genau gesehen gerade die zweite. Es war nicht schwer zu begreifen, welche weiteren munteren Ziele die Universitäten im Auge haben, wenn sie schon noch diese zusätzliche Bemühung auf sich nehmen. Von ferne aus fällt es nicht leicht, sich richtig in den Bildungszustand in Deutschland einzufühlen, aber es lässt sich doch voraussagen, dass eines der wichtigsten Ziele eben das Qualitätsproblem ist. Man sollte versuchen, das Kind möglich schön anzusprechen, und je früher, desto besser. In der Kürze liegt die Würze. So machte die Annahme des Vorschlags im Nu mein Leben für einige Monate mindestens zweimal spannender und auch dreimal schwerer. Es sollte auch gesagt werden, dass in Litauen in den letzten Jahren viele Sachen auch im akademischen Leben anders geworden sind oder sich im permanenten Umbau befinden, also im Grossen und Ganzen ist alles ziemlich verwickelt – wie übrigens in der ganzen Welt. Die mildeste Redewendung wäre die, dass im Bildungssystem Impressionismus und Expressionismus zugleich herrschen mit allen Konsequenzen, die daraus unmittelbar und unbedingt folgen. Das macht aber die Situation des Lektors an der Kinderuni zur totalen Herausforderung. Trotzdem oder auch gerade deswegen ist das Interesse des Publikums für solche Veranstaltungen praktisch riesengroß, und die Tendenz dazu scheint noch zunehmend zu sein.

Im Falle der Universität Vilnius besteht jede Veranstaltung aus fünf Vorlesungen, eine Vorlesung in der Woche immer zu derselben Zeit. Das Alter der Zuhörer liegt zwischen 8 und 12 Jahren, es sind Schüler der Klassen 2 bis 5 (die Schule in Litauen startet, wenn Kinder 7 Jahre alt sind). Die Vorlesungen finden in einem sehr würdigen Raum statt, im vorliegenden Fall sogar im Theatersaal der Uni selbst. Der Raum war praktisch immer voll; dort saßen laut Sitzplan circa 250 Kinder. Entschuldigung, in dem Augenblick heißen die Kinder schon Studenten. Jeder junge Student hat eine Bescheinigung der Vilniuser Uni und weiß 5 Regeln, wie er sich als ein junger Student verhalten darf.

Um sich möglichst klar die Interessen und Gewohnheiten des Publikums vorzustellen: Man sagte, dass die Registrierung normalerweise nur noch sehr wenige Stunden dauerte. Darnach konnte man bei den weiteren Anmeldeversuchen nur noch Folgendes lesen: Entschuldigung, wir sind schon komplett.

Ich war sehr daran interessiert, wieso diese Voranmeldung so schnell erfolgt und habe den (gelungenen) Versuch unternommen, noch vor der Veranstaltung an die Liste von meinen zukünftigen Zuhörer heranzukommen. Es stellte sich heraus, dass da aus jeder Schule in der Liste meistens und bis zu einem Dutzend Schüler eingetragen waren und immer derselbe Name der Lehrerin. Dass spricht sehr gut für die Lehrerin, aber für den Lektor machen solche gemeldeten Halbklassen sein zukünftiges Wohl während der Vorlesung noch problematischer. Umso interessanter fällt dann der Gang des Ganzen aus.

In meiner ersten Vorlesung habe ich mich vor allem darum bemüht, möglichst unerwartet besonders die erste Phase der Vorlesung zu gestalten. Da habe ich nichts besonders Neues ausgedacht: Ich habe mich als ein Roboter vorgestellt, der dazu noch leicht mein äußeres Aussehen kopiert hat. Um das Bild etwas bunter zu gestalten, habe ich mich auch ein klein wenig exotisch bekleidet – rote Schuhe, dazu noch eine Krawatte mit Sternen und Planeten – und es später auch mit den klaren Worten betont: Kein Wunder, so sind wir Roboter doch immer.

Bei solchen Zutaten stellt sich dem Vortragenden immer die Frage über das Wesen von derartigen Vorlesungen überhaupt. Wenn ich mich schon auf einer Bühne befinde, so habe ich sehr wohl schon alleine aus dieser Hinsicht sicher das Recht, wenn auch nicht die Pflicht, manche Theaterelemente ins Spiel hineinzuziehen. Es besteht auch die weitere Frage, wie viel vom Theater mag in einer solchen Vorlesung enthalten sein. Jeder wirkliche Lektor ist mindestens ab und zu auch ein Schauspieler – und nicht nur derjenige, der nur die so wertvolle wissenschaftliche Information in dieser Welt vermittelt.

Wie in jeder normalen Vorlesung ist auch hier das Bündnis zum oder besser gesagt die Beziehungen mit dem Publikum außerordentlich wichtig. In meinem Falle habe ich es ganz einfach verwirklicht – wie gesagt wusste ich schon die Namen von allen meinen Zuhörern und es fällt dann ganz leicht, auch diese oder jene Familie plötzlich zu erwähnen. Das macht immer einen Eindruck. Man muss auch das Publikum würdig aber auch ein klein wenig witzig anreden. Auch die Anrufe vom Typ: „Ihr, die ich da in der Ferne sitzen sehe, ob ihr mich überhaupt noch hören könnt“. Als Antwort kehrte immer ein freudiges genügend lautes vielstimmiges „Ja!“

Während meiner ersten Vorlesungen habe ich mich vor allem sehr bemüht, meinen Zuhörern die folgende Aufgabe möglichst frisch bunt und lebendig vorzustellen. Um es besser darzustellen, „verwandelte“ ich mich allmählich in die Waage mit zwei Schalen. Die Waage selbst war aber leicht beschädigt: wenn auf der rechten Seite vorhandenes 1 Kilogramm wiegendes Gewicht lag, so wussten wir nicht, wie viel wir auf die linken Seite legen sollten um einen Gleichgewichtszustand zu erleben.

In dieser Situation sah unsere Aufgabe wie folgt aus: aus einem Sack genau 1 Kilo Zucker abwiegen zu lassen (der Sack selbst ist genügend groß und dazu noch voll). Wie bekannt, ist diese Aufgabe in zwei Etappen zu meistern. Und der Vortragende möchte seinen Zuhörern die Lösung beinahe einreden. So habe ich am Anfang gefragt: was könnte man da im ersten Augenblick überhaupt machen? Und nach manchen Wiederholungen – jedes Mal immer sicher ein klein wenig anders – ging es. Aber gar nicht so leicht, wie ich mir es vorher vorgestellt habe.

Meine zweite Vorlesung kostete mich schon wesentlich weniger Zeit und Mühen. Wie gesagt, brachte mir die erste Vorlesung einige Monate der Ungeduld. Mehr noch: sie hat mich in einen Zustand versetzt, den ich nicht völlig umsonst mit den im Titel erwähnten Worten beschreibe, anspielend auf das klassische so berühmte Leiden. Aus dieser, darf ich wohl sagen zum Teil schöpferischen Ungeduld und Unruhe habe ich vor dem Vortrag vieles untergenommen, u.a. habe ich meine eigene Enkelkinder gefragt, was zu machen wäre, damit die Rede interessanter ausfalle.

Nur noch zwei, im Vergleich mit Monaten dauernder Unruhe vor dem erstem Auftritt, volle Vorbereitungstage schenkten mir zum Teil neue Spannung: wieso fühle ich mich jetzt so wenig gespannt? Mein zweites Mal hat wahrscheinlich weniger von theatralischen Elementen enthalten oder die sind schon mehr unbewusst eingetreten. Aber die Aufgabe, die ich da verfolgt habe, war schon wirklich ganz ernst und sah wie folgt aus:

In einem Haus im arithmetischen Paradies sind unendlich viele Zimmer. Jedes Zimmer hat Zugang zum Internet und alles, was man da noch dazu wünschen könnte. In jedem Zimmer lebt ein glücklicher junger Student. Alle Zimmer sind voll. Es sind unendlich viele Zimmer: Jedes Zimmer hat seine eigene Nummer N. Und da kommt noch eine weitere Person, die wir doch wohl in diesem Haus unterbringen möchten. Wir möchten ihm auch ein einzelnes Zimmer zur Verfügung stellen, um die würdige Bedingungen auch ihm zu sichern. Was sollte dann der Hausmeister unternehmen? Am leichtesten fiel die erste Phase aus: in welches Zimmer gehört der Gast? Die Antwort war, ihm stünde das Zimmer Nummer eins zu! Dies erklang ziemlich natürlich und leicht. Die übrige Zeit war dann auch dafür gewidmet, um den Zuhörern wirklich verständlich zu machen, warum eigentlich die folgende Anordnung des Hausmeister

$$N \to N + 1$$

alle weitere Sorgen hinweggeschafft hat. Es ist merkwürdig, wie allwissend sich die höhere Schicht des Publikums doch erwiesen hat. Aus dem Erfolg in dieser Aufgabe ist es klar, dass es möglich ist, alle Bewohner sogar von unendlich vielen von solchen Häuser in einem Haus unterzubringen und zwar wieder so, dass jeder wieder ein einzelnes Zimmer zugeordnet bekommt. Selbstverständlich muss dabei der Hausmeister etwas geschickter sein, aber es läuft doch alles auch in diesem Falle. Dies wurde am Ende angedeutet. Und – siehe da – nach der Vorlesung kam eine Delegation von Zuhörern auf die Bühne und sagte „Uns würde es interessieren, was da der Hausmeister unternimmt“. So habe ich mit Vergnügen den entsprechenden Plan skizziert.

Der Verfasser würde sehr gerne Kontakt mit jedem aufnehmen, der ähnliches Interesse hat. Ich wäre sogar bereit – wenn auch mit verständlicher Spannung – gelegentlich eine solche Vorlesung auch an einer deutschsprachigen Institution durchzuführen.

Mein herzlicher Dank geht an Prof. Dr. Lothar Profke, dessen langjährige Hilfe und Unterstützung für mich immer wertvoll war.

Stefan-Harald KAUFMANN, Köln

Schülervorstellungen zu Vektoren und Geraden

Im Unterricht der analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II Oberstufe setzen sich Schülerinnen und Schüler zu einem großen Teil mit Problemstellungen der ebenen und räumlichen Geometrie auseinander. Vektoren nehmen häufig die Rolle eines zentralen Hilfsmittels zur Beschreibung verschiedener Objekte ein. Die Vorstellungen, die Lernende von den beschriebenen Objekten entwickeln, können sehr unterschiedlich sein und sind von verschiedenen Aspekten abhängig.

1. Forschungsprojekt

In dem hier vorgestellten Teil eines Forschungsprojekts an der Universität zu Köln soll zunächst untersucht werden welche Vorstellungen Schülerinnen und Schüler jeweils von Vektoren und Geraden besitzen. In einem weiteren Schritt wird analysiert wie die Vorstellungen zu diesen einzelnen Begriffen miteinander in Beziehung gesetzt werden und welche Hilfsmittel dabei verwendet werden. Im theoretischen Teil konzentriert sich die Untersuchung auf die Analyse von Schulbüchern, curricularen Vorgaben und die Ergebnisse der fachdidaktischen Forschung, um Aspekte herauszuarbeiten, die Vektoren und Geraden im Geometrieunterricht der Sekundarstufe auszeichnen. Im praktischen Teil, der qualitativen Auswertung von Schülerinterviews zu den Themenfeldern „Vektor" und „Gerade" werden die Aspekte der analytischen Geometrie erarbeitet, die bei den interviewten Schülerinnen und Schülern auftraten bzw. erkennbar waren.

Die im Projekt durchgeführten Untersuchungen konzentrieren sich auf Grundbegriffe, die im Geometrieunterricht der Sekundarstufe II thematisiert werden können. Zu diesen Begriffen gehören der Vektorbegriff und der Geradenbegriff. Beide Begriffe werden in einer vektoriellen Gleichung, beispielsweise

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix},$$

miteinander in Beziehung gesetzt. Die geometrische Interpretation dieser Vektorgleichung ist von mehreren Teilaspekten abhängig. Eine zentrale Rolle spielt das Verständnis von Vektoren und Geraden. Darüber hinaus beeinflusst das Variablenverständnis sowie der Umgang und die Auffassung von Gleichungen die Interpretation einer „linearen" Vektorgleichung. Denn beide, sowohl Variable(n) als auch Gleichung, fungieren in der vektoriellen analytischen Schulgeometrie als ein Bindeglied, um den Vektorbegriff und den Geradenbegriff miteinander in Beziehung setzen bzw. vernetzen zu können.

Im Rahmen der Untersuchung wurden 21 Schülerinnen und Schüler aus Leistungskursen der Jahrgangsstufe 13 von vier verschieden Gymnasien aus dem Kölner Umland interviewt. Die Interviews wurden Ende Januar bzw. Anfang Februar 2010 vor der Abiturprüfung an der Universität zu Köln durchgeführt. Der Ablauf war in zwei Phasen unterteilt. In der ersten Phase bekamen die Schülerinnen und Schüler die folgende Aufgabe aus dem Bereich vektorielle analytische Geometrie vorgelegt:

„Der Kapitän eines Schiffes registriert um 16:00 auf dem Radar einen Eisberg, der sich 7 Seemeilen südlich des Schiffes befindet. Die Meerströmung treibt den Eisberg pro Stunde 3 Seemeilen nach Osten und 1 Seemeile nach Norden. Das Schiff fährt trotz der Meeresströmung pro Stunde auf seinem Kurs 4 Seemeilen nach Osten und 4 Seemeilen nach Süden. Soll der Kapitän den Kurs des Schiffes ändern?“

Eine Lösung der Aufgabe wurde von den Schülerinnen und Schülern in Partnerarbeit erarbeitet und sollte die folgenden Interviews vorbereiten. Die Erarbeitung wurde mit einer Videokamera aufgezeichnet; als Hilfsmittel hatten die Lernenden Papier, Stifte, Lineal und Taschenrechner zur Hand.

Nach Bearbeitung der Aufgabe wurden die Lernenden einzeln interviewt. Dabei wurden Schülerinnen und Schülern sieben vorher festgelegte Fragen zu der Aufgabe und weiteren Inhalten der vektoriellen analytischen Geometrie gestellt. Drei dieser Fragen waren:

- „Könntest Du erklären was Du Dir unter einem Vektor vorstellst.“
- „Könntest Du erklären was Du Dir unter einer Geraden vorstellst.“
- „Ich habe hier eine Geradengleichung. Könntest Du erklären woraus sie sich zusammensetzt.“ (Dabei legt der Interviewer eine Karte, auf der die obige Vektorgleichung notiert ist, vor.)

Die Interviews wurden mit einer Videokamera aufgezeichnet und bilden den Kern des praktischen Teils der Untersuchung.

Die durchgeführten Interviews werden bei der Erstellung individueller primärer Begriffs-Konzepte des Vektorbegriffs und des Geradenbegriffs herangezogen. Von primären Begriffs-Konzepten wird deshalb gesprochen, da man im Allgemeinen nicht davon ausgehen kann, dass Schülerinnen und Schüler in einem Interview ihr gänzliches Wissen über Vektoren oder Geraden kommunizieren werden, sondern nur die Aspekte, die sie unmittelbar mit den Begriffen verbinden. In einem weiteren Arbeitsschritt wird durch Generierung idealisierter Konzepte ein Kategoriensystem zu den einzelnen

Begriffen erstellt. In einem dritten Schritt wird untersucht wie die Begriffe miteinander in Beziehung gesetzt werden.

In diesem Beitrag werden einige Ergebnisse für idealisierte Vektoren-Konzepte vorgestellt. Erste Teilergebnisse über die Vernetzung dieser Begriffe mit Hilfe einer Vektorgleichung unter besonderer Berücksichtigung der Variableninterpretation sind in Kaufmann (2010) angeführt.

2. Teilergebnisse

Die Interviews wurden zusammen mit den Aufzeichnungen der Schülerinnen und Schüler, die während der Befragung angefertigt wurden, inhaltlich transkribiert. Die inhaltliche Auswertung der Interviews orientiert sich methodisch an Mayring, (2008). Zunächst wurden relevante Textstellen markiert. Die markierten Zitate wurden anschließend auf den Inhalt reduziert. In einem weiteren Schritt wurden die Zitate durch Zuweisung eines geeigneten Codes generalisiert. Zuletzt wurden die Codes idealisiert, um für die jeweiligen Begriffe Kategoriensysteme generieren zu können.

Für den Vektorbegriff lieferte diese Auswertung unter anderem folgende Kategorien:

- Tupel: Ein Vektor wird mit einem Tupel als Objekt identifiziert.
- Klasse: Ein Vektor wird als eine Klasse von Objekten identifiziert.
- Pfeil: Ein Vektor wird als Pfeil identifiziert.
- Gerichtete Strecke: Ein Vektor wird als eine ausgerichtete Strecke (beispielsweise durch Start- und Endpunkt) identifiziert.
- Bewegung: Ein Vektor wird als eine Bewegung identifiziert.

Einerseits sind die Kategorien nicht disjunkt und andererseits können mehrere Kategorien innerhalb eines Interviews auftreten. Dies kann an dem Fall „Damian" (Ausschnitt der Transkription auf der nächsten Seite) exemplarisch demonstriert werden.

Diesem Textabschnitt können sogar vier der fünf oben genannten Kategorien zugeordnet werden. Das sind die Kategorien „Pfeil" (Z. 61, 67), „Bewegung" (Z. 62), „Tupel" (Z. 65,66) und „gerichtete Strecke" (Z. 67-71). Die Äußerung in Zeile 67 „Angabe von einem Punkt zu nem anderen" ist ein Beispiel für ein Zitat, welches zunächst in die Kategorie „Bewegung" als auch als „gerichtete Strecke" eingeordnet werden kann. Die weiteren Ausführungen in den Zeilen 69 bis 71 deuten darauf hin, dass Zeile 67 tatsächlich als „gerichtete Strecke" interpretiert werden kann und keine Wiederholung der Äußerung aus Zeile 62 ist. Das Zitat „ein Vektor ist ist eine eine Richtungsangabe" (Z. 58) konnte bei der Idealisierung der Konzepte keinem Aspekt zugeordnet werden, da sie so formuliert ausschließlich in diesem Interview auftrat. Das Zitat kann in diesem Fallbeispiel als eine grundlegende Eigenschaft von Vektoren interpretiert werden.

S: Äh ein Vektor ist ist eine eine Richtungsangabe, das ist schwer, so und *(5 Sek.)* dargestellt werden Vektoren; man kann sie halt äh in zwei verschiedenen Weisen darstellen. Erstens haben wir äh diese Pfeildarstellung und das ist dann halt *(Zeichnet einen Strich, notiert 1 und malt einen Pfeil auf Abb. 3.)* eine bewegte Richtung. Das kann aber auch; äh also Vektoren haben dann auch ne Länge und zweitens kann man äh Vektoren auch in dieser anderen Schreibweise, indem man halt die Zahlen hier hat a b c nenne ich *(Notiert auf Abb. 3 ein Spaltentupel mit den Einträgen a, b und c.)* die jetzt mal. Ja, so sieht es aus wie nen Pfeil und das ist halt eine Angabe von einem Punkt zu nem anderen. Eine .. ja. Und der Betrag des Vektors ergibt die Länge. Das heißt: Wenn ich in einem in einem Raum zwei Punkte habe und das Verbindungsstück zwischen zwei beliebigen Punkten in einem Raum ist dann der Vektor. So ungefähr.

Ein anderes Fallbeispiel ist „Charlotte".

S: Ein Vektor ist ein .. auch eine Gerade, die eine Richtung im Raum anzeigt oder beschreibt. Also eigentlich könnte man eine Grade auch durch einen Vektor ausdrücken.

Die Transkription des Interviews belegt, dass Charlotte Schwierigkeiten hat die Begriffe „Vektor" und „Gerade" zu unterscheiden, da sie jeden der Begriffe durch den jeweils anderen erklärt. Sie scheint einen Vektor als eine gerichtete Gerade (Z. 49, 50) zu verstehen. Bezieht man die Aufzeichnungen von Charlotte aus dem Interview mit ein, so wird deutlich, dass Sie sich unter einem Vektor eine gerichtete Strecke vorstellen könnte. Denn Sie zeigt bei Ihren Äußerungen (Z. 49, 50) auf den Start- und Endpunkt einer aufgezeichneten Strecke; spricht aber von einer Geraden.

Nach der gleichen Vorgehensweise wurden die Äußerungen zum Geradenbegriff und die Deutung der obigen Vektorgleichung ausgewertet, um analysieren zu können wie Schülerinnen und Schüler am Ende der Sekundarstufe diese Begriffe miteinander vernetzen.

Literatur

Kaufmann, S.-H. (2010): Schülerauffassungen von Variablen in der analytischen Geometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 44, 477 - 480.

Mayring, P. (2008): Qualitative Inhaltsanalyse. Weinheim/Basel: Beltz Verlag.

Michael KLEINE, Weingarten

Welches Verständnis haben Schüler zu Beginn der Sekundarstufe im Ungang mit Daten? Ein deutsch-schwedischer Vergleich

Die Leitidee Daten und Zufall stellt einen der fünf Inhaltsbereiche dar, die von der KMK in den Bildungsstandards 2003 für das Fach Mathematik festgelegt wurden. Ein Hauptanliegen dieser Leitidee ist das frühzeitige Heranführen der Schüler an den Umgang mit Daten und Statistiken, um diese sachgerecht beurteilen zu können. Datenkompetenz ist somit eine wesentliche Fähigkeit, die die Schüler möglichst frühzeitig erlangen sollen. In diesem Papier wird ein Strukturmodell zur Datenkompetenz bestehend aus drei Stufen vorgestellt, das Teilbereiche aus der deskriptiven Statistik beinhaltet. Die entwickelten Testinstrumente lassen sich den drei Anforderungsstufen des Modells zuordnen. Die Erprobung der Testhefte zu Beginn der Klasse 5 und 6 in Deutschland und Schweden zeigt, dass sich das Strukturmodell als Schwierigkeitsmodell erweist.

Theoretischer Rahmen

Datenkompetenz meint eine Vielzahl von Fertigkeiten, Fähigkeiten und Kenntnissen über Begriffe, die sich über einen längeren Zeitraum hinweg entwickeln und notwendig sind, um sachgerecht mit Daten umzugehen (vgl. Wagner, 2006). Sachgerecht bedeutet dabei einen kritischen und reflektierten Umgang mit Statistiken in Veröffentlichungen. Das Hauptziel der Datenkompetenz in der Schule besteht demnach im Aufbau einer kritischen Haltung gegenüber datengestützter Argumentationen. Dabei ist zu Beginn der Sekundarstufe zentral, sowohl Kenntnisse über tabellarische und grafische Darstellungsarten von Daten zu haben als auch Wissen über Lage- und Streuparameter und deren Funktion.

Beim Erwerb von Fähigkeiten zum Entschlüsseln, Lesen und Interpretieren grafischer Darstellungen lassen sich nach Eichler und Vogel (2009) drei Kompetenzen unterscheiden: (1) „Read the data“, deren Anforderung darin besteht einzelne Informationen abzulesen, die in einer grafischen Darstellung enthalten sind. (2) Bei „read in the data“ geht es um das Lesen der Verteilung von Daten insgesamt, nicht ausschließlich um das Verstehen von Einzelinformationen. (3) Die dritte Kompetenz „read beyond the data“ erfordert die Fähigkeit, über vorhandene Daten hinauszublicken und Zusammenhänge herzustellen. Es geht um Prognosen und Aussagen, die über vorhandenes Datenmaterial hinaus getroffen werden sollen.

Betrachtet man bisherige Forschungs- und Studienarbeiten in diesem Themenbereich, dann lassen sich kaum nationale und internationale Befunde rezitieren. Shaughnessy (2007) konnte ein einer Studie bestätigen, dass sich Fertigkeiten in der Konstruktion und Interpretation grafischer Darstellungen nach und nach aufbauen. Mit zunehmender Erfahrung im Umgang mit der Datenauswertung gelingt es Schülern allmählich über die Fähigkeit „read the data“ hinauszugehen und vorliegende Daten zu interpretieren und zu vergleichen (vgl. Eichler & Vogel, 2009). Das Thema „Daten erheben“ ist nach Engel (2008) national noch weitgehend unerschlossen. Für die Auswertung von Daten liegen beispielsweise von Biehler und Hartung (2006) oder von Vogel und Wintermantel (2003) konkrete Beiträge zur unterrichtlichen Umsetzung vor. In der Arbeit von Wagner (2006) wird das Begriffsfeld Datenkompetenz ausführlich beschrieben und Argumente für die Ausbildung einer Datenkompetenz gesammelt. Jedoch gibt es bislang kein Strukturmodell zur Datenkompetenz, was Hauptmotiv diese Arbeit ist.

Auf der Grundlage der bisherigen Erkenntnisse lassen sich drei Anforderungsstufen unterschieden, die in einem hierarchischen Stufenmodell (Abbildung 1) dargestellt sind.

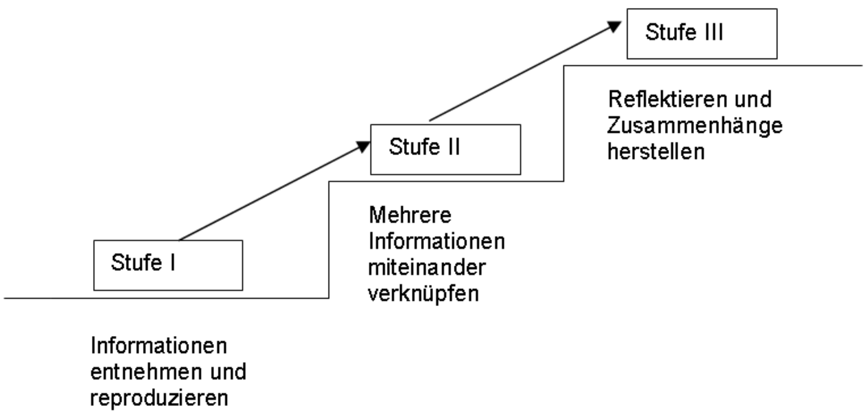


Abbildung 1: Hierarchisches Stufenmodell

Anforderungen der *Stufe I* des Strukturmodells lassen sich unter dem Begriff „Informationen entnehmen und reproduzieren“ zusammenfassen. Bei dieser Stufe geht es darum, Modalwerte aus einem gegebenen Diagramm abzulesen, Angaben aus einem Text in eine Tabelle mit absoluten Häufigkeiten zu übertragen oder einfache Berechnungen, zum Beispiel Additionen, auszuführen. Die Stufe I ist eine notwendige Fähigkeit, um von der Einzelinformation einer Grafik auf Hypothesen oder Interpretationen des gesamten Sachkontexts überzugehen. Auf *Stufe II* geht es nicht nur darum, Informationen aus einer Tabelle abzulesen und wiederzugeben, sondern Werte miteinander zu vergleichen und eine

Entwicklung zu beobachten. Es geht demnach sowohl darum Daten zu lesen (read the data) als auch darum zwischen oder innerhalb der Daten zu lesen (read in the data). Bei der *Stufe III* ist es zentral, aus vorliegenden Daten auf neue Sachverhalte schließen zu können, so sollen Zusammenhänge hergestellt und reale Daten für Argumentationen verwendet werden.

2. Methodologischer Rahmen

Zur Untersuchung der Fähigkeiten der Schüler im Bereich Datenkompetenz ist folgende Frage von Interesse: Spiegelt sich die dargestellte hierarchische Struktur der mathematischen Fähigkeiten zur Datenkompetenz in den empirischen Befunden wider? Insbesondere also: Handelt es sich beim aufgestellten Strukturmodell um ein Schwierigkeitsmodell mit drei Anforderungsniveaus?

Es wurden parallel zwei Testhefte für Klasse 5 und 6 konzipiert, die bis auf eine Erweiterung im Testheft der Klasse sechs um zwei Aufgaben identisch sind. Die Testhefte wurde mit Hilfe schwedischer Kollegen von der Linnaeus Universität in Växjö (S) in die schwedische Sprache übersetzt. Die Untersuchung wurde demnach sowohl in Deutschland als auch in Schweden in der jeweiligen Landessprache durchgeführt. Man kann hinsichtlich der Klassenstufe davon ausgehen, dass die Schüler bereits erste Erfahrungen zu Inhalten und Methoden der deskriptiven Statistik gemacht haben, da sowohl in Deutschland als auch in Schweden in der Primarstufe mit Häufigkeitstabellen und Diagrammen als Darstellungsmöglichkeiten für die Datenpräsentation gearbeitet wird. Der Messzeitpunkt fand im September/ Oktober 2010 statt, Testzeit: 45 min. Es handelt sich um eine Primärerhebung der Daten. In Schweden nahmen zwei Schulen aus der Region Småland teil, in Deutschland je eine Hauptschule (HS), Realschule (RS) und ein Gymnasium (GY) aus dem süddeutschen Raum. In jeder Schule wurde jeweils eine 5. und 6. Klasse untersucht. Tabelle 1 gibt die Verteilung der Stichprobe wieder.

	Klasse 5	Klasse 6	N
Deutschland	89	87	176
HS	*40*	*31*	*71*
RS	*23*	*27*	*50*
GY	*26*	*29*	*55*
Schweden	74	77	151
N	163	164	327

Tabelle 1: Verteilung der Stichprobe

3. Empirische Befunde

Abbildung 2 zeigt die Verteilung nach Ländern geteilt auf die einzelnen Stufen in der 6. Jahrgangsstufe.

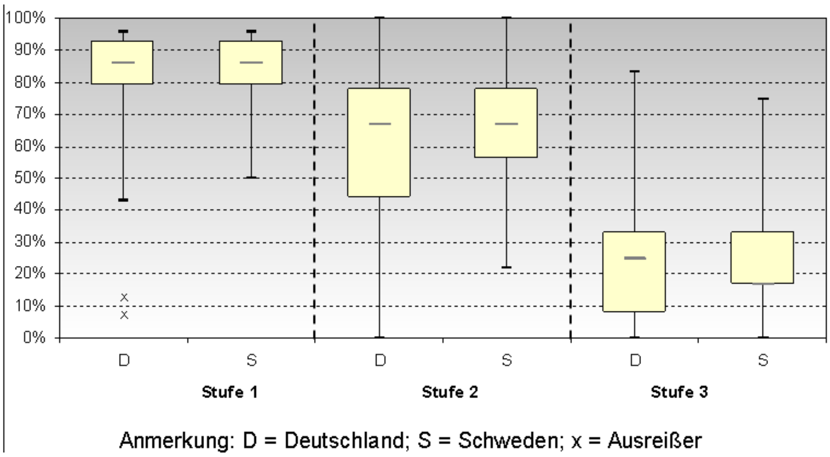


Abbildung 2: Verteilung der Befunde in Klasse 6

Der Quartilsabstand der Datenreihe verdeutlicht, dass die Daten bei der Stufe I noch relativ dicht um den Zentralwert liegen. Auf Stufe II zeigt sich am Quartilsabstand, dass die Daten bereits stärker streuen. Auch auf der dritten Stufe ist der Quartilsabstand der Datenreihe größer als auf Stufe I, die Daten liegen nicht mehr so dicht beieinander. Hier kann es auch zu Bodeneffekten kommen. Insgesamt fällt auf, dass die Streuung der Daten in Deutschland in den mittleren Hälften auf den Stufen II und III, aber auch insgesamt größer ist als in Schweden. Dieses kann natürlich zunächst einmal der Stichprobe zugeschrieben werden. Eine genauere Untersuchung kann sich hier jedoch lohnen.

Insgesamt betrachtet bestätigt das Boxplotdiagramm das Stufenprinzip des Strukturmodells. Den Schülern fällt es am schwersten, Beziehungen zwischen bivariaten Daten zu erkennen (Stufe III). Diagramme für die Jahrgangsstufe 5 bestätigen diese Interpretationen.

Literatur

Biehler, R., & Hartung, R. (2006). Leitidee Daten und Zufall. In: W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen (S.51-80). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Eichler A. & Vogel M. (2009). Leitidee Daten und Zufall. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Wagner, A. (2006). Entwicklung und Förderung von Datenkompetenz in den Klassen 1-6. Kadisto, Band 3.

Vogel, D. & Wintermantel, G. (2003): Explorative Datenanalyse – Statistik aktiv lernen. Stuttgart: Ernst Klett-Verlag

Juliane KLEMM, Rolf BIEHLER, Paderborn
Stephan SCHREIBER, Reinhard HOCHMUTH, Kassel

Qualifizierung von TutorInnen im LIMA-Projekt

Das BMBF-Projekt LIMA (http://lima-pb-ks.de/) setzt an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule an. Ziel des Projektes ist es, den Studierenden den Übergang zu erleichtern und die hohen Abbruchquoten in den Lehramtsstudiengängen zu reduzieren. Auf Basis unserer Ergebnisse aus dem ersten Projektjahr zu der Entwicklung der fachlichen Kompetenzen und der motivationalen und volitionalen Lernvoraussetzungen, haben wir unterschiedliche Maßnahmen ergriffen, um den Studierenden eine möglichst optimale Unterstützung zu bieten. Neben der Veränderung der Vorlesungsinhalte, der Einführung von eLearning-Komponenten und Tutorentandems sowie der Umstrukturierung der Übungen wurde besonders die Qualifizierung der TutorInnen in den Vordergrund gerückt. Dieser Aspekt erscheint besonders zentral, da die TutorInnen durch die erhöhten Studierendenzahlen eine wichtige Rolle in den Veranstaltungen der ersten Semester spielen.

Konzeption der Qualifizierung

Die Qualifizierung von studentischen Tutoren beschäftigt die Hochschuldidaktik schon seit langem (vgl. Knauf 2007, Reimpell/Szczyrba 2007). Unabhängig davon, ob es sich um Orientierungs- oder Fachtutorien handelt, die inhaltlichen Bausteine der Tutorenausbildungen sind meist sehr ähnlich. Dabei stehen fast ausschließlich didaktische Kompetenzen, wie Medien- oder Methodenkompetenzen im Vordergrund (vgl. Reimpell/Szczyrba 2007). In vielen Schulungskonzepten ist auch eine Auseinandersetzung mit Vortrags- und Feedbacktechniken sowie Elemente der Gruppensteuerung zu finden.

Mathematikspezifische Qualifizierungskonzepte sind weniger weit verbreitet. Ein bekanntes Konzept zur Tutorenschulung stellt dasjenige von Siburg und Hellermann (2009) dar. Hierbei werden die oben genannten didaktischen Kompetenzen im Hinblick auf ihre Anwendung auf den Übungsbetrieb in der Mathematik konkretisiert und ergänzt. Um den Bezug zur Mathematik zu gewährleisten, werden beispielsweise Lernziele anhand realer Übungsaufgaben bestimmt oder mathematische Themen als Grundlage für Simulationen von Übungssituationen verwendet. Einen anderen Ansatz zur Qualifizierung von MathematiktutorInnen beschreibt Liese (1994) in seinem Konzept: die ÜbungsgruppenleiterInnen erproben ihre im Tutorium zu erfüllenden Funktionen und Rollen in Simulationen und erstellen dazu sogenannte „Checklisten“, die Anhaltspunkte zu einer guten Bewältigung der Aufgaben geben sollen.

Diese Orientierung an den Funktionen und Rollen erscheint auch für die Qualifizierung der TutorInnen im LIMA-Projekt sinnvoll, weil auf diese Weise ein Transfer der Schulungsinhalte in den eigentlichen Übungsbetrieb einfacher erscheint. Im Rahmen der Veranstaltung wurden daher folgende Tätigkeitsfelder der TutorInnen identifiziert:

- Aufbereiten von Vorlesungsinhalten: Die TutorInnen sollen nicht nur den aktuellen Stoff der Vorlesung mit dessen Darstellung kennen und verstehen, sondern auch die didaktische Intentionen des Dozenten nachvollziehen, sowie den Zusammenhang von Vorlesungsinhalten und Übungsaufgaben herstellen.
- Gruppenmanagement: Um eine produktive Arbeitsatmosphäre in den Übungsgruppen zu gewährleisten, müssen die TutorInnen bestimmte Grundregeln zum Gruppenmanagement beherrschen. Darunter fallen Aspekte wie das Moderieren von Diskussionen oder der Umgang mit Störsituationen.
- „Vorrechnen“: Unter diesem Begriff verstehen wir das Vorstellen von Aufgabenlösungen an der Tafel, wobei diese Tätigkeit das Eingehen auf typische Fehler und das Einbeziehen der Studierenden durch geeignete Frageformate miteinschließt.
- Anleiten von Kleingruppenarbeit: Diese Aufgabe bezieht sich auf die Bearbeitung der sogenannten „Präsenzaufgaben“, welche die Studierenden in der Übung lösen sollen. Die TutorInnen müssen diese Arbeitsphase mit dem nötigen Input und Arbeitsauftrag geeignet anleiten, während der Bearbeitung gezielte Hilfestellungen geben und am Ende die Ergebnisse sichern.
- Korrigieren und Feedbackgeben zu Hausaufgaben: Bei der Korrektur ist es wichtig, dass die TutorInnen nicht nur eine Rückmeldung zur Richtigkeit geben, sondern Fehler der Studierenden analysieren und den Studierenden differenziertes Feedback geben, das deren Reflexion und Lernprozesse anregt.

Ausbildungsbedarf und Maßnahmen

Um festzustellen, inwieweit die TutorInnen in diesen Bereichen noch Unterstützung benötigen, wurden im SS 2010 fünfzehn Übungsgruppen der Veranstaltung „Elemente der Stochastik“ hospitiert und die Studierenden zu ihren Tutorien befragt. Zusätzlich konnten mit der Analyse der Korrekturen aus der ersten Kohorte des LIMA-Projekts auch der Ausbildungsbedarf in diesem Bereich festgestellt werden. Beispielsweise konnte im Tätigkeitsfeld „Vorrechnen“ Probleme wie unübersichtliche Tafelbilder, eine sehr hohe Passivität seitens der Studierenden sowie das fehlendes Eingehen auf die Fehler aus den Hausaufgaben beobachtet werden.

Um diesen Schwierigkeiten entgegenzuwirken, wurden im Rahmen des Projektes verschiedenen Fortbildungsmaßnahmen getroffen: ein dreitägiger Eingangsworkshop vor Beginn das Semesters sollte eine gemeinsame Grundlage für die weitere Zusammenarbeit schaffen. Hier wurde auch das „Vorrechnen“ intensiv geübt, indem jeder Tutor in 5-10 Minuten eine Übungsaufgabe vorstellte und dazu Feedback von der Gruppe und den Schulungsleitern erhielt. Neben dem „Vorrechnen“ wurden die TutorInnen auch in ihren anderen Tätigkeitsfeldern qualifiziert. Der Workshop bot den Tutoren die Gelegenheit, ihre Rollen und Funktionen in der Veranstaltung zu klären und sich zusätzlich auch in der Planung der Übung und im Leiten von Kleingruppen zu erproben. Letzteres wurde ausführlich in Simulationen geübt, wobei die TutorInnen dazu angehalten wurden, Studierenden durch strategisches Intervenieren mehr in ihrem Lösungsprozess zu unterstützen. Der dritte Workshoptag beschäftigte sich mit der Korrektur von Hausaufgaben: die TutorInnen korrigierten musterhaft reale Bearbeitungen von Studierenden und erstellten gemeinsam Grundregeln für eine gute Korrektur.

Um die TutorInnen in dem zuletzt genannten Bereich auch während des Semesters möglichst gut zu unterstützen, erhielten sie jede Woche ein ausführliches Korrekturschema, welches u.a. unterschiedliche Lösungswege und Anforderungen an die Darstellung enthielt. Ein Korrekturforum auf der Online-Plattform Moodle ermöglichte den TutorInnen auch von zu Hause über unterschiedliche Studierendenbearbeitungen zu diskutieren. Stichprobenartige Nachkorrekturen ermöglichten uns, einen Überblick über die Qualität der Korrekturen zu behalten und gezielte Rückmeldung an die TutorInnen zu geben.

Die anderen Tätigkeitsfelder konnten in den zwei Hospitationen während des Semesters sehr gut analysiert werden. Hier wurde auch offensichtlich, dass sich beispielsweise die ausführliche Behandlung des Themas „Vorrechnens“ im Eingangsworkshop positiv auf die Situation in den Übungsgruppen ausgewirkt zu haben scheint. In den Hospitationen zeigten sich zumeist sehr übersichtliche und strukturierte Tafelbilder, auch wenn gelegentlich ergänzende Zwischenbemerkungen fehlten. Die Studierenden wurden sehr gut in den Lösungsprozess miteinbezogen.

In den wöchentlich stattfindenden Tutorenseminaren hatten die TutorInnen die Gelegenheit die Gestaltung ihrer Übungsgruppen zu besprechen. In dem zweistündigen Treffen stellten die TutorInnen mögliche Studierendenschwierigkeiten in denen von ihnen vorbereiteten Aufgaben vor und diskutierten diese gemeinsam. Zusätzlich klärten sie hier fachliche und didaktische Inhalte oder individuelle Schwierigkeiten in den Übungsgruppen. Für einen genauen Aufbau der Schulung und weiteren Qualifizierungsmaßnahmen siehe Biehler et al. (2011).

Ausblick

In manchen Bereichen konnten mit der intensiven Betreuung der Tutoren gute Fortschritte erzielt werden, in anderen Gebieten ist kaum eine Verbesserung eingetreten. Da die aufgeführten Unterstützungsmaßnahmen z.T. einen hohen Arbeitsaufwand darstellen, soll in der kommenden Kohorte in Paderborn im SS 2011 festgestellt werden, welche Maßnahmen den größten positiven Effekt bringen. Daher erscheint es wichtig, die fachlichen Kompetenz und die Einstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik der TutorInnen zu erfassen, um die TutorInnen gezielter unterstützen zu können. Ein weiteres Ziel ist jedoch auch, die genannten Maßnahmen der Qualifizierung auf ihre Übertragbarkeit zu prüfen und dementsprechend anzupassen.

Das LIMA – Projekt wird vom BMBF im Rahmen der Zukunftswerkstatt Hochschullehre gefördert.

Literatur

Biehler, R., Hochmuth, R., Klemm, J., Schreiber, S., Hänze, M. (2011): Tutorenschulung als Teil der Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium“ (LIMA-Projekt). In: Hochschuldidaktik – Mathematik und Informatik. Symposiumsband zum Symposium „Verbesserung der Hochschullehre in Mathematik und Informatik“. Submitted.

Knauf, H. (2007): Tutorenhandbuch: Einführung in die Tutorenarbeit. 3. Aufl., Bielefeld: Webler.

Liese, R. (1994): Unterrichtspraktische Übungen für Übungsgruppenleiter in Mathematik. Ein Beitrag zur Verbesserung der Lehre durch Ausbildung und Training von Fachtutoren. Preprint Nr. 1674. TU Darmstadt.

Reimpell, M. & Szczyrba, B. (2007): Studierende als Dozierende - Kompetenzentwicklung durch ein Tutorenzertifizierungsprogramm. In Berendt, B., Voss, H.-P. & Wildt, J. (Hrsg.): Neues Handbuch Hochschullehre. Berlin Stuttgart: Raabe.

Siburg, K.F. & Hellerman, K: (2009). Mathematik lehren lernen – Hochschuldidaktische Schulungen für mathematische Übungsgruppenleiter. DMV-Nachrichten 17, 174-176.

Olaf KNAPP, Konstanz

Dokumentations- und Analysetools zur Erfassung der Mensch-Computer-Interaktion in empirischen Studien

Will man die Usability digitaler Lernumgebungen mit mathematikdidaktischen Bezügen in qualitativen oder quantitativen empirischen Studien erforschen, stehen unterschiedlich geeignete Werkzeuge wie bspw. ATLAS.ti, Morae oder Videograph zur Verfügung. Diese ermöglichen die Erfassung von Nutzerhandlungen auf und vor dem Bildschirm. Aus deren Dokumentation und Analyse können Handlungsleitlinien und Konsequenzen für die Gestaltung didaktisch mehrwertiger digitaler Lernumgebungen gezogen werden.

Was aber ist technisch überhaupt erfassbar? Wo liegen Vor- und Nachteile solcher Werkzeuge?

Warum überhaupt die Mensch-Computer-Interaktion erfassen?

Digitale Lernumgebungen, welche bspw. Dynamische-Geometriesysteme, Computer-Algebra-Systeme oder Interaktive Instruktionsvideos (Knapp 2010 a) beinhalten, bedürfen der empirisch gestützten Evaluation im jeweiligen Anwendungsfeld, um den qualitativen und quantitativen Umgang der Nutzer mit diesen digitalen Lernumgebungen zu erforschen („Usability“).

Analog Issing (In: Issing & Klimsa 2002, S. 170) soll unter „Usability“ eine Unterform der Formativen Evaluation zur Überprüfung und Sicherung der Benutzerfreundlichkeit verstanden werden. Dabei sind bspw. Fehlerarten, Erlernbarkeit, Effektivität und Zufriedenheit Analysekriterien. Sie dient der Überprüfung und ggfs. Optimierung der Beachtung softwareergonomischer Prinzipien (CEN 1995) (korrespondierend mit der „Intuitivität“; Knapp 2010 b), der Implementation von Ergebnissen der Usability-Forschung (etwa der „De Facto-Standards“; z.B. des Webdesigning nach Nielsen 2001), dem Brückenschlag zwischen Softwareentwickler und -nutzer oder der Erhöhung der schulpraktischen Alltagstauglichkeit im Rahmen der formativen Evaluation. Damit verbindet sich die Chance, die oft zu abstrakten theoretischen mathematikdidaktischen (häufig ohne empirische Evidenz generierten) Überlegungen und Implikationen zum Einsatz „neuer Technologien“ in den MU einfacher, schneller und wirksamer in die Schulpraxis zu integrieren.

Die Aufzeichnung und Analyse der Mensch-Computer-Interaktion (engl. Human-Computer-Interaction; HCI) mittels geeigneter Werkzeuge kann hierzu einen Erkenntnisgewinn bringenden Beitrag leisten.

Wie kann man die HCI erfassen?

Zur Erfassung der HCI sind viele Designs denkbar. Bspw. können schriftlich protokollierte wissenschaftliche Beobachtungen durch geschulte Experten, Fragebögen, Interviews (Transskripte), Videokameras, digitale Dokumentations- und Analysetools etc. und Kombinationen aus Vorgenanntem zum Einsatz kommen.

Digitale Dokumentations- und Analysetools

Digitale Dokumentations- und Analysetools ermöglichen die digital synchronisierte Erfassung von Nutzerhandlungen und Handlungsabläufe auf und vor dem Bildschirm. Es stehen unterschiedliche Werkzeuge wie bspw. ATLAS.ti, Morae (TechSmith Corporation 2005) oder Videograph zur Verfügung. Da Morae das erste und bis heute am weitesten entwickelte Usability-Aufzeichnungs-Verarbeitungs-Analyse-Export-Werkzeug zur vollständig digitalen Lösung für HCI nach dem verbreiteten ACM-Usability-Standard ist, gehen wir hier näher darauf ein.

Morae besteht aus den drei Komponenten Recorder (dem „Aufzeichnungs-werkzeug“), Observer (einem Werkzeug, welches die Verwaltung der Auf-zeichnung fernab des Probanden ermöglicht) und Manager (dem „Analyse-werkzeuge“). Wie bei allen oben erläuterten Werkzeugen kann auch mit Morae durch den schon klassisch zu nennenden Dreischritt „Aufnehmen“, „Beobachten“ und „Analysieren“ die HCI in empirischen Studien aufge-zeichnet und erforscht werden. Je nach Versuchsdesign kann nach der technischen Vorbereitung die Aufzeichnung mittels des Recorders bzw. Observer erfolgen. Mit dem Manager kann diese im Anschluss ausgewertet und in verschiedenen Dateiformaten exportiert werden.

Analyse-Kriterien der HCI

Je nach Forschungsfrage und Design kann die Analyse sich eher auf quantitative Kriterien (z.B. Wann wird wo wie oft und wie lange geklickt?) oder qualitative Kriterien (z.B. Verhaltensanalysen hinsichtlich Konzentration, Lerntempi oder Motivation der Probanden) oder Verbindungen und gegenseitige Ergänzungen hierauf beziehen.

Was ist technisch überhaupt erfassbar?

Prinzipiell kann das *Verhalten auf dem Bildschirm* mit der Erfassung aller digitalen Ein- und Ausgabeoptionen durch den Nutzer bzw. den Computer, welche über die Hard- und Software erfolgen (z.B. Anzahl und Arten der Mausklicks, Zeitpunkte und -räume der Tastatureingaben) und das *Verhalten vor dem Bildschirm* mit der Erfassung aller mittels Webcam etc.

beobachtbaren Verhaltensweisen (z.B. Augenblinzeln, Lachen, sprachliche Äußerungen („Lautes Denken“)) erfasst werden. Im Morae-Manager kann eine Auswahl der Aufzeichnungsoptionen (z.B. eines vordefinierten „Kriterienkatalogs“) eingestellt werden. Es stellen sich aber Fragen bezüglich der Phänomene, welche zum einen generell nicht direkt Beobachtbar sind (z.B. Kognitionen) oder welche außerhalb des beobachteten Bereiches (z.B. außerhalb des Webcambereiches) stattfinden.

Wichtige Vorteile digitaler Dokumentations- und Analysetools

- Technisch erfassbare Verhaltensweisen und Handlungsabläufe sind auch für Novizen nach kurzer Einweisung relativ leicht handhab- und operationalisierbar. Sie sind intuitiv und praktikabel.
- Objektive Erfassung aller Mausklicks (rechts, links, lang, kurz etc.)
- Objektive Erfassung aller Messzeitpunkte und -räume
- Hermeneutische Verfahren können zum Einsatz kommen
- Reale Untersuchungssituationen sind für qualitative und quantitative Untersuchungsdesigns nutzbar
- Qualitatives Forschungsparadigma: Nützlichkeit („Die Befunde der Untersuchung lassen sich leicht auf das reale Leben übertragen und anwenden“ [Cropley 2005, S. 36])
- Quantitatives Forschungsparadigma: Objektivität („Eine Messung ist dann objektiv, wenn die Meßwerte durch den Untersucher bzw. den Auswerter nicht beeinflusst werden.“ [Wellenreuther 2000, S. 278])
- Möglichkeit zur fruchtbaren Verbindung zwischen qualitativem und quantitativem Forschungsparadigma

Wichtige Nachteile digitaler Dokumentations- und Analysetools

- Gefahr der Verengung auf behavioristisches Forschungsparadigma (siehe auch Abschnitt „Was ist technisch überhaupt erfassbar?“)
- Ohne Begleitung keine Rückfragemöglichkeit an die Probanden (bei Begleitung besteht allerdings die Gefahr der Artefaktebildung)
- Nur technisch Erfassbares kann dokumentiert und damit analysiert werden
- Allgemeiner Ansatz des qualitativen Forschungsparadigmas nicht objektiv lösbar (subjektive affektive Fassung nicht objektiv erfassbar; überzogene Interpretationen etc.)

- Allgemeiner Ansatz des quantitativen Forschungsparadigmas nicht lösbar („Zahlenhuberei“; Generierung „vermeintlicher Objektivität“ etc.)

Schlussbemerkungen

Dokumentations- und Analysetools können zur Erfassung und Auswertung von Mensch-Computer-Interaktionen in qualitativen und quantitativen empirischen Studien eingesetzt werden und diese für sich und in Kombination bereichern. Als „Stand-Alone“-Werkzeug führen sie jedoch nicht automatisch zu einer Generierung von Forschungsergebnissen, vielmehr bedürfen sie ein hierfür qualifizierten Personals u.a. hinsichtlich der zu untersuchenden digitalen Lernumgebung und der Einsatztechnik des Analysetools.

Das rege Interesse am Inhalt des Vortrags lässt den Autor hoffen, dass die bisher häufig vernachlässigte aber dringende Notwendigkeit der Erfassung des Nutzerverhaltens und der Handlungsabläufe auf und vor dem Bildschirm in empirischen Studien, welche digitale Lernumgebungen mit mathematikdidaktischen Bezügen erforschen, als notwendig erkannt wird, um Handlungsleitlinien und Konsequenzen für die didaktisch mehrwertige Gestaltung dieser Umgebungen zu ziehen.

Literatur

Atlas.TI (2010). www.atlasti.com (01.03.2011).

CEN - Europäisches Komitee für Normierung (1995). EUROPÄISCHE NORM EN ISO 9241-10; ICS 331.101.1.-651.2.,681.31.022. Deutsche Fassung. Ergonomische Anforderungen für Bürotätigkeiten mit Bildschirmgeräten. Teil 10: Grundsätze der Dialoggestaltung (ISO 9241-10 : 1995), Abschnitt 2.1.-2.2.

Cropley, A. J. (2005). Qualitative Forschungsmethoden. Eine praxisnahe Einführung. 2. Auflage. Eschborn: Dietmar Klotz.

Issing, L. J. & Klimsa, P. (Hrsg.) (2002). Information und Lernen mit Multimedia und Internet. 3. Auflage. Weinheim: Beltz.

Knapp, O (2010 a). Entwicklung und Evaluation interaktiver Instruktionsvideos für das geometrische Konstruieren im virtuellen Raum. Dissertation. WTM: Münster.

Knapp, O (2010 b). Voraussetzungen für die Nutzung von DRGS im Unterricht. Vortrag auf der 29. Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Geometrie vom 10.-12. September 2010 in Marktbreit. Erscheint voraussichtlich im Tagungsband.

Nielsen, J. (2001). Designing Web Usability. 2. Auflage. München: Markt + Technik.

TechSmith Corporation (2005). Morae. Getting Started Guide. Okemos: TechSmith Corporation.

Videograph (2009). http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/videograph/htmStart.htm (01.03.2011).

Wellenreuther, M. (2000). Quantitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft. Eine Einführung. Weinheim und München: Juventa.

Eva KNOPP[1], Meike GRÜßING[1], Irene NEUMANN[1], Christoph DUCHHARDT[1], Timo EHMKE[2], Aiso HEINZE[1], [1]Kiel / [2]Lüneburg

Erfassung mathematischer Kompetenz von Kindergartenkindern

Ziel des hier vorgestellten Forschungsprojekts ist die theoriegeleitete Entwicklung eines Itempools zur standardisierten Erfassung mathematischer Kompetenz im Kindergartenalter. Derzeit gibt es nur sehr wenige standardisierte Instrumente zur Erfassung mathematischer Kompetenz im Kindergartenalter (vgl. auch Weinert, Doil & Frevert, 2008). Dies sind zum einen qualitative, nicht normierte Verfahren, die eher eine individualdiagnostische Zielrichtung verfolgen wie bspw. das elementarmathematische Basisinterview (EMBI; Peter-Koop, Wollring, Spindeler & Grüßing, 2007). Zum anderen gibt es wenige quantitative Verfahren, die aber nicht die ganze Breite der Kompetenz erfassen. So fokussiert etwa der Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ; v. Luit, v. d. Rijt & Hasemann, 2001) v. a. auf das Mengen- und Zahlvorwissen der Kinder. Kinder zeigen jedoch auch bereits im Kindergartenalter Kompetenzen in weiteren mathematischen Teilbereichen wie beispielsweise im Umgang mit Raum und Form oder mit Daten und Zufall (z.B. Clements & Sarama, 2007). Derzeit fehlt es allerdings an Instrumenten, denen eine breite Konzeptualisierung von mathematischer Kompetenz zugrunde liegt und die gleichzeitig psychometrische Gütekriterien erfüllen.

In dem vorgestellten Forschungsprojekt wurde der Entwicklung von Testitems zur Erfassung der mathematischen Kompetenz von Kindergartenkindern folgende Rahmenkonzeption zugrunde gelegt:

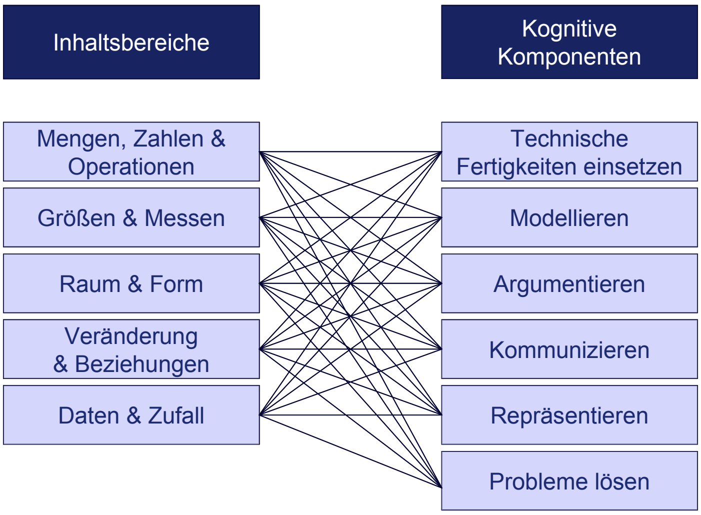


Abbildung 1: Rahmenkonzeption mathematische Kompetenz von Kindergartenkindern

Die Ähnlichkeit mit dem PISA-Literacy Konzept (OECD, 2003) und den Nationalen Bildungsstandards für Mathematik (Kultusministerkonferenz, 2003) ist dabei durchaus intendiert, um diesbezüglich eine Anschlussfähigkeit zu erreichen (eine detaillierte Darstellung der Rahmenkonzeption findet sich in Ehmke, Duchhardt, Geiser, Grüßing, Heinze & Marschick, 2009). Auf Basis dieser Rahmenkonzeption wurden 122 Items verteilt über die einzelnen Inhaltsbereiche und kognitiven Komponenten entwickelt. Beispielhafte Aufgabentypen für die einzelnen Inhaltsbereiche sind in Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Exemplarische Aufgabentypen für die Inhaltsbereiche

Inhaltsbereich	Aufgabentyp	
	Situation	Aufgabenstellung
Mengen, Zahlen & Operationen	Die Handpuppe nennt dem Kind eine vorgegebene Zahl N.	Zähle von der Zahl N an weiter!
Größen & Messen	Vier Kerzen (gleichen Umfangs, unterschiedlicher Länge) liegen vor dem Kind.	Sortiere die Kerzen ihrer Länge nach!
Raum & Form	Dem Kind wird ein Jahrmarktbild gezeigt.	Zeige mir alle Dreiecke!
Veränderung & Beziehungen	Zusammen mit der Handpuppe werden verschiedene „Verteil"-Situationen nachgespielt (Variation: Anzahl der zu verteilenden Gegenstände / Anzahl der Personen).	Wenn die Puppe auch Bonbons möchte, erhalten wir dann mehr / weniger oder genauso viele Bonbons?
Daten & Zufall	Vor das Kind werden vier Bonbondosen mit zwei verschiedenen Bonbonsorten gestellt, wobei die Anteile der jeweiligen Sorten in den Gläsern unterschiedlich groß sind.	Aus welchem der vier Bonbondosen solltest Du ziehen, wenn Du unbedingt einen Erdbeerbonbon haben möchtest!

Aufgrund der Rahmenbedingungen im Kindergarten (geringe Aufmerksamkeit, kein Vertrautsein mit Testsituationen, etc.) wurden die Testitems in ein Interview eingebettet, in dem den Kindern eine Spielsituation und nicht eine Testsituation vermittelt wurde. Um eine fehlerhafte Kompetenzeinschätzung durch Sprachschwierigkeiten (Deutsch als Fremdsprache, Schüchternheit) zu vermeiden, beinhalteten die Aufgaben Material wie z. B. Muggelsteine, Bilder oder Bauklötze; so konnten Kinder ihre Antwort auch durch Zeigen oder Handlungen geben. Der Einsatz von Handpuppen diente schließlich als „Eisbrecher" zum Herstellen des ersten Kontaktes mit dem Kind und in einigen Aufgaben auch als dritte Person.

Die entwickelten Items wurden in einem Rotationsdesign pilotiert, so dass jedes Kind nur eine Teilmenge der 122 Items bearbeitete und die Testdauer pro Kind maximal 30 Minuten betrug. Aufgrund des Rotationsdesigns war eine große Stichprobe nötig, um genügend Informationen über die einzelnen Testitems zu erhalten. Insgesamt nahmen 469 Kinder aus 37 Kindertagesstätten in Kiel und Umgebung sowie in der Stadt Lüneburg an der Studie teil, die im Frühjahr 2010 durchgeführt wurde. Jedes Testitem wurde im Mittel von ca. 120 Kindern bearbeitet Die Stichprobe umfasste 214 Mädchen und 248 Jungen; bei sieben Kindern fehlen die Geschlechtsangaben. Die deutliche Mehrheit der Kinder war fünf bis sechs Jahre alt. Knapp 100 Kinder waren vier Jahre alt. Die Kinder wurden in Eins-zu-Eins-Interviews von geschulten Testleiterinnen befragt.

Die so gewonnenen Daten wurden auf Basis der Item-Response-Theorie (vgl. Rost, 2004) mit dem Programm ConQuest analysiert. Es zeigt sich dabei, dass die Daten adäquat durch ein eindimensionales Modell abgebildet werden konnten. Eine Analyse der Itemschwierigkeiten ergab, dass die entwickelten Items ein breites Kompetenzspektrum abdecken und eine adäquate Verteilung auf der Schwierigkeitsskala aufweisen. Vor dem Hintergrund des Befundes, dass die Spannbreite der Kompetenz von Kindergartenkindern sehr breit ist (vgl. Grassmann et al., 2002; Rinkens, 1997; Stamm, 2005) ist dies eine Voraussetzung für einen guten Test, da nur so die Fähigkeiten der Kinder differenziert erfasst werden können. Der Großteil, d. h. 97 der Items wiesen eine zufriedenstellende Trennschärfe ($\geq .30$) auf. Die EAP/PV Reliabilität des gesamten Tests war mit .81 ebenfalls zufrieden stellend. Der vorliegende Itempool, der auf Basis einer breiten theoretischen Rahmenkonzeption zu mathematischer Kompetenz entwickelt wurde, weist somit gute psychometrische Eigenschaften auf. Offen bleibt noch die empirische Prüfung der Validität, zu der bislang nur erste Hinweise vorliegen.

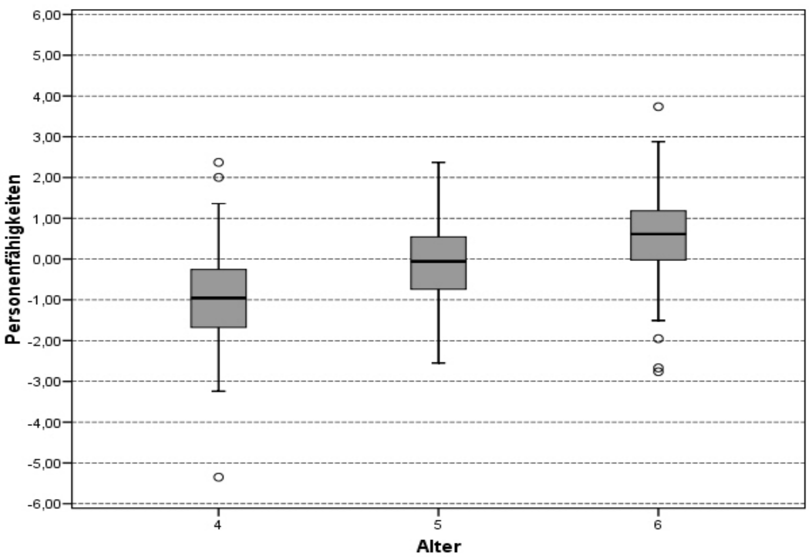


Abbildung 2: Personenfähigkeiten bezogen auf das Lösen der Items zur mathematischen Kompetenz verteilt über die Altersstufen 4bis 6-Jährige

So konnten festgestellt werden, dass die Kinder mit zunehmendem Alter signifikant mehr Items richtig lösten (p=0,00).

Im Rahmen der Testkonstruktion besteht an dieser Stelle weiterer Forschungsbedarf, der durch Kreuzvalidierungen mit anderen Instrumenten zur Erfassung mathematischer (Teil-)Kompetenzen sowie durch Abgrenzung gegen allgemeine kognitive Fähigkeiten gedeckt werden kann.

Literatur

Ehmke, T., Duchhardt, Ch., Geiser, H., Grüßing, M., Heinze, A. & Marschik, F. (2009). Kompetenzentwicklung über die Lebensspanne – Erhebung von mathematischer Kompetenz im Nationalen Bildungspanel. In A. Heinze & M. Grüßing, *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht (S.313-327).* Münster: Waxmann.

Grassmann, M., Klunter, M., Köhler, E., Mirwald, E., Raudies, M. & Thiel, O. (2002). *Mathematische Kompetenzen von Schulanfängern. Teil 1: Kinderleistungen - Lehrererwartungen. Potsdamer Studien zur Grundschulforschung, 30.* Universität Potsdam.

Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003.* Neuwied: Luchterhand.

Luit, J.E.H., v., Rijt, B.A.M., v.d. & Hasemann, K. (2001). *Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung.* Göttingen: Hogrefe.

OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework - Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* Paris: OECD.

Peter-Koop, A., Wollring, B., Spindler, B. & Grüßing, M. (2007). *Das elementarmathematische Basisinterview. Handbuch, Anleitung und Kopiervorlagen.* Offenburg: Mildenberger.

Rinkens, H.-D. (1997). *Arithmetische Fähigkeiten am Schulanfang, Universität Paderborn*. Online verfügbar unter: www.rinkens-hd.de/_data/AritFaeh.pdf. Zugriff am 02.03.2011

Rost, J. (2004). Lehrbuch *Testtheorie - Testkonstruktion (2.Aufl.).* Bern: Hans Huber.

Stamm, M. (2005). *Zwischen Exzellenz und Versagen. Frühleser und Frührechnerinnen werden erwachsen.* Zürich: Rüegger.

Weinert, S., Doil, H. & Frevert, S. (2008). Kompetenzmessungen im Vorschulalter. In Roßbach, H.-G. & S. Weinert (Hrsg.), *Kindliche Kompetenzen im Elementarbereich: Förderbarkeit, Bedeutung und Messung (S. 89-209).* Berlin: BMBF.

Jana KRÄMER, Stanislaw SCHUKAJLOW, Werner BLUM, Rudolf MESSNER, KASSEL; Reinhard PEKRUN, MÜNCHEN

Mit Vielseitigkeit zum Erfolg? Strategische Unterstützung von Lernenden in einem „methoden-integrativen“ Unterricht mit Modellierungsaufgaben

Im vorliegenden Beitrag wird über quantitative Ergebnisse und qualitative Erkenntnisse aus einer Pilotstudie zu „methoden-integrativem“ Unterricht mit Modellierungsaufgaben zu den Themenbereichen Satz des Pythagoras und Lineare Funktionen in neunten Realschulklassen berichtet. Diese Pilotstudie fand im Rahmen des DFG-Projekts DISUM statt, das sich im Kern mit der Frage befasst, wie die Entwicklung einer kognitiv anspruchsvollen Fachkompetenz wie der Modellierungskompetenz im Unterricht wirksam gefördert werden kann. Die untersuchte Unterrichtsform verbindet einzelne, in isolierten Teilstudien bereits erprobte Elemente, nämlich die „Lernstrategie Lösungsplan“ und eine optimierte „ko-konstruktive Gruppenarbeit“.

In früheren Untersuchungen („DISUM-Hauptstudien I und II“) wurde festgestellt, dass „operativ-strategischer“ Unterricht mit ko-konstruktiver Gruppenarbeit, individueller adaptiver Lernunterstützung durch die Lehrenden und Reflexionsphasen im Plenum deutlich besser für die Vermittlung von Modellierungskompetenz geeignet ist als „direktiver“ fragend-entwickelnder Unterricht mit Phasen individueller Schülerarbeit (Leiss et al., 2008). Normativ waren die Fortschritte jedoch noch nicht befriedigend. Aus qualitativen Beobachtungen von Unterrichtssequenzen und theoretischen Überlegungen wurden Elemente herausgearbeitet, die Verbesserungspotential für die operativ-strategische Unterrichtsform beinhalten.

Studie: Zur Wirkung des methoden-integrativen Unterrichts

Auf Grundlage der so gewonnenen Erkenntnisse war es das Ziel, ein neues Unterrichtsdesign zu entwickeln, dass noch besser geeignet ist, Schülern Modellierungskompetenz zu vermitteln. Die leitende Forschungsfrage der Untersuchung war, ob auch dieses neue „methoden-integrative“ Unterrichtsdesign signifikante Lernfortschritte bewirkt und ob es Vorteile im Vergleich mit dem operativ-strategischen Format mit sich bringt.

Elemente des methoden-integrativen Designs

Die Basis des methoden-integrativen Unterrichts bilden wie in allen bisherigen Untersuchungen in DISUM anspruchsvolle *Modellierungsaufgaben*.

Die „*Lernstrategie Lösungsplan*“ ist ein vierschrittiger Arbeitsplan für den Umgang mit solchen Aufgaben, der die Schüler sowohl in der Bearbeitung einer konkreten Aufgabe unterstützen kann als auch auf einer Metaebene allgemeine Bearbeitungsstrategien (z.B. “Situation genau vorstellen“) bereitstellt und der sich in der empirischen Erprobung als wirkungsvoll herausgestellt hat (Schukajlow et al., 2010; Schukajlow, Blum, & Krämer, 2011).

Weiter wurde eine feiner strukturierte Form der *ko-konstruktiven Gruppenarbeit* (Reusser, 2005; Slavin, 1996) entwickelt, die verstärkt den individuellen Konstruktionsprozess des einzelnen Schülers fördern soll.

Das Arbeiten in Gruppen ermöglicht eine hohe Selbständigkeit der Schüler. Zugleich erscheinen Phasen, in denen die Lehrkraft neue Verfahren im Plenum vorstellt, als hilfreich. Daher wurde das operativ-strategische Design durch solche direktiven Phasen angereichert, in denen die *Lehrperson als Modell* (Bandura & Kober, 1994) Modellierungsaufgaben löst und die Handhabung des Lösungsplans vorführt.

Schließlich wurden, um den Unterschied zwischen der Testsituation und der unterrichtlichen Bearbeitungsform etwas zu mildern, neben den Gruppenphasen in verstärktem Umfang auch *Übungssequenzen in Einzelarbeit* in das Design eingebaut.

Methode der Untersuchung

In einer Pilotstudie im Frühjahr 2010 wurde der eben beschriebene methoden-integrative Unterricht an 32 Schülern in zwei (aus Vergleichbarkeitsgründen auf je 16 Schüler reduzierten) Realschulklassen der Jahrgangsstufe 9 im Rahmen einer 10-stündigen Unterrichtseinheit mit Modellierungsaufgaben zu den Themenbereichen Satz des Pythagoras und Lineare Funktionen erprobt.

Die Unterrichtseinheit wurde gerahmt durch zwei Leistungstests. Für diese wurde ein Rotationsdesign angewandt, bei dem ein Schüler im Vor- und Nachtest je unterschiedliche Aufgaben zu bearbeiten hatte. Im Test wurden Modellierungsaufgaben zu den Kontexten Satz des Pythagoras und Lineare Funktionen eingesetzt. Mit Hilfe mehrerer identischer Items konnte die erhobenen Schülerleistungsparameter (Raschskalierung) auf der Skala der 2007 durchgeführten Hauptstudie II verankert werden. Dies ermöglicht einen Vergleich des operativ-strategischen mit dem neuen methoden-integrativen Unterrichtsdesigns. Die Reliabilitäten lagen dabei alle im guten bis sehr guten Bereich.

Ergebnisse der Studie

Die Testergebnissen zeigen, dass mit dem methoden-integrativen Unterricht in beiden Inhaltsbereichen signifikante Leistungssteigerungen erreicht wurden. Zudem erwies sich dieses Design in einer Varianzanalyse mit Messwiederholung gegenüber dem operativ-strategischen Design als die signifikant effektivere Lehr-/ Lernform.

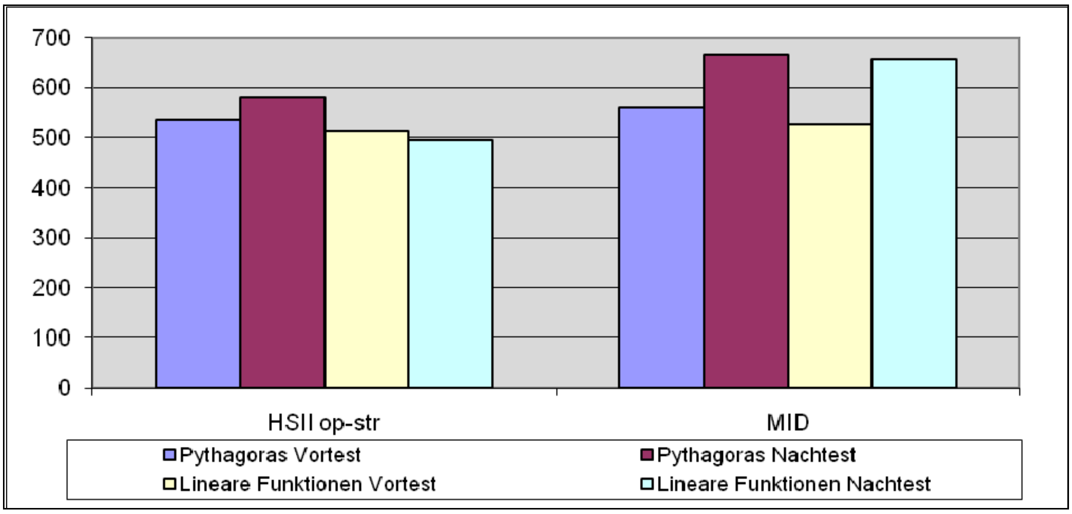


Abbildung 1. Modellierungsleistungen im Vor- und Nachtest.

Zusatzuntersuchung: Zur Entwicklung von Strategiewissen

Seit längerem wird beim Strategiewissen zwischen den vorhandenen (bekannten) und den tatsächlich angewandten Strategien unterschieden (u.a. Artelt, 2006). Zudem gibt es Hinweise, dass das Wissen über Strategien insbesondere beim Aufbau von Kompetenzen eine wichtige Rolle spielt. In den Aufgabenbearbeitungen der Leistungstest lässt sich – soweit das in schriftlichen Dokumenten möglich ist – beobachten, welche Strategien von den Schülern angewandt wurden. Möglich ist, dass darüber hinaus Strategien bekannt sind, die entweder in der schriftlichen Lösung nicht erkennbar sind (z.B. mehrfaches Lesen oder genaues Vorstellen der Situation) oder nicht angewendet wurden (beispielsweise das Zeichnen einer Skizze oder das Markieren von Angaben). Um das Strategiewissen zu erfassen, wurde ein neues Messinstrument entwickelt, über das wir hier kurz berichten.

Nach den Modellierungsaufgaben zur Leistungsmessung wurden den Schülern Fragebögen vorgelegt, in denen sie in einem offenen Antwortformat einem fiktiven Mitschüler „Bearbeitungstipps“ zu zwei Modellierungsaufgaben geben sollten. Diese beiden Aufgaben haben die Schüler zuvor im Test in fast identischer Form bearbeitet. Die Analyse der Schülertipps lässt eine Steigerung des Strategiewissens vermuten. In der Nachtestbefragung haben die Probanden deutlich mehr strategisch orientierte und besser zu den gegebenen Aufgaben passende Hinweise formuliert. Erste Analysen offenbaren gewisse Muster zwischen Strategiewissen und Testleistung. Ausführliche Untersuchungen zum Zusammenhang zwischen den als Tipp angegeben und den (erfolgreich?) angewandten Strategien stehen noch aus.

Zusammenfassung

Auf Grundlage des bereits erprobten operativ-strategischen Unterrichtsdesigns wurde ein differenzierteres Format zur Vermittlung von Modellierungskompetenz im Mathematikunterricht entwickelt und auf seine Effektivität untersucht. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass dieser methodenintegrative Unterricht positive Wirkungen auf die Leistungen und auf das Strategiewissen von Lernenden hat. In Bezug auf die Leistungsentwicklung ist dieses Format tatsächlich effektiver als der operativ-strategische Unterricht. Ein nächster Schritt, um diese Erkenntnisse für den „normalen" Schulalltag nutzbar zu machen, wird nun die Übertragung dieses Formats auf ganze Schulklassen, längere Unterrichtsphasen und auch auf weitere Inhaltsbereiche sein.

Literatur

Artelt, C. (2006). Lernstrategien in der Schule. In: H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien*. Göttingen: Hogrefe, 337-351.

Bandura, A. & Kober, H. (1994). *Lernen am Modell: Ansätze zu einer sozial-kognitiven Lerntheorie*. Stuttgart: Klett.

Leiss, D., Blum, W., Messner, R., Müller, M., Schukajlow, S. & Pekrun, R. (2008). Modellieren Lehren und Lernen in der Realschule. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008.* Münster: WTM-Verlag, 77–80.

Reusser, K. (2005). Problemorientiertes Lernen. In: *Beiträge zur Lehrerbildung, 23*(2), 159–182.

Schukajlow, S., Blum, W. & Krämer, J. (2011). Förderung der Modellierungskompetenz durch selbständiges Arbeiten im Unterricht mit und ohne Lösungsplan. Erscheint in *Praxis der Mathematik in der Schule*.

Schukajlow, S., Krämer, J., Blum, W., Besser, M., Brode, R., Leiss, D. & Messner, R. (2010). Lösungsplan in Schülerhand: zusätzliche Hürde oder Schlüssel zum Erfolg? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*. Münster: WTM-Verlag, 771-774.

Slavin, R. E. (1996). Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. In: *Contemporary Educational Psychology, 21,* 43–69.

Christina KRAUSE, Bremen

Formen und Funktionen des Zeichengebrauchs im mathematischen Erkenntnisprozess

Anders als in anderen Wissenschaften sind mathematische Objekte selbst nicht greifbar und können daher nur über Zeichen zugänglich gemacht werden. Dies wird besonders deutlich bei der Konstruktion mathematischen Wissens in sozialen Interaktionen, z.B. wenn mehrere Schüler gemeinsam an einem mathematischen Problem arbeiten. So werden unterschiedliche semiotische Ressourcen genutzt, um Beobachtungen und Erkenntnisse mitzuteilen, oder auch, um das gemeinsame Arbeiten zu organisieren.

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der Vielfalt der gebrauchten Zeichenarten und ihren Beziehungen untereinander, sowie mit ihren Funktionen in kollektiven mathematischen Erkenntnisprozessen.

Theoretischer Rahmen

Nach Peirce ist ein Zeichen stets eingebunden in eine triadische Relation, bestehend aus Objekt, Zeichen (Repräsentamen) und Interpretant, in dem das Zeichen zwischen Objekt und Interpretanten vermittelt: „Das Zeichen determiniert den Interpretanten, das Objekt auf eine bestimmte Weise zu repräsentieren“ (Peirce CP 2.228). Der Interpretant ist selbst ein Zeichen und repräsentiert das vom Interpretierenden gedachte „unmittelbare Objekt“ (Hoffmann 2005). Diese Auffassung von Zeichen erlaubt es, verschiedene Zeichen, die in Zusammenhang mit einer bestimmten Idee oder einem sich in der Interaktion entwickelndem Objekt gebraucht werden, zueinander in Beziehung zu setzen. Diesen Ansatz verfolgt auch Arzarello (2006) mit seinem Modell des semiotischen Bündels. Hierbei handelt es sich um eine dynamische Struktur, bestehend aus einer Menge von Zeichen und ihren (zeitlichen) Beziehung zueinander. Mit diesem Modell werde ich sowohl synchron wie auch diachron verlaufende Semioseprozesse analysieren, um „das komplexe Ineinandergreifen von Gesten, Sprache und Inskriptionen beim Mathematiklernen“ (Arzarello et al. 2009, 106) zu beschreiben. Mit Sprache sind hierbei lautsprachliche Äußerungen gemeint. Ich werde diesen Begriff im Folgenden beibehalten.

Zur Analyse der einzelnen Komponenten bediene ich mich der Sprechakttheorie nach Austin (1972), der Kategorisierung von Gesten nach McNeill (2005) und der Diagrammatisierung nach Peirce.

Austin unterscheidet bei lautsprachlichen Äußerungen drei Ebenen. Neben der Inhaltsebene (lokutionär) wird auch gehandelt, indem man etwas sagt (illokutionär), um so eine Reaktion hervorzurufen (perlokutionär). Eine Analyse der sprachlichen Äußerungen ist also sinnvoll, um zu beobachten, welche Funktionen die Sprache einnehmen kann, um diese mit den Funktionen der weiteren Zeichen in Zusammenhang zu bringen. Treten Gesten zusammen mit Sprache auf, so gibt es nach McNeill fünf verschiedene Formen des Auftretens, von denen allerdings nur zwei in Verbindung mit mathematischen Objekten relevant sind: ikonische Gesten und Zeigegesten. Als Inskription verstehe ich alles, was in irgendeiner Weise festgehalten wird. Drückt diese Inskription eine Relation aus, so handelt es sich nach Peirce um ein Diagramm. Nach Hoffmann gilt das Arbeiten hieran in der Peirceschen Semiotik als zentrales Mittel zur Erkenntnisentwicklung (Hoffmann 2005).

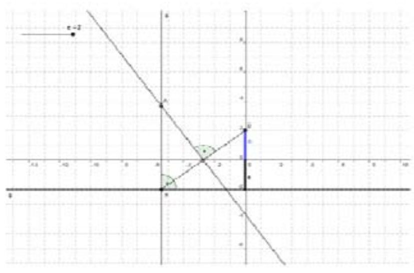
Methodische Überlegungen

Zu einer ersten Analyse nutze ich Daten, die im Rahmen des deutsch-israelischen Projektes „Effective knowledge construction in interest-dense situations“ (gefördert von der German-Israeli-Foundation, grant 946-357.4/2006) erhoben wurden. Hier beziehe ich mich auf ein leistungsstarkes Schülerinnenpaar (10. Klasse), das eine Aufgabe zur Parabel als geometrischen Ort bearbeitet. Es wurden Videoaufzeichnungen aus drei verschiedenen Blickwinkeln (frontal, Monitor, Schreibprozess) erstellt, wodurch bereits eine semiotische Perspektive berücksichtigt wird. Transkribiert wurden sowohl die sprachlichen Äußerungen als auch die nicht-sprachlichen Handlungen. Zunächst erfolgt eine Identifizierung, Kategorisierung und Analyse der auftretenden Zeichenarten. Um diese semiotischen Ressourcen miteinander in Beziehung zu setzen, schließt sich eine Analyse des semiotischen Bündels Sprache – Geste – Inskription an.

Die Aufgabe: „Welche Kurve siehst du?“

In der Aufgabe beschäftigen sich die Schüler mit der Parabel als geometrischem Ort. Hierzu stehen ihnen mehrere Repräsentationen einer Parabel zur Verfügung, wobei die erste zunächst gemäß einer Konstruktionsanweisung erstellt werden muss. Hierfür sollen die Schülerinnen einen beliebigen Punkt C auf der unteren, längeren Kante eines DIN A4-Blattes auf einen gegebenen Punkt M knicken, die Senkrechte zur unteren Kante des Blattes durch den Punkt C zeichnen, und den Schnittpunkt dieser Senkrechten mit dem Knick markieren. Dies sollen sie für verschiedene Punkte C wiederholen bis sie eine Kurve erkennen.

Die markierten Punkte liegen auf einer Parabel und die Knicke repräsentieren



sowohl die Tangenten an der Kurve an dem zugehörigen markierten Schnittpunkt, wie auch eine Spiegelachse, an der C auf M gespiegelt wird. Daraufhin arbeiten die Schülerinnen mit der dynamischen Geometrie-Software Geogebra an einer Umgebung, in der sie den variablen Punkt C nach links und rechts verschieben und so eine Spur erzeugen können. Zudem können sie mit einem Schieberegler den Abstand zwischen dem festen Punkt M und der y-Achse variieren. Die Abbildung links zeigt eine mögliche Situation. Diese bekommen die Schüler als Ausdruck, auf dem Markierungen vornehmen können. Die Aufgabe besteht darin, die Kurve als Parabel zu identifizieren, dies durch eine Funktionsvorschrift zu begründen und nach Vorbild des Kreises eine Definition der Parabel als Punktmenge zu formulieren.

Erste Beobachtungen und Ausblick

Die Schülerinnen verwenden nicht-sprachliche Zeichen beinahe ausnahmslos in Zusammenhang mit Sprache. So erlauben z.B. ikonische Gesten als flüchtige Repräsentationen das Austesten einer Idee. Erweisen sich diese dann als viabel, so kann sich später durch Gebrauch und Modifizierung dieser Geste auf sie berufen und an bisherige Ergebnisse angeknüpft werden. Solche Zeichen nennt Arzarello „basic signs“ (Arzarello & Paola 2007). Ein Beispiel hierfür ist die Etablierung der vertikal vor dem Körper durchgeführten Handbewegung zur Darstellung der Symmetrieachse der Parabel (siehe rechts). Ikonische Gesten werden hier auch genutzt, um Ideen auszudrücken, die noch nicht ausgebildet genug sind, um sie in Worte zu fassen und so dem Arbeitspartner einen Denkansatz mitzuteilen, an den er anknüpfen kann.

Treten Inskriptionen synchron zu Sprache auf, so unter anderem wenn Erkenntnisse für den Arbeitspartner nachvollziehbar gemacht werden. Bei der diachronen Entwicklung von Sprache und Inskriptionen muss man unterscheiden, in welcher Richtung diese Entwicklung erfolgt. Ähnlich zum synchronen Gebrauch beziehen sich die Schüler in sprachlichen Äußerungen auf bestehende Inskriptionen, um zu erklären, wieso sie diese produziert oder manipuliert haben oder was ihnen durch sie aufgefallen ist. Andersrum nutzen sie Sprache, um gemeinsame Lösungsstrategien oder Formulierungen abzuklären, die in der Folge verschriftlicht werden. Hier werden durch die Bezugnahme der Sprache auf die Inskription individuelle Erkenntnisse mitgeteilt, um dessen Tragfähigkeit prüfen zu lassen und um eine gemeinsame Arbeitsbasis zu halten. Bei der Entwicklung von Sprache zu Inskription werden die Ergebnisse gemeinsam ausgehandelt.

Das komplexeste Zeichenbündel ist beobachtbar, wenn die Schülerinnen sowohl Gesten als auch Inskriptionen in Verbindung mit sprachlichen Äußerungen benutzen, um sich einer Idee zu nähern. Hierbei fällt in Zusammenhang mit den Gesten zweierlei auf: Zum Einen gebrauchen die Schüler Zeigegesten ausschließlich synchron zu Sprache und Inskriptionen so, dass sie zwischen deiktischen Phrasen und Gezeigtem vermitteln. Zum Anderen treten ikonische Gesten hier vor Allem in der zweiten Hälfte der Aufgabenbearbeitung auf. Dies erkläre ich dadurch, dass die Schüler mit fortschreitender Bearbeitung auf ein immer größeres Repertoire solcher Gesten als basic signs zurückgreifen können.

Die Produktion eines Diagrammes in Folge einer solchen gestischen Darstellung lässt sich beobachten, wenn viele Komponenten, gestische wie auch sprachliche, ein solches basic sign ergänzen. Durch das Erstellen einer Inskription findet somit eine Entlastung zugunsten des Schaffens von Übersichtlichkeit statt.

Anhand dieser ersten Beobachtungen lässt sich erkennen, dass nicht-sprachliche Zeichen im mathematischen Erkenntnisprozess gebraucht werden, um sprachliche Ausdrucksmöglichkeiten zu ergänzen. Besonders hilfreich scheint die Verwendung semiotischer Ressourcen zu sein, wenn verschiedene (nicht zwingend konkurrierende) Aspekte eines mathematischen Objekts einbezogen werden. Das Etablieren von basic signs kann hierbei wichtig sein, um gemeinsam eine Art Code zu generieren, der den mathematischen Diskurs erleichtert. Um zu dies zu prüfen und zu untersuchen, welche Hindernisse sich hierdurch ergeben können, werden weitere Daten gesichtet.

Literatur

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Relime, Numero Especial*, 267-299

Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: The role of the teacher. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Hrsg.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 17-24.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*. 70, 97-109

Austin, J. L. (1972). Zur *Theorie der Sprechakte (How to do things with words)*. Stuttgart: Reclam.

Hoffmann, M. H. G. (2005). *Erkenntnisentwicklung*. Philosophische Abhandlungen Bd. 90. Frankfurt am Main: Klostermann.

McNeill, D. (2005). *Gesture and thought*. Chicago: University of Chicago Press.

Peirce, C. S. (1931-1958). Collected Papers (Vol. I-VIII) In C. Hartshorne, P. Weiss, A. Burks (Hrsg.). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Stefan KRAUSS, Regensburg, Werner BLUM, Kassel, Mareike KUNTER, Frankfurt, Jürgen BAUMERT, Berlin, Michael NEUBRAND, Oldenburg, Uta KLUSMANN, Kiel

Vorstellung einer Buchneuerscheinung (2011) über die COACTIV-Studie

Zusammenfassung

Im Frühjahr 2011 ist ein Sammelband über zentrale Ergebnisse der COACTIV-Studie erschienen (Hrsg.: M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand; Münster: Waxmann) mit dem programmatisch zu verstehenden Titel Professionelle Kompetenz von Lehrkräften – Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. In diesem Beitrag soll ein Überblick über die Inhalte dieses Buches gegeben werden. Da die Tests zum fachdidaktischen Wissen und zum Fachwissen (die in zwei der insgesamt 19 Kapitel des Buches behandelt werden) bereits auf mehreren Tagungen und in Publikationen vorgestellt wurden, soll dabei zusätzlich exemplarisch auf zwei weitere Lehrermerkmale eingegangen werden, die ebenfalls einen nachweislichen Einfluss auf die Unterrichtsqualität haben: Spezifische subjektive Überzeugungen und motivationale Orientierungen. Der vorliegende Beitrag soll insofern als "Appetitanreger" zum Weiterlesen dienen.

Die COACTIV-Studie

In der COACTIV-Studie, die im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms BiQua (Bildungsqualität von Schule) gefördert wurde, wurden 2003 und 2004 deutsche Mathematiklehrkräfte von PISA-Klassen befragt und getestet. Ziel der Studie war die Erfassung professioneller Kompetenzen (z.B. fachdidaktisches Wissen und Fachwissen), professioneller Überzeugungen (z.B. Sichtweisen auf das Fach Mathematik sowie lerntheoretische Überzeugungen), motivationaler Orientierungen (z.B. Lehrer-Enthusiasmus) sowie des Berufserlebens (z.B. Fähigkeit zur Selbstregulation) von Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe. Da die Stichprobe aus Lehrkräften von PISA-Klassen bestand, lagen zur Datenanalyse außerdem entsprechende Schülerdaten dieser Lehrkräfte vor. Dies ermöglicht statistische Analysen zur Bedeutung der einzelnen Lehrermerkmale für Unterrichtsqualität und Schülerleistung.

Nachdem bereits zahlreiche Publikationen (die ca. 50 bisherigen Publikationen werden am Ende des Buches aufgelistet) zur Studie veröffentlicht sind, gibt das Buch nun einen kohärenten Überblick über das COACTIV-Forschungsprogramm, in dem noch einmal wichtige Aspekte der bisherigen

Veröffentlichungen sowie neue relevante Aspekte systematisch strukturiert vorgestellt werden. Weiterhin wird auch von Ergebnissen einiger Anschlussstudien berichtet (z.B. der Referendariatsstudie COACTIV-R oder der Konstruktvalidierungsstudie), die das COACTIV-Forschungsprogramm ergänzen.

Überblick über das Buch

Nach einigen einleitenden Bemerkungen gliedert sich das Buch (auf 369 Seiten) in die folgenden vier Teile:

Im Teil A (5 Kapitel, ca. 100 Seiten) werden theoretische, methodische und empirische Grundlagen dargestellt wie zum Beispiel das *Modell der Lehrerkompetenz* und das *Modell der Unterrichtsqualität.*

In Teil B (7 Kapitel, ca. 160 Seiten) werden Aspekte der professionellen Kompetenz vorgestellt, die nach COACTIV den Kern der Lehrerprofessionalität ausmachen und für die im Rahmen des Projekts Erhebungsinstrumente konstruiert bzw. adaptiert wurden. Wesentliche Aspekte, zu denen Ergebnisse vorgestellt werden, sind beispielsweise *fachdidaktisches Wissen, Fachwissen, pädagogisch-psychologisches Wissen* (der hierfür konstruierte Test wurde in der COACTIV-Referendariatsstudie eingesetzt), *diagnostische Fähigkeiten, Überzeugungen, Motivation* und *Selbstregulation*.

In Teil C (3 Kapitel, ca. 30 Seiten) wird die Entwicklung der professionellen Kompetenz thematisiert. Hier werden die *individuellen Voraussetzungen der COACTIV-Lehrkräfte* sowie das *Lernen an der Universität und im Beruf* analysiert.

Im abschließenden Teil D (3 Kapitel, ca. 40 Seiten) werden die Ergebnisse noch einmal im Gesamtkontext diskutiert und ein kurzer Ausblick auf die Bedeutung der Studie für die Lehrerbildung gegeben. In einem Extrakapitel werden wichtige Aspekte der Studie in einschlägige Forschungstraditionen der Mathematikdidaktik eingeordnet. Es wird diskutiert, welche Fortschritte mit der Studie dabei erzielt werden konnten und wo weitere Ansatzpunkte für zukünftige mathematikdidaktische Forschung liegen könnten.

Im Folgenden sollen einige zentrale Aspekte und Ergebnisse der Studie exemplarisch herausgegriffen werden.

Die COACTIV-Modelle für Lehrerkompetenz und Unterrichtsqualität

In COACTIV 2003/2004 und PISA 2003/2004 wurden im Wesentlichen Merkmale aus drei Bereichen erhoben (grob vereinfacht in Abbildung 1 dargestellt): Aspekte der Lehrerkompetenz (erfasst durch COACTIV-

Lehrerfragebögen und Tests), Unterrichtsmerkmale (im Wesentlichen erfasst durch COACTIV-Lehrerfragebögen und PISA-Schülerfragebögen zum Unterricht in den PISA-Klassen) und Schülermerkmale (erfasst durch PISA-Schülerfragebögen und PISA-Kompetenztests).

Abbildung 1: Die drei in COACTIV 03/04 und PISA 03/04 untersuchten Bereiche

Das Lehrerkompetenzmodell umfasst – jeweils noch weiter unterteilt – Professionswissen, Überzeugungen und Werthaltungen, motivationale Orientierungen und Selbstregulation (vgl. Kapitel 2). Das COACTIV-Modell der Unterrichtsqualität umfasst – ebenfalls weiter unterteilt – das Potential zur kognitiven Aktivierung, Aspekte der Klassenführung und die konstruktive Unterstützung von Schülerinnen und Schülern (vgl. Kapitel 5). Die Pfeile in Abbildung 1 verdeutlichen die Annahme, dass Merkmale der Lehrerkompetenz einen bedeutsamen Einfluss auf Aspekte der Unterrichtsqualität haben und dass die Unterrichtsqualität wiederum einen bedeutsamen Einfluss auf Schülermerkmale hat. Da PISA 2003 in Deutschland zu einer Längsschnittstudie erweitert wurde (die 9. PISA-Klassen wurden ein Jahr später als 10. Klassen noch einmal untersucht), besteht die Möglichkeit, den Einfluss von Merkmalen der Lehrerkompetenz und der Unterrichtsqualität auf die *Veränderung* von Schülermerkmalen (z.B. auf den Lern*zuwachs* in Mathematik) zu untersuchen. Im Folgenden sollen dazu einige Ergebnisse kurz vorgestellt werden.

Die Bedeutung von Lehrermerkmalen für Unterrichtsqualität und den Lernfortschritt der Schülerinnen und Schüler

Die hier vorgestellten Ergebnisse können im Folgenden nur angedeutet werden, für genauere Informationen und methodische Hintergründe sei auf die angegebenen Kapitel verwiesen.

- Das fachdidaktische Wissen der Lehrkräfte (zur Konzeptualisierung und Operationalisierung siehe Kapitel 7) hat einen signifikanten Einfluss auf die kognitive Aktivierung und die konstruktive Unterstützung von Schülerinnen und Schülern, nicht aber auf den dritten Aspekt der Unterrichtsqualität, die Klassenführung. Das fachdidaktische Wissen hat weiterhin einen nachweisbaren Einfluss auf den Lernzuwachs (siehe Kapitel 8).
- Das Fachwissen der Lehrkräfte hat *keinen* vergleichbaren Einfluss auf Unterrichtsqualität und Schülermerkmale (zur Messung des Fachwis-

sens siehe Kapitel 7 und zur fehlenden Vorhersagekraft für Unterrichtsqualität und Schülerleistung siehe Kapitel 8).

- Ob eine Lehrkraft eher transmissive oder konstruktivistische Überzeugungen über das Fach und über das Lernen von Mathematik hat (siehe Kapitel 11), wirkt sich auf das Potential zur kognitiven Aktivierung und auf die konstruktive Unterstützung aus, aber nicht auf Aspekte der Klassenführung. Weiterhin zeigt sich ein signifikanter Einfluss auf den Lernzuwachs der Schülerinnen und Schüler.
- Interessante Ergebnisse ergeben sich auch für den Enthusiasmus der Lehrkräfte, der in COACTIV in *Fach*enthusiasmus und in *Unterrichts*enthusiasmus getrennt wurde (Kapitel 12). Nur der Unterrichtsenthusiasmus, nicht aber der Fachenthusiasmus lässt sich dabei als bedeutsamer Prädiktor für den Lernzuwachs, aber auch für den Zuwachs an Freude an der Mathematik bei den Schülerinnen und Schülern identifizieren.
- Untersucht man neben dem Leistungszuwachs als weitere Unterrichtszielkriterien noch den Zuwachs an Freude an Mathematik und den Abbau von Leistungsangst, ergibt sich in Bezug auf die Aspekte der Unterrichtsqualität folgendes Bild (vgl. ausführlich Kapitel 5): Die Klassenführung hat einen signifikanten Einfluss auf den Leistungszuwachs und die erlebte Freude an Mathematik, die kognitive Aktivierung (lediglich) auf den Leistungszuwachs, und eine konstruktive Unterstützung von Schülerinnen und Schülern trägt zur Steigerung der Freude und zum Abbau von Leistungsängstlichkeit bei.

Im Diskussionsteil des Buches werden die Ergebnisse noch einmal zusammenfassend mit Befunden anderer Studien verglichen, die Generalisierbarkeit der Ergebnisse (z.B. auf andere Fächer) diskutiert sowie ein erster Ausblick auf die mögliche Bedeutung des Forschungsprogramms für die Lehrerbildung gegeben.

Felix KRAWEHL, Hamburg

Bausteine der (e-)Portfoliomethode für mathematikdidaktische Lehrveranstaltungen

Der vorliegende Beitrag berichtet aus einem Entwicklungsprojekt aus der Lehrerbildung. Gegenstand dieses Projektes war es, mit Hilfe der Portfolio-Idee konzeptionell und methodisch konsistente 'Blended Learning'-Seminar-Szenarien zu formen.

Ich möchte mit diesem Beitrag reflektieren, welche Möglichkeiten in der ePortfolioarbeit insbesondere für die mathematikdidaktische Lehrerbildung[1] liegen und welche Anforderungen und Prinzipien solcher Arbeit sich aus den Erprobungen ergeben haben. Der Beitrag schließt mit einer Schlussfolgerung zum didaktischen Ort der Konzeption.

„Portfolio" – eine Metapher mit Potentialen für D²M Veranstaltungskonzeptionen

Ausgangspunkt der Entwicklung waren Annahmen zu ePortfolio-Potentialen auf den Ebenen der Metaphorik, der inhaltlichen Substanz der Lernprodukte sowie der Möglichkeiten digitaler Seminaröffentlichkeit.

Aus der Breite der Diskussion (auch aktueller GDM-Beiträge) zur ePortfolioarbeit spricht eine wahrgenommene Nützlichkeit der Idee für die Lehrerbildung. Ich sehe in deren Mittelpunkt eine heuristische Qualität; eine Analogie zu systemischen Techniken, wie etwa der Frage: „Wo möchten Sie in 10 Jahren stehen? Was können Sie jetzt tun, um dorthin zu gelangen?«[2] Die Portfolio-Idee suggeriert die Antizipation des angestrebten Lernziels, eines Expertentums – zum Beispiel als Lehrerin –, und fordert zur Orientierung aktueller Lernaktivitäten auf dieses Ziel auf.[3]

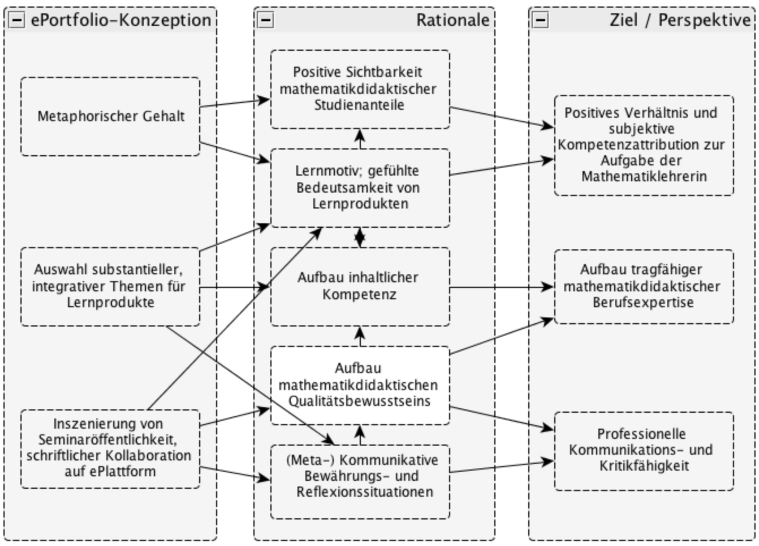
1 D²M, Didaktik der Didaktik der Mathematik; die nützliche Verkürzung verdanke ich Joseph Klep (Gießen) auf einem Workshop zu diesem Thema auf der Herbsttagung des AK Grundschule in Tabarz.

2 Wem dies eine suspekte Referenz sind, der denke an Polyas Heuristiken (Polya, 1949)□.

3 Darin steckt ein milder pragmatischer Kurzschluss – die Gleichsetzung von Aktivität und Produkt mit Lernerfolg –; auch ist die heuristische Suggestion nicht zu verwechseln mit einer validen Aussage über Lernerfolge oder auch nur Angemessenheit des antizipierten Berufsbildes und seiner Erfordernisse. Beiderlei Einschränkungen sind jedoch hinnehmbar, da die Funktion des Heurismus die ist, dem lernenden Subjekt zu ermöglichen, unterstützt von einem Gefühl von Bedeutsamkeit, von Kohärenz von Maßnahme und Ziel, konkrete Schritte zu ergreifen.

Die Mathematikdidaktik verfügt über erprobte Themen für die Lehrerbildung, die – auch ohne Berufung auf Portfolioarbeit – die Beziehung von Studienleistungen zu Berufsanforderungen unmittelbar einsichtig machen und durch ihre inhaltliche Substanz Kompetenzerwerb auf verschiedenen Dimensionen ermöglichen[4]; bspw. klinische Interviews (vgl. Selter & Spiegel, 1997) oder die Erprobung substantieller Lernumgebungen (vgl. Krauthausen, 1998). Zu den Vorteilen solcher 'Substantieller Lernumgebungen für die Lehrerbildung' schreiben die Autoren a. a. O.

Die Rahmung von Veranstaltungen im ePortfolio-Format verspricht neben dem genannten Sinnangebot die Verfügbarkeit einer (Online) Seminaröffentlichkeit für die Rezeption und kollegiale Qualitätssicherung von Beiträgen. Diese ergänzen die heuristische und inhaltliche Substanz der Lernaufgaben um einen Aktions- und Rezeptionsraum mit einer sozialen und abstrakteren Perspektive. Die Ausbildung fachlich-kollegialer Kommunikations- und Kritikfähigkeit entspricht professionelle Kompetenzerwartungen und denen an wissenschaftsbasierte Qualitätssicherung in der Lehrerprofession. Zusammenfassend hier die maßnahmenlogischen Verbindungslinien:



Seminarkonzeptionen der Erprobung

Der Kontext der Erprobungen[5] war die mathematikdidaktische Grundausbildung für die Grund-, Mittel- und Sonderschullehrämter aller Fächer im Bachelor-Studium an der Universität Hamburg. Diese erstreckt sich über

4 Vgl. (Krauthausen, 2000) zu Dimensionen mathematikdidaktischer Kompetenz

5 Das knappe Deputat mathematikdidaktischer Studienanteile war naheliegender Weise ein Motiv für die Suche nach Möglichkeiten, dessen Sichtbarkeit für die Studierenden zu steigern.

die zwei Anfangssemester, wobei im ersten Semester eine einführende Vorlesung mit Übung und im zweiten Semester zwei vertiefende Seminare zu besuchen sind.

In den Seminarveranstaltungen mit dieser Konzeption sollten die Studierenden semesterbegleitend neben der inhaltlichen Arbeit im Seminar

- Unterrichtssoftware-Analysen, Analysen von Schulbuchaufgaben mit korrespondierendem Unterrichtsdesign oder Konzeption und Durchführung klinischer Interviews auf der eLearning-Plattform einstellen (je nach Seminarthema)
- zu je mind. 2 anderen Beiträgen Feedbacks geben

Das Design variierte dabei je Veranstaltung naturgemäß; so gab es Iterationen des Nutzungsmusters, bspw. zusätzliche Aufträge im Seminar zur Bewertung von Unterrichtssoftware (Erstellung eines kurzen Lehrfilms). Im Seminar wurde in Einzelsitzungen auf die Beiträge Bezug genommen und exemplarisch inhaltlich und hinsichtlich des Ertrags des Beitrags diskutiert.

Die Bewertung der Lernleistungen erfolgte von den Seminarleistungen getrennt, was ich insofern als einen Vorzug sehe, als die Lernprodukte somit eher persönliche berufsbezogene *beliefs* als erwartete Bewertungskriterien abbildeten (s.u.).

Erfahrungen und Konsequenzen

Es kann an dieser Stelle nur eine verdichtete Essenz D^2M-relevanter Erfahrungen wiedergegeben werden. Dies soll anhand dreier Motive erfolgen: Entwicklung zur Laborkonzeption; Anforderungen der (Seminar-) Öffentlichkeit; Konsequenzen der Schriftform.

Die Veranstaltungskonzeption ging dort am Besten auf, wo auch die Seminaraktivitäten mit Online-Phasen verbunden wurden. Gründe dafür sind das erhöhte Arbeitsaufkommen für beide Seiten; die Schwierigkeiten von teils überraschend wenig medienaffinen Studierenden, die Plattformen effektiv zu nutzen; und die sachliche Komplexität der Anforderungen selbst – sowohl der Erstellung der eigenen Beiträge wie der Rückmeldung. Da an vielen Standorten die Infrastruktur mittlerweile vorhanden ist, lassen sich kleine Schreibaufträge unmittelbar im Seminar durchführen (und bei der Gelegenheit technische Hindernisse en passant beseitigen). Die Komplexität der Beiträge stößt so viele Fragen an, dass – jedenfalls in der Produktionsphase – thematisch anders ausgerichtete Seminarsitzungen für beide Seiten in der Summe unbefriedigender sind als die Bearbeitung aktueller Fragen, die von den Aufträgen abfallen. Ich würde daher in der Summe von einer »Laborkonzeption« als günstiger Metapher für die die Portfolioarbeit begleitenden Seminarsitzungen sprechen.

Das Schreiben für eine 'öffentliches' Forum wurde – erwartungsgemäß – als Herausforderung angenommen (und begrüßt); den peer reviews sah man allerdings an, dass – ebenso erwartbar – diese in einem erlebten Konflikt zwischen Sachorientierung und Kollegialität standen. Dies ist natürlich ein die Berufsbiographie erwartbar begleitender Grundkonflikt, jedoch einer, der durch vereinbarte Prioritäten und Standards gestaltbar und notwendig zu gestalten ist. Dies kann durch verschiedene Maßnahmen vorstrukturiert werden (z. B. Leitfragen, Kriterienlisten), eine diskursive Aneignung durch die Gruppe ist jedoch m. E. unumgänglich (auch im Sinne der Sache) und drängt sich i. d. R. im Prozess auf. Hier liegt eine zentrale Lerngelegenheit, die als solche zu wertschätzen ist; wie auch Wertschätzung als Vertrauensbasis in Veranstaltungen mit diesem Profil notwendig mit entspr. Maßnahmen zu Beginn zu kultivieren ist. Auch hat es sich als günstig erwiesen, Konflikte und Schwierigkeiten des Arbeitsprozesses als erwartbar anzukündigen und zu bearbeiten.

Kollegialer Austausch zum Arbeiten mit Blended Learning hat mich bestätigt, dass der Modus der Schriftlichkeit aufgrund seiner Entwicklungspotentiale einen Eigenwert dieses Seminarsettings bedeutet. Die Kommunikation auf einer Plattform wirkt aktivierend für viele sonst stille Studierende; Schreiben kehrt persönliche Meinungen oft genauer hervor als der schnell fließende mündliche Diskurs; und der Bedarf an Anregungen zur Selbststeuerung beim Schreiben ist i. d. R. groß, ebenso wie Rückmeldungen zur Qualität des Geschriebenen. Dies kann i. d. R. nur exemplarisch oder kollegial erfolgen, darum sollten Erwartungen der Studierenden auch hier zu Beginn entsprechend gerichtet werden.

Nicht jede Seminarveranstaltung kann und muss in diesem Sinne konzipiert werden. Für ein Modul abschließende Veranstaltungen bieten die Bausteine von Portfolioarbeit vielfältige Lerngelegenheiten, wobei die lernförderliche Prozessgestaltung – wie immer – die Qualität der Ergebnisse bestimmt.

Literatur

Krauthausen, G. (1998). *Lernen - Lehren - Lehren lernen. Zur mathematik-didaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe*. Leipzig: Klett.

Krauthausen, G. (2000). Fünf Postulate zur Lehrerbildung. *EWI-Report*, *21*, 4-5.

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Tübingen und Basel: Francke.

Selter, C., & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Klett.

Götz KRUMMHEUER, Frankfurt am Main

Die „Interaktionale Nische mathematischer Denkentwicklung“ (NMD)

1. Der Begriff der NMD

Im Rahmen des Projekts erStMaL wird eine mathematikdidaktische Theorie mathematischer Denkentwicklung von Kindern im Vor- und Grundschulalter entwickelt. Die Studie befindet sich in der Mitte ihrer geplanten longitudinal organisierten, sechsjährigen Erhebungszeit.

Es soll eine mathematikdidaktische Theorie entwickelt werden, in welcher die Mathematik in die Theorieentwicklung als konstitutive Dimension und nicht (nur) als Anwendungsfall für eine universell verstandene psychologische Entwicklungstheorie einfließt. Entsprechend wird auch in erStMaL eine Themenbreite auf die gemeinhin für die mathematische Entwicklung von Kindern im Vorschulalter zentral gehaltenen Inhaltsbereiche zugrunde gelegt. Dies sind „Numbers and Operations”, „Geometry”, „Measurement”, „Data Analysis” und „Algebra” (s. Clements 2004). Theoretisch bezieht sich die Forschung auf einen interaktionistischen Ansatz zum Mathematiklernen, der u. a. in eigenen Arbeiten zu mathematischen Lehr-Lern-Prozessen in der Grundschule entwickelt wurde (Krummheuer & Brandt 2001; s. a. Brandt 2004 und Krummheuer 2011a). In erStMaL wird er auf den vorschulischen Bereich ausgedehnt und ist entsprechend weiterzuentwickeln. Der von Brandt und Krummheuer entwickelte Ansatz einer Interaktionstheorie mathematischen Lernens basiert auf drei grundlegenden Annahmen:

Sowohl der zu lernende „Stoff“ als auch die dazu (mehr oder weniger funktional) emergierenden Lernbedingungen werden lokal im interaktiven Austausch zwischen den Beteiligten hervorgebracht.

Die konstitutive soziale Bedingung der Möglichkeit des Lernens eines mathematischen Inhalts, Begriffs und/oder Verfahrens ist die Partizipation an einer kollektiven Argumentation.

Ausdruck eines erfolgreichen Lernprozesses eines Kindes oder Schülers ist die zunehmend autonomere Partizipation in Fortgang der Interaktion oder in folgenden Interaktionen, die thematisch auf die aktuelle Situation Bezug nehmen. Der Erfolg ist abhängig von den „Partizipationsspielräumen“ (Brandt 2004, S. 58), welcher dem lernenden Kind in der Interaktion eröffnet wird.

Zur Vertiefung dieser Vorstellung wird der Begriff der „developmental niche“ von Super & Harkness 1986 aufgegriffen. Sie charakterisieren ihn, wie folgt:

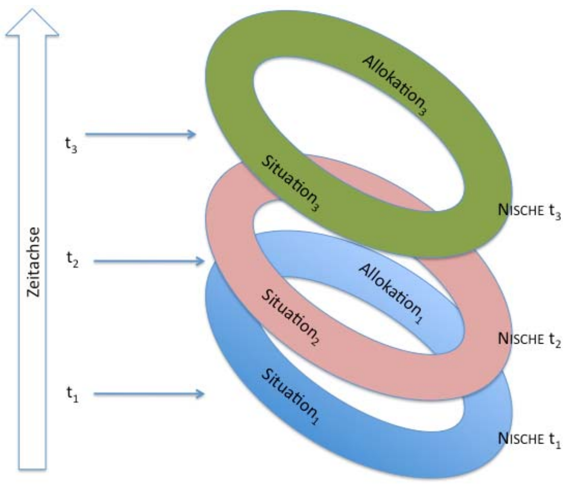
„The developmental niche, .., is a theoretical framework of studying cultural regulation of the micro-environment of the child, and it attempts to describe the environment from the point of view of the child in order to understand processes of development and acquisition of culture“ (S. 552)

Mit dieser Begriffsbildung wird eine Analogie zum ökologischen Verständnis einer Nische aufgebaut, mit dem die Beziehung zwischen sämtlichen Faktoren zusammen gefasst werden, die für das (Über-) Leben einer Spezies entscheidend sind. Die beiden Autoren nennen drei Subsysteme für eine solche Entwicklungsnische:

„the physical and social settings in which the child lives“,

„culturally regulated customs of child care and rearing“,

„the psychology of the caretakers“ (S. 552; nebenstehende Grafik aus Harkness et al. 2007, S. 34S).



Deutlicher als bei Harkness und Super soll in der eigenen Begriffsbildung die interaktionistische Perspektive der situationellen Emergenz solcher Sozialisationsprozesse hervorgehoben werden. Eine solche „interaktionale Nische mathematischer Denkentwicklung“ (NMD) besteht aus den kulturspezifischen, von einer Gruppe oder Gesellschaft bereitgestellten Lernangeboten (Allokationsaspekt) und aus den aus diesen Angeboten in einem realen Interaktionsprozess emergierenden Situationen (Situationsaspekt; genaueres s. Krummheuer 2011b). In Hinblick auf die Entwicklung einer Theorie zur mathematischen Denkentwicklung benötigt das hier entwickelte Konzept der Entwicklungsnische noch eine „Dynamisierung“ entlang der Zeitachse. Die vorläufige Annahme ist, dass zu jedem Zeitpunkt alle Bestandteile einer Nische relevant sind und eine spezifische Ausprägung ausweisen und dass sich diese Ausprägungen im zeitlichen Verlauf einer kindlichen Denkentwicklung verändern. Es bleibt der weiteren Forschung überlassen, diese Veränderungen genauer zu untersuchen. Das Diagramm mag diesen Zusammenhang noch einmal verdeutlichen:

Die Grafik ist dreidimensional zu lesen: die Ellipsen sind in verschiedenen horizontalen Ebenen angeordnet. Die vertikale Raumdimension ist die Zeitachse. Jede Ellipse stellt eine konkrete NMD zu einem bestimmten Zeitpunkt dar. Zu jedem Zeitpunkt „i“ werden spezifische Ressourcen bereitgestellt ($Allokation_i$) und ein situationsspezifischer Umgang mit diesen Allokationen hervorgebracht ($Situation_i$). Entwicklungsprozesse mathematischen Denkens können in Abhängigkeit von der Abfolge solcher NMD beschrieben werden.

2. Ein erstes, vorläufiges Ergebnis

Das Konzept der NMD wurde in einer vier Szenen umfassenden komparativen Analyse von Kleingruppenprozessen in Kindergarten- und Grundschulsituationen entwickelt und empirisch begründet (s. Krummheuer 2011b). Es lassen u. a. die folgenden, noch als vorläufig einzustufenden Ergebnisse finden:

- In den Szenen der Grundschulkinder finden eindeutige peer-Interaktionen statt, während bei den Kindergartenkindern die peers kaum miteinander interagieren sondern eher den direkten Dialog mit der anwesenden erwachsenen Begleitperson suchen. Die „funktionierende“ peer-Interaktion bei den Grundschulkindern wird als Merkmal entwickelter NMDs in der Grundschule gewertet.
- Die Tiefe der Argumentationen in der peer-Interaktion bei den Grundschulkindern ist geringer als in NMDs des Kindergartens. Hier wird vermutet, dass es hinsichtlich der NMDs einen komponentenbezogenen Entwicklungsfortschritt (hier in der Kooperationskomponente) bei vorübergehender Retardation in anderen Komponenten (z. B. bei der Themenentwicklung in der Inhaltskomponente).

Mit Blick auf die hier vorzunehmenden Untersuchungen mit Kindern im Vorschulalter mögen diese Aussagen einen zu allgemeinen Geltungsanspruch postulieren. In den beigezogenen Szenen wurden durchgehend arithmetischen Problemstellungen bearbeitet. Aus methodischer ist eine Konzentration auf eine Sozialform und einen mathematischen Inhaltsbereich angebracht. Im Fortgang des erStMaL-Projektes werden diese Beschränkungen mit Blick auf eine alle mathematischen Inhaltsbereiche und variantenreichere Sozialformen umfassende Theorieentwicklung schrittweise aufzuheben sein. Zudem werden durch die Berücksichtigung des longitudinalen Forschungsansatzes weitere Aspekte zu bedenken sein. Geht man davon aus, dass in diesen vorgestellten Episoden auf der allokativen Ebene gleichsam „alles richtig“ gemacht worden ist, dann kann man den rekonstruierten Elaborationsabfall in der Argumentation bei gleichzeitigem

Elaborationszuwachs auf der Kooperationsebene so erklären, dass innerhalb einer situationell emergierenden NMD nicht gleichzeitig bei allen Komponenten Entwicklungsfortschritte auftreten und möglicherweise zunächst ein Fortschritt bei einer Komponente durch Retardation oder Regression in einer anderen Komponente gleichsam „erkauft“ wird. Eine solche Hypothese des „Erkaufens“ von Entwicklung auf einer Ebene durch vorübergehende Retardationen auf anderen Ebenen legt dann auch eine generelle Entwicklungsvorstellungen nahe, die nicht von gradlinigen, linearen Entwicklungen sondern von hochgradig situationell geprägten, oszillierenden Entwicklungsbewegungen ausgeht.

Mit dem Begriff der NMD wird eine Reflexionsmöglichkeit geschaffen, in welcher Weise durchzuführende Komparationen begründet und sinnvoll strukturiert werden sollten. Mit dem Begriff der NMD wird zusammenfassend das Bewusstsein für die benötigte Komplexität geschärft und zudem werden leichtfertige Verallgemeinerungen und Trivialisierungen eher offensichtlich.

Literatur

Brandt, B. (2004). Kinder als Lernende. Partizipationsspielräume und -profile im Klassenzimmer. Frankfurt a. M. usw., Peter Lang.

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. Engaging young children in mathematics. Standards for early childhood mathematics education. D. H. Clements & J. Sarama. Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum.

Harkness, S., C. M. Super, et al. (2007). "Culture and the construction of habits in daily life: Implications for the successful development of children with disabiliites." OTJR: Occupation. Participation and Health **27**(4 (Fall Supplement)): 33S - 30S.

Krummheuer, G. (2011a). "Representation of the notion “learning-as-participation” in everyday situations of mathematics classes." Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)(1/2).

Krummheuer, G. (2011b). Was man von elf Kindern alles über mathematische Denkentwicklung lernen kann. Die empirisch begründete Herleitung des Begriffs der „Interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung“ (NMD). Die Projekte erStMaL und MaKreKi. Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education" (IDeA). B. Brandt, R. Vogel & G. Krummheuer. Münster, New York, München, Berlin, Waxmann (erscheint demnächst). **Bd 1**.

Krummheuer, G. & B. Brandt (2001). Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule. Weinheim, Beltz.

Super, C., M & S. Harkness (1986). "The developmental niche: a conceptualization at the interface of child and culture." International Journal of Behavioral Development **9**: 1986.

Julian KRUMSDORF, Münster

Sprachliche Aspekte beispielgebundenen Beweisens

Solange SchülerInnen der formellen mathematischen Sprache noch nicht mächtig sind, kann man sie allgemeingültige Aussagen an Beispielen beweisen lassen. Beim beispielgebundenen Beweisen stehen die SchülerInnen dann vor der Herausforderung, das Allgemeingültige am Besonderen der Beispiele nicht nur zu erkennen, sondern auch entsprechend auszudrücken. Einige interviewte SchülerInnen der Primar- und Sekundarstufe setzen ihre mathematikhaltige Umgangssprache bei den gewählten arithmetischen und geometrischen Aufgabenformaten kreativ und versiert ein. Dies erleichtert es ihnen, die zunächst latente Sinnstruktur eines Beweises an Beispielen allmählich subjektiv zu realisieren und zu manifestieren.

1. Motivation

An zentralen Beweisfunktionen nennt de Villiers (1990) *verification, explanation*, *systematisation, discovery* und *communication*. Zusammen mit der verifikativen und erklärenden Funktion ist die kommunikative Funktion gerade für das beispielgebundene Beweisen von großer Bedeutung: Ein durchweg formeller (formalisiert dargestellter) Beweis mag eine Behauptung zwar verifizieren, lässt uns aber nicht immer verstehen, warum eine Aussage wirklich gilt. Bei der Erklärung des „Warum“ könnte uns ein Heranziehen allzu vieler Beispiele den Blick auf das Allgemeingültige jedoch auch verstellen und uns möglicherweise dem Vorwurf aussetzen, wir prüften bloß induktiv. Es ist für uns als Gesprächspartner somit eine Herausforderung, das am Beispiel allgemeingültig Beweisbare subjektiv zu erkennen, einander sprachlich angemessen zu vermitteln und es uns damit zu einem sozial geteilten Gut werden zu lassen. Dass sich die sprachliche Problematik und Relevanz beispielgebundenen Beweisens nicht allein auf den Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe beschränkt, zeigt uns eine vermutlich etwa 20jährige Studentin in einem Internetblog vor ihrer Frage nach der Kantenanzahl eines vollständigen Graphen ganz allgemein: „Unser Problem ist es meistens immer das [sic!] wir die meisten Sachen nicht allgemein ausdrücken können. Sobald es um das rechnen mit Zahlen geht können wir meistens alles ...“ (Matheplanet 2008).

2. Forschungsstand

In der einschlägigen Literatur zum beispielgebundenen Beweisen werden verschiedene Beweisarten in Abgrenzung zu formellen Beweisdarstellungen betrachtet. Semadeni (1976) spricht zunächst von *premathematical proofs* und später von *action proofs*. Mason & Pimm (1984) untersuchen *generic examples* in Vorbereitung auf *generic proofs*. Die dabei als Träger des Allgemeinen fungierenden Beispiele versuchen sie auf der sprachlichen und ikonischen Ebene von *specific / particular examples* abzugrenzen. Wittmann (1985) führt *operative proofs* ein, bei denen allgemein einsetzbare (und in diesem Sinne) allgemeingültige mathematische Regeln verwendet werden. Später berücksichtigen Wittmann & Ziegenbalg (2004) dann auch das Moment der Versprachlichung von Operationen, insbesondere wenn sie enaktiv und ikonisch repräsentiert werden. Dem gegenüber stellen Borwein & Jörgenson (2001) Kriterien für sogenannte *(acceptable) visual proofs* auf, bei denen eine visuelle Darstellung Beispielcharakter derart hat, dass an ihr ein Beweis geführt werden kann. *Operative proofs* und *visual proofs* lassen sich – letztere im Sinne „bildlich gebundener Beweise" – als Spezialfälle beispielgebundener Beweise ansehen. Dies impliziert das Paradox, dass *visual proofs* auch der sprachlichen Explikation bedürfen.

3. Forschungsgegenstand

Das beispielgebundene Beweisen lässt sich vordergründig als induktives Prüfen (Bestätigen) einer behaupteten Aussage verstehen; dabei wird die Richtigkeit der Behauptung in einem oder mehreren Beispielen bestätigt. Beim induktiven Prüfen mit latenter Beweisidee (welches Meyer & Voigt (2009) mit den Schlussformen nach Peirce analysieren) kann jedoch auch ein allgemeiner Beweis für das, was allen Beispielen gemein ist, gesehen werden. Mit Oevermann (1979) lässt sich dieser allgemeine Beweis als (latente) Sinnstruktur verstehen, die der Lernende zunächst subjektiv realisieren muss und in seinen sprachlichen Äußerungen teilweise manifestieren kann. Der Lernende beweist beispielgebunden, wenn ein betrachtender Experte in dem vom Lernenden manifestierten Beweis eine Sinnstruktur sieht. Zur idealisierten Darstellung eines Beweises als Sinnstruktur eignen sich beispielgebundene Argumentgefüge, die auf die Theorie der Struktur von Argumenten nach Toulmin zurückgreifen, vgl. Schwarzkopf (2000).

4. Empirischer Rahmen

Die Untersuchung sprachlicher Aspekte beispielgebundenen Beweisens erfolgt im Rahmen einer bald veröffentlichten Studie zum beispielgebundenen Beweisen. Für die hier exemplarisch vorgestellte Teilstudie haben etwa 15 Grundschüler der Klasse 4 und etwa 10 Gymnasialschüler der Klasse 7 an je einem etwa halb- bis einstündigen Lehr- und Lernexperiment teilgenommen. Die SchülerInnen wurden dabei einzeln zum beispielgebundenen Beweisen herausgefordert. Die ihnen unbekannten Behauptungen an gegensinnig veränderbaren Summanden, an Zahlenmauern oder an vollständigen Graphen mussten die SchülerInnen zum Teil noch entdecken und ggf. induktiv prüfen. Während der Einzelbefragungen griff der Interviewer insbesondere zu dialogischen Hilfsmitteln. Etwa verhielt dieser sich als *advocatus diaboli*, schlüpfte in die Rolle eines Mitschülers oder hinterfragte Aussagen von SchülerInnen nach ihrer Allgemeingültigkeit. Einige Videoaufzeichnungen wurden schließlich zu Analysezwecken transkribiert. Manche Transkriptausschnitte können extensiv analysiert werden, um Deutungshypothesen über die sprachliche Entwicklung von Schülerinnen während ihres beispielgebundenen Beweisens zu gewinnen, etwa an Übergängen zwischen dem induktiven Prüfen und dem (ggf. formellen) Beweisen. Bezogen auf die eher sprachlichen Aspekte beispielgebundenen Beweisens sind u.a. folgende Fragen von Interesse: Wie verbalisieren die SchülerInnen das Allgemeingültige in der allmählichen Ablösung vom Besonderen der Beispiele? Welche Indizien liefert die sprachliche Manifestation der SchülerInnen dafür, dass SchülerInnen den Beweis subjektiv realisieren? Wie lässt sich die sprachliche Manifestation des Beweises fördern?

5. Exemplarische Ergebnisse

Stellvertretend für einige Ergebnisse der Untersuchung sprachlicher Aspekte beispielgebundenen Beweisens seien an dieser Stelle genannt:

Die Vorgabe von Begriffen und das Einüben von Operationen im Sinne von Wittmann (1985) regt die SchülerInnen zum beispielgebundenen Beweisen nur bedingt an, zumal die Gefahr besteht, dass die SchülerInnen Begriffshülsen und Operationskalküle verwenden. Eine subjektive Realisierung und Manifestierung des Beweises befördern vielmehr selbstgeprägte Begriffs- und Wortbildungen der SchülerInnen und das Hinterfragen durch den Lehrenden. So bezeichnet die Grundschülerin Sonja den Deckstein einer Zahlenmauer der Höhe 3 etwa als „Doppelstein“, um auszudrücken, dass sich sein Wert um das Doppelte der Erhöhung des Wertes des unteren Mittelstein vergrößert. Die Grundschülerin Zaida vermittelt den entsprechenden formalen Beweis in derart abstrakt gehaltener Umgangssprache, dass sich der Deckstein bei ihr schließlich um „zwei irgendwasses“ erhöht.

Gerade weil *visual proofs* (Borwein & Jörgenson 2001) im Sinne „bildlich gebundener Beweise“ auf dem ersten Blick ohne mathematische Sprache auskommen, kann sich die Vermittlung des Allgemeingültigen an ihnen um so schwieriger gestalten. Nicht minder fordernd ist die eher den Experten geläufige kognitive und sprachlich vermittelte Übersetzungsarbeit zwischen Arithmetik und geometrischen Darstellungsformen. So nimmt die Grundschülerin Frieda beim gegensinnigen Verändern von Summanden deren figurierte Darstellung als Kästchentürme zwar bereitwillig an, sieht im Besonderen arithmetischer Aufgabenstellungen wie $3 + 4 + 5 = 3 \cdot 4$

aber bloß die je konkret figurierte Darstellung. Statt an weiteren Beispielen die Allgemeingültigkeit der Konstanz der Summe gegensinnig veränderbarer Summanden zu beweisen, übersieht die Grundschülerin Frieda die Bedeutung des Operationszeichen, ehe sie schließlich Malpunkte zwischen die gezeichneten Kästchentürme setzt. Dazu spricht sie allgemein: „man achtet nicht auf die Zeichen, man achtet nur auf die Zahlen beim Zeichnen".

Die Untersuchungen von Mason & Pimm (1984) relativierend, ist der Verzicht auf beispielhafte Formulierungen per se kein Indiz für die subjektive Realisierung des Allgemeingültigen, zumal zu allgemein Gesagtes auch falsch sein kann. Umgekehrt kann allgemeiner gedacht, aber dennoch Konkretes gesagt werden. Etwa schult das Beweisen an imaginierten Beispielen das Sprechen in allgemeiner Umgangssprache, wenn es beim Blick auf einen vollständigen Graphen mit 5 Ecken um die Frage nach der Anzahl der Kanten eines vollständigen Graphen mit 10 oder gar x Ecken geht. Das der Konkretion zunehmend enthobene Beispiel lässt die Schüler Martin und Ali an ihren Formeln $10 \cdot 4 / 2$ und $x \cdot y / 2$ selbst zweifeln. Zwischen der unvollständigen Generalisierung und Übergeneralisierung der Behauptung lässt sich für sie das Allgemeingültige erkennen und am Beispiel beweisen.

Literatur

Borwein, J. & Jörgenson, L. (2001): Visible structures in number theory. American Mathematical Monthly, 108, 897-911.

de Villiers, M. (1990): The role and function of proofs in mathematics. Pythagoras, 24, 17-24.

Mason, J. & Pimm, D. (1984): Generic examples: Seeing the general in the particular. Educational Studies in Mathematics, 15, 277-289.

Matheplanet (2008): Vollständiger Graph / Sternchen1987. Abgerufen am 15.03.2011: http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=101388

Meyer, M. & Voigt, J. (2009): Entdecken, Prüfen und Begründen. Gestaltung von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze. In: mathematica didactica, 32, 31- 66.

Oevermann, U., Allert, T., Konau, E. & Krambeck, J. (1979): Die Methodologie einer "objektiven Hermeneutik" und ihre allgemeine forschungslogische Bedeutung in den Sozialwissenschaften. In Soeffner, H. (Hrsg.): Interpretative Verfahren in den Sozial- und Textwissenschaften. Stuttgart: Metzler, 352-434.

Schwarzkopf, R. (2000): Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht - Theoretische Grundlagen und Fallstudien. Hildesheim: Franzbecker.

Semadeni, Z. (1974): The Concept of Premathematics as a Theoretical Background for Primary Mathematics Teaching. Warschau: Polnische Akademie der Wissenschaften.

Wittmann, E. (1985): Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: mathematik lehren, 11, 1985, 7-11.

Wittmann, E. & Ziegenbalg, J. (2004): Sich Zahl und Zahl hochhangeln. In Müller, G., Steinbring, H., Wittmann, E. (Hrsg.): Arithmetik als Prozess. Seelze: Kallmeyer.

Katharina KUHNKE, Dortmund

Vorgehensweisen von Zweitklässlern beim Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen von Zahlen und Operationen - Eine Untersuchung am Beispiel des multiplikativen Rechnens

Darstellungswechsel im Mathematikunterricht

Mathematische Sachverhalte können unterschiedlich dargestellt werden durch: *Handlungen, bildliche Darstellungen, symbolische Darstellungen* in der Umgangssprache oder in formaler Sprache. Diese konkreten Darstellungen müssen als Repräsentanten mathematischer Objekte verstanden werden. Daraus ergibt sich die besondere epistemologische Situation der Mathematik: Mathematische Objekte sind nicht physisch fassbar und brauchen daher immer Darstellungen. Es geht somit in der mathematischen Interaktion um den Umgang mit Darstellungen eines Objektes und nicht um den Umgang mit dem mathematischen Objekt selbst (u.a. Janvier 1987, Duval 2006). Der Wechsel zwischen Darstellungen ist somit eine elementare Tätigkeit im Mathematikunterricht. Auch empirische Befunde zum Darstellungswechsel gehen davon aus, dass dieser eine wichtige Fähigkeit im Mathematikunterricht ist. So wird der Darstellungswechsel als Indikator für ein umfassendes Operationsverständnis (vgl. u.a. Bönig 1995) gesehen, aber auch als unerlässliche Voraussetzung für erfolgreiches mathematisches Handeln (vgl. u.a. Janvier 1987, vom Hofe & Jordan 2009).

Mit großer Selbstverständlichkeit und oft unbewusst werden im Mathematikunterricht der Grundschule Darstellungen gewechselt. Aufgaben, wie beispielsweise zu einem vorgegebenen Bild einen (möglichst eindeutigen) passenden Term zu notieren, finden sich in vielen Unterrichtsvorschlägen. Zudem nutzen viele Lehrende die verschiedenen Darstellungsebenen eher als methodische Stufenfolge –von Handlungen über bildliche Darstellungen zur symbolischen Ebene – denn als gleichwertige Darstellungsformen mit gegenseitigen Beziehungen (Hahn 2006). Im praktizierten Unterricht wird oft zu schnell auf der mathematisch-symbolischen Ebene gearbeitet (vgl. u.a. Schipper 2005). Dabei darf im Unterricht nicht davon ausgegangen werden, dass den Kindern die gleiche mathematische Struktur innerhalb der verschiedenen Darstellungen bewusst ist.

Genau hier setzt das vorliegende Dissertationsprojekt an und geht der folgenden übergeordneten Fragestellung nach: Welche Kriterien nutzen Kinder, um Darstellungen zu wechseln bzw. herauszufinden, wann Darstellungen zueinander „passen“?

Forschungsinteresse und Design

Neben dem Deuten von Darstellungen, bei welchem auch die Strukturierungsfähigkeit der Kinder eine Rolle spielt (Söbbeke 2005), steht nun auch das Interagieren mit verschiedenen Darstellungen im Mittelpunkt der Untersuchung. Studien zum Darstellungswechsel zeigen oft nur einen Aspekt bzw. eine Richtung der vielfältigen Transferprozesse auf (z.B. der Darstellungswechsel vom Bild zum Term). Zudem sind die meisten Studien produktorientiert: das Gelingen oder Nicht-Gelingen des Darstellungswechsels wird über das Ergebnis, welches der Lernende beim Wechsel von Darstellungen produziert, bewertet.

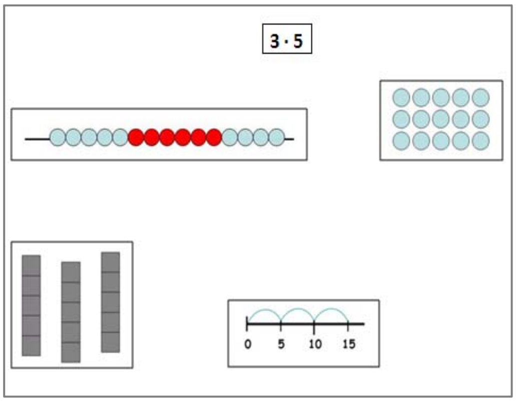
Der Schwerpunkt dieses Projekts ist die Betrachtung des Darstellungswechsels als Prozess. Um diesen sichtbar zu machen, ist ein mathematischer Inhalt nötig. In dieser Untersuchung wird das multiplikative Rechnen im 2. Schuljahr gewählt, auch deshalb, da weitgehend unbekannt ist, wie Kinder der Schuleingangsphase beim Transfer zwischen verschiedenen Darstellungen vorgehen.

Dem Forschungsinteresse entsprechend, wird ein qualitatives Verfahren zur Datenerhebung angewandt, bei dem versucht wird die Denkprozesse der Kinder zu erschließen. In klinischen Interviews wurden 15 Kinder aus sechs verschiedenen Klassen Aufgaben zu Transferprozessen vorgelegt und videographiert. Es wird von der Annahme ausgegangen, dass es beim Darstellungswechsel um die Herstellung von Deutungen von Zeichen durch die Kinder geht. Daher wird mit einer soziologisch-konstruktivistischen Perspektive, genauer mit dem epistemologischen Dreieck, der Prozess und die Kriterien herausgearbeitet, wie der Darstellungswechsel vollzogen wird. Somit können die Begriffskonstruktionen der Kinder zum Darstellungswechsel näher in den Blick genommen werden (Steinbring 2005).

Die konzipierten Interview-Aufgaben zielen dabei auf das Erkennen von Zusammenhängen zwischen möglichst mehreren verschiedenen Darstellungsebenen ab: *„Was passt und warum?“* (Term↔ Bild, Bild↔ eigener Term, Bild↔ Bild, Rechengeschichte ↔ Bild ↔Term). Angelehnt an einen methodischen Vorschlag von Duval (Duval 2006) beim Darstellungswechsel gezielt variierende Momente einzubringen, wurde nach jeder Aufgabe die Ausgangsdarstellung variiert und nach deren Auswirkung in den anderen Darstellungsebenen gefragt.

Ergebnisse

Der Darstellungswechsel, aus epistemologischer Perspektive betrachtet, lässt sich als Abgleich von Referenzkontexten beschreiben. Darstellungswechsel stellen keine linearen Prozesse dar, sondern zeigen sich als stetiges Wechselspiel zwischen Deutungen und Verbindungsherstellung zwischen verschiedenen Deutungen. Die interviewten Kinder ziehen zunächst den Referenzkontext einer Darstellung (Ausgangsdarstellung) heran, welchen sie dann zum Abgleich mit den anderen Darstellungen nutzen. Die Kinder fokussieren dabei auf bestimmte **Relationen**, **Einzelelemente** oder Anzahlen bzw. **Ergebnisse**, die sie in den weiteren Darstellungen suchen, um diese als zueinander passend zuzuordnen. Dabei können diese Fokussierungen auch zusammenwirken, wie das Beispiel von Kieran bei der folgenden Aufgabe (siehe Abb. unten) zeigt. Hier soll er bestimmen, welche bildliche Darstellung zu dem gegebenen Term 3·5 passt und seine Auswahl begründen. Bei der Rechenkette, die aufgrund ihrer Strukturierung besonderen Gesprächsanlass bietet, sagt Kieran:



„Das passt, die Lösung ist gleich, das sind auch fünfzehn eh warte mal, es würde passen, wenn hier fünf wären und hier fünf und hier fünf *zeigt auf alle drei Bündelungen.[…]*sind ja fünf sechs und vier (5) ich meine, das passt so gut nicht (.) das passt schon von der Anzahl von der Lösung her, sonst eigentlich nicht […] das würde dann nen bisschen schwer zu erkennen sein, drei mal fünf ergibt gleich das da (.) *legt Term und Rechenkette direkt hintereinander*."

Kieran schwankt hier zwischen den **Fokussierungen auf eine Relation** der Elemente (sein Referenzkontext zum gegebenen Term 3·5 sind drei Fünfer) und damit verbunden auf die Anordnung „wenn hier fünf wären und hier fünf und hier fünf" und der **Fokussierung auf das Gesamtergebnis** („sind auch fünfzehn"). Seinen Deutungen liegen verschiedene Begriffe des Darstellungswechsels zugrunde, die beide zur Deutung und zum Abgleich zwischen den zwei Darstellungen herangezogen werden können. Kierans Begriff eines Darstellungswechsels umfasst den Abgleich sowohl der gleichen repräsentierten Menge, als auch der gleichen repräsentierten Relationen. Das Zusammenwirken beider Fokussierungen wird daran deutlich, dass er länger zwischen „nicht so gut passen" und „von der Lösung her passen" überlegt. Schlussendlich entscheidet sich Kieran dafür, dass die Aufgabe

3·5 in der gegebenen bildlichen Darstellung etwas schwierig zu erkennen sei. Die bildliche Darstellung eignet sich dann „lediglich“ als Mengendarstellung des Ergebnisses. Term und bildliche Darstellung so hintereinander gelegt, ergeben eine für ihn sinnvolle Äquivalenz der Menge.

Diskussion und Ausblick

Mit den Analysen kann gezeigt werden, dass spezifische Fokussierungen vorliegen, die bei einem Wechsel von Darstellungen herangezogen werden können. Jedes hier untersuchte Kind vollzieht einen Darstellungswechsel, fokussiert allerdings auf unterschiedliche Aspekte in den Darstellungen. Die verschiedenen Fokussierungen, die Kinder beim Darstellungswechsel einnehmen, sind Momentaufnahmen. Kinder können zwischen den Fokussierungen wechseln – abhängig vom Aufgabenkontext, den Impulsen der Interviewerin, der Entwicklung innerhalb des Interviews. Diese verschiedenen Vorgehensweisen der Kinder zeigen verschiedene Deutungen des Begriffs „passen“. Daher scheint eine veränderte Sichtweise auf die Anforderungen beim Wechsel von Darstellungen angebracht. Einer expliziten Thematisierung des Darstellungswechsels, des Begriffs „passen“ und der Deutungsvielfalt beim Darstellungswechsel sollte im Unterricht Zeit und Raum eingeräumt werden.

Möglichkeiten und didaktische Anregungen zu entwickeln, welche die Transferprozesse zwischen Darstellungen explizieren, anregen und fördern, stellen den nächsten Schritt in diesem Projekt dar.

Literatur

Bönig, D. (1995): Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschülern. Münster, New York: Waxmann.

Duval, R. (2006): A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: Educational Studies in Mathematics. 103-131.

Hahn, H. (2006): Mathematikunterricht in der 3. Jahrgangsstufe- ein Einstellungsbild Thüringer Lehrerinnen und Lehrer. In: Schriften zur Bildungsforschung 1.

Janvier, C. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, N.J. [u.a.]: Erlbaum.

Schipper, W. (2005): Rechenstörungen als schulische Herausforderung. Beschreibung des Moduls 4 für das Projekt Sinus-Transfer Grundschule.

Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern- Epistemologische Grundlagen und empirischen Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Steinbring, H.(2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – an Epistemological Perspective. Mathematics Education Library (MELI), No. 38, Springer, Berlin, Heidelberg.

Vom Hofe, R. &Jordan, A.(2009):Wissen vernetzen. In: mathematik lehren Nr.159, 4-9.

Sebastian KUNTZE und Elke KURZ-MILCKE, Ludwigsburg

Professionelles Wissen von Lehrkräften zu mathematikbezogenen „großen Ideen“

Wissen und Vorstellungen von Lehrkräften zu „großen Ideen“ in Mathematik und für den Mathematikunterricht dürften einen wichtigen Beitrag zum Gestalten reichhaltiger Gelegenheiten für verständnisvolles Lernen im Mathematikunterricht leisten. Die Beschreibung solchen Wissens aus theoretischer und aus empirischer Sicht ist daher von großem Interesse. Auf der Grundlage einer Einführung in den theoretischen Hintergrund des Projekts „Awareness of Big Ideas in Mathematics Classrooms (ABCmaths)“ (www.abcmaths.net) werden daher im Folgenden ausgewählte erste Befunde zum professionellen Wissen von Lehramtsstudierenden vorgestellt.

Einführung und Theoretischer Hintergrund

Um auf große Ideen zugreifen zu können und diese für das Gestalten kognitiv aktivierender Lernanlässe zu nutzen, brauchen Mathematiklehrkräfte fachspezifisches inhaltliches Wissen („Mathematical Content Knowledge“), sowie fachdidaktisches Wissen im Sinne von „Pedagogical Content Knowledge“ (Shulman, 1986). Allerdings findet eine Vertiefung mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens in der Ausbildung von Lehrkräften in vielen europäischen Ländern kaum in ausreichendem Maße statt. In nachfolgenden Phasen der Professionalisierung erschweren darüber hinaus die Belastungen des Schulalltags und teils fest etablierte Handlungsroutinen im Klassenraum entsprechende Lernprozesse. Nicht selten führt die zeitliche und institutionelle Trennung verschiedener Ausbildungsphasen dazu, dass Lernangebote rar sind, die fachspezifisches inhaltliches Wissen mit fachdidaktischem Wissen und der Unterrichtspraxis verbinden.

An dieser Stelle setzt die Forschungs- und Entwicklungsarbeit von ABCmaths an. Zum theoretischen Hintergrund des Projekts gehört zunächst eine pragmatisch orientierte Beschreibung des Begriffs „große Idee“ („Big Idea“), die sich insbesondere am Reflexions- und Vernetzungspotential sowie an der Bedeutung der Idee für das mathematikbezogene Kommunizieren orientiert und im Hinblick auf eine teilnehmer(innen)zentrierte Herangehensweise von Aus- und Fortbildungsaktivitäten hinreichend offen ist. Aufgrund dieser pragmatischen und integrierenden Herangehensweise kann ABCmaths an Ansätze zu „fundamentalen Ideen“ (z.B. Schweiger, 1992), „Grundvorstellungen“ (v. Hofe, 1992), „universellen“ und „zentralen Ideen“ (Schreiber, 1983), „Leitideen“ (KMK, 2003) oder „Kernideen“ (Gallin & Ruf, 1993) anknüpfen (s. genauere Ausführungen in Kuntze et al., im Druck; ABCmaths Team, in Vorb.). Die Sensibilität für große Ideen entspricht einer Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht, denn Standards und Zielvorgaben für den Mathematikunterricht orientieren sich häufig gerade an solchen übergreifenden, großen Ideen (KMK, 2003; Office of Qualifications and Examinations Regulation, 2002; AECC, 2008; NCTM, 2000).

Professionelles Wissen über große Ideen in Mathematik und im Mathematikunterricht ist nicht nur dem Bereich des "Horizon Knowledge" (Ball, Thames & Phelps, 2008) zuzuordnen, sondern es weist unmittelbare Verankerungen in unterschiedlichen Bereichen von Fachwissen und fachdidaktischem Wissen auf. Für die Unterscheidung solcher Bereiche professionellen Wissens kann erstens nach einem Spektrum zwischen Wissen und Überzeugungen/Beliefs unterschieden werden, zweitens nach Bereichen professionellen Wissens (Shulman, 1986) und drittens nach Ebenen an Globalität bzw. Situationsbezogenheit (vgl. Modell in Kuntze, im Druck).

Da es einen Mangel an Untersuchungen zu professionellem Wissen mit Verbindung zu großen Ideen gibt, besteht Forschungsbedarf zur folgenden Fragestellung: *Über welches professionelles Wissen zu großen Ideen verfügen Lehramtsstudierende?* Zu dieser Forschungsfrage werden im Folgenden ausgewählte Ergebnisse vorgestellt.

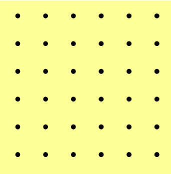
Untersuchungsdesign und Stichprobe

Befragt wurden 117 Lehramtsstudierende (78 weibliche und 35 männliche Studierende, 4 ohne Daten, Durchschnittsalter 22,33 Jahre, SD=3,56 Jahre; mittlere Semesterzahl: 2,19; SD=1,12) zu Beginn einer Lehrveranstaltung.

Die Studierenden sollten u. a. Aufgaben mit Relevanz für die großen Ideen „vielfältige Darstellungen nutzen", „Argumente finden/beweisen" und „mit Unendlichkeit umgehen" beantworten. Ein Beispielitem für die große Idee „vielfältige Darstellungen nutzen" ist in Abbildung 1 wiedergegeben.
Die Antworten wurden bezüglich eines Kategoriensystems codiert, in dem unter anderem festgehalten wurde, inwiefern adäquate Beispiele gegeben wurden oder inwiefern diese Beispiele argumentativ eingebettet wurden.

Rechts ist eine graphische Darstellung der Definition von "Quadratzahl" gegeben. Diese Darstellung bietet im Vergleich zur symbolischen Definition („wenn $q = n^2$ für eine natürliche Zahl n, dann heißt q Quadratzahl") einen zusätzlichen Zugang.

Fallen Ihnen andere mathematische Begriffe ein, bei denen die symbolische Definition in ähnlicher Weise einer nicht-symbolischen Darstellung gegenübergestellt werden kann?
Bitte schreiben Sie möglichst viele Beispiele auf.



„Eine Zahl, die, wie hier gezeigt, in Form eines Quadrats veranschaulicht werden kann, heißt Quadratzahl."

Abbildung 1: Beispielaufgabe zur großen Idee „vielfältige Darstellungen nutzen"

Ausgewählte Ergebnisse

Exemplarisch wird für die Aufgabe in Abbildung 1 berichtet, inwiefern die Lehramtsstudierenden Beispiele mit Bezug zur großen Idee „vielfältige Darstellungen nutzen“ angeben konnten.

Zunächst war codiert worden, inwiefern die Befragten adäquate Beispiele für Begriffe geben konnten, die mittels verschiedener Darstellungen charakterisiert werden können. Von den Studierenden gaben 65,8% überhaupt keine Antwort, bei 17,1% wurde ein Versuch der Beantwortung, der jedoch kein adäquates Beispiel enthielt, festgestellt, 17,1% der Befragten gaben mindestens ein adäquates Beispiel an.

Da in der Fragestellung bereits ein Beispiel gegeben war, wurde mit einem entsprechenden Code zwischen inhaltlich „nahen“ Beispielen und Beispielen in anderen Inhaltsbereichen unterschieden, um besser einschätzen zu können, inwiefern Befragte Inhalte entlang großer Ideen über Inhaltsbereiche hinweg verknüpfen können. Im Falle mehrerer in der Antwort gegebener Beispiele wurde die höchste vorkommende Kategorie codiert. Die Auswertung ergab, dass unter den 17.2% Antworten mit mindestens einem adäquaten Beispiel 89.5% zumindest ein Beispiel aus einem anderen Inhaltsbereich enthielten (dies entspricht 15.4% aller Befragten).

Weiterhin wurde codiert, inwiefern die genannten Beispiele inhaltlich eingebettet waren und argumentative Elemente bezüglich der betreffenden großen Idee aufwiesen. Unter den 17.2% Beantwortungen mit mindestens einem adäquaten Beispiel wiesen 55% keine Einbettung oder reflektierende Bemerkungen auf, in den übrigen 45% waren einbettende Kommentare vorhanden. Die Kategorie “adäquate argumentative Einbettungen/Begründungen/analysierende Anmerkungen z.B. darüber, wie das Beispiel zur großen Idee passt” war für die betrachtete Stichprobe hypothetisch (0%).

Diskussion

Die Ergebnisse deuten insgesamt auf ein eher geringes Niveau an Vernetzungswissen im Hinblick auf die betrachteten Big Ideas hin (für umfassendere Analysen s. Kuntze et al., im Druck), so dass die Interpretation nahe liegt, dass im früheren Schulunterricht der Lehramtsstudierenden geringes überdauerndes Vernetzungswissen der betrachteten Art aufgebaut wurde. Hier besteht offenbar ein Verbesserungspotential, das auch als Steigerungspotential von Unterrichtsqualität gesehen werden kann. Für die Ausbildung angehender Lehrkräfte deuten die Ergebnisse im Hinblick auf professionelles Wissen zu großen Ideen auf einen großen Förderbedarf hin. Dass solches professionelles Wissen tatsächlich gefördert werden kann, zeigen neuere Ergebnisse aus ABCmaths (Kuntze et al., eingereicht).

Weitere Aufmerksamkeit sollte insbesondere Vertiefungsuntersuchungen zu den Schwierigkeiten bei der Beantwortung von Aufgaben der betrachteten Art, Erhebungen zum möglichen Einfluss von Unterrichtserfahrung auf professionelles Wissen zu großen Ideen, Untersuchungen zur Frage, wie spezifisch für bestimmte Big Ideas diese Befunde sind, sowie Studien zu Zusammenhängen mit globalen Sichtweisen von Lehrkräften gelten.

Danksagungen

Das Project ABCmaths wird mit Unterstützung der Europäischen Kommission (503215-LLP-1-2009-1-DE-COMENIUS-CMP) finanziert. Diese Veröffentlichung gibt lediglich die Sichtweisen der Autoren wieder. Die Kommission haftet nicht für jedwede Nutzung der in diesem Beitrag enthaltenen Informationen.
Wir danken unseren Kooperationspartnerinnen und -partnern in ABCmaths, Stephen Lerman, Bernard Murphy, Peter Winbourne, Hans-Stefan Siller, Karl-Josef Fuchs, Anke Wagner, Claudia Wörn, Christiane Vogl und Michael Schneider.

Literatur

AECC. (2008). *Bildungsstandards im Fach Mathematik*. Österr. Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik, Klagenfurt: IDM.

Ball, D., Thames, L., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Gallin, P. & Ruf, U. (1993). Sprache und Mathematik in der Schule. Ein Bericht aus der Praxis. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 12(1), 3-33.

v. Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(4), 345-364.

Kultusministerkonferenz (KMK). (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. [http://www.kmk.org/]. [Zugriff am 08.02.2011].

Kuntze, S. (im Druck). In-service and prospective teachers' views about model-ling tasks in the mathematics classroom – Results of a quantitative empirical study. [Proceedings Book of ICTMA 14].

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H.-S. Winbourne, P. (im Druck). Professional knowledge related to big ideas in mathematics – An empirical study with pre-service teachers. *CERME 2011*.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (Hrsg.). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Office of Qualifications and Examinations Regulation (2002). *GCE Advanced Subsidiary (AS) and Advanced (A) Level Specifications. Subject Criteria for Mathematics.* [http://www.ofqual.gov.uk/files/2002-12-gce-maths-subject-criteria.pdf].

Schreiber, A. (1983). Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. *Mathematica didactica*, 6, 65-76.

Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13, 199-214.

Hans-Stefan SILLER, Salzburg

Funktionen und deren Repräsentationen als „Big Idea“ für den (Mathematik-)Unterricht

Wissensaufbau zum Funktionsbegriff im Mathematikunterricht sollte über alle Schulstufen hinweg gefördert werden. Dabei sollen Lernende ein entsprechendes Wissensnetz aufbauen. Dazu ist es jedoch notwendig, wie durch die Curricula vorgegeben, das Wissen über funktionale Abhängigkeiten auf unterschiedlichen Niveaus – im Sinne des Spiralprinzips – aufzubereiten. Dies gelingt insbesondere dann, wenn sich der Mathematikunterricht an einem durchgängigen Konzept orientiert. Solchen übergreifenden Konzepten widmet sich das EU-Projekt ABCmaths. Entsprechend der Betonung von „Big Ideas“ im Unterricht steht auch die Berücksichtigung unterschiedlicher Repräsentation von Funktionen im Mittelpunkt. Somit können sachgerechte Interpretationen, die durch Modellierungen konstruiert wurden, richtig dargestellt und mit den zugehörigen Graphen in Beziehung gesetzt werden. Durch entsprechende Berücksichtigung zentraler Ideen im Unterricht wird das kompetenzorientierte Lernen ermöglicht und gefördert.

1. Was sind „Big Ideas“?

Unter dem Begriff „Big Ideas“ im Projekt ABCmaths werden Ideen bzw. Vorstellungen verstanden, welche sich durch die gesamte Schulmathematik ziehen und die Möglichkeit bieten Lerngelegenheiten curricular und sinngenerierend zu strukturieren sowie dazu beitragen, das Verstehen und das Kommunizieren dieses Wissens in einem allgemeineren Zusammenhang zu fördern. Zudem unterstützen sie Lehrkräfte beim Gestalten von begriffsbezogenen, kognitiv aktivierenden Lerngelegenheiten.

Ansätze zu „fundamentalen Ideen“, z.B. Schweiger (1992), „Grundvorstellungen“, z.B. v. Hofe, (1992), „zentralen Ideen“, Klika (2003) integrierend soll die Orientierung des Mathematikunterrichts an großen Ideen das Sprechen über Mathematik erleichtern, das Erkennen und Verfolgen eines „roten Fadens“ durch mathematische Themengebiete unterstützen und die Vernetzung zwischen unterschiedlichen Themengebieten fördern.

Für Lehrkräfte werden Reflexionsanlässe geschaffen, die mit derartigen Ideen verknüpft sind und zur Weiterentwicklung der eigenen Unterrichtspraxis beitragen.

2. Funktionen/Funktionales Denken als Big Idea

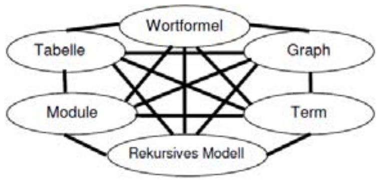
Funktionen spielen sowohl in der Mathematik als auch im Alltag eine herausragende Rolle. Sie beschreiben die Beziehung bzw. die Abhängigkeit, die zwischen Elementen einer (oder verschiedener) Mengen besteht –beispielsweise kann jedem Quadrat der Flächeninhalt, jeder Ware der Preis, jedem Menschen das Alter zugeordnet werden.

Eine Klärung des Funktionsbegriffs soll im Mathematikunterricht stattfinden, jedenfalls sollte der Mathematikunterricht in Inhalten und Gestaltung von der Idee der Funktion durchdrungen sein. Durch Funktionen werden Zusammenhänge erfasst, beschrieben, und/oder quantifiziert. Funktionen stellen wesentliche Aspekte fundamentaler Ideen bereit, da sie für die Mathematik von großer Tragweite und für das kulturelle Verständnis der Mathematik unentbehrlich sind. Gesetzmäßigkeiten (der Natur) sind ohne das Verständnis über funktionale Zusammenhänge kaum vorstellbar. Die Entwicklung des Funktionsbegriffs bzw. der Funktion ist auch in der historischen Entwicklung der Mathematik darstellbar, Funktionen stellen ein tragfähiges Konstrukt dar um curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern, sie leiten zum Sprechen über Mathematik an und besitzen einen sprachlichen und handlungsmäßigen Archetyp in der Sprache und dem Denken des Alltags (vgl. Schweiger, 2010). Zum Erlernen des Funktionsbegriffs gibt es aus fachdidaktischer Sicht unterschiedliche Phasenmodelle zum Begriffsverständnis. Jene mit erheblichem Einfluss auf die fachdidaktische Literatur sind das Modell nach Malle (2000), nach Sfard (1991) und nach Vollrath & Weigand (2007). Die Entwicklung des Funktionsbegriffs kann in vier Stufen erfolgen, die Vollrath & Weigand (2007) ausführlich charakterisieren:

Vollrath & Weigand (2007) merken an, dass sich die gesamte Fülle des Funktionsbegriffs erst bei der Bearbeitung von Themengebieten aus der Analysis in der Sekundarstufe II zeigt. Dafür müssen allerdings bereits in der Sekundarstufe I die Voraussetzungen geschaffen werden. Diese werden vorwiegend durch Beispiele und Darstellungen bestimmt, nicht durch formale Definitionen. Bei der Einführung von Funktionen sollte das Gewicht deshalb nicht zu stark auf einen formal-korrekten Umgang gelegt werden, sondern vielmehr darauf, dass Vorstellungen in geeigneter Weise ausgebildet werden. Dies wird von Vollrath & Weigand (2007, S. 159) betont: „In erster Linie geht es also um das Wecken angemessener Vorstellungen und erst auf dieser Grundlage dann um korrektes Arbeiten mit dem Begriff."

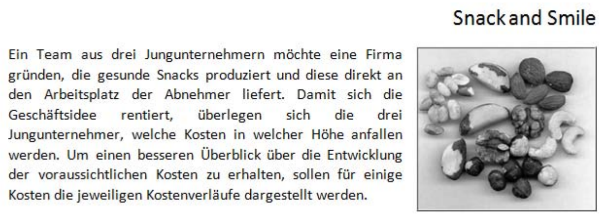
3. Möglichkeiten einer Umsetzung

Dörfler (1991) hat angemerkt, dass mathematische (Allgemein-)Begriffe in der Regel durch Erfahrung und Begegnung mit prototypischen Repräsentanten erworben werden. D.h. Funktionen werden zu Beginn des Lernprozesses nicht durch eine „saubere“ Definition erlernt, sondern die Vorstellungen der Lernenden werden maßgeblich durch Beispiele und Darstellungen bestimmt. Man muss daher verschiedene Prototypen dieses Begriffes anhand von Beispielen aus der Erfahrungswelt erlebbar machen, sodass verschiedenen Prototypen des Funktionsbegriffs erlernt und miteinander in Beziehung gesetzt werden, wie in der obigen Graphik, nach Bleier (2009, S. 13), deutlich wird. Bei der Erarbeitung im Unterricht sollen vor allem das Kennen und der Nutzen verschiedener Sachverhalte von Funktionen im Mittelpunkt stehen, also insbesondere die nachfolgend aufgelisteten Aspekte angesprochen werden:



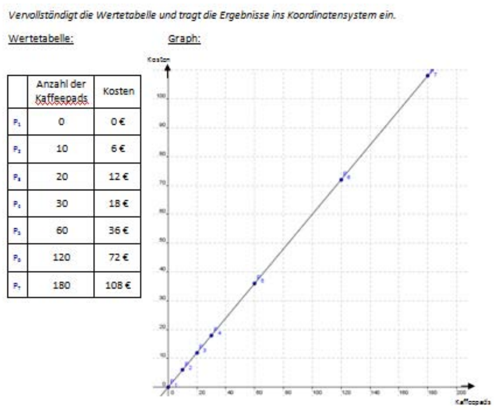
- Zuordnungsaspekt
- Kovariationsaspekt
- Objektaspekt
- Wechsel zwischen den Darstellungsformen

Diese Aspekte sollen in jeder Altersstufe entsprechend dem Wissenstand angesprochen werden, sodass der Einseitigkeit des Funktionsverständnisses hinsichtlich algebraischer Ausdrücke entgegengewirkt und in den Unterricht begriffsentwickelnde Phasen eingebaut werden können. Entsprechende Beispiele dazu finden sich auf dem Content-Management-Systems des Projekts ABCmaths (www.abcmaths.de). Anhand einer gegebenen Aufgabenstellung (wie z.B. in „Snack and Smile“ dargestellt) werden Fragestellungen zu oben angeführten Aspekten auf unterschiedlichen Niveaus angeführt. Entscheidend ist, dass die Aufgabenstellung sowohl in der Sekundarstufe I als auch in der Sekundarstufe II in selber Weise verwendet werden kann. Lediglich die Art der Fragestellung ändert sich entsprechend der Jahrgangsstufe auf der sie thematisiert werden soll. Die angeführten Aspekte des Funktionsbegriffs werden durch allfällige Fragestellungen ausgewiesen. In der Sek. I kann durch eine konkrete Fragestellung z.B. eine Betonung des Zuordnungsaspekts (nachfolgend dargestellt) erfolgen.

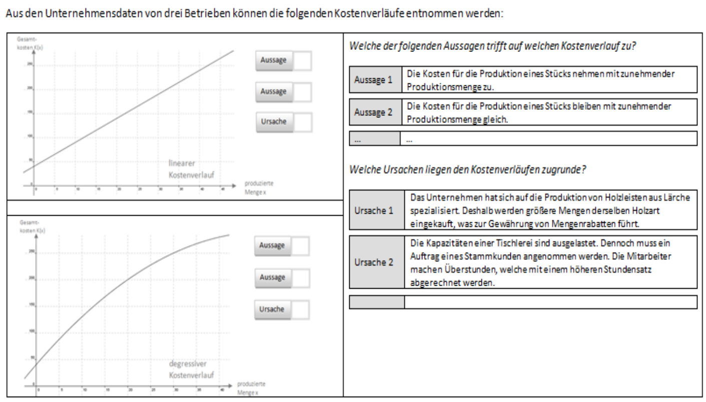


Snack and Smile

Ein Team aus drei Jungunternehmern möchte eine Firma gründen, die gesunde Snacks produziert und diese direkt an den Arbeitsplatz der Abnehmer liefert. Damit sich die Geschäftsidee rentiert, überlegen sich die drei Jungunternehmer, welche Kosten in welcher Höhe anfallen werden. Um einen besseren Überblick über die Entwicklung der voraussichtlichen Kosten zu erhalten, sollen für einige Kosten die jeweiligen Kostenverläufe dargestellt werden.



Lernende müssen auf Basis einer konkreten Fragestellung die dargestellte Tabelle ausfüllen sowie den Graph der Funktion darstellen. Eine Hinführung zum Wechsel zwischen den Repräsentationsformen kann vorbereitet werden. Durch eine Änderung der Art der Fragestellung kann die Betonung anderer Aspekte erfolgen – z.B. des Objektaspekts in der Sek. II (untenstehend dargestellt).



Danksagungen

Das Project ABCmaths wird mit Unterstützung der Europäischen Kommission (503215-LLP-1-2009-1-DE-COMENIUS-CMP) finanziert. Diese Veröffentlichung gibt lediglich die Sichtweise des Autors wieder. Die Kommission haftet nicht für jedwede Nutzung der in diesem Beitrag enthaltenen Informationen. Ich danke den Kooperationspartnerinnen und -partnern in ABCmaths, Sebastian Kuntze, Stephen Lerman, Bernard Murphy, Peter Winbourne, Elke Kurz-Milcke, Anke Wagner, Claudia Wörn, Karl-Josef Fuchs, Christiane Vogl und Michael Schneider.

Literatur

Bleier, G. (2009): Längsschnitt Funktionale Abhängigkeiten. In: Didaktikhefte der ÖMG, 42, 11-20.

Dörfler, W. (1991): Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium, In: Computer – Mensch – Mathematik. Wien: hpt, 51-68.

Klika, M. (2003): Zentrale Ideen – echte Hilfen. mathematik lehren, Nr. 119, 4-7.

Malle, G.: Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: mathematik lehren, Nr. 103, 8-11.

Schweiger, F. (1992): Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: JMD, 13, 199-214.

Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. In: Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1-36.

Vollrath, H.-J.; Weigand H.-G. (2007): Algebra in der Sekundarstufe. 3. Aufl., Heidelberg: Spektrum.

v. Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. In: JMD, 13(4), 345-364.

Elke KURZ-MILCKE und Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Wenn sich „Perspektive" mit „Daten und Zufall" trifft

„Perspektive" ist eine weitreichende Idee in der Mathematik, in der Wissenschaft, Kunst und Kultur. Von wo aus und wie eine Sache betrachtet wird, bestimmt was sie bedeuten kann. Klassischerweise ist „Perspektive" eine geometrisch-räumliche Dimension. Deshalb könnte es leicht so erscheinen als sei „Perspektive", jetzt im Sinne unterschiedlicher Ansichten zu einem Sachverhalt, eine sekundäre Gegebenheit, gleichsam eine Metapher zum Geometrisch-Räumlichen. Auch unsere Sprache unterstützt diese Interpretation, indem sie uns von „Ansichten" sprechen lässt, wenn wir die Dinge „unterschiedlich sehen", kontrovers diskutieren und möglicherweise voneinander abweichende Meinungen haben. Demgegenüber betrachtet die Anthropologie die sozial-dialogische Dimension von „Perspektive" nicht als sekundär (vgl. auch Lerman 1994), sondern als untrennbaren Bestandteil des Perspektivischen. Menschliche Kognition und Sprache sind demnach ganz grundlegend an die spezifisch menschliche Fähigkeit zur Perspektivübernahme geknüpft.

„Große Ideen" in Mathematik und für den Mathematikunterricht dürften einen wichtigen Beitrag zum Gestalten reichhaltiger Gelegenheiten für verständnisvolles Lernen im Mathematikunterricht leisten (Kuntze, Lerman, Murphy, Siller, Kurz-Milcke, Winbourne, Fuchs, Wagner, Wörn, Vogl, & Schneider, 2010). Die Beschreibung solchen Wissens aus theoretischer und aus empirischer Sicht ist daher von großem Interesse. Wie im Zusammenhang mit der Verwendung von vielfältigen Darstellungen als Kernkompetenz mathematischen Denkens gut etabliert, tritt mit der Bedeutung von Perspektiveübernahme für das mathematische Denken zur fachwissenschaftlichen, fachdidaktischen verstärkt auch eine kognitive Dimension hervor.

Perspektivübernahme: Anthropologisch-entwicklungspsychologischer Hintergrund

Der Anthropologe Michael Tomasello (1999) beschreibt in einer Synthese von Ergebnissen aus der Entwicklungspsychologie, der Forschung zur Kognition von Primaten und der kulturellen Anthropologie wie sich beim Menschen im frühen Alter von etwa neun bis zwölf Monaten eine für die menschliche Kognition und Kultur zentrale, sogar notwendige Fähigkeit auszubilden beginnt. Diese Fähigkeit entwickelt sich in der Interaktion zwischen Erwachsenen und Kindern. Die Jüngsten (9-12 Monate) können zunächst nur die Aufmerksamkeit des Erwachsenen prüfen; im nächsten

Schritt wird es dem Kleinkind möglich, der Aufmerksamkeit des Erwachsenen zu folgen (11-14 Monate); erst dann vermag das Kleinkind (13-15 Monate) die Aufmerksamkeit des Erwachsenen auch zu lenken. Mit dem letztgenannten Schritt ist in der kindlichen Entwicklung die Möglichkeit zur aktiven Teilhabe an Kultur ausgebildet. In der Entwicklungsgeschichte des Menschen, so Tomasello (1999), hat die Ausbildung dieser spezifisch menschlichen Fähigkeit die kulturelle Entwicklung des menschlichen Denkens überhaupt erst bewirkt.

Sprache lenkt Aufmerksamkeit. So bringen Begriffe immer schon eine bestimmte Perspektive auf einen Sachverhalt zum Ausdruck (z.B. *Mathematik, Mathe, Rechnen, Knobeln, Problemlösen, Modellieren* etc.). Obwohl Menschen sehr früh in ihrem Leben beginnen Erfahrungen mit dieser Tatsache zu machen, sind die spezifischen Gesetzmäßigkeiten der Perspektivübernahme abhängig von den vielfältigen kulturellen Gegebenheiten und Möglichkeiten, die Menschen in ihrer Entwicklung und in ihrer Zeit vorfinden. Ein Beispiel aus dem mathematisch-statistischen Kontext: Jede Bevölkerungsstatistik hebt einige wenige Merkmale und Kategorien zur Beschreibung von Gesellschaft hervor. Liest jemand eine solche Statistik und ist er oder sie selber *qua* Teilhabe an eben dieser Gesellschaft in der Statistik impliziert, z.B. als Einwohner eines bestimmten Landes, dann beinhaltet diese Statistik nicht nur eine Perspektive auf die Gesellschaft, sondern implizit auch auf die eigene Person als Mitglied der so beschriebenen Gesellschaft. Und um im Beispiel zu bleiben, Reaktionen, auch emotionale, auf die Statistik mögen sich genau auf diesen Aspekt der Darstellung beziehen, nämlich auf die Implikationen der Statistik für das Selbstbild.

Perspektiven in der Stochastik

Statistik und „Perspektive" sind tatsächlich unzertrennlich. Diese Verschränkung gilt fachwissenschaftlich, gilt für die gesellschaftliche Bedeutung von Stochastik und wird von Autoren in der fachdidaktischen Literatur bearbeitet (Alrø & Skovsmose 2002). Begrifflich wird in der Fachwissenschaft zwischen Ereignis und Ergebnis, zwischen Elementarereignis und zusammengesetztem Ereignis, zwischen Erwartungswert und Verteilung, zwischen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und der des Komplementärereignisses usw. unterschieden. Klassischer Weise gibt es zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Perspektive auch die „Spielerperspektive" mit Gewinn, Verlust und Risiko für die einzelnen „Spieler", vielleicht „die Bank", mit Strategien und Spielverläufen. Weitergehend kann die Risikobewertung sich beispielsweise an der relativen oder der absoluten Risikoreduktion orientieren, „perspektivisch" wird dadurch jeweils ein anderer Vergleich fokussiert (Gigerenzer, Gaissmeier, Kurz-Milcke, Schwartz &

Woloshin, 2008). Kompetenter Umgang mit Wahrscheinlichkeit und Statistik bedeutet deshalb Orientierung innerhalb dieser Vielzahl von Perspektiven zu haben und diese navigieren zu können.

„Perspektive“ im Unterrichtsverlauf

Am Beispiel des Galton-Bretts wurde in einem fortlaufenden Unterrichtsprojekt der Unterrichtsverlauf als Abfolge von Perspektivwechseln analysiert (Kurz-Milcke unveröffent.). Der tatsächliche Verlauf des Unterrichts fokussierte die Aufmerksamkeit der Gruppe, sowie der einzelnen Schüler (5 bzw. 9 Jungen in einer Schule für Erziehungshilfe) in wechselnder Abfolge auf die Kugeln, die Pfade, die Struktur des Brettes, die Verteilung der Kugeln nach dem Durchlauf (in der Sprache der Kinder „die Kugelkunst“) etc. Der Unterricht wies eine Abfolge von Perspektivwechseln auf und war als solcher auch im Unterricht präsent. Insbesondere die von der Schülern entwickelten Darstellungen trugen zur Wahrnehmung einer „Choreographie“ dieses Ablaufs bei. Mit der Arbeit (Wahrnehmung, Beförderung, Reflexion) an den Perspektivwechseln entstehen dabei Möglichkeiten für „variable Choreographien“ innerhalb des Unterrichtsablaufs, der die Fokussierungen der einzelnen Schüler auf verschiedene Aspekte des Galton-Bretts und der relevanten mathematischen Sachverhalte in den Unterrichtsgesprächen als unterschiedliche Perspektiven kennzeichnete.

Schlußbemerkung

„Perspektive“ verstanden als eine grundlegende Dimension menschlicher Kognition kann auf ihre spezifische Bedeutung für die Stochastik und das Lernen ihrer Inhalte untersucht werden. Aus dieser Herangehensweise entsteht ein spezifisches Verständnis für die Notwendigkeit von Perspektivwechseln in der Auseinandersetzung mit den fachlichen Inhalten. Dieses Verständnis kann für eine flexible Choreographie des Unterrichtsgeschehens genutzt werden (Kurz-Milcke, unveröff.). Wie „fundamentalen Ideen“ (z.B. Schweiger, 1992), „Leitideen“ (KMK, 2003) oder „Kernideen“ (Gallin & Ruf, 1993) können große, übergreifende Ideen das Verständnis für mathematische und fachdidaktische Inhalte in besonderer Weise unterstützen. In diesem Fall wirken kognitiv-anthropologische, fachwissenschaftliche und fachdidaktische Analyse nahtlos zusammen.

Danksagungen

Das Project ABCmaths wird mit Unterstützung der Europäischen Kommission (503215-LLP-1-2009-1-DE-COMENIUS-CMP) finanziert. Diese Veröffentlichung gibt lediglich die Sichtweisen der Autoren wieder. Die Kommission haftet nicht für jedwede Nutzung der in diesem Beitrag enthaltenen Informationen.

Wir danken unseren Kooperationspartnerinnen und -partnern in ABCmaths, Stephen Lerman, Bernard Murphy, Peter Winbourne, Hans-Stefan Siller, Karl-Josef Fuchs, Anke Wagner, Claudia Wörn, Christiane Vogl und Michael Schneider.

Literatur

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2002). Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique. Dordrecht: Kluwer.

Gallin, P. & Ruf, U. (1993). Sprache und Mathematik in der Schule. Ein Bericht aus der Praxis. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 12(1), 3-33.

Gigerenzer, G. Gaissmeier, W., Kurz-Milcke, E., Schwartz, L. M., & Woloshin, S. (2008). Helping doctors and patients make sense of health statistics. Psychological Science in the Public Interest, 8, 53-96.

Kultusministerkonferenz (KMK). (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. [http://www.kmk.org/]. [Zugriff am 08.02.2011].

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Siller, H.-S., Kurz-Milcke, E., Winbourne, P., Fuchs, K.-J., Wagner, A., Wörn, C., Vogl, C. & Schneider, M. (2010). Große Ideen in der Mathematik sehen – Mathematik im Unterricht mit großen Ideen transparenter machen. ABCmaths – ein EU-gefördertes internationales Drittmittelprojekt. GDM-Mitteilungen, 89, 44-47.

Kurz-Milcke, E. (unveröff.). Arbeitsbericht zum Unterricht in einer „E-Schule."

Kurz-Milcke, E., Gigerenzer, G. & Martignon, L. (2010). Risiken durchschauen: Grafische und analoge Werkzeuge. Stochastik in der Schule, 31, 8-16.

Kurz-Milcke, E. & Martignon, L. (2006). Lebendige Urnen und ereignisreiche Bäume: Überlegungen und Versuche zu einer Didaktik der Stochastik in der Grundschule. In J. Meyer (Hrsg.). *Anregungen zum Stochastikunterricht*, Bd. 3. (pp. 181-203). Hildesheim: Franzbecker.

Lerman, S. (1994). *Cultural perspectives on the mathematics classroom*. Dordrecht: Kluwer.

Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13, 199-214.

Tomasello, M. (1999). *Die kulturelle Entwicklung des menschlichen Denkens: Zur Evolution der Kognition.* Frankfurt: Suhrkamp.

Christiane VOGL, Hans-Stefan SILLER, Salzburg;
Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg; Stephen LERMAN, London

Modellieren als „Big Idea“ in Mathematik mit Bedeutung für den Mathematikunterricht – Ergebnisse einer Untersuchung mit Lehramtskandidat(inn)en [1)]

Über die Tatsache, dass Modellieren in der wissenschaftlichen Auffassung von Mathematik eine Big Idea darstellt (Blum et al., 2007; Lesh et al., 2007; Stillman et al., 2008) und dass diese im Unterricht auch zum Tragen kommen soll, herrscht weitgehende Einigkeit. Lehrer(innen) sollten über die Big Idea des Modellierens professionelles Wissen besitzen und reflektieren können, inwiefern Modellieren mit einer Vielzahl curricularer Inhalte in Beziehung steht. Die empirische Erkenntnisbasis zu Sichtweisen von Lehramtskandidat(inn)en bezüglich übergreifender Konzepte wie Big Ideas im Generellen sowie bezüglich des Modellierens als Big Idea im Speziellen ist derzeit noch nicht besonders breit (Maaß et al., 2009; Kuntze & Zöttl, 2008). In einer Teilstudie des Projekts „ABCmaths“ wurden daher Sichtweisen österreichischer und deutscher Lehramtskandidat(inn)en hinsichtlich der Bedeutung des Modellierens im Sinne einer Big Idea untersucht. In diesem Beitrag werden Ergebnisse dieser Studie berichtet.

Big Ideas stellen einen Ausgangspunkt für mathematik- und unterrichtsbezogene Reflexion dar und können Mathematiklehrkräfte unter Einbezug fachdidaktischen Wissens bei der Gestaltung kognitiv aktivierender, begriffswissensbezogener Lerngelegenheiten unterstützen (Kuntze et al., im Druck). Um die Big Idea des Modellierens im Mathematikunterricht entsprechend berücksichtigen zu können, ist einerseits ausreichendes Wissen zum Modellieren wesentlich, andererseits dürften Sichtweisen zur Bedeutung des Modellierens für den Unterricht und mathematikbezogenes Lernen eine wichtige – möglicherweise eine im Hinblick auf die Weiterentwicklung professionellen Wissens filternde – Rolle spielen. Aus diesem Grund stehen die folgenden drei Forschungsfragen im Mittelpunkt des Interesses:

(1) Welche Bedeutung messen Lehramtsstudent(inn)en dem Modellieren im Sinne einer mathematikbezogenen Big Idea bei?

(2) Welche Stellung nehmen die Bedeutungszuschreibungen der Lehramtskandidat(inn)en bezüglich des Modellierens im Vergleich zur wahrgenommenen Bedeutung anderer Big Ideas ein?

(3) Variiert die Wahrnehmung der Bedeutung des Modellierens durch die angehenden Lehrer(innen) nach verschiedenen Inhaltsbereichen des Mathematikunterrichts?

Stichprobe/Methode

Für die Beantwortung dieser Fragen wurden insgesamt 117 deutsche Lehramtsstudierende (61 Primar-, 35 Hauptschullehramtsstudierende, 15 Studierende der Sonderpädagogik, 6 ohne Angabe) und 42 österreichische Gymnasiallehramtsstudierende befragt (vgl. Siller et al., im Druck). Die Student(inn)en sollten dabei mit Ziffern von 0 (geringe Bedeutung) bis 5 (hohe Bedeutung) angeben, welche Bedeutung sie ausgewählten Big Ideas für den Mathematikunterricht insgesamt und für sechs exemplarische mathematische Inhaltsbereiche im Speziellen beimaßen. Um ein gemeinsames Verständnis der Befragten zu den im Fragebogen angesprochenen Big Ideas zu unterstützen, enthielt der Fragebogen kurze Charakterisierungen dieser Big Ideas.

Unter den gegebenen Big Ideas war die Big Idea des Modellierens. Die anderen sieben im Fragebogen angesprochenen Big Ideas finden sich in Abbildung 1.

Ergebnisse

Die Mittelwerte der allgemein für den Mathematikunterricht wahrgenommenen Bedeutung sind in Abbildung 1 zusammengefasst.

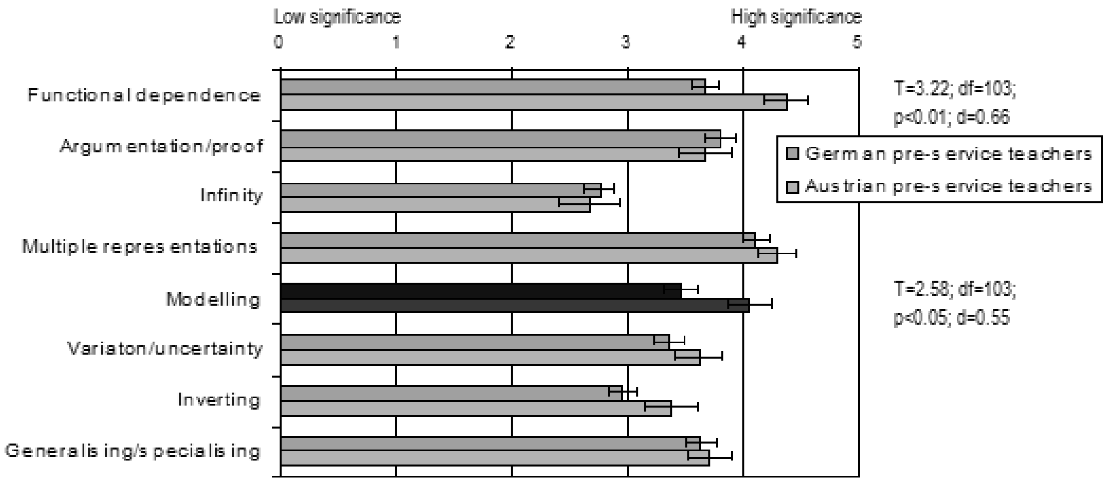


Abb. 1: Wahrgenommene Bedeutung von Big Ideas: Mittelwerte und Standardfehler

Grundsätzlich wird dem Modellieren von den deutschen und von den österreichischen Lehramtsstudierenden eine eher hohe Bedeutung beigemessen. Sowohl die Bewertungen der deutschen Lehramtskandidat(inn)en als auch jene der österreichischen sind in der oberen Hälfte der sechsteiligen Bewertungsskala angesiedelt. Signifikante Unterschiede in den Bewertungen der Big Ideas ergeben sich zwischen österreichischen und deutschen Lehramtsstudent(inn)en neben der Big Idea „Modellieren“ auch für die Big Idea

„Funktionale Abhängigkeit". Von den österreichischen Studierenden wurde für keine Big Idea eine signifikant höhere Bedeutung als für das Modellieren gesehen. Obwohl die Big Idea „Modellieren" bei den befragten deutschen Lehramtsstudierenden einen relativ hohen Stellenwert einnahm, wurden andere Big Ideas, wie beispielsweise „Funktionale Abhängigkeit" oder „Vielfältige Darstellungen nutzen" in ihrer allgemeinen Bedeutung für den Mathematikunterricht noch höher eingestuft (Abb. 1).

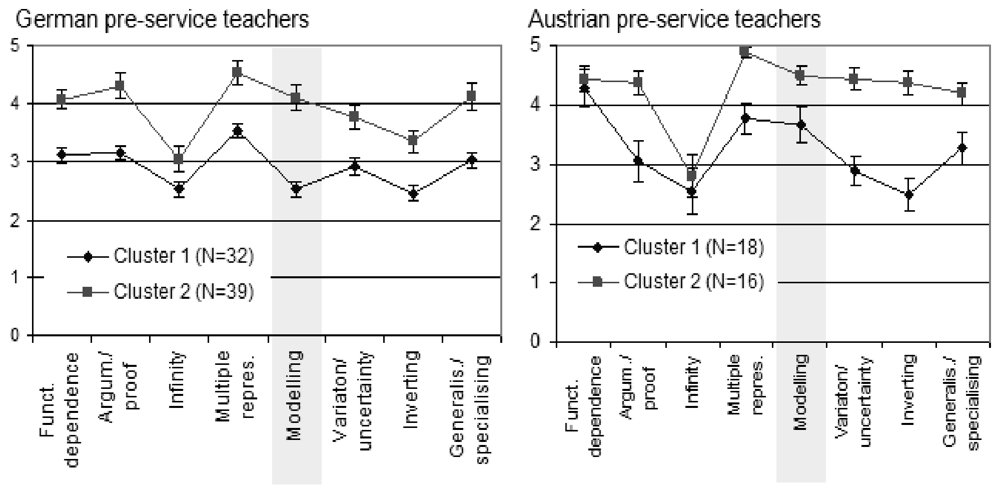


Abb. 2: Cluster-Analyse: Bewertungen der Big Ideas durch Subgruppen von Lehramtskandidat(inn)en

Um Unterschiede innerhalb der Stichproben in den Blick zu nehmen, wurden jeweils Cluster-Analysen gerechnet (Abb. 2), die jeweils zu einer Zwei-Cluster-Lösung führten. Die Bewertungen der österreichischen Studierenden zur Big Idea „Modellieren" zeigen ein insgesamt homogeneres Bild als jene der deutschen Student(inn)en. Hier wurde deutlich, dass ein großer Teil der deutschen Studierenden eine vergleichsweise geringe Bedeutung des Modellierens sah.

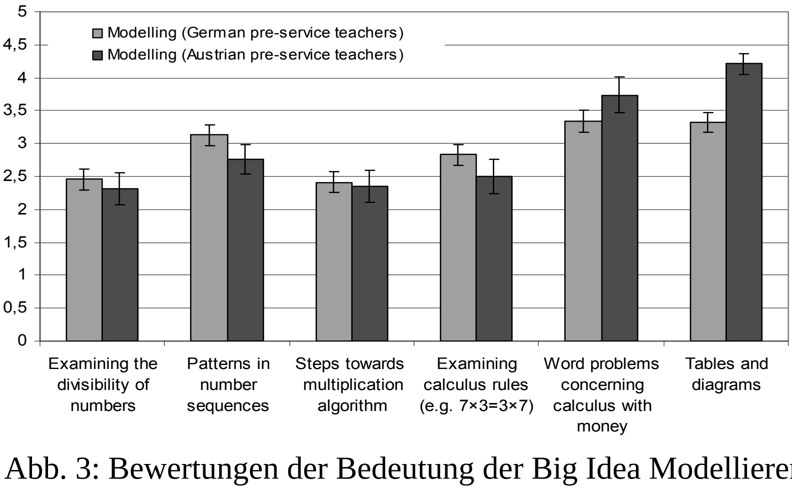


Abb. 3: Bewertungen der Bedeutung der Big Idea Modellieren in Bezug auf unterschiedliche mathematische Inhaltsbereiche

Wie aus Abbildung 3 hervorgeht, messen sowohl die deutschen als auch die österreichischen Lehramtskandidat(inn)en den beiden mathematischen Inhaltsbereichen „Textaufgaben zum Rechnen mit Geldbeträgen“ und „Tabellen und Diagramme“ im Zusammenhang mit der Big Idea Modellieren die größte Bedeutung bei.

Diskussion

Sichtweisen zum Modellieren als Big Idea im Mathematikunterricht dürften Auswirkungen nicht zuletzt auf die Formulierung von Lernzielen durch Lehrkräfte und die Gestaltung der Lernumgebungen haben. Die befragten angehenden Lehrer(innen) schätzten das Modellieren zwar als bedeutsam ein, sahen jedoch zum Großteil vor allem eine Verbindung zu wenigen der mathematischen Inhaltsbereiche. Dies deutet auf ein Weiterentwicklungspotential der Lehramtsausbildung in diesem Bereich hin. In diesem Zusammenhang interessiert auch die Frage, inwiefern sich Unterrichtserfahrungen auf Sichtweisen zur Big Idea Modellieren auswirken können. Dies wird derzeit im Rahmen einer Folgestudie in „ABCMaths“ untersucht.

Literatur

Blum, W., Galbraith, P., Niss, M. & Henn, H.-W. (Eds.). (2007). Modelling and applications in mathematics education, New ICMI Studies No. 10. New York: Springer.

Stillman, G. A., Brown, J. P. & Galbraith, P. L. (2008). Research into the teaching and learning of applications and modelling in Australasia. In: H. Forgasz, A. Barkatsas, A. Bishop, B. Clarke, S. Keast, W-T. Seah, & P. Sullivan (Eds.), Research in mathematics education in Australasia 2004-2007. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 141-164.

Maaß, K. & Gurlith, J. (2009). Designing a teacher questionnaire to evaluate professional development in modelling. CERME 6, WG 11, 2056-2066.

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H.-St. & Winbourne, P. (im Druck). Professional knowledge related to Big Ideas in Mathematics – an empirical study with pre-service teachers. [Proceedings of CERME 7, WG 17].

Kuntze, S. & Zöttl, L. (2008). Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zum Lernpotential von Aufgaben mit Modellierungsgehalt. mathematica didactica, 31, 46-71.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modelling. In: F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 763-804). Charlotte, NC: IAP.

Siller, H.-S., Kuntze, S., Lerman, S., & Vogl, C. (im Druck). Modelling as a big idea in mathematics with significance for classroom instruction – How do pre-service teachers see it?. [CERME 2011].

[1)] Das Project ABCmaths wird mit Unterstützung der Europäischen Kommission (503215-LLP-1-2009-1-DE-COMENIUS-CMP) finanziert. Diese Veröffentlichung gibt lediglich die Sichtweisen der Autoren wieder. Die Kommission haftet nicht für jedwede Nutzung der in diesem Beitrag enthaltenen Informationen.

ANIKA DREHER, Osnabrück, und SEBASTIAN KUNTZE, Ludwigsburg

Konstruktivistische und rezeptive Sicht von Lehrkräften und Studierenden zum Lehren und Lernen im Mathematikunterricht

Konstruktivistische und rezeptive Sichtweisen von Mathematiklehrkräften zum Lehren und Lernen von Mathematik werden verbreitet als bedeutsame Einflussgrößen auf deren unterrichtsbezogenes Handeln und auf den Kompetenzaufbau von Schülerinnen und Schülern gesehen. Besonders das Fragebogeninstrument von Staub und Stern (2002) wurde bisher in zahlreichen Studien eingesetzt, um diese Sichtweisen etwa als Einflussgrößen der Klassenebene auf die Schulleistungsentwicklung zu betrachten (z.B. Staub & Stern, 2002; Kunter et al., 2011) oder um Querbezüge zu anderen Komponenten professionellen Wissens herzustellen (z.B. Lipowsky et al., 2003; Kuntze, 2008). Nicht zuletzt aufgrund dieser Stellung des Untersuchungsinstruments als einer Art „Basismaß“ für empirische Studien ist es sinnvoll, Überblicke über bereits bekannte Befunde zu geben. Außerdem können Reanalysen früherer Studien und Auswertungen aktueller Daten einen Beitrag zur Frage nach „typischen“, auch schultypbezogenen Ausprägungen dieser Sichtweisen von Mathematiklehrkräften und Studierenden liefern.

Theoretischer Hintergrund

Die konstruktivistische und die rezeptive Sicht des Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht nach Staub & Stern (2002) können als globale (vgl. Törner, 2001), d.h. situationsübergreifende Pedagogical Content Beliefs (vgl. Shulman, 1986) eingeordnet werden (zu Einzelheiten der Einordnung vgl. das Modell von Komponenten professionellen Wissens in Kuntze & Zöttl, 2008). Diese Sichtweisen beziehen sich auf konstruktivistische und rezeptive Modellvorstellungen zum Lernen und damit verbundene Überzeugungen zum Mathematikunterricht.

Die empirische Erkenntnislage zu diesen Sichtweisen von Lehrkräften schließt den Nachweis von Zusammenhängen mit der Schulleistungsentwicklung von Schülerinnen und Schülern und mit Unterrichtsqualitätsmerkmalen des Unterrichts der Lehrkräfte ein (Staub & Stern, 2002; Kunter et al., 2011). Die konstruktivistische bzw. rezeptive Sicht vom Lehren und Lernen im Mathematikunterricht kann empirisch ferner als Komponente eines „Syndroms einer dynamischen bzw. statischen Sicht von Mathematik und Mathematikunterricht“ gesehen werden (u. a. Lipowsky et al., 2003). Auch über globale Orientierungen zur Mathematik und zum Mathematikunterricht hinaus gibt es Befunde zu Zusammenhängen, etwa mit unterschiedlichen inhaltsbereichsspezifischen Überzeugungen und mit Einschätzungen von videografierten Klassenraumsituationen (Kuntze, 2008) durch Lehrkräfte, sowie mit aufgabenbezogenen Überzeugungen von Lehramtsstudierenden (Kuntze & Zöttl, 2008). In einer eher untersuchungsmethodisch ausgerichteten Validierungsstudie konnten Zusammenhänge mit über Rich Pictures erhobenen Sichtweisen zum Unterricht beobachtet werden (Kuntze, 2010). Insgesamt wurde das Erhebungsinstrument von Staub und Stern (2002) damit recht häufig eingesetzt, was zu dem nahe liegenden Forschungsinteresse an Vergleichen und an einer Zusammenschau früherer und aktueller Ergebnisse führt. Konkret stellen sich die folgenden Forschungsfragen:

Welche Aussagen über „typische" Ausprägungen der konstruktivistischen und rezeptiven Sicht vom Lehren und Lernen von Mathematik können gemacht werden? Gibt es Unterschiede bezüglich dieser Sichtweisen zwischen verschiedenen Gruppen von Lehrkräften und Lehramtsstudierenden?

Untersuchungsdesign und Stichprobe

Reanalysiert bzw. analysiert wurden Daten verschiedener Studien. Informationen über die jeweiligen Stichproben enthält Tabelle 1.

Studie Lehrkräfte	**N**	**Geschlecht (w / m / k.A)**	**Alter (unter 35 J. / 36-45 J. / 46-55 J. / über 55 J. / k.A.)**	**Unterrichts-erfahrung in Jahren (SD)**	
A	96	28 / 64 / 4	44 / 21 / 45 / 6 / 0	11,6 (9,76)	
B	64	26 / 34 / 4	20 / 15 / 19 / 6 / 4	13,2 (10,76)	
Lehramts-studierende			**Alter (SD)**	**Semesterzahl (SD)**	**Studiengänge (Gy / RS / HS / GS / SoPäd / k.A.)**
C	238	166 / 72 / 0	22,7 (3,91)	3,0 (2,27)	56 / 64 / 0 / 64 / 44 / 10
D	71	52 / 19 / 0	23,5 (3,10)	5,4 (1,56)	0 / 19 / 5 / 45 / 0 / 2
E	159	105 / 50 / 4	22,3 (3,49)	2,9 (1,89)	42 / 3 / 32 / 61 / 15 / 6

Tabelle 1: Informationen über die betrachteten Stichproben. Die Befragten sind in den Studien A und B Gymnasiallehrkräfte und in C, D und E Lehramtsstudierende.

Skala	**Beispielitem**	**Reliabilität α (Cronbach)**	**Anzahl an Items**
Konstr. Sicht vom Lehren und Lernen im Mathematikunterricht	Es hilft Schüler(inne)n Mathematik zu begreifen, wenn man sie ihre eigenen Lösungsideen diskutieren lässt.	0,73	6
Rezeptive Sicht vom Lehren und Lernen im Mathematikunterricht	Am besten lernen Schüler/innen Mathematik aus den Darstellungen und Erklärungen ihrer Lehrperson.	0,80	10

Tabelle 2: Skalenwerte

Befragt wurden die angehenden und praktizierenden Lehrkräfte jeweils mit den Multiple-Choice-Items (4stufige Likert-Skala) des von Staub und Stern

(2002) verwendeten Instruments in einer mit der Erhebung von Lipowsky et al. (2003) parallelisierten Version. Die Reliabilitätswerte und Beispielitems finden sich in Tabelle 2.

Ausgewählte Ergebnisse

Die mittleren Ausprägungen der Skalenwerte sind in Tabelle 3 zusammengefasst. Die Skalen "konstruktivistische" und "rezeptive Sicht des Lehrens und Lernens" korrelieren hierbei erwartungsgemäß in allen Studien negativ mit r=-0,29 bis r=-0,51 (Korrelation zweiseitig signifikant mit p<0,001). Für die Studien mit Lehramtsstudierenden zeigt sich tendenziell eine niedrigere Korrelation zwischen den beiden Skalen als für die Studien mit Lehrpersonen.

	Lehrer (Gy)	Gy	RS	HS	GS	SoPäd
Konstruktivistische Sicht	3,19 (0,55)	3,10 (0,54)	3,30 (0,46)	3,11 (0,46)	3,26 (0,48)	3,25 (0,54)
Rezeptive Sicht	2,14 (0,42)	2,54 (0,42)	2,47 (0,44)	2,67 (0,39)	2,43 (0,45)	2,47 (0,60)

Tabelle 3: Mittelwerte und Standardabweichungen nach Gruppen von Befragten

Für die Skala zur konstruktivistischen Sicht zeigen sich keine signifikanten Unterschiede zwischen den verschiedenen Gruppen von Befragten. Anders ist dies für die Skala zur rezeptiven Sicht: Die betrachteten Gymnasiallehramtsstudierenden hatten eine signifikant stärker ausgeprägte rezeptive Sicht vom Lehren und Lernen als Gymnasiallehrkräfte. (T-Test: T=7,45; df = 257 ; p<0,001). Es handelt sich um einen starken Effekt (Cohen’s d=0,96).

Im Hinblick auf die Frage nach Schulformunterschieden zeigt ein Scheffé-Test, dass angehende Lehrkräfte für Hauptschulen im Mittel eine rezeptivere Sichtweise zeigten als andere Lehramtsstudierende.

Diskussion

Allgemein stimmten die Befragten eher der konstruktivistischen als der rezeptiven Sicht zum Lehren und Lernen zu. Dieses Ergebnis ist sicherlich mit Vorsicht zu interpretieren, da bei den befragten Lehrkräften bzw. Lehramtsstudierenden möglicherweise Erwartungen zur sozialen Erwünschtheit eine Rolle bei der Beantwortung des Fragebogens spielen könnten.

Für die Skala zum rezeptiven Lernverständnis ergeben sich signifikante Unterschiede zwischen verschiedenen Gruppen von Befragten. So zeigten angehende Gymnasiallehrkräfte im Mittel eine stärker rezeptive Einstellung als diejenigen, die den Lehrer(innen)beruf bereits ausübten.

Der Schultypenvergleich ergibt im Wesentlichen, dass die rezeptive Sichtweise bei angehenden Hauptschullehrkräften stärker ausgeprägt war als bei den anderen Lehramtsstudierenden. Dies ist eine plausible Ergänzung der Ergebnisse von Lipowsky et al. (2003), nach denen Lehrkräfte an Hauptschulen ein rezeptiveres Lernverständnis hatten als Lehrpersonen an Gymnasien.

Weitergehende, hier nicht berichtete Untersuchungen zeigen, dass eine Aufspaltung der Skala zur rezeptiven Sicht in zwei Subskalen zu den Aspekten "Rollenverteilung" und "Aufbaustrategien" sinnvoll sein könnte: Faktorenanalytische Auswertungen geben diesbezügliche Hinweise. Eine darauf aufbauende weitere Auswertung hat insbesondere für die Sichtweisen Gymnasiallehramtsstudierender ein verbessertes Erklärungspotential.

Literatur

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik*, 19(1), 3-45.

Kunter, M. et al. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. München: Waxmann.

Kuntze, S. (2008). Zusammenhänge zwischen allgemeinen und situiert erhobenen unterrichtsbezogenen Kognitionen und Überzeugungen von Mathematiklehrkräften. *Unterrichtswissenschaft,* 36(2), 167-192.

Kuntze, S. (2010). Sichtweisen von Studierenden zum Lehren und Lernen im Mathematikunterricht – „Rich pictures“ und Multiple-Choice: Gegenüberstellung zweier Erhebungsformate. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 521-524). Münster: WTM-Verlag.

Kuntze, S. & Zöttl, L. (2008). Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zum Lernpotential von Aufgaben mit Modellierungsgehalt. *mathematica didactica*, 31, 46-71.

Lipowsky, F., Thußbas, C., Klieme, E., Reusser, K., & Pauli, C. (2003). Professionelles Lehrerwissen, selbstbezogene Kognitionen und wahrgenommene Schulumwelt - Ergebnisse einer kulturvergleichenden Studie deutscher und Schweizer Mathematiklehrkräfte. *Unterrichtswissenschaft*, 31(3), 206–237.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Staub, F., & Stern, E. (2002). The nature of teacher’s pedagogical content beliefs matters for students’ achievement gains: quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 94 (2), 344-355.

Silke LADEL, Karlsruhe

Multiplex-R: Zum Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen von Zahlen und Operationen bei 5- bis 8-jährigen Kindern

1. Das Teil-Ganze Konzept

Das Teil-Ganze Konzept spielt eine zentrale Rolle beim Zahl- und Operationsverständnis. Hat ein Kind das Konzept erworben und weiß, dass eine Zahl aus verschiedenen Teilen besteht, so ist der Übergang zur Addition und Subtraktion leicht, da das Teil-Ganze Konzept Beziehungen zwischen Zahlentripeln beschreibt (z.B. 4+2=_, 6-4=_, 6-2=_, 4+_=6, _+2=6). Diese Beziehungen sind zunächst v.a. im Zahlenraum bis 10 von Bedeutung und können aufgrund der dekadischen Analogie auf Additions- und Subtraktionsaufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen werden (z.B. 54+2=56, weil 4+2=6).

Bei Zahlen größer als 10 sind u.a. die Zerlegungen in Zehnerpotenzen wichtig. So kann durch diese ganz bestimmte Art der Zerlegung das Verständnis für das dezimale Stellenwertsystem gefördert werden (z.B. $352=3\cdot10^2+5\cdot10^1+2\cdot10^0$) (s. Abb. 1 links). In Bezug auf die Operationen findet eine Spezifizierung des Teil-Ganze Konzepts insofern statt, dass man über ausschließlich gleich große Teile zur Multiplikation und Division gelangt (s. Abb. 1 rechts).

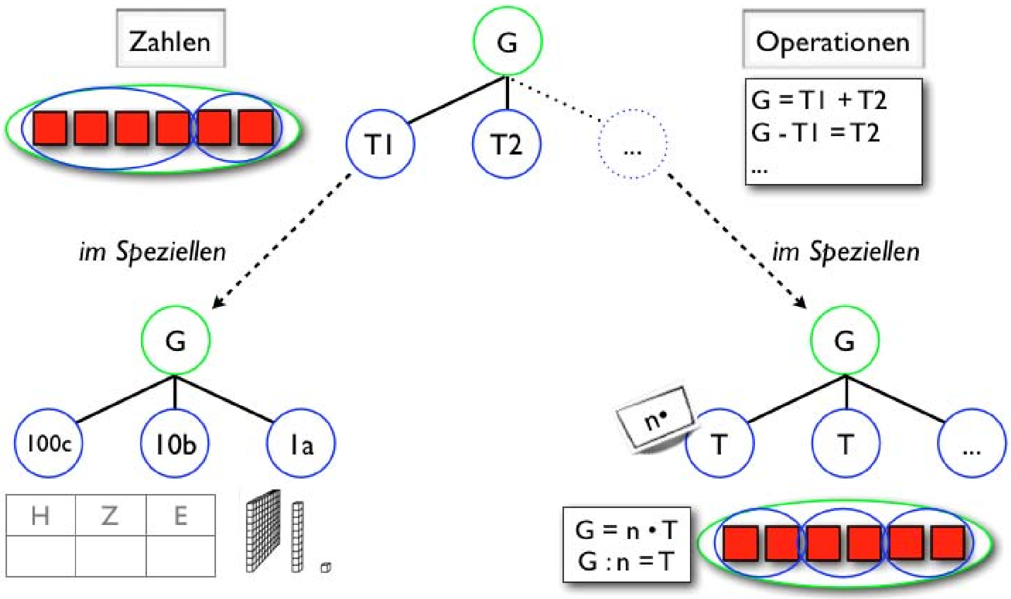


Abb.1: Das Teil-Ganze Konzept und seine Elaboration

Im Hinblick auf das weiterführende Lernen von Mathematik können auf der Grundlage des Teil-Ganze Konzepts diverse Gesetzmäßigkeiten und

Zusammenhänge erarbeitet werden, wie z.B. die Kommutativität und Assoziativität der Addition. Dadurch wird das Rechnen flexibel. So kann z.B. die Aufgabe 6+8 wie folgt gelöst werden: 6+8=6+(4+4)=(6+4)+4=10+4=14. Es ginge aber auch 6+8=(4+2)+8=4+(2+8)=4+10=14.

Ebenso können aus dem Teil-Ganze Konzept die Kompensation (das Ganze bleibt gleich, wenn man ein Ding von einem Teil zum anderen bewegt), die Kovarianz (wenn ein Teil eines Ganzen um eins vergrößert wird, vergrößert sich auch das Ganze um eins) sowie die Komplementarität der Addition und Subtraktion erarbeitet werden (vgl. Gerster & Schultz 2004) .

2. „Finger Symbol Sets“

Das Teil-Ganze Konzept kann mit Hilfe von „Finger Symbol Sets“ gefördert werden. Hierbei werden Finger auf einen Blick gezeigt (vgl. Brissiaud 1992, Gaidoschick 2009). Es liegt demnach nicht am Arbeitsmittel „Finger“, wenn Kinder zählend Rechnen. Zählendes Rechnen darf nicht mit dem Rechnen mit Fingern gleichgesetzt werden, sondern Kinder können auch hier nach dem ordinalen oder dem kardinalen, insbesondere dem Teil-Ganze Konzept vorgehen und entsprechend mit den Fingern arbeiten. Lorenz (1998) bezeichnet dies als dynamisches Arbeiten (sequentielle Zahlwortfolge) und intuitives, statisches Darstellen mit Fingern.

Die Art und Weise der Nutzung von Fingern zur Darstellung von Zahlen und Operationen war ein Teil der Untersuchung von fast 200 Kindern im Alter zwischen 5 und 8 Jahren, die im Winter 2010/2011 stattfand. Die Kinder kamen zum Zeitpunkt der Untersuchung aus 2 verschiedenen Kindergärten und 3 verschiedenen Schulen im Raum Aalen, wobei es sich jeweils um einen Kindergarten und eine Schule für Kinder mit besonderem Förderbedarf in den Bereichen Lernen und Erziehung handelte. Inhaltlich ging es in den Einzelinterviews bei Kindergartenkindern ab 5 Jahren sowie Erstklässlern um Zahlen, bei den Zweitklässlern um die Operationen Addition und Subtraktion, bei den Drittklässlern um die Operationen Multiplikation und Division.

Die Finger bieten viele Vorteile gegenüber anderem didaktischen Material. Sie stellen ein „natürliches“ Arbeitsmittel dar, das stets zur Verfügung steht. Die Finger einer Hand können simultan erfasst werden, die Finger zweier Hände entsprechend quasi-simultan. Vor allem die Beziehungen zu fünf und zehn sind als „geistige Stützpunkte“ von Bedeutung (vgl. Gaidoschick 2009, Steinweg 2009). Dies kam auch in der Untersuchung durch die Antwort auf die Frage, wieso die Kinder 7 (9) Finger so schnell erkannt haben, klar zum Ausdruck: *„5 und 2“ („5 und 4“)* oder: *„Ich hab‘s* *nur angeschaut.“* Der Bezug zur Fünf wird hier sehr deutlich (zur Kraft der Fünf vgl. Krauthausen 1995). Des Weiteren ist stets der Bezug zur 10 gegeben, was für die Erarbeitung des dezimalen Stellenwertsystems von besonderer Bedeutung ist. Auf die Frage, woher die Kinder so schnell wussten, dass 9 Finger gezeigt wurden, antworteten sie beispielsweise *„Weil nur einer weg ist“*, *„Weil ich 10 Finger hab*“ oder *„Vor der 10 kommt die 9“*.

3. Zur Verknüpfung von Darstellungsformen

Für das Verständnis von Zahlen ebenso wie für das Lernen und den Aufbau grundlegender Operationsvorstellungen ist die Verknüpfung der Darstellungsformen von besonderer Bedeutung (vgl. Aebli 1987, Bruner 1966, Gerster & Schulz 2004). Deshalb betraf der Schwerpunkt der Untersuchung Darstellungswechsel und die sich daraus ergebenden Chancen und Probleme. Zu „Zahlen“ wurden den Kindern Aufgaben zur 1-zu-1-Zuordnung, zur Anzahlerfassung, zur Darstellung von Anzahlen sowie zur Zahlenkenntnis gestellt. Aufgaben zur 1-zu-1-Zuordnung lauteten z.B. *„Lege mir bitte genauso viele Gummibärchen wie hier Plättchen liegen.“* Aufgaben dieser Art wurden am besten gelöst, wenn diese auch mit Hilfe der 1-zu-1-Zuordnung gelöst, die Gummibärchen also z.B. direkt auf oder unter die Plättchen gelegt wurden. Probleme traten auf, wenn die Kinder diese Aufgaben nicht über die 1-zu-1-Zuordnung lösten, sondern durch Anzahlerfassung und Anzahldarstellung. Nutzten sie unstrukturiertes Material, hier Gummibärchen oder einzelne Plättchen, so zählten sie. Strukturiertes Material wurde von selbst meist gar nicht oder nicht korrekt genutzt, so dass z.B. die 5er-Stange gar nicht beachtet wurde oder als eins gezählt wurde. Das bestätigt noch einmal, dass die Arbeit mit Material selbst neuen Lernstoff darstellt (vgl. Schipper 1984). Bei den Darstellungswechseln im Bereich der Operationen wurde zusätzlich zwischen statischen und dynamischen sowie zwischen realen und virtuellen Darstellungen differenziert. Dabei wurde die Mehrdeutigkeit von Veranschaulichungen (vgl. Lorenz 1998, Radatz 1989, Schipper & Hülshoff 1984) sehr deutlich. Auffallend war, dass die Kinder häufig nur einen Ausschnitt der Bilder betrachteten. Das war auch bei dynamischen Bildern, - virtuell sowie real im Sinne von mehrphasigen Bildern - der Fall. Hier wurden trotz des Hinweises, die Bilder als eine Art Comic mit Anfangszustand, Veränderung und Endzustand zu betrachten, häufig nur einzelne Phasen betrachtet. Des Weiteren war über alle Handlungen hinweg bei der symbolischen Darstellung eine starke Tendenz zur Addition zu verzeichnen. Eine deutliche Diskrepanz konnte zwischen der zu einem Bild erzählten Geschichte und der anschließend notierten Rechnung festgestellt werden, z.B. zu einem Bild mit 4 Hasen und 7

Karotten: *„4 Hasen fressen 4 Karotten. Dann bleiben 2 übrig.“* Notiert: *„8-2=6“*.

4. Multi-Touch-Interface

Diese Untersuchung ist in das Projekt Multiplex-R eingebettet, das der Frage nachgeht ob, und wenn ja wie, der Einsatz von Multi-Touch-Technologie den Aufbau grundlegender Zahl- und Operationsvorstellungen unterstützen kann. Dabei erzeugen die Kinder mit ihren Fingern quadratische Plättchen. Mit diesen Plättchen können die Kinder im Weiteren Handlungen vollziehen, die wiederum mit mathematischen Symbolen verknüpft sind und auf Wunsch der Kinder simultan angezeigt werden. Auf diese Art und Weise können die Kinder z.B. in der enaktiven Darstellungsform arbeiten und sehen gleichzeitig die Auswirkungen ihres Tuns in der symbolischen Darstellungsform. Die Verknüpfung der verschiedenen Repräsentationen wird somit für die Kinder direkter erfahrbar und soll dadurch den Aufbau grundlegender Zahl- und Operationsvorstellungen unterstützen.

Literatur

Aebli, H. (1987): Zwölf Grundformen des Lehrens. Stuttgart: Klett-Cotta

Bruner, J.S. (1966): Towards a theory of instruction. New York: Norwood & company

Gaidoschik, M. (2009): Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis. Buxtehude: Persen Verlag GmbH

Gerster, H.-D. & R. Schultz (2004): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen

Krauthausen, G. (1995): Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen. In: Müller, G & Wittmann, E.Ch. (Hg.): Mit Kindern rechnen. Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V. Frankfurt am Main, 87-108

Ladel, S. (2009): Multiple externe Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz. Zur Bedeutung für das Mathematiklernen im Anfangsunterricht. Didaktik in Forschung und Praxis, Bd. 48. Hamburg: Verlag. Dr. Kovac

Lorenz, J.H. (1998): Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Göttingen: Hogrefe

Radatz, H. (1989): Schülervorstellungen von Zahlen und elementaren Rechenoperationen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1989. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, S. 306-309.

Resnick, L.B. (1983): A developmental theory of number understanding. In: Ginsburg, H.P. (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 109-151). New York: Academic Press

Schipper, W. & A. Hülshoff (1984): Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? In: Grundschule 16(4), S. 54-56

Steinweg, A.S. (2009): Rechnest du noch mit Fingern? – Aber sicher! In: MNU PRIMAR 1/4, S. 124-128

Diemut LANGE, Hannover

Inwiefern hängt Kooperation mit dem Aufgabenbearbeitungserfolg beim Problemlösen zusammen?

Den Erfolg einer Kleingruppenphase kann man u.a. an dem gemeinsamen Bearbeitungsergebnis oder an dem individuellen Lernergebnis festmachen (für weitere Möglichkeiten s. z.B. Cohen 1994). Aber wovon hängt ein gutes Bearbeitungs- oder Lernergebnis ab?

Kunter, Stanat und Klieme (2005) zeigten im Rahmen der nationalen Erweiterung von PISA 2000, dass lediglich individuelle aufgabenbezogene kognitive Voraussetzungen der Gruppenmitglieder einen Einfluss auf das Gruppenergebnis haben. Jedoch konnten auch diese kognitiven Merkmale die Varianz des Gruppenergebnisses nur zu einem geringen Teil erklären (Kunter et al. 2005, S. 114). Bezogen auf das mathematische Problemlösen kamen Gawlick und Lange (2010) zu ähnlichen Ergebnissen. Vermutet werden daher Kooperationseffekte: Inwiefern hängt also die Kooperation der Partner selber mit dem Aufgabenbearbeitungsergebnis zusammen?

1. Stand der Forschung: Kooperation und Erfolg

In ihrem Überblicksartikel vergleicht Webb (1991) amerikanische Prozess-Produkt-Studien der 1980er Jahre miteinander, die den Zusammenhang von Interaktionsvariablen beim Arbeiten mit mathematischem Material und dem Abschneiden in einem individuellen Posttest zur Erfassung des Lernerfolges untersuchen. Die betrachteten Studien differenzieren zwischen einem *Geben* und einem *Erhalten* von Hilfen, so dass die Interaktionsvariablen jeder Person direkt zuzuordnen sind (das Geben einer Hilfe bedeutet somit für die andere Person das Erhalten einer Hilfe). Die meisten der einbezogenen Studien konnten einen positiven, statistisch signifikanten Zusammenhang zwischen dem Geben von Erklärungen und dem Posttestergebnis nachweisen. Negativ mit dem Posttestergebnis korrelierte dagegen, wenn jemand eine weniger elaborierte Hilfe als erbeten erhielt.

Während Webb nicht zwischen einem Sagen-Wie-etwas-geht nachdem lediglich *einer* der Partner den entsprechenden Aufgabenschritt und einem Sagen-Wie-etwas-geht nachdem *beide* Partner den Schritt bearbeitet haben, unterscheidet, tut dies Naujok (2000): Neben dem Erklären (nur einer der Partner hat den Schritt bearbeitet) spricht sie auch dem Vergleichen (beide haben den Schritt bearbeitet) die Möglichkeit einer lernförderlichen Wirkung zu, und zwar dann, wenn im Prozess des Vergleichens Unstimmigkeiten auftauchen (S. 169).

Die Art und Weise der Kooperation, die mit einem Lernerfolg in Verbindung gebracht werden kann, muss nicht dieselbe sein, die mit einer erfolgreichen gemeinsamen Aufgabenbearbeitung in Zusammenhang stehen könnte. „Although spending some time justifying one's proposed solution may help the group produce a high-quality solution, spending time to ensure that everyone understands how to solve the problem may slow the group down and prevent it from completing the solution.“ (Webb 1995)

2. Die „Mathe AG an der Leibniz Uni“ (MALU)[1]

Im Rahmen einer überschulischen Mathe AG für Fünftklässler Hannoveraner Gymnasien (MALU) wurden zwischen November 2008 und Juni 2010 einmal wöchentlich Paare interessierter und verschieden begabter Fünftklässler (zur Auswahl der Kinder s. Gawlick & Lange 2010) beim Bearbeiten verschiedener Aufgaben (Lange 2009) videographiert.

Für die – in diesem Artikel beschriebene – Analyse wurden vier leistungsdifferenzierende Aufgaben ausgewählt. Diese vier Aufgaben wurden in vier sechsten Klassen von Paaren erfolgreicher bearbeitet als von alleine arbeitenden Schülern. Zwei dieser Aufgaben sind die Schachquadrate- (Lange 2009) und die Schüler-AG-Aufgabe (Lange (eingereicht)). Von den vier Aufgaben liegen insgesamt 31 videographierte und auswertbare MALU-Paarbearbeitungen vor. Für die Analyse wurden die zwei Bearbeitungen ausgeschlossen, in denen je einer der Partner die Aufgabe vollständig alleine löst, der Aufgabenbearbeitungserfolg diesem Schüler also alleine zuzuschreiben ist.

3. Auswertungsverfahren

Die Bearbeitungsprozesse wurden transkribiert und mit Hilfe der strukturierenden und induktiven Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring 2008) auf Kooperationshandlungen untersucht (zu den Hintergründen der Wahl des Auswertungsverfahrens s. Lange (eingereicht)). Deduktiv konnte dabei auf die von Naujok (2000) rekonstruierten fachlichen Kooperationshandlungen *Erklären*, *Vorsagen*, *Abgucken*, *Vergleichen* und *Erfragen* und das von Naujok zugrunde gelegte Verständnis von Kooperationshandlungen zurückgegriffen werden. Dabei wurden die Kooperationshandlungen definiert, voneinander abgegrenzt und mit Ankerbeispielen sowohl aus dem Naujok'schen als auch aus dem eigenen MALU-Transkriptmaterial versehen. Mit Hilfe von MAXQDA wurden in einem ersten Kodierschritt im Transkript immer dann Grenzen gezogen, wenn

1 Weitere Infos zum MALU-Projekt s. http://www.idmp.uni-hannover.de/malu.html

– ein Wechsel zwischen Kooperation und Nicht-Kooperation ODER
– ein Wechsel zwischen Kooperationsarten ODER
– ein Wechsel zwischen Kooperationsinhalten

vorlag[2] (vgl. Lange (eingereicht)).

In einem zweiten Kodierschritt wurden den abgegrenzten Transkriptabschnitten – im Falle von Kooperation – Kooperationshandlungscodes zugewiesen: entweder die Naujok'schen oder im Fall der Nicht-Passung neu gebildete. Die Kodierungen wurden dann in Videograph übertragen.

Der Aufgabenbearbeitungserfolg wurde an der Richtigkeit der Paarergebnisse festgemacht: Für jeden von einem Fünftklässler erwartbaren Erkenntnisschritt bezogen auf das *Aufgabenverständnis* oder das *Ausdenken eines Lösungsweges* wurde ein Punkt vergeben. Berücksichtigung im Punkteschema fand darüber hinaus auch die *Richtigkeit der Rechnungen* und *der Lösungswegdurchführungen* (Planausführens-Phase nach Polya (1949)). Bearbeitungen, in denen keine oder lediglich erste Ansätze zu erkennen waren, wurden als *nicht-erfolgreich*, die anderen, also solche, in denen systematisch und / oder vollständig vorgegangen wurde, als *erfolgreich* betrachtet.

4. Ergebnisse & Diskussion

Die Länge (in sec) der einzelnen Kooperationshandlungen wurde in eine Mehrfeldertafel eingetragen. Mittels χ^2-Test und anschließender Konfigurationsfrequenzanalyse (Clauß et al. 1995) konnten diejenigen Kooperationshandlungen ermittelt werden, die länger oder kürzer als erwartet auftraten:

	erfolgreiche Bearbeitungen	**nicht-erfolgreiche Bearbeitungen**
Vergleichen:		
• Was	länger	kürzer
• nonverbales	länger	kürzer
• Wie	länger	kürzer
Überprüfen	länger	kürzer
Erklären	kürzer	länger

Tabelle 1: Übersicht über die quantitativen Ergebnisse von χ^2-Test und Konfigurationsfrequenzanalyse [alle Ergebnisse sind signifikant auf α =0,01-Niveau]

2 Dabei setzt das zweite Kriterium – anders als die anderen beiden – die Kenntnis der möglichen zu kodierenden Kooperationshandlungen oder zumindest möglicher Unterscheidungsdimensionen der Kooperationshandlungen voraus.

Die in den erfolgreichen Bearbeitungen länger als erwartet vorkommenden Kooperationshandlungen sind v.a. solche, die erst auftreten, nachdem beide Partner den entsprechenden Aufgabenschritt bearbeitet haben (Vergleichensphasen) (beim Überprüfen hat mindestens einer den Schritt bearbeitet). Um ein gutes Bearbeitungsergebnis zu erzielen, scheint es folglich hilfreicher zu sein, wenn beide Partner die Schritte zunächst einmal selber vollzogen haben, bevor sie sich mit dem Partner darüber austauschen.

Inwiefern sich dieses Ergebnis mit dem von Webb (1991) in ihrem Überblicksartikel herausgearbeiteten deckt, muss an dieser Stelle offen bleiben. Denkbar sind zwei Möglichkeiten: Nicht das Sagen-Wie i.A., sondern das Sagen-Wie im Nachhinein (beide haben den Schritt bearbeitet) ist auch in diesen Studien für die Signifikanz des Zusammenhangs von Erklären mit dem Lernerfolg verantwortlich. Da sich in den MALU-Prozessen die beobachteten Häufigkeiten nicht von den erwarteten unterscheiden, wenn die drei Sagen-Wie-Phasen (*Überlegungen i.d.R. stellen*, *Erklären* und *Wie-Vergleichen*) zusammenfasst werden, wäre auch denkbar, dass das Sagen-Wie (bei Webb: Erklären) zwar für den Lernerfolg, nicht aber für den gemeinsamen Bearbeitungserfolg bedeutend ist.

Literatur

Clauß, G., Finze, F.-R. & Partzsch, L. (1995). *Statistik für Soziologen, Pädagogen, Psychologen und Mediziner* (Bd. 1: Grundlagen, 2. überarbeitete und erweiterte Auflage), Frankfurt/M: Verlag Harri Deutsch.

Cohen, E.G. (1994). Restructuring the classroom: Conditions for productive small groups. *Review of Educational Research, 64(1)*, 1-35.

Gawlick, T. & Lange, D. (2010). Allgemeine vs. Mathematische Begabung bei Fünftklässlern. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Münster: WTM, S.329-332.

Kunter, M., Stanat, P. & Klieme, E. (2005). Die Rolle von individuellen Eingangsvoraussetzungen und Gruppenmerkmalen beim kooperativen Lösen eines Problems. In: Klieme, E., Leutner, D. & Wirth, J. (Hrsg.). *Problemlösekompetenz von Schülerinnen und Schülern*. Wiesbaden: VS, S.99-115.

Lange, D. (2009). Auswahl von Aufgaben für eine explorative Studie zum Problemlösen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Münster: WTM, S.227-230.

Lange, D. (eingereicht). Kooperation von Fünftklässlerpaaren beim Problemlösen. Eingereicht bei: *Beiträge zur Qualitativen Inhaltsanalyse*

Mayring, P. (2008). *Qualitative Inhaltsanalyse*, 10. neue Ausgabe, Weinheim: Beltz.

Naujok, N. (2000). *Schülerkooperation im Rahmen von Wochenplanunterricht.* Weinheim: Beltz.

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens*, Tübingen: Francke.

Webb, N. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22:5, 366-389.

Webb, N. (1995). Group collaboration in assessment: Multiple objectives, processes, and outcomes. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 17(2)*, 239-261.

Brigitte LENEKE, Magdeburg

Von anderen „Grafen“ – Knoten, Wege, Rundreisen und Gerüste im Mathematikunterricht

1. Einleitung

In den letzten Jahren ist die Graphentheorie als wichtiges Teilgebiet der Diskreten Mathematik wohl zu Recht zur „Grafenwürde“ gelangt. Viele moderne Entwicklungen und Fragestellungen erfordern zunehmend mehr Methoden aus diesem Gebiet der Mathematik. Überall dort, wo netzartige Strukturen (Computernetze, Versorgungsnetze, Verkehrsnetze, wirtschaftliche Verflechtungsbeziehungen) zu analysieren und zu bearbeiten sind, finden „Graphen“ als Modelle Anwendung. Die Modellbildung steht also bei jeder Problemlösung im Mittelpunkt. Aus ihrem eigenen Umfeld können die Schülerinnen und Schüler leicht selbst Problemstellungen beschreiben und bearbeiten. Das Spektrum der graphentheoretischen Lösungsmethoden ist so breit (Nutzung intuitiver, heuristischer und algorithmischer Verfahren), so dass Schülerinnen und Schüler aller Leistungsgruppen einen unbefangenen Zugang zu den Themen bekommen. Ein anwendungs-, problemorientierter und auch offener Unterricht liegt mit diesem Themenfeld auf der Hand. Für das Verständnis der Graphentheorie sind nur geringe Vorkenntnisse aus anderen Gebieten der Mathematik erforderlich. Die Schülerinnen und Schüler können auf einer sehr anschaulichen Basis Lösungsvorschläge machen, ohne dass sehr viele Fachbegriffe notwendig sind. In Abhängigkeit von der zu bearbeitenden Problemstellung kann die Begriffsbehandlung begleitend realisiert werden.

2. Didaktisch-methodische Orientierung

Die **Modellbildung** steht bei jeder Problemlösung im Mittelpunkt. Zunächst werden in Verbindung mit den hervorragenden Visualisierungsmöglichkeiten einige notwendige Begriffe eingeführt, die dann durch die Bearbeitung typischer graphentheoretischer Fragestellungen ausgehend von praktischen Problemstellungen gefestigt werden. Die genutzten Lösungsverfahren haben algorithmischen und auch heuristischen Charakter. Sie können sowohl für die Untersuchung von Existenzproblemen, als auch von Anzahl- bzw. Optimierungsproblemen (vgl. Abb. 1) ausgewählt werden. So kann den Lernenden u. a. am Beispiel des „Kürzesten – Wege – Problems “ dies über das Finden **eines** „Weges“ vom Ort A zum Ort B, über das Suchen nach **weiteren** Wegen bis zum „Herausfiltern“ des **„besten“** Weges sehr anschaulich verdeutlicht werden.

Problemkreise	Ziele des MU
Existenzprobleme	Argumentieren, Begründen, Beweisen
Anzahlprobleme	Argumentieren, Kombinatorik
Optimierungsprobleme	Heuristisches und algorithmisches Arbeiten

Abb. 1

Die Bearbeitung dieser drei Problemkreise ist auf unterschiedlichen Erkenntnisebenen möglich und von daher sowohl im Sekundarbereich I als natürlich vor allem auch im Sekundarbereich II möglich. Die Lernenden können spielerisch-experimentell Rundreisen realisieren und gestalten, intuitiv-heuristisch die kürzeste Rundreise finden, aber z. B. auch algorithmisch „Gerüste“ auf Graphen konstruieren. Dabei entdecken sie, dass es „leichte“ und „schwere“ Probleme gibt und vervollständigen so ihr Bild von der Mathematik. In kooperativen Unterrichtsformen ist es möglich, verschiedene Lösungsansätze (Modelle) zu diskutieren, Verfahren zu bewerten, Strategien zu entwickeln und weiterführende Frage- und Problemstellungen zu formulieren. Inner- und außermathematische Vernetzungen ergeben sich dabei wie von selbst. Die unterrichtlichen Potenzen des Gebietes „Graphentheorie“ seien in folgenden Punkten zusammenfassend dargestellt:

a) zahlreiche Anwendungssituationen und Anwendungsbezüge
b) anschauliche Modelle (Visualisierung!)
c) Vernetzungen zu anderen Gebieten der Mathematik, des Mathematikunterrichts und anderer Unterrichtsfächer
d) Lösungsstrategien entwickeln, kennen lernen und festigen, z. B. Heuristiken (Rundreiseproblem) und Algorithmen (Minimalgerüstproblem)
e) Bild von Mathematik formen – „leichte“ und „schwere“ Probleme (Motivation!)
f) Offene Unterrichtsformen und Aufgabenstellungen

3. Zur Behandlung von Grundbegriffen

Weniger ist hier mehr! Durch kleinere und übersichtliche Aufgaben können die Lernenden mit Knoten, Kanten, gerichteten und ungerichteten Graphen, Wegen und Bäumen, Teilgraphen und Gerüsten …bekannt gemacht werden. Es ist maßgeblich von der Unterrichtssequenz abhängig, wie breit und tief der zur Verfügung stehende Begriffsapparat werden sollte. Die Palette ist groß!! Ausgangspunkt sollte eine sehr anschauliche Situation sein. Es werden die Begriffe „Graph“, „Knoten“ und „Kante“, „gerichteter Graph“, „bewerteter Graph“ erarbeitet. Dabei sollen anhand des Beispiels eines Straßennetzes einer Stadt und wesentlicher Institutionen (Schule, Einkaufszentrum, Stadtpark, Krankenhaus) die Äquivalente in der Graphentheorie (Modell) gefunden werden (vgl. Abb. 2 und 3).

Abb. 2 Stadtplan

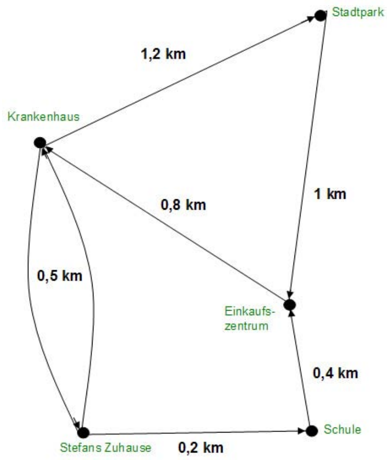


Abb. 3 Bewerteter gerichteter Graph

4. Kürzeste Wege, Rundreisen und Gerüste

Die Suche nach kürzesten Wegen in Graphen, nach Rundreisen und kürzesten Rundreisen sowie nach Minimalgerüsten eröffnet im Unterricht die Möglichkeit, sowohl heuristische als auch algorithmische (wenn überhaupt möglich) Lösungsvarianten und –strategien einzubeziehen.

Beispiel :

Das Pizza-Hut-Restaurant befindet sich in Magdeburg in der Kantstraße

(Knoten a). Von dort aus werden auch die Bestellungen außer Haus geliefert. Der folgende Graph zeigt Adressen, zu denen ein Pizza-Bote die Bestellungen bringen soll. Die Kantenbewertungen stellen die Entfernungen in km dar. Finde den kürzesten Weg von Knoten a zum Knoten d. Schreibe in Stichpunkten deine Vorgehensweise auf.

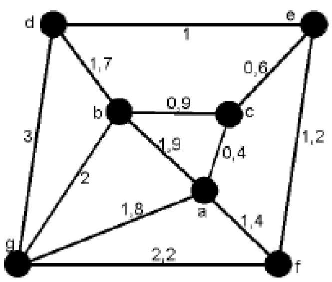


Abb. 4

Die Schülerinnen und Schüler können dieses Problem intuitiv lösen.

Es besteht aber auch die Möglichkeit, die Idee einer algorithmischen Vorgehensweise (Dijkstra-Algorithmus) zu erarbeiten und umzusetzen.

Führt man dieses Problem weiter und fragt danach, ob es in einem Graphen eine „Rundreise“ gibt, bei der jede Kante genau einmal „durchlaufen“ wird und man zum Ausgangspunkt zurückkehrt, ist dies die Frage nach einem speziellem Rundweg – dem Eulerkreis. Das Finden eines Eulerkreises auf einem Graphen könnte mit den Schülerinnen und Schülern ebenfalls algorithmisch gelöst werden (Algorithmus von Hierholzer oder Algorithmus von Fleury). Jedoch wäre der historische Zugang über das berühmte „Königsberger Brückenproblem“ auch ohne eine algorithmische Lösung denkbar.

Im Unterschied zum Finden eines Eulerkreises auf einem Graphen ist die Lösung eines weiteren „Rundreiseproblems“ etwas anders zu realisieren. Hier treten bei dem berühmten „Traveling–Saleman–Problem“ (TSP) heuristische Vorgehensweisen in den Vordergrund. In einem vollständigen Graphen mit 7 Knoten gibt es 360 Rundreisen (Existenz- und Anzahlproblem)! Die Lernenden erkennen die Schwierigkeit: einfach Durchprobieren dauert zu lange und ist bei größerem n kaum möglich. Die Lernenden erkennen sehr schnell, dass die Vorgehensweise, immer von einem Ort ausgehend die nächstgelegene Stadt zu besuchen, nicht immer zum besten Ergebnis führt und sie suchen automatisch nach anderen Wegen, noch kürzere Rundreisen zu finden. So besitzt der Graph in Abb. 4 zwar einen Hamilton-Kreis (e-d-g-b-c-a-f-e), allerdings ergibt sich sofort die Frage, ob diese Rundreise auch die kürzeste ist.

Dem gegenüber kann das Finden eines Minimalgerüstes wieder algorithmisch, z. B. mit dem Algorithmus nach Kruskal gelöst werden. Für die algorithmische Umsetzung finden die Lernenden die Idee des Algorithmus relativ selbstständig.

Anhand weiterer praktischer Problemstellungen (z. B. Energieverbundnetz einer Region) können die Lernenden zunächst den jeweiligen Graphen konstruieren (Modellierung), ein Gerüst bestimmen (Existenzproblem), verschiedene Gerüste bestimmen (Anzahlproblem) und dann das Minimalgerüst ermitteln (Optimierungsproblem).

Literatur

Leneke, B. (2010). Graphentheorie im Mathematikunterricht – Von Knoten, kürzesten Wegen und Gerüsten. Technical Report Nr. 4, 2010, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik

http://www.math.unimagdeburg.de/document/TechRepGraph10Leneke.pdf

Katja LENGNINK, Siegen

Vorstellungen zur Relevanz fachdidaktischer Bildung im Lehramtsstudium – von Lehrenden und Studierenden

1. Forschungsanliegen und Forschungsrahmen

„Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen.“ Dieser Satz findet sich bei Hans Freudenthal (Freudenthal 1974, S. 124), der damit eine intensive Beschäftigung mit den Lernprozessen im Unterricht einfordert. Heute sind Fragen nach individuellen Vorstellungen von Lernenden eine anerkannte mathematikdidaktische Forschungsrichtung. Doch welche Vorstellungen haben die Lehrenden von Mathematik und Unterricht? Was halten sie für relevant, welchen Bedingungen sind sie unterworfen und wie kommen sie zu unterrichtlichem Handeln? Auch dieser Prozess wird derzeit verstärkt untersucht, insb. durch Studien wie TIMSS, PISA, COACTIV und TEDS-M, die spezifisch Probleme im Bereich der fachlichen und fachdidaktischen Kompetenzen von Lehrkräften aufzeigen.

Demgegenüber lässt sich das Anliegen dieses Beitrages in Abwandlung des Freudenthalschen Zitates so formulieren: *Auch ich will Lehr- und Lernprozesse in der fachdidaktischen Ausbildung von Mathematiklehrkräften beobachten, um Mathematikdidaktik besser zu verstehen.*

Aus den Lernprozessen, dem Repertoire von zukünftigen Lehrkräften, ihren Relevanzeinschätzungen und Haltungen zur Mathematikdidaktik wollen wir etwas über unsere Profession zu erfahren. Dahinter steckt das Interesse, die Wirksamkeit der fachdidaktischen Anteile in der LehrerInnenbildung zu reflektieren, wobei die Akteure ernst zu nehmen sind.

2. Aufgaben fachdidaktischer Bildung für Lehrkräfte - Positionen

Was soll eine fachdidaktische Bildung im Lehramtsstudium leisten? Eine Standortbestimmung ist nötig, um daran die Wirksamkeit der LehrerInnenbildung prüfen zu können.

Die Kultusministerkonferenz formuliert für die StudienabsolventInnen eines Lehramtsstudiums folgende fachdidaktische Ziele (KMK 2010, S.3):

– „haben ein solides und strukturiertes Wissen über fachdidaktische Positionen und Strukturierungsansätze und können fachwissenschaftliche Inhalte auf ihre Bildungswirksamkeit hin und unter didaktischen Aspekten analysieren;

– kennen und nutzen Ergebnisse fachdidaktischer und lernpsychologischer Forschung über das Lernen in ihren Fächern;
– kennen die Grundlagen fach- und anforderungsgerechter Leistungsbeurteilung;
– haben fundierte Kenntnisse über Merkmale von Schülerinnen und Schülern, die den Lernerfolg fördern oder hemmen können und wie daraus Lernumgebungen differenziert zu gestalten sind.“

Es wird deutlich, dass der Fokus primär auf dem fachdidaktischen Wissen und Können liegt, das die LehramtsabsolventInnen erworben haben. In der TEDS-M-Studie zeigt sich ein ähnliches Bild, so wird dort auf Curriculares und auf Planung von Unterricht und auf unterrichtliche Interaktion bezogenes Wissen fokussiert (vgl. Blömeke/Kaiser/Lehmann 2010, S.175, nach Shulman). Zudem werden Fragen zu Überzeugungen von angehenden Lehrkräften in die Studie integriert, diese aber nicht mit dem Wissen im Verbund erfasst. Für einen länderübergreifenden Vergleich und einen großen Überblick sind diese Studien dennoch geeignet, wenn man Aussagen über Wissen und Können unabhängig von seinem Einsatz machen möchte.

3. Mathematikdidaktische Bildung reflektieren

Für unseren Forschungsansatz haben wir in Siegen einen Bildungsrahmen entwickelt, in dem sich unsere Bildungsbemühungen in der MathematiklehrerInnen verorten lassen. Dieser ist im Beitrag von Markus Helmerich (in diesem Band) dargestellt. Dabei geht es um ein Netz von Repertoire, Haltung und Performanz in Bezug auf die Bereiche Fachmathematik, Fachdidaktik und Mathematikunterricht, dem sich ein Lehramtsstudierender reflektierend nähern soll. In unserem Verständnis reicht ein reines Wissen und Können in einem relevanten Teilbereich der Lehramtsbildung nicht aus, sondern es muss mit einer Haltung verknüpft sein, die es zu einem verantwortungsbewussten und verständigen Handeln aktiviert.

Im Folgenden wird der Bildungsrahmen zu einer Matrix gebündelt, die hilft, genauer auf die Bildungsansprüche des Studiums zu fokussieren. Der die Mathematikdidaktik betreffende Teil ist besonders hervorgehoben.

Reflektieren über	Repertoire	Haltung	Performanz
Fachmathematik			
Fachdidaktik	Wissen, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Beziehungen, …	Vorstellungen über, Einstellungen zu, Bedeutsamkeit von, …	Beweglichkeit,‘ Umgang mit, Auswahl von, …
Mathematikunterricht			

Wie eine solche Matrix wirkt, wird am folgenden Beispiel gezeigt. Im Rahmen einer Lehrveranstaltung in Kooperation mit der Universität Frankfurt wurden Studierende mit einzelnen Aufgaben betraut, die sie gemeinsam mit Kindern ausprobieren sollten. Der vorgestellte Aufgabenteil lautet: *Zeichne eigene Bilder zu Rechenaufgaben. Was sieht dein Partner?*Marie, und Hannah (2. Schuljahr) tauschen sich über Maries Bild aus, auf dem zunächst o o o o o o o = 9 steht.

In dem Prozess ändert Marie die 9 in eine 6.

H: Marie, das sind doch sieben.
M: mal – (*zeigt auf das Blatt, wendet sich ab*)
H: sechs mal eins
M: häh [...]
H: des ist doch en Punkt
M: ja … mal \ Drei mal .. zwei mal drei
H: eigentlich gleich neun
M: Dann müssten aber noch mehr Dreier hin [...]
H: aber dann müsstest dus ja plus machen
M: gar nicht [...]
Lehrkraft: Mals ihr vielleicht mal auf…
Daraufhin ändert Marie den mittleren Punkt in ein Plus.

Die Studierenden analysieren die Interaktion wie folgt: „Die vorgegebene Sequenz ist gekennzeichnet durch die *abwechselnde Interpretation von Hannahs und Maries „richtig" gedeuteten Aufgabenstellungen.* Durch Maries Äußerung, dass sie einen Fehler gemacht hat, entwickelt sich erst das Gespräch, in dem die Lehrerin nur am Ende in die Interaktion aktiv eingreift. Hanna geht immer wieder auf Marie ein, so dass die Interaktion nicht abbricht. Marie hingegen verliert im Laufe der Interaktion ein wenig die Lust an der Bearbeitung, fängt sich aber wieder, *nachdem sie von der Lehrerin indirekt zur Korrektur aufgerufen wird.* Beiden Schülerinnen ist das Prinzip der Multiplikation klar, dennoch *gehen sie von verschiedenen Aufgabendeutungen aus*. Am Ende finden sie dann einen *Arbeitskonsens, indem sie eine Addition als richtige Aufgabenstellung festlegen*. Die Aufgabenstellung stellt für beide eine Herausforderung dar, da sie den Gedankengang des anderen nicht nachvollziehen können."

In dem Beispiel ist interessant, dass die Studierenden eine fragend beobachtende Haltung zeigen, mit der sie auf den Lernprozess der Kinder schauen. Sie erkennen die Rahmungsdifferenzen und halten diese auch aus, was sich an der geringen Einmischung zeigt. Allerdings scheint den Studierenden ein Ergebnis der Diskussion so wichtig zu sein, dass sie „zur Korrektur aufzurufen“. Der Arbeitskonsens des Festlegens der richtigen Aufgabenstellung bildet dann auch den Abschluss des Gesprächs, ein weiteres Öffnen des Prozesses wird nicht angeregt. Auf der Ebene des Repertoires lassen sich noch Entwicklungsmöglichkeiten bei den Studierenden vermuten. So kommentieren sie zum Beispiel die Zeichnung der Multiplikationsaufgabe nicht aus fachdidaktischer Sicht. Es wäre hier interessant, weiter mit ihnen ins Gespräch zu kommen, worauf die Irritation von Hannah und Marie beim Ergebnis zu Beginn des Gesprächs basiert, hatte Marie doch den Vorschlag, mehr Dreier zu zeichnen. Insgesamt wäre es für einen reflektierenden Umgang mit den fachdidaktischen Bildungsinhalten wünschenswert, wenn die Lernenden aufgefordert würden, die Stellen im Gespräch zu hinterfragen, die sie nicht verstehen oder wo sie unsicher sind.

4. Ausblick und weitere Forschungsfragen

Es wurde aufgezeigt, welche fachdidaktischen Bildungsrichtungen wir mit unserem Rahmenmodell einschlagen möchten. Das Modell soll zu einem Bildungskonzept weiter entwickelt werden, in dem sich die Bildungsinhalte des Siegener Lehramtsstudiums einfügen. Dieser normativ zu bestimmende Rahmen ist wichtig, um die Relevanzeinschätzungen von Lehrenden und Lernenden zu vergleichen und in Kontakt über Wünsche und Notstände zu kommen. Es wurde bereits begonnen, Erhebungsinstrumente zu gestalten, die uns einen Einblick in die Vorstellungen, Einstellungen und Haltungen unserer Studierenden gewähren. Diese Instrumente sind weiter auszubauen und einzusetzen, um das Anliegen des Lernens von den Lernenden zu realisieren. Das Forschungsanliegen zu Relevanzeinschätzungen von LehrerInnen und Lehramtsstudierenden zu fachdidaktischen Inhalten führen wir in Kooperation mit dem Österreichischen Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik in Klagenfurt durch.

Literatur

Blömeke, Sigrid; Kaiser, Gabriele; Lehmann, Rainer (Hrsg.) (2010), TEDS-M 2008 - Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Freudenthal, H.: Sinn und Bedeutung der Didaktik der Mathematik. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8(6), 1974, 122–124.

Helmerich, M.: Fachmathematische Aspekte eines Bildungsrahmens für die Mathematiklehrer(innen)bildung. BzMU, 2011.

KMK (2008): Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.2008 i. d. F. vom 16.09.2010. Berlin.

Ich danke Franziska Siebel für die Kooperation mit den Studierenden in ihrer Lehrveranstaltung.

Juliane LEUDERS, PH Freiburg/TU Dortmund

Auditive Lernmaterialien im Mathematikunterricht

1. Theoretischer Rahmen

Das Dissertationsprojekt, auf dem dieser Beitrag beruht, trägt den Titel „Lernmaterialien für den Arithmetikunterricht mit blinden Kindern. Theoretische Grundlagen, Auswahlkriterien und praktische Beispiele für den integrativen Unterricht“. Es wird betreut durch Prof. E. Csocsán und Prof. C. Selter (beide TU Dortmund). Es wurde eine theoriebasierte Exploration zur Entwicklung zahlbezogener Fähigkeiten und zu den perzeptiven und kognitiven Voraussetzungen blinder und sehender Kinder für den Arithmetikunterricht durchgeführt, um auf dieser Basis Kriterien für die Gestaltung von Lernmaterialien entwickeln zu können.

2. Überlegungen zur sequentiellen Natur auditiver Lernmaterialien

Dass auditive Materialien (z.B. Rhythmen) in der Regel eine zeitliche Struktur beinhalten, wird als besorgniserregend beschrieben: „Das unstrukturierte Erzeugen und Hören von Schlägen sollte nicht durchgeführt werden, weil es dem zählenden Rechnen Vorschub leistet.“ (Wittmann/Müller 2006). Dies muss genauer untersucht werden, da zählendes Rechnen in engem Zusammenhang mit Rechenschwäche zu sehen ist. Diesem Zweck dient ein Blick in die Forschung zur Verarbeitung von Anzahlen im Gehirn.

Zahlen werden in verschiedenen Hirnarealen verarbeitet, wie das Triple-Code-Modell (Dehaene 1992) zeigt. Dieses Modell nimmt die Existenz von drei unterschiedlichen Hirnarealen an, die für die Zahlverarbeitung maßgeblich sind. Im *visuell-arabischen Modul* werden Zahlen in Ziffernschreibweise entschlüsselt und für die Weiterverarbeitung beim Rechnen genutzt. Das *sprachlich-alphabetische Modul* ist aktiv, wenn Zahlwörter verwendet werden. Daher ist es für das Zählen entscheidend, aber auch für den Abruf von Zahlfakten (z.B. 1x1) aus dem Gedächtnis. Das *semantische Modul* ist in seiner Funktion vergleichbar mit der Fähigkeit, dem Wort „rot“ die entsprechende Vorstellung einer Farbe zuzuordnen und wird daher auch etwas vereinfachend als „Zahlensinn“ bezeichnet. Es ist für die Mengenwahrnehmung und -verarbeitung zuständig. Im Gegensatz zu den beiden anderen Modulen, die kulturell geprägt sind, ist es angeboren und auch bei Säuglingen (z.B. Lipton/Spelke 2003) und sogar in Tierversuchen (z.B. Church/Meck 1984) nachweisbar.

Das semantische Modul ist nicht vom Sinneskanal abhängig und funktioniert für sequentielle Reize (z.B. Glockenschläge) ebenso wie für simultane Reize (z.B. Punktmuster) (Wynn 1998). Für die Frage nach den auditiven

Materialien bedeutet dies, dass deren Sequentialität kein grundsätzliches Problem darstellt. Allerdings wirft es auch die Frage auf, wie es dem Gehirn eigentlich gelingt, Mengen auditiv-sequentieller Reize zu erfassen. Das Verständnis auditiver Informationen ist fast immer zeitabhängig, auch z.B. beim Verstehen von gesprochenen Sätzen oder bei Melodien. Um zeitlich ausgedehnte Strukturen zu deuten, sind Gedächtnisprozesse notwendig.

Zunächst einmal ist hier das Echogedächtnis zu nennen. Es kann für kurze Zeit den weitgehend unverarbeiteten Sinneseindruck speichern. Forschungen haben ergeben, dass die Extraktion zeitlicher Regelmäßigkeiten schon auf der Ebene des auditorischen Kortex stattfindet (Deutsch 1999). Dies ist analog zur Verarbeitung räumlicher Zusammenhänge durch den visuellen Kortex. Der auditorische Kortex zeichnet sich damit durch eine besondere Sensitivität und Effektivität im Umgang mit zeitlichen Strukturen aus.

Eine Ebene höher ist das Arbeitsgedächtnis zu betrachten. Es erlaubt, zeitliche Zusammenhänge herzustellen zu gerade Geschehenem – also z.B. am Ende des Satzes noch dessen Anfang zu wissen. Dies funktioniert abhängig von der Situation für einen Zeitraum von 2 bis 10 Sekunden (Bruhn 2000). Bekannt ist die Fähigkeit des Arbeitsgedächtnisses, eine gewisse Anzahl (7±2) „Chunks“ für die kognitive Verarbeitung online zu halten. Wenn diese Chunks nicht aus einzelnen Tönen, sondern z.B. aus Rhythmusgruppen bestehen, die bereits im auditorischen Kortex konstruiert wurden, erhöht sich dadurch das Fassungsvermögen (Spitzer 2004). Festzuhalten ist, dass die Hörwahrnehmung es uns ermöglicht, aus sequentiellen Reizen „quasisimultane“ Ganzheiten zu bilden. Dies versetzt das semantische Modul in die Lage, auch sequentiell präsentierte Mengen als Ganzheiten zu erfassen. Auditive Veranschaulichungen fördern aus dieser Perspektive nicht das zählende Rechnen.

Misaki (2002, s.a. Leuders 2011), ein japanischer Lehrer für Sehgeschädigte, nutzt mit seiner Vertonung von Dezimalstellen rationaler Zahlen eindrucksvoll die Fähigkeit des auditiven Sinns zur Musterbildung. Den Ziffern 0-9 wird je ein Ton auf der Tonleiter zugeordnet. Bei der Zahl $^1/_7$ = 0,142857142857... besteht die Periode aus 6 Ziffern und ist visuell wie auditiv leicht erkennbar. Betrachtet man dagegen $^1/_{19}$ = 0,0526315789 47368421052631578 ..., so wird es schwierig, die 18-stellige Periode visuell zu erfassen. Hört man dagegen die Vertonung an, so braucht es nur wenig Zeit, bis man das Muster bemerkt. Das Hören ist, wie oben gezeigt, darauf ausgerichtet, zeitliche Strukturen wie z.B. Melodien zu erkennen. Durch die Wiederholung der Sequenz wird das Gehirn in die Lage versetzt, Gruppierungen zu bilden und ermöglicht es dadurch dem Arbeitsgedächtnis, die ganze 18-zählige Sequenz als eine Melodie wahrzunehmen.

„Das unstrukturierte Erzeugen und Hören von Schlägen sollte nicht durchgeführt werden, weil es dem zählenden Rechnen Vorschub leistet.“ (Wittmann/Müller 2006). Rückblickend ist zu sagen – *unstrukturierte* Schläge sind tatsächlich ungeeignet. Doch dies trifft ebenso auf visuelle Materialien zu: „Punktwolken“ werden nicht verwendet, sondern strukturierte Darstellungen wie z.B. das Zwanzigerfeld.

3. Kriterien für auditive Materialien

Es ist möglich, auditive Materialien einzusetzen, aber ist es auch sinnvoll? Es stehen ja bereits erprobte visuelle Materialien zur Verfügung. Aus der Perspektive des „Lernens mit allen Sinnen“ ist diese Frage mit Ja zu beantworten. So wird z.B. für die Grundschule auch das Arbeiten mit Rhythmen und Tönen für die Entwicklung des Zählens wird immer wieder empfohlen (z.B. Hasemann 2003). Allerdings ist auch zu beachten, dass dies nicht in Beliebigkeit ausartet. Zudem stellen neue Veranschaulichungen vor allem für schwache Schüler auch immer einen neuen Lerninhalt dar (Krauthausen/Scherer 2003). Die Entscheidung für auditive Materialien will also gut durchdacht sein. Aus diesem Grund wurden in der Dissertation literaturbasiert Kriterien für die Gestaltung guter Veranschaulichungen entwickelt und auf auditive Materialien angewendet.

Exemplarisch wurden die Seiten 12-25 aus dem „Zahlenbuch 1“ (Wittmann/Müller 2006) für den Unterricht mit sehenden und blinden Schülern adaptiert. Auf Seite 17 geht es um „Schöne Muster“. Unter Aufgabe 1 sind vier Reihen mit regelmäßigem Wechsel aus roten und blauen Punkten zu sehen. Die Schüler sollen die dort gezeigten Muster weiterführen und in Aufgabe 2 eigene Muster erfinden. Dies lässt sich aufgrund der Reihenstruktur leicht auditiv umsetzen, z.B. durch Klopfen und Klatschen. Letzteres zeichnet sich auch im Rahmen der pragmatischen Kriterien für Veranschaulichungen aus – es ist kostenlos, immer verfügbar und für die Kinder leicht auszuführen. Problematisch ist hier eher das Kriterium der Dokumentierbarkeit (Böttinger 2007). Tonaufzeichnungen eigener Klopf- und Klatschrhythmen sind möglich, aber mit recht hohem Aufwand verbunden. Auditive Muster können auch visuell dargestellt werden, wenn z.B. Klopfen mit roten Punkten und Klatschen mit blauen Punkten verknüpft wird. So können die Schüler gelegte oder gezeichnete Muster ins Auditive übersetzen und umgekehrt (modaler Transfer). Dadurch tritt die konkrete Darstellung in den Hintergrund und die abstrakte Bildungsregel des Musters in den Vordergrund, so dass der hier erwünschte mathematische Begriff betont und die Abstraktion gefördert wird (Bauersfeld/O'Brien 2002).

Zusammenfassend ist zu sagen, dass auditive Materialien im Unterricht durchaus ihren Platz finden können (Anzenhofer 2009, Cslovjecsek 2001). Sie können zur Verdeutlichung mathematischer Begriffe beitragen und entwickeln darüber hinaus bei den Schülern auch das Zuhören, das sonst im Unterricht oft gefordert, aber selten gefördert wird (Bernius 2004).

Literatur

Anzenhofer, S. (2009): Musikalische Graphen im fächerübergreifenden Mathematik- und Musikunterricht. In: GDM (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 43. Tagung für Didaktik der Mathematik in Oldenburg. Münster: WTM.

Bauersfeld, H./O'Brien, T. (2002): Mathe mit geschlossenen Augen. Zahlen und Formen erfühlen und erfassen. Mülheim an der Ruhr: Verl. an der Ruhr.

Bernius, V. (2004): Zuhörförderung. In: Bernius, V./Gilles, M. (Hrsg.): Hörspaß. Über Hörclubs an Grundschulen. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 1–18.

Böttinger, C. (2007): Muster und Rechenaufgaben - Rechenaufgaben und Muster. Der Wechsel von Repräsentationsebenen und deren Bedeutung für den Mathematikunterricht. In: Die Grundschulzeitschrift 21, H. 201, S. 30–32.

Bruhn, H. (2000): Zur Definition von Rhythmus. In: Müller, K./Aschersleben, G. (Hrsg.): Rhythmus. Ein interdisziplinäres Handbuch. Bern: Huber, S. 41–56.

Church, R./Meck, W. H. (1984): The numerical attribute of stimuli. In: Roitblat, H./Bever, T. G./Terrace, H. (Hrsg.): Animal cognition. Hillsdale, NJ: Erlbaum

Cslovjecsek, M. (Hrsg.) (2001): Mathe macht Musik. Impulse zum musikalischen Unterricht zum Zahlenbuch. Zug: Klett und Balmer AG

Dehaene, S. (1992): Varieties of numerical abilities. In: Cognition 44, S. 1–42.

Deutsch, D. (1999): Grouping mechanisms in music. In: Deutsch, D. (Hrsg.): The psychology of music. San Diego, London: Academic Press, 2. Aufl., S. 299–348.

Hasemann, K. (2003): Anfangsunterricht Mathematik. Heidelberg.

Krauthausen, G./Scherer, P. (2003): Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl., 2. Aufl.

Leuders, J. (2011): http://www.leuders.net/juliane/auditive_materialien.htm

Lipton, J. S./Spelke, E. S. (2003): Origins of Number Sense. Large-Number Discrimination in Human Infants. In: Psychological Science 14, H. 5, S. 396–401.

Misaki, Y. (2002): Herstellung von akustischen Materialien für die Vermittlung von π und rationalen Zahlen. http://www.isar-projekt.de/didaktikpool/didaktikpool_detail_autor.php?didaktikpool_id=66. 26.02.2007.

Spitzer, M. (2004): Musik im Kopf. Hören, Musizieren, Verstehen und Erleben im neuronalen Netzwerk. Stuttgart, New York: Schattauer. 4. Aufl.

Wittmann, E. C./Müller, G. N. (2006): Das Zahlenbuch. 1. Schuljahr, Lehrerband. Leipzig: Klett-Grundschulverl.

Wynn, K. (1998): Numerical competence in infants. In: Donlan, C. (Hrsg.): The Development of Mathematical Skills. Hove: Psychology Press, XIV, S. 3–25.

Anke LINDMEIER, Kristina REISS, Stefan UFER, Petra BARCHFELD, Beate SODIAN, München/Kiel

Umgang mit wissenschaftlicher Evidenz in den Jahrgangsstufen 2, 4 und 6: Stochastische Basiskonzepte und Kontingenztafelanalyse[1]

Im Rahmen der Mathematical Literacy Konzeption ist es ein Ziel mathematischer Bildung, den Anforderungen des „gegenwärtigen und künftigen Lebens“ als „konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger“ gerecht zu werden (Baumert et al., 2001). Dazu gehört etwa, aus Ergebnissen von Experimenten oder Umfragen fundierte Urteile abzuleiten. Stochastische Kompetenzen sind dabei vermutlich für das Verständnis besonders wichtig, ihr Aufbau also ein wichtiger Aspekt der mathematischen Bildung. Im Zentrum der hier berichteten Studien steht entsprechend die Entwicklung stochastischer Fähigkeiten in den Klassenstufen 2 bis 6.

1. Theoretischer Hintergrund

Der Umgang von Kindern mit stochastischen Basiskonzepten wurde in zahlreichen Studien betrachtet. Dabei kann man die entwicklungspsychologische und die mathematikdidaktische Perspektive unterscheiden, doch beide Sichtweisen führen zu einer eher uneinheitlichen Befundlage. Auf der einen Seite berichtet Wollring (2007) intuitiv unangemessene Strategien und zeigen Shtulman und Carey (2007), dass Kinder Probleme haben, unwahrscheinliche Ereignisse von unmöglichen zu unterscheiden. Auf der anderen Seite belegen Anderson und Schlottmann (1991) auch bei jüngeren Kindern eine Sensitivität für Anteile von Gewinnelementen und beschreiben Martignon und Wassner (2005) frühe Vorläuferfähigkeiten stochastischer Kompetenz.

Den Untersuchungen ist gemeinsam, dass sie entweder einen entwicklungspsychologischen oder einen mathematikdidaktischen Hintergrund haben und damit eine der beiden Perspektiven einseitig betonen. Die hier beschriebene Studie zielte entsprechend auf die Verbindung beider Seiten. Insbesondere sollte der Umgang mit stochastischen Basiskonzepten betrachtet werden. Im Fokus stand, inwiefern Schülerinnen und Schüler über ein grundlegendes Verständnis stochastischer Basiskonzepte verfügen und ob sie in Form von Vierfeldertafeln präsentierte empirische Evidenz evalu-

[1] Dieses Projekt wird im Rahmen des Schwerpunktprogramms „Wissenschaft und Öffentlichkeit: Das Verständnis fragiler und konfligierender wissenschaftlicher Evidenz“ durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft gefördert.

ieren können. Beide Fragestellungen wurden in einem eher alltagsnahen und in einem eher formalen Kontext betrachtet.

2. Methoden

An der Studie nahmen 158 Schülerinnen und Schüler (davon 68 weiblich) aus den Jahrgangsstufen 2 (n = 52, 26 weiblich), 4 (n = 53, 24 weiblich) und 6 (n = 53, 14 weiblich) teil. Sie bearbeiteten in Einzelinterviews Aufgaben zu stochastischen Basiskonzepten und zur Evaluation von Vierfeldertafeln in einem formalen bzw. einem alltagsbezogenen Kontext.

Die Aufgaben zu stochastischen Basiskonzepten im alltagsbezogenen Kontext beruhten auf der Unterscheidung von unmöglichen und unwahrscheinlichen Ereignissen (Shtulman & Carey, 2007). Im formalen Kontext wurde die Fähigkeit zur Unterscheidung sicherer, unwahrscheinlicher und unmöglicher Ereignisse in einem Urnenkontext realisiert.

Zur Evaluation von Vierfeldertafeln im alltagsbezogenen Kontext sollten die Schülerinnen und Schüler die Wirksamkeit zweier Düngersorten auf verschiedene Pflanzen einschätzen. Es wurden Kontingenztafeln gezeigt, die Auswirkungen von blauem bzw. gelbem Dünger auf je 40 Pflanzen einer Sorte darstellten. Die Impulsfrage lautete: „Welcher Dünger wirkt bei Bäumen am besten?“ Zur Erfassung der Strategien wurde zudem eine Begründung verlangt.

Im formalen Kontext wurden den Schülerinnen und Schülern Beutel mit roten und blauen Würfeln und Muggelsteinen gezeigt. Sie sollten entscheiden, was sie blind ziehen würden, wenn ein blauer Gegenstand gewünscht war. Die Zusammensetzung des Beutels war nicht bekannt, aber die Ergebnisse von 40 vorangegangenen Spielrunden wurden im Vierfeldertafeldesign als Entscheidungsgrundlage präsentiert. Die Impulsfrage lautete: „Stell Dir vor, ich ziehe einmal und möchte etwas Blaues ziehen. Ist es besser einen Würfel oder einen Muggelstein zu nehmen?“ Auch in diesem Kontext wurde eine Begründung eingefordert.

3. Ausgewählte Ergebnisse

Die akkumulierten Lösungsraten der Aufgaben zum Verständnis stochastischer Basiskonzepte (Abbildung 1) lassen erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler sowohl im formalen als auch im alltagsbezogenen Kontext über ein grundlegendes Verständnis stochastischer Grundbegriffe verfügten. Die Zuwächse sind von Klasse 4 nach Klasse 6 signifikant (Univariate Varianzanalysen, formaler Kontext: $F(2,155) = 13.66$, $p < .01$, Post-Test nach Tukey: $p < .01$ für Klassen 4-6 und 2-6; alltagsbezogener Kontext: $F(2,155) = 11.51$, $p < .01$, Post-Test nach Tukey: $p = .03$ für Klasse 4-6, p < .01 für Klasse 2-6). Insgesamt zeigte sich ein leichter Vorteil für die Aufgaben in formalem Kontext, die im Gegensatz zu den rein sprachlich repräsentierten alltagsbezogenen Aufgaben auch numerische Angaben enthielten wurden ($t(157) = -3.71$, $p < .01$, Cohens $d = .36$).

Eine vertiefte Analyse der Teilskalen zu unwahrscheinlichen Ereignissen offenbarte allerdings, dass selbst in Klasse 6 noch Verständnisschwierigkeiten vorlagen (Abbildung 2). Im formalen Kontext lagen die Lösungsraten für die Teilskala „unwahrscheinlich“ bei ca. 65%, im alltagsbezogenen Kontext bei ca. 40%.

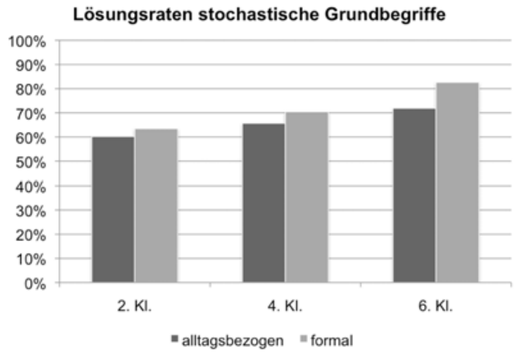


Abbildung 1

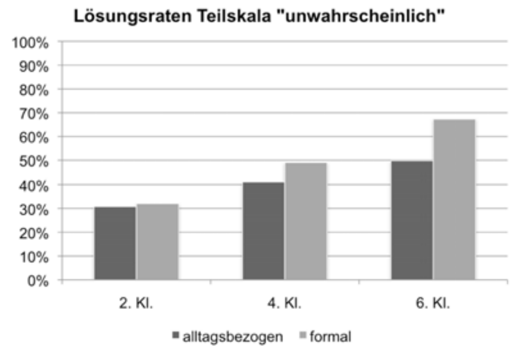


Abbildung 2

Die Aufgaben zur Evaluation von Vierfeldertafeln variierten im Schwierigkeitsgrad stark. Es zeigte sich, dass Tafeln, bei denen eine der präsentierten Wahrscheinlichkeiten gleich 0 oder 1 war, von allen Schülerinnen und Schülern gut gelöst wurden. Tafeln mit komplexerer Struktur wurden allerdings selbst in Klasse 6 kaum gelöst. Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Lösungsraten der einzelnen Aufgaben nach Klassenstufe. Es zeigen sich keine einheitlichen Kontexteffekte.

Eine erste Annäherung an verwendete Schülerstrategien erfolgte über die vertiefte Analyse der Schülerbegründungen. Verwendet man konzeptionell adäquate Strategien zur Vierfeldertafelanalyse, so müssen dabei die Informationen aus allen vier Feldern berücksichtigt und integriert werden. Die Analysen der Schülerbegründungen zeigen allerdings, dass Schülerinnen und Schüler ihre Begründungen häufig auf ein oder zwei Felder stützen (ca. 55% im formalen Kontext, ca. 50% im alltagsbezogenen Kontext). Im alltagsbezogenen Kontext werden signifikant häufiger alle vier Felder in die Begründungen einbezogen als im formalen Kontext (ca. 25% im formalen Kontext, ca. 50% im alltagsbezogenen Kontext). Dies führt jedoch nicht zu höheren Lösungsraten, da die korrekte Integration der betrachten Information meist noch nicht gelingt.

Tabelle 1: Lösungsraten der Aufgaben zur Evaluation von Vierfeldertafeln

Item	*Lösungsraten formal*			*Lösungsraten alltagsbezogen*		
	Jgst. 2	*Jgst. 4*	*Jgst. 6*	*Jgst. 2*	*Jgst. 4*	*Jgst. 6*
*1**	*0.62 (0.49)*	*0.58 (0.50)*	*0.58 (0.50)*	*1.00 (0.00)*	*0.96 (0.19)*	*0.98 (0.14)*
2	*0.79 (0.41)*	*0.75 (0.43)*	*0.83 (0.38)*			
3	*0.63 (0.49)*	*0.75 (0.43)*	*0.87 (0.34)*			
*4**	*0.06 (0.24)*	*0.17 (0.38)*	*0.21 (0.41)*	*0.04 (0.19)*	*0.13 (0.34)*	*0.21 (0.41)*
5	*0.85 (0.36)*	*0.81 (0.39)*	*0.87 (0.34)*			
*6**	*0.15 (0.36)*	*0.28 (0.45)*	*0.43 (0.50)*	*0.15 (0.36)*	*0.40 (0.49)*	*0.60 (0.49)*
*7**	*0.13 (0.34)*	*0.19 (0.39)*	*0.26 (0.45)*	*0.04 (0.19)*	*0.09 (0.30)*	*0.15 (0.36)*
8	*0.08 (0.27)*	*0.11 (0.32)*	*0.19 (0.39)*			

Grau: Vierfeldertafeln mit einer der Wahrscheinlichkeiten 0 oder 1

** Parallelitems in beiden Kontextbedingungen*

4. Diskussion

Es zeigt sich, dass trotz eines gewissen Verständnisses stochastischer Grundbegriffe die Evaluation von Vierfeldertafeln in diesen Klassenstufen noch nicht komplett geleistet werden kann. Erstaunlich sind dabei die eher geringen Unterschiede zwischen alltagsbezogenem und formalem Kontext. Bemerkenswert sind darüber hinaus die großen individuellen Unterschiede, die sich bereits in der zweiten und vierten Jahrgangsstufe zeigen.

Literatur

Anderson, N. H., & Schlottmann, A. (1991). Developmental study of personal probability. In N. H. Anderson (Ed.), *Contributions to information integration theory: Vol. I. Cognition.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K.J. & Weiß, M. (Hrsg.) (2001). *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.* Opladen: Leske + Budrich.

Martignon, L. & Wassner, C. (2005). Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften, 8,* 202–222.

Shtulman, A. & Carey, S. (2007). Improbable or impossible? How children reason about the possibility of extraordinary events. *Child Development, 78,* 1015 – 1032.

Wollring, B. (2007). Den Zufall festhalten – Spielräume und Dokumente bei Zufallsexperimenten für die Grundschule. Lernumgebungen und Versuchsumgebungen zur Stochastik. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007,* 472–475.

Frauke LINK, Dortmund

Zur Rolle strategischer Interventionen in problemlöseorientierten Arbeitsprozessen

In der Vergangenheit, aber auch in der aktuellen Diskussion wurde und wird die „allgemeine Kompetenz“ (KMK 2003) Problemlösen auf verschiedene Weisen charakterisiert. Neben der Festlegung des Problemlösens über die vorhandene Barriere (z. B. Dörner 1976) existiert die Charakterisierung über die Strategienutzung im Problemlöseprozess (z. B. KMK 2003) und die der spezifischen Aufgaben (z. B. Polya 1966). Die vorgestellte Studie orientiert sich an klassischen Problemlöseformaten (Hagland, Hedren und Taflin 2005), für die empirisch auch die Barrierenfunktion für Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 7 und 8 festgestellt wurde.

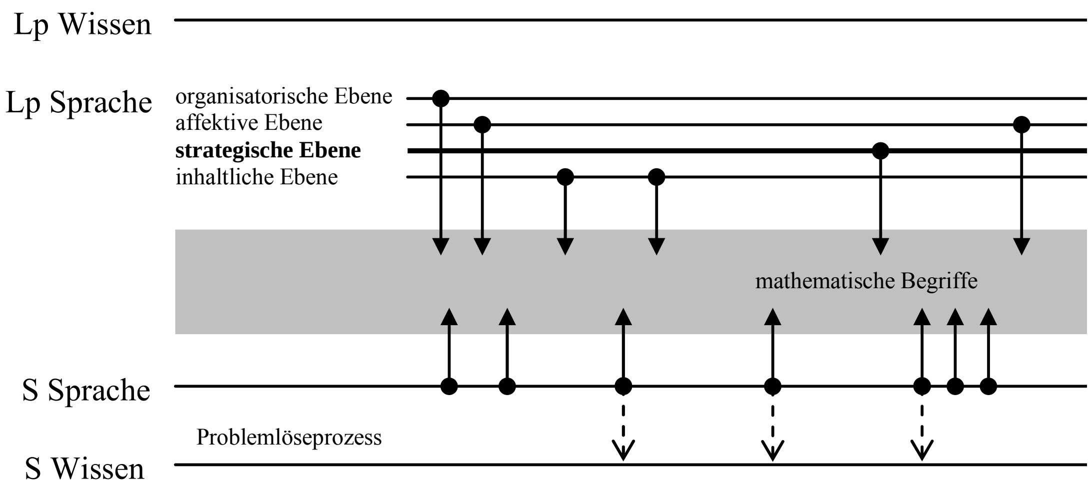
Der Fokus auf das Problemlösen im Unterrichtsgeschehen liegt dabei nicht auf dem Problemlösen-Lernen, also der Frage, wie Schülerinnen und Schüler dazu gebracht werden können, sich auf solche Aufgaben einzulassen und sie möglicherweise effektiver zu lösen, sondern auf der Beschreibung der durch die Aufgabe ausgelösten Lernprozesse.

Ein Beispiel für den genutzten Aufgabentyp findet sich in der folgenden Abbildung der „Rasen-Aufgabe“ (Bild aus Hagland, Hedren und Taflin 2005):

Im Rahmen der Frage nach geeignetem Lehrerhandeln im Mathematikunterricht stellt sich auch die Frage nach günstigem Interaktionsverhalten in der Vermittlung der prozessbezogenen Kompetenzen Problemlösen und Modellieren. In solchen Arbeitsphasen sollte die Lehrperson weniger Vermitteln und mehr prozessbegleitend, d. h. dem Lösungs- und Gedankenweg des Kindes folgend, agieren. Dies ist zumindest die theoretisch begründete Forderung (z. B. Zech 1998).

Auf empirischer Basis wird im deutschsprachigen Raum erst in jüngerer Zeit versucht, dem sprachlich konkreten Handeln näher zu kommen. Leiss (2007) und Krammer (2009) sind erste Beispiele zur empirischen Fundierung einer Theorie der Interventionen. Leiss (2007) findet die Kategorie-Ebenen *affektiver*, *organisatorischer*, *strategischer* und *inhaltlicher* Interventionen. Eine Diskrepanz ergibt sich hier für die strategischen Interventionen, die aus theoretischer Sicht (Zech 1998) besonders gefordert, in empirischen Untersuchungen (Leiss 2007) aber nur marginal gefunden werden.

Offen bleibt in diesen Studien die erklärende Modellierung theoretischer Zusammenhänge zwischen den Lehrerinterventionen einerseits und dem Lösungsprozess der Schülerin bzw. des Schülers andererseits. Die Präzisierung dieser Fragestellung führte in der vorgestellten Studie zunächst zur Konstruktion eines Modells zur Beschreibung von Lehrer-Schüler-Dialogen auf interaktionistischer Basis (Link 2011):



Der komplexe Interaktionsprozess wird in diesem Modell einerseits über die interpretative Analyse des Lernprozesses (Steinbring 2005) und andererseits über die Textkodierung der Lehrerinterventionen (Zech 1998, Leiss 2007) erfasst. In dieser Datenstruktur wurde eine Grounded Theory (vgl. Strauß und Corbin 1996, Strübing 2008) entwickelt, die wiederkehrende Muster darlegt, die günstige Zusammenhänge zwischen strategischen Interventionen und Lernprozessen erklären können. Strategische Interventionen lassen sich hierbei, wie in der folgenden Tabelle dargestellt, in Unterkategorien einordnen.

Ebene der Intervention	*Beschreibung*
allgemein-strategisch	Äußerungen, die sich in allgemeiner Art und Weise auf den Fortgang des Arbeits- und Lernprozesses beziehen
strategieorientiert-strategisch	Äußerungen, die heuristische Strategien thematisieren
inhaltsorientiert-strategisch	Äußerungen, die sich in prozessorientierter Art und Weise auf den Inhalt beziehen

Diese Einordnung ist für die genauere Analyse der Interventionsmuster notwendig. Es zeigt sich, dass die Lehrpersonen verschiedene Interventionsebenen strategischer Interventionen abwechselnd nutzen und nach der vorliegenden Interpretation der Daten auch nutzen müssen, um den Problemlöseprozess der Schülerin bzw. des Schülers adäquat zu begleiten. In aller Kürze sei exemplarisch ein Beispiel zu der oben genannten Rasen-Aufgabe angeführt. In dieser Szene spricht Sara im Dialog mit einer Schülerin, die versucht, die Rasen-Aufgabe zu lösen.

Die Schülerin hat zuletzt versucht, die Fläche sukzessiv an die beiden Rasenmäherinnen aufzuteilen, indem sie ein Quadrat in 16 Felder zerlegt und diese den beiden Mädchen zuordnet. Sie wirkt zu Beginn der Szene ziellos und unsicher. Nach 39 Sekunden Pause fragt sie: „Muss man eher was mit Brüchen machen oder so?“ Sara reagiert mit folgender *allgemein-strategischer Intervention*:

– I: Wär vielleicht mal ne Idee das auszuprobieren *(lacht) (Pause 4 sec)* ich glaube es gibt einige Möglichkeiten wie man die Aufgabe lösen könnte such dir einfach ... probier einfach mal was aus... was dir einfällt... wenn du ne gute Idee hast

Sara wehrt damit das Drängen der Schülerin auf einen konkreten Tipp ab. Sie gibt das Problem – auch zeitlich – an die Schülerin zurück. Es vergehen 38 Sekunden. Die nächste, *strategie-orientiert strategische Intervention* ist das Vorschlagen des Aufschreibens.

– I: Manchmal hilft es auch total... wenn du dir einfach schon mal was hinschreibst was du so denkst .. nicht versuchst alles im Kopf vorzudenken *(kreist mit den Händen links und rechts von ihrem Kopf während sie spricht)* und dann hinzuschreiben *(zeigt auf den Tisch)* sondern einfach schon mal so... gucken um ein bisschen rumzuprobieren.

Die Schülerin findet weiterhin keinen eigenen Ansatz zur Weiterarbeit. Schließlich gibt Sara der Schülerin doch den *inhaltsorientiert-strategischen Hinweis*, das letzte Quadrat aufzuteilen. Damit schlägt sie einen Weg zur Weiterarbeit vor.

- I: Keine Ahnung oder du überlegst dir einfach mal gut ähm *(Pause 2 sec)* hmm sie brauchen für die halbe Wiese brauch jeder wie lange oder wie viel schaffen sie denn in einer Stunde'
- I: Dass du das mal ein bisschen aufteilst

An dieser Stelle kann die Schülerin selbst inhaltlich anknüpfen und stellt fest, dass ein Viertel des Feldes bei ihrer Aufteilung übrig bleibt. Die Schülerin entdeckt, dass Anna und Lisa unterschiedliche Zeiten zum Mähen eines Kästchens benötigen und dass sie dies selbst ausrechnen kann.

Diese Szene ist ein Beispiel für die Kategorie „Gespräch zeitlich strukturieren". Weitere gefundene Kategorien möglicher konstruktiver Gesprächssteuerung über strategeschie Interventionen sind „Validieren", „Fehler thematisieren", „zum Notieren anregen" und „zum Reflektieren anregen" (Link 2011).

Literatur

Dörner, D. (1976). Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart: Kohlhammer.

Hagland, K., Hedren, R. & Taflin, E. (2005). Rika matematiska problem. Stockholm: Liber.

KMK (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.

München: Wolters Kluwer.

Krammer, K. (2009). Individuelle Lernunterstützung in Schülerarbeitsphasen. Münster: Waxmann.

Leiss, D. (2007). „Hilf mir es selbst zu tun". Hildesheim: Franzbecker.

Link, F. (erscheint 2011): Problemlöseprozesse selbstständigkeitsorientiert begleiten: Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Polya, G. (1966). Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Basel: Birkhäuser.

Steinbring, H. (2005). The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction. New York, NY: Springer.

Strauss, A. L. & Corbin, J. (1996). Grounded theory. Weinheim: Beltz.

Strübing, J. (2008). Grounded theory. Wiesbaden: VS

Zech, F. (1998). Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim: Beltz.

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Basel

VITALmaths – ein gemeinsames Forschungs- und Entwicklungsprojekt der Schweiz und Südafrika

Das Projekt VITALmaths („Visual Technology for the Autonomous Learning of Mathematics“) verfolgt das Ziel, visuelle Technologien für das selbstständige Lernen in Mathematik zu entwickeln und die Anwendungsbedingungen, die Effektivität und die Folgen dieser Technologien zu untersuchen.

Das Projekt umfasst

- die Erstellung kurzer Video Clip Animationen, die interessante mathematische Ideen, Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren verdeutlichen, Motivation bei den Lernenden erzeugen, selbst etwas auszuprobieren, und mit leicht verfügbaren Alltagsmaterialien realisiert werden können (keine High-Tech Animationen)
- die Evaluation der Qualität und Einschätzung der Wirksamkeit dieser Video Clips durch Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker
- Einschätzungen und Untersuchungen, ob bzw. wie ein Einsatz der Clips mit Hilfe von MP4-Geräten und Mobiltelefonen möglich ist. Es ist zu erwarten, dass ein solcher Einsatz die Situation in abgelegenen ländlichen Gebieten Südafrikas, in denen kaum Zugang zu mathematikdidaktischen Ressourcen besteht, nachhaltig verbessern wird
- die aktive Partizipation am akademischen Diskurs zu Fragen der Nutzung und der Entwicklung visueller Technologien auf dem Gebiet der Mathematikdidaktik
- Exploration von Einsatzmöglichkeiten der Videoclips in der Schweiz und in Südafrika
- Untersuchungen zur Akzeptanz und Wirksamkeit des Einsatzes von Videoclips innerhalb und ausserhalb des Mathematikunterrichts

VITALmaths ist ein gemeinsames Forschungs- und Entwicklungsprojekt der Pädagogischen Hochschule Nordwestschweiz (Prof. Dr. Helmut Linneweber-Lammerskitten) und der Rhodes University in Grahamstown, Südafrika (Prof. Dr. Marc Schäfer). Das Projekt wird von der SSAJRP finanziell unterstützt, die Laufzeit des Projekts beträgt vier Jahre (2010–2013).

Eine Reihe von Videoclips aus dem VITALmaths Projekt sind über die Webseite http://www.ru.ac.za/VITALmaths zugänglich – es ist zu empfehlen, sich zunächst einige davon anzusehen, um das Folgende besser zu verstehen.

1. Videoclips zur Unterstützung des selbstständigen Lernens

Auslöser des Projekts waren die HarmoS-Bildungsstandards Mathematik in der Schweiz, von deren Einführung eine stärkere Binnendifferenzierung, Kompetenzorientierung und Lernautonomie im Mathematikunterricht erwartet werden darf (Linneweber-Lammerskitten 2009), die aber gleichzeitig auch zu einer stärkeren Belastung der Lehrpersonen führen kann, wenn geeignete Unterrichtskonzeptionen und Lehr-/Lernmittel fehlen. Vom Einsatz kurzer mathematischer Videoclips (<3 min), die in Kleingruppen dezentral auf einem Handy, einem MP4-Player oder einem Notebook abgespielt werden können, kann man sich eine Verstärkung der Motivation und des Willens zu einem (in mehrfacher Bedeutung des Wortes) „autonomen" Mathematiktreiben und gemeinsamen Lernen erhoffen und damit schlussendlich eine Entlastung der Lehrperson. In einer Diplomarbeit haben zwei Studierende der PH Nordwestschweiz in einem kleinen Pilotprojekt untersucht, ob Schülerinnen und Schüler weniger resp. zeitlich weniger aufwändige Hilfestellungen der Lehrperson benötigen, wenn bestehende Lernumgebungen (Matbu.ch) mit passenden Animationsfilmen ergänzt werden. Dazu wurden zwei gleich leistungsstarke Lerngruppen gebildet, die abwechselnd in „herkömmlicher Weise" (Kontrollgruppe) und mit Videoclips (Testgruppe) unterrichtet wurden. Dabei wurde der Unterricht in beiden Gruppen mit einer festinstallierten Videokamera aufgezeichnet und anschliessend die für die Beantwortung von Schülerfragen aufgewendete Zeit ermittelt. Dabei zeigte sich, dass zwar am Anfang bei der Testgruppe mehr Zeit zum Beantworten organisatorischer Fragen gebraucht wurde, dafür aber insgesamt weniger bzw. weniger aufwändige inhaltliche Hilfen nötig waren (Frey u.a. 2009). Allerdings konnten die Videoclips in diesem Projekt aus organisatorisch-technischen Gründen noch nicht in der oben beschriebenen Weise dezentral eingesetzt werden - dies soll in weiteren Diplom- resp. Masterarbeiten realisiert und untersucht werden. Sollte durch den Einsatz von Videoclips und einer dazu geeigneten Unterrichtskonzeption eine zeitliche Entlastung der Lehrperson erreicht werden können, so könnte die gewonnene Zeit zu einer individualisierten Unterstützung leistungsschwächerer Schüler genutzt werden.

2. Das Handys als Displaymedium

Aus südafrikanischer Perspektive verspricht der Einsatz von mathematischen Videoclips die Lösung anderer Probleme. Insbesondere in ländlichen Gebieten fehlt es an herkömmlichen Unterrichtmitteln, aber auch an Computern und Beamern. Andererseits sind Handys sehr weit verbreitet - diese lassen sich als Empfangsgeräte, vor allem aber als Displaymedium für mathematische Kurzfilme verwenden. Die Jahresberichte diverser Handyanbieter zeigen, dass die Zahl der Handybesitzer in Südafrika beständig weiter wächst und die Empfangsbedingungen bereits so gut sind, dass nahezu die ganze Bevölkerung durch Handysignale erreicht werden kann (Samson u.a. 2011). Das Potential der Handys für Schwellenländer ist nicht zu unterschätzen:

" ... for the majority of the world's population, and for the foreseeable future, the cell phone is the computer" (Selanikio 2008), "the cellphone is poised to become the 'PC of Africa'", (Ford 2009) – die Herausforderung für die Lehrperson kann somit darin gesehen werden "to capitalize on the pervasive use of cell phones by younger students for educational purposes" (Pursell, 2009:1219)

Auf der anderen Seite ist der Einsatz von Handys zum eigenständigen Lernen von Mathematik in Südafrika mit einer Reihe von Problemen verbunden: Ein direktes Versenden der Videoclips auf die Handys der Lernenden oder das Herunterladen von einer Internetplattform ist in der Regel mit Kosten verbunden - kostengünstige Distributionswege müssen gefunden und getestet werden. Aus Kostengründen darf auch die Filegrösse der Filme nicht zu gross sein - verschiedene Fileformate und Komprimierungen müssen ausprobiert werden. Bei einem grossen Teil der Handys ist die Auflösung der Displays recht klein, da die Geräte gebraucht und schon recht alt sind. Dies erfordert, dass die Filme für solche Geräte ein weniger hochauflösendes Format haben, was bei moderneren Geräten zu einer erkennbar schlechten Bildqualität führt. Im Projekt wird das Problem dadurch gelöst, dass die Filme in verschiedenen Formaten auf verschiedenen Plattformen abgelegt werden (Versionen mit niedriger Auflösung z.B. auf YouTube).

2. Forschung und Entwicklung

Da die Videoclips zum Selberausprobieren, Explorieren und Mathematiktreiben anregen sollen, werden als Requisiten in der Regel Alltagsgegenstände bzw. leicht zu beschaffende Materialien verwendet – auch wird absichtlich auf Perfektion und High-Tech Ästhetik verzichtet. Die zur Produktion nötige Ausrüstung ist denkbar einfach: Zusätzlich zu einem Laptop ist nur eine Videokamera oder eine Digitalkamera und eine Lichtquelle nötig, Software gibt es von mehreren Anbietern kostenlos. Gleichwohl ist der Produktionsprozess in mathematikdidaktischer Hinsicht komplex und aufwändig und im Sinne der Design Science (Wittmann 1995) als ein Prozess angewandter Wissenschaft zu verstehen. Ebenso wie die Konzeption und

Erstellung einer Lernumgebung geschieht die Produktion der Filme auf der Basis didaktischer Grundprinzipien, durchläuft einen Prozess von Verbesserungen, internen und externen Qualitätskontrollen und Überarbeitungen.

In einer weiteren Etappe des Projekts steht die Untersuchung verschiedener Einsatzmöglichkeiten der Filme innerhalb und ausserhalb des Mathematikunterrichts im Mittelpunkt. Auch hierzu werden verschiedene Masterarbeiten an Studierende in der Schweiz und in Südafrika vergeben werden.

Literatur

Ford, M. (2009). Dr Math – A mobile tutoring platform for Africa? Presentation at the SAFIPA (South Africa - Finland knowledge partnership on ICT) conference, 8-10 June 2009, Pretoria, South Africa. Retrieved March 25, 2010 Retrieved from: http://mlearningafrica.net/wp-content/uploads/2009/06/drmath_safipa2009_merrylford.ppt

Frey, M. & Graser, R. (2010): Animationsfilme im Mathematikunterricht. Eine Untersuchung über den Einsatz von didaktischen Filmen als Unterstützung für den individualisierten Mathematikunterricht. (Manuskript) Retrieved from: https://moodle.fhnw.ch/course/view.php?id=2416

Linneweber-Lammerskitten, H. (2009). Der Einsatz von Kurzfilmen als Einstieg in Experimentier- und Explorationsphasen. Beiträge zum Mathematikunterricht 2009 Retrieved from: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/new/index_f-bzmu.html

Linneweber-Lammerskitten, H. & Schäfer, M. (2010). Motivating mathematical exploration through the use of video-clips: a collaborative research and development project between Switzerland and South Africa. In V. Mudaly (Ed.), Proceedings of the Eighteenth Annual Meeting of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education (pp. 161-164). University of Kwazulu-Natal: SAARMSTE.

Pursell, D. P. (2009). Adapting to student learning styles: Engaging students with cell phone technology in organic chemistry instruction. Journal of Chemical Education, 86(10), 1219-1222.

Samson, D., Linneweber-Lammerskitten, H. & Schäfer, M. (2011). Mobile technology and the autonomous learning of mathematics In Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education (in print).

Selanikio, J. (2008). The invisible computer revolution. http://news.bbc.co.uk/go/pr/fr/-/2/hi/technology/7106998.stm

Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics as a 'Design Science'. Educational Studies in Mathematics, 29, 355-374

Elisabeth LORENZ, Freydis VOGEL, Frank FISCHER, Ingo KOLLAR, Kristina REISS, München, & Stefan UFER, Kiel

ELK-Math: Effekte von inhaltsübergreifenden und inhaltsspezifischen Ansätzen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz von Lehramtsstudierenden

Nationale und internationale Curricula konzentrieren sich zunehmend auf Prozesse mathematischen Arbeitens, die komplexe mathematische Kompetenzen notwendig machen. Das Projekt ELK-Math[1] fokussiert eine dieser Kompetenzen, nämlich das mathematische Argumentieren.

1. Mathematische Argumentationskompetenz

Im Projektkontext wird mathematische Argumentationskompetenz anhand von Ansätzen aus der Mathematik, Philosophie und Psychologie konzeptualisiert und beinhaltet sowohl eine inhaltsspezifische, individuell-kognitive, als auch eine inhaltsübergreifende, sozial-diskursive Komponente. Auf der individuell-kognitiven Ebene beschreibt mathematische Argumentationskompetenz im Sinne einer Kompetenz nach Weinert (2001) die Fähigkeit und Bereitschaft, eine mathematische Aussage zu finden, zu generieren und zu evaluieren, aber auch nach adäquaten Argumenten für und gegen diese Aussage zu suchen. Zusätzlich sollen die Argumente zu einem Beweis zusammengeführt werden, der das Endergebnis des Argumentationsprozesses darstellt. Die sozial-diskursive Komponente beinhaltet die Fähigkeit zum Austausch von Argumenten im Rahmen eines kooperativen Dialogs zwischen zwei oder mehr Lernenden.

Untersuchungen belegen, dass Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf das Argumentieren große Defizite haben (z.B. Reiss, Klieme & Heinze, 2001). Aber auch angehende oder bereits im Beruf stehende Lehrkräfte haben oft nur ein eingeschränktes Verständnis über Konzepte und Prinzipien beim Beweisen (z.B. Tabach et al., 2010). Mathematisch zu argumentieren im obigen Sinne gehört aber zu den alltäglichen Tätigkeiten einer Lehrkraft und sollte gefördert werden. Ziel des Projekts ist es daher, Effekte unterschiedlicher Instruktionen auf die mathematische Argumentationskompetenz bei Studienanfängern eines Lehramts zu untersuchen.

[1] Das Projekt wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert (Förderkennzeichen: RE 1247/9-1).

2. Inhaltsspezifische Instruktion: Heuristische Lösungsbeispiele

Traditionelle Lösungsbeispiele präsentieren nicht nur ein Problem und die zugehörige Lösung, sondern auch einzelne Lösungsschritte eines Experten. Ziel der Arbeit mit Lösungsbeispielen ist der Erwerb von – durchaus flexibel einsetzbaren – Lösungsschemata. Vorteile von Lösungsbeispielen gegenüber dem in der Unterrichtspraxis oft üblichem Problemlösen können mit der Cognitive Load Theory erklärt werden (Sweller, van Merrienboer & Paas, 1998). Demnach ist das Arbeitsgedächtnis in seiner Kapazität begrenzt. Problemlösen in einem frühen Stadium des Lernprozesses stellt hohe Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis, wodurch das Lernen im Sinne einer Konstruktion von Schemata erschwert werden kann. Im Gegensatz dazu kann sich ein Lerner, der mit einem Lösungsbeispiel arbeitet, voll und ganz auf die der Lösung zugrunde liegenden Ideen konzentrieren. Allerdings lassen sich komplexe mathematische Probleme, wie etwa Beweisprobleme, häufig nicht durch einfach kommunizierbare Schemata lösen, da hier heuristische Vorgehensweisen an Bedeutung gewinnen (z.B. Schoenfeld, 1983).

Im Konzept der heuristischen Lösungsbeispiele vereinen Reiss und Renkl (2002) die Ideen von traditionellen Lösungsbeispielen mit den Erfordernissen komplexer mathematischer Problemtypen. Hierbei wird keine Expertenlösung, sondern ein realistischer Bearbeitungsprozess dargestellt, der sowohl tentative als auch explorative Schritte einschließt. In Anlehnung an ein Prozessmodell der entsprechenden Kompetenz werden relevante heuristische Strategien vermittelt. Zusätzlich wurden im Projekt ELK-Math Selbsterklärungsprompts eingesetzt, die sich auf heuristische Strategien beziehen. Empirische Untersuchungen bestätigen die Effektivität von heuristischen Lösungsbeispielen für den Erwerb komplexer mathematischer Kompetenzen (z.B. Reiss et al., 2006).

3. Inhaltsübergreifende Instruktion: Kooperationsskripts

In der Vergangenheit wurden heuristische Lösungsbeispiele bereits in Dyaden eingesetzt. Aus der Forschung zum kooperativen Lernen ist aber bekannt, dass Lernende oft nur suboptimal miteinander kooperieren, wenn ihre Interaktion nicht strukturiert wird (Cohen, 1994). Eine solche Strukturierung kann durch Kooperationsskripts realisiert werden (Kollar, Fischer & Hesse, 2006). Diese verteilen unter den Lernenden einer Kleingruppe verschiedene Rollen und Aktivitäten, die in einer bestimmten vorgegebenen Reihenfolge ausgeführt werden sollen. Untersuchungen belegen positive Effekte auf die Qualität der Argumentationen, aber auch auf den Wissenserwerb im Inhaltsbereich (Weinberger, Ertl, Fischer & Mandl, 2005).

4. Forschungsfragen und Design der Studie

Eine Hauptfragestellung im Projekt ELK-Math betrifft die Wirksamkeit von heuristischen Lösungsbeispielen und Kooperationsskripts auf die individuell-kognitive Komponente mathematischer Argumentationskompetenz. Zur Untersuchung dieser Fragestellungen wurde ein 2x2 Design mit den Faktoren *heuristisches Lösungsbeispiel* und *Kooperationsskript* (jeweils vorhanden/nicht vorhanden) eingesetzt. Die Gruppen ohne heuristisches Lösungsbeispiel erhielten dieselben Problemstellungen wie die Gruppen mit heuristischem Lösungsbeispiel, sollten die Lösung aber selbst erarbeiten. Die Stichprobe umfasst 119 Studienanfänger eines Lehramts mit Unterrichtsfach Mathematik, die sich in etwa gleichmäßig auf die vier Treatmentgruppen verteilen. Die Instruktionen wurden in einer computerbasierten Lernumgebung implementiert. Die Lerner bearbeiteten in Dyaden in drei Sitzungen zu je 45 Minuten drei Problemstellungen bzw. Lösungsbeispiele aus dem Bereich der elementaren Zahlentheorie.

In einem Prä-Post-Design wurde ein dreiteiliger Test zur Messung der individuell-kognitiven Komponente mathematischer Argumentationskompetenz im Bereich der elementaren Zahlentheorie eingesetzt. Der erste Teil beinhaltet fünf Items, die Argumentationen mit Hilfe von Teilbarkeitsregeln erfordern. Der zweite Teil besteht aus sechs Items zum Beweisen, und der dritte Teil enthält ebenfalls sechs Items zum Umgang mit offenen Vermutungen („Beweise oder Widerlege“).

5. Erste Ergebnisse

Die Mittelwerte der vier Gruppen im Nachtest, korrigiert nach den Vortestwerten, können der Abbildung 1 entnommen werden.

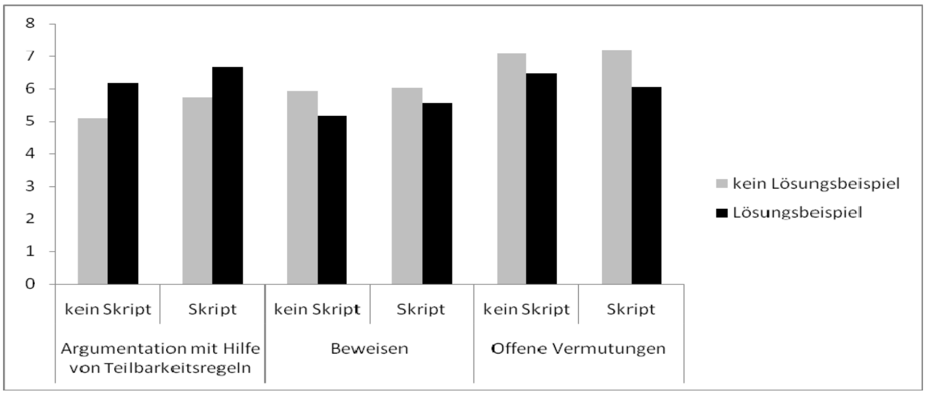


Abbildung 1: Korrigierte Mittelwerte im Nachtest

Zweifaktorielle Varianzanalysen mit Kovariate (Vortestleistung) zeigten im ersten Teil einen signifikanten Effekt für den Faktor *heuristisches Lösungsbeispiel* ($F(1, 114)=6.6$ $p < .05$; $\Omega^2=.05$). Bei der Skala zum Beweisen ergab sich ein höherer Lernerfolg für die Gruppe ohne Lösungsbeispiel ($F(1, 114)=2.3$ $p=.14$; $\Omega^2=.02$). Ein ähnliches Ergebnis mit signifikantem Effekt konnte für den Umgang mit offenen Vermutungen festgestellt werden ($F(1, 114)=6.0$ $p <.05$; $\Omega^2=.05$). Für den Faktor *Kooperationsskript* zeigten sich in allen drei Teilen positive Effekte, die jedoch die statistische Signifikanz verfehlten. Auch Interaktionseffekte wurden nicht signifikant.

Diese Ergebnisse liefern einen ersten Eindruck von den Effekten von heuristischen Lösungsbeispielen und Kooperationsskripts auf den Erwerb individuell-kognitiver, mathematischer Argumentationskompetenz. Die Ergebnisse sind jedoch in Bezug auf unterschiedliche Outcomes nicht einheitlich und erfordern detailliertere Analysen. Ein erster Schritt dazu ist eine intensive Analyse der Prozessdaten aus der Arbeit der Studienanfänger in der Lernumgebung. Zusätzlich werden in weiteren Analysen die Effekte auf die sozial-diskursive Komponente untersucht.

Literatur

Cohen, E. (1994). Restructuring the classroom: Conditions for productive small groups *Review of Educational Research, 64*(1), 1-35.

Kollar, I., Fischer, F. & Hesse, F. W. (2006). Collaboration scripts - a conceptual analysis. *Educational Psychology Review, 18*(2), 159-185.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S.194–208). Münster: Waxmann.

Reiss, K., Klieme, E. & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, S. 97–104). Utrecht: Utrecht University.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(1), 29–35.

Schoenfeld, A. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem-solving. In R. Lesh & M. Landau (Hrsg.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (S.345–395). New York: Academic Press.

Sweller, J., van Merriënboer, J. & Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, *10*, 251–295.

Tabach, M., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, C., Dreyfus, T. & Levenson, E. (2010). Verbal justification - is it a proof? Secondary school teachers' perceptions. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*(6), 1071–1090.

Weinberger, A., Ertl, B., Fischer, F., & Mandl, H. (2005). Epistemic and social scripts in computer-supported collaborative learning. *Instructional Science*, *33*(1), 1-30.

Weinert, F. (2001). Concept of Competence: A Conceptual Clarification. In F. Weinert, D. Rychen & L. Salyanik (Ed.), *Defining and Selecting Key Competencies* (S. 45-65) Göttingen: Hogrefe & Huber.

Jürgen MAASZ, Linz, Hans-Stefan SILLER, Salzburg

"Hunger in Afrika"- Vernetzungen zwischen Mathematik, Geografie und Wirtschaftskunde mittels systemdynamischer Methoden

In einem ausführlichen Beitrag für das von Astrid Brinkmann und uns herausgegebene Buch „Mathe vernetzt“ (vgl. Maaß & Siller, 2011) beschreiben wir ein (größeres) Unterrichtsprojekt rund um eine Wirtschaftssimulation namens „Hunger in Afrika“, das in mehrfacher Hinsicht zum vernetzenden Unterricht zählt. Einerseits werden verschiedene Unterrichtsfächer miteinander in Verbindung gebracht, zunächst, um das Computerspiel zu verstehen, später, um zu gewinnen. Aus der intensiven Beschäftigung mit dem Spiel erwächst die Motivation, sich mit dem schnell verdrängten Thema „Hunger“ intensiv auseinanderzusetzen. Wer das Spiel mit dem Vorurteil startet, dass Menschen in Afrika verhungern, weil sie faul und dumm sind, wird durch das Spiel schnell lernen, wie schwer es auch mit guter Sachkenntnis ist, wenigstens das Überleben der Familie zu sichern, die in dieser Simulation von Jahr zu Jahr geleitet wird. Gibt man nach den ersten durchaus frustrierenden Fehlversuchen nicht einfach auf, kann man sehr viel über das Leben in Afrika lernen – auch, um erfolgreicher spielen zu können. Über das Spielinteresse hinaus wächst jedoch das Interesse, diesen Teil der Welt besser zu verstehen. Wer das Spiel sicher und nicht nur einmal zufällig „gewinnen“ will (also eine gute Spielstrategie entwickelt), entdeckt – vielleicht – zum eigenen Erstaunen, wie nützlich Mathematik sein kann. Wir konzentrieren uns in diesem Beitrag auf Informationen zum Spiel und Tipps zu einer Gewinnstrategie.

1. Informationen zum Spiel

An der Universität Erlangen-Nürnberg wurde vor mehr als 20 Jahren am Lehrstuhl für Didaktik der Geographie (Prof. Dr. H. Schrettenbrunner) eine Wirtschaftssimulation (Computerspiel für PC/DOS) mit dem Titel „Hunger in Afrika“ entwickelt. Eine kleine Familie wird im Spiel von einem Spieler oder einer Spielerin gesteuert. Jedes Jahr (im Spiel entspricht das einer Spielrunde) kann entschieden werden, was mit den knappen Ressourcen an Land, Arbeitskraft und Werkzeugen sowie Aktionspunkten getan werden soll, etwa Hirse oder Gemüse anbauen, ein Wasserloch graben oder eine Terrasse anlegen. Zudem ist zu überlegen, ob Vieh gekauft oder verkauft wird und – wichtig für die langfristige Strategie – ein Kind zur Schule geschickt werden soll. Das kostet Arbeitskraft und Punkte, bringt aber langfristig Fortschritt und Gewinn.

Diese Simulation ist an verschiedenen Stellen im Internet zu finden. Das Spiel wird von einem Autor einer Website (Haller, o. J.) in einem grob skizzierten methodisch-didaktischen Rahmen präsentiert, der nach Haller (o. J.) aus folgenden vier Schritten besteht:

- „Starte das Programm ‚Hunger in Afrika'.
- Arbeite die 6 Informationsmaterialien durch.
  Schreibe dir (in ein Mind-Map?) alle Hinweise zu den Themen Ernährung, Viehhaltung, Anbau, Familien, Klima und Boden heraus.
- Spiele das Spiel.
  Wähle den Schwierigkeitsgrad ‚7 Kühe'. Wenn du in diesem Schwierigkeitsgrad mindestens 7 Jahre ‚überlebt' hast, kannst du dich an größere Schwierigkeitsgrade wagen.
- Hausaufgabe: Die optimale Strategie.
  Beschreibe, wie ‚man' sich verhalten sollte, um möglichst lange zu überleben, gib auch jeweils den Grund für deine Entscheidung an.
  Ein (falsches) Beispiel: ‚Ich rode alle Wälder, damit ich mehr Land zum Gemüseanbau habe'."

Wir setzen am vierten Punkt an. Fragen, die für uns von besonderem Interesse sind, lauten: Wie findet man eine „optimale Strategie"? Welchen Beitrag kann Mathematik dazu leisten? Wie kann und soll dieses Spiel in einem vernetzten oder fächerübergreifenden Mathematikunterricht stattfinden?

2. Von der gezielten Beobachtung zum Experiment

In der Klasse werden Fragen gesammelt bzw. gemeinsam erarbeitet (z. B. in einem Fragenspeicher), die zu klären im Hinblick auf eine mögliche Gewinnstrategie sinnvoll erscheinen. Im Laufe der Unterrichtseinheit wird versucht, die Fragen zu beantworten und aufgrund der ersten Antworten neue, bessere oder zielführendere Fragen zu formulieren und zu beantworten. Zwischendurch wird immer wieder in der Simulation getestet, wie gut eine Hypothese oder eine Antwort ist. Das letztlich wichtige Kriterium für die Güte einer Antwort ist der (vorzeigbare) Erfolg im Spiel.

Auch wir haben gespielt und nach einigen Spielen folgende Fragen gesammelt:

- Wie gewinne ich?
- Was soll ich am besten mit den zehn Land-Flächen tun?

- Wie viel Ertrag bringen die möglichen Nutzungen durch Wald, Weide, Hirse und Gemüse?
- Lohnt sich die Investition in Wasserlöcher oder Terrassen?
- Lohnt sich die Viehhaltung?
- Soll ich ein Kind zur Schule schicken? Was kostet und bringt es?
- Wie kann ich mich gegen ungünstige Zufälle (schlechtes Wetter etc.) schützen?
- Soll ich jedes Jahr alles investieren oder etwas für das nächste Jahr sparen?
- Wie verliere ich sicher (= was sollte ich besser nicht tun)?

Die Sammlung ist keinesfalls vollständig; sie enthält sogar bewusst Fragen, die nicht wirklich weiterhelfen (wie die erste), aber auch solche, die erst noch in Einzelfragen aufgeteilt oder umformuliert werden müssen, bis sie gut beantwortet werden können.

Die Schülerinnen und Schüler selbst wählen sich eine der Fragestellungen für ihre Arbeitsgruppe und überlegen dann, wie sie die Frage beantworten können. Falls das gar zu ungewohnt erscheint, kann als Vorbereitung eine Fragestellung gemeinsam bearbeitet werden. Aus der gemeinsamen Reflexion der erarbeiteten Ergebnisse folgt die jeweils nächste Fragenstellung und Aufgabe.

3. Einige Ergebnisse

Wie viele Einheiten Nahrung werden pro Runde gebraucht? Diese Zahlen hängen nicht vom Zufall ab: Pro Kind sind es stets 20 Einheiten, für die „Alten" je 30 Einheiten und für die Erwachsenen je 40 Einheiten.

Wie viele Rinder sind sinnvoll? Die Anzahl sollte im Intervall von fünf bis neun liegen. Ab fünf Rindern kann mit Nachwuchs gerechnet werden; bei mehr als neun besteht die Gefahr, dass sie verdursten, wenn nicht mehr als ein Wasserloch für sie vorhanden ist. Es muss immer ein freies Wasserloch für die Rinder bereit gestellt werden.

Wir geben abschließend eine Strategieempfehlung wieder, die der Linzer Student Mayr (1996) im Rahmen einer Seminarausarbeitung erstellt hat:

- 1. Runde: 100 Werkzeuge kaufen, ein Wasserloch auf Feld 1 errichten, Gemüse auf den Feldern 4 und 8.
- 2. Runde: Feld 4 Wasserloch und Gemüse, wenn möglich Feld 8 Gemüse. Wenn nötig, Rinder verkaufen.

– 3. Runde: Feld 4 Gemüse, Feld 8 Wasserloch. Wenn nötig, Rinder verkaufen.
– 4. Runde bis n-te Runde: wenn möglich, Terrassen auf Feld 4 und 8 errichten. Wenn hinreichend viele Kinder (4 oder mehr) vorhanden sind, maximal die Hälfte am Ende der Runde in die Schule schicken.

Außerdem sollte erreicht werden, dass immer ein freies Wasserloch auf Feld 1 (notfalls reparieren) vorhanden ist. Falls auf Feld 4 oder Feld 8 ein Wasserloch austrocknet, sollte zuerst immer Gemüse angebaut, danach das Wasserloch errichtet werden, falls die nötigen Ressourcen vorhanden sind. Außerdem sollte auf Feld 1 und Feld 9 Wald angebaut werden.

Wenn Schülerinnen und Schüler selbst eine Strategie erarbeitet haben, sollten sie sie erproben. Besser für einen abwechslungsreichen Unterricht ist es, wenn verschiedene (Gruppen von) Schülerinnen und Schülern unterschiedliche Ideen und Vorschläge für eine erfolgreiche Strategie haben. Diese Ideen und Vorschläge können in Konkurrenz zueinander getestet und aufgrund der Resultate erörtert sowie zu einer Gesamtstrategie zusammengefasst werden. Diese sollte ihrerseits wieder erprobt werden! Diese Phase ist nach Entscheidung der Schülerinnen und Schüler dann beendet, wenn sie in der Simulation erfolgreich bzw. gut abschneiden. Was für sie „gut" oder „genügend gut" ist, sollen sie sich selbst überlegen! Ist eine aus Sicht der Schülerinnen und Schüler hinreichende Strategie gefunden, soll gemeinsam der Weg dorthin reflektiert werden. Von ersten Erkundungen des Spiels ausgehend, über systematische Beobachtungen von simulierten Ereignissen im Spiel und gezielten Experimenten zur Analyse der Black Box „Programm zur Simulation von Hunger in Afrika" reichte der vorgestellte Unterrichtsvorschlag bis zur Formulierung von immer treffsichereren Hypothesen für Resultate von Handlungen im Spiel und erfolgreichen Gesamtstrategien.

Literatur

Haller, J. (o. J.). Hunger – (nicht nur) in Afrika. verfügbar unter http://www.juergenhaller.com/2004/unterr/ewg/hunger/hunger.html (letzter Zugriff am 01.03.2011).

Maaß, J.; Siller, H.-St. (2011): „Hunger in Afrika" - Wir vernetzen Mathematik, Geografie und Wirtschaftskunde mit Systemdynamik. In A. Brinkmann (Hrsg.): Mathe vernetzt. Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Schriftenreihe des GDM-Arbeitskreises Vernetzungen im Mathematikunterricht, Köln: Aulis Verlag, 109-116.

Mayr, M. (1996). Analyse des Spiels „Hunger in Afrika". Seminararbeit zur LV „Computereinsatz im Mathematikunterricht", JKU Linz, Linz.

Michael MEYER, Dortmund

Begriffsbildung durch Entdecken und Begründen

Am Beispiel des Begriffs „arithmetischer Mittelwert“ wird eine allgemeine Strategie erläutert, wie Lernende dazu angeregt werden können, einen mathematischen Begriff durch Prozesse des Entdeckens und Begründens zu bilden.

1. Einleitung

In der wissenschaftlichen Diskussion wird der Begriff „Begriff“ auf verschiedene Arten diskutiert. Zunächst soll zwischen dem Wort und der damit verbundenen Bedeutung unterschieden werden, so dass die Bezeichnung „Begriff“ beides umfasst. Die Bedeutung eines Begriffs wird zumeist nicht auf seine Definition beschränkt:

Einen „mathematischen Begriff zu ‚besitzen’, erfordert, mehr Beziehungen zu kennen und mehr über den Umgang mit diesem Begriff zu wissen, als in der Definition ausgedrückt wird. […] Beweise sind ein vorzügliches Mittel dazu, die innere Struktur von Begriffen zu explizieren sowie Begriffe miteinander zu vernetzen und damit den Bedeutungsgehalt von Begriffen zu entwickeln.“ (Fischer und Malle 1985, S. 189f)

In den mathematikdidaktischen Lehrwerken zur Begriffsbildung im Unterricht werden verschiedene Wege beschrieben, wie mathematische Begriffe den Lernenden nahegelegt werden können. Beispielweise unterscheidet Winter (1983) sechs verschiedene Arten der Begriffsbestimmung. Vollrath (2001) beschreibt, wie die Einführung mathematischer Begriffe in Problemkontexten geschehen kann. Entdeckungsprozesse werden von beiden Autoren hinsichtlich des sukzessiven Abstrahierens von Eigenschaften von konkreten Objekten oder Operationen, die der Experte als Instanziierungen des Begriffs auffasst, beschrieben. Der hier verwendete Begriff des „Entdeckens“ ist jedoch enger gefasst und beschreibt solche Prozesse, bei denen abduktiv schließend eine neue Erkenntnis im Sinne einer allgemeinen Aussage gewonnen wird. Der Mathematiker Rényi (1976, S. 28) nutzt zu Beschreibung des Lernens neuer Begriffe die Metapher eines Schiffsbaus und der anschließenden Reise mit diesem Schiff: Der Begriff wird zunächst eingeführt (das Schiff gebaut), etwa qua Definition, bevor er verwendet werden kann, um mathematische Zusammenhänge zu entdecken (mit dem fertigen Schiff neue Gestade entdecken) und als Sätze zu formulieren. Insofern wird nach Rényi ein Begriff nicht entdeckt, sondern gebildet (resp. „erfunden“, Götz und Siller 2010), bevor ein Satz entdeckt werden kann.

In diesem Beitrag soll die Möglichkeit skizziert werden, wie umgekehrt mathematische Begriffe durch das Entdecken und Begründen mathematischer Sätze gebildet werden können. Diese Möglichkeit wird vereinzelt bereits in neueren Lehrwerken zum Mathematikunterricht genutzt und soll hier in ihrer allgemeinen Struktur am Beispiel des Mittelwertbegriffs erarbeitet werden.

2. Von der Definition zum Satz

Eher traditionelle Schulbücher präsentieren den zu erlernenden Begriff direkt – zumeist hervorgehoben in einem roten Kasten:

1. Definition: x heißt ... (Begriffswort) $:\Leftrightarrow$ $\text{Aussage}_{\text{def}}$ über x

2. Satz: $\text{Aussage}_{\text{def}}$ über x $\Leftrightarrow$ $\text{Aussage}_{\text{Satz}}$ über x

Hierbei muss angemerkt sein, dass statt der Äquivalenz, die hier zwischen der definitorischen Aussage ($\text{Aussage}_{\text{def}}$) und der Aussage des Satzes ($\text{Aussage}_{\text{Satz}}$) vermittelt, lediglich eine konditionale Folgerung vorliegen kann.

Am Beispiel des arithmetischen Mittelwertes stellt sich diese Struktur wie folgt dar:

1. Definition: x heißt arithmetischer Mittelwert $:\Leftrightarrow (a_1 + \ldots + a_n) : n = x$

2. Satz: $(a_1 + \ldots + a_n) : n = x \Leftrightarrow (a_1 - x) + \ldots + (a_n - x) = 0$

3. Begriffsbildung durch Entdecken und Begründen am Beispiel des Mittelwertes

In neueren Schulbüchern ist es eher üblich, dass vor der expliziten Thematisierung eines Begriffs einführende Aufgaben gestellt werden. Diese Aufgaben können dazu dienen, dass die Lernenden ihr bisheriges Wissen von einem ihnen vertrauten Kontext aufrufen, in dem der zu erlernende Begriff teilweise impliziert ist. Beispielsweise wird der Begriff Mittelwert in reduzierter Bedeutung als „mittlere Zahl" einer Zahlreihe erfahren:

$5 + 6 + 7 = \boxed{} \qquad \boxed{} : 3 =$

An dieser und ev. weiteren Summen von drei aufeinanderfolgenden Zahlen kann entdeckt werden, dass sich bei der Division der Summe durch 3 stets die „mittlere Zahl" ergibt. Die Begründung, dass diese Regel immer gelte, kann durch das gegensinnige Verändern von zwei Summanden erfolgen:

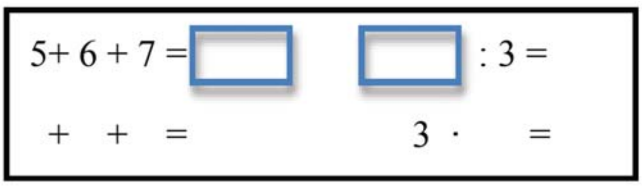


Abb.: Eine Startaufgabe zum Begriff „arithmetisches Mittel"

In der ersten Zeile der Abb. wird die Definition des Mittelwertes in reduzierter Weise konkretisiert. Das gegensinnige Verändern erfolgt auf der linken Seite von oben nach unten. Wenn man weiter entgegen dem Uhrzeigersinn über die fortgesetzte Addition als Multiplikation und über die Umkehrung der Multiplikation zur Division voranschreitet, ergibt sich die Begründung. Zur Begründung der allgemeinen Regel ist von den Beispielzahlen zu abstrahieren auf beliebige Summen von drei aufeinander folgende Zahlen (s. beispielgebundenes Begründen, Krummsdorf 2009). Damit wird der obige Satz in der Richtung „$\Leftarrow$" begründet, eingeschränkt auf drei aufeinander folgende Zahlen. Die Begründung der Richtung „$\Rightarrow$" kann entsprechend im Uhrzeigersinn erfolgen.

Um dem Allgemeinheitscharakter des Mittelwertes gerecht zu werden, wird nun die Anzahl der Summanden variiert, die Abstände zwischen den Summanden werden vergrößert und auch Zahlen in nicht-äquidistanten Abständen werden vorgegeben. Diese Aufgaben lassen sich auch in alltagsbezogenen statistischen Kontexten präsentieren, was hier aus Gründen des Umfanges unterlassen wird. Wenn in dieser Folge Summen wie 1+2+7+30 zu bearbeiten sind, so ist der Weg über das gegensinnige Verändern entgegen dem Uhrzeigersinn jedoch mühsam. Vielmehr gibt dann der Weg über die definitorische Aussage den Anlass, 10 nicht nur als Ergebnis der Division „(1+2+7+30):4" festzustellen, sondern auch zu vermuten, dass 10 durch gegensinniges Verändern erzielt werden kann. Dies kann durch (1+9)+(2+8)+(7+3)+(30-20) bestätigt werden, was wiederum Anlass zu der Entdeckung gibt, dass bei beliebigen Summen der entsprechende Quotient gleich einer durch gegensinniges Verändern erzielbaren Zahl ist, analog zur früheren einfacheren Situation bei drei aufeinander folgenden Zahlen. Die Begründung erfolgt beispielgebunden oder (in höheren Klassenstufen) formalisiert in algebraischer Sprache. Beim Übergang von der einfacheren Situation 5+6+7 über 8+10+9, 11+13+15+17+19 etc. bis zu Summen ohne Regelmäßigkeit verändert sich der Begriff „mittlere Zahl einer Zahlreihe" zum Begriff „arithmetischer Mittelwert". Auf diese Weise haben die Lernenden die Gelegenheit, zwei gleichwertige „Definitionen" des arithmetischen Mittelwertes zu entdecken und ihre Gleichwertigkeit zu begründen. Anschließend besteht dann immer noch die Möglichkeit, den neuen, veränderten Begriff zu „taufen", d.h. mit der offiziellen Bezeichnung „Mittelwert" zu versehen.

Die Kleinschrittigkeit der obigen Aufgabenfolge bei der Begriffsbildung dient dazu, die logischen Schritte des Entdeckens und Begründens herauszuarbeiten, so dass man auch bei offeneren, ganzheitlichen Lernumgebungen wünschenswerte Wege der Lernenden jenseits unreflektierter Verallgemeinerungen vor Augen hat und insbesondere stärker das Begründen in den Fokus der Aufmerksamkeit rückt.

4. Logische Struktur des Begriffsbildens durch Entdecken und Begründen

Hier soll nicht(!) behauptet werden, die beschriebene Bildung des Begriffs „arithmetischer Mittelwert" sei anderen Wegen vorzuziehen, obwohl sich dieser Weg in den Klassen 3 und 4 (Grundschule) als gangbar erwiesen hat. Vielmehr dient das Beispiel zur Konkretisierung einer allgemeinen Strategie, mittels der ein Begriff durch Entdecken und Begründen gebildet werden kann.

Die allgemeine Darstellung dieser Strategie erfordert den Einsatz logischer Begriff, insbesondere der Verwendung der Schlussformen „Abduktion" (für das Entdecken) und „Deduktion" (für das Begründen) (vgl. Meyer 2007). Während die logische Analyse im Vortrag ausgeführt werden konnte, muss hier aus Gründen des Umfanges auf künftige Veröffentlichungen verwiesen werden. Es sei nur angemerkt, dass die Strategie auch für weitere Begriffe in Form von Folgen von Entdeckungs- und Begründungsaufgaben ausgearbeitet wurde, zum Beispiel zum Bruchzahlbegriff und zum begriff der Mittelsenkrechten.

Literatur

Fischer, R. & Malle, G. (1985): Mensch und Mathematik. Mannheim: Bibliogr. Inst.

Götz, S. & Siller, H.-S. (2010): Vom Modellieren zum Definieren oder: Mathematik(unterricht) rund ums Ei. In: Beiträge zum Mathematikunterricht.

Krumsdorf, J. (2009): Beweisen am Beispiel. Beispielgebundenes Begründen zwischen induktivem Prüfen und formalem Beweisen. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 51(39), S. 8-13.

Meyer, M. (2007): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.

Rényi, A. (1967): Dialoge über Mathematik. Basel: Birkhäuser.

Vollrath, H.-J. (2001): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Winter, H. (1983): Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. Journal für Mathematik-Didaktik, 3, 175-204.

Wolfram MEYERHÖFER, Paderborn

Screening von Erstklässlern mit dem Jenaer Rechentest (JRT) - Empirische Erschließungen

Im Sommersemester 2010 fand an der Universität Paderborn ein Projektseminar statt, in dem alle Schüler/innen der ersten Klassen einer Grundschule mit dem Jenaer Rechentest (JRT, Version JRT 1 für Ende Klasse 1) auf ihr mathematisches Verständnis hin überprüft wurden. Das Projekt wird weitergeführt.

Der JRT ist ein qualitatives Verfahren, er werden also keine Punktwerte vergeben, sondern es werden Aussagen über Verständnis, Nichtverständnis und Fehlverständnis generiert. Die Daten der Schule wurden mit Ergebnissen des bereits standardisierten Heidelberger Rechentests (HRT) und des ebenfalls bereits standardisierten DEMAT-Tests in Beziehung gesetzt, um die Aussagekraft bezüglich besonderer Schwierigkeiten im Rechnen (bSR)/Rechenschwäche vergleichen zu können.

Alle Seminarteilnehmer/innen hospitierten zunächst in einer Testsitzung beim einem erfahrenen Tester. In Phase 2 übernahmen die Studierenden bereits Teile des Testens, wurden dabei aber von erfahrenen Tester/innen unterstützt. Diese erfahrenen Tester/innen beobachteten und bewerteten dann in Phase 3 eine Testung, die von den Studierenden eigenständig vorgenommen wurde. In Phase 4 testeten die Studierenden völlig eigenständig, ohne erfahrene Aufsicht, aber in Gruppen.

JRT 1: Was wird getestet?

Im JRT wird eine bestimmte Vorstellung vom mathematischen Lernprozess operationalisiert. Die Autor/innen sind Dagmar Grütte, Jörg Kwapis, Wolfram Meyerhöfer und Olaf Steffen.

Meyerhöfer (2011) hat als theoriesprachliches Alternativkonzept zum Konzept der Rechenschwäche das Konzept der **nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH)** entwickelt. Hierbei werden als stoffliche Hürden (sH) eine *begrenzte Anzahl* von mathematischen Inhalten bezeichnet, die zentrale Hürden im mathematischen Lernprozess darstellen. Ihr Nichtverstehen hat weitreichende Folgen für die Beherrschung breiter Felder des mathematischen Schulstoffs und für die Orientierung im Quantitativen. Sie stellen die zentralen Ankerpunkte dar, um die herum sich das herkömmliche mathematische Wissen und Können erst systematisieren kann. Für die Klasse 1 nimmt Meyerhöfer als stoffliche Hürden den kardinalen, ordinalen und relationalen Zahlbegriff mit Ablösung vom zählenden Rechnen sowie die Operationslogik von Addition und Subtraktion (Welche Fragen stellen die

Rechenoperationen und auf welche Weise beantworten sie diese Fragen?) an.

Grütte, Kwapis und Steffen sind Leiter von Zentren zur Therapie der Rechenschwäche (ZTR). Im ZTR-Verbund wurde ein gestuftes Konzept vom mathematischen Lernprozess entwickelt, das Annahmen darüber trifft, wie diese stofflichen Hürden zu bearbeiten sind, was dabei also verstanden bzw. routinisiert werden muss. Der JRT beantwortet nun die Frage, inwieweit ein Verständnis der dabei angenommenen Verstehenselemente vorliegt. Die einzelnen Teile des JRT 1 erfassen Mengenverständnis, Zahlenverständnis, Nutzung der Zahlenordnung, Verständnis der Rechenoperationen, Sachaufgaben. Hauptaufgabe des Mathematikunterrichts in Klasse 1 ist es, die Schüler/innen beim Lösen vom zählenden Rechnen zu begleiten. Dauerhafter Fokus bei der Testung ist deshalb die Frage, ob die Schüler/innen sich vom zählenden Rechnen gelöst haben bzw. wie weit sie sind auf ihrem Weg des Lösens vom zählenden Rechnen.

Der JRT 1 liegt in der endredaktionellen Fassung vor, die Teile für die Klassen 2, 3 und 4 sowie für den Kindergarten werden im Jahresverlauf 2011 vorliegen. Der Test kann zu wissenschaftlichen Zwecken kostenlos genutzt werden und ist über die Autor/innen erhältlich.

Projektanliegen, Forschungsfragen, Resultate

1. Die langfristige zentrale Forschungsfrage ist die Frage, **ab welchem Zeitpunkt im Lernprozess besondere Schwierigkeiten im Rechnen (bSR) herausfindbar und bearbeitbar sind**. Im Konstrukt der Rechenschwäche wird davon ausgegangen, dass eine Rechenschwäche erst ab Klasse 2 diagnostizierbar sei, weil erst dann die Schüler/innen sich vom zählenden Rechnen gelöst haben müssten. Hier wird also eine resultative Sichtweise eingenommen: Das Kind „muss bereits in den Brunnen gefallen sein“, bevor man eine Rechenschwäche diagnostizieren kann. Allenfalls in der Diagnose von „Vorläuferfertigkeiten“ sieht man eine Option zur Verhinderung von bSR.

Im Konstrukt der nbsH geht man im Gegensatz dazu davon aus, dass man zu allen Zeitpunkten des Lernprozesses überprüfen kann, inwieweit die Schüler/innen die stofflichen Hürden bereits bearbeitet haben, wie weit sie also im Verstehen und Routinisieren fortgeschritten sind. Indem wir mit dem JRT 1 bereits vor Ende der ersten Klasse das Verstehen und das Ablösen vom zählenden Rechnen untersuchen, ermöglichen wir den Lehrer/innen, das bislang Verabsäumte noch bis zum Ende der ersten oder zu Beginn der zweiten Klasse nachzuholen. Die vorliegende Untersuchung ist hier lediglich ein erster Schritt, mit dem untersucht wird, ob der JRT überhaupt Resultate liefert, an die eine Förderung anschließen kann. Diese Frage ist nach der Untersuchung zu bejahen, es wurden auch Fördermaßnahmen im Rahmen von Examensarbeiten angeschlossen. Eine nächste Frage ist es, auf welche Weise man die Lehrer/innen beim Bearbeiten der sH unterstützen kann.

2. Eine zweite Forschungsfrage war die Frage nach der **quantitativen Verteilung von Problemfeldern des Verstehens in der Schülerschaft**. Hier lässt sich feststellen, dass zwischen einem Drittel und der Hälfte der Schüler/innen in den einzelnen Inhaltselementen keine Kompetenz bzw. nur eine Teilkompetenz aufweist (daneben arbeiten wir mit der Einordnung „vollständige Kompetenz“). Es handelt sich dabei nicht immer um dieselben Schüler/innen, die eingeschränkte Kompetenz verteilt sich auf viele Schüler/innen. Im einzelnen liegt bei folgenden Verstehenselementen gehäuft völliges Unverständnis (seltener Teilverständnis) vor:

- Bei 24 von 57 Schülern liegt kein vollständiges Verständnis der kardinalen Wertbeziehungen im Zahlraum bis 10 vor.

- 24 von 57 Schülern fehlt das Verständnis der Tatsache, dass Ordinalzahlen nur eine Wertigkeit von Eins haben.

- 26 von 57 Schülern haben kein vollständiges Verständnis der Operationslogik der Subtraktion.

- 24 von 57 Schülern können den Zusammenhang von Addition und Subtraktion nicht nutzen bzw. erkennen.

Bei folgenden Verstehenselementen liegt gehäuft nur Teilverständnis (seltener völliges Unverständnis) vor:

- 24 von 57 Schülern haben kein vollständiges Verständnis der Operationslogik der Addition.

- 21 von 57 Schülern können nicht sicher die Seriationslogik der Zahlen nutzen.

Eher quer zu allen Aufgaben zeigten sich folgende Probleme:

- Die Bedeutung des Gleichheitszeichens ist völlig unverstanden.

- Der Großteil der Schüler/innen arbeitet auf der Zahlenebene mit korrekten Resultaten, die Verbindung von Zahlen und Mengen ist aber brüchig. Da Zahlen sozusagen Label von Mengen sind, muss auch beim Agieren mit Zahlen desöfteren im Lernprozess eine Rückbindung an Mengen vorgenommen werden. Ich sehe die Notwendigkeit, beim Operieren mit aus Abstraktionen entstandenen mathematischen Objekten immer wieder rückzufragen: Was macht unser Operieren eigentlich mit jenen Entitäten, aus denen heraus wir unsere abstrakteren Entitäten gebildet haben? Oder: Was macht das Operieren auf der höheren Abstraktionsstufe eigentlich mit den Entitäten der niedrigeren Operationsstufe? Ich nenne diese Notwendigkeit das Prinzip der permanenten Entabstrahierung, Bauersfeld hat den Begriff Rekonkretisierung vorgeschlagen.

Einen massiven Förderbedarf sehen wir bei etwas mehr als einem Viertel der Schüler/innen (16 von 57). Es bedarf allerdings weiterer Forschung, um sicher zu wissen, dass dieser massive Förderbedarf darauf verweist, dass diese Schüler/innen sich ohne (besondere?) Förderung nicht von allein vom zählenden Rechnen lösen.

Ebenso bedarf es weiterer Forschung, um Unterschiede in der quantitativen Verteilung von Kompetenzproblemen bei verschiedenen Lehrer/innen auszumachen und um die Frage zu beantworten, was erfolgreiche von weniger erfolgreichen Lehrer/innen unterscheidet.

3. Eine weitere Forschungsfrage war, inwieweit gebräuchliche, auf die ICD-10-Definition der Rechenschwäche bezogene, **standardisierte Instrumente den Förderbedarf wirklich diagnostizieren**. Der DEMAT 1+ diagnostiziert für keine/e Schüler/in eine Rechenschwäche, er verweist 5 Schüler/innen in einen Grenzbereich. Der Heidelberger Rechentest (HRT) diagnostiziert für einen Schüler eine Rechenschwäche, er verweist 2 Schüler/innen bzw. 6 Schüler/innen (je nachdem, welche Skala man benutzt) in einen Grenzbereich.

Wir gehen davon aus, dass die erhebliche Diskrepanz zwischen dem JRT einerseits und dem DEMAT/HRT andererseits nicht darauf verweist, dass der JRT zu hohe Anforderungen stellt: Der JRT geht von notwendiger Kompetenz aus, DEMAT und HRT setzen lediglich – durch die Art der Skalierung im Grunde beliebige – empirische Grenzpunkte. Zudem beachten beide Tests die Lösungswege der Schüler/innen nicht, welche aber zentral sind für die Frage, ob die Schüler/innen die für den weiteren Lernprozess benötigten Kompetenzen erworben haben.

4. Ein weiteres Anliegen des Projektes war es abzuschätzen, ob der JRT 1 ein sinnvolles Ausbildungsinstrument ist. Zum einen sollen die Studierenden in der Einarbeitung in die Operationalisierung des Tests mit einem bestimmten Konzept des mathematischen Lernprozesses tiefer vertraut werden. Zum anderen sollen die Studierenden durch die intensive Arbeit mit einzelnen Schüler/innen ihren diagnostischen Blick auf Schüler/innen schärfen. Hierzu ist zunächst lediglich ein sehr guter Eindruck aus den Evaluationen der Veranstaltung zu berichten.

Karl MOCNIK, Graz

Ein verkapptes Geometrieproblem und seine sieben Syllogismen

ARISTOTELES nannte den deduktiven Schluß, der von zwei *Prämissen* P1, P2 ausgeht und über einen *gemeinsamen Mittelbegriff* gM zum gültigen Schlusssatz, zur *Konklusion* K, führt, einen *„Syllogismus"*. Die Syllogistik ist der Kern der aristotelischen Logik. Ein solcher Syllogismus MAXWELLS gab der Wissenschaft 1879 einen geometrischen Impuls. Es sollte die Frage eine Antwort finden, ob der elektromagnetischen Wirkungsausbreitung ein bevorzugtes Ruhekoordinatensystem *S* zugrunde liege. Von bleibender Aktualität ist sein Gedanke, eine orientierbare Messstrecke *M* der Länge *p* mit einem Spiegel an deren Ende auszustatten und die Gesamt- oder Totaltrajektorienlänge s_{tot} eines Lichtsignals „hin-und-zurück" in Abhängigkeit der Orientierung (Inklinationswinkel *i*) von *M* zur Erdbahntangente ($\varepsilon = v/c$) abzuleiten. Sieben *Syllogismen*, zwei pre-experimentelle und fünf post-experimentelle, sind hierzu seit dem 19. Jahrhundert bekannt geworden.

Von den vertrauten sechs Syllogismen genügt keiner der geometrischen und physikalischen Realität. Ein siebter Syllogismus konnte aus geometrischen Tatsachen erschlossen werden, da er nicht auf der Hand lag.

Legende: Die folgenden Prädikate beziehen sich auf *M*. Unter der Voraussetzung, dass *S* existiert, in Bezug zu welchem *M* sich inertiell bewegt. Es seien den Analysen die folgenden Definitionen zugrunde gelegt:

AE = Anisotropie-Effekt $p\varepsilon^2$ (erwartete Wegedifferenz); IE = Isotropie-Effekt (Nulleffekt *NE*); ➔= Implikation; SEMI = Signal-Echo-Meßstrecke im Inertialsystem; RAT = RichtungsAbhängige Totaltrajektorienlänge s_{tot} (hin+zurück) falls AE≠0; RUT = RichtungsUnabhängige Totaltrajektorienlänge (hin+zurück), falls AE=0; *M* = Messstrecke mit einem Spiegel.

Zwei pre-experimentelle Syllogismen.

Syllogismus 1: (1879): P1: Eine longitudinale (⇆) SEMI ➔ RAT1; P2: Eine transversale (⇅) SEMI➔ RAT2. gM: Jede M ➔RAT. K: Die Trajektoriendifferenz entlang den beiden *M*➔2·AE.

Syllogismus 2: (DOPPLER 1847, LORENTZ 1886): Eine longitud. (⇆) SEMI ➔ RAT1; P2: Eine transversale (⇅) SEMI➔RAT2´. gM: Jede M➔RAT. K: Die Trajektoriendifferenz entlang den beiden M ➔*1·AE*. *Syll.1* sagte noch *2·AE* voraus, *Syll.2* hingegen nur *1·AE*. Erklärung: Das erste MICHELSON-Experiment von 1880, beruhend auf *Syll 1*, wonach die totale

Trajektorienlänge des Lichtsignals $s_{tot}^{\leftrightarrow} = pc/(c\text{-}v)+pc/(c+v) = 2p/(1\text{-}\varepsilon^2)$ (RAT1) ungleich $s_{tot}^{\updownarrow} = 2p$ (RAT2) und demnach die Differenz der Trajektorien mit $\Delta s_1 = s_{tot}^{\leftrightarrow}\text{-}\ s_{tot}^{\uparrow\downarrow}{}_{(1)} = 2p\varepsilon^2 = 2\cdot AE$ sei, schlug fehl. Es stellte keinerlei *AE* fest, sondern bloß stochastische Streuungen und falsifizierte so *Syll 1*. Basierend auf einer präzisen Analyse DOPPLERS, 1847, verwarf LORENTZ 1886 die Setzung MAXWELLS $c^{\downarrow\uparrow} = c$ und schlug die Einbeziehung der Lichtaberration vor. Aus dem Cosinussatz (DOPPLER) folgt für $c^{\downarrow\uparrow} = c\cdot\sqrt{(1\text{-}\varepsilon^2)}$ (*Syll 2*). Dies vergrößert die transversale Traj.-länge in *S* auf $s_{tot}^{\uparrow\downarrow}{}_{(2)} = 2p/\sqrt{(1\text{-}\varepsilon^2)}$ und halbiert die erwartete Trajektoriendifferenz gegenüber *Syll 1* auf $\Delta s_2 = s_{tot}^{\leftrightarrow}\text{-}\ s_{tot}^{\uparrow\downarrow}{}_{(2)} = AE = p\varepsilon^2$. Die Wiederholung mittels eines erheblich verbesserten MICHELSON-Interferometers MI im MICHELSON-MORLEY Experiment, (MME, 1887) jedoch zeigte einen *NE*. – Sollte das nach *Syllogismus 2* bevorzugte Ruhesystem *S* (Äther) doch nicht existieren? Der beobachtete *NE* falsifizierte *Syllogismus 2*. Dies impliziert eine physikalische Unbeobachtbarkeit des „schrägen Lichtfeldes“, bezeichnet mit *λ´* in der Abb. 4, Mocnik (1997) im erwähnten Inertial- oder Beobachtersystem *S´*.

Folgerungen: *1. Die Richtung A´B´ ist weder für einen in S, noch für einen im bewegten System S´ ruhenden Beobachter eine beobachtbare Wachstumsrichtung des Dopplerwellenfeldes. 2. Die vektorielle Subtraktion c´=c-v (Syllog. 2) ist für Ausbreitungsgeschwindigkeiten unanwendbar.*

Fünf post-experimentelle Syllogismen.

Eine erste Abhilfe war *Syllogismus 3* von LORENTZ (1892): P1: Eine longitudinale (⇆) SEMI erfährt eine „Kontraktion“ und➔RAT2; P2: Eine transversale (↓↑) SEMI➔RAT2. gM: Jede M➔RAT. K: Die Trajektoriendifferenz entlang den beiden *M* ist Null (*NE*). Diese „Konstruktion“ wirkte unschön, indem sie auf zwei Hypothesen beruht, nämlich der Vorhersage von *1·AE* und deren Annullierung durch eine „Längenkontraktion“, um dem MME zu genügen. EINSTEIN, 1905 schlug daher *Syllogismus 4* vor: P1,2: Jede SEMI➔RUT; gM: Jede *M* ist eine SEMI. K: *M*➔RUT, damit wird die Trajektoriendifferenz dem MME gerecht (*NE*). Die Postulate der Speziellen Relativität (der Raum ist leer, das Licht besteht aus fliegenden Photonen, deren Geschwindigkeit universell konstant ist), ergänzen den Aufbau der Theorie. Die Restriktion durch die Postulierung der universellen Konstanz der Lichtgeschwindigkeit stieß auf einen Einwand. 1977 schränkte MARINOV die Gültigkeit der Konstanz der Lg. auf die Echoausbreitung (Axiom 10) ein und ließ für die Einwegausbreitung eine anisotrope Geschwindigkeit des Lichtes zu. *Syllogismus 5* ist daher mit *Syll. 4* formal identisch, bloß die Folgerungen sind verschieden.

Die *Syllogismen 4* und *5* sind, im Unterschied zu den pre-experimentellen *Syllogismen 1* und *2*, nicht konstruktiv im Sinne geometrischer Konstruierbarkeit, sondern bilden auf Postulaten und Axiomen beruhende Theorien. „Konstruktiv" im Sinne geometrischer Konstruierbarkeit und Verifizierbarkeit ist hingegen der mit *Syllogismus 2* fast identische und mit ihm nahe verwandte Ansatz, welcher auf dem HUYGENSSCHEN Prinzip (HP) beruht. *Syllogismus 6* (HP): Eine longitud. (⇆) SEMI➔RAT1; P2: Eine transversale (⇅) SEMI➔RAT1. gM: Jede *M*➔RAT. K: Die Trajektoriendifferenz entlang den beiden *M* ist wegen des HP gleich Null (Trajektorie $F_1B'+B'J \equiv$ Trajektorie F_1X+XF_2 in der Abb. in Mocnik, 2003), doch wegen der Geometrie der Trajektorien eilt die Frontwelle des transversalen Wellenzuges ($F_1B'J$) dem des longitudinalen Wellenzug (F_1XF_2) um das Stück GJ voraus und impliziert somit *1·AE*, wie im *Syllogismus 2*. Doch erfüllt *Syllogismus 6* die Gleichheitsbedingung des MME: Trajektorien $F_1B'J = F_1XF_2$. Das MME verlangt überdies die Erfüllung der räumlichen Koinzidenz der Frontwellen im Raumpunkt F_2, nach Durchlaufen ihrer individuellen Trajektorien. Dieser Forderung gerecht wird *Syllogismus 7* (Mocnik, 1997, 1998, 2000, 2002-2004): Eine longitud. (⇆) SEMI➔RUT; P2: Eine transversale (⇅) SEMI➔RUT, als Folge von HP. gM: Jede *M*➔RUT. K: Die Trajektoriendifferenz entlang den beiden *M* ist wegen des HP gleich Null (Trajektorie $F_1B''+B''F_2 \equiv$ Trajektorie F_1X+XF_2 in der Abbildung in Mocnik, 2003, somit ist Koinzidenz im Punkt F_2 gegeben und damit Einklang mit der Beobachtung. Zu begründen bleibt, warum der Reflexionspunkt für den transversalen Strahl nunmehr nicht B´ ist, sondern der Raumpunkt B´´.

Es scheint unbestreitbar zu sein, dass Raumpunkte existieren, welchen „absolute Ruhe" zukommt, im Gegensatz zu den Postulaten, die den *Syllogismus 4* ergänzen. Diese „absolut ruhenden Raumpunkte" sind F_1, F_2, X, B´´ und legen eine „Nulleffektellipse" mit der numerischen Exzentrizität $\varepsilon=v/c$, dem Parameter $p=1$ und der großen Halbachse $p/(1-\varepsilon^2)$ fest, welche den geometrischen Hintergrund bildet für jedes Elementarelement der Störungsausbreitung im Raum. Die schließliche Reflexion tritt jedoch aufgrund des Zusammenwirkens von Doppler- und Aberrationseffekt nicht im Raumpunkte B´´, sondern im Raumpunkt B_1 in der Abb.3.13 meines Buches von 2002 ein. Erklärung: Während der Bewegung des MI von F_1 nach A´´ wächst ein Wellenzug heran, dessen tatsächliche Länge nicht A´´B´´, sondern wegen des HP gleich Q´´B´´ ist und exakt dem Parameter *p* der Nulleffektellipse entspricht (Mocnik, 2003). Die aktuelle Wellenzuglänge in *S* ist daher $Q''B''= p$ und in *S´* die Strecke $A''B_1 = p$.

Die Aberration dreht sozusagen Q´´B´´ in *S* um den Aberrationswinkel α in die Beobachtungsrichtung $A''B_1$ in *S´* und es erscheint die Ausbreitung daher entlang von A´´B_1. Somit verbindet *Syllogismus 7* drei Prinzipien der Klassischen Optik (HP, DOPPLERprinzip, Aberrationsprinzip) mit drei miteinander eng verknüpften Theoremen der Analytischen Geometrie [Nulleffektellipse, Eikurve und Apolloniuskreis (Mocnik, 1998, 2002)].

Schlußfolgerung

Anhand der Syllogismen wird ersichtlich, dass das logische Denken allein sehr oft, aber nicht immer, ein zureichendes Mittel zur Erlangung eines umfassenden Urteils über einen geometrischen Sachverhalt zu bieten scheint. Es müssen ihm offenbar noch Experimentalergebnisse beistehen. MAXWELLS brennendes Anliegen, die Frage der Existenz des absoluten Ruhesystems *S* (Äther) zu beantworten, scheint sich hiermit auf eine allgemein unvorhergesehene Weise anzubahnen, indem zumindest die Syllogismen 1-6 falsifiziert und Syllogismus 7 an deren Stelle gesetzt werden mußten.

Das Supplement der historischen Schrift von MICHELSON und MORLEY weist zudem auf die Verletzung des Reflexionsgesetzes in der Zweiten Ordnung in ε hin. Dieser Gedanke gab zu einer geometrischen Analyse Anlaß (Mocnik, 2004, 2008, 2010) und führte weiters zur Konstruktion einer „Lichtschnecke“ (*„n-whorl-light-whirl“*, Mocnik (2010), welche a) die direkte Prüfung der Hypothese der longitudinalen Längenkontraktion und b) eine direkte Entscheidung über den relativen / absoluten Charakter der Bewegung des Sonnensystems (Ätherdrift *v/c*) zu treffen verspricht.

Literatur

Mocnik, K. (1997): Geometrie in der Physik-ein vernachlässigtes Thema mit gesellschaftlicher Relevanz? In: Didaktik der Mathematik (DdM), 31, Leipzig, 367-370.

Mocnik, K. (1998): Ellipse, Apolloniuskreis, Eikurve. Praxis d. Math. PM 40, 165-167.

Mocnik. K. (2000): Wie Michelson 1881 in Potsdam die Geometrie herausforderte. In: Didaktik der Mathematik, 34, Potsdam, 442-445.

Mocnik, K. (2001): Bevorzugte Kepler die Eibahn? Praxis der Mathematik PM 43, 89.

Mocnik, K. (2002): Rätselhafte Geschw.-Vektoren. In: DdM, 36, Klagenfurt, 339-342.

Mocnik, K. (2002): The Unnoticed Discovery. How Michelson was Misled by the Aether, Graz, Ergokratie-Verlag, 254 pages, Graz 2002.

Mocnik, K. (2002): Coronation of Maxwell’s Stationary Aether. In: Proceedings of the 4th internat. Conference on Problems of Geocosmos. 246-251, St. Petersburg.

Mocnik, K. (2003): Weg-Zeit-Diagramme… In: DdM, 37, Düsseldorf, 445-448.

Mocnik, K. (2004): Die Örter u. d. Huygensprinzip. In: DdM, 38, Augsburg, 385-388.

Mocnik, K. (2008): On Closing a Gap in Spacetime Physics. In: Proceedings of the 6th internat. Conference on Problems of Geocosmos. 178-181, St. Petersburg.

Mocnik, K. (2010): Detection of the Second-order Aberration-angle. In: Proceedings of the 7th internat. Conference on Problems of Geocosmos. 174-177, St. Petersburg.

Renate MOTZER, Augsburg

Schriftliche Subtraktion – Abziehen oder Ergänzen?

In Bayern wurde 2000 im Zusammenhang mit dem neuen Grundschullehrplan als schriftlichen Normalverfahren der Subtraktion das Abziehen mit Entbündeln verbindlich. Damit endete die seit den 50iger Jahren von der damaligen KMK beschlossene Tradition, schriftliche Subtraktion durch Ergänzen mit Erweiterungstechnik zu lehren.

Ziel dieser Lehrplanänderung war, dass die Kinder nicht nur ein schematisches Verfahren lernen, dessen Herleitung sie schnell vergessen, sondern dass sie das Verfahren wirklich nachvollziehen, ja teilweise sogar selbst entdecken können.

Bayerische Grundschullehrerinnen bestätigen, dass die Einführung meist gut gelingt und die Kinder das Entbündeln zunächst mit Stellenwertmaterial oder Spielgeld gut durchführen können und daher auch nach einiger Zeit des systematischen formalen Arbeitens noch erklären können, wie die Schreibweise zustande kommt und worin der grundliegende Gedanke besteht.

Trotzdem ist die Kritik an der Schreibweise auch nach 10 Jahren noch nicht abgeflacht.

Dass es zu Beginn Widerstände von vielen Seiten geben würde, weil die Erwachsenenwelt es nun mal anders gewöhnt ist und nicht versteht, warum man Bewährtes plötzlich ändern sollte, war zu erwarten. Die Gewöhnung an das neue Verfahren vor allem bei den Lehrern der Sekundarstufe 1 ist allerdings auch nach 10 Jahren immer noch nicht flächendeckend vorhanden. Viele Kinder werden also in der 5. Klasse wieder „umerzogen".

Von daher ist die Frage nach den Möglichkeiten der (schriftlichen) Subtraktion alles andere als abgeschlossen.

1. Subtraktionstechniken

Bei Padberg (2005) findet man 5 Zugänge zu schriftlichen Subtraktion: Abziehen mit Entbündeln, Ergänzen mit Entbündeln, Abziehen mit Erweiterungstechnik, Ergänzen mit Erweiterungstechnik und die Auffülltechnik (geht nur mit Ergänzen).

Es sind also zwei Fragen, die man unterschiedlich beantworten kann: soll wirklich abgezogen werden oder stattdessen ergänzt (weil das Schülern oft schon ab der 1. Klasse leichter fällt)?

Mit welcher Technik soll vorgegangen werden, wenn der Minuend weniger Einer /Zehner usw. hat als der Subtrahend?

Die Erweiterungstechnik, d.h. dass man von außen dem Minuenden das gleiche dazu gibt wie dem Subtrahenden (freilich in etwas unterschiedlicher Form, damit sich die Aufgabe dann rechnen lässt), beruht auf dem Invarianzgesetz der Subtraktion, dass sich der Wert der Differenz nicht ändern, wenn man beide Zahlen gleichsinnig verändert.

Deutet man die Differenz als den Unterschied der beiden Zahlen, kann diese Deutung zwar verständlich gemacht werden, aber die Herleitung ist nichts desto trotz ein bisschen weit von außen hergeholt. Bei den meisten Minusaufgaben im Alltag geht es nämlich nicht um den Unterschied zwischen den Zahlen, sondern darum, was übrig bleibt, wenn man etwas wegnimmt, oder was man noch dazutun muss, um etwas zu erhalten.

Aus diesem Grund haben wohl viele Schülerinnen und Schüler früher die Herleitung des Verfahrens bald vergessen und es nur noch mechanisch verwendet. Wenn man sich nur für den Unterschied der beiden Zahlen interessiert, besteht außerdem der naheliegende Fehler, dass die Kinder nur stellenweise den Unterschied berechnen und nicht darauf achten, ob nun der Minuend oder der Subtrahend mehr Einer/Zehner usw. hat.

Viele Erwachsene, die ich befragt habe, was denn das „1 gemerkt“ bei der schriftlichen Subtraktion bedeutet, haben mir gesagt: „Man rechnet über den Zehner“. Warum man dann aber beim Subtrahenden „1 gemerkt“ hinschreibt, wenn man doch beim Minuenden „über den Zehner rechnet“, konnten mir viele nicht erklären. Einige der Studierenden, die schon vom Abziehen mit Entbündeln gehört haben, erklären das „1 gemerkt“ so: „Man merkt sich, dass man einen Zehner entbündelt hat und zieht ihn im nächsten Schritt mit ab“.

Diese Studierenden deuten die Aufgabe inzwischen also als Abziehen, nicht mehr als Ergänzen, wie sie es vermutlich in ihrer Schulzeit gelernt haben. Was sie sich mit „1 gemerkt“ merken, scheint mir so sinnvoll, dass ich dies Deutung als 6. Technik hinzufügen möchte.

Diese Deutung ist auch eine Chance, wie man einigermaßen inhaltlich stimmig 5. Klässler von der Entbündelungsschreibweise auf die alte Schreibweise „umerziehen“ kann, wenn einem das als Sekundarstufenlehrer so wichtig ist. Ich hoffe, die meisten Lehrer, die die Kinder umgewöhnen wollen, tun dies zumindest mit einer sinnvollen Deutung.

Dass diese Deutung durchaus eine sinnvolle Deutung ist, die sich Kinder auch über längere Zeit merken können, hat mir eindrucksvoll eine 4. Klasse gezeigt. Die Lehrerin der 3. Klasse hatte mit ihnen die Entbündelungstechnik besprochen. Dann aber hat sie mit den Kindern diskutiert, wie es am besten zu schreiben sei. Im Hinblick auf die örtlichen weiterführenden Schulen, von denen sie wusste, dass die Kinder dort „1 gemerkt“ schreiben sollen, diskutierte sie mit den Kindern verschiedene Schreibweisen (die im Buch und die 1-gemerkt-Version).

Gemeinsam verabredeten sie die 1-gemerkt-Version. Nach 1 ½ Schuljahr konnten fast alle Schülerinnen und Schüler der Klasse erklären, was das „1 gemerkt“ bedeutet, nämlich dass man entbündelt hat und dies nun im nächsten Schritt verrechnen muss.

3 Mädchen dieser Klasse hatten sich dieses Denken freilich nicht angewöhnt. Sie haben im Kopf sofort entbündelt und dann mit einem Zehner weniger weitergerechnet, ohne sich das in irgendeiner Form zu notieren. Kamen dann Nullen im Minuenden vor, hatten sie größte Schwierigkeiten.

Eine Befragung in einer anderen Klasse ergab, dass sich einige Kinder, die das „1 gemerkt“ aus dem Unterricht nicht kannten, auf die Frage, warum das viele Erwachsene so schreiben würden, meinten, es müsse der umgebündelte Zehner sein, den man sich so merkt und später mit abzieht. Die meisten Kinder dieser Klasse hatten freilich keine Idee, was die Erwachsenen mit ihrer Schreibweise meinen könnten.

2. Ergänzen oder Subtrahieren?

Eine zweite Frage ist, ob man ergänzen oder abziehen soll. Häufig wird argumentiert, dass es bei der Subtraktion schließlich um ein Abziehen, ein Wegnehmen geht. Doch sind auch viele Alltagssituationen so, dass Ergänzen gefragt ist.

Etwas kostet einen gewissen Betrag. Jemand hat schon gespart. Wie viel braucht er noch?

Es gibt im Theater eine bestimmte Anzahl von Plätzen. Viele Karten sind schon verkauft. Wie viele noch nicht?

Jemand schon auf den Kilometerzähler. Bei der Abfahrt zeigt er … km, bei der Ankunft … km. Wie viele km wurden zurückgelegt?

Gerade die letzte Fragestellung lässt sich gut am Rechenstrich darstellen. Wie viel km muss man zurücklegen, damit die Einerstelle passt, dann die Zehnerstelle usw.?

Damit kann die Auffülltechnik gut erläutert werden.

Besonders bei glatten Beträgen im Minuenden ist das Ergänzen einfacher als das Subtrahieren. Die Schritte des schriftlichen Rechnens entsprechen dann denen des halbschriftlichen Ergänzens bzw. des Kopfrechnens, das auch heute noch manche Verkäuferin beim „Rausgeben“ durchführt.

Schon ab der 1. Klasse kann man sehen, dass etlichen Schülern Ergänzen leichter fällt als Subtrahieren. Die Untersuchungen von Verschaffel et al. (2010) zeigen eindrücklich die Vorzüge des Ergänzens im Vergleich zum Abziehen. Sie zeigen aber auch, dass dies im Unterricht nicht ernst genug genommen wird und den Kindern die Möglichkeit ergänzend rechnen zu können, oft nicht bewusst genug sind.

Es dürfte also durchaus sinnvoll sein, ab der 1. Klasse Abziehen und Ergänzen immer wieder vergleichend gegenüberzustellen.

Für die schriftliche Subtraktion könnte es heißen, dass man auch hier beide Denkweisen vergleicht. De facto kann man beides mit „1 gemerkt“ schreiben, allerdings ist die Denkweise doch ziemlich unterschiedlich. Ob man Schülern beide Versionen vorstellen will oder ob eine einheitliche Denk- und Sprechweise vorzieht, muss man sich dann vielleicht abhängig von der jeweiligen Klasse überlegen. Beim halbschriftlichen Rechnen kann die Lehrkraft schon vorher sehen, ob die meisten Kinder lieber abziehen oder ergänzen, vor allem wie es den in Mathematik schwächeren Kindern leichter fällt. An den Leistungsschwächeren kann das „Hauptverfahren“ ausgerichtet werden. Im Sinne des flexiblen Denkens sollten die meisten Kinder aber durchaus erfahren, dass es mehrere Strategien gibt und wie diese Strategien begründet werden.

Literatur

Torbebeyns, J., De Smedt, B., Petres, G., Ghesquiere, P., Verschaffel, L. (2010): Indirect Addition: Theoretical, Methodological und Educations Considerations, in: Beiträge zum Mathematikunterricht

Padberg, F. (2005): Didaktik der Arithmetik, Spektrum Akademischer Verlag

Motzer, R. (2011): Entbündeln und /oder „eins gemerkt“, Subtraktion durch Abziehen oder Ergänzen, in: Grundschulmagazin, Oldenbourg

Eva MÜLLER-HILL, Köln

Mathematische Erklärung - Wissenschaftsphilosophische Konzeptionen und ihre Relevanz für die Mathematikdidaktik

1. Ausgangspunkt und Grundgedanke

Dem Interesse für den Begriff der mathematischen Erklärung und seine Rolle für die Mathematikdidaktik liegt der Gedanke zugrunde, dass Menschen und vor allem Lernende stets nach Erklärungen suchen. Mit „mathematischer Erklärung“ meine ich dabei zunächst Argumente, Bilder(sequenzen), Vorstellungen und auch Handlungen zur Erklärung der Wahrheit oder Falschheit von mathematischen *Sachverhalten*.[1] Mathematische Erklärungen sollen Antworten auf „*Warum-Fragen*“ innerhalb der Mathematik liefern. Erklärungen beeinflussen und strukturieren unser gesamtes, und damit natürlicherweise auch unser mathematisches Wissen. Die Gründe, warum wir im Alltag gleichwie in der Wissenschaft bestimmte Hypothesen und Theorien akzeptieren und verfechten und andere, konkurrierende zurückweisen, lassen sich in der Regel als sogenannte „Schlüsse auf die beste Erklärung“, eine spezielle Form der Abduktion, für bereits akzeptierte oder beobachtungsevidente Thesen oder Theorien verstehen. Diese Schlüsse funktionieren etwa nach dem folgenden Schema (Bartelborth 2007, S. 8): *Daten + Hintergrundwissen + Hypothesenliste → beste Erklärungshypothese.* Es ist sinnvoll anzunehmen, dass auch Mathematiklernende bestimmte, vor allem allgemein-abstrakte mathematische Sachverhalte besser verstehen und akzeptieren, wenn sie als (für sie) beste Erklärungshypothese in Bezug auf bereits bekannte oder evidente mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge erkennbar werden. Diesen Grundgedanken werde ich im Folgenden ein wenig genauer ausführen und begründen.

2. Methodologie: Fruchtbare Blicke in die Wissenschaftsphilosophie

Ein aus mathematikdidaktischer Sicht fruchtbarer Blick in die Erklärungsdebatte der Wissenschaftsphilosophie soll hier in einer exemplarischen Sichtung einer speziellen wissenschaftsphilosophischen Erklärungskonzeption, dem Anriss einer kurzen Diskussion der prinzipiellen Übertragbarkeit dieser Konzeption auf mathematikdidaktische Fragestellungen und einer ebenfalls exemplarischen konkreten Anwendung bestehen. Mit dem so nur angedeuteten umfangreicheren Forschungsprogramm sind folgende Zielsetzungen verbunden: Zu den theoretischen Zielen gehört ein *begrifflich-*

[1] Darunter können auch Begriffserklärungen fallen.

systematischer Vergleich verschiedener Konzeptionen von Erklärung, der ein theoretisch gut motiviertes begriffliches Analyse- und Rekonstruktionsinstrumentarium für Erklärungskontexte im Mathematikunterricht, aber auch eine theoretische Diagnose spezifischer potentieller Schwierigkeiten von Mathematiklernenden (z.B. auch am Übergang von Schule zu Universität) liefert. Anwendungsorientierte Ziele bestehen dann in der tatsächlichen Beschreibung und Rekonstruktion von konkret gegebenen Erklärung(skontext)en im Mathematikunterricht und in der Nutzung des gewonnenen Rekonstruktionsschemas für empirische Untersuchung, z.B. von subjektiven Erklärungsbegriffen bei Mathematiklernenden und auch -lehrenden.

3. Exemplarischer Blick in die wissenschaftsphilosophische Debatte: Erklären anhand von „nomischen Mustern"

Eine in der aktuellen wissenschaftstheoretischen Erklärungsdebatte überzeugend vertretene Konzeption versteht Erklärungen als Nachweis der Instantiierung eines nomischen, d.h. gesetzesartigen Musters durch das Explanandum unter gegebenen Randbedingungen (vgl. Bartelborth 2007, S. 83 ff.). Spezielle nomische Muster sind kausale nomische Muster:

Ein *potentiell erklärendes kausales nomisches Muster* (**NM**) ist eine Generalisierung, die einen gesetzesartigen kausalen Zusammenhang zwischen bestimmten Randbedingungen (**R**) und einem Explanandum (**E**) ausdrückt. Diese Generalisierung muss für einen bestimmten Bereich von Objekten, nicht nur für ein einzelnes Objekt, gültig sein; Bartelborth nennt dies auch „Bereichsinvarianz". Schließlich muss sie eine intrinsische, d.h. unabhängige Disposition[2] von Objekten oder auch Systemen beschreiben.

4. Prinzipielle Anwendbarkeit auf Erklären im Mathematikunterricht

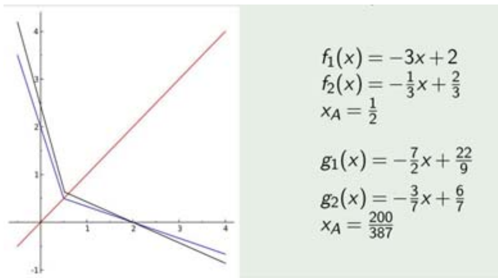
In Bezug auf die prinzipielle Anwendbarkeit der Konzeption von Erklärungen anhand (kausaler) nomischer Muster auf mathematische Erklärungen lautet die mathematikdidaktisch relevante Frage: Mit welcher Art von mathematischen Objekten, Strukturen und Theorien operieren *Mathematiklernende,* und macht es in Bezug darauf Sinn, von Dispositionen oder Kausalität zu sprechen? Es gibt mehrere gute Gründe für die Vermutung, dass das mathematische Wissen von Mathematiklernenden in der Regel von *empiri-*

[2] Eine Disposition besteht in dem mit einer bestimmten Eigenschaft eines Objekts oder Systems notwendig verbundenen deterministischen Vermögen, unter Einwirkung eines bestimmten Stimulus unter geeigneten Umständen eine weitere bestimmte Eigenschaft zu manifestieren. So löst sich etwa ein Stück Würfelzucker auf, wenn man es in eine Tasse Kaffee wirft; die Disposition ist hier die der „Wasserlöslichkeit".

schen Objekten, Strukturen und Theorien handelt. Dazu gehören etwa die Argumentation in (Struve 1990) oder Studien wie (Hanna/Jahnke 2001) und (Heinze/Kwak 2002). Für empirische Objekte, Strukturen und Theorien ist uns die Antwort auf die Frage, was ein Ereignis, ein nomisches Muster, Dispositionen oder Kausalität sein sollen, aber vertraut.

5. Beispielanalyse einer Schülererklärung

In (Sierpinska 1994, S. 88 ff.) wird eine Unterrichtssequenz mit fünf 16-jährigen Schülerinnen und Schülern (SuS) beschrieben, in der Fixpunkte von Funktionen unter anderem mit Hilfe von computeranimierter graphischer Iteration an Graphen von Beispielfunktionen, zuerst linearen, dann abschnittsweise linearen ähnlich den folgenden eingeführt werden:



Sierpinska diskutiert diese Unterrichtssequenz als „drastic example of [mistakes, wrong choices, wrong generalizations]"(S. 89) auf Seiten der SuS , verursacht durch das Arbeiten mit Beispielen. Übertragen in die oben eingeführte wissenschaftsphilosophische Terminologie liefert ihre Diskussion das Folgende (vgl. S. 90 f.): Die SuS haben ein empirisches Objekt-/Begriffsverständnis von Funktionen als Graphen und verstehen „Fixpunkt" (FP) nicht als einfache, sondern als zusammengesetzte Eigenschaft „abstoßender/anziehender FP" im Sinne einer Disposition von Kurven, die durch graphische Iteration instantiiert wird. Sie haben außerdem beobachtet, dass graphische Iteration bei linearen Funktionen, deren Graph die Gerade $x = y$ genau einmal schneidet, einen abstoßenden FP erzeugt, ein Übergang zu bestimmten abschnittsweise linearen Funktionen jedoch anziehende FPe liefert. Einige SuS bilden anhand dieser Informationen die (falsche) Hypothese, dass *nur* stückweise lineare Funktionen *wie die im Beispiel gewählten* überhaupt anziehende FPe haben, und zwar an der *Ansatzstelle* x_A, an der die beiden linearen Teilstücke zusammengefügt sind. Unter dem Gesichtspunkt der nomisch-kausalen Erklärungsfindung für das Vorliegen eines FPes lässt sich eine solche Hypothesenbildung aber auch als Schluss auf die (aus Schülersicht) beste nomisch-kausale Erklärung rekonstruieren, indem man das vermutete „nur wenn" durch einen kausal-ursächlichen Zusammenhang in Form eines nomischen Musters mit einer gewissen Fehlertoleranz und relativ kleiner Bereichsinvarianz ausdrückt:

Schülererklärung für anziehenden Fixpunkt (AFP)

E: Die gegebene Funktion hat einen AFP in (der Nähe von) x_A.

NM: Graphische Iteration bei stückweise linearen Funktionsgraphen *wie denen im Beispiel*, d.h. mit *Ansatzpunkt (x_A/y_A) nahe $x = y$ und mit etwa reziproker Steigung der beiden linearen Halbgeraden, die den Graph der Funktion beschreiben*, erzeugt einen AFP in (der Nähe von) x_A.

R: Der gegebene Funktionsgraph ist im Sinne von NM stückweise linear.

Hier kann nun konstruktiver weiter überlegt werden, wie das so erlangte Verständnis der SuS sukzessive, zunächst etwa durch die Suche nach Mustern mit größerer Bereichsinvarianz, ausgeweitet werden kann.

6. Fazit

„Didaktische" mathematische Erklärungen sollten auf das Vorwissen von Lernenden Bezug nehmen, allerdings nicht in erster Linie im Sinne einer *Reduktion* von neu zu vermittelndem auf bereits *bekanntes Wissen*. Bezug nehmen sollten sie dagegen auf *Art und Struktur* des Vorwissens in folgendem Sinne: Je nachdem, ob Lernende etwa mit empirischen oder abstrakten mathematischen Objekten umgehen, wie gut ihr mathematisches Begriffsverständnis ist, welches Verständnis der Natur einer Erklärungsbeziehung selbst vorliegt, welche Formen von Erklärung der Lernende sucht, kann eine geeignete Form der mathematischen Erklärung eingefordert oder angeboten werden. Eine Kombination von Erklärungen durch nomische Muster und dem Schluss auf die beste Erklärung liefert demnach einen für den Mathematikunterricht möglicherweise sehr fruchtbaren Ansatz: Mathematische Erklärungen, welche Lernende selbst aufstellen bzw. gut akzeptieren und verstehen, können als Schlüsse auf die beste nomisch(-kausal)e Erklärung mit geeigneter, u.a. dem aktuellen Begriffsverständnis der Lernenden angepasster Bereichsinvarianz beschrieben werden. Solche Analysen liefern Ausgangspunkte für eine konstruktive Ausweitung des vorhandenen Begriffsverständnisses und Erklärungskonzepts von Mathematiklernenden, auch mit Blick auf ein Beweisverständnis im klassischen deduktiven Sinne.

Literatur

Bartelborth, T. (2007): Erklären. Berlin: de Gruyter.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (2002): Another Approach to Proof: Arguments from Physics. In: ZDM 34, 1, 1 - 8.

Heinze, A. & Kwak, J. Y. (2002): Informal prerequisites for informal proofs. In: ZDM 34, 1, 9 - 16.

Sierpinska, A. (1994): Understanding in Mathematics. London: Falmer Press.

Struve, H. (1990): Grundlagen einer Geometriedidaktik. Mannheim: BI Verlag.

Melanie MÜNZ, Frankfurt

Mathematische Kreativität im Vorschulalter

Der Beitrag befasst sich mit der Entwicklung mathematischer Kreativität im frühkindlichen Bereich. Ausgangspunkt ist das Projekt **MaKreKi**, in welchem Mathematikdidaktiker der Goethe Universität Frankfurt und Psychoanalytiker des Sigmund- Freud- Instituts am Center for Research on **I**ndividual **De**velopment and **A**daptive Education of Children at Risk (**IDeA**) zusammenarbeiten. Das Forschungsinteresse richtet sich auf den Zusammenhang von der Entwicklung mathematischer Kreativität bei Kindern und ihrem psychoanalytischen Bindungstyp. An empirischen Beispiel soll hier gezeigt werden, wie sich Urbans personale Merkmale der *Offenheit* und *Ambiguitätstoleranz* bei mathematisch kreativen Kindern in einer mathematischen Spiel- und Erkundungssituation rekonstruieren lassen. Sodann werden diese personalen Merkmale mit dem Bindungstyp des Kindes in Beziehung gesetzt.

In der mathematikdidaktischen Forschung existiert keine eindeutige und allgemein akzeptierte Definition von mathematischer Kreativität. Zudem konfundiert der Begriff der Kreativität mit denen der Intelligenz, der Hochbegabung und des mathematischen Problemlösens (vgl. Hümmer et al., 2011). Die frühe Kindheit wird gemeinhin bei den Untersuchungen zur mathematischen Kreativität kaum beachtet. Häufig werden bei Definitionsversuchen und der Entwicklung von Tests zur Messung mathematischer Kreativität Ansätze aus erziehungswissenschaftlichen und psychologischen Perspektiven aufgegriffen und in den mathematischen Kontext übertragen (vgl. Leikin, 2009), wobei diese Kriterien sehr stark die kognitiven Aspekte der Kreativität und das kreative Produkt betonen. In diesem Zusammenhang zeigen neuere Ansätze Bemühungen um eine komplexe und umfassendere Sicht auf Kreativität, die den gesamten Interaktionsprozess im Zusammenhang der Entstehung eines kreativen Produkts berücksichtigt (vgl. Urban, 2004, Hümmer et al. 2011) und der neben kognitiven z.B. auch personalen Merkmalen Bedeutung beimisst. Zur Integration sowohl kognitiver als auch personaler Aspekte hat Urban ein Komponentenmodell der Kreativität entwickelt, welches jeweils zwischen drei Hauptkomponenten unterscheidet. Für den personalen Bereich sind *Fokussierung*, *Motivation* und *Offenheit/ Ambiguitätstoleranz* die Hauptkomponenten kreativen Handelns (vgl. Urban, 2004). Im **MaKreKi** Projekt untersuchen wir genau diese Verbindung zwischen mathematischer Kreativität und personalen Aspekten wie z.B. den Einfluss des Bindungsverhaltens zur Bezugsperson.

Anmerkungen zur Bindungstheorie

Die Bindungstheorie geht auf Bowlby (1951) zurück und postuliert die zentrale Rolle des Bindungsverhaltens für die individuelle Entwicklung. In ihr wird begründet, dass der Säugling danach strebe, Bindungsbeziehungen herzustellen und diese anschließend als „Heimatbasis für seine Exploration der Welt“ zu nutzen. Es besteht ein Antagonismus zwischen Bindungs- und Explorationsverhalten. Bowlbys Modell wurde inzwischen weiterentwickelt und Messinstrumente zur Bestimmung des Bindungstyps entworfen (Ainsworth, 1978). Man unterscheidet zwischen folgenden vier Bindungstypen: *unsicher- vermeidend, sicher, ambivalent, unsicher- desorganisiert.*

Empirisches Beispiel

In der folgenden Episode agieren die beiden monolingualen Kinder René (5 Jahre) und Marie (5 Jahre). René hat einen *unsicher- vermeidenden* Bindungstyp, Marie ist *unsicher- ambivalent* gebunden. Beide Kinder wurden durch ein Screening als mathematisch kreativ identifiziert.

Die Begleitperson des **MaKreKi** – Teams bietet den Kindern zu Beginn 36 Marienkäferkarten (die Marienkäfer sind gelb, grün oder rot, und haben entweder Dreiecke, Kreise oder Quadrate in unterschiedlicher Anzahl und Größe auf dem Rücken) an und bittet sie, diese zu ordnen. Marie legt danach fest, dass immer zwei Marienkäfer zusammengehören, welche die gleiche Anzahl an Objekten auf dem Rücken haben. In dem Paar wird von ihr außerdem zwischen Mann und Frau unterschieden, wobei die Frau immer ein roter Marienkäfer ist (falls vorhanden). René greift das Konzept der Paarbildung auf. Im Verlauf der Paarbildung erweitert er diese um das Kriterium Farbe. Gegen Ende der Phase bleiben vier Marienkäfer ohne Partner (Abbildung 1).

Abbildung 1: Drei gelbe und ein grüner Marienkäfer

Transkriptauszug

Im folgenden Transkript sind die Namen der Kinder durch die jeweiligen Anfangsbuchstaben abgekürzt. Die begleitende Person wird durch ein B gekennzeichnet. Die nonverbalen Äußerungen sind in kursiver Schrift.

R	*einen gelben Marienkäfer mit vier Punkten in der linken Hand haltend*
	aber hier sind vier und sonst findet man keine mehr *schaut auf seine*
	gefundenen Marienkäferpaare
B	*auf die vier restlichen Marienkäfer schauend* ja.. *mit leiser Stimme*
	sprechend mhm wie machen wir denn das denn das?
	ist eins zwei drei *zeigt dabei mit dem Finger auf die zu zählenden*
	Dreiecke und schaut zu B hier ehm hier passen gar keine mehr

	susammen+
B	*schaut zu Marie* ne
M	da da fehlen glaub ich schon en paar Marienkäfer
B	schaut auf die übrig gebliebenen Marienkäfer hält den linken Zeige-
	finge an den Mund mhhh
M	jetzt können wir nicht mehr weiter
B	schaut zu Marie ne
R	schaut zu B schüttelt den kopf
M	da sind schon en paar verloren gekommen hach oder zeigt mit der rech-
	ten Hand auf ihr grünes Marienkäferpaar oder haben wir irgendwas
	falsch hier?
B	mh vielleicht passen die ja noch irgendwo dazu zu einem Pärchen was
	ihr schon gefunden habt schaut zu Marie ich weiß es aber nicht
M	gut beide Hände an die Wangen haltend
R	ah vier nimmt den gelben Marienkäfer mit den vier Punkten in die lin-
	ke Hand vier vier zeigt auf die Markierungen seines grünen
	Marienkäferpaares

Rekonstruktion der Merkmale *Offenheit* und *Ambiguitätstoleranz*

René ist *offen* für Lisas Konzept der Menge und ihren Vorschlag der Mengenbildung, welchen er sogar weiterentwickelt. Er ist auch *offen* gegenüber dem Material, welches mehrere Mengenbildungen zulässt und strebt eine Kombination zweier Kriterien (Anzahl und Farbe) an. Das favorisierte Konzept der Mengenbildung in Form von Paarbildungen gemäß der gleichen Anzahl an Objekten scheint nicht zu gewährleisten, dass alle Marienkäfer einen Partner erhalten. René thematisiert dies als erster: „Aber hier sind vier und sonst findet man keine mehr“. Beide Kinder zeigen sich *offen* für den von B indirekt geäußerten Vorschlag, das Ordnungskriterium beizubehalten, aber die Paarbildung für einige Gruppen aufzuheben.

René ist in der Lage, sich von seinem anfänglichen Konzept teilweise zu lösen, welches als Toleranz gegenüber den bestehenden *Ambiguitäten* gedeutet werden kann. Dieses Ablösen stellt eine Herausforderung dar und kann zu Unsicherheiten führen, weil das anfänglich strenge Konzept der Menge und der Prozess der Paarbildung nun nicht mehr für alle Marienkäfergruppen gelten (nun können auch Mengen mit mehr als zwei Elementen gebildet werden). Auch Lisa lässt sich im Anschluss auf die erweiterte mathematische Prozedur ein und bezeichnet den 3. Marienkäfer als Kind. Beiden Kindern verhelfen ihre *Offenheit* und *Ambiguitätstoleranz* zu komplexeren Lösungen: So legt René später Familien mit 2 Kindern und Lisa legt Kindergartengruppen. In beiden Fällen repräsentieren die Anzahlen der Objekte auf dem Rücken der Marienkäfer das Alter des jeweiligen Käfers, worin ein Ansatz funktionalen Denkens deutlich wird.

Bindungstyp und Kreativität

Mütter *unsicher- vermeidend* gebundener Kinder zeichnen sich durch einen Mangel an Affektäußerungen, Ablehnung, Aversion gegen Körperkontakt und häufige Zeichen von Ärger aus (Ainsworth, 1978). Folglich lernen *unsicher- vermeidend* gebundene Kinder wie René frühzeitig, dass körperlicher Kontakt von der Mutter zurückgewiesen wird und unterdrücken diese Annäherungsneigung, um zumindest in einer tolerierbaren Nähe zur Mutter zu bleiben (Ainsworth, 1978). Sie müssen also früh die Ambivalenz zwischen dem Wunsch nach Nähe zur Mutter und der Ablehnung körperlicher Nähe durch die Mutter akzeptieren. In Bezug auf die mathemathische Kreativität lässt sich fragen, ob die Kompensation des Wunsches nach Nähe Antrieb für die Entwicklung ihrer mathematischen Kreativität ist. Befähigt die emotional ambige Situation diese Kinder zu einer frühen und ausgeprägten Toleranz für mathematische *Ambiguitäten*?

Zusammenfassung und Ausblick

Urbans personale Merkmale *Offenheit* und *Ambiguitätstoleranz* lassen sich in der Interaktion mathematisch kreativer Kinder in der hier analysierten mathematischen Spiel- und Erkundungssituation rekonstruieren. Es gilt empirisch zu prüfen, ob sich diese Merkmale in weiteren Interaktionen mathematisch kreativer Kinder rekonstruieren lassen und ob sie sich für eine empirisch und theoretisch begründete Definition mathematischer Kreativität eignen. In dem Fall kann über die Verbindung dieser Merkmale mit den verschiedenen Bindungstypen der Zusammenhang zwischen der Entwicklung einer mathematischen Kreativität und dem Bindungstyp weiter untersucht werden.

Literatur

Ainsworth, M., Blehar, M., Waters, E. & Wall, S. (1978). Patterns of attachment. A psychological study of the strange situation. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Bowlby, J. (1951). Mütterliche Zuwendung und geistige Gesundheit. 1973. München.

Hümmer, A., Münz, M., Müller Kirchof, M., Krummheuer, G., Leuzinger-Bohleber, M.,Vogel, R. (2011): Erste Analysen zum Zusammenhang von mathematischer Kreativität und kindlicher Bindung. Ein interdisziplinärer Ansatz zur Untersuchung der Entwicklung mathematischer Kreativität bei sogenannten Risikokindern. *Die Projekte erStMaL und MaKreKi Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education" (Bd. 1)*. Münster.

Leikin, R. (2009): Exploring Mathematical Creativity Using Multiple Solution Tasks. *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*. Rotterdam.

Urban, K.: Kreativität Herausforderung für Schule, Wissenschaft und Gesellschaft. Münster.

Dominik NACCARELLA, Timo LEUDERS, Markus WIRTZ, Freiburg & Regina BRUDER, Darmstadt

Empiriegestützte Itemanalyse für die Kompetenzmodellierung funktionalen Denkens mit Graph, Tabelle und Situation

1. Ziele des Projektes

Im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogrammes „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ werden im Projekt HEUREKO[1] Möglichkeiten der mehrdimensionalen Erfassung von Kompetenzen des Problemlösens mit funktionalen Repräsentationen untersucht. Im Mittelpunkt der zweiten Phase stand die Weiterentwicklung des in der ersten Phase entwickelten Instrumentes zur Erfassung von „funktionalem Denken. Dazu wurde eine Itemanalyse durchgeführt, bei der qualitative und quantitative Verfahren miteinander verknüpft wurden, mit dem Ziel der Optimierung und Validierung des Itempools. Hiermit sind die langfristigen Ziele verknüpft, ein für die Schulpraxis nützliches Instrumentarium bereitzustellen, das sowohl zur Diagnostik, als auch zur Bestimmung von Förderbedarf genutzt werden kann.

2. Theoretischer Hintergrund

Funktionales Denken ist durch eine Vielzahl von Aspekten geprägt (Vollrath, 1989). Insbesondere lassen sich Anforderungen im Rahmen von Aufgaben unter dem Aspekt von Grundvorstellungen und als Modellierungstätigkeiten, d.h. als Übersetzung zwischen Situationen und mathematischen Modellen beschreiben. Daneben lassen sich die postulierten kognitiven Prozesse nach der Art der verwendeten Repräsentationen und des Wechsels zwischen ihnen unterscheiden (Swan, 1985; Blum, 2002; Leuders, 2005). Im Projekt wurden die Repräsentationen und der Wechsel zwischen ihnen zur Grundlage von postulierten Dimensionen eines Kompetenzmodells gewählt. Die Grundvorstellungstheorie und die Theorie zum Modellieren bildeten daneben die leitenden Ideen für eine möglichst breite und variantenreiche Konstruktion der einzelnen Items innerhalb der jeweiligen Kompetenzdimensionen. Dies geschah in der Annahme, dass sich Präferenzen und Kompetenzprofile hinsichtlich der externalen Repräsentation vermutlich

[1] Diese Veröffentlichung wurde ermöglicht durch eine Sachbeihilfe der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Kennzeichen: LE 2335/1-1) im Schwerpunktprogramm „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ (SPP 1293).

leichter psychometrisch erfassen lassen, als internale und komplexe Verarbeitungsprozesse.

3. Ausgangspunkt: Ergebnisse der ersten Projektphase

In der ersten Projektphase (2007-2009) wurde ein Testinstrument zum „funktionalen Denken“ entwickelt und empirisch überprüft. Das Kompetenzstrukturmodell, welches die vier Bereiche:

- Mathematisieren und interpretieren – zwischen situativer und graphischer Repräsentation (**SG**)
- Mathematisieren und interpretieren – zwischen situativer und numerischer Repräsentation (**SN**)
- Verarbeiten innerhalb der graphischen Darstellung (**G**)
- Verarbeiten innerhalb der numerischen Darstellung (**N**),

als eigenständige Dimensionen annimmt, wies die beste Datenpassung auf. Leider ist die Qualität der entwickelten Skalen, die EAV/PV-Reliabilität liegt zwischen .52 und .72, für den diagnostischen Einsatz noch nicht ausreichend (siehe Bayerhuber et al, 2010). Trotz der validierten dimensionalen Struktur muss also eine weitere Optimierung und Schärfung der Itemgruppen erfolgen.

4. Ziele der empiriegestützen Itemanalyse

Die grundsätzlichen Ziele der Aufgabenanalyse und Überarbeitung lagen somit in der Erhöhung der Kohärenz der einzelnen Konstrukte. Messtechnisch sollte dies über eine Erhöhung der Reliabilität, also eine Stärkung der internen Konsistenz der einzelnen Skalen erfolgen. Dazu wurden verschiedene Heuristiken zur Aufgabenüberarbeitung und -analyse eingesetzt und miteinander kombiniert. Hierbei wurden in einer empiriegestützten Itemenanalyse quantitative und qualitative Verfahren miteinander verknüpft. Der Zweck der einzelnen Analysen ist nicht die Prüfung spezifischer Hypothesen, sondern die Bereitstellung von Informationen als empirische Grundlage für itembasierte Entscheidungen. Es wurden einerseits die Leistungsdaten der ersten Projektphase mithilfe eines mehrdimensionalen zweiparametrigen logistischen Modells reanalysiert. Andererseits wurden ausgewählte Items mittels einer qualitativen Videostudie einer kognitiven Analyse unterzogen. Auf Grundlage dieser beiden Untersuchungen und mit besonderem Augenmerk auf die intendierte Erhöhung der Reliabilität zwischen den Teildimensionen wurden zusätzliche Items entwickelt und pilotiert. Im Folgenden wird ausschließlich über die Ergebnisse der quantitativen Reanalyse der Leistungsdaten berichtet.

5. Reanalyse der Daten auf Basis des Birnbaum-Modells

Die Analyse der Daten der ersten Phase erfolgte über ein (mehrdimensionales) Rasch-Modell, in dem sich die einzelnen Items nur in ihrer Schwierigkeit voneinander unterscheiden. Wird die Lösungswahrscheinlichkeit für ein Item in Abhängigkeit von der Personenfähigkeit aufgetragen so sind die einzelnen Itemfunktionen zueinander identisch und nur bzgl. der Abszisse verschoben (vgl. Abb. 1). Es wird somit davon ausgegangen, dass alle Items einer Skala gleich gut zwischen Personen mit hoher und mit niedriger Fähigkeit unterscheiden können - anders ausgedrückt, besitzen alle Items im Rasch-Modell dieselbe Trennschärfe. In zwei-parametrigen IRT-Modellen (Birnbaum-Modell, 2-pl-Modellen) wird diese Einschränkung nicht gemacht. Hier wird für jedes Item ein zusätzlicher Parameter geschätzt, der den (stärksten) Anstieg der Itemfunktion beschreibt (vgl. Abb. 2) (Rost, 2004; Reckase, 2009).

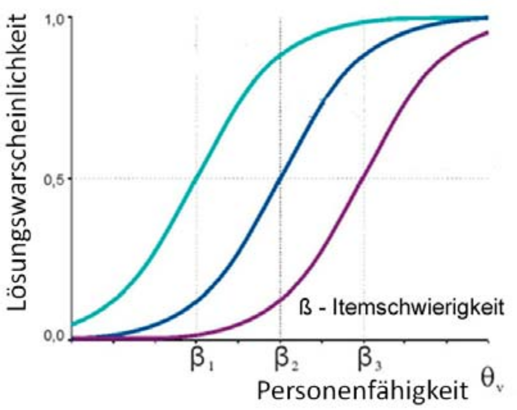


Abb. 1: Rasch-Model parallele Itemfunktionen von drei Items mit versch. Schwierigkeit

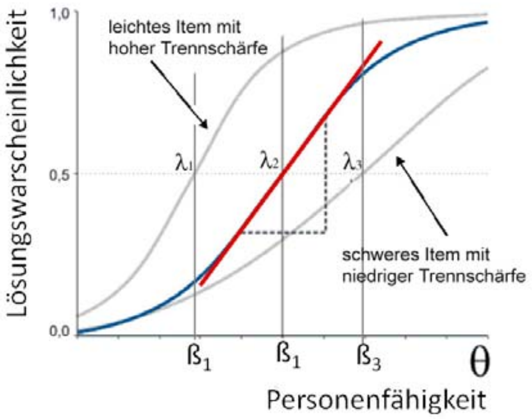


Abb. 2: Birnbaum-Model - drei Itemfunktionen mit versch. Schwierigkeit und Trennschärfen

Die über das Birnbaum-Modell aus den Daten ermittelten Trennschärfenkennwerte der Items wurden genutzt, um eine theoretische Itemanalyse durchzuführen. Dabei wurden die Items auf der Basis ihrer Trennschärfen mit Experten analysiert und bzgl. ihrer Skalenpassung diskutiert und insbesondere hinsichtlich der (vermuteten) kognitiven Prozesse die beim Lösen der Items genutzt werden können interpretativ bewertet. So konnten Itemgruppen identifiziert und beschrieben werden, die gemeinsame Merkmale aufwiesen, aber nicht mit dem eigentlich gewünschten Konstrukt harmonieren. Drei besonders problematische Gruppen waren:

- Items mit zu sehr ausgeprägten situativem Kontext innerhalb innermathematischer Dimensionen (N und G)
- „Wissensitems“, die Begriffswissen über Funktionstypen nicht genügend von Übersetzungsfähigkeiten trennen.

- „Kalkül orientierte Items“, bei denen repräsentationsabhängige und funktionale Aspekte durch den Einsatz eines dominanten Kalküls (z. B. Dreisatz) verdrängt wurden. Die Skala schien hier durch modellfremde Kompetenzaspekte dominiert.

Bei der Optimierung des Itempools wurden diese Items hinsichtlich dieser Aspekte überarbeitet bzw. ersetzt.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Über die Verbindung der quantitativen Analyse von Itemkonsistenzen mit der qualitativen Analyse der (vermuteten) kognitiven Qualität einzelner Items bzw. Itemgruppen, konnte der Itempool systematisch auf der Basis von empirischen Daten grundlegend überarbeitet werden. Die bisherigen, vorläufigen Analysen der zweiten Erhebung (Herbst 2010) deuten bereits an, dass es gelungen ist das dimensionale Auflösungsvermögen und die Qualität der einzelnen Skalen zu erhöhen.

Literatur

Bayrhuber, M., Leuders, T., Bruder, R. & Wirtz, M. (2010). Erfassung und Modellierung mathematischer Kompetenz: Aufdeckung kognitiver Strukturen anhand des Wechsels von Darstellungs- und Repräsentationsform. In: Klieme, E. Leutner, D. & Kenk, M.: Kompetenzmodellierung. Zwischenbilanz des DFG-SPP und Perspektiven des Forschungsansatzes. 56. Beiheft der ZfP, Weinheim u. a.: Beltz.

Blum, W. (2002). On the role of „Grundvorstellungen“ for reality-related proofs – examples and reflections. In: M. A. Mariotti (Ed.), CERME-3 – Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Università di Pisa.

Leuders, Timo / Prediger, Susanne (2005). Funktioniert`s? – Denken in Funktionen. In: PM 2, Jahrgang 47, 1-7.

Reckase, M.D. (2009). Multidimensional Item Response Theory. Dordrecht u. a.: Springer.

Rost, J. (1996). Lehrbuch Testtheorie - Testkonstruktion. Bern: Verlag Hans Huber.

Swan, M. (1985). The Language of Functions and Graphs. Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education.

Vollrath, H.J. (1989). Funktionales Denken. Journal für Mathematikdidaktik, (10), 3-37.

Fritz NESTLE, Ulm (Ludwigsburg)

Kann man die „Digitale Schule Bayern“ verbessern?

Eine Einordnung des Themas in übergreifende oder spezielle Kontexte:

Kann man die Digitale Schule Bayern verbessern?
Kann man Schule verbessern?
Kann man (Mathematik-)Lernen verbessern?

Google zufolge sind das Teilthemen, die großes Interesse finden.

Digitale Schule Bayern [1]: SuS, die von einem Lernhelfer der Stadt Ulm zur Verbesserung der Chancen der SuS bei der Hauptschulabschlussprüfung betreut werden, waren fasziniert davon, dass das Internet ihnen über das ZUM-Wiki [1] Zugang zu den Aufgaben der Vergleichsarbeiten Klasse 8 verschafft und Lösungen anbietet. Ein Nebeneffekt: Die SuS (Hauptschule!) bitten den Lernhelfer, Follower in ihren Facebookprofilen zu werden.

Die SuS blickten im Internet durch ein Spältchen hinter die Tür, hinter der es bessere Lernmöglichkeiten für Schulstoff gibt als eine Lernorganisation, bei der lehrerzentriert Klassen anstelle von Jugendlichen unterrichtet werden und die natürliche Lernfähigkeit der SuS [2] nicht genützt wird. Dass die SuS in den Lehrkräften Lernhelfer finden, die beim autonomen Lernen unterstützen, ist nicht selbstverständlich in einem Land, in dem organisiertes Lernen außerhalb der Schule, z.B. als Homeschooling (Google fragen), gerichtlich verfolgt wird. Ein Land, in dem man die Klasse 9 der Hauptschule erreichen kann, auch wenn

30:10 = 40 oder **4*5 = 22**

ist. (Es dauerte nur rund vier Sitzungen, bis die SuS auf analoge Fragen grinsend erklärten, dass sie solche Fragen nicht mehr nötig hätten.)

Die ZUM-Wikis der Digitalen Schule Bayern durchbrechen also das Lehrkraft-Monopol, selbst Maßstäbe für den erwarteten Erfolg des Unterrichts zu setzen: Ein großer Schritt hin zu einer zeitgemäßeren Lernorganisation.

Die ZUM-Wikis der Digitalen Schule Bayerns stützen sich auf die vom IQB formulierten „Vergleichsarbeiten“ und nutzen dabei, dass das IQB die Vergleichsarbeiten der creativecommons-Lizenz unterstellt hat.

Die Digitale Schule Bayern bezeichnet ihre Bearbeitung von Vera 8 als „Mathematik interaktiv“. Das ist leider für ihr Angebot ein Euphemismus:

Warum Auswahlantwort statt Freiantwort?

Warum keine Aufgabenvariation durch Parameter?

Warum keine kumulative Rückmeldung (Gesamtpunktzahl)?

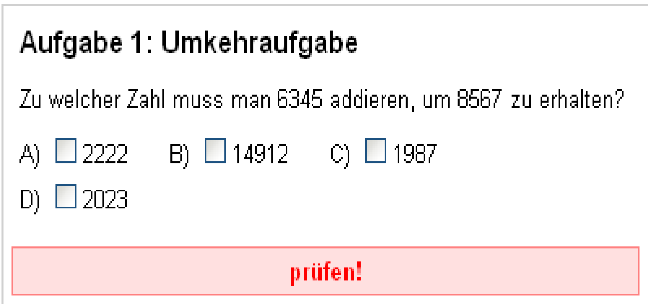
Warum keine Berücksichtigung der Arbeitszeit?

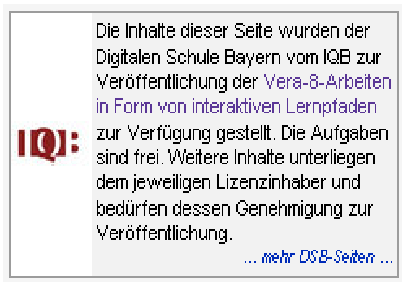
1.Warum Auswahlantwort statt Freiantwort?

Vor fünfzig Jahren war an eine online-Rückmeldung noch kaum zu denken. Antworten von Schülern auf Auswahlantwortaufgaben wurden deshalb damals noch in Markierungsbögen eingetragen. Diese wurden dann verzögert von einer Lesemaschine – meistens nachts – eingelesen und ausgewertet (Batch-Betrieb). Heute gibt es nur noch wenige Situationen, in denen Auswahlantworten der gebundenen Freiantwort vorzuziehen sind.

2. Warum keine Aufgabenvariation durch Parameter?

Ein Beispiel aus [1]:

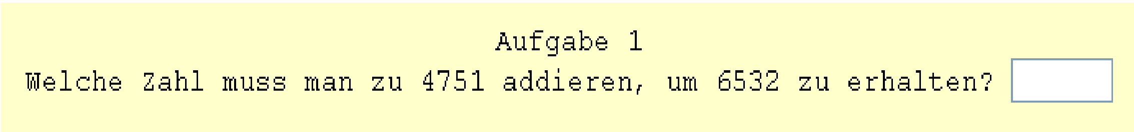




0% richtig.“, die richtige Antwort wird grün, die nicht erwartete rot markiert, beziehungsweise „Die Antworten sind zu 100% richtig.“ und nur die richtige Antwort wird grün markiert.

(Lizenz unter **http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/legalcode**)

Aus dieser „Umkehraufgabe“ wird mit geringem Aufwand, z.B. in PHP, eine Aufgabe, bei der mit jedem Aufruf die Zahlen mit einer Zufallsfunktion variiert werden, und bei der die erwünschte Antwort nicht unter den Distraktoren geraten werden kann, sondern berechnet und selbst eingetragen werden muss:



Die Ratemöglichkeiten sind bei dieser Formulierung der Aufgabe stark eingeschränkt. Außerdem hilft das Gedächtnis bei einer wiederholten Bearbeitung wenig, weil ja die Zahlen bei jedem Aufruf variiert werden. Insofern entspricht die Alternative für die Formulierung dem „Dortmunder Manifest“ [3].

3. Warum keine kumulative Rückmeldung (Gesamtpunktzahl)?

Das ZUM-Wiki [1] in seiner Fassung von Ende Februar 2011 gibt an seine Bearbeiter keine kumulative Rückmeldung zurück. Auf die Frage, ob die Bearbeitungsergebnisse für Forschungszwecke gespeichert werden, wurde keine Antwort gefunden.

Für SuS, die sich durch die vierzig Aufgaben einer Vergleichsarbeit durchgebissen haben, würde eine kumulative und quantitative Rückmeldung ähnlich zur Motivation beitragen, wie sie bei Computerspielen einen wesentlichen Reiz des Spiels ausmacht. Die Gamer kämpfen um einen höheren Level oder eine bessere Ausstattung; die Möglichkeit, dabei Fortschritte für sich selbst zu erzielen, wird in einschlägigen Foren als wesentlicher Grund für das Durchhaltevermögen angegeben [4]. Der fast verzögerungsfreien Rückmeldung über den erreichten Stand setzt der klassische Schulunterricht im Kampf um die Anstrengungsbereitschaft der SuS und deren Zeitbudget nichts Vergleichbares entgegen.

4. Warum keine Berücksichtigung der Arbeitszeit?

Im Sport geht es bei Sieg oder Niederlage oft um Bruchteile von Sekunden. Beim physikalischen Leistungsbegriff ist die Zeit ein unverzichtbarer Parameter.

Entsprechend ist die Arbeitszeit auch in der Bewertung von Lernleistungen und Lernergebnissen ein Kriterium, anhand dessen der erreichte Stand betrachtet werden muss, wenn es um einen intersubjektiven Vergleich gehen soll.

Bei der online-Bearbeitung von Aufgaben ist es eine primitive Zusatzanforderung, wenn man auch die Bearbeitungszeit misst und in einer einfachen Scoreformel, zum Beispiel in PHP durch

```
$score = 2*round(((2*$zr-$zf) + 1000/$zeit)*($zr/$zg))
```

berücksichtigt [5].

Wie gut die Antwortanalyse generell inzwischen sein kann, hat erst kürzlich – am 17.2.2011 – der IBM-Computer Watson in Jeopardy (Google fragen), einer amerikanischen Fassung der deutschen Fernsehshow „Wer wird Millionär“, bewiesen. Watson hat zwei amerikanische Mehrfachsieger der Show eindrucksvoll geschlagen.

Sind das alles Träume? Wenn man zum Vergleich die von der KMK gesetzten Rahmenbedingungen heranzieht, ist die Digitale Schule Bayern trotz der eben genannten Defizite außerordentlich progressiv:

Rahmenbedingungen der KMK; sie

- dekretiert Mindestlernzeiten (statt Höchstlernzeiten), das heißt, schnelle Lerner sind nicht erwünscht (Max Planck (Abitur mit 16)hätte sich anders orientieren müssen) [6],
- bietet keine objektiv überprüfbaren Bildungsziele, das heißt, der Noten-willkür ist Tür und Tor geöffnet [7],
- erkennt selbstorganisierte Lernleistungen in der Regel nicht an, das heißt, sie erstickt die Eigeninitiative,
- verschwendet Steuergelder, das heißt, verantwortet vermeidbare Parallel-arbeit von mehr als 500 000 Lehrkräften [8].

So zerstört man die Lernmotivation der Jugendlichen!

Können wir die Digitale Schule Bayern verbessern?

Yes, we can!

Ein Hindernis dabei sind die Rahmenbedingungen der KMK.

Literatur

[1] Z.B. http://wiki.zum.de/Vera_8_interaktiv/Mathematik/Test_A

[2] http://www.bildungsoptionen.de/handy.htm (Vorsicht: Satire)

[3] http://www.bildungsoptionen.de/manifest.htm

[4] http://www.bildungsstandards.de/09/allgemein/mathe-wow-vergleich.pdf

[5] http://www.bildungsstandards.de/10/allgemein/score6.pdf

[6] z.B. 314. Sitzung der KMK; außerdem hat das Bundesverfassungsgericht die Klage eines hessischen Schülers angenommen, der in der Zeit von G8 die Mittlere Reife schon nach 9 Unterrichtsjahren erwerben will.

[7] Die sogenannten „Bildungsstandards“ der KMK enthalten ein Wortgeklingel, das weit von überprüfbaren Bildungsergebnissen entfernt ist. Siehe dazu auch http://www.bildungsstandards.de/09/allgemein/lisboa.html

[8] Die KMK verlangt in den Schulen handwerkliche Einzelarbeit. Zum Vergleich: Früher wurde Tuch ausschließlich an Handwebstühlen gefertigt; heute kommt Tuch meistens aus der mechanischen Weberei. Früher (noch zu Lebzeiten des Autors) wurde da und dort Getreide noch von Hand mit der Sichel geschnitten und im Winter mit Dreschflegeln gedroschen; heute schafft der Mähdrescher das in einem Durchgang achttausendfach mal so schnell, in besserer Qualität und mit weniger Verlusten, Siehe auch http://www.bildungsoptionen.de/200mio.htm …

Michael NEUBRAND, Oldenburg

Mathematikdidaktische Analysen der zentralen Prüfungen 2008 für Klasse 10 in NRW: Sechs Grundfragen der Aufgaben-Konstruktion

Dieser Kurzbericht wirft einige „Blitzlichter“ auf ausgewählte mathematikdidaktische Grundfragen der Konstruktion und der Bearbeitung von Aufgaben. Obwohl an den zentralen Prüfungen des Jahres 2008 für die Klassen 10 der allgemeinbildenden Schulen in Nordrhein-Westfalen (ZP-10) illustriert, sollten diese Grundfragen allgemein für die Aufgabenentwicklung von Prüfungs- und Lernaufgaben gültig sein.

1. Rahmenbedingungen der ZP-10

Die ZP-10 in Nordrhein-Westfalen ist differenziert nach Schulformen und nach dem angestrebten Schulabschluss, d.h. „Hauptschulabschluss“ (HSA) oder „Mittlerer Schulabschluss“ (MSA). Für das Gymnasium gab es im Jahr 2008 noch einige eigens im zweiten Prüfungsteil gestellte Aufgaben; ab 2010 nehmen die Gymnasien jedoch nicht mehr an der ZP-10 teil.

Abschluss	*Prüfungsteil 1*	*Prüfungsteil 2*
HSA-10	Hauptschule 10 Typ A, Gesamtschule Grundkurs	Hauptschule 10 Typ A, Gesamtschule Grundkurs
MSA	Hauptschule 10 Typ B, Gesamtschule Erweiterungskurs , Realschule, Gymnasium	Hauptschule 10 Typ B, Gesamtschule Erweiterungskurs, Realschule
		Gymnasium

Es gibt zwei Prüfungsteile. Der erste Teil soll sog. „Basiskompetenzen“ erfassen, die – nach den Vorgaben des Ministeriums – „für einen angemessenen Umgang mit Zahlen und Größen im Alltag sowie für das vertiefte Anwenden und Betreiben von Mathematik eine besondere Rolle spielen“. Im zweiten Prüfungsteil werden sog. „komplexere Aufgaben“ gestellt, die jeweils aus mehreren verbundenen Teilaufgaben aufgebaut sind und in denen die Prozess- und Inhaltsbereiche des Kerncurriculums vorkommen sollen. Zwei Jahre vor der jeweiligen zentralen Prüfung gibt das Ministerium „Vorgaben“ heraus mit Hinweisen auf „unterrichtliche Schwerpunkte für die Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung“. Die Vorgaben sowie (nach der Prüfung) die Aufgaben und Bewertungsanleitungen finden sich hier: http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/zp10 .

Für mathematikdidaktische Analysen hat das Ministerium Aufgabenbearbeitungen zur Verfügung gestellt, 30 aus Gesamtschulen (Erweiterungskurse) und 77 aus Gymnasien; i.a. gibt es jeweils aus einer Klasse eine Arbeit aus dem oberen, eine aus dem mittleren und eine aus dem unteren Leistungsbereich. Mit 10 Gesamtschulen und 26 Gymnasien ist dies jedoch keine repräsentative Stichprobe über ganz NRW.

2. Ausgewählte Grundfragen, die sich bei der Aufgabenkonstruktion stellen und die Aufgabenbearbeitung beeinflussen

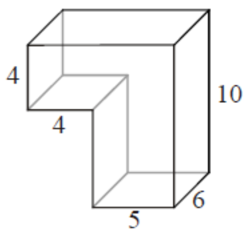
Aus den umfangreichen mathematikdidaktischen Analysen für das Ministerium (Neubrand & Neubrand, 2010) werden 6 Grundfragen für das Arbeiten an Aufgaben herausgegriffen. Die Beispielaufgaben aus der ZP-10 werden allerdings nur kurz beschrieben und nicht vollständig dokumentiert.

2.1. Sachwissen als zentrale Kategorie

Eine Hauptschule-Aufgabe der ZP-10 beschäftigt sich mit den Beitragssätzen der gesetzlichen Krankenversicherung. Der Text der Aufgabe erwähnt dabei diese Fachtermini: „Beitragssatz“ (und implizit, dass der Beitragssatz sich zeitlich ändern kann), „Bruttolohn“ (aber nicht Nettolohn oder Lohn generell), „Arbeitnehmer“ (aber nicht wer es ist, der „die andere Hälfte“ des Beitrags zahlt), „Zusatzversicherung“ (aber nur, dass sie bestimmte „Arbeitnehmer haben“, nicht wer dafür aufkommt). Die Aufgabe setzt also – denn die Informationen wären zu lang, um innerhalb der Aufgabe gegeben zu werden – Sachwissen über Grundzüge des deutschen Sozialversicherungssystems voraus. Ohne solches Sachwissen wären einige der gestellten Aufgaben reine sprachliche Decodierungen.

Grundfrage 1: Jede realitätsorientierte Aufgabe setzt Sachwissen voraus. Wie aber kann man sich dessen versichern? Wie kann der „Primat der Sache beim Sachrechnen“ (H. Winter) eingehalten werden?

2.2 Maßangaben könne Fehler evozieren



In einer MSA-Aufgabe wird nach dem Volumen des abgebildeten Werkstücks gefragt. Ziel der Aufgabe soll es offenbar sein, zu erfassen, ob die Schülerinnen und Schüler das Werkstück in berechenbare Teilkörper zerlegen können. Diesem Ziel haben sich die Maße unterzuordnen. In diesem Falle jedoch evozieren die Maße den Fehler, links oben einen Würfel (statt des 4*4*6-Quaders) zu „sehen“. Tatsächlich machen nahezu alle Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht korrekt lösen, genau diesen „Würfelfehler“.

Grundfrage 2: Mit der Wahl von Maßangaben kann man Fehler hervorrufen, sei es absichtlich („schau genau!“) oder unabsichtlich. Die Wahl der

Maße hat sich aber in jedem Falle dem Ziel der Aufgabe unterzuordnen. Fehler anderen Ursprungs sollten nicht sanktioniert werden.

2.3 Interferenzen mit dem Erwerbskontext

Eine Aufgabe der MSA-Prüfung hat das „Empirische Gesetz der großen Zahl“ zum Thema: Es soll eine gute Schätzung der relativen Häufigkeit, dass ein Quader auf die Seite „4“ fällt, abgegeben werden aufgrund der Daten eines Wurf-Experiments. Es gibt in der didaktischen Literatur zwei Zugänge: (a) Stabilisierung nach mehreren unabhängigen und dann immer längeren Versuchsreihen und (b) Stabilisierung innerhalb einer einzigen aber länger werdenden Versuchsreihe. Der erstgenannte Zugang ist der am häufigsten in der Schule vertretene, und innerhalb dieses Zugangs sind Mittelwertbildungen angemessen. Der zweite Zugang wird jedoch in dieser Aufgabe gewählt, und hier ist nur Ablesen des einen Wertes bei höchster Versuchszahl adäquat. In der Tat aber verwenden etwa ein Drittel der Schülerinnen und Schüler Mittelwertstrategien. Das deutet darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler in ihnen vertraute Begriffsbildungen zurückfallen. Die Korrekturvorgaben lassen Mittelwert-Bildungen zu.

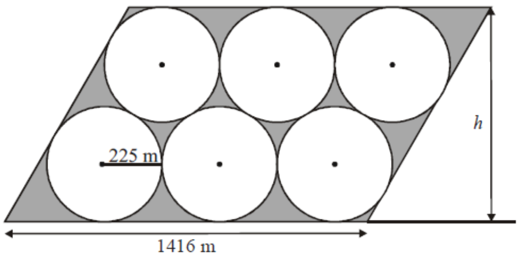
Grundfrage 3: Vom Standpunkt des situierten Lernens aus konstruieren Schülerinnen und Schüler den jeweiligen Gegenstand gemäß der ersten begriffsbildenden Situation (außer- und innermathematisch): „Wissen trägt den Index des Erwerbszusammenhangs an sich“ (Baumert). Bei der Aufgabenkonstruktion ist daher zu beachten, dass Zugänge die dem Curriculum und den vorherrschenden Lernmaterialien entsprechen, beachtet werden. Sonst werden für die Schülerinnen und Schüler nicht-adäquate Lösungsstrategien attraktiv, obwohl sie möglicherweise über Wissen verfügen.

2.4 (Nicht-)adaptives Verhalten von Schülerinnen und Schülern

In einer Aufgabe für den MSA wird nach der Spannweite einer Bogenbrücke gefragt, deren Bogen durch die Gleichung $y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x$ vorgeben ist. Die Spannweite ist die x-Koordinate der nicht-trivialen Nullstelle. Offenbar ist seitens der Aufgabensteller intendiert, dass die Schülerinnen und Schüler sich adaptiv in dem Sinn verhalten, dass sie *nicht* die schematische Lösung, etwa mit der p-q-Formel, verwenden. Aber nur ca. 5 % verfahren nach der hier adäquaten Produktzerlegung. Nicht-adaptive Verfahren treten vermehrt bei den leistungsstärkeren Schülern auf.

Grundfrage 4: Aufgaben, die auf adaptives Verhalten zielen, erreichen dies nicht von selbst. Auch bei leistungsstarken Schülerinnen und Schülern ist die bewusste Hinführung zu einem der mathematischen Situation angemessenen Anwenden allgemeiner Formeln im Mathematikunterricht immer wieder zu thematisieren.

2.5 Rahmung der Aufgabe: „real“ oder „geometrisch“?



Ein Aufgabe für das Gymnasium fragt zu nebenstehender Figur („ein Getreidefeld mit Bewässerungsanlagen“): „Weise nun nach, dass *h* tatsächlich ungefähr 840 m ist.“ Mehrere Signale in der Aufgabe deuten eine „realitätsorientierte“ Aufgabe an, obwohl die Aufgabe als geometrische Analyse der Kreis-Konfiguration intendiert ist. Tatsächlich verwenden mehr als 10 % der Schülerinnen und Schüler, und zwar vermehrt die leistungsstärkeren, realitätsnahe Schätzverfahren.

Grundfrage 5: Aufgaben haben eine „Rahmung“. Diese muss den Schülerinnen und Schülern klar gemacht werden, sowohl im Aufgabentext als auch im Duktus der gesamten Prüfung.

2.6 Umgehen mit Explikationsaufgaben

In einer für das Gymnasium gestellten Aufgabe wird verlangt, aus drei mit einem Stroboskop festgehalten Orten eines Basketballs zu entscheiden, ob der Wurf im Korb landet. Die Aufgabe verlangt: „Beschreibe – ohne zu rechnen – ein mögliches Vorgehen, mit dem das untersucht werden kann.“ Bei solchen Explikationsaufgaben zeigen sich unterschiedlichste Lösungen, etwa „journalistische“ Beschreibungen, Darlegungen, die nur auf Selbstverständlichkeiten rekurrieren, physikalische Fehlvorstellungen usw.

Grundfrage 6: Gerade bei Explikationsaufgaben kommt es auf präzise Fragestellung an. Die Ebene der gewünschten Lösung ist klar zu machen. Die Balance zwischen offener Fragestellung und der Art der gewünschten Explikation ist bei der Aufgabenkonstruktion genau zu diskutieren.

3 Resümee

Die Mathematikdidaktik kann zu diesen Grundfragen das Spektrum möglicher Aufgaben-Orientierungen ausloten und Kategorien bereitstellen, mit denen man sich mit Aufgabenkonstruktion und Aufgabenbearbeitung auseinandersetzen kann.

Literatur

Neubrand, J. & Neubrand, M. (2010). *Mathematikdidaktische Analysen der zentralen Prüfungen 2008 in Mathematik am Ende der Klasse 10 in Nordrhein-Westfalen: Analysen von Aufgabenstellungen und Aufgabenbearbeitungen. Hinweise zu Aufgabenkonstruktion und zur Fachunterrichtsentwicklung*. Vechta, Oldenburg: Universität Vechta & Carl-von-Ossietzky-Universität / Düsseldorf: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. *(Interner Bericht)*

Irene NEUMANN, Aiso HEINZE, Stefan UFER, Knut NEUMANN, Kiel

Modellieren aus mathematischer und physikalischer Perspektive

1. Motivation

In der Physik bedient man sich der Mathematik als Sprache, um physikalische Zusammenhänge zu beschreiben; so wird beispielsweise das zweite Newton'sche Gesetz kurz und prägnant geschrieben als $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, oder allgemeiner $\vec{F} = d\vec{p} / dt$. Formalisierte Zusammenhänge wie das Newton'sche Gesetz sind eine Repräsentationsform physikalischer Modelle, die das Ziel haben, reale Zusammenhänge zu beschreiben (vgl. Kircher, 2010). Mathematisches Modellieren beinhaltet ebenfalls das Übertragen realer Zusammenhänge in die Sprache der Mathematik (vgl. Schupp, 1988). Vor diesem Hintergrund stellt sich daher die Frage, inwieweit mathematisches Modellieren eine andere Fähigkeit darstellt als physikalisches Modellieren. Um diese Frage anzugehen, werden in einem ersten Schritt in diesem Beitrag mathematisches und physikalisches Modellieren konzeptuell geklärt, sowie Gemeinsamkeiten und Unterschiede aufgezeigt.

2. Physikalisches Modellieren

Physik als ein Teilbereich naturwissenschaftlicher Grundbildung stellt eine Herangehensweise an die Erschließung der Welt dar (vgl. KMK, 2005). Physikalisches Modellieren wird dabei als ein Weg physikalischer Erkenntnisgewinnung betrachtet: Es umfasst das „Idealisieren, Beschreiben von Zusammenhängen, Verallgemeinern, Abstrahieren, Begriffe bilden, Formalisieren, Aufstellen einfacher Theorien, [und] Transferieren" und dient dem Ziel der Erklärung von Phänomenen (KMK, 2005, S. 10). Heinrich Hertz betrachtete das Modellieren als eine Abbildung:

Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände. (zitiert nach Goldkuhle, 1997, S. 18)

Modelle in der Physik als Abbildungen der Natur in diesem Sinne können verschiedenartig repräsentiert sein (vgl. Kircher, 2010): So gibt es gegenständliche Modelle (z. B. Kristallgittermodell aus Styroporkugeln), idealisierende Annahmen (z. B. Massepunkt), komplexere theoretische Modelle (z. B. Gravitationstheorie), symbolische Modelle (z. B. Schaltbild eines elektrischen Stromkreises) oder formalisierte Modelle (z. B. $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$). Werden formalisierte Modelle in der Physik verwendet, ist der Bezug zur Mathematik offensichtlich. Jedoch sollte man hier beachten, dass die mathematische Beschreibung eines physikalischen (theoretischen) Modells nicht zwangsläufig alle Elemente des physikalischen Modells abbildet. Beispielsweise kann im Rahmen des Teilchenmodells die Grundannahme *Materie besteht aus kleinsten Teilchen* nicht durch mathematische Symbole ausgedrückt werden. Vor dem Hintergrund dieser Überlegungen würde die Formalisierung eines realen Phänomens in zwei Schritten erfolgen: Zunächst wird das reale Phänomen physikalisch modelliert und anschließend ein mathematisches Modell des physikalischen gewonnen; im Sinne Hertz's müssten dann die Folgen des mathematischen Modells Abbilder der Folgen des physikalischen sein und diese wiederum Abbilder der naturnotwendigen Folgen. Unabhängig von der Repräsentationsform haben physikalische Modelle Grenzen. Je nachdem, wofür ein Modell entwickelt wurde (z. B. zum Erkenntnisgewinn oder aus didaktischen Zwecken) können physikalische Modelle beispielsweise bestimmte reale Elemente oder Zusammenhänge nicht beinhalten, oder diese auch überbetonen (vgl. Kircher, 2010).

Auf Basis dieser Überlegungen ergibt sich als Arbeitsdefinition physikalisches Modellieren als das Identifizieren von relevanten Elementen und deren Zusammenhängen sowie das Rückführen dieser auf physikalische Größen und Gesetzmäßigkeiten zur zielgerichteten und angemessenen Beschreibung und Erklärung einer Situation bzw. eines Phänomens. Im Rahmen dieser Definition ist mathematisches Modellieren im Rahmen physikalischen Modellierens möglich, aber nicht unbedingt nötig.

2. Mathematisches Modellieren

Wie die Physik wird auch die Mathematik als ein Mittel angesehen, sich die Welt zu erschließen: Dazu werden reale Situationen mathematisch modelliert, innerhalb des Modells gearbeitet und schließlich Befunde aus dem Modellraum übertragen in und abgeglichen mit die Realität (vgl. KMK, 2004). Schupp (1988) fügte diese Schritte zu einem Modellierungskreislauf zusammen (vgl. Abb. 1), der in die Rahmenkonzeption mathematischer Grundbildung bei PISA eingeflossen ist (vgl. Klieme, Neubrand & Lüdtke, 2001) und in der Folgezeit auch erweitert wurde (vgl. z. B. Blum & Leiß, 2005; Borromeo Ferri, 2010). Aus Platzgründen soll hier auf eine ausführlichere Beschreibung mathematischen Modellierens verzichtet werden; detaillierte Erläuterungen finden sich in der einschlägigen Literatur (z. B. Blum & Leiß, 2005; Borromeo Ferri, 2010; Klieme et al., 2001; Schupp, 1988). Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass für die hier angestellten Überlegungen insbesondere Borromeo Ferris (2010) Vorschlag, außermathematisches Wissen im Modellierungskreislauf zu berücksichtigen, eine wichtige Rolle spielt. Wie oben geschildert, beinhaltet das physikalische

Modellieren das Rückführen realer Situationen auf physikalische Zusammenhänge, die ein derartiges Wissen darstellen könnten.

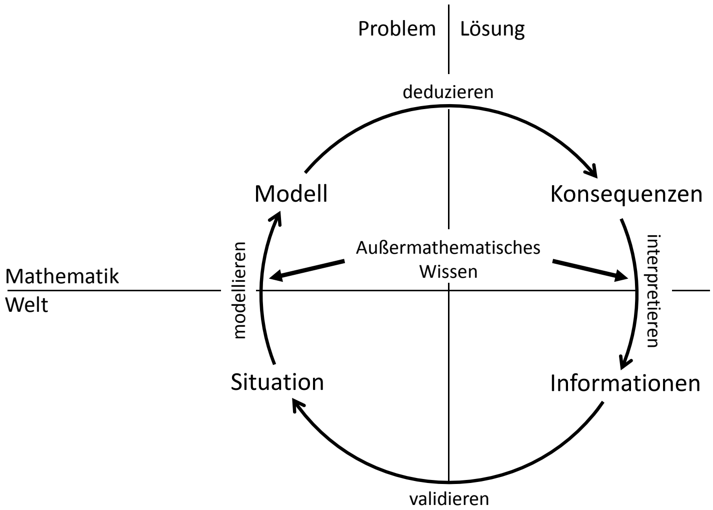


Abb. 1 Modellierungskreislauf nach Schupp (1988, S. 11) mit Ergänzung um außermathematisches Wissen nach Vorschlag von Borromeo Ferri (2010)

3. Gemeinsamkeiten und Unterschiede

Vergleicht man die obigen Beschreibungen physikalischen und mathematischen Modellierens, so stellt man einige Gemeinsamkeiten fest. Mathematisches und physikalisches Modellieren dienen dem übergeordneten Ziel der Welterschließung. In beiden Fällen werden relevante Elemente und Zusammenhänge zwischen diesen identifiziert – je nach Perspektive (Physik/Mathematik) und Fragestellung können diese für dieselbe Situation verschieden sein. Die identifizierten Elemente und Zusammenhänge müssen außerdem Elementen und Zusammenhängen in einem abstrakten Modellraum zugeordnet werden.

Trotz dieser Ähnlichkeit gibt es auch Unterschiede zwischen mathematischem und physikalischem Modellieren. So dient das mathematische Modellieren letztendlich vor allem dem Ziel einer *quantifizierenden* Beschreibung (vgl. die Aufgabe „Maibaum“ bei Schukajlow & Leiss, 2011; S. 59). Physikalisches Modellieren kann dagegen dem *konzeptuellen* Beschreiben dienen (z. B. Beschreibung des Phasenübergangs flüssig-gasförmig mit Hilfe des Teilchenmodells) aber auch quantifizierend sein, um beispielsweise Vorhersagen zu treffen. Darüber hinaus müssen mathematische Modellierungsprobleme nicht unbedingt auf Physik zurückgreifen, vielmehr können die Problemsituationen vielfältigen, z. B. auch ökonomischen oder biologischen etc., Domänen entstammen.

4. Offene Fragen

Im Hinblick auf die empirische Erforschung der Unterschiede der beiden Konstrukte ergeben sich aufgrund der Ähnlichkeit der beiden Modellierungsprozesse sowie aufgrund der Nutzung der Mathematik als Sprache in der Physik einige Problemfelder bezüglich der Operationalisierung der beiden Fähigkeiten. So ist beispielsweise nicht klar, ob automatisierte mathematische Modellierungen in einer physikalischen Problemstellung dem physikalischen Modellieren zuzuordnen sind oder eine eigene mathematische Modellierung bilden. Gleiches gilt natürlich auch für automatisierte physikalische Modellierungen in mathematischen Problemstellungen. Außerdem stellt sich die Frage, welche physikalischen Problemstellungen geeignet sind, um physikalisches Modellieren ohne zwangsläufige Formalisierungen oder physikalische Routinen zu erfassen, jedoch trotzdem im Erfahrungs- und Wissensbereich der Probanden liegen. Ein möglicher Schritt in der Aufklärung dieser Fragen könnte in Interviews liegen, in denen Probanden beim schrittweisen Bearbeiten von Modellierungsaufgaben (sowohl physikalisch als auch mathematisch als auch physikalisch mit Formalisierungen) beobachtet werden und zu ihrem Vorgehen befragt werden.

Literatur

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren 128*, 18-21.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematikdidaktik 31*, 99-118.

Goldkuhle, P. (1997). *Modellbildung und Simulation mit dem Computer im Physikunterricht*. Köln: Aulis-Verlag Deubner.

Kircher, E. (2010). Modellbegriff und Modellbildung in der Physikdidaktik. In E. Kircher, R. Girwidz & P. Häußler (Hrsg.), *Physikdidaktik: Theorie und Praxis* (735-762). Berlin: Springer,.

Klieme, E., Neubrand, M. & Lüdtke, O. (2001). Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In M. Prenzel et al. (Hrsg.): *PISA 2000 Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (140-190). Opladen: Leske + Budrich.

Schukajlow, S. & Leiss, D. (2011). Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. *Journal für Mathematikdidaktik 32*, 53-77.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. *Der Mathematikunterricht 36*(6), 5-16.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland [KMK] (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Neuwied: Luchterhand.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland [KMK] (2005). *Bildungsstandards im Fach Physik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10)*. Neuwied: Luchterhand.

Engelbert NIEHAUS, Koblenz-Landau

Räumliche mathematische Modellbildung für medizinische Risiken und logistische Verteilung von Ressourcen im mathematischen Umweltlabor

Im mathematischen Umweltlabor arbeiten Schülerinnen und Schüler mit besonderer mathematischer Begabung und Lehramtsstudierende im Fach Mathematik gemeinsam an umweltwissenschaftlichen Problemen zur mathematischen Modellbildung. Vorgestellt werden didaktische Re–duktionen von authentischen Modellierungsaufgaben, die eine mathe–matische räumliche Risikobewertung und eine Optimierung der Res–sourcenverteilung zum Ziel haben. Der Themenkomplex stellt einen Einstieg in die Mathematik mit Geoinformationssystemen dar.

1. Didaktische Konzeption des Mathematischen Umweltlabors

Das Mathematische Umweltlabor ist als Lernort außerhalb der Schule konzipiert, an dem in Kleingruppenarbeit von SchülerInnen und Studierende in wöchentlichen Abständen räumliche Risiko- und Verteilungsprobleme als offene Aufgabe bearbeitet werden. SchülerInnen können im Rahmen des Hochschulgesetzes Leistungsnachweise erwerben, die bei einem späteren Studium anerkannt werden, falls diese einschlägig sind. Die Lernumgebung ist auf zwei Ebenen authentisch. Die erste Ebene stellt die authentische inhaltliche Optimierungsproblematik dar (siehe [3] 2008) – die zweite Ebene ist die Lernumgebung selbst, da diese für die Lehramtsstudierenden authentisch in der Auseinandersetzung mit SchülerInnen ist, die besondere mathematisch-naturwissenschaftlichen Begabungen besitzen. Das im Rahmen von "WissenSchaf(f)t Zukunft" (Land RLP) geförderte Projekt zielt auf ein Förderprogramm entlang der Bildungskette mit offenen Problemaufgaben und einen umweltwissenschaftlichen thematischen Bezug der Risikomodellierung und Ressourcenoptimierung.

2. Fachliche Erläuterungen zur Mathematischen Modellbildung

Allgemein werden raum-zeitliche Repräsentationen funktionaler Zusammenhänge untersucht. Simulationen werden in 2D- und 3D-Umgebungen erzeugt und interpretiert. Geoinformationssysteme sind dabei ein Softwarewerkzeug, das funktional Raumkoordinaten im Definitionsbereich numerische Werte oder Eigenschaften im Wertebereich zuordnet. Dynamische Geometriesoftware wird verwendet, um dreidimensionale Eigenschaften von Risikokarten zunächst für Funktionen mit einem zwei–dimensionalen Graphen untersuchen zu können.

Grundlegende Zielsetzung ist es, vorhandene Ressourcen möglichst effizient bezogen auf eine modellierte Risikokarte zu verteilen. Dabei entsteht neben der Risikoskarte auch eine Ressourcenverteilungskarte. Die Optimierungsaufgabe besteht nur darin, die räumliche Versorgung mit Ressourcen der räumlichen Verteilung von Risiken anzupassen. Dies erfolgt i.d.R. iterativ, um die Versorgungssituation schrittweise zu verbessern. Die Suche nach der "besten mathematischen Lösung" wird dabei durch das Abwägen und Wichten von Gütekriterien ersetzt. Die Modellierung von Risiken und die Quantifizierung der Versorgungsqualität kann dabei angepasst an die Lernvoraussetzungen in unterschiedlicher Komplexität erfolgen.

3. Einführendes Wasserflaschenbeispiel

Es wird zunächst die Aufgabe gestellt, eine Gruppe von Personen in einem Raum mit einer Anzahl von *n* Wasserflaschen zu versorgen. Das Wasserflaschenbeispiel zeigt bereits die unterschiedlichen Komplexitätsstufen, mit denen diese offene Aufgabe bearbeitet werden kann. Zunächst einmal kann man das Problem als reine räumliche Optimierungsaufgabe verstehen, bei der Summe der Abstände jeder Person zu nächsten verfügbaren Wasserflasche minimiert werden soll. Dabei wird erst in einem zweiten Schritt berücksichtigt, dass Personen unterschiedlich durstig sein können und die Position der Wasserflaschen unter Umständen bedarfsorientiert anders gewählt werden sollte. Eine andere Optimierungsstrategie positioniert alle Flaschen an einem zentralen Punkt, die Flaschen werden nacheinander geöffnet und eine Person verteilt das Wasser auf Anfrage an die Personen im Raum. Diese Strategie ist bezogen auf die schnelle Versorgung aller Personen im Raum sicherlich schlechter als die zuvor genannte Strategie. Unter der Prämisse, dass Wasser sehr kostbar ist, wird aber mit der letztgenannten Strategie immer nur eine Wasserflasche geöffnet und die ungeöffneten Wasserflaschen können noch weiterhin verwendet werden. Die zweite Strategie ist also in der Verteilungsgeschwindigkeit u.U. schlechter, aber bezogen auf den Ressourcenverbrauch der Wasserflaschen eine bessere Verteilungsstrategie. An diesem einführenden Beispiel wird deutlich, dass die Erstellung von Risikoskarten und die Optimierung der Ressourcenverteilung fundamental von der Definition des Risikos und der Definition der Versorgungsgüte abhängt. Der Vorteil von diesen Verteilungsproblemen ist, dass jede Person im Raum intuitiv eine Verteilung der Wasserflaschen im Raum vornehmen kann, ohne dass die mathematische Funktion, die implizit die Wasserversorgungsgüte bestimmt, auch verbalisiert oder formalisiert werden könnte. Dieses intuitive Verständnis von räumlicher Versorgungsgüte und räumlichen Risiken ist der Ausgangspunkt für die mathematische Modellierung.

4. Wasser, Gesundheit und Risiken

Da der Zugang zu sauberem Wasser speziell in Entwicklungsländern eine fundamentale Voraussetzung für die öffentliche Gesundheit der Bevölkerung ist, führt dieses Wasserflaschenbeispiel auch inhaltlich zu einer fächerübergreifenden Auseinandersetzung mit dem Thema von medizinischen Risiken und einer optimierten logistischen Verteilung von Ressourcen. SODIS (Solar Water Desinfection)- siehe [5] zeigt, wie mit Keimen verseuchtes Wasser unter Nutzung von Plastikflaschen und Sonneneinstrahlung das Gesundheitsrisiko für die Bevölkerung in Entwicklungsländern minimiert werden kann. Betrachtet man dieses Beispiel unter dem Blickwinkel der Ressourcenoptimierung, so wird durch Ausbildung und der Verwendung von vorhandenen Ressourcen die Anzahl von Todesfällen als Folge von Durchfallerkrankungen erheblich minimiert. Fächerübergreifend ist hier die Nachhaltigkeit der Ressourcenoptimierung von besonderer Bedeutung. Ferner rückt so auch ein soziales Lernziel in den Mittelpunkt. Der Zugang zu sauberem Wasser ist für viele Menschen auf dieser Erde zwar keine Selbverständlichkeit, aber intelligente Strategien, Risikowahrnehmung mit entsprechender Verhaltensänderung, können dabei helfen, durch Nutzung der Sonneneinstrahlung und Plastikflaschen ohne technischen Aufwand das eigene Erkrankungsrisiko zu minimieren. Die Bedeutung von gesundheitlicher Aufklärung, Risikowahrnehmung und der entscheidenden Verhaltensänderung zeigen Altherr et. al. 2009 in [2].

5. Geoinformationssysteme und Risikokarten

Betrachtet man Geoinformationssysteme, so hängt die Ausbreitung von zahlreichen Viruserkrankung (z.B. Malaria, Chickungunya,...) von Moskitos als Krankheitsvektoren ab. Der Lebenszyklus der Moskitos hängt wiederum von Umweltbedingung ab, die die Mücken für die Entwicklung benötigen (z.B. Regenfälle, Temperatur, Feuchtigkeit, ..., siehe Bustamente et. al.[1]). Über die Repräsentation von Umweltvariablen können erste Risikokarten erstellt werden. Die Einbindung in räumliche Unterstützungssyteme (SDSS Spatial Decision Support Systems) wird in [3] (2008) veranschaulicht. Bezogen auf Lehr-Lernprozesse ist insbesondere für Entwicklungsländer das Erreichen der Bevölkerung wesentlich (Last-Mile-Problem), denn die besten Risikokarten zeigen keine Wirkung, wenn die gefährdeten Personen die Risiken nicht korrekt räumlich interpretieren und entsprechende eigene Handlungen daraus ableiten (siehe [4] 2010).

6. Fazit

Räumliche mathematische Modellbildung für medizinische Risiken und die optimierte Verteilung von Ressourcen stellt ein Themengebiet dar, das angefangen von intuitiven Optimierungsstrategien im Raum bis hin zu komplexeren Ansätzen und der Nutzung von Geoinformationssystemen (GIS) ein breites Spektrum für Modellierungsaktivitäten bietet. Gleichzeitig bietet es die Möglichkeit auf weltweite Versorgungsprobleme in ländlichen Regionen aufmerksam zu machen und die Bedeutung von Umweltfaktoren auf die Gesundheit von Menschen im Kontext von mathematischer Modellbildung zu behandeln. Neben der Wertschätzung für die permanente Versorgung mit sauberem Trinkwasser in Westeuropa ist aus Sicht der mathematischen Modellsbildung gerade die schrittweise Präzisierung von intuitiven Optimierungsstrategien zu verbalisiebaren und mathematisch formalisierten funktionalen Beschreibungen wesentlich. Eine vollständige Abbildung der Optimierungsstrategien durch Risiko- und Ressourcenkarten in Geoinformationssystemen ist dabei ein notwendig zu erreichendes Lernziel im Mathematischen Umweltlabor. In Analogie zur Situation in Entwicklungsländern ist die Bedeutung der Risikowahrnehmung und einer daraus resultierenden Verhaltensänderung ein zentrales Ausbildungsziel zur Optimierung im Mathematischen Umweltlabor.

Literatur

[1]Bustamante, D. M., Lord, C., (2010) Sources of Error in the Estimation of Mosquito Infection Rates Used to Asses Risk of Arbovirus Transmission, in: Am. J. Trop. Med. Hyg., volume 82, number 6, S. 1172-1184

[2]Altherr, A., Mosler, H., Tobias, R. ,Butera, F., (2008) Health Education & Behavior; Attitudinal and Relational Factors Predicting the Use of Solar Water Disinfection: A Field Study in Nicaragua, volume 35, number 2, pages 207-220

[3] Niehaus, E., (2008), Early Warning: Tele-medicine and Logistical Response, Technical Presentation at United Nations: Committee on the Peaceful Uses of Outer Space, Scientific and Technical Subcommittee - 45. Session - Vienna, 11-22 February 2008 (URL geprüft am 01.03.2011) http://www.oosa.unvienna.org/pdf/pres/stsc2008/tech-01.pdf

[4] Niehaus, E. (2010) Technical Support for non-technical decision support for approaching the last Mile Problem, Technical Presentation at United Nations: Committee on the Peaceful Uses of Outer Space, Scientific and Technical Subcommittee: Forty-seventh session 8 - 19 February 2010 (URL geprüft am 04.03.2011) http://www.oosa.unvienna.org/pdf/pres/stsc2010/tech-26.pdf

[5] Ubomba-Jaswa, E., Navntoft, C., Polo-Lopez, I., Fernandez-Ibanez, P., Mcguigan, K.,(2009) Photochem. Photobiol. Sci.; Solar disinfection of drinking water (SODIS): an investigation of the effect of UV-A dose on inactivation efficiency. DOI: 10.1039/B816593A

Marianne NOLTE, Hamburg

„Ein hoher IQ garantiert eine hohe mathematische Begabung! Stimmt das?“ – Ergebnisse aus neun Jahren Talentsuche im PriMa-Projekt Hamburg[1]

Seit dem Schuljahr 1999/2000 fördern wir an der Universität Hamburg mathematisch besonders begabte Dritt- und Viertklässler. Da es in Hamburg 2011 etwa 12.000 Drittklässler gibt und wir jährlich nicht mehr als 50 Kinder aufnehmen können, werden die Gruppen nach einer Talentsuche zusammengestellt. Sie beginnt mit einem Mathe-Treff für Mathe-Fans, einer Art Probeunterricht an einem Wochenende. Anschließend werden ein eigens entwickelter Mathematiktest (PriMa Mathematiktest: PriMa MT) und ein Intelligenztest eingesetzt.[2]

Wir beobachteten im Laufe der Jahre, dass unter den Kindern, die im PriMa MT gut und sehr gut abschnitten, immer wieder Kinder waren, deren Intelligenzquotient nicht einer Hochbegabung entsprach. Umgekehrt waren unter den Kindern, deren Ergebnisse im PriMa MT keine besondere mathematische Begabung erwarten ließ, Kinder, deren IQ sehr hoch war.

Die folgende Tabelle[3] zeigt dies exemplarisch für den dritten Jahrgang: In allen Leistungsgruppen des Mathematiktests finden sich hochbegabt getestete Kinder.

PriMa MT Punkte	61-40	39-30	29-20	19-0
IQ	151-143	144-111	141-94	151-92
Gesamt	2%	14%	28%	55%

Abb. 1

In der Intelligenzforschung gilt der IQ als guter Prädiktor für schulische Leistungen (Preckel/Brüll 2008, Rost 2009). Wir setzten den CFT 20, bzw. CFT 20 R ein, der mit Mathematiknoten besonders hochkorreliert (0.49 laut Preckel/Brüll 2008, S. 74), eine Korrelation, die von Psychologen als stark bezeichnet wird (Pfennig, 2009).

Intelligenztests basieren auf Aufgabenstellungen, die in der Regel einen geringeren Komplexitätsgrad aufweisen als die von uns eingesetzten Problemstellungen. Intelligenztests messen Fähigkeiten wie Problemlösen,

[1] Informationen über das Projekt siehe http://blogs.epb.uni-hamburg.de/nolte/

[2] Siehe Nolte 2004

[3] Die Daten wurden von Björn Pamperien erhoben.

Struktur- und Mustererkennung, allerdings werden diese inhaltsübergreifend erhoben. Daraus ergeben sich aus einer mathematikdidaktischen fachlichen Perspektive unterschiedliche Einschätzungen über deren Aussagekraft für spezifische Anforderungen wie mathematisches Problemlösen (zur Diskussion siehe z.B. Nolte 2004).

Wir fragen deshalb, wie gut sich der gemessene IQ für die Zusammenstellung unserer Gruppen eignet.

Methode:

Betrachtet wurden die Ergebnisse der Kinder vom zweiten bis zum zehnten Jahrgang (G2 bis G10). Es wurden nur die 1663 Kinder berücksichtigt, deren Ergebnisse aus allen Tests vollständig vorlagen.

Um die Ergebnisse des PriMa-MTs mit dem Intelligenztest vergleichbar zu machen, stellten wir eine Rangliste der erreichten Testpunkte auf. Ein niedriger Rang entspricht besonders guten Leistungen. Diese Skalierung ermöglicht den Vergleich der Ergebnisse über die verschiedenen Jahrgänge unabhängig von der jeweils höchsten Punktzahl, die erreicht wurde und trägt der Tatsache Rechnung, dass wir die Kriterien für die Bewertung des PriMa-MTs im Laufe der Zeit verfeinert haben.

Ergebnisse:

Da sich die Ergebnisse der verschiedenen Jahrgänge nicht signifikant unterschieden, wurde für die weitere Auswertung jeweils die Gesamtgruppe betrachtet.

Gesamtstichprobe – alle Jahrgänge

Rang PriMa-MT

Korrelierte Variablen	Korrelation	Konfidenzintervall	Quadrierte Korrelation	Partielle Korrelation
Rang PriMa-MT – CFT	-0.34	-0.30 bis -0.39	11,8%	-0.28
Rang PriMa-MT – Zahlenfolgen	-0.43	-0.37 bis -0.48	18,2%	
Rang PriMa-MT – Wortschatz	-0.24	-0.18 bis -0.30	5,8%	

Abb. 2

Die Korrelation ist mittel bis stark, beide messen Tests Intelligenz. Allerding besagt die quadrierte Korrelation, dass nur 11,8% der Ergebnisse des PriMa-MTs durch die Ergebnisse des CFT 20 (R) vorhergesagt werden können und umgekehrt. Die Korrelation zwischen Zahlenfolgen und Mathematiktest ist deutlich höher. In beiden Tests müssen bestimmte Zahlenmuster erkannt werden. Die partielle Korrelation gibt die Korrelation zwischen dem PriMa-MT und dem CFT 20 (R) ohne den Testteil Zahlenfolgen an. Aus der niedrigeren Korrelation kann geschlossen werden, dass der Mathematiktest Aspekte mathematischer Kompetenzen erfasst, die mit dem Intelligenztest nicht erhoben werden können.

Wenn man die Korrelationen zwischen den Ergebnissen des Mathematiktests und den Intelligenzmessungen berechnet und dabei die Gruppe der untersuchten Kinder auf die begrenzt, die gut und sehr gut im PriMa-MT abgeschnitten haben, sinkt die Korrelation deutlich: „Nimmt man als Maß für „Mathebegabung“ einen Rang von 15 oder besser, beträgt die Korrelation 0.14“ (Pfennig, 2009).

Interpretation

Wir gehen davon aus, dass wir mit unserem Mathematiktest mathematische Begabung messen können. Unter dieser Voraussetzung sind die folgenden Aussagen zu betrachten.

Das Absinken der Korrelation bei der Einschränkung auf die leistungsstärkeren Kinder verweist darauf, dass der PriMa-MT inhaltsspezifische Komponenten mathematischer Begabung enthält, die sich von den allgemeinen Begabungskomponenten, die der CFT 20 (R) erhebt, unterscheiden. Die Ergebnisse der quadrierten Korrelation bestätigen dies. Der PriMa MT wurde dazu konzipiert, Kindern zu ermöglichen, günstige Handlungsmuster für mathematisches Problemslösen nach Kießwetter () zu zeigen.

Geht Hochbegabung immer mit einer mathematischen Begabung einher?

In der Regel schneiden Kinder, die in unserem Verfahren hochbegabt getestet wurden, im Mathematiktest statistisch signifikant besser ab, als die übrigen. Die Reduktion der Korrelation bei einer weiteren Auslese bzw. Homogenisierung der Gruppe zeigt jedoch, dass das, was wir als mathematische Hochbegabung erfassen, nicht aus dem IQ abgeleitet werden kann. Dies bestätigt die Beobachtung der Einzelfälle, dass Hochbegabung nicht immer mit einer besonders hohen mathematischen Begabung einhergeht.

Die Reduktion der Korrelation ist zu erwarten. Intelligenztests sind umso zutreffender, je weniger ausgelesen die Population ist, die gemessen wird (siehe dazu Rost 2009). Die Intelligenztestergebnisse der von uns getesteten Kinder schwanken zwischen einem IQ von 66 und mehr als 160, aber es liegt keine Normalverteilung vor. Bis zum Testzeitpunkt finden mehrere Ausleseprozesse statt. Zur Testung melden sich Kinder an, die sich selbst für anspruchsvolle mathematische Problemstellungen interessieren oder deren Eltern sie für mathematisch besser halten als andere Kinder. Diese Auslese führt zu einer deutlichen Verschiebung der Normalverteilung, auf die sich die Intelligenztests beziehen.

Tabelle (Daten Spalte 1,2 und 4 nach Rost 2009, S. 153)

IQ	Personen in unausgelesener Gruppe	Personen im PriMa-Projekt	Prozentrang ca.
70 bis 79	Ca. 7 %	Ca. ½ %	2-8
80-89	Ca. 16%	Ca. 2%	9-23
90-109	Ca. 50%	21%	25-73
110-119	Ca.16%	25%	75-90
120-129	Ca.7%	24%	91-97
130 und mehr	Ca. 2%	27,5%	98 und mehr

Abb. 3

Die Ergebnisse der Untersuchung bestätigen die Erfahrungen von Mathematikdidaktikern, die mit mathematisch besonders begabten Kindern arbeiten (z.B. Heinze 2005, Käpnick 1998, Kießwetter 1992, Nolte 2004): Ein Intelligenztest allein stellt nicht differenziert genug fest, ob bei diesen Kindern eine sehr hohe Leistung in anspruchsvollen mathematischen Problemlöseprozessen zu erwarten ist.

Die Ergebnisse bilden jedoch auch keinen Widerspruch zur Intelligenzforschung, da die meisten mathematisch besonders begabt getesteten Kinder hochbegabt getestet wurden.

Literatur

Käpnick, F. (1998). Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt a.M., Peter Lang.

Nolte, M., Ed. (2004). Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter. Hildesheim, Franzbecker.

Pfennig, M. Unveröffentlichtes Manuskript (2009)

Preckel, F. und M. Brüll (2008). Intelligenztests. München, Ernst Reinhardt Verlag.

Rost, D. H. (2009). Intelligenz. Fakten und Mythen. Weinheim, Basel, Beltz Verlag.

Daniel OBENLAND, Anke WAGNER, Claudia WÖRN, Ludwigsburg

Erklärungen angehender Lehrerinnen und Lehrer zu einer Prozentaufgabe

Theoretischer Rahmen

Der Begriff "erklären" kann aus unterschiedlichen Perspektiven betrachtet werden (vgl. WAGNER/WÖRN 2011). Aus sprachlicher Perspektive zeigt sich, dass das Verb "erklären" mit "deutlich machen", "begründen", "deuten", "auslegen", "äußern", "mitteilen" (DUDEN 1999, S. 1082; GRIMM&GRIMM 1862, S. 876) in Verbindung gebracht und umschrieben wird. Es werden folglich unterschiedliche Handlungen mit dem Begriff erklären verbunden, die sich in ihrer Bedeutung unterscheiden können.

Das klassische Erklärmodell aus wissenschaftstheoretischer Perspektive ist das deduktiv-nomologische Modell nach HEMPEL/OPPENHEIM (1988). Eine Erklärung wird demnach abgegeben, wenn aus dem Erklärenden (Explanans) das zu Erklärende (Explanandum) logisch abgeleitet wird. Dabei gehören zum Explanans zwei verschiedene Aussagenklassen: gesetzesartige Aussagen sowie gegebene Randbedingungen.

Aus erziehungswissenschaftlicher Perspektive kann das Erklären je nach Kontext als Übertragen von Wissen, als Entwickeln von Wissen oder als Aushandeln von Wissen aufgefasst werden (KIEL 1999). Erklären wird hier im Gegensatz zur Wissenschaftstheorie, in der das Produkt – die Erklärung – im Fokus steht, als Prozess aufgefasst.

Aus empirischer Perspektive zeigt sich, dass das Erklären Teil des professionellen Wissen von Lehrern ist (SHULMAN 1986, BALL 1988, KRAUSS et. al. 2004, MA 1999). Empirische Studien untersuchen beispielsweise Kriterien guten Erklärens (GAGE 1968), die Erklärfähigkeit und mögliche Erklärvariationen (von Lehrern) (KRAUSS et. al. 2004, MA 1999) oder bevorzugte Erklärtypen von Schülern (ROBERTS 1999). Diese Studien haben zum Ziel, auf der Basis von Theorien durch Beobachtungen und Erfahrungen Erkenntnisse bezüglich des Erklärens zu gewinnen.

Untersuchungsdesign

Die im Vortrag vorgestellte Untersuchung ist eine qualitative Teilstudie (n = 230) einer im Rahmen des Forschungsprojekts PRO-SMP (gefördert durch die PH Ludwigsburg) durchgeführten Fragebogenerhebung zum Erklären. Befragt wurden Studierende sowie Lehramtsanwärter mit Studienschwerpunkt Sekundarstufe (Haupt- oder Realschule). Unter den Probanden waren 154 mit dem Studienfach Mathematik, 38 die das Fach Mathematik nicht als Studienfach gewählt haben und 38 Lehramtsanwärter.

Erhoben wurde das Wissen um (verschiedene) Erklärvarianten zu unterschiedlichen Unterrichtsszenarien aus dem Bereich der Arithmetik und der anwendungsbezogenen Mathematik (z.B. Prozentrechnen). Die Items wurden in Anlehnung an TELT (BALL 1988) entwickelt.

Forschungsfragen

- Über welche Erklärvarianten verfügen angehende Lehrerinnen und Lehrer?
- Werden verschiedene Erklärvarianten genannt?
- Lassen sich Tendenzen zu bestimmten Varianten erkennen?
- Woher beziehen angehende Lehrerinnen und Lehrer (nach eigenen Aussagen) ihr Wissen?
- Zeigen sich Unterschiede in den Erklärungen zwischen Mathematikern des 1. Semesters, 3.-5. Semester, Lehramtsanwärtern und Nichtmathematikern?

Beispiel-Item

Der Dieselpreis (ursprünglich 1,05 Euro) stieg vor den Osterferien um 10% an und sank nach den Osterferien um 10%. Leon sagt: „Dann ist das Benzin wieder gleich teuer wie vor Ostern.“

Wie würden Sie Leon helfen? Schreiben Sie bitte alle Erklärungsmöglichkeiten auf, die Ihnen einfallen.

Erste Ergebnisse

Die Auswertung wurde getrennt nach Mathematikstudenten des 1. Semesters (M1), des 3. bis 5. Semesters (M3-5), nach Nichtmathematikern (NiMa) und Lehramtsanwärtern (Sem) vorgenommen. Es zeigten sich unterschiedliche Erklärvarianten, die in sieben Arbeitskategorien unterteilt werden konnten. Diese sind in nachstehendem Diagramm mit den Ziffern 1 bis 8 versehen:

1 Rechenverfahren (z.B. Dreisatz, Formel, Verhältnisgleichung)

2 Ikonische Darstellungen (z.B. Prozentstreifen)

3 Didaktische Reduktion / Rückschaltprinzip (z.B. "Ich würde zu nächst einmal einfachere Zahlen verwenden.")

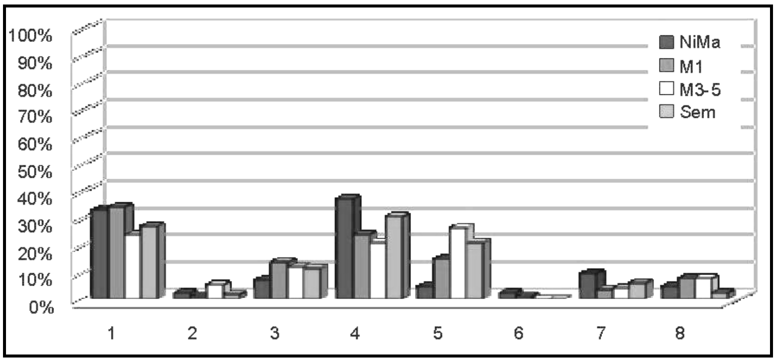
4 Versuch einer Verallgemeinerung (z.B. „Prozente sind Teile eines Ganzen, wenn das Ganze größer wird, werden auch die Teile größer, sofern die Prozentzahl gleich bleibt.“)

5 Erklärideen ohne nähere Konkretisierung (z.B. „Nachrechnen“, „mit Spielgeld durchspielen“)

6 Fachlich falsche Erklärvariante

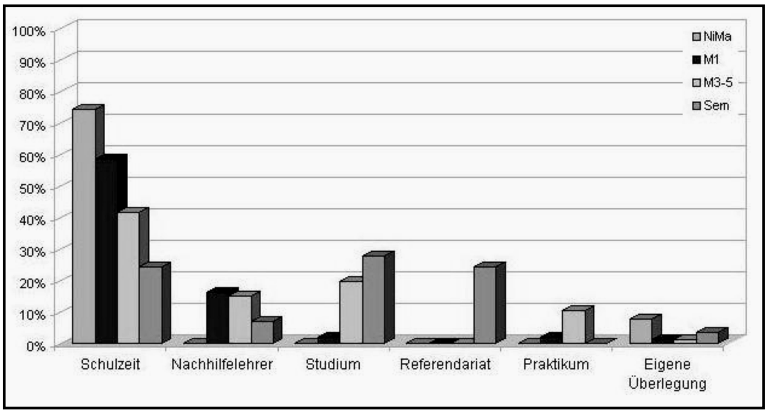
7 Keine sinnvolle und auf die Frage bezogene Erklärvariante

8 Keine Angabe



Zu erkennen ist, dass Rechenverfahren sowie Verallgemeinerungen die am häufigsten verwendeten Erklärvarianten sind. Erklärungen mit ikonischen Darstellungen werden über alle Untersuchungsgruppen hinweg höchst selten angegeben.

Zu jedem Item sollten die Probanden angeben, wo sie das in der Erklärung verwendete Wissen erworben haben. Auffällig oft wurde die eigene Schulzeit als Wissensquelle hierfür angegeben. Nur ein Viertel der befragten Lehramts-anwärter gibt an, dass auf Wissen aus dem Studium zurückgegriffen wird. Ursachen und Gründe müssen ermittelt und diskutiert werden, um Folgerungen für die Hochschulausbildung von zukünftigen Lehrerinnen und Lehrern ableiten zu können (vgl. WAGNER/ WÖRN/KUNTZE 2010).



Literatur

Ball, Deborah (1988): Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing.

Duden (1999): Das große Wörterbuch der deutschen Sprache. Band 3. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: Dudenverlag.

Gage, N.L. et. al. (1968): Exploration of the Teacher’s Effectivness in Explaining. Technical Report No.4. Stanford Center for Research and Development in Teaching. Stanford, California.

Grimm, Jakob & Grimm, Wilhelm (1862): Deutsches Wörterbuch. Leipzig: Verlag von S. Hirzel.

Hempel, C.G., Oppenheim, P. (1988): Studies in the Logic of Explanation. In Pitt, J.: Theories of explanation (S. 9-50) New York: Oxford Univ Press.

Kiel, Ewald (1999): Erklären als didaktisches Handeln. Würzburg: Ergon Verlag.

Krauss, S. et. al. (2004): COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In: Doll, J.; Prenzel, M. (Hrsg.): Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung, S. 77-108. Münster: Waxmann.

Ma, Liping (1999): Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Roberts, Rosemary (1999): What makes an explanation a good explanation? Memorial University of Newfoundland. Online-Zugriff (zuletzt geprüft am 10.08.2010): http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk1/tape7/PQDD_0006/MQ42436.pdf

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Wagner, Anke; Wörn, Claudia; Kuntze, Sebastian (2010): Kann man erklären lernen? – Ein Unterrichtsmodell zur Förderung von Erklärkompetenzen bei angehenden Lehrern unter Verwendung didaktischer Materialien. In: Kirchner, Peter et. al. (Hrsg.): TRANSFER. Ludwigsburger Hochschulschriften

Wagner, Anke; Wörn, Claudia (2011): Erklären lernen – Mathematik verstehen. Seelze: Kallmeyer.

Kathleen PHILIPP, Timo LEUDERS, Freiburg

Experimentelles Denken fördern

Der empirische Erkenntnisweg, den Peirce in seiner Theorie zum wissenschaftlichen Erkenntnisgewinn beschreibt (vgl. Peirce/Walther 1956, Meyer 2007) bietet eine Möglichkeit, experimentelles Denken als Erkenntnisprozess genauer zu fassen: Peirce nennt neben den beiden wissenschaftlichen Schlussformen Induktion und **Deduktion** eine dritte Schlussform, die **Abduktion**. Bei der Abduktion wird eine erklärende Hypothese gebildet, die neue Erkenntnisse hervorbringen kann. Der **Induktion** kommt bei Peirce die Funktion zu, eine abduktiv aufgestellte Hypothese an weiteren Einzelfällen zu prüfen. Vorweg kann ein deduktiver Zwischenschritt erfolgen, bei dem zunächst Konsequenzen aus den Voraussetzungen expliziert werden.

Alle drei Schlussformen spielen in der Mathematik eine bedeutende Rolle (vgl. auch Polya 1954). Der Fokus in diesem Projekt liegt auf den für das Mathematiklernen bedeutenden Teilprozessen der Abduktion und Induktion und klammert den Bereich der Deduktion aus, bei dem es um das Beweisen mathematischer Phänomene geht, nicht aber um das Erzeugen neuer Erkenntnisse. Im Folgenden sprechen wir bezüglich der Interaktion abduktiver und induktiver (und zum Teil auch deduktiver) Prozesse beim mathematischen Erkenntnisgewinn von „innermathematischem Experimentieren".

Modell zum innermathematischen Experimentieren

Ziel des hier berichteten Teilprojektes war es, das empiriegestütze theoretische Modell zum innermathematischen Experimentieren (vgl. Philipp/Leuders 2010), das über die qualitative Analyse von Schülerbearbeitungsprozessen entwickelt wurde, zu validieren. Dazu wurden die mit diesem Modell verbundenen Kompetenzen hinsichtlich ihrer Struktur und ihrer Förderbarkeit im Unterricht zum Gegenstand der Untersuchung.

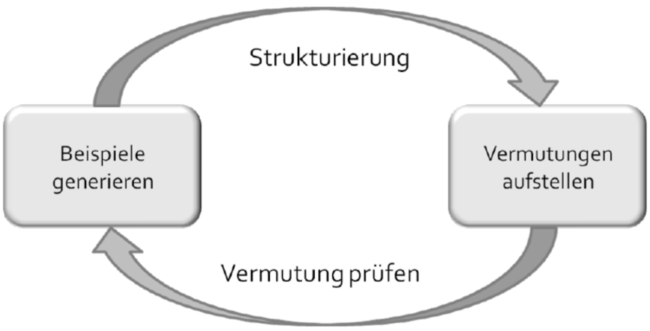


Abbildung 1: Modell zum innermathematischen Experimentieren

Hierzu wurden die in der Abbildung dargestellten experimentellen Schritte als Teilkompetenzen des innermathematischen Experimentierens gedeutet und als Ausgangsbasis für die Operationalisierung von Kompetenzen des experimentellen Denkens genutzt sowie im Rahmen einer experimentellen Unterrichtsintervention spezifisch gefördert. Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit des Trainings werden in diesem Beitrag vorgestellt.

Intervention

Die *Förderung experimenteller Teilkompetenzen* erfolgte in vier Phasen, die sich an bewährten Modellen für Strategietrainings orientieren (vgl. Bruder 2003, Stern 1992):

– Phase 1: Hinführungsphase zur Gewöhnung der Schülerinnen und Schüler an die Art der Aufgabenstellung
– Phase 2: Explizieren von Vorgehensweisen (Strategien) an geeigneten Ankeraufgaben
– Phase 3: Reflexion unterschiedlicher Vorgehensweisen
– Phase 4: Transfer der erlernten Vorgehensweisen auf weitere Aufgabenstellungen

Integriert wurde die Förderung in die Unterrichtseinheit „Zahlenforschung“, die im Rahmen des Projekts KOSIMA entwickelt wurde (vgl. Leuders 2012). Zur optimalen Umsetzung der Intervention wurde das Experimentieren der Schülerinnen und Schüler durch das Schreiben eines „Forschungsheftes“ sowie durch kommunikative Elemente zur Verbalisierung und Reflexion von Bearbeitungsprozessen unterstützt.

Design

Zentrale Fragestellung der Studie war: Inwiefern können Teilfähigkeiten des innermathematischen Experimentierens durch ein gezieltes Training gefördert werden? In einem Zwei-Gruppen-Design mit Experimental- (n=126) und Kontrollgruppe (n=101) wurden in einer 6. Jahrgangsstufe in der Realschule die Inhalte Teilbarkeit und Primzahlen unterrichtet. Die Experimentalgruppe nahm im Rahmen dieser Unterrichtseinheit am Training zur Förderung von experimentellen Teilkompetenzen teil, während in den Kontrollklassen dieselben Inhalte nach Schulbuch unterrichtet wurden.

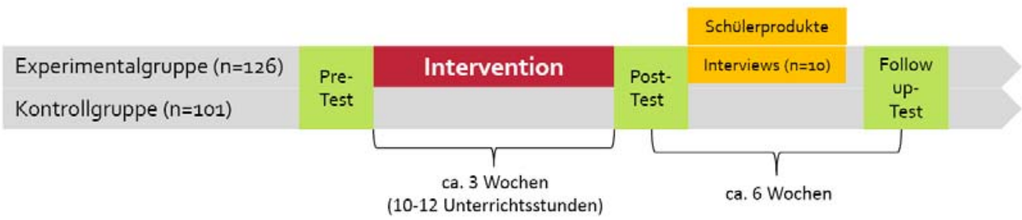


Abbildung 2: Design der Interventionsstudie

Alle Klassen nahmen zu drei Zeitpunkten an einem eigens dafür entwickelten Test zur Erfassung experimenteller Teilkompetenzen teil. Um die Bedingungen der Studie zu kontrollieren wurden weitere Maßnahmen wie gezielte Unterrichtsbeobachtung und schriftliche Lehrerrückmeldung zu allen Unterrichtsstunden eingesetzt.

Entwicklung von Testitems

Abgeleitet aus dem theoretischen Modell zum innermathematischen Experimentieren, wurden zwei Bereiche operationalisiert (vgl. Abbildung 1), um die Entwicklung von experimentellen Fähigkeiten erfassen zu können:

– *Strukturierung*: über die Strukturierung von Beispielen zu einer Vermutung kommen
– *Vermutung prüfen*: eine Vermutung an geeigneten Beispielen überprüfen

Zusätzlich wurden mögliche Moderator variablen wie Geschlecht, Noten in den Fächern Deutsch und Mathematik sowie Motivation und Selbstbild (bezüglich des Faches Mathematik) und die Fähigkeit zum induktiven Denken erfasst. Einige der Aufgaben dienten dazu, das Verständnis der jeweils darauffolgenden Aufgabe zu sichern und gingen nicht in die Analyse der Gruppenunterschiede ein. Aufgaben aus der Unterrichtseinheit wurden im Test nicht verwendet.

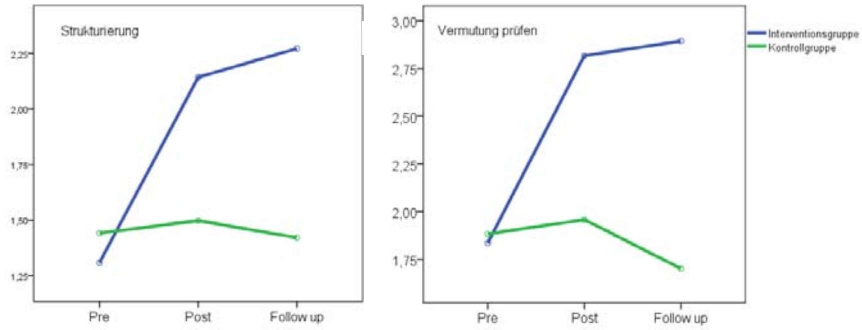
Erste Ergebnisse und Ausblick

Nach inhaltlichen Überlegungen wurden bei der Testkonstruktion zwei Bereiche (Dimensionen) unterschieden, die die Basis für die Bildung von zwei Skalen darstellten (eine höhere Ausdifferenzierung in vier Leistungsdimensionen erwies sich als empirisch nicht tragfähig).

Aufgrund der fehlenden Randomisierung der Gruppenzuteilung in diesem quasi-experimentellen Design wurde die Vergleichbarkeit der Gruppen in einer multivariaten Varianzanalyse zum ersten Messzeitpunkt geprüft. Im Bereich des Selbstbildes ergab sich hier ein signifikanter Unterschied zwischen der Experimental- und der Kontrollgruppe, so dass diese Variable bei den Gruppenvergleichen als Kovariate behandelt wurde. In allen anderen Bereichen wurden keine signifikanten Gruppenunterschiede festgestellt.

Um die Frage nach der *Wirksamkeit des Trainings* zu beantworten, wurde in beiden inhaltlichen Bereichen eine Kovarianzanalyse mit Messwiederholung durchgeführt. In beiden inhaltlichen Bereichen zeigen sich signifikante Unterschiede zwischen den beiden Gruppen. Bei der Kontrollgruppe ist zwischen dem ersten und zweiten Messzeitpunkt ebenfalls ein Zuwachs zu verzeichnen, der allerdings nicht signifikant ist. Beachtenswert ist hier auch der weitere Zuwachs der Experimentalgruppe in beiden Bereichen zwischen dem zweiten und dritten Messzeitpunkt (Follow-up Test nach sechs Wochen).

Abbildung 3: Gruppenunterschiede in den Bereichen "Strukturierung" und „Vermutung prüfen“



Die Effektstärke ist in beiden Bereichen sehr hoch (Strukturierung: η^2=0,393, Vermutung prüfen: η^2=0,338). Wir führen das darauf zurück, dass das theoretische Modell zum innermathematischen Experimentieren in einer qualitativen Studie empirisch verankert ist und damit die Intervention sehr stark an Schülerprozessen orientiert werden konnte (vgl. Philipp/Leuders 2010).

Welche Faktoren das Lernen der experimentellen Strategien im Rahmen dieser Intervention außerdem beeinflussen sowie die Frage, ob unterschiedlich starke Schülerinnen und Schüler unterschiedlich von dem Training profitieren, ist Gegenstand weiterer Analysen.

Hinweis: Die hier beschriebene Unterrichtseinheit ist eingebunden in das Forschungsprojekt „Kontexte für sinnstiftenden Mathematikunterricht“ (KOSIMA) unter Leitung von B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders und S. Prediger.

Literatur

Bruder, R. (2003): Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Material im Rahmen des BLK-Programms „Sinus“ zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Kiel: IPN.

Leuders, T. (in Vorbereitung für 2012): Zahlen unter der Lupe – Zahlen zerlegen und zusammensetzen (Arbeitstitel). Erscheint in: Prediger, S. / Barzel, B. / Hußmann, S./ Leuders, T. (Hrsg.): mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Meyer, M. (2007): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Dissertation. Hildesheim: Franzbecker.

Peirce, C. S. & Walther, E. (Hrsg.) (1965): Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften. Baden-Baden: Agis Verlag GmbH.

Philipp, K., Leuders, T. (2010): Innermathematisches Experimentieren – Eine empirische Analyse von Denkprozessen beim Experimentieren mit Beispielen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM Verlag.

Polya, G. (1954): Mathematik und plausibles Schliessen. Band 1. Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag.

Stern, E. (1992): Die spontane Strategieentdeckung in der Arithmetik. In: Mandl, H. & Friedrich, H.F. (Hrsg.): Lern- und Denkstrategien. Analyse und Intervention. Göttingen: Hogrefe.

Franz PICHER, Klagenfurt

Analysis für alle

Womit sollen sich alle „höher Gebildeten“ beschäftigt haben? Was aus der Analysis zählt dazu, und wie sollen die Inhalte vermittelt werden? Im Folgenden wird ein Zugang zu diesen Fragestellungen präsentiert, bei dem im ersten Schritt durch normative Festlegung auf Grundlage bildungstheoretisch begründeter Listen ein inhaltlicher Text zur „Analysis für alle“ erstellt wird. Auf der Basis dieses Textes soll in einem zweiten, empirischen Schritt ein Auseinandersetzungsprozess mit den beschriebenen Inhalten initiiert werden. Dabei soll mit Repräsentanten von „allen“ über die normativen Setzungen verhandelt werden, um gemeinsam zu einer Überarbeitung des Textes zu kommen, die dann als Grundlage für den dritten Schritt, die Entwicklung eines (sinn- und bedeutungs-) reflexionsorientierten Unterrichts zur Analysis, dienen kann.

1. Analysis und Bildung

Der bildungstheoretische Hintergrund der Überlegungen ist das Konzept der „Höheren Allgemeinbildung“ von Roland Fischer (vgl. etwa Fischer 2001, S. 151 ff). Dieser sieht die Ausbildung von Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen und Experten und mit der Allgemeinheit als zentrales Orientierungsprinzip für die Auswahl von Inhalten der Sekundarstufe II. Für die Kommunikation sind für den Laien und die Laiin vor allem Grundwissen (Konzepte, Begriffe, Darstellungsformen) und Reflexionswissen (Was leisten die Konzepte bzw. Begriffe im Problemkontext, wo sind ihre Grenzen?) vonnöten; operatives Wissen kann zwar im Lernprozess eine wichtige Rolle spielen, tritt aber vom Ergebnis her gesehen in den Hintergrund. Die konkreten Inhalte der Bereiche „Grundkenntnisse“ und „Reflexionswissen“ sind dabei nicht zwingend aus dem Orientierungsprinzip ableitbar; sie sind auszuhandeln – in Lehrplankommissionen, in einem öffentlichen Diskurs und vor allem auch im Klassenzimmer. Aushandelung und damit einhergehend Reflexion, Hinterfragen und Bewerten stehen im Zentrum der vorgestellten Arbeit.

„Analysis für alle“ ist nun im Sinne der „Höheren Allgemeinbildung“ von Roland Fischer zu verstehen, die Betonung folgender Punkte scheint daher als wesentlich für das Folgende:

- Kommunikationsfähigkeit: Im Zentrum stehen die Grundbegriffe wie Änderungsrate und Integral und Reflexionsfragen wie: „Wozu verwendet man Verfahren und Beschreibungen aus der Analysis?“

- Aushandelung: Einen wesentlichen Teil des Lernprozesses soll das (gemeinsame) Nachdenken und Diskutieren über die konkreten, zu lernenden Inhalte darstellen.
- Ausweitung des Blicks (Picher 2010, S. 662): Zentral für die hier vorgestellten Überlegungen ist die Einbettung der Analysis in die Beschreibung von Änderungen in der (Schul-)Mathematik. Dadurch können sich gut Differenzen und Kontinuitäten zum bisher Gelernten wie auch zu Alltagsvorstellungen zeigen lassen (Vohns 2010, S. 247).

2. Auswahl der Inhalte

Die bildungstheoretische Orientierung wird als Grundlage für eine erste, normative Festlegung der zu lernenden Inhalte herangezogen. Das Modell von Roland Fischer (Fischer 2001, S. 154) wird dazu um „Begegnungen" ergänzt und dient dann als Grundlage für die Einteilung mathematischer Lerninhalte in vier Listen, die im Folgenden kurz plakativ und auch inhaltlich beschrieben werden:

- Kompetenzliste („Was übrig bleiben sollte."): Können (aus der Aktionsliste), Lesekompetenz (aus der Begegnungsliste), Reflexionswissen (aus der Reflexionsliste).
- Aktionsliste („Was man einmal getan haben sollte."): Problemlösen mithilfe von Mathematik, Einsetzen von Mathematik in einfachen inner- und außermathematischen Anwendungen.
- Begegnungsliste („Was man einmal gesehen haben sollte, und versucht haben sollte, die Grundzüge zu verstehen."): Lesen, Interpretieren und Verstehen von vorgegebener Mathematik.
- Reflexionsliste („Worüber man einmal nachgedacht haben sollte."): Kontextorientierte Reflexion, Sinn- und Bedeutungsreflexion in Bezug auf das mathematische Themengebiet.

Die erste Liste beschreibt dabei das anzustrebende Produkt: diejenigen Kompetenzen, welche längerfristig überbleiben sollen und die mit Blick auf die bildungstheoretische Orientierung als wesentlich (für Kommunikation) erscheinen. Die Inhalte der übrigen Listen stellen prozessuale Komponenten im Auseinandersetzungsprozess mit dem Lerninhalt dar und beschreiben, was im Unterricht getan werden soll, um die erste Liste zu bedienen.

Die ersten drei Listen spiegeln die drei Ebenen des Wissens (Fischer 2001, S. 153) wider. Die Begegnungsliste scheint darüber hinaus potentiell einen wichtigen Beitrag zur Beziehung zwischen Experte bzw. Expertin und Laiin bzw. Laie liefern zu können: Höher allgemein Gebildete sollen einen

Einblick in die Tätigkeit der Experten und Expertinnen bekommen, was aber nicht durch Komprimierung der Expertinnen-Ausbildung im betreffenden Gebiet geschehen kann. Die Frage, die sich stellt, ist: Wie kann man etwas über die Tätigkeit von Experten und Expertinnen lernen, ohne das zu tun, was diese tun? Eine mögliche Antwort darauf stellen „Begegnungen" mit dem jeweiligen Fachgebiet dar. Für die Analysis scheinen unter anderem folgende Begegnungen als wesentlich:

- Ein Physikbuch und ein Wirtschaftsbuch nach Ableitungen und Integralen durchsucht haben und versucht haben zu verstehen, welche Rolle die Begriffe in diesen Kontexten spielen.
- Anwendungen von Differential- und Integralrechnung, wie die Berechnung von Wechselstromwiderständen und die Beschreibung von Wachstumsprozessen, gesehen haben.
- Simulationen dynamischer Systeme gesehen haben.
- Die Herleitung einer Ableitungsregel über die Definition und mittels Grenzübergang gesehen haben.

Die Aufzählung ist dabei einerseits als ein verhandelbarer Vorschlag zu sehen, andererseits soll betont werden, dass in den obigen Formulierungen immer „und versucht haben, die Grundzüge zu verstehen" mitzudenken ist. Wichtig ist also, dass Begegnungen nicht als rein passive Tätigkeit (miss-) interpretiert werden, sondern als „aktive" Auseinandersetzung mit dem „gesehenen" Inhalt. Wie diese im Einzelnen genau aussehen kann, und was dazu im Unterricht zu tun ist, ist Teil meiner Forschungsarbeit: Ein Vorschlag zur konkreten Umsetzung von „Begegnungen" ist die Diskussion und Reflexion von Texten zur „Analysis für alle".

3. Aushandelung anhand von Texten

Ein (gedanklicher) Blick in übliche Schulbücher kann helfen zu verdeutlichen, wie solche Texte aussehen können: Einleitungen und Ausblicke üblicher Schulbuchkapitel enthalten einen großen Teil der für Lernende im Sinne der Höheren Allgemeinbildung wichtigen Inhalte und sind daher nicht nur diskussionswürdig, sondern auch Wert ausgebaut zu werden. Steigen sollte dabei nicht nur der Umfang dieser Abschnitte, sondern damit einhergehend auch das Angebot an Reflexionsanlässen und Begegnungen im obigen Sinne – solche Texte gedenke ich zu schreiben.

Texte scheinen geeignet, um alle oben genannten Listen zu bedienen, insbesondere aber die Begegnungs- und die Reflexionsliste. Um Begegnungen mit Mathematik zu realisieren, wird es in der Regel schließlich kaum möglich sein, Expertinnen und Experten bei der Arbeit zuzusehen, hier können

Texte als Verschriftlichungen der Arbeit in den jeweiligen Fachgebieten herangezogen werden. Als Anlässe für Reflexionen können Texte gut dienen, weil die Arbeit mit Texten einerseits – von der Reflexionstiefe her gesehen – sehr offen gestaltet werden kann: Texte ermöglichen die Vorgabe von Reflexionsangeboten und Reflexionswissen können aber auch zu eigenen Reflexionen und zum Weiterdenken anregen. Andererseits ermöglicht die Lektüre von Texten dem Leser und der Leserin, sich individuell die nötige Zeit zur Auseinandersetzung mit dem Inhalt zu nehmen.

Im Sinne der beschriebenen bildungstheoretischen Orientierung sollten gerade ein Weiterdenken und ein Hinterfragen der Inhalte vermehrt angestrebt werden: Texte bedienen diesen Wunsch und spielen daher nicht nur eine zentrale Rolle für die Behandlung der Inhalte der oben vorgestellten Listen sondern dienen auch als Grundlage für die Aushandelung der durch die Listen vorgeschlagenen Inhalte. Die Texte stellen damit zugleich einen (bildungstheoretisch begründeten) Vorschlag für die im Rahmen der Analysis zu behandelnden Inhalte als auch die Grundlage für die Hinterfragung dieses Vorschlags dar: Dies zeigt sich auch in den oben vorgestellten Listen, wo Sinn- und Bedeutungsreflexion zentrale Elemente der Reflexionsliste sind.

Wesentliche Inhalte der Texte stellen die Einbettung der Analysis in die Beschreibung von Änderungen in der (Schul-)Mathematik („Ausweitung des Blicks"), die Erläuterung wesentlicher Ideen der Analysis sowie das Aufzeigen von Differenzen und Kontinuitäten im Vergleich zur Alltagssprache dar. Im nächsten Schritt soll über Auswahl und Darstellung der Inhalte mit Repräsentanten und Repräsentantinnen von „allen" (hier: Abiturienten und Abiturientinnen) verhandelt werden, um zu einer Überarbeitung der Texte und der diesen zugrunde liegenden Listen zu kommen. Die weiterentwickelten Texte und Listen können dann als Grundlagen für eine reflexionsorientierten Unterricht zur Analysis dienen.

Literatur

Fischer, R. (2001): Höhere Allgemeinbildung. In: A. Fischer-Buck & al. (Hrsg.): Situation – Ursprung der Bildung, Franz-Fischer-Jahrbuch für Philosophie und Pädagogik 6. Leipzig: Universitätsverlag, 151-161.

Picher, F. (2010): Nachdenken über die Schulanalysis. In: A. Lindmeier & St. Ufer (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM-Verlag, 661-664.

Vohns, A. (2010): Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 31 (2), 227-255.

Guido PINKERNELL, Regina BRUDER, Darmstadt

CAliMERO (2005-2010): CAS in der Sekundarstufe I - Ergebnisse einer Längsschnittstudie

1. CAliMERO (2005-2010)

CAliMERO ist ein Projekt des Landes Niedersachsen zum Einsatz von Taschencomputern im Mathematikunterricht, das 2005 an sechs Gymnasien in allen 7. Klassen (29) begann und 2010 abgeschlossen wurde. Ziel dieser von Texas Instruments unterstützten Studie war die Entwicklung und Erprobung eines nachhaltig wirksamen Unterrichtskonzepts für das Unterrichten mit CAS. Die wissenschaftliche Auswertung oblag der Arbeitsgruppe Bruder an der TU Darmstadt, Ergebnisse für die Klassen 7 und 8 liegen bereits vor (Ingelmann 2009).

1.1 Forschungsfragen

Das Forschungsinteresse betraf die Entwicklung der Mathematikleistung und Wahrnehmung des Unterrichts durch die Schüler sowie die Akzeptanz des Unterrichtskonzeptes durch die Lehrkräfte. Die für die nachfolgend vorgelegten Ergebnisse relevanten Fragen lauten:

- Wie entwickelt sich die Mathematikleistung?
- Gibt es Zusammenhänge zwischen der tatsächlichen Unterrichtsgestaltung und der Mathematikleistung?

1.2 Unterrichtskonzept und Technologieeinsatz

Das an der TU Darmstadt entwickelte Unterrichtskonzept unterstützt nachhaltiges und schülerorientiertes Lernens mit geeigneten Methoden. Für jede Einheit der Klassen 7 bis 10 wurde es von einer Gruppe aus Lehrern, Fachleitern und -beratern in Form von Arbeitsmaterialien konkretisiert. Diese umfassen Aufgabenhefte für Schüler und detaillierte didaktisch-methodische Hinweise für Lehrkräfte, die den Fachlehrern vor Ort zur Verfügung gestellt, evaluiert und überarbeitet wurden (Bruder & Weiskirch 2007).

2 Design

Zur Erfassung der Leistungsentwicklung wurde ein jährliches quasi-experimentelles Pre-Post-Design gewählt, wobei zu Beginn sechs Kontrollklassen anderer Schulen zur Verfügung standen, in denen mit einem GTR gearbeitet wurde. Als Messinstrumente wurden in den Klassen 7 bis 10 ein jährlich angepasster Mathematikleistungstest verwendet (ab Klasse 8 mit technischen Hilfsmitteln), und in den Klassen 8 bis 10 ein jährlich angepasster Grundwissentest (ohne technische Hilfsmittel). Zur Erfassung des Unterrichtsgeschehens wurde u.a. ein standardisierter Protokollbogen verwendet, mittels dessen Schüler für die Dauer einer Einheit Auskunft über Thema, Aufgaben und die methodische Gestaltung einer Unterrichtsstunde gaben.

3. Erste Längsschnittergebnisse

3.1 Mathematikleistung

Die Lerngruppen des Projekts CAliMERO weisen in jedem Schuljahr zum Teil sehr deutliche Leistungszuwächse zwischen den Vor- und Nachttests sowohl des Mathematik- als auch des Grundwissenstests auf. Hierin unterscheiden sie sich aber nicht wesentlich von den Kontrollgruppen. Auch ein leistungsgruppenspezifischer Vergleich zeigt nur tendenziell höhere Zuwächse bei den Leistungsschwachen der CAliMERO-Gruppen als bei denen der Kontrollgruppen, in der Klasse 9 waren die Leistungszuwächse in allen Leistungsgruppen der CAliMERO-Gruppen tendenziell höher.

3.2 Unterrichtsgestaltung und Leistungsentwicklung

Die Protokolldaten erlauben einen differenzierten Blick auf das Unterrichtsgeschehen der CAliMERO-Gruppen, so dass die Leistungsentwicklung der Schüler in einen Zusammenhang mit der tatsächlichen methodischen Gestaltung gebracht werden kann.

<u>Regelmäßige Kopfübungen</u>

Im Unterrichtskonzept wurden Kopfübungen zum Wachhalten mathematischen Grundwissens empfohlen, die mind. alle zwei Wochen einzusetzen waren. In den Materialien waren entsprechende Übungen enthalten. Nicht alle Fachlehrer der CAliMERO-Klassen hielten sich an diese Empfehlung, wie anhand der Stundenprotokolle festgestellt werden konnte. Differenziert man die Projektgruppen hinsichtlich der Häufigkeit des Einsatzes, so lässt sich bzgl. der Leistungsentwicklung im Grundwissenstest ein signifikanter Vorteil für die Gruppen mit "häufigem" Einsatz feststellen (ANOVA, $p < 0{,}01$, Abb.1). Im Mathematikleistungstest dagegen ist kein signifikanter Unterschied festzustellen.

<u>Einsatzhäufigkeit des Taschencomputers</u>

Der Einsatz von digitalen Hilfsmitteln ist gerade in Unterrichtseinheiten zu Funktionalen Zusammenhängen empfehlenswert. Auf Basis der in diesen Einheiten geführten Unterrichtsprotokolle zeigt sich ein signifikanter Vorteil für die Gruppen mit "nahezu fortwährendem" TC-Einsatz (in mehr als

90% aller erfassten Stunden) sowohl im Grundwissenstest (ANOVA, $p < 0,01$, Abb. 2) als auch im Mathematikleistungstest. Hinzuweisen ist aber auf die große Differenz im ersten Leistungstest, die auch einen Klasseneffekt vermuten lässt.

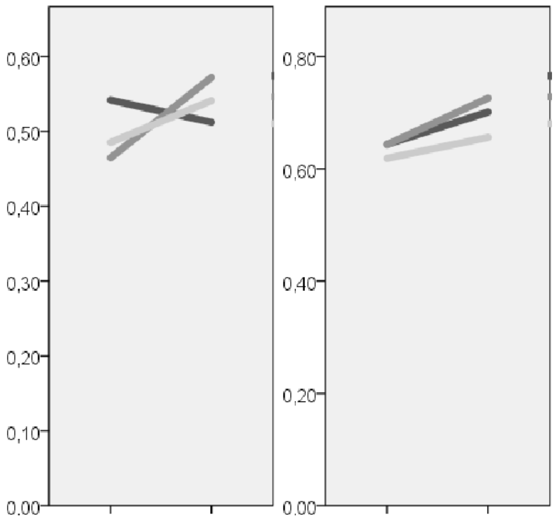


Abb.1: Erfüllungsgrade in den Vor- und Nachtests „Grundwissen“ in 9 bzw. 10 in den CAliMERO-Klassen mit häufigem (dunkel, N=68) und weniger häufigen (hell, N=81) Einsatz von **Kopfübungen**, die Kontrollen (schwarz) zum Vergleich.

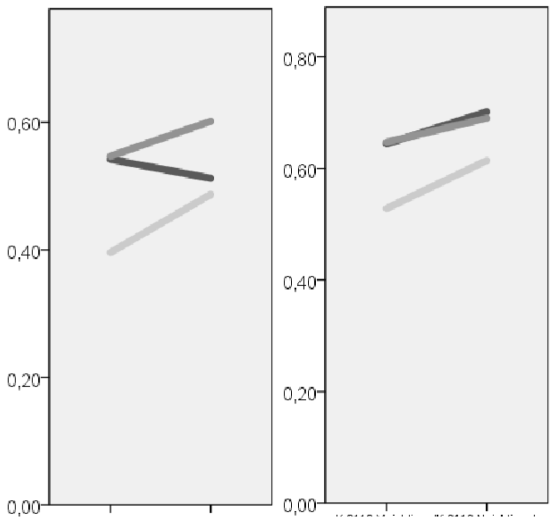


Abb.2: Erfüllungsgrade in den Vor- und Nachtests „Grundwissen“ in 9 bzw. 10 in den CAliMERO-Klassen mit nahezu fortwährendem (dunkel, N=78) und weniger häufigen (hell, N=45) **TC-Einsatz**, die Kontrollen (schwarz) zum Vergleich.

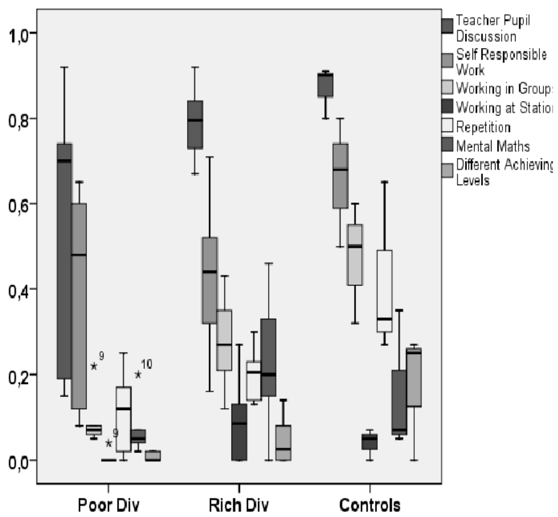


Abb.3: Eine große **Methodenvielfalt** (Mitte) zeichnet sich aus durch relativ häufiges Unterrichtsgespräch, selbständiges Arbeiten, Gruppenarbeit, Stoffwiederholung, Kopfübungen und leistungsdifferenzierende Aufgaben. Darin ähneln diese CAliMERO-Gruppen den leistungsstarken Kontrollklassen (rechts).

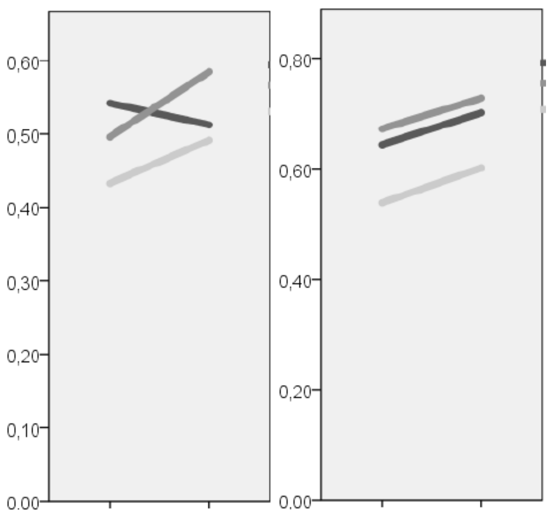


Abb.4: Erfüllungsgrade in den Vor- und Nachtests „Grundwissen“ in 9 und 10 in den CAliMERO-Gruppen mit großer (dunkel, N=78) und wenig (hell, N=45) **Methodenvielfalt**, die Kontrollen (schwarz) zum Vergleich.

Methodenvielfalt

Die Protokolldaten erlaubten auch eine Differenzierung der CAliMERO-Klassen hinsichtlich der Vielfalt der vorkommenden Unterrichtsmethoden. Eine Klassifizierung nach der Methodenvielfalt erfolgte auf Grundlage eines modifizierten Shannon-Diversitätsindex, nach dem ein zu häufiges bzw. ein zu seltenes Vorkommen einer vorgegebenen Methode zur Abwertung führte. Auf Grundlage dieses Wertes wurden CAliMERO-Klassen mit geringer und mit hoher Methdenvielfalt identifiziert (Abb. 3). Auch hier zeigt sich: Klassen mit großer Methodenvielfalt weisen in beiden Testformen deutlich bessere Leistungen auf (ANOVA, $p < 0{,}01$, Abb.4).

3.3 Zusammenfassung und Diskussion

Bzgl. der Leistungsentwicklung unterscheiden sich die CAliMERO-Klassen insgesamt nicht wesentlich von den leistungsstarken Kontrollklassen. Beide weisen zumeist parallele, zum Teil deutliche Zuwächse auf (so auch z.B. Bichler 2010). Die Präsenz von digitalen Hilfsmitteln im Unterricht führt per se nicht zu höheren Leistungen.

Bei Differenzierung bzgl. der Unterrichtsgestaltung erkennt man allerdings deutliche Leistungsunterschiede zugunsten „methodenreicher" Klassen. Zwei Interpretationen sind möglich: Die erfasste methodische Gestaltung lässt auf ein professionelles Lehrerhandeln als eigentliche Wirkungsursache für ein höheres Leistungsniveau schließen (Lipowsky 2006). Leistungsunterschiede im Vortest Klasse 9 aber lassen auch vermuten, dass die generelle Leistungsfähigkeit einer Klasse die methodischen Entscheidungen des Lehrers beeinflusst (Arbaugh et al. 2006). Insgesamt machen unsere Ergebnisse deutlich, dass neben der Verfügbarkeit von Technologie und Materialien die Ausbildung didaktisch-methodischer Kompetenzen der Lehrkräfte wichtig ist für einen effektiven technologiebasierten Unterricht.

Literatur

Arbaugh; Lannin; Jones; Park-Rogers: (2006): Examining instructional practices in core-plus lessons. In: Journal of Mathematics Teacher Education, 9, 517-550

Bichler (2010): Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht, Hamburg: Kovac

Bruder, R. & Weiskirch, W. (Hrsg.)(2007ff.): CAliMERO - Computer-Algebra im Mathematikunterricht. Arbeitsmaterialien für Schüler und methodisch-didaktische Handreichungen für Lehrer, mehrere Bände. T³ Deutschland

Ingelmann, M. (2009): Evaluation eines Unterrichtskonzeptes für einen CAS-gestützten Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Berlin: Logos

Lipowsky, F. (2006), Auf den Lehrer kommt es an. In C. Allemann (Hrsg.): Kompetenzen und Kompetenzentwicklung von Lehrerinnen und Lehrern. Weinheim: Beltz

Meike PLATH, Lüneburg

Aufgaben in unterschiedlichen Präsentationsformen zum räumlichen Vorstellungsvermögen von Kindern im vierten Schuljahr

Wenige Studien befassten sich in den letzten Jahrzehnten mit dem räumlichen Denken von Kindern im Grundschulalter (vgl. Quaiser-Pohl 2001). Auch wird das räumliche Vorstellungsvermögen der Probanden häufig nur auf einer zweidimensionalen Testebene (z.B. Paper-and-Pencil-Test) erhoben, obwohl es meist durch Handlung mit Material geschult wird. Diese Diskrepanz soll in der vorliegenden Studie aufgegriffen werden, um mit einer weiteren Präsentationsform die Forschungslücke zwischen Handlung am Material und dem Arbeiten mit Abbildungen zu schließen.

1. Theorie

Die Begriffe „Raumvorstellung“ oder „räumliches Vorstellungsvermögen“ werden umgangssprachlich verwendet, wenn von räumlichem Denken gesprochen wird (vgl. Mueller 1986). So spricht Rost von der *„Fähigkeit zum visuellen Operieren mit konkreten, sichtbaren oder vorgestellten Objekten“* (Rost 1977, S.9). Eine einheitliche Definition ist in der Literatur aber nicht zu finden. *„Spatial ability has been defined in such a variety of different ways that it is often difficult to be precise about the meanings which we ascribe to the term“* (Eliot & Smith 1983, S.1). Seit den 30er Jahren sind Untersuchungen zur Raumvorstellung Gegenstand vieler faktoranalytisch-psychometrischer Forschungen und es entstanden verschiedene Modelle, welche ihre Aufmerksamkeit auf die Anzahl der Faktoren von Raumvorstellung fokussieren (vgl. Hosenfeld et al. 1997; Linn & Petersen 1985; Mc Gee 1979). Wegweisend waren die Arbeiten von Thurstone (1938; 1950). Er zerlegte das Konzept „space“ in seiner Untersuchung in die Einzelfaktoren *spatial relations* (S_1), *visualization* (S_2 oder Vz) und *spatial orientation* (S_3). Aufbauend auf Thurstone und der Meta-Analyse von Linn und Petersen (1985) erarbeitete Maier (1999) eine Zusammenfassung der wesentlichen Komponenten der räumlich-visuellen Qualifikationen und unterschied die fünf Faktoren *Veranschaulichung, mentale Rotation, räumliche Beziehungen, räumliche Wahrnehmung* und *räumliche Orientierung,* welche als Grundlage für die vorliegende Studie dient.

2. Forschungsdesign

In der vorliegenden Studie werden verschiedene Forschungsfragen untersucht. Im Fokus dieses Artikels soll der folgenden Forschungsfrage nachgegangen werden: Hat die Präsentationsform Einfluss auf die Lösungsrate und Strategiewahl der Kinder beim Lösen von Aufgaben zum räumlichen Vorstellungsvermögen?

Studien im Bereich Raumvorstellung, wie die von Merschmeyer-Brüwer (2001) oder das Projekt von Meißner (2006), arbeiten entweder mit *Abbildungen (ikonisch)* oder *Material (enaktiv)*. Die Probanden müssen aus der Abbildung eine Vorstellung vom gezeigten räumlichen Objekt erzeugen (vgl. Köhler 2002). Tests arbeiten in der Regel auf dieser Ebene um das räumliche Denken zu untersuchen, so wird auch bei Thurstone (1938) oder Grüßing (2002) ein Paper-and-Pencil-Test eingesetzt.

Soll Raumvorstellung dagegen geschult und im Unterricht thematisiert werden, verwendet man verschiedene dreidimensionale Materialien, mit denen sich die Probanden, beispielweise wie bei Götze und Spiegel (2006), handelnd auseinandersetzen. Traditionell wird also das räumliche Vorstellungsvermögen durch Handlung mit Material trainiert, dagegen auf einer zweidimensionalen Ebene getestet. Woraus lässt sich aber schließen, dass die Handlung die Probanden tatsächlich zu abstrakten, mentalen Denkprozessen führt? Hängen Lösungsstrategien nicht wesentlich vor der Präsentationsform ab? Der genaue Zusammenhang zwischen Präsentationsform, Lösungsrate und -strategie wurde bisher nicht untersucht und soll deshalb Schwerpunktthema der vorliegenden Studie sein. Daher werden die folgenden Aufgaben zum einen als Fotoversion und zum anderen als Gegenstandsversion, welche allerdings keine Manipulation am Material gestattet, präsentiert.

3. Die Aufgaben

Um ein möglichst breites Spektrum von Fähigkeiten der Raumvorstellung abzudecken, wird den Aufgaben und deren Kategorisierung das Strukturmodell von Maier (1999) zugrunde gelegt. Dadurch können die unterschiedlichen Denkbereiche durch den Aufgabentyp implizit angesprochen werden. Insgesamt wurden vier unterschiedliche Aufgabentypen beider Präsentationsformen „Gegenstand“ und „Foto“ entwickelt.

Bei der Aufgabe „Wer sieht was?“ (Abb. 1) handelt es sich um eine Aufgabe zur Perspektivübernahme. Die Probanden müssen verschiedene Ansichten einem Würfelgebäude zuordnen. Diese Aufgabe entspricht einer typischen Aufgabe aus dem Bereich der *räumlichen Orientierung* und beinhaltet zwei Würfelgebäude mit je sieben Ansichten.

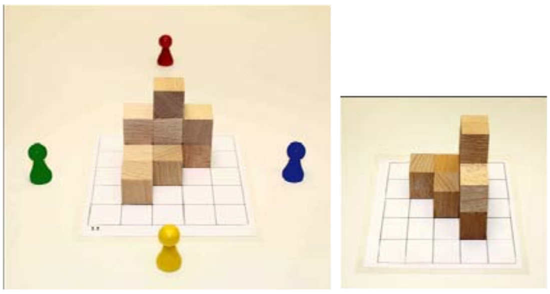


Abb. 1: „Wer sieht was?“

Die Aufgabe „Wer berührt wen?“ (Abb. 2) erfordert von den Probanden Lagebeziehungen zwischen drei zusammengestellten Soma-Teilen zu analysieren. Zu dieser Aufgabe gehören sieben Teilaufgaben mit verschiedenen Kombinationen aus drei Teilen. Die Probanden sollen entscheiden, ob sich von diesen Teilen das linke und das rechte Teil mit einer ganzen Würfelfläche berühren. Diese Aufgabe ist dem Faktor *räumliche Beziehungen* zuzuordnen.

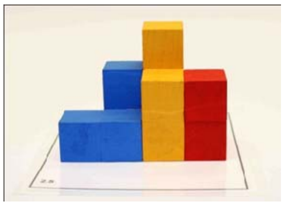


Abb. 2: „Wer berührt wen?“

Die Aufgabe „Würfelschlangen vergleichen“ (Abb. 3) spricht den Bereich der *mentalen Rotation* an. Die Probanden sollen zwei unterschiedlich ausgerichtete Würfelschlangen vergleichen und entscheiden, ob es sich um die gleiche Würfelschlange handelt. Zu einer Ausgangsschlage (im Bild links) werden den Probanden fünf verschiedene Vergleichsschlangen präsentiert.

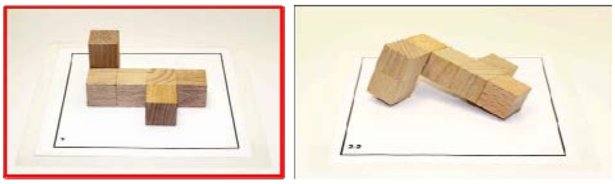


Abb. 3: „Würfelschlangen vergleichen“

Bei der Aufgabe „Bauen mit Soma-Teilen“ (Abb. 4) müssen die Probanden entscheiden, ob sie aus vorgegebenen Soma-Teilen ein bestimmtes Würfelgebäude zusammenbauen könnten. Die mentale Tätigkeit des Zusammenbauens ist eine typische Aktivität der Komponente *Veranschaulichung*. Diese Aufgabe besteht aus drei Sets. Bei den ersten beiden Sets werden zwei, bei dem dritten Set drei Soma-Teile vorgegeben. Zu jedem Set gehören vier Würfelgebäude.

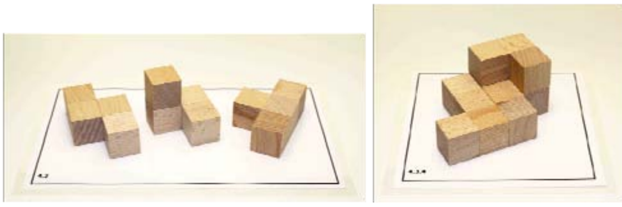


Abb. 4: „Bauen mit Soma-Teilen“

4. Rück- und Ausblick

Das Aufgabenmaterial für diese Studie wurde in einer Vorstudie mit Kindern einer vierten Klasse erprobt und anschließend evaluiert. Da in der Studie neben der unterschiedlichen Präsentationsform auch das Leistungsniveau der Kinder von Bedeutung ist, wurde mit 117 Kindern aus der Hamburger Rechentest (HeReT 4) durchgeführt. Mit Hilfe der rangskalierten Testergebnisse ergab sich eine Stichprobe von 59 Kindern. Im Februar

2011 startete die Hauptuntersuchung. Den Kindern werden die Aufgaben in leitfadengestützten Einzelinterviews präsentiert und ihr Vorgehen mit Hilfe eines Protokollbogens und einer Videokamera dokumentiert. Neben der genannten Forschungsfrage und dem Leistungsniveau sollen auch die Strategien der Kinder analysiert werden, da Strategien traditionell zwar als aufgabenabhängig und personenunabhängig erachtet werden. Neuere Studien haben aber gezeigt, dass Probanden unterschiedliche Strategien selbst innerhalb eines Aufgabentyps einsetzen und jede Aufgabe mehrere Strategien ermöglicht (vgl. Lüthje 2010 und die darin zu findende Zusammenfassung).

Literatur

Besuden, H. (1984): Knoten, Würfel, Ornamente. Stuttgart: Klett.

Eliot, J.; Smith, I.M. (1983): An International Directory of Spatial Tests. Windsor: NFER-Nelson.

Götze, D.; Spiegel, H. (2006): Potz Klotz. In: Grundschule Mathematik, 10, 16-19.

Grüßing, M. (2002): Wie viel Raumvorstellung braucht man für Raumvorstellungsaufgaben? – Strategien von Grundschulkindern bei der Bewältigung räumlich-geometrischer Anforderungen. In: ZDM 34 (2), S. 37-45.

Hosenfeld, I., Strauß, B., Köller, O. (1997): Geschlechtsdifferenzen bei der Lösung von Raumvorstellungsaufgaben: Eine Frage der Strategie? In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 11, 85-94.

Köhler, E. (2002): Wirklichkeit und Bilder im Geometrieunterricht. In: Grundschule, 12, 52-54.

Linn, M.C., Petersen, A.C. (1985): Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability: A Meta-Analysis. In: Child Development, 6, 1479-1498.

Maier, P.-H. (1999): Räumliches Vorstellungsvermögen. Donauwörth: Auer.

McGee, M. G. (1979): Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences. In: Psychological Bulletin 86 (5), S. 889-918.

Meißner, H. (2006): Projekt DORF - Raumvorstellungen verbessern. In: Journal für Mathematikdidaktik 27, S. 28 – 51.

Mueller, K.P. (1986): Raumvorstellung. Was ist das und warum ist das wichtig? In: Pädagogische Welt, 40, 23-26.

Quaiser-Pohl, C. (2001): Räumliches Denken bei Kindern: Entwicklung, Erfassung und praktische Bedeutung. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht, 48, 241-245.

Rost, D.H. (1977): Raumvorstellung. Weinheim: Beltz.

Thurstone, L.L. (1938): Primary Mental Abilities. Chicago: University of Chicago.

Thurstone, L.L. (1950): Some Primary Abilities in Visual Thinking. In: The Psychometric Laboratory Research Report, 59, 1-7.

Melanie PLATZ, Landau, Engelbert NIEHAUS, Landau

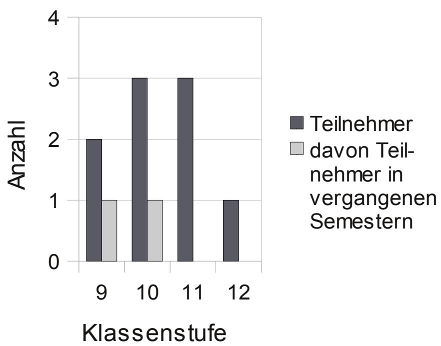
Problemlösen von Schülerinnen und Schülern mit besonderen mathematischen Begabungen

Vorgestellt werden erste Ergebnisse einer Voruntersuchung zu den Lernvoraussetzungen von Schülerinnen und Schülern (SuS) mit besonderen mathematischen Begabungen ohne Abitur für die Teilnahme an der Erstsemestervorlesung "Fachwissenschaftliche Grundlagen" (FWG) an der Universität Koblenz-Landau im WS 2010/11. Den SuS fehlen i.d.R. fachmathematische Lernvoraussetzungen für die Teilnahme an der Lehrveranstaltung. Zielsetzung ist es, die von den SuS ausgleichbaren Lernvoraussetzungen von den schwerwiegenderen, nicht ausgleichbaren zu trennen. In diesem Zusammenhang sollen erste Hypothesen aufgestellt werden, welche mathematischen Vorkenntnisse zum Verstehen der Inhalte und Bestehen des Leistungsnachweises notwendig sind. Im Rahmen dieser Lehrveranstaltung wurden die Problemlösestrategien von Frühstudierenden untersucht. Beschreibung des Vorgehens bei der Bearbeitung von Übungen zur Vorlesung durch die SuS, sowie die schriftlichen Lösungswege dieser wurden dazu analysiert. Die ersten Ergebnisse werden verwendet, um Schlussfolgerungen für die weitere Konzeption der Lehrveranstaltung FWG zu ziehen.

1. Vorlesung FWG im Wintersemester 2010/2011

Die Schüleruniversität geht auf eine Initiative von Halbritter (2000) an der Universität Köln zurück. In diesem Semester nahmen 380 Studierende, sowie 4 Schüler und 5 Schülerinnen mit besonderer mathematischer Begabung an der Vorlesung FWG teil. Folgendes Diagramm zeigt eine Eingruppierung der SuS nach Klassenstufen:

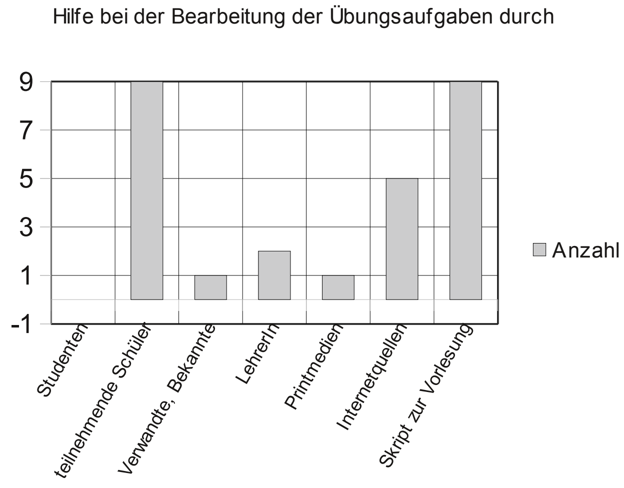
In der Vorlesung wurden Logik, Mengen und Beweisverfahren behandelt. Zudem waren Relationen und Abbildungen Gegenstand, besonders die Eigenschaften von Abbildungen. Auch Teilbarkeitskriterien, Primzahlen, gemeinsame Vielfache und gemeinsame Teiler waren Inhalt der Veranstaltung.



2. Untersuchungsgegenstand

Untersuchungsgegenstand waren Beiträge in der Übung, schriftliche Lösungen der wöchentlichen Übungsaufgaben (Bearbeitung in Einzel- bzw. Gruppenarbeit) und die Schülerlösungen der Klausur. Bei guter (bzw. sinnvoller) Bearbeitung der Übungsaufgaben konnte man bis zu 5 Prozent Sonderpunkte bei der Klausur erreichen. 9 SuS nahmen an einer Übung separiert von Studierenden teil, um einerseits Lernprozesse und die Kooperation zwischen den SuS besser beobachten zu können und andererseits Hemmungen, vor Studierenden falsche Beiträge zu leisten, zu minimieren. Den Hemmungen bei der Präsentation von unvollständigen Lösungen steht die Selbstwirksamkeit und Frustrationstoleranz bei der Entwicklung von Lösung gegenüber (vgl. Pajares 1996). Dennoch durften die SuS auch an den regulären Übungen der Studierenden teilnehmen.Drei SuS nahmen dieses Angebot aufgrund besserer Eignung des Termins an, wechselten dann aber zwecks zu langsamem Fortschritt wieder zurück in die separierte Übung. An der Klausur nahmen 4 Schülerinnen und 4 Schüler teil, eine Schülerin verlor im Laufe der Veranstaltung das Interesse und nahm nicht teil. Folgendes Diagramm bietet einen Überblick über die Hilfestellungen, welche die SuS bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben in Anspruch nahmen:

Ein Schüler der Klassenstufe 9 lieferte besonders interessante Beobachtungsergebnisse. Diese sollen nun exemplarisch beschrieben werden, waren allerdings bei den meisten anderen SuS ebenso zu beobachten, zum Teil weniger ausgeprägt. Der eben genannte Schüler nahm bereits im WS 09/10 und im SS 10 an der Schüleruniversität teil. Er konnte sich mit Fragen sowohl an seine Eltern, als auch an seine Lehrer wenden. Als einziger recherchierte er in Büchern. Er bearbeitete immer die Übungsaufgaben und war stets anwesend. Bei der schriftlichen Lösung einer Übungsaufgabe des Schülers war folgendes zu beobachten: Um eine Aussage zu beweisen wendete er die Inverse-Elementeigenschaft der Gruppe (□ ,+) an, obwohl Gruppen in der Veranstaltung FWG nicht behandelt wurden. Im WS 09/10 besuchte der Schüler allerdings die Veranstaltung Kryptologie, in der das Thema Gruppen ein Gegenstand war. Eine Analogiebildung ist feststellbar. Die Strategie des Rückwärtsarbeitens (von einem falschen Taschenrechnerergebnis) wird durch folgenden Problemlöseprozess in der Übung deutlich: Aufgrund eines Klammersetzungsfehlers bei der Berechnung einer Summe mit seinem Taschenrechner, zweifelte er die Gültigkeit der Methode zum Aufspalten einer Summe aus der Vorlesung an. Dies änderte sich auch nicht durch Anfragen an weitere „mathematische Experten“, die ihm ebenfalls die Korrektheit der Methode aus der Vorlesung bestätigten. Die Überzeugung, dass der Taschenrechner korrekt rechnet, führte ihn zu der Notwendigkeit, die Regel zur Aufspaltung der Summe durch Rückwärtsarbeiten so abzuändern, dass das Taschenrechnerergebnis zur Formel passte. Erst durch die Alternativberechnung mit einem Tabellenkalkulationsprogramm zweifelte er sein Taschenrechnerergebnis an - war dann aber der Meinung, einen Programmierungsfehler des Taschenrechners entdeckt zu haben. Erst als ein weiterer Teilnehmer an der Schüleruniversität ihn auf



seinen Klammersetzungsfehler aufmerksam machte, gestand er sich seinen Fehler ein. Dies zeigt exemplarisch, dass auch SuS mit besonderen mathematischen Begabungen in bestimmten Fällen eher auf die Zuverlässigkeit maschineller Berechnungen als auf die eigene logische Analyse, oder auf die Inhalte in der Vorlesung bzw. die Anmerkungen der Mitschüler vertrauen. Auffällig war ebenso, dass der Schüler häufig den Ansatz von Aufgaben richtig bearbeitet, dann aber, bei Problemen der Weiterführung, bevorzugt den Ansatz mit der Lösung zu einer anderen Aufgabe fortzuführen, bei deren Richtigkeit er sich sicher ist. Als Beispiel ist eine vollständige Induktion zu nennen. Induktionsanfang und -voraussetzung wurden korrekt aufgeschrieben, aber der Induktionsschritt stammt von einer anderen Induktionsaufgabe. Durch die herausgehobene Stellung im Mathematikunterricht und durch die Teilnahme an der Schüleruniversität sind für ihn wahrscheinlich falsche Lösungen inakzeptabel. Bevor er eine falsche Lösung notierte, zog er das Aufschreiben einer korrekten, nicht zur Aufgabenstellung passenden Lösung vor. Dieses Verhalten war analog auch bei mehreren anderen SuS zu beobachten, die in der Klausur ganze Aufgaben nicht bearbeiteten, um unvollständige oder fehlerhafte Lösungen zu vermeiden. Insgesamt zeigten die SuS bei fehlenden Lernvoraussetzungen eine schnelle Auffassungsgabe. So konnte z.B. der Begriff der Fakultät und die Potenzrechnung, die einer Schülerin der Klassenstufe 9 noch als Lernvoraussetzungen fehlte, nach kurzer Einführung selbst in der Klausur sicher angewendet werden.

3. Fazit

Die SuS zeigten folgende Problemlösestrategien: Sie orientierten sich stark an Bekanntem und an „Expertenwissen". Es wurde das Rückwärtsarbeiten und die Analogiebildung angewendet. Die SuS sahen keinen Wert in der Zerlegung eines Problems in Teilprobleme, „Nur korrekte Lösungen sind von Wert.". Als Lernvoraussetzungen zum Verstehen der Inhalte und zum Bestehen der Klausur haben sich folgende herausgestellt: Vermutlich reichen die Vorkenntnisse der Klassenstufe 9 bei mathematisch begabten SuS aus, da fehlende Lernvoraussetzungen schnell aufgearbeitet werden können. Obwohl alle SuS die abschließende Klausur bestanden haben, ist ein entscheidendes Lernziel für die weitere Konzeption der Teilnahme von SuS an der Veranstaltung das Ablegen der „Fehlervermeidungsstrategie“ und die Förderung des Mutes, zur Präsentation von unfertigen und u.U. fehlerhaften Teillösungen. Der Mut zur Präsentation von Teillösungen ermöglicht die Kooperationsfähigkeit zwischen SuS (die SuS kooperierten erst sehr spät, nach ca. 9 Wochen, untereinander) und letztlich auch zwischen Studierenden und Schülern im Rahmen der Schüleruniversität. D.h., dass von Beginn an die Wertschätzung von unfertigen Teillösungen bei sich und bei anderen SuS gefördert werden sollte. Für die Integration der SuS in die Konzeption der Lehrveranstaltung FWG ergeben sich folgende Konsequenzen: Zielsetzung ist ein generisches Konzept, das den Grad der Kooperation zwischen SuS und Studierenden an der Lernvoraussetzungen der beteiligten Studierenden orientiert. Dazu könnten je nach Kapazität spezielle Tutorien nur für die SuS angeboten werden, in denen wenige Studierende der unteren Semester mit Beobachtungsaufgaben im Rotationsprinzp hospitieren können. Für das kooperative Problemlösen mit den SuS eignen sich Studierende der höheren Semester, die bereits didaktische Erfahrungen gesammelt haben. Als Bachelorarbeit könnten „Patenschaften“ von SuS durch Studierende übernommen werden. Jedem Studierenden wird dabei ein/ -e Schüler/ -in zugeordnet, den/ die er während der Lehrveranstaltung mit Forschungsfragen aus der Bachelorarbeit begleitet, beobachtet und dem/ der betreuten Schüler/-in im Gegenzug für Fragen zur Verfügung steht. Darüber hinaus könnte den Schülerstudierenden zukünftiger Semester eine schriftliche Zusammenstellung fehlender Lernvoraussetzungen der Schülerstudierenden vergangener Semester zur Verfügung gestellt werden, um der Lehrveranstaltung FWG besser folgen zu können. Auch für die teilnehmenden Studierenden könnte diese Zusammenfassung hilfreich sein.

Literatur

Halbritter, Ulrich (2001) Projektseite Schüleruniversität der Universität zu Köln, http://www.mi.uni-koeln.de/Math-Net/mn_categories/pages/hochbegabten.html (28.02.2011)

Warlich, L. (2006). *Grundlagen der Mathematik für Studium und Lehramt.* Norderstedt: Books on Demand GmbH.

Tücke, M. (2005): *Schulische Intelligenz und Hochbegabung für (zukünftige) Lehrer und Eltern.* Münster: LIT Verlag (Osnabrücker Schriften zur Psychologie; Bd. 9).

Vock, M.; Preckel, F.; Holling, H. (2007): *Förderung Hochbegabter in der Schule.* Göttingen: Hogrefe-Verlag.

Wagner, H.; Zimmermann, B. (1986): *Identification and Fostering of Mathematically Gifted Students.* (Educational Studies in Mathematics 17, p. 243 - 259).

Herbert PODLOGAR, Martin STEIN, Universität Münster

Entwicklung eines Tests für eine webbasierte Testplattform zur Erfassung mathematischer Basiskenntnisse in der beruflichen Bildung

1. Einführung

Qualifizierte Mitarbeiter werden für Betriebe in Zukunft die wichtigste Ressource im internationalen Wettbewerb sein. Trotzdem weisen viele Interessierte an Meisterlehrgängen vor Lehrgangsbeginn starke Defizite im Bereich der Schulmathematik auf, obwohl mathematische Grundkenntnisse unverzichtbare Voraussetzungen in allen Bereichen der Meisterqualifizierung sind. Das vom BMBF geförderte Projekt Mathe-Meister hat für verschiedene Berufsfelder internetbasierte Tests entwickelt, mit deren Hilfe sich Interessenten an Meisterlehrgängen effizient prüfen können, ob sie die benötigten Basiskenntnisse in Mathematik besitzen.

Die Entwicklung der Tests verlief in mehreren Phasen. Diese Phasen können durch Arbeitspakete und darin erarbeitete Meilensteine wiedergegeben werden. Abbildung 1 stellt den Entwicklungsprozess schematisch dar. Im Folgenden werden die einzelnen Entwicklungsphasen näher erläutert und durch zugehörige Resultate veranschaulicht.

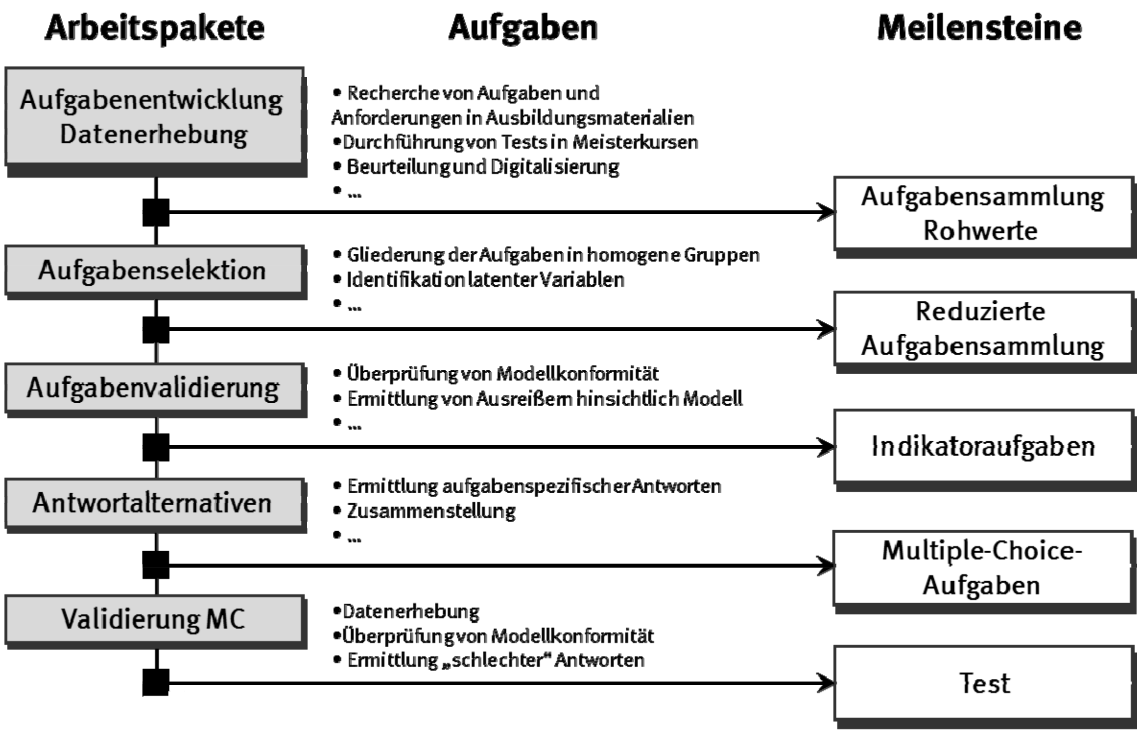


Abbildung 1: Phasen-Meilensteindiagramm zur Testentwicklung

2. Aufgabenentwicklung und Datenerhebung

Ausbildungsgänge mit dem Ziel eines Industrie- bzw. Handwerksmeisters sind in verschiedene Lernfelder gegliedert, die zum einen fachspezifische und zum anderen betriebswirtschaftliche Inhalte umfassen. In diesen Lernfeldern werden an vielen Stellen mathematische Methoden verwendet, die den Teilnehmern bereits in der Schule und der Ausbildung vermittelt wurden; sie werden daher von Ausbildern in der Regel vorausgesetzt.

Um die mathematischen Anforderungen zu Beginn eines Meisterkurses zu ermitteln, mussten die dazugehörigen Lehrinhalte untersucht werden. Hierzu wurden Rahmenlehrpläne und Lehrwerke untersucht. Die gewonnen Daten wurden anschließend durch Interviews mit Ausbildern sowie eine breiter angelegte Online-Umfrage validiert [vgl. Podlogar 2010].

Im Rahmen der Analysen ist eine Sammlung von 228 Items entwickelt worden, die sich den Oberthemen Arithmetik, Algebra, Geometrie, Bruchrechnung sowie Dreisatz und Prozentrechnung zuordnen lassen. Um die Eignung der einzelnen Items zu überprüfen, wurden Testdatensätze von insgesamt 454 Meisterschülern erhoben. Mithilfe der gewonnenen Daten konnten anschließend mithilfe einer Faktorenanalyse Gruppen ähnlich bearbeiteter Aufgaben identifiziert werden. Beispiele für solche Aufgabengruppen sind Aufgaben zum „Umrechnen von Einheiten“ als Teilbereich der Arithmetik oder Aufgaben zu „linearen Gleichungen“ als Teilbereich der Algebra. Es hat sich bei der Auswertung insbesondere gezeigt, dass sich die statistisch ermittelten Gruppen auch inhaltlich begründen ließen [vgl. Podlogar 2010]. Aus diesen Gruppen wurden schließlich diejenigen Aufgaben als Indikatoraufgaben ausgewählt, die einen statistisch besonders großen Zusammenhang mit der gesamten Gruppe aufwiesen. Die Aufgaben wurden danach den ursprünglichen Oberthemen zugeordnet und hinsichtlich des Rasch-Modells überprüft [vgl. Podlogar 2010]. Eine Übersicht über die Oberthemen und die Anzahl der zugehörigen Indikatoraufgaben liefert Tabelle 1.

Tabelle 1: Übersicht Indikatoraufgaben

	Indikatoraufgaben				
Oberthemen	Arithmetik	Algebra	Geometrie	Bruchrechnung	Dreisatz &Prozente
Itemanzahl	8	11	10	6	10

3. Entwicklung von Multiple-Choice-Items

Die Online-Testplattform soll Nutzern eine individuelle Rückmeldung zu Defiziten und Fehlern geben. Die Basis zu diesen Rückmeldungen liefert die Analyse der durchgeführten Papiertests, vgl. Abschnitt 2. Hier wurden die relevantesten Fehlertypen ermittelt und in Form von Fehleranalysetexten dokumentiert. Damit die Online-Testplattform die Fehler und die Fehleranalysetexte einander zuordnen kann, bedarf es eines geeigneten Antwortformats. Aufgaben mit offenem Aufgabenformat sind hierfür ungeeignet, da neben den typischen Fehlern auch andere Fehler auftreten können, zu denen keine Analyse existiert. Zudem können Antworten syntaktisch anders eingegeben werden, als dies zu erwarten ist; die Software ist dann unter Umständen nicht in der Lage, eine passende Zuordnung zu treffen.

Im Rahmen des Projekts wurde daher das Multiple-Choice-Format für die Online-Plattform ausgewählt (vgl. Abb. 2). Dieses Format ist leicht handhabbar und weit verbreitet, so dass die technische Barriere für Nutzer klein bleibt. Um die Antwortalternativen zu bestimmen, wurden die vollständigen Rechenwege der ersten Erhebungsphase erfasst und untersucht. Für die Indikatoraufgaben konnten so die typischen korrekten und fehlerhaften Antwortalternativen erzeugt werden [vgl. Stein et al. 2010].

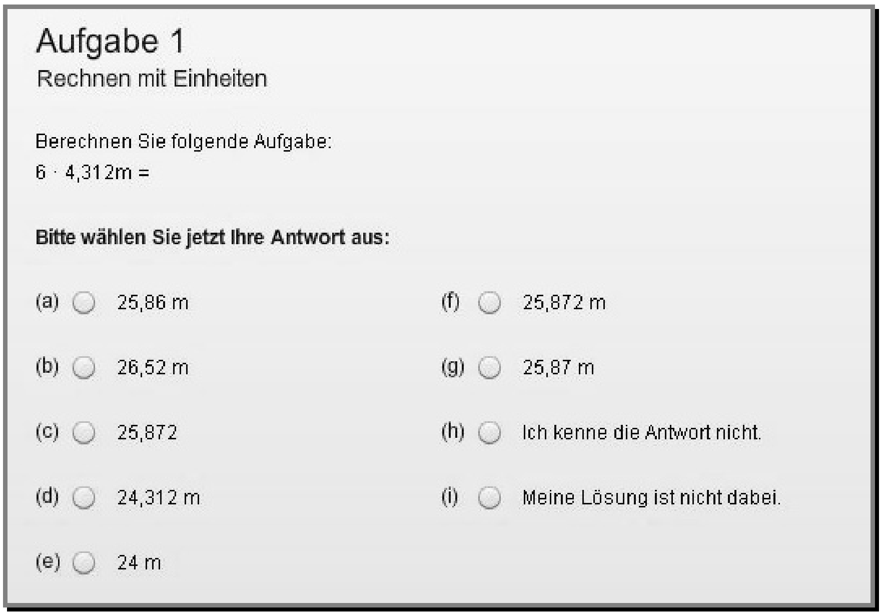


Abbildung 2: Multiple-Choice-Aufgabe in Mathe-Meister

4. Validierung der Multiple-Choice-Items

Mit der Änderung des Antwortformats haben sich auch die Items als solche geändert, weshalb erneut die Modellgüte der Aufgabenblöcke bzgl. des Rasch-Modells überprüft werden musste [vgl. Rost 2004]. Hierzu fand erneut eine Datenerhebung in der Zielgruppe mit insgesamt 155 Teilnehmern statt. Das Vorgehen zur Überprüfung des Rasch-Modells war analog zur Vorgehensweise bei der ersten Erhebungsphase [vgl. Podlogar 2010]. Die Analyse ergab, dass die Aufgabenblöcke auch nach der Formatänderung dem Rasch-Modell genügen.

Zum Abschluss wurden die einzelnen Antwortalternativen näher untersucht. Hierzu wurde überprüft, welche Leistungen Personen, die eine Antwort auswählten, durchschnittlich im jeweiligen Oberthema sowie im Gesamttest aufwiesen (vgl. Tabelle 2). Mit dieser Methode würden sich tückische falsche Antworten identifizieren lassen, die z. B. von mehrheitlich guten Teilnehmern ausgewählt worden wären. Die Analyse hat bei allen Items bestätigt, dass keine tückischen Antwortalternativen vorliegen. Dieses Resultat bestätigt die positiven Trennschärfen, die im Rahmen der Rasch-Analyse auftraten. Tückische Antworten hätten dort zu schlechten Trennschärfen führen müssen [vgl. Rost 2004].

Tabelle 2: Beispiel zur Validierung der Antwortalternativen

Berechnen Sie folgende Aufgabe : 6 • 4,312m =								
	25,86 m	26,52 m	25,872	24,312 m	24 m	25,872 m	25,87 m	unbekannt/ nicht dabei
Gegebene Antworten in %	5	6	23	3	1	54	0	9
Durchschnittliche Arithmetikleistung (von 8)	5,33	4,7	5,14	4,5	2,5	6,65	-	4,14
Durchschnittliche Gesamtleistung (von 45)	25,38	25,67	27,4	24,6	27	29,51	-	22,89

5. Fazit

In der vorliegenden Arbeit wurde das Vorgehen zur Entwicklung onlinebasierter Multiple-Choice-Tests vorgestellt. Die entwickelten Tests werden in Zukunft auf der Internetplattform http://mathe-meister.de dazu eingesetzt, angehenden Teilnehmern von Meisterkursen ein Feedback darüber zu geben, ob Sie die mathematischen Voraussetzungen für einen Meisterkurs erfüllen.

Literatur

Podlogar, H. (2010). Das Projekt Mathe-Meister: Entwicklung eines effizienten Tests zur Erfassung mathematischer Basisanforderungen verschiedener. In *Lindmeier, A. & Ufer, St. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*. Münster: WTM-Verlag.

Rost, J. (2004). Lehrbuch Testtheorie - Testkonstruktion. Göttingen: Verlag Huber.

Stein, M.; Winter, K.; Jordan, R.; Podlogar, H. (2010). Das Projekt Mathe-Meister: Stand der Dinge. In *Lindmeier, A. & Ufer, St. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010.* Münster: WTM-Verlag.

Frank PUNDSACK, Osnabrück

Zum Einfluss von persönlichkeitspsychologischen Merkmalen und metakognitivem Monitoring auf Kontrollaktivitäten von Schülern beim Umformen von Termen

Studien aus dem Institut für Kognitive Mathematik weisen darauf hin, dass die Kompetenz zum Überwachen und Kontrollieren des mathematischen Arbeitens, genannt Monitoring, wesentlich von Persönlichkeitsmerkmalen moderiert wird (vgl. Cohors-Fresenborg et al., 2010). Um diese Merkmale identifizieren zu können, wurden Video- und Korrelationsstudien durchgeführt, in denen neben Aufgaben aus der Schulalgebra Instrumente eines aus der psychologischen Forschung bekannten Diagnoseverfahrens eingesetzt wurden, das von Kuhl auf Basis der Theorie der **P**ersönlichkeits-**S**ystem-**I**nteraktionen (PSI-Theorie) entwickelt wurde (vgl. Kuhl, 2001). Erste Ergebnisse zeigen auf, dass sowohl Persönlichkeitsstile als auch die Fähigkeit zur Selbstmotivierung die Kompetenz zum Monitoring beeinflussen.

Monitoring und Leistung

Cohors-Fresenborg et al. (2010) machen deutlich, dass bei Aufgaben, in denen teilweise fehlerhafte Termumformungen zu überprüfen waren, gerade die Schüler die höchsten Erfolgsquoten zeigten, bei denen die eigenen Denkprozesse während der Bearbeitung Gegenstand von Kontroll- und Überwachungsfunktionen wurden. Einen positiven Einfluss von solchen Monitoring-Aktivitäten auf eine außer-mathematische Leistungsdimension konnte Brinkschmidt (2005) durch eine Analyse von Blickbewegungsmustern bei der Bearbeitung von figuralen Matrizenaufgaben aufzeigen: Der Problemlöseerfolg wurde deutlich von der Qualität des praktizierten Monitorings moderiert, dokumentiert sowohl in der Organisation der Blickbewegungen als auch beim retrospektiven „Lauten Denken“.

Monitoring und Persönlichkeitsmerkmale

Wir wollen im Folgenden aufzeigen, welche Beobachtungen uns veranlasst haben, den Zusammenhang von praktiziertem Monitoring und gewissen Persönlichkeitsmerkmalen zu postulieren:

Einmal scheint es sich bei der Kompetenz zum Monitoring um stabile Verhaltensmuster zu handeln: Die Versuchspersonen in der Untersuchung von Brinkschmidt (2005) zeigten über verschiedene Aufgaben hinweg ähnliche Blickbewegungsmuster; Cohors-Fresenborg et al. (2010) zeigen auf, dass die Verhaltensmuster ihrer Versuchspersonen bei der Kontrolle von Termumformungen über mehrere Aufgaben hinweg konstant blieben.

Zudem hat uns das unterschiedliche Verhalten der beiden Versuchspersonen Ansgar und Margret (vgl. Cohors-Fresenborg et al., 2010) zu dieser Vermutung geführt. Die Aufgabe der Schüler bestand in einer schrittweisen Überprüfung der Umformungen in einer Kette von Gleichungen:

$$\begin{array}{ccc} a & = & b \\ & \ldots & \\ 2(a^2 - ab) & = & a^2 - ab \\ 2 & = & 1 \end{array}$$

Ansgar hat zwar bei der letzten Umformung gewisse Zweifel, aber zunächst nimmt er das Ergebnis hin:

Ansgar: Und wenn man dann jetzt durch den Term $a^2 - ab$ teilt, kommt da 2 gleich 1 raus, das heißt, das ist richtig. *[Er setzt einen Haken hinter die Gleichung 2 = 1.]* Denk ich. Kann gar nicht sein. Doch. *(8sec)*
Ähm, ja doch. Ich denke eigentlich schon, dass das so korrekt ist.

VL.: Dass das korrekt ist?

Ansgar: Äh, joa.

VL.: Auch wenn da 2 gleich 1 steht?

Ansgar: Ja, eigentlich dürfte das nicht korrekt sein, ich weiß. Aber (...)
Ähm noch mal von vorne.

Er ist nicht bereit, seinen Zweifeln adäquate Handlungen, nämlich erneute Kontrollen folgen zu lassen. Lieber versteigt er sich zu der Äußerung:

„Ich denke eigentlich schon, dass das so korrekt ist."

Es fehlt ihm (bei dieser und auch bei anderen videographierten Szenen) letztlich an Sorgfalt. Erst nachdem der Versuchsleiter interveniert, kontrolliert Ansgar ein zweites Mal die Aufgabe und findet dann den Fehler.

Anders verhält sich Margret: Sie hat zwar ebenfalls im ersten Durchgang keinen Fehler gefunden, startet dann aber angesichts der Gleichung *2=1* ohne Intervention des Versuchsleiters direkt eine zweite Überprüfung und findet dann den Fehler:

Margret: Und dann müsste (...) *(5sec)* Dann steht hier 2 gleich 1, was nicht sein kann. Also muss irgendwo ein Fehler sein. *(6sec)* Beginn ich am besten noch mal oben.

Margret zeichnet sich also dadurch aus, dass sie von sich aus die Wirksamkeit ihres Monitorings kontrolliert und daraus Handlungskonsequenzen zieht. Bei der Bearbeitung dieser, aber auch anderer Aufgaben zeigt sie ein sehr sorgfältiges Verhalten: Mögliche Fehlerquellen werden von ihr schnell identifiziert und genau untersucht.

Aus der Analyse solcher Szenen haben wir die Vermutung aufgestellt, dass neben einer durch Sorgfalt geprägten kognitiven Verarbeitung Selbstmotivierung wesentlich ist, welche motivationaler Natur ist: Die Intention, weitere Denkprozesse in Form von Monitoring durchführen zu wollen, muss nicht nur generiert werden, sie muss vor allem in Handlungen umgesetzt werden.

Theoretische Fundierung und empirische Überprüfung

Eine theoretische Fundierung unserer Vermutungen gelingt mithilfe der PSI-Theorie, da in dieser das Konstrukt „Persönlichkeit“ nicht auf Beschreibungen durch entweder Motivationen oder Kognitionen eingeschränkt wird. Stattdessen integriert diese Theorie neben vielen anderen Dimensionen sowohl motivationale als auch kognitive Prozesse (vgl. Kuhl, 2001). Um die aus den Videoanalysen gewonnenen Vermutungen empirisch zu belegen, werden zurzeit Testinstrumente aus einem auf der PSI-Theorie basierenden Diagnoseverfahren in Kombination mit mathematikspezifischen Tests eingesetzt. Bevor erste Ergebnisse präsentiert werden, sollen nun exemplarisch zwei Skalen aus dieser Studie vorgestellt werden.

Um Indizien dafür zu erhalten, inwieweit eine Person einen durch Sorgfalt geprägten kognitiven Verarbeitungsprozess bevorzugt, wurde eine Kurzversion des Persönlichkeits-Stil-und-Störungsinventars (PSSI) (vgl. Kuhl & Kazén, 1997) eingesetzt. Unterschieden werden in diesem Instrument mehr als 9 verschiedene Persönlichkeitsstile. Jeder Stil zeichnet sich durch eine Bevorzugung bestimmter affektiver Dimensionen und kognitiver Systeme aus (vgl. Kuhl, 2001, S. 790ff.). Ein Beispielitem der hier relevanten Skala „sorgfältig“ (Cronbachs $\alpha = 0.78$) ist:

Genauigkeit und Ordnung sind mir sehr wichtig.

Die Kompetenz, Absichten ohne Schwierigkeiten in Handlungen umsetzen zu können (Selbstmotivierung), beschreibt das Konstrukt der prospektiven Handlungsorientierung (HOP) (vgl. Kuhl, 1994). Der Gegenpol wird prospektive Lageorientierung (LOP) genannt. Individuelle Unterschiede in dieser Kompetenz können mithilfe der Skala „HOP-LOP“ (Cronbachs $\alpha = 0.71$) des HAKEMP (vgl. Kuhl, 1994) gemessen werden. Ein Beispielitem aus dieser Skala lautet:

Wenn ich unbedingt einer lästigen Pflicht nachgehen muss, dann:
a) bringe ich die Sache ohne Schwierigkeiten hinter mich. (HOP)
b) fällt es mir schwer, damit anzufangen. (LOP)

Die bisher erhobenen und ausgewerteten Daten von 63 Schülern der Klassenstufe 10 eines niedersächsischen Gymnasiums zeigen Indizien für das Zutreffen der oben aufgeführten Vermutungen: In einem Algebratest waren 30 teilweise fehlerhafte Gleichungen auf ihre Korrektheit zu überprüfen. Dabei erreichten die handlungsorientierten Schüler (HOP), deren Antworten im PSSI zusätzlich einen eher sorgfältigen Persönlichkeitsstil vermuten ließen, durchschnittlich eine um ca. 6 % höhere Erfolgsquote als die lageorientierten Schüler (LOP), die zudem Indizien für einen Persönlichkeitsstil zeigten, der eher nicht durch Sorgfalt geprägt ist ($t(31) = 1.75$, $p < 0.1$). Die Schüler der erstgenannten Gruppe zeigten also bezüglich Sorgfalt und Selbstmotivierung vermutlich ein zu Margret vergleichbares Verhalten. Die Verhaltensweisen der Schüler der zweiten Gruppe wiesen vermutlich Ähnlichkeiten zu Ansgars Verhalten auf. Einen solchen Unterschied zeigen auch die Mathematiknoten der Schüler auf den letzten Zeugnissen vor dem Zeitpunkt der Studie: Die Schüler der ersten Gruppe (HOP und sorgfältig) erhielten durchschnittlich eine 2.5, die Schüler der anderen Gruppe (LOP und nicht sorgfältig) eine 3.6 ($t(31) = -3.07$, $p < 0.01$). Auch hier ist vermutlich das praktizierte Monitoring während der Lern- und Prüfungssituationen ein wesentlicher Mediator des Zusammenhangs.

Ausblick

Die PSI-Theorie hat sich als probates Mittel für ein besseres Verständnis der Dynamik von kognitiven, metakognitiven und motivationalen Prozessen bei der Bearbeitung der eingesetzten Algebra-Aufgaben erwiesen und die auf ihr basierende Diagnostik hat erste Erklärungen für individuelle Unterschiede in der Kompetenz zum Monitoring geliefert. Für ein umfassenderes Verständnis werden nach Abschluss der Datenerhebung theoriegeleitet weitere Ebenen der Persönlichkeit, z.B. Affekte, Motive und Selbststeuerungen, berücksichtigt und Interaktionen zwischen diesen Ebenen als mögliche Erklärungen individueller Unterschiede in der Kompetenz zum Monitoring herangezogen. Es zeichnet sich bereits jetzt ab, dass dabei ebenfalls aufschlussreiche Befunde auftreten werden.

Literatur

Brinkschmidt, S. (2005). *Über die Unterschiedlichkeit kognitiver sowie metakognitiver Prozesse beim Bearbeiten von QuaDiPF-Aufgaben - Empirische Untersuchungen mit Blickbewegungsanalysen*. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors-Fresenborg, E., Kramer, S., Pundsack, F., Sjuts, J. & Sommer, N. (2010). The role of metacognitive monitoring in explaining differences in mathematics achievement. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 42(2)*, 231-244.

Kuhl, J. (1994). Action and state orientation: Psychometric properties of the action control scales (ACS-90). In J. Kuhl & J. Beckmann (Hrsg.), *Volition and personality: Action versus state orientation* (S. 47-59). Göttingen: Hogrefe.

Kuhl; J. (2001). *Motivation und Persönlichkeit: Interaktionen psychischer Systeme*. Göttingen: Hogrefe.

Kuhl, J. & Kazén, M. (1997). *Das Persönlichkeits-Stil-und-Störungs-Inventar (PSSI): Manual*. Göttingen: Hogrefe.

Stefanie RACH, Aiso HEINZE, Kiel

Der Übergang von der Schule zur Hochschule: Mathematisches Lehren und Lernen in der Studieneingangsphase

1. Hintergrund: Übergang Schule / Hochschule

Der Übergang von der Sekundarstufe II in die Hochschule ist gerade in Studiengängen mit hohen Mathematikanteilen mit großen Hürden verbunden. Als Ursachen für die hohen Studienabbruchquoten nennen Studierende vor allem Leistungsschwierigkeiten und Motivationsverlust (Heublein, Schmelzer, Sommer & Wank, 2008).

In der Literatur werden zwei Veränderungen in der Übergangsphase postuliert, die als mögliche Ursachen dieser Schwierigkeiten in Frage kommen: eine Veränderung im Charakter der Mathematik sowie eine Veränderung im Lehren und Lernen von Mathematik. Die Veränderung des Charakters der behandelten Mathematik zeigt sich an der Konzentration auf außermathematische oder kalkülorientierte Anwendungen in der Schule bzw. an der Konzentration auf einen axiomatisch geprägten Theorieaufbau an der Hochschule. Kennzeichnend ist u. a. die unterschiedliche Bedeutung des Beweisens (Fischer, Heinze & Wagner, 2009).

Während an der Schule das Allgemeinbildungskonzept beim Lernen von Mathematik im Vordergrund steht, steht an der Hochschule die Mathematik als Wissenschaft im Vordergrund. Diese ist u. a. durch das formale Denken geprägt, welches Studierenden große Schwierigkeiten bereitet (Clark & Lovric, 2009). Trotz vergleichbarer Inhalte, z. B. im Bereich der Analysis, ändert sich das benötigte Begriffsverständnis durch den Übergang. Während in der Schule größere Interpretationsspielräume für Begriffe vorliegen und Begriffe nicht selten intuitiv verwendet werden, werden in der akademischen Mathematik Begriffe präzise definiert und auch so verwendet (Fischer, Heinze & Wagner, 2009). Die fehlende Kombination dieser beiden Sichtweisen führt häufig zu Fehlvorstellungen zentraler Konzepte (Davis & Vinner, 1986; Roh, 2008).

Die Lehrweise an der Hochschule ist häufig stark produktorientiert (Dreyfus, 1991). Die Darstellung der Mathematik als fertiges Endprodukt kann jedoch für erfolgreiche Lernprozesse hinderlich sein, da die Studierenden nur wenige Hinweise erhalten, wie sie selber Mathematik betreiben können (Luk, 2005). Gleichwohl ist selbstständiges Arbeiten ein wichtiger Bestandteil an der Universität, das im Gegensatz zur Schule vermutlich zu wenig angeleitet wird.

Empirische Analysen von Lehr-Lern-Prozessen in universitären Lehrveranstaltungen zur Mathematik liegen bisher kaum vor. Für schulische Lehr-Lern-Prozesse liegen Ansätze aus dem Bereich der Unterrichtsforschung vor, die sich vor allem auf Angebots-Nutzungs-Modelle stützen (z. B. Reusser & Pauli, 2010).

Zusammenfassend führen die genannten Aspekte zu der Annahme, dass die Schwierigkeiten zu Beginn des Mathematikstudiums auf ein inadäquates Passungsverhältnis der Lernvoraussetzungen und des Lehrangebots zurückzuführen sind. Aufgrund des unterschiedlichen Charakters der Mathematik an Schule und Universität sind die mitgebrachten individuellen mathematischen Kompetenzen der Studierenden nicht auf die akademische Mathematik ausgerichtet. Weiterhin sind die Lernstrategien, die im Rahmen des angeleiteten schulischen Lernens erworben wurden, für das akademische Lernen an der Hochschule nicht ausreichend.

2. Ziele und Forschungsfragen

In diesem Projekt rücken die Lehr-Lern-Prozesse in der Studieneingangsphase im Fach Mathematik in den Fokus. Die zentralen Ziele dieses Projektes sind zuerst die Beschreibung verschiedener Merkmale von Lehrenden und Lernenden in Lehr-Lern-Prozessen und darauf aufbauend die Identifizierung relevanter Faktoren für erfolgreiche Lehr-Lern-Prozesse:

Welche individuellen kognitiven und nicht kognitiven Bedingungsfaktoren lassen sich für den mathematischen Kompetenzerwerb im ersten Studiensemester identifizieren?

Welchen Einfluss haben verschiedene Variablen zur Qualität des Lehrangebotes bzw. zur Qualität der individuellen Lehrangebotsnutzung auf den Kompetenzerwerb?

Für die Beantwortung dieser Forschungsfragen wird das Rahmenmodell zur Qualität von Lehr-Lern-Prozessen von Reusser und Pauli (2010) auf die Studieneingangsphase im Fach Mathematik angepasst und als Ausgangspunkt einer empirischen Studie verwendet (vgl. Abb. 1).

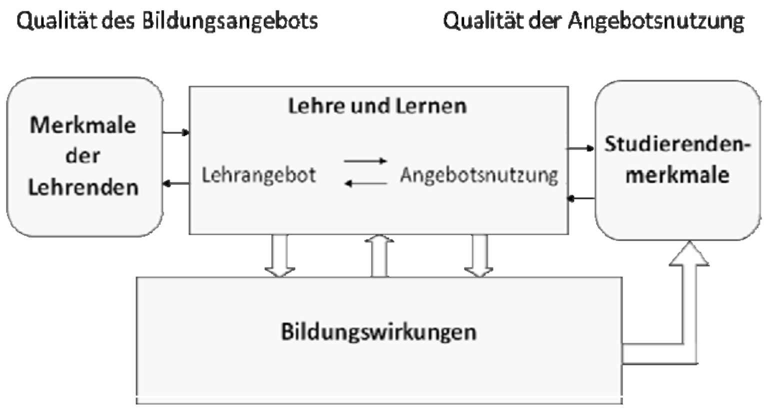


Abb. 1: Rahmenmodell zur Qualität von Lehr-Lern-Prozessen in der Studieneingangsphase

3. Methode und Design

Die Studie wird mit 1-Fach- und 2-Fächer-Bachelor-Studierenden ($N = 230$) und den zugehörigen Tutoren und Tutorinnen ($N = 15$) an der Universität Kiel in der Vorlesung „Analysis 1“ im Wintersemester 2010/2011 durchgeführt. Es handelt sich um eine quantitativ-empirische Untersuchung.

Die Variablen werden in folgender Weise operationalisiert:

Studierendenmerkmale: Affektive Merkmale wie Interesse an Mathematik, mathematikbezogenes Selbstkonzept und studienbezogene Motivation sowie Lernkonzepte werden mit Hilfe von Fragebögen erhoben. Die Erwartungen der Studierenden an die akademische Mathematik werden ebenfalls über Fragebögen erfasst, derart dass die Studierenden einschätzen sollen, ob gegebene Aufgaben zum Thema Differentialrechnung im ersten Studiensemester in der Veranstaltung „Analysis 1“ vorkommen. Dabei lassen sich die Aufgaben drei Typen zuordnen: „Komplexe Rechenaufgaben“ und „Außermathematische Anwendungsaufgaben“ beschreiben typische Fehlvorstellungen von Studierenden, während „Beweisaufgaben“ charakteristische Problemstellungen für die Mathematik an der Hochschule darstellen. Darüber hinaus wird die mathematische Kompetenz der Studierenden mit Hilfe eines Tests erfasst, der vor allem das Begriffsverständnis und die Beweisfähigkeit der Studierenden fokussiert.

Lehrendenmerkmale: Hierunter werden die Merkmale der Tutoren und Tutorinnen erfasst. Mit Hilfe von Fragebögen werden Einschätzungen zum eigenen Engagement, zur Kooperationskultur und zu Lehrkonzepten erfragt. Das fachdidaktische Wissen wird mit Hilfe eines Testes zum Inhaltsgebiet „Folgen und Reihen“ erfasst.

Lehrangebot: Bei der Quantität des Lehrangebotes werden die Dauer der Veranstaltungen und das Angebot an zusätzlichen Unterstützungsmaßnahmen erfasst. Die Qualität des Lehrangebotes wird mit Hilfe von dreiwöchigen Beobachtungen der Vorlesungen und Tutorien innerhalb des Gebietes „Folgen und Reihen“ erhoben. Zentrale Elemente sind dabei die Einführung von Begriffen und die Präsentation von Beweisen. Qualitätsmerkmale sind das Herstellen von Verbindungen zwischen formaler Definition und Vorstellungen zu einem Begriff bzw. die Explizitmachung der einzelnen Phasen in einem Beweis. Allgemeine Qualitätsmerkmale wie kognitive Aktivierung werden aus der Unterrichtsforschung übernommen.

Nutzung des Lehrangebots: Die Nutzung des Lehrangebotes durch die Studierenden wird durch Fragebögen erhoben. Unter den Bereich Quantität fallen die Zeit, die die Studierenden pro Woche aufbringen, und die Teilnahme an den Veranstaltungen. Bei der Qualität geht es um kognitive Strategien in den Veranstaltungen und im Selbststudium. Zusätzlich werden deskriptive Daten erhoben.

Bildungswirkungen: Die Operationalisierung der Bildungswirkungen lehnt sich stark an die der Studierendenmerkmale an. Hierunter fallen wiederum affektive Merkmale, Lernkonzepte, Erwartungen und die Kompetenzen der Studierenden. Sie werden mit Testaufgaben zum Inhaltsgebiet „Folgen und Reihen" erhoben.

4. Ausblick

Die Forschungsfragen sollen mit Hilfe einer Analyse der Wirkungsmechanismen innerhalb des Modells zur Qualität von Lehr-Lern-Prozessen beantwortet werden. Dabei soll festgestellt werden, welche Faktoren entscheidenden Einfluss auf den Kompetenzerwerb der Studierenden besitzen.

Literatur

Clark, M. & Lovric, M. (2009). Understanding secondary-tertiary transition in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(6), 755–776.

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly unavoidable Misconception Stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 281–303.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. Tall (Hrsg.), *Mathematics education library: Vol. 11. Advanced mathematical thinking* (S. 25–41). Dordrecht: Kluwer Academic Publ.

Fischer, A., Heinze, A. & Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule – Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 245-264). Münster: Waxmann.

Heublein, U., Schmelzer, R., Sommer, D. & Wank, J. (2008). *Die Entwicklung der Schwund- und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen.*

Luk, H. S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2-3), 161–174.

Reusser, K. & Pauli, C. (2010). Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsqualität - Ergebnisse einer internationalen und schweizerischen Videostudie zum Mathematikunterricht: Einleitung und Überblick. In K. Reusser, C. Pauli & M. Waldis (Eds.), *Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsqualität. Ergebnisse einer internationalen und schweizerischen Videostudie zum Mathematikunterricht* (S. 9–32). Münster: Waxmann.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217–233.

Renate RASCH, Landau

Geometrisches Wissen in der Grundschule

1. Eigene Befunde

In einer Untersuchung im Zusammenhang mit offenen Aufgaben (Rasch 2006) baten wir Kinder der Klassenstufen 1-4 ihnen bekannte ebene und räumliche Figuren darzustellen: Zeichne Flächen und Körper, die du kennst und benenne sie. Es wurden Klassen befragt, die kontinuierlich in Geometrie unterwiesen wurden. Bei den Schulanfängern war es vor allem vorschulisches Wissen und Können, das sichtbar wurde. (Abb.1a,b)

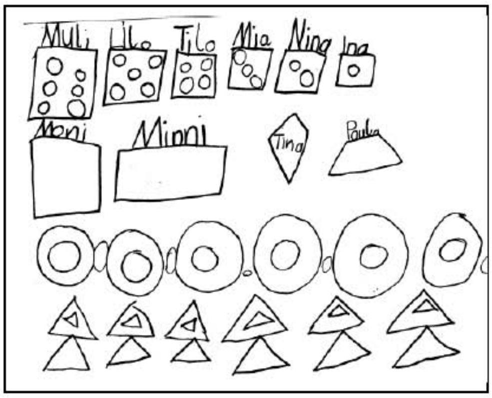


Abb. 1a: Zeichne Dreiecke, Vierecke, Kreise und Würfel. (Kl. 1)

Abb.1b: „Würfel gehen aber ganz schön schwer“

Neben erwartetem Vorwissen gab es eine Reihe von beachtenswerten Besonderheiten. So fiel auf, dass Dreiecke recht differenziert von den Schulanfängern wahrgenommen wurden: „Das ist ein Dreieck und das ist ein Langdreieck.“ Bezüglich der Vierecke waren es, wie erwartet, vor allem rechteckige Formen, die dargestellt wurden. Die Begriffe Rechteck und Quadrat gehörten bei einzelnen Kindern schon zum Wortschatz. Darüber hinaus skizzierten die Schulanfänger auch Trapeze, Drachen und Rauten, ohne diese Figuren -mit Ausnahme des „Drachens“ - benennen zu können. Den Würfel stellten die Kinder mit Selbstverständlichkeit durch die Flächen des Spielwürfels dar, ca. 98% (Stichprobe n=100) zeichneten annähernd quadratisch wirkenden Flächen mit den entsprechenden Augenzahlen. Ca. 60% dieser Kinder zeichneten alle sechs Würfelflächen (Abb. 1a), andere stellten einzelne Flächen dar. 2% der Schulanfänger zeigten eine perspektivische Darstellung des Würfels (Abb.1b). Ein Schüler, der dies besonders gut machte, wunderte sich laut über den von uns formulierten Auftrag mit dem Hinweis: „Würfel gehen aber ganz schön schwer.“ Diese Einzelleistungen sind interessant und könnten durch weitere Untersuchungen genauer identifiziert werden. Beim Blick auf die Schulanfänger im insgesamt beeindruckte die differenzierte Wahrnehmung der geometrischen Grundformen Viereck, Dreieck, Kreis (Halbkreis, „Oval“). Bei der Analyse der Darstellungen der Schülerinnen und Schüler der Klassen 2 bis 4 wurde zum einen deutlich, wie das in der Schule vermittelte geometrische Wissen Fähigkeiten voranbringt. Zum anderen zeigten sich aber auch Lücken im geometrischen Wissen und Unsicherheiten, deren Ursachen mit aller Vorsicht auch auf inhaltliche und strukturelle Aspekte der Grundschulgeometrie zurückgeführt werden können. Vermisst wurde bei den Dritt- und Viertklässlern die differenzierte Darstellung von Formen. Wurden von Schulanfängern noch das Dreieck und das „Langdreieck“ unterschieden, suchte man bei den älteren Grundschulkindern vergeblich nach spezifischen Darstellungen bzw. Kenntnissen zum Dreieck. Während die Schulneulinge schon Drachenvierecke und Trapeze anboten, waren es bei den Kindern am Ende der Grundschule fast ausschließlich die rechtwinkligen Viereckformen, die dargestellt wurden. Die Repräsentation der Körper durch Flächen begegnete uns bis zum Ende der Grundschulzeit. Das Dreieck stand häufig für Pyramide, das Rechteck für Quader. Darstellungsmöglichkeiten für Körper hatten sich nur bei einzelnen Schülern weiterentwickelt.

2. Klassische Untersuchungen

Dina van Hiele-Geldorf und Pierre van Hiele (Freudenthal-Institut Utrecht) beschrieben 1957 die Entwicklung geometrischen Denkens bei Grundschulkindern. Im Ergebnis ihrer Untersuchungen stellten sie dar, wie Kinder die Grundlagen für geometrische Formen erlernen. (Franke 2009) Pierre van Hiele erklärte, dass seine Schüler Stufen erreichten, die sich durch markante Punkte beschreiben ließen. Auf der Grundlage solcher markanten Punkte konnte er fünf Niveaustufen identifizieren, von denen die ersten drei für den Geometrieunterricht der Grundschule relevant sind: Level 0: Visualization; Level 1: Analysis; Level 2: Abstraction; Level 3: Deduction; Level 4: Rigor.

Die van Hieles betonten, dass die identifizierten Denkebenen hauptsächlich ein Produkt von Erfahrung und Instruktion in Abhängigkeit vom Alter sind. Ein Kind sollte genügend Gelegenheiten für geometrische Erfahrungen haben (classroom or otherwise), um ein höheres Entwicklungsstadium zu erreichen. Durch reiche Erfahrungen können die Kinder die Niveaustufe 2 schon in der Primarstufe erreichen. (van Hiele 1959/1984)

Das analysierende Denken (Level 1), das in die Lage versetzt, Figuren nicht nur ganzheitlich sondern auch über ihre Eigenschaften differenziert wahrzunehmen, gehört gegenwärtig neben der Entwicklung der Raumvorstellung zu den hauptsächlichen Zielen des Geometrieunterrichts. Inhalte, die mit der dritten Entwicklungsstufe, dem geometrisch-analysierenden Denken (Level 2), verbunden sind (Eigenschaften innerhalb einer Figur können in Beziehung gesetzt und Zusammenhänge zwischen Figuren erkannt werden), spielen nach unseren Beobachtungen im Geometrieunterricht der Grundschule eine geringe Rolle. Wenn man auch im Lernbereich Geometrie auf Strukturen und Muster aufmerksam machen will, sollte über eine inhaltliche Gestaltung des Geometrieunterrichts nachgedacht werden, die das Entdecken geometrischer Zusammenhänge bewusst einbezieht.

3. Geometrie lehren und lernen

Auf der Suche nach einem Zugang zur Grundschulgeometrie, der zielgerichtet den Erwerb geometrischen Wissens anstrebt und auf Zusammenhänge aufmerksam macht, legten wir die folgenden Überlegungen zugrunde. Zunächst wurde die der Geometrie innewohnende *Handlungsbezogenheit* berücksichtigt. (Radatz/Rickmeyer 1991) Damit lässt sich unter anderem die besondere Faszination des Geometrieunterrichts für Grundschulkinder ableiten. Weitere Überlegungen wendeten sich den für die Grundschule typischen Inhalten zu. Geometrische Inhalte sollten von vornherein so verknüpft werden, dass Zusammenhänge sichtbar werden. Unter dieser Bedingung wurden die Inhalte ausgewählt und zu Modulen zusammengefasst. Träger des jeweiligen Moduls ist ein Grundbaustein, eine Grundidee, an den/die Wissensbestandteile angelagert wurden. (Gallin 2010) Die Module sind klassenstufenübergreifend angelegt und können für die unterschiedlichen Jahrgänge entsprechend des Entwicklungsstandes der Kinder und der Vorgaben durch Rahmen- und Kernlehrpläne angepasst genutzt und in nachfolgenden Klassenstufen wieder aufgegriffen werden. Die Module sind teilbar und erweiterbar – auch in Abhängigkeit von den fachlichen Interessen und Vorlieben der Lehrpersonen. Die vorgeschlagene Modulabfolge muss nicht eingehalten werden. (Rasch 2012)

Beispiele:

- Geometrie 1: Faltwinkel (Gerade, Strecke, Strahl, sich schneidende Geraden, Winkel, rechter Winkel, Rechteck, rechteckige Körper, senkrechte Linien, parallele Linien, Parallelogramm)
- Geometrie 2: *Achsenkreuz* (sich senkrecht schneiden, senkrecht zueinander, rechte Winkel, Quadrat, Drachenviereck, Raute, Kreis)
- Geometrie 3: *Dreiecke mit zwei gleichlangen Seiten* (gleicher Abstand von zwei Punkten, Mittellinie, gleichschenklige Dreiecke, gleich-

schenklig rechtwinklige Dreiecke unter dem Halbkreis, Geometriedreieck)

- Geometrie 4: *Gleichseitige Dreiecke* (Linien im Dreieck; Symmetrien, Beziehungen zu Trapez, Raute, Sechseck, Parkettieren, Tetraeder, platonische Körper)

Zunächst wurden ausgewählte Module in Lehrer/innen-Fortbildungen vorgestellt und durch die Lehrpersonen evaluiert. Im Januar 2011 wurde ein Schulversuch mit ersten Klassen begonnen. Wir versuchen an die Vorerfahrungen der Schüler anzuknüpfen und neues Wissen teils experimentell, teils erklärend zu veranschaulichen.

Ausschnitt aus Geometrie 1: „Wir falten ein Stück Papier (möglichst nicht gerade umrandet) und erhalten eine *Kante*. Entlang dieser Kante kann man eine gerade Linie auf‘s Papier zeichnen (wird demonstriert). Solche geraden Linien nennt man *Geraden*. Geraden kann man nach beiden Seiten beliebig lang zeichnen (über die Ränder des Blattes hinaus), sie haben keinen festgelegten Anfang und kein Ende. Wenn man eine Länge genau festlegen möchte, tut man dies, indem man *Punkte* auf eine Gerade setzt. Abstände zwischen Punkten kann man genau messen. Einen solchen Abstand zwischen einem Anfangs- und einem Endpunkt nennt man auch *Strecke*…“

An eine instruktionale Einstiegsphase schließt sich eine individuelle Schülerarbeitsphase auf der Grundlage eines offenen, möglichst unspezifischen Auftrags an, z. B. „Zeichne Geraden und Strecken“. Die Schüler können dabei je nach Vermögen auf das vorher angebotene Wissen zurückgreifen. Die Ergebnisse ihrer Arbeit dokumentieren sie in eigener Regie. Sich anschließende Reflexionsphasen mit den Mitschülern sollen den Gebrauch und die Weiterentwicklung eines geometrischen Wortschatzes anregen.

Literatur

Franke, M (2009): Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum.

Gallin, P. (2010): Dialogisches Lernen. In: Grundschulunterricht, 57 (2), 4-9.

Radatz, H., Rickmeyer, K. (1991): Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.

Rasch, R. (2006): Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. Seelze: Kallmeyer.

Rasch, R. (ersch. 2012): Geometrisches Wissen vernetzen – Geometriemodule für Kl. 1-6. Unveröffentlichtes Manuskript.

van Hiele, Pierre M. (1959/1984): The Child’s Thought and Geometry. In: D. Fuys, D. Geddes, R. Tischler (Hrsg.). English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldorf and Pierre M. van Hiele. S. 243-252. New York: Brooklyn College.

Bernhard RAUH, Ludwigsburg-Reutlingen

Mediatisierte Handlung – ein zentraler Didaktischer Mehrwert Digitaler Medien im mathematischen Anfangsunterricht

Der Beitrag stellt Ergebnisse des Forschungsprojekts COLEM (Computergestützte Lernförderung zur Unterstützung des Erwerbs elementarer mathematischer Kompetenzen) zur Diskussion.[1] Im Fokus steht Theorieentwicklung. Den erkenntnisleitenden bzw. -strukturierenden Gedanken bildet die Vorstellung eines Didaktischen Mehrwerts digitaler Medien im basalen arithmetischen Bereich, insbesondere bei Kindern mit erheblichen Lernschwierigkeiten.

1. Didaktischer Mehrwert

Im Hinblick auf Neue Medien wird „didaktischer Mehrwert" von Dörr & Strittmatter (2002) relational bestimmt: Der didaktische Ertrag des Medieneinsatzes muss größer sein als ohne Medieneinsatz (ebd., 34f). Ein „didaktischer Mehrwert" kann nur durch ein sorgfältiges, fachdidaktisch geleitetes Unterrichtsdesign entstehen, bei dem die Potentiale des jeweiligen Mediums genau analysiert und für den Vermittlungs- bzw. Aneignungsprozess genutzt werden. In welchen Lernbereichen kann durch den Einsatz des Computers ein solcher „didaktischer Mehrwert" erzielt werden?

2. Höheres vs. Elementares Lernen (Aebli) und anerkannte Mehrwerte des Computereinsatzes

Aebli unterscheidet „Höheres Lernen" von „Elementarem Lernen" (1998, 328). Das erste dient dem „Finden und Herstellen der Sachbeziehungen zwischen bisher unverbundenen Elementen des Handelns und Denkens", das zweite dem „'Verstärken' der hergestellten Verbindungen", zum „Automatisieren, Konsolidieren" (ebd.).

Der „Didaktische Mehrwert" des Einsatzes von Lernsoftware zur Unterstützung des „Elementaren Lernens" bildet eine weithin geteilte Annahme. So weist Krauthausen (1998) der von ihm entwickelten Lernsoftware Blitzrechnen einen ganz spezifischen didaktischen Ort zu: das „Training von Kopfrechenfertigkeiten" zu deren „Automatisierung […] am Ende des Lernprozesses" (ebd.). Doch wie ist es um den „Didaktischen Mehrwert" von Softwareangeboten beim „höheren Lernen" im Bereich der elementaren Arithmetik bestellt? Angesichts der gebotenen Kürze wird sich im Fol-

[1] Das Forschungsprojekt wird aus Mitteln der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg gefördert.

genden auf den Aufbau des Operationsverständnisses nach Bruner konzentriert.

3. Passender begrifflicher Rahmen zur Bestimmung des Mehrwerts für „höheres Lernen" am Beispiel des Operationsverständnisses

Bruner unterscheidet bekanntlich die drei Repräsentationsformen *enaktiv*, *ikonisch* und *symbolisch* zum Erschließen von Sachverhalten. Repräsentationen können prinzipiell in eine andere Repräsentation übersetzt werden. Erst die Verknüpfung der drei Modi führt zu einem umfassenden Verständnis einer Sache (vgl. Bruner 1974,16ff). Ein ausgearbeitetes Operationsverständnis im Brunerschen Sinne besteht in der Arithmetik darin, sämtliche Übersetzungsmöglichkeiten zwischen konkreter Situation, bildlich-modellhafter Darstellung und symbolischer Darstellung einer mathematischen Aufgabe leisten zu können.

Gegenwärtig hat es sich eingebürgert, Handlungen, die am Computer getätigt werden, als „virtuell-enaktiv" (Hartmann/Näf/Reichert 2006, 116f; vgl. auch Ladel 2009, 53f) zu bezeichnen. Enaktiv bedeutet, dass ein Mensch selbst mit konkreten, physisch präsenten Gegenständen handelt. Virtuell will ausdrücken, dass es sich um computergenerierte, aber realitätsnahe Prozesse handelt. Der didaktisch entscheidende Unterschied zwischen enaktiv und computergeneriert ist wohl, dass im enaktiven Modus direkt mit den konkreten Objekten gehandelt werden kann, hingegen mit den ikonisch am Bildschirm dargestellten Objekten nicht. Vermittelnde Hilfsmittel/Medien sind vonnöten. In der Regel sind dies beim Computer Eingabegeräte wie Maus und Tastatur. Aus der Perspektive des Nutzers handelt es sich demnach bei solchen Prozessen um Handlungen, die mediatisiert vollzogen werden. Dynamische Grafiken am Computerbildschirm können nicht direkt per Hand, sondern nur vermittelt über softwaregesteuerte Eingabegeräte verändert werden, so dass man von *mediatisiert-enaktiv,* von *mediatisierten Handlungen* sprechen könnte.

Betrachtet man die verschiedenen Übungsformate von Lernsoftware in Hinblick auf die drei Darstellungsformen[2] in Anlehnung an die Brunersche Strukturierung, wird deutlich, dass Aufgaben am Computer *ikonisch* als *Modell/Bild* und *symbolisch* als *Wortsprache/Zeichen* angeboten werden. Das Modell Bruners muss demnach für den Einsatz am Computer um die Komponente der *mediatisierten Handlung* erweitert werden. Werden Hand-

[2] Die Unterscheidung zwischen Darstellungsform und Repräsentationsform ist sprachlich unbedingt beizubehalten. Eine Darstellung präsentiert der Computer, z.B. am Bildschirm. Bei Repräsentationen handelt es sich um kognitive Arbeitsmodelle eines Menschen zum Erschließen von Welt.

lungen am Computer ausgeführt, die normalerweise mit konkreten Objekten durchgeführt werden, finden sie mediatisiert statt. Die Objekte, mit denen gehandelt wird, sind am Computer nicht konkret-gegenständlich vorzufinden, sondern grafisch-bildlich oder grafisch-schematisch dargestellt. Einerseits wird die Handlung vermittelt durch das Eingabegerät durchgeführt und nicht direkt mit einem ikonisch dargestellten Objekt. Andererseits ist der Umgang mit dem Eingabegerät von der Wahrnehmung der softwaregenerierten Darstellung auf dem Bildschirm bestimmt. Die Handlungskontrolle der Eingabe findet vermittelt über den Bildschirm statt. Bei Mausbewegungen achtet der Nutzer auf die Reaktionen der Software, die auf dem Bildschirm dargestellt werden und nicht auf die Position der Maus vor ihm. Aus diesem Grund könnte der Begriff einer *vermittelten* oder *mediatisierten Handlung*, mit der eine ikonische Darstellung verändert wird, diesen Sachverhalt präziser beschreiben als „virtuell-enaktiv“. Deshalb wird im Folgenden der Begriff *mediatisiert-enaktiv* der Vorzug vor „virtuell-enaktiv“ gegeben und von einer *mediatisierten Handlung mit ikonisch-dargestellten Objekten* gesprochen.

4. „Didaktischer Mehrwert“ *mediatisierter Handlungen* bei der Förderung des Operationsverständnisses

Die technischen Potentiale des Computers ermöglichen neue Formen der Darstellung, die den Computer von anderen Medien qualitativ unterscheiden. Es handelt sich dabei um folgende Mehrwertpotentiale zur Förderung des Operationsverständnisses im Bereich elementare Arithmetik:

- *Mediatisiertes Handeln mit ikonisch dargestellten Objekten*. Diese Mischform zwischen enaktiv und ikonisch kann als vermittelnder Zwischenschritt zwischen den verschiedenen Repräsentationen fungieren.

- *Synchronisation der unterschiedlichen Darstellungsformen*. Das Potential der Synchronisation hängt direkt von der Möglichkeit zu *mediatisiertem Handeln* ab. Verschiedene Darstellungsformen können durch die technischen Möglichkeiten des Computers synchronisiert werden: Eine Änderung der ikonischen Darstellung zieht eine Veränderung einer symbolischen Darstellung nach sich. Beispielsweise kann die symbolisch-zeichenhafte Darstellung bei einer mediatisiert-enaktiv veranlassten Änderung der ikonischen Darstellung nahezu zeitgleich synchronisiert werden. Ein Beispiel dafür liefert die Lernsoftware „Rechnen mit Wendi“ von Urff (2006): Bei Änderung der Plättchenmenge im Zwanzigerfeld synchronisiert sich die zugehörige formelhaft-symbolische Darstellung des Additionsterms für die Wahrnehmung des Menschen zeitgleich.

Mögliche positive Effekte beim Nutzer – Hypothesen:

1. Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen wird durch mediatisierte Handlungen und eine Synchronisation der Darstellungen verdeutlicht. Der Computer weist den Nutzer quasi darauf hin, dass zwischen den verschiedenen Präsentationen ein innerer Zusammenhang besteht. Die Verbindung zwischen den Darstellungen einer Zahl oder Rechenoperation kann auf diese Weise zumindest konsolidiert oder sogar angebahnt, ein intra- und intermodaler Transfer kann gefördert werden.

2. Der Zusammenhang zwischen den Darstellungsformen kann vom Nutzer experimentierend erkundet werden. Er kann Plättchen hinzufügen/wegnehmen und die Änderungen in der symbolischen Darstellungsform direkt beobachten.

5. Zusammenfassung

Eine begriffliche Basis wurde erarbeitet, die für das didaktisch bedeutsame „höhere Lernen“ des „Findens und Herstellens von Sachbeziehungen“ (Aebli) passend ist. Das Koordinatensystem, das der Begriff *mediatisiert-enaktiv* erzeugt, ist als didaktisch ertragreicher zu bewerten als jenes, welches „virtuell-enaktiv“ generiert. Der Computer bietet die Möglichkeit zu mediatisierten Handlung und ihrer zeitgleichen Synchronisation mit unterschiedlichen Darstellungen auf den Ausgabegeräten Bildschirm und Lautsprecher. Aus fach- und auch mediendidaktischer Perspektive begründet dieser „didaktische Mehrwert“ ein Alleinstellungsmerkmal des Mediums Computer im Bereich der elementaren Arithmetik: Förderung des Operationsverständnisses durch *mediatisiertes Handeln mit ikonisch dargestellten Objekten* sowie durch *Synchronisation verschiedener Darstellungsformen*.

Literatur

Aebli, H. (1998): Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. 10. Aufl. Stuttgart: Klett-Cotta.

Bruner, J.S. (1974): Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin: Berlin.

Hartmann, W.; Näf, M.; Reichert, R. (2006): Informatikunterricht planen und durchführen. Berlin: Springer.

Krauthausen, G. (1998): Entwicklung einer Software zum Training von Kopfrechenfertigkeiten: die CD ROM „Blitzrechnen”. [*http://www.erzwiss.uni-hamburg.de/ewi-report/ewi17/31_kraut.htm*, 15.02.11]

Ladel, S. (2009): Multiple externe Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz. Hamburg: Kovac.

Urff, C. (2006): Rechnen mit Wendi. [*http://www.lernsoftware-mathematik.de/cms/?page_id=2*, 16.02.2011]

Benjamin RAWE, Freie Universität Berlin

Mit Mathematik fit für die Berufsausbildung – Ein Förderprojekt für die Hauptschule

1. Hintergründe und Ziele

„Deutschlands Unternehmen klagen über die Qualifikation junger Bewerber. Mehr als zwei Drittel der befragten Unternehmenschefs rügen mangelnde Bildung, Disziplin und Belastbarkeit der Schulabgänger. Das hat Folgen: Eine Vielzahl der Betriebe besetzt Ausbildungsplätze gar nicht erst – wegen zu schlechter Bewerber.“ (www.manager-magazin.de vom 08.04.2010 in Bezug auf DIHK, 2010)

Diese und ähnliche Reaktionen sind nach der Veröffentlichung einer Unternehmensbefragung des Deutschen Industrie- und Handelskammertages im März 2010 (vgl. DIHK, 2010) durch die Medienlandschaft gegeistert. Als Schlussfolgerung dieser Befragung wird die mangelnde Qualifikation von Bewerbern um Berufsausbildungen angekreidet. Dies treffe insbesondere auf Hauptschüler zu, die nur sehr selten die Befähigung haben, eine Berufsausbildung zu beginnen. Der DIHK bemängelt in seinem Bericht auch die mangelnden mathematischen Fähigkeiten, die Bewerber aufweisen. Dies sei gerade in Berufen aus dem MINT-Feld problematisch.

Dazu kommt, dass Hauptschulabsolventen nur eine sehr geringe Chance haben, eine Berufsausbildung in ihrem Wunschberuf zu ergattern, der bei Jungen sehr häufig im MINT-Feld liegt – trotz des vorherrschenden Fachkräftemangels im MINT-Feld (vgl. RAWE, 2009). Zudem wird das Ansehen der Hauptschule nicht nur durch die schlechten Berufsperspektiven seiner Abgänger belastet, sondern auch durch bildungspolitische Umstrukturierungen. In immer mehr Bundesländern verschwindet die Hauptschule aus der Bildungslandschaft - aktuell existiert die Hauptschule gerade einmal in fünf Bundesländern. Doch die Hauptschüler verschwinden mit der Abschaffung der Schulform nicht, sie finden sich nun in Schulen mit anderen Namen wieder, z.B. auf der Realschule plus, wie sie im Bundesland Rheinland-Pfalz genannt wird. Fazit: Die Hauptschüler bleiben da – damit auch ein Teil der bisherigen Schwierigkeiten.

Auf Basis dieser Hintergründe ist ein Förderprojekt entstanden, das berufsrelevante mathematische Kompetenzen bei Hauptschülern mit Interesse an MINT-Berufsausbildungen fördern soll. Das Projekt trägt den Namen „Mit Mathematik fit für die Berufsausbildung“ und wird derzeit in Schulen in Niedersachsen und Berlin erprobt. Innerhalb dieses Förderprojektes soll die Mathematik an konkreten technischen Problemen erfahrbar gemacht werden. Dazu ist das Programm projektorientiert, so dass die teilnehmenden Schüler einen handlungsorientierten und authentischen Zugang zur berufsrelevanten Mathematik erhalten. Insgesamt soll mit dem Projekt auch das Interesse der teilnehmenden Schüler, insbesondere auch bei Schülerinnen, an MINT-Berufen gesteigert werden.

Weitere Ziele und die Gestaltung des Projektes können bei RAWE, 2010, nachgelesen werden.

2. Projekt „Mit Mathematik fit für die Berufsausbildung“

Das Projekt „Mit Mathematik fit für die Berufsausbildung“ konnte zum ersten Mal an der Hauptschule Damme im Schuljahr 2010/2011 erprobt werden. Das Projekt wurde als AG organisiert, die einmal wöchentlich für 90 Minuten im Nachmittagsbereich der Schule durchgeführt werden konnte. Die AG wurde als „Kunststoff-AG“ ausgeschrieben, für die sich Schüler der Jahrgangsstufe 8 und 9 freiwillig verpflichten konnten. Das Projekt findet in einem Technikraum statt, der mit allen notwendigen Werkzeugen und Materialien ausgestattet ist. Die AG wird von zwei Lehrern begleitet, die im Teamteaching-Verfahren die jeweiligen mathematischen und technischen Aspekte der AG betreuen. Sie ist als fiktive Firma organisiert, in der die Schüler in festen Arbeitsgruppen zu drei oder vier Personen an einem Projekt arbeiten. Innerhalb dieser Gruppen können die Schüler unterschiedliche Rollen einnehmen. So besteht jede Gruppe aus einem Vorarbeiter, einem Schriftführer und einem oder mehreren Arbeitern. Dem Vorarbeiter kommt dabei die Aufgabe zu, die Arbeitsschritte der Gruppe zu koordinieren und Absprachen sowie Zielvereinbarungen mit den Lehrern zu treffen. Der Schriftführer hat die Aufgabe, die aktuellen Arbeitsphasen und die verwendete Mathematik in einem Berichtsheft (in Anlehnung an die Reisetagebücher nach RUF & GALLIN, 2005) zu beschreiben und zu reflektieren. Der Arbeiter der Gruppe unterstützt Vorarbeiter und Schriftführer bei der Durchführung der Arbeitsaufträge. Die einzelnen Rollen werden in jeder Woche nach einem Rotationsprinzip gewechselt, so dass der Schriftführer der alten Woche zum neuen Vorarbeiter wird. Die Rolle des Vorarbeiters nimmt der ehemalige Arbeiter ein, dessen Posten wiederum vom ehemaligen Vorarbeiter ausgefüllt wird.

Die AG ist so konzipiert, dass die Schüler ihre Arbeitsschritte und -phasen weitgehend selbstständig organisieren. Die Lehrer stehen beratend zur Seite, helfen mit technischem und mathematischem Know-How, stellen die Materialien zur Verfügung und stecken mit den Vorarbeitern die Zielvereinbarungen ab. Durch das Berichtsheft können die Lehrer den weiteren Verlauf der AG vorausschauend planen, Materialien zur Verfügung stellen oder möglichen Schwierigkeiten gezielt entgegenwirken.

Ziel der AG ist es, dass die jeweiligen Arbeitsgruppen der fiktiven Firma Puzzlewürfel aus Kunststoff herstellen. Sie sollen das fertige Produkt mit den verwendeten Materialien, Werkzeugen und technischen Zeichnungen so aufbereiten, dass diese bei einem fiktiven Auftraggeber präsentiert werden können. Ein weiteres Ziel der AG ist die Erzeugung einer handlungsorientierten Lernumgebung, in der sich die Schüler unter Verwendung authentischer Werkzeuge, Materialien und Arbeitsweisen bewegen sollen. Damit einhergehend ist auch die Schülerzentrierung, die durch die aus dem Vordergrund weichende Rolle der Lehrer entstehen soll. Die Mathematik soll dabei gezielt von den Schülern wahrgenommen und reflektiert werden. Sie sollen die eingesetzte Mathematik als nützliches Werkzeug erkennen.

Die AG ist so gestaltet, dass die Schüler zu Beginn mit einem konkreten Arbeitsauftrag eines fiktiven Auftragsgebers konfrontiert werden. Mit diesem Auftrag werden die Schüler angehalten, eine Arbeitsplanung, technische Zeichnungen und die Kunststoffwürfel selber herzustellen und zusammen mit allen weiteren Planungsunterlagen dem Auftraggeber zu präsentieren. Das bedeutet konkret, dass die Schüler zunächst selbstständig eine Arbeitsplanung erstellen müssen, mit der die notwendigen Arbeitsschritte geplant werden. So können z.B. die Arbeitsschritte „Vermessen der Bauteile und Erstellen von Skizzen“, „Erstellen von technischen Zeichnungen“, „Erstellen von Gussformen aus Blech“, „Guss der Kunststoffbauteile“, „Aufbereitung der Bauteile“ und „Vorbereitung der Präsentation“ identifiziert werden. Diese Arbeitsschritte legen zudem den zeitlichen Ablauf der AG fest, an den~~en~~ sich die Schüler halten können. Am Ende des Projektes steht die große Präsentation in Verbindung mit einer Firmenbesichtigung bei einem Partnerunternehmen an, damit die Schüler den Vergleich zu einem technischen Projekt in der Realität haben.

3. Erkenntnisse und Ausblick

Bei der Durchführung der AG wird deutlich, dass die Schüler in diesem recht technischen Kontext an vielen Stellen Mathematik verwenden. Dies ist zum Einen an den Eigenreflexionen der Schüler durch das Berichtsheft erkennbar, in welchem die Schüler beschreiben, wo sie in welcher Arbeitsphase Mathematik anwenden. Ebenso wird die Verwendung der Mathematik durch die jeweiligen AG-Hospitationen deutlich.

Die Schüler erkennen und verwenden bei der Durchführung der AG die Mathematik als nützliches Werkzeug. So wenden sie Mathematik z.B. bei der Strukturierung von Arbeitsplänen (Zeiteinschätzung) an, beim Vermessen von Bauteilen sowie bei der Erstellung von Skizzen, bei der Projektion dreidimensionaler Objekte auf zweidimensionale Ansichten, bei der Erstellung von technischen Zeichnungen und bei vielem mehr. Es können noch viele weitere Schnittstellen zur Mathematik identifiziert werden.

Neben dem mathematischen Bereich können noch weitere Kompetenzen gefördert werden. Orientiert man sich an dem Schlüsselqualifikationskreis (vgl., KOCH, 2006), der für die Berufsausbildung zentral ist, erkennt man ebenfalls enorme Schnittstellen und Förderungspotenzial des Projektes. Die Sozialkompetenz wird z.B. durch die Gruppenarbeit und die Einnahme der unterschiedlichen Rollen gefördert. Die Förderung der Methodenkompetenz kann durch die Verwendung authentischer Arbeitsweisen und Werkzeuge angestrebt werden. Im Bereich der Fachkompetenz kann eine Förderung durch die Stärkung mathematischer und technischer Kompetenzen erfolgen. Schließlich kann die Personalkompetenz durch die Stärkung von Kommunikationskompetenzen, die Stärkung der Leistungsbereitschaft und die Stärkung des Verantwortungsbewusstseins angestrebt werden.

Als Ausblick steht die Förderung mathematischer und technischer Kompetenzen im Bereich des Schlüsselqualifikationskreises. Das Förderprojekt kann aber auch so gestaltet werden, dass informationstechnische oder naturwissenschaftliche Aspekte stärker in den Vordergrund rücken. Insgesamt gesehen können alle vier Bereiche des MINT-Feldes angesprochen werden, so dass als Ziele bestehen bleiben: Die Verbesserung der Ausbildungschancen von Hauptschülern durch eine zusätzliche Qualifizierung im MINT-Feld und die Befähigung zum lebenslangen Lernen.

Literatur

Deutscher Industrie- und Handelskammertag (Hrsg.) (2010): Ausbildung in Deutschland: Ergebnisse einer IHK-Unternehmensbefragung. Berlin und Brüssel.

Koch, C. (2006): Schlüsselqualifikationen an der Schnittstelle zwischen Schule und Beruf. In: BMBF (Hrsg.) (2006): Praxis und Perspektiven zur Kompetenzentwicklung vor dem Übergang Schule – Berufsausbildung. Bonn und Berlin: GDE Preprint- und Mediaservice GmbH.

Rawe, B. (2009): Die Diskrepanz zwischen den Ausbildungswünschen und den realisierten Ausbildungswegen von Hauptschülern verringern – Hintergründe und Ideen für ein Mathematikförderprogramm. In: Thom, S. & Lutz-Westphal, B. (Hrsg.) (2009): Impulse für das Lehren und Lernen von Mathematik – Festschrift für Prof. Dr. Martin Winter. Vechta: Vechtaer Fachdidaktische Forschungen und Berichte.

Rawe, B. (2010): Mit Mathematik fit für die Berufsausbildung. Ein Förderprojekt für die Hauptschule. In: Reiss, K. (Hrsg.) (2010): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM Verlag.

Ruf, U. & Gallin, P. (2005): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band I: Austausch unter Ungleichen. 3. Auflage. Seelze-Velber: Kallmeyer.

http://www.manager-magazin.de/unternehmen/karriere/0,2828,687881,00.html; Letzter Aufruf: 23.02.2011.

Charlotte RECHTSTEINER-MERZ, Weingarten

Datenerhebungs- und Auswertungsinstrumente zur Untersuchung flexibler Rechenkompetenzen bei schwachen Kindern

Ausgehend von der Theorie zum flexiblen Rechnen werden ein zentrales Instrument zur Datenerhebung und zwei Kategoriensysteme – ein deduktives und ein induktives – zur Datenanalyse vorgestellt.

Theorie zum flexiblen Rechnen

Aufschluss über die flexiblen Rechenkompetenzen eines Kindes bekommt man über eine Rekonstruktion seines Vorgehens beim Rechnen (Abb. 1). Dabei ist es nicht ausreichend, den Blick ausschließlich auf die benutzten Lösungswerkzeuge der Kinder wie Faktenabruf, Zählen und/ oder verschiedene strategische Werkzeuge (Rathgeb-Schnierer 2011, Threlfall 2002, 2009) zu richten. Vielmehr sollte auch der Referenzkontext betrachtet werden: Stützt sich ein Kind im Lösungsprozess auf eine Form der Visualisierung (z. B. auf die Finger oder ein Arbeitsmittel und den Umgang damit), auf Zahleigenschaften und Zahl- und Aufgabenbeziehungen oder auf ein erlerntes Verfahren? Dabei ist es durchaus möglich, dass zwei Referenzen genutzt werden. So kann ein Kind beispielsweise mit Hilfe eines Arbeitsmittels und durch das Nutzen eines erlernten Verfahrens eine Aufgabe lösen. Von *flexiblem Rechnen* spricht Threlfall (2009) allerdings nur dann, wenn auf der Grundlage von erkannten Aufgabenmerkmalen und Zahl- und Aufgabenbeziehungen auf strategische Werkzeuge oder Basisfakten zurück gegriffen wird.

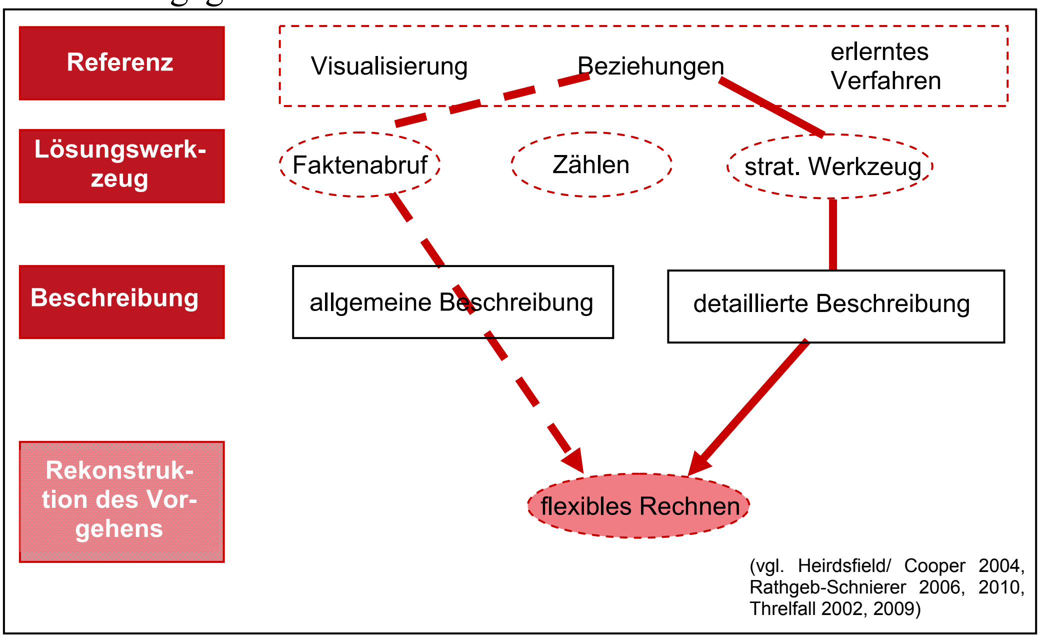


Abb. 1

Bei Rathgeb-Schnierer (2006, 2010, 270 f.) finden sich folgende Merkmale für flexibles Rechnen:

- „das Erkennen von Aufgabenunterschieden,
- das Erkennen von Zahl- und Aufgabeneigenschaften sowie von Zahlbeziehungen,
- das Nutzen von Zahl- und Aufgabeneigenschaften sowie Zahlbeziehungen beim Lösen von Aufgaben,
- das Kennen und Verstehen von strategischen Werkzeugen sowie der bewegliche Umgang mit ihnen,
- das Kennen von alternativen Rechenwegen,
- das Begründen von Rechenwegen,
- die Einschätzung der Passung eines Lösungsweges und
- das Verfügen über metakognitive Kompetenzen."

Um die Vorgehensweise und die dahinter liegenden Überlegungen der Kinder erfahren zu können, stellen die Lösungswegbeschreibungen und ggf. Darstellungen des Kindes einen wesentlichen Aspekt für den Forschungsprozess dar (vgl. Abb. 1).

Forschungsfragen

Im Mittelpunkt der Studie steht die zentrale Frage:

Kann durch das Einbeziehen verschiedener Aktivitäten zur Zahlenblickschulung in den Regelunterricht bei schwachen Kindern flexibles Rechnen gefördert werden?

Daraus leitet sich die Frage nach angemessenen Datenerhebungs- und Analyseinstrumenten ab, mit welchen flexibles Rechnen untersucht werden kann, wenn die oben skizzierte Theorie zu Grunde gelegt wird. Einerseits muss dabei die Entwicklung der Rechenwege (Lösungswerkzeuge) aus fachdidaktischer Perspektive betrachtet werden. Andererseits darf aber auch die Frage nach der Qualität der Lösungswegbeschreibungen und deren Begründungen, die auch Einblicke in den Referenzrahmen ermöglichen, nicht außer Acht gelassen werden.

Zentrales Datenerhebungsinstrument

Um diese zentrale Forschungsfrage beantworten zu können, wurden während des zweiten Halbjahrs von Klasse 1 und zu Beginn der 2. Klasse je vier problemzentrierte Leitfadeninterviews pro Kind geführt. Als zentrales Datenerhebungsinstrument der Studie zog sich unter anderen die Aktivität

„leicht – schwer“ durch alle vier Interviews. Um die oben genannten Merkmale für flexibles Rechnen beobachten zu können, enthält die Aktivität zwei Aspekte: das Sortieren gegebener Aufgaben in „leicht“ und „schwer“ und das Lösen aller „leichten“ und einiger „schwerer“ Aufgaben. Während beim Sortieren jeweils nach der Begründung für die Zuordnung gefragt wurde, stand beim Lösen die Beschreibung des Lösungsweges im Mittelpunkt.

Datenanalyseinstrumente

Mit Blick auf die Forschungsfrage und die Theorie zum flexiblen Rechnen müssen bei der Datenanalyse zwei Aspekte in den Blick genommen werden: erstens die Rechenwege und zweitens die Art der Beschreibungen und Begründungen der Kinder.

Beschreiben die Kinder ihre Lösungswege, so nennen sie in der Regel genutzte Lösungswerkzeuge und eventuell als Referenz die Visualisierungsform. Um diese Aspekte zu erfassen, wurde ein theoriebasiertes Kategoriensystem (Abb. 2) entwickelt, welches zur Durchführung der strukturierenden Inhaltsanalyse (Mayring 2002, 2008) herangezogen wurde.

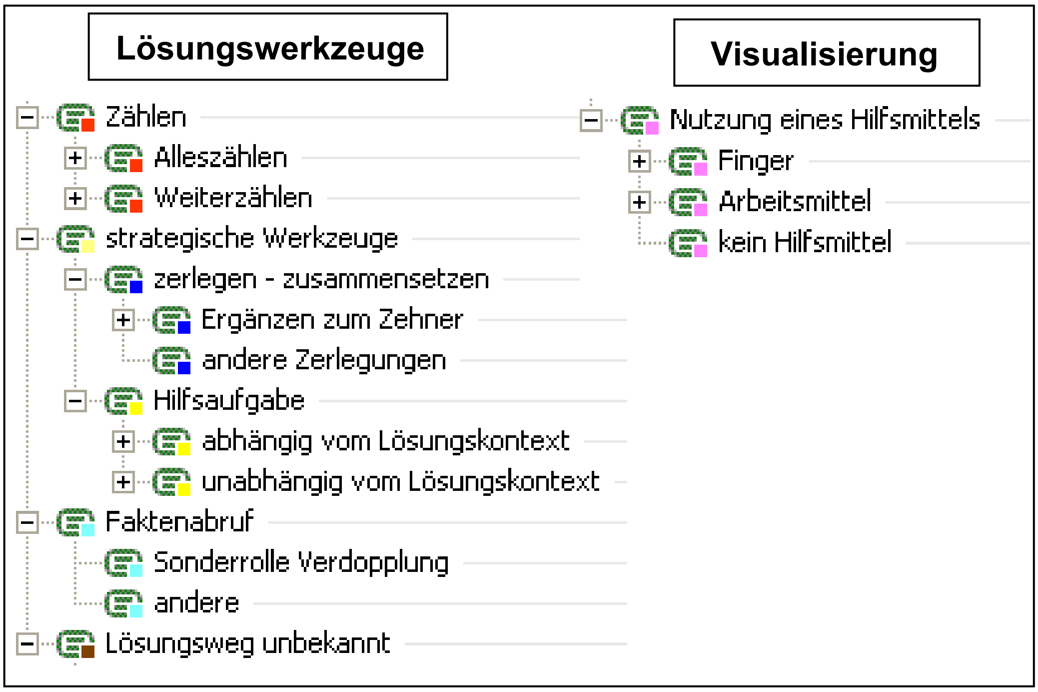


Abb. 2

Um die Qualität der Begründungen und Beschreibungen der Kinder zu verstehen und damit auch Rückschlüsse auf die Referenz „Beziehungen“ oder „erlerntes Verfahren“ ziehen zu können, müssen diese gesondert betrachtet werden. Dafür wurde ein datenbasiertes induktives Kategoriensystem (Abb.

3) für eine zusammenfassende Inhaltsanalyse erstellt (Mayring & Gläser-Zikuda 2008).

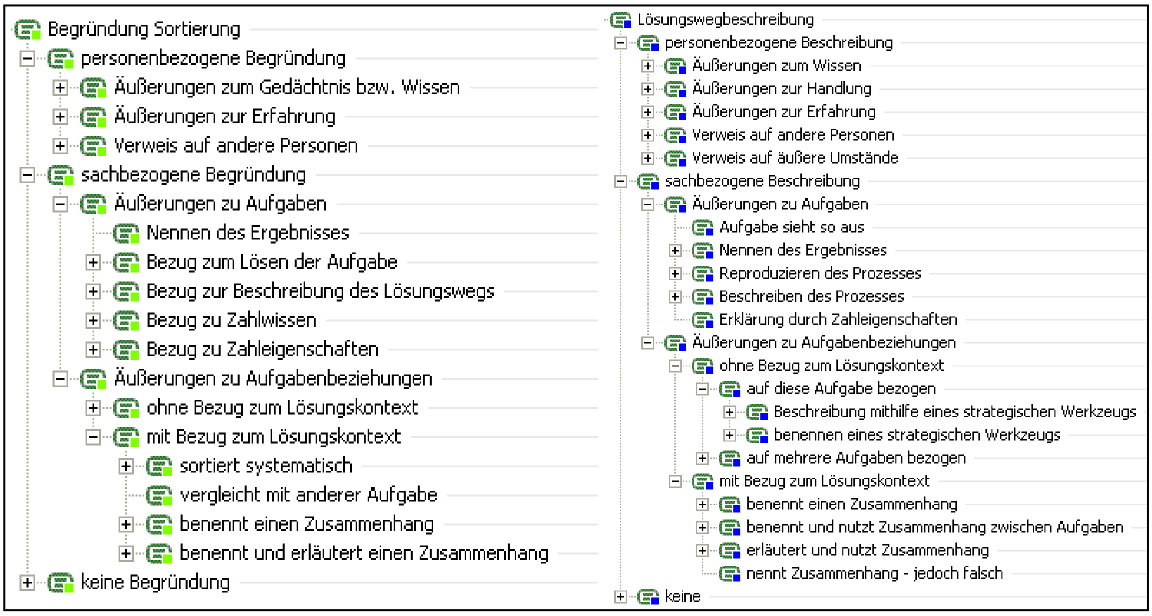


Abb. 3

Bei diesem Kategoriensystem wird deutlich, dass die Hauptkategorien „sachbezogene Begründung“ und „sachbezogene Beschreibung“ bei der Rekonstruktion des Rechnens mit Blick auf flexibles Vorgehen hilfreich sein können. Dabei scheinen die Unterkategorien „Äußerungen zu Aufgabenbeziehungen“ jeweils besonders interessant zu sein und Aufschluss über das Nutzen, Beschreiben und Begründen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen geben zu können. Dies setzt eine Betrachtung und einen Vergleich der Qualität der Erklärungen und Begründungen voraus.

Ausblick

Durch die Zusammenführung dieser beiden Kategoriensysteme und das Bilden eines Merkmalsraums (Kluge 1999) werden Typen gebildet, die auf der Theorie zum flexiblen Rechnen basieren. Damit kann prototypisch beschrieben werden, inwieweit es den Kindern gelungen ist, sich vom Zählen zu lösen, erste Basisfakten zu automatisieren und/ oder strategische Werkzeuge zu nutzen. Dabei ist zu unterscheiden, ob auf ein erlerntes Verfahren oder das Nutzen von Zahl- und Aufgabeneigenschaften und –beziehungen zurückgegriffen wird.

Literatur

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann bei der Autorin per Email angefordert werden: rechtsteiner@ph-weingarten.de

Julia REIBOLD, Regina BRUDER, Darmstadt

Wirkungsanalysen eines binnendifferenzierenden Unterrichtskonzeptes für die Sekundarstufe I (Projekt MABIKOM)

1. Das Projekt MABIKOM

Mit einer differenzierenden Gestaltung des Unterrichtes ist ein hoher Anspruch und Vorbereitungsaufwand für den Unterricht verbunden, der nur sehr begrenzt von einer Lehrkraft allein bewältigt werden kann. Deshalb bedarf es geeigneter Unterstützungsinstrumente in Form von Orientierung gebenden Unterrichtsmodellen und ausgearbeiteten, erprobten und anpassungsfähigen themenspezifischen Lehr- und Lernmaterialien zur Förderung eines langfristigen mathematischen Kompetenzaufbaus.

Das im Jahr 2008 vom Land Niedersachsen initiierte Projekt MABIKOM (**MA**thematische **BI**nnendifferenzierende **KO**mpetenzentwicklung in einem mit neuen Technologien unterstützten **M**athematikunterricht) entwickelt und erprobt ein alltagstaugliches Unterrichtskonzept für binnendifferenzierenden Mathematikunterricht an Gymnasien von Klasse 5 bis 10.

Dieses Unterrichtskonzept versteht sich als ein Gerüst für eine differenzierende Unterrichtsgestaltung und soll den Mathematikunterricht um markante didaktische Elemente bereichern. Darüber hinaus bietet das Konzept eine Orientierung bei der Planung einer Unterrichtseinheit, wann welche differenzierenden Methoden sinnvoll zum Einsatz kommen können.

Auf der Grundlage des Unterrichtskonzeptes sind durch die beteiligten Lehrkräfte binnendifferenzierende Materialien für jede Unterrichtseinheit des niedersächsischen Kerncurriculums von Klasse 5 bis Klasse 10 entwickelt und erprobt worden.

2. Ein differenzierendes Unterrichtskonzept

Die Zielsetzung eines binnendifferenzierenden Unterrichtes, möglichst viele Schüler/innen kognitiv und motivational anzusprechen und effektiv Lernfortschritte für alle zu erzielen, ist nur dann zu realisieren, wenn die Selbsteinschätzungskompetenzen der Schüler/innen entwickelt werden und die Lernenden zumindest ansatzweise Verantwortung für den eigenen Lernprozess übernehmen. Aus diesem Grund wurden innerhalb des Unterrichtskonzeptes solche binnendifferenzierenden Maßnahmen gebündelt, die mit geeigneten aufgabengestützten Methoden die Selbsteinschätzungs- und Selbstregulationskompetenzen gezielt fördern können.

Ein gezieltes Eingehen auf unterschiedliche Voraussetzungen der Lernenden wurde im insbesondere durch spezielle anforderungsgestufte Aufgabensets mit Wahlmöglichkeiten umgesetzt. Durch ein Angebot an mehreren, aber strukturiert vielfältigen Aufgaben kann eine differenzierte kognitive Aktivierung der Schüler erfolgen (Bruder et al. 2008).

3. Die Begleitstudie MABIKOM

Trotz zahlreicher Vorschläge zum Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht konnte sich Binnendifferenzierung im Schulalltag bisher noch recht wenig etablieren. In diesem Kontext erhalten empirische Wirkungsanalysen von binnendifferenzierenden Maßnahmen eine große Bedeutung.

Die Forschung zur Binnendifferenzierung und Individualisierung wird jedoch „durch den Mangel an einem theoretisch und empirisch plausiblen Modell wesentlicher Elemente des Phänomens ‘Individualisierung‘ und seiner wichtigsten Rahmenbedingungen beeinträchtigt“ (vgl. Altrichter et al. 2009, s.356). Eine Entwicklung und Erprobung von relevanten Indikatoren und Faktoren für binnendifferenzierende Wirkung eines (Mathematik)unterrichtes steht in der empirischen Unterrichtsforschung noch bevor.

Die Begleitstudie MABIKOM hat einen explorativen Charakter und analysiert neben der Leistungsentwicklung der Lernenden unterschiedlicher Leistungsgruppen deren subjektive Wahrnehmungen des Mathematikunterrichts bezüglich der Lernanforderungen und Lernmethoden. Die Zusammenhanganalyse der Schülerwahrnehmungen untereinander und auch in Verbindung mit Leistungsindikatoren im Laufe der zwei Projektjahre kann einige Hinweise auf mögliche Faktoren binnendifferenzierender Wirkung des Mathematikunterrichts liefern.

Insbesondere sind die Schülerwahrnehmungen in Bezug auf regelmäßig eingesetzte differenzierende Aufgabensets zu untersuchen. Das Lernen mit Aufgabensets im Gegensatz zum Lernen mit einzelnen Aufgaben löst zusätzliche kognitive Prozesse aus, „z.B. Kontrollprozesse, die die Zuweisung von kognitiven Ressourcen zu unterschiedlichen Aufgaben steuern“ (vgl. Astleitner 2006, s. 19). Außerdem bringt das Lernen mit Aufgabensets neben der kognitiven auch „motivationale und emotionale Auswirkungen“ mit sich, z.B. die manchmal ausbleibende Bereitschaft leistungsstärkerer Lernender sich tatsächlich mit den schwierigeren Aufgaben auseinander zu setzten (vgl. ebenda, s.19). Im Rahmen des Unterrichtskonzeptes MABIKOM wurde beim Einsatz von Aufgabensets mit Wahlmöglichkeit eine bestimmte Anzahl von Aufgaben festgelegt, die in einer verabredeten Zeit bearbeitet werden soll. Dabei wurde intendiert, dass leistungsschwächere Lernende mit den ersten und noch besonders einfachen Aufgaben beginnen und in der gegebenen Zeit so weit kommen wie sie es schaffen. Leistungsstärkere Lernende können dagegen die ersten Aufgaben über-springen, um bereits mit einem höheren Schwierigkeitsgrad einzusteigen. Ob die Lernenden tatsächlich die angebotenen Wahlmöglichkeiten wie intendiert wahrnehmen und wertschätzen war noch zu untersuchen.

4. Ausgewählte Ergebnisse

Die Schülerwahrnehmungen bzgl. des Mathematikunterrichtes wurden mit Hilfe von 93 Rating-Items erhoben. Erfragt wurden u.a. Einschätzungen des Unterrichts und seiner Qualität (z.B. Anspruchsniveau, Unterrichtsgestaltung, Instruktionsverhalten des Lehrers) und Angaben zu individuellen Bedingungen der Schülerleistung (z.B. Lernmotivation, fachliches Selbstkonzept, Einstellung zu Mathematik) (vgl. Helmke & Jäger 2002).

Zur Gewinnung von geeigneten Modellvariablen wurden die folgenden auf Schülerangaben basierenden Skalen gebildet (Klassenstufe 8, n=322):

	Zahl der Items	Cronbachs Alpha
Konstruktives Lernverhalten	8	0,90
Interesse an und konstruktive Einstellungen zur Mathematik	8	0,92
Selbstvertrauen bzgl. Mathematik	6	0,92
Checkliste (Wertschätzung)	3	0,94
Multiple Lösungswege einer Aufgabe	3	0,89
Kopfübungen	2	0,79
Langfristige Hausaufgaben (Wertschätzung)	4	0,87
Mathematikbild	4	0,88
Taschenrechner	2	0,91
Freiheitspielräume für Lernenden	4	0,88
Wahlmöglichkeiten Existenz Wertschätzung	 2 3	 0,87 0,89

Die Bildung von Skalen erfolgte auf der Grundlage von den für ordinale Daten spezifischen Korrelationskoeffizienten nach Somer (Bortz et al. 2008), die von der Annahme der Äquidistanz zwischen Ausprägungen frei sind.

Wenn man nur die Skalen betrachtet, die Schülerwahrnehmungen der methodischen Elemente des Unterrichtskonzeptes MABIKOM (Checklisten, Wahlmöglichkeiten von Aufgaben mit unterschiedlichen Anforderungsniveaus, Langfristige Hausaufgaben mit Selbstregulationselementen) darstellen, dann besteht ein positiver Zusammenhang auf Klassenebene zwischen der Mathematikleistung (wie im Test gemessen) und der Wahrnehmung/Wertschätzung der differenzierenden Unterrichtselemente.

Die Wahlmöglichkeiten von Aufgaben mit unterschiedlichen Anforderungsniveaus wurden von den Lernenden aller Leistungsgruppen wahrgenommen und wertgeschätzt. Interessant ist, dass leistungsschwächere Lernende sich in der Wahrnehmung und Wertschätzung der Wahlmöglichkeiten von den anderen Leistungsgruppen kaum unterscheiden.
Es hat sich gezeigt, dass die Schülerwahrnehmung und die Wertschätzung der Wahlmöglichkeiten im Laufe des Schuljahres zwar im Zustimmungsbereich bleibt, jedoch in der Tendenz signifikant sinkt. Gründe für solche Effekte sind noch zu erforschen.

5. Ausblick

Um weitere Effekte des Einsatzes des differenzierenden Unterrichtskonzeptes zu erkennen und mögliche Ursachen der Ergebnisse herauszuarbeiten, sind weitere Analysen notwendig, insbesondere:

- Analyse der Leistungsentwicklung auf der Ebene der einzelnen Aufgaben und Einbeziehung von weiteren Messmodellen, die einzelne Aufgaben aufgrund ihrer Schwierigkeit gewichten.
- Clusteranalyse der Lernenden bezüglich deren Wahrnehmung vom Mathematikunterricht und Verfolgen von Leistungsentwicklungen einzelner Clustergruppen.
- Verfolgen von Entwicklungen der Mathematikleistung und Schülerwahrnehmungen über zwei Projektjahre hinweg.
- Analyse gewonnener Phänomene in Abhängigkeit von der Klassenstufe.

Literatur

Altrichter, H., Trautmann, M., Wischer, B., Sommerauer, S., Doppler, B. (2009): Unterrichten in heterogenen Gruppen: Das Qualitätspotenzial von Individualisierung, Differenzierung und Klassenschülerzahl. In W. Specht (Hrsg.): Nationaler Bildungsbericht Österreich 2009, Band 2, s. 341-361

Astleitner, H. (2006):Aufgaben-Sets und Lernen. Instruktionspsychologische Grundlagen und Anwendungen. Frankfurt am Main: Peter Lang GmbH

Bortz, J., Lienert, G.A., Boehnke, K. (2008): Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik. Berlin: Springer

Bruder, R., Leuders, T., Büchter, A. (2008): Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor

Helmke, A., Jäger, R.S. (Hrsg.)(2002): Das Projekt MARKUS. Mathematik-Gesamterhebung Rheinland-Pfalz: Kompetenzen, Unterrichtsmerkmale, Schulkontext. (VEP-Aktuell, Bd.2). Landau: Verlag Empirische Pädagogik

Katrin REIMANN, Köln

Probleme des Mathematikunterrichtes beim Übergang von Arithmetik zur Algebra

Die Algebra nimmt innerhalb der Mathematik eine zentrale Rolle ein. Sie gilt als Sprache der Mathematik und bildet somit die Grundlage zur Betrachtung und Beschreibung mathematischer Strukturen. Durch die Erweiterung der Objekte um Variablen können allgemeine Gesetze aufgestellt, funktionale Abhängigkeiten beschrieben, sowie Gleichungen hergeleitet und untersucht werden. Das Verständnis der Algebra und damit vor allem auch der richtige Umgang mit Variablen stellt die wesentliche Voraussetzung für das Verständnis der weiterführenden Mathematik dar.

1. Differenzen zwischen Arithmetik und Algebra

Um die hauptsächlichen Probleme von Schülerinnen und Schülern (SuS) bei dem Erlernen der Algebra identifizieren zu können, ist es grundlegend die Differenzen zwischen Arithmetik und Algebra im Schulunterricht zu betrachten. Die beiden Teilgebiete unterscheiden sich von einander zum einem in der Zielsetzung und zum anderen in dem Umgang mit Unbekannten (vgl. Fischer 2009). Während in der Arithmetik das Finden numerischer Lösungen im Vordergrund steht, liegt in der Algebra der Fokus auf dem Betrachten gemeinsamer Strukturen. So machen zum Beispiel algebraische Gesetze Aussagen über alle Elemente einer Menge. Diese Differenzen bedeuten einen unterschiedlichen Anforderungsgrad, der an die SuS gestellt wird.

Neben der Betrachtung der Differenzen ist es erforderlich, die Frage zu diskutieren, wo die Grenze zwischen den beiden Bereichen Arithmetik und Algebra verläuft. Herscovics und Linchevski bezeichnen diese Grenze als „cognitive gap“ (vgl. dieselben 1994). Der „cognitive gap“ stellt dabei die Unfähigkeit der SuS dar, spontan und intuitiv an und mit Unbekannten zu operieren. Demnach ist Algebra mehr als ein reines Rechnen mit Buchstaben und somit auch keine bloße Verallgemeinerung der Arithmetik. Dafür spricht ebenfalls, dass bei dem Übergang von der Arithmetik zur Algebra eine Bedeutungsveränderung der Symbole und Schreibweisen stattfindet (vgl. Malle 1993). Dies äußert sich zum einen in der so genannten Konkatenation, d.h. Hintereinanderstellung von Symbolen, und ist hier als Notations- bzw. Darstellungsproblem zu sehen. In der Arithmetik wird die Konkatenation stets als implizite Addition verstanden, wohingegen sie in der Algebra entweder als implizite Multiplikation oder als beides aufgefasst wird. Zum anderen sind sowohl Operationszeichen als auch das Gleichheitszeichen von der Bedeutungsveränderung betroffen, welche bei beiden von inhaltlicher Art ist. Das Operationszeichen wird in der Arithmetik als eine Aufforderung zum Handeln angesehen, es ist damit ein Aktionszeichen. In der Algebra hingegen tritt das Operationszeichen auch als Bestandteil eines Zahlnamens auf und zieht damit keine Handlung nach sich. Das Gleichheitszeichen hat in der Arithmetik die Funktion eines Zuweisungszeichens: es weist einer Aufgabe ein Ergebnis zu. Diese Bedeutung wird in der Algebra durch die Vorstellung eines Vergleichszeichens ersetzt. Es ist daher bei der Einführung der Algebra wesentlich sich diesen Problematiken bewusst zu sein und die SuS dafür zu sensibilisieren.

2. Operationen an einer Unbekannten ausführen

Wie oben angesprochen ist eine wesentliche neue Herausforderung im Algebraunterricht das Ausführen von Operationen an Unbekannten. Die Voraussetzung dafür ist, dass die Unbekannte selbst als ein Objekt der Theorie angesehen wird (vgl. Sfard 1991). Abstrakte Begriffe können auf zwei Arten aufgefasst werden, zum einen operational, d.h. als Prozess, und zum anderen strukturell, d.h. als Objekt. Die operationale Auffassung stellt beim Erlernen eines neuen Begriffes den ersten Schritt dar. Um einen Begriff als Objekt einer Theorie zu begreifen, muss nach Sfard ein Prozess von drei Schritten durchlaufen werden. Der erste Schritt ist die *Iteriorization* (Verinnerlichung): hier werden Operationen mit vertrauten Objekten einer niedrigeren Stufe ausgeführt. Im nächsten Schritt, der *Condensation* (Verdichtung), wird über den Prozess als ganzes nachgedacht und eine Notation als Kryptonym für die Operation eingeführt. Der letzte Schritt ist die *Reification* (Vergegenständlichung). Hier wird die Notation als vollwertiges Objekt der Theorie betrachtet und zwar losgelöst von dem vorangegangenen Prozess. Am Beispiel der negativen Zahlen soll Sfards Prozess der Vergegenständlichung kurz erläutert werden: Die negativen Zahlen werden in der Phase der Iteriorization anhand der Ausführung der Subtraktion mit natürlichen Zahlen geübt. In der Condensation wird die Notation der negativen Zahlen eingeführt. Dieser Schritt wird gefördert durch die Verknüpfung des zugrunde liegenden Prozesses mit einer weiteren rechnerischen Operation. In der Reification wird zuletzt eine ontologische Vorstellung mit der negativen Zahl verbunden. Diesen Prozess müssen die SuS auch bezogen auf die Unbekannten durchlaufen, um in der Lage zu sein, Operationen mit ihnen auszuführen.

3. Variablen als zugrunde liegendes Konzept

Variablen ermöglichen es, Beschreibungen und Voraussagen nicht mehr nur für einzelne Beispiele oder Situationen zu geben, sondern allgemein, d.h. für eine ganze Menge von Situationen derselben Art. Sie sind Mittel der Verallgemeinerung und damit ein grundlegendes Konzept der Algebra. Schoenfeld und Arcavi beschrieben dies in folgender Weise: „Understanding the concept [of variable] provides the basis for the transition from arithmetic to algebra and is necessary for the meaningful use of all advanced mathematics." (Schoenfeld, Arcarvi 1988, S. 420)

Eine Betrachtung der historischen Entwicklung der Algebra verdeutlicht, dass die Algebra sich schon vor dem Gebrauch von Variablen herausbildete und auch, dass sich die Verwendung der Variablen in einem langen, über tausendjährigen Prozess entwickelt hat. Deutlich wird dies besonders durch die geläufige Einteilung der Algebra in drei Phasen (vgl. Harper 1987): In der ersten, der rhetorischen Phase, wurden alle Behauptungen und Argumente nur in Worten und Sätzen verfasst. Sie wurde durch die synkopierte Phase abgelöst, in welcher einzelne Zeichen im Umgang mit algebraischen Termen benutzt wurden, jedoch traten Variablen nur für die unbekannten, gesuchten Größen auf. Die Verwendung von Buchstaben für die gegebenen Größen führte Vieta ein, was den Beginn der letzten, symbolischen Phase darstellte. In der symbolischen Phase findet eine komplette Symbolisierung statt, d.h. alle Zahlen, Operationen und Beziehungen werden durch Symbole ausgedrückt. Bei der Behandlung der Algebra in der Schule sollte dieser historische Entwicklungsprozess stärker bedacht werden und dabei auch auf die verschiedenen Arten von Variablen eingegangen werden. Denn wie eine Studie von Harper zeigt, durchlaufen die SuS beim Erlernen der Algebra analoge Phasen zu den oben Genannten.

4. Epistemologische Hindernisse

Die Geschichte der Algebra gibt einen Einblick in die Komplexität des Konzepts der Variable und der zu überwindenden Hindernisse, welche während der Entwicklung der Algebra aufkommen. Sierpinska machte darauf aufmerksam, dass sogenannte epistemologische Hindernisse existieren, welche, unabhängig von den Lernenden oder der Art der Vermittlung, beim Erwerb eines Inhaltes auftreten (vgl. Sierpinska 1992). Diese Hürden sind Teil des zu erlernenden Stoffes selbst und müssen auch von den SuS für das Verständnis der Algebra überwunden werden. Das Ziel der historischen Untersuchung ist daher vor allem das Aufspüren ideengeschichtlich bedeutsamer Konzepte, welche auf das individuelle Lernen der SuS übertragen werden können.

Neben den drei Darstellungsebenen der Algebra hat Katz noch vier unabhängige inhaltliche Phasen in ihrer historischen Entwicklung identifiziert (Vgl. Katz 2007). Zu Beginn war die Algebra rein geometrisch gerechtfertigt und entwickelte sich dann über das Lösen von Gleichungen und das Beschreiben von Kurven hin zur abstrakten Algebra. Sie war folglich nicht immer die abstrakte Wissenschaft, als die sie heute aufgefasst wird, sondern hat sich aus geometrischen Fragestellungen herausgebildet. Dies zeigt auch deutlich Eulers Auffassung von der Algebra. Für ihn war sie eine Wissenschaft, die sich auf die Realität bezog, indem sie zeigte, wie man unbekannte Größen findet. Algebra wurde somit im Kontext von empirischen Theorien entwickelt.

Die hier vorgestellten Überlegungen motivieren die folgenden weiterführenden Forschungsfragen: Wird Algebra in der Schule (unbewusst) als eine empirische Theorie vermittelt? Ist es gerechtfertigt, Algebra auf diese Weise im Mathematikunterricht einzuführen? Dabei ist der Begriff der empirischen Theorie in Bezug auf die Algebra in dem Sinne zu verstehen, dass die algebraischen Terme selbst so behandelt werden, als wären sie reale Objekte. Eine empirische Auffassung von Algebra grenzt sich damit von der Vorstellung von Algebra als formaler Sprache und auch von der durch realitätsbezogene Fragestellungen entwickelten Algebra ab.

Literatur

Fischer, A. (2009): Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen – Zahl- und Variablenauffassung von Fünftklässlern. In: Journal für Mathematik-Didaktik 30, S. 3 – 29.

Harper, E. (1987): Ghost of Diophantus. In: Educational Studies in Mathematics 18, S. 75 – 90.

Herscovics, N., Linchevski, L. (1994): A cognitiv gap between Arithmetic and Algebra. In: Educational studies in mathematics 27, S. 59 – 78.

Katz, V. (2007): Stages in the history of algebra with the implication of teaching. In: Educational studies in mathematics 66, S. 185 – 201.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra.

Schoenfeld, A., Arcarvi, A. (1988): On the Meaning of Variable. In: Mathemaics Teacher 81, Heft 6, S. 420 – 427.

Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. In: Educational studies in mathematics 22, S. 1 – 36.

Sierpinska, A. (1992): On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E. and Harel, G.: The concept of function, Elements of Pedagogy and Epistemology.

Martin REINOLD, Dortmund

Lehrerfortbildung zur Innovationsunterstützung im Mathematikunterricht (LIMa)

Bei dem im Folgenden beschriebenen Projekt LIMa handelt es sich um ein Kooperationsprojekt der Universität Wuppertal (Institut für Bildungsforschung, Leitung: Prof. Cornelia Gräsel) und der TU Dortmund (Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, Leitung: Prof. Christoph Selter). Das Projekt wird von 2009 bis 2012 im Rahmen des Forschungsschwerpunktes „Entwicklung von Professionalität des pädagogischen Personals in Bildungseinrichtungen" vom BMBF finanziert.

1. Stand der Fortbildungsforschung

Lehrerinnen und Lehrer werden im Laufe ihrer beruflichen Tätigkeit immer wieder mit neuen Herausforderungen konfrontiert. Die immer neuen Bedingungen des Aufwachsens, aber auch Innovationen auf schulorganisatorischer und curricularer Ebene erfordern von den Lehrkräften eine Weiterentwicklung des eigenen Professionswissens und Handelns (vgl. Bonsen, 2009). Die Verbreitung von Innovationen geschieht im Bildungssystem jedoch in der Regel eher langsam und stockend (vgl. Gräsel et al., 2006a). Es ist daher nötig, diese Prozesse durch gezielte Maßnahmen in ihrer Verbreitung zu unterstützen. Eine wichtige Möglichkeit der Innovationsunterstützung ist die Durchführung von Lehrerfortbildungen in der sogenannten dritten Phase der Lehrerbildung (vgl. Bonsen, 2009, Brunner et al., 2006).

Die Wirksamkeit einer Fortbildung lässt sich „nach der Reichweite ihrer Wirkung auf vier Ebenen verorten" (Lipowsky, 2010). Die erste Ebene bezieht sich auf die Einschätzung und Akzeptanz der Fortbildungsveranstaltung durch die teilnehmenden Lehrkräfte. Die Veränderung von kognitiven und motivationalen Merkmalen der Lehrkräfte wird auf der Ebene zwei erfasst. Der dritten Ebene sind die unterrichtlichen Lehrerhandlungen zugeordnet, während die Veränderungen auf Schülerebene in Lernerfolg und Motivation auf der vierten Ebene abgebildet werden (vgl. Lipowsky 2010). Häufig wird die positive Auswirkung auf dieser Ebene als zentrales Kriterium für den Erfolg einer Fortbildung angesehen (vgl. Bonsen 2009).

Fortbildungen müssen selbstverständlich gewissen Qualitätskriterien genügen. Die COACTIV-Studie konnte belegen, dass allein die Anzahl besuchter Fortbildungen keinen messbar positiven Effekt auf das Wissen der Lehrkräfte hat (vgl. Brunner et al., 2006). Die eher schmale Forschungslage hat gezeigt, dass für den Fortbildungserfolg Unterrichtsbezug und Praxisnähe ebenso wichtig ist, wie das Anknüpfen an Wissen der Lehrkräfte und ein klarer fachdidaktischer oder fachlicher Fokus (vgl. Garet et al., 2001; Lipowsky, 2010). Andere Studien, die auch die Unterrichts- und Schülerebene einbeziehen, zeigen, dass die Weiterentwicklung auf diesen Ebenen nur dann gelingen kann, wenn Fortbildungen Lehrkräfte nachhaltig zur Kooperation untereinander anregen (vgl. Gräsel et al., 2006b).

Die beiden Fokussierungen von Fortbildungen auf einen fachdidaktischen Inhalt bzw. die Förderung der Kooperation sollen im Projekt LIMa gegenübergestellt werden und in ihren Auswirkungen bei der Innovationsunterstützung auf Schüler- und Lehrerebene verglichen werden.

Als Innovation ist der neue Lehrplan für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen aus dem Schuljahr 2008/2009 der zentrale Inhalt der Fortbildungsveranstaltungen. Für das Fach Mathematik wird darin als eine bedeutende Neuerung die stärkere Betonung und Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen gefordert, die in Anlehnung an die KMK-Bildungsstandards für den Primarbereich formuliert wurden (vgl. KMK, 2005; MSW, 2008). Da Studien wie PISA und Iglu zeigen, dass bisher prozessbezogene Kompetenzen im Mathematikunterricht noch nicht die erforderliche Beachtung gefunden haben, ist in diesem Bereich eine Innovationsunterstützung in Form von Fortbildungen sinnvoll und notwendig.

2. Forschungsfragen

Im Zentrum des Projektes steht die Fragestellung, welche Ausrichtung einer Fortbildungsreihe den Transfer von Innovation (hier der neue Lehrplan für Mathematik der Grundschulen in NRW) am besten unterstützen:

- Wie bewerten die fortgebildeten Lehrkräfte die durchgeführten Fortbildungsveranstaltungen?
- In welchem Maße lassen sich Veränderungen in den Einstellungen und dem Wissen der fortgebildeten Lehrkräfte in Bezug auf den Lehrplan im Allgemeinen und die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen im Besonderen feststellen?
- Welche Veränderungen lassen sich durch die Fortbildungen auf Ebene der Schülerschaft in Motivation und Leistung feststellen?
- Welche Unterschiede zeigen sich in der Wirksamkeit der verschiedenen Fortbildungsansätze?

3. Design

Im Rahmen des Projektes werden in einem Prä-Post-Follow-up-Design drei verschiedene Versionen einer dreiphasigen Fortbildung zum neuen Lehrplan für Mathematik durchgeführt und miteinander verglichen. Dazu wurden drei Fortbildungsgruppen mit jeweils fünf Schulen gebildet. In einer Gruppe (A) werden die Fortbildungsveranstaltungen mit dem Schwerpunkt auf fachdidaktische Anregungen durchgeführt, während in einer anderen Gruppe (B) die Anregung der Kooperation im Kollegium im Vordergrund steht. In der dritten Gruppe (C) werden beide Schwerpunkte miteinander kombiniert. Weiterhin gibt es noch zwei Kontrollgruppen, von denen eine (D) an einer Informationsveranstaltung zum Lehrplan teilgenommen hat und die andere (E) als reine Kontrollgruppe ohne weiteren Input fungiert.

Zu Beginn des Projekts nahmen im November 2009 die Gruppen A-D an einer halbtägigen Informationsveranstaltung zum Lehrplan teil. Daran schließen sich für die Gruppen A-C die drei jeweils halbtägigen Fortbildungen im Abstand von je etwa 5 Monaten bis zum April 2011 an. In den Veranstaltungen bekommen die Lehrkräfte Anregungen zur Unterrichtsgestaltung bzw. zu Kooperation im Kollegium, die in den Phasen zwischen den Fortbildungen umgesetzt werden sollen. Inhaltlich stehen die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen vor dem Hintergrund der Heterogenität, sowie der im Lehrplan formulierte Leistungsbegriff im Zentrum der Fortbildungsveranstaltungen.

Zur Erhebung der Einstellung und Motivation der Lehrkräfte sowie deren Vorgehen bei der Unterrichtsplanung und Bewertung der Fortbildungsveranstaltungen werden in vier Erhebungsphasen (vor jeder Fortbildung und etwa ein halbes Jahr nach der letzten Fortbildung) Fragebogenerhebungen durchgeführt.

Auf Schülerebene werden in drei Erhebungszeiträumen (vor, während und etwa ein halbes Jahr nach der letzten Fortbildung) die dritten und vierten Klassen mit Fragebögen und Mathematiktests konfrontiert. Während die Fragebögen vor allem Items zur Motivation und erlebten Unterrichtsgestaltung enthalten, bestehen die Tests aus offenen und geschlossenen Aufgaben zu allen inhaltlichen Bereichen des Mathematikunterrichts. In Anlehnung an die KMK-Bildungsstandards sind die Aufgaben in Bezug auf die erforderlichen prozessbezogenen Kompetenzen in drei Anforderungsbereiche unterteilt (vgl. KMK, 2005).

4. Charakterisierung der Stichprobe

Die Stichprobe der teilnehmenden Lehrkräfte entspricht in Alter und Geschlecht dem Durchschnitt der nordrhein-westfälischen Lehrerschaft. Dabei liegt der Anteil der Frauen in der Stichprobe mit etwa 90% relativ genau auf Niveau des Landesdurchschnitts (vgl. MSW 2010). Insgesamt gaben in der Ausgangserhebung über 50% der Lehrerinnen und Lehrer an, sich individuell und im Kollegium bisher gar nicht oder wenig ausführlich mit dem neuen Lehrplan beschäftigt zu haben. Der Lehrplan ist also für viele Lehrkräfte eine Innovation, die in ihrem Unterricht bisher noch nicht oder kaum bewusst umgesetzt wurde. Bemerkenswert ist, dass vor allem die Gruppe der fachfremd unterrichtenden Lehrkräfte sich nach eigener Aussage in der individuellen Auseinandersetzung wenig intensiv mit dem neuen Lehrplan beschäftigt hat. Gleichzeitig fühlen sich die fachfremd unterrichtenden Lehrkräfte weniger gut auf das Unterrichten der verschiedenen Bereiche des Mathematikunterrichts vorbereitet. Von großem Interesse ist, ob sich solche Unterschiede in der Erhebung nach Abschluss der Fortbildungen auch zwischen Teilnehmenden der verschiedenen Projektgruppen zeigen werden und welche Auswirkungen auf Schülerebene messbar sind.

Literatur

Bonsen, M. (2009): Lehrerfortbildung. Professionalisierung im mathematischen Bereich. Expertise für das Projekt 'Mathematik entlang der Bildungskette' der Deutsche Telekom Stiftung. Münster: Westfälische Wilhelms Universität.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Dubberke, T., Jordan, A., Klusmann, U., Tsai, Y.-M. & Neubrand, M. (2006): Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem fachspezifischen Professionswissen von Mathematiklehrkräften und ihrer Ausbildung sowie beruflichen Fortbildung. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9, 521-544.

Garet, M. S., Porter, A. C., Desimone, L., Birman, B. F. & Yoon, K. S. (2001): What makes professional development effective? Results from a national sample of teachers. In: American Educational Research Journal, 38 (4), 915-945.

Gräsel, C., Jäger, M. & Willke, H. (2006a): Konzeption einer übergreifenden Transferforschung unter Einbeziehung des internationalen Forschungsstandes. In: R. Nickolaus & C. Gräsel (Hrsg.): Innovation und Transfer. Expertisen zur Transferforschung. Hohengehren: Schneider Verlag, 445-566.

Gräsel, C., Pröbstel, C., Freienberg, J. & Parchmann, I. (2006b): Anregung zur Kooperation von Lehrkräften im Rahmen von Fortbildungen. In: Prenzel, M., & Allolio-Näcke, L. (Hrsg.): Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG Schwerpunktprogrammes. Münster: Waxmann, 310-329.

Lipowsky, F. (2010): Lernen im Beruf - Empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In: Müller, F., Mayr, J. & Lüders, M. (Hrsg.): Lehrerinnen und Lehrer lernen: Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung. Münster: Waxmann, 51-72.

KMK (Hrsg.) (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Neuwied: Luchterhand.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSW) (Hrsg.) (2008): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule. Frechen: Ritterbach.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2010): Das Schulwesen in Nordrhein-Westfalen aus quantitativer Sicht 2009/10. Verfügbar unter: www.schulministerium.nrw.de/BP/Schulsystem/Statistik/2009_10/StatUebers.pdf [Dezember 2010]

Markus REITER

Computergestützter Geometrieunterricht in der Grundschule

Im österreichischen Lehrplan für Volksschulen wird an mehreren Stellen auf die Verwendung neuer Technologien, im Speziellen des Computers, hingewiesen. So wird zB in den allgemeinen Bestimmungen des österreichischen Lehrplans der Einsatz des Computers zur Förderung des selbstständigen, zielorientierten und individualisierten Arbeitens betont (vgl. Lehrplan der Volksschule 2009, S. 23). Interessanterweise wird im Fachlehrplan für Mathematik kein direkter Bezug zum Einsatz des Computers genommen.

Nach Weigand/Weth (2002, S. XI) werden die „neuen Technologien keine revolutionären Veränderungen im Unterricht herbeiführen, jedoch evolutionäre Entwicklungen ermöglichen, die aber nicht nur erstrebenswert- und wünschenswert sind, sondern im Hinblick auf Erneuerung des Mathematikunterrichts als dringend geboten erscheinen.“ Ausgehend von der Tatsache, dass selbst durch die Entwicklung der neuen Medien und des Einsatzes von Computern im Unterricht die didaktischen Prinzipien ihre Bedeutung nicht verloren haben, gilt es eine entsprechende Lernumgebung zu konzipieren und zu arrangieren, in der es den Schülerinnen und Schülern möglich ist, beide Aspekte zu vereinen. „Die entscheidende Frage ist nicht, was man alles mit den (vorhandenen) Computern machen kann. Ausgangspunkt der Überlegungen muss vielmehr sein: ‚Was sind die alten Probleme, die alten ‚Knackpunkte’ unserer Grundschule? Wie kann ich sie lösen?’ Und dann erst: ‚Kann vielleicht der Computer eine Hilfe sein?’“ (Schipper, 1986, S. 24; zit. nach Radatz et al., 1999, S. 31).

Im Rahmen meiner Dissertation mit dem Titel „Computergestützter Geometrieunterricht in der Grundschule“ wurde ein Fragebogen zum Thema „Neue Medien im Geometrieunterricht der Grundschulen“ erstellt. Anhand einer bundeslandweiten Untersuchung (Burgenland) sollen die Lehrer/innen ihren Geometrieunterricht reflektieren. Dabei stehen zwei Forschungsfragen im Zentrum: Welche Faktoren sind ausschlaggebend, dass neue Medien im Geometrieunterricht der Grundschule eingesetzt bzw. nicht eingesetzt werden? Zum anderen wird der Frage nachgegangen, wie muss eine didaktische Handreichung aufbereitet sein, damit sie Lehrende zur Nutzung des Computers im Geometrieunterricht der Grundschule anregen kann?

In der Untersuchung konnte festgestellt werden, dass in fast allen Grundschulen Computer für Unterrichtszwecke vorhanden sind. Der Bogen spannt sich von Einzelarbeitsplätzen bis hin zu Computerräumen. Erste Ergebnisse zeigen, dass ca. drei von zehn Lehrer/innen den Computer im Geometrieunterricht einsetzen. Bezüglich der didaktischen Anforderungen und des erforderlichen Eigenkönnens fühlen sich acht von zehn Lehrer/innen gewachsen. Fast 90% der Befragten messen dem Experimentieren im Geometrieunterricht eine hohen Stellenwert bei und sieben von zehn Lehrer/innen geben an, dass der Computer Möglichkeiten bietet, geometrische Sachverhalte – im Rahmen der Grundschulgeometrie – auf experimentelle Weise lösen zu können. Weniger als ein Drittel stimmen der Aussage nicht zu.

Auf die Frage, ob Lehrer/innen, die zustimmen, dass sich der Geometrieunterricht eignet, den Computer in die Lernprozesse zu integrieren, auch häufiger diesen einsetzen, liefert folgendes Ergebnis: Lehrer/innen, die zustimmen, setzen mehr als doppelt so häufig den Computer ein, als jene, die nicht zustimmen. Hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen dem Stellenwert des Experimentierens im Geometrieunterricht und der Verwendung des Computers zeigen die Auswertungen, dass Lehrer/innen, die dem Experimentieren eine hohen Stellenwert beimessen, dreimal so häufig den Computer einsetzen, als jene Lehrpersonen, die dem Experimentieren einen geringen Stellenwert zuschreiben.

Weiters besteht auch ein Zusammenhang zwischen der Selbsteinschätzung bezüglich der didaktischen Anforderungen und der Zustimmung bzw. Ablehnung bezogen auf die Frage, ob sich der Geometrieunterricht eignet, den Computer in die Lernprozesse zu integrieren: Wenn Lehrer/innen der Integration der neuen Technologien in die Lernprozesse zustimmen und sich den didaktischen Anforderungen gewachsen fühlen, setzen mehr als doppelt so viele Lehrpersonen den Computer ein.

Die detaillierte Auswertung der Daten ist im Gange und wird weitere Ergebnisse hervorbringen.

Zur Bearbeitung der zweiten Forschungsfrage (s.o.) wurden zwei Gebiete aus der dritten bzw. vierten Schulstufe gewählt: „Spiegelbildliche Figuren“ und „Zeichnen und Konstruieren von Rechtecken und Quadraten“. Bei der Gestaltung der Handreichungen waren mehrere Zielsetzungen von Bedeutung. Als Gestaltungsziele standen die Bedienerfreundlichkeit, die einfachen technischen Anforderungen an vorhandene Computerleistungen und die Adaptier- und Erweiterbarkeit im Zentrum. Insbesondere auf Grund der Adaptier- und Erweiterbarkeit ist es jeder Lehrperson möglich, nach entsprechender Einschulung bezüglich des Aufbaus der Handreichungen, die einzelnen Themenbereiche individuell auf die Bedürfnisse der jeweiligen Lernergruppe abzustimmen. Die Kombination von handlungsorientiertem Lernen und der Verwendung neuer Technologien in Form der dynamischen

Geometriesoftware (EUKLID DynaGeo) sind Grundlage für die didaktische Gestaltung der Handreichungen. Durch die animierte Darstellung „realer“ Zeichengräte ist es den Kindern möglich, anhand detaillierter Konstruktionsschritte das Zeichnen von Rechtecken und Quadraten unter Verwendung unterschiedlicher, traditioneller Zeichengeräte (Lineal, Geometriedreieck und Zirkel) selbstständig zu erarbeiten. Der Computer samt des genannten Dynamischen Geometriesystems fungiert als Lernpartner sowie als Werkzeug beim Konstruieren. Bei der Gestaltung des Geometrieunterrichts gilt es im Besonderen entsprechende Lernumgebungen zu konzipieren, in denen die Schüler/innen in differenzierter Weise die Ziele erreichen können. So bietet diese multimediale Lernumgebung ist ein reichhaltiges Angebot an Aufgabenstellungen, die eine intensive Auseinandersetzung mit der Thematik ermöglichen. Ebenso ist durch die unterschiedlichen Problemstellungen der Aspekt der Differenzierung – sowohl quantitativ als auch qualitativ – berücksichtigt.

„Lernumgebungen fördern einen Mathematikunterricht, der für alle Kinder – die langsameren und schnelleren – Herausforderungen bereithält. Sie tragen dazu bei, die Begegnungen mit der Zahlen- und Formenwelt als Entdeckungsreise zu planen“ (Hengartner/Wälti 2006, S. 26). Dabei muss jedoch nach Leuders (2003, S. 204) berücksichtigt werden, dass bei solchen „elektronischen Lernumgebungen“ ein Ausgleich zwischen dem Arbeiten am Computer und anderen Medien, sowie ein Wechsel zwischen Individual- und Sozialphasen und stattfinden muss. Bei Berücksichtigung dieser Aspekte bietet dann das computergestützte Lernen eine Chance, die Selbsttätigkeit der Schüler/innen zu stärken und eine innere Differenzierung bzw. Individualisierung im Unterricht umzusetzen.

Neben den bereits erwähnten Möglichkeiten auf Grund des Einsatzes des Computers soll noch ein weiterer wesentlicher Aspekt hervorgehoben werden. Das Experimentieren hat hinsichtlich der Ausbildung der Problemlösefähigkeit einen hohen Stellenwert. Dies gilt insbesondere auch bei der Behandlung geometrischer Sachverhalte. In diesem Zusammenhang bietet der Einsatz eines DGS – durch die Funktion des „Zugmodus“ – einen großen Vorteil gegenüber traditioneller Medien (vgl. Mann 2006, S. 148).

„In Ergänzung zu herkömmlichen Vorgehen bei der Untersuchung von Phänomenen unterstützt und fördert der Computer durch den Zugmodus funktionale Zusammenhänge und provoziert *dynamische Beschreibungen*“ (Weigand/Weth 2002, S. 171). Mittels der Software EUKLID DynaGeo lassen sich interaktive Arbeitsblätter erstellen. Dabei ist es möglich, nur jene Funktionen den Schüler/innen bereitzustellen, welche sie für die Bewältigung der Aufgabenstellung benötigen. Aufgrund dieser Möglichkeit der Fokussierung auf eine minimale Anzahl von Funktionen ist es möglich, komplexe DGS bereits im Geometrieunterricht der Grundschule einzusetzen. Zudem erhalten die Schüler/innen entsprechende Anleitungs- und Forschungshefte (mit konkreten Beobachtungs- und Forschungsfragen), in denen sie ihre Beobachtungen und Erkenntnisse sprachlich formulieren sollen.

Die konzipierten Handreichungen werden zurzeit in unterschiedlichen Klassen getestet und auf Grund der Beobachtungen und Rückmeldung weiter entwickelt. Die derzeitig vorliegenden Rückmeldungen der Lehrerinnen zeigen eine absolut positive Einstellung seitens der Kinder und der Lehrpersonen bezüglich des Einsatzes im Unterricht. Dies wird vor allem mit der einfachen Handhabung und der klaren, übersichtlichen und für die Kinder verständlichen Aufbereitung der einzelnen Themenbereiche begründet. Insbesondere die Tatsache, dass die entwickelten Handreichungen nicht nur in der Übungsphase eingesetzt werden können, sondern eine wesentliche mediale Unterstützung in der Phase der Erarbeitung darstellen, motiviert die Lehrerinnen häufiger Geometrie zu betreiben als bisher.

Die Ergebnisse meiner oben genannten Dissertation soll – ausgehend von der gegenwärtigen Situation – Möglichkeiten aufzeigen, Computer in den Geometrieunterricht der Grundschule effektiver zu integrieren.

Literatur

Hengartner, E., Wälti, B. (2006): Mehr Unterrichtserfolg mit Lernumgebungen. In: Grundschulmagazin 4 (2006), 23-26.

Lehrplan der Volksschule (2009). Graz: Lykam.

Leuders, T. (2003): Mit neuen Medien lernen. In T. Leuders (Hrsg.): Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Verlag, 198-262.

Mann, M. (2006): Experimentieren mit Dynamischen Geometriesystemen. In R. Oldenburg & al. (Hrsg): Experimentieren im Geometrieunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, 147-163.

Radatz, H. & al. (1999): Handbuch für den Mathematikunterricht. 3. Schuljahr. Hannover: Schroedel Verlag.

Weigand, H.-G., Weth, T. (2002): Computer im Mathematikunterricht. Heidelberg, Berlin: Spektrum Verlag.

Pamela REYES-SANTANDER, Augsburg, Jorge SOTO-ANDRADE[1], Santiago de Chile

Mathematisches Denken. Grundvorstellungen und Metaphern.

Diese Arbeit versucht die von Wittenberg (1963) formulierte Frage “Was ist mathematisches Denken?” zu beantworten. Einen großen Beitrag dabei leisten die Ergebnisse der kognitiven Neurowissenschaften, die uns hilft zu verstehen, was unter neurologischem Aspekt Lernen bedeutet (Kandel, 2009). Das alleine beantwortet allerdings noch nicht die Frage, was mathematisches Denken ist (MD) oder wie wir es fördern können. Vom Standpunkt der kognitiven- und der Entwicklungspsychologie aus gesehen einerseits und aus Sicht der mathematischen Didaktik andererseits wird im Folgenden versucht das MD zu charakterisieren. Damit werden wir eine fachliche Basis erhalten, um einige Komponenten des MD beurteilen und dann entscheiden zu können, was in Mathematikstunden gefördert werden sollte.

Bei dieser Charakterisierung des mathematischen Denkens spielen die kognitiven Mittel oder Werkzeuge, die die Individuen zur Kommunikation ihrer Kenntnisse mitbringen, eine grundlegende Rolle (Sfard, 2001). Dazu gehören neben Repräsentationen, Metaphern und Analogien, so glauben wir, auch die Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995, 1998). Unter Metaphern verstehen wir hier konzeptionelle Metaphern (Lakoff & Nuñez, 2000; Soto-Andrade 2006, 2007a). Andererseits findet die grundlegende Theorie der Situationen von Brousseau (1998) Anwendung, die die Entstehung von mathematischen Begriffe und Verfahren bei der Schülern zu fördern versucht.

1. Mathematisches Denken

Unter dem Begriff Denken versteht man eine aktive innere Beschäftigung mit sprachlichen Begriffen, bildlichen Vorstellungen und anderen mentalen Inhalten mit dem Ziel, neue Erkenntnisse zu gewinnen. Denken steht häufig im Dienste zielorientierter Handlungen, die nicht als automatisierte Routinen verfügbar sind (Funke, 2006, S. xxiii).

[1] vom Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile (PBCT-CONICYT, Project CIE-05) unterstüzt.

Jeder Mensch kann mathematisch denken, dass es durch Widersprüche, Spannungen und Überraschungen hervorgerufen wird, dass es durch Unterrichtpraxis mit Inhalten zum Nachdenken verbessert wird (Mason, Burton & Stacey, 1982). Lesh und Kelly (1994) sehen das MD im Konstruktivismus begründet und aus dem Denken entsteht ein Sinn in den Begriffen. Was jedoch der Kern des MD ist, aus welchen Komponenten es sich zusammen setzt und was beachtet werden muss um es zu fördern, soll im Folgenden geklärt werden.

Die Kognitive Psychologie liefert die folgenden Beiträge: Wahrnehmung, Aufmerksamkeit, Gedächtnis, Sprache (Hayes, 1995), Planung, Problemlösen (Engel, 1998), usw. Die Didaktik der Mathematik trägt mit den folgenden Konzepten bei: Kommunikationsmittel oder Arten Konzepte zu erzeugen/speichern, wie z. B. die Grundvorstellungen, Metaphern, die Semiotische Repräsentation (Duval, 2004), Theorie der Situationen (Brousseau, 1998), mathematische Strategien (Engel, 1998), Aufmerksamkeit (Mason, 1989) und Sfardsche commognition (Sfard, 2008); Teile der Entwicklungspsychologie wie kreative, künstlerisch-visuelle und repräsentative Fähigkeiten, numerische Fähigkeit, Wort-, Raumverständnis und Linguistische-, logisch-mathematische Fähigkeit (Gardner, 1983). Auch werden die Fähigkeiten, die der Mensch auf Grund der Evolution schon inne hat, wie z.B. der Sinn der Zahl, begutachtet (Dehaene, 1999). Mit diesen Konzepten erhält man eine Annäherung an das, was MD ist: Mathematisches Denken bezeichnet kognitive Prozesse (neurobiologische), die die Fähigkeiten und Kenntnisse verbindet; sie bilden sich heraus, wenn man in neuen, interessanten und herausfordernden Situationen ist, die mit mathematischen Inhalten verbunden sind. Das MD benutzt verschiedene Kommunikationsmittel wie z.B. mentale Bilder, semiotische Repräsentationen, Grundvorstellungen und Metaphern. Das MD wird durch konzeptionelle Metaphern verwirklicht (Soto-Andrade, 2007b).

Das MD wird durch die folgenden Faktoren charakterisiert: Wahrnehmung des Objekts, (mathematik-) inhaltsbezogenes Denken (Ulm, 2010), Strategien oder Prozeduren und nicht-rationale Prozesse. Zur Art und Weise, wie diese mit verschiedenen kognitiven Arten interagieren, werden die Vorschläge von Flessas and Lussier (2005) betrachtet.

Die *Wahrnehmung* bezieht sich auf die Annäherung des Individuums an die Situation, wie z. B. dynamisch, statisch, Gleichheit, etc. *Prozeduren* sind die, die auf automatische Art und Weise bei der Problemlösung ablaufen, die nicht mehr als einen kognitiven Prozess benötigen. Bsp. Algorithmen. *Strategien* bilden sich, wenn man ein gesuchtes oder aufgetretenes Problem versucht zu lösen. Diese involvieren eine größere Anzahl kognitiver Prozesse und dienen der Erweiterung unserer konzeptionellen Karten wie zum Beispiel Umstrukturierung, Modellierung, Analogieprinzip, das Extremalprinzip, etc.

Das *mit mathematischen Inhalten verbundene Denken* besteht aus: numerischem-, algebraischem-, geometrischem-, stochastisches-, funktionalem Denken. Man betrachtet es als einen Teil einer durch schulisches Lernen hervorgerufenen konzeptionellen Karte die mit dem Gedächtnis verbunden sind.

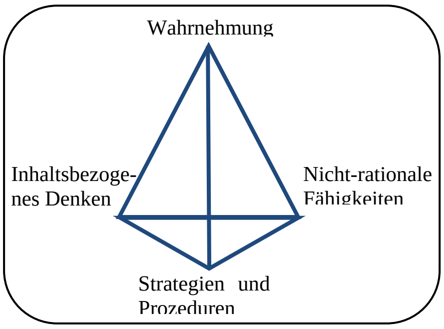


Fig. 1: Komponenten des MD

Die *nicht-rationalen Fähigkeiten* haben in unserem Glauben und täglichen Leben ihren Ursprung. Sie haben eine direkte Verbindung zu unserer Kultur, unserem Umfeld, unseren Emotionen und unserer Wahrnehmung. Beispiele: Intuition, Kreativität, Flexibilität, Sensibilität, Fantasie, usw. Die vier Komponenten interagieren untereinander. Die Kommunikationsmittel, wie beispielsweise Strategien zu speichern oder wiederherzustellen geschieht anhand von Repräsentationen, Grundvorstellungen und Metaphern.

2. Empirischer Teil

Dazu werden einige Teile der Gruppentheorie als Beispiele betrachtet, bei denen sich einige Elemente dieser Faktoren mittels zweier Kommunikationsmittel des mathematischen Denkens, der Metapher und der Grundvorstellung, aufzeigen lassen. Es wurden in der Untersuchung drei Fragen gestellt: Welche Elemente des MD erscheinen in der Arbeit mit Gruppentheorie? Welche Elemente des MD werden verwirklicht oder können in einem Essay erkannt werden? Welche Elemente des MD werden verwirklicht oder können in der Realisierung eines Mathe-Tagebuchs erkannt werden?

Zur Beantwortung der ersten Frage wurde ein Fragebogen entwickelt, den 137 Studenten des Proseminars Algebra der Universität Augsburg in den Jahren 2008 – 2010 beantworteten. Zur zweiten Frage wurde mit Schülern aus dem Gymnasium Sonthofen und des Gymnasium Stetten Institut Augsburg gearbeitet, wobei in beiden Fällen ein Essay realisiert wurde. Die dritte Frage wurde mit Lehramtsstudenten aus dem Proseminar Algebra an der Universität Augsburg verwirklicht, wobei die Studenten Mathetagebücher zur Erstellung und Lösung algebraischer Problemstellungen, unter Beachtung der vier Komponenten des MD, schreiben durften.

Literatur

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Dehanae, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können.* Basel: Birkhäuser.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Engel, A. (1998): *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer.

Flessas, J., & Lussier F. (2005). *La neuropsychologie de l'enfant*. Paris: Dunod.

Funke, J. (2006): *Enzyklopädie der Psychologie*. Serie II Kognition, Band 8 Denken und Problemlösen. Göttingen: Hogrefe Verlag für Psychologie.

Gardner, H. (1983): *Estructuras de la mente. La Teoría de las Inteligencias Múltiples*. Septima reimpresion en espanol (2008). Mexico: Fondo de la cultura económica.

Hayes, N. (1995). Kognitive Prozesse - eine Einführung. In J. Gerstenmaier (Hrsg.), *Einführung in die Kognitionspsychologie*. München: Ernst Reinhardt Verlag. 11-40.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum akademischer Verlag.

vom Hofe, R. (1998). On the generation of basic ideas and individual images: normative, descriptive and constructive aspects. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics Education as a Research Domain: A search for identity*. Great Britain: Kluwer Academic Publishers.

Kandel, E.R. (2009): *Auf der Suche nach dem Gedächtnis – Die Entstehung einer neuen Wissenschaft des Geistes*, 2. Auflage. München: Siedler Verlag.

Lakoff, G., & Nuñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from?* New York: Basic Books.

Lesh, R. & Kelly, A. (1994). Action-theoretic Approaches to Research in Mathematics Education: Studies Involving Continuously Developing Experts. In R. Biehler, R. Scholz, R. Sträβer, & B. Winklemann. (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J.; Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.

Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity*, 8(1), 42-76.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourse, and Mathematizing*. Cambridge: University Press.

Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des maths. *Ann. Didactique Sciences Cogn*., 11, 123– 147.

Soto-Andrade, J. (2007a). Metaphors and cognitive styles in the teaching-learning of mathematics. In D. Pitta-Pantazi, & J. Philippou (Eds.). Proceedings CERME 5 (pp. 191-200). Retrieved May 21, 2008, from http://ermeweb.free.fr/CERME5b/

Soto-Andrade, J. (2007b). La cognición hecha cuerpo florece en metáforas…, in A. Ibañez, & D. Cosmelli, (Eds.). *Nuevos Enfoques de la Cognición : Redescubriendo la dinámica de la acción, la intención y la intersubjetividad*. Santiago: Universidad Diego Portales. 71-90.

Ulm, V. (2010). Mathematische Begabungen fördern. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Kristina RICHTER, Regina BRUDER, Darmstadt

Computergestützte Kompetenzdiagnose im Bereich Darstellungswechsel bei funktionalen Zusammenhängen

Computergestützte Kompetenzdiagnose versucht die Prozesse kompetenzorientierter Diagnose und Förderung durch digitale Werkzeuge zu unterstützen und miteinander zu verbinden. Herausforderungen bestehen dabei zum einen in der inhaltlichen Tiefe der Diagnose und zum anderen in der Verknüpfung von Diagnose und Förderung im Unterricht. Im Beitrag werden die Grundlagen kompetenzorientierter Diagnose und Förderung vor dem Hintergrund der Digitalisierbarkeit besprochen. Darauf aufbauend wird ein prototypischer Lösungsansatz für eine *digitale Diagnose- und Lernumgebung* im Bereich Darstellungswechsel bei funktionalen Zusammenhängen vorgestellt.

1. Grundlagen: Kompetenzorientierte Diagnose und Förderung

Kompetenzorientierte Diagnose soll hier im Sinne des formativen Assessments und als Voraussetzung für zielgerichtete Förderung verstanden werden (Prediger/Selter, 2008; Hennecke, 2003). Dabei spielen Eigenproduktionen von Lernenden gegenüber geschlossenen normierten Darstellungsweisen eine entscheidende Rolle (Büchter, 2006). Rückmeldung zu Eigenproduktionen können wiederum Anlass für anschließende Lernprozesse sein (Brown, 2004). Lernfördernd kann Unterricht dann sein, wenn er sich an den jeweils nächstliegenden Entwicklungsschritten orientiert (vgl. die Zone der nächsten Entwicklung: Vygotski, nach Giest/Lompscher, 2006). Im Fokus der Lernförderung steht dabei der Wechsel zwischen Phasen selbstständiger Arbeit, die der aktuellen Leistung der Lernenden entsprechen und Phasen, in denen Lernende Unterstützung erhalten, um solche Leistungen zu erbringen, die sich noch in der Entwicklung befinden. Der Nutzen der Diagnose für die Lernförderung hängt wiederum davon ab, wie tiefgründig die Diagnose im Sinne einer Kompetenzzielorientierung (Weinert, 1996) einerseits ist (Tiefenproblem) und wie gut sie in Unterrichtsszenarien zur Lernförderung andererseits integriert werden kann (Brückenproblem).

2. Digitalisierbarkeit

Insbesondere Eigenproduktionen von Lernenden als Voraussetzung für eine kompetenzorientierte Diagnose und eine inhaltlich aussagekräftige Rückmeldung können neben dem integrierten Einsatz diagnostischer und fördernder Phasen als Qualitätskriterien für Lernumgebungen zur kompetenzorientierten Diagnose gelten. Dabei können digitale und nichtdigitale Lernumgebungen komplementär eingesetzt werden, um beide Prozesse und deren Verknüpfung zu unterstützen. Insbesondere die Interpretation der Schülerergebnisse und verständnisorientierte, differenzierte Rückmeldungen erfordern menschliche Interaktion, während eine zeitnahe Bereitstellung, Erstdiagnose und die Zuordnung passender Lernsituationen durchaus mit digitalen Werkzeugen unterstützt werden kann. Die Konzeption einer Lernumgebung, die die Vorteile digitaler und nichtdigitaler Lernumgebungen integriert, wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

3. Lösungsansatz

Die Kernidee für die zu evaluierende *digitale Diagnose- und Lernumgebung* besteht in einer Kombination aus automatisierter Diagnose von Teilkompetenzen und Fehlvorstellungen mit Phasen eines peer-unterstützten Lernens und einer lehrerbasierten Diagnose. Aufbauend auf Ergebnissen des Projektes HEUREKO wird ein Kompetenzstrukturmodell mit dazu gehörigem Itempool (Bayrhuber et al., 2010) eingesetzt. Schülerinnen und Schüler bearbeiten zunächst in Einzelarbeit digital aufbereitete Aufgaben zum *Identifizieren* und *Realisieren* von *Darstellungswechseln funktionaler Zusammenhänge* mittels geschlossener oder halboffener Aufgabenformate. Sie erhalten im Anschluss eine erste ergebnisbasierte computerbasierte Rückmeldung darüber, welche Aufgaben richtig gelöst wurden. Über die Richtigkeit der Lösungswege erhalten die Schülerinnen und Schüler keine automatisierte Rückmeldung. Während dieser Einzelarbeitsphase werden die Lösungen und Lösungswege der Lernenden geloggt und gespeichert. Eine dahinterliegende Netzwerkstruktur zeichnet auf, wer welche Aufgabe bereits gelöst hat. Nachdem alle relevanten Aufgaben aus dem ersten Teil gelöst sind, erhalten die Lernenden passende geloggte Aufgabenlösungen aus dem Klassennetzwerk. Für diese Aufgabenlösungen soll mithilfe vorstrukturierter Rückmeldeaufgaben mit offenem Aufgabenformat ein differenziertes peer feedback zur Lösung und zum Lösungsweg geschrieben werden. Das peer feedback bezieht sich dabei auf eine Einschätzung darüber, ob die Aufgabenstellung richtig verstanden wurde, ob die Aufgabe richtig und vollständig gelöst wurde, ob und wie die Aufgabe besser gelöst werden könnte, ob es weitere Lösungswege gibt und schließlich wie sicher sich die Rückmeldung gebende Person in ihrer Beurteilung ist. Während des Einsatzes kann die Lehrperson einsehen, welche Aufgabe von welchen Schülerinnen und Schülern bereits wie gelöst wurden und welche Rückmeldungen gegeben wurden und diese Informationen für eine kompetenzorientierte Diagnose nutzen. Die Lehrperson kann außerdem jederzeit selbst Rückmeldungen an einzelne Lernende oder Gruppen von Lernenden schreiben, eigene Aufgaben und Tipps einbinden und so gezielt fördern (zum Ablauf siehe Abb. 1).

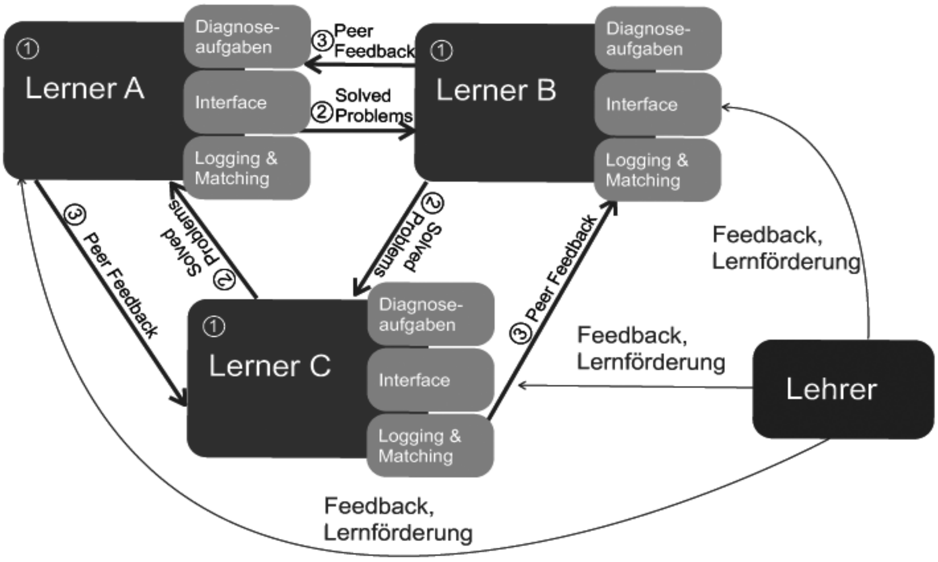


Abb. 1: Ablauf des Einsatzes der Lernumgebung PEDALE in drei Phasen

Die prototypische *digitale Diagnose- und Lernumgebung* baut auf drei konzeptionellen Bausteinen auf:

(a) dem Konzept der Diagnose- und Lernaufgaben (Leuders, 2010; Kiper et al., 2010) und darin besonders der Aufgabenvariation (Bruder, 2003),

(b) einer ergänzenden Rolle des Computers zur Teildiagnose geschlossener Antwortformate, zur Dokumentation und Überleitung zwischen passenden Aufgabenstellungen und

(c) der Integration eines Klassennetzwerks mit der Verknüpfung von Aufgabenlösen und peer assessment (Chappuis/Stiggins, 2002; Shepard, 2000).

4. Forschungsfragen

Im Rahmen der aktuellen Studien im Graduiertenkolleg Qualitätsverbesserung im E-Learning durch rückgekoppelte Prozesse werden von interdisziplinären Doktorandentandems u.a. folgende Fragestellungen bearbeitet:

1. Kann kompetenzorientierte Diagnose in digitalen Lernumgebungen umgesetzt werden? (Tiefenproblem)

2. Kann durch Aufgaben und deren Variation die Brücke von der Diagnose zur Förderung geschlagen werden? (Brückenproblem, Teil 1) und

3. Leistet die Erweiterung vom individuellen zum peer-unterstützten Arbeiten einen Beitrag zur Förderung von Reflexionen zu Lerninhalten und Methoden (Metakompetenz) (Brückenproblem, Teil 2).

Damit sollen die zwei skizzierten Problemdimensionen der kompetenzorientierten Diagnose, nämlich das Problem der diagnostischen Tiefe und der Anschlussfähigkeit an Lernsituationen näher untersucht werden.

5. Ausblick

Im Rahmen einer Kooperation mit einem Doktoranden der Informatik wird das Konzept der *digitalen Diagnose- und Lernumgebung* mittels einer Autorenumgebung umgesetzt. Innerhalb dieser Autorenumgebung wird die Auswahl und Verknüpfung von Folgeaufgaben, der Interaktionsformate und der gewünschten Dokumentationsart möglich sein, ohne dass Programmierkenntnisse nötig sind. Daran anschließende Arbeiten planen die gezielte Unterstützung der Lernenden durch Integration von Kooperations- und Kollaborationsphasen, Mitentwicklung von Aufgaben oder Lerneinheiten durch Lernende sowie die Einbindung spielerischer Elemente im Sinne von Storytelling-Ansätzen.

Literatur

Bayrhuber, M., Leuders, T., Bruder, R. et al. (2010): Repräsentationswechsel beim Umgang mit Funktionen – Identifikation von Kompetenzprofilen auf der Basis eines Kompetenzstrukturmodells. Projekt HEUREKO. In: ZfPäd, 56, Beiheft 56, 28-39.

Büchter, A. (2006). Kompetenzorientierte Diagnose im Mathematikunterricht. BzMU, 155-158.

Bruder, R. (2003): Vielseitig mit Aufgaben arbeiten. Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwickeln und sichern: Bruder, R./ Büchter, A./Leuders, T.: Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten. Cornelsen Scriptor, 18-52.

Giest, H./Lompscher, J. (2006): Lerntätigkeit - Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Ein Beitrag zur Entwicklung einer neuen Lernkultur im Unterricht. Berlin: LOB.

Hennecke, M. (2003). Fehlerdiagnose in intelligenten Lehr-Lernsystemen. In P. Bender, W. Herget, H.-G. Weigand, & T. Weth (Eds.), Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der GDM e.V. vom 27. Bis 29. September 2002 in Soest (pp. 16-23). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Kiper, H., Meints, W., Peters, S., Schlump, S., & Schmit, S. (2010). Lernaufgaben und Lernmaterialien im kompetenzorientierten Unterricht.

Prediger, S., Selter, C.: (2008): Diagnose als Grundlage für individuelle Förderung im Mathematikunterricht. In: Schule NRW 60(3), 113-116.

Weinert, F.E. (1996): Lerntheorien und Instruktionsmodelle. In: Weinert, F. E. (Hrsg.): Psychologie des Lernens und der Instruktion: Enzykl. der Psychologie, D, Serie Päd. Psychologie, Bd. 2, Göttingen, 1-48.

Roland RINK, Lüneburg

Strategien von Grundschulkindern im Umgang mit Verhältnissen

1. Einführung

Der Umgang mit Verhältnissen ist wesentlich für viele Bereiche des Alltags. Man nutzt Verhältnisse dabei hauptsächlich in zwei Funktionen. In ihrer Verwendung als Quotient können Verhältnisse wie Brüche genutzt und somit auch gekürzt und erweitert werden. In ihrer zweiten Funktion als „gestaltliches Beschreibungsmittel“ (vgl. FÜHRER, 2004) steht der Relationscharakter von Verhältnissen im Vordergrund. Der Fokus liegt hier eher auf dem pragmatischen Bezug und weniger auf einer Rechenoperation.

In der Schulmathematik der Sekundarstufe sind Verhältnisse beispielsweise für die Bruch- oder Prozentrechnung, den Dreisatz, Proportionalität und Antiproportionalität, die Ähnlichkeitslehre oder die Stochastik grundlegend. Auch in der Grundschule gehen Lernende bereits – allerdings eher implizit und wenig systematisch – mit dem Verhältnisbegriff um (z. B. Maßstab, Zufallsgeneratoren).

2. Theoretischer Rahmen

Eine mathematische Grundlegung des Verhältnisbegriffs ist auf verschiedene Arten möglich (z. B. STREHL, 1979). An dieser Stelle mag folgende Fassung genügen: Durch ein Verhältnis werden zwei Zahlen oder Größen (z. B. Längen, Gewichte, Zeitspannen) zueinander multiplikativ in Beziehung gesetzt.

Abhängig von der durch das Verhältnis beschriebenen Konstellation lässt sich zwischen verschiedenen **Verhältnisarten** unterscheiden, was die Vielseitigkeit der Verhältnisse (gegenüber den Bruchzahlen) deutlich werden lässt:

Ist die beschriebene Konstellation durch eine Teil-Ganzes-Struktur gekennzeichnet, liegt ein *Teil-Ganzes-Verhältnis (TG)* dann vor, wenn sich eine Komponente des Verhältnisses auf einen Teil, die andere auf das Ganze bezieht. Teil-Ganzes-Verhältnisse sind grundlegend für die Bruch- und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Entsprechend wird von einem *Teil-Teil-Verhältnis (TT)* gesprochen, wenn sich die beiden Komponenten auf verschiedene Teile eines gemeinsamen Ganzen beziehen. Diese Verwendung von Verhältnissen ist im Alltag typisch und findet sich beispielsweise bei Kochrezepten wieder.

Wird eine Konstellation ohne Teil-Ganzes-Struktur durch ein Verhältnis beschrieben, soll diese in Übereinstimmung mit der englischsprachigen Literatur mit dem Terminus *„rate problem" (RP)* bezeichnet werden. Die Komponenten des Verhältnisses können dann demselben Größenbereich entstammen oder zu verschiedenen Bereichen gehören. Im zweiten Fall kommt es oft zu einer Reifikation der Relation (man denke beispielsweise an Geschwindigkeit, Dichte oder Druck. Dies lässt die grundlegende Bedeutung des Verhältnisbegriffes für viele Bereiche der Physik deutlich werden).

Im Umgang mit Verhältnissaufgaben kann man zwischen vier **Handlungsaufforderungen** (vgl. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1991) unterscheiden. Das **Herstellen** eines Verhältnisses, das **Vergleichen** zweier Verhältnisse hinsichtlich ihrer Gleichheit (Proportion) oder Ungleichheit, das **Identifizieren** äquivalenter Verhältnisse aus einer Menge verschiedener Verhältnisse und das **Konstruieren** äquivalenter Verhältnisse bzw. das Vervollständigen einer Proportion.

3. Einordnung der Studie und zentrale Fragestellungen

Zu Fähigkeiten im Umgang mit Verhältnissen gibt es bereits umfangreiche Untersuchungen (z. B. HART, 1980; KARPLUS et al., 1983). Allerdings waren die beteiligten Schülerinnen und Schüler stets mindestens 12 Jahre alt. In Anschluss an PIAGET, welcher Kindern unter 12 Jahren hinsichtlich ihrer kognitiven Entwicklung untersucht hat, galt bisher, dass jüngere Kinder nicht in der Lage seien, erfolgreich mit Verhältnissen umzugehen. Wenige unsystematische Studien (z. B. STREEFLAND, 1984) und eigene Voruntersuchungen zu dieser Studie (RINK & FRITZLAR, 2010) deuten aber darauf hin, dass Grundschulkinder durchaus in der Lage sind, erfolgreich mit Verhältnissen zu operieren. Es ist daher erforderlich, eine detaillierte Erkundung entsprechender Fähigkeiten bei Lernenden am Ende der (traditionellen) Grundschulzeit vorzunehmen. Weiterhin werden in bisherigen Untersuchungen Verhältnisse aus verschiedenen Größenbereichen zu verschiedenen Inhaltsbereichen verwendet. In dieser Studie wird sich auf Anzahlen bzw. Zählgrößen konzentriert.

Im Fokus stehen dabei folgende Fragestellungen:

- Welche Bedeutung hat die **Verhältnisart** für Lösungsrate und Strategieeinsatz?
- Welche Bedeutung hat die **Handlungsaufforderung** im Umgang mit Verhältnissen für Lösungsrate und Wahl der Lösungsstrategie?

– Welche Bedeutung hat die **Vorgabe der Verhältnisse** für Lösungsrate und Wahl der Lösungsstrategie?

4. Daten und Methode

Da es bisher keine systematischen Untersuchungen über das Verhältnisverständnis von Grundschulkindern gibt, muss das Herangehen, im Sinne qualitativer Forschung, einen explorativen Akzent haben und methodisch so angelegt sein, dass zuvor nicht Bekanntes wahrgenommen werden kann. Zudem lassen sich zentrale Fragestellungen nur qualitativ differenziert beantworten.

Daher wurden mit 40 Schülerinnen und Schülern (Durchschnittsalter 9,3 Jahre) aus fünf verschiedenen niedersächsischen Grundschulen halbstandardisierte Einzelinterviews von 30 bis 45 Minuten Länge geführt, in deren Rahmen die Kinder Verhältnisaufgaben im übergreifenden Kontext „Schulsportfest“ bearbeiteten. Die Aufgabenstellungen wurden schriftlich vorgelegt, die Äußerungen der Kinder videografiert und durch die Kinder schriftlich fixiert.

5. Ergebnisse und Ausblick

Die Auswertung der Interviews ergab, dass sich die für die Bearbeitung genutzten Strategien der Kinder in drei Kategorien einteilen lassen: **multiplikative**, **additive** und **sonstige** Vorgehensweisen.

Dabei führen nur die „multiplikativen Strategien“, welche ein Verhältnis zur Bearbeitung nutzen, zu einem richtigen Ergebnis. Die Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler lassen sich näher spezifizieren und führen innerhalb dieser drei Kategorien zu folgenden Subkategorien:

multiplikativ	additiv	sonstige
Inneres Verhältnis I	Absolutes Argumentieren	keine Lösung
Inneres Verhältnis II	Additionsstrategie I	falsch und ohne Erklärung
Äußeres Verhältnis I	Additionsstrategie II	Anschauliches Argumentieren
Äußeres Verhältnis II		Anschauliches Berechnen

Im Folgenden werden in der Reihenfolge ihrer Häufigkeit diejenigen Strategien näher erläutert, die mindestens 20% aller Antworten erfassen. Alle anderen Strategien waren weniger vertreten bzw. nur vereinzelt zu beobachten.

Inneres Verhältnis I: Das äquivalente Verhältnis zu x:y wird konstruiert bzw. identifiziert, indem ein ganzzahliger Multiplikator genutzt wird, der x in y überführt. Beispiel: Beim Tauziehen ist 1 Lehrer so stark wie 3 Kinder; dann sind 4 Lehrer so stark wie 12 Kinder, weil es **dreimal** so viele Kinder wie Lehrer sind.

Äußeres Verhältnis II: Zwei äquivalente Verhältnisse werden komponentenweise addiert um ein drittes äquivalentes Verhältnis zu bestimmen. Beispiel: Beim Studentenfutter schmeckt eine Mischung aus 6 Löffeln **R**osinen und 12 Löffeln **N**üssen genauso wie eine Mischung aus 2R:4N oder 4R:8N, da 2R+4R=6R und 4N+8N=12N.

Falsche Additionsstrategie I: Diese Fehlstrategie wird in der Literatur oft bei älteren Schülerinnen und Schülern beschrieben (z. B. HART, 1980). Zwei Verhältnisse werden als äquivalent bewertet, wenn die Differenz der jeweiligen Zahlenpaare gleich ist. Beispiel: Beim Torwandschießen hat eine 6er-Mannschaft das Tor dreimal getroffen (jedes Kind darf einmal schießen) und ist damit genauso gut wie eine 8er-Mannschaft, die fünfmal trifft, weil jede Mannschaft dreimal vorbei geschossen hat.

Der Kategorie „sonstige" wurden Vorgehensweisen zugeordnet, bei denen Kinder „visuelle Merkmale" („das erkennt man doch"), die dem Aufgabenkontext geschuldet sind, nutzen, um ein Ergebnis zu erklären oder bei denen sie Daten willkürlich miteinander verrechnen.

In den Interviews deutete sich außerdem an, dass nicht nur Zahleigenschaften der vorgegebenen Verhältnisse, sondern auch die Verhältnisart die Vorgehensweise der SuS beeinflussen. Um diese Eindrücke auf eine breitere empirische Basis zu stellen, wurden entsprechende schriftliche Tests mit etwa 300 Kindern durchgeführt, die sich derzeit noch in der Auswertung befinden.

Literatur

Hart, K. (1980): Secondary School-Children´s Unterstanding of Ratio and Proportion. Dissertation. London. Chelsea College.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1991). Ratio in special education. In L. Streefland,

Realistic Mathematics Education in Primary School. Utrecht.

Karplus, R., Pulos, St., & Karplus, E. K. (1983): Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 219 – 233.

Rink, R., Fritzlar, T. (2010): Zu Fähigkeiten von Grundschulkindern im Umgang mit Verhältnissen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 693 – 696. Münster

Strehl, R. (1979). *Grundprobleme des Sachrechnens*. Freiburg.

Ralf ROMEIKE, Schwäbisch Gmünd

Logos Erben – Konstruktionistische Ansätze für Mathematikunterricht und Mathematiklehrerausbildung

Mit dem Ansatz des Konstruktionismus und darauf basierenden Beispielen für mathematisches Lernen mit Logo schuf Seymour Papert bereits vor vielen Jahren eine schüler- und handlungsorientierte Grundlage für den Mathematikunterricht. Weiterentwicklungen von Logo überführen den Ansatz in die heutige multimediale Welt der Schülerinnen und Schüler und reduzieren Eingangshürden, die sich bspw. aus der Syntax ergeben, erweitern aber die Möglichkeiten um ein Vielfaches. Es erstaunt, dass dieser Ansatz im Mathematikunterricht kaum noch eine Rolle zu spielen scheint.

Konstruktionistisches Lernen

Ein Kernziel des Mathematikunterrichts und damit auch der Mathematiklehrerausbildung ist die Vermittlung eines adäquaten Verständnisses von der Wissenschaft Mathematik und eines damit einhergehenden Bildes vom Mathematikunterricht. In der Praxis gelingt dies nicht immer: Anstatt mathematisches Modellieren und Problemlösen als Ziel des Mathematikunterrichts wahrzunehmen, wird selbst von angehenden Mathematiklehrern in den Fachtagespraktika häufig Mathematik als „Formeln anwenden“ verstanden und „Rezeptwissen“ als Unterrichtsziel vermittelt. Auch im Studium stellen mitunter schon einfache Anwendungsaufgaben, für die kein „Rezept“ verfügbar ist, ein ernsthaftes Problem dar (vgl. Abb. 1). Fehlen hier Erfahrungen im eigenständigen Problemlösen?

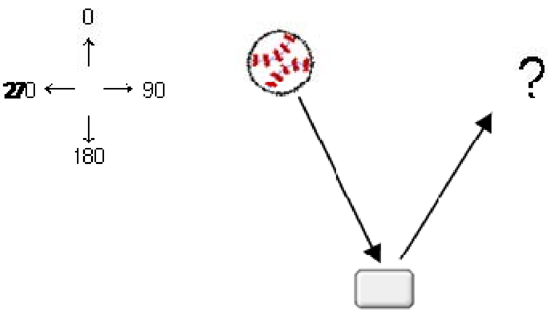


Abbildung 1: Wie errechnet sich die Richtung des Balls nach dem Abprall beim Pong-Spiel? Anwendungsaufgabe aus dem Seminar „Computereinsatz im Mathematikunterricht“ (PH Schwäbisch Gmünd).

Offensichtlich müsste das Auseinandersetzen mit solchen mathematischen Problemen früh beginnen und insbesondere in der Lehramtsausbildung einen besonderen Stellenwert einnehmen. Unterstützung hierfür bietet die Idee des Konstruktionismus: *“Learning happens especially felicitously in a context where the learner is consciously engaged in constructing a public entity, whether it's a sand castle on the beach or a theory of the universe”*

(Papert 1982). Unterstrichen wird die Rolle des Schaffens persönlich bedeutungsvoller Artefakte, die gezeigt, diskutiert, erprobt und bewundert werden können – ein Aspekt, der auch für Studierende relevant ist. Basierend auf Logo, als erster Umsetzung einer konstruktionistischen Lernumgebung, wurde die Programmierlernumgebung Scratch entwickelt, welche bisher v. a. im Informatikunterricht erfolgreich eingesetzt wird (vgl. Romeike 2007; Romeike 2008) aber auch für den Mathematikunterricht Potential besitzt, wie im Folgenden beschrieben wird.

Konstruktionistisches Lernen im Mathematikunterricht mit Scratch

Scratch (Maloney 2004) ist eine Softwareentwicklungsumgebung, die das kreative Erlernen der Programmierung unterstützt und hierbei die Anwendung vieler mathematischer Konzepte sinnvoll motiviert: Ziel ist das Erstellen von Animationen, Spielen oder beliebigen anderen Programmen. Entwickelt durch die Lifelong Kindergarten Group am MIT Media Lab findet Scratch bereits seit einigen Jahren Anwendung in sogenannten Computer Club Houses in den USA, in welchen Kinder freiwillig nachmittags zusammenkommen, um spielerisch Programmieren zu lernen.

In einem Unterrichtsversuch erprobten wir den Einsatz von Scratch in einer Grundschule mit dem Ziel der Vermittlung informatischer Kompetenzen. Tatsächlich lernten die Schülerinnen und Schüler nicht nur grundlegende Kompetenzen der Programmierung, sondern setzten sich dabei auch konstruktiv mit verschiedenen mathematischen Konzepten auseinander, die im regulären Mathematikunterricht in der Regel erst in späteren Klassenstufen thematisiert werden, z. B. negative Zahlen, das Koordinatensystem mit 4 Quadranten, Prozente und Variablen.

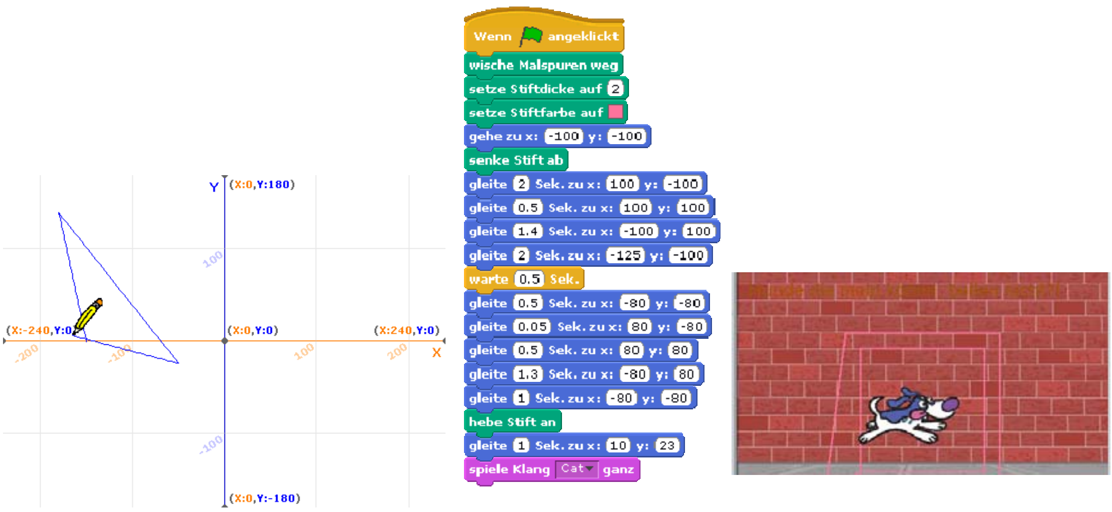


Abbildung 2: Beispiele zur Geometrie im Koordinatensystem mit 4 Quadranten: "Reparatur" von Dreieck und Viereck.

Motiviert durch das Ziel, im Sinne des Konstruktionismus einfache Artefakte zu gestalten, stellte sich die Anwendung der mathematischen Konzepte, unterstützt durch die intuitive Darstellung in Scratch und damit verbundenen Lernerfahrungen als problemlos dar. Beispielsweise stellte nach unseren Erfahrungen der Wechsel zwischen verschiedenen Sichtweisen einen interessanten Aspekt für das Zeichnen und Erfassen geometrischer Figuren dar: Das Zeichnen geometrischer Figuren basierend auf Koordinaten (passiv, Winkel irrelevant) im Kontrast zum Zeichnen aus Sicht der „Zeichenschildkröte". Bei letzterem nehmen die Schülerinnen und Schüler durch Steuerung eines Akteurs einen aktiven Standpunkt ein, mit welchem auch die Relevanz der Winkel (allerdings nicht der Innenwinkel!) deutlich wird.

Die Anwendung moderner, auf den Ideen Paperts basierenden Lernumgebungen wie Scratch verspricht für die Mathematikdidaktik interessante Möglichkeiten, sowohl für die Schule, als auch für die Mathematiklehrerausbildung, wie im

Folgenden anhand eines Projekts an der PH Schwäbisch Gmünd dargestellt wird.

Konstruktionistisches und forschendes Lernen im Lehramtsstudium Mathematik

Konstruktionistisches Lernen im fachdidaktischen Mathematikstudium erfordert die Auseinandersetzung mit für das Studium relevanten, aber auch persönlich bedeutsamen Gegenständen. Im Projekt FoLASmarT (Forschendes Lernen mit Apps für Smartphones und Tablets) wird diese Idee umgesetzt, indem Studierende des Lehramts Mathematik und Informatik gemeinsam aktuelle mathematikdidaktischen Fragestellungen bezogen auf das Lernen unter Nutzung neuer Medien bearbeiten: Im Team entwickeln sie Apps (Software) für Smartphones oder Tablets, welche sowohl Lernmedium als auch Forschungsinstrument darstellen. Ziel ist es, mit diesen Apps an Partnerschulen und Kindergärten einfache mathematikdidaktische Untersuchungen durchzuführen und auszuwerten. Mit Hilfe von Forschungspartnerschaften wird gewährleistet, dass in jedem Team von Studierenden die notwendigen Kompetenzen sowohl im fachdidaktischen als auch im informatischen Bereich vorhanden sind. Bei der Bearbeitung der einzelnen fachdidaktischen Fragen erfahren die Studierenden Forschung als kooperativen fachübergreifenden Prozess, der den Erkenntnisgewinn basierend auf vorhanden Modellen und Kenntnissen unter Einsatz adäquater Forschungsinstrumente und Auswertungsmethoden zum Ziel hat.

Die fachdidaktische Forschung der Mathematik hat elaborierte Modelle zum Lernen von Mathematik entwickelt, die sich beispielsweise in Kriterien für die Gestaltung von Übungen und in Theorien zum Erwerb mathematischer Kompetenz widerspiegeln. Demgegenüber ist die überwiegende Mehrheit der derzeit angebotenen Anwendungen zum Lernen von Mathematik etwa für Smartphones lediglich Drill&Practice-Software, die den überholten Vorstellungen des Behaviorismus entspricht. Indem Studierende selbst Apps entwickeln und einsetzen, die den aktuellen didaktischen Forschungsergebnissen entsprechen, haben sie die Möglichkeit zur Anwendung, Prüfung und Vertiefung fachdidaktischer Inhalte sowohl der Mathematik als auch der Informatik und zugleich die Chance, fachdidaktische Forschung aktiv zur erleben und hierzu einen Beitrag zu leisten. Das Projekt stellt prototypisch dar, wie konstruktionistisches, fachübergreifendes forschendes Lernen in den Fächern Mathematik und Informatik gestaltet werden kann.

Für den (laut Bildungsplan verpflichtenden) Einsatz von Informationstechnologien wird erwartet, den Studierenden ein neues Bild zu vermitteln: Computer können nicht nur als Werkzeug und Arbeitsmittel für Standardanwendungen eingesetzt werden, sondern für spezifische Ziele gestaltet und als Instrument zur Datenerhebung und Beantwortung wissenschaftlicher Fragestellungen eingesetzt werden. Moderne Programmiersprachen ermöglichen auch Anfängern, anspruchsvolle Anwendungen zu entwickeln. Durch die reduzierte Komplexität der Möglichkeiten bei mobilen Anwendungen für Smartphones und Tablets eignen sich Entwicklungsumgebungen für diese Geräte in besonderer Weise, sinnvoll reduziert und motiviert Konzepte und Anwendungen der Mathematik und Informatik zu verdeutlichen und zu vermitteln.

Durch die im Projekt erlebten eigenen konstruktionistischen Lernerfahrungen erwarten wir bei den zukünftigen Mathematiklehrerinnen und -lehrern Offenheit dahingehend, dass sie wiederum auch ihren zukünftigen Schülerinnen und Schülern konstruktionistische Lernerfahrungen ermöglichen werden.

Literatur

Maloney, B., Kafai, Rusk, Silverman, Resnick (2004). "Scratch: A Sneak Preview." IEEE Computer Society: 104 - 109.

Papert, S. (1982). Mindstorms: Kinder, Computer und Neues Lernen. Basel, Birkhäuser Verlag.

Romeike, R. (2007). "Animationen und Spiele gestalten. Ein kreativer Einstieg in die Programmierung." LOG IN **146/147**: 36-44.

Romeike, R. (2008). Applying Creativity in CS High School Education - Criteria, Teaching Example and Evaluation. 7th Baltic Sea Conference on Computing Education Research (Koli Calling 2007), Koli National Park, Finnland, Conferences in Research and Practice in Information Technology.

Stephan ROSEBROCK, Karlsruhe

Begabungs- und Kreativitätsförderung aus Sicht der Mathematik und der Mathematikdidaktik

Diese Vortragsnotizen sind eine Zusammenfassung von Rosebrock (2011).

1. Warum Mathematikunterricht?

Der Mathematikunterricht an den Schulen ist vielfachen Zwängen unterworfen. Zum Beispiel müssen die Schülerinnen und Schüler gewisse mathematische Fähigkeiten erlangen, die zur Bewältigung von Alltag und Berufsleben unabdingbar sind. Stoff muss beherrscht werden, um von der Haupt- oder Realschule in eine höhere Schulform aufsteigen zu können und Ähnliches mehr.

Steht man nicht unter diesen Zwängen, stellt sich die Frage, was man mit Mathematikunterricht erreichen will. Was ist das Zentrale in der Beschäftigung mit Mathematik um das es uns geht, wenn es nicht spezielle geforderte mathematische Inhalte sein müssen? Es soll uns die Frage leiten, was die Mathematik überhaupt leisten kann. Wie kann die Beschäftigung mit Mathematik zur Begabungsförderung, zu der Befähigung sein Leben selbst in die eigenen Hände nehmen zu können, beitragen? Das kann nur durch die Mathematik selbst geschehen. Soll durch Mathematik Begabung gefördert werden, so kann das nur gelingen, indem Gelegenheit gegeben wird, Mathematik zu betreiben. Aber: Was heißt das, „Mathematik treiben"?

2. Was ist „Mathematik treiben"?

Vielleicht hilft ein Blick darauf, wie Mathematiker mit Mathematik umgehen. Unter „Mathematik" möchte ich hier nicht das Lösen von Rechenaufgaben, und seien sie noch so kompliziert, verstehen. Diese Art Mathematik, im Prinzip alles, was ein Computer lösen kann, ist leider immer noch das, was oft in der Schule unter Mathematik verstanden wird. Mathematik ist aber viel mehr als das. Hier soll es bei dem Begriff „Mathematik" um das kreative Schaffen mathematischer Erkenntnisse gehen, die zumindest für den Mathematiktreibenden neu sind. Zweifelsohne sind Mathematiker kreativ beim Mathematik machen. Wie „machen" sie aber Mathematik?

Denken Mathematiker über Mathematik nach, so sind sie in ihrem Denken zuallererst frei. Nicht ein Lehrer sagt ihnen, „löse diese oder jene Aufgabe", sondern sie entscheiden selbst, wann sie, und insbesondere über was sie und wie sie nachdenken. Der Ertrag des Unterrichts beim Problemlösen wird „um so größer, je weniger man den Schüler führt, je mehr Freiheit und Selbständigkeit man ihm gewährt." (Metzger, 1973, S. 13). Freiheit muss bestehen in der Art und Weise, sich einem gegebenem Problem zu nähern. Dieses Stück Freiheit ist für kreatives Arbeiten unabdingbar.

Mathematiker begehen bei der Beschäftigung mit Mathematik oft, sogar meistens, Irrwege. Von 100 Versuchen, sich einem mathematischen Begriff zu nähern, führen 99 zu nichts. Man darf daraus aber nicht schließen, dass diese Versuche sinnlos waren. Der Mathematiktreibende hat dabei Erkenntnisse gewonnen, die zwar meistens nicht direkt formulierbar, trotzdem aber wichtig zur eigentlichen Lösung des Problems sind. Intuitiv hat sich bei den Fehlversuchen ein Verständnis des Problemkreises ergeben.

Ein dritter zentraler Punkt bei der Beschäftigung mit Mathematik betrifft die Art und Weise wie Mathematiker sich Inhalten nähern. Mathematiker nähern sich nicht systematisch nach streng formalen oder logischen Kriterien dem Gegenstand der Forschung. Das Gegenteil ist der Fall. Mathematiker gleichen eher kleinen Kindern, die versuchen, einen Turm aus Holzklötzen zu bauen. Mit Mathematik wird gespielt, immer wieder werden Erkenntnisse im Kopf aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet, Beispiele durchgespielt, Dinge ausprobiert. Eine gewisse Offenheit im Denken ist notwendig, Erkenntnisse sind nicht zu erzwingen. Mathematiker versuchen in erster Linie Phänomene zu verstehen und zwar wild und chaotisch. Keinerlei Denkschemen können dabei helfen, sondern das Denken hat intuitiven Charakter.

Weil kreatives Denken diesen intuitiven Charakter trägt, lässt es sich nicht mit Tricks, mit Brainstorming oder mechanischem Üben in welcher Form auch immer, erzwingen. Der Modellierungskreislauf, der in die didaktische Literatur auf breiter Front Einzug gehalten hat, darf nicht als Reihenfolge des Bearbeitens einer Aufgabe missverstanden werden. Trotzdem spielen gewisse Techniken eine Rolle, der sich ein Mathematiker auch bedient. Diese Techniken erlernt man aber durch Erfahrung, eben beim Mathematiktreiben. Gezieltes Trainieren von speziellen Techniken ist von daher nicht notwendig. Diese Techniken betreffen selten die eigentlich kreativen Momente des Mathematiktreibens.

In einem gewissen Sinn ist mathematisches Denken losgelöst von Zielen. Sicher, zumindest manchmal wollen Mathematiker ein klar definiertes Problem lösen und ihr Denken zielt letztendlich auf das gegebene Problem. Trotzdem wird fast immer versucht, ein Phänomen oder mathematisch gegebene Objekte zu verstehen und nicht direkt über ein gegebenes Problem nachgedacht. Lösungen für Probleme ergeben sich zum Beispiel nach Verallgemeinerungen verstandener Phänomene manchmal einfach von selbst.

Mathematiker beweisen beim Arbeiten ein gewisses Durchhaltevermögen. Es kann Jahre oder sogar Jahrzehnte dauern, oder auch gar nicht gelingen, bis man ein Problem, an dem man arbeitet, gelöst hat. Offene Fragestellungen in der Mathematik sind meist so schwer, dass kurzfristige, schnelle Erfolge nicht erwartet werden können.

Schließlich ist zum Mathematiktreiben eine gewisse Konzentration nötig. Die kann bei Mathematikern sehr intensiv werden und führt zum beliebten Bild des zerstreuten Mathematikers. Um Konzentration zu ermöglichen, braucht man Zeit. Das Herausnehmen von Tempo (wer hat als erster die Lösung?) und anderen Nebenzielen (ich will besser sein als Person X, o.ä.) ist Voraussetzung für ein vollständiges sich einlassen auf einen Problemkreis was wiederum erst die Konzentration ermöglicht.

Es soll nicht der Eindruck entstehen, Mathematik sei grundsätzlich chaotisch, unstrukturiert und ziellos. Hat ein Mathematiker intuitiv Erkenntnisse gewonnen, werden die in einer zweiten Phase aufgeschrieben und meistens mit Kollegen durchgesprochen. Dann präzisieren und strukturieren sich die Erkenntnisse und man gewinnt so Klarheit. Aus dem Durcheinander im Kopf werden klar formulierte Theoreme, die den erkannten Sachverhalt abstrahieren.

3. Mathematik in der Schule

Was bedeutet das alles für die Begabtenförderung in Mathematik? Mathematische Förderung sollte heißen, den Schülern Gelegenheit zu geben, Denkprozesse kennen zu lernen, die die obigen Eigenschaften erfüllen. Es wird kaum möglich sein, dass Kinder alle obigen Denkprozesse, wie Erwachsene, schon in frühem Alter lernen können. Ansätze davon lassen sich aber bereits im Grundschulalter und erst recht in der Sekundarstufe erleben.

Warum ist das Kennenlernen dieser Denkprozesse wichtig? Mathematisches Denken ist eine spezifische Weise, die Welt zu sehen. Einer autonomen Persönlichkeit sollte ermöglicht werden, dieses Denken kennenzulernen, um selbst solche Denkprozesse nutzen zu können. Regelbehafteter Mathematikunterricht, wie er heute noch weit verbreitet ist, verhindert eigenständiges Denken.

Wie müssen kreativitätsfördernde Aufgaben oder Materialien also aussehen? Wie ermöglicht man Lernenden die oben genannten Denkprozesse?

- Freiheit im Denken ist nur möglich, mit einer gewissen Offenheit einer Aufgabe. Materialien muss man sich auf verschiedenen Weisen nähern können.

- Es sollte bei der Beschäftigung mit einem Material oder einem Problem etwas zu entdecken geben. Im Hintergrund muss substanzielle Mathematik stehen, auch wenn diese nicht mit der Lösung des gestellten Problems vom Schüler in allen Einzelheiten durchdrungen wird.
- Es muss Zeit genug geben, ein Problem zu durchdringen. Komplexe Prozesse, wie die oben beschriebenen, kann man nicht beliebig beschleunigen. Umwegen und Fehler müssen Raum gegeben werden und das braucht Zeit. Auch das Umfeld muss entsprechend sein: Papier zum Notieren muss da sein, Ruhe und eine freundlich gestaltete Umgebung, usw. Im Mathematikunterricht sollte das Ziel für den einzelnen Schüler niemals sein, der Erste, der Schnellste, der Beste zu sein. Solche Sekundärziele verhindern mathematische Denkprozesse.
- Aufgaben müssen keinesfalls immer anwendungsorientiert sein. Unnütze Verzierungen können sogar den Blick auf das Wesentliche verstellen. Ein Schüler ist nicht unbedingt motivierter, sich mit einem mathematischen Problembereich zu beschäftigen, wenn er weiß, dass es Anwendungen dazu gibt. Die Motivation zur Mathematik kann letztlich nur aus der Sache selbst kommen.
- Die Aufgabenstellung sollte leicht verständlich und motivierend sein. Sie ist idealerweise sofort klar. Es kann sinnvoll sein, eine Aufgabe anwendungsorientiert zu beschreiben, weil sie so verständlicher wird.
- Im Idealfall ist eine Aufgabe gerade so schwer für den Lernenden, dass er nicht nach kurzem Überlegen die Lösung hat, andererseits aber auch beginnen kann zu denken, ohne dass die Komplexität ihn völlig überfordert.
- Schüler müssen lernen, dass es Probleme gibt, die man nicht in fünf Minuten lösen kann. Schüler sollten dazu ermutigt werden, an Problemen „dranzubleiben", auch wenn sie aufgeben wollen.

Literatur

Devlin, K. (2003): Das Mathe-Gen, dtv München.

Metzger, W. (1973): Wie kann man Kreativität im mathematischen Unterricht fördern? In Bayerische Schule, 26, 115-118.

S. Rosebrock (2011): Begabungs- und Kreativitätsförderung aus Sicht der Mathematikdidaktik. Erscheint in S. Rosebrock, C. Schenz, M. Soff (Hrsg.); Von der Begabungsförderung zur Begabungsgestaltung – Vom kreativen Umgang mit Begabungen in Mathematik; LIT-Verlag.

Benjamin ROTT, Hannover

Erste Ergebnisse der Analyse der Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern

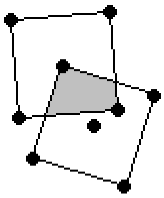
Problemlösen ist einer der zentralen Bereiche der Mathematik und daher – jenseits curricularer Vorgaben – auch für Unterricht von großer Bedeutung. Einzelnen Aufgaben lässt sich dabei nicht unabhängig von ihren Bearbeitern das Prädikat „*Problem*“ (im Gegensatz zu „*Routine*“) zuordnen; es bedarf einer personenspezifischen Barriere, damit eine Aufgabe für eine bestimmte Person zu einem Problem wird. Möchte man sich mit dem Problemlösen beschäftigen, ist es daher wichtig, nicht nur Aufgabenstellungen und Arbeitsergebnisse, sondern auch die zugehörigen Prozesse in den Blick zu nehmen. Die meisten Beschreibungen und Modelle des Problemlöseprozesses orientieren sich an den vier Phasen von Pólya (1949) (siehe Abb. 1). Studien zu Problemlöseprozessen ergaben u.a., dass viele Lösungsversuche schon an mangelnder Aufgabenanalyse scheitern (vgl. Tietze, Klika & Wolpers 2000, S. 100) und dass eine Rückschau im Sinne Pólyas nur selten auftritt (vgl. ebd.). Schoenfeld (1985; 1992) hat einen bestimmten Typ erfolgloser Problemlöseprozesse herausgearbeitet, den er „*wild goose chase*“ nannte und wie folgt umschreibt:

> “[...] I had analyzed more than 100 protocols of students working nonstandard problems […], where the context did not suggest standard techniques for solving the problem. Approximately 60 % of the protocols were of the type, where the students picked a solution direction, and then pursued that approach until they ran out of time. In contrast, successful attempts came in a variety of shapes – but they contained a significant amount of self-regulatory activity.” (Schoenfeld 1992, S. 195)

Die Studie

Ziel meines Dissertationsprojektes ist die Bereitstellung eines Verfahrens, das die Analyse von Problembearbeitungsprozessen ermöglicht, sowie die Beantwortung der **Fragen**, (1) wie die entsprechenden Prozesse von Fünftklässlern verlaufen, (2) ob sich das Schema von Pólya (1949) zur Beschreibung tatsächlicher Prozesse eignet und (3) ob diese Betrachtungen ausreichen, Erfolg / Misserfolg der SchülerInnen zu erklären.

Zur Beantwortung der Forschungsfragen dienen uns Videoaufnahmen, die im Rahmen der „**M**athe **AG** an der **L**eibniz **U**niversität“ (MALU) gewonnen werden. Es handelt sich dabei um ein seit November 2008 laufendes Enrichment-Projekt für interessierte Fünftklässler hannoveraner Gymnasien. Die SchülerInnen arbeiten etwa die Hälfte der 90-minütigen AG-Zeit in Paaren oder alleine an Problemaufgaben. Zwei der – insgesamt mehr als 30 – Aufgaben, die gut differenzieren, werden im Folgenden betrachtet:

Zwei Bierdeckel	**Marcos Zahlenreihe**
Die beiden unten stehenden Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt. Untersuche die Größe der Fläche, die von beiden Bierdeckeln überdeckt wird! [In der Abbildung ist diese Fläche grau gekennzeichnet.]  Quelle: Schoenfeld (1985, S. 77)	Marco möchte alle Zahlen von 1 bis 15 so in die 15 Kästchen schreiben, dass die Summe von *jedem* Paar benachbarter Zahlen eine Quadratzahl ergibt: □□□□□□□□□□□□□□□ Stehen beispielsweise in drei aufeinander folgenden Kästchen die Zahlen 10, 6, 3, so ergibt die 6 sowohl mit der 10 in dem linken Nachbarkästchen (10+6=16) als auch mit der 3 in dem rechten Nachbarkästchen eine Quadratzahl (6+3=9). Quelle: Fürther Mathematikolympiade 2005/6, 1. Runde

Methoden

Die Bearbeitungsergebnisse – die *Produkte* – unserer SchülerInnen wurden in vier Erfolgskategorien eingeteilt, die für die einzelnen Aufgaben konkretisiert wurden: (1) *Kein Ansatz*, wenn überhaupt kein sinnvoller Ansatz festgestellt werden konnte. (2) *Einfacher Ansatz*, wenn die Aufgabe zu Teilen richtig bearbeitet wurde. (3) *Erweiterter Ansatz*, wenn das Problem zu großen Teilen korrekt bearbeitet wurde. Und (4) *Korrekter Ansatz*, wenn das Problem vollständig begründet gelöst wurde.

Gaben zwei SchülerInnen eines Paares unterschiedliche Produkte ab – was durchaus vorkam –, wurden diese einzeln bewertet. Die Einteilung in die Erfolgskategorien erfolgte unabhängig von mir und einer anderen Doktorandin, wobei wir in allen Fällen übereinstimmten. Für die weitere statistische Auswertung wurden die ersten und die letzten beiden Kategorien zu *Kaum Erfolg* bzw. *Erfolg* zusammengefasst.

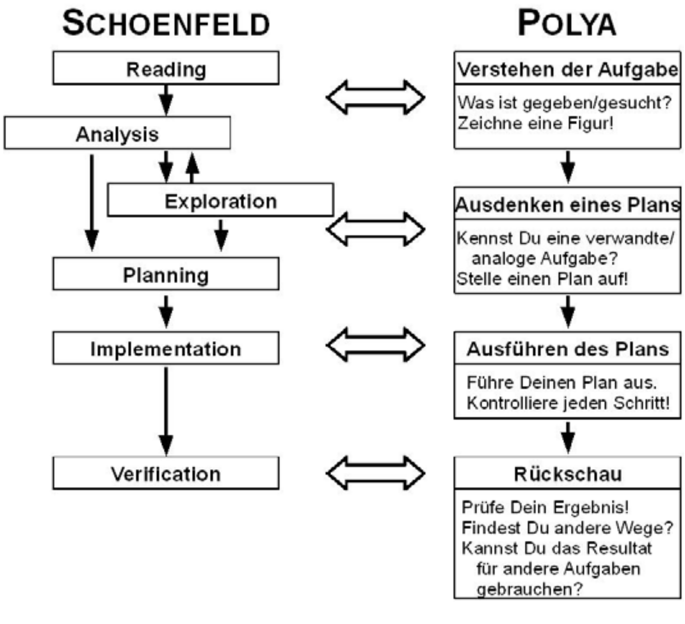


Abbildung 1: Zuordnung Schoenfeld – Pólya

Das Verhalten der SchülerInnen – die *Prozesse* – wurde mithilfe der für diese Studie adaptierten *Protocol Analysis* von Schoenfeld (1985, Kap. 9) kodiert. Die Prozesse wurden eingeteilt in sog. *Episoden*, „period[s] of time during which an individual or a problem-solving group is enganged in one large task […] or a closely related body of tasks in the service of the same goal“ (ebd., S. 292). Schoenfeld hat sechs Episodentypen beschrieben, die sich den vier Pólya’schen Phasen zuordnen und dadurch konkretisieren lassen (vgl. Abb. 1) und die bis auf *Reading* die inhaltliche Auseinandersetzung mit dem Problem beschreiben. Im Rahmen unserer Studie wurden weitere Episodentypen wie *Abschweifung* identifiziert, die nicht-inhaltsbezogenes Verhalten unserer Schüler beschreiben (vgl. Rott 2010), auf die in diesem Artikel aber nicht weiter eingegangen wird. Diese Einteilungen wurden von Hilfskräften und mir unabhängig durchgeführt und anschließend konsensuell validiert. Auch hier kam es vor, dass bei in Paaren arbeitenden Kindern voneinander abweichende Episoden kodiert wurden.

Ergebnisse

Da die vorliegenden Daten teilweise nominalskaliert sind, erfolgte die statistische Auswertung mithilfe eines Chi-Quadrat-Tests (vgl. Rasch et al. 2006, S. 186 ff.). Zunächst wird der von Schoenfeld beschriebene Zusammenhang zwischen geringem Bearbeitungserfolg und unreflektiertem Arbeiten untersucht (s.o.): Als *wild goose chase* wurden dabei alle Prozesse gewertet, in denen nur *Exploration* oder *Analysis & Exploration* kodiert wurde; alle übrigen Prozesse (also diejenigen, in denen auch *Planning* und/oder *Verification* etc. auftrat) wurden als *Sonstiges* zusammengefasst. Aufgetragen wurden die zugehörigen Häufigkeiten gegen den Erfolg; in den Zellen stehen die beobachteten Werte sowie die (mithilfe der Randsummen ermittelten) erwarteten Werte in Klammern.

Zwei Bierdeckel – Prozessverlauf				**Marcos Zahlenreihe -- Prozessverlauf**			
	Kaum Erf.	*Erfolg*	Summe		*Kaum Erf.*	*Erfolg*	Summe
wild goose	18 (15,6)	7 (9,4)	**25**	*wild goose*	6 (3,1)	1 (3,9)	**7**
Sonstiges	2 (4,4)	5 (2,6)	**7**	*Sonstiges*	8 (10,9)	17 (14,1)	**25**
Summe	**20**	**12**	**32**	Summe	**14**	**18**	**32**
$\chi^2 = 4{,}401$; df = 1; $p = 0{,}036$ (< 0,05)				$\chi^2 = 6{,}411$; df = 1; $p = 0{,}011$ (< 0,05)			
78 % *Wild goose chase*, davon knapp 3/4 ohne Erfolg bei der Bearbeitung der Aufg.				22 % *Wild goose chase*, davon 6/7 ohne Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe.			

Obwohl die Prozessverläufe natürlich aufgabenabhängig sind, konnte der Typ *wild goose chase* bei beiden Problemen identifiziert werden. Die beobachteten Häufigkeiten in der Hauptdiagonalen sind bei beiden Aufgaben größer als die erwarteten Werte (und entspr. geringer in der Nebendiagonalen); der χ^2-Test bestätigt diesen Zusammenhang auf dem 5%-Niveau.

Anschließend wird der Zusammenhang zwischen zu geringer *Analysis* und ausbleibendem Aufgabenerfolg auf dieselbe Weise geprüft:

Zwei Bierdeckel – Verstehen der Aufg.				**Marcos Zahlenreihe – Verstehen der A.**			
	Kaum Erf.	*Erfolg*	Summe		*Kaum Erf.*	*Erfolg*	Summe
keine *Ana*	12 (8,75)	2 (5,25)	**14**	*Ana* ≤ 2:00	6 (4,4)	2 (5,6)	**8**
Analysis	8 (11,25)	10 (6,75)	**18**	*Ana* > 2:00	8 (9,6)	16 (12,4)	**24**
Summe	**20**	**12**	**32**	Summe	**14**	**18**	**32**
$\chi^2 = 5{,}723$; df = 1; $p = 0{,}017$ (< 0,05)				$\chi^2 = 4{,}233$; df = 1; $p = 0{,}040$ (< 0,05)			
44 % zeigten keine Bemühungen, die Aufg. zu verstehen, davon 6/7 ohne Erfolg.				25 % zeigten kaum Bemühungen, die Aufg. zu verstehen, davon 3/4 ohne Erfolg.			

Auch hier zeigt sich aufgabenabhängiges Verhalten (bei der Zahlenreihe-Aufgabe haben alle Kinder zumindest kurz ein Verhalten gezeigt, das als *Analysis* kodiert wurde); aber bei beiden Problemen konnte ein signifikanter Zusammenhang zwischen keiner / kaum *Analysis* und geringem Bearbeitungserfolg nachgewiesen werden.

Abschließend noch eine kurze Betrachtung der Episode *Verification*:

Zwei Bierdeckel – Rückschau	**Marcos Zahlenreihe – Rückschau**
Nur gut 10 % (4/32) zeigten Bemühungen, die Aufgabe zu verifizieren; alle 4 erfolgreich.	Nur knapp 10 % (3/32) zeigten Verhalten der Verifikation; zwei davon vom Beob. beeinflusst, diese beidem kaum erfolgreich

Es lässt sich – den Erwartungen entsprechend – wenig Bedürfnis bei den Kindern feststellen, Rückschau (im Sinne Pólyas) zu halten. Diejenigen, die das freiwillig tun, sind hierbei ausnahmslos erfolgreich.

Geplant sind u.a. die Auswertungen zu Prozessen weiterer Aufgaben.

Literatur

Pólya, George (1949): *Schule des Denkens*. Tübingen: Francke.

Rasch, B.; Friese, M.; Hofmann, W.; Naumann, E. (2006): *Quantitative Methoden – Band 1 – Einführung in die Statistik*. Heidelberg: Springer. 2., erweiterte Auflage.

Rott, Benjamin (2010): Empirisch begründete Phasen in den Problemlöseprozessen von Fünftklässlern. In: *BzMU 2010*.

Schoenfeld, Alan H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, Alan H. (1992): On Paradigms and Methods: What Do You Do When the Ones You Know Don't Do What You Want Them to? In: *The Journal of the Learning Sciences 2* (1992), Nr. 2. S. 179 – 214.

Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred & Wolpers, Hans (2000): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II – Band 1*. Braunschweig: Vieweg. 2. durchgesehene Auflage.

Thomas ROYAR, Liestal (Schweiz)

Zum Operationsverständnis der Grundrechenarten

Problem der Definition

Obwohl in der Literatur wiederholt von „Operationsverständnis“ gesprochen wird (z. B. Gaidoschik 2003, Schipper 2003, Schäfer 2005, Kaufmann & Wessolowski 2006, Schütte 2008), fällt auf, dass eine genauere Definition fehlt. Stattdessen finden sich Beschreibungen, wozu es befähigt („Operation sense enables students to apply and use operations with meaning and flexibility.” Huinker 1993, S. 80) oder wie man es erkennt („Operationsverständnis zeigt sich in der Fähigkeit, zwischen diesen verschiedenen „Sprachen“ hin- und herübersetzen zu können, also Verbindungen herstellen zu können zwischen konkreten, häufig in Alltagssprache beschriebenen, (Alltags-)Situationen und mathematischen Symbolen und Rechenoperationen.“ (Gerster & Schultz o. J. , S. 388).

Verständnis von Mathematik offenbart sich im Gebrauch von Sprache

Alle Ausdrucksmittel, derer man sich bedient, um mathematische Zusammenhänge auszudrücken, also zum Beispiel Handlungen und Prozeduren, Zeichnungen und Skizzen, Umgangssprache und Formelsprache, lassen sich in einem erweiterten Sinne als „Sprachen“ bezeichnen, so wie ja auch von „Gebärdensprache“ oder „Zeichensprache“ die Rede ist. Ob jemand eine Sprache „beherrscht“, offenbart sich nur im Dialog. Für die Mathematik gilt: Kommunikationspartner, die sich mathematischer Sprachen bedienen, müssen, um sich verständigen zu können, in ihrer Einschätzung darüber übereinstimmen, worauf sich das Gesprochene oder Geschriebene bezieht. „Für fundamentale Wissenskonstruktionen“ bedarf es des „konstruktiven Austausch(s) mit anderen Personen“. (Brandt & Nührenbörger 2009, S. 30)

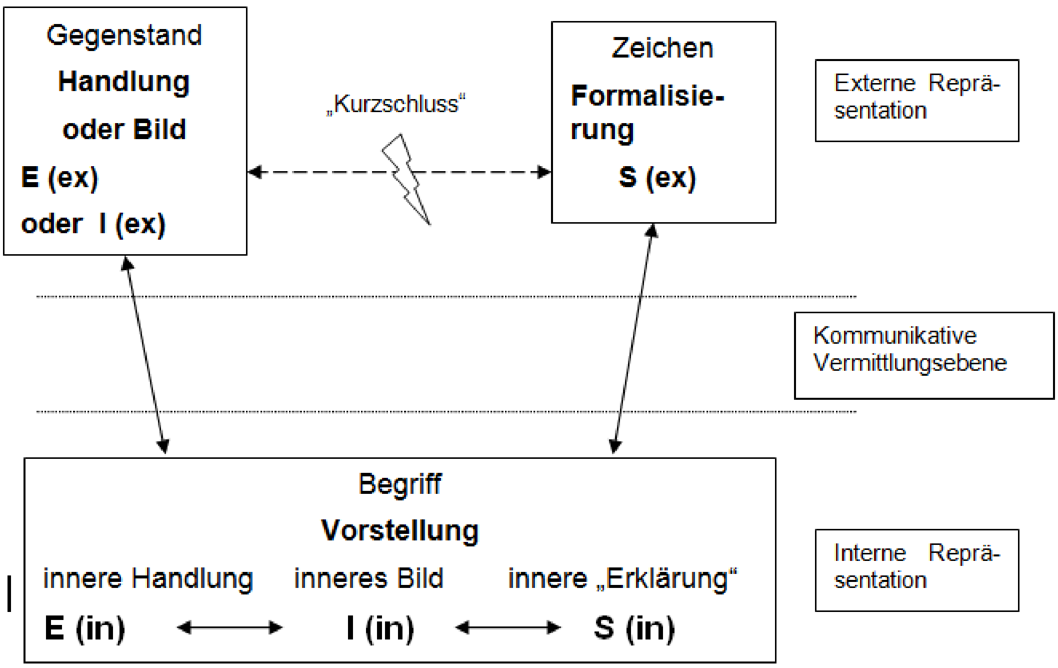
Es erscheint dabei vernünftig anzunehmen, dass normalerweise während des Lernprozesses dieser Austausch zunehmend besser gelingt, auch durch den Gebrauch mehrerer „Sprachen“. „In verschiedenen Darstellungen sind unterschiedliche Beziehungen kodiert, durch den Wechsel kann ein mathematisches Problem tiefer und umfassender durchdrungen werden.“ (Böttinger 2007, S. 295)

Verschiedene „Sprachen“ und die „Übersetzungen“ zwischen ihnen

Sprache ist gleichfalls Mittel zur Vorstellungsbildung als auch zur Darstellung eigener Vorstellungen. In der Mathematik ist in Anlehnung an BRUNER der Begriff der „Repräsentation“ gebräuchlich. Problematisch dabei erscheint aber, „dass oftmals die Unterscheidung zwischen externen und internen Repräsentationen nicht beachtet und damit der Typ der externen Repräsentation (Darstellung) nicht sauber von dem Typ (oder den Typen) der dadurch induzierten, internen Repräsentationen (Vorstellungen) unterschieden wird." (Schwank 2008, S. 174)

Unterscheidet man diese, so kommt man nicht zu den drei „Ebenen" des enaktiven, ikonischen und symbolischen (als sogenanntes „EIS-Prinzip" historisch verankert), sondern zu Vorstellungen als internen Repräsentationen (in Form von verinnerlichten Handlungsabläufen, inneren Bildern oder symbolisch kodiert) und Darstellungen als externe Repräsentationen (in Form von ausgeführten Handlungen oder produzierten Bildern oder – am stärksten konventionalisiert – in Form symbolischer Zeichen). Mathematische Zusammenhänge sind in ihrem Kern formal in der am besten kommunizierbaren Form kodiert: Der Term 3 + 2 ist global besser zu „verstehen" als jede andere Darstellungsform, weshalb die externe symbolische Repräsentation zentral ist.

In Anlehnung an das „epistemologische Dreieck" (Steinbring 1999) (Gegenstand, Zeichen, Begriff) lässt sich ein Modell beschreiben, das zwischen externer und interner Repräsentation unterscheidet und die Problematik „kurzschlüssiger Übersetzungen" ohne gedankliche Durchdringung illustriert. Verständnis kann nicht extern durch Variation der Veranschaulichungen gewissermaßen „erzeugt" werden, sondern nur durch kommunikativen Austausch über unterschiedliche Darstellungen und korrespondierende Vorstellungen angestrebt werden („Pfeile" im Modell).



„Steckt“ Mathematik bereits in der Handlung oder im Bild?

Mathematische Begriffe beruhen grundsätzlich auf Verabredung („assignation“) und können nicht „von sich aus“ aus Handlungen oder Bildern „herausgelöst“ werden.

„Nur im Wechsel von Sinneswahrnehmung und geistiger Verarbeitung, von Konkretion und Abstraktion wächst Erkenntnis. Das gilt für alle Altersstufen. Sobald das Kind sprechen lernt, nimmt dieser wechselseitige Prozess einen stürmischen Aufschwung, und er führt nicht etwa "von der Anschauung zum Begriff", sondern von einfachen zu immer komplexeren Anschauungen und Begriffen.“ (Glöckel 1996, S. 289)

Eine “interne Repräsentation” von Grundrechenarten kann es streng genommen nicht geben, so lange das konzeptionelle Wissen hierüber nicht aufgebaut ist, denn Grundrechenarten sind ihrem Wesen nach eben keine sinnlich wahrnehmbaren Phänomene, sondern Erkenntnisse.

Was ist intern repräsentiert, was stellt sich ein Kind vor, das rechnet? Möglicherweise Handlungen oder Ereignisse, möglicherweise aber auch gar nichts außer dem „richtigen“ Ergebnis – und dieses vielleicht nur als sprachliches bzw. grafisches Zeichen ohne weitere Bedeutung. Erst wenn interne und externe Repräsentationen sinnvoll aufeinander bezogen werden können, ist es sinnvoll, davon zu sprechen, dass ein Kind über „Operationsverständnis“ verfügt. „Externe“ Repräsentationen sind Darstellungen, die von Dritten mit Kommunikationsfunktion geschaffen werden. Erst wenn sich „Kommunikationskreise schließen“ (Greenspan 2001), dann gelingt Verständigung, die gleichzeitig Voraussetzung und Ergebnis von Verständnis ist. Daher sei folgende Definition des Operationsverständnisses zur Diskussion gestellt:

Operationsverständnis ist die Fähigkeit, eine eigene Vorstellung von der Bedeutung einer formalisierten Darstellung durch Bezug auf Handlungen oder Bilder so zu kommunizieren, dass sie allgemein konsensfähig ist.

Ergebnisse einer eigenen Untersuchung

In einer eigenen Untersuchung wurde der Frage nachgegangen, welche Rechenterme Kinder animierten „Plättchenbildern“ zuordnen und wie sie umgekehrt Rechenterme mit Hilfe von Plättchen erklären. Dabei wurde festgestellt, dass bei einem hohen Prozentsatz von Kindern diese Zuordnungen und Erklärungen nicht den konventionell zu erwartenden entsprachen. So waren beispielsweise von 117 untersuchten Drittklässern, denen in einer einfachen Computeranimation drei mit roten Punkten dargestellte „Würfelfünfer“ sukzessiv eingeblendet wurden, so dass nacheinander 5, 10 und schließlich 15 Punkte zu sehen waren, über 20 nicht in der Lage, dieser Animation eine „passende Malaufgabe“ zuzuordnen: 13 Kinder interpretierten die Bilderfolge als „10 · 5“ oder „5 · 10“ und auch Antworten wie „10 · 15“ oder „12 · 3“ wurden gegeben: „Übersetzt“ wurden lediglich Punkteanzahlen in Ziffern, die Multiplikation als mathematische Operation konnte nicht „hineingesehen“ werden. Variationen vermeintlicher „Darstellungen“ einfacher Terme mit den vier Grundrechenarten führten im Wesentlichen zum immer gleichen Ergebnis: Bis zu 20% der Kinder sind noch zu Beginn der dritten Klasse nicht in der Lage, einfachsten Rechenausdrücken eine Bedeutung zuzumessen, die in Expertenratings als „adäquat“ eingestuft wurden. Wurden die Kinder umgekehrt aufgefordert, mit Hilfe von Plättchen einem fiktiven Erstklässer beispielsweise zu „erklären“, weshalb das Ergebnis der Aufgabe 6 – 4 „zwei“ lautet, zeigte sich ebenfalls, dass mehr als jedes fünfte Kind zu Beginn der dritten Klasse nicht in der Lage war, 6 Plättchen und 4 Plättchen dazu in irgendeiner anderen Form aufeinander zu beziehen, als sie einfach nebeneinander zu legen. Diese Kinder verneinten auch die anschließende Frage, „ob man hier jetzt sehen oder zeigen könne, dass das Ergebnis der Aufgabe zwei ist“.

Literatur (Auswahl)

Böttinger, Claudia: Ein Kategoriensystem beim Wechseln von Repräsentationsebenen. In: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim, Berlin 2007, S. 295–298.

Brandt, Birgit/Nührenbörger, Marcus: Kinder im Gespräch über Mathematik. In: Die Grundschulzeitschrift, 23. Jg. 2009, H. 222.223, S. 28–33.

Gerster, Hans Dieter/Schultz, Rita: Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Online verfügbar unter http://opus.bsz-bw.de/phfr/ volltexte/2007/16/pdf/gerster.pdf

Glöckel, Hans: Vom Unterricht. 3., überarb. und erg. Aufl. Bad Heilbrunn Obb. 1996.

Greenspan, Stanley I./Wieder, Serena/Simons, Robin: Mein Kind lernt anders. Ein Handbuch zur Begleitung förderbedürftiger Kinder. Düsseldorf 2001.

Schipper, Wilhelm: Lernen mit Material im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Baum, Monika/Wielpütz, Hans (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. Seelze 2003, S. 221–237.

Schwank, Inge: Mathematiklernen: Die verkannte Bedeutung des sprachlosen Denkens. In: Kliemann, Sabine (Hrsg.): Diagnostizieren und Fördern in der Sekundarstufe I. Schülerkompetenzen erkennen, unterstützen und ausbauen. Berlin 2008, S. 174–185.

Steinbring, Heinz: Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion - Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. In: Journal für Mathematikdidaktik, Heft 1, 2000, S. 28-49.

Christian RÜEDE, Universität Zürich

Strukturieren von Termen und Gleichungen als Bedeutungskonstruktion

Zahleiche empirische Untersuchungen belegen die zentrale Rolle des *Strukturierens* beim Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen. Allerdings fehlt eine theoretische Fundierung des Begriffs des Strukturierens algebraischer Ausdrücke. In diesem Beitrag wird daher versucht, diese Lücke zu schließen.

Ausgangspunkt sind vier Prämissen. Sie drücken aus, dass die Schüler und Schülerinnen beim Umformen von Termen und Gleichungen eine interne Semantik (Kieran, 2006) – beim Modellieren realer Sachzusammenhänge hingegen eine externe Semantik – entwickeln sollen und nicht nur in Päckchen von Aufgaben Muster erkennen müssen, sondern auch in einzelnen Aufgaben.

1. Eine Struktur eines Terms oder einer Gleichung macht „strategische" Vorstellungen einer Person sichtbar, vermittelt also zwischen einer algebraischen Zeichenreihe und Regeln. Sie bringt die Vorstellungen der Person darüber zum Ausdruck, *wann* ein Ausdruck *wie* umgeformt werden kann.

2. Es gibt nicht nur eine einzige Struktur eines Terms, vielmehr gibt es viele individuelle (angemessene) Strukturen eines Terms. Die Struktur ist kein mathematisches Prinzip, das einem Term zugeschrieben werden kann, sondern eine Sichtweise, wie eine Person einen Term liest.

3. Strukturieren basiert auf Kognition *und* Wahrnehmung. Strukturieren ist ein Prozess, der zur internen (strukturanalogen) Repräsentation des algebraischen Ausdrucks führt.

4. Strukturieren ist ein Prozess, der von impliziten Normen (*metarules*) geleitet wird.

Ein Modell zur Beschreibung des Strukturierens

Strukturieren wird in diesem Betrag mit Hilfe von vier Komponenten, der *Anwendbarkeitsbedingung*, der *Abschlussbedingung* (Sfard, 2008), der *Struktur* und der *Konsequenz,* beschrieben (vgl. *Abb. 1*). Die Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung sind Auffassungen einer Person darüber, wann eine bestimmte Struktur hergestellt werden soll. Sie hängt beispielsweise ab von der vorgelegten Gleichung, den Erfahrungen der Person und den Umständen, unter denen die Gleichung gelöst werden muss. Im Speziellen handelt es sich bei Anwendbarkeitsbedingungen um Auffassungen von Situationen, in denen bestimmte Strukturen hergestellt werden könnten. Abschlussbedingungen entsprechen den Auffassungen darüber, ob an einer hergestellten Struktur festgehalten werden soll oder nicht. Die Anwendbarkeitsbedingung führt zu einer bestimmten Struktur und die Abschlussbedingung bestimmt, ob diese Struktur akzeptiert oder verworfen werden soll. Etwas salopper formuliert spiegelt die Anwendbarkeitsbedingung die Erwartung der Person in dieser Situation und die Abschlussbedingung ihre Einschätzung des Resultats.

Beantworten die Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung die Frage nach dem Wann der Struktur, beantwortet die Struktur die Frage nach dem Wie. Eine Struktur ist eine Auffassung eines Terms oder einer Gleichung als *Relation*. Sie besagt, welche einzelnen Teilterme des Terms oder der Gleichung wie aufeinander bezogen sind. Schließlich impliziert die Struktur eine Konsequenz. Diese manifestiert sich typischerweise als Umformung und erlaubt die Beurteilung davon, inwiefern die Abschlussbedingung erfüllt ist oder nicht.

Das hier beschriebene Wechselspiel zwischen Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung sowie Struktur und Konsequenz macht explizit, was gemeint sein kann, wenn das Wissen um den Gebrauch eines Terms mit dem Erfassen seiner Bedeutung gleich gesetzt wird. Ein solch pragmatischer Bedeutungsbegriff wird hier konkret umgesetzt, indem nach dem Wann und Wie der Struktur und nach ihrer Konsequenz gefragt wird. Wer sich während des Umformens fragt, wann er wie strukturieren soll und welche Konsequenzen sich daraus ergeben, konstruiert dadurch die *Bedeutung* des Terms.

Ein Beispiel: Wie ein Experte eine Gleichung strukturiert

Das oben eingeführte Modell wurde zur Analyse von Interviews genutzt, in denen Probanden vorgelegte Gleichungen umformen sollten. Dies wird hier an einem Beispiel illustriert. Einem Experten (langjähriger Mathematiklehrer an einem Schweizer Gymnasium, zugleich Praxislehrer und Lehrbuchautor) wurde die Gleichung $\frac{20x^3+30x^2}{4x+6}=\frac{12x+18}{8x+12}$ vorgelegt, mit der Aufforderung, eine geeignete Umformung vorzuschlagen. Der Experte wollte anfangs die Nenner wegmultiplizieren. Er verwarf dies dann, da er die kubische Form der resultierenden Gleichung erkannte. Dieser erste, verfahrenbasierte Schritt wird hier aus Platzgründen nicht näher analysiert, sondern sein zweiter, sein verfahrenbildender. Dieser wird zuerst beschrieben. Dazu dienen die oben eingeführten Begriffe. In Abbildung 1 ist die aus dem Interview rekonstruierte Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung sowie Struktur und Konsequenz dieses zweiten Schritts angegeben. Diese Beschreibung wird nun interpretiert.

Anwendbarkeitsbedingung	*Struktur*	*Konsequenz*	*Abschlussbedingung*
Analyse des ersten Versuchs ergibt, dass das Wegschaffen der Nenner zu mühsam ist. Als Alternative schaue ich zuerst die Brüche einzeln an. Ich vermute wegen der Kubizität, dass sie einzeln vereinfachbar sind.	$\begin{matrix} 20x^3 \leftrightarrow 30x^2 \\ 4x \leftrightarrow 6 \end{matrix} = \begin{matrix} 12x \leftrightarrow 18 \\ 8x \leftrightarrow 12 \end{matrix}$ Entdeckung horizontaler Verhältnisse, die vertikal aufeinander bezogen werden. „20, 30 zum Beispiel beim ersten Bruch, stehen zueinander im gleichen Verhältnis wie 4 zu 6. Oder eben x^3 zu x^2 wie x zu 1, oder 12 zu 18 wie 8 zu 12. Also im Hinterkopf habe ich, so denke ich, das Ausklammern schon gesehen.“	Brüche links und rechts sind je mit Linearfaktor kürzbar.	Evaluation. Das Wegschaffen der Nenner ist zu zeitaufwändig. „Dann habe ich es verworfen, weil das nicht sehr lustbetont ist, es ist eine Zeitabschätzung vermutlich.“ Meine Vermutung war gerechtfertigt. „Also das ist der Weg, den ich jetzt einschlagen würde.“

Abbildung 1: Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung, Struktur und Konsequenz des Experten beim zweiten Strukturierungsschritt. Die Aussagen in Anführungs- und Schlusszeichen sind wortwörtliche Passagen aus dem Interview.

Charakterisierend für den Experten ist, dass er das Verwerfen des Wegmultiplizierens der Nenner analysierte. Er untersuchte, warum dieses Verfahren zu zeitaufwändig würde und folgerte schließlich, dass die Kubizität durch das interne Vereinfachen der Brüche verschwinden müsse. Das Wann bestand also im Verwerfen eines Standardverfahrens und im Schluss auf das interne Vereinfachen der beiden Brüche. Unter dieser Leseperspektive schaute er dann die Gleichung an, insbesondere anders als beim Wegmultiplizieren der Nenner. Dazu wechselte er die Blickrichtung. Nicht mehr Bezüge zwischen den beiden Nennern waren wichtig, sondern Bezüge zwischen dem Zähler und dazugehörigen Nenner. Die Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung zeigt, dass er dabei auf die Anwendbarkeit und nicht auf die Anwendung eines Vereinfachungsverfahrens fokussierte. Er vereinfachte die Brüche nicht, sondern überprüfte, ob sie sich vereinfachen lassen.

Aus diesem Grund schaute er auf Zähler und Nenner links und auf Zähler und Nenner rechts. Diese Blickrichtung einerseits und Vorstellungen des Experten über den Zusammenhang von Verhältnissen, Linearfaktoren und Kürzen andererseits führten auf die Struktur, also auf das Wie.

Der Experte behandelte die Gleichung nahezu wie eine Tabelle. Wichtig wurden die einzelnen Summanden und horizontalen Bezüge zwischen ihnen in der Form von Verhältnissen, die schließlich vertikal aufeinander bezogen wurden. Die so hergestellte Struktur macht Vorstellungen des Experten über die Vereinfachbarkeit von Brüchen sichtbar, in ihr kommt das Wie zum Ausdruck. Charakteristisch für den Experten ist, dass er Bezüge herstellte, die über die von den Operationszeichen gegebenen hinausgingen. Die Konsequenz bestand in der Gleichheit der Verhältnisse und im resultierenden Schluss, dass die beiden Brüche intern mit einem Linearfaktor gekürzt werden können.

In der Abschlussbedingung kommt der explorative Charakter des Strukturierens unseres Experten am deutlichsten zum Ausdruck. Der Experte diskutierte die beiden Strukturen. Er beurteilte sie bezüglich der Kriterien der Einfachheit (Anzahl Schritte), Zeitaufwand und Eleganz (Lustbetontheit). Erst in dieser Abschlussbedingung wird das Wann der Struktur definitiv geklärt.

Fazit

Dieser Beitrag dokumentiert die Auseinandersetzung eines Experten mit dem Wann und Wie einer Struktur. Das Lösen der Gleichung erscheint nicht als mechanische Anwendung von Rechengesetzen und Standardverfahren, vielmehr als ein Ringen um eine geeignete Struktur. Dadurch erschafft sich der Experte die Bedeutung der Gleichung. Um diesen wichtigen Aspekt beim Lösen einer Gleichung zu beschreiben, erweisen sich die Konstrukte der Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung sowie der Struktur und der Konsequenz als äußerst hilfreich.

Literatur

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. In A. Guitérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sensepublishers.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating*. Cambridge: Cambridge University Press.

Markus RUPPERT, Jan WÖRLER, Würzburg

Zwischen Lerntagebuch und Portfolio: Das „individuelle Praktikums Portfolio (iPP)“ in der Lehramtsausbildung

Im Rahmen der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik wird an der Universität Würzburg seit einigen Jahren ein *Mathematisches Praktikum* angeboten. „Im Kurs werden Einsatzmöglichkeiten des Computers in der Mathematik und im Mathematikunterricht erarbeitet. Es werden Kenntnisse im Umgang mit Computer Algebra Systemen und Dynamischer Geometrie Software vermittelt. Aufbauend auf dieses Wissen werden Wege zur Integration der genannten Werkzeuge in den Unterricht erarbeitet“ (aus der Veranstaltungsankündigung zum SS 2009). Traditionell liegt der Schwerpunkt der Veranstaltung demnach auf der Vermittlung von Softwarekenntnissen, die in einem Blended-Learning-Format vermittelt wurden. Zur Leistungsbewertung wurden wöchentliche Aufgabenbearbeitungen herangezogen, die in digitaler Form (CAS-Programmcode, DGS-Konstruktionen,…) abgegeben werden mussten.

Während die Veranstaltung von den Studierenden hinsichtlich des Veranstaltungformats und der Relevanz für den Lehrerberuf eher positiv evaluiert wurde, legt die Beurteilung aus Dozentensicht eine Neuausrichtung der Organisation und Inhalte nahe.

Neuausrichtung notwendig

Kritisiert wurde von den verantwortlichen Dozenten vor allem, dass das traditionelle Aufgabenformat zu wenige individuelle Lösungsmöglichkeiten zulässt und dem Lernprozess der Studierenden durch die ausschließliche Bewertung von Bearbeitungs*resultaten* zu wenig Aufmerksamkeit gewidmet werden kann. Desweiteren nutzten die Studierenden die Möglichkeit zur didaktischen Diskussion, die im Onlinekurs im Rahmen eines Forums versucht wurde anzustoßen, kaum. Aus unserer Sicht ist das Mathematische Praktikum außerdem der richtige Ort, um Studierenden den Computereinsatz zur Bewältigung des Lehreralltags nahezubringen (Erstellen von Arbeitsblättern, Einsatz eines Formeleditors, Computer als Animations- und Demonstrationswerkzeug, erweiterte Nutzung von E-Learning-Plattformen wie Moodle, Wikis,…) und gemeinsam mit ihnen Kriterien zur Beurteilung von Lernsoftware, wie sie z. B. von Schulbuchverlagen angeboten wird, zu erarbeiten. Auch eine Sensibilisierung für Trends und Entwicklungen im IT-Bereich und deren Relevanz für den Mathematikunterricht sollte in dieser Veranstaltung angestrebt werden.

Damit diese Neuorientierung gelingt und die Leistungen der Studierenden trotzdem im Rahmen der Lehramtsprüfungsordnung (LPO I) bewertbar bleiben, hielten wir die folgenden Aspekte für wesentlich:

Es muss für diese Veranstaltung ein alternatives Beurteilungsinstrument entwickelt werden, das inhaltlich auf ein neues Aufgabenformat aufbaut und in einem neuen Veranstaltungsformat verankert ist.

Das iPP zwischen Lerntagebuch und Portfolio

Eine erste Idee für ein alternatives Beurteilungsinstrument liefert das Führen eines *Lerntagebuchs* (z. B. im Sinne eines „Reisetagebuchs", vgl. Gallin/Ruf, 1993), in dem der Lernprozess in allen Facetten, d. h. mit allen gescheiterten und erfolgreichen Versuchen, dokumentiert wird. Ein Lerntagebuch wird in der Sprache des Lernenden verfasst und kann auch emotionale Elemente enthalten. Das Lerntagebuch ist also in erster Linie ein „Medium der privaten Auseinandersetzung" (ebda.) mit dem Lernstoff. Nach Gallin und Ruf steht dies jedoch im Widerspruch zu einer externen Bewertung des Tagebuchs im Allgemeinen und einer Bewertung von Darstellung und Form im Speziellen. Anders ist dies bei einer von Hußmann (2003) vorgestellten Variante des Lerntagebuchs: dem *Forschungsheft*. Ausgangspunkt der Notizen in einem Forschungsheft sind *Intentionale Probleme* die „direkt ins Zentrum des Fachgebiets führen, es aber zugleich als Ganzes umreißen" (ebda.). Im Forschungsheft wird nicht mehr der gesamte Lernprozess festgehalten, sondern nur noch *Ankerpunkte* (Aha-Erlebnisse, besondere Beispiele, Hypothesen, etc.) in strukturierter Form dokumentiert. Hußmann formuliert Kriterien für ein gutes Forschungsheft, die auch zu einer externen Bewertung herangezogen werden können (ebda.).

Eine externe Bewertung ist dagegen in einem *Portfolio* explizit vorgesehen. „A portfolio is a purposeful collection of student work that exhibits the student's efforts, progress and achievements in one or more areas" (Paulson/Paulson/Meyer, 1991). Als Portfoliovarianten lassen sich *Vorzeigeportfolios* und *Entwicklungsportfolios* unterscheiden. Während ersteres ausschließlich Endprodukte enthält und somit eine bestmögliche Auswahl von Leistungsresultaten darstellt, werden in einem Entwicklungsportfolio auch Anfangs- und Zwischenergebnisse eines Lernprozesses, sowie selbstreflexive Gedanken des Lernenden festgehalten. Ein Entwicklungsportfolio ermöglicht somit die Bewertung auch komplexer, offener Aufgaben und die Dokumentation und Reflexion des Lernprozesses. (vgl. Lissmann, 2001; Gubler-Beck, 2007).

Als alternatives Bewertungsinstrument für das Mathematische Praktikum an der Universität Würzburg wurde aus einer Synthese von Elementen des

Forschungshefts und des Entwicklungsportfolios das *individuelle PrakikumsPortfolio* (iPP). Das iPP ist eine aufgabengeleitete Dokumentation der individuellen Lernprozesse von Studierenden, das trotz selbstreflexiver Elemente und persönlicher Notizen eine Bewertung durch die Dozenten erlaubt.

Um mit diesem Konzept in der Veranstaltung neben den klassischen Inhaltszielen (CAS, GDS, TKP) auch die oben formulierten neuen Ziele zu erreichen wurden Veranstaltungsformat, Aufgabenformat und Bewertungsformat angepasst:

Die klassischen *Einsendeaufgaben* mit meist innermathematischem Inhalt existieren weiter, wurden aber in Anzahl und Umfang reduziert; ihre Bewertung erfolgt – wie in der Fachmathematik üblich – unter Gesichtspunkten der mathematischen Korrektheit einer (digitalen) Lösung.

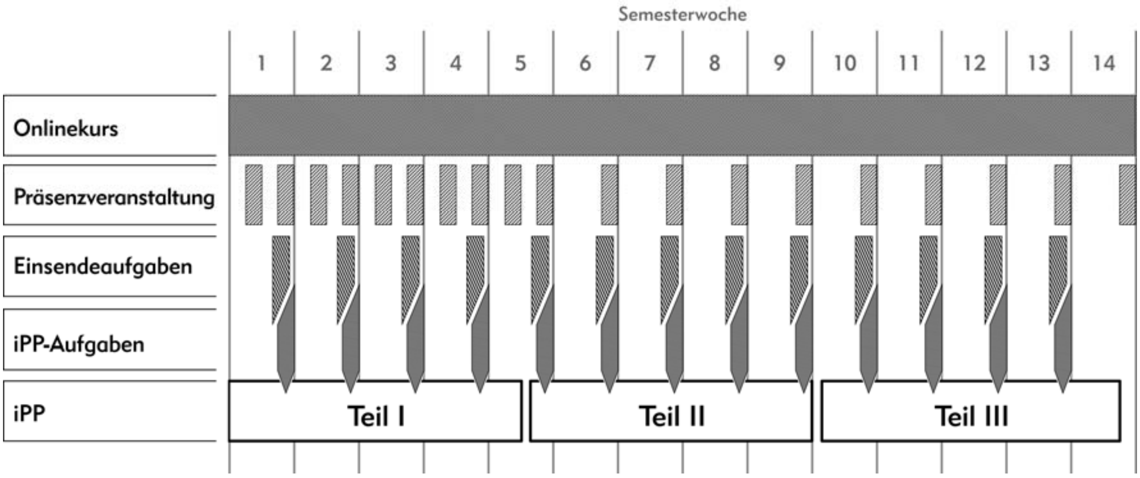
Die Einsendeaufgaben dienen im Rahmen spezieller *iPP-Aufgaben* als Ausgangspunkt für Reflexionen und didaktische Fragestellungen. Wird beispielsweise als Einsendeaufgabe die Konstruktion spezieller Punkte im Dreieck mittels DGS gefordert, so werden in der zugehörigen iPP-Aufgabe verschiedene DGS verglichen, Vor- und Nachteile des DGS-Einsatzes im Unterricht diskutiert oder aber die individuelle Auseinandersetzung mit der Software beim Lösen dieser speziellen Einsendeaufgabe thematisiert. Die Bearbeitung der iPP-Aufgaben erfolgt schriftlich und bildet den Pflichtteil des individuellen PraktikumsPortfolios.

Das iPP – und damit die gesammelten Bearbeitungen der iPP-Aufgaben – wird den Dozenten drei Mal pro Semester in ausgedruckter, gebundener Form vorgelegt, die dann die Bewertung der Abgaben vornehmen. Dabei fließen – der Konzeption des Bewertungsportfolios (s. o.) folgend – neben dem Inhalt auch Darbietung und Form der Lösungen mit in die Bewertung ein.

Strenge äußere Vorgaben transportieren einerseits Inhalte (etwa zur Darstellung und Form wissenschaftlicher Arbeiten; zu Seitengestaltung, Zitierweise, Formelsatz), sichern aber auch die Qualität des Endproduktes „iPP“, das nach der letzten Bewertung durch die Dozenten an die Studierenden zurückgegeben wird und sie als Nachschlagewerk im weiteren Studium und im Lehreralltag begleiten soll.

Das Praktikum gilt für einen Teilnehmer als „bestanden“, wenn er über das Semester hinweg mindestens 50% der Maximalpunkte in den Einsendeaufgaben und zusätzlich mindestens 50% der erreichbaren Punkte auf sein iPP sammelt. Eine Abschlussklausur entfällt.

Veranstaltungsablauf und Einbettung des iPP in das Gesamtkonzept:



Ausblick

Das iPP und die veränderte Aufgabenkultur haben sich bewährt: Aus Dozentensicht wurden die eingangs formulierten Ziele erreicht und auch die Studierenden haben das neue Konzept in den allermeisten Fällen sehr positiv bewertet. Allein der hohe Aufwand beim Erstellen des iPPs wird von beiden Seiten als problematisch angesehen.

Das Konzept ist auf alle Veranstaltungen mit „überschaubarer" Teilnehmerzahl übertragbar, bei denen es neben fachlichen auch um didaktische Inhalte geht und kann in diesen Kursen die Abschlussklausur ersetzen.

Eine Umstellung auf ePortfolios (z. B. Mahara) und eine Einbeziehung der Studierenden in den Bewertungsprozess ist nach einer Eingewöhnungsphase (etwa zur Semestermitte oder im Folgesemester) denkbar.

Literatur

Gallin, P.,Ruf, U. (1993): Sprache und Mathematik in der Schule. Ein Bericht aus der Praxis. JMD, 14, 1, S. 3–33.

Gubler-Beck A. (2007): Portfolios im angelsächsischen und im deutschen Sprachraum. JMD, 28, 3/4, S. 183–208

Hußmann, S. (2003) Lerntagebücher – Mathematik in der Sprache des Verstehens. In: Leuders, T.: Mathematik Didaktik. Cornelsen Skriptor, Berlin.

Lissmann, U. (2001):Die Schule braucht eine neue Pädagogische Diagnostik. Formen, Bedingungen und Möglichkeiten der Portfoliobeurteilung. Die Deutsche Schule, 93, 4, S. 486–497.

Paulson, L., Paulson, P. R., Meyer, C. A.(1991): What makes a Portfolio a Portfolio? Educational leadership, 48, S. 60–63.

Alexander SALLE, Bielefeld

Lösungsbeispiele in interaktiven Lernumgebungen

In diesem Beitrag wird von den Vorarbeiten einer geplanten Studie berichtet, in der verschiedene Arten von Lösungsbeispielen zur individuellen Förderung in heterogenen Lerngruppen eingesetzt werden sollen. Inhaltlich befassen sich die Lösungsbeispiele mit elementaren Konzepten der Bruchrechnung, die in Klasse 5 oder 6 behandelt werden.

Nach der Einordnung des Lernens mit Lösungsbeispielen in die mathematik-didaktische Tradition und die psychologische Forschung werden bisherige Forschungsergebnisse umrissen. Die Spezifikationen dieser Arbeiten offenbaren Forschungsdesiderata, denen in der geplanten Studie nachgegangen werden soll. Anschließend wird die Entwicklung der verschiedenen Lösungsbeispiele der interaktiven Lernumgebung beschrieben. Zuletzt werden der Einsatz der Lernumgebung im Unterricht und gleichzeitig die Grundzüge des Designs der Studie skizziert.

1. Spannungsfelder und bisherige Studien

Ein Lösungsbeispiel besteht aus einer Aufgabenstellung, der Angabe von Lösungsschritten und der Lösung der Aufgabenstellung. Mathematik-Lehrende konnotieren mit dieser Art von instruktionalem Material oft passives und rezeptives Lernen. Häufig enthalten Lösungsbeispiele algorithmische und schematische Vorgehensweisen, die im weiteren Unterrichtsverlauf auf ähnliche Aufgabenstellungen angewendet werden sollen. Dies birgt die Gefahr einer lediglich oberflächlichen Verarbeitung und fördert nicht das tiefere Verstehen der Inhalte (vgl. Renkl, 1999). Ungeachtet dessen sind Lösungsbeispiele Bestandteil vieler Schulbücher und dienen zu Beginn eines Lernabschnitts der Darstellung einer typischen Aufgabenlösung bzw. der exemplarischen Anwendung eines Prinzips (z.B. Griesel, Postel & Suhr, 2007).

In den letzten Jahrzehnten hat sich der Mathematik-Unterricht gewandelt. Mit dieser Entwicklung wurden schematische Verfahren mehr und mehr geöffnet und der Fokus des Unterrichts liegt auf Lernumgebungen, die nach konstruktivistischen Gesichtspunkten konzipiert sind. Dadurch soll individuelles und aktives Lernen ermöglicht werden. Die Rolle, die Lösungsbeispiele in solchen Umgebungen spielen könnten, wurde bisher nur punktuell betrachtet und kaum aus mathematik-didaktischer Perspektive untersucht.

Im Gegensatz dazu finden Lösungsbeispiele schon seit längerer Zeit in der psychologischen Forschung Beachtung. Ihre Vor- und Nachteile sind in verschiedenen Studien, auch im Hinblick auf das mathematische Curriculum an Schulen, untersucht worden (Zhu & Simon, 1987; Sweller & Cooper, 1985). Weiterhin ist auch der lernförderliche Umgang mit Lösungsbeispielen Gegenstand einer Vielzahl von Studien (Chi, Bassok, Lewis, Reimann & Glaser, 1989; Renkl, 1997). Durch die Verschmelzung verschiedener medialer Formate (Text, Ton, bewegtes Bild) und die individuelle Interaktion mit dem Rechner eröffnet sich weiterhin ein Horizont neuer Möglichkeiten für den Mathematik-Unterricht. Dies gilt insbesondere auch für Lösungsbeispiele. Prozesse lassen sich – anders als auf dem Papier – dynamisch darstellen und gleichzeitig durch den Nutzer steuern. Die Symbiose aus Multimedia-Learning und instruktionalen Lehrmethoden ist ein aktives Forschungsfeld, doch auch hier mangelt es an größeren und längerfristig angelegten Studien in Deutschland (vgl. Mayer, 2005).

2. Offene Fragen & Forschungsdesiderata

Betrachtet man die bisherigen Forschungsergebnisse, so stellt man fest, dass die meisten Studien Bedingungen unterliegen, die ihre Aussagekraft für den Mathematik-Unterricht einschränken. Häufig sind es punktuelle Untersuchungen, die lediglich sehr kleine Bereiche des mathematischen Curriculums fokussieren, beispielsweise mechanische Umformungen von algebraischen Gleichungen (vgl. Sweller & Cooper, 1985) oder Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten in der Stochastik (vgl. Renkl, 1997). Es wäre interessant zu untersuchen, inwieweit Lösungsbeispiele zum Erwerb von Basiskompetenzen in längeren Unterrichtssequenzen und breiteren Kompetenzbereichen einsetzbar sind.

Viele der durchgeführten Studien, insbesondere auch im Bereich des Multimedia-Learning, sind im englisch-sprachigen Raum angesiedelt. Ergebnisse in Deutschland liegen hauptsächlich durch Publikationen von Renkl & Mitarbeitern vor. Sowohl im internationalen wie auch im deutschsprachigen Bereich finden sich häufig Laborstudien, der Einsatz im realen Mathematik-Unterricht wird nur in wenigen Studien untersucht (vgl. Betrancourt, 2005, S.292). Dabei sind gerade Ergebnisse zur Nutzbarkeit im Unterricht für Forscher und besonders Lehrende interessant.

Publikationen, die sich mit Lösungsbeispielen und Multimedia-Learning befassen, vernachlässigen oft eine didaktische Analyse der zugrundeliegenden instruktionalen Materialien (ebd.). Die Qualität dieser Materialien hat jedoch oft einen unmittelbaren Einfluss auf die erhobenen Daten und somit auch auf die Ergebnisse einer Studie.

Die Untersuchungen der Arbeitsgruppe Renkl & Reiss zu heuristischen Lösungsbeispielen beschränken sich größtenteils auf den Kompetenzbereich des Argumentierens und Beweisens (vgl. Renkl & Reiss, 2002). Inwieweit sich die bisherigen Ergebnisse in anderen Themenbereichen bestätigen lassen ist eine weitere offene Frage.

3. Konzeption der Lernumgebung

In einer Arbeitsgruppe an der Universität Bielefeld wurden die Grundzüge einer Lernumgebung entwickelt, die als Grundlage für die spätere Studie dienen soll. Diese Lernumgebung enthält Sequenzen von Lösungsbeispielen zu den verschiedenen Themen der Bruchrechnung. Eine Sequenz besteht aus einem animierten Beispiel und zwei Lücken-Beispielen, bei denen die Schülerinnen und Schüler durch Auslassen bestimmter Lösungsschritte Teile der Lösung selbst erarbeiten müssen (vgl. Renkl, 1999, 252f). In den Lückenbeispielen werden Oberflächenmerkmale (Repräsentation, Kontext, etc.) des animierten Lösungsbeispiels variiert, um so die lösungsrelevanten Merkmale herauszustellen.

Die Konzeption der interaktiven und animierten Lösungsbeispiele folgt zum einen Prinzipien des Instructional-Design, die in vielen psychologischen Studien repliziert wurden (vgl. Mayer, 2005). Diese Prinzipien dienen dazu, die lernirrelevante kognitive Belastung der Beispiele zu minimieren und die didaktische Gestaltung zu optimieren. Als theoretische Grundlage hierfür dient die Cognitive Load Theory, welche die kognitive Belastung des Arbeitsgedächtnisses beschreibt (vgl. Sweller, 1994).

Zum anderen wurden bei der Erstellung der Beispiele einschlägige Ergebnisse aus Studien zur Bruchrechnung berücksichtigt (u.a. Padberg, 2009). Die mathematik-didaktische Analyse der Lösungsbeispiele dient als Grundlage für die Bewertung der erhobenen Daten.

4. Ausblick auf die geplante Studie

Um erste Antworten auf die in Abschnitt 2 formulierten offenen Fragen bzw. Forschungsdesiderata zu bekommen, soll eine Feldstudie mit Schülerinnen und Schülern mehrerer fünfter Klassen einer Realschule durchgeführt werden.

Bisher wurden Lösungsbeispiele häufig als gemeinsame Instruktion zu Beginn einer Lerneinheit eingesetzt. Zu diesem Zeitpunkt verfügen alle Lernenden nur über geringes Vorwissen und sind im Bezug auf die folgenden Inhalte noch Novizen. Nach der Instruktionsphase wird dann zum Lösen von Aufgaben übergegangen. Diese Struktur liegt auch vielen Studien zugrunde, die die Effektivität von Lösungsbeispielen untersuchen.

In der geplanten Studie werden die Lösungsbeispiele auf eine andere Weise eingesetzt. Statt als gemeinsame Instruktion dienen die Beispiele als Materialien für eine individuelle Förderung in einer Übungsphase. Die Auswahl der Lösungsbeispiele soll durch die Schülerinnen und Schüler erfolgen. Zu Beginn der Übungsphase haben sie die Aufgabe, sich mithilfe eines Selbstdiagnosebogens selbst einzuschätzen. Auf dieser Grundlage wählen sie die entsprechenden Beispiele aus der Lernumgebung aus und befassen sich mit den dazugehörigen Arbeitsaufträgen.

Es soll unter anderem untersucht werden, ob sich unter den Lernenden verschiedene Nutzertypen ausmachen lassen. Außerdem dienen die aufgeworfenen Forschungsdesiderata als Grundlage für weitere Fragen, denen in der geplanten Studie nachgegangen werden soll. Somit soll insgesamt ein Beitrag zu der Frage erbracht werden, inwieweit Lösungsbeispiele gewinnbringend für die individuelle Förderung einsetzbar sind.

Literatur

Betrancourt, M. (2005): The Animation and Interactivity Principle in Multimedia-Learning. In: Mayer, R. (Hrsg.): The Cambridge Handbook of Multimedia Learning. New York: Cambridge University Press, 287-296.

Chi, M., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P. & Glaser, R. (1989): Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. In: Cognitive Science, 13, 145-182.

Griesel, H., Postel, H. & Suhr, F. (2007): Elemente der Mathematik 5. Braunschweig: Westermann.

Mayer, R. (Hrsg.) (2005): The Cambridge Handbook of Multimedia Learning. New York: Cambridge University Press.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg: Spektrum.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002): Learning to prove: The idea of heuristic examples. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34(1), 29-35.

Renkl, A. (1997): Learning from worked-out examples: A study on individual differences. In: Cognitive Science, 31, 1-29.

Renkl, A. (1999): Lernen aus Lösungsbeispielen. In: Perleth, C. & Ziegler, A. (Hrsg.): Pädagogische Psychologie – Grundlagen und Anwendungsfelder. Göttingen: Hans Huber Verlag, 247-256.

Sweller, J. & Cooper, G. (1985): The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra. In: Cognition and Instruction, 2, 59-89.

Sweller, J. (1994): Cognitive Load Theory, Learning Difficulty, and Instructional Design. In: Learning & Instruction, 4, 295-312.

Zhu, X. & Simon, H. (1987): Learning Mathematics from Examples and by Doing. In: Cognition and Instruction, 4, 137-166.

Ingolf SCHÄFER, Göttingen

Vorstellung von Mathematiklehramtsstudieren zur Stetigkeit

Eine typische Vorstellung zur Stetigkeit, die in der Schule erworben wird, ist sicher die eines Graphen, den man in einem Zug durchzeichnen kann ohne den Stift abzusetzen. In diesem Beitrag geht es um die Frage, welche zusätzlichen Vorstellungen es gibt und inwieweit zukünftige Lehrkräfte diese selbst haben oder mit ihnen umgehen können.

Vorstellungen zur Stetigkeit in der Literatur

Wir beschränken uns hier auf zwei verschiedene Ansätze zum Thema Vorstellungen: das Konzept der Grundvorstellungen im Sinne von vom Hofe (1995) und die von Tall und Vinner (1981) eingeführten Begriffe *concept definition* und *concept image*. Bei den letzteren handelt es sich um einen kognitiv motivierten Ansatz, Vorstellungen zu mathematischen Begriffen zu fassen. Unter *concept image* verstehen Tall und Vinner „the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes.“ Im Gegensatz dazu ist die *concept definition* eine verbale Beschreibung, die einen Begriff definiert.

In ihrer Untersuchung von 41 Schülerinnen und Schülern, die einen A-level Mathematikkurs in den USA besuchten und deren Noten entweder „gut“ oder „sehr gut“ waren, fanden Tall und Vinner die folgenden drei *concept images:* „Der Graph ist in einem Stück gegeben“, „Die Funktion ist durch eine Formel gegeben“ (d.h. ein geschlossener Ausdruck ohne Fallunterscheidung) und „Es gibt keine Sprünge“. Tall und Vinner sehen in diesen *concept images* eine wesentliche Hürde für das Verstehen der im Kurs verwendeten Epsilon-Delta-Definition der Stetigkeit. Des Weiteren weisen sie auf die in allen diesen Vorstellungen implizit liegende Annahme des Fehlens von Definitionslücken hin.

In neueren Arbeiten propagiert Tall (2009) das *concept image* „lokal flach“ für Stetigkeit, also in genügender Vergrößerung scheint der Graph einer nicht zu komplizierten stetigen Funktion flach zu verlaufen. Inwieweit dieses mentale Bild des Stetigkeitsbegriffs allerdings empirisch vorhanden ist, bleibt unklar. Insbesondere scheint es sehr an die Behandlung mit grafischen Taschenrechnern oder mit Computer-Software gebunden zu sein, die entsprechende Graphen zeichnen und vergrößern können.

Das aus der stoffdidaktischen Tradition stammende Konzept der Grundvorstellungen nach vom Hofe (1995) bietet hier einen weiteren Ansatz. Vereinfacht zusammengefasst sind Grundvorstellungen die Vorstellungen, die man dazu benötigt, eine Sachsituation in Mathematik umzusetzen und umgekehrt.

Durch Analyse der einschlägigen Lehrbücher der Analysis finden sich m.E. drei mögliche Grundvorstellungen für stetige zahlwertige Funktionen, die auf Teilbereichen der reellen Zahlen definiert sind:

1. Kontrollierte Stabilität unter Wackeln an einem Punkt (ableitbar aus der Epsilon-Delta-Definition)
2. Approximierbarkeit an einem Punkt (ableitbar aus der Folgendefinition)
3. Zusammenhang des Graphen (ableitbar aus der Zwischenwerteigenschaft)

Dabei handelt es sich bei den ersten beiden um lokale Vorstellungen, während die letzte globaler Natur ist. Die topologische Definition über Urbilder offener Mengen in diesem Fall keine Grundvorstellung, denn die damit eventuell verknüpften Handlungsvorstellungen stimmen zumindest lokal mit denen des „Wackelns“ überein.

Aufbau der Studie

Die nachfolgend beschriebene Studie wurde mit 54 Studierenden des gymnasialen Lehramts für Mathematik in deren zweiten Semester im Rahmen der Vorlesung „Differential- und Integralrechnung 2“ per Fragebogen durchgeführt. Die Forschungsfragen waren dabei: Welche Vorstellungen haben Lehramtsstudierende zur Stetigkeit und inwieweit akzeptieren sie gewisse Vorstellungen zur Stetigkeit und können damit argumentieren?

Der Fragebogen bestand aus der Aufforderung eine eigene Vorstellung zur Stetigkeit zu formulieren, verschiedene Vorstellungen zur Stetigkeit auf einer Likert-Skala nach persönlicher Akzeptanz zu bewerten und mit möglichst vielen verschiedenen Vorstellungen zu argumentieren, ob bei drei Funktionen in einem bestimmten Punkt Stetigkeit vorliegt.

Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse des Fragebogens kurz dargestellt. Die Frage nach der Vorstellung zur Stetigkeit ergab dabei (Tabelle 1), dass die Grundvorstellungen im Wesentlichen die Antwortkategorien abdecken, wenn man die Vorstellung „keine Sprünge“ als Unterkategorie von Zusammenhang und „rechtsseitiger Limes=linksseitiger Limes“ als Approximierbarkeit deutet.

Kategorie	Absolut	Prozentual
Kontrolliertes Wackeln	14	26%
Approximierbarkeit	8	15%
Zusammenhang des Graphen	44	81%
Urbilder offener Mengen offen	2	4%

Tabelle 1: Kategorien bei Frage nach Vorstellungen zur Stetigkeit (n=54, mehrfache Nennung möglich)

Die Frage, inwieweit die Studierenden mehrere Vorstellungen äußeren, ergibt folgendes Bild: 5 (9%) Studierende haben keine Vorstellung geäußert, 31 (57%) haben nur eine Vorstellung geäußert (mehrheitlich dabei aus der Zusammenhang-Kategorie) und 18 (33%) Studierende äußerten mehr als eine Vorstellung. Für die Kategorisierung spielte dabei keine Rolle, ob die Vorstellung auch korrekt formuliert war. In dieser Hinsicht war das größte Problem, dass Funktionen mit Definitionslücken von 17% der Teilnehmer explizit als unstetig angesehen wurden.

Wie in Diagramm 1 zu sehen, sieht es bei der Akzeptanz bestimmter Vorstellungen etwas anders aus: Durchzeichenbarkeit wird sehr stark akzeptiert, die Approximationsvorstellung noch mehrheitlich akzeptiert, während das kontrollierte Wackeln sogar etwas mehr abgelehnt wird.

Diagramm 2 zeigt, inwieweit die Studierenden verschiedene Vorstellungen zur Stetigkeit bei konkreten Funktionen nutzen können, wobei Untervorstellungen extra aufgeführt wurden. Die Aufgabenstellung war dabei so, dass dazu aufgefordert wurde, mit möglichst vielen verschiedenen Vorstellungen zu argumentieren. Bei F1 handelt es sich um eine Treppenfunktion in der Sprungstelle, bei F2 und F3 um die Funktion, welche die Identität auf den irrationalen Zahlen und Null auf den rationalen Zahlen ist, im Punkt 0 (bei F2) beziehungsweise 1 (bei F3). Offenbar gelingt der Mehrzahl den Studierenden eine korrekte Argumentation nur bei der ersten Funktion, während bei F2 und F3 nur wenige Antworten vorliegen.

Diskussion

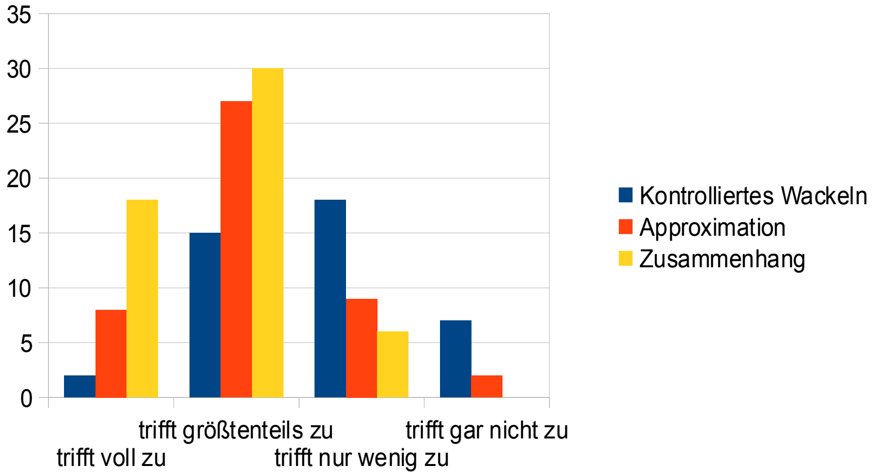
Zusammengefasst zeigt sich, dass zwei Drittel der Studierende nur die Zusammenhangs-Vorstellung nennen und die meisten mit mehreren Vorstellungen nur in der Situation eines einfachen Sprungs umgehen können. Bemerkenswert ist, dass die Epsilon-Delta-Definition der Stetigkeit scheinbar nicht als Träger von Vorstellungen oder Anschauen erkannt wird. Hier liegt ein Potenzial, das in den Vorlesungen zur Analysis nicht angesprochen wurde. Berücksichtigt man die für das Abitur geforderten Kompetenzen zur Stetigkeit in einigen Bundesländern stellt sich die Frage, ob die zukünftigen Lehrerinnen und Lehrer diese auch kompetent unterrichten können.

Literatur

Tall, D. (2009): Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. ZDM 41 (4), 481–492.

Tall, D. & Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

vom Hofe, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum



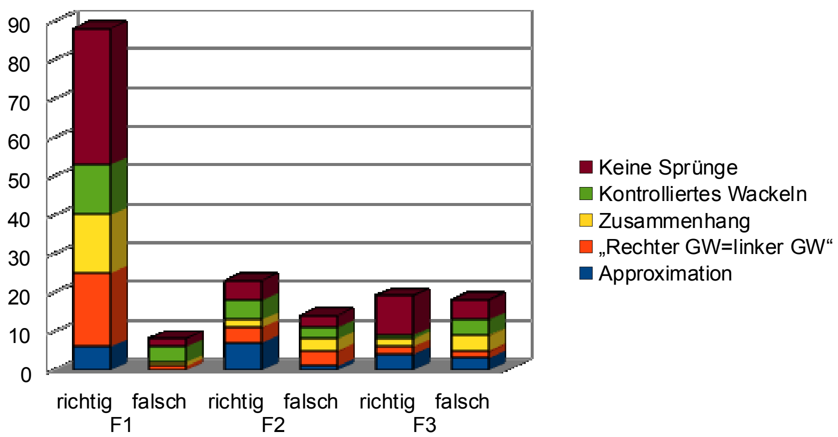


Diagramm 1: Akzeptanz von Vorstellungen zur Stetigkeit (n=54)

Diagramm 2: Vorstellungen bei Lösung von Stetigkeitsfragen (n=54, mehrfache Antworten möglich)

Alexandra SCHERRMANN, Christine BESCHERER, Ludwigsburg, Christian SPANNAGEL, Heidelberg

Der Cognitive-Apprenticeship-Ansatz am Beispiel der Auswertung von Daten

1. Einleitung

„Wie kommt der Mittelwert von drei Stunden Fernsehen am Tag zustande?" – so fragten Watson und Moritz (2000) australische Kinder und Jugendliche. Anhand der Auswertung von über 90 Schülerinterviews der Klassen 3 – 9 konnten sie im Längsschnitt einen Entwicklungspfad nachzeichnen: auf einem vorstrukturellen Niveau erfanden die Schüler Geschichten – etwa über eine geheime Kamera, welche die Leute beim Fernsehen beobachten würde. Die Vorstellung, dies sei der „typische", „normale" Fernsehkonsum kategorisierten Watson und Moritz als unistrukturelles Niveau, da hier (noch) nicht von einem tiefer gehenden Verständnis des arithmetischen Mittels ausgegangen werden kann. Erst wenn dieses vorliegt, können Schüler den Mittelwert als Repräsentant des gesamten Datensatzes sehen. Auf diesem relationalen Niveau ist die Einsicht vorhanden, dass der Mittelwert selbst kein Wert des Datensatzes sein muss und er nichts über die Verteilung und die Spannweite der Werte aussagt. Durch derartige qualitative Studien konnte ein umfassender Einblick in statistische Konzepte von Kindern und Jugendlichen gewonnen werden. Es zeigt sich, dass es viele Jahre braucht bis Schüler zu einem elaborierten Konzept gelangen (Watson & Moritz, 2000). So stellt sich die Frage, wie der Aufbau eines adäquaten Verständnisses über Datensätze, Kennwerte und ihre Veranschaulichung im Unterricht gefördert werden kann? Eine mögliche Lösung wird im Projekt „KoMM – Kognitive Meisterlehre beim Mathematiklernen" innerhalb des fächer- und hochschulübergreifenden Promotionskollegs zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Lernens (www.mnwkolleg.de) erarbeitet.

2. Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern bei der Datenanalyse

Statistische Konzepte und die deskriptive Datenanalyse fanden in den letzten Jahren Eingang in die deutschen Bildungspläne. Die amerikanische und australische Entwicklung der Curricula läuft dabei einige Jahre voraus, so dass insbesondere aus diesem Raum Forschungsergebnisse vorliegen. Shaughnessy (2007) analysierte die Statistik-Items, die innerhalb der Schulleistungstests „National Assessment of Educational Progress" (kurz: NAEP) vom US-amerikanischen Bildungsministerium in den Klassen 4, 8 und 12 gestellt werden. Zwischen 1996 und 2003 stellte Shaughnessy (2007) eine durchaus wünschenswerte Gesamtentwicklung fest: Die Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler, zwischen Median und arithmetischem Mittel zu unterscheiden, nahm über die Jahre signifikant zu. Bei stark streuenden Daten gelang es im Jahr 2003 jedoch nur rund einem Fünftel der Schüler, den Median als angemessenen Repräsentanten auszuwählen. Hinsichtlich der Leistungen bei komplexen Items, die Interpretationen oder Anwendungen von Informationen aus Tabellen und Grafiken verlangten, konnte zwischen den Jahren 2000 und 2003 keine Steigerung festgestellt werden – in diesem Bereich wird sogar eine Erosion befürchtet (Shaughnessy, 2007). Der Weg zu einem elaborierten Verständnis von statistischen Konzepten ist – wie die obigen Forschungen zeigen – steinig und weit. Deshalb benötigen Schülerinnen und Schüler tragfähige und vielfältige Erfahrungen in diesem Bereich. Dies spricht dafür, das Thema bereits frühzeitig anzugehen. Dementsprechend hat die KMK 2004 entsprechende Kompetenzen in den Bildungsstandards bereits für die Grundschule formuliert, die in der Sekundarstufe weitergeführt werden. Sowohl die (normativen) Vorgaben der KMK als auch die auf der deskriptiven Ebene vorliegenden Forschungsergebnisse sind wegweisend, bringen jedoch keine konkreten Vorschläge für die Unterrichtspraxis hervor. Hierfür braucht es Entwicklungsarbeit, die darauf aufbauend ein Unterrichtskonzept erarbeitet, im Mathematikunterricht einsetzt und evaluiert. Genau dies erfolgt im Projekt „KoMM - Kognitive Meisterlehre beim Mathematiklernen“ für die 8.Klassenstufe.

3. Der Cognitive-Apprenticeship-Ansatz

Die Übersetzung „Kognitive Meisterlehre“ wirkt etwas sperrig, ist aber dennoch die adäquateste Übertragung ins Deutsche für den Cognitive-Apprenticeship-Ansatz, der erstmals von Collins, Brown und Newman (1989) als Rahmenkonzept zur Entwicklung von Lernumgebungen ausformuliert wurde. Sie charakterisieren Lernumgebungen mit Hilfe der vier Dimensionen Inhalt, Methoden, Abfolge und Lernsoziologie. Bislang wurde der Ansatz häufig in E-Learning-Szenarien angewandt und evaluiert (z.B. Dickey, 2007). Insbesondere die Dimension „Methoden“ mit seinen Elementen modeling, coaching, scaffolding, fading, articulation, reflection und exploration wurden dabei umgesetzt. Unter modeling wird dabei das Vormachen durch die Lehrperson verstanden. Dabei geht es vor allem um das Externalisieren von Gedanken und Prozesswissen. Hier ist zu betonen, dass auch der Umgang mit Umwegen und Sackgassen demonstriert werden soll. Diese Modeling-Phase und die Phase der individuellen Lernerunterstützung durch coaching und scaffolding (eine Stützstruktur zur

Verfügung stellen) kann in E-Learning-Szenarien besonders günstig umgesetzt werden: Beispielsweise kann, je nachdem welcher Button in der Software vom Benutzer gedrückt wird, die eine oder andere vorprogrammierte Hilfestellung erscheinen. Doch wie lässt sich die Lernerunterstützung im regulären Mathematikunterricht der Sekundarstufe I bei der Auswertung von Daten realisieren?

4. Cognitive Apprenticeship im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

Hier ist zunächst klarzustellen, dass die oben erwähnten Elemente der Dimension „Methoden“ nicht als Phasenabfolge verstanden werden sollen (Bescherer & Spannagel, 2009). Das modeling durch die Lehrperson ist im regulären Klassenzimmer noch relativ leicht umzusetzen. Am einfachsten erfolgt dies durch Phasen des Frontalunterrichts. Allerdings erhalten dann alle Schülerinnen und Schüler dieselben Instruktionen, was nicht in jeder Phase sinnvoll ist und nicht per se die kognitive Aktivierung des Individuums gewährleistet. Zudem taucht die Frage auf, wie die individuelle Lernerunterstützung durch coaching und scaffolding umgesetzt werden kann, da die Lehrperson nicht bei allen Schülern gleichzeitig sein kann. Hier könnten Lösungsbeispiele die Funktion eines Coachs bzw. einer Stützstruktur übernehmen. Diese sind besonders lernwirksam, wenn sie nach bestimmten Kriterien ausgearbeitet sind (vgl. Renkl, 2010). Das Ausblenden (fading) der Unterstützung kann z. B. umgesetzt werden, indem Lücken in den Lösungsbeispielen gelassen werden (completion problems). Für die Auswertung der Daten mit dem Computer innerhalb der Unterrichtseinheit werden kurze Filmsequenzen, welche die Abfolge der Schritte zeigen, die Funktion des Coachs bzw. der Stützstruktur übernehmen. Die Probleme des Expertise Reversal Effects und der Passung von Phasen der Exploration und Instruktion für die individuelle Lernerunterstützung (z.B. Kalyuga, 2007) weisen darauf hin, dass die Unterstützung nicht per se für Novizen und Experten gleichermaßen geeignet ist. Das Feedback, das die Lehrpersonen einzelnen Schülerinnen und Schülern in bestimmten Übungsphasen erteilt, ist eine weitere Möglichkeit des coaching und scaffolding. Da diese Feedbacks nicht präzise und konkret im Voraus ausformuliert werden können, bleibt nichts anderes, als dass die Lehrperson bestimmte Empfehlungen für die Formulierung von Rückmeldungen kennt und diese dann im Dialog mit dem einzelnen Schüler umsetzt. Solche Empfehlungen lassen sich zum Beispiel aus der jüngsten empirischen Bildungsforschung ableiten (z.B. Narciss, 2006).

5. Ausblick

Die Unterrichtseinheit „Auswerten von Daten“ nach dem methodisch-didaktischen Rahmen des adaptierten Cognitive-Apprenticeship-Ansatzes wird derzeit in verschiedenen achten Klassen der Realschulen Baden-Württembergs eingesetzt und auf seine Lernwirksamkeit unter Berücksichtigung von Vorwissen, Motivation und Interesse an Mathematik geprüft. Um Erkenntnisse darüber zu gewinnen, wie Schülerinnen und Schüler beim Aufbau eines adäquaten Verständnisses über Datensätze, Kennwerte und ihre Veranschaulichung (Boxplots) im Unterricht gefördert werden können, werden für diese Evaluationsforschung nach dem mixed-method-Design sowohl quantitativ ausgewertete Fragebogen als auch qualitative Verfahren wie beispielsweise die Analyse von Interviews und Expertengespräche genutzt.

6. Literatur

Bescherer, C., & Spannagel, C. (2009). Kognitive Meisterlehre beim Mathematiklernen. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Ed.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 43.Tagung für Didaktik der Mathematik (pp. 471–474).

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive Apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Writing, and Mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), Knowing, learning and instruction (pp. 453–494). Hillsdale: Associates.

Dickey, M. D. (2007). Barriers and enablers in integrating cognitive apprenticeship methods in a Web-based educational technology course for K-12 (primary and secondary) teacher education. Research in Learning Technology, 15(2), 119–130. Retrieved September 15, 2009.

Kalyuga, S. (2007). Expertise Reversal Effect and Its Implications for Learner-Tailored Instruction. Educational Psychology Review, (19), 509–539.

Narciss, S. (2006). Informatives tutorielles Feedback: Entwicklungs- und Evaluationsprinzipien auf der Basis instruktionspsychologischer Erkenntnisse. Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie: Bd.56. Münster: Waxmann.

Renkl, A. (2010). Gründe und Wege einer Synthese aus Strukturierung und Aktivierung: Das Konzept "Lernen aus Lösungsbeispielen". In T. Bohl, K. Kansteiner-Schänzlin, M. Kleinknecht, B. Kohler, & A. Nold (Eds.), Selbstbestimmung und Classroom-Management. Empirische Befunde und Entwicklungsstrategien zum guten Unterricht (pp. 191–205). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Shaughnessy, M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 957–1010). Charlotte, NC: Information Age Publ.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. Mathematical Thinking and Learning, (2), 11–50.

Thomas SCHILLER, Linz (A)

Wie der „dumme“ Computer Geraden in digitalen Bildern erkennen kann... Hough-Transformation als fächerübergreifendes Thema M/INF

Worum geht es?

Zu gutem Mathematikunterricht gehört das fächerübergreifende Arbeiten an Beispielen mit Realitätsbezug. Anhand derartiger Beispiele lernt man die sinnvolle Verwendung von mathematischen Mitteln kennen und erhöht zugleich die Motivation beim Lernen. Daher habe ich als Thema die automatisierte Strukturerkennung ausgewählt, die fächerübergreifend und projektartig in Mathematik und Informatik behandelt werden kann. Die Erkennung von Strukturen (z. B. Geraden) spielt überall eine Rolle, wo der Computer in Bildern Objekte (z. B. Schriftzeichen, Gesichter etc.) erkennen soll, z. B. beim automatisierten Identifizieren von Personen im eigenen elektronischen Fotoalbum oder bei der bei Handykameras der SchülerInnen integrierten Gesichtserkennungsfunktion.

Das menschliche Auge erkennt Strukturen (oder ganze Gegenstände) auch bei fehlenden zusammenhängenden Konturen, also wenn diese teilweise unvollständig vorliegen, weil sie etwa durch andere Gegenstände partiell verdeckt sind. (vgl. [Burger u. a._2006, S. 156]) Obwohl heute noch weitgehend unbekannt ist, wie die Mechanismen beim biologischen Sehen funktionieren, dass derartige Strukturen spontan erkannt werden können, gibt es eine mögliche Technik zur Lösung solcher Probleme mit dem Computer, nämlich die Hough- Transformation. [Burger u. a._2006, S. 156]

Bei der Aufbereitung dieser Methode zur Strukturerkennung für den Unterricht (sowohl für Mathematik als auch Informatik) wurde dem Thema entsprechend viel Wert auf Computereinsatz (Tabellenkalkulation, Computeralgebrasystem, dynamische Geometriesoftware, …) gelegt. Zum leichteren Verständnis wird bei den Beispielen zusätzlich der jeweilige fachliche Hintergrund erläutert.

Die Strukturerkennung ist im Unterricht aus Komplexitätsgründen am ehesten mit Schwarz- Weiß- Bildern durchzuführen, welche man in der Realität etwa mit Hilfe eines Kantenerkennungsalgorithmus erhält. Man geht also von einem Bild aus, das aus schwarzen Hintergrundbildpunkten besteht, auf denen sich weiße Pixel befinden, die ein Objekt (z. B. eine Gerade) darstellen. (Weiteres zur Kantenerkennung ist z. B. unter [Burger u. a._2006] bzw. [Tönnies_2005] (siehe z. B. [Schiller_2010]) zu finden.)

Hough- Transformation zur Geradenerkennung als Beispiel für die Erkennung von Strukturen

Eine Gerade im zweidimensionalen Raum wird durch zwei Parameter beschrieben, etwa in der Form $y = k * x + d$ (mit der Steigung k und der Höhe d des Schnittpunks der Geraden mit der y- Achse). Wenn nun eine Gerade durch zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ läuft, muss sie die beiden Gleichungen $y_1 = k * x_1 + d$ und $y_2 = k * x_2 + d$ für jeweils ein bestimmtes k und d erfüllen. [Burger u. a._2006, S. 156f]

Die Hough- Transformation geht von einem Kantenpixel aus und betrachtet alle möglichen Geraden durch diesen Punkt. Für jede Gerade G_i, welche durch einen Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ läuft, gibt es geeignete Werte (k_i, d_i), welche die Gleichung $y_0 = k_i * x_0 + d_i$, welche die Gerade G_i repräsentiert, erfüllen. Für jede Gerade G_i gibt es nicht nur ein Lösungspaar (k_i, d_i), sondern eine Menge unendlich vieler Paare aus Steigungen k_i und zugehörigem d_i, also unendlich viele Geraden, die durch den Punkt P_0 gehen. [Burger u. a._2006, S. 157f]

Jedem Punkt P_s aus dem Bildraum wird also eine Gerade im Parameterraum zugewiesen. Umgekehrt wird jedem Punkt im Parameterraum eine Gerade im Bildraum zugeordnet. Genau dieser umgekehrte Weg ist für uns interessant, da wir uns für die Stellen interessieren, in denen sich Geraden im Parameterraum schneiden (Schnittpunkte im Parameterraum), denn zwei Punkte im Bildraum stehen für zwei Geraden im Parameterraum, deren Schnittpunkt (im Parameterraum) wiederum für eine Gerade im Bildraum steht, nämlich der Gerade, auf der die beiden ursprünglichen Punkte aus dem Bildraum liegen. Daraus folgt auch: Je mehr Geraden im Parameterraum sich in einem bestimmten Punkt schneiden, desto mehr Pixel liegen im Bildraum auf der entsprechenden Geraden. [Burger u. a._2006, S. 158f]

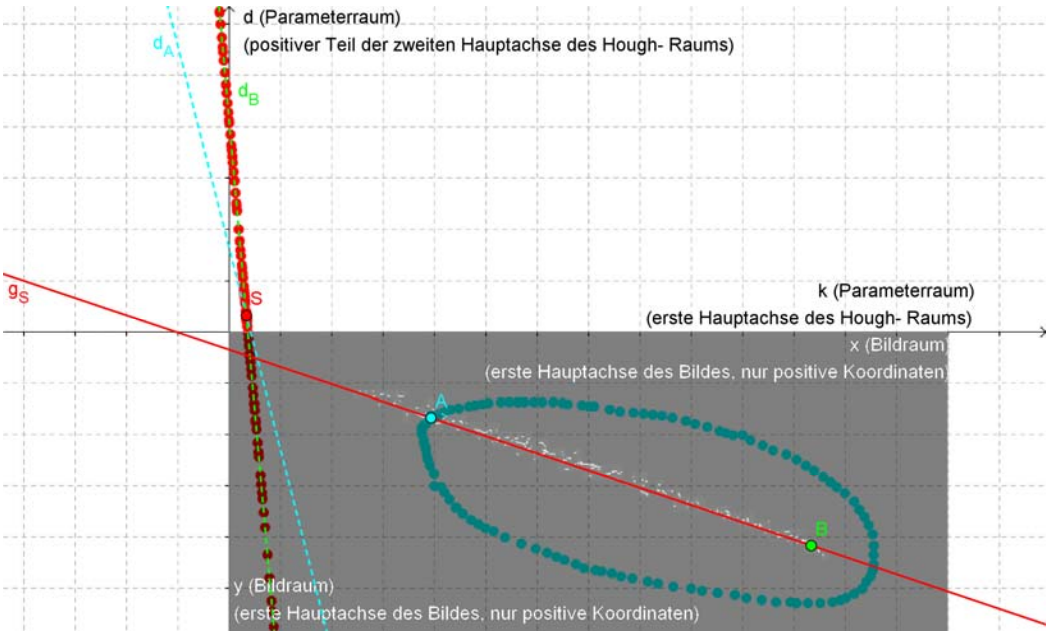
Um auffallende Geraden im Bild zu finden, müssen also im Parameterraum jene Punkte gefunden werden, in denen sich viele Geraden schneiden, was die Absicht der Hough- Transformation ist. [Burger u. a._2006, S. 159]

Modellierung in dynamischer Geometriesoftware

Die Situation lässt sich auch mit einer dynamischen Geometriesoftware veranschaulichen. Dies sollten die SchülerInnen selbstständig nach der Behandlung obiger Inhalte durchführen. Wichtig dabei ist die Verwendung von aussagekräftigen Variablennamen, da bei dieser Konstruktion zwei Koordinatensysteme in eines gezeichnet werden. Die Variablen und deren Zugehörigkeit zum jeweiligen Koordinatensystem bzw. die Zusammengehörigkeit von Objekten aus den unterschiedlichen Koordinatensystemen soll sofort gut erkennbar sein. Als Koordinatensystem für den Hough-

Raum bietet sich der erste, für den Bildraum der vierte Quadrant an, da bei digitalen Bildern der Ursprung üblicherweise im linken oberen Eck des Bildes liegt. Die Achsen sind natürlich entsprechend mehrfach zu beschriften (z. B. wird die x- Achse des Arbeitsblattes als k- Achse des Parameterraumes und als x- Achse des Bildraumes verwendet.

Wichtig ist, dass die SchülerInnen realisieren, dass sie bei der Konstruktion nicht die in der Theorie behandelten Formeln und funktionalen Zusammenhänge einfach 1:1 übernehmen, denn bei der hier vorgeschlagenen Wahl der Koordinatensysteme sind etwa positive y- Koordinaten aus Sicht des Bildes (Bildraum) aus Sicht der Geometriesoftware negativ. Das ist auch gut so, da dadurch mathematisches Verständnis gefordert und gefördert wird. Die SchülerInnen müssen sich in die Situation hineindenken und können nicht einfach blind auf (nicht verstandene) Formeln zurückgreifen.



In der dynamischen Geometriesoftware lassen sich Experimente durchführen, die zum Verständnis beitragen, was auf Grund der unterschiedlichen Betrachtungsweisen der Geradengleichung und der verschiedenen Koordinatensysteme nicht so einfach ist. „Wenn wir die Position des Punktes A verschieben, was passiert dann mit dem Schnittpunkt S?“ Die SchülerInnen könnten dabei zuerst auf Grund der Theorie Überlegungen anstellen, was mit S genau passieren wird, bevor sie es ausprobieren. Umgekehrt macht es genau so viel Sinn, zuerst zu experimentieren und dann das Beobachtete mit Hilfe der Theorie zu begründen. Bei diesem Beispiel wird man feststellen, dass sich (wie in obiger Abbildung dargestellt) der Schnittpunkt S der zu den Bildpunkten A und B gehörigen Geraden d_A und d_B immer auf der Geraden d_B entlang bewegt, da durch die Veränderung von A sich die zugehörige Gerade d_A per Definition mit verändert, B und d_B hingegen unberührt bleiben. Im Bildraum werden durch das Verschieben von A um B herum alle möglichen Geraden, welche durch den Punkt B verlaufen können, erreicht. Genau diese Menge von Geraden durch einen Bildpunkt wird im Hough- Raum als Gerade d_B verstanden, weshalb sich der Schnittpunkt also entlang dieser Geraden d_B bewegt.

Die in der Konstruktion erkennbare Tatsache, dass die Punkte A und B tatsächlich auf der konstruierten Geraden liegen, lässt sich auch rechnerisch überprüfen. Dabei ist mit den allgemeinen Geradengleichungen zu rechnen. Für diesen Beweis ist der Einsatz eines Computeralgebrasystems empfohlen, er kann aber auch durch händische Termumformungen erfolgen.

Experimentieren mit einer fertigen Erkennungsroutine

Die Grundidee der Hough- Transformation lässt sich also im Unterricht durch selbstständiges Arbeiten, Überlegen, Visualisieren, Experimentieren und Diskutieren vermitteln. Greift man im Anschluss daran auf einen fertigen Programmcode (z. B. [Burger u. a._2009]) zurück, so kann man damit noch die Erkennung praktisch analysieren. Beispielsweise kann von einer Punktewolke ausgegangen werden, die einer Geraden ähnelt, und der Algorithmus darauf angewendet werden, um die Funktionsweise zu testen. Weitere Experimente, z. B. mit unterschiedlich intensiven Punktewolken (Geraden) verdeutlichen dann den SchülerInnen, wie schwierig es für den Computer letztendlich dennoch ist, die für den Menschen sofort sichtbaren tatsächlichen Geraden unterscheiden zu können. Je nach verwendeter Software, lassen sich die Ergebnisse bildlich betrachten, aber auch in Form von Parameterwerten ausgeben und (z. B. in einem Tabellenkalkulationsdokument) analysieren, um die in der Realität vorkommenden Probleme (z. B. Ungenauigkeiten auf Grund der Diskretisierung) genauer betrachten und verstehen zu können.

Literatur

[Burger u. a._2006] Burger, W.; Burge, M. J.: Digitale Bildverarbeitung, Eine Einführung mit Java und ImageJ, 2. Überarbeitete Auflage, Springer- Verlag Berlin Heidelberg 2005 und 2006; ISBN 978-3-540-30940-6 (Print) bzw. 978-3-540-30941-3 (Online) (SpringerLink), ISBN-13 978-3-540-30940-6

[Burger u. a._2009] Implementierung der Hough-Transformation bei den Materialien zum Buch [Burger u. a._2006] von www.imagingbook.com (am 01.02.2009)

[Tönnies_2005] Tönnies, K. D.: Grundlagen der Bildverarbeitung, Pearson Studium, 2005, ISBN 3-8273-7155-4

[Schiller_2010] Schiller, T.: Kennzeichenerkennung und digitale Bildverarbeitung als fächerübergreifendes Thema M/INF; in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, für die GDM herausgegeben von Anke Lindmeier und Stefan Ufer, WTM-Verlag, ISBN 978-3-942197-03-8

Florian SCHIMPF, Ludwigsburg, Christian SPANNAGEL, Heidelberg

Was guckst Du? Ein Schulexperiment mit dynamischer Geometriesoftware in der Realschule

1. Einleitung

Der Bildungsplan des Landes Baden-Württemberg für die Realschule sieht unter der Leitidee Form und Raum den Einsatz von dynamischen Geometriesystemen (DGS) vor. Im Gegensatz zur konventionellen „Papiergeometrie“ lassen sich in einem DGS zum Beispiel mit dem Zugmodus die Ausgangspunkte einer Konstruktion nachträglich bewegen und dadurch die geometrischen Objekte verändern. Dies ermöglicht exploratives Arbeiten an geometrischen Fragestellungen.

Wie viele andere Computeranwendungen auch, werden DGS über eine graphische Benutzungsoberfläche (*graphical user interface*, GUI) bedient. Es kann vermutet werden, dass die Vielzahl von Bildzeichen (Icons) der GUI die Arbeit mit dem DGS und dadurch letztlich auch das Erlernen mathematischer Sachverhalte erschwert. In einem Experiment an drei Realschulen in Baden-Württemberg haben Schüler von 6 Schulklassen mit zwei verschiedenen Versionen des DGS Cinderella die Winkelsummen von n-Ecken berechnet. Im Gegensatz zur Originaloberfläche von Cinderella mit 42 Icons kam eine reduzierte GUI mit den für die spezifische Aufgabe notwendigen sechs Icons zum Einsatz. Dabei wurde der Frage nachgegangen, ob die Programmversion mit der reduzierten Benutzungsoberfläche das Arbeiten mit dem DGS und dadurch auch das Verständnis der mathematischen Inhalte erleichtert. In dem Artikel werden die Ergebnisse des Schulexperimentes vor dem Hintergrund weiterer Forschungen zur Reduktion von Benutzungsoberflächen dargestellt und diskutiert.

2. GUI-Reduktion

Die Reduzierung graphischer Benutzungsoberflächen hat ihre Ursprünge in *training wheels interfaces*, die von Carroll und Kollegen in den 1980er Jahren entwickelt wurden (Carroll & Carrithers, 1984; Carroll, 1984). Damals wurden Menüelemente nicht ausgeblendet, sondern lediglich inaktiv geschaltet. Carroll wollte dadurch verhindern, dass Novizen durch die Auswahl eines Menüpunkts das Software-Programm in einen Zustand bringen, aus dem sie selbst nicht wieder herausfinden. Exploratives Verhalten sollte also gefördert werden, indem Sicherheit durch eine Lernumgebung mit geringerer Komplexität geboten wird. Es wurden in Studien positive Effekte auf das Lernverhalten und den Lernerfolg festgestellt. Fragwürdig bleibt aber, ob die Ergebnisse von damals auf die heutigen Benutzungsoberflächen übertragbar sind, zumal der Umgang mit Computeranwendungen und graphischen Benutzungsoberflächen heute bereits zum Alltag vieler Menschen zählt.

Heutzutage ist es üblich, nicht benötigte oder nicht zu verwendende Icons auszugrauen oder gar nicht erst anzuzeigen (Spannagel & Schroeder, 2008). Das Ausblenden irrelevanter Information wird beispielsweise in der Theorie des Multimedialernens gefordert (*Kohärenzprinzip*; Mayer, 2001). Hierdurch soll derjenige Teil der kognitiven Beanspruchung, der irrelevant für das Lernen ist, minimiert werden (*extraneous cognitive load*), und dadurch sollen kognitive Ressourcen für das Erlernen der wesentliche Inhalte geschaffen werden (*germane cognitive load*; Sweller, van Merriënboer & Paas, 1998). Dabei empfiehlt es sich, die Reduktion der Schnittstelle schrittweise zurückzunehmen (*fading*; Leutner, 2000), um der steigenden Expertise der Lernenden gerecht zu werden und dem *expertise reversal effect* vorzubeugen (Kalyuga et al., 2003).

Es kann vermutet werden, dass durch das Ausblenden von Icons und die damit einhergehende Vereinfachung der Benutzungsoberfläche kognitive Ressourcen freigegeben werden, die für das Verständnis der mathematischen Inhalte zur Verfügung stehen. In einem Schulexperiment mit Tabellenkalkulation konnte kein Effekt von reduzierten Benutzungsoberflächen nachgewiesen werden (Spannagel et al., 2007). Allerdings wurde in diesem Experiment auch zusätzlich die Verwendung animierter Demonstrationen untersucht, sodass Effekte der GUI-Reduktion aufgrund des starken Einflusses der Videos untergegangen sein konnten. In dem vorliegenden Artikel wurde erneut ein Schulexperiment mit dem DGS Cinderella durchgeführt, das der ausschließlichen Untersuchung der Effekte der Oberflächenreduktion diente (Schimpf & Spannagel, in press).

3. Experiment

An dem Experiment nahmen insgesamt 171 Schülerinnen und Schüler aus 6 Realschulklassen (Jahrgangsstufe 8) im Großraum Stuttgart teil. Das Experiment wurde in zwei Gruppen durchgeführt (volle Benutzungsoberfläche versus reduzierte Benutzungsoberfläche), und die Schülerinnen und Schüler jeder Klasse wurden auf die beiden Gruppen randomisiert. Von den 171 teilnehmenden Personen konnten schließlich 134 vollständige Datensätze ausgewertet werden. In die Auswertung gingen die Daten von 77 Jungen und 57 Mädchen ein. 72 Schüler arbeiteten mit der vollen Benutzungsoberfläche von Cinderella, 62 mit der reduzierten Version.

Die Versuchspersonen wurden in beiden Bedingungen zunächst in die Bedienung der Lernumgebung eingeführt. Hierzu mussten sie einen Einführungstext mit Bildschirmfotos lesen. Später in der Lernumgebung hatten sie die Möglichkeit, nochmals auf einzelne Abschnitte dieser Einführung als Hilfe zuzugreifen. Die Aufgabe in der Lernumgebung bestand darin, die Innenwinkelsummen verschiedener n-Ecke zu bestimmen (Viereck bis Siebeneck). Hierzu mussten die n-Ecke konstruiert, die Winkel gemessen und die Winkelsumme berechnet werden. Darüber hinaus sollte mit dem Zugmodus überprüft werden, ob sich die Winkelsumme bei Veränderung des n-Ecks ändert oder gleich bleibt. Insgesamt waren zur Bewältigung der Aufgabe vier Icons notwendig, die in der reduzierten Schnittstelle dargeboten wurden. Darüber hinaus wurden noch die Undo- und Redo-Pfeile angezeigt. In der vollen Benutzungsoberfläche hingegen wurde das Standardinterface von Cinderella dargeboten (vgl. Abbildung 1).

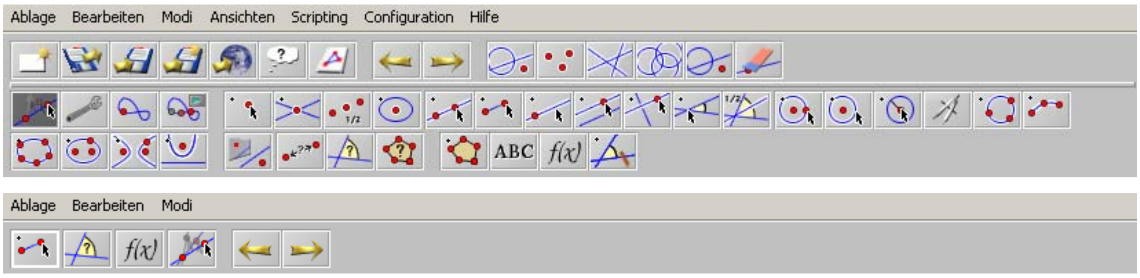


Abbildung 1: Volle und reduzierte Benutzungsoberfläche von Cinderella

Die Auswertung des Experiments zeigte keine signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Programmversionen (vgl. Schimpf & Spannagel, in press): Sowohl Mädchen als auch Jungen brauchten in beiden Programmversionen in etwa genau so lange, um die Aufgaben zu bearbeiten. Sie verbrachten in etwa gleich viel Zeit in der Einführung und in der Hilfe, und auch im Lernerfolgstest schnitten sie ähnlich ab.

Zusätzlich wurde noch der Einfluss der computerbezogenen Selbstwirksamkeitserwartung der Versuchspersonen untersucht (Spannagel & Bescherer, 2009). Auch die Computerselbstwirksamkeit interagierte nicht mit den beiden Programmversionen. Versuchspersonen mit niedriger Selbstwirksamkeit lasen aber signifikant länger in der Einleitung und griffen auch eine längere Zeit auf die Hilfe zu.

4. Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse sind konsistent mit weiteren Untersuchungen unter Nutzung eines Eye Trackers (Schimpf & Spannagel, 2010), in denen gezeigt wurde, dass reduzierte Oberflächen nur eine geringe Zeitersparnis bei der Suche nach Icons bringen. Trotzdem widerspricht dies der Intuition, dass reduzierte Schnittstellen das Lernen unterstützen sollten. In weiteren Experimenten wird der Einfluss der GUI-Reduktion hinsichtlich weiterer Kontextfaktoren untersucht.

5. Danksagung

Wir danken Irene Reeb Ramos für die Hilfe bei der Durchführung des Experiments. Dank gilt außerdem der BADEN-WÜRTTEMBERG Stiftung für die finanzielle Unterstützung der Forschungsarbeit im Rahmen des Eliteprogramms für Postdoktorandinnen und Postdoktoranden.

Literatur

Carroll, J. (1984). Blocking learner error states in a training-wheel system. Human Factors, 26 (4), 377-389.

Carroll, J., & Carrithers, C. (1984).Training wheels in a user interface. Communications of the ACM, 27(8), 800-806.

Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P. & Sweller, J. (2003): The expertise reversal effect. Educational Psychologist, 38(1), 23–31.

Leutner, D. (2000). Double-fading suppport – a training approach to complex software systems. Journal of Computer Assisted Learning, 16, 347–357.

Mayer, R. E. (2001): Multimedia learning. New York: Cambridge University Press.

Schimpf, F. & Spannagel, C. (2010): Wer suchet, der findet - Zur Oberflächenreduktion in DGS. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, 751-754.

Schimpf, F. & Spannagel, C. (in press): Reducing the graphical user interface of a dynamic geometry system. Erscheint in ZDM – The International Journal on Mathematics Education.

Spannagel, C. & Bescherer, C. (2009): Computerbezogene Selbstwirksamkeitserwartung in Lehrveranstaltungen mit Computernutzung. Notes on Educational Informatics - Section A: Concepts and Techniques 5(1), 23-43.

Spannagel, C., Girwidz, R., Löthe, H., Zendler, A. & Schroeder, U. (2008): Animated Demonstrations and Training Wheels Interfaces in a Complex Learning Environment. Interacting with Computers 20(1), 97-111.

Spannagel, C. & Schroeder, U. (2008): GUI-Adaptation in Lernkontexten. In S. Seehusen, U. Lucke & S. Fischer (Hrsg.): DeLFI 2008. Die 6. e-Learning Fachtagung Informatik der Gesellschaft für Informatik e.V. Bonn: Gesellschaft für Informatik, 281-291.

Sweller, J., Van Merriënboer, J., & Paas, F. (1998): Cognitive architecture and instructional design. Educational Psychology Review, 10, 251-296.

Maike SCHINDLER, Dortmund

Dem Anwenden mathematischer Begriffe auf der Spur – Eine Interviewstudie zum Begriff der negativen Zahl im Rahmen des Projekts KOSIMA

Im vorliegenden Beitrag wird der Frage nachgegangen, inwiefern es Schülerinnen[1] gelingt, individuelle mathematische Begriffe in verschiedenen Kontexten und Situationen anzuwenden. Da für Schülerinnen der Gebrauch mathematischer Begriffe als Werkzeuge zum Ordnen ihrer Welt und von Situationen von immenser Bedeutung ist, ist das Forschungsinteresse der dargestellten Studie, mit einem geeigneten theoretischen Rahmen detaillierte Einblicke zur Frage zu ermöglichen, inwiefern Schülerinnen individuelle Begriffe anwenden können und welche Schwierigkeiten sich dabei zeigen.

Die empirische Studie wurde in siebten Klassen einer Realschule und eines Gymnasiums in NRW durchgeführt. Zu einer vorliegenden Unterrichtsreihe zur Einführung der negativen Zahlen, welche im Rahmen des Projekts KOSIMA entwickelt wurde (Hußmann 2013), lernten die Schülerinnen den Begriff der negativen Zahl zunächst im Kontext von Schulden und Guthaben kennen. Im Anschluss an die Erarbeitung der Addition und Subtraktion als Vor- und Rückschau wurden Aufgaben in weiteren Kontexten (Temperaturen, Höhen über/unter dem Meeresspiegel, etc.) bearbeitet. Im Rahmen der Studie wurden darüber hinaus halbstandardisierte Interviews zum Gebrauch des Begriffs der negativen Zahl in verschiedenen Kontexten durchgeführt, die vor, während und nach der Unterrichtsreihe stattfanden.

Im Rahmen dieser Studie werden individuelle mathematische Begriffe – in Abgrenzung zu konventionalen mathematischen Begriffen als mathematische Objekte – vor dem Hintergrund der inferentialistischen Theorie Brandoms (2001) betrachtet (vgl. Hußmann & Schacht 2009, Schacht 2011). Wesentlich für den gewählten inferentialistischen Zugang ist, dass individuelle Begriffe durch die Rekonstruktion von Festlegungen als kleinste Einheiten des Denkens und Handelns erfasst werden. *Festlegungen* sind rekonstruierte Behauptungen in propositionaler Form, die von der Schülerin für wahr gehalten werden und ihren (Sprech-)Handlungen zugrunde liegen. Charakteristisch für Festlegungen ist, dass sie inferentiell gegliedert sind: Sie werden für wahr gehalten, da sie auf subjektiv empfundenen Berechtigungen beruhen und können ihrerseits wiederum als Berechtigungen für weitere Festlegungen dienen. Im Lernprozess entstehen zu Begriffen – bspw. zum Begriff der negativen Zahl – inferentiell gegliederte

[1] Das generische Femininum bezieht sich in diesem Beitrag auf beide Geschlechter.

Festlegungsstrukturen, die sich fortwährend verändern. Diese Entwicklung der Festlegungsstrukturen wird als Begriffsbildung verstanden (vgl. Schacht 2011). Für die Analyse im Rahmen dieser Studie wird darüber hinaus die Theorie der Conceptual Fields (Vergnaud 1996) genutzt, welche neben theorems-in-action als subjektiv für wahrgehaltene Propositionen *concepts-in-action* stellt. Letztere werden verstanden als handlungsleitende Kategorien, als individuelle Begriffe, die die Schülerin als Werkzeug nutzt, um die in einer Situation gegebenen mannigfaltigen Informationen adäquat auszuwählen.

Die individuelle Situation, in der sich eine Schülerin befindet, der handlungsleitende Begriff sowie die Festlegung, die rekonstruiert werden kann, bilden ein Dreieck, welches eine Analyseeinheit für Begriffsbildungsprozesse darstellt (siehe Abb. 1).

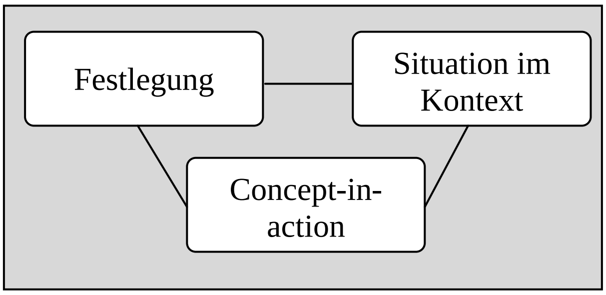


Abbildung 1 Analyseeinheit

Da der Fokus der Studie auf dem Gebrauch von Begriffen in Kontexten liegt, werden als weiterer theoretischer Hintergrund die Ebenen der Mathematisierung des Ansatzes der Realistic Mathematics Education (RME) betrachtet. *Vertikale Mathematisierung* wird dort verstanden als "all kinds of re-organizations and operations done by the students within the mathematical system itself" (van den Heuvel-Panhuizen 2003, 12). *Horizontale Mathematisierungsprozesse* finden statt, wenn mathematische Mittel aktiviert und genutzt werden, um ein Problem in einem bestimmten Kontext zu bearbeiten (vgl. ebd.). Vor dem Hintergrund des inferentialistischen Zugangs können vertikale Mathematisierungsprozesse als Neu- und Umstrukturierungen von Festlegungen, bspw. als Ausdifferenzierung oder als Vereinigung von Festlegungen betrachtet werden. Horizontale Mathematisierungsprozesse finden dann statt, wenn Schülerinnen in einem Kontext wie Schulden, Höhenmeter oder Temperaturen Festlegungen aktivieren und als Werkzeug nutzen können, welche zuvor in Festlegungsstrukturen im Bereich des Begriffs der negativen Zahl schon angebahnt wurden.

Dem Forschungsinteresse folgend wird im Rahmen dieser Studie fokussiert, inwiefern horizontale Mathematisierungsprozesse mittels der Analyse eines kontextübergreifenden Gebrauchs von Festlegungen und concepts-in-action rekonstruiert werden können. Es wird analysiert, inwiefern das Aktiveren und Anwenden von Festlegungen und concepts-in-action, welche bereits in einer Situation in einem vorherigen Kontext genutzt wurden, in einer Situation in einem neuen Kontext – also als eine „Übertragung“ von Kontext zu Kontext – gelingt (vgl. Abb. 2).

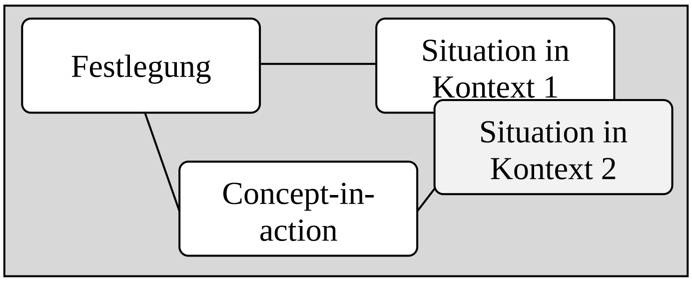


Abbildung 2 Analyseeinheit Kontextwechsel

Im folgenden Beispiel wird die Rekonstruktion des Begriffsgebrauchs einer Schülerin dargestellt, welche im Interview Aufgaben im Kontext Tordifferenzen in der Fußball-Bundesliga bearbeitete. Zuvor hatte sie in den Kontexten Schulden, Bergwerk, Temperaturen mit negativen Zahlen gearbeitet. Die Schülerin sollte die in Abbildung 3 dargestellten Platzierungen in der Tabelle deuten.

11	FC Schalke 04	18	6	4	8	25:25	0	22
12	1. FC Nürnberg	18	6	4	8	22:29	-7	22
13	SV Werder Bremen	18	6	4	8	25:36	-11	22

Abbildung 3 Ausschnitt aus der Fußball-Bundeliga-Tabelle

Auf die Frage der Interviewerin, warum die Vereine in dieser Reihenfolge in der Tabelle stehen, antwortete sie bezogen auf die Tordifferenzen in der Tabelle: *„Weil hier, die haben nur sieben Differenz also die haben, hm, also <u>die</u> (zeigt auf -11) haben sozusagen minus elf Grad und die (zeigt auf -7) minus sieben Grad also haben <u>die’s</u> (zeigt auf -7) noch wärmer als <u>die</u> (zeigt auf -11)“* Zudem äußerte sie: *„Weil, desto höher man geht, desto wärmer wird es (zeigt mit dem Stift von der Null nach oben) und desto tiefer man geht desto kälter wird es (zeigt mit dem Stift von der Null nach unten)“* und fertigte die in Abbildung 4 dargestellte Skizze an.

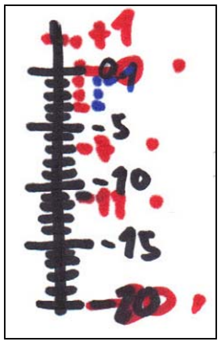


Abbildung 4 Skizze der Schülerin

Es lassen sich hieraus die Festlegung „Wenn eine Minuszahl einen kleineren Betrag hat als eine andere, dann ist es dort wärmer bzw. dann liegt sie höher.“ sowie als concept-in-action die Lage der negativen Zahlen auf der Zahlgerade rekonstruieren.

In den bereits vor dem Interview behandelten Kontexten konnte jeweils neben einem identischen concept-in-action bei der Schülerin auch die Festlegung rekonstruiert werden: „Wenn eine Zahl im Minusbereich einen kleineren Betrag hat als eine andere, dann liegt sie höher.“ Damit konnte rekonstruiert werden, dass horizontale Mathematisierungsprozesse als inferentielle Gliederung von Festlegungen zwischen Kontexten beschrieben werden können. Die Festlegung sowie das concept-in-action können offenbar in verschiedenen Kontexten angewendet werden (siehe Abb. 5).

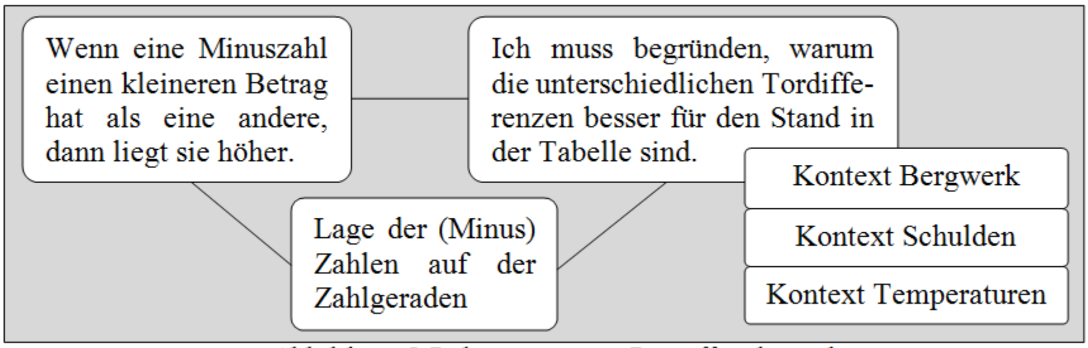


Abbildung 5 Rekonstruierter Begriffsgebrauch

Im Rahmen dieser Studie konnte der Gebrauch von Begriffen als Aktivierung und Übertragung von Festlegungen von Kontext zu Kontext rekonstruiert werden. Die ersten Ergebnisse lassen zudem erkennen, dass den Schülerinnen der Begriffsgebrauch negativer Zahlen in verschiedenen Kontexten vielfach gelang und inwiefern im Detail Schwierigkeiten im Gebrauch in neuen Situationen auftraten. Zudem zeigte sich u.a., dass ein Wechsel zu einem neuen Kontext den Schülerinnen die Möglichkeit bietet, sich auch i.S. vertikaler Mathematisierungsprozesse weiterzuentwickeln, was auch auf bereits bekannte Kontexte zurück übertragen werden kann. Der Frage, inwiefern Kontextwechsel in diesem Sinne als Lernchance genutzt oder für Schülerinnen als zusätzliche Lernhürde zunächst vermieden werden sollten, muss durch folgende Analysen weiter nachgegangen werden.

Literatur

Brandom, R. (2001): Begründen und Begreifen. Eine Einführung in den Inferentialismus. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Hußmann, S. (2013): Raus aus den Schulden – Negative Zahlen. In: S. Prediger & al. (Hrsg.): Mathewerkstatt 6. Berlin.

Hußmann, S. & Schacht, F. (2009): Toward an Inferential Approach Analyzing Concept Formation and Language Processes. Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France, 842-851.

Schacht, F. (2011): Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Theoretische Fundierungen und empirische Untersuchungen individueller Begriffsbildungsprozesse im Mathematikunterricht unter besonderer Berücksichtigung des Muster- und Variablenbegriffs. Dortmund, bisl. unveröffentlichte Dissertation.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003): The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. In: Educational Studies in Mathematics, 54, 9-35.

Vergnaud, G. (1996): The theory of conceptual fields. In L.P. Steffe & al. (Hrsg.): Theories of Mathematical Learning. Mahwah (NJ): Lawrence Erlbaum, 219-239.

Andrea SCHINK, Dortmund

Vom flexiblen Umgang mit dem Ganzen – Eine Studie zu Vorstellungen von Brüchen

1. Vorstellungsorientierter Umgang mit Brüchen als Ausgangspunkt

In empirischen Studien wird immer wieder festgestellt, dass der Umgang mit Brüchen Lernenden häufig schwer fällt: So wird z.B. der Kalkül in der Regel technisch gut beherrscht, während inhaltliche Vorstellungen häufig nur unzureichend mit Brüchen und Operationen verbunden werden (vgl. z.B. Prediger 2008, Padberg 2009).

Ausgangspunkt für die hier dargestellte Studie war eine Vorstudie zum Anteil vom Anteil im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojektes KOSIMA (vgl. Hußmann / Leuders / Barzel / Prediger in diesem Band). Hier erwies sich das Problem der unklaren Bezugsgröße / die Frage nach dem Ganzen als ein epistemologisches Hindernis für ein inhaltliches Verständnis der Multiplikation (vgl. Schink 2008). Die Bedeutung des Ganzen, des relativen Anteils und des damit verbundenen Operierens mit Einheiten als Voraussetzungen für einen flexiblen Umgang mit Brüchen sind dabei keine völlig neuen Erkenntnisse (vgl. z.B. Lamon 1996, Mack 2000). Die Notwendigkeit eines inhaltlichen Verständnisses für die Wahl des Ganzen, sowie dessen flexible Interpretation – auch vor der Multiplikation – zeigte sich in der Vorstudie jedoch besonders eindringlich.

2. Eine Studie zum flexiblen Umgang mit Brüchen

Für die sich anschließende Studie wurden sowohl halbstandardisierte Interviews mit 18 Lernenden aus Klasse 6 einer Gesamtschule, als auch ein schriftlicher Test mit 153 Schülerinnen und Schülern aus Klasse 7 verschiedener Schulformen durchgeführt. Die Wahl für die Interviews fiel auf Klasse 6, da diese Lernenden zwar bereits Erfahrungen zum Teil eines Ganzen gesammelt, den relativen Anteil jedoch noch nicht systematisch erarbeitet hatten und so noch über keine Standardverfahren zur Lösung der Aufgaben verfügten. Der Forschungsfokus lag daher auf den *Prozessen des Strukturierens*. Für den Test wurde Klasse 7 gewählt, da Lernende hier bereits vielfältige Erfahrungen zu Brüchen gemacht haben. Der Forschungsfokus lag hier auf der *Vielfalt der Bearbeitungen auf Produktebene*.

Es stellten sich die folgenden Forschungsfragen:

Wie gehen Lernende in unterschiedlichen Konstellationen mit Teil, Anteil und Ganzem um?

Inwiefern kann der Fokus auf den Umgang mit Teil, Anteil und Ganzem helfen, Hürden (im Lernprozess) zu erkennen und flexibel mit Brüchen umzugehen?

Für die Studie wurden Aufgaben eingesetzt, die sich in Anlehnung an die drei Grundaufgaben der Prozentrechnung jeweils einer *Konstellation* zuordnen lassen (vgl. z.B. Vollrath / Weigand 2007): Von den drei Größen Teil, Anteil und Ganzem sind jeweils zwei gegeben und die dritte gesucht. Zusätzlich wurden auch Aufgaben eingesetzt, bei denen der Vergleich zwischen zwei Konstellationen zentral war. Dabei dienten die Konstellationen hier nicht wie in der Prozentrechnung als Lernstoff für Lernende, sondern der didaktischen Analyse der Aufgaben und der Bearbeitungsprozesse.

Ein weiteres Kriterium für die Aufgaben war die *Qualität des Ganzen*. So wurden die Grundvorstellungen zu Brüchen (vgl. Padberg 2009), die Konstrukte vielfältiger möglicher Vorstellungen aus Vorschauperspektive sind, hinsichtlich des Ganzen betrachtet (vgl. auch Lamon 1996): diskret als Vereinigung einzelner Elemente (z.B. Bonbons), kontinuierlich unstrukturiert (z.B. Kreis) und kontinuierlich strukturiert als Zwischenweg (z.B. geschnittene Torte, bei der man die Fläche oder die Stückanzahl betrachten kann). Diese Unterscheidung erwies sich als fruchtbar, da ein Wechsel zwischen Sichtweisen häufiger beobachtbar war und Einfluss auf die Bearbeitungsprozesse der Lernenden nahm.

Der Fokus der sequenzanalytischen *Interviewanalysen* lag auf der Prozesshaftigkeit und den Strukturierungen von Teil, Anteil und Ganzem, die Lernende erarbeiteten, weiterentwickelten und nutzten. Sie wurden durch operative Vorgehensweisen beschrieben (vgl. z.B. Wittmann 1985), die sich als ein faszinierendes und tragendes Element der Bearbeitungsprozesse erwiesen. Bei der *Analyse der Testdaten* lag der Fokus auf der Untersuchung von Lernständen bzw. verpasster Lernchancen: Die Lösungen wurden hinsichtlich der Strukturierungen qualitativ theoretisch codiert und anschließend quantifiziert.

Beide Datenarten wurden aufeinander bezogen: Der Test diente sowohl zur Verbreiterung der Datenbasis, als auch zur Schärfung des Blicks für die Interviewanalyse. Die Interviews lieferten Ansätze für ein tieferes Verständnis der Strukturierungen auch in den schriftlichen Bearbeitungen.

3. Nutzen operativer Vorgehensweisen zur Bestimmung des Ganzen

Im Folgenden wird mit einem Interviewausschnitt zu der Aufgabe „6 Bonbons sind 2/3, was ist das Ganze?“ eine Schlüsselstelle im Bearbeitungsprozess zweier Sechstklässlerinnen Laura (L) und Melanie (M) dargestellt:

21 L Also 1/3, wenn das 1/3 wärn, wärns 6 mal 3 dann wären das 18´ - Dann wärn das 18 Bonbons - und - wenn das 2/3 wären – *[Pause 3 sec]*, wären das nicht eigentlich auch 18 Bonbons? Das würd auch nicht gehen.

…

29 L Joa aber es sollen ja, also er soll ja 2 /3. Also wenn das, wenn diese 6 Orangenbonbons da 3, 2/3 wären - dann …

30 M … Aber wenn man …

31 L …Würde man, würde man doch rein theoretisch die Hälfte *[leicht gedehnt]* von 18 nehmen; aber das würde wiederum gar nicht gehen, die Hälfte von 18 geht ja gar nicht.

32 M Die Hälfte von 18 ist 9.

In diesem Prozess sind die operativen Vorgehensweisen der Mädchen zur Erschließung der Lösung zentral: Vor allem Laura variiert die Konstellation immer wieder – sowohl zum Finden, als auch später zum Überprüfen des Ergebnisses. Dabei ist der Austausch des Anteils 2/3 in 1/3 ihre zentrale Vorgehensweise. Für diesen Stammbruch kann sie ein Verfahren zur Bestimmung des Ganzen aktivieren, das sie bereits zuvor im Interview für den Teil 6 und den Anteil 1/4 angewendet hat.

Von dem Ganzen für 1/3 schließt sie zunächst auch für 2/3 auf das Ganze 18, d.h. sie nimmt keine weitere Veränderung der Konstellation vor (Z. 21). Das Ergebnis revidiert sie direkt selbst. Im Anschluss gelingt es ihr, das Ganze für den Anteil 2/3 korrekt aus der 18 durch Halbieren abzuleiten (Z. 29/31; vgl. Abb. 1). Laura „gleicht“ hier operativ die Konsequenz des Verdoppelns des Anteils durch ein Halbieren des Ganzen „aus“. Ihre Bemerkung, die Hälfte von 18 „ginge nicht“ (Z. 31), bezieht sich, wie der weitere Verlauf zeigt, lediglich auf die Teilbarkeit der 18 durch 2.

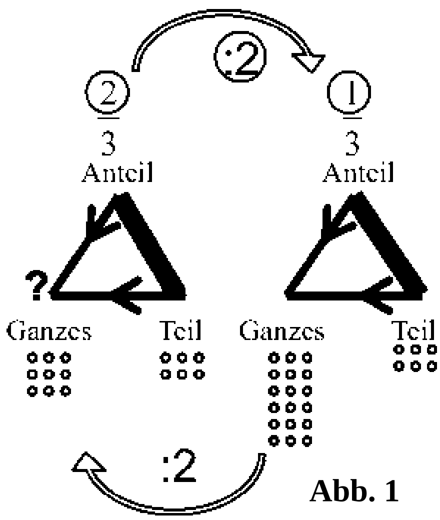


Abb. 1

Im Test konnten 41 der 153 Lernenden zu dieser Aufgabe einen tragfähigen Rechenweg angeben. Die Hauptschwierigkeit scheint dabei in der notwendigen Strukturierung der Konstellation durch den Zähler zu liegen.

4. Flexibles Strukturieren – Flexibler Umgang mit dem Ganzen

Dieser kleine Einblick wiederholt sich in anderen Teilen der Untersuchung: Die Vielfalt der Strukturierungen, die Lernende vornehmen, ist enorm. Dabei erweisen sich operative Vorgehensweisen als besonders fruchtbar: Das gezielte Auffordern zum Explorieren von Zusammenhängen kann zur Reflexion über implizite Annahmen beitragen und Lernchancen eröffnen, die über das Beherrschen von „Standardverfahren“ hinausgehen. Allerdings können im Strukturieren für Lernende auch Hürden stecken, wenn Zusammenhänge wie z.B. die Rolle des Zählers anders gedacht werden.

Lernende bringen eine Fülle an Vorstellungen mit. So können alltagsweltliche Vorstellungen vom Ganzen helfen, Sinn zu stiften, sie können sich aber auch als zu eng erweisen, wenn z.B. das Ganze als „schöne“ oder „heile“ Form interpretiert wird. Einige Lernende verbinden verschiedene Qualitäten vom Ganzen und wechseln zwischen ihnen selbständig, was sich als sehr fruchtbar erweisen kann. Gleichzeitig können sich hier aber auch Übersetzungsprobleme ergeben.

Der flexible Umgang mit dem Ganzen erweist sich somit als wichtig für einen verständnisorientierten Umgang mit Brüchen und bedeutet in diesem Verständnis: nicht immer nur den Anteil suchen, sondern schon von Anfang an verschiedene Konstellationen bearbeiten, zwischen ihnen mit operativen Vorgehensweisen wechseln und mit verschiedenen Qualitäten vom Ganzen umgehen können.

Einige dieser Aspekte wurden bereits für das Design von Lernumgebungen genutzt (z.B. Prediger / Schink / Schneider / Verschraegen 2012).

Literatur

Lamon, S. J. (1996): The Development of Unitizing: Its role in children´s partitioning strategies. In: Journal for Research in Mathematics Education, 27(2), 170-193.

Mack, N. K. (2000): Long-term effects of building on informal knowledge in a complex content domain: the case of multiplication of fractions. In: Journal of Mathematical Behavior. 19(3), 307-332.

Prediger, S. (2008): The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. In: Learning and Instruction, 18 (1), 3-17.

Prediger, S., Schink, A., Schneider, C. & Verschraegen, J. (in Vorbereitung 2012): Kinder weltweit – Anteile in Statistiken. Erscheint in: S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.): Mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Schink, A. (2008): Vom Falten zum Anteil vom Anteil – Untersuchungen zu einem Zugang zur Multiplikation von Brüchen. In: E. Vasarhelyi (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Münster: WTM Verlag, 697-700.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007[3]): Algebra in der Sekundarstufe. München: Spektrum.

Padberg, F. (2009[4]): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg: Spektrum.

Wittmann, E. C. (1985): Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: Mathematik lehren 11, 7-11.

Hanna SCHMERBECK, Essen, Katrin ROLKA, Wuppertal

„Mathe auf Englisch?“ – Möglichkeiten für den Einsatz einer Fremdsprache im Mathematikunterricht

Die Titelfrage bringt das Erstaunen zum Ausdruck, das oftmals geäußert wird, wenn vom Einsatz einer Fremdsprache im Mathematikunterricht die Rede ist. Es ist vielfach unstrittig, dass die Rolle von umfassenden Fremdsprachenkenntnissen zunehmend als eine Schlüsselqualifikation angesehen wird und dass der bilinguale Sachfachunterricht eine viel versprechende Möglichkeit darstellt, vertiefte und fachlich differenzierte Fremdsprachenkenntnisse zu erwerben. Allerdings wird in diese Überlegungen bislang nur selten der Mathematikunterricht einbezogen. Im Mittelpunkt des vorliegenden Beitrags steht die praktische Umsetzung eines bilingualen Mathematikprojektes mit Schülerinnen und Schülern einer Gesamtschule.

1. Bilingualer Sachfachunterricht

Im bilingualen Sachfachunterricht werden über den traditionellen Fremdsprachenunterricht hinaus auch Phasen des Fachunterrichts in einer Fremdsprache erteilt. In der Regel handelt es sich hierbei um gesellschaftswissenschaftliche Fächer, wie Geschichte, Geographie, Sozialwissenschaften. Dem Fach Mathematik wurde in diesem Zusammenhang bislang kaum Beachtung geschenkt.

Allerdings birgt das Fach Mathematik sowohl sprachliches als auch interkulturelles Potenzial und bietet dementsprechend Möglichkeiten für den Einsatz einer Fremdsprache. Es gibt insbesondere im anwendungsbezogenen Mathematikunterricht vielfältige Redeanlässe für die Schülerinnen und Schüler, bei denen sowohl die Fach- als auch die Alltagssprache gefordert und gefördert werden (Gallin & Ruf, 1998; Maier & Schweiger, 1999). Auch ist das Fach Mathematik keineswegs - wie häufig angenommen - wert- und kulturneutral (Prediger & Schroeder, 2003). Ausführlichere Informationen zum bilingualen Sachfachunterricht in Deutschland sowie Besonderheiten des Faches Mathematik als bilingualem Sachfach finden sich beispielsweise in Schmerbeck (2009) und Rolka (in Vorbereitung).

2. Arbeiten mit dem *Math Forum* - Ein bilinguales Mathematikprojekt

Das *Math Forum*

Im *Math Forum* (http://mathforum.org) werden alle zwei Wochen sogenannte *Problems of the Week* bereitgestellt, welche von Schülerinnen und Schülern aus aller Welt bearbeitet werden und diese zum Nachdenken sowie Kommunizieren über Mathematik anregen sollen. Die Teilnehmenden haben zwei Wochen Zeit, um die Aufgabe zu bearbeiten und ihr Ergebnis sowie eine vollständige Erklärung ihres Lösungsprozesses einzusenden. Ihre Antwort wird dann in den Kategorien *problem solving* und *communication* von einem Mentor - dabei kann es sich um ehrenamtliche oder bezahlte Mentoren oder die eigene Lehrkraft handeln - bewertet. In der Kategorie *problem solving* geht es um die angemessene Interpretation und vollständige sowie korrekte Bearbeitung der Aufgabe. In der Kategorie *communication* stehen die Erläuterungen des Lösungsweges, aber auch Klarheit in der Ausdrucksweise sowie Reflexionsvermögen im Vordergrund.

Die Teilnehmenden

An der Bearbeitung der *Problems of the Week* nahmen neun Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 9, 10 und 11 im Rahmen eines offenen Angebotes an einer Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen teil. In einem Zeitraum von drei Monaten bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit acht verschiedene Aufgaben aus dem Bereich *Algebra*. Mit dem Fachlehrer wurde vereinbart, dass die Bearbeitung und Einsendung der Aufgaben an das *Math Forum* teilweise als Hausaufgaben angerechnet werden konnten.

Exemplarische Aufgabenstellung sowie deren Bearbeitung

In der Aufgabe *Fraction Debate* sollen zwei Brüche bezüglich ihrer Größe miteinander verglichen werden. Dazu wird bei einem echten Bruch mit positivem Zähler und Nenner der Zähler sowie der Nenner jeweils um eins vergrößert. Die Schülerinnen und Schüler sollen dann entscheiden, welcher Bruch größer ist oder ob eine allgemeine Aussage nicht möglich ist und die Antwort vom Bruch abhängt.

Anna und Laura (beide Klasse 10) beginnen ihre Bearbeitung mit einer sprachlichen Formulierung der Lösung und geben zunächst zwei Beispiele an:

> *The new fraction is always greater than the original PROPER fraction.*

Example:	*old*	*new*
	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{7}$

Im Anschluss daran findet eine Verallgemeinerung statt. Dabei greifen die beiden Schülerinnen auf Variablen zurück und legen ihre Argumentation in Form eines Widerspruchsbeweises dar, indem sie zunächst vermuten, dass der neue Bruch möglicherweise kleiner als der ursprüngliche Bruch sei:

> *Let d = denominator*
>
> *Let n = nominator*
>
> *A proper fraction means that the numerator is smaller than the denominator. We want to find out fraction wich is smaller. Maybe the new fraction is smaller:*
>
> $$\frac{n}{d} > \frac{n+1}{d+1}$$
>
> *And now we want to find out the common denominator. We multiply d*(d+1):*
>
> $$d*(d+1) = d^2 + d$$
>
> *To find the new numerator we multiply the old with the other denominator.*
>
> $$\frac{n*(d+1)}{d^2+d} > \frac{d*(n+1)}{d^2+d}$$
>
> *We multiply out the brackets.*
>
> $$\frac{nd+n}{d^2+d} > \frac{nd+d}{d^2+d}$$
>
> *We cut the fractions in two parts and subtract the first parts on both sides.*
>
> $$\frac{nd}{d^2+d} + \frac{n}{d^2+d} > \frac{nd}{d^2+d} + \frac{d}{d^2+d}$$
>
> $$\frac{n}{d^2+d} > \frac{d}{d^2+d}$$
>
> *So n > d.*
>
> *As the denominators are equal n is greater than d. If the new fraction is smaller we found out that the numerator of the old fraction is greater than the denominator. So the original fraction is NOT a proper fraction. This is not possible.*

Bei dieser ausführlich dargestellten Bearbeitung handelt es sich um die erste Version. Zum einen wird offensichtlich, welche mathematischen Kompetenzen die beiden Schülerinnen bei der Bearbeitung der Aufgabe zeigen. Zum anderen wird auch deutlich, wie die beiden sprachlich argumentieren und ihren Lösungsweg erläutern. *Fraction Debate* war die fünfte zu bearbeitende Aufgabe. Im Vergleich zu den Lösungen der Anfangsaufgaben zeigt sich eine deutliche Verbesserung sowohl der mathematischen als auch der sprachlichen Fähigkeiten. Inwiefern die sprachliche Ausgestaltung in der Fremdsprache einen Einfluss auch auf die mathematischen Kompetenzen hat, kann mit den verfügbaren Daten nicht beantwortet werden.

4. Fazit

Die Arbeit mit dem *Math Forum* ist durch ein hohes Maß an Authentizität gekennzeichnet, da es sich um eine amerikanische Internetressource handelt. Dementsprechend akzeptieren die Schülerinnen und Schüler die Kommunikation auf Englisch und sind zudem sehr stolz, wenn sie Erfolgserlebnisse haben. Dies zeigt die Antwort von Nazan (Klasse 11) auf die Frage nach ihren Erfahrungen mit dem *Math Forum*:

„Als ich von dem Projekt erfahren hab, dachte ich: Neee, ich mach da nicht mit, mein Mathe ist nicht so gut, ich kann keine Textaufgaben lösen und vor allem nicht auf Englibzmsch. [...] Als ich am Ende dann auf der „Golden List“ stand hab ich mich natürlich sehr gefreut, weil ich dann die Bestätigung hatte, dass ich MATHE, wenigstens Algebra (sogar in ENGLISCH) kann. Viele sagen einfach: "Ich kann kein Mathematik!" Aber mit etwas Hilfe ist das gar nicht mal so schwer. Außerdem macht es Spaß an den Aufgaben zu knobeln und schließlich eine Lösung zu finden (hat es jedenfalls bei mir).“

Literatur

Gallin, P. & Ruf, U. (1998): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999): Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht. Wien: öbv & hpt Verlagsgesellschaft.

Prediger, S. & Schroeder, J. (2003) (Hrsg.): Themenheft mathematik lehren: Interkulturelles Lernen im Mathematikunterricht, Heft 116.

Rolka, K. (in Vorbereitung). Mathematik als bilinguales Sachfach – Theoretische Überlegungen und praktische Beispiele.

Schmerbeck, H. (2009): Mathe auf Englisch? Zum Potential des Faches Mathematik als bilinguales Sachfach. Ruhr-Universität Bochum: Masterarbeit (unveröffentlicht).

Susanne SCHNELL, Dortmund

„Es ist Zufall, aber man kann es schon ungefähr herausfinden“ – Interviewstudie zur Vorstellungsentwicklung in der Stochastik im Rahmen des Projekts Kosima

1. Muster und Störung als zentrales Element der Stochastik

Der Sechstklässler Leo äußert am Ende der Bearbeitung einer Lernumgebung zur Einführung der Stochastik, dass man etwas herausfinden kann, obwohl es Zufall ist. Diese Aussage bezieht sich auf zwei Seiten des Phänomens Zufall: „having uncertain individual outcomes but a regular pattern of outcomes in many repetitions“ (Moore 1990, S. 97). Dies stellt eine besondere Herausforderung des mathematischen Umgangs mit dem Zufall dar: Nach Konold (1991) tendieren Menschen häufig dazu, Wahrscheinlichkeiten als Aussage über einzelne Ausgänge von Zufallsexperimentieren zu interpretieren, anstatt sie fachlich angemessen als Schätzwerte für die relativen Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen anzusehen. Das Spannungsverhältnis zwischen Mustern auf lange Sicht und deren Störung auf kurze Sicht ist somit wesentlich für die (unterrichtliche) Behandlung der Stochastik. Das zugrundeliegende empirische Gesetz der großen Zahlen sollte ein zentrales Element für den verständigen Aufbau stochastisch tragfähiger Vorstellungen sein (Prediger 2008). Die hier vorgestellte Studie untersucht daher, wie sich bei Lernenden zu Beginn des Stochastikunterrichts in Klasse 6 Vorstellungen zum Phänomen Zufall hinsichtlich der Ausdifferenzierung von kurzer und langer Sicht entwickeln.

2. Theoretische Hintergrund zur Vorstellungsentwicklung

Als Vorstellungen werden alle subjektiven mentalen Strukturen unterschiedlicher Komplexitätsebenen verstanden, die Lernende zur Interpretation ihrer Erfahrungen anwenden (Gropengießer 2001, S.30ff). Im Sinne des Ansatzes des Conceptual Change kann die Entwicklung solcher Vorstellungen in zwei Richtungen verlaufen (Prediger 2008): Einerseits werden bestehende Vorstellungen durch unterrichtliche Behandlung des Themas überformt (bezeichnet als „*vertikale Entwicklung*“, ebd.). Empirische Untersuchungen wie zum Beispiel Konold (1991) zeigen allerdings, dass auch nach dem erfolgreichen Absolvieren des Stochastikunterrichts Vorstellungen bestehen bleiben, die aus fachlicher Sicht nicht tragfähig sind und die situationsbezogen aktiviert werden. Individuelle Vorstellungen scheinen also auch durch weitere Vorstellungen ergänzt zu werden (bezeichnet als „*horizontale Entwicklung*“, Prediger 2008).

Zur präziseren Beschreibung der Entwicklungsprozesse werden Vorstellungen auf der Ebene von Konstrukten analysiert (vgl. Schwarz et al. 2009). Diese werden verstanden als unterschiedlich komplexe Elemente von Vorstellungen, die miteinander in Beziehung stehen können. Bei der Analyse des empirischen Materials konnten durch das induktive Bilden von Kategorien verschiedene Arten und Funktionen von Konstrukten identifiziert werden. Der vorliegende Beitrag fokussiert auf die Einteilung in *Konstrukte zu Mustern* (im Sinne von Verallgemeinerungen / Regelmäßigkeiten), *Konstrukte zu Störungen* (Unregelmäßigkeiten / Abweichungen von erwarteten Mustern) und *Konstrukte zur Erklärung* der beobachteten Muster oder Störungen (für weitere vgl. Prediger / Schnell i.V.). Diese Kategorien sollen im Folgenden der Beschreibung der individuellen Lernwege von Schülerinnen und Schülern dienen.

3. Lernumgebung „Wettkönig“ und Design der empirischen Studie

Zur Untersuchung der Entwicklungsprozesse von Schülervorstellungen wurde die *Lernumgebung* „Wettkönig“ aus dem Schulbuch Mathewerkstatt (Prediger / Hußmann 2012) genutzt. Diese basiert auf einem Brettspiel mit ergänzender Computersimulation, bei der vier verschieden gefärbte Tiere ein Wettrennen laufen. Angetrieben werden sie durch einen 20-seitigen Farbwürfel, bei dem die Ameise mit sieben roten Seiten theoretisch die höchste Wahrscheinlichkeit hat. Ziel des Spiels ist das Finden einer Strategie, um möglichst sicher vorherzusagen, welches Tier gewinnen wird. Die Sicherheit der Strategie soll in Bezug gesetzt werden zur Gesamtanzahl der Würfe, nach denen das Siegertier bestimmt wird. Jene kann variiert werden zwischen 1 und 10.000. Die Konzeption der Lernumgebung soll Lernenden als Zugang zur Stochastik in Klasse 6 das Sammeln von Erfahrungen zum empirischen Gesetz der großen Zahlen ermöglichen. Neben dieser ersten Spielvariante existiert eine weiterführende zur Vorhersage relativer Häufigkeiten, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Das *Untersuchungsdesign* besteht aus Design-Experimenten mit zehn Paaren von Schülerinnen und Schülern aus zwei sechsten Klassen einer Gesamtschule. Dabei wurde die Lernumgebung in vier bis sechs aufeinander aufbauenden Interviews von jeweils 45 bis 90 Minuten bearbeitet. Ziel dieses Designs ist es, längerfristige Entwicklungsprozesse bei den Schülerinnen und Schülern beobachten zu können. Im Folgenden soll ein Ausschnitt der Ergebnisse zur Vorstellungsentwicklung bei den Schülerinnen Ramona und Sarah vorgestellt werden hinsichtlich der Prozesse der Ausdifferenzierung von kurzer und langer Sicht.

4. Individuelle Vorstellungsentwicklung bei Ramona und Sarah

Die Schülerinnen Ramona und Sarah bearbeiteten die Lernumgebung „Wettkönig“ in fünf aufeinander aufbauenden Interviews über den Zeitraum von zwei Wochen. Bereits innerhalb der ersten drei Spiele auf dem Brett, in denen immer die rote Ameise gewonnen hatte, äußern die Schülerinnen das Musterkonstrukt „Rote Ameise ist immer am besten“ und begründen dies zunächst rein über empirische Beobachtungen und dann auch über die Auszählung der Farbverteilung auf dem Würfel (für eine genauere Analyse siehe Prediger / Schnell i.V.). Direkt im Anschluss daran verweist Ramona auf einen Zustand, der nicht zur Farbverteilung und zum beobachteten Muster passt:

Ramona: Blau hat aber auch gute Chancen weil- [...] Blau hat manchmal sehr viel Glück und dann kriegt er halt die drei Felder manchmal sehr oft.

Ramona scheint mit ihrer Aussage hervorzuheben, dass auch andere Ausgänge eintreten können als die durch die Farbverteilung vorgegebenen. Sie bezieht sich dabei auf den blauen Igel, der gemäß der Farbverteilung die geringsten Chancen besitzt. Auch für diese vom Erwarteten abweichenden Spielausgänge findet sie eine Erklärung nämlich das „Glück“ der anderen Tiere. Da dieses *Konstrukt eine Störung* thematisiert und scheinbar einen anderen Gültigkeitsbereich besitzt als das zuvor geäußerte *Musterkonstrukt* (nämlich wenn die andere Tiere Glück haben), kann es als eine *horizontale Ergänzung* dazu betrachtet werden.

Zur Verdeutlichung der Entwicklung wird hier ein Sprung zum zweiten Interview vorgenommen, in dem die Computersimulation hinzugezogen und mehrere Spielprotokolle mit vorgegebenen Wurfanzahlen sowie eine Zusammenfassung ausgefüllt wurden, die auf den Vergleich der Gewinntiere bei verschiedenen Wurfanzahlen fokussieren. In Anschluss daran bittet die Interviewerin darum, die Wettstrategie explizit zu benennen.

Sarah: Bei 100 und 1000 gewinnt immer die Ameise und bei 10 und 1 ist es immer verschieden.

Sarah greift wiederum das Muster „Rote Ameise ist immer am besten“ auf. Durch die vorangegangenen Analysen der Spielergebnisse formuliert sie nun eine ausdifferenziertere Version des Musters, indem sie dessen Gültigkeitsbereich einschränkt: Das Muster zeigt sich dann (ausschließlich), wenn die Wurfanzahlen hoch genug sind. Das Muster scheint so vertikal weiterentwickelt worden zu sein durch eine Verfeinerung seines Gültigkeitsbereichs. Allerdings äußert Sarah nicht nur eine Weiterentwicklung des Musterkonstrukts, sondern auch die des Störungskonstrukts: Dieses lässt sich vor allem dann beobachten, wenn die Wurfanzahlen niedrig sind. Auch hier wird der Gültigkeitsbereich verfeinert. Durch die Abgrenzung der Gültigkeitsbereiche scheint eine tragfähige Vorstellung von der Auswirkung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zu entstehen.

5. Vorstellungsentwicklung auf Konstruktebene

Der exemplarische Einblick in die Untersuchung zeigt, wie die Unterscheidung zwischen kurzer und langer Sicht konstruiert wird über die *Ausdifferenzierung der Gültigkeitsbereiche von Konstrukten*, die sowohl Muster als auch Störungen thematisieren. Dabei werden empirische Beobachtungen und die Farbverteilung als theoretische Ursache für Muster bzw. (eher individuell geprägt) das Glück der anderen Tiere für Störungen im kleinen Wurfanzahlbereich herangezogen.

In weiteren Analysen sollen Ausdifferenzierungen von Konstrukten zu den Schwerpunkten ‚Muster' und ‚Störung' über alle Interviewpaare hinweg identifiziert werden, so dass ein detaillierterer Einblick in die vertikalen und horizontalen Entwicklungsprozesse von Vorstellungen zum Phänomen Zufall möglich wird.

Dieses Projekt ist eingebunden in das langfristige Forschungs- und Entwicklungsprojekt KOSIMA, vgl. Hußmann / Leuders / Barzel / Prediger in diesem Band.

Literatur

Gropengießer, H. (2001): Didaktische Rekonstruktion des Sehens. Wissenschaftliche Theorien und die Sicht der Schüler in der Perspektive der Vermittlung. Oldenburg: Didaktisches Zentrum der Universität Oldenburg.

Konold, C. (1991): Understanding Students' Beliefs About Probability. In E. v. Glasersfeld (Hrsg.): Radical Constructivism in Mathematics Education, Amsterdam: Kluwer, 139-156.

Moore, D.S. (1990): Uncertainty. In L. Steen (Hrsg.): On the shoulders of giants: New approaches to numeracy, Washington, DC: National Academy Press, 95-137.

Prediger, S. (2008): Do you want me to do it with probability or with my normal thinking? Horizontal and vertical views on the formation of stochastic conceptions. In: International Electronic Journal of Mathematics Education, 3(3), 126-154.

Prediger, S. / Hußmann, S. (in Vorbereitung für 2012): Spielen – Wetten – Voraussagen. Den Zufall im Griff? Erscheint in S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders (Hrsg.): Mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Prediger, S. / Schnell, S. (in Vorbereitung): Individual Pathways in the Development of Students' Conceptions of Patterns of Chance, in: Proceedings of Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Rzeszów (Polen).

Schwarz, B., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2009): The nested epistemic actions model for abstraction in context, in: ibid. (Hrsg.): Transformation of Knowledge through Classroom Interaction, London/ New York: Routledge, 11-41.

Andreas SCHNIRCH, Christian SPANNAGEL, PH Heidelberg

Geometrie-Wiki: Prozessorientierte Unterstützung von Geometrievorlesungen

1. Motivation

Die Veranstaltung „Einführung in die Geometrie“ in Modul 2 an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg besteht aus einer Vorlesung (2 SWS) und einer Übung (2 SWS). Die Studierenden nehmen die Veranstaltung als besonders anspruchsvoll und schwierig wahr. In der Vergangenheit konnten mehrere Problembereiche identifiziert werden. Zum einen fiel auf, dass die Studierenden erhebliche Schwierigkeiten haben sich mathematisch korrekt auszudrücken (z.B. wenn es darum geht, einen Begriff zu definieren), zum anderen treten immer wieder Probleme beim Argumentieren, Begründen und Beweisen auf. Außerdem besteht die Tendenz, das Skript zur Veranstaltung auswendig zu lernen, ohne die Inhalte wirklich zu verstehen. Dies führt dann oftmals dazu, dass Transferleistungen beim Problemlösen kaum möglich sind. Die Studierenden haben somit im Wesentlichen Schwierigkeiten mit mathematischen *Prozessen* wie Definieren, Problemlösen, Kommunizieren und Beweisen.

Nun spielen beim Erlernen von Prozessen die eigene Ausführung der Prozesse und bedarfsgerechtes individuelles Feedback wesentliche Rollen (Bescherer & Spannagel, 2009). Zur Förderung prozessorientierter Kompetenzen ist es also sinnvoll den Studierenden zusätzliche Möglichkeiten zum produktiven Lernen und zum „Mathematik-Treiben“ einzuräumen und sie zur Nutzung dieser Möglichkeiten zu motivieren. Mit Hilfe eines veranstaltungsbegleitenden Geometrie-Wikis haben wir versucht dieser Forderung im Rahmen des Forschungsprojekts „Web-2-Geometry“ an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg nachzukommen. Im Rahmen des Aktionsforschungsansatzes untersuchen wir zudem die Wirkung des Einsatzes der Wiki-Lernumgebung auf Lernmotivation und Selbstwirksamkeitserwartung der Studierenden.

2. Theoretische Grundlagen

Nach der Selbstbestimmungstheorie von Deci und Ryan (1993) werden Lernende mit höherer Wahrscheinlichkeit dann selbstbestimmte Formen der Lernmotivation entwickeln, wenn sie sich als autonom, als kompetent und als sozial eingebunden erleben. Das Kompetenzerleben hängt dabei eng mit dem Konzept der Selbstwirksamkeitserwartung zusammen (Bandura, 1997). Die stärkste Quelle von Selbstwirksamkeit ist die erfolgreiche eigene Ausführung einer Handlung. Ist man selbst noch nicht in der Lage, ein Problem selbstständig zu lösen, so sind die Unterstützung und das Feedback der Lehrperson von besonderer Relevanz (vgl. mit dem Ansatz des Cognitive Apprenticeship; Collins, Brown & Newman, 1989). Darüber hinaus kann das Beobachten anderer Personen bei der erfolgreichen Problemlösung auch das Zutrauen in die eigene Kompetenz steigern und demonstrieren, "wie man denken kann und sollte" (Lernen am Modell; Bandura, 2001).

3. Das Geometrie-Wiki

Ein Wiki ist ein Online-Hypertextsystem, in dem jede Person Text einstellen und ändern kann. Das berühmteste Wiki ist wohl die Online-Enzyklopädie Wikipedia. Das Geometrie-Wiki ist ähnlich wie die Wikipedia ein System, in dem jede Person ändern kann, mit dem Unterschied, dass es hier nicht um die Zusammenstellung von enzyklopädischen Artikeln geht, sondern im Wesentlichen um die gemeinsame Durchführung von Prozessen (Definieren, Problemlösen, Argumentieren, Beweisen).[1]

Den drei Grundbedürfnissen der Selbstbestimmungstheorie wird dabei folgendermaßen Rechnung getragen: Das Geometrie-Wiki ist eine offene Plattform, die jeder nach seinen eigenen Vorstellungen mit Inhalten füllen kann, und die Beteiligung ist freiwillig (*Autonomie*). Problemlösungen anderer und die dazugehörigen Entwicklungs- und Diskussionsprozesse können dort nachvollzogen werden, und man bekommt Feedback von Kommilitonen und Dozenten zu seinen eigenen Lösungsvorschlägen (*Kompetenz*). Die Online-Arbeit findet dabei gemeinsam in der gesamten Gruppe statt (*soziale Eingebundenheit*).

Im Geometrie-Wiki können somit Prozesse zum Diskussions- und Reflexionsobjekt gemacht werden. Dozierende können die Prozesse beobachten, bei Bedarf eingreifen und Rückmeldung geben.

Neben der Diskussion von Prozessen wird das Geometrie-Wiki auch noch zu anderen Zwecken genutzt: Es dient als Online-Skript, in dem Teile von Studierenden vervollständigt werden können. Es werden andere Medien in das Skript eingebunden (Vorlesungsvideos auf Youtube, DGS-Applets). Und die Studierenden können ihr Wissen mit interaktiven Online-Quizfragen überprüfen.

---

[1] Das Geometrie-Wiki kann unter http://wikis.zum.de/geowiki aufgerufen werden (Stand: 13.3.2011).

4. Forschungsprojekt

Im Rahmen eines Aktionsforschungsprojekts (Altrichter & Posch, 2007; Hinchey, 2008) wurde der Einsatz des Geometrie-Wikis begleitet. Ein wesentliches Charakteristikum dabei ist das theoretisch fundierte und reflektierte Handeln der Lehrperson, die sich immer wieder auf die Ebene des Forschenden begibt und dadurch versucht, die Lehr-Lern-Situation zu verbessern. Im Rahmen des Projekts Web-2-Geometry wird versucht, die Lernmotivation und die Selbstwirksamkeitserwartung bzgl. geometrischer Probleme der Studierenden zu erhöhen und dadurch die Bereitschaft und die Fähigkeit, mathematische Prozesse durchzuführen, zu steigern.

Es wurden Daten sowohl im Sommersemester 2010 als auch im Wintersemester 2010/11 erhoben. Die Daten befinden sich im Wesentlichen noch in der Auswertung; einige Ergebnisse zum Durchgang im Sommersemester 2010 können schon berichtet werden (N=137). Die Studierenden wurden unter anderem auf einer Skala von 0 ("nie") bis 5 ("sehr häufig") gefragt, wie oft sie das Wiki rezeptiv (d.h. lesend) und produktiv (d.h. Texte ändernd) nutzen. Während praktisch alle Studierenden das Wiki rezeptiv nutzen, gibt es nur sehr wenig Studierende, die bei der aktiven Nutzung hohe Skalenwerte (3, 4 oder 5) angegeben haben (beim aktiven Einstellen von Texten: 9 Studierende; bei der aktiven Beteiligung an Diskussionen: 6 Studierende). Teilt man die Gruppe hingegen in diejenigen Studierenden, die das Wiki niemals produktiv genutzt haben (Skalenwert 0, "Nichtnutzer"), und in diejenigen, die das Wiki zumindest selten produktiv nutzten (Skalenwerte > 0, "Nutzer"), dann ergibt ein Verhältnis von ca. zwei Dritteln zu einem Drittel. Diese Zahlen zeigen bereits, dass das Wiki nicht wie erhofft aktiv-produktiv von den Studierenden genutzt wurde.

Untersucht man die Unterschiede in der Lernmotivation bzgl. der beiden Gruppen Nichtnutzer und Nutzer (Fragebogen von Prenzel und Drechsel, 1996), so gibt es darüber hinaus kaum signifikante Unterschiede. Lediglich im Kompetenzerleben haben die Nutzer signifikant höhere Werte als die Nichtnutzer. Darüber hinaus unterscheiden sich die Nichtnutzer von den Nutzern erwartungsgemäß in ihren positiven und negativen Empfindungen gegenüber der Lehrveranstaltung.

5. Diskussion und Ausblick

Die Erfahrungen mit der Wiki-Arbeit und die vorläufigen Ergebnisse der Befragungen zeigen, dass der Einsatz eines Wikis kein Selbstläufer bzgl. Studierendenaktivität ist. Es ist hingegen ein extrem hoher Betreuungsaufwand durch die Dozenten notwendig, der durch die bisherigen Ergebnisse nur schwierig zu rechtfertigen ist.

Insbesondere erscheint problematisch, dass Studierende die Offenheit und Fehleranfälligkeit des Diskussionsprozesses wenig schätzen, weil sie aufgrund der "drohenden" Klausur am Ende des Semesters gerne verlässliche Informationen gleich von Anbeginn hätten. Das *Einlassen auf Prozesse* wird durch die formale Lernsituation erheblich eingeschränkt.

Aus Sicht des Aktionsforschungsprozesses sind dies aber Probleme und Herausforderungen, denen theoretisch-reflektiert begegnet werden kann und sollte.[2]

6. Danksagung

Wir danken der Zentrale für Unterrichtsmedien und insbesondere Achim Burgermeister und Karl-Otto Kirst für die Bereitstellung der Wiki-Plattform und für den freundlichen Support. Wir danken unserem Kollegen Dr. Michael Gieding für seine Unterstützung und sein großes Engagement beim Einsatz des Wikis in den Lehrveranstaltungen. Darüber hinaus bedanken wir uns bei der Pädagogischen Hochschule Heidelberg für die finanzielle Unterstützung des Forschungsprojekts Web-2-Geometry.

Literatur

Altrichter, H. & Posch, P. (2007): Lehrerinnen und Lehrer erforschen ihren Unterricht: Unterrichtsentwicklung und Unterrichtsevaluation durch Aktionsforschung (4., überarb. und erw. Aufl.). Bad Heilbrunn: Klinkhardt

Bandura, A. (1997): Self-efficacy. The exercise of control. New York: Freeman.

Bandura A. (2001): Modeling. In W. E. Craighead & C. B. Nemeroff (Hrsg.), The Corsini Encyclopedia of Psychology and Behavioral Science. New York: John Wiley & Sons, 967–968.

Bescherer, C. & Spannagel, C. (2009): Design Patterns for the Use of Technology in Introductory Mathematics Tutorials. In A. Tatnall & A. Jones (Eds.): Education and Technology for a Better World. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 427-435.

Collins, A., Brown, J. S. & Newman, S. E. (1989): Cognitive apprenticeship: teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Hrsg.), Knowing, learning, and instruction. Essays in honor of Robert Glaser. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 453–494.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1993): Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Zeitschrift für Pädagogik, 39(2), 223–238.

Hinchey, P. H. (2008): Action research primer. New York: Peter Lang.

Prenzel, M. & Drechsel, B. (1996): Ein Jahr kaufmännische Erstausbildung: Veränderungen in Lernmotivation und Interesse. Unterrichtswissenschaft, 9, 217–234.

[2] Ausführliche Reflexionen unter http://tinyurl.com/geowikireflexionen (Stand: 13.3.2011)

Sebastian SCHORCHT, Siegen

Es war einmal Mathematik – Chancen eines möglicherweise oft „vergessenen“ mathematikdidaktischen Repertoires?

1. Forschungsanliegen

Obwohl die KMK-Empfehlungen 2010 die Mathematikgeschichte nicht explizit zum Gegenstand der Lehramtsausbildung macht, so ist sie doch an einigen Universitäten integraler Bestandteil derselben. Mit welchen Zielen ist Mathematikgeschichte in der ersten Phase der Lehrerinnen- und Lehrerbildung verortet? Welche bildende Wirkung verspricht man sich davon? Einige ausgewählte Aspekte sollen im Folgenden thematisiert und erste Annäherungsversuche im Rahmen eines Dissertationsprojekts beschrieben werden. Ziel dieses Projekts ist die Ausarbeitung und Erweiterung der hochschuldidaktischen Perspektive auf die Geschichte der Mathematik in der Lehrerinnen- und Lehrerausbildung.

2. Spannungsfeld: Geschichte der Mathematik in der Lehrerbildung

In den KMK-Empfehlungen zur fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Lehramtsausbildung 2010 wird im übergreifenden fachwissenschaftlichen Teil folgende Anforderung beschrieben:

„Studierende sollen reflektiertes Wissen über ihre Fächer einsetzen und auf wichtige ideengeschichtliche und wissenschaftstheoretische Konzepte zurückgreifen können.“ [KMK 2010, S. 4]

Dieser implizit formulierte, historische Bildungskanon findet sich in den spezifischen Bestimmungen zum Fach Mathematik nicht explizit wieder. So enthalten die in den KMK-Empfehlungen 2010 vorgeschlagenen Fachinhalte der Mathematiklehrerinnen- und -lehrerausbildung keinen Verweis auf die historische Entwicklung des Gegenstandes Mathematik. [Vgl. KMK 2010, S. 30f]

In der Hochschullandschaft zeigt sich zum Teil ein anderes Bild: An der Universität Siegen hat sich beispielsweise eine Arbeitsgruppe zur Geschichte und Philosophie der Mathematik etabliert. Im neuen Bachelor/Master-Studiengang für Lehrämter an der Universität Siegen wird eine Pflichtveranstaltung *Philosophie/Geschichte der Mathematik* angeboten und im Modul sind historische Inhalte der Veranstaltung festgelegt. [Vgl. Modulhandbuch 2011, S. 14] Solche Vorschläge sucht man in den KMK-Empfehlungen 2010 vergebens. Auch andere Universitäten haben ein ähnliches Profil im Bereich der Geschichte der Mathematik etabliert.

In einigen von mir durchgeführten Interviews mit angehenden Lehrerinnen und Lehrern wird der Bildungswert der Geschichte der Mathematik für den Lehrberuf angezweifelt. Brigitte, eine ehemalige Studierende der Universität Siegen und Referendariatsanwärterin, sieht in der angebotenen Lehrveranstaltung kaum einen Mehrwert für ihre Berufspraxis. Auf die Frage welche Inhalte Brigitte im Studium wichtig erscheinen antwortet sie:

„Ich, ja, also Geschichte der Mathematik find ich jetzt da nicht so überlebenswichtig. Da ist mir ja so Algebra und Geometrie ja eigentlich lieber. […] Weil das ja alles immer nur die Entwicklung widerspiegelt und nicht das eigentliche (--) Rechnen und Machen und Tun, deshalb find ich das nicht so wichtig.“ (Interview vom 27.01.2011)

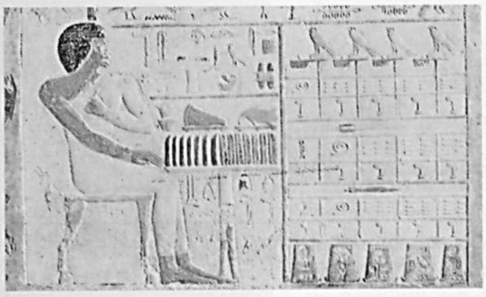
Anscheinend sehen Lehramtsausbildung und zukünftige Lehrende die Relevanz der Inhalte für die Berufspraxis unterschiedlich. Die Sachlage wäre nicht sonderbar, wenn nur die Studiengänge und die Studierendenmeinungen beachtet würden. Doch die KMK-Empfehlungen 2010 sehen Mathematikgeschichte ebenso als randständiges Thema, während die Hochschullandschaft an einigen Universitäten stark gefestigte mathematikhistorische Angebote im Lehramtsstudium vorzuweisen hat. Bei dieser Bestandsaufnahme sind die Schulbuchverlage noch nicht integriert, die wiederum explizit mathematikhistorische Inhalte in Lehrwerke integrieren. Die Lehrpläne und Richtlinien verweisen wiederum nicht auf historische Themen. Es herrscht also ein Begründungsnotstand.

3. Möglicher Beitrag der Mathematikgeschichte?

Die folgende Aufgabe ist der Schulpraxis entnommen. Lehrerinnen und Lehrer sollten folglich über ein fachdidaktisches und fachmathematisches Repertoire verfügen, das es ihnen erlaubt mit solchen Aufgaben kompetent im Unterricht zu agieren.

Aufgaben

30 Seit mehr als 4000 Jahren ist ein – dir sicherlich fremdes – Verfahren zur Multiplikation bekannt. Es wurde in Ägypten entwickelt und mit geringen Änderungen noch bis vor 500 Jahren in Europa verwendet. Schau dir die Beispiele genau an. Jede der Multiplikationen wurde nach dieser Methode durchgeführt.



a) Finde heraus, wie diese Methode funktioniert.

$12 \cdot 25 = 300$	$17 \cdot 44 = 748$	$23 \cdot 51 = 1173$
~~1 25 (1·25)~~	1 44	1 51
~~2 50 (2·25)~~	~~2 88~~	2 102
4 100 (4·25)	~~4 176~~	4 204
8 200 (8·25)	~~8 352~~	~~8 408~~
300	16 704	16 816
	748	1173

b) Berechne die Produkte $29 \cdot 51$ und $15 \cdot 37$ nach der ägyptischen Methode.

[Mathematik Neue Wege (5) 2005, S. 66]

Bei Jahnke und Habdank-Eichelsbacher sind folgende Aspekte zur mathematik-historischen Bildung zu finden:

„Geschichte der Mathematik kann beitragen

- zu Einsichten in die Entwicklung mathematischer Begriffe;
- zu einem vertieften Verständnis der Rolle der Mathematik in unserer Welt und ihrer Beziehungen zu Anwendung, Kultur und Philosophie; sowie
- zur Wahrnehmung und zum Verstehen der Ziele und Intentionen mathematischer Begriffsbildungen, der Möglichkeiten alternativer Wege und persönlicher Aspekte. Die Schüler erfahren so etwas über die subjektive Seite der Mathematik".

[Jahnke & Habdank-Eichelsbacher 1999, S. 96]

Zur Pointierung des ersten Punkts, werden die obigen Aspekte um den folgenden Gedanken erweitert:

- und zu einem vertieften Verständnis durch Auseinandersetzung mit moderner mathematischer Sichtweise und mathematik-historischer Quelle.

Obwohl die obigen Aspekte für Schülerinnen und Schüler konzipiert sind so sollten sie dennoch auch auf die Bildung von Lehrerinnen und Lehrern angewendet werden, damit diese Aufgaben mit mathematik-historischem Anspruch adäquat beurteilen können. Eine solche Einschätzung könnte wie folgt aufgebaut sein:

Aufgabenteil (b) ist implizit die Entwicklung mathematischer Begriffe erkennbar, da eine Alternative zum bekannten deutschen Multiplikationsverfahren vorgestellt wird. Die Frage nach der Nützlichkeit des Verfahrens wird verpasst: Wann ist das Rechenverfahren sinnvoll und ab welchem Zahlenraum ist die elegante Lösung des Verdoppelns durch die Übersetzung in eine binäre Zahldarstellung nicht mehr nützlich?

In der Aufgabenstellung wird die Beziehung des ägyptischen Rechenverfahrens zur europäischen Kultur thematisiert. Wie D'Ambrosio vorschlägt, sollten aber auch mathematische Ansätze noch nicht in die allgemeine Mathematikgeschichte aufgenommener Kulturen Beachtung finden. [Vgl. D'Ambrosio 2006, S. 8]

Der erste Aufgabenteil (a) bezieht sich auf die abgebildete Tabelle. Die zwei Aspekte *Subjektivität – Norm* können anhand alternativer Lösungswege und persönlicher Aspekte transparent werden. Da der Aufgabenteil den Dialog im Plenum nicht explizit unterstützt, sollte der Lehrende an dieser Stelle dazu auffordern. Die Aura der Mathematik, als absolutes und ewiges Wissen, sollte dabei durch die Auseinandersetzung mit den Zielen und Intentionen mathematischer Begriffsbildungen genommen werden. [Vgl. D'Ambrosio 2006, S. 9]

Ein vertieftes Verständnis der Mathematik wird meines Erachtens durch die Konfrontation verfremdeter Inhalte gewährleistet. Durch den Vergleich von historischen Sichtweisen wird die Relativität des Kalküls sichtbarer. Es können etwa verschiedene Multiplikationsverfahren gegenüber gestellt werden (ägyptische Multiplikation, indische Multiplikation, heutiges deutsches Multiplikationsverfahren), um einen Einblick in vielfältige Formalisierungen zu ermöglichen.

4. Diskussion und Ausblick zum Thema

Im Beitrag wurde ein Spannungsfeld aufgezeigt, in dem sich mathematikhistorische Veranstaltungen für Lehramtsstudierende verorten. Es wurde deutlich, dass eine Positionierung geschichtlicher Themen in der Ausbildung erarbeitet und begründet werden muss. Mein Forschungsvorhaben umfasst daher die folgenden Fragen:

Welche Ansätze zu mathematikhistorischen Themen in der Lehrerbildung gibt es derzeit? Wie sähe eine *Geschichte der Mathematik* aus, wenn sie für zukünftige Lehrende fruchtbar und für die fachdidaktische Ausbildung tragfähig sein soll? Welche Relevanz schreiben Lehramtsstudierende mathematikgeschichtlichen Themen für ihre spätere Unterrichtspraxis zu?

Auf dieser Grundlage soll eine Konzeption für eine mathematikgeschichtliche Veranstaltung exemplarisch an einem Fachinhalt erarbeitet werden.

Literatur

D'Ambrosio, U.: Einführung, Ethnomathematik, in: Spektrum der Wissenschaft, Heft 2, Heidelberg 2006, S. 8f.

Jahnke, H. N. und Habdank-Eichelsbacher, B.: Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen, in: Selter, C. und Walther, G.: Mathematikdidaktik als design science, Festschrift für Erich Christian Wittmann, Leipzig 1999, S. 95 – 105.

Lergenmüller A. und Schmidt, G.: Mathematik Neue Wege, Arbeitsbuch für Gymnasien, 5. Schuljahr, Braunschweig 2005.

Sekretariat der ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland: Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung, Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.2008 i. d. F. vom 16.09.2010.

Universität Siegen: Akkreditierungsverfahren der lehrerbildenden Studiengänge, Cluster: Mathematik und Wirtschaftswissenschaften, Modulhandbuch, Siegen 2011.

Monika SCHOY-LUTZ, PH Thurgau, Kreuzlingen

Entwicklung und Erprobung einer Lernumgebung zur Kombinatorik in den Kl. 1-4

Im Rahmen eines Dozierendenforschungsprojektes[1] wurde von Schoy-Lutz (2011) eine Lernumgebung zum Bereich von kombinatorischen Fragestellungen im Mathematikunterricht entwickelt, die ein grundlegendes Verständnis der Leitidee Zufall und Wahrscheinlichkeit bei den Kindern anlegen soll, das bis in die Sekundarstufe 1 hinaus tragfähig ist. Kinder mit unterschiedlichen Alters- und Lernvoraussetzungen sollen in die Lage versetzt werden, Aufgabenstellungen auf unterschiedlichen Leistungsniveaus und mit unterschiedlichen Alltagsbezügen bearbeiten zu können, ohne dass alle Lösungen mit konkretem Material vorhanden sein müssen. Dabei werden die Kriterien für Lernumgebungen umgesetzt, wie sie u.a. von Wollring (2008, S.9-26) [1] gefordert werden.

Übergeordnetes Ziel der Lernumgebung war es demnach, eine Veranschaulichung zu entwickeln, die die Lücke zwischen der Verwendung von konkretem Material auf der einen und der Bearbeitung kombinatorischer Aufgaben auf Arbeitsblättern auf der anderen Seite schließt. Die entwickelte Lernumgebung wurde in zwei Grundschulklassen und einer kleinen Gruppe von Vorschulkindern erprobt und in kleinem Rahmen evaluiert.

In diesem Beitrag wird die von Schoy-Lutz (2011) entwickelte Lernumgebung zur Kombinatorik vorgestellt. Anhand der Analyse von Schülerdokumenten werden abschließend Hypothesen generiert, die positive Effekte der Lernumgebung vermuten lassen, wenn es darum geht, dass die Schülerinnen und Schüler auf ihrem Weg vom unsystematischen Pröbeln zum systematischen Probieren begleitet werden sollen und dadurch ein bewegliches Denken im Umgang mit alltagsnahen kombinatorischen Fragestellungen entwickeln können.

Die Kombiniermaschine (Schoy-Lutz 2011)

Die Kombiniermaschine besteht aus zwei oder mehreren Rädern, die ähnlich wie Glücksräder beschriftet und gedreht werden. Kombinationen unterschiedlichster Art können an der Maschine systematisch erzeugt und abgelesen werden.

---

[1] Das Projekt wurde von Feb. 2010 bis Feb. 2011 durchgeführt und von der Pädagogischen Hochschule Thurgau finanziert.

Die Kombiniermaschine eignet sich für kombinatorische Fragestellungen im Zusammenhang mit multiplikativen Aufgabenstellungen und Variationen mit Wiederholung:

- $k \leq 3$ (Anzahl der Kombinierräder)
- $n \leq 5$ (Entscheidungsmöglichkeiten auf den jeweiligen Rädern). Die Reihenfolge ist dabei wichtig.

Die Beschränkung auf die Anzahl an Kombinierrädern und Entscheidungsmöglichkeiten ergab sich aufgrund vielfältiger Erfahrungen in der Praxis durch die Begrenzung des Lösungsraums und der Handhabung der Maschine durch die Kinder.

Die Lernumgebung wurde in jeweils einer Doppelstunde erprobt. In dieser Doppelstunde wurden insgesamt 3 Aufgaben bearbeitet, wobei gerade die dritte Aufgabe den Kindern besonders viel Handlungsspielraum und damit auch Bearbeitungsmöglichkeiten auf individuellem Niveau gewährte. Die Kinder hatten mit Hilfe der Kombiniermaschine die Möglichkeit, ihre Lösungen unterschiedlich zu ermitteln und zu dokumentieren. Zunächst wurde eine multiplikative Aufgabe ohne Kombiniermaschine mit Hilfe eines Arbeitsblattes von den Kindern gelöst und dokumentiert. Danach lernten die Kinder die Kombiniermaschine kennen und erzeugten anhand einer Parallelaufgabe auf Post-it-Zetteln ihre Lösungen. Es wurde bewusst der Versuch unternommen, dass den Kindern eben nicht das gesamte Material zur Verfügung gestellt wurde, so dass nicht alle Kombinationen gelegt werden konnten. Die Kombiniermaschine soll es den Kindern dennoch ermöglichen, auf einfache Art und Weise alle Lösungen zu finden und systematisch darzustellen. Zum Abschluss einer jeden Aufgabe wurden die Kinder ermuntert, ihre Lösungen zu sortieren, zu vergleichen und den Lösungsweg zu begründen.

Kriterien für die Bewertung der vorgestellten Lernumgebung

Die Evaluation des kombinatorischen Verständnisses der Kinder basiert in der vorgestellten Lernumgebung auf den von den Kindern dokumentierten Lösungsmengen und -wegen. Dabei wurden folgende Kriterien bei der Auswertung der Kinderdokumente fokussiert:

- Arbeiten die Kinder freiwillig mit der Kombiniermaschine? → Kriterium der Veranschaulichungshilfe
- Erhöht sich die Anzahl richtiger Lösungen mit der Kombiniermaschine gegenüber der Arbeit am Arbeitsblatt? → Kriterium der Lösungswirksamkeit

- Erhöht sich der Strukturierungsgrad der Lösungsdarstellung mit Hilfe der Kombiniermaschine? Werden die Lösungen rein aufzählend dargestellt oder bereits zu Gruppen zusammengefasst? → Kriterium der Lösungsstrategie
- Deuten verbale Äußerungen der Kinder darauf hin, dass sie eine tragfähige Modellvorstellung von kombinatorischen Problemstellungen der vorgestellten Art entwickeln können? Erkennen die Kinder das Multiplikationsprinzip? → Kriterium der Modellbildung und Abstraktionsfähigkeit
- Können die Kinder eine eigene, strukturgleiche kombinatorische Aufgabe entwickeln und mit Hilfe der eigens erstellten Kombiniermaschine lösen? → Kriterium der Transferfähigkeit
- Kann mit Hilfe der Kombiniermaschine die Kommunikations- und Argumentationsfähigkeit der Kinder heraus gefordert und unterstützt werden? → Kriterium der sprachlichen Kompetenzentwicklung

Beobachtungen und Hypothesengenerierung

Während bei der Bearbeitung ohne Kombiniermaschine häufig ein Pröbeln zu erkennen war, was auch in der Art der Darstellung der Lösungen zu erkennen ist, zeigte sich die Dokumentation der unterschiedlichen Lösungen unter Einsatz der Kombiniermaschine wesentlich strukturierter (Kriterium der Lösungsstrategie). Ohne Kombiniermaschine wurden überwiegend Mikrostrategien verwendet wurden, während beim Einsatz der Kombiniermaschine bei einem großen Teil der Kinder Makrostrategien erkennbar waren (Hoffmann, 2003)[3]. Damit haben die Kinder mit Hilfe der Kombiniermaschine nicht nur mehr richtige Lösungen gefunden (Kriterium der Lösungswirksamkeit), sondern sie zeigten durch die Art der Darstellung und Gruppierung aller Lösungen auch, dass sie deutlich seltener pröbelten und mehr zu einem systematischen Vorgehen gewechselt hatten. Durch die Systematisierung der Lösungsdarstellung konnten die Kinder begründen, weshalb alle Lösungen gefunden wurden (Kriterium der Abstraktionsfähigkeit und sprachlichen Kompetenzentwicklung). Im Umgang mit der Kombiniermaschine konnten viele Beobachtungen gemacht werden, aus denen sich bereits erste Hypothesen generieren lassen. Kinder, die mit der Kombiniermaschine arbeiteten …

- ... nutzen diese Visualisierungshilfe freiwillig.
- … konnten mehr richtige Lösungen finden.
- … klebten ihre Lösungen bis zum Ende immer wieder um, was zu einer systematischeren Lösungsstrategie führte.

- …begründeten ihr systematisches Vorgehen mit sinnvollen verbalen Äußerungen.
- … entdeckten sogar die formale Formulierung der zur Aufgabe gehörenden Multiplikationsaufgabe.
- … konnten ihr systematisches Vorgehen und die Systematik in der Lösungsdarstellung auch auf eine von den Kindern neu erfundene Kombinieraufgabe übertragen.

Auffallend war, dass diese Erkenntnisse auch von eher schwachen Kindern gemacht werden konnten, die ihre eigene Kombiniermaschine mit nicht mehr als 3 Elementen bestückten. Die Modellvorstellung des Kombinierens als multiplikative Situation fand unabhängig von der zu kombinierenden Anzahl an Elementen statt. Die Kombiniermaschine hilft somit auch schwachen Kindern ein mentales Bild zu entwickeln und deren Abstraktionsfähigkeit zu verbessern. Eine Fortführung der Erprobungen könnte noch weitere Fragestellungen fokussieren. Besonders interessant wäre z.B. die Frage, wie sich die sprachliche Kompetenz der Kinder wie auch das Repertoire an Mikro- und Makrostrategien bei den Kindern entwickelt und ob die Kinder z.B. aus unterschiedlichen kombinatorischen Aufgaben jene identifizieren können, die sich mit Hilfe der Kombiniermaschine veranschaulichen lassen.

Fazit

Die erprobte Lernumgebung zu kombinatorischen Fragestellungen hat exemplarisch gezeigt, dass die Kinder individuell und auf unterschiedlichen Leistungsniveaus arbeiten konnten. Der Einsatz der Kombiniermaschine wurde in Lerngruppen der Vorschulstufe bis hin in Kl.3 erfolgreich umgesetzt und kann auch im Sinne des Spiralprinzips problemlos in Kl.4 und 5 zum Einsatz gebracht werden. Durch die Erprobungen konnten interessante Hypothesen generiert werden.

Literatur

1. Wollring, B. (2008): Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Lernumgebungen auf dem Prüfstand. Kassler Forschergruppe (Hrsg.). Kassel: Unidruckerei der Universität Kassel; 9-26.
2. Bönig D.: (2010): Individuelle Lernwege in der Kombinatorik unterstützen. In: Grundschule Mathematik, 4 (27) 2010; 14-17.
3. Hoffmann A. (2003): Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit. 1. Aufl. Hildesheim: Franzbecker.
4. Schoy-Lutz, M. (2011): Entwicklung und Erprobung einer Lernumgebung zur Kombinatorik. In: Grundschulunterricht Okt. 2011 (im Druck).

Christof SCHREIBER, Frankfurt

Schriftlichkeit, Mündlichkeit und Neue Medien

Die Verwendung von Neuen Medien im Mathematikunterricht im Bereich schriftlicher und mündlicher Kommunikation und Darstellungen bietet besondere Möglichkeiten. Aus meiner Sicht kann daraus einerseits das mathematische Lernen aber andererseits auch die Forschung zu mathematischen Lernprozessen profitieren. Dazu stelle ich das Forschungsprojekt ‚Mathe-Chat' und die daraus entwickelte wiki-basierte Lernumgebung ‚wiLM@' vor, die den Bereich der schrift- und grafikbasierten Kommunikation mit Neuen Medien illustrieren. Als Gegenstück werden mathematische Podcasts von Grundschülern präsentiert und die drei Beispiele in das Spannungsfeld von Schriftlichkeit und Mündlichkeit eingeordnet.

1. Schriftlich-grafische Kommunikation

Im Forschungsprojekt ‚Mathe Chat' (Schreiber 2010a; 2010b) geht es um die Rolle der schriftlichen Kommunikation in kollektiven mathematischen Problemlöseprozessen. Daher ist das Setting so gewählt, dass zwischen den beiden Seiten des Settings nur die schriftlich-grafische Kommunikation möglich ist. Technisch wurde dies mit 2 Tablet-PC realisiert, mit denen die Schüler über ein Whiteboard synchron oder über die Chatbox „quasisynchron" (Dürscheid 2003, 44) kommunizieren können. Mit Camtasia-Studio wurden die Aktivitäten auf den Bildschirmen aufgezeichnet.

Der Vorteil der Neuen Medien ist hier, dass man die Schüler über die Chat-Umgebung allein auf schriftlich-grafischer Ebene kommunizieren lassen kann. Die Schüler sind in diesem Setting darauf angewiesen, all ihre Lösungsvorschläge, Tipps, Hinweise etc. dem Partner schriftlich mitzuteilen. Mathematik ist eine Disziplin, in der Schrift eine besonders wichtige Rolle spielt, die Untersuchung dieses Bereiches stellt daher einen zentralen Punkt auch für die Mathematikdidaktik dar.[1]

Teile der aufgezeichneten Sitzungen wurden später transkribiert. Dazu war es erforderlich, eine Art von Transkript zu entwickeln, das beide Seiten des Settings so berücksichtigt, dass getrennte Prozesse als getrennt und gemeinsame Prozesse als gemeinsame zu erkennen sind. So sind die Ergebnisse für genauere Analysen zugänglich.[2]

---

[1] Verweisen möchte ich dazu auch auf Arbeiten aus dem Arbeitskreis ‚Semiotik in der Mathematikdidaktik', aktuell auf Kadunz (2010).

[2] Beispiele dazu in Schreiber (2006; 2010a)

Aus dem für Forschungszwecke gestalteten Konzept des ‚Mathe-Chat' wurde dann im Projekt Lehr@mt die ‚**wi**ki-basierte **L**ernumgebung zum kooperativen Lernen mit Neuen Medien im **M@**thematikunterricht der Primarstufe' kurz ‚**wiLM@'** entwickelt (s. Reinhard 2009). Eingesetzt werden auch hier Tablet-PC oder Cintiqboards, die über einen Touchscreen verfügen, so dass die Schüler ihre Lösungen direkt auf dem Bildschirm mit einem Stift verschriftlichen können. Außerdem wird eine Internetverbindung benötigt, um auf die Lernumgebung wiLM@ zugreifen zu können. Auch hier werden Teile der Sitzungen mit Camtasia Studio mitgeschnitten.

Im Unterschied zum Mathe-Chat ist hier nun nicht nur eine synchrone Kommunikation sondern eben auch die asynchrone Kommunikation möglich, da alle Lösungsschritte auf einer Datenbank weiterhin zur Verfügung stehen. Die Schüler können auf eigene Lösungen oder auch auf freigegebene Lösungen anderer Schüler jederzeit zurückgreifen.

Wichtig sind die unterschiedlichen Öffentlichkeitsbereiche: Die Schüler können ihre Aufgaben alleine bearbeiten. Sie können aber auch zu Beginn, während der Bearbeitung oder nach der Bearbeitung einer Aufgabe diese für die eigene Gruppe öffnen, wobei die Gruppe vom Lehrer vorher definiert wurde. Die Aufgabe kann aber auch nach einer Art von Abstimmung innerhalb der Gruppe und mit Zustimmung des Lehrers ‚öffentlich' gemacht werden, was bedeutet, dass alle in wiLM@ angemeldeten User die Lösung sehen, aber nicht mehr an ihr weiter arbeiten können.

2. Mündliche Kommunikation mit ‚PriMaPodcasts'

Animiert durch die Beschäftigung mit der Schriftlichkeit, habe ich mich mit dem Erstellen von mathematischen Podcasts mit Schülern der Primarstufe dem Bereich der mündlichen Darstellung zugewandt. Ich verspreche mir davon dreierlei:

- Da für die Schüler die besondere Anforderungen besteht, keine schriftlich-grafischen Darstellungsmittel nutzen zu können, muss diese nun durch mündliche Darstellung ‚ersetzt' werden.
- Das Fehlen einer Darstellungsebene kann für einen Forschungszugang auch zeigen, was diese bedeutet, was ersetzt werden muss und wie dies den Schülern gelingen kann.
- Die Erstellung eines Podcast kann die schriftliche und mündliche Ebene der Darstellung hervorragend miteinander verbinden.

Im Rahmen der Veranstaltung ‚Schriftlichkeit und Mündlichkeit bei der Darstellung im Mathematikunterricht' erstellen Studierende mathematische Podcasts mit Schülern aus dem Bereich Primarstufe: Dazu sollen zu einem

Impuls zunächst spontan Aufnahmen gemacht werden. Impulse könnten sein: ‚Was ist das besondere an der Zahl 0?' ‚Wie geht das mit dem 10er Übergang?' ‚Welche geometrischen Körper kennst Du?' ‚Beschreibe einen geometrischen Körper genau!' ‚Was ist Symmetrie?' und andere mehr.

Anschließend hören die Schüler ihre Aufnahme mehrfach an und planen dann eine Aufnahme als ‚Podcast', der potentiell zur Veröffentlichung geeignet ist. Dabei ist es sinnvoll, Notizen zu machen bzw. eine Art ‚Drehbuch' zu erstellen. Es erfolgt dann die Aufnahme des mathematischen Podcast der Primarstufenschüler, genannt ‚PriMaPodcast'.

Für das Seminar sind dann diese Produkte von den Studierenden in einer Ausarbeitung zu analysieren und auf Seminarthemen zu beziehen. Ein Beispiel wurde im Vortrag vorgestellt.

3. Spannungsfeld: Schriftlichkeit und Mündlichkeit

Die drei Beispiele sind nun ‚in das Spannungsfeld von Schriftlichkeit und Mündlichkeit' einzuordnen. Dazu verwende ich das von Fetzer nach Koch & Oesterreicher (1985) ausgearbeitete Modell der „zwei Dimensionen von Mündlichkeit und Schriftlichkeit" (Fetzer 2007, 79).

Abbildung 1: nach Fetzer (2007, 79)

Dabei ist die Kommunikation ‚medial' entweder grafisch oder phonisch, was sich in den beiden Seiten des Schaubildes (s. Abbildung 1) wiederfindet. ‚Konzeptionell' handelt es sich aber um ein Kontinuum. Die Sprache kann mehr oder weniger schriftlich oder mündlich sein. Die oben aufgeführten Beispiele habe ich in das Schaubild eingefügt.

Die Kommunikation im ‚Mathe-Chat' ist dabei medial schriftlich, konzeptionell jedoch eher mündlich, da in hohem Maße interaktiv, vorwiegend synchron und wenig formal. ‚wiLM@' lässt sich entsprechend einordnen, ist jedoch besonders wegen der auch asynchronen Kommunikationsmöglichkeit etwas weiter in Richtung der konzeptionellen Schriftlichkeit eingeordnet. Bei der Einordnung der Entwicklung der Podcasts ist diese dreigeteilt. Die spontane Aufnahme ist medial phonisch und auch konzeptionell mündlich. Die Aussagen sind wenig formal und wenig elaboriert. Das ‚Drehbuch' als Grundlage für den später aufzuzeichnenden Podcast ist medial schriftlich und auch konzeptionell – je nach Gestaltung – eher der Schriftlichkeit zuzuordnen. Der daraus erstellte PriMaPodcast ist medial schriftlich und konzeptionell vom Drehbuch aus gesehen etwas mehr in Richtung der Mündlichkeit einzuordnen.

Aus den hier geschilderten Nutzungsmöglichkeiten Neuer Medien ergeben sich für den zentralen Bereich von Schriftlichkeit und Mündlichkeit im Mathematikunterricht besondere Möglichkeiten für mathematische Lernprozesse einerseits und für fachdidaktische Forschungszugänge andererseits.

Literatur

Dürscheid, C. (2003): Medienkommunikation im Kontinuum von Mündlichkeit und Schriftlichkeit. Theoretische und empirische Probleme. Zeitschrift für Angewandte Linguistik (38), 37–56.

Fetzer, M. (2007): Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Kadunz, G. (2010) (Hrsg.): Sprache und Zeichen - Die Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik. Franzbecker: Hildesheim

Koch, P. & Oesterreicher, W. (1985): Sprache der Nähe – Sprache der Distanz. Mündlichkeit und Schriftlichkeit im Spannungsfeld von Sprachtheorie und Sprachgeschichte. In Romanistisches Jahrbuch. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 15–43.

Reinhard, Chr. (2009): WiLM@ – Schreiben im Mathematikunterricht. Bei lehrer-online: http://www.lehrer-online.de/wilma-didaktik.php (Abruf 15.03.2011)

Schreiber, Chr. (2010a): Semiotische Prozess-Karten - Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen. In: Krummheuer, G./ Heinze, A. (Hrsg.) Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik. Waxmann: Münster u. a.

Schreiber, Chr. (2010b): Über mathematische Probleme chatten. Bei lehrer-online: http://www.lehrer-online.de/mathe-chat.php (Abruf 15.03.2011)

Schreiber, Chr. (2006): Die Peirce'sche Zeichentriade zur Analyse mathematischer Chat-Kommunikation. In: (JMD) Journal für Mathematikdidaktik 27 H. 3/4, 240 - 267

Stephan SCHREIBER*, Katja BIANCHY*, Rolf BIEHLER**, Martin HÄNZE*, Reinhard HOCHMUTH*, *Universität Kassel, **Universität Paderborn

Zur Ausprägung pädagogisch-psychologischer Variablen bei GHR-Studierenden und deren Einfluss auf mathematische Leistungen: Erste Ergebnisse aus dem BMBF-Projekt LIMA.

Das Projekt LIMA (Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium“ – Hochschuldidaktische Grundlagen, Implementierung und Evaluation) ist ein Gemeinschaftsprojekt der Universitäten Paderborn und Kassel und wird im Rahmen der Hochschulforschung als Beitrag zur Professionalisierung der Hochschullehre („Zukunftswerkstatt Hochschullehre“) vom BMBF[†] finanziert. Zentrale Komponenten des Projekts sind die Entwicklung und Implementierung einer Lehrinnovation im ersten Studiensemester im Studiengang Lehramt Mathematik für Haupt- und Realschulen und eine begleitende empirische Evaluationsstudie. In diesem Beitrag werden Forschungsansatz und -ziele des Projekts skizziert und erste Ergebnisse der empirischen Evaluationsstudie berichtet.

Das LIMA Projekt

Das Projekt setzt an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule an, welche weiter verbessert werden soll, um insbesondere die Abbruchquoten und unbefriedigende Leistungen in den Lehramtsstudiengängen zu reduzieren. Eine Effektivierung der Lehramtsstudien soll durch weiterentwickelte Curricula, die Integration neuer Lehr-Lernformen in der Studieneingangsphase, verbesserte Tutorien und die Einführung fachlicher, fachdidaktischer und psychologischer Beratungselemente geschehen.

Folgendes Forschungsdesign wurde zugrunde gelegt:

- Erforschung der Entwicklung der fachlichen Kompetenzen und der Lernvoraussetzungen in motivationaler und volitionaler Hinsicht in einer Längsschnittstudie zum ersten Studienjahr,
- Implementierung einer innovativen Fachausbildung im ersten Studiensemester,
- Evaluation der Lehrinnovation.

Um die Wirkung der Lehrinnovation zu untersuchen, wurde ein quasi-experimentelles Design gewählt, wobei zwei unterschiedliche Kohorten

[†] Förderkennzeichen 01PH08028B

untersucht wurden. Studienanfänger des Wintersemesters 2009/10 bilden die Kontrollbedingung und die ein Jahr später beginnende Kohorte 2010/11 bildete die Experimentalbedingung. Die zeitliche Staffelung ermöglichte es, Erkenntnisse aus Kohorte 1 in die Gestaltung entsprechender Lehrinnovationen in die Experimentalbedingung einfließen zu lassen. Die durch die unterschiedlichen Kohorten bedingten methodischen Nachteile wurden durch umfangreiche Prä- und Postmessungen kontrolliert und aufgefangen.

Die Untersuchungen in den Wintersemestern bezogen sich auf die Lehrveranstaltung „Grundzüge der Mathematik I“ (4 SWS Vorlesung, 2 SWS Übung) für Erstsemester im Lehramtsstudiengang Mathematik für Haupt- und Realschulen an der Universität Kassel. Ergänzend wurden, zeitlich um ein Semester versetzt, zwei Kohorten von Studierenden des Lehramtes für Grund-, Haupt- und Realschulen an der Universität Paderborn untersucht, und zwar die Teilnehmer der Vorlesung „Elemente der Zahlentheorie“. An beiden Universitäten wurden jeweils studienbegleitend Erhebungen zu Wissensvoraussetzungen, lernstrategischen und motivational-volitionalen Orientierungen und zur Studienmotivation durchgeführt.

Für die Kontrollgruppe in Kassel wurde bereits im WS 2009/10 eine Lehrinnovation implementiert, welche vor allem Veränderungen der Vorlesungsinhalte zum Gegenstand hatte. Um einen Einblick in fachbezogene Lernschwierigkeiten von Studierenden zu gewinnen, wurden die korrigierten Bearbeitungen der wöchentlichen Übungsaufgaben der Studierenden analysiert. Dabei konnte auch die Qualität der tutorialen Korrektur und die Qualität des Feedbacks, das die Studierenden erreicht, beobachtet werden. Diesbezügliche Erfahrungen sind in Biehler et al. (2011a) dargestellt.

Insbesondere die Aufgaben- und Korrekturanalysen bildeten die Grundlage für die deutlich erweiterte Lehrinnovation für die Kohorte 2 im WS 2010/11. Diese umfasste folgende Elemente:

- Kompetenzorientierte Überarbeitung der Übungsaufgaben,
- semestervorbereitende und semesterbegleitende fachspezifische Tutorenschulung im Hinblick auf eine Qualitätsverbesserung der Korrekturen und der Feedbacks und eine Qualitätsverbesserung der Tutorien (vgl. Biehler et al., 2011b),
- Verbesserung der Betreuung der Studierenden durch Einrichten eines „Mathe-Treffs“, in dem die Studierenden gemeinsam lernen konnten und Tutoren als Moderatoren bzw. Berater zur Verfügung standen.

Erste Ergebnisse der empirischen Evaluationsstudie

Hier werden Veränderungen der pädagogisch-psychologischen Daten im Verlauf des ersten Studiensemesters innerhalb der Kasseler Kohorte 2009/10 betrachtet. Dazu werden die Daten, die zu Beginn und am Ende des Wintersemesters erhoben wurden, verglichen.

Bei den epistemologischen Überzeugungen war in der Skala „Mathematik als System" ein signifikanter Anstieg zu verzeichnen. Die Studierenden scheinen also bereits über diesen kurzen Zeitraum (3 Monate) hinweg ihre Sicht auf Mathematik zu verändern, was möglicherweise in den Unterschieden der Schul- und Hochschulmathematik begründet ist.

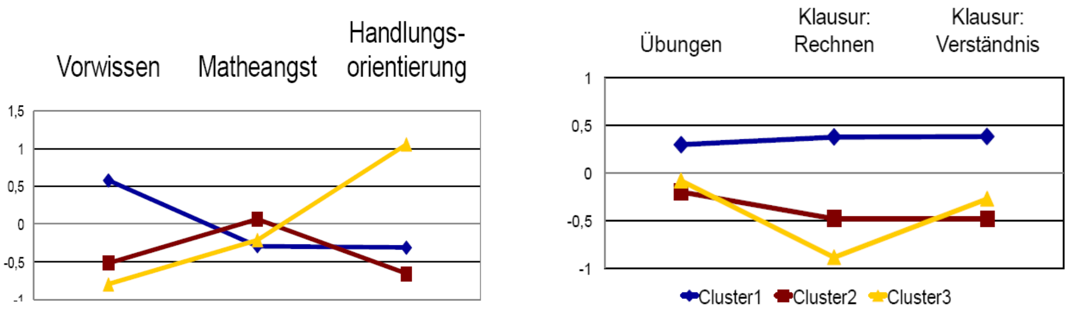
Interessant ist auch, dass sich beim mathematischen und akademischen Selbstkonzept sowie der Selbstwirksamkeitserwartung in Mathematik keine signifikante Veränderung feststellen ließ. Man würde eine Abnahme bei diesen Konstrukten erwarten, da viele Studierende im ersten Semester Probleme beim Verständnis der mathematischen Inhalte der Lehrveranstaltung haben und die Übungsaufgaben nicht erfolgreich bearbeiten können. Zudem befinden sie sich vermutlich in einer gegenüber der Schule in Bezug auf die Mathematik leistungsfähigeren Bezugsgruppe. Zudem zeigten sich eine signifikante Abnahme der Vermeidungsleistungszielorientierung und eine verstärkte Nutzung metakognitiver Lernstrategien (Aspekte Kontrolle und Anstrengung).

Die Kasseler Studierenden wurden mit einer Clusteranalyse in Gruppen eingeteilt. Die zur Clusterbildung verwendeten Variablensets wurden aufgrund inhaltlicher Überlegungen ausgewählt. Verwendet wurden zu Beginn des Semesters erhobene Variablen, welche vermutlich ein erfolgreiches Studieren oder Scheitern wahrscheinlich machen, nämlich Vorwissen, Handlungsorientierung nach Misserfolg, Prokrastination, Mathematikangst, Motivation zur Gruppenarbeit, kognitive und metakognitive Lernstrategien, interne und externe ressourcenbezogene Lernstrategien, Beharrlichkeit, Extraversion und Verträglichkeit. Die Auswahl von Variablen verschiedener Messzeitpunkte reduzierte die Stichprobe auf 42 Studierende. Die Clusteranalyse ergab drei Gruppen:

- Cluster 1 (N=25): Leistungsstarke, die auch bei Misserfolg eher über den Misserfolg nachdenken als Handlungskonzequenzen zu ziehen.
- Cluster 2 (N=10): Leistungsschwache, die eher beunruhigt sind beim Gedanken an ihr Mathematikstudium, aber ebenfalls keine Handlungskonzequenzen aus Misserfolgen ziehen (Risikogruppe).

– Cluster 3 (N=7): Leistungsschwache, die eher nicht beunruhigt sind, wenn sie an ihr Studium denken und bei Misserfolgen Handlungskonzequenzen ziehen (Entwicklungsgruppe).

Die Leistungsstärke wird hierbei durch das Vorwissen charakterisiert.



In der linken Abbildung ist die Ausprägung der Variablen Vorwissen, Mathematikangst und Handlungsorientierung nach Misserfolg in den Clustern dargestellt. Diese Variablen unterscheiden sich bei mindestens zwei der drei Cluster signifikant. Die rechte Abbildung zeigt, wie die drei Cluster bei den zentralen Leistungsvariablen am Ende des Semesters abschneiden. Dargestellt ist die Leistung in den Übungen und zwei faktorenanalytisch bestätigte Dimensionen der Klausurleistung: Rechnen und Verständnis. Cluster 1 mit gutem Vorwissen schneidet auch bei den Übungen und den Klausuraspekten Rechnen und Verständnis gut ab. Es fällt auf, dass Cluster 3, das sich durch schlechtes Vorwissen bei hoher Handlungsorientierung auszeichnet, im Verständnisteil der Klausur vor dem Hintergrund vglw. schlechter Vorwissenswerte, recht gute Werte erzielt. Offenbar können handlungs- im Vergleich zu lageorientierten Personen mit den für das Mathematikstudium durchaus typischen Misserfolgen besser umgehen.

Die Datenerhebungsphase bezüglich der Experimentalbedingung ist zurzeit noch nicht abgeschlossen, weswegen Aussagen zur Wirkung der erweiterten Lehrinnovation durch vergleichende Evaluation der beiden Kohorten zu einem späteren Zeitpunkt an anderer Stelle berichtet werden.

Literatur

Biehler, R., Hochmuth, R., Klemm, J., Schreiber, S., Hänze, M. (2011a). Tutorenschulung als Teil der Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium“ (LIMA-Projekt). In: Hochschuldidaktik – Mathematik und Informatik. Symposiumsband zum Symposium „Verbesserung der Hochschullehre in Mathematik und Informatik“. Submitted.

Biehler, R., Hochmuth, R., Klemm, J., Schreiber, S., Hänze, M. (2011b). Fachbezogene Qualifizierung von MathematiktutorInnen – Konzeption und erste Erfahrungen im LIMA-Projekt In: Hochschuldidaktik – Mathematik und Informatik. Symposiumsband zum Symposium „Verbesserung der Hochschullehre in Mathematik und Informatik“. Submitted.

Marcus SCHÜTTE, Frankfurt am Main

Theorieentwicklung in der Interpretativen Unterrichtsforschung am Beispiel der Impliziten Pädagogik

Einleitung

Im Folgenden wird anfangs die Interpretative Unterrichtsforschung umrissen. Anschließend wird der Aspekt der unterschiedlichen Schlussmodi zur Entwicklung von Theorieelementen in der Interpretativen Unterrichtsforschung fokussiert. Eine ausführliche Darstellung der Spezifika der Interpretativen Unterrichtsforschung sowie eine Diskussion der Gültigkeit und Generalisierbarkeit ihrer Ergebnisse und des Forschungsstils der Komparativen Analyse lassen sich aus Platzgründen nicht ausführen. Ausführliche Ausführungen zur methodologischen Verortung und zum methodischen Vorgehen eines Forschungsvorhabens im Bereich interaktionistischer Ansätze der Interpretativen Unterrichtsforschung der Mathematikdidaktik finden sich in Schütte (2009, S. 70 ff.)

Interpretative Unterrichtsforschung

Der Begriff Interpretative Unterrichtsforschung wurde im deutschsprachigen Raum durch Terhart (1978) mit seiner Monografie „Interpretative Unterrichtsforschung – Kritische Rekonstruktion und Analyse konkurrierender Forschungsprogramme der Unterrichtswissenschaft" eingeführt. Interpretative Unterrichtsforschung stellt eine Art Sammelbegriff dar, der sich auf den Untersuchungsgegenstand und den methodischen Ansatz von Forschung bezieht. Zugleich impliziert er einen theoretischen Standpunkt (vgl. Krummheuer/Naujok 1999, S. 8 ff.). Die Interpretative Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik hat in Deutschland ihren Ursprung Anfang der 1980er Jahre. Ihr Forschungsfokus liegt nicht auf dem Gegenstand einer als statisch und fest aufgefassten Mathematik im Unterricht, sondern auf den erst im alltäglichen Unterricht ständig neu erzeugten Deutungen und Deutungszuschreibungen in der Interaktion der Beteiligten. Im Unterricht werden, diesem Gedankengang folgend, durch die Beteiligten Bedeutungen ausgehandelt, wodurch mathematische situationsüberdauernde Bedeutungszuschreibungen konstruiert werden. (s. z.B. Bauersfeld 1978; Brandt 2004; Fetzer 2007; Schreiber 2011, Schütte 2009, Voigt 1984).

Anhänger des Ansatzes der Interpretativen Unterrichtsforschung der Mathematikdidaktik hatten ursprünglich das Ziel, die Forschung stärker beschreibend auf ein „Verstehen-Wollen" als vorschreibend auf ein „Verändern-Wollen" des Mathematikunterrichts zu richten. Hiervon sollten eine Abkehr und kritische Abgrenzung von den bis dato gängigen stoffdidaktischen Ansätzen der Unterrichtsforschung ausgehen, die lediglich versuchten, Unterricht zu verändern, ohne ihn zuvor zu verstehen. Diese Abkehr drückte sich in dem forschungslogischen Prinzip rekonstruktiver Forschungsansätze aus, gemäß dem die Frage nach dem „[...] ,Wie' im Sinne des Funktionierens eines sozialen Wirklichkeitsausschnitts" in den Fokus der Untersuchung geriet und die Frage nach dem ,Was', dem Inhalt, zurückgedrängt wurde (Krummheuer 2004, S. 113).

Der Wechsel von dem Was der gesellschaftlichen Realität zur Frage nach dem Wie der Konstruktion dieser gesellschaftlichen Realität ist konstitutiv für interaktionistische Ansätze der Interpretativen Unterrichtsforschung der Mathematikdidaktik. Gleichwohl beabsichtigen neuere Arbeiten den Unterricht nicht nur zu beschreiben, sondern auch Möglichkeiten von Veränderbarkeit aufzuzeigen (s. z.B. Fetzer 2007 oder Schütte 2009).

Theorieentwicklung durch hypothetisches Schließen

Ziel der Interpretativen Unterrichtsforschung ist es, durch das ,Verstehen' der Handlungen von Individuen im Unterricht lokale Theoriegenese zu betreiben. Theoriegenese lässt sich nach Kelle (1994) durch die gängigen Schlussweisen der Induktion und Deduktion betreiben sowie durch den von Peirce (1991) entwickelten Schlussmodus des hypothetischen Schließens unter den die „qualitative Induktion" und „Abduktion" fallen (ebenda, S. 160 f.). Durch welche dieser Schlusslogiken lässt sich jedoch dem Anspruch an die Interpretative Unterrichtsforschung, methodisch kontrolliert lokale kontextbezogene Theoriegenese zu betreiben, gerecht werden?

Nach Kelle (1994, S. 160) hat sich die Diskussion der Theoriekonstruktion nach der induktiven und deduktiven Schlusslogik in eine erkenntnistheoretische Sackgasse manövriert. Neues Wissen sowie neue Theorieelemente entstehen Kelle folgend nicht durch das Verallgemeinern von Beobachtetem, ohne einen Theoriebezug herzustellen, wie es in der induktiven Schlusslogik vertreten wird. Außerdem ergibt sich bei der induktiven Schlusslogik die Paradoxie, dass diese ohne theoriegeleitetes Vorgehen versucht, allein aus der Beobachtung einer festgelegten Zahl von Fällen auf alle möglichen Fälle zu schließen und so eine Theorie zu entwickeln. Ebenso wenig lässt sich Theoriegewinn im Forschungsprozess auf Hypothesenformulierung, Operationalisierung und anschließende Überprüfung, wie es nach der deduktiven Schlusslogik vertreten wird, reduzieren. Die Deduktion stößt zudem an das erkenntnislogische Problem, dass sie ihrer Schlussweise nach lediglich Theorie falsifizieren kann.

Einen Weg aus dieser Sackgasse heraus bietet, so Kelle (1994, S. 160), die Forschungslogik des hypothetischen Schließens, die auf Peirce (1991) zurückgeht. Sie wird in der qualitativen Unterrichtsforschung und vor allem in der Interpretativen Unterrichtsforschung angewendet. Unter die Forschungslogik des hypothetischen Schließens fallen die von Peirce entwickelten Schlussmodi der qualitativen Induktion und Abduktion. Werden beim hypothetischen Schließen empirische Phänomene als Fälle von bekannten Regeln bzw. Theorien erklärt, fällt diese Art der Theorieentwicklung in den Bereich der qualitativen Induktion. Hierbei werden keine neuen Erklärungen konstruiert, sondern als gesichert geltende Erkenntnisse zur Erklärung herangezogen. Diese Art des Schließens ist häufig jedoch nicht möglich, wenn die bestehende Theorie Phänomene der Empirie nicht zu beschreiben oder erklären vermag oder mit bestehenden Theorieansätzen widersprüchliche Interpretationen von beobachteten Fällen auftreten, so dass sie geändert oder neu generiert werden muss, damit die empirischen Phänomene erklärbar werden. In diesem Sinne stellt das ‚Versagen' der qualitativen Induktion den Beginn von Theorieentwicklung dar. Es bedarf einer weiteren Schlussform, der Abduktion. Fraglos akzeptierte Annahmen, welche als Grundlage der qualitativen Induktion dienten, werden zur Disposition gestellt und die durch das bis dato geltende theoretische Wissen abgesteckten Grenzen überschritten (vgl. Kelle 1994, S. 161). Das Ergebnis des Schlussvorgangs einer Abduktion stellt die Hypothese dar. Kelle (1994) schreibt hierzu:

„Die Formulierung neuer Hypothesen auf der Basis empirischen Materials beruht nicht auf dem Induktionsprinzip, sondern auf dem von Charles Peirce formulierten Modell des hypothetischen Schließens, in welchem der deduktive Schlussmodus, der in experimentellen Methodologien Anwendung findet, quasi ‚umgedreht' wird: [...] vielmehr wird eine Erklärung für ein neu entdecktes empirisches Phänomen gesucht." (S. 355).

In der Peirce'schen Terminologie stellen abduktive Schlussformen somit den eigentlichen generativen Aspekt von Theorieentwicklung dar, bei dem Theorie aus dem Gegenstand selbst entwickelt wird. Mit Hilfe des abduktiven Schließens ist Peirce zufolge erst Theoriekonstruktion möglich (vgl. Peirce 1991, 5.172). Durch ein unerwartetes Phänomen kann der Forscher oder die Forscherin angeregt sein, neue Regeln zu konstruieren, die dieses Phänomen zu erklären vermögen. Es gibt jedoch für die Generierung abduktiv zu gewinnender Regeln kein eindeutiges Rezept. Somit bedarf es beim abduktiven Vorgehen der Entwicklung eines „Forschungsstils" (Bohnsack 2007, S. 198), der Abduktionen begünstigt. Hierzu lässt sich auf ein zentrales Element des Forschungsstils der Grounded Theory, die komparative Analyse – „constant comparative method" (s. z.B. Strauss/Corbin 1994, S. 273) – verweisen. Die komparative Analyse ist eine Methode der Vergleichsgruppenbildung, die auf allen Ebenen des Forschungsprozesses anzuwenden ist und Abduktionen begünstigt. Durch komparatives Analysieren werden Forschungsprodukte generiert, die als Elemente einer lokalen kontextbezogenen Theorie dargestellt werden können. Somit stellt die komparative Analyse ein permanentes Prinzip qualitativer Theorieentwicklung dar (s. a. Schütte 2009, 92 ff.)

Literatur

Bauersfeld, H. (1978): Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht. Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In: ders. (Hrsg.): Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel Verlag KG: S. 158–170.

Bohnsack, R. (2007): Rekonstruktive Sozialforschung. Einführung in qualitative Methoden. 6. Auflage. Opladen: Barbara Budrich.

Brandt, B. (2004): Kinder als Lernende. Partizipationsspielräume und -profile im Klassenzimmer. Frankfurt am Main: Europäischer Verlag der Wissenschaften.

Fetzer, M. (2007): Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Kelle, U. (1994): Empirisch begründete Theoriebildung. Zur Logik und Methodologie interpretativer Sozialforschung. 2. Auflage. Weinheim: Deutscher Studienverlag.

Krummheuer, G. (2004). "Wie kann man Mathematikunterricht verändern? Innovation von Unterricht aus Sicht eines Ansatzes der Interpretativen Unterrichtsforschung." Journal für Mathematikdidaktik 25(2): 112 - 129.

Krummheuer, G./Naujok, N. (1999): Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung. Opladen: Leske + Budrich.

Peirce, C.S. (1991): Schriften zum Pragmatismus und Pragmatizismus. (Hrsg. Apel, K.-O.). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Schreiber, C. (2010). Semiotische Prozess-Karten. Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen. Münster, New York, München, Berlin, Waxmann.

Schütte, M. (2009): Sprache und Interaktion im Mathematikunterricht der Grundschule. Zur Problematik einer Impliziten Pädagogik für schulisches Lernen im Kontext sprachlich-kultureller Pluralität. Münster u. a.: Waxmann.

Strauss, A./Corbin, J. (1994): Grounded Theory Methodology. In: Denzin, N.K./Lincoln, Y.S. (Hrsg.): Handbook of Qualitative Research. Thousand Oaks/London und New Dehli: Sage, S. 273–285.

Terhart, E. (1978): Interpretative Unterrichtsforschung. Kritische Rekonstruktion und Analyse konkurrierender Forschungsprogramme der Unterrichtswissenschaft. Stuttgart: Klett.

Voigt, J. (1984): Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Weinheim und Basel: Beltz.

Stanislaw SCHUKAJLOW, Kassel

Entwicklung von multiplen Lösungen bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben

1. Konstruktivistische Lerntheorien, Flexibilität und Mobilität von Wissen

Ein wichtiges Forschungsfeld der Lehr-Lernforschung ist die Untersuchung der Frage, wie Wissen und Kompetenzen so vermittelt werden können, dass diese bei Bedarf von Lernenden auch aktiviert werden. Kognitionspsychologisch betrachtet, bedeutet das, statt „träges“ Wissen zu erzeugen (Renkl, 2001) kognitiv anregende Lernumgebungen zu gestalten, in denen mobiles, vielfach einsetzbares, flexibles Wissen erworben werden kann. Die Erhöhung der Flexibilität und der Mobilität des Wissens ist ein Thema in verschiedenen konstruktivistischorientierten Lehr-Lerntheorien und -konzeptionen. Beispielweise nimmt in der kognitiven Theorie von Aebli der Begriff des Durcharbeitens eine zentrale Stellung ein (Aebli, 1983). Demnach soll die Struktur des Lerngegenstandes im Lernprozess durch vielfältige Übungen erfasst werden. Dabei wird das neue Wissen in das alte Begriffsnetz integriert und mit anderen Begriffen vernetzt. Solch eine intensive Vernetzung des neuen Wissens erhöht seine Mobilität, da der Zugriff darauf von verschiedenen Begriffen aus ermöglicht wird. Nun ist es für eine Person leichter, auf das Erlernte bei Bedarf zurückzugreifen.

Ein ähnlicher Wirkungsmechanismus wird in der cognitiv flexibility theory postuliert (Spiro, Coulson, Feltovich & Anderson, 1988). Spiro u.a. plädieren dafür, einen Lerngegenstand aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten. Auf diese Weise können mehrere mentale Repräsentationen aufgebaut werden. Indem der Lerner nun diese einzelnen Repräsentationen zu einer kohärenten, multiplen, mentalen Repräsentation verbindet, schafft er ein flexibles, vielfältig einsetzbares Wissen.

Die genannten Vernetzungsprozesse in Mathematik können u.a. durch die Behandlung von multiplen Lösungen in Gang gesetzt werden (siehe Analyse der Gründe für die Behandlung von multiplen Lösungen bei Schukajlow & Blum, im Druck). Die derzeit vorliegenden empirischen Untersuchungen hierzu betreffen vor allem die Erforschung der gängigen Unterrichtspraxis in Bezug auf den Einsatz von multiplen Lösungswegen. So schreiben Silver et al. (2005), dass die Fähigkeit, eine Aufgaben mit verschiedenen Mitteln zu lösen, zwar mittlerweile zum didaktischen Standard gehört, in der Unterrichtspraxis aber selten umgesetzt wird. Lehrkräfte erklären ihre häufigen Präferenzen für einen Lösungsweg durch die Gefahr, Schüler bei der Präsentation mehrer Lösungswege zu überfordern. In der Tat bringen verschiedene Lösungswege erst dann einen Vorteil, wenn es gelingt diese zu verstehen und aufeinander zu beziehen. Somit reicht es vermutlich nicht, verschiedene Wege zu einer Aufgabe lediglich aufzuschreiben oder gar diese an verschiedenen Aufgaben ohne Gegenüberstellung nacheinander zu präsentieren. Die Lernenden sollten angehalten werden, über Vor- und Nachteile einzelner Lösungswege zu diskutieren und den Lerngegenstand dadurch mental zu durchdringen.

2. Untersuchungen zur Behandlung von multiplen Lösungswegen

Die ersten empirischen Erkenntnisse zu möglichen Unterrichtsszenarien bei der Behandlung von multiplen Lösungswegen liegen bereits vor. Die amerikanische Arbeitsgruppe um B. Rittle-Johnson und J. Star hat z.B. festgestellt, dass eine Gegenüberstellung von multiplen Lösungswegen bei der Bearbeitung von linearen Gleichungen für die Schüler mit ausreichendem Vorwissen besonders günstig erscheint (Rittle-Johnson & Star, 2007). Wohingegen dieses Unterrichtsszenarium für die Schüler ohne Vorwissen keine optimale Lerngelegenheit anbietet. Eine Lernvoraussetzung des Erfolgs dieser Unterrichtsmethode ist die Kenntnis mindestens eines Lösungswegs bei der Lösung von linearen Gleichungen. Andernfalls werden Schüler durch die Gegenüberstellung von zwei unbekannten Lösungswegen kognitiv überfordert. Ein weiterer wichtiger Baustein in der untersuchten Unterrichtsvariante war der Austausch von Lernenden über die Lösungswege bei der Bearbeitung von linearen Gleichungen im Rahmen der Partnerarbeit. Durch die Lösungsbeispiele und gezielte Verstehensfragen angeleitete kooperative Arbeit führte zur Erhöhung des prozeduralen und konzeptuellen Wissens sowie zur stärkeren kognitiven Flexibilität.

Die Wirkung der Behandlung mehrer Lösungswege auf Wissen und Kompetenzen wurde bisher bei Textaufgaben, sowie bei innermathematischen Aufgaben überprüft und mehrheitlich ihre positive Wirkung bestätigt. Als Lernmethode wurde in den vorliegenden empirischen Studien der Unterricht mit Lösungsbeispielen verwendet. Auch bei der Modellierungskompetenz wird eine positive Wirkung der Entwicklung und Gegenüberstellung verschiedener Lösungswege auf Schülerleistungen vermutet und als ein Teil der so genannten operativ-strategischen Unterrichtskonzeption im Rahmen des DISUM-Projektes implementiert (Blum, im Druck).

3. Multiple Lösungen beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben

Die Analyse der Lösungsräume, die bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben vorhanden sind, zeigt, dass diese im Allgemeinen größer als bei geschlossenen Aufgaben sind. Neben multiplen Lösungswegen sind bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben auch multiple Ergebnisse möglich. Multiple Lösungswege und multiple Ergebnisse konstituieren zusammen multiple Lösungen einer Aufgabe. Verschiedene Lösungswege können durch die Auswahl verschiedener mathematischer Werkzeuge gewählt werden. Multiple Ergebnisse werden vor allem durch verschiedene Annahmen bei der Konstruktion eines Realmodells ermöglicht.

Die Gelegenheit, multiple Ergebnisse durch verschiedene Annahmen zu erstellen, ist für Schüler eher ungewohnt. Einige der Lernenden sind durch diese Möglichkeit verunsichert, da diese zu ihrem Mathematikbild nicht passt (Schukajlow, Blum & Krämer, im Druck). Eine offene Frage ist deshalb, wie diese Eigenschaft der Modellierungsaufgaben im Unterricht produktiv genutzt werden kann. Diese, wie auch andere Fragen des Umgangs mit multiplen Lösungswegen und multiplen Ergebnissen bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben, werden im DFG-Projekt MultiMa (Multiple Lösungen im selbständigkeitsorientierten Mathematikunterricht) untersucht. In der ersten Phase des Projekts MultiMa sind Laborsitzungen geplant, in denen die Möglichkeit der Entwicklung von multiplen Lösungen durch Schüler untersucht werden soll. In der nächsten Projektphase wird ein Test entwickelt, der dann in einer experimentellen Vergleichstudie eingesetzt werden soll. In dieser Studie soll die Wirkung der Behandlung von multiplen Lösungen auf den Erwerb von Modellierungskompetenz sowie auf Einstellungen und Überzeugungen der Schüler in selbständigkeitsorientiertem Unterricht untersucht werden.

Literatur

Aebli, H. (1983). Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Stuttgart: Klett-Cotta.

Blum, W. (im Druck). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Hg.), Trends in the teaching and learning of mathematical modelling - Proceedings of ICTMA14. New York: Springer.

Renkl, A. (2001). Träges Wissen. In D. H. Rost (Hg.), Handbuch Pädagogische Psychologie (S. 717-721). Weinheim: Hogrefe.

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. Journal of Educational Psychology, 99(3), 561-574.

Schukajlow, S. & Blum, W. (im Druck). Zur Rolle von multiplen Lösungen in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. In K. Eilerts, A. H. Hilligus, G. Kaiser & P. Bender (Hg.), Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung - Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der empirischen Bildungsforschung und der Mathematik-Didaktik. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens. Münster: LIT Verlag.

Schukajlow, S., Blum, W. & Krämer, J. (im Druck). Förderung der Modellierungskompetenz durch selbständiges Arbeiten im Unterricht mit und ohne Lösungsplan. Praxis der Mathematik in der Schule.

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C. Y. & Font Strawhun, B. T. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. Mathematical Behavior, 24, 287-301.

Spiro, R. J., Coulson, R. L., Feltovich, P. J. & Anderson, D. K. (1988). Cognitiv Flexibility theory: Advanced knowledge aquisition in ill-structured domains. The tenth annual conference of the cognitive science society (S. 375-383). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Andreas SCHULZ, Freiburg

„Konkrete wissenschaftliche Erkenntnisprozesse in qualitativen und quantitativen Studien haben mehr Gemeinsamkeiten als Unterschiede …“

... aus forschungspraktischer UND auch aus methodologischer Perspektive.

... aber sie haben unterschiedliche Stärken und Aufgaben im wissenschaftlichen Forschungsprozess. Im Mixed-Method-Design lassen sich diese Stärken INNERHALB EINER STUDIE kombinieren und nutzen.

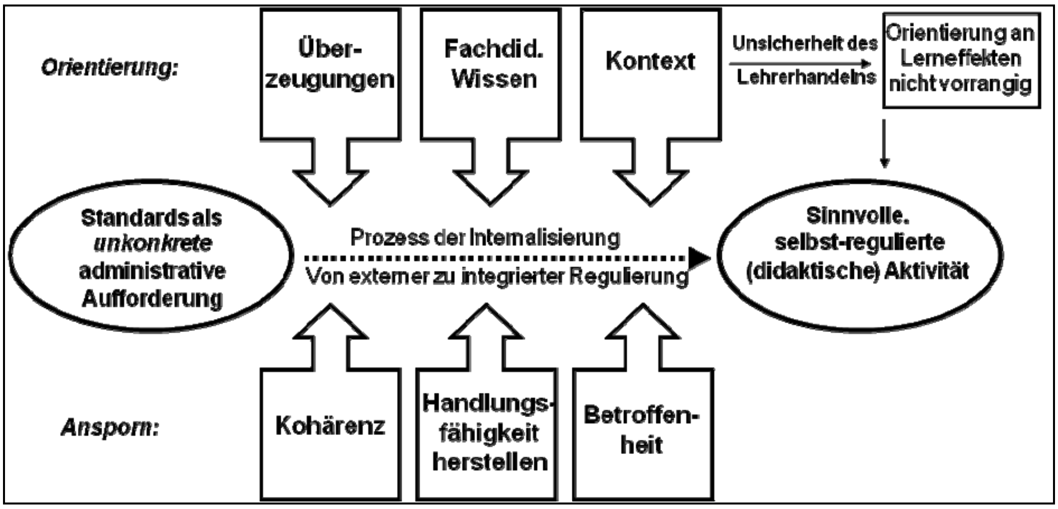
So lauten zwei zentrale Erfahrungen aus einer Studie (Schulz 2010) über Innovationsprozesse bei Mathematiklehrkräften im Zusammenhang mit der Einführung von Bildungsstandards. Es wurden qualitative (Gruppendiskussionen & längsschnittliche Einzelinterviews: thematisch-sequenzielle Textanalyse) und quantitative Forschungsmethoden (Aufgabenanalyse; Fragebogenerhebung: Strukturgleichungsmodell und latente Klassenanalyse) in einem Mixed-Method-Designs (MMD) miteinander kombiniert.

1. INUS-Bedingungen als gemeinsames Kausalitätskonzept qualitativer und quantitativer Forschungsstudien

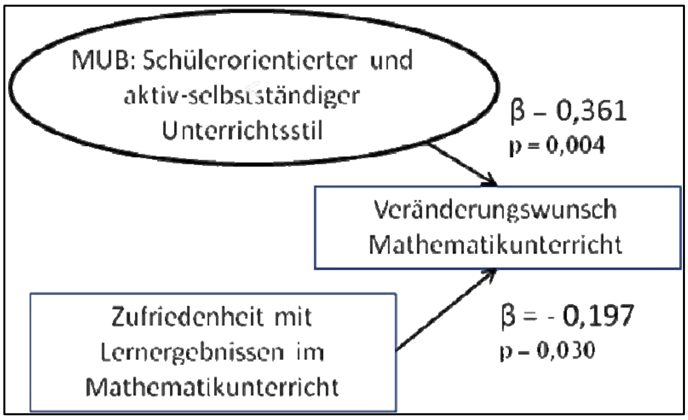
Im Vortrag wurde im ersten Schritt gezeigt, dass die INUS-Bedingungen von Mackie (1974; *an* I*nsufficient but* N*on-redundant part of* U*nnecessary but* S*ufficient condition*) gleichermaßen in qualitativen und quantitativen Studien als grundlegendes Kausalitätskonzept Verwendung finden. Das Kausalitätskonzept der INUS-Bedingungen berücksichtigt sowohl die Pluralität kausaler Pfade als auch das Zusammenwirken mehrerer Bedingungkomponenten und lässt sich mit der folgenden aussagenlogischen Methapher veranschaulichen (vgl. Kelle 2007, 159):

$$... \lor (C_1 \land C_2 \land C_3 \land ...) \lor (C_4 \land C_5 \land C_6 \land ...) \Rightarrow E$$

Eine INUS-Bedingung ($C_{1,2,\,...}$) ist ein selbst nicht hinreichender, aber notwendiger Teil einer Bedingung. Diese Bedingung (ein gesamter Klammerausdruck) ist ihrerseits nicht notwendig, aber hinreichend für einen Ereignistyp E. Im Vortrag wurde dies zunächst mit dem Beispiel einer Einzelfallrekonstruktion aus der Dissertationsstudie erläutert und illustriert. Die Komponenten $C_{1,2,\,...}$ innerhalb einer Klammer repräsentieren dabei solche „Ziele“, „externe Bedingungen“ und „Handlungsregeln“ (vgl. Kelle 2007, 265-266), die spezifische Innovationshandlungen „E“ einer einzelnen analysierten Lehrkraft erklären können. Generalisiert und losgelöst von solchen konkret erfassten Bedingungen (als Ursache) und Innovationsprozessen (als Resultat) wurden in der Dissertation im nächsten Schritt alle erfassten Innovationsprozesse zusammenfassend als „*sinnstiftende & selbstregulierte (didaktische) Aktivitäten der Mathematiklehrkräfte*“ (Schulz 2010, 211) charakterisiert. Derart wurde das „Systematische“ und „Gemeinsame“ aller erfassten Innovationsprozesse als „Ereignis E“ herausgearbeitet. Unter dieser zweiten generalisierenden Perspektive (nach der ersten konkreteren Perspektive der Einzelfallrekonstruktion) veranschaulichen die in Klammern zusammengefassten INUS-Bedingungen und Bedingungsbündel den Übergang zu einer Typologie, die ein Ereignis „E“ (jetzt: Innovationsprozesse generell) erklärbar und verständlich machen. Für die tatsächliche Erarbeitung einer Typologie wäre jedoch im Rahmen der Dissertation eine, zumindest tendenzielle, „theoretische Sättigung“ der analysierten Einzelfälle notwendig gewesen, die angesichts des insgesamt sehr aufwändigen Gesamtdesigns nicht realisiert werden konnte. Daher konzentrierte sich die Einzelfallanalyse im Rahmen der Dissertation (Schulz 2010, 148-217) auf die Identifikation der maßgeblich relevanten „Ziele“, „Kompetenzen“, „externen situativen Bedingungen“ und „Handlungsregeln“ von Mathematiklehrkräften, die mit deren Innovationsprozessen im Zusammmenhang stehen. Das systematisierte Ergebnis wurde über eine Anbindung an bestehende Forschungsbefunde und sozialwissenschaftliche Handlungstheorien weiter abgesichert und ausdifferenziert und führte zu einem Modell über die „*Umsetzung von Bildungsstandards durch Lehrkräfte*“ (Schulz 2010, 211&344):

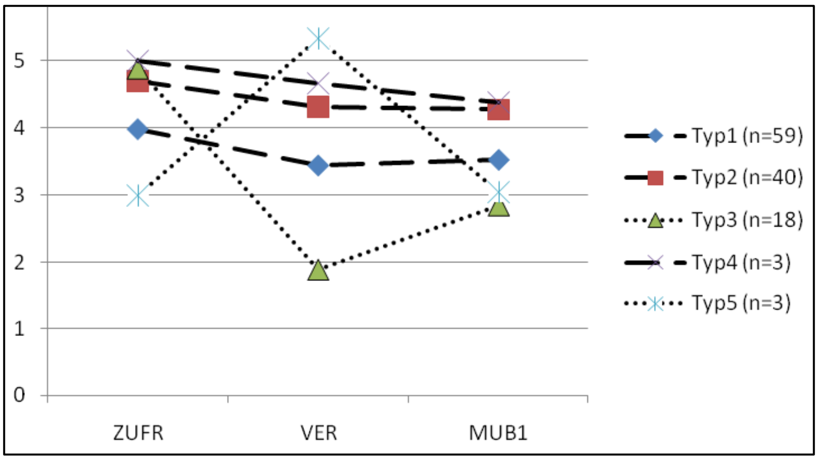


Im Rahmen der Dissertation im MMD diente das Modell auch als Schnittstelle zwischen den Befunden der qualitativen und quantitativen Teilstudien. Dies wurde im Vortrag an einer Teilaussage des Modells veranschaulicht: „*In den Innovationsprozessen von Mathematiklehrkräften spielen kriterienbasierte, an den Unterrichtszielen der Bildungsstandards orientierte Überprüfungen von Lernfortschritten und des Lernstandes von Schülern durch die Lehrkräfte keine Rolle.*“ Dies widerspricht dem bildungspolitisch propagierten Ansatz der Ergebnisorientierung. Als relevanter für Unterrichtsinnovationen haben sich hingegen, wie es das Modell zum Ausdruck bringt, sinnstiftende Aktivitäten der Lehrkräfte herausgestellt, die u. a. stark mit deren Überzeugungen zum Lernen und Lehren im Mathematikunterricht im Zusammenhang stehen. Dieser qualitative Befund ließ sich als Hypothese in einem Strukturgleichungsmodell, basierend auf Fragebogendaten (n = 123), überprüfen (hier stark vereinfachtes Modell, Schulz 2010, 323&369):



Im Vortrag diente dieses Beispiel dazu, die Passung zwischen Korrelation (standardisierte Betagewichte entsprechen hier Korrelationen) und dem Kausalitätskonzept der INUS-Bedingungen zu veranschaulichen: Wenn C_1 die Variable MUB repräsentiert und weitere Variablen bzw. C_i als INUS-Bedingungen konstant gehalten werden, stellt die Korrelation 0,361 den isolierten Zusammenhang zwischen C_1 und E (jetzt: Veränderungswunsch) dar.

Entsprechend der Hypothese (auf Grundlage der qualitativen Befunde) wäre kein signifikanter Zusammenhang zwischen „Zufriedenheit“ (ZUFR) und „Veränderungswunsch“ (VER) zu erwarten gewesen. Daher wurde der gleiche Datensatz nachfolgend mit einer latenten Klassenanalyse (LCA) zur Erklärung des Zusammenhangs zwischen den Variablen ZUFR und VER untersucht. Im Vortrag diente dieses Beispiel auch dazu, nochmals die Passung zwischen dem Kausalitätskonzept der INUS-Bedingungen und einer Typologie zu veranschaulichen, die im Diagramm der LCA durch die Profile der fünf Lehrertypen auf den drei Variablen ZUFR, VER (als „E“) und MUB (hier reduziertes Modell, Schulz 2010, 330&371) veranschaulicht wird. Lediglich Typ 5 (gepunktet



mit Kreuz) mit 3 Personen (von 123) drückt Unzufriedenheit (ZUFR) und gleichzeitig einen Veränderungswunsch (VER) aus. Insgesamt stützt die Interpretation der Typen die Hypothese aus den qualitativen Befunden und veranschaulicht den Vorteil einer Methodenkombination zum tieferen Verständis von (hier statistischen) Befunden.

2. Spezifische Stärken qualitativer oder quantitativer Studien nutzen

Vor dem Hintergrund dieser MMD-Studie und mit weiteren Beispielen ließen sich im Vortrag spezifische Stärken einzelner Methoden in methodenintegrativen Forschungsdesigns veranschaulichen (vgl. Kelle 2007, 282ff): Qualitative Studien können dazu dienen, unerwartete oder irreführende statistische Befunde zu erklären, was im konkreten Beispiel auch mithilfe einer weiteren quantitativen Methode (latente Klassenanalyse) gelang. Zudem unterstützen qualitative Studien eine bessere Varianzaufklärung zentraler Variablen: Sie helfen, neue Variablen als INUS-Bedingungen und Effekte zu identifizieren. Quantitative Methoden sind notwendig, um den Einfluss isolierter Bedingungen abschätzen zu können: Dies ist mit Fallanalysen kaum möglich, da Bedingungen immer im Bündel auftreten und erst quantitative Häufigkeitsanalysen zielführend sind. Auch die Generalisierbarkeit von Befunden vermögen vorrangig quantitative Studien abzuschätzen. Im Gegensatz zu monomethodischen Designs können sich methodenintegrative Studien alle diese Vorteile zunutze machen.

3. Weitere Vorteile von Forschung im Mixed-Method-Design

Die konkret diskutierte Studie (Schulz 2010) veranschaulicht weitere Vorteile eines MMDs: So ließen sich die Perspektiven der Lehrkräfte und solche des Bildungssytems in der Gesamtstudie integrieren, und damit verbunden auch spezifische und unterschiedliche Hintergrundtheorien. Als wesentlicher Vorteil ist abschließend der Nutzen hervorzuheben, der sich aus der Kombination von explorativen und konfirmatorischen Arbeitsschritten innerhalb einer komplexeren Forschungsstudie im MMD für die theoretische Elaborierung und empirische Belastbarkeit der Befunde ergibt.

Literatur

Kelle, U. (2007): Die Integration qualitativer und quantitativer Methoden in der empirischen Sozialforschung. Wiesbaden: VS Verlag.

Mackie, J. (1974): The cement of the universe: A study of causation. Clarendon library of logic and philosophy. Oxford: Clarendon Press.

Schulz, A. (2010): Ergebnisorientierung als Chance für den Mathematikunterricht? Innovationsprozesse qualitativ und quantitativ erfassen. München: Utz Verlag.

Axel SCHULZ, Bielefeld

Fachdidaktische Kompetenzen von Grundschullehrerinnen

Ziel des Projekts ist die Beschreibung und Erfassung fachdidaktischer Kompetenzen von Grundschullehrkräften. Dabei liegt der inhaltliche Fokus auf der Diagnose und der Intervention bei problematischen Lernverläufen in der Arithmetik. Die Formulierung der fachdidaktischen Kompetenzen orientiert sich an empirischen Ergebnissen und theoretischen Überlegungen über Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern.

Theoretische Vorüberlegungen

Fachdidaktische Kompetenzen von Lehrerinnen und Lehrern stehen seit einigen Jahren im Fokus der nationalen und internationalen mathematikdidaktischen Forschung. Dabei wird dieses Thema auf drei Ebenen betrachtet. (1) Die Basis der aktuellen Auseinandersetzungen stellen grundlegende *theoretische* Überlegungen z. B. von Shulman (1986) oder Bromme (1992) dar. (2) In *empirischen* Studien zur Beschreibung und Erfassung von Lehrerkompetenzen (auch von fachdidaktischen Kompetenzen) werden diese Überlegungen zugrunde gelegt, z. B. bei Krauss et al. 2004 (COAKTIV), Döhrmann, Kaiser, & Blömeke 2010 (TEDS-M). (3) Auf einer weiteren Ebene finden sich *normative* Vorgaben, die sich mehr oder weniger an den theoretischen Überlegungen und empirischen Ergebnissen orientieren, z. B. in den formulierten Standards für die Lehrerbildung (KMK 2004).

Bei der Analyse der empirischen Studien wird deutlich, dass diese häufig eine quantitative Ausrichtung haben. In den meisten Studien werden neben fachdidaktischen vor allem fachmathematische Kompetenzen von Lehrkräften der *Sekundarstufe* analysiert. Auch in einer aktuellen, ebenfalls quantitativ angelegten Studie zur Erfassung professioneller Kompetenz von angehenden Lehrkräften der Primarstufe ist dieser *fachmathematische* Schwerpunkt zu erkennen (74 Items fachmathematisch, 32 Items fachdidaktisch) (vgl. Döhrmann, Kaiser, & Blömeke 2010). Zur Validierung der Studie wurden normative und inhaltsunspezifische Standards und Empfehlungen zugrunde gelegt (vgl. ebd.).

Zusammenfassend ist zweierlei zu konstatieren: Einerseits sind konkret inhaltbezogene fachdidaktische Kompetenzen von Lehrkräften der Primarstufe weitgehend unerforscht. Darüber hinaus bleiben theoretische und empirische Grundlagen über Faktoren gelingender und misslingender Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern als Basis für die Überlegungen zur Formulierung und Erhebung von fachdidaktischen Kompetenzen meist unberücksichtigt. Daher ist das Ziel des vorliegenden Projekts die Beschreibung und Erfassung fachdidaktischer Kompetenzen von Lehrkräften der Primarstufe. Die Formulierung dieser Kompetenzen basiert auf theoretischen Konstrukten und empirischen Ergebnissen zu Lernprozessen von Schülerinnen und Schülern und wird auf dieser Grundlage validiert.

Lernprozesse im Arithmetikunterricht

Als Basis für die Formulierung fachdidaktischer Kompetenzen werden im Folgenden einzelne Aspekte von Lernprozessen in der Arithmetik betrachtet. Lernprozesse sind weder geradlinig, noch können sie einheitlich für alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen im Vorfeld vorausgesehen und beschrieben werden. Was jedoch möglich ist, ist die Beschreibung angestrebter Lernziele und der Lernprozesse, die zur Erreichung dieser Ziele günstig sind. Darüber hinaus kann versucht werden, Hürden im Lernprozess zu identifizieren, die, wenn sie nicht erkannt werden und das betreffende Kind nicht entsprechend unterstützt wird, zu lang anhaltenden Problemen beim Lernen von Mathematik führen können (vgl. z.B. Moser Opitz 2009). Für den Bereich des Arithmetikunterrichts in der Primarstufe lassen sich vor allem zwei Inhaltsbereiche identifizieren, in denen besonders schwerwiegende und langfristige Schwierigkeiten beim Mathematiklernen auftreten können (vgl. Schipper 2009, Scherer & Moser Opitz 2010): Dies sind auf der einen Seite der Lernprozess vom Zählen hin zu nichtzählenden Rechenstrategien bis in den Zahlenraum bis 100, auf der anderen Seite die Entwicklung eines Verständnisses des Stellenwertprinzips als Grundlage für das Zahl-, das Operations- und das Strategieverständnis. Sowohl für den einen als auch den anderen Inhaltsbereich lassen sich aus empirischen Untersuchungen mögliche Hürden und notwendige Voraussetzungen im Lernprozess zusammenfassen, auf deren Grundlage sich notwendige mathematikdidaktische Kompetenzen formulieren lassen.

Beschreibung mathematikdidaktischer Kompetenzen

In dem vorliegenden Projekt beschränkt sich die Beschreibung fachdidaktischer Kompetenz auf zwei Aspekte, erstens auf die diagnostische Kompetenz und zweitens auf die Interventionskompetenz von Lehrkräften. Beide Begriffe bzw. die zugrundeliegenden Begriffsfelder werden weder innerhalb der mathematikdidaktischen Literatur noch im Vergleich zu den Bezugswissenschaften einheitlich genutzt. Vergleicht man beispielsweise die beiden Studien COAKTIV und die TEDS-M, wird deutlich, dass die Verortung der diagnostischen Fähigkeiten einer Lehrkraft im theoretischen Konstrukt sich erheblich unterscheidet. Diese unterschiedlichen Verortungen erschweren einen inhaltlichen Vergleich der beiden Konstrukte vor allem deshalb, weil sie in beiden Fällen inhaltsunspezifisch sind bezogen auf die

Frage, auf welchen Lerninhalt sich die diagnostischen Fähigkeiten beziehen (vgl. Krauss et al. 2004, Döhrmann, Kaiser, & Blömeke 2010). In der pädagogischen Psychologie hingegen ist „Diagnostischen Kompetenz“ ein feststehender Begriff, wobei ein „etablierter Indikator zur Beurteilung der Güte diagnostischer Urteile […] primär auf sozialen Vergleichen [beruht]“ (vgl. Lorenz & Artelt 2009). Aus diesem Grund wird für das vorliegende Projekt eine Begriffsklärung notwendig.

In unserer Studie wird unter der diagnostischen Kompetenz das Wissen um problematische Lernverläufe im jeweiligen Inhaltsbereich verstanden. Dazu gehören auch das Erkennen, Benennen und Beschreiben von Risikofaktoren und von typischen Anzeichen problematischer Lösungsprozesse und -produkte. Darüber hinaus umfasst sie die Fähigkeit, entsprechende Beobachtungsschwerpunkte abzuleiten und diagnostische Aufgabenstellungen zu entwickeln. Diagnostische Kompetenz wird also nicht verstanden als inhaltsunspezifische, allgemeine Fähigkeit, sondern ist stets an einen Lerninhalt gebunden (vgl. Scherer & Moser Opitz 2010). Das bedeutet, dass diagnostische Kompetenz an dieser Stelle ausschließlich als Fähigkeit beschrieben wird, den *inhaltlichen Lernstand* eines oder mehrerer Schüler(s) festzustellen, nicht aber als Fähigkeit, Aussagen zur Leistungsmessung und über Vergleiche von Schülerleistungen im Klassenverband treffen zu können (vgl. Lorenz & Artelt 2009).

Interventionskompetenz wird im vorgestellten Projekt verstanden als das Kennen, Formulieren und Begründen zielführender Handlungsoptionen zur Prävention von bzw. Intervention bei problematischen Lernverläufen. Diese Interventionen sollen sich sowohl am zu vermittelnden Inhalt als auch am jeweiligen Kind und seinen Fähigkeiten und Vorkenntnissen orientieren. Interventionskompetenz umfasst also die *Formulierung von geeigneten Aufgaben* bzw. *Handlungsoptionen* bezogen auf erkannte Hürden im Lernprozess, meist bezogen auf einzelne Schülerinnen und Schüler. Es geht weder um die Bewertung des didaktischen Potenzials von Aufgaben noch um unterrichtspraktische Umsetzungen (vgl. Krauss et al. 2004).

Erfassung mathematikdidaktischer Kompetenzen

Zur Erfassung der beiden genannten Kompetenzen, wurde ein leitfadengestütztes Interview entwickelt, in welchem unter anderem Schülerdokumente und videographierte Schülerhandlungen vorgelegt werden. Die Videosequenz und die Schülerdokumente wurden so ausgewählt, dass sie typische Anzeichen für mögliche Schwierigkeiten bei der Entwicklung des Stellenwertverständnisses und bei der Ablösung vom zählenden Rechnen widerspiegeln. Das Interview wurde mit 20 Lehrkräften aus Bielefelder Grundschulen durchgeführt.

Die Darstellung und Analyse der Ergebnisse dieser qualitativen Studie erfolgt auf zwei Ebenen. Zunächst wird überprüft, inwiefern die in dieser Arbeit theoretisch abgeleiteten und beschriebenen Kompetenzen mittels des entwickelten Erhebungsinstruments erfasst werden können. Darüber hinaus sollen die Antworten der befragten Lehrkräfte auf Grundlage der formulierten Kompetenzen gedeutet werden, um ggf. Rückschlüsse auf ihr Handlungswissen im Unterricht ziehen zu können, indem z.B. Diskrepanzen zwischen passivem (Studiums-) Wissen und aktivem Handlungswissen herausgearbeitet werden.

Literatur

Bromme, R. (1992). Der Lehrer als Experte: zur Psychologie des professionellen Wissens. Bern, Göttingen, Toronto: Huber.

Döhrmann, M.; Kaiser, G. & Blömeke, S. (2010) Messung des mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens: Theoretischer Rahmen und Teststruktur. In: S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg.) TEDS-M 2008 Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann, 169-194.

KMK – Sekretariat der ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004). Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_12_16-Standards-Lehrerbildung.pdf Letzter Zugriff März 2011

Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A. & Löwen, K. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.) Die Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung. Münster: Waxmann 31-53.

Lorenz, C. & Artelt, C. (2009). Fachspezifität und Stabilität diagnostischer Kompetenz von Grundschullehrkräften in den Fächern Deutsch und Mathematik. Zeitschrift für pädagogische Psychologie, 23 (3-4), 211-222.

Moser Opitz, E. (2009). Erwerb grundlegender Konzepte der Grundschulmathematik als Voraussetzung für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.) Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Weinheim und Basel: Beltz, 29-45.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15 (2), 4-14

Heinz SCHUMANN, Weingarten

Tetraedergeometrie – eine raumgeometrische Theorie-Entwicklung

Was Du ererbt von Deinen Vätern hast, erwirb es, um es zu besitzen.
(**J. W. v. Goethe, Faust I**)

Mehrere Gründe haben zur Entwicklung einer „Elementaren Tetraedergeometrie" Anlass gegeben:

– Interaktive Dynamische Raumgeometrie-Systeme eröffnen einen direkten Zugang zu den Phänomenen der elementaren Raumgeometrie; sie machen Raumgeometrie für einen breiten Adressatenkreis erst richtig zugänglich. Es stellt sich aber die Frage nach der Anwendung der mathematischen Standardmethode der Erkenntnisbildung durch Beweisen, hier den Beweisen der im virtuellen Raum gefundenen bzw. repräsentierten raumgeometrischen Aussagen.

– Die Vernetzung von ebener und räumlicher Geometrie, die Stärkung der Raumgeometrie und der Raumanschauung, wie es von Felix KLEIN im 1909 erschienenen Band „Geometrie" seiner „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus", gefordert wird:

– „*Es ist nämlich von altersher auf der Schule wie auf der Universität üblich, erst die Geometrie der Ebene und dann ganz abgesondert davon die des Raumes zu behandeln; dabei kommt die* ***Raumgeometrie*** *aber leider oft zu kurz, und das edle Organ der* ***Raumanschauung****, das wir von Hause aus besitzen, verkümmert. Demgegenüber wollen die „Fusionisten" von vornherein* ***Ebene und Raum gleichzeitig nebeneinander behandeln****, um unser Denken nicht erst künstlich auf zwei Dimensionen zu beschränken.*" (Hervorhebungen durch den Autor)

– Der Verlust der Auffassung von (synthetischer) Geometrie als Musterbeispiel für lokal-deduktive Theoriebildung in der Art von zu entwickelnden Begriffs- und Satzgefügen im heutigen Curriculum allgemeinbildender Schulen und in der Lehrerausbildung.

– Die Vernachlässigung des Geometrielernens als verstehende Rezeption von Begriffen, Sätzen und Beweisen, – einer seit über 2000 Jahren geübten Methode der Aneignung von Wissen.

– Das Anwendung und Erweiterung der elementaren Dreiecksgeometrie.

- Das Praktizieren des Analogisierens, einer effektiven und weitreichenden Methode der Erkenntnisgewinnung.

Und schließlich:

- Das Fehlen einer für einen breiten deutschsprachigen Adressatenkreis verfügbaren reichhaltigen Monografie über „Elementare Tetraedergeometrie“ als ein bedeutendes räumliches Analogon der Dreiecksgeometrie.

Der Autor hat es als didaktische Aufgabe angesehen, eine „Elementare Tetraedergeometrie“ durch räumliche Analogiebildung zu entwickeln, die von der Dreiecksgeometrie ausgeht, wichtige Begriffe, Sätze und Beweise der Tetraedergeometrie enthält und sich vor allem an folgende Adressaten richtet: Studierende für das Lehramt Mathematik, mit der Lehrerbildung befasste Lehrkräfte, Schüler/Schülerinnen mathematischer Zirkel, Schüler/ Schülerinnen der Mittelstufe und der Sekundarstufe II, Mathematiklehrer und -lehrerinnen und am Thema interessierte Laien. – Natürlich gibt es nicht zu jedem Satz über Dreiecke einen analogen über Tetraeder, der richtig ist; das führt oft zu herausfordernden Problemen. Auf andere Analogisierungen, nämliche die der Geometrie des Dreiecks zu der des Dreiecks auf der Kugel oder zu der Geometrie der dreiseitigen räumliche Ecken wird nicht eingegangen, obwohl Verbindungen zur Geometrie des Tetraeders bestehen.

Unter „**Elementarer** Tetraedergeometrie“ verstehen wir im Zusammenhang mit dieser Arbeit folgendes: Als **elementar** soll jene Tetraedergeometrie bezeichnet werden, soweit sie in etwa berücksichtigt: die Tetraedergeometrie des dreidimensionalen euklidischen Raumes, die im historischen Überblick von ZACHARIAS, M.: *Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung* (1913). (In: Meyer/ Mohrmann (Hg.), Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften III, 1.2, Leipzig: Teubner, 1904-1935) genannten tetraedergeometrischen Erkenntnisse der zweite Hälfte des 18. und des gesamten 19. Jahrhunderts, – und auch die neueren stoffdidaktischen Arbeiten über das Tetraeder von ca. 1980 an.

Was die Tetraedergeometrie bzw. die Theorie der Simplizes im n-dimensionalen reellen euklidischen Raum anlangt, so basieren die dort geführten Beweise im Wesentlichen auf denen des dreidimensionalen euklidischen Raumes.

Hätte es nicht nahegelegen, einfach ein Buch oder einen Buchbeitrag über Tetraedergeometrie aus einer anderen Sprache ins Deutsche zu übertragen – oder entsprechende deutsche fachgeometrische Beiträge zu kompilieren?

Leider richten sich solche Arbeiten i. A. an eine spezielle Leserschaft, die schon über eine höhere geometrische Bildung verfügt; sie sind deshalb für die ins Auge gefassten Adressaten nicht geeignet. Die vorgenommene didaktische Elementarisierung im Hinblick auf die genannten Adressaten besteht in Folgendem:

- Einzelthemen möglichst auswahlweise und isoliert behandelbar
- Lokal-deduktives Vorgehen
- Einfache räumliche Aussagen können vorausgesetzt werden; keine Beweise evidenter Aussagen; keine Axiomatik
- Vor allem synthetische Beweise; vektorielle Beweise nur dort, wo die synthetischen nicht ausreichen
- Beweise auf dem in der Elementargeometrie üblichen Strengeniveau
- Benutzung räumlicher Beweisfiguren
- Redundante verbale Beweisführungen; Minimalisieren formaler Beschreibungen
- Anwendung heuristischer Strategien, vor allem des Analogisierens: „Vom Dreieck zum Tetraeder !“.

Im Zusammenhang mit der Behandlung raumgeometrischer Themen betonen wir die Rolle der Raumanschauung, wie sie Felix KLEIN folgendermaßen gewürdigt hat:

„Die Kritik, der die Genauigkeit unserer Raumanschauung unterliegt, hat ja die reinen Mathematiker in der Neuzeit vielfach dazu geführt, sie aus den mathematischen Betrachtungen überhaupt auszuschalten. Dem gegenüber habe ich immer daran festgehalten, dass die Anschauung gerade auch in der Mathematik als eine unsere wichtigsten Fähigkeiten angesehen und gepflegt werden muß, indem wir sie durch bewußte Erziehung vervollkommnen.“ (Aus: Felix KLEIN. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. 2. Band. 1922).

Insofern kommt der räumlichen Beweisfigur eine zentrale Rolle zu. In die Raumfiguren muss man sich aber „hineindenken“ und sie richtig „lesen“ lernen, was u. a. die Raumvorstellung trainiert. Anzustreben ist eine mentale Repräsentation der Raumfiguren. Eine digitale Version des Buches als Hypertext unterstützt den Leser dabei; sie besteht aus einer pdf-Datei, deren farbige Abbildungen mit den entsprechenden Cabri 3D-Dateien verlinkt sind. Nach dem Anklicken der betreffenden Abbildung in der pdf-Datei öffnet sich die zur Abbildung gehörende Cabri 3D-Datei in einer vorher zu installierenden kostenfreien Demo-Version von Cabri 3D. Die entsprechenden Raumfiguren kann man dann im virtuellen Raum direkt manipulieren, um sie von allen Seiten zu betrachten, um sie zu vergrößern und um sie in ihrer Form zu verändern.

Welche Inhalte und in welcher Reihung?

Die Inhalte sollen denen der elementaren Dreiecksgeometrie entsprechen. Es wird aber eine andere Reihung der Inhalte vorgenommen: Zuerst werden, quasi zur „Aufwärmung", besondere Tetraeder behandelt, denen gleichseitige und rechtwinklige Dreiecke entsprechen und deren Bearbeitung ohne Kenntnis der Aussagen über das allgemeinen Tetraeder auskommt. Es sind dies das regelmäßige, das gleichseitige und das rechtwinklige Tetraeder, – als Beispiel für einen Tetraedertyp, der sich nicht durch eine Analogisierung eines Dreieckstyps ergibt, steht das „rechteckige" Tetraeder. Das hat den Vorteil, sich am Anfang nicht gleich mit der Komplexität des allgemeinen Tetraeders befassen zu müssen, so dürften das regelmäßige und das rechtwinkligen Tetraeder vielen Lesern schon bekannt sein.

Die Themen des allgemeinen Tetraeders entsprechen dem klassischen Themenkanon des allgemeinen Dreiecks. Die Konstruktionen und Berechnungen des Tetraeders sind aber nicht so einfach zu beherrschen wie die des Dreiecks; es gibt beim Tetraeder keine so schön geschlossenen Darstellungen dafür. Für die Berechnungen am Tetraeder werden auch mathematische Assistenzprogramme eingesetzt. Zusätzlich wurde ein Teilkapitel über Ungleichungen am Tetraeder aufgenommen, die im Rahmen der elementaren Dreiecksgeometrie vergleichsweise keine Beachtung findet – die Ungleichungslehre ist in den aktuellen Bildungsplänen fast total eliminiert worden! Mit dem Satz von Ceva gewinnt man ein Beweisprinzip für die Aussagen über besondere Punkte im Tetraeder in Analogie zu solchen für das Dreieck. Das Kapitel über das allgemeine Tetraeder wird abgerundet durch fünf verschiedene Einzelthemen. Das Tetraeder in Form der geraden dreiseitigen Pyramide stellt sich als Analogon des gleichschenkligen Dreiecks heraus. Anschließend werden Sätze über das allgemeine Tetraeder auf die Bearbeitung weiterer besonderer Tetraeder, nämlich die Tetraeder mit Höhenschnittpunkt, mit kantenberührender Kugel und mit gleichen Gegenkantenprodukten angewendet. Angefügt werden noch einige grundlegende Begriffe und Aussagen der Raumgeometrie sowie eine Systematik raumgeometrischer Konstruktionen, worauf der Leser bei Bedarf zurückgreifen kann.

Literatur

Schumann, H.: Elementare Tetraedergeometrie · Eine Einführung in die Raumgeometrie. Hildesheim und Berlin: Franzbecker 2011 – und die dort angegebene Literatur.

Inge SCHWANK, Osnabrück

Arithmetisches Denken pflegen

1. Mathe-Magie: Osnabrücker Treffpunkt „Mathematische Frühförderung“

Seit gut 10 Jahren werden an unserem Treffpunkt „Mathematische Frühförderung“ unterschiedlichste Aktionen unternommen, um Kinder, Erzieherinnen und Lehrerinnen auf dem Weg der Entwicklung eines mathematischen Verständnisses zu begleiten und zu unterstützen.

Ein Leitgedanke ist dabei, Kinder in das „*Denken in Zahlen*“ einzuführen. Von besonderer Bedeutung ist die Entwicklung eines *Zahlenkonstruktionssinns*, der – zunächst gedacht als Verständnis der grundlegenden Operationen des Eins-weiter-, Eins-zurück-laufens – die Basis für weiterreichende Operationen mit Zahlen darstellt (vgl. Dantzig, 1930; Brainerd, 1979).

In Anlehnung an das Triple-Code-Model von Dehaene (1992) gestalten wir unser Z^4-Modell (Abb.1). Zusätzlich zu Dehaenes Vorschlag wird die Möglichkeit der Beeinflussung der individuellen Vorstellung von Zahlideen durch Zahlidee bezogene Ereignisse fokussiert und die Beschriftung der Komponenten dem mathematikdidaktischen Sachverhalt angepasst.

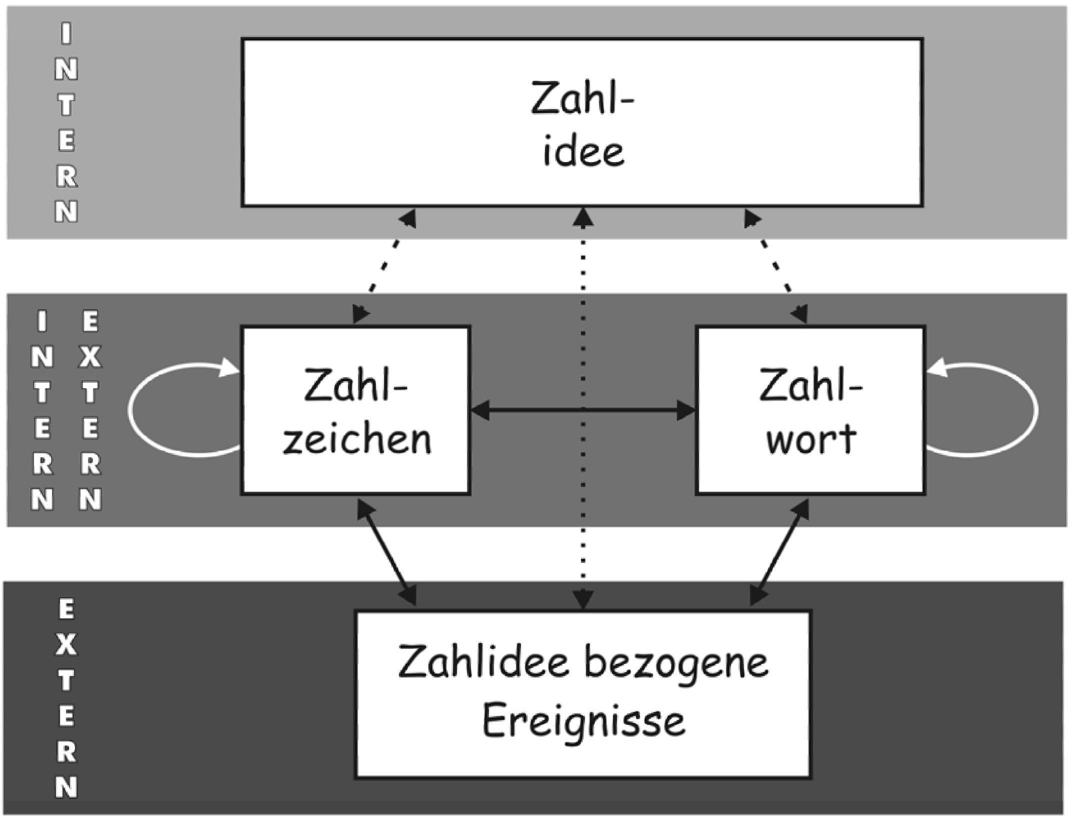


Abb. 1: Z^4-Modell

Mit den unterschiedlichen Linientypen (s. Abb. 1) werden Unterschiede im Grad des Geklärtseins der verschiedenen Beziehungen ausgedrückt. Insbesondere der Zusammenhang von Zahlidee und Zahlidee bezogenen Ereignisse (gepunktete Linie) ist noch kaum in größerer Präzision verstanden.
Beachtenswert ist (weiße Linien), dass sowohl die Zahlwörter wie auch die Zahlzeichen abgekoppelt von Bedeutung benutzt werden können.

Zum Erlernen der Zahlzeichen sind Spiele sinnvoll, in denen Kinder sowohl mit den Gestaltmerkmalen der Zahlzeichen als auch mit den Bewegungsabläufen für die späteres Schulschrift vertraut werden (Schwank 2010a).

Mathematischen Spielwelten sind besonders wertvoll, um Kinder in die operativen Zahlaufbauten einzuführen. Günstig ist, bei der Konstruktion die Schreibweise von Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem zu berücksichtigen, also zunächst die Zahlen von 0 bis 9 (Abb. 2) und anschließend z.B. die Zahlen von 10 bis 19 zu behandeln (Schwank 2010b, c).

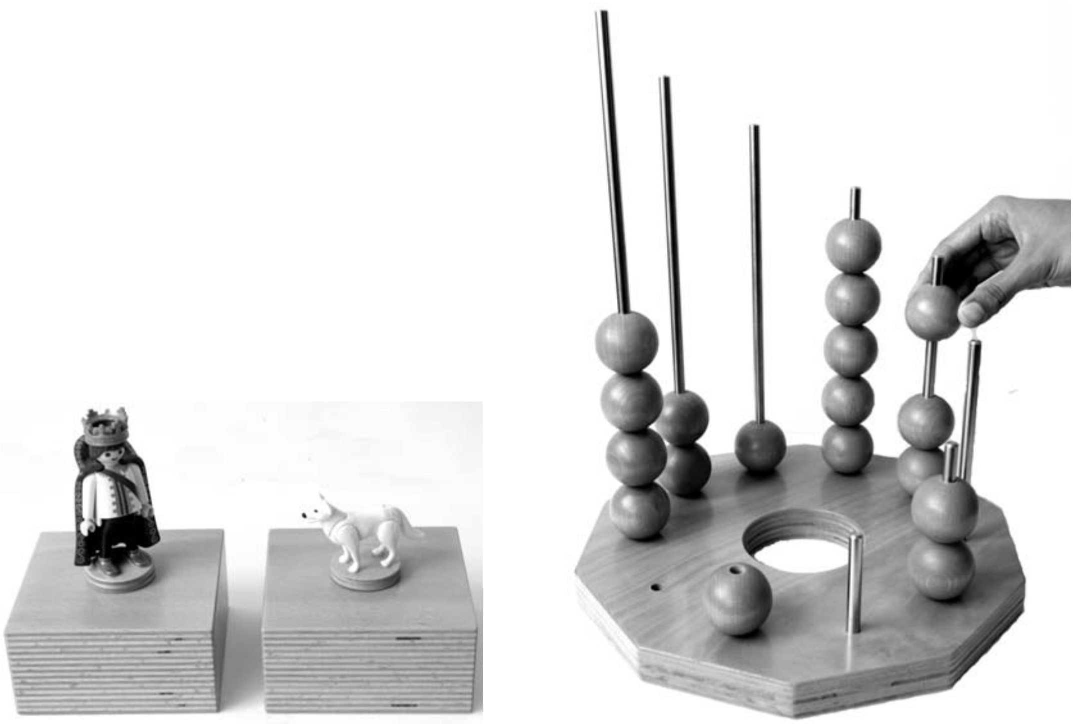


Abb. 2: Rechenwendeltreppe zum Spielen im Kindergarten.
Es gibt Plätze von null bis neun Kugeln. Figuren laufen auf der „Treppe“ hinauf und hinunter. Noch ist die „Treppe“ nicht vollständig aufgebaut und die Figuren warten noch auf ihren Einsatz.

Der Aufwand solcher Spielwelten lohnt sich, da auf diese Weise Kinder, denen eine funktional-logische Sichtweise weniger liegt, gleichwohl in ein Denken in Tätigkeiten und Prozessen im Zusammenhang mit Zahlen eingeführt werden können (Schwank 2003, 2005, 2011).

2. Osnabrücker Zwergen-Mathe-Olympiade [ZMO]

Die Zwergen-Mathe-Olympiade, die für die 3. Klassen der ca. 120 Grundschulen in Stadt und Landkreis Osnabrück seit 2001 angeboten wird, liefert uns reichhaltiges Material zu arithmetischen Problembearbeitungen von mittlerweile über 1400 Kindern. Aufgrund der Wettbewerbsregeln nehmen gleich viele Mädchen wie Jungen teil.

Beispiel für eine besonders herausfordernde Aufgabe: „Zirkus Knobelix“
Im Zirkus Knobelix sitzen 224 Zuschauer. Es sind 38 Erwachsene mehr als Jungen und 6 Jungen mehr als Mädchen. Wie viele Mädchen, Jungen und Erwachsene sitzen auf den Zuschauerbänken?

	Mädchen	**Jungen**
Diamant	1 (3)	3 (3)
Gold	2 (10)	9 (17)
Silber	2 (41)	5 (36)
Bronze	0 (32)	1 (30)
Gesamt	**5 (86)**	**18 (86)**

Tab. 1: Bearbeitungserfolg, aufgeschlüsselt nach Geschlecht und Leistungsgruppe (in Klammern ist die jeweilige Gruppengröße notiert):

Dass die Aufgabe unterschiedlich häufig erfolgreich bearbeitet wurde, ist typisch: Kann auf keine Routine zurückgegriffen werden, gelingt es bislang in der ZMO Jungen eher als Mädchen, an Zahlen im funktional-logischen Sinn herumzubasteln und sich so einen Weg hin zum Ergebnis zu bahnen. Als guten Startpunkt wählten Kinder z.B. 100 Erwachsene und arbeiteten sich von dort aus zur Zielsumme 224 vor.

Die vielen Bearbeitungen der ZMO-Aufgaben geben Einblick in das Potential von Kindern im arithmetischen Denken und bieten Anlass, neue Aufgabenstellungen zur Schulung dieses Denkens zu erfinden.

3. Arithmetisches Denken als Grundlage algebraischen Denkens

Die Pflege arithmetischen Denkens ist der Schlüssel zur Entwicklung algebraischen Denkens (Hefendehl-Hebeker 2001, Schwank & Nowinska 2007). Einem Kind, dem auffällt, dass die Summe von beliebigen drei aufeinander folgenden Zahlen immer durch drei teilbar ist, wird es leicht fallen mit der operativen Schrift (im Sinne von Krämer 2003) zurecht zu kommen und einen Ausdruck wie (n-1)+n+(n+1) sinnvoll zu benutzen. So wie im Z^4-Modell den Zahlen durch gedankenvolles Tun eine Bedeutung zukommt, so sind in einem analogen V^4-Modell auch Variablen durch geeignetes Tun zu verstehen und Sinnzusammenhänge zu entwickeln.

Literatur

Brainerd, C. (1979): The origins of the number concept. New York: Praeger.

Dantzig, T. (1930): Number, the language of science. 4. Auflage. New York: The Macmillan Company.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. Cognition, 44, 1-40.

Hefendehl-Hebeker, L. (2001): Die Wissensform des Formelwissens. In W. Weiser, B. Wollring, B. (Hrsg.): Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt. 83-98. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Krämer, S. (2003): >Schriftbildlichkeit< oder: Über eine (fast) vergessene Dimension der Schrift. In S. Krämer, H. Bredekamp (Hrsg.), Bild – Schrift – Zahl. 157-176. München: Wilhelm Fink Verlag.

Schwank, I. (2011): Mathematisches Grundverständnis: Denken will erlernt werden. In H. Keller (Hg.): Handbuch der Kleinkindforschung. 4. korrigierte, überarbeitete und erweiterte Auflage. Bern: Huber.

Schwank, I. (2010a): Zahlentheater - Spiele mit Holzfiguren zur Vorbereitung der Schulschrift (mit Anwendung am Zahlenstrahl). Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2010b): Erlebniswelt Zahlen - Spielereien mit der Rechenwendeltreppe für Vorschulkinder. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2010c): Vom Umgang mit dem Nichts als Zahl und anderen Ideen. In S. Kliemann (Hg.): Diagnostizieren und Fördern. Berlin: Cornelsen Scriptor, 129-141.

Schwank, I. (2005): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. von Aster & J.-H. Lorenz (Hg.): Rechenstörungen bei Kindern. – Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. 93-133. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Schwank, I. (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In I. Schwank: ZDM-Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik', Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 35(3), 70-78.

Schwank, I. & Nowinska, E. (2008): Die Denkform des Formeldenkens. In B. Barzel, T. Berlin & A. Fischer (Hg.): Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker. 111-122. Hildesheim: Franzbecker.

Imke SENFTLEBEN, Aiso HEINZE, IPN Kiel

Fachdidaktische Kompetenz von Grundschullehrkräften

Empirische Studien haben wiederholt den Einfluss von Merkmalen der Lehrenden auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler gezeigt. Während bei der Erfassung der Kompetenz von Schülerinnen und Schüler auf eine jahrzehntelange Erfahrung zurückgegriffen werden kann, steht die Entwicklung standardisierter Verfahren zur Kompetenzmessung von Lehrkräften vergleichsweise noch am Anfang.

Das hier vorgestellte Projekt strebt an, die fachdidaktische Kompetenz von Grundschullehrkräften möglichst handlungsnah zu erfassen. Dabei werden nicht nur Paper-Pencil-Tests, sondern auch videobasierte Items eingesetzt.

Fachdidaktisches Wissen und fachdidaktische Kompetenz

Der Begriff des fachdidaktischen Wissens wird heute im Allgemeinen auf Shulman (1986) zurückgeführt. Shulman hat aus einer normativ analytischen Perspektive verschiedene Wissensdomänen identifiziert, die er als Voraussetzung für erfolgreiches Lehrerhandeln sieht. Durchgesetzt hat sich die Unterscheidung in das Fachwissen (*content knowledge*), das fachdidaktische Wissen (*pedagogical content knowledge*) und das allgemeine pädagogische Wissen (*general pedagogical knowledge*). Shulman beschreibt mit dem fachdidaktischen Wissen das Wissen über Darstellungen und Erklärungen, um Schülerinnen und Schüler fachliche Inhalte verständlich zu machen. Weiterhin fasst Shulman hier drunter das Wissen über Fehlvorstellungen und Vorstellungen die Schülerinnen und Schüler zu bestimmten Inhalten entwickeln.

Unter dem Begriff Kompetenz wird in Anlehnung an Koeppen et al. (2008) ein komplexes Konstrukt aus erlernbaren, kontextspezifischen Fähigkeiten, verstanden, die sich an realen Aufgaben orientieren. Bromme (2008) beschreibt die Unterrichtsvor- und -nachbereitung sowie das Unterrichten an sich als die Hauptaufgaben der Lehrkräfte. Mit der *fachdidaktischen Kompetenz* werden diese fachlich inhaltsspezifischen kognitiven Fähigkeiten des Lehrhandelns beschrieben und damit von den Begriffen des *fachdidaktischen Wissens* und der *professionellen Handlungskompetenz* von Lehrkräften abgegrenzt. Die professionelle Handlungskompetenz umfasst darüber hinaus als weitere Aspekte die Überzeugungen und Werthaltungen, die motivationalen Orientierungen sowie die selbstregulativen Fähigkeiten der Lehrkräfte (Kunter et al., 2011; Weinert, 2001).

Das fachdidaktische Wissen wurde lange Zeit durch distale Faktoren (z. B. Abschlussnote) oder subjektive Faktoren (z. B. Selbsteinschätzung) erfasst und die proximale reliable und valide Erfassung dieses Konstrukts stellte ein Forschungsdesiderat dar. Im Rahmen der COACTIV-Studie (Kunter et al., 2011), den Arbeiten der Michigan Group (z. B. Hill, Ball, & Schilling, 2008) und der TEDS-M Studie (Blömeke, Kaiser, & Lehmann, 2010) wurden Paper-Pencil-Tests entwickelt, um das Konstrukt des fachdidaktischen Wissens zu messen. Im Rahmen der COACTIV-Studie und den Studien der Michigan Group gelang es, das durch einen Test gemessene fachdidaktische Wissen der Lehrkräfte mit der Unterrichtsqualität und den Leistungen der Schülerinnen und Schüler in einen empirischen Zusammenhang zu bringen.

Die Tests in diesen Studien waren aufgrund ihrer Anlage weitgehend auf die Erfassung fachdidaktischen Wissens beschränkt. Wie zuvor erwähnt, müssen zur Beschreibung fachdidaktischer Kompetenz von Lehrkräften aber noch weitere Facetten berücksichtig, wie z. B. das Identifizieren von fachlich kritischen Unterrichtssituationen und das Reagieren auf diese.

Modell zur Beschreibung fachdidaktischer Kompetenz von Grundschullehrkräften

Ein Kompetenzstrukturmodell, das die handlungsnäheren Facetten der fachdidaktischen Kompetenz von Lehrkräften berücksichtigt wurde von Lindmeier (2011) entwickelt. Dieses nicht hierarchische Modell basiert auf den inhaltspezifischen Kognitionen des Lehrhandelns in Anforderungssituationen. Lindmeier beschreibt diese fachspezifischen kognitiven Ressourcen durch drei Komponenten: *Basiswissen, reflektive und aktionsbezogene Kompetenzen.*

Mit der Komponente *Basiswissen* werden das Fachwissen und das fachdidaktische Wissen beschrieben. Die klassische Trennung dieser Wissensdomänen nach Shulman wird aufgegeben, da diese empirische schwer zu trennen sind (vgl. Hill, Ball, & Schilling, 2008; Kunter et al. 2011). Das Basiswissen umfasst folglich genauso das Wissen über die zugrundeliegenden Prinzipien und Konzepte des Faches sowie das Wissen über Schülerfehler und geeignete Zugänge zu bestimmten fachlichen Inhalten. Dieses wurde bereits in den bekannten Studien (s. o.) operationalisiert und erfasst. Die reflektiven und aktionsbezogene Kompetenzen sind nicht als technische Wissensanwendung zu verstehen. Die *reflektive Kompetenz* beschreibt die Fähigkeit zur Unterrichtsvor- und -nachbereitung, z. B. einzuschätzen welche Hinführung zu einem Thema sich für eine spezifische Lerngruppe besonders eignet oder Schülerbearbeitungen zu analysieren. Teile dieser Kompetenzkomponente wie z. B. die Analyse von konkreten Schülerbearbeitungen, wurden in den oben beschriebenen Studien ebenfalls schon erfasst. Die *aktionsbezogene Kompetenz* beschreibt die kognitiven Anforderungen, wenn unvorbereitet in einer konkreten Unterrichtssituation auf die Äußerungen oder Handlungen der Schülerinnen und Schüler einzugehen ist, z. B. Schüleräußerungen spontan unter Zeitdruck in der Unterrichtssituation zu analysieren oder als spontane Antwort auf Verständnisfragen geeignete Beispiele und Darstellungen zu generieren.

In einer Machbarkeitsstudie mit Sekundarschullehrkräften (N= 28) und –lehramtsstudierenden (N = 22) konnte Lindmeier die drei beschriebenen Komponenten empirisch bestätigen. Eine Replikation mit einer größeren Stichprobe steht noch aus.

Lindmeiers Modell wird in dem hier vorgestellten Projekt zur Beschreibung der fachdidaktischen Kompetenz von Grundschullehrkräften zu Grunde gelegt und adaptiert. Dabei wird gibt es aus methodischen Gründen zunächst eine Einschränkung auf den Arithmetikunterricht, so dass das Basiswissen die Inhalte der Arithmetik aus dem Grundschulcurriculum und die dahinter stehenden mathematischen Konzepte sowie das fachdidaktische Wissen in diesem Bereich umfasst.

Ziel des Dissertationsprojektes ist es, das Modell für Grundschullehrkräfte zu validieren und dabei die folgenden Fragestellungen zu beantworten:

1. Inwieweit lassen sich das Wissen, die reflektive und aktionsbezogene Kompetenzkomponente reliabel erheben und empirisch trennen?
2. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den drei Kompetenzkomponenten.

Erfassung der fachdidaktischen Kompetenz

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wird ein Messinstrument entwickelt, um die drei Komponenten zu erfassen. Für das Wissen und für Teile der reflektiven Kompetenzkomponente kann auf bekannte Paper-Pencil-Itemformate der bisherigen Studien zurückgegriffen werden. Für einige Aspekte der reflektiven Komponente und für die aktionsbezogene Komponente scheinen bekannte Paper-Pencil-Itemformate aus zwei Gründen ungeeignet: Erstens wird durch eine detaillierte schriftliche Beschreibung einer konkreten Unterrichtssituation das Item sehr umfangreich und ist dadurch mühsam zu bearbeiten. Zweitens ist es unsicher, ob die kognitiven Prozesse, die bei der schriftlichen Bearbeitung eines solchen Items ablaufen, mit denen vergleichbar sind, die in einer realen Unterrichtssituation ablaufen. Aus diesen Gründen wird zur Erfassung der aktionsbezogenen Komponente und bei Teilen der reflektiven Komponente auf videobasierte Items zurückgegriffen. Hierbei werden Unterrichtsszenen als Videos präsentiert und die Lehrkräfte werden je nach Fragestellung dazu aufgefordert spontan durch mündliche Äußerungen auf die Schülerinnen und Schüler einzugehen oder die Unterrichtsituation zu reflektieren.

Ausblick

Es werden Unterrichtssituationen eingesetzt, die als charakteristisch für die Kompetenzanforderungen im Arithmetikunterricht angesehen werden. Um eine inhaltliche Validität zu gewährleisten gibt es eine Orientierung an den Bildungsstandards. Außerdem ist es geplant die ausgewählten Unterrichtsszenen durch ein Expertenrating beurteilen zu lassen.

Eine Herausforderung stellt die Auswertung der Antworten der Lehrkräfte auf die videobasierten Items dar. Hierzu werden a priori aus der Literatur angemessene Reaktionsmuster erarbeitet, um diese dann durch fachdidaktische Expertinnen und Experten aus der Wissenschaft sowie aus Praxis bewerten zu lassen. Das so erstellte Codiermanual liefert die Auswertungsgrundlage.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G., & Lehmann, R. (Eds.) (2010). Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann Verlag.

Bromme, R. (2008). Kompetenzen, Funktionen und unterrichtliches Handeln von Lehrer/innen. In B. Rendtorff & S. Burckhart (Eds.), Schule, Jugend und Gesellschaft. Ein Studienbuch zur Pädagogik der Sekundarstufe (pp. 244–256). Stuttgart: Kohlhammer.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualisierung and Measuring Teachers' Topic-specific Knowledge of Students. Journal for Research in Mathematics Education, 39(4), 372–400.

Koeppen, K., Hartig, J., Klieme, E., & Leutner, D. (2008). Current issues in competence modeling and assessment. Journal of Psychology, 216(2), 61–73.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (Eds.) (2011). Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann Verlag.

Lindmeier, A. (2011). Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers: A threefold Domain-Specific Structure Model for Mathematics. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik: Vol. 7. Münster: Waxmann Verlag.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. Educational Researcher, 15(2), 4–14.

Weinert, F. E. (2001). Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Franziska SIEBEL, Heidelberg

Lernende unterstützen auf dem Weg von der Arithmetik zur Algebra

Schon vor der Einführung der formalen Sprache der Algebra lässt sich mit geeigneten arithmetischen Aufgabenformaten, wie operativen Aufgabenserien und Formaten zur Strukturerkennung, algebraisches Denken fördern. Zentral hierfür ist es, sich vom Konkreten zu lösen und das Allgemeine zu erkennen, das Allgemeine zu beschreiben sowie eine Haltung zu entwickeln, nach Mustern zu suchen und sie allgemein zu beschreiben (vgl. etwa Siebel/Fischer 2009). Doch wie können Lehrkräfte Lernende bei der Bearbeitung solcher Aufgaben geeignet unterstützen? In diesem Beitrag werden verschiedene Typen von Lernhilfen nach Zech in Bezug auf die Förderung algebraischen Denkens an Beispielen dargestellt und erste Hinweise zur Orientierung an diesen Hilfestellungen angeführt. Damit wird ein kurzer Einblick in ein aktuelles Forschungsprojekt gegeben.

Ausgehend von einem konstruktivistischen Verständnis von Lernen unterscheidet Zech in seiner Taxonomie möglicher Lernhilfen beim Problemlösen Motivationshilfen, Rückmeldungshilfen, allgemein-strategische Hilfen, inhaltsorientierte strategische Hilfen und inhaltliche Hilfen (vgl. Zech 2002, S. 315ff). Weil Motivationshilfen wie „Du schaffst das!“ oder „Die Aufgabe ist nicht so schwierig.“ nicht lernzielspezifisch sind, werden sie deshalb hier nicht weiter betrachtet.

Unter *Rückmeldungshilfen* versteht Zech Hilfen, „die dem Lernenden Auskunft darüber geben, ob er richtig oder falsch liegt bei seinen Lösungsbemühungen.“ (Zech 2002, S. 316). Betrachten wir ein Beispiel: Mit dem Kommentar „Aber ihr seid schon ganz nah dran.“ meldet die Lehrkraft zurück (ungeachtet einer möglichen Absicht zu motivieren), dass die bisherigen Bemühungen nicht nur korrekt sondern auch schon fast vollständig sind. Auch mit dem Hinweis „Nun habt ihr gemerkt, **wie** es sich verändert. Könnt ihr auch jetzt auch erklären, **warum** es sich so verändert?“ meldet die Lehrkraft nicht nur zurück, dass die bisherigen Überlegungen korrekt waren. Sie gibt auch Auskunft darüber, welcher Teil der Ausgangsfrage noch nicht beantwortet wurde. Rückmeldungen können also Aufschluss darüber geben, wie die bisherigen Lösungsbemühungen im Hinblick auf die Gesamtanforderung einzuschätzen sind und Orientierung für weitere Arbeitsschritte geben. Insbesondere lassen sich auch verschiedene Teilaspekte des Lösungsprozesses ansprechen und deutlich machen, etwa „okay, alle Summen sind richtig berechnet, jetzt müsst ihr aber noch das Muster untersuchen." Mit Rückmeldungen kann sowohl direkt als auch indirekt der Fokus im Lösungsprozess thematisiert werden (etwa: Wird genügend auf Muster geachtet?) und die Bedeutung einer Teillösung oder Teilprozesses in Beziehung zum Gesamtprozess gesetzt werden.

Zech unterscheidet zwei Typen strategischer Hilfen: *Allgemein-strategische Hilfen*, die „auf fachübergreifende bzw. allgemeine fachliche Problemlösungsmethoden aufmerksam machen" und *inhaltsorientierte strategische Hilfen*, die „auf stärker fachbezogene […] bzw. auf allgemeine Problemlösungsmethoden – verbunden mit einem inhaltlichen Aspekt – aufmerksam machen" (Zech 2002, S. 316f). Betrachten wir wieder ein Beispiel: Nachdem Lisa und Nina eine halbe Stunde lang Summen verschiedener Pentominos auf der Hundertertafel berechnet haben, um die Lage des Pentominos mit der Summe 290 zu finden, werden sie von der Lehrkraft unterbrochen: „Jetzt schau'n wir mal ganz kurz." Begleitend deutet sie auf die Hundertertafel. Durch die Aufforderung zum Hinschauen regt sie einen Moment des Inne-Haltens an. Dies ist eine allgemein-strategische Hilfe. Die Geste zur Hundertertafel lässt sich allgemein als Hinweis deuten, vorhandenes Material zu nutzen und einen Perspektivwechsel zu vollziehen, also ebenfalls als allgemein-strategische Hilfe. Die allgemein-strategische Hilfe wird zu einer inhaltsorientierten, wenn auf die Struktur der Hundertertafel gedeutet wird, also auf das konkrete Material des spezifischen Aufgabenformats eingegangen wird.

Um Muster und Strukturen zu erkennen, ist häufig ein Perspektivwechsel hilfreich. Dieser kann angeregt werden durch allgemein-strategische Hilfen, wie einen Moment des Innehaltens, einen Medienwechsel, systematisches Notieren von Daten oder der Suche nach Mustern. Diese Hilfen werden zu inhaltsorientierten strategischen Hilfen, wenn man sich konkret auf das jeweilige Aufgabenformat bezieht, etwa bei Impulsen wie „Welches Muster hat dieses Pentomino?".

Zur letzten Kategorie gehören *inhaltliche Hilfen*, also solche, die „spezielle Hinweise geben auf vorgeordnete Begriffe und Regeln, auf bestimmte Zusammenhänge zwischen diesen, auf ganz bestimmte Hilfsgrößen oder Hilfslinien“ (Zech 2002, S. 317). Wann eine Hilfe als inhaltlich eingestuft wird, hängt u.a. vom Lernziel ab, wie das folgende Beispiel zu strukturierten Aufgabenpäckchen zeigt: Wird vor der individuellen Bearbeitung strukturierter Päckchen eines beispielhaft im Klassengespräch an der Tafel bearbeitet und dabei Lösungsstrategien zur Mustererkennung und eine beispielhafte Notation eines Musters vorgegeben, handelt es sich um eine inhaltsorientierte strategische Hilfe zur Berechnung der Teilaufgaben. Für eine Förderung algebraischen Denkens steht eine Mustererkennung und –beschreibung jedoch im Vordergrund, somit sind der Erwerb mathematischer Strategien zum Verallgemeinern und einer Sprache zur allgemeinen Beschreibung Lernziele. Hinsichtlich dieses Lernziels muss die Hilfe als inhaltliche eingeordnet werden. Das jeweilige Lernziel bestimmt also maßgeblich, die Einordnung der Interventionen.

Ziel des Forschungsprojekts ist es, die Taxonomie möglicher Lernhilfen beim Problemlösen nach Zech auszudifferenzieren und zu konkretisieren für die Förderung algebraischen Denkens bei der Bearbeitung arithmetischer Aufgabenformate. Damit soll sowohl ein Beschreibungsmittel für Lehrerinterventionen entwickelt werden als auch ein Leitfaden für entsprechende Beratungssituationen. Anhand von Beispielen wurde angedeutet, wie die Kategorien der Lernhilfen hinsichtlich der Lernziele zu algebraischem Denken weiter ausgearbeitet werden können. Darüber hinaus müssen noch weitere Aspekte berücksichtigt werden (wie sie u.a. auch von Leiss 2007 für Modellierungsaufgaben herausgearbeitet wurden): insbesondere beabsichtigte und erzielte Wirkung von Lernhilfen, geeignete Zeitpunkte für Hilfestellungen sowie Entwicklung von Hilfestellungen von einer Rückschauperspektive für eine Vorschau.

Einige Lernhilfen werden von Lernenden anders genutzt als beabsichtigt. Es soll versucht werden, die vielfältigen Gründe hierfür zu ordnen und Voraussetzungen zu beschreiben, unter denen Lernhilfen durch die Lernenden produktiv genutzt werden können.

Eine Voraussetzung ist es, einen geeigneten Zeitpunkt für Hilfestellungen zu wählen. Zum Beispiel müssen Lernende zunächst ‚genügend‘ Daten generieren, um in diesen Daten ein Muster erkennen zu können. Jedoch kann nicht allgemeingültig festgelegt werden, wann genügend Daten generiert wurden. Aber indem solche allgemeinen Kriterien benannt werden, kann man für vergleichbare Situationen sensibilisieren.

Eine weitere Voraussetzung dafür, dass Lernende Lernhilfen annehmen, ist eine geeignete Verbindung von der Vorschauperspektive der Lernenden mit der Rückschauperspektive der Lehrkräfte. Lernende bearbeiten ein Problem, ohne eine Lösung bzw. einen Lösungsweg zu kennen. Lehrkräfte hingegen beraten meist aus der Rückschauperspektive. Das ermöglicht es, dass Lehrende flexibel mit verschiedenen Lösungsansätzen von Lernenden umgehen und strategisch beraten können. Voraussetzung hierfür ist ein über die konkrete Aufgabe hinausgehendes allgemeines Verständnis des algebraischen Potentials des jeweiligen Aufgabenformats.

Literatur

Leiss (2007): „Hilf mir es selbst zu tun“. Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren. Hildesheim: Franzbecker.

Siebel, F. & Fischer, A. (2009): Communicating a sence of elementary algebra to preservice primary teachers. In Proceedings of CERME 6, Lyon 2009, working group 4, 629-638.

Zech, F. (2002): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Weinheim: Beltz (10. Aufl.).

Hans-Dieter SILL, Rostock

Zum Aufgabenbegriff in der Mathematikdidaktik

Vorbemerkungen

Im Unterschied zu einem Wort, als einer selbstständigen sprachlichen Einheit verstehen wir unter einem Begriff

- aus Sicht der Logik eine komplexe Gesamtheit von Gedanken (Bedeutungsaspekte) über Unterscheidungsmerkmale einer Objektklasse,
- aus Sicht der Neurowissenschaften ein räumlich-zeitliches Aktivitätsmuster verbundener Neuronen (Modell: semantisches Netz) und
- aus philosophischer Sicht ein dialektisches Wechselverhältnis inhaltlicher (semantischer) und formaler (syntaktischer) Aspekte.

Ein Bedeutungsaspekt eines Begriffs hat einen objektiven bzw. einen subjektiven Charakter, wenn die Bedeutung unabhängig bzw. nicht unabhängig vom Denken oder Handeln eines Individuums existiert. Ein Begriff kann zugleich objektive und subjektive Aspekte haben.

Ein Begriff als Bestandteil einer Theorie ist somit zum einen ein strukturierter Bestandteil des semantischen Netzes eines Individuums. Ein Begriff kann auch einen intersubjektiven, also objektiven Charakter bekommen und damit begriffliche Grundlage einer Wissenschaft sein. Dazu ist ein Diskurs der subjektiven Theorien einzelner Wissenschaftler notwendig.

Mit diesem Artikel soll ein Beitrag zum Diskurs zu den Grundbegriffen einer Mathematikdidaktik Aufgabe und Problem sowie davon abgeleiteter Begriffe erfolgen, der angesichts unterschiedlicher Bedeutungen und unscharfer Bestimmungen in der Literatur dringend notwendig erscheint. Dabei geht es nicht um eine Definition im engen Sinne, sondern um eine Explikation der Begriffe.

1. Zu Bedeutungen der Wörter „Aufgabe“ und „Problem“

Die Wörter werden in vielen Publikationen als Nebenbegriffe ausgefasst. Oft bezieht man sich auf Dörner (1979, S. 10): „Aufgaben erfordern nur reproduktives Denken, beim Problemlösen muss etwas Neues geschaffen werden.“ Diese Bedeutungen findet man auch bei Wiegand und Blum (1999, S. 590): „Wie üblich verstehen wir unter einem Problem eine geistige Anforderungen für ein Individuum, bei der ein Anfangszustand A vermöge einer gewissen Transformation T in einen erwünschten Zielzustand Z zu überführen ist, wobei eine gewisse Barriere dies vorerst verhindert. Gibt es keine Barriere, … so spricht man von einer Aufgabe.“

Eine solche Verwendung der Wörter korrespondiert insbesondere beim Wort „Problem“ mit der umgangssprachlichen Bedeutung. Unter einem Problem wird immer etwas Schwieriges, schwer zu Beantwortendes, Kompliziertes oder Ungelöstes verstanden. Eine Aufgabe kann allerdings im umgangssprachlichen Sinne auch leicht oder schwer sein.

Bei konsequenter Verwendung dieser Bedeutungen müsste zwischen Anforderungen an Schüler unterschieden werden, die man als Aufgabe bzw. als Problem bezeichnet, ein Problem wäre somit keine Aufgabe. Dies wird selbst in der betreffenden Literatur in der Regel nicht getan.

Beide Wörter werden aber auch in der didaktischen Literatur im hierarchischen Sinne verwendet, so etwa bei Bruder (2008). „Eine Aufforderung zum Lern-Handeln im Mathematikunterricht wird als Aufgabe bezeichnet.“ (S. 19) „Eine subjektiv schwierige … Aufgabe wird als Problemaufgabe oder kurz als Problem bezeichnet.“ (S. 20)

In diesen Bedeutungen ist also „Aufgabe“ der Oberbegriff und hat einen primär objektiven Charakter, während das Wort „Problem“ einen subjektiven Charakter erhält. Eine konsequente Verwendung der Wörter in diesen Bedeutungen führt unter anderem zu folgenden Aussagen.

- Man kann von einem Problem immer nur in Bezug auf das Subjekt sprechen, dass dieses Aufforderung bearbeiten soll. Eine Aufgabe kann kein Problem an sich sein.
- Es kann zwischen dem Anforderungsniveau einer Aufgabe als Maß für die objektive Struktur ihrer Anforderungen und dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe als Maß für den Grad der Bewältigung dieser Aufgabe in einer bestimmten Population unter bestimmten Bedingungen unterschieden werden.
- Ein Problem muss nicht immer eine Aufgabe mit einem hohen Anforderungsniveau sein. Problemlösen im Mathematikunterricht beschränkt sich damit nicht auf die Bewältigung anspruchsvoller Anforderungen, bereits sehr einfache Aufgaben können für einige Schüler ein Problem sein.

In Bezug auf die Formulierungen von Bruder (2008) ist zu fragen:

- Geht es um alle Lernhandlungen, also auch z. B. um soziales Lernen?
- Sollte nur ein Bezug zum Unterricht erfolgen, womit z. B. außergerichtliche Prozesse ausgeklammert würden?

Wir schlagen eine etwas modifizierte Fassung der Bedeutungen vor:

Eine **mathematische Aufgabe** ist eine mündliche oder schriftliche Aufforderung zum Ausführen von Handlungen, die mathematisches Wissen und Können erfordern. Eine Aufgabe ist ein **Problem** für einen Lernenden, wenn ihm die Lösungsschritte nicht unmittelbar bewusst sind.

Diese Formulierungen erfassen aber nur einen Teil der Gedanken bzw. Aspekte zu den Begriffen Aufgabe und Problem und sollten keinesfalls für sich als Definitionen aufgefasst werden.

Ein weiterer Aspekt bezieht sich auf die Verwendung der Wörter „lösen“ und „Lösung“, wozu nur einige Gedanken geäußert werden sollen.

- Die Formulierungen "Lösung einer Aufgabe" bzw. „Schülerlösung“ haben eine zweifache Bedeutung, sie bezeichnen sowohl den Prozess als auch das Resultat einer Handlung.
- Mit dem Wort "lösen" ist eng die Bedeutung verbunden, dass die Handlungen auch zu einem Ergebnis, also einer Lösung der Aufgabe führen. Wir halten es für sinnvoller, anstelle von „lösen“ den umfassenderen Begriff "bearbeiten" zu verwenden. Man kann eine Aufgabe bearbeiten, ohne sie zu lösen, also zu einer Lösung zu kommen.
- Mit der Formulierung "Schülerlösung" ist oft direkt eine Bewertung verbunden. Eine Lösung kann richtig, falsch oder auch teilweise richtig sein. Bei unseren Erprobungen polyvalenter Aufgabe (s. S. 4) hat es sich als sinnvoll erwiesen, anstelle von „Schülerlösungen“ von "Schülerantworten" zu sprechen.

2. Zu Bedeutungen des Wortes „offene Aufgabe“

Ein weiterer Aspekt des Aufgabenbegriffes ist die Unterscheidung in offene und geschlossene Aufgaben. In der Literatur dominiert die Auffassung, diese Bezeichnungen ohne Bezug zu den lösenden Subjekten zu verwenden, so etwa bei Pehkonen (2001, S. 62): „Eine Aufgabe wird offen genannt, wenn ihre Anfangs- und Endsituation nicht exakt gegeben ist.“

Diese Sichtweise führt in der Literatur zu gegensätzlichen Aussagen. So wird von einem Autor festgestellt, dass das Gros aller Mathematikaufgaben, die man in Schulbüchern findet, keine offenen Aufgaben sind, während ein anderer aus Sicht eines Lehrers behauptet, dass man jede Schulbuchaufgabe ohne Abänderung des Textes als offene Aufgabe verstehen kann.

Auch in dieser Hinsicht erweist es sich als sinnvoll, zwischen objektiven und subjektiven Aspekten des Begriffs zu differenzieren. Das Merkmal der Offenheit sollte aus unserer Sicht primär einen subjektiven Charakter haben, was zu folgender Explikation führt.

Eine Aufgabe heißt **offen für einen Lernenden**, wenn

- für ihn die Ausgangsbedingungen nicht vollständig sind,
- für ihn mehrere Lösungswege möglich sind oder
- er zu mehreren Ergebnissen kommen kann.

Analog ließe sich die Bezeichnung „geschlossene Aufgabe“ erklären.

Der (objektive) Grad der Offenheit einer Aufgabe ergäbe sich damit aus der Anzahl der Lösungswege und der Ergebnisse, die für den betreffenden Lernenden möglich sind.

Als Konsequenzen aus dieser Auffassung ergeben sich unter anderem die Feststellungen, dass alle Aufgaben in Bezug auf bestimmte Lernende offen sind und eine offene Aufgabe nicht a priori schwer oder leicht ist.

3. Zur Bezeichnung „polyvalente Aufgabe“

Ausgehend von den in Becker und Shimada (1977) beschriebenen Aufgaben mit „multiple correct answers“ verwenden wir seit einigen Jahren die Bezeichnung „polyvalente Aufgabe“ in folgendem Sinne.

Eine Aufgabe heißt **polyvalent für eine Gruppe von Schülern**, wenn sie folgende Merkmale besitzt:

- Jeder der Schüler findet mit hoher Wahrscheinlichkeit eine zutreffende Antwort.
- Die Aufgabe ermöglicht Schülerantworten unterschiedlicher Qualität.

Eine Publikation mit Erfahrungen zum Einsatz dieser Aufgaben in ganzjährigen Lehrerfortbildungen findet man unter der URL: www.mathe-mv.de.

Literatur

Becker, J.; Shimada, S. (Hrsg.) (1977): The open-ended approach : a new proposal for teaching mathematics. – Reston : The National Council of Teachers of Mathematics

Bruder, Regina (2008): Vielseitig mit Aufgaben arbeiten. Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwicklen und sichern. In: Bruder, Regina; Leuders, Timo; Büchter, Andreas (Hg.): Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen-Scriptor, S. 18–52.

Dörner, Dietrich (1979): Die Logik des Misslingens. Strategisches Denken in komplexen Situationen. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt (Rororo).

Pehkonen, Erkki (2001): Offene Probleme: Eine Methode zur Entwicklung des Mathematikunterrichts. In: Der Mathematikunterricht, H. 6, S. 60–72.

Wiegand, Bernd; Blum, Werner (1999): Offene Probleme für den Mathematikunterricht - kann man Schulbücher dafür nutzen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999 Vorträge auf der 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5.3.1999 in Bern. Hildesheim: Franzbecker, S. 590–593.

Hendrik SIMON, Köln

Zählen und Zahlen jenseits der 20 - was kommt nach Fuson?

In der praktischen Arbeit mit rechenschwachen Kindern nach der in Simon (2007) beschriebenen Methode des gelenkten Entdecken-Lassens erweist sich die Vermittlung von Kenntnissen bezüglich des dezimalen Stellenwertsystems als überraschend anspruchsvoll. Bei der Durchführung geeigneter Lernspiele treten Vorgehensweisen auf, die mit einer linearen Entwicklung der Zählfertigkeiten im Zahlenraum ab 20 nicht erklärt werden können. Genau diese Beobachtungen können aber auch ein Schlüssel zum Verständnis der Entwicklung sein, die sich an die durch Fuson (1988) beschriebenen Zählstufen anknüpft. Bei der Entwicklung der Zählfertigkeiten müssen neben sprachlichen Aspekten auch Wechselwirkungen mit Realsituationen berücksichtigt werden. Dies gilt insbesondere für den Übergang zwischen Zähl- und Anzahlbedeutung der Zahlen (count-to-cardinal- und cardinal-to-count-transitions, Fuson 1988) und später für die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von mehrstelligen Zahlen.

Bei der Methode des gelenkten Entdecken-Lassens erhalten die Kinder Serien von Tasks, in denen sowohl eine „primitive" Strategie (die also nicht so viele Kenntnisse verlangt) als auch mindestens eine fortschrittlichere Strategie zum Erfolg führen. Dabei basiert die der fortschrittlicheren Strategie zugrundeliegende Idee auf einer konkreten Anwendung des zu erwerbenden mathematischen Konzepts. Im Verlauf der Bearbeitung einer Serie können verschiedene Stufen beobachtet werden (s. auch Siegler & Stern, 1998). Nachdem zunächst die alte Strategie verwendet wird, tritt in einer Übergangsphase der Einsatz der neuen Strategie sporadisch auf, ohne dass dies dem Kind bewusst ist. Erst später lösen die vorhandenen Randbedingungen für die Nutzung der neuen Strategie ihren bewussten Einsatz aus. Somit ist eine situationsspezifische Strategie entstanden (s. Simon, 2007). Die höchste Stufe der Strategienutzung ist dann erreicht, wenn das Kind mit dem Tripel {Randbedingungen, Strategie, gewünschte Zielsituation} so umgehen kann, dass abweichende Aufgaben durch Anpassung der Randbedingungen oder der Strategie bearbeitet werden können (Transfer).

Diese Stufen der Strategieentwicklung können schneller durchlaufen werden oder gar entfallen, wenn das Kind bereits in ähnlichen Aufgabenserien Erfahrungen aus dem Bereich desselben mathematischen Konzepts sammeln konnte, sodass es ihm möglich ist, unbewusst oder bewusst Ähnlichkeiten zu nutzen. Die Bewusstwerdung dieser Ähnlichkeiten mündet im Verständnis der zugehörigen mathematischen Begriffe.

Für die Entwicklung des Verständnisses des dezimalen Stellenwertsystems bedeutet dies, dass auch dessen Eigenschaften erst in spezifischen Kontexten erlebt werden, aus denen heraus sie fortlaufend generalisiert werden. Die Kenntnis von Vorgehensweisen in spezifischen Situationen bedeutet noch nicht, dass das mathematische Konzept bereits verstanden ist. Ist das mathematische Konzept aber bereits vorhanden, so muss davon ausgegangen werden, dass für die meisten (geeigneten) konkreten Tasks auch eine Lösungsstrategie generiert werden kann.

1. Eigenschaften des Stellenwertsystems

Nach eigenen Beobachtungen sind die ersten Strukturen mehrstelliger Zahlen, die Kinder spontan nutzen,

- Ähnlichkeiten der Zehnerbereiche untereinander (...24, 25, 26 ... ist analog zu ...34, 35, 36 ...),
- die sprachliche Zerlegung der Zahlworte in Wortbestandteile ("sieben/und/dreißig") und
- das Zählen in der Zehnerreihe.

Die Kenntnisse, die ein Kind letztendlich bezüglich des Stellenwertsystems erwerben soll, sind

- dass das „und" im Zahlwort einer Addition entspricht,
- dass Einer, Zehner, Hunderter usw. gegeneinander eingetauscht werden können, ohne dass sich die Zahl verändert,
- die Zahl auch anderweitig auf verschiedenste Arten zusammengesetzt werden kann und
- dass die rechte Stelle einer Zahl in Ziffernschreibweise die Einer zählt, die daneben die Zehner und so weiter.

2. Unterschiedliche Entwicklungszweige des Verständnisses

Die oben erwähnten spontan genutzten Strukturen des Stellenwertsystems können als drei verschiedene Startpunkte für separate Entwicklungszweige gelten, in denen eine Fortentwicklung kindlicher (Er)Kenntnisse bezüglich des Stellenwertsystems stattfinden kann.

Entwicklungszweig 1 (Dekadenwiederholung): Der Ausgangspunkt hierfür ist, dass dem Kind die Gleichartigkeit der Dekaden bewusst ist. Im Verlauf der Entwicklung wird das Zählen in Zehnerschritten möglich. Über Erkenntnisse aus spezifischen Situationen wird das Zählen in Zehnerschritten mit der Addition von 10 in Verbindung gebracht. Die Übung „Zehner und

Einer Rein und Raus“ (Simon & Grünke, 2010) illustriert beispielhaft, wie eine Konzeptentwicklung in diesem Zweig ablaufen kann.

Entwicklungszweig 2 (Zerlegung nach Klang): Ausgehend von phonetischer Bewusstheit wird die zusammengesetzte Wortstruktur der Zahlworte erkannt. Über bereichsspezifische Erkenntnisse, die oft aus konkreten Zahldarstellungen resultieren (unterschiedliche semantische Strukturen der Addition, s. Schmidt & Weiser, 1993) bringen die Kinder den Wortteil „und“ mit der Addition in Verbindung. Die Entwicklung des Verständnisses für die Addition, wie sie in Fuson (1988) beschrieben wird, kann auch auf diesen Entwicklungszweig übertragen werden. Speziell bezogen auf das Verständnis für das dezimale Stellenwertsystem können Beobachtungen mit verschiedenen Übungen angeführt werden (z.B. die Übung „dezimal strukturiertes Zählen“, Simon 2005).

Entwicklungszweig 3 (gebündeltes Abzählen): Die Entdeckung der charakteristischen Abfolge der Zwischenergebnisse beim Abzählen dezimal gebündelten Materials oder das kontextfreie Zählen in der Zehnerreihe steht hier am Anfang. Über Erkenntnisse aus verschiedensten Zählsituationen wird das gebündelte Zählen mit einem Konzept in Verbindung gebracht, das der Multiplikation mit 10 entspricht. Entwicklungen, die zu diesem Zweig gehören, können oft bei der Arbeit mit gebündeltem Material beobachtet werden, z.B. bei der Addition zweistelliger Zahlen mittels dezimaler Blöcke.

Wie die Beobachtung von Kindern bei der Bearbeitung der hier genannten und auch weiterer im Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems wirksamer Übungen (Simon 2005, Simon 2007 und Simon & Grünke 2010) zeigt, scheinen die Entwicklungen innerhalb dieser Zweige relativ unabhängig voneinander abzulaufen. So können Kinder einen der Zweige bereits vollständig durchlaufen haben, während in den anderen beiden Zweigen noch nicht einmal ansatzweise generalisierte mathematische Konzepte vorliegen.

Dass neben diesen Entwicklungszweigen weitere Faktoren berücksichtigt werden müssen, zeigen überraschende Beobachtungen an rechenschwachen Kindern. So muss selbst dann, wenn ein Kind bei der Addition zweier Zahlen das Kommutativgesetz verwendet, die Vertauschbarkeit von Zehnern und Einern beim Rechnen nicht unbedingt verstanden sein. So konnte z.B. ein Kind, welches 80-1 rechnen sollte, diese Aufgabe nur dann lösen, wenn zuerst 7 Zehner und danach 10 Einer in einen Beutel gegeben wurden, aber nicht, wenn diese Reihenfolge umgekehrt wurde. Ein anderes Kind konnte die Rechenaufgabe 50+6 spontan lösen, rechnete die Aufgabe 6+40 aber mittels „41,42,43,44,45,46“.

Vergleichbare Effekte mit Bezug auf das Distributivgesetz und das Monotoniegesetz (liegt dem Prinzip der Nachbaraufgaben sowie der Tatsache zugrunde, dass sich eine Zahl nicht verändert, wenn man Zehner entbündelt oder zu Zehnern bündelt) können ebenfalls an geeigneten Übungen beobachtet werden.

3. Fazit

Ein Modell für die Entwicklung des Verständnisses für unser Stellenwertsystem kann nicht linear sein. Stufenfolgen, wie sie in den Fusons Stufen des Zählens und der Addition (Fuson, 1988) aufgeführt werden, sind allenfalls in den drei Entwicklungszweigen denkbar. Das Durchlaufen dieser Stufen hängt jedoch von Kenntnissen bezüglich der Rechenarten und den zwischen ihnen wirkenden Rechengesetzen und von bereits vorhandenen Kenntnissen aus den anderen Entwicklungszweigen ab.

Literatur

Fuson, K. (1988): Children's Counting and Concepts of Number. New York: Springer.

Schmidt, S., Weiser, W. (1993): Semantische Strukturen von einfachen Textaufgaben zu den Grundrechenarten. In: Becher, H.R., Bennack, J. (Hrsg.): Taschenbuch Grundschule. Hohengehren.

Siegler, R.S., Stern, E. (1998): Conscious and unconscious strategy discoveries: A Microgenetic Analysis. Journal of experimental Psychology 127(4), 377-397

Simon, H. (2005): Dyskalkulie - Kindern mit Rechenschwäche wirksam helfen. Stuttgart: Klett-Cotta.

Simon, H. (2007): Interventionen bei Störungen des Erwerbs arithmetischer Konzepte. Lengerich: Pabst Science Publishers.

Simon, H., Grünke, M. (2010): Förderung bei Rechenschwäche. Stuttgart: Kohlhammer.

Susanne SPIES, Siegen

„Sie sollen die Schönheit der Mathematik erfahren.“ Didaktische Perspektiven der Mathematikästhetik

Unter der Überschrift „Förderung langfristiger Einstellungen“ formuliert der Mathematiklehrplan für die gymnasiale Oberstufe in NRW folgende Zielsetzung: „Sie [die Schülerinnen und Schüler] sollen für die Mathematik positiv motiviert werden, sollen die Leistungsfähigkeit und Schönheit der Mathematik erfahren.“ [S. 38]

Die Hoffnung, durch die Beschäftigung mit dem Schönen eine langfristig wirksame, positive affektive Beziehung zur Mathematik aufzubauen, ist sicher berechtigt, bietet die Aussicht auf ein ästhetisches Erlebnis doch ein Motiv zur Beschäftigung mit Mathematischem abseits von Überlegungen zur späteren Brauchbarkeit oder dem kurzfristigen Erfolg durch Kalkülbeherrschung. Zu grundlegenden Voraussetzungen der Umsetzung nimmt der Lehrplan indes nicht Stellung. Es wird ebenso wenig auf die intendierten Träger mathematischer Schönheit und deren Eigenschaften eingegangen wie auf die konkrete unterrichtliche Umsetzbarkeit oder eine mathematikdidaktische Einbettung. Im Folgenden sollen mögliche Konkretisierungen dieser Bereiche skizziert werden.

1. Mögliche Objekte mathematisch-ästhetischer Erfahrungen

Visuelle Erfahrungen mit regelmäßigen geometrischen Formen, Spiralen oder bestimmten Proportionen, wie etwa dem Goldenen Schnitt, sind typische Beispiele, wenn Schönheit und Mathematisches zusammengebracht und für den Unterricht fruchtbar gemacht werden soll. Durch diese Verbindung soll einerseits die Schülermotivation gestärkt werden, andererseits soll der visuelle Eindruck Erkenntnisse über die zu Grunde liegende Mathematik liefern. Die Untersuchung mathematischer Grundlagen der bildenden Kunst verspricht zusätzlich, den Unterricht durch einen nicht offensichtlichen Anwendungsbereich der Mathematik zu bereichern. [Vgl. z.B. Themenheft ml 157]

Eine aus der Relevanz des Schönen für die mathematische *Wissenschaftspraxis* entstandene Forderung [vgl. z.B. Papert 1988] wird indes in der mathematikdidaktischen Literatur sehr selten diskutiert (Ausnahmen bilden Brinkmann (z.B. 2006) und Sinclair (2006)): Das Erleben der Schönheit innermathematischer Strukturen und Argumentationsgänge wie etwa der Schönheit von Beweisen oder Theoremen. Dieser Gegenstandsbereich sollte aber m.E. gerade im Zusammenhang mit der oben zitierten Lehrplanforderung besondere Beachtung finden, markiert er doch nicht nur einen Zusammenhang von Mathematik und Schönheit, sondern stellt die Schönheit der Mathematik selbst ins Zentrum.

2. Eigenschaften schöner Mathematik

Den Begriff der Schönheit innermathematischer Strukturen zu fassen ist ebenso schwierig, wie dies für die Schönheit im Allgemeinen gilt. Mathematiker begründen daher ihre ästhetischen Werturteile häufig mit der Aufzählung verschiedener Eigenschaften [vgl. z.B. Hardy 1940, S. 113]. Die Zusammenschau solcher Listungen mit Ansätzen aus der mathematikphilosophischen Literatur zeigt, dass bestimmte Aspekte in unterschiedlicher Akzentuierung und Ausführlichkeit immer wieder genannt werden. So kann das Spektrum mathematischer Schönheit durch verschiedene, teils sehr unterschiedliche Eigenschaftskomplexe aufgespannt werden:

(Innermathematische) **Tragweite:** In mathematisch-ästhetische Werturteile geht häufig die *interdisziplinäre Vernetzung* im Sinne weitreichender Verbindungen des Resultates zu anderen Teildisziplinen oder der Eröffnung neuer Forschungsfelder ein. Andererseits spielt auch die Anwendbarkeit der Beweismethode über die konkrete Situation hinaus, also eine *weitreichenden Heuristik* eine zentrale Rolle für das Schönheitserleben, wodurch die Beweisidee zum zentralen Gegenstand des Urteils wird.

Ökonomie: Die häufig betonte Kürze oder Einfachheit schöner Mathematik wird entweder negativ, etwa durch das Fehlen eines unnötigen technischen Überbaus, oder in Relation zu anderen Eigenschaften bestimmt. So erzeugt der Gegensatz von *Einfachheit und Komplexität* z.B. im Falle von subjektiv zunächst schwer zugänglichen Problemen mit dann gut überschaubarer Lösung eine ästhetisch wirksame Spannung. Auch der Eigenschaftskomplex der *Tragweite* kann zur *Bezugsgröße* werden - ein Beweis ist gerade dann ökonomisch, wenn er in Relation zur Tragweite des Resultates besonders einfach wirkt.

Epistemische Transparenz: Schöne Stücke der Mathematik zeigen den Kern der Sache, klären Zusammenhänge auf und lassen die Frage nach dem „Warum" nicht offen. Sie führen also zu einem *tiefen Verstehen*, einem Erkenntnisgewinn, der über das Anerkennen der Korrektheit hinaus geht. Dabei scheint sich dieses Verstehen oft plötzlich einzustellen, und es kommt zum tiefgreifenden emotional berührenden *Aha!-Erlebnis*.

Emotionale Wirksamkeit: Durch eine stark emotional gefärbte Sprache über das Ästhetische in der Mathematik werden den bisher genannten Eigenschaftskomplexen qualifizierende Gefühle zugewiesen. Insbesondere wird das Moment der *Überraschung* oder des *Erstaunen*s betont. Aber auch die *Unausweichlichkeit,* mit der ein Sachverhalt offen gelegt und das Ziel erreicht wird, gehört zum Gefühlspanorama. Einher geht dies nicht selten mit der Rührung über das eigene Erkenntnisvermögen.

Dieses Spektrum kann den Begriff mathematischer Schönheit nicht vollständig erfassen, lebt er doch gerade von inneren Spannungen und einem starken subjektiven Moment [vgl. auch Müller-Hill/Spies 2011]. Dennoch bieten m.E. die beschriebenen Charakteristika eine gute Grundlage, um das Phänomen mit didaktischer Implikation weiter zu diskutieren.

3 Unterrichtliche Umsetzung und mathematikdidaktische Perspektiven

Obgleich die vorgestellten Eigenschaftskomplexe der Wissenschaftspraxis entstammen, sind sie nicht an den Bereich der aktuellen Forschungsmathematik gebunden. Ein Blick in die Mathematik- und Ästhetikgeschichte zeigt, dass die prominentesten Beispiele elementar zugänglich sind, sich aber dennoch durch alles auszeichnen, was einen schönen Gegenstand der Mathematik ausmacht. Häufig genannt wird etwa der Euklidische Beweis zur Unendlichkeit der Primzahlmenge [vgl. z.B. das Ranking in Wells 1990]. Dies zeigt im Übrigen auch, dass die ästhetische Komponente entwicklungsgeschichtlich gesehen Teil der Mathematik ist, wie auch diese ein Rolle in der allgemeinen philosophischen Ästhetik spielt. In diesem Sinne liefert die Einbeziehung des Schönen „exemplarische Einblicke in die historische Genese der Mathematik und ihre Bedeutung für die Entwicklung unserer Zivilisation“ [Lehrplan, S. 6] und trägt somit zu einem weiteren Unterrichtsziel bei.

Wie bei allem Kunstschönen bedarf das Erkennen der mathematischen Schönheit Übung und Gewöhnung. Das Aufzeigen von Charakteristika wie Ökonomie und Tragweite an Beispielen ist ebenso notwendig, wie der eigenständig erforschende Umgang mit den Gegenständen, denn Eigenschaften wie epistemische Transparenz oder emotionale Anrührung können sicher nicht gelehrt werden. Gegenstand von Demonstration und Erfahrung können dabei nicht nur Beweise im engeren Sinne, sondern allgemeiner auch mathematisches Argumentieren und Begründen sowie das Lösen von Problemen und die Reflexion dieser Prozesse sein [vgl. Dreyfus und Eisenberg 1986, S. 4f]. Die Integration mathematikästhetischer Fragen in den Unterricht setzt somit auf Seiten der Lehrperson Erfahrungen verschiedener Art voraus: Sie muss authentisch die emotionale Wirksamkeit oder die erstaunliche Tragweite eines Beispiels vermitteln zu können. Auch muss ihr die Relevanz des Ästhetischen bewusst sein, was die Reflexion über das eigene Fach sowie Einblicke in die mathematische Praxis notwendig macht. In diesem Bereich ist die Lehrerbildung gefragt.

Die Mathematikästhetik kann in der didaktischen Diskussion den Blick auf die unterschiedlichsten Bereiche öffnen und etwa das Spektrum aller drei Grunderfahrungen nach Winter (1996) erweitern: Die Analyse von Künstlerischem mit Hilfe der Mathematik stellt, wie oben angedeutet, ein weiteres Anwendungsgebiet dar, das nahezu alle schulrelevanten Disziplinen der Mathematik umfassen kann (G1). Die Betrachtung innermathematischer Gegenstände als Kunstwerke und ihrer Produzenten als Menschen mit kreativem Potential offenbart sonst verborgene Facetten der Wissenschaft und Kulturleistung Mathematik (G2). Die evaluative Funktion des Ästhetischen ist weiterhin ein nicht zu unterschätzendes Element des mathematischen Problemlöseprozesses, erweitert aber auch den Blick auf heuristische Strategien des Alltags (G3). So kann das ästhetische Erleben im Mathematikunterricht einen umfassenden Beitrag zum Allgemeinbildungswert des Faches leisten.

Die Integration der Mathematikästhetik bedeutet also eine Horizonterweiterung auf verschiedensten Ebenen mathematikdidaktischer Forschung. Eine ausführliche Bearbeitung der hier nur angedeuteten Themenkomplexe unter dieser Perspektive verspricht daher einen fruchtbaren Beitrag zum Nachdenken über das Lehren und Lernen von Mathematik zu leisten.

Literatur

Brinkmann, Astrid (2006): Erfahrung mathematischer Schönheit. In: Büchter, A. u.a. (Hrsg.): Realitätsnaher Mathematikunterricht. Hildesheim, S. 203 – 213.

Dreyfus, Tommy / Eisenberg, Theodore (1986): On the Aesthetics of Mathematical Thought. In: For the learning of mathematics 6 (1), S. 2 – 10.

Hardy, Godfrey Harold (1940): A Mathematician’s Apology. Cambridge.

Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW (Hrsg.) (1999): Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II. Mathematik. Frechen.

Müller-Hill, Eva / Spies, Susanne (2011): Der Begriff mathematischer Schönheit in einer empirisch informierten Ästhetik der Mathematik. In: Helmerich, M. u.a. (Hrsg.): Mathematik Verstehen. Wiesbaden, S. 261 – 281.

Papert, Seymour (1988): The Mathematical Unconscious. In: Wechsler, J. (Hrsg..): On Aesthetics in Science. Basel, S. 104 – 119.

Sinclair, Nathalie (2006): Mathematics and Beauty. Aesthetic Approaches to Teaching Children. New York.

Weigand, Hans-Georg (Hrsg.) (2009): Mathematik lehren 157. Kreative Zugänge zur Mathematik.

Wells, David (1990): Are These the Most Beautiful? In: The Mathematical Intelligencer 12 (3), S. 37 – 41.

Winter, Heinrich (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61, S. 37 – 46.

Angela STACHELBERGER, Wien

Mathematik Lernen im bilingualen Diskurs – Sprachliche Dimensionen von Problemlöseprozessen

1. Hintergrund der Studie

Im Lichte wachsender Globalisierung stellen politische, ökonomische und soziale Entwicklungen nationale Bildungssysteme vor die Herausforderung, die zu vermittelnden Fachkompetenzen im interkulturellen Diskurs anwendbar zu machen. Die Symbiose von Fach- und Fremdsprachenunterricht, die europaweit unter dem Begriff *Content and Language Integrated Learning* (CLIL) subsumiert wird, scheint ein viel versprechender Weg, dieser Herausforderung gerecht zu werden. Quintessenz dieses Ansatzes ist die integrative Sprach- und Inhaltsvermittlung, wobei rigide Grenzen zwischen Unterrichtsgegenständen durchbrochen werden und Sach- und Sprachlernen in ein gleichberechtigtes Miteinander treten. Coyle u.a. (2010) zufolge ist CLIL 'a dual-focussed educational approach in which an additional language is used for the learning and teaching of both content *and* language' (Coyle u.a., 2010, S.1).

Die für den CLIL-Unterricht konstitutiven Zielformulierungen beziehen sich vorwiegend auf die Bereiche Kultur, Sprache, Inhaltslernen und Kognition. Wurde traditionell vor allem die Verbesserung der Sprachkompetenz durch verstärkten Kontakt mit der Zielsprache als primärer Mehrwert des CLIL-Unterrichts in den Vordergrund gestellt, so rücken nicht zuletzt durch zunehmende interdisziplinäre Aktivitäten aktuell inhaltliche und lerntheoretische Dimensionen stärker ins Bewusstsein. Zum einen eröffnet das Arbeiten in zwei Sprachen die Möglichkeit der Auseinandersetzung mit Lehrinhalten aus verschiedenen Perspektiven, da bilinguales Lehren und Lernen ein größeres Repertoire an Darstellungs- und Betrachtungsformen bietet (vgl. Darn, 2006). Zum anderen wirkt das Lernen in der Fremdsprache positiv auf die kognitive Entwicklung, da insbesondere das wechselseitige in Bezug setzen und Vergleichen zweier semantischer Systeme zusätzliche kognitive Ressourcen beansprucht und Vorteile für die Denk- und Lernfähigkeit sowie kognitive Flexibilität der SchülerInnen bringt (vlg. Coyle u.a., 2010; Jäppinen, 2005). Weiters eröffnen sprachliche Barrieren das Potential einer intensiveren Auseinandersetzung mit Lehrinhalten. Da in der Fremdsprache dargebrachte Inhalte eine zusätzliche Herausforderung darstellen, sind größere kognitive Bemühungen erforderlich als in der Erarbeitung von Lehrstoff in der Muttersprache (vgl. Van de Crean u.a., 2007). Auch

Studien mit speziellem Bezug zur Didaktik der Mathematik zeigen, dass die Sinnkonstruktion in fremdsprachlichen Textaufgaben mathematisches Denken unterstützt (vgl. Barwell, 2009) bzw. bilinguale LernerInnen über ausgeprägte metakognitive Fähigkeiten verfügen, die es ihnen ermöglichen, Problemlöseprozesse effektiver zu reflektieren (vgl. Clarkson, 2007). Daher könnte mit Wolff (2007) gefolgert werden, dass bilinguale LernerInnen generell die besseren InhaltslernerInnen sind, da sie Inhalte in der Fremdsprache tiefer verarbeiten und komplexere Konzepte und Schemata konstruieren.

Lerntheoretisch entspricht die wachsende Bedeutung von CLIL dem Paradigmenwechsel zu soziokulturellen und sozialkonstruktivistischen Lerntheorien, die die Rolle der Sprache als soziales Phänomen hervorheben und den Prozess des Wissenserwerbs durch Teilnahme an sozialen Beziehungen definieren. Grundlage dafür bildet die Ansicht, dass kognitive Entwicklung nicht ohne soziale Interaktion gedacht werden kann, und Lernen durch Ko-Konstruktion in sozialer Umgebung stattfindet. Da CLIL-Unterricht, ausgelöst durch den Einsatz der Fremdsprache, eine Intensivierung der Bedeutungsaushandlung in direkter Interaktion mit sich bringt und Lernen sozial situiert, wird demnach eine ideale Lernumgebung geschaffen (vgl. Dalton-Puffer und Smit, 2007). Gleichzeitig tritt die Grundfrage der Beziehung zwischen Sprache und Lernen im Mathematikunterricht verstärkt in den Vordergrund.

Während die einschlägige Forschung bislang vorwiegend Ergebnisstudien in Bezug auf den Einfluss bilingualen Unterrichts auf Lernerfolge in Mathematik, d.h. das *Produkt* des CLIL-Unterrichts, hervorbrachte (vgl. Barwell, 2009; Clarkson, 2006), sind Untersuchungen der eigentlichen Denk- und Arbeitsprozesse noch recht rar. Doch könnte gerade die genauere Untersuchung der *Prozesse* bilingualer Sinnkonstruktion näheren Aufschluss über das Potential der Fremdsprache für das Mathematiklernen geben. Diese Lücke füllt die vorliegende Arbeit, wenn sie versucht, Antworten auf folgende Forschungsfragen zu finden:

1. Wie beeinflusst die Dimension der Fremdsprache das Lernen und Arbeiten der SchülerInnen?
2. Wie werden Inhalte und Arbeitsprozesse *versprachlicht*?
3. Wie gestalten sich Bedeutungskonstruktion und Problemlöseprozesse?
4. Wie erleben und bewerten SchülerInnen den englischsprachigen Mathematikunterricht?

2. Methodik und Design der Studie

Zum Zwecke der Datensammlung wurden 11 SchülerInnen der zweiten Klasse (6. Schulstufe) an einem Bundesgymnasium nahe Wien, welches als Teil des Schulprofils so genannte *International Classes* mit Englisch als Arbeitssprache führt, in videografierten Einzelinterviews Arithmetik- und Textaufgaben in der Fremdsprache vorgelegt. Die SchülerInnen wurden dazu angehalten, ihre Gedanken während der Bearbeitung der Aufgaben laut zu äußern, um den Prozess der Bedeutungskonstruktion und des Problemlösens bzw. die Versprachlichung der Lösungsprozesse zugänglich zu machen. Das Protokoll der gedanklichen Formulierungen liefert Informationen zu Vorgehen, logischem Denken und Schlussfolgern während des Arbeitens und vermag Einsicht in das Spezifikum der Bedeutungskonstruktion in der Fremdsprache zu geben.

Die Analyse umfasst im Wesentlichen vier Schritte. Zu Beginn wurde der Lösungsprozess in fünf Arbeitsphasen eingeteilt, um die Beschreibung des Vorganges zu erleichtern. Im Anschluss daran erfolgte die qualitative Datenanalyse im Rahmen des Grounded-Theory-Ansatzes (Glaser und Strauss, 1967), der davon ausgeht, dass hinter den empirischen Indikatoren Konstrukte stehen, aus denen allmählich Theorien entwickelt werden. Durch *Offenes Kodieren* wurden markante Datenteile identifiziert und mit handlungsorientierten, aktiven Codes wie *Sprachenwechsel*, *Wiederholen der Angabe* oder *Fehler im Rechenprozess* bezeichnet. Um strukturiert vorgehen zu können, wurde dazu ein Kodierleitfaden mit Ankerbeispielen und Kommentaren erstellt. Aus den signifikantesten Codes, wie *Übersetzung*, entstanden Kategorien zur Theoriebildung. Zusätzlich wurden Vergleiche zwischen Daten, Ereignissen und Kontexten gezogen, um diese in Beziehung zu setzen. Drittens wurden die gewonnenen Kategorien in ihre unterschiedlichen Dimensionen aufgefächert. Die so erzeugte analytische Vielfalt ermöglicht es, die Eigenschaften und Charakteristika der Kategorien zu erfassen. Viertens erfolgte die Anwendung des Kodierparadigmas, um Ursachen und Konsequenzen von sowie Beziehungen zwischen Kategorien aufzudecken. Durch die immer engere Verknüpfung der Konstrukte entstehen Theoriefragmente.

3. Erste Ergebnisse und Ausblick

Nach ersten Analyseansätzen zeigen sich unter anderem drei wesentliche Phänomene. Zum einen bewirken Übersetzungen, die bewusst oder unbewusst durch Unsicherheit und Probleme im Arbeitsvorgang, durch den Wunsch nach Kontrolle oder durch Präferenz der Muttersprache ausgelöst wurden, reflektiertes, vielschichtiges Analysieren von Lehrinhalten. Somit führt das Arbeiten in zwei Sprachräumen zu intensiver Auseinandersetzung mit Lehrinhalten. Weiters führen unverständliches Vokabular, komplexe Satzstrukturen oder Übersetzungsfehler zu Problemen, die das Lösen der Aufgabe unmöglich machen oder zur Suche nach alternativen Lösungswegen zwingen. Drittens werden metakognitive und metalinguistische Fähigkeiten sichtbar, wenn einerseits Sprache gezielt als Werkzeug fungiert, um Information zusammenzufassen und relevante Textstellen hervorzuheben, und andererseits Arbeitsschritte reflektiert oder weitere Vorgehensweisen geplant werden. In weiterer Folge soll die Analyse der Daten zum Zwecke der Theoriebildung fortgeführt und verfeinert werden. Außerdem sollen Leitfadeninterviews und Fragebögen das Bild ergänzen.

4. Literatur

Barwell, R. (Hrsg.). (2009). Multilingualism in mathematics classrooms: Global perspectives (Bilingual education and bilingualism). Bristol: Multilingual Matters.

Clarkson, P. (2006). Australian Vietnamese students learning mathematics: High ability bilinguals and their use of their languages. Educational studies in mathematics 64(2), 191-215.

Coyle, D. u.a. (Hrsg.). (2010). CLIL: content and language integrated learning. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Dalton-Puffer, C. & Smit, U. (Hrsg.). (2007). Empirical perspectives on CLIL classroom discourse - CLIL: Empirische Untersuchungen zum Unterrichtsdiskurs (Sprache im Kontext 26). Frankfurt: Lang.

Darn, S. (2006). Content and language integrated learning (CLIL): A European Overview. Verfügbar unter http//www.stevedarn.com/?Writings::CLIL%3A_A_European_Overview [14.2.2011]

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research. New York: Aldine de Gruyter.

Jäppinnen, A.-K. (2005). Thinking and content learning of mathematics and science as cognitional development in content and language integrated learning (CLIL). Language and Education 19(2), 147-168.

Van de Crean, P. u.a. (2007). Cognitive development and bilingualism in primary schools. In Marsh, D. & Wolff, D. (Hrsg.). (2007). Diverse contexts - converging goals: CLIL in Europe. Frankfurt: Lang, 185-200.

Wolff, D. (2007): CLIL: Bridging the gap between school and working life. In Marsh, D. & Wolff, D. (Hrsg.). (2007). Diverse contexts - converging goals: CLIL in Europe. Frankfurt: Lang, 15-25.

Judith STANJA, Essen

Wie verstehen Grundschulkinder stochastische Vorhersagen?Konzeption von Interviews zum Verständnis stochastischer Vorhersagen

Dieser Beitrag stellt die Konzeption von Interviews vor, die Teil des Forschungsprojektes „Elementares stochastisches Sehen“ sind. Ziel der Interviews ist es, das Verständnis stochastischer Vorhersagen bei Grundschulkindern zu rekonstruieren.

1. Das Projekt „Elementares stochastisches Sehen“

Das Projekt „Elementares stochastisches Sehen“ ist vor dem Hintergrund der Charakterisierung der besonderen Natur stochastischen Wissens (siehe die Analysen Steinbrings, beispielsweise 1991), dem Wechselspiel zwischen Mathematik und ihrer Anwendung sowie der Rolle von Zeichen in der Mathematik zu verstehen. Die Rolle der Anwendung kann zum einen historisch und zum anderen schulmathematisch betrachtet werden. In beiden Fällen spielt die Anwendung eine wichtige Rolle bei der Entwicklung neuen stochastischen Wissens. Das Spannungsverhältnis/ Wechselspiel zwischen mathematischer Theorie und ihrer Anwendung ist durchweg vorhanden. Während im Verlauf der Geschichte der Stochastik die Bedingungen für die Anwendung dieses Wissens (etwa Unabhängigkeit, Akzeptanz von Abweichungen vom Modell) nach und nach herausgearbeitet wurden, werden in der Schulstochastik die Bedingungen zunächst nicht diskutiert. D.h. beispielsweise für die Grundschulstochastik, dass möglichst ideale Zufallsgeräte verwendet werden. Aus semiotischer Perspektive sind Zeichen in der Mathematik notwendig, da mathematische Inhalte abstrakt sind (Hoffmann, 2003). Sie stellen Mittel zum Denken, zum Argumentieren und Artikulieren von Ideen dar. Darüber hinaus bieten sie die Möglichkeit neue Ideen zu entwickeln (Sfard, 2000). Als Grundlage für Zeichen könnten in der Stochastik *Diagramme* und *Listen* dienen. Die verwendeten Zeichen bedürfen einer Deutung und sind häufig durch Konventionen festgelegt.

Das Forschungsprojekt “Elementares stochastisches Sehen” besteht aus einer Designkomponente und einer Theoriebildungskomponente. Zum einen werden Materialien und Aufgaben für eine Intervention entwickelt, zum anderen wird das theoretische Konstrukt „Elementares stochastisches Sehen“ ausgearbeitet und empirisch erprobt. Das theoretische Konstrukt dient zur Beschreibung elementaren stochastischen Denkens bei Grundschulkindern. Unter der Hypothese, dass stochastisches Denken einer speziellen Kultur samt adäquater Mittel und Denkwerkzeuge bedarf, in deren Nutzung

Grundschulkinder eingeführt werden müssen und ausgehend von den Hintergründen des Projekts ergibt sich die Notwendigkeit der Durchführung einer Intervention und damit der Entwicklung von Materialien und Aufgaben. Somit ergibt sich das Design der Studie mit einer Reihe von ersten Interviews, einer Intervention und einer darauf folgenden Reihe von Interviews. Die erste Reihe gibt Aufschluss über spontane Deutungen der Kinder und die Beziehungen, die sie zwischen diesen konstruieren können. Die Intervention gibt Gelegenheit, sich mit stochastischen Situationen und Vorhersagen auseinanderzusetzen. Die zweite Interviewreihe nach Abschluss der Intervention liefert Informationen dazu wie sich Kinder auf die Deutungskultur einlassen können.

2. Vorhersagen in der Grundschulstochastik

Stochastik in der Grundschule wird hier als Propädeutik verstanden, die sich primär an der besonderen Natur des stochastischen Wissens orientiert und in der „Formalisierung“ eine untergeordnete Rolle spielt. „Formalisierung“ meint einen Unterricht, der mit der Definition von „Ereignis“, „Wahrscheinlichkeit“ etc. beginnt und reine Wahrscheinlichkeitsrechnung betreibt. Es geht in der Grundschulstochastik vor Allem um die Auseinandersetzung mit Kernideen der Stochastik, wobei die Orientierung an der besonderen Natur des stochastischen Wissens wesentlich ist. Dazu gehört etwa auch kennenzulernen, dass Wissen nicht nur wahr oder falsch ist, sondern dass es verschiedene Qualitäten von Wissen geben kann. Vorhersagen stellen für Grundschüler eine Möglichkeit dar, einen ersten Zugang zur Ergründung der besonderen Natur stochastischen Wissens zu bekommen. Wichtig ist hierbei insbesondere die Beziehung zwischen Vorhersagen und Ergebnissen von Zufallsexperimenten mit einfachen Zufallsgeneratoren.

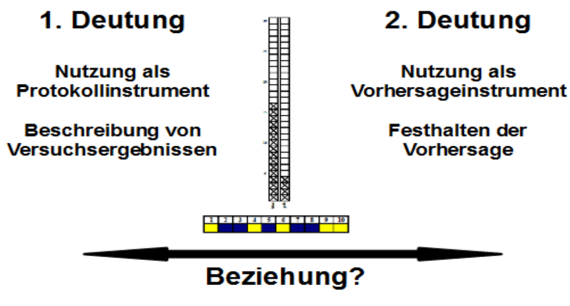
3. Konzeption der Interviews

Um etwas über das Verständnis stochastischer Vorhersagen von Grundschülern herauszufinden, werden Interviews konzipiert, die den Kindern Gelegenheiten geben Vorhersagen zu machen, diese zu bewerten und sich dazu zu äußern inwiefern sie es überhaupt für möglich halten etwas über den Ausgang eines Experimentes zu sagen. Die verwendeten Artefakte Kreisel, Liste, Diagramm spielen dabei eine wichtige Rolle. Sie haben im Interview verschiedene Funktionen: Der Zufallsgenerator ist das Objekt, dessen Verhalten beschrieben werden soll und wofür Vorhersagen gemacht werden müssen. Die Dokumentationsinstrumente *Liste* und *Diagramm* dienen sowohl dem Notieren von Vorhersagen als auch dem Protokollieren eines Versuchs. Als Vorhersageinstrument bieten die Artefakte die Möglichkeit der Fixierung einer Vorhersage und machen sie so im weiteren Gespräch zugänglich – als etwas das gedeutet werden muss oder als Referenz zur Klärung herangezogen werden kann.

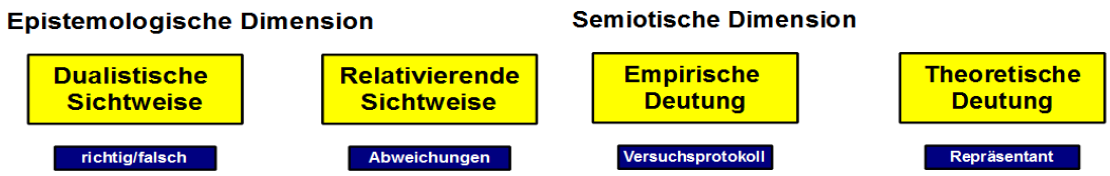
Zunächst interessiert, wie eine Vorhersage aussieht, die ein Kind macht. Hier kann aus Expertensicht gewertet werden, ob es sich um eine ideale, gute oder schlechte Vorhersage handelt. Als Hilfe zur Begründung stehen dem Kind die Artefakte sowie Versuchsdurchführungen im Interview zur Verfügung. Daneben kann das Kind weitere Ideen und Vorerfahrungen hier einbringen. Die Bewertung vorliegender Vorhersagen (eigene/fremde) durch das Kind in Bezug auf hypothetische und tatsächliche Versuchsergebnisse sowie das erneute Vorhersagen nach der Durchführung eines Versuchs gibt Einblicke in die Einschätzung der Qualität, die Vorhersage haben. Als dritter Aspekt des Verständnisses wird die Möglichkeit Vorhersagen zu machen verstanden. Um die Artikulation eigener Ideen zu erleichtern werden dem Kind Aussagen anderer Kinder zur Einschätzung vorgelegt.

4. Ideen zur Auswertung

Grundlage für die Ideen zur Auswertung sind eine Reihe explorativer Interviews mit Kindern ohne oder mit wenig Vorerfahrung und einzelne Unterrichtsstunden, die im Rahmen einer Staatsarbeit entstanden sind. Leitend bei der Auswertung der explorativen Interviews war inwiefern überhaupt Sichtweisen der Kinder rekonstruierbar sind und welche sie einnehmen können. Bei der Auswahl der Szenen ist die Nutzung der Artefakte in verschiedenen Kontexten und die Art und Weise der Interpretation/Nutzung zentral:



Bisher konnten zwei Dimensionen identifiziert werden anhand derer das Verständnis stochastischer Vorhersagen charakterisiert werden kann – eine epistemologische und eine semiotische Dimension.



Auf der epistemologische Dimension geht es um die Wertung von Vorhersagen und die Möglichkeit überhaupt Vorhersagen machen zu können. Hier konnten als zwei kontrastierende Sichtweisen bisher eine *dualistische* (Vorhersagen sind richtig oder falsch) und eine *relativierende* Sichtweise (es werden Abweichungen von der Vorhersage zugelassen) rekonstruiert werden. Die semiotische Dimension beschäftigt sich mit den Deutungen/Nutzungen der Artefakte Diagramm/Liste, die die Kinder vornehmen. *Empirische Deutung* (als konkretes Ergebnis) und *theoretische Deutung* (als Repräsentant möglicher Ergebnisse) sind hier im Sinne der Stochastik zu verstehen und nicht wie etwa bei Arbeits-/Anschauungsmitteln, wo zwischen konkret dinglichen Deutungen und abstrakt relationalen Deutungen unterschieden wird.

5. Ausblick

Die bisherigen Interviews zeigen, dass elementares stochastisches Denken einer Einführung in eine elementare stochastische Kultur mit besonderen Deutungs- und Interpretationsweisen bedarf. Angesichts der begrifflichen Anforderungen bei stochastischen Vorhersagen kann es sich hierbei nicht einfach um ein Trainingsprogramm handeln. Die Intervention gibt Kindern Mittel (sowohl solche wie Diagramme als auch sprachliche Mittel) an die Hand, mit denen sie das Verhalten von Zufallsgeneratoren studieren und beschreiben sowie theoretische Vorhersagen für zukünftige Versuche machen und die Beziehung zwischen Vorhersagen und Ergebnissen untersuchen können.

Literatur

M. H. G. Hoffmann (Hrsg.). (2003): Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven. Hildesheim: Franzbecker.

Sfard, A. (2000): Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In: P. Cobb,K. E. Yackel, & K. McClain (Hrsg.): Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design. Mahwah, NJ: Erlbaum, 37-98.

Steinbring, H. (1991): The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Hrsg.): Chance encounters: Probability in education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 135-167.

Anke STEENPASS, Duisburg - Essen

Grundschüler bearbeiten Deutungsaufgaben zu Anschauungsmitteln – erste Ergebnisse im Projekt KORA

Aufbauend auf einer abgeschlossenen empirischen Studie („Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern“ E. Söbbeke 2005) sollen im qualitativen Forschungsvorhaben KORA – „Grundschulkinder deuten Anschauungsmaterialien: Eine epistemologische **Ko**ntext- und **Ra**hmenanalyse zur Förderung der visuellen Strukturierungsfähigkeit“ – spezifische Besonderheiten und Merkmale der visuellen Strukturierungskompetenz näher untersucht werden. Das Projekt KORA ist dazu als Interventionsstudie angelegt. In einer kleinen intervenierenden Einheit von 10 Unterrichtsstunden sollen Grundschüler einer dritten Klasse in der Fähigkeit, Strukturen in eine mathematische Darstellung hineinzulesen, gefördert werden. Sowohl vor, als auch nach der Intervention werden dann klinische Interviews mit Deutungsaufgaben zu Anschauungsmitteln durchgeführt.

Analyseperspektiven

Für den kindlichen Deutungsprozess von Anschauungsmitteln sind zwei Faktoren wesentlich: Das zu deutende Objekt – das Anschauungsmittel, als auch das deutende Subjekt – der Grundschüler. Auf der einen Seite steht das Anschauungsmittel mit seinen materialgebundenen „objektiven“ *Kontextmerkmalen,* auf der anderen Seite das Kind, das mit individuellen „subjektiven“ Sichtweisen an die Deutung des Anschauungsmittels herangeht. Beide Faktoren beeinflussen entscheidend Deutungsprozess und Deutungsergebnis. Es stellen sich hier die Fragen: Welche *Kontextmerkmale* des Materials nutzt das Kind zur Deutung und welche *Rahmung* trägt es an die Deutung des Materials heran?

„Objektive“ Kontextmerkmale

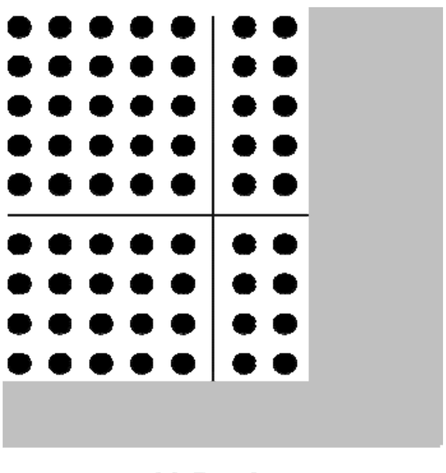


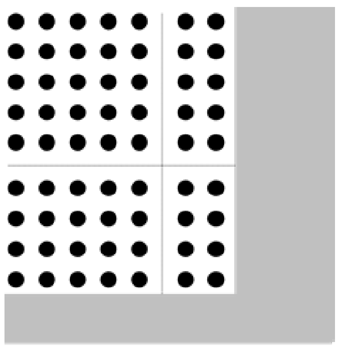
Abb.1

In Abb. 1 ist der Ausschnitt eines Hunderterpunktefeldes dargestellt. Zentrale Kontextmerkmale, deren Wahrnehmung einen entscheidenden Einfluss auf die Deutung des Anschauungsmittels hat sind hier: Die *Reihen- und Spaltenstruktur,* das *Kreuz,* der *Winkel,* die *Fünfer-Substruktur,* als auch zu zählende *Einzelpunkte*. Je nach Sichtweise auf diese Kontextmerkmale können z.B. die konkret - dinglichen, einzelnen Elemente im Vordergrund stehen, oder aber in der Abbildung enthaltene mathematische Beziehungen. Wird der Winkel von einem Kind etwa als konkretes Element gesehen, so wird es die nicht sichtbaren Punkte voraussichtlich im Deutungsprozess nicht berücksichtigen.

„Subjektive" Sichtweisen

Mit dem Konzept der *„Rahmung"* (Goffman 1974) lassen sich subjektive Deutungsprozesse im Mathematikunterricht näher beschreiben. Eingenommene Rahmungen als eine Art Deutungsschemata, beeinflussen grundlegend die Art und Weise, wie ein Kind eine gestellte Aufgabe versteht und sie bearbeitet. Dabei können spontan eingenommene Rahmungen durch Auseinandersetzung mit den Deutungsschemata anderer in einem Prozess der Modulation verändert und erweitert werden. Das Ergebnis dieser Modulation kann dann als weiterentwickeltes Interpretationsschemata verstanden und als abgeleiteter Rahmen bezeichnet werden (vgl. Schwarzkopf 2003, Krummheuer 1984).

Lisas Deutungen am Punktefeld



63 Punkte

60 + 2 + 1 62 + 1	25 + 10 + 20 + 8 8 + 20 + 10 + 25
35 + 28 9 + 9 + 9 + 9+ 9 + 9 + 9	45 + 18 100 - 37

Abb.2

Im Folgenden sollen beide Analyseperspektiven anhand einer videographierten Beispielepisode aus den Präinterviews der Pilotstudie konkreter dargestellt werden: Die Drittklässlerin Lisa soll im Interview zunächst eine Aufgabenkarte auswählen, die besonders gut zur Darstellung passt, anschließend beide gewählten Aufgaben in das Punktefeld einzeichnen (Abb.2). Für die Aufgabenauswahl benötigt sie etwa 2 min, wobei besonders auffällt, dass sie ausschließlich die Aufgabenkarten, nicht aber das vor ihr liegende Hunderterpunktefeld betrachtet.

Lisa wählt dann die Aufgaben 60+2+1; 62 + 1 und begründet dies mit den Worten: *„Weil die für mich am einfachsten ist, weil ich hab lang nicht mehr plus gerechnet. Wir sind gerade bei Geteilt und Mal und deswegen ist die am einfachsten im Moment für mich."*

Im ersten Aufgabenteil – Aufgabe auswählen – nutzt Lisa ausschließlich die Terme auf den Aufgabenkarten; die Kontextmerkmale des Hunderterpunktefeldes werden von ihr nicht berücksichtigt. Lisa stellt daher an dieser Stelle nur einen marginalen Zusammenhang zwischen Hunderterpunktefeld und passender Aufgabe her. Stattdessen stehen für sie eher die Aufgaben und Aufgabenmerkmale im Vordergrund. In den von ihr gewählten Beschreibungsmitteln *„rechnen“*, *„plus“*, *„Geteilt“*, *„Mal“*, *„am einfachsten“* wird deutlich, dass sie mit einer Art „Rechenrahmung“ an die Aufgabe herangeht. Die passendste Aufgabe ist für sie somit zunächst diejenige, die besonders leicht zu rechnen ist.

Im weiteren Verlauf des Interviews soll Lisa nun auch die Aufgaben einzeichnen. Sie versucht dazu zuerst den ersten Summanden „60“ zu bestimmen und nimmt dann die in Abb. 3 dargestellte Einzeichnung vor. Sie kreist hier die Summanden „60“ (von ihr mit der Notation „60“ versehen), „2“ und „1“ jeweils ein. Auf Nachfrage erklärt sie der Interviewleiterin wie sie zu dieser Einzeichnung gekommen ist: *„ (..) Also das hier sind ja immer fünf´ das merk ich ... immer ganz schnell, dass das fünf sind.“* Als ein markantes Kontextmerkmal nutzt Lisa spontan die Fünfer-Substruktur. Im weiteren Vorgehen nimmt sie implizit auch die Einteilung in vier Segmente zur Hilfe, denn sie ermittelt zunächst die Anzahl der Punkte in Bereich I, dann in Bereich III und abschließend in Bereich II und IV (Abb.3). Zu Bereich II und IV erklärt sie: *„Und bei diesen hier (tippt auf Bereich II und IV) hab ich einzeln gezählt, weil ich mir da nicht so sicher war.“* Zusätzlich zur Fünferstruktur zählt Lisa hier auch Einzelpunkte ab. Insgesamt geht Lisa in ihrer Zählhandlung von oben nach unten und von links nach rechts vor und greift somit die vorhandene Reihenstruktur auf.

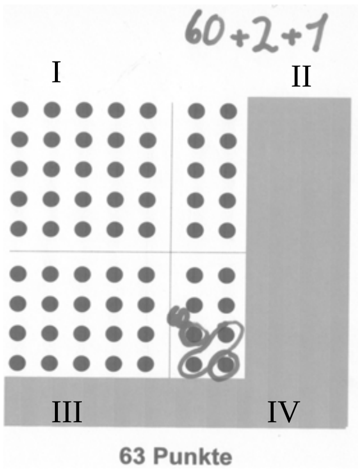


Abb.3

Im zweiten Interviewabschnitt ist Lisa durch die Aufgabenstellung „Zeichne ein wo du die Aufgaben siehst“ dazu aufgefordert ihre bisherige „Rechenrahmung“ zu modulieren. Sie muss nun eine Beziehung zwischen den gewählten Aufgaben und dem Punktefeld herstellen. Dazu bestimmt Lisa durch Zählhandlungen die einzelnen Summanden im Punktefeld. Ihre eingenommene Rahmung in diesem Abschnitt kann daher als „teilstrukturiert-zählend“ beschrieben werden.

Fazit

In ersten Analysen der kindlichen Herangehensweisen bei der Deutung von Arbeitsanschauungsmaterial deutet sich eine Spanne zwischen eher „arithmetisch - rechnenden“ und „geometrisch - visuellen“ Rahmungen an. Ein Großteil der Kinder nahm dabei in den Präinterviews spontan eine eher arithmetisch - rechnende Rahmung ein. Einblicke in die Postinterviews zeigen weiterhin, dass die Intervention den Kindern die Möglichkeit geben kann, ihre Rahmungen zu modulieren und reichhaltigere Deutungsmuster zu entwickeln.

Fragt man nach spezifischen Besonderheiten der visuellen Strukturierungskompetez, so sind neben der *Rahmung* auch die genutzten *Kontextmerkmale* und die *visuelle Strukturierungskompetenz* wesentliche Analysedimensionen. In weiteren Arbeitsschritten sind nun durch eine sorgfältige interpretative Analyse des Interviewmaterials differenziertere Analysekategorien und Unterkategorien zwischen „arithmetisch - rechnend“ und „geometrisch - visuell“ herauszuarbeiten. In einem Vergleich der Prä- und Postinterviews können dann relevante Entwicklungen und Zusammenhänge bezüglich dieser drei Dimensionen identifiziert werden.

Literatur

Goffman, E. (1974). Frame Analysis. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Krummheuer, G. (1984). Zur unterrichtlichen Dimension von Rahmungsprozessen. JMD 5(4), 285-306.

Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirischen Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Schwarzkopf, R. (2003): Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *Journal für Mathematikdidaktik,* 24, H3/4, 211 – 235.

Evelyn STEPANCIK, Wien, Markus HOHENWARTER, Linz

GeoGebraCAS – Evaluation und Entwicklung

Seit im Jahr 2006 auf der internationalen ACDCA & Derive-Konferenz die Einstellung der Weiterentwicklung des Computeralgebrasystems (CAS) Derive bekannt gegeben wurde, herrschte unter Österreichs CAS-Lehrern/innen Verunsicherung. Es stellte sich die Frage, welches neue Computeralgebrasystem ihren didaktischen Anforderungen entsprechen könnte. TI-Nspire, Maxima und WIRIS wurden erprobt, konnten sich aber kaum durchsetzen. Parallel dazu verbreitete sich die österreichische Open Source Software GeoGebra rasant über die ganze Welt. Im Zuge dieser Verbreitung wurde die dynamische Geometriesoftware GeoGebra um eine dynamische Tabellenkalkulation, die mit den Objekten der Geometrie- und Algebra-Ansicht interagiert, ergänzt. Es lag daher nahe, den Versuch zu wagen, GeoGebra mit einem didaktischen CAS auszustatten. Im November 2009 konnte schließlich das entsprechende Projekt GeoGebraCAS mit Unterstützung des österreichischen Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur gestartet werden.

1. Projektziele von GeoGebraCAS

Zu Projektbeginn wurden von den beteiligten Initiativen (ACDCA, PH Niederösterreich, GeoGebra) folgende Ziele festgelegt:

Es sollte ein didaktisches CAS entwickelt werden, das

- vom Leistungsumfang den Ansprüchen eines CAS genügt,
- bereits ab der 7. Schulstufe zum Erlernen der elementaren Algebra eingesetzt werden kann,
- eine benutzer/innenfreundliche Oberfläche aufweist und
- dynamisch mit den bisherigen GeoGebra-Komponenten verknüpft ist.

Die Berücksichtigung der 7. Schulstufe war uns wichtig, da auch wir – ähnlich wie Zeller und Barzel (2010) – davon ausgehen, dass die mannigfachen Möglichkeiten zur Manipulation von algebraischen Termen mit einem CAS leichter zu entdecken sind und sich positiv auf das Strukturverständnis bei Termen auswirken.

Dass auch das GeoGebraCAS eine ebenso intuitive Oberfläche aufweisen soll wie GeoGebra selbst, war eine wichtige Prämisse, damit die „instrumental genesis“ (Guin und Trouche 2002), also der Prozess um zu einer verständigen Handhabung von GeoGebraCAS zu gelangen, möglichst reibungslos verlaufen kann und wenig Zeit bzw. Anstrengung in Anspruch nimmt. Zusätzlich zum didaktischen CAS wurde die Entwicklung von Unterrichtsmaterialien für die Lernenden und didaktischen Begleitmaterialien für die Lehrenden geplant.

2. Erste Entwicklungen - GeoGebraCAS

Zu Beginn des GeoGebraCAS Projekts war angedacht, das bereits in GeoGebra integrierte Computeralgebrasystem als eine Art „symbolischen Notizblock" den Nutzern/innen in einem neuen Fenster direkt zugänglich zu machen. In dieser Variante wären Variablenbelegungen im CAS Fenster von den anderen GeoGebra Fenstern völlig unabhängig gewesen. Nach ersten Tests eines entsprechenden Prototyps innerhalb des Projektteams Ende 2009 zeigte sich jedoch schnell, dass eine automatische und dynamische Verknüpfung aller Variablenbelegungen zwischen CAS und GeoGebra gewünscht wurde. Auf diese Weise können Werte und Gleichungen von Objekten aus GeoGebra sofort im CAS Fenster verwendet werden.

GeoGebraCAS verwendet im Hintergrund das Open Source CAS MathPiper für symbolische Berechnungen. Die an bestehende GeoGebra Befehle angelehnte eigene Befehlssyntax von GeoGebraCAS wird dabei intern in MathPiper Befehle übersetzt. Damit ist es prinzipiell möglich, das zugrundeliegende CAS System bei Bedarf später auszutauschen.

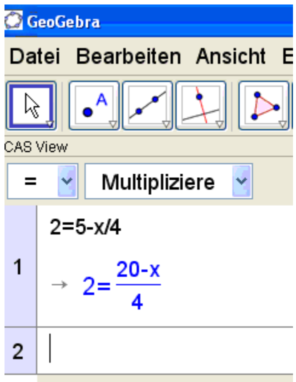
3. Unterrichts- und didaktisches Begleitmaterial

Von Dezember 2009 bis März 2010 entstanden Unterrichtsmaterialien und didaktische Begleitmaterialien für einzelne Themenbereiche der 7. bis 11. Schulstufe (siehe http://rfdz.ph-noe.ac.at, Material, GeoGebraCAS). Die Unterrichtsmaterialien für die Lernenden sind vorwiegend Arbeitsblätter mit kurzen Aufgabenstellungen zu Themen wie „Gleichungen lösen" oder „Binomische Formeln". Die didaktischen Begleitmaterialien beinhalten umfangreiche Informationen zum Inhalt der Materialien, zu den benötigten mathematischen und technischen Vorkenntnissen der Schüler/innen, zu den Lehrinhalten und Lernzielen sowie Vorschläge für einen möglichen Unterrichtsverlauf und Hinweise auf weiterführende Beispiele.

4. Erste Evaluationsergebnisse

Vor der Erprobung der Materialien bekamen die 15 teilnehmenden Lehrer/innen einen Online-Fragebogen, mit dem ihre bisherigen Erfahrungen beim Technologieeinsatz im Mathematikunterricht erhoben wurden. Nach dem Einsatz der Materialien konnten die Lehrenden bei einem weiteren Online-Fragebogen Feedback zum Unterrichtsmaterial, zum didaktischen Begleitmaterial sowie zum GeoGebraCAS geben. Die Schüler/innen hatten auch die Möglichkeit, das Unterrichtsmaterial sowie das GeoGebraCAS mittels Online-Fragebogen zu bewerten. Zusätzlich dazu wurden an einem Schulstandort mit traditionell hohem CAS-Einsatz Screenrecordings von 110 Schülern/innen der 7. bis 9. Schulstufe beim Lösen von Aufgaben mit dem GeoGebraCAS aufgezeichnet. Da vor allem diese Videos interessante Einsichten für die Weiterentwicklung des GeoGebraCAS geliefert haben, werden im Folgenden zwei Videos exemplarisch skizziert. Weitere Details zu den Evaluationsergebnissen sind unter http://rfdz.ph-noe.ac.at, Forschung, Publikationen, Computeralgebra zu finden.

Beide Videos, deren Inhalt hier kurz beschrieben wird, wurden in einer 7. Schulstufe aufgezeichnet. Es sollte jeweils die Gleichung 2 = 5 – x/4 schrittweise durch Äquivalenzumformungen mit GeoGebraCAS gelöst werden. Im ersten Video erhält eine Schülerin nach der Eingabe von „2=5-x/4" und Drücken der Enter Taste das in der nebenstehenden Abbildung zu sehende Ergebnis. In GeoGebraCAS wird zwischen exakter Auswertung (Option „="), numerischer Auswertung und „Behalte Eingabe" für eine unveränderte Ausgabe unterschieden. Die Schülerin kennt scheinbar diese verschiedenen Funktionen nicht und kann die Ausgabe der rechten Seite ihrer Gleichung nicht mit ihrer Eingabe in Zusammenhang bringen. Rund zwei Minuten lang manipuliert sie ihre Eingabe ohne Erfolg. Anfangs setzt sie den Bruch in Klammern, da sie scheinbar weiß, dass Klammern im Zusammenhang mit Brüchen bedeutsam sind. Später fügt sie ihrer Eingabe Leerabstände hinzu, doch auch diese verändern an ihrer Ausgabe – aufgrund der gewählten Option „=" für exakte Auswertung – nichts. Nach vielen Fehlversuchen, bei denen sie verschiedene Kombinationen von Klammern und Leerzeichen ausprobiert, teilt sie mit, dass die Aufgabe für sie nicht lösbar ist.



Dieses Video zeigt, dass offenbar die verschiedenen Auswertungsmöglichkeiten in der Oberfläche des GeoGebraCAS zu sehr versteckt waren und dies für die Schülerin ein Hindernis darstellte (vgl. „*organisational contraints*" nach Guin und Trouche 2002). Auch wenn Paul Drijvers (Drijvers 2002) dazu anregt, „Obstacles" als Chance zum Lernen aufzugreifen, möchten wir bei der Entwicklung eines didaktischen CAS das Auftreten solcher Hindernisse durch eine klare Menüführung nach Möglichkeit vermeiden.

Im zweiten Video gibt ein Schüler die Gleichung ein und bestätigt seine Eingabe wie erwartet mit „ ✔ " für „Behalte Eingabe". Danach ist rund eine

Minute lang keine Aktivität im Video zu sehen. Währenddessen führt der Schüler eine erste Äquivalenzumformung auf Papier durch, deren Ergebnis er dann in das CAS Fenster schreibt. Schrittweise löst der Schüler so die Gleichung außerhalb des CAS. Wenn, wie dieses Video deutlich macht, die Papier und Stift Technik dem CAS bevorzugt wird, dann kann dies einerseits an der Aufgabenstellung oder andererseits am nichtdurchschaubaren Black-Box Charakter des CAS liegen. In beiden Fällen sollte die Lehrperson diese Tatsache aufgreifen. Denn hierbei kann weder durch eine Veränderung noch durch eine Verbesserung der Software Abhilfe geschaffen werden.

5. Weiterentwicklung des GeoGebraCAS

Basierend auf den Ergebnissen der Evaluation mit Rückmeldungen von Schülern/innen und Lehrern/innen werden derzeit Anpassungen der GeoGebraCAS Oberfläche vorgenommen. Einerseits werden dabei grafische Symbole für eine spezielle CAS-Werkzeugleiste eingeführt. Andererseits wurden intern die dynamischen Möglichkeiten ausgebaut: bei Veränderung einer Eingabezeile werden nun etwa alle anderen davon abhängigen Zeilen automatisch neu berechnet.

6. Ausblick

Von April bis Juni 2011 werden mit dem überarbeiteten und erweiterten GeoGebraCAS erneut Materialien, die verstärkt auch das dynamische Zusammenspiel von Geometrie, Tabellenkalkulation und CAS aufgreifen, getestet und wiederum beides – das GeoGebraCAS und die Materialien – evaluiert.

Literatur

Drijvers, P (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. In: ZDM, Vol 34(5), 221-228.

Guin, D., Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. In: ZDM, Vol 34(5), 204-211.

Zeller, M., Barzel, B. (2010). Die Rolle von Computeralgebra beim Lernen elementarer Algebra. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010

Mag. Dr. Evelyn Stepancik, Universität Wien - Fakultät für Mathematik, Nordbergstraße 15, A-1090 Wien, evelyn.stepancik@univie.ac.at

Univ. Prof. DI Mag. Dr. Markus Hohenwarter, Johannes Kepler Universität Linz - Institut für Didaktik der Mathematik, Altenberger Straße 69, A-4040 Linz, markus.hohenwarter@jku.at

Christine STREIT, Nordwestschweiz

MATHElino - Frühes Lernen von Mathematik im Übergang vom Kindergarten zur Schule

l. Begleitetes Lernen zwischen Instruktion und Konstruktion

Wie kann frühes Lernen von Mathematik in den Kindergartenalltag integriert werden, so dass die Besonderheiten der Stufe gewürdigt werden und gleichzeitig die Anschlussfähigkeit für schulisches Lernen gegeben ist?

Im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojektes MATHElino (Laufzeit 2008-2009) wurde ein Konzept entwickelt, das auf mathematisches Lernen im Kindergarten fokussiert und eine mathematische Lernbiografie ohne Brüche ermöglichen soll. (Vgl. Royar; Streit 2010)

Zentrales Element ist das dreidimensionale KSM-Modell zur Kategorisierung mathematischer Lernanlässe. Das Modell umfasst die drei Kernbereiche Zahl, Raum und Form, Maß, zwei Sichtweisen auf mathematische Lerninhalte (Anwendungs- und Strukturorientierung) sowie die drei methodischen Aspekte "freies Tätigsein", "arrangierte Lernsituationen" und "instruierte Sequenzen". Eine ausführliche Darstellung des Modells findet sich bei Royar; Streit (2009).

In der Umsetzung sind die eigenen Konstruktionsleistungen der Kinder im Umgang mit mathematikhaltigen Materialien Ausgangspunkt sowohl der Theorie als auch der behutsamen pädagogischen Intervention. Dahinter steht die Überzeugung, dass Lernen einerseits der Anregung und Anleitung, andererseits der aktiven Eigentätigkeit bedarf. Nur so können flexible Wissensstrukturen ausgebildet werden. Wichtig in diesem Zusammenhang ist ein in der Interaktion stattfindender Aushandlungsprozess, der wiederum die Möglichkeit zur Unterstützung („*scaffolding*") durch die Lernbegleiter/innen bietet (vgl. z. B. Rogoff 1990).

Eine gleichgewichtige Berücksichtigung von Instruktion und Konstruktion ist vor allem beim frühen institutionalisierten Lernen im Kindergarten möglich. Die Gestaltung der Lernarrangements ist weniger durch enge Zeitvorgaben, einen Fächerkanon, Leistungskontrollen etc. vorgegeben. Das freie Tätigsein des Kindes ist historisch verankert und hat auch aktuell immer noch eine zentrale Bedeutung inne (vgl. z.B. Wannack u.a. 2008).

Entsprechend wurde in der Erprobung dem freien Tätigsein besondere Bedeutung zugewiesen. Die Beobachtung der Kinder während dieser Phase war Planungs- und Reflexionsgrundlage für weitere didaktische und methodische Maßnahmen.

Für eine erfolgreiche Intervention im Sinne einer kognitiven Aktivierung der Kinder scheinen besonders drei Aspekte von Bedeutung zu sein:

- Die Lernbegleiter/innen müssen den mathematischen Gehalt der Situation, der Handlung, der Produkte der Kinder usw. erkennen.
- Sie müssen die Denkwege und Lernprozesse der Kinder nachvollziehen und verstehen (vgl. auch Tharp, Gallimore 1988).
- Sie müssen eine Sensitivität für die richtigen Momente der Intervention entwickeln: Wann und wie soll ein Impuls gesetzt werden, ohne die Qualität und Intensität des freien Tätigseins zu beeinträchtigen?

Die Ergebnisse der theoriebasierten und reflexiven Begleitung waren ambivalent: In der Abschlussbefragung mittels eines Fragebogens wurde deutlich, dass sich die Einstellung zur Mathematik im Allgemeinen und zur Mathematik im Kindergarten im Besonderen bei den Teilnehmerinnen im Laufe des Projektes positiv verändert hatte. Diese Entwicklung spiegelte sich auch in einem veränderten Handeln in der Praxis wider. Der theoretische Erkenntniszuwachs konnte von den Teilnehmerinnen zu mathematikhaltigen Lernsituationen in Beziehung gesetzt werden. Dies gelang vor allem auf der planerischen Ebene und in Bezug auf das Einbringen eigener Vorschläge zur konkreten Umsetzung des Konzeptes. Zur Dokumentation der Lernprozesse der Kinder erstellten die Teilnehmerinnen kurze Beobachtungsprotokolle sowie Fotografien arbeitender Kinder oder fertiger Produkte. Die Analysen erfolgten oft ausschließlich auf der beschreibenden Ebene. In den „stimulated-recall“-gestützten Auswertungsgesprächen wurden episodische Beobachtungen immer wieder in Bezug zum allgemeinen Verhalten einzelner Kinder gesetzt. Das eigene Interventionsverhalten wurde dagegen nur eingeschränkt reflektiert. Wie auch in der Studie von König gezeigt, waren häufig enge Fragestellungen und direkte Handlungsanweisungen und nur selten Impulse für weiterführende Denkschritte zu beobachten (vgl. König 2009).

2. Für einen guten Mathestart - MATHElino in Kindergarten und Anfangsunterricht

Für eine nachhaltige Implementierung des Konzeptes sind umfassende Weiterbildungsangebote notwendig. Dies wird nun im Rahmen des Projektes "Für einen guten Mathestart" in der Nordwestschweiz umgesetzt. Dabei werden die spezifischen schweizerischen bildungspolitischen Gegebenheiten hinsichtlich der Bildungsstufe 4- bis 8-jähriger Kinder berücksichtigt.

Bedingt durch die interkantonale Vereinbarung über die Harmonisierung der obligatorischen Schule, das so genannte HarmoS-Konkordat, wird der

Kindergarten mittelfristig wahrscheinlich integraler Teil der "Volksschule" sein. Neue Studiengänge an verschiedenen Pädagogischen Hochschulen des Landes ermöglichen den Erwerb der gemeinsamen Lehrbefähigung für Kindergarten und "Unterstufe" (1. und 2. Klasse Primarschule).

Vor diesem Hintergrund erscheint es sinnvoll, stufenübergreifende Weiterbildungsmaßnahmen anzubieten. Kindergarten und Schule sind durch einen gemeinsamen Bildungsauftrag verbunden. Beide Institutionen stehen in der Verantwortung, ihre Bildungsbemühungen anschlussfähig zu gestalten und die Kontinuität in der Bildungsbiographie der Kinder zu sichern. Das kann aber nur gelingen, wenn Kindergarten und Schule kooperativ tätig sind - gerade im Hinblick auf die Gestaltung des Übergangs. Hellmich geht davon aus, dass "geeignete Bedingungen – wie beispielsweise aufeinander abgestimmte Bildungsaufträge vor- und grundschulpädagogischer Institutionen, geeignete Kooperationen der beteiligten Erzieherinnen/Erzieher und Grundschullehrerinnen/-lehrer sowie auf Expertise begründete Ausbildungskonzepte von Erzieherinnen/Erziehern und Grundschullehrerinnen/-lehrern – sich positiv auf Bildungskarrieren von Kindern, besonders im Übergang von einer vorschulischen Institution in die Grundschule, auswirken." (Hellmich 2007, S.3)

Entsprechend braucht es innovative Konzepte, die Möglichkeiten aufzeigen, wie Kindergarten und Schule gemeinsam zu einem „guten Mathestart" beitragen können. Auf der Basis von Kooperationen zwischen Kindergärten und Schulen, die gemäß dem KSM-Modell arbeiten, wird an der Pädagogischen Hochschule der Fachhochschule Nordwestschweiz an einer entsprechenden Konzeptentwicklung gearbeitet. Das KSM-Modell ist aufgrund seiner Modulstruktur erweiterungsfähig für den Anfangs-unterricht. Es bietet Orientierungshilfen, um das eigene pädagogische und didaktische Handeln begründbar zu machen, es an Zielperspektiven zu koppeln und Beliebigkeit zu vermeiden. Im Rahmen der Weiterbildungsmaßnahmen wird das Modell genutzt, um die Professionalisierungsprozesse der Lehrpersonen zu unterstützen.

Geplant ist ein mehrstufiges Vorgehen, das die Lehrpersonen im Auf- und Ausbau ihrer mathematischen, fachdidaktischen und diagnostischen Kompetenzen unterstützen soll. Dabei werden die empirischen Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen berücksichtigt. (Vgl. Lipowsky 2010)

Kooperationsprojekt "Für einen guten Mathestart"	
Phase 1	**Einführung** (stufenübergreifende Kleingruppen)
Phase 2	**Theoriebasierter Input** und **"Coaching" im Feld** (stufenspezifisch)
Phase 3	**Kooperativer „Dreischritt“ in der Kleingruppe** (vgl. Peter-Koop; Prediger 2008) ***Planen:*** Materialauswahl und Planung von selbstdifferenzierenden Lernarrangements auf der Grundlage des KSM-Modell ***Handeln und Beobachten*** (videogestützt): Erprobung und Dokumentation ***Analysieren und Reflektieren*:** - Freie Äußerungen und fokussierte Fragestellungen - Diskussion von alternativen Interventionsmöglichkeiten

Literatur

Hellmich, F. (2007). Bedingungen anschlussfähiger Bildungsprozesse von Kindern beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. Bildungsforschung, 4, 1

König, A. (2009). Interaktionsprozesse zwischen Erzieherinnen und Kindern. Wiesbaden: VS

Lipowsky, F. (2010). Lernen im Beruf – Empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In Müller, F., Eichenberger, A., Lüders, M. & Mayr, J. (Hrsg.), Lehrerinnen und Lehrer lernen – Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung, Münster: Waxmann, S. 51-72

Rogoff, B. (1990). Apprenticeship in thinking: cognitive development in social context. New York, NY: Oxford University

Royar, Th.; Streit, Ch. (2009). Mathematische Momente im Kindergarten schaffen und (er)fassen. Beiträge zum Mathematikunterricht, Münster: WTM-Verlag, S. 403-406

Royar, Th.; Streit, Ch. (2010). MATHElino. Kinder begleiten auf mathematischen Entdeckungsreisen. Seelze: Kallmeyer

Peter-Koop, A.; Prediger; S. (2005). Dimensionen, Perspektiven und Projekte mathematikdidaktischer Handlungsforschung. In: Eckert, Ela / Fichten, Wolfgang (Hrsg.): Schulbegleitforschung: Erwartungen – Ergebnisse - Wirkungen, Waxmann Verlag, Münster 2005, S. 185-201

Tharp, R.G.,; Gallimore, R. (1988). Rousing minds to life: Teaching, learning, and schooling in social context. Cambridge, UK: Cambridge University Press

Wannack, E.; Arnaldi, U.; Schütz, A. (2008). Das freie Spiel im Kindergarten – eine theoretische und didaktische Herausforderung für die Lehrerbildung. Journal *für Lehrerinnen- und Lehrerbildung (2)*, p. 63-67

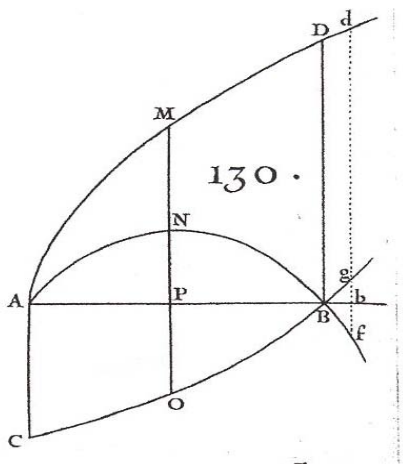
Horst STRUVE, Köln

Die Regel von l`Hospital

Ein klassisches Problem der Analysis ist die Berechnung von Grenzwerten. Hierfür gibt es einfache Regeln, etwa die folgende, die eine Aussage über die Quotientenfunktion zweier reellwertiger Funktionen f und g macht: Ist a $\in$ **R** und sind $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ und $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ mit α, β ≠ 0, so ist $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$. Diese Aussage ist nicht mehr in dem Fall anwendbar, wenn der Grenzwert „vom Typ $\frac{0}{0}$“ ist, d.h. wenn α = 0 und β = 0 ist. In diesem Fall gilt jedoch unter gewissen Bedingungen, etwa der Differenzierbarkeit von f und g in einem Intervall um a und der Existenz der auftretenden Grenzwerte: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Diese Aussage wird als *Regel von l´Hospital* bezeichnet, weil - wie es in vielen Büchern zur Geschichte der Mathematik heißt - dieser die Regel als erster veröffentlicht hat, nämlich in seiner 1696 erschienenen *Analyse des infiniment petits*.

Die letzte Aussage weckt allerdings die Neugierde von an der Geschichte der Mathematik Interessierten. Bekanntlich ist der Grenzwertbegriff zum erstenmal in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts von Cauchy in systematischer Weise zur Begründung des calculus eingeführt worden und ein halbes Jahrhundert später von Weierstraß formal präzisiert worden. Was hat l`Hospital wirklich formuliert und bewiesen? Welche Auffassung des calculus hat l´Hospital vertreten und was können wir heute davon lernen?

In *Analyse des infiniment petits* formuliert l´Hospital zu Beginn von „Section IX“ in Abschnitt 163 das folgende Problem (in der englischen Übersetzung von Struik)



Let AMD be a curve (Ap = x, PM = y, AB = a) of such a nature, that the value of the ordinate y is expessed by a fraction, the numerator and denominator of which, do each of them become 0 when x = a, viz. when the point P coincides with the given point B. It is required to find what will then the value of the ordinte BD.

Bemerkenswert ist, dass l´Hospital ein Problem über Kurven formuliert und nicht eines - wie in der modernen Formulierung der Regel -, über

Funktionen: Gesucht ist die Ordinate eines Punktes einer gegebenen Kurve. Kurven wurden zu Zeiten von l`Hospital nicht etwa durch Funktionsgleichungen definiert sondern in der griechischen und Descarteschen Tradition durch Konstruktionen. Diesen so definierten Kurven wurden dann im nachhinein Gleichungen zugeordnet, die die Werte x der Abszissen und y Ordinaten der Kurvenpunkte beschrieben und mit deren Hilfe man die Kurven untersuchen konnte. Die Koordinaten eines Punktes werden Längen verstanden, wobei die Strecke AB als „Einheit der Zeichnung" dient.

In der hier betrachteten Situation kann man die Ordinate eines Punktes der Kurve AMD durch einen Bruch beschreiben, der der Quotient zweier algebraischer Ausdrücke ist, nämlich der Ordinaten der Punkte der Kurven ANB und COB. Die Ordinate PM eines Kurvenpunktes P genügt - in der Schreibweise von l´Hospital - der Gleichung PM = AB $\times$ PN / PO. Die Zählerkurve ANB und die Nennerkurve COB schneiden sich im Punkt B, so dass der Bruch, der die Ordinatenwerte der Punkte der Kurve AMD beschreibt in B „von der Form $\frac{0}{0}$" ist, wie man später formulierte. Das Problem, das l´Hospital stellt lautet: Was ist die Ordinate des Punktes der Kurve AMD mit Absizze B?

Angemerkt sei, dass l´Hospital verwendet offenbar noch nicht in konsequenter Weise negative Koordinaten. AP ist die x-Achse. Wenn die Zählerkurve oberhalb der x-Achse verläuft und die Nennerkurve unterhalb, dann müsste die Kurve AMD eigentlich unterhalb der x-Achse verlaufen. Dies belegt das Größenverständnis von Koordinaten.

Beschreibt man die Zähler- und Nennerkurven durch Funktionen f(x) und g(x) und geht - zurecht - davon aus, dass die von l´Hospital betrachteten Kurven stetig sind, so kann man das Problem wir folgt in moderner Sprache paraphrasieren: Was ist der Grenzwert von f(x)/g(x), wenn x gegen die Abszisse des Punktes B konvergiert? Diese Formulierung konnte l´Hospital aber nicht wählen, da er weder über den Funktionsbegriff noch über den Begriff des Grenzwertes verfügte.

In seinen *Analyse...* gibt l`Hospital zwei Beispiele.

(i) $y = \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ (ii) $y = \dfrac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$

Für x = a werden in beiden Fällen Zähler und Nenner 0. Im zweiten Beispiel erkennt man direkt aufgrund der dritten binomischen Formel, dass - modern gesprochen - an der Stelle a die Funktion stetig ergänzt werden kann.

L´Hospital sagt nun, dass man den gesuchten Wert erhält, indem man das Differential des Zählers durch das Differential des Nenners dividiert nachdem man x = a gesetzt hat. Das ist die Regel von l´Hospital (in der Übersetzung nach Struik):

… if the differential of the numerator be found, and that be divided by the differential of the denominator, after having made x = a = …, we shall have the value of the ordinates … BD sought.

Differentiale bildet er entsprechend dem Leibnizschen calculus. Dieser kann hier nicht dargestellt werden. Es sei aber auf die Rekonstruktion in Burscheid & Struve (2001), (2010) hingewiesen.

Im Beispiel (i) ergibt das Differential des Zählers, das Differntial des Nenners und der Quotient der beiden Ausdrücke an der Stelle a der Reihe nach

$$\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{aax}} \qquad - \frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}} \qquad \frac{-(4/3)adx}{-(3/4)dx} = \frac{16}{9}a$$

Differentiale fasste l`Hospital als unendlich kleine Größen auf und argumentiert zum Nachweis der nach ihm benannten Regel (sinngemäß) wie folgt: Statt den Wert der Ordinate im Punkt D mit Abszisse B zu berechnen kann man auch den Wert der Ordinate des Punktes d mit Abszisse b bestimmen, wenn die Differenz der Abszissenwerte „unendlich klein" ist, also b unendliche nahe bei B liegt. Die Ordinaten von f und g (vgl. die obige Zeichnung) sind dann ebenfalls inifitesimale Größen und - so l`Hospital - gleich den Differentialen der algebraischen Ausdrücke im Zähler und Nenner des Bruches, der die Kurve AMD beschreibt.

Man kann zeigen, dass die Argumentation von l´Hospital nicht zum Leibnizschen calculus passt (vgl. den analogen Fall der Bestimmung des Krümmungsradius durch Huygens, der in Struve & Witzke (2008) rekonstruiert wurde). Durchgesetzt hat sich die Regel bei l´Hospitals Zeitgenossen, weil sie korrekte Ergebnisse lieferte - genau das war die Funktion der beiden Beispiele in der *Analyse* ...

Abschließend seien vier Punkte hervorgehoben, die durch dies historische Fallbeispiel deutlich werden:

(1) Leibniz und seine Zeitgenossen hatten eine andere Auffassung vom calculus als wir heutzutage in der Mathematik. Sie entwickelten den calculus als eine *empirische Theorie*, nämlich als eine Theorie, die real auf Zeichenblättern konstruierte Kurven beschreibt und erklärt. – Wäre solch eine Auffassung vom Gegenstand der Differential- und Integralrechnung auch für den heutigen Unterricht tragbar und ausbaufähig?

(2) Die Regel von l´Hospital ist in dieser Theorie eine Aussage zur Berechnung von Ordinaten von speziellen Kurvenpunkten – ein für Schülerinnen und Schüler „handfeste“ und verständliche Problemstellung?

(3) Die Begründung der Regel, die l´Hospital gibt und Vorstellungen von infinitesimalen Größen verwendet, ist mit dem Leibnizschen calculus nicht verträglich. Dass sie trotzdem von den Zeitgenossen akzeptiert wurde, lag daran, dass sie korrekte Ergebnisse lieferte, wie l´Hospital an Beispielen zeigte. In diesem Sinne waren „Experimente“ für die Überzeugung der Richtigkeit der Regel historisch entscheidend, nicht logische Ableitungen aus Axiomen – vgl. zu diesem Punkt auch I. Witzke (2009).

(4) Symbole, allgemeiner algebraische Ausdrücke dienten als eine Sprache zur Formulierung der (empirischen) Theorie. Erst später wurden sie in der algebraischen Analysis eigenständiger Gegenstand der Untersuchungen.

Historische Bemerkung: Die Regel von l`Hospital ist nicht nach ihrem Entdecker benannt. Dies war Johann Bernoulli, wie sich allerdings erst vor 60 Jahren herausstellte. Bernoulli hatte l`Hospital Nachhilfe im Leibnizschen calculus erteilt und diesem gegen Bezahlung zugesichert, dass er alle Erkenntnisse unter seinem Namen veröffentlichen konnte. Nach dem Tod von l`Hospital behauptete Bernoulli, dass die *Analyse* … eigentlich von ihm stammte, was zunächst kaum jemand glauben wollte. Erst als man Anfang des vorigen Jahrhunderts eine Vorlesung zur Differentialrechnung von Bernoulli aus den Jahren 1691/92 fand und große Übereinstimmung zur *Analyse* … konstatierte, änderte sich dies.

Literatur

Burscheid, H.J. & Struve, H.: Die Differentialrechnung nach Leibniz - eine Rekonstruktion, Studia LeibnitianaXXXIII/2, S. 163-193 (2001)

Burscheid, H.J. & Struve, H.: Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen - ein Beitrag zu ihrer Grundlegung, Hildesheim (Franzbecker) 2010

Struik, D.J.: A Source Book in Mathematics, 1200 - 1800, Cambridge (MA) 1969

Struve, H. & Witzke, I.: Eine wissenschaftstheoretische Analyse des Leibnizschen calculus - das Beispiel des Krümmungsradius, Studia Leibnitiana XL/1 (2008)

Witzke, I.: Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus - eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik, Hildesheim (Franzbecker) 2009

Kinga SZŰCS, Jena

Internationales Einheitensystem vs. angloamerikanisches Maßsystem – Entwurf einer bilingualen Unterrichtseinheit

1. Hintergrund/Motivation

Die Erweiterung der Europäischen Union, sowie das wirtschaftliche, kulturelle und wissenschaftliche Zusammenwachsen Europas fördert immer stärker die Verbreitung bilingualer Bildungsformen. In Thüringen erleben wir zur Zeit sogar die Institutionalisierung des bilingualen Unterrichts: Um Lernende langfristig auf den Arbeitsmarkt vorzubereiten, wird es ab dem Schuljahr 2013/14 für jeden Gymnasialschüler verbindlich, in der Doppelklassenstufe 9/10 mindestens 50 Unterrichtsstunden bilingual zu absolvieren – bezüglich der Fremdsprache und des auch darin unterrichteten Faches soll es keine Einschränkungen geben. Dabei wird zum Ziel gesetzt, Lernenden zu ermöglichen, die Fremdsprache in fachbezogenen Kontexten anzuwenden, sprachlichen und fachlichen Umgang mit authentischen Texten zu lernen, sowie durch Vernetzung fachlicher und fremdsprachlicher Inhalte und Methoden bzw. durch Reflexion tiefere Einsicht ins Fachliche zu gewinnen, für das fremdsprachliche Handeln Eigenverantwortung zu übernehmen, und schließlich interkulturelle Bezüge herzustellen.[1]

In diesem Sinne ist ein für den bilingualen Unterricht geeigneter Kontext für Lernende aus fachlicher Sicht interessant, neu und motivierend, er bietet aber Anknüpfungspunkte an vorherige Kenntnisse. Weiterhin ist ein geeigneter Kontext sprachlich bewältigbar, aber er ermöglicht den Lernenden, sich mit authentischen, fachbezogenen Texten auseinanderzusetzen, fordert sprachliche Kreativität und fördert fachbezogene Argumentationsfähigkeit. Überdies bietet ein geeigneter Kontext die Möglichkeit, über Sprache zu reflektieren und interkulturelle Bezüge herzustellen, was die Heranziehung der Fremdsprache begründen kann. Im Folgenden wird am Beispiel einer deutsch-englischen Unterrichtseinheit zum Thema „Internationales Einheitensystem vs. angloamerikanisches Maßsystem“ gezeigt, in welchen Kontexten eine echte Verzahnung von Fremdsprachen- und Fachunterricht möglich ist, bzw. inwieweit fremdsprachliche, fachsprachliche, mathematische und kulturelle Kompetenzen hierdurch gefördert werden können.

2. Vorstellung der geplanten Unterrichtseinheit

Mit der nachfolgenden Unterrichtseinheit, deren Thema Schüler einer 9. Klasse in Thüringen als Wunschinhalt im bilingualen Mathematikunterricht

[1] Vgl. Carl et al., 2008

angesprochen haben[2] und hierbei aufgegriffen wird, werden mehrere Ziele verfolgt. Neben den mathematischen Zielen, Grundzüge des angloamerikanischen Maßsystems kennenzulernen und mit Umrechnungstabellen umgehen zu können besteht in dieser Unterrichtseinheit das eigentliche fachliche Ziel darin, Schüler dazu zu befähigen, verschiedene Maßsysteme nach bestimmten Kriterien zu vergleichen und diese zu reflektieren. Zu den fremdsprachlichen Zielen gehören die Erweiterung des Wortschatzes durch Maßeinheitenbezeichnungen des angloamerikanischen Maßsystems sowie durch Bezeichnungen der Grundrechenarten und mathematischer Tätigkeiten; das Kennenlernen relevanter Satzmuster bzw. die Übung fachbezogener Argumentation. Die interkulturellen Ziele der Unterrichtseinheit sieht man darin, Lernenden bewusst zu machen, dass es in verschiedenen Ländern Unterschiede auch in den verwendeten Maßeinheiten geben kann bzw. Lernende dazu zu befähigen, Maßeinheiten kulturabhängig interpretieren zu können.

Folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Inhalte der Unterrichtseinheit, deren zeitlicher Umfang etwa 4-6 Unterrichtsstunden beträgt:

Stunde	**Inhalt**
1	Erste Erfahrungen mit angloamerikanischen Maßeinheiten, Versuch einer Systematisierung dieser, Schätzung deren Größe durch konkreten Vergleich mit SI-Maßeinheiten
2-3 (4)	Auseinandersetzung mit ausgewählten Teilsystemen (Länge, Fläche, Gewicht, Volumen) des angloamerikanischen Maßsystems, Umrechnungen innerhalb des Systems und zwischen dem angloamerikanischen bzw. dem internationalen Einheitensystem, Formulierung von Rundungsregeln
4 (5-6)	Vergleich beider Systeme nach vorgegebenen Kriterien (Alltagstauglichkeit, Konsistenz der Bezeichnungen), Auseinandersetzung mit weiteren denkbaren Vergleichskriterien

In der ersten Stunde können alltägliche authentische Texte wie Zeitschriftenartikel, Kochrezepte, Anzeigen zu Wohnungsmiete o. Ä. Anlass zum Nachdenken über unbekannte Maßeinheiten bieten. Nach einer einführenden Diskussion im Plenum sollten Schüler aus authentischen Texten Maßangaben mit unbekannten Maßeinheiten sammeln, anhand des Kontextes eine Vermutung formulieren und in einer Tabelle zusammenfassen, für welche Größen die gefundenen Maßeinheiten gebraucht werden können. Bereits hierbei können Lernende auf abweichende mathematische Notation,

[2] Vgl. Eckert, 2010, S. 56

wie z. B. auf Dezimalpunkt, auf den Gebrauch gemischter Brüche, auf „Dezimalkomma“ für 1000er hingewiesen werden. Weiterhin erweitern Lernende ihren Wortschatz womöglich um Bezeichnungen angloamerikanischer Maßeinheiten wie pound, foot, gallon, mile, ounce, cup, inch, square foot, acre, fluide ounce und um relevante mathematische Fachbegriffe wie unit of measurement, number, fraction, decimal, percentage, volume, length, weight, capacity, area. In der zweiten Phase dieser Stunde sollten Schüler anhand des Kontextes die Größe der gefundenen Maßeinheiten schätzen, diese in eine Reihenfolge ordnen und die aufgestellte Reihenfolge begründen. Die Ergebnisse können anschließend im Plenum ausgewertet werden. Mathematisch gesehen spielt hierbei die Zurückführung auf bereits Bekanntes (d.h. metrisches System) eine wichtige Rolle. Die (fach-) sprachlichen Kenntnisse werden durch Bezeichnungen wie estimate, approximate, round, equals to, it´s around, it would be about, my estimate is, rough value, known size, compare, convert erweitert.

Zum Anfang der nächsten beiden (evtl. drei) Unterrichtsstunden, die möglichst geblockt gestaltet werden sollten, empfiehlt es sich, die Einheiten des metrischen Systems für Länge, Fläche, Volumen und Gewicht im Plenum zu wiederholen und die Grundeinheiten (im SI) zu nennen. Hierbei können die Vorsätze der Maßeinheiten, d.h. die Multiplikationsfaktoren wie milli-, zenti-, dezi-, kilo-, hekto- etc. wiederholt und die entsprechenden englischen Bezeichnungen wie metre, gram, square metre, cubic metre (auch millimetre etc.) angesprochen werden. Im Weiteren sollen die Schüler in 5 Kleingruppen Materialien zu je einer Größe (Länge, Gewicht, Fläche, Hohlmaß, Volumen) bearbeiten. Geeignete Materialien findet man z.B. auf der Internetseite: http://www.metric-conversion-tables.com/imperialunits-measurement.htm, die die Schüler je nach Möglichkeit am PC sichten können, alternativ kann man die relevanten Seiten und die Umrechnungstabellen den Lernenden in Papierform zur Verfügung stellen. Vor der Bearbeitung des Textes ist es empfehlenswert, eine sprachliche Vorentlastung einzuplanen. Nach der Sichtung der Materialien bearbeiten die Gruppen vier Arbeitsaufträge: 1. Sie rechnen alle für sie relevanten Maßangaben innerhalb des angloamerikanischen Maßsystems in jede mögliche Maßeinheit um. Also z. B. die Gruppe, die sich mit der Größe Länge beschäftigt, rechnet alle in der einführenden Stunde vorgekommenen Längenangaben innerhalb des angloamerikanischen Maßsystems um. 2. Die Gruppen rechnen alle relevanten Maßangaben in alle sinnvollen metrischen Einheiten um. 3. Sie erstellen eine Umrechnungstabelle zwischen den beiden Systemen (bei evtl. Unterschieden zw. englischen und amerikanischen Maßeinheiten zwischen allen drei Systemen), in der der Wert der jeweiligen metrischen Grundeinheit 1 ist. 4. Anhand ihrer Erfahrungen formulieren die Gruppen

„goldene Regeln“ für den Alltag, wie z. B. „a litre is a bit less than 2 pints“. Die Ergebnisse dieser Arbeit sollten in Plakatform visualisiert und im Plenum vorgestellt werden.

In der(n) abschließenden Stunde(n) arbeiten die Gruppen wieder zusammen und nehmen zu solchen Fragen Stellung, wie: Welches System, das angloamerikanische oder das metrische System ist für dich eher für den alltäglichen Gebrauch geeignet? Begründe deine Meinung! Welches System ist für wissenschaftliche Zwecke eher geeignet? In welchem System werden die Bezeichnungen konsistent gebraucht? Was denkst du, warum? Nach der Präsentation der Gruppenergebnisse können weitere Argumente zur Diskussion gestellt werden, wie z. B. dass Längen- und Volumeneinheiten im angloamerikanischen System nicht verknüpft sind, oder dass es aus mathematischer Sicht keinen Unterschied zw. Volumen und Hohlmaß gibt[3].

3. Zusammenfassung

Das Bedürfnis an bilingualen Angeboten nimmt in der letzten Zeit immer mehr zu, demzufolge empfiehlt es sich für den Mathematikunterricht und somit für die Mathematikdidaktik, nach denkbaren geeigneten Inhalten zu suchen. Der Kontext der Maßeinheiten bietet einen ersten Einblick in die mathematische Fachsprache und darüber hinaus die Möglichkeit, mathematische Sachverhalte zu reflektieren und diese kulturbezogen interpretieren zu können.

Literatur

Carl, S., Fehling, A. & Hämmerling, H. (2008): Konzept für die Implementierung bilingualer Module im Englischunterricht in den Klassenstufen 9 und 10 am Gymnasium. In: Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien: Bilinguale Module in Thüringen. Impulse Heft 52. Bad Berka: ThILLM, 58-60.

Eckert, S. (2010): “Bilingualer Mathematikunterricht in Deutsch-Englischem Kontext – Entwicklung, Erprobung und Evaluation eines Moduls zum Thema Kugel in der 9. Klasse”. Friedrich-Schiller-Universität Jena. Wissenschaftliche Hausarbeit.

Holzmann, W. (2001): What´s wrong with the Imperial (British) system of measurement? http://www.cs.uleth.ca/~holzmann/notes/imperialunits.html (letzter Zugriff: 06.03.2011)

http://www.nald.ca/library/learning/cclb/language/lesson15/lesson15.pdf (letzter Zugriff: 15.02.2011)

https://www.ncetm.org.uk/public/files/257642/measurement.pdf (letzter Zugriff: 15.02.2011)

http://www.metric-conversion-tables.com/index.html (letzter Zugriff: 16.02.2011)

[3] Weitere Argumente findet man in: Holzmann, 2001

Natalie TROPPER, Lüneburg

„Stell dir doch die Situation mal konkret vor!" – Lehrerinterventionen im Kontext mathematischer Modellierungsaufgaben

Im Rahmen des DISUM-Projekts wurde in einer Laborstudie ein lernstrategisches Instrument („Lösungsplan") in kooperative Lernumgebungen integriert und bezüglich seiner Effekte auf die Modellierungskompetenz von Realschülern untersucht. In Lehrerhand diente der Lösungsplan zudem als diagnostisches und interventionales Hilfsmittel. Letztgenannter Funktion kommt in diesem Zusammenhang besondere Bedeutung zu, da Lehrerinterventionen als Bindeglied zwischen dem Lösungsverhalten der Schüler und dem diagnostischen Lehrerhandeln verstanden werden können. Der vorliegende Beitrag skizziert eine kategoriegeleitete Analyse des Interventionsverhaltens der in der Lösungsplanstudie agierenden Lehrperson.

Die Laborstudie Lösungsplan

An der Laborstudie Lösungsplan nahmen im Sommer 2009 sechs Realschulklassen der neunten Jahrgangsstufe teil. Die zehnstündige Unterrichtseinheit folgte in allen Klassen dem in DISUM erprobten sog. operativ-strategischen Design (vgl. u.a. Leiss et al. 2008) und wurde stets von demselben Lehrer gestaltet, in drei der sechs Klassen kam zudem das für die Laborstudie zentrale Instrument Lösungsplan zum Einsatz. Hierbei handelt es sich um eine auf vier Schritte verdichtete und handlungsnah formulierte Version des Modellierungskreislaufs von Blum & Leiss (2005), die folgende Schritte zur Bearbeitung mathematischer Modellierungsaufgaben beinhaltet: (1) *Aufgabe verstehen*, (2) *Mathematik suchen*, (3) *Mathematik benutzen* und (4) *Ergebnis erklären*. Wie eingangs erwähnt, wurde der Lösungsplan als strategisches Instrument für die Schüler sowie als diagnostisches und interventionales Instrument für die Lehrperson genutzt. Ziel der Studie war es, mögliche Effekte dieser Nutzung auf die technische Kompetenz, die Modellierungskompetenz sowie auf verschiedene motivationale und emotionale Faktoren der Schüler zu untersuchen.

Zwei in der Lösungsplanstudie verwendete Modellierungsaufgaben sind die Aufgaben *Tanken* und *Zuckerhut*: Während bei *Tanken* mittels linearer Funktionen eine durch finanzielle Überlegungen motivierte Entscheidung getroffen werden soll, erfordert *Zuckerhut* die Berechnung einer Strecke durch Anwendung des Satzes von Pythagoras. Zum Verständnis der diesen Beitrag abschließenden Ergebnisdarstellung genügt die Gegenüberstellung charakteristischer Aufgabenmerkmale, eine ausführliche Darstellung und

Analyse findet sich bei Leiss (2007, *Tanken*) und Schukajlow (2011, *Zuckerhut*).

Tab. 1: Aufgabencharakteristika von Tanken und Zuckerhut

	Tanken	Zuckerhut
Format	unterbestimmte Aufgabe	überbestimmte Aufgabe
Inhaltsbereich	Lineare Funktionen	Satz des Pythagoras
Offenheit	bezüglich Fragestellung, Lösungsweg, Ergebnis	bezüglich Ergebnis (bedingt)
typische Schüler-schwierigkeiten	Identifikation fehlender Größen, Treffen diesbezüglicher Annahmen	Verständnis des Aufgabentextes, Bildung eines Situationsmodells

Kategorisierung von Lehrerinterventionen

Der Terminus Intervention lässt sich als bewusstes, zielgerichtetes Eingreifen charakterisieren, welches auf die Veränderung von Verhaltensweisen abzielt (vgl. u.a. Reinhold et al. 1999, Homberger 2003). Um eine schemageleitete Analyse interventionaler Prozesse zu ermöglichen, werden sog. Interventionsdesigns entworfen, welche je nach Zielsetzung bestimmte Phasen oder Teilaspekte des Prozesses akzentuieren. Angelehnt an Leiss (2007), der ein lösungsprozessbezogenes Interventionsdesign vorschlägt, bei welchem der Fokus vor allem auf der Anwendung der konkreten Interventionsmethode liegt, wurde zur Untersuchung des Lehrerverhaltens innerhalb der Lösungsplanstudie das nachfolgend skizzierte System von Untersuchungskategorien entwickelt:

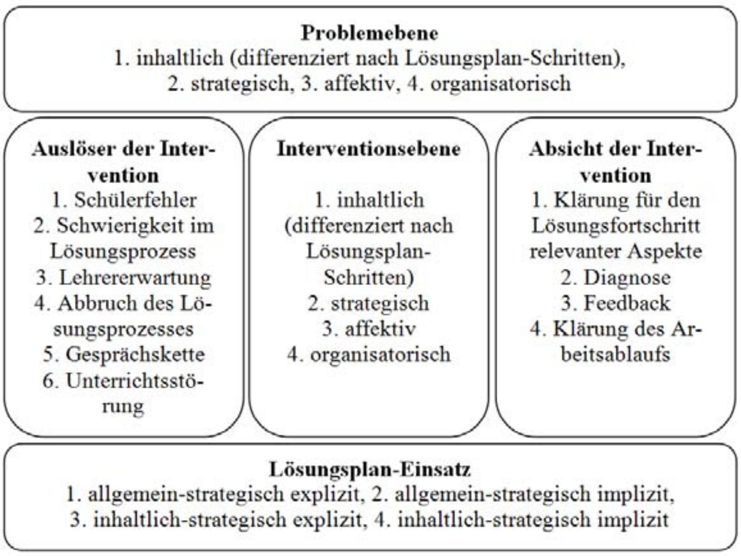


Abb. 1: Kategoriensystem zur Analyse lösungsprozessbezogener Lehrerinterventionen

Der diesem System zugrunde liegende Interventionsbegriff umfasst alle (non-)verbalen Eingriffe des Lehrers in den Lösungsprozess der Schüler.

Untersuchungsmethode

Basierend auf diesem Interventionsbegriff wurde eine hochinferente Analyse der innerhalb der Lösungsplanstudie getätigten Lehrerinterventionen durchgeführt, die sich an den folgenden beiden Fragestellungen orientierte:

- Welche Unterschiede des Lehrerverhaltens sind zwischen den kooperativen Unterrichtsdesigns mit und ohne Lösungsplan festzustellen?
- Inwieweit hängt das Interventionsverhalten des Lehrers von spezifischen Aufgabencharakteristika ab?

Um eine kontrastierende Untersuchung entlang dieser Fragestellungen zu ermöglichen, wurden Unterrichtseinheiten aus zwei Klassen (eine *mit*, eine *ohne* Lösungsplan) und zu zwei Aufgaben (*Tanken* und *Zuckerhut*) analysiert. Die Auswertung fand durch Transkription der entsprechenden Unterrichtsvideos und durch anschließende Kodierung anhand des oben dargestellten Kategoriensystems statt. Neben ausführlichen Einzelfallanalysen spezieller Problemsituationen wurden Häufigkeitsanalysen des gesamten Datenmaterials durchgeführt. Im Folgenden werden einige Ergebnisse exemplarisch dargestellt.

Ergebnisse

Während in den Unterrichtseinheiten mit und ohne Lösungsplan entgegen den ursprünglichen Annahmen ein nahezu identisches Interventionsverhalten festgestellt wurde, zeigten sich im aufgabenspezifischen Vergleich deutliche Unterschiede der Interventionsarten. Beispielhaft sei in Abb. 2 die Verteilung der Absichten in den Unterrichtseinheiten zu *Tanken* und *Zuckerhut* dargestellt. Zunächst fallen die bei *Tanken* deutlich höheren Anteile der Absichten „Klärung Lösungsprozess“ und „Feedback“ auf. Beides lässt sich nach genauerer Betrachtung der getätigten Interventionen mit der größeren Offenheit der Aufgabe in Verbindung bringen, die den Lehrer dazu veranlasste, den Lösungsprozess durch klärende und rückmeldende Interventionen stärker zu strukturieren. Der größere Anteil der Absicht „Klärung Arbeitsablauf“ bei *Zuckerhut* hängt hingegen mit einer in der Unterrichtseinheit vorgesehenen Präsentationsphase zusammen.

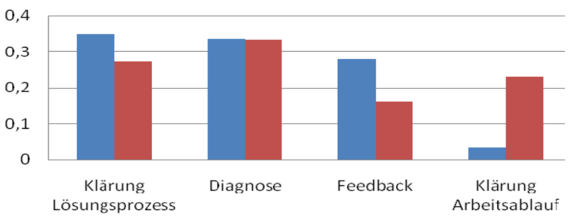


Abb. 2: Relative Häufigkeiten der Interventionsabsichten (*Tanken*: blau, *Zuckerhut*: rot)

Das im Zusammenhang mit der Analyse des Lösungsplaneinsatzes prägnanteste Resultat ist, dass die Lehrperson sich bei ihren Interventionen auf eine spezifische, von der Aufgabe abhängige Lösungsplanhilfe konzentrierte: Bei Tanken bezogen sich ausnahmslos alle mit dem Lösungsplan zusammenhängenden Interventionen auf den Satz „Stell dir die Situation konkret vor“, bei Zuckerhut alle bis auf eine auf den Satz „Mache eine Skizze und beschrifte sie“. Zusammen mit der Tatsache, dass der Lösungsplan insgesamt äußerst selten eingesetzt wurde (7% der Interventionen innerhalb der Lösungsplanklasse), lässt sich die Notwendigkeit ableiten, Lehrpersonen stärker in Bezug auf den Lösungsplaneinsatz zu schulen.

Als weitere Auffälligkeit zeigte sich während der Gruppenarbeitsphasen eine starke Häufung der Interventionen bei einzelnen Schülern einer Gruppe. Diese konnten weder als besonders leistungsschwach oder -stark ausgemacht werden, noch sprachen sie den Lehrer besonders häufig selbst an. Vielmehr zeigte sich, dass es sich bei den Hauptadressaten der Interventionen um durch die installierten Kameras besonders gut sichtbare Schüler handelte, wie Abb. 3 verdeutlicht. Die dort blau markierten Schüler saßen alle von der Lehrerkamera aus gesehen an einem Außenplatz und von der Schülerkamera ihrer Gruppe aus gesehen an einem weiter entfernten Platz. Ein solch offensichtlicher Einfluss nicht inhaltlich bedingter Faktoren (hier: der Erhebungsbedingungen der Studie) auf das Interventionsverhalten der agierenden Lehrpersonen konnte in einem ähnlichen Kontext auch von Leiss festgestellt werden (vgl. hierzu Leiss 2010).

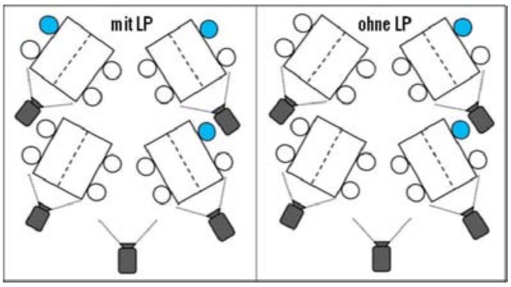


Abb. 3: Verteilung der Gruppen-„Ansprechpartner“ im Klassenraum

Literatur

Blum, W., Leiss, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. In: Mathematik lehren 128, 18-21.

Homberger, D. (2003): Lexikon Schulpraxis. Theorie- und Handlungswissen für Ausbildung und Unterricht. Stichwort „Intervention“. Hohengehren: Schneider, 173.

Leiss, D. (2007): „Hilf mir es selbst zu tun“. Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren. Hildesheim: Franzbecker.

Leiss, D., Blum, W., Messner, R., Müller, M., Schukajlow, S., Pekrun, R. (2008): Modellieren lehren und lernen in der Realschule. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Münster: Stein, 77-80.

Leiss, D. (2010): Adaptive Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren – empirische Befunde einer vergleichenden Labor- und Unterrichtsstudie. In: JMD 31(2), 197-226.

Reinhold, G., Pollak, G., Heim, H. (Hrsg.) (1999): Pädagogik-Lexikon. Stichwort „Intervention“. München: Oldenbourg, 277.

Schukajlow, S. (2011): Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur. Münster: Waxmann.

Ingrida VEILANDE, Riga

Die Lösungsmethoden der Graphentheorieaufgaben

Einführung. In Lettland sind die Schülermathematikolympiaden sehr populär. Die Olympiadenaufgaben umfassen sowohl die klassischen Algebra-, Geometrie-, Zahlentheoriefragen, als auch sie widerspiegeln die zeitgenossischen Entwicklungstendenzen der Wissenschaft.

Im Schulunterrichtsprogramm ist keine Graphentheorie eingeschlossen. Dennoch kann man die Kombinatorikaufgaben und die Aufgaben der anderen Art visuell mit Hilfe von allgemeinem Graphentheoriebegriff interpretieren. Mit Hilfe vom abstrakten Graphen kann man die Zusammenhänge zwischen den gegebenen Elementen darstellen. Mit Hilfe vom Graphen kann man einen Algorithmus beschreiben oder auch alle möglichen Zustandsveränderungen eines stationären Systems zeigen.

Thematik der Graphentheorieaufgaben und Lösungsmethoden. Die Thematik in Mathematikolympiaden eingeschlossenen Graphentheorieaufgaben ist sehr vielseitig. Die Kombinatorikaufgaben über den Verkehr, die Turniere, die Freundschaften, gemeinsamen Vertretern, die Informationsverbreitung, die Färbung, die Aufgaben, die Schachelemente beinhalten und andere Aufgaben kann man als Bäume, als Zyklen, als zweiteilige, reguläre oder orientierte Graphen, als Graphen mit gefärbten Knoten oder Kanten darstellen.

Diese Aufgaben sind meistens die Beweisaufgaben. Bei den Beweisen kann man allgemeine Methoden verwenden, verbunden mit den kombinatorischen Elementenklassifikationsmöglichkeiten, strukturellen Veränderungen und speziellen Algorithmen. Diese Methoden kann man bedingt in folgende Gruppen gliedern:

– allgemeine Urteilsmethoden – Beweis von Entgegengesetztem, Extremprinzip, mathematische Induktion, Schubfachprinzip;
– Methoden der Mängentheorie – Graphenelementenverteilung in die Äquivalenzklassen, Feststellung der gemeinsamen Vertretern;
– Methoden der Graphentheorie – die Besichtigung der Nachbarschaft eines Knotens, die Ergänzung des Graphen mit Knoten oder Kanten, Ersetzung des Teilgraphen mit einem anderen Teilgraphen, die zusätzliche Färbung der Knoten oder Kanten;
– Konstruierung der Algorithmen – Umgehungsalgorithmen, die Feststellung des Zyklus von Euler oder von Hamilton, die

Konstruierung des längsten oder des kürzesten Weges, Algorithmen für die Klassifikation der Objekte.

Ziemlich grossen Teil von Graphentheorie Aufgaben kann man lösen, wenn man sich auf Schubfachprinzip stützt (Aigner, Ziegler, 2010). Die bekannten Sätze von Ore, Dirac über die Hamiltonzyklusexistenz, das Turantheorem über die Existenz der Clique K_3 (Ore, 1968), der Satz von Dilworth über die teilweise geordneten Gesamtheiten, das Ramseytheorem über die Färbung der Kanten brauchen dieses Prinzip, um quantitative Characktergrössen einzelner Objekte festzustellen. Ein Teil von den Olympiadenaufgaben sind als Spezialfälle von diesen und anderen Theoremen der Graphentheorie formuliert. Die wichtigsten Fragen, die bei diesen Aufgaben gelöst werden, sind folgende:

- die Graphenknotengrade zu bewerten;
- die maximale Zahl von Knoten oder Kanten, die den gegebenen Voraussetzungen entsprechen, festzustellen;
- die Existenz des Teilgraphen von der speziellen Art festzustellen;
- den Durchmesser des Graphen zu berechnen.

Beispiele.

Interpretationen der Kombinatorikaufgaben. Eine X-beliebige Elementengesamtheit kann man mit Graphen interpretieren, wenn es möglich ist, die Verhältnisse zwischen den Elementen topologisch zu widerspiegeln. Zum Beispiel, wenn die Schülergruppe verschiedene Sportarten treiben, dann kann man die gegebene Situation als zweiteiligen Graphen widerspiegeln. Orientierte Graphen kann man gestalten, um, zum Beispiel, die Kontinuität mehrerer Generationen in einer Familie oder die Struktur einer Leitung darzustellen.

<u>1. Aufgabe.</u> (IMO, 2001). An Mathematikwettbewerben nahmen 21 Mädchen und 21 Jungen teil. Jeder Teilnehmer hat wenigstens 6 Aufgaben gelöst. Ein Mädchen und ein Junge hatte mindestens eine solche Aufgabe, die die beiden gelöst hatten, wie das Mädchen, so auch der Junge. Beweisen Sie bitte, dass am Wettbewerb eine solche Aufgabe zu lösen war, die mindestens 3 Jungen und mindestens 3 Mädchen gelöst haben!

<u>Interpretation.</u> Diesen Fall kann man als zweiteiligen Graphen beschreiben, wo beide Teile die Jungen und die Mädchen repräsentieren. Jede Aufgabe kennzeichnen wir mit unterschiedlichen Farben. Zwei Knoten verbinden wir mit der Kante einer bestimmten Farbe dann, wenn die entsprechenden Junge und Mädchen eine und dieselbe Aufgabe gelöst haben. Die

theoretische Aufgabe ist zu beweisen, dass der gegebene Graph einen monochromatischen zweiteiligen Teilgraphen $K_{3,3}$ beinhaltet.

Ramsey-Typ Aufgaben. Die sogenannten Ramsey-Typ Aufgaben (Rosta, 2004) untersuchen spezielle Art von Teilgraphenexistenz in vollen gefärbten Graphen, oder auch in irgendwelchen unvollen Graphen bewerten, wie die Zahl von Kanten die Existenz von irgendwelchen speziellen Teilgraphenart beeinflusst. Das folgende Beispiel zeigt, wie man solche klassische Aufgabe lösen kann, wenn man die Knotengesamtheit sortiert. Mit Hilfe von Schubfachprinzip ist die zahlenmässige Bewertung des Endresultats getätigt worden.

<u>2. Aufgabe.</u> Wenn im Raum $(m-1)n+1$ Menschen sind, dann sind zwischen ihnen entweder m Leute, die einander unbekannt sind, oder ein Mensch, der wenigstens n Leute von dagewesenen kennt.

<u>Die Lösung.</u> Bei der Bildung des Graphen verbinden wir zwei Knoten mit der Kante, wenn die entsprechenden Menschen miteinander bekannt sind. Wir müssen beweisen, dass der Graph einen leeren Teilgraphen mit m Knoten beinhaltet, oder wir müssen beweisen, dass auf dem Graphen ein Knoten ist, deren Grad wenigstens n ist.

Gruppieren wir die Knoten folgenderweise: erster Knoten v_1 ordnen wir in die Gruppe $G1$. Der Knoten v_i (i=1,2,...) ordnen wir in die erste solche Gruppe, wo kein Knoten ihren Nachbarn hat, anderenfalls bilden wir für diesen Knoten eine neue Gruppe. Am Ende des Verfahrens haben wir k Gruppen bekommen. Jede Gruppe beinhaltet die Knoten, die einen leeren Teilgraphen bildet. In der letzten Gruppe ist wenigstens ein solcher Knoten A, die wenigstens einen Nachbarn in jeder von vorherigen Gruppen hat. Wenn die Gruppenzahl mehr als n ist, dann ist der Grad des Knoten A mindestens n. Im entgegengesetzten Fall kann man eine solche Gruppe finden, wo mindestens m Knoten gibt.

Nachbarschaft von Graphenknoten. Verschiedene qualitative Bewertung kann man bekommen, wenn man die Nachbarschaft von Graphenknoten betrachtet. Diese Methode wird oft bei den Beweisen vom Entgegengesetzten verwendet.

<u>3. Aufgabe.</u> Auf dem See sind 9 Inseln, die miteinander mit den Brücken verbunden sind. Aus jeder Insel führen genau 4 Brücken. Beweisen Sie bitte, dass auf jedem See 3 Inseln gibt, die alle miteinander mit Brücken verbunden sind.

Zusammenstellung von Algorithmen. Bei der Lösung von Aufgaben, wo man die Existenz eines Teilgraphen beweisen soll, oder man muss die Eigenschaften irgendwelcher Elementengesamtheit begründen, oder man soll auch die Färbung der Graphensknoten charakterisieren, ist es manchmal nützlich, spezielle Algorithmen zu konstruieren. Die Antwort kann man dann bekommen, entweder – wenn man die Schrittenzahl von Algorithmen bewertet, oder wenn man auch begründet, dass man bei dem Tätigkeitsergebniss des gegebenen Algorithmus die gewünschte Situation eintritt.

4. Aufgabe. Zu den Fortbildungskursen sind sehr geschwätzige Kursteilnehmer gekommen, die mit ihren Freunden plappern. Kann man die Kursteilnehmer so in zwei Räume unterbringen, damit wenigstens jeder Teilnehmer eine Hälfte von Freunden im anderen Raum hat?

Informationsverbreitung. Die Aufgaben über die Informationsverbreitung kann man lösen, wenn man sich auf die Breitensuche oder Tiefensuche Algorithmen stützt. Die Elementenzahlauswertung auf verschiedenen einzelnen Stufen hilft bei der Feststellung der Informationsverbreitungs Schnelligkeit in einer bestimmten sozialen Schicht.

5. Aufgabe. Der Staat hat $2n+1$ Stadt. Für jede Stadtgesamtheit kann man eine solche Stadt vom restlichen Teil finden, die drahtlose Verbindung mit allen n Städten hat. Beweisen Sie bitte, dass man eine solche Stadt finden kann, die drahtlose Verbindung mit allen Städten des Staats hat.

Kommentar. Die theoretische Interpretation zeigt, dass der Graph völlig mit den Sternen übersät ist, dessen Grad mindestens n ist. Die Bedeckung ist so dicht, dass hier der grösste Stern existiert, dessen Grad $2n$ ist.

Schlussfolgerungen. Der Graph ist einfach konstruierbares, diskretes mathematisches Modell, deshalb sogar auch für Grundschüler verständlich. Die Aneignung der Grundbegriffe der Graphentheorie könnte den Schülern helfen, verschiedene Kompetenzen zu entwickeln – die gegebene Information schematisch zu visualisieren, kombinatorische Berechnungen durchzuführen, topologische Strukturen zu erforschen, Algorithmen zusammenzustellen, neue Beweismethoden anzueignen. Wenn man sich auf Graphentheorie beruht, kann man auch verschiedene interessante Modellierungsaufgaben zusammenstellen. Das könnte auch den Inhalt des Mathematikunterrichts zu modernisieren.

Literatur

Aigner, M., Ziegler, G.M.(2010). Das Buch der Beweise. Berlin: Springer Verlag.

Ope, O. (1968). Теория графов. Москва, Наука.

Rosta, V.(2004): Ramsey Theory Applications. In: Electronic Journal of Combinatorics. Erhalten am März, 2011 von: http://www.combinatorics.org/Surveys/ds13.pdf

Martina VELTEN, Duisburg – Essen

Rechengeschichten nacherzählen

1. Theoretischer Hintergrund

Der Idee, die Wirksamkeit des mündlichen Nacherzählens auf das Lösen von Textaufgaben zu untersuchen, liegen verschiedene Anregungen zugrunde. So schildert Kleist (1806/2010) die Beobachtung, dass sich während des Erzählens eines Problems die Gedanken dahingehend ordnen, dass er von selbst die gesuchte Lösung findet. Zum anderen äußern De Corte und Verschaffel die Vermutung, dass mündliches Nacherzählen zu einer ernsthaften Auseinandersetzung mit dem Text führen und sich somit positiv auf das Textaufgabenlösen auswirken kann (vgl. De Corte / Verschaffel 1987, S.56). Mitunter wird Nacherzählen von Textaufgaben bereits von Lehrer/innen im Unterricht eingesetzt und in der Mathematikdidaktik als Bearbeitungshilfe empfohlen (vgl. Franke 2003, S.84). Die Forschung von Chi, die in ihren Experimenten zum Self-Explaining beobachtete, dass Selbsterklären der Korrektur eines fehlerhaften mentalen Modells hilft (vgl. Chi 2000, S. 221), liefert weitere Argumente für die oben genannte Annahme. Auch die Deutschdidaktik betont, dass Nacherzählen keine rein reproduktive Aktivität ist, sondern vielmehr sinnkonstruierende Wirkung hat (vgl. Abraham 2000, S.187).

Allerdings wurde bisher nicht statistisch untersucht, ob Nacherzählen eine positive Wirkung auf den Lösungsprozess von Textaufgaben hat (vgl. De Corte / Verschaffel 1987, S.56). Dies soll in dieser Studie erfolgen.

Der Zyklus des Lösens von Textaufgaben wird in der Literatur (vgl. z.B. Greer 1997, S.300f.; Reusser 1997, S.142, 146, 150ff.; Kaufmann 2008, S.32f.; verkürzt bei Kintsch 1998, S.334, 346f.; Franke 2003, S.69, 79-85; beschrieben auch bereits in Velten 2010) mit vier Schritten beschrieben: Der Text wird zunächst gelesen, das Ergebnis des Leseprozesses stellt ein Situationsmodell des Textes dar, auf dessen Basis das mathematische Modell entwickelt wird, welches Grundlage für die Lösung der Aufgabe ist. Die Lösung wird abschließend an Situationsmodell und Text geprüft. Entscheidend für eine erfolgreiche Bearbeitung ist zunächst der Aufbau eines angemessenen Situationsmodells, die Situation muss verstanden sein (vgl. Kintsch 1998, S.346f.; auch Kaufmann 2008, S.32, 34; Franke 2003, S.80; Staub / Reusser 1995, zitiert nach Greer 1997, S.300; Reusser 1997, S.149).

2. Forschungsfragen und Durchführung der Studie

Primär soll in dieser Studie untersucht werden, ob sich mündliches Nacherzählen positiv auf die Lösung von Textaufgaben auswirkt. Daran schließen sich weitere Fragen an: Ist eine derartige Wirkung des mündlichen Nacherzählens abhängig vom Geschlecht oder von der Leistung in Mathematik? Ist mithilfe des Nacherzählens möglich, zumindest viele richtige Teillösungen zu notieren (dies wird als „Qualität der Lösung“ bezeichnet)?

Um diese Fragen zu untersuchen, wurde eine vergleichende Interviewstudie durchgeführt. In dieser wird die Wirkung der Strategie „Nacherzählen“ mit der Wirkung der Strategie „Unterstreichen lösungsrelevanter Informationen“ verglichen. Die dafür gebildeten Gruppen werden im Folgenden „Gruppe Nacherzählen“ und „Gruppe Unterstreichen“ genannt (vgl. Velten 2010).

Die Untersuchung besteht aus zwei Schritten (zur Beschreibung der Untersuchungsschritte und des Materials vgl. Velten 2010): Mit 120 Kindern wurden Interviews von zwei Studentinnen und der Autorin geführt und ausgewertet. Nach einer Erklärung von Absicht und Ablauf der Interviews wurde den Kindern eine von zwei Rechengeschichten zum einen vorgelesen (eine Tonbandaufnahme wurde abgespielt), zum anderen lasen sie diese selbst. Danach erzählte die „Gruppe Nacherzählen“ die Geschichte nach, die „Gruppe Unterstreichen“ markierte lösungsrelevante Aussagen. Den Abschluss der Interviews bildeten das Lösen der Aufgabe und Erklären der Lösung.

Vor den Interviews wurde ein Test zur Erfassung der mathematischen Fertigkeiten geschrieben. Die Durchführung und Auswertung dieses Tests erfolgte ebenfalls durch zwei Studentinnen und die Autorin. Zudem wurden mit Genehmigung der Eltern Informationen über den Leistungsstand im Lesen erfragt (VERA-Ergebnisse im Lesen für die einzelnen Kinder, erhoben durch das Projekt-Team der Uni Landau, sowie Eindrücke der Lehrerinnen). Die Kinder wurden aufgrund ihrer Leistungen im Mathetest, ihres Geschlechts und der Lage der von ihnen besuchten Schule gleichmäßig auf die vier Vergleichsgruppen (2 Strategien, 2 Texte) aufgeteilt.

In der Studie wurden zwei Rechengeschichten im Umfang von etwas mehr als 200 Wörtern eingesetzt. Die Text- und die mathematische Struktur sind vergleichbar, die Texte unterscheiden sich hinsichtlich des Kontextes (vertraut vs. unvertraut).

3. Ergebnisse

Mithilfe der Strategie „Nacherzählen“ konnten 15 Kinder eine vollständig richtige Lösung finden, mithilfe der Strategie „Unterstreichen“ war dies 19 Kindern möglich. Dass dieser Unterschied nicht signifikant ist, bestätigt das Ergebnis des durchgeführten χ^2-Tests (χ^2=0,657, df=1, p<0,42). Es zeigte sich, dass nur sechs von 60 Kindern die Rechengeschichte mit unvertrautem Kontext richtig lösen konnten. Der Einfluss des Kontextes ist signifikant (χ^2=19,863, df=1, p<0,01). (vgl. Velten 2010)

Unterscheidet man nun zwischen den Geschlechtern, lassen sich auch hier keine signifikanten Unterschiede beobachten: Sowohl Jungen als auch Mädchen profitieren nicht von einer der beiden Strategien, sondern erreichen annähernd gleich viele richtige Lösungen unter Anwendung der Strategien (Jungen: χ^2=0,08, df=1, p<0,78; Mädchen: χ^2=0,76, df=1, p<0,39). Auch hinsichtlich der Leistungsgruppen im Mathetest zeigen sich keine Unterschiede. In jeder Leistungsgruppe konnten die Kinder unter Verwendung beider Strategien annähernd gleich viele richtige Lösungen anfertigen.

Nach der Vergabe von Punkten für richtige Teillösungen („Qualität der Lösung“) wurden die Kinder auf der Basis dieser Bewertung drei Gruppen (0 bis 2,5, 3 bis 5,5 und 6 bis 8 Punkte) zugeteilt. Vergleicht man innerhalb dieser Gruppen die Wirkungen der beiden Strategien, lassen sich auch hier keine signifikanten Unterschiede beobachten (χ^2=0,543, df=2, p<0,77). Mithilfe des Nacherzählens konnten 24 Kinder sechs bis acht Punkte für ihre Lösung bekommen, mithilfe des Unterstreichens gelang dies 28 Kindern.

Vergleicht man die Wirkung der Strategien auf die Variable „Qualität der Lösung“ – zum einen differenziert nach Geschlecht, zum anderen nach dem Ergebnis im Mathematiktest – zeigen sich wiederum keine signifikanten Unterschiede. Mit beiden Strategien können sowohl Mädchen als auch Jungen sowie leistungsschwächere, leistungsstärkere und Kinder der mittleren Leistungsgruppe vergleichbar gute Lösungen erarbeiten.

Das Nacherzählen zeigt bezogen auf die Lösungshäufigkeit gegenüber dem Unterstreichen keine bessere, aber auch keine schlechtere Wirkung. Dies gilt sowohl für die gesamte Gruppe als auch für Teilgruppen sowie für die Zahl an richtigen Teillösungen.

Zur Wirksamkeit des Nacherzählens im Unterricht ist allerdings zu bedenken, dass die gesamte Interviewsituation eine Laborsituation darstellt: Die Kinder saßen allein mit einer ihnen unbekannten Person im Raum, wurden während der Arbeit gefilmt, was zu einer erhöhten inneren Aufregung führen kann. Auch unterscheiden sich die Rechengeschichten von typischen Textaufgaben, die Kinder mussten relativ umfangreiche Texte mit komplexer mathematischer Struktur bearbeiten, was eine hohe kognitive Anforderung darstellt. Zudem wurde die Wirkung des Nacherzählens mit der Wirkung einer anderen Hilfsstrategie, welche eine intensivere Auseinandersetzung mit dem Text verlangt, verglichen.

Ein Vergleich der Nacherzählungen mit den Lösungen steht noch aus. Möglicherweise wird sich zeigen, dass einige Kinder zwar die Gesamtsituation verstanden, die mathematischen Informationen aber nicht richtig erfasst haben.

Literatur

Abraham, U. (2000). Nacherzählen. In: U. Abraham, O. Beisbart, G. Koß & D. Marenbach (Eds.), Praxis des Deutschunterrichts. Arbeitsfelder, Tätigkeiten, Methoden (2 Ed., pp. 185 - 187). Donauwörth: Auer Verlag.

Chi, M. (2000). Self-Explaining Expository Texts: The Dual Processes of Generating Inferences and Repairing Mental Model. In R. Glaser (Ed.), Advances in Instructional Psychology (pp. 161 – 238). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). Using retelling data to study young children's word-problem-solving. In J. A. Sloboda & D. Rogers (Eds.), Cognitive Processes in Mathematics (pp. 42 - 59). Oxford: Oxford University Press.

Franke, M. (2003). Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Heidelberg; Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Greer, B. (1997). Modelling realitiy in mathematics classrooms: the case of word problems. Learning and Instruction, 7(4), 293 – 307.

Kaufmann, S.(2008). Üben von Teilfähigkeiten. Grundschule Mathematik, 16(1), 32-35.

Kintsch, W. (1998). Comprehension. A paradigm for cognition. Cambridge u.a.: Cambridge University Press.

Kleist, H. v. (1806/2010). Über die allmählige Verfertigung der Gedanken beim Reden. In: R. Reuß & P. Staengle (Eds.): H. v. Kleist – Sämtliche Werke und Briefe. Band II (pp. 284 – 289). München; Frankfurt a. M.: Carl Hanser Verlag; Stroemfeld Verlag.

Reusser, K. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen: Literaturüberblick. In F. E. Weinert & A. Helmke (Eds.), Entwicklungen im Grundschulalter (pp. 141 – 155). Weinheim: Psychologische Verlags Union.

Velten, M. (2010). Nacherzählen von Rechengeschichten. In: A. Lindmeier & St. Ufer (Eds.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2010 (pp. 875 – 878). Münster: WTM-Verlag.

Rose VOGEL, Frankfurt am Main

„Muster erkennen" – eine mehrperspektivische Annäherung

„Muster erkennen" spielt in der Mathematik und im Alltag eine wichtige Rolle. So besteht mathematisches Arbeiten häufig in der Untersuchung, Beschreibung, Fortführung und Variation von Mustern. Solche Muster sind vielfältiger Art und können sich auf Zahlen, Formen und Bewegungen beziehen (vgl. Devlin 2002, 5). Im Kontext einer „Betonung des diagrammatischen Charakters der Mathematik" (Dörfler 2006, 212) weist der Umgang mit Diagrammen z.B. das Manipulieren von Diagrammen oder das Experimentieren mit Diagrammen (ebd., 213) oftmals die „diagrammatische Tätigkeit" der „Musterkennung" auf (ebd., 215).

Auch unser Alltag ist bestimmt durch wiederkehrende Abläufe z.B. in Form von Ritualen. Diese geben Sicherheit und bieten Orientierung, gleichzeitig erzeugen sie Irritation, wenn deren Struktur nicht bekannt ist. Auch im schulischen Unterricht lassen sich „rituelle Arrangements" identifizieren, die „implizites (Polanyi 1985), bei jeder Inszenierung und Aufführung aktualisiertes Wissen darüber, wie gelernt werden kann und soll" (Wulf 2007, 10) enthalten. Dies hat für den Lernprozess entlastende Funktion.

Bereits diese beiden Ausdeutungen von „Muster erkennen" zeigen potentielle Perspektiven auf. Im Rahmen des Projekts „erStMaL" (early Steps in Mathematics Learning)[1] soll hier einerseits eine mathematikdidaktische Perspektive im Sinne der Beschäftigung mit dem mathematischen Themenbereich „Muster und Strukturen" und andererseits eine forschungsmethodische Perspektive eingenommen werden.

„Muster erkennen" im mathematischen Lehr- und Lernprozess

Die Bedeutung des Umgangs mit Mustern für die Entwicklung frühen algebraischen Denkens wird in der Literatur häufig beschrieben und durch empirische Befunde gestützt (Warren 2005). Als charakteristische Aktivitäten im Zusammenhang mit Mustern werden das Nachmachen, das Ergänzen, das Fortsetzen und das Erfinden von Mustern beschrieben (vgl. Vogel 2005, 446). Im Projekt „erStMaL" setzen sich Kindergarten-Kinder in Tandems und in Gruppen ebenfalls mit dem mathematischen Themenbereich der „Muster und Strukturen„ auseinander. Es wird ein spielerischer Um-

[1] Das Projekt „erStMaL" gehört zum Forschungszentrum IDeA (Individual Development and Adaptive Education of Children at Risk) Frankfurt (siehe: www.idea-frankfurt.eu)

gang (siehe Ausführungen „Datengenerierung) initiiert. Als Material dienen unter anderem „Bunte Stäbchen“, die sich nur in der Farbe unterscheiden (vgl. Bild1 und Bild 2).

Erste Analysen zeigen, dass Kinder im Alter von 4 Jahren durchaus den auf der Handlungsebene erfolgten Auftrag „Muster legen“ aufgreifen (vgl. Bild 1). Die von den Kindern in der Folge gelegten Muster, die von ihnen auch als Lösung des Auftrags lautsprachlich und gestisch bestätigt werden, entsprechen aber häufig nicht den uns vertrauten Regeln eines Bandornaments. Ein Jahr später greifen die gleichen Kinder das zur Illustration des Auftrags vorgemachte Beispiel auf (vgl. Bild 2), wiederholen dieses und erfinden weitere Muster mit hoher Komplexität.

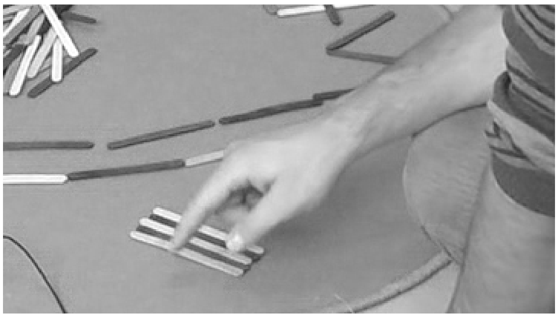


Bild 1

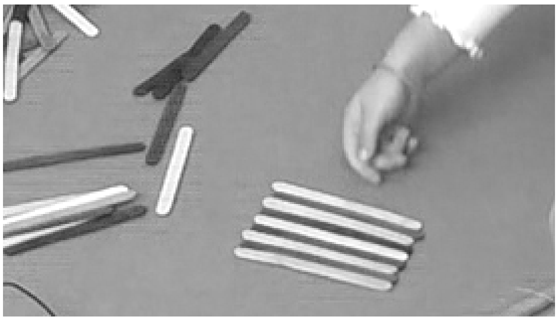


Bild 2

„Muster erkennen“ im Forschungsprozess des Projekts „erStMaL“

„Muster erkennen“ bezieht sich hier auf den Prozess der Datengenerierung und den Prozess der Datenanalyse.

Datengenerierung

Für das übergeordnete Ziel der Beschreibung von Meilensteinen mathematischer Denkentwicklung werden die Kinder in mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen dazu angeregt sich mit mathematischen Fragen auseinanderzusetzen. Die mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen haben ihren konzeptionellen Ursprung in einem der folgenden mathematischen Bereiche: Zahlen und Operationen, Geometrie, Messen und Größen, Muster und Strukturen oder Datenanalyse (einschl. Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik). Die Fokussierung auf einen der genannten mathematischen Bereiche erfolgt dadurch, dass die begleitende Person durch die im Vorfeld genau beschriebenen Material-Raum-Arrangements, mathematischen Handlungsimpulsen wie auch gestischen und lautsprachlichen Impulsen die Aktivitäten der Kinder rahmt. Ziel einer solchen explorativen Inszenierung ist, dass die Kinder bezüglich des initiierten mathematischen Bereichs aber auch darüber hinaus in andere mathematische Bereiche hinein ihre mathematische Ideen und gemeinsamen mathematische Aushandlungsprozesse zum Ausdruck bringen können. Eine Forschung die mit „interpretativen oder rekonstruktiven Verfahren“ (Bohnsack 2008, 20) arbeitet ist in besonderer Weise auf solche offenen Situationen angewiesen.

Damit die beschriebene Offenheit der mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen für eine größere Anzahl von Kindertandems und -gruppen wiederholt und von verschiedenen Personen, die diese Spielsituationen begleiten, vergleichbar gestaltet werden kann, wird ein einheitliches Beschreibungsmuster in Form sogenannter „Didaktischer Design Pattern“ (Vogel & Wippermann 2005) verwendet. Die konkrete Beschreibung wird durch Fragen unterstützt, die entlang der entwickelten Strukturelemente formuliert wurden und die den konkreten Schreibprozess unterstützen sollen (vgl. Tabelle, enthält ausgewählte Strukturelemente). Sowohl die Erarbeitung der einzelnen Elemente (Kategorien) des Beschreibungsmusters wie auch das Finden eines Beschreibungsniveaus, das in angemessener Weise didaktisches wie auf forschungsmethodisches Handlungswissen weitergeben kann, wurde durch eine mehrmals wiederholte Evaluation begleitet. Diese Optimierung enthielt in vielfältiger Weise Prozesse der Mustererkennung.

Strukturelemente	*Fragen für den Schreibprozess*
Material und Raum	Welches Material wird für die Durchführung der Spiel- und Erkundungssituation benötigt? Wie muss der Raum für die Spiel- und Erkundungssituation vorbereitet sein?
Eingangssituation	Wie kann die Eingangssituation allgemein beschrieben werden? Was ist das Thema der Spiel- und Erkundungssituation? Wie soll der narrative Kontext gestaltet sein? Hier können Alternativen angegeben werden.

Datenanalyse

Die Analyse der Daten erfolgt im Projekt „erStMal“ mit unterschiedlichen qualitativen Analyseverfahren. Unter der Perspektive „Muster erkennen“ sei hier die Segmentierungsanalyse genannt (vgl. Dinkelaker & Herrle 2009). Diese Art der Videoanalyse ermöglicht einen Überblick über den gesamten Verlauf des Interaktionsgeschehens (vgl. Vogel & Reimann, in Vorbereitung). In dieser Art der Analyse wird „Muster erkennen“ in besonderer Weise deutlich. Die Segmentierung erfolgt über die Identifikation von Veränderungen in der Raum-Körper-Konstellation, von Veränderungen im Muster des Sprecherwechsels und eines Themenwechsels (vgl. Dinkelaker & Herrle 2009, 54). Die gefundenen Segmente werden abschließend zusammengestellt, kurz beschrieben und mit einem typischen Still symbolisiert. Diese Stillfolgen erlauben die Struktur des Interaktionsgeschehens auf der Musterebene zu vergleichen.

Fazit

Die hier in aller Kürze dargestellten möglichen Perspektiven unter dem Motto „Muster erkennen“ zeigen die Vielschichtigkeit mathematikdidaktischer Forschung. Sie machen die Spanne zwischen mathematischen Lehr-Lernprozessen und deren Erforschung mit dem Ziel einer mathematikdidaktischen Theorieentwicklung deutlich.

Die Erstellung dieses Beitrags wurde gefördert durch die LOEWE-Initiative der Hessischen Landesregierung.

Literatur

Bohnsack, R. (2008). Rekonstruktive Sozialforschung. Einführung in qualitative Methoden. 7. durchgesehene und aktualisierte Auflage. Opladen: Verlag Budrich.

Devlin, K. (2002). Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Dinkelaker, J. & Herrle, M. (2009). Erziehungswissenschaftliche Videografie. Eine Einführung. Wiesbaden: VS.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. Journal für Mathematik-Didaktik, 27 (3/4), 200 – 219.

Polanyi, M. (1985). Implizites Wissen. Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Vogel, R. & Reimann, M. (in Vorbereitung). Early mathematical thinking. Instruments to collect and analyze longitudinal data.

Vogel, R. & Wippermann, S. (2005). Transferstrategien im Projekt VIB – Didaktische Design Pattern zur Dokumentation der Projektergebnisse. In Ch. Bescherer (Hrsg.), Einfluss der neuen Medien auf die Fachdidaktiken (39-60). Baltmannsweiler: Schneider.

Vogel, R. (2005). Patterns – a fundamental idea of mathematical thinking and learning. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37 (5), 445 - 449.

Warren, E. A. (2005). Patterns Supporting the Development of Early Algebraic Thinking. In Ph. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce & A. Roche (Eds.), Building Connections: Theory, Research and Practice (Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, held at RMIT, Melbourne, 7th-9th July, 2005) (759-766). Sydney, Australia: MERGA.

Wulf, Ch. (2007). Rituelle Lernkulturen. Eine Einführung. In Ch. Wulf, B. Althans, G. Blaschke, N. Ferrin, M. Göhlich, B. Jörissen, R. Mattig, I. Nentwig-Gesemann, S. Schinkel, A. Tervooren, M. Wagner-Willi & J. Zirfas (Hrsg.), Lernkulturen im Umbruch. Rituelle Praktiken in Schule, medien, Familie und Jugend (7-20).

Andreas VOHNS, Klagenfurt

Vektoren sind wie Zahlen – nur ganz anders. Eine didaktisch orientierte Sachanalyse zum Vektor(- und Matrizen)begriff in der Oberstufe

Die Einführung von Vektoren als geometrische Objekte steht seit längerer Zeit fachdidaktisch in der Kritik, spielt in der schulmathematischen Praxis im deutschsprachigen Raum dennoch eine unvermindert große Rolle. Der seitens der Fachdidaktik (etwa von Malle 2005) formulierte Alternativvorschlag einer Einführung von Vektoren (und Matrizen) als arithmetisch-algebraische Objekte (mit ggf. flexibler geometrischer Deutung) legt nahe, deren Einführung analog zu Zahlbereichserweiterungen zu konzipieren.

Wenn man allerdings sagen will, inwiefern Vektoren „wie Zahlen" sind, so ergibt sich generell die Herausforderung, dass bereits für die regulären Zahlbereichserweiterungen „Vorstellungsumbrüche"(Hefendehl/ Prediger 2006) unvermeidbar sind. Jede Charakterisierung von Vektoren in der Schule sollte daher größtmögliche Transparenz anstreben, worin Kontinuitäten und Diskontinuitäten, Kohärenzen und Differenzen zwischen dem (nicht nur rechnerischen) Umgang mit Zahlen und Vektoren bestehen.

Ziel des Vortrages war es, herauszufinden, welche Kohärenzen und Differenzen zwischen Zahlen und Vektoren bestehen. Im größeren Kontext des Habilitationsvorhabens des Vortragenden steht diese Frage am Beginn einer größeren Studie, die versucht, ein auf dem arithmetischen Vektorbegriff fußendes curriculares Konzept der Linearen Algebra in der Oberstufe auszuarbeiten, welches Sinn- und Bedeutung dieses Stoffgebietes und sein Verhältnis zur Unterstufenmathematik im Unterrichts diskutierbar macht (Zur Begründung dieses Ansatzes vgl. Vohns 2010).

Grundsätzlich kann zunächst festgehalten werden, dass arithmetischen Vektorkonzepten daran gelegen ist, Vektoren als „verallgemeinerte Zahlen" aufzufassen, die man ebenso wie Zahlen geometrisch als „als Punkte oder Pfeile gedeutet werden, wobei auch ihre Rechenoperationen mehrfache Deutungen erfahren"(Bürger/ Fischer/ Malle/ Reichel 1980, S. 174). Dieser Vektorbegriff beschränkt sich dabei zwingend auf Vektoren als Elemente des $\mathbb{R}^n$ (n beliebig aber fest).

1. Objektvorstellungen

Der Zahlbegriff weist schon bei den natürlichen Zahlen einen relativen großen Facettenreichtum auf, was unterschiedliche Zahlaspekte bzw. -vorstellungen anbelangt (vgl. Krauthausen/ Scherer 2007, S. 9). Für neue

Zahlbereiche kommen dann je nach Autor noch verschiedene neue Zahlvorstellungen hinzu, alte müssen verworfen werden. Über die einzelnen Komponenten „erbt“ der Vektor die Vielschichtigkeit des Zahlbegriffs nahezu zwangsläufig – er kann in seinen Zeilen etwa Anzahlen, Maßzahlen, Operatoren oder Rangplätze enthalten. Insofern Vektoren selbst als „verallgemeinerte Zahlen“ aufgefasst werden sollen, werden dabei wenigstens die folgenden Zahlvorstellungen angesprochen:

- Vektoren werden als verallgemeinerte Maßzahlen konzipiert: So wie mit Zahlen die Länge, kann mit Vektoren Länge und Richtung einer Strecke „gemessen“ werden.
- Vektoren werden als verallgemeinerte Relationalzahlen konzipiert: Man benötigt (im Prinzip willkürlich) gesetztes Vergleichsmarken (den Nullvektor und den Betrag/ die Länge 1).
- Vektoren greifen auf eine verallgemeinerte Zahlenstrahl-Vorstellung zurück: Die Ebene, der Raum, Hyperräume dienen als „sekundäre Grundvorstellung“(vom Hofe 2003). „Gleich“ bleibt hier vor allem, das Zahlen wie Vektoren einerseits als Punkte auf der Zahlengerade (in der Ebene, im Raum), andererseits als Pfeile (mit bestimmter Länge) entlang der Zahlengerade (in der Ebene, im Raum)
- Vektoren werden als verallgemeinerte Rechenzahlen konzipiert, dabei kommen zum Teil neue „Spielregeln“ des Rechnens zum Tragen.

2. Operationsvorstellungen

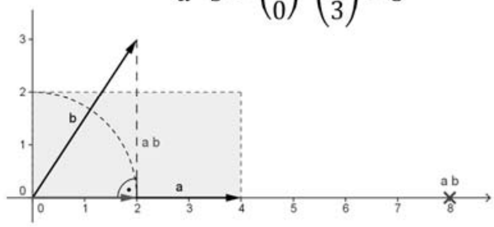
Im Vortrag wurde herausgearbeitet, dass für Addition und Subtraktion von Vektoren im Prinzip kaum neue Grundvorstellungen aufzubauen sind: Zusammenfassen, Hintereinanderlegen (Addition), Unterschiede bestimmen und Wegnehmen (Subtraktion) bleiben auch für das Rechnen mit Vektoren zentral. Größere technische Schwierigkeiten in der Ausführung der Operationen sind aufgrund der (intuitiv vermutlich naheliegenden) komponentenweisen Ausführung von Addition und Subtraktion auch eher weniger gewichtig einzuschätzen. Sehr wohl ergeben sich allerdings z.T. Probleme in den geometrischen Interpretationen: Wenn Vektoren als Verschiebungen aufgefasst werden, kann es hinderlich sein, dass die „Bewegung“ die durch die beiden Summanden-Vektoren eine andere ist als die des Summenvektors. Dass der Betrag des Summenvektors nicht die Summe der Beträge der Summandenvektoren ist (ähnlich für die Differenz), kann eine weitere Schwierigkeit darstellen. Noch deutlicher sind allerdings die Probleme im Bereich der Multiplikation: In Österreich lernen die Oberstufenschüler(innen) je nach Schulform zwei bis drei Arten der Multiplikation von Vektoren kennen: die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, das

Skalarprodukt und (v.a. in beruflichen höheren Schulen) die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix. In keiner dieser Multiplikationen sind beide Faktoren und das Produkt allesamt Vektoren, dennoch lassen sich Anknüpfungspunkte an die Multiplikation von Zahlen finden:

– Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar knüpft an die zeitlich sukzessive Multiplikationsvorstellung an. Wird ein Vektor mit einer natürlichen Zahl multipliziert kann die Produktbildung sogar wieder als „fortgesetztes Addieren" interpretiert werden. Für rationale und reelle Zahlen benötigt man die entsprechende, bereits in diesen Zahlbereichen wesentliche Vorstellung der Größenänderung/ Skalierung (vgl. Hefendehl/ Prediger 2006).
– Das Skalarprodukt wird arithmetisch zum Teil durch Analogien der Form: Menge mal Preis ergibt Gesamtkosten (Zahlen), Mengen (getrennt nach Sorten) mal Preise (je Sorte) ergibt Gesamtkosten motiviert. Geometrisch wird zum Teil versucht, diese Produktbildung als Fortsetzung räumlich-simultaner Multiplikationsvorstellungen aufzufassen (s. Abbildung).

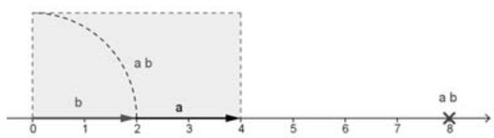
Vektoren:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 8$$



Zahlen:

$$a \cdot b = 4 \cdot 2 = 8$$



Beide Wege bergen die Gefahr, dabei auftretende Diskontinuitäten eher zu verdecken. Etwa am Beispiel der arithmetischen Analogie: Warum wird hier eigentlich nach den Gesamtkosten (also einer Zahl) und nicht nach den Kosten je Sorte (also einem Vektor) gefragt – gerade diese Frage würde ja auf das (komponentenweise definierte und für wirtschaftliche Anwendungen hoch relevante) Hadamard-Produkt führen (vgl. Jensen 2011, S. 102f). Zudem scheint erwähnenswert, dass das Skalarprodukt eine (was die Verrechnung der Komponenten) angeht sowohl multiplikative wie additive Struktur aufweist und bei der Verwendung geeigneter „Betrags-Einsen" auch für additive und subtraktive Fragestellungen nutzbar ist (Beispiele dazu finden sich in den Vortragsfolien, s. unten).

- Die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix wurde im Vortrag (beschränkt auf quadratische Matrizen) als ein möglicher sinnvoller Endpunkt der Produktbildung von Vektoren herausgearbeitet, insofern sich alle anderen im Vortrag angesprochen Produktbildungen (bzw. Fragestellungen, die auf diese führen) letztlich auch durch Multiplikationen mit Matrizen modellieren lassen.

3. Ausblick

Es ergeben sich wenigstens zwei weitergehende Fragen, die im Vortrag allenfalls angerissen werden konnten: Wenn ein arithmetische Vektorbegriff eingeführt wird, so kann dies kaum geschehen, ohne die Rolle von Anwendungen der Analytischen Geometrie für die Lineare Algebra in der Oberstufe kritisch zu hinterfragen – das macht auf unterschiedlichen Ebenen Standpunktwechsel erforderlich. Zum anderen ist Lineare Algebra vor allem auch Algebra, also nicht bloß ein Rechnen mit zahlenmäßig vorgegebenen Vektoren, sondern das Aufstellen, Operieren und Interpretieren von Vektortermen und -gleichungen. Wenn nun aber Variablen nicht mehr bloß für Zahlen, sondern auch für Vektoren stehen können, ist u.U. auch bei Variablenvorstellungen von „Vorstellungsumbrüchen“ auszugehen.

Die im Vortrag eingesetzten Folien können unter **http://scr.bi/f7qFZn** eingesehen und heruntergeladen werden.

Literatur

Bürger, H., Fischer, R., Malle, G., Reichel, H.-Chr. (1980): Zur Einführung des Vektorbegriffs: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. In: Journal für mathematik-Didaktik, 1 (3), 171 - 187.

Hefendehl-Hebeker, L., Prediger, S. (2006): Unzählig viele Zahlen. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 11 (48), 1 - 7.

Jensen, U. (2011): Wozu Mathe in den Wirtschaftswissenschaften? Braunschweig: Vieweg & Teubner.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik. München: Elsevier.

Malle, G. (2005): Neue Wege in der Vektorgeometrie. In: mathematik lehren, 133, 8-14.

Vohns, A. (2010): Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. In: Journal für Mathematik-Didaktik 31 (2), 227-255

vom Hofe, R. 2003: Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: mathematik lehren, 118, 4 - 8.

Jörg VOIGT, Münster

Rationale Modellierungsprozesse

In der Mathematikdidaktik werden häufig Kreislaufschemata verwendet, um die komplexen Prozesse in der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben „idealtypisch“ darzustellen. Stellvertretend sei das bekannte Schema von Blum in Abbildung 1 dargestellt.

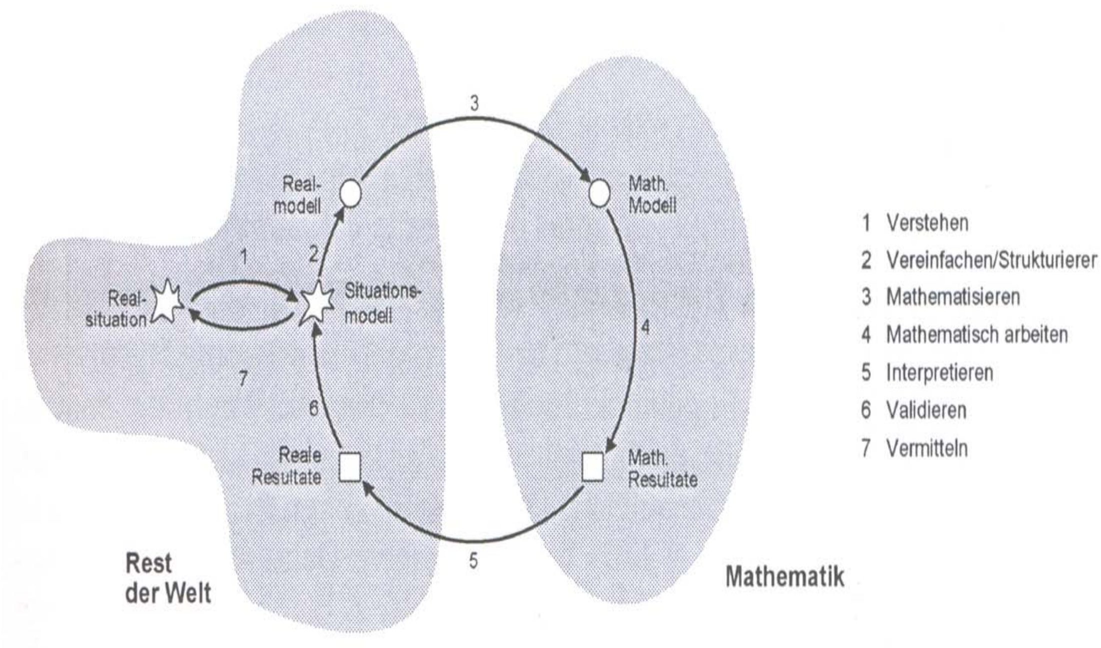


Abb. 1: Kreislaufschema nach Blum (2006, S. 9)

Die Kreislaufschemata dienen mehreren Zwecken, von denen hier nur zwei aufgeführt werden: Sie werden zur Formulierung und Erhebung verschiedener Modellierungskompetenzen genutzt (s. 1 bis 7 in Abb. 1). Und sie bilden einen Lerninhalt für Schülerinnen und Schüler zur Orientierung ihrer Modellierungsaktivitäten. In mehreren Schulbuchreihen wird ein vereinfachter Kreislauf verwendet. Z. B. heißt es in dem Schulbuch „Schnittpunkt 8, Mathematik für Realschulen, NRW“ zu einer entsprechenden Graphik: „Diesen Kreislauf nennt man mathematisches Modellieren. … Das mathematische Modellieren läuft in Stufen ab.“ (Maroska & al. 2007, S. 148).

1. Rationale Bearbeitung von Modellierungsproblemen

Unsere theoretische Analyse des Modellierens (Meyer & Voigt 2010) ergab, dass die Kreislaufschemata in ihrer Grundstruktur ungeeignet dafür sind, rationale Prozesse im Bearbeiten von Modellierungsproblemen zu orientieren oder entsprechende Modellierungskompetenzen zu formulieren und zu erheben. Unsere empirische Studie bestätigt das theoretische Ergebnis (s. ebenda). Unsere Annahme, der Modellierer ginge rational vor, beinhaltet, dass er Schlüsse ziehe, bei denen ein Gedanke nicht assoziativ den nächsten auslöse, ohne dass die Verbindung zwischen den Gedanken unbedacht bleibe.

Während es möglich ist, einen routinemäßigen Modellierungsprozess im Wesentlichen als reine Deduktionskette zu verstehen, muss das Lösen eines Modellierungsproblems mindestens einen kreativen Abduktionsschluss beinhalten. In diesem Abduktionsschluss wird eine für den Modellierungserfolg entscheidende Beziehung zwischen dem „Rest der Welt" und der „Mathematik" hergestellt. Diese Beziehung hob schon Schwarzkopf (2006) auf anderer theoretischer Grundlage hervor, indem er auf Begriffe, statt wie wir auf Schlüsse, achtete. Besonders deutlich wird die abduktiv hergestellte Beziehung in der „Vereinfachung" zum „Realmodell" (s. Abb. 1). Diese Vereinfachung kann der Modellierer auf rationale Weise nur mit Blick auf mathematische Zusammenhänge vornehmen. Beispielsweise ist die Konzentration auf bestimmte Größen sowie ihre Festlegung durch Schätzung, durch Recherche oder mittels Variablen nur mit der Verwendung bestimmter mathematikhaltiger Regeln für das Operieren mit den Größen rechtfertigbar. Die analytische Trennung zwischen den Bereichen „Rest der Welt" und „Mathematik" ist das Problem, nicht die Lösung des Versuchs, rationale Modellierungsprozesse strukturell darzustellen.

2. Der weiße Fleck im Kreislaufschema

Die Lösung besteht darin, den Bereich zwischen dem „Rest der Welt" und der „Mathematik" in den Blick zu nehmen und in diesem Zwischenbereich etwas inhaltlich Substantielles zu erkennen, das nicht in Form von Übergängen auflösbar ist. Man denke an andere Fachdidaktiker, die sich professionell mit dem Mathematisieren von Realsituationen beschäftigen. Sowohl Physikdidaktiker als auch die erfolgreich modellierenden Schüler in unseren Fallstudien bearbeiten die Größen nicht innerhalb der „Mathematik", sondern das Operieren mit den Größen geschieht stets bezogen auf die Realsituation (vgl. „Größenkalkül statt Zahlenkalkül"). Das hat zur Folge, dass nicht erst ein „mathematisches Resultat" sachbezogen interpretiert und validiert wird, sondern schon das Operieren mit den Größen. Die Klage, dass Schüler zu selten validieren würden, werten wir eher als Folge des Artefakts „Modellierungskreislauf", weil mit dem Schema als „Brille" das Validieren erst nach der Erarbeitung und der Interpretation eines mathematischen Resultats erkannt wird.

3. Wissenschaft statt Methodik: Kritische Fragen

Was sind die Ideale, die einen Modellierungskreislauf als „idealtypisch" erscheinen lassen? Wir finden keine theoretisch begründete Antworten auf diese Frage in der Literatur. Deshalb seien hier einige Vermutungen geäußert:

- Kommt im Platzieren der „Realsituation" an den Anfang des Modellierungsprozesses - fern von der Mathematik - das Ideal einer Lebensweltorientierung zum Ausdruck, unter der man sich vorstellt, die Mathematik entwickle sich aus einer von Mathematik unbefleckten Lebenswelt heraus? Zu welchen Verwerfungen und Problemen das didaktische Ideal eines von Mathematik freien Startpunktes eines Lernprozesses im Sachrechenunterricht führen kann, ist z.B. in Neth & Voigt (1991), Voigt (1984) oder Gellert (2009) beschrieben.
- Liegt die Wurzel in der Übernahme eines Schemas, das angewandte Mathematiker nutzen (vgl. Pollak 1970, 1979), um die Zusammenarbeit mit Experten aus einer anderen Disziplin darzustellen? Im Mathematikunterricht muss aber der Modellierer Kompetenzen aus beiden Bereichen in sich vereinen. Und es wäre schulfern anzunehmen, dass der Schüler ohne schulmathematische Erwartungen an eine Modellierungsaufgabe heranginge. Wenn man fragt, ob der Sachverhalt aus einer Modellierungsaufgabe „real" oder „authentisch" sei, sollte nicht übersehen werden, dass der Sachverhalt als Teil einer Mathematikaufgabe zweifellos real ist. Das Übersehen der Einbettung in das „Fach Mathematik" ist ein *mathematik*didaktischer Fehler.
- Oder beruht das Kreislaufschema auf einem mathematik*didaktischen* Fehler? Ein routinemäßiges Modellieren kann nach unserer Analyse tatsächlich gemäß dem Modellierungskreislauf verstanden werden. Wird die Struktur des Lösens einer Modellierungsaufgabe durch den Experten, für den die Aufgabe eine Routineaufgabe ist, in den „idealen" Lösungsprozess eines Lernenden hineinprojiziert, für den die Aufgabe eine Problemaufgabe ist?
- Wiederholt sich mit dem Kreislaufschema die frühere Hoffnung, dass strukturelle Schemata die Lernenden beim Lösen von Textaufgaben orientieren könnten? Die vermeintlichen Hilfen erwiesen sich als zu enges „Korsett" und hatten ihre Funktion eher für die nachträgliche Darstellung und Reflexion von Lösungen, weil die Verwendung der Schemata für eine Aufgabe wesentliche Lösungsschritte voraussetzte. Statt Schüler Mathematikdidaktik lernen zu lassen, und dann auch noch falsche, sollte die Unterrichtszeit zum Lernen des Anwendens

von Mathematik genutzt werden. Werden in Zukunft weiterhin in den Lehrwerken der Lehrerausbildung Schemata aufgeführt und deren Nutzen gleichzeitig stark relativiert? Dann werden die Schemata sicherlich weiterhin als Prüfungsstoff dienen. Welches Bild von der Mathematikdidaktik gewinnen die Studierenden, wenn sie etwas lernen sollen, dessen Nutzen für den Mathematikunterricht gleichzeitig verneint wird?

Es sollen die Kreislaufschemata nicht in ihrer Verwendbarkeit für die Analyse abgelehnt werden. So ist die analytische Trennung zwischen dem „Rest der Welt“ und der „Mathematik“ damit rechtfertigbar, dass gerade der Zusammenhang untersucht werden soll. Aber die Verdinglichung der Aspekte, „Schritte“, „Phasen“ oder „Stufen“ genannt, und ihre Ordnung als eine Folge schaffen eine methodische Mittellage von Mathematikdidaktik, die weder praxisnah ist, noch theoretisch begründet ist. Zum Verständnis des Modellierens bedarf es einer theoretischen Fundierung, und es bedarf empirischer Prozessanalysen, die Prozessbegriffe verwenden und die nicht die Prozesse lediglich als Übergänge zwischen Produktbegriffen bezeichnen.

Literatur

Blum, W. (2006): Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht - Herausforderung für Schüler und Lehrer. In A. Büchter & al. (Hrsg.): Realitätsnaher Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 8 - 23.

Gellert, U. (2009): Zur Explizierung strukturierender Prinzipien mathematischer Unterrichtspraxis. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 30 (2), 121-146.

Maroska, R. & al. (2007): Schnittpunkt 8, Mathematik für Realschulen. NRW. Klett: Stuttgart.

Meyer, M. & Voigt, J. (2010): Rationale Modellierungsprozesse. In B. Brandt & M. Fetzer & M. Schütte (Hrsg.): Auf den Spuren interpretativer Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. Münster: Waxmann, 117 – 148.

Neth, A. & Voigt, J. (1991). Lebensweltliche Inszenierungen. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.): Interpretative Unterrichtsforschung. Köln: Aulis, 79 - 116.

Pollak, H. O. (1970): Applications of mathematics. In E.G. Begle (Hrsg.): Mathematics education. Chicago, University Press, 311 - 334.

Pollak, H. O. (1979): The interaction between mathematics and other school subjects. In: UNESCO (Hrsg.): New trends in mathematics teaching. Band IV. Paris: Offset-Aubin, 232 - 248.

Schwarzkopf, R. (2006): Elementares Modellieren in der Grundschule. In A. Büchter & al. (Hrsg.): Realitätsnaher Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 95 - 105.

Voigt, J. (1984): Die Kluft zwischen didaktischen Maximen und ihrer Verwirklichung im Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematikdidaktik, 5 (4), 265 – 283.

Maike VOLLSTEDT, Kiel

Zur Klassifikation verschiedener Sinnkonstruktionsarten: Theoriegeleitete Typenbildung vs. empiriegestützte Clusteranalyse

1. Fokus und Design der Studie

Welchen Sinn konstruieren Schülerinnen und Schüler im Kontext schulischen Mathematiklernens? Inwiefern lassen sich in verschiedenen Kulturen unterschiedliche Ausprägungen erkennen? Diese Fragen waren im Fokus meines Dissertationsprojekts und wurden im Rahmen einer qualitativ-empirischen Studie untersucht, die in Deutschland und Hongkong durchgeführt wurde. Datengrundlage waren insgesamt 34 leitfadengestützte Interviews. Sie wurden in beiden Ländern mit jeweils 17 freiwilligen Schülerinnen und Schülern aus drei Klassen der 9. bzw. 10. Klassenstufe durchgeführt. Die Interviews begannen mit einer ca. 5-min. Sequenz nachträglichen lauten Denkens (Gass & Mackey, 2000) basierend auf einer Videoaufnahme der jeweils letzten Mathematikstunde. Es folgten Fragen zu verschiedenen Gebieten, z.B. nach Assoziationen zu(m) Mathematik(unterricht), Gefühlen, die mit Mathematik(unterricht) verbunden werden, Lösungsstrategien bei der Bearbeitung von Aufgaben, oder zur Rolle von Mathematik für das eigene Leben. Die transkribierten Interviews wurden in Anlehnung an die Grounded Theory kodiert (Strauss & Corbin, 1996). Aus den dann rekonstruierten 17 Sinnkonstruktionen wurden schließlich sieben Sinnkonstruktionstypen gebildet (Kelle & Kluge, 1999). Dabei wurden die Sinnkonstruktionen hinsichtlich der Intensität ihrer Bezogenheit auf konkrete mathematische Inhalte bzw. das Individuum in einem Merkmalsraum eingeordnet. Dieser diente als Grundlage für die Entwicklung von Typen, die intern maximal homogenen und extern maximal heterogen sind (zum genaueren Vorgehen vgl. Vollstedt, 2011).

Die Ergebnisse der Studie wurden auf zwei Weisen weiter untersucht. Erstens wurden sie aus einer kulturellen Perspektive reflektiert. Dazu wurden die relativen Häufigkeiten der Sinnkonstruktionen länderweise explorativ untersucht und die Mittelwerte anhand von *t*-Tests und Mann-Whitney-*U*-Tests miteinander verglichen. Die zugrundeliegenden relativen Häufigkeiten beschreiben dabei den prozentualen Anteil einer Sinnkonstruktionsart (bzw. eines -typs) an allen Sinnkonstruktionsarten (bzw. -typen) einer Person. Auf diese Weise kann unabhängig von der Länge der Interviews eine individuelle Gewichtung der Sinnkonstruktionen berücksichtigt werden. Die so gefundenen Ergebnisse dienen als Grundlage für die Bildung kulturspezifischer Hypothesen zu Gemeinsamkeiten und Unterschieden.

Zweitens wurde mittels einer hierarchischen Clusteranalyse nach Personengruppen gesucht, die ähnliche Bevorzugungsmuster bestimmter Sinnkonstruktionsarten aufweisen. Zunächst wurde mittels Single-Linkage-Verfahren eine Ausreißerin in den deutschen Daten ausgemacht, so dass die Clusteranalyse nach dem Ward-Verfahren auf 33 Personen basiert. Die gefundenen drei Cluster wurden mit dem Mann-Whitney-*U*-Tests mit Bonferroni-Korrektur auf signifikante Unterschiede miteinander verglichen. Dieser Artikel stellt die Ergebnisse der theoriegeleiteten Typenbildung und der empirisch gestützten Clusteranalyse gegenüber.

2. Vom Sinnbegriff zur Typologie der Sinnkonstruktion

Ich verstehe Sinn als persönliche Relevanz, die einem (Lern-) Gegenstand oder einer Handlung von einem Individuum beigemessen wird. Durch die Einbettung der Arbeit in den Kontext der Bildungsgangforschung ist die Perspektive der Lernenden von zentraler Bedeutung (Meyer, 2005, S. 18).

Die Konstruktion von Sinn findet statt, wenn sich ein Individuum, also ein Schüler oder eine Schülerin, in einer Situation, z.B. bei der Auseinandersetzung mit fachlichen Inhalten im Mathematikunterricht, befindet. Das Individuum bringt verschiedene Voraussetzungen mit, da es von verschiedenen persönlichen Merkmalen (Überzeugungen, Ziele, Denkstil u.a.) sowie von Hintergrundmerkmalen (kultureller oder Migrationshintergrund, Alter, u.a.) geprägt ist. Diese Merkmale werden als relevant für die Konstruktion von Sinn angenommen. Die rekonstruierten Sinnkonstruktionen bewegen sich zwischen Pflichterfüllung, kognitiver Herausforderung und sozialer Eingebundenheit und können entsprechend ihrer unterschiedlichen Intensität an Individuumsbezogenheit und Mathematikbezogenheit in den Merkmalsraum der Typenbildung eingeordnet werden. Ein inhaltlicher Vergleich der Sinnkonstruktionsarten setzt die Grenzen zwischen den Typen. Die Typenbildung ist folglich an Theorie orientiert, da die Anordnung nach theoriegeleiteten Dimensionen stattfindet. Die auf diese Weise entstehenden Typen spannen ein Feld auf zwischen der Erfüllung gesellschaftlich geprägter Anforderungen, kognitiver Selbstentwicklung und emotional-affektiv geprägter Entfaltung.

3. Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen Deutschland und Hongkong

Wie oben beschrieben, wurde die Studie in zwei Ländern durchgeführt. Deutschland fungiert dabei als Beispiel einer westlichen Kultur. Hongkong ist Beispiel einer konfuzianisch geprägten ostasiatischen Kultur, also durch konfuzianische Wertvorstellung in Erziehung und Bildung geprägt.

Da bei der Typenbildung verschiedene Sinnkonstruktionsarten zu Typen zusammengefasst werden, verwischen die Unterschiede und Gemeinsamkeiten, die sich auf Ebene der Sinnkonstruktionsarten zwischen Deutschland und Hongkong finden lassen. Im Folgenden werden daher die Unterschiede auf Ebene der Sinnkonstruktionsarten berichtet, und zwar genau dann, wenn die Mittelwerte signifikant voneinander abweichen ($p < 0.05$, Cohens d ist in diesen Fällen immer größer $|1|$). Ähnlichkeiten werden erwähnt, wenn der p-Wert möglichst groß ist ($p > 0.7$) und die Effektstärken sehr klein sind (Cohens $d < 0.2$). Eine genauere Beschreibung der einzelnen Sinnkonstruktionsarten, die exakten Ergebnisse sowie die Erklärungsansätze für Gemeinsamkeiten und Unterschiede können aus Platzgründen hier leider nicht aufgeführt werden (vgl. dazu Vollstedt, 2011).

Für die Hongkonger Interviewten ist *Aktives Betreiben von Mathematik* von größerer persönlicher Bedeutsamkeit als für die deutschen Schülerinnen und Schüler. Außerdem ist es ihnen wichtiger, *Ausgeglichenheit* zu erleben, also Momente einer kognitiven Entspannung im Unterricht. Darüber hinaus sind gute Leistungen in *Prüfungen,* insbesondere im *Hong Kong Certificate of Education Examination* (HKCEE) besonders relevant. Für die deutschen Interviewten ist es hingegen wichtiger, eine *Positive Außenwirkung* etwa durch mündliche Beteiligung im Unterricht zu erzeugen bzw. die eigene Leistungsfähigkeit durch gute *Zensuren* widergespiegelt zu bekommen. Gemeinsamkeiten zwischen Deutschland und Hongkong lassen sich bei der Auseinandersetzung mit Mathematik als *Berufsvoraussetzung* finden, bzw. wenn es um eine *Emotional-affektive Bindung an die Lehrperson* geht. Darüber hinaus wird in beiden Ländern Mathematik aus *Pflichterfüllung* gelernt, oder um die *Selbstperfektionierung* voranzutreiben.

4. Personencluster

Die Distanzparameter der Ward-Analyse legen eine Unterscheidung von drei Personenclustern mit je elf Personen nahe. Die Ergebnisse des Mann-Whitney-U-Tests zeigen, dass signifikante Unterschiede zwischen den Clustern vorliegen. Der erste Cluster besteht aus 6 Schülerinnen und Schülern aus Deutschland und 5 aus Hongkong. Die charakteristischen Sinnkonstruktionen sind *Effizienz* und *Unterstützung durch die Lehrperson*. Guter und sinnhafter Unterricht ist für die Lernenden gekennzeichnet durch effizient gestaltete Unterrichtsstunden sowie verschiedene Unterstützungsmaßnahmen der Lehrperson. Der zweite Cluster besteht überwiegend aus deutschen Jugendlichen (2 aus Hongkong). Die charakteristischen Sinnkonstruktionsarten sind hier *Positive Außenwirkung* sowie *Kompetenz erleben* etwa wenn sie richtige Lösungen erlangen. Nahezu ausschließlich Jugendliche aus Hongkong bilden den dritten Cluster (1 aus Deutschland). Sie bevorzugen signifikant stärker die Sinnkonstruktion *Ausgeglichenheit*.

5. Diskussion und Fazit

Die Ergebnisse beider Analysen ergänzen sich, da sich die Ergebnisse der theoriegeleiteten Typenbildung zum Teil in der Clusteranalyse wiederfinden lassen, diese jedoch nicht vollkommen abbilden. Cluster 1 bevorzugt zwei Sinnkonstruktionsarten, die die Grundlage für den Sinnkonstruktionstyp *Effiziente und unterstützende Gestaltung von Unterrichtsprozessen* bilden. Dieses Ergebnis ist nicht kulturspezifisch interpretierbar, da die hier gruppierten Personen zu nahezu gleichen Teilen aus beiden Ländern kommen. Die beiden anderen Cluster zeigen eine Nähe zu den Ergebnissen aus kultureller Perspektive. In beiden Clustern ist jeweils eine Sinnkonstruktionsart enthalten, die signifikante Unterschiede aufweist (Cluster 2: *Positive Außenwirkung*, Cluster 3: *Ausgeglichenheit*). Dies lässt sich damit erklären, dass diese Cluster nahezu vollständig aus Personen des jeweiligen Landes bestehen.

Die unterschiedliche Perspektive auf die Daten lässt erkennen, dass die Typenbildung – obgleich aus einer theoriegeleiteten Perspektive kommend – mit denen der Empirie vereinbar ist. Der zweite Zugriff auf die Daten bestärkt die vorherigen Ergebnisse und gewährt ein tieferes Verständnis des Konzepts der Sinnkonstruktion.

Literatur

Gass, S. M., & Mackey, A. (2000). Stimulated recall methodology in second language research. Second language acquisition research; Monographs on research methodology. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kelle, U., & Kluge, S. (1999). Vom Einzelfall zum Typus: Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung. Qualitative Sozialforschung: Vol. 4. Opladen: Leske + Budrich.

Meyer, M. A. (2005). Die Bildungsgangforschung als Rahmen für die Weiterentwicklung der allgemeinen Didaktik. In B. Schenk (Ed.), Studien zur Bildungsgangforschung: Vol. 6. Bausteine einer Bildungsgangtheorie (17–46). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Strauss, A. L., & Corbin, J. (1996). Grounded Theory: Grundlagen qualitativer Sozialforschung. Weinheim: Beltz.

Vollstedt, M. (2011). Sinnkonstruktion und Mathematiklernen in Deutschland und Hongkong: Eine rekonstruktiv-empirische Studie. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Bodo v. PAPE, Oldenburg

Über den Umgang mit Zahlen

„Mathematische Grundbildung ist die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Personen als konstruktiven, engagierten und reflektierenden Bürger entspricht." (KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik)

1. Zahlen im Leben

Der engagierte und reflektierende Bürger sieht sich in der Tat in vielen Situationen -- privaten wie öffentlichen - mit Produkten von Mathematik konfrontiert, Angaben zu Gesundheitsrisiken etwa oder Kosten-Nutzen-Analysen. Bei dem, was den Bürger erreicht und womit er umzugehen hat, handelt es sich generell um Zahlen. Hinter diesen Zahlen steht in manchen Fällen sehr viel an Mathematik und Formeln, dieser Hintergrund aber ist dem Bürger in der Regel nicht zugänglich. Die Fähigkeit zum Umgang mit den Zahlen dagegen - die Einschätzung ihrer Aussagekraft und ihres argumentativen Gewichts -, das ist es, was tatsächlich zu den Grundqualifikationen eines mündigen Bürgers gehört. Konkret: Wenn in der Argumentation um Stuttgart 21 mit einem Nutzen-Kosten-Verhältnis argumentiert wird, das von 2,4 (1994) zunächst ansteigt auf 2,95 (2006), um dann abzusinken auf „deutlich unter 1“ (2010), so sollte der Bürger sich einen Reim darauf machen können.

Hinter Zahlen, mit denen wir es zu tun haben, steht nur in den einfachsten Fällen ein direktes Abzählen. Zahlen kommen in die Welt als Messwerte, als Schätzwerte oder vielfach auch als „pragmatische Näherungen“. In jedem dieser Fälle sind die Zahlen mit einer Unsicherheit und Unschärfe behaftet. Der mündige Bürger weiß das insbesondere von den Zahlen der Statistik. Aber auch Unschärfe der Begriffe spielt bei den Zahlen aus dem Alltagsleben eine Rolle. In der Technik und in den exakten Wissenschaften hat man die Quellen der Ungenauigkeit genau im Blick: Das variiert von der Toleranz der Messgeräte, der Unschärfe der Basiseinheiten bis hin zu der Heisenberg‘schen Unschärferelation. Bei der Neufestlegung des Meters etwa strebt man derzeit eine Genauigkeit von 2E-8 an. Gleichzeitig verlautet aus der Chemie, man wolle die Atommassen künftig nicht mehr als Zahlen angeben sondern nur noch als Intervalle.

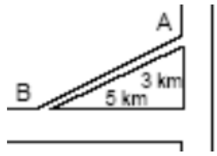
Wir sollten festhalten: Bei denjenigen Zahlen, mit denen wir es im Leben zu tun haben, macht eine Genauigkeit < 1E-7 = 0,1ppm keinen Sinn.

2. Der Umgang mit Zahlen in der Schule

„Zahl“, „Messen“, „Daten“ - das sind Begriffe, die folgerichtig auch in der aktuellen pädagogischen Theorie ein hohes Gewicht haben. Sie decken die Hälfte der Leitideen ab, an denen die PISA-Didaktik sich orientiert.

Wie sieht es mit dieser Neuausrichtung in der Praxis aus? Ein Blick auf das erste Aufgabenbeispiel aus den Bildungsstandards hilft weiter.

„Lohnt sich die Abkürzung? Viele Autofahrer benutzen für die Fahrt von A nach B nicht die stark befahrenen Hauptstraßen, sondern einen „Schleichweg“.



Äußern Sie sich, ob die Abkürzung eine Zeitersparnis bringt, wenn man auf dem „Schleichweg“ durchschnittlich mit 50 km/h und auf den Hauptstraßen durchschnittlich mit 30 km/h fahren kann.“

Ergebnis: „Die Fahrzeiten betragen ca. 12 min (Schleichweg) und ca. 10 min. Die Abkürzung bringt keine Zeitersparnis.“

Hier soll man nicht einfach rechnen, hier soll man „beurteilen“: „Die Schülerinnen und Schüler entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse in Bezug auf die Sachsituation.“

Was allerdings die - hier übergeordnete - „Leitidee Messen“ anbetrifft: Wie steht es eigentlich um die Eingangswerte, ihre „Lebensnähe“, ihre Relevanz, die Art ihrer Bestimmung und ihre Genauigkeit? Die Möglichkeiten, sich von den verpönten herkömmlichen „eingekleideten Aufgaben“ zu distanzieren, sind hier jedenfalls nicht ausgeschöpft.

Die Leitideen dienen in der Rahmenkonzeption der PISA-Studie dazu, den Bereich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen zu strukturieren. Hier - bei den sechs Kompetenzen - liegen die eigentlichen Ziele des MU. Zentral ist hier

K5: „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen. Dazu gehört:

– mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten, …

Um der Lebenswirklichkeit und dem tatsächlichen Bedarf an „Mathematik im Alltagsleben“ gerecht zu werden, sollte hier der Einsatz einer Tabellenkalkulation wenigstens ausdrücklich daneben gestellt werden:

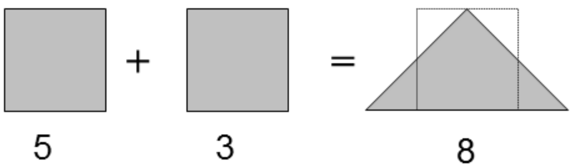
– Umgang mit Zahlen im Leben: Arbeiten mit einfachen und komplexeren Netzwerken von Zahlen, Größen und Daten: Justieren, Optimieren, Szenarios, Visualisieren, Simulationen durchführen

Die Aufgabenstellungen der überkommenen Schulmathematik lassen sich auch mit diesem Werkzeug sehr direkt und umfassend abdecken: Nullstellenbestimmung, Anpassungskurven, Extrem- u. andere ausgezeichnete Punkte bei Funktionen von einer oder mehreren Variablen, Berechnungen und Darstellungen im Raum. Der Rahmen der zugänglichen Fragestellungen lässt sich mit einem derartigen Werkzeug sogar problemlos deutlich erweitern. Das zu zeigen war Anliegen meines Vortags: „‘Geht nicht‘ gibt’s nicht!“ (2010)

Wir können uns sicher sein: Bearbeiten wir derartige Aufgabenstellungen mit einem Werkzeug wie Excel, dann sind wir näher dran an der Realität des Umgangs mit mathematischen Fragestellungen im Leben, als wenn wir zu CAS-Schulrechnern greifen - der bei aller erklärten Offenheit nicht selten einzig zugelassenen Art von höheren elektronischen Hilfsmitteln.

3. Rechnen mit unscharfen Zahlen: Rundungszahlen

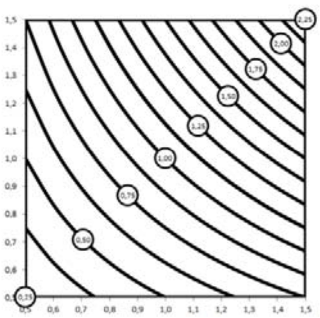
Mit unscharfen Zahlen bekommt man es bei km-Angaben oder bei Altersangaben zu tun, etwa wenn man Summen oder Differenzen berechnet. Bei der Berechnung von Wohnflächen geht es um Summen von gewichteten Produkten unscharfer Zahlen. Die Extrapolation einer Finanzierung führt auf eine unscharfe Exponentialfunktion.



Leicht überschaubar sind Addition und Subtraktion von ganzzahlig gerundeten Zahlen. Summe und Differenz sind dreieckverteilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass im vorliegenden Fall die gerundete Summe 9 beträgt, ist offenbar 1/8.

Für die Verteilung und den Erwartungswert des Produkts zweier ganzzahlig gerundeter Zahlen, bieten sich 3 Möglichkeiten an:

- Simulation
- systematisches Durchspielen mit Repräsentanten der Teilintervalle
- exakte Berechnung auf der Basis eines geometrischen Modells



Grundlage für die Berechnungen zum Produkt zweier Zufallseinsen ist die Bestimmung der Verteilung der möglichen Werte. Der Anteil der Konstellationen aus den Basisintervallen, für die das Produkt <= a ist, ist der Anteil der Fläche unter der Hyperbel zu a/x an einem Einheitsquadrat. Man erhält sie durch Integration. Ableiten nach a liefert dann die Dichtefunktion.

So bestätigt sich zunächst das Ergebnis der Simulation, dass das Produkt am ehesten im Bereich im ¾ zu erwarten ist. Dieser „dichteste Wert“ oder „Modalwert“ ist aber sehr wohl zu unterscheiden von dem Erwartungswert. Den erhält man durch Integration über die mit a multiplizierte Dichte:

$$E(1\cdot 1)=\int_{1/4}^{3/4} a\cdot\left(\ln(a)-2\cdot\ln(2)\right)da+\int_{3/4}^{9/4} a\cdot\left(2\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\ln(a)\right)da=1$$

Für den Quotienten 1/1 liefert das entsprechende Vorgehen die 1 als dichtesten Wert und als Erwartungswert $E(1/1)=\ln(3)$

Leichter hat man es dann mit den Erwartungswerten zum Betrag der Differenz und zum Maximum zweier Zufallseinsen, und noch leichter natürlich mit der Berechnung von Quadrat und Wurzel einer einzelnen Zufallseins.

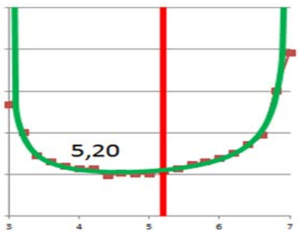
$E(|1-1|)=\frac{1}{3}$ $E(max(1;1))=\frac{7}{6}$ $E(1^2)=\frac{13}{12}$ $E(\sqrt{1})=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}$

3. Maria und Martin: Die kopernikanische Wende im Bildungswesen

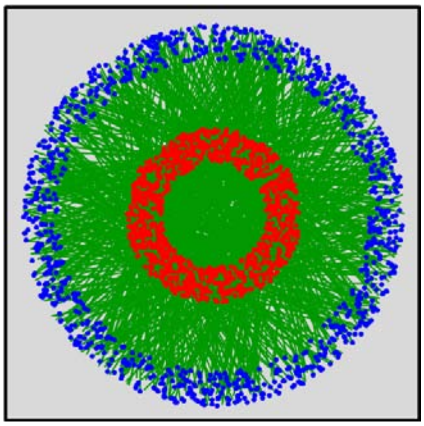
Wenn „Der Spiegel“ darüber berichtet, wie die Welt der PISA-Mathematik aussieht, dann gehört diese Geschichte einfach dazu:

> Den Aha-Effekt, den die Geschichte von Martin und Maria unter deutschen Pädagogen ausgelöst hat, wird man irgendwann einmal als die kopernikanische Wende im deutschen Bildungswesen erkennen. Die Geschichte geht so: „Maria lebt zwei km von der Schule entfernt, Martin fünf km. Wie weit leben Maria und Martin voneinander entfernt?“

Mit den drei Zugängen zu den Problemlösungen ist man für derartige Aufgabenstellungen bestens gerüstet.



Jeder der Ansätze liefert als Erwartungswert der Entfernung 5,20 km. Dem algebraischen Ansatz wird man aber wohl aus dem Weg gehen: Von Hand ist er kaum zu bewältigen, die abschließende Integration gelingt ohnehin nur numerisch.



Will man allerdings - um der Realität etwas besser gerecht zu werden – unterstellen, dass die Entfernungsangaben nicht exakt sind, sondern gerundet, dann führt an einer Simulation wohl kein Weg mehr vorbei. Das ergibt: E(d) = 5,24 km.

Gelegentlich ist man gut beraten, ein Ergebnis anzusteuern nicht über komplexe Rechnungen, sondern über eine Simulation.

Auch das können wir lernen aus der Diskussion um Stuttgart 21.

Daniel WAGNER, Kiel

Mathematische Kompetenzanforderungen in Schule und Hochschule: Die Rolle des formal-abstrahierenden Denkens

Zahlreiche frühzeitige Studienabbrüche und hohe Schwundquoten in den MINT-Fächern, insbesondere im Fach Mathematik, verlangen eine detaillierte Charakterisierung der Ursachen für die Probleme in der Studieneingangsphase. Beispielsweise identifizierten de Guzman et al. (1998) beim Übergang von der Sekundarstufe II in ein Studium mit hohem Mathematikanteil mehrere Problemebenen: Neben Problemen im motivational-affektiven und soziokulturellen Bereich sowie bei Lehr-Lernprozessen, traten vor allem im kognitiv-epistemologischen Bereich Schwierigkeiten seitens der Studierenden auf. Der zuletzt genannte Bereich ist auch der Ansatzpunkt dieser Studie, welche sich auf den kognitiven Bereich und dabei speziell auf Unterschiede in den Kompetenzanforderungen zum Ende der Sekundarstufe II und zu Beginn des ersten Studiensemesters an der Universität im Fach Mathematik beschränkt.

1. Theoretischer Hintergrund

Die wenigen empirischen Ergebnisse zu diesem Thema stammen vor allem aus dem angelsächsischen Raum (Tall, 1991; Hoyles, 2001). Sie liefern jedoch nur geringe Erkenntnis, wie mathematische Kompetenz an der Schnittstelle Schule-Hochschule strukturiert ist. Fischer (2006) identifiziert in einer qualitativen Studie zu Fehlvorstellungen in der Linearen Algebra Schwierigkeiten, die über das rein inhaltliche hinausgehen. Insgesamt lässt sich eine Veränderung der Art des Mathematiklernens im Sinne eines formaleren Zugangs vermuten (Tall, 1991; Hoyles, 2001). Um diesen formaleren Zugang genauer zu erfassen wird als theoretisches Fundament dieser Studie das Konstrukt „Formal-abstrahierendes Denken“ eingeführt (vgl. Wagner, 2010). Als Grundlage dieses Konstrukts dienen verschiedene Arbeiten zum „Advanced Mathematical Thinking“ (Tall, 1991) sowie kognitionspsychologische Theorien u.a. zum Deduktiven Denken (Johnson-Laird, 2006; Evans, 2008).

2. Ziele und Forschungsfragen

Ein Ziel der Studie ist es, die bestehenden Unterschiede in den Kompetenzanforderungen zwischen Schülerinnen und Schülern am Ende der Sekundarstufe II auf der einen und Studierenden des ersten Semesters auf der anderen Seite aufzuzeigen und zu charakterisieren. Bei der Herausarbeitung dieser Unterschiede wird insbesondere auf die Rolle des Formal-abstrahierenden Denkens eingegangen. Konkret wird die Beantwortung folgender Forschungsfragen angestrebt:

- Wie unterscheiden sich die Kompetenzanforderungen in der Sekundarstufe II und im ersten Studiensemester im Fach Mathematik?
- Welche Rolle spielen dabei die Anforderungen an das Formal-abstrahierende Denken?

3. Methodisches Vorgehen

Als Hilfsmittel zur Beantwortung der genannten Forschungsfragen wurde ein gemeinsames Kompetenzmodell für das Ende der Sekundarstufe II und das erste Studiensemester im Bereich Analysis entwickelt (vgl. Wagner, 2010). Auf Basis dieses Modells wurde ein Kompetenztest mit insgesamt 30 teils offenen, teils Multiple-Choice Items konzipiert. Die Aufgaben wurden einem Expertenrating unterzogen und mit einer geeigneten Stichprobe Studierender sowie Schülerinnen und Schüler pilotiert. Die Stichprobe für die im Sommer 2010 durchgeführte Haupterhebung bestand aus insgesamt 453 Personen und setzte sich aus Studierenden des ersten und zweiten Semesters sowie vier Abschlussklassen unterschiedlicher Kieler Schulen zusammen. Insgesamt hatte jeder Teilnehmer 12 Aufgaben in einem Zeitraum von 30 Minuten zu bearbeiten. Die Auswertung der Daten erfolgte mittels probabilistischer Testtheorie (eindimensionales, dichotomes Raschmodell). Die guten Item-Fit-Werte der einzelnen Aufgaben indizieren dabei eine gute Passung des zugrundegelegten Modells auf den vorhandenen Datensatz. Die Reliabilität ist mit einem EAP/PV Wert von .75 als zufriedenstellend einzuschätzen.

4. Erste Ergebnisse

Ein erster Vergleich der Ergebnisse von Studierenden mit Schülerinnen bzw. Schülern wurde mit Hilfe von T-Tests durchgeführt. Abb. 1 zeigt die z-transformierten Kompetenzwerte der beiden Gruppen.

Hierbei weist die Studierendenstichprobe (M = .42, SD = .89) im Vergleich zu den Schülerinnen und Schülern (M = -.52, SD = .88) erwartungsgemäß einen deutlich höheren Kompetenzwert auf (T = 11.2, Cohens d = 1.06**).

Zur Illustration ist in Abb. 2 das Item „Betragsfunktion“ gezeigt, das auf den Aspekt des mathematischen Beweisens fokussiert. Abb. 2 zeigt eine typische unzureichende Lösung, wie sie hauptsächlich in der Schülerstichprobe vorgefunden wurde. Die Probandin argumentiert hier auf einer intuitiv-anschaulichen Ebene, obwohl ein mathematischer Beweis gefordert war.

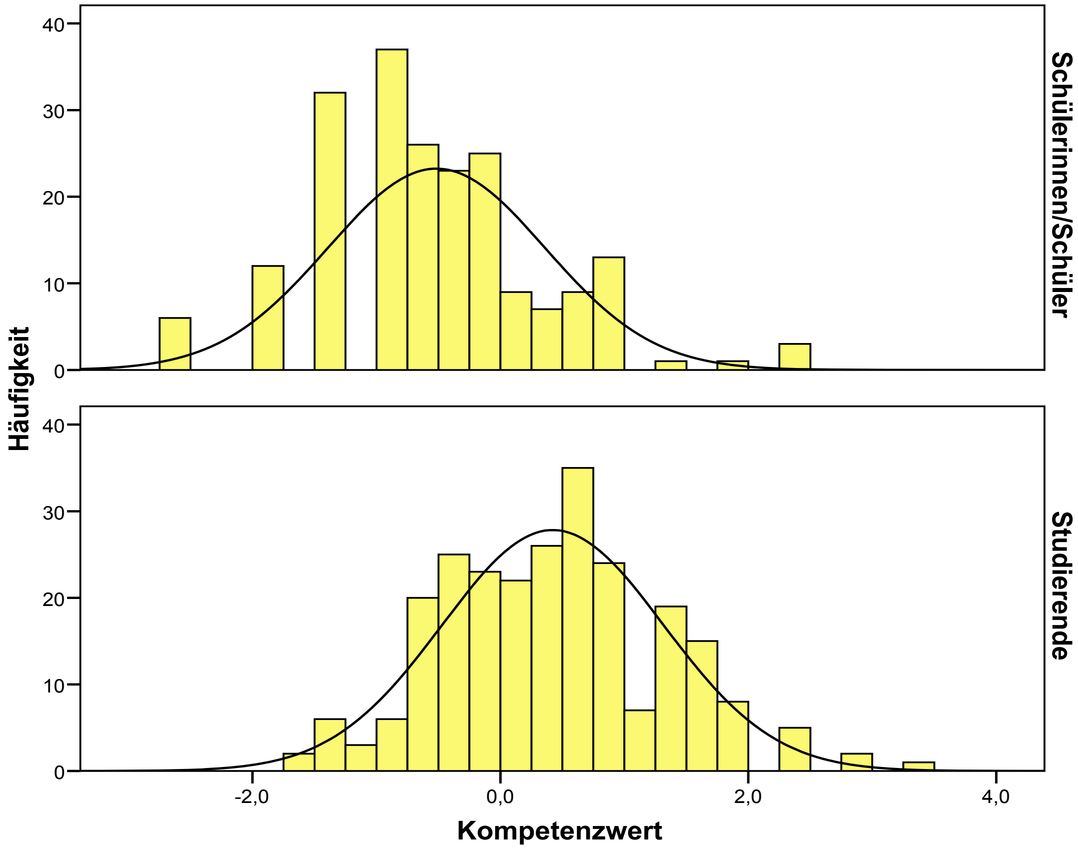


Abbildung 1: Mittelwerte von Studierenden und Schülerinnen bzw. Schülern

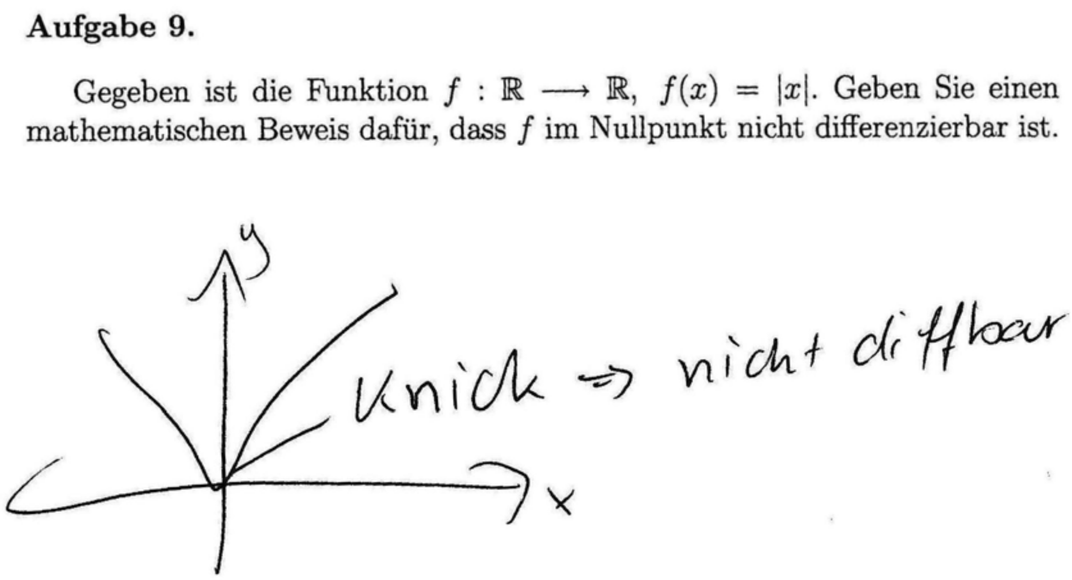


Abbildung 2: Unzureichende Beispiellösung für das Item „Betragsfunktion“

Insgesamt lässt sich aus den ersten Analysen zweierlei konstatieren:

Aus quantitativer Perspektive zeigt sich erwartungsgemäß, dass die Studierenden der Stichprobe höhere Kompetenzwerte erreichen als die Schülerinnen und Schüler. Aus qualitativer Perspektive zeigt sich, dass solche Items, die einen mathematischen Beweis bzw. eine formal-mathematische Argumentation verlangen (z. B. das Item „Betragsfunktion“), von Studierenden deutlich besser gelöst werden als von Schülerinnen und Schülern. Dagegen ist dieser Unterschied bei Items, die eine Anwendung von Rechenprozeduren verlangen (z. B. Ableitung einer Funktion berechnen), wesentlich geringer bzw. in einigen Fällen sogar nicht signifikant. Damit deuten sich erste Unterschiede und Gemeinsamkeiten in den mathematischen Kompetenzanforderungen der Sekundarstufe II und des Studiums im ersten Semester an, die auf die Bereiche des formalen mathematischen Argumentierens und des Durchführen von Rechenverfahren zurückgeführt werden können.

Literatur

Evans, J.St.B.T. (2008). Dual-processing accounts of reasoning, judgement and social cognition. *Annual Review of Psychology*, *59*, 255-278.

Fischer, A. (2006). *Vorstellungen zur linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und –ergebnisse von Studierenden.* Dissertation. Dortmund: Universität Dortmund.

De Guzman, M., Hodgson, B. R., Robert, A., & Villani, V. (1998). Difficulties in the Passage from Secondary to Tertiary Education. *Documenta Mathematica, Extra Volume ICME 1998 (III),* 747-762.

Hoyles, C., Newman, K., & Noss, R. (2001). Changing patterns in transition from school to university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32* (6)*,* 829-845.

Johnson-Laird, P.N. (2006): *How we reason.* Oxford: Oxford University Press.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wagner, D. (2010). Mathematische Kompetenz beim Übergang Schule-Hochschule. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 08.03. 2010 bis 12. 03. 2010 in München* (S. 903-906). Münster: WTM, Verlag für Wiss. Texte und Medien.

Thomas WASSONG, Rolf BIEHLER, Paderborn

Entwicklung von Professionswissen für Statistik in der Sek. I – Entwurf einer Lehrveranstaltung

1. Einführung

In diesem Beitrag wird ein Konzept zur Entwicklung von Professionswissen vorgestellt, das auf der expliziten Basis eines Kompetenzstrukturmodells beruht. Dabei wird zunächst das zugrunde gelegte Modell von Professionswissen vorgestellt. Anschließend wird das Konzept der Lehrveranstaltung kurz präsentiert wird. Zentrales Element ist dabei die Entwicklung substantieller Lernumgebungen (Wittmann 1995) durch die Studierenden. Dieses Konzept wird an einer Beispielaufgabe kurz erläutert.

2. Das zugrunde gelegte Modell von Professionswissen

Das zugrunde gelegte Modell von Professionswissen (vgl. Wassong & Biehler, 2010a; Wassong & Biehler, 2010b) stützt sich auf die von Shulman (1986) eingeführten Begrifflichkeiten *Content* und *Pedagogy* als zwei Komponenten von Professionswissen. Diese beiden Komponenten werden nach Mishra & Koehler (2006) um die dritte Komponente *Technology* erweitert. Auf dem äußeren Ring in Abbildung 1 befinden sich die Wissensbereiche, die sich nur auf eine Komponente konzentrieren. Dazu gehören die Allgemeine Didaktik (Pedagogical Knowledge (PK)), das technologische Wissen im Sinne grundlegender Kompetenzen im Umgang mit Rechnern (Technological Knowledge (TK)) sowie das Fachwissen (Content Knowledge), welches sich nach Ball, Thames & Phelps (2008) aufteilt in das allgemeine Fachwissen (Common Content Knowledge (CCK)), für das Unterrichten spezielle Fachwissen (Spezial Content Knowledge (SCK)) und das Wissen bzgl. Verknüpfungen des Inhalts sowohl in andere mathematische als auch nichtmathematische schulische Inhaltsbereiche (Knowledge at the mathematical Horizon (HK)).

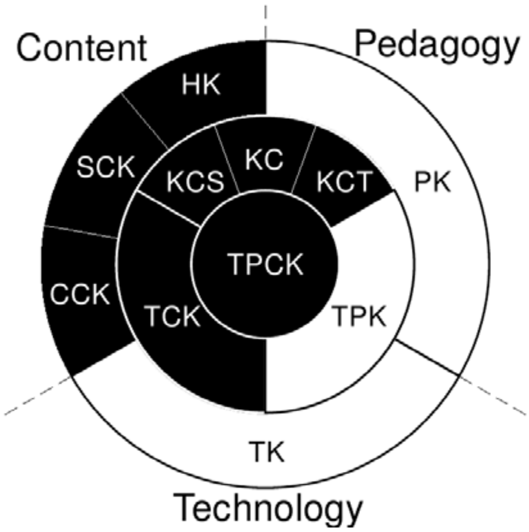


Abbildung 1: zugrunde gelegtes Modell professioneller Lehrkompetenz

Im mittleren Ring sind die Wissensbereiche aufgeführt, die zwei Komponenten miteinander verknüpfen. Neben der Mediendidaktik (Technological Pedagogical Knowledge (TPK)) und dem Wissen über die Nutzung und

Anwendung fachbezogener Software (Technological Content Knowledge (TCK)) gehört auch das Pedagogical Content Knowledge (PCK) in diesen Ring. Der letzte Wissensbereiche wurde nach Ball, Thames & Phelps in das Wissen über den Umgang von Lernenden mit dem Inhalt wie Grundvorstellungen, Entwicklungsstufen von Begrifflichkeiten und Fehlvorstellungen (Knowledge of Content and Student (KCS)), das Wissen über die Vermittlung des Inhaltes im Unterricht (Knowledge of Conten and Teaching (KCT)) sowie das Wissen über curriculare Möglichkeiten bzgl. des Inhaltes (Knowledge of Curriculum (KC)). Im inneren Ring werden alle drei Komponenten in der Technologie-orientierten Fachdidaktik (Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK)) zusammengeführt. Im Rahmen der angestrebten, fachdidaktischen Lehrveranstaltung sind nur die markierten Kompetenzkategorien von Interesse.

3. Konzept der Lehrveranstaltung

Bei der Lehrveranstaltung handelt es sich um ein fachdidaktisches Seminar im Rahmen des Hauptstudiums für Haupt-, Real und Gesamtschule (GHR) an der Universität Paderborn. Im Grundstudium haben diese Studierenden bereits eine Vorlesung „Elemente der Stochastik“ gehört, in der die zentralen fachlichen Inhalte (CCK, SCK) bereits vermittelt wurden, auch die Software *Fathom* wurde schon kennengelernt (TCK). Entsprechend liegen die Ziele dieser Veranstaltung auf der Reflektion des fachlichen und technologischen Wissens aus der Grundstudiumsveranstaltung sowie der Verknüpfung dieser Wissensbereiche mit dem fachdidaktischen Wissen im Sinne einer ganzheitlichen Verknüpfung dieser. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem Einsatz von Technologie im Statistikunterricht der Sek. I.

Die zentrale Idee des didaktischen Konzepts ist, dass sich die Studierenden mit exemplarischen Aufgabenstellungen aus der Statistik der Sek. I auseinander setzen. Die Studierenden sollen dann zunächst die Aufgabe lösen und ihren eigenen Lösungsprozess reflektieren. Mit Hilfe des vorgestellten Modells zum Professionswissen sollen die Studierenden die Aufgabe nach ihrem fachlichen, technologischen und (fach-) didaktischen Potential analysieren. Auf Grundlage der Analyse wird die Aufgabe von den Studierenden dazu erweitert, eine substantielle Lernumgebung nach Wittmann (1995) zu konstruieren. Dieser Prozess der Aufgabenanalyse und Erweiterung der Aufgabe wird an exemplarischen Aufgaben über das gesamte Seminar hinweg wiederholt. Dabei wird auf Grundlage des Cognitive Apprenticeship zunächst die Analyse dozentenorientiert durchgeführt und schrittweise durch die Übernahme von Teilaspekten auf die Studierenden übertragen. Dadurch können die Studierenden schrittweise die Analyse erlernen, haben jedoch immer den gesamten Analyseprozess im Blick.

4. Beispiel einer Aufgabe zur Entwicklung einer substantiellen Lernumgebung

Die Aufgabe in Abbildung 2 wird hier als ein Beispiel dienen, den Erwartungshorizont für die Analyse durch die Studierenden zu formulieren.

Aufgabe: Deal or No Deal

In der Fernseh-Spielshow Deal or No Deal wählt der Kandidat einen aus 26 Koffern, alle mit unterschiedlichen Geldbeträgen gefüllt. Die 26 Geldbeträge (Stand 2008) sind hier aufgeführt:

0,01 €	0,20 €	0,50 €	1,00 €	5,00 €	10,00 €	20,00 €
50,00 €	100,00 €	200,00 €	300,00 €	400,00 €	500,00 €	1.000,00 €
2.500,00 €	5.000,00 €	7.500,00 €	10.000,00 €	12.500,00 €	15.000,00 €	20.000,00 €
25.000,00 €	50.000,00 €	100.000,00 €	150.000,00 €	250.000,00 €		

a) Berechne den Median der Geldbeträge.
b) Ohne weiteres Rechnen: Wo liegt das arithmetische Mittel im Vergleich zum Median? Erläutere Deine Antwort.
c) Nutze Fathom um den Median und das arithmetische Mittel der Geldbeträge zu berechnen.
d) Wurden Deine Überlegung in Aufgabenteil b bestätigt? Liegen arithmetisches Mittel und Median nahe beieinander? Erkläre, warum das Sinn macht.
e) Wie viele Geldbeträge und wie viel Prozent der Geldbeträge liegen unterhalb des arithmetischen Mittels?
f) Wie viele Geldbeträge und wie viel Prozent der Geldbeträge liegen unterhalb des Medians?
g) Mit welchem Mittelwerte (arithmetisches Mittel oder Median) sollten die Produzenten werben, um den Eindruck zu vermitteln, es seien große Geldbeträge zu gewinnen? Begründe.

(nach Rossmann, Chance & Lock 2009: Workshop Statistics. S. 143)

Abbildung 2: Aufgabe „Deal or No Deal"

Auf der Ebene des *Knowledge of Curriculum* (KC) sind zwei zentrale Elemente der Aufgabe zu identifizieren: Zum einen handelt es sich im Sinne des Statistical Literacy um einen authentischen Kontext, zum anderen liegt der Fokus der Aufgabe auf den Begriffen arithmetisches Mittel und Median. Es geht um die Beziehung der Mittelwerte im Kontext von Verteilungen im Gegensatz zu einer reinen Berechnung dieser Werte. Im Sinne des *Knowledge at the mathematical Horizon* (HK) ist zu erkennen, dass in dieser Aufgabe der manipulative Gebrauch von Statistik in der Gesellschaft thematisiert wird.

Die Anforderungen an das *Common Content Knowledge* (CCK) für die Aufgabe sind die Berechnung des Medians bzgl. einer gegebenen Datenreihe sowie das Wissen über das Verhältnis von arithmetischem Mittel und Median sowie die mathematischen Erklärungen. In Bezug auf die Berechnung des Medians sticht hervor, dass in dieser Aufgabe der Median genau 50% der Werte kleiner und genau 50% der Werte größer als der Median sind. Im Sinne des *Special Content Knowledge* (SCK) muss auffallen, dass dies ein vereinfachter Sonderfall durch eine gerade Anzahl von Datenwerten ohne Bindungen ist. Des Weiteren gehören zum SCK, die Eigenschaften von arithmetischem Mittel und Median sowie deren Verhältnis zueinander auf einem für die SuS angemessenen Level erklären zu können. *Technological Content Knowledge* (TCK) wird hier von der Lehrenden zur Berechnung des arith. Mittel und des Median mit der Software Fathom benötigt. *Knowledge of Content and Students* (KCS) liegt bei dieser Aufgabe im Wissen über die Fehlvorstellung von SuS, dass genau 50% der Daten kleiner bzw. größer sind als der Median. *Knowledge of Content and Teaching* (KCT) beschäftigt sich mit der Frage des möglichen Einsatzes der Aufgabe: (1) als Anwendungsaufgabe zur Vertiefung des Wissens der SuS über Mittelwerte und (2) als entdeckende Aufgabe zum Verhältnis der beiden Mittelwerte zueinander. Die Kompetenzkategorie *Technological Pedagogial Content Knowledge* (TPCK) wird in dieser Aufgabe insofern gefordert, als dass Möglichkeiten zum Einsatz von Technologie gefunden werden, die das Verständnis der zentralen Ideen der Aufgabe fördern. Z.B. könnte der beschrieben Datensatz samt den Mittelwerten mit Hilfe von Fathom visualisiert werden und anhand der Visualisierung die Unterschiede erläutert werden. Hier muss sich der Lehrende jedoch im Klaren sein, dass der Einsatz von computergestützten Visualisierungen so erfolgt, dass die Vorstellungskraft der SuS bzgl. einer Verteilung entwickelt und nicht ersetzt wird.

5. Ausblick

In diesem Beitrag wurde auf Basis eines Modells zum Professionswissen ein Konzept eines Seminars präsentiert, welches sich auf die Entwicklung von substantiellen Lernumgebungen nach Wittmann stützt. Dieses Konzept wurde an einem Beispiel in Teilaspekten verdeutlicht. Im nächsten Schritt des Dissertationsprojekts wird es darum gehen, das Seminar inhaltlich weiter zu planen und durchzuführen. Parallel zur Durchführung wird es eine Studie geben, die sich mit der Frage nach den Kompetenzen und Beliefs von Studierenden vor und nach der Lehrveranstaltung befasst.

Literatur

Ball, D. L., & Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education, 59(5), S. 389-407.

Mishra, P. & Koehler, M.J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. Teachers College Record, 108(6), S. 1017-1054.

Rossmann, A, Chance, B.L. & Lock, R.H. (2009): Workshop Statistics. Discovery with Data. 3Rd Edition. Key College Publishing.

Shulmann, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. Educational Researcher, 15(2), S. 4-14.

Wassong, Th. & Biehler, R. (2010): A Model for Teacher Knowledge as a Basis for Online Courses for Professional Development of Statistics Teacher. In: Reading, C. (Hrsg.). Proceedings of ICoTS 8, Ljubljana, July 2010. Voorburg: IASE (CD-ROM). Abgerufen am 15. März 2011 unter http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots8/ICOTS8_3C1_WASSONG.pdf

Wassong, Th. & Biehler, R. (2010): Statistik lehren online lernen – Ein Modell für Lehrerkompetenz als Basis einer Online-Lehrerfortbildung für Statistik in der Sekundarstufe I. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. S. 915-918.

Wittmann, E. Chr. (1995): Mathematics Education as a 'Design Science'. Educational Studies in Mathematics, 29 (4), S. 355-374.

Christof WEBER, Basel

Kopfgeometrie – ein Aufgabenformat wandelt sich

Kopfgeometrische Aufgaben leiten dazu an, einen geometrischen Sachverhalt gedanklich zu visualisieren. Auf der Grundlage von mentalen Bildern und Handlungen – den Vorstellungen – ist dann ein Problem zu bearbeiten, ohne darstellende Hilfsmittel (Gegenstände, Notizen etc.) einzusetzen. Je nach methodischer Gestaltung sind bei der Präsentation der Problemstellung (durch die Lehrperson) oder bei der Präsentation der Bearbeitung (durch die Lernenden) Hilfsmittel zugelassen oder auch nicht.

Kopfgeometrie hat seit langem ihren fest Platz im Mathematikunterricht, und dies nicht nur in der Mittelschule. Sie wurde in verschiedenen Zeiten sehr verschieden charakterisiert und begründet. Dieser Beitrag gibt zuerst einen kurzen historischen Überblick über Formen und Ziele von „Mathematik im Kopf" und stellt dann einige neuere Entwicklungen vor.

1. Eine nicht unkritische *tour d'horizon* durch die Geschichte

Unter den Begründungen für die Bedeutung von Kopfgeometrie lassen sich folgende drei Argumentationslinien ausmachen:

- „Entfaltung der Kräfte der Raumanschauung"
- „Steigerung mehrerer Faktoren der räumlichen Intelligenz"
- „Verbesserung der Problemlösekompetenz"

Je nach Begründung sieht auch das kopfgeometrische Aufgabenformat anders aus. Im Folgenden werden die beiden ersten Argumentationslinien vorgestellt, die dritte kann hier aus Platzgründen nicht beschrieben werden.

Zur „Entfaltung der Kräfte der Raumanschauung"

Johann Pestalozzi fordert in seinem „ABC der Anschauung" (1803), die „Kräfte der Raumanschauung" von Kindern zu entfalten. Dazu legt er ihnen Tabellen von Linien und Quadraten vor (Abb. in Treutlein 1911, 17) und animiert sie zu Nachsprechübungen („die erste waagrechte Linie ist kürzer als die zweite" usw.). Für den Pädagogen Pestalozzi ist die Geometrie also ein Mittel zum Zweck, die „Raumanschauung" auszubilden. Geometrie stellt für ihn keinen fachlichen Lerninhalt dar, vielmehr misst er ihr einen formalen Bildungswert bei. Dennoch fokussieren unter seinem Einfluss auch Lehrerbildner wie Jakob Steiner (Absolvent von Pestalozzis Institut) und Adolf Diesterweg auf die „Ausbildung der inneren Anschauung". Von ihnen wird berichtet, wie sie in ihren mathematischen Lehrveranstaltungen auf veranschaulichende Hilfsmittel verzichtet und geometrische Inhalte rein sprachlich beschrieben – und damit eine frühe Form von Kopfgeometrie begründet haben (Klein 1926, 128; Treutlein 1911, 113).

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wird Pestalozzis Forderung von Felix Klein und den Meraner Reformern aufgegriffen und umgedeutet. Der (gymnasiale) Mathematikunterricht muss nun nicht mehr nur der „Stärkung des Anschauungsvermögens“ dienen, sondern auch zur „Gewohnheit des funktionalen Denkens“ erziehen. Ziel ist, im Unterricht weniger Spezialkenntnisse zu vermitteln und dafür – im Sinne einer Konzentration auf das Wesentliche – die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Teilbereichen bewusst zu machen. Mit der Aufnahme von Lerninhalten (etwa des Funktionsbegriffs oder der Infinitesimalrechnung) in die Lehrpläne verfolgt die Meraner Reform neben formalen Bildungszielen dezidiert auch materiale Ziele (Krüger 2000). In Folge dieser Reform erscheinen Publikationen mit ersten kopfgeometrischen Aufgaben. So modelliert Peter Treutlein in seinem propädeutischen Geometrielehrbuch „Luftwürfel“ und verwendet (erstmals?) den Begriff „Kopfgeometrie“ (1911, 123, 113). Bruno Kerst geht noch einen Schritt weiter und beschreibt, wie er kopfgeometrische Aufgaben im Unterricht einsetzt und welche Folgen dies hat (Kerst 1920).

Zur „Steigerung mehrerer Faktoren der räumlichen Intelligenz“

Zur gleichen Zeit werden in den USA große Anstrengungen unternommen, die menschliche Denkfähigkeit zu operationalisieren, um sie messen zu können. Dem Psychometriker Louis Thurstone gelingt es 1938 mittels einer Faktorenanalyse von empirischen Daten, sieben „Primärfaktoren“ der Intelligenz auszumachen (Maier 1999). Einer dieser Faktoren ist „space“, das „Vorstellungsvermögen“ bzw. die „Raumvorstellung“. Dieser Faktor erfasst die Fähigkeit, gedanklich mit zwei- oder dreidimensionalen geometrischen Objekten zu operieren. Er wird später von Thurstone weiter in „visualization“, „spatial relations“ und „spatial orientation“ ausdifferenziert. Diese Teilfaktoren werden üblicherweise durch die Angabe von entsprechenden Testaufgaben charakterisiert, in denen geometrische Objekte graphisch dargeboten und gedanklich manipuliert werden müssen (ebd., 34ff.).

Mit dem Siegeszug des Intelligenzkonstrukts und der Subsumption des „Vorstellungsvermögens“ unter die Intelligenz wird die Relevanz von Kopfgeometrie nicht mehr bestritten. Dadurch entsteht aber auch die Gefahr, dass ihr Gewinn primär in der „Steigerung der räumlichen Intelligenz“ bzw. im „Training des Vorstellungsvermögens“ gesucht wird. Kopfmathematische Aufgaben gleichen sich dann an Intelligenztestaufgaben an mit dem Ergebnis, dass mathematische Themen und deren Verständnis zu kurz kommen. Damit gerät die Kopfmathematik wieder in die Nähe eines formalen Bildungsideals des 19. Jahrhunderts.

Diskussion

Dass Kinder im Intelligenztest besser abschneiden, nachdem sie entsprechende Aufgaben geübt haben, ist wahrscheinlich. Dass sie ergo ihre „Intelligenz" gesteigert haben, liegt in der Natur der Sache (und wird neudeutsch „teaching the test" (!) genannt). Nur: Welches Stück Mathematik kann oder weiß ein Kind, nachdem es wiederholt Intelligenztestaufgaben bearbeitet hat? Was hat es deshalb verstanden? Kann es deshalb auch andere Aufgaben besser lösen?

Gerade vor dem Hintergrund der aktuellen Transferforschung sind hier Zweifel angebracht. So scheinen Wissen und Können sehr viel bereichsspezifischer zu sein als man sich das als Lehrperson wünschen mag. So wenig wie Latein logisches Denken trainiert, so wenig nutzt das wiederholte Lösen eines Aufgabentyps dem Lösen eines anderen. Folglich verbessert sich weder das allgemeine „Vorstellungsvermögen" noch die „Problemlösekompetenz" (für eine aktuelle Studie siehe Owen et al. 2010).

Damit stellt sich die Frage, wie gedankliches Visualisieren aussehen kann, das mathematische Themen thematisiert und ihr Verständnis ermöglicht.

2. Neuere Entwicklungen

In den letzten zehn Jahren wurde die Kopfgeometrie nicht nur hinsichtlich des thematisierten Inhalts weiterentwickelt, sondern auch hinsichtlich der Prozesse, auf die sie zielt.

Inhaltliche Weiterentwicklung

Weil „visualisieren" nichts anderes als „graphisch bzw. visuell darstellen" bedeutet, liegt es nahe, geometrische Inhalte zu thematisieren und Kopfgeometrie zu machen. Allerdings lassen sich auch Inhalte aus nichtgeometrischen Teilgebieten visualisieren, so zum Beispiel die Addition von Zahlen als das Aneinanderfügen von Längen oder die Konvergenz einer geometrischen Reihe als das stückweise Färben einer festen Strecke. Mit anderen Worten können auch nichtgeometrische Inhalte thematisiert und für *Kopfmathematik* genutzt werden. In der Grundschule spricht man auch vom „Sachrechnen im Kopf" (Wittmann / Müller 2008).

Bereits Kerst hat auf die Rolle auch von „taktilen", nichtvisuellen Vorstellungen hingewiesen (Kerst 1920). Von Bauersfeld und O'Brien stammt „Mathe mit geschlossenen Augen" (2002), kopfmathematische Aufgaben zum Üben des taktilen, nichtvisuellen Erfassens von Zahlen und Formen.

Prozessuale Weiterentwicklung

Zur Auseinandersetzung mit Mathematik gehört nicht nur das Problemlösen, sondern auch das Modellieren, Argumentieren sowie Begriffsbilden. Entsprechend unterscheidet man Aufgaben zum Erkunden und Erfinden, Aufgaben zum Sammeln und Systematisieren sowie Aufgaben zum Üben und Reflektieren (Büchter / Leuders 2005). Deshalb kann auch Kopfmathematik mehr als Probleme stellen, die vorstellungsbasiert zu lösen sind.

Mit *mathematischen Vorstellungsübungen* (Weber 2010) liegen kopfmathematische Aufgaben vor, die auf unterschiedliche Prozesse zielen. Auch sie können ein Problem beschreiben, ohne dass in der beschriebenen Situation eine Strategie zu dessen Lösung vorgegeben wird: Sobald die Situation vergegenwärtigt ist, kann experimentiert, entdeckt und vermutet werden. Sie können aber auch schrittweise dazu anleiten, Objekte gedanklich zu konstruieren, zum Beispiel ein Ikosaeder oder Würfelquerschnitte. Dann zielen sie auf das Verfügbarmachen und Explorieren eines Themas.

Ein weitere Gruppe von Vorstellungsübungen liefert ein Plausibilitätsargument für einen Sachverhalt, etwa dass die Reihe 1/3 + 1/9 + 1/27 + … den Wert 1/2 hat. Sie stoßen Prozesse des plausiblen Schließens und präformalen Begründens an und unterstützen so Verstehensprozesse. Schließlich können sie auch einen kontraintuitiven (paradoxen) Sachverhalt beschreiben. Hierbei werden kognitive Konflikte angeregt, um mathematische Konzepte und Begriffe zu reflektieren und verstehen.

Damit ist die Weiterentwicklung der Kopfmathematik keineswegs am Ende. Wohin uns die mathematikdidaktische Zukunft weiter führen wird?

Literatur

Bauersfeld, H. / O'Brien, T. (2002): *Mathe mit geschlossenen Augen.* Verlag a. d. Ruhr.

Büchter, A. / Leuders, T. (2005): *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Leistung fördern, Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Kerst, B. (1920): Kopfgeometrie. In: *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen*, 51, 217–223.

Klein, F. (1926): *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Berlin: Springer (erhältlich unter *http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/*)

Krüger, K. (2000): *Erziehung zum funktionalen Denken*. Berlin: Logos.

Maier, P. (1999): *Räumliches Vorstellungsvermögen*. Donauwörth: Auer.

Owen, A. et al. (2010): Putting brain training to the test. In: *Nature*, 465, 775–778.

Treutlein, P. (1911): *Der geometrische Anschauungsunterricht*. Leipzig und Berlin: Teubner. (erhältlich unter *http://name.umdl.umich.edu/ABN2464.0001.001*)

Weber, C. (2010): *Mathematische Vorstellungsübungen – ein Handbuch für das Gymnasium*. Seelze: Klett und Kallmeyer.

Wittmann, E. / Müller, G. (2008): *Sachrechnen im Kopf*. Zug: Klett und Balmer.

Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz

Begriffsbildung mit tätigkeitstheoretischen Methoden

Angenommen unsere Mathematiklehramtsstudenten haben im Alltag weder die Gewohnheit noch die Notwendigkeit, Bedienungsanleitungen zu lesen. Angenommen, gute Fähigkeiten beim Mustererkennen und Jonglieren mit automatisiertem Faktenwissen garantierten ihnen in der Schule Erfolg, im speziellen in Mathematiktests (wir setzen hier ein outputorientiertes Bildungssystem voraus). Würden ihnen ihre Routinen und im Alltag funktionierende Erfolgsstrategien wie Versuch-Irrtum-Methoden und Musterübertragung auch in einem kanonischen Mathematiklehramtsstudium helfen?

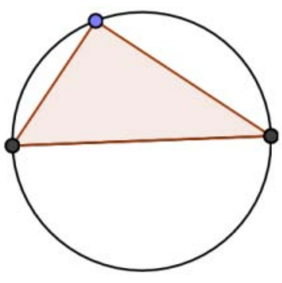
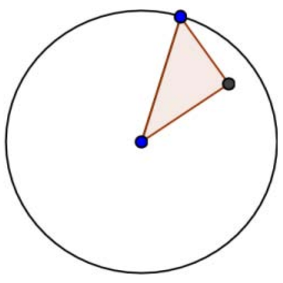
Wohl eher nicht. Mathematik- und Didaktikvorlesungen basieren auf konstruktivistischen Herangehensweisen und dem systematischen Aufbau von Wissen. In Veranstaltungen zur linearen Algebra stehen Klassifikationen im Vordergrund; die Differential- und Integralrechnung beschäftigt sich mit der Formalisierung und dem Beweis von Eigenschaften und Methoden. Wenn die den Klassifikationen zugrunde liegenden Fragen überhaupt untersucht werden, sind sie meistens das Resultat einer längeren Instruktion. In den meisten Veranstaltungen bekommt der Student Antworten in der Form von Merkmalslisten, die in kaum einem Zusammenhang mit den isolierten, an bildhafte und symbolische Vorstellungen gebundenen Konzepten der Schulzeit stehen.

Ein erster Ansatz von Antworten und Merkmalslisten zu Fragen zu kommen, besteht in der Suche nach Perspektivwechseln, die eine vorhandene Präsentation eines mathematischen Objekts in Frage stellen – z.B. durch die Nutzung im dialektischen Sinn gegensätzlicher Konzeptualisierungen und deren Dynamik.

1. Übung in dialektischen Gegensätzlichkeiten

Zur Vorbereitung sollten sich die Lehramtsstudenten anhand von Lehrbüchern einen Überblick über mögliche Darstellungen der Trigonometrie verschaffen. Auf meine Frage, welchen Begriff dieses Gebietes sie für wesentlich halten, kam als Antwort „die Sinusfunktion“, begleitet von einer wellenförmigen Bewegung der Hand. Die Zeichnung einer Kurve an der Tafel wurde mit *da müsse noch ein Koordinatensystem hin und 0 in 0* kommentiert. Das Zuordnungsargument aufgreifend erfolgte die Frage nach weiteren konkreten Werten der Sinusfunktion. Die Antwort lautete, *dass da noch ein Kreis mit einem rechtwinkligen Dreieck hinmüsse*. In diesem Fall wurde die bildhafte Vorstellung 'Kurve' mit der Vorstellung 'punktweise Zuordnung' konfrontiert. Letztere war mit der Berechnung der Werte mithilfe eines rechtwinkligen Dreiecks gekoppelt. Es erfolgte ein Wechsel von der

Darstellung des funktionalen Zusammenhangs in Koordinaten durch den Graphen zur Darstellung ohne Koordinaten.

	Die kanonische Art ein rechtwinkliges Dreieck in einen Kreis zu zeichnen, traf auf Widerspruch, *ein Eckpunkt müsse im Zentrum liegen*. Die Umsetzung (rechts) wurde korrigiert: *Es handele sich um die Koordinatendreiecke eines Punktes auf dem Einheitskreis.*	

Die angesprochenen Bilder geben u.a. Spielraum, eine Dynamik zwischen Äquivalenzklassen und Repräsentanten in der Ähnlichkeitsgeometrie oder zwischen Trigonometrie an Sehnen (wie auch historisch geschehen) und anderen möglichen Definitionen von Winkelfunktionen anzustoßen.

Ein anderes Beispiel für Perspektivwechsel bekommt man durch einen kognitiver Ansatz: den Wechsel zwischen prädikativen und funktionalen Konzepten (Schwank, 2003).

Um möglichst viele duale Perspektiven nutzen zu können, wählen wir einen tätigkeitstheoretischen Rahmen, den wir im folgenden Abschnitt erläutern. Im letzten Abschnitt geben wir Beispiele zum Perspektivwechsel zwischen Tätigkeiten, in denen mathematische Objekte als Untersuchungsgegenstände auftreten und Tätigkeiten, in denen sie vermittelnde Werkzeuge (Problemlösemethode) sind.

2. Zum theoretischen Rahmen

Die meisten Modellbildungen in der Lehr- und Lernforschung versuchen eine Integration zweier anscheinend gegensätzlicher Modelle: des kognitivistischen Modells und des konstruktivistischen durch die Fokussierung auf Lernumgebungen; einen Überblick findet man z.B. bei Reinmann-Rothmeier & Mandl (2006). Neue Modelle entstehen dabei durch die Betrachtung neuer Parameter, Relationen, Abhängigkeiten in oder zwischen den polarisierten und daraus entwickelten Modellen. Vom mathematischen Standpunkt ähnelt diese Theoriebildung der Untersuchung strukturierter Mengen und bewegt sich auf der Reflexionsebene der zu untersuchenden Objekte und ihrer charakteristischen Merkmale. Mit anderen Worten, wir befinden uns in der diskreten Welt der Algebra. Diese Herangehensweise bleibt trotz konstruktivistischer Ansätze statisch, da die Konstruktionen der Abläufe kausal durch Anfangszustände und Nebenbedingungen bestimmt sind. Beispiele von Modellen, die durch Integration neuer Parameter und Elemente in die Lernumgebungen entstehen, sind selbstgesteuertes und kooperatives Lernen, problemorientiertes Lernen, Berücksichtigung von Grundvorstellungen, dialogisches Lernen. Beispiele integrierter Modelle, die vom kognitivistischen Standpunkt kommen, sind APOS und didaktisches Engineering.

Tätigkeitstheorie nimmt eher eine Perspektive ein, die man *topologisch* nennen könnte. Im Gegensatz zu konstruktivistischen Ansätzen wird nicht davon ausgegangen, dass man einen konkreten Ablauf rekonstruieren oder sogar voraussagen kann. Man geht davon aus, dass man sehr komplexe, gleichzeitig stattfindende, voneinander abhängige, kulturhistorisch bedingte und sich ständig in Entwicklung befindende Tätigkeiten eher durch die Prinzipien, welchen ihre Dynamik unterliegt, verstehen kann. In diesem Ansatz werden vielmehr Faktoren untersucht, die eine Dynamik begleiten oder unterstützen, als konkrete Entwicklungen nachvollzogen oder vorausgesagt. Durch diesen globalen Ansatz können topologische Ideen wie Abstand, Nähe, Übertragungen, Lokalisierung, Globalisierung, Erhaltungsgrößen sinnvoll interpretiert werden.

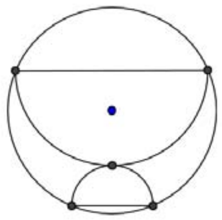
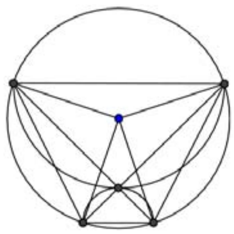
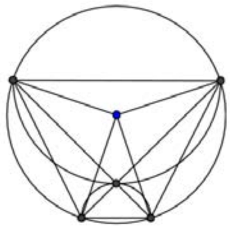
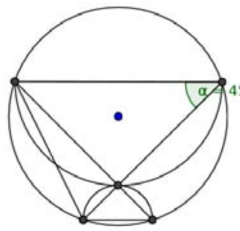
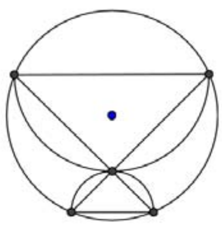
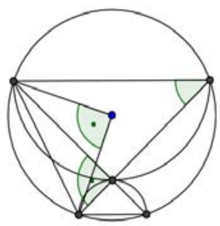
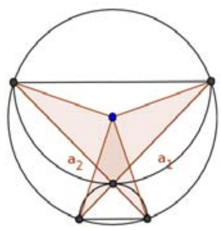
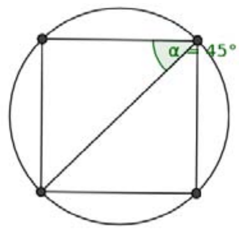
Ein mathematisches Konzept kann in einer Tätigkeit in zwei Positionen auftreten: als vermittelndes Werkzeug (Methode, Formel, …) und als Untersuchungsgegenstand (Teil der mathematischen Sprache, mathematisches Objekt, Regel...). Die Dynamik dieser Dualität wird von Douady (2001) mithilfe didaktischen Engineerings genutzt, um Lernsequenzen zu entwickeln, die durch den Perspektivwechsel zwischen Methode (Werkzeug, Tool) und Objekt ein konzeptuelleres Verständnis algebraischer Begriffe anstreben und den Wechsel zwischen verschiedenen Konzepten erleichtern. Dualistische Prinzipien werden auch in anderen Ansätzen genutzt, um Entwicklung konstruktivistisch zu modellieren, wie das Drei-Welten-Modell von David Tall oder dialektische Dualitäten bei David Kolb.

3. Beispiele zum Perspektivwechsel

Um verschiedene Konzeptualisierungen vorhandener Vorstellungen eines mathematischen Objekts nutzen zu können, ist es nützlich, mögliche Entstehungsprozesse und damit verbundene Qualitäten mathematischer Bewusstheit zu untersuchen. Diese Herangehensweise wird am Beispiel der Variablensubstitution in Kaenders et al. (2011) skizziert.

Schließlich zeigen wir noch an einem Beispiel Möglichkeiten des Perspektivwechsels auf, die durch verschiedene Methoden, sowie den Wechsel von Objekt und Werkzeug beim Lösen von Aufgaben entstehen.

Gegeben ist die folgende (erste) Zeichnung. Schon die Frage nach den Verhältnissen der Flächen der Halbkreise kann als Instruktion gestellt oder dem Schüler überlassen sein (Sangaku). Weitere Perspektivwechsel sind z.B. geometrisch/algebraisch, euklidisch/abbildungsgeometrisch und die unten dargestellten Aspekte.

			
Konstruktion/ Berechnung Analyse/ Synthese	Objekt/ Werkzeug Geometrische Objekte/ Satz vom Umfangswinkel	Spiegel-symmetrie/ Rotation prädikativ/ funktional	Satz vom Umfangswinkel/ Umkehrung prädikativ/ funktional
			

Viel Spaß beim Lösen der Knobelaufgabe!

Literatur

Artigue, M.,Assude, T., Grugeon, B., Lenfant A.(2001): Teaching and learning algebra, approaching complexity through complementary perspectives. The Future of the teaching and learning of algebra (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference), 21-32, Melbourne.

Kaenders, R. Kvasz, L., & Weiss-Pidstrygach, Y. (2011): Recovering Mathematical Awareness by linguistic analysis of Variable substitution. Proceedings CERME 7.

Reinmann, G.,Mandl, H. (2006): Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In:Krapp, A./Weidenmann, B. (Hrsg.): Pädagogische Psychologie, Weinheim: Beltz PVU, S. 613-658.

Schwank, I. (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In I. Schwank: ZDM-Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik', 70-78.

Katharina WESTERMANN, Nikol RUMMEL, Ruhr-Universität Bochum,
Lars HOLZÄPFEL, Pädagogische Hochschule Freiburg

Lernen durch kooperatives Erarbeiten von Lösungsansätzen ohne vorangehende Instruktion

1. Problemlösen ohne vorangehende Instruktion

Um die Kompetenzen des mathematischen Argumentierens und Kommunizierens zu fördern, wurden in den letzten Jahren Unterrichtskonzepte entwickelt, die das eigenständige Aneignen mathematischer Inhalte anhand geeigneter sinnstiftender Aufgabenstellungen ermöglichen (siehe z.B. Leuders, Hußmann, Barzel & Prediger, 2011). Die Idee dieser Unterrichtskonzepte besteht darin, den Schülern aus ihrer Lebenswelt bekannte Situationen darzubieten, aus denen heraus sie dann mittels formellem und informellem Vorwissen einen bislang noch unbekannten mathematischen Sachverhalt erarbeiten. Der Einsatz kooperativer Lernformen erweist sich in diesem Zusammenhang als förderlich, weil hierdurch eine aktive und argumentative Auseinandersetzung erfolgt (Renkl, 2008). Durch das Einbringen von formellem und informellem Vorwissen kommt es bei der eigenständigen Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten häufig zu fehlerhaften (d.h. nicht mit der Norm übereinstimmenden) oder unvollständigen Lösungsansätzen (Prediger & Wittmann, 2009). Diese unvollständigen beziehungsweise fehlerhaften Lösungsansätze können allerdings eine produktive Basis für das weitere Lernen sein: Kapur (2009) konnte in mehreren Studien zeigen, dass Schüler/innen, die eigenständig in Kleingruppen Lösungsansätze generierten *bevor* sie Erklärungen durch die Lehrperson erhielten, in Nachtests besser abschnitten als Schüler/innen, die zuerst Instruktion erhielten und anschließend kooperativ Übungsaufgaben bearbeiteten. Selbstständige Problemlöseversuche bieten offenbar eine fruchtbare Grundlage für nachfolgende Instruktion. Kapur (2009) bezeichnet diesen Lernansatz daher als *Productive Failure*.

2. Studiendesign

In einer aktuellen quasi-experimentellen Studie werden die folgenden Fragen untersucht: Bewährt sich der Lernansatz Productive Failure auch mit deutschen Schüler/innen? Ist das eigenständige Generieren von Lösungsansätzen förderlich für das Lernen des mathematischen Inhalts in einer nachfolgenden Instruktionsphase? Welche Form der Unterstützung benötigen Schüler/innen um in lernförderlicher Weise eigenständig Lösungsansätze zu generieren?

Studienteilnehmer sind Gymnasialschüler/innen der 10. Klasse. Als Inhaltsgebiet dient das Konzept der Varianz, da Schüler/innen hier in der Regel bereits erste formelle sowie informelle, intuitive Vorstellungen haben. In einer Beispielaufgabe wird der zuverlässigste Fußball-Torschütze der letzten 10 Jahre gesucht. In der Studie werden vier Bedingungen verglichen: In einer regulären *Productive Failure* Bedingung (PF) bearbeiten die Schüler/innen in Dreiergruppen ein Problem ohne vorangehende Instruktion. Dabei erhalten sie keine inhaltliche Unterstützung. In einer *unterstützten Productive Failure* Bedingung (PF+) erhalten die Schüler/innen zu ihren Lösungsansätzen Gegenbeispiele, die eine vertiefte Elaboration anregen sollen. In einer nachfolgenden Instruktionsphase werden in beiden Productive Failure Bedingungen basierend auf typischen Schülerlösungen das Konzept und die Formel der Varianz hergeleitet. Beide Productive Failure Bedingungen wurden von Kapur in seinen Studien eingesetzt, jedoch bislang nie experimentell verglichen. Der Vergleich ermöglicht Aussagen darüber, ob die Gegenbeispiele in der PF+ Bedingung einen zusätzlichen Lerneffekt haben. Als Kontrollgruppen dienen zwei Bedingungen mit direkter Instruktion: In der *Direkte Instruktions*-Bedingung (DI) analog zu Kapurs Kontrollgruppe werden zunächst das Konzept und die Formel der Varianz durch die Lehrperson eingeführt. Anschließend lösen die Schüler/innen Übungsaufgaben in Kleingruppen. In einer zweiten *Direkte Instruktions*-Bedingung (DI+) werden das Konzept und die Formel der Varianz vom Lehrer/von der Lehrerin vor dem Hintergrund von Beispielen typischer fehlerhaften Schülerlösungen eingeführt. Die Instruktion stimmt folglich mit der Instruktion in den Productive Failure Bedingungen überein, findet aber zu Beginn der Lernphase statt. Anschließend lösen die Schüler/innen ebenfalls Übungsaufgaben in Kleingruppen.

Das Vorwissen wird durch die Mathematiknote und einen Vorwissenstest erfasst. Der Nachtest zur Erfassung des Lernerfolgs beinhaltet konzeptuelle und prozedurale Aufgaben. Es können 13 Punkte erzielt werden (9 Punkte für konzeptuelles Wissen, 4 Punkte für prozedurales Wissen).

Im Folgenden werden erste Ergebnisse einer Teilstichprobe (N = 83) berichtet, die im Rahmen einer größeren Erhebung gesammelt wurden. Die Auswertung der Gesamtstichprobe ist noch nicht abgeschlossen.

3. Ergebnisse der Problemlösephase: Typische Schülerlösungen

Es zeigt sich, dass die Schüler/innen der PF und PF+ Bedingung eine große Anzahl an Lösungsansätzen generieren, die sowohl richtige Vorstellungen als auch Fehlkonzepte beinhalten. Abbildung 1 zeigt typische Beispiele. Eine detaillierte Auswertung der Schülerlösungen steht noch aus.

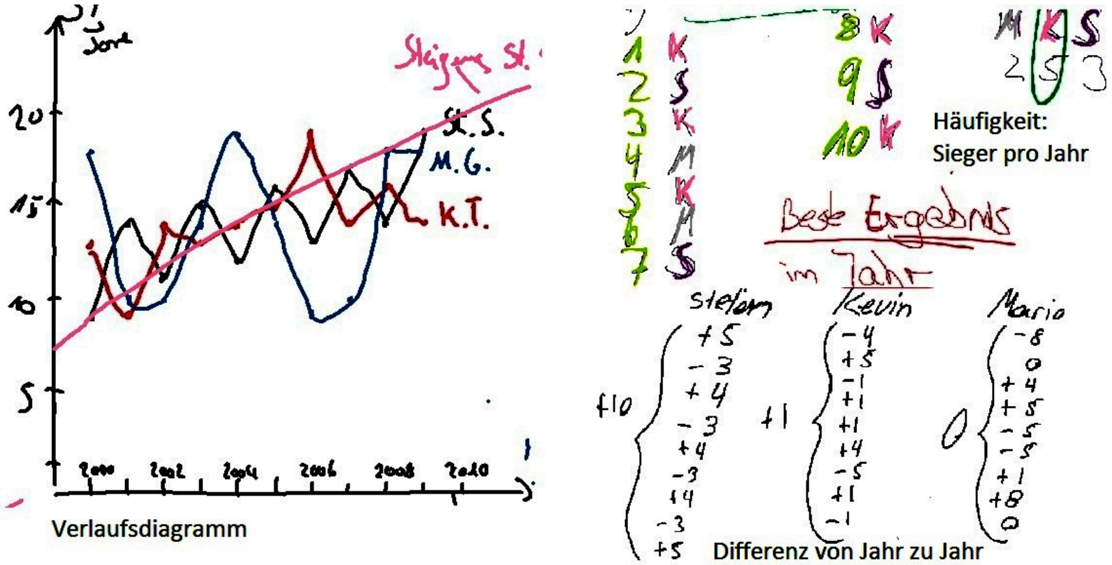


Abbildung 1

4. Ergebnisse im Lernerfolg

In einer MANCOVA mit dem Faktor Bedingung und den Kovariaten Mathematiknote und Vorwissenstest zeigt sich zwischen den Bedingungen ein signifikanter Unterschied ($F(5, 77) = 9.127$, $p = .000$). Wie Abbildung 2 zu entnehmen ist, schneiden die Schüler/innen der PF+ Bedingung im Nachtest am besten ab, gefolgt von denjenigen der PF Bedingung. Die Schüler/innen der DI Bedingung erzielen am wenigsten Punkte.

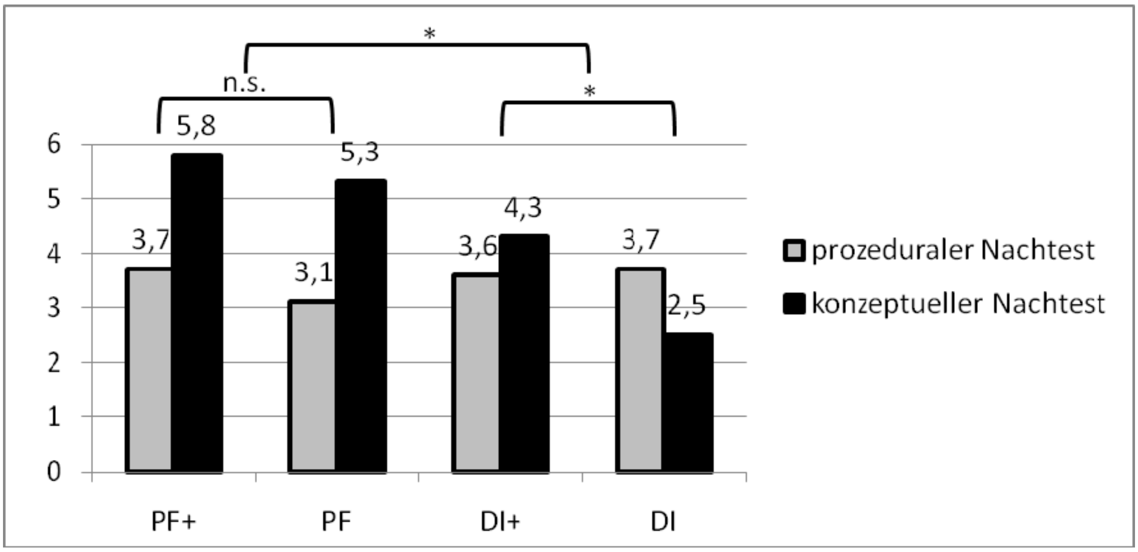


Abbildung 2

A priori Kontraste ergeben einen signifikanten Unterschied zwischen den PF Bedingungen und den DI Bedingungen ($F(1, 77) = 16.727$, $p = .000$) sowie einen signifikanten Unterschied zwischen DI+ und DI ($F(1, 77) = 8.038$, $p = .006$). Es ergibt sich kein signifikanter Unterschied zwischen

PF+ und PF ($F(1, 77) = 1.542$, $p = .218$). Die Unterschiede zwischen den Bedingungen sind insbesondere im konzeptuellen Wissen zu erkennen ($F_{konzeptuell}(5, 77) = 13.663$, $p = .000$). Die erzielten Werte für prozedurales Wissen unterscheiden sich zwischen den Bedingungen nicht signifikant ($F_{prozedural}(5, 77) = 1.541$, $p = .187$, n. s.).

5. Fazit und Ausblick

Insgesamt zeigen die ersten Ergebnisse unserer Studie, dass eigenständiges Problemlösen und Generieren von Lösungsansätzen mit nachfolgender Instruktion auch bei deutschen Schüler/innen zu einem besseren Lernerfolg führen kann als anfängliche Instruktion mit nachfolgendem Üben. Dieser Befund ist insbesondere deshalb interessant, da beim eigenständigen Problemlösen viele fehlerhafte Lösungsansätze generiert wurden. Auch in der direkten Instruktions-Bedingung (DI+) erweist sich die Herleitung des mathematischen Konzepts basierend auf fehlerhaften Schülerlösungen als lernförderlich. In den laufenden Auswertungen gehen wir der Frage nach, welche selbstgenerierten Lösungsansätze zu dem Lernerfolg beitragen. Ergebnisse einer aktuellen Studie von Wiedmann, Wiley und Rummel (2011) deuten darauf hin, dass für den Lernerfolg weniger die Qualität der selbstgenerierten Lösungsansätze ausschlaggebend ist, als vielmehr die Anzahl der unterschiedlichen ausprobierten Lösungsansätze, auch wenn die Schüler/innen dabei fehlerhaftes Vorwissen explizieren und zur Lösung einsetzen.

Literatur

Kapur, M. (2009). Productive Failure in mathematical problem solving. *Instructional Science, 38*(6), 523-550.

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B., & Prediger, S. (2011). „Das macht Sinn!“ Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 37,* 1-9.

Prediger, S., & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich? *Praxis der Mathematik in der Schule, 51(27*),1-8.

Renkl, A. (2008). Kooperatives Lernen. In W. Schneider & M. Hasselhorn (Hrsg.). *Handbuch Psychologie, Bd. Pädagogische Psychologie,* 84-94. Göttingen. Hogrefe.

Wiedmann, M., Wiley, J., & Rummel, N. (2011). *Does group composition affect productive failure?.* Poster to be presented at the Junior Researchers of EARLI (JURE). Exeter, UK.

Kirsten WINKEL, Osnabrück

Entwicklungsmechanismen von Metakognition im mathematischen Unterrichtsdiskurs der Grundschule

Der starke Einfluss metakognitiver Aktivitäten wie Planung, Monitoring und Reflexion auf den mathematischen Lernerfolg wurde vielfach belegt und dokumentiert. Obwohl dieser Einfluss sogar stärker ist als der von Intelligenz, bleibt Metakognition in der Schulpraxis weitgehend unbeachtet. Besonders erstaunlich ist dies vor dem Hintergrund, dass die Trainierbarkeit von Metakognition längst empirisch belegt ist. Studien zeigen, dass sich die Effekte eines metakognitiven Trainings insbesondere bei jüngeren und bei rechenschwachen Schülern auswirken. Entwicklungspsychologen fordern daher, das Training von Metakognition in reale unterrichtliche Kontexte der Grundschule zu integrieren und die Entwicklungsmechanismen in Langzeitstudien zu erforschen (u. a. Schneider & Artelt 2010).

Diesen Forschungsforderungen wird in der vorliegenden Untersuchung – entsprechend methodischer Forderungen von Reusser (2008) – im Rahmen eines designbasierten Entwicklungsforschungsprojekts nachgekommen. Theoriegeleitet wird im regulären Mathematikunterricht einer Versuchsklasse über alle vier Grundschuljahre eine metakognitiv-diskursive Unterrichtskultur entwickelt und etabliert. Die zugehörige Dissertation (Winkel, im Druck), die der vorliegende Beitrag zusammenfasst, fokussiert auf alltägliche, videografierte Unterrichtsszenen, in denen das Klassengespräch dominiert. Um die metakognitiven und diskursiven Aktivitäten sowie die Aufforderungen zu ebendiesen Aktivitäten in Schüler- und Lehrerbeiträgen offen zu legen, wird als Analysewerkzeug ein detailliertes, transkriptbasiertes Kategoriensystem angewendet, welches von Cohors-Fresenborg & Kaune (2007) entwickelt wurde. Die transkribierten Szenen werden in der genannten Dissertation nacheinander in jeweils drei Schritten detailliert untersucht. Im ersten Schritt werden alle individuellen Planungs-, Monitoring- und Reflexions-Aktivitäten und alle diskursiven Aktivitäten der Schüler und der Lehrkraft analysiert, interpretiert und entsprechenden Kategorien begründet zugewiesen. Die dabei gewonnenen, vom Unterrichtsgeschehen abstrahierten Kategorisierungs-Daten werden danach zunehmend aggregiert, wodurch im zweiten Schritt Interaktionsmuster und im dritten Schritt quantitative Unterschiede besser sichtbar werden. Basierend auf diesen Analysen der Tiefenstruktur aller Einzelszenen erfolgt schließlich eine ausführliche Diskussion mit Fokus auf drei Fragestellungen. Diese Diskussion wird nachfolgend zusammen gefasst.

Metakognitive Schüleraktivitäten

Durch die detaillierte Analyse mittels des Kategoriensystems wird ein breites Spektrum unterschiedlicher metakognitiver Aktivitäten offen gelegt, zu dem die Grundschüler dieser Versuchsklasse in ihren alltäglichen Unterrichtsdiskursen fähig sind. Schon zu Beginn von Klasse 1 werden weit mehr metakognitive Schüleraktivitäten als entsprechende Lehreraufforderungen oder -aktivitäten sichtbar. Trotz noch geringerer Lehreraktivitäten ab Klasse 2 steigt das Ausmaß der Schüleraktivitäten deutlich an. In den Szenen aus den Klassen 2 bis 4 bedarf durchschnittlich nur jede dritte metakognitive Schülerkategorisierung einer Aufforderung durch die Lehrkraft. Parallel zur Verselbstständigung der metakognitiven Schüleraktivitäten werden die Beiträge anspruchsvoller und komplexer und beziehen sich häufiger und präziser auf das, was zur Debatte steht. Diese Entwicklungen können auf die aktive Mitarbeit fast aller Schüler zurück geführt werden. Aus einem für Klasse 1 typischen Interaktionsmuster, bei dem sich Lehreraufforderungen und passende Schüleraktivitäten oft abwechseln, entwickelt sich ein Interaktionsmuster, bei dem häufig mehrere Schülerbeiträge mit anspruchsvollen und begründeten metakognitiven Kategorisierungen und deutlichen Querbezügen aufeinander folgen. Der analysierte Unterricht weist insbesondere im Vergleich zu veröffentlichten Transkriptausschnitten mit positiver Bewertung (z. B. Klieme et al. 2001, S. 56f.) eine hohe Gesprächskultur und einen intensiven Gebrauch metakognitiver und diskursiver Werkzeuge auf. Die Selbstverständlichkeit, mit der die Schüler ab Klasse 2 diese Werkzeuge einsetzen, wird sichtbar in häufig aufkeimenden und tiefgehenden Diskursen unter Schülern und in gegenseitigen Aufforderungen zur Metakognition, sowie im Förderunterricht einer rechenschwachen, recht stillen Schülerin bei einer anderen Lehrperson.

Evozieren metakognitiver Aktivitäten

Auf der Suche nach möglichen Entstehungsmechanismen stellt sich die Frage, was zum Auftreten dieser ausgiebigen metakognitiven Schüleraktivitäten beiträgt. Bezogen auf ganze Unterrichtsphasen wird ein starker Aufgabeneffekt sichtbar. Beispielsweise gehen in den analysierten Szenen – vereinfachend dargestellt – Aufgaben zur Fehleranalyse mit viel Monitoring einher, eine Aufgabe zu Begriffsabgrenzungen mit viel Reflexion und offene Konstruktionsaufgaben mit einer Mischung aus Planung, Monitoring und Reflexion. Analog zu diesem Aufgabeneffekt wird bezogen auf die Ebene von Beiträgen ein Aufforderungseffekt sichtbar. Gerade zu Beginn von Klasse 1 treten metakognitive Schüleraktivitäten häufig nach entsprechenden Lehreraufforderungen zur Metakognition auf. Beide Effekte sind wenig überraschend und ebenso wenig zwingend, bestätigen aber, dass nicht nur mathematisch-inhaltliche Schüleraktivitäten, sondern ebenso metakognitive Aktivitäten gezielt planbar und beeinflussbar sind. Auf diese Weise werden die Grundschüler von Beginn an darin trainiert, ihr mathematisches Denken offen zu legen, ihr Handeln zu erläutern und es dadurch ihren Mitschülern zugänglich zu machen.

Die beobachteten Effekte legen die Frage nach Konstruktionsprinzipien metakognitionsförderlicher Aufgaben oder Aufforderungen nahe. Hierzu bietet sich das verwendete Kategoriensystem selbst an, weil es explizite Beschreibungen wünschenswerter und beobachtbarer metakognitiver Tätigkeiten enthält. Es kann dadurch nicht nur als Analysewerkzeug, sondern ebenso als Planungswerkzeug verwendet werden, indem eine ausgewählte Tätigkeitsbeschreibung – zugespitzt ausgedrückt – lediglich vom Infinitiv in den Imperativ umformuliert wird; z. B.: „Plane anzuwendende Werkzeuge!“ oder „Überprüfe die Ergebnisse auf Plausibilität!“. Aus derart konstruierbaren, lediglich sprachlich angepassten Aufforderungen zur Metakognition besteht ein Großteil aller Beiträge der Lehrkraft.

Etablieren einer metakognitiv-diskursiven Unterrichtskultur

Blendet man nun all diejenigen Schüleraktivitäten aus, die plausibel über Aufgaben- oder Aufforderungseffekte evoziert sein können, bleiben zu Beginn von Klasse 1 vereinzelte und in den Klassen 2 bis 4 ein Großteil der metakognitiven Aktivitäten übrig. Daher muss – neben der allgemein bedeutsamen Vorbildfunktion der Lehrkraft – nach weiteren Mechanismen gesucht werden, die in ihrer Summe die oben skizzierte Entwicklung vom vereinzelten zum häufigen und unaufgeforderten Einsatz anspruchsvoller metakognitiver Werkzeuge bewirken können. Bislang empirisch wenig untersucht sind Lehrerinterventionen und die damit verbundenen Aushandlungsprozesse (Nührenbörger 2007). Im vorliegenden Unterrichtsversuch stellt sich heraus, dass gerade ihnen ein vielseitiger und langfristiger Einfluss zuzusprechen ist. Aufschlussreich sind insbesondere die Lehrerreaktionen auf diejenigen Schülerbeiträge, die einer vorangegangenen Aufforderung nicht im gewünschten Maße nachkommen, sich nicht hinreichend genau beziehen oder inhaltliche Fehler aufweisen. Über die Kategorisierung wird sichtbar, dass die Lehrkraft der Versuchsklasse nur in den seltensten Fällen inhaltliche Schülerfehler selbst korrigiert oder Fragen selbst beantwortet. Stattdessen zeigen die genannten Lehrerreaktionen deutliche Merkmale einer positiven Fehlerkultur und klare Nachforderungen, die auf ein tieferes Verstehen ausgerichtet sind. Nachgefordert wird, Beiträge genauer auf die Sache zu beziehen, Behauptungen zu begründen oder sie von anderen abzusetzen. Oder es werden Mitschüler zu Stellungnahmen aufgefordert. Durch diese Querbezüge werden nicht nur Aufgaben und Aufforderungen, sondern zudem Beiträge der Schüler als Chancen für wieder neue metakognitive und diskursive Aktivitäten sowie für tieferes Verstehen genutzt. Die hinter diesen kompetenzsteigernden Forderungen der Lehrkraft steckende, immer wiederkehrende Erwartungshaltung scheint von den Schülern antizipiert und zunehmend soweit verinnerlicht zu werden, dass sie zu einer „stillschweigenden Übereinkunft" der ganzen Klasse wird. Sjuts spricht in diesem Fall einer etablierten Unterrichtskultur treffend von einem „didaktisch-sozialen Vertrag" (2003).

So scheint der Mechanismus, der Metakognition nicht nur lokal evoziert, sondern als selbstverständlich einzusetzendes Werkzeug in den Köpfen der Schüler verankert, erzieherisch-kultureller Art zu sein. Entscheidend scheint die Beharrlichkeit zu sein, mit der das gewünschte Verhalten vorgelebt, eingefordert und wertgeschätzt wird. Eine deutlich unterstützende Funktion kann durch die Kategorisierung den verabredeten Diskursregeln zugesprochen werden, die beispielsweise das Aufrufverhalten oder den Umgang mit Fehlern regeln, einem Auseinanderfallen von Diskussionssträngen entgegen wirken oder langfristig Monitoring- oder Reflexionsaktivitäten an die Schüler delegieren. In den analysierten Unterrichtsszenen bekommt die metakognitiv-diskursive Unterrichtskultur derart festen Vertragscharakter, dass Schüler die Einhaltung der Diskursregeln sogar selbst einfordern und sich bei Nichteinhalten gegenseitig erinnern.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007): Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht. Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Klieme E., Schümer, G. & Knoll, S. (2001): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: „Aufgabenkultur" und Unterrichtsgestaltung. In: BMBF (Hrsg.), TIMSS – Impulse für Schule und Unterricht. 43-57. Bonn.

Nührenbörger, M. (2007): Unterrichtsgespräche zwischen Schülern und Lehrkräften in jahrgangsgemischten Kleingruppen. In: C. Möller et al. (Hrsg.), Qualität von Grundschulunterricht entwickeln, erfassen und bewerten (245-248). Wiesbaden: VS.

Reusser, K. (2008): Empirisch fundierte Didaktik – didaktisch fundierte Unterrichtsforschung. Eine Perspektive zur Neuorientierung der allgemeinen Didaktik. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaften, 219-237.

Schneider, W. & Artelt, C. (2010): Metacognition and mathematics education. In: ZDM Mathematics Education, 149-161. [Auf diesen Überblicksartikel sei aus Platzgründen auch vertretend für verschiedene angesprochene Einzelstudien verwiesen.]

Sjuts, J. (2003): Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. JMD, 18-40.

Winkel, K. (im Druck): Entwicklungsmechanismen von Metakognition im mathematischen Unterrichtsdiskurs. Ein designbasierter Unterrichtsversuch über vier Grundschuljahre. Eingereichte Dissertation. Osnabrück: Institut für Kognitive Mathematik.

Kathrin WINTER, Martin STEIN, Münster

Das Projekt Mathe-Meister

Innerhalb des vom BMBF geförderten Projektes werden seit 2007 zwei Entwicklungsvorhaben umgesetzt: auf der einen Seite ein internetbasiertes Self-Assessment und auf der anderen Seite ein auf CD-ROM angebotenes Modul zur Förderung des mathematischen Textverständnisses. Zielgruppe sind junge Erwachsene bzw. für das Self-Assessment Personen, die eine Weiterbildung zum Meister in Industrie, Handel oder Handwerk anstreben. In der Sektion zum Projekt Mathe-Meister werden die Entwicklungsergebnisse vorgestellt und in den Sektionsvorträgen einzelne Entwicklungs- und Forschungsaspekte konkretisiert.

1. Zwei Ziele – ein Hintergrund

Mathematische Grundlagenkenntnisse, -fähigkeiten und -fertigkeiten und genauso der Umgang mit mathematikhaltigen Texten stellen in der allgemeinen Schulausbildung sowie der beruflichen Aus- und Weiterbildung stets wichtige Basisqualifikationen bzw. -kompetenzen dar. Sowohl Schülerinnen und Schüler allgemeinbildender Schulen, Berufsschülerinnen und -schüler (vgl. Awerveg et al. 2009) als auch Teilnehmerinnen und Teilnehmer von Meisterlehrgängen weisen bereits bei diesen Basiskompetenzen zum Teil große Defizite auf, wie auch eine im Rahmen des Projektes groß angelegte Erhebung bestätigt (vgl. Stein et al. 2010). Die Auswertungen dieser Erhebung zeigen ebenfalls große Defizite beim Lösen mathematikhaltiger Textaufgaben. Dabei scheitern viele Probanden bereits bei der Entnahme der relevanten mathematischen Inhalte (vgl. Jordan, Stein 2011).

Die beiden Entwicklungen des Projektes Mathe-Meister setzen hier mit unterschiedlichen Zielsetzungen an: das Self-Assessment bei der Diagnose, das Textverständnismodul bei der Förderung.

2. Das internetbasierte Mathe-Meister Self-Assessment

Self-Assessments nehmen in der Berufswelt einen stetig größer werdenden Stellenwert ein – gleiches gilt für die Bedeutung des Internets. Das Internet ist eine Kommunikations- und mittlerweile auch eine Bewerbungsplattform, die nicht nur in akademischen Berufen von Bedeutung ist. Die Implementierung eines internetbasierten Self-Assessments ist daher naheliegend. Dabei verstehen wir unter einem internetbasierten Self-Assessment, dass sowohl der Test als auch die Auswertung und Feedback internetbasiert und sofort erfolgen – ohne, dass Test eingeschickt, manuell ausgewertet und erst zeitlich verzögert die Ergebnisse zurückgemeldet werden. Des

Weiteren wurden für das Mathe-Meister weitere Anforderungen gestellt, die zum Zeitpunkt des Projektstarts wie auch zum jetzigen Zeitpunkt durch kein anderes internetbasiertes Self-Assessments alle in ihrer Gesamtheit erfüllt werden (vgl. Winter 2011):

- Internetbasierte Durchführung des Tests & internetbasierte, direkte Auswertung und Rückmeldung der Testergebnisse
- Berufsspezifische Itemauswahl & Anwendungsbeispiele
- Musterlösungen zu jedem Item
- Individuelle Defizitanalyse mit Zuordnung der Items zu mathematischen Themengebieten
- Detaillierte Fehleranalyse
- Konkrete Förderhinweise zu Schulungen und Schulungsmaterialien

Bei der Entwicklung des Self-Assessments wurden diese Anforderungen alle berücksichtigt. So können an Meisterlehrgängen interessierte Personen Tests für ihren individuellen Beruf bzw. ihre Berufssparte auswählen. Die Itemzusammenstellung stützt sich auf umfangreiche statistische und diagnostische Analysen basierend auf einer umfangreichen empirischen Erhebungsbasis (vgl. Podlogar, Stein 2011; Winter 2011). Inhaltlich werden dabei Kenntnisse zu grundlegenden mathematischen Themenbereichen überprüft, die bei Einstieg in den jeweiligen Meisterlehrgang vorausgesetzt werden, wie z. B. Rechengesetze in der Menge der natürlichen Zahlen, das Rechnen mit Brüchen oder Einheiten, die Kenntnis geometrischer Begriffe und Zusammenhänge oder die Kenntnis und Anwendung von Berechnungsvorschriften zur Ermittlung bspw. von Körpervolumina. Ein modifiziertes Multiple-Choice-Verfahren vermindert auf der einen Seite die Ratewahrscheinlichkeit und ermöglicht auf der anderen Seite detaillierte, fehleranalytische Rückmeldungen. Dazu sind die Distraktoren zu jedem Item so konstruiert, dass sie die in der Zielgruppe typischen korrekten und fehlerhaften Lösungen widerspiegeln (vgl. Winter 2011). Abbildung 1 zeigt ein Item aus dem Bereich der Algebra mit den dazugehörigen Distraktoren. Die markierte Antwortalternative (f) stellt hierbei bspw. den typischen Fehler dar, den Exponenten einzeln auf die Summanden anzuwenden und nicht nach der binomischen Regel auf die gesamt Summe in der Klammer.

Die Rückmeldungen des Programms bieten den Probanden eine genaue Übersicht der Themenzuordnung der Items, so dass dem Probanden deutlich gezeigt wird, in welchen mathematischen Themenbereichen seine Stärken und Schwächen liegen. Darüber hinaus liefert eine auf den Distraktoren basierende Fehleranalyse eine individuelle Basis für Fördermaßnahmen. Schließlich wird auf konkrete Materialien und Schulungen ggf. nach den verschiedenen mathematischen Themenbereichen differenziert hingewiesen, die zur weiteren eigenen Weiterbildung auf diesem Sektor hilfreich sein können.

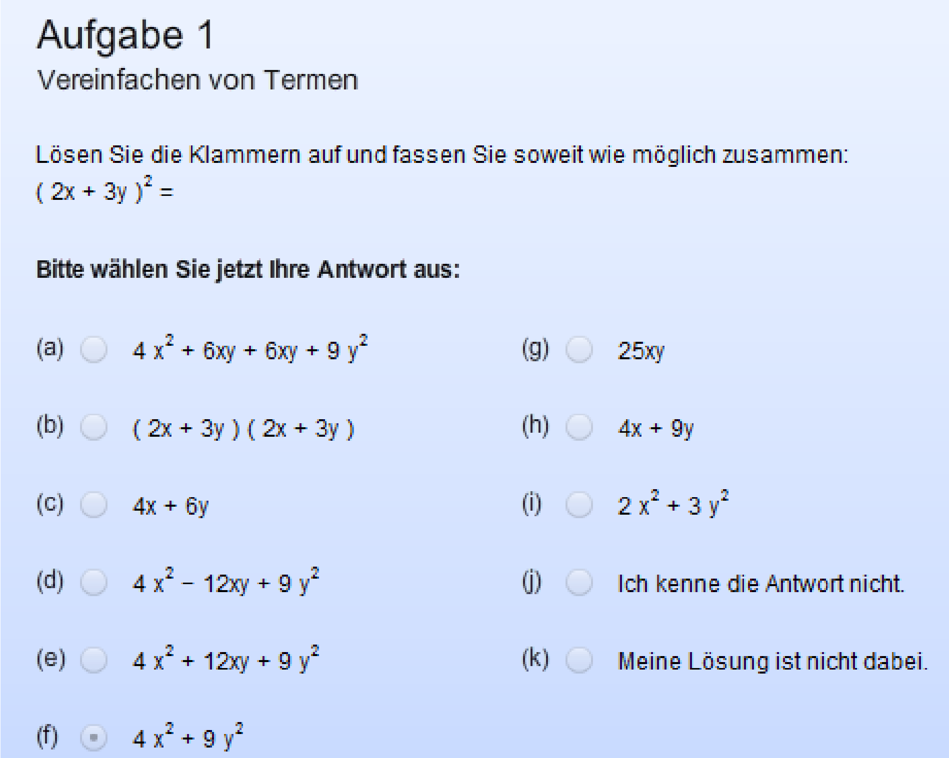


Abbildung 1: Item aus dem Bereich der Algebra mit Anzeige der Distraktoren.

3. Die CD zur Förderung des mathematischen Textverständnisses

Das Modul zur Förderung des mathematischen Textverständnisses nutzt realitätsbezogene Texte aus unterschiedlichen Bereichen insbesondere des beruflichen Lebens - von Versicherungen und Kostenkalkulationen bis hin zu Cocktailmischungen. Auf Basis der komplexen Texte sollen verschiedene Formen mathematischer Fragestellungen bearbeitet werden. Hierbei werden mehrere Aufgabentypen unterschieden, wie. z. B. Multiple-Choice-Fragen zum Verständnis des Textes oder das Entnehmen einzelner Informationen aus dem Text. Abbildung 2 zeigt hier z. B. das Aufgabenformat Multiple-Choice.

In den Aufgabentexten sind zusätzliche Materialien mit Tabellen oder Grafiken enthalten, aus denen weitere Informationen zur Lösung der Aufgaben entnommen werden müssen. Die Bearbeitung der unterschiedlichen Aufgabentypen soll den Probanden helfen, Strategien zur Entnahme mathematisch relevanter Informationen aus komplexen Texten zu entnehmen und Zusammenhänge korrekt zu erkennen (vgl. Jordan, Stein 2011).

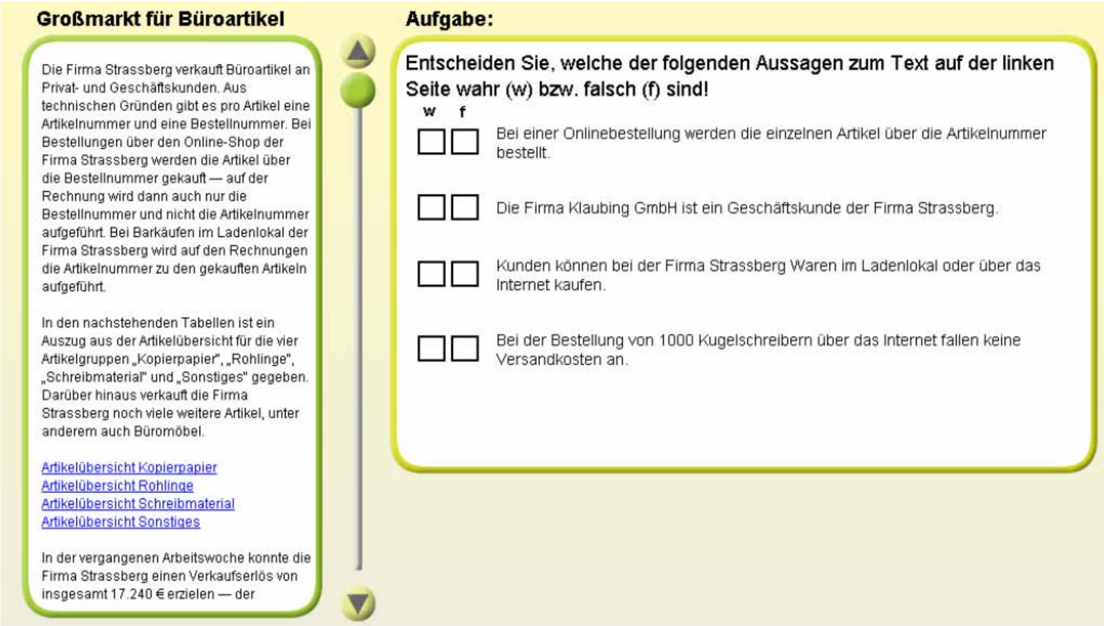


Abbildung 2: Bildschirmausschnitt aus dem Modul zur Förderung des mathematischen Textverständnisses.

4. Ausblick

Das Projekt Mathe-Meister befindet sich in der Abschlussphase. Die Entwicklungsarbeiten sind für beide Zielsetzungen abgeschlossen, weitere Evaluationen folgen. Weitere ausführliche Informationen sind zu finden unter: http://www.mathe-meister.de.

Literatur

Averweg, A., Schürg, U., Geißel, B., Nickolaus, R. (2009). Förderungsbedarf im Bereich der Mathematik bei Berufsschülern im Berufsfeld Bautechnik. In: Die berufsbildende Schule 61, S. 22-28.

Jordan, R., Stein, M. (2011): Erstellung und Evaluation einer Software zur Förderung des mathematischen Textverständnisses. In diesem Band.

Podlogar, H., Stein, M. (2011): Entwicklung eines Tests für eine webbasierte Testplattform zur Erfassung mathematischer Basisanforderungen in der beruflichen Bildung. In diesem Band.

Stein, M., Winter, K., Jordan, R. Podlogar, H. (2010): Das Projekt Mathe-Meister: Stand der Dinge. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, S. 827-830.

Winter, K. (2011): Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse. WTM-Verlag, Münster.

Martin WINTER, Vechta

Mathematik im Kindergarten: Außenanlagen für mathematische Aktivitäten erschließen

Bemühungen um elementare Bildung, auch um mathematische Früherziehung, sind inzwischen (wieder) verbreitet. In Niedersachsen hebt der Orientierungsplan diese Aufgabe hervor (Nds. Kultusministerium, 2005), ohne allerdings dabei eine Hilfestellung für Erzieherinnen zu bieten, diesen Bildungsauftrag in die Praxis umzusetzen. Dennoch ist für Erzieherinnen der Druck massiv angestiegen, mathematische Aktivitäten in die Arbeit aufzunehmen, wobei sie durch ihre Ausbildung in der Regel den damit verbundenen Ansprüchen nicht gewachsen sein können. Bei der Suche nach Anregungen wird leicht auf Materialien zugegriffen, die aus fachdidaktischer Perspektive wenig durchdacht und damit für diese Zielsetzungen ungeeignet erscheinen. Zudem fehlt die individuelle Kompetenz, mit Mathematik im Kindergarten umzugehen.

1. Den Bildungsauftrag in KiTas umsetzen

In Niedersachsen haben diese Bemühungen Verstärkung erfahren durch Gründung des ***nifbe*** (Niedersächsisches Institut für frühkindliche Bildung und Entwicklung) seitens der Landesregierung. Durch das ***nifbe*** entwickeln sich Vernetzungen, die sich insbesondere in der ***nifbe***-Region Südwest im Schwerpunkt mathematischer Früherziehung niedergeschlagen haben. Neben „Initiativen von unten“ wie z.B. der Elterninitiative LIFE e.V. (vgl. Winter, M., 2009a,b) wurde in der Region die Einführung der „Mathekarten“ aus dem „Haus der kleinen Forscher“ evaluiert (vgl. Grieshop, G., Winter, M., 2011), das sich inhaltlich an Vorschlägen von Fthenakis (Fthenakis, W. E., 2003**)** orientiert.

2. Der Impuls: Erzieherinnen werden initiativ

In Verbindung mit dem ***nifbe*** haben Erzieherinnen einer KiTa im Emsland die Universität Vechta aufgefordert, die Neugestaltung der Außenanlagen mit der Perspektive von Rahmenbedingungen zu begleiten, die auch in der Außenanlage „mathematikhaltige“ Aktivitäten ermöglichen. An der Initiative ist neben weiteren Kooperationspartnern ein Landschaftsplaner beteiligt, der in der Planung der neuen Außenanlage sicher stellen konnte, dass in der Gestaltung vier „Aktivitätszonen“ berücksichtigt werden:

a) Garten mit Bepflanzungen, die jahreszeitlichem Wechsel unterliegen

Die Gestaltung eines derartigen Bereichs unterliegt zunächst Aspekten, die aus den Erfahrungen mit der Anlage und Bewirtschaftung von Schulgärten stammen und den Möglichkeiten von Kindern im KiTa-Alter angepasst sind. Hier stehen hier insbesondere biologische Aspekte im Vordergrund, die zu berücksichtigen sind.

Mathematik findet sich z. B. in der Gestaltung der Flächen in unterschiedlichen Formen und Maßen. Ferner enthalten verschiedene Arten des Anbaus/der Bepflanzung mathematische Aspekte, wie u. a. das Abzählen oder Messen von Saatgut. Die Pflege der Pflanzen erfordert Regelmäßigkeit der Bewässerung in bestimmten Mengen, die Beobachtung der Wachstumsprozesse liefert weitere mögliche Aspekte von Vergleichen, Messen, Zählen.

b) Spielbereiche mit Sand und/oder Wasser (und ggf. anderen im Außengelände nutzbaren Materialien)

Auch hier gilt zunächst: Dieses ist ein Bereich, der aus diversen lern- und entwicklungspsychologischen Gesichtspunkten für das Spiel der Kinder zu gestalten und bereit zu halten ist. Dieser Bereich aber kann unter dem Gesichtspunkt möglicher Impulse für mathematisch orientierte Aktivitäten in den Blick genommen werden, u. a. im Zusammenhang mit Formen, Gestalten und Mengenvergleichen.

c) Spielgeräte (zum Schaukeln, Klettern etc.)

Elementare Erfahrungen z.B. in der Koordinierung von Bewegungen, mit denen Geräte zielgerichtet in spielerischen Intentionen genutzt werden können, ermöglichen ebenfalls mathematikbezogene Aktivitäten. Größenunterschiede, Ecken, Kanten, Flächen an Figuren sowie Wege im Raum stellen zum Beispiel eine Auswahl von Erfahrungen mit Perspektiven auf Raum und Form sowie Größen und Messen dar.

d) Offener Bewegungsraum

Kinder benötigen im Außengelände einen Freiraum für Bewegungen (Laufen, Springen etc.), begründet unter vorwiegend physiologischen und sozialemotionalen Aspekten, unter denen die ganzheitliche Gestaltung der KiTa-Arbeit vorgesehen ist. Auch hier ergeben sich Gestaltungsmöglichkeiten. In Spielen nach Regeln auf Spielfeldern ist Mathematik erfahrbar. Muster und Figuren geben räumliche Orientierung, Bewegungen darin ermöglichen fundamentale geometrische Erfahrungen, Regeln erfordern Strategien und schlussfolgerndes Denken bei Entscheidungen, Spielbedingungen können numerische und arithmetische Kontexte enthalten usw.

3. Das Projekt „Draußen spielend lernen – Zugänge zu mathematischen Phänomenen“

Dieses Projekt unter der Leitung von Prof. Dr. Martin Winter und Dr. Gabriele Grieshop (Universität Vechta) mit dem Untertitel „Gestaltung und Nutzung von Außenanlagen von KiTa's nach einem pädagogischen Konzept mit Schwerpunkten im mathematischen Bereich“ ist als so genanntes Transferprojekt angelegt. Projektbeteiligte und Kooperationspartner sind neben den Erzieherinnen der KiTa S. Hermann-Josef Twist (Emsland) als Hauptakteure, das Netzwerk der ***nifbe***-Region Südwest, die KEB Meppen, die Marienhausschule Meppen (als Ausbildungsstätte für Erzieherinnen). Im Sinne des Transfers ist die nachhaltige Implementation der Aktivitäten aus dem Modellkindergarten in die Region und darüber hinaus angestrebt.

Im Vordergrund stehen folgende Ziele:

Es geht zunächst darum, die beteiligten Erzieherinnen zu sensibilisieren, in den „normalen“ Außenaktivitäten die Mathematikhaltigkeit zu erkennen, dann ihre diagnostische Kompetenz zur Einschätzung des Entwicklungsstandes der Kinder zu entwickeln um sie schließlich zu befähigen, durch geeignete Impulse zur Vertiefung und ggf. auch der Reflexion der mathematischen Erfahrungen anzuregen. In inhaltlicher Perspektive orientiert sich das Projekt dabei an den Kompetenzbereichen, wie sie im niedersächsischen Kerncurriculum für die Primarstufe gefordert werden, dabei wird berücksichtigt, diese kompatibel mit den für den KiTa-Bereich vertrauteren Anregungen nach Fthenakis zu vermitteln. Der Umgang mit mathematischen Gegenständen wird dabei von einer Perspektive geprägt, die sich an den allgemeinen mathematischen Kompetenzen orientiert.

In Zusammenarbeit mit den Erzieherinnen des Modellkindergartens werden Handreichungen entwickelt, die auch anderen KiTas den Zugang zu dem Konzept ermöglichen. Der Transfer in weitere KiTas zunächst der Region wird über die Entwicklung und Erprobung eines Fortbildungskonzepts angestrebt.

4. Zum Verlauf des Projekts

Nach workshops mit den Erzieherinnen des Modellkindergartens, in denen mathematikhaltige Aktivitäten zu den Aktivitätszonen gesammelt wurden, werden Handreichungen entwickelt, die in einer weiteren Phase mit „Transferkitas“ erprobt werden. Zugleich können nach der mittlerweile erfolgten Ausbauphase der Außenanlage, die ersten Erfahrungen in dem Modellkindergarten ausgewertet und dokumentiert werden. An der Erprobung und Weiterentwicklung der Handreichungen wird darüber hinaus auch die regionale Ausbildungsschule für Erzieherinnen beteiligt. Für die Konzeptionierung der Fortbildung, die aus den Erfahrungen der beteiligten KiTas entwickelt wird, kann die Kompetenz der regionalen Erwachsenenbildung (KEB Meppen) genutzt werden, die über weit reichende Erfahrungen in der Fortbildung von Erzieherinnen verfügt.

5. Perspektiven

Aus der Arbeit mit den Erzieherinnen ist zu erwarten, dass sich differenzierte Informationen darüber gewinnen lassen, welche spezifischen mathematischen Kompetenzen Erzieherinnen in der Fortbildung oder bereits in der Ausbildung erwerben sollten, um den Anforderungen nach früher mathematischer Förderung von Kindern im Kindergarten genügen zu können.

Literatur:

Fthenakis, W. E. (2009): Natur-Wissen schaffen (Bd.2) - Frühe mathematische Bildung. Bildungsverlag Eins, Troisdorf.

Grieshop, G.; Winter, M. (2011): Erfahrungen aus der Begleitung der Einführung der Mathekarten. Unveröffentlichtes Manuskript; erscheint bei der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“, Berlin.

Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.) (2005): Orientierungsplan für Bildung und Erziehung im Elementarbereich niedersächsischer Tageseinrichtungen für Kinder, Hannover

Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.) (2006) Kerncurriculum für die Grundschule Schuljahrgänge 1-4, Mathematik. Hannover.

Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.) (2009) ... damit die Kleinen nicht untergehen. Planungshilfe für Betreuungsangebote für Kinder von 0 bis 3 Jahren in Kindertagesstätten, Hannover.

Steinweg, A. S. (2008): Zwischen Kindergarten und Schule – Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In: Hellmich, F.; Köster, H. (Hrsg.) (2008): Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften. Verlag Julius Klinkhardt, Heidelberg. S. 143-159

Winter, M. (2007): Mathematik mit Hand und Fuß – Anregung zu Bewegung im Mathematikunterricht. In: Hildebrandt-Stamann (Hrsg.): Bewegte Schule – Schule bewegt gestalten. Schneider Verlag Hogengehren, S. 195-210

Winter, M. (2009a): Förderung mathematisch-naturwissenschaftlicher Bildung in Kindergärten: eine Initiative „von unten“. In: Neubrand, Michael (Hg): Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster, WTM, S.435-436

Winter, M. (2009b): Mathematisch-naturwissenschaftliche Projekte in Kindergärten: Evaluation einer Elterninitiative. In: Neubrand, Michael (Hg): Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster, WTM, S.437-440

Winter, M. (2009c): Beim Tischdecken, Bauen und Aufräumen …. Überall ist Mathematik! In: klein&groß, Heft 09, 2009, Oldenbourg Schulbuchverlag, S. 14-17.

Ingo WITZKE, Köln

Zur Theorieentwicklung in der Mathematik

Ein grundlegendes Problem des schulischen Mathematikunterrichts ist in der Abstraktheit der zu vermittelnden Mathematik begründet. Mathematik ist die Lehre von formalen, d.h. uninterpretierten Systemen. Lehrerinnen und Lehrer versuchen diesem Problem zu begegnen, indem sie mit Hilfe von Unterrichtsmedien versuchen, die abstrakte Mathematik zu veranschaulichen. Im Geometrieunterricht etwa werden nicht logische Folgerungen aus einem inhaltlich unbestimmten Axiomensystem gezogen, sondern Geometrie wird als die Lehre vom physikalischen Raum vermittelt. Das Standardmedium im Geometrieunterricht ist das Zeichenblatt: Schülerinnen und Schüler kommen zu Erkenntnissen über Figuren durch Zeichnen und Falten. Sie fassen Geometrie als eine naturwissenschaftliche Theorie der Anschauungsmittel auf, oder mit einem Ausdruck der Wissenschaftstheorie: als eine *empirische Theorie*. [1]

Der relativ neue kognitionspsychologische Ansatz der sogenannten „Theory theory“ postuliert eine ähnlich Interpretation sogar schon für Kleinkinder – unabhängig von spezifischen Inhalten – und unterstreicht damit den Nutzen einer erkenntnistheoretischen Analyse empirischer Theorien:

> „[…] we will argue that children’s conceptual structures, like scientist’s, are theories, that their conceptual development is theory formation and change, and that their semantic development is theory-dependent“.[2]

Die Forschungsfrage, die sich an diese Beobachtung anschließt – Wie werden mathematische Theorien, im Sinne von *empirischen Theorien*, (weiter-) entwickelt? – erscheint insbesondere aus Sicht einer mathematikdidaktischen Grundlagenforschung eine notwendige.

Dieser Frage kann u.a. durch eine Analyse der Arbeiten (historischer) mathematischer Experten nachgegangen werden, für die wir auf ein außerordentlich gutes und systematisches Quellenmaterial für die *empirische Theorieentwicklung* in der Mathematik zurückgreifen können.

Denn eine der Entwicklungsgeschichte der Mathematik unangemessene Vorstellung ist es, anzunehmen mathematische Theorien entstünden im Allgemeinen auf Grundlage von einmal gesetzten (inhaltlich unbestimm-

---

[1] Vgl. Stuve, H. (1990): Grundlagen einer Geometriedidaktik.
[2] Gopnik, A., Meltzoff, A. N. (1997): Words, Thoughts, and Theories, S.11.

ten) Axiomensystemen und daraus logisch abgeleiteten Sätzen – wie in formalistischen Theorien im Sinne David Hilberts. Ist es doch

> „vielmehr […] in der Regel so, dass die Theorie, in der schließlich das Wissen zusammengefasst wird, in frühen Phasen ihrer Entstehung keine mathematische Theorie war – erst recht keine mathematische im heutigen Verständnis – sondern eine *empirische*, also eine Theorie mit einem Gegenstandsbereich“.[3]

Ziehen wir nun in Betracht, dass mathematische Theorien aus Sicht von Schülern *empirische Theorien* sind, sind für derartige Theorien relevante Fragen wie, „Gibt es Gesetzmäßigkeiten der Theorieentwicklung? Wie erhalten die für die Theorie charakteristischen Begriffe, insbesondere die *theoretischen Begriffe* – also solche ohne reale Referenzobjekte – ihre spezifische Bedeutung? Warum setzen sich gewisse Theorien gegenüber konkurrierenden Ansätzen durch?“ mit Gewinn für die mathematikdidaktische Forschung zu diskutieren. Sie ermöglichen ein vertieftes Verständnis für den Prozess mathematischer Wissensentwicklung.

Es gibt nun eine Vielzahl von Fallbeispielen aus der Geschichte der Mathematik, deren Studium wesentliche Einsichten über die Entwicklung mathematischen Wissens im Sinne einer mathematikdidaktischen Grundlagenforschung ermöglicht. Ein besonders geeignetes Fallbeispiel scheint in der Differential- und Integralrechnung im 17. und 18. Jahrhundert vorzuliegen.

Diese Differential- und Integralrechnung wurde von Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton etwa gleichzeitig konzipiert. Leibniz entwickelte den *Calculus differentialis* sowie den *Calculus integralis* im ausgehenden 17. Jahrhundert zur Diskussion von realen Gegenständen, d.h. durch Konstruktionen gegebene Kurven. Ziel war es systematisch Steigungen von Tangenten, Maxima und Minima, Wendepunkte, Flächeninhalte und Bogenlängen berechnen zu können. Im Sinne der modernen Wissenschaftstheorie ist die *leibnizsche Differential- und Integralrechnung* als eine *empirische Theorie* zu bezeichnen, deren Gegenstandsbereich gegebene Kurven sind.

Der zentrale Begriff dieser Theorie – um dessen Bedeutung in der Wissenschaftsgeschichte bis heute gestritten wird – ist der der „unendlich kleinen Größe“, bzw. der des „Differentials einer Größe“. Eine *historisch- mathematische Rekonstruktion* des Calculus ermöglicht die Bedeutungsentwicklung dieses *theoretischen Begriffs* zu klären, und darüber hinaus als einen

[3] Burscheid, H. J., Stuve, H. (2010): Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung, S. 264-265.

Kernpunkt mathematischer Wissensentwicklung zu problematisieren und zu diskutieren.[4]

Literatur

Burscheid, H. J., Stuve, H. (2010): Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung: Hildesheim et al.: Franzbecker

Gopnik, A. (2010): Kleinkinder begreifen mehr. In: Spektrum der Wissenschaft, 10, S. 69-73.

Gopnik, A., Meltzoff, A. N. (1997): Words, Thoughts, and Theories: The MIT Press: Cambridge, Massachusetts et al.

Stuve, H. (1990): Grundlagen einer Geometriedidaktik. Knoche, N., Scheid, H. (Hrsg.): Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Bd.17: Mannheim et al.: BI-Wissenschaftsverlag.

Struve, H., Witzke, I. (2008): Eine wissenschaftstheoretische Analyse des Leibniz'schen calculus – das Beispiel des Krümmungsradius. In: Studia Leibnitiana, Bd. XL, Heft 1, S. 29-47.

Witzke, I. (2009): Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik: Hildesheim et al.: Franzbecker.

[4] Witzke, I. (2009): Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik, S. 335ff.

Peter WOLFF, Düsseldorf

Förderung mathematischen Denkens in der elementaren Algebra

Im Jahre 1936 hat der Logiker A. Tarski darauf hingewiesen, daß Ausdrücke wie „Gleichung“, „Ungleichung“, „Polynom“ oder „Bruch“ nicht „in den Bereich der Mathematik gehören“, also keine mathematischen Gegenstände bezeichnen. Zitat:

Zum Beispiel kann der Lehrsatz „Die Gleichnug $x^2+ax+b=0$ hat höchstens zwei Wurzeln“ auf zutreffendere Weise in der Form „Es gibt höchstens zwei Zahlen x, so daß $x^2+ax+b=0$“ ausgesprochen werden. (Zitat-Ende).

Tarski meinte, mit diesem Gebrauch außermathematischer Objekte in der Mathematik sei keine besondere Gefahr verbunden – allerdings dachte er dabei an erwachsene Mathematiker, nicht an Schüler.

Heute, im Jahre 2011, kann die Liste solcher Objekte um einiges erweitert werden: „Variable“, „Platzhalter“ , „Gebrauchsname“, „Term“, „Zahlname“, „Aussage“, „Aussageform“, Äquivalenzumformung“, „Ungleichungsumformung“, „Umformungsregeln“, etc. Diesmal trifft es aber nicht Mathematiker, sondern Schüler, die (eigentlich) Mathematik lernen sollen. Diese sollen diverse Umformungsregeln (auswendig) lernen und formal anzuwenden üben, in Variable (Platzhalter) Terme einsetzen, für einen Term „eine neue Variable einführen“, etc. etc.

In Gegensatz zu dieser Auffassung von elementarer Algebra besteht der eigentliche, hinter den Formaloperationen stehende mathematische Gegenstand aus Zahlen und Größen (aus bekannten und unbekannten, aus bestimmten und unbestimmten, aus konstanten und veränderlichen), aus Aussagen über solche Zahlen bzw. Größen (meist in Form von Gleichungen, welche Beziehungen beschreiben) – und schließlich aus Beziehungen zwischen solchen Beziehungen (Aus $x^2-3x+2=0$ folgt $x=1 \vee x=2$)

Versteht man unter Mathematik treiben bzw. mathematischem Denken das Befassen mit mathematischen Gegenständen, so muß der Schulunterricht primär und vorzugsweise das Denken an Zahlen, Größen, mathematische Gegenstände, die gedankliche Konstruktion und Interpretation von Aussagen über diese Objekte – und das Folgern zwischen solchen Aussagen fördern – und dies statt sich zu sehr auf das korrekte Ausführen formaler Operationen zu konzentrieren.

Damit erst werden die Grundlagen geschaffen für einen verstehenden Umgang mit der mathematischen Fachsprache „um die Formeln herum“.

Selbstverständlich müssen Schüler letztlich auch den sinnvollen Gebrauch der heute üblichen und bewährten mathematischen Fachsprache lernen – sie sollten das aber in ähnlicher Weise tun können wie sie eine Fremdsprache lernen würden (bzw. wie sie ihre Muttersprache gelernt haben): als ein praktisches und effektives Mittel, mathematische Gedanken, die zunächst einmal als solche gedacht werden, mitzuteilen und sich darüber auszutauschen – bzw. mit den Ergebnissen nachträglich zu arbeiten..

Der wohl stets vorhandene Hang (jedenfalls bei Schülern) zur Beschränkung auf einen Formalismus (auf das, was hingeschrieben werden soll, auf das „Lösen einer Algebraaufgabe als Ausfüllübung ohne Zwischentext"- s. Freudental) wurde durch die erste „Reform der Gleichnugslehre" (Lauter, Wäsche, Steiner, Pickert), die in bester Absicht initiiert wurde, eher verstärkt.

Seit der zweiten Reform (G. Malle, Fischer, Bürger) hat man sich immerhin von dem in der ersten Reform verbreiteten Irrtum befreit, man dürfe an soetwas wie Unbestimmte, allgemeine Zahl, Veränderliche nicht denken, da es solche Objekte „in der Ontologie der Mathematik" nicht gebe. Heute untersucht man, wann welche Schüler unter welchen Voraussetzungen imstande sind, Begriffe wie den der Unbestimmten gedanklich zu bilden und zu benutzen.

Aus Sicht des Autors ist das erst ein Anfang. Hinzu kommt, daß zwei weitere Irrtümer bis heute nicht ausgeräumt sind: erstens identifiziert man Platzhalter, Terme, Bedarfsnamen (also Schreibfiguren) mit den referierten Objekten (etwa den Zahlen) selbst, und zweitens wird oft nicht konsequent unterschieden zwischen Bestandteilen einer „Objektsprache" (=Sprache, die Objekt der Betrachtung ist - etwa die Gleichung, die als Aussageform aufgefaßt wird) und der mathematischen Umgangssprache, in der sowohl über Zahlen (allg.: mathematische Objekte- etwa die Lösungen einer Gleichung, die mit anderen Zahlen in einer zu beschreibenden Beziehung stehen) als auch über Bestandteile der Objektsprache gesprochen wird - wobei im letzteren Fall die Umgangssprache als Metasprache fungiert. Beide Fehler führen zu gedanklichen Inkonsequenzen und Ungereimtheiten – und können sogar zu begrifflichen Absurditäten führen (Da verwandelt sich dann die Aussageform ax+b=0 plötzlich in die Aussage b=0, weil „dem Platzhalter a eine andere Grundmenge zugrundegelegt wird und x die Gleichungsvariable ist").

Hier sei an nur einem (i.S. des Autors positiven) Beispiel angedeutet, was gemeint ist.

Aufgabe: Bestimme alle reellen Zahlen x, für die $x^2-28x-1568=0$ ist.

Lösung: Ich denke mir eine solche Zahl x gegeben. Für diese gilt also $x^2-28x-1568=0$

Es folgt $x^2-28x=1568$...$x^2-28x+14^2=1568+14^2$...$x^2-28x+14^2=1764$.

Nun gilt ja für je zwei reelle Zahlen a,b: $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

Das gilt speziell auch für die Zahlen x und 14: $x^2-28x+14^2=x^2-2\cdot x\cdot 14+14^2=(x-14)^2$.

Damit folgt $(x-14)^2=1764$, also $\sqrt{(x-14)^2} = \sqrt{1764}$.

Für jede Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = |a|$. Für die Zahl x-14 gilt also $\sqrt{(x-14)^2} = |x-14|$.

Damit folgt $|x-14|=42$.

Für jede Zahl a gilt $|a|=a$ für $a\geq 0$ und $|a|=-a$ für $a<0$. Für die Zahl x-14 gilt daher:

$|x-14|=x-14$ für $x-14\geq 0$ und $|x-14|=-(x-14)$ für $x-14<0$....

Im Fall $x\geq 14$ folgt $x-14=42$, also $x=56$. Im Fall $x<14$ folgt $-x+14=42$, also $x=-28$.

Daher ist x entweder die Zahl 56 oder die Zahl -28: $x=56 \vee x=-28$.

Als Lösungen kommen daher nur diese beiden Zahlen infrage. Wegen $56^2-28\cdot 56-1568=0$ und $(-28)^2-28\cdot(-28)-1568=0$ sind beides Zahlen mit $x^2-28x-1568=0$

Die Menge aller dieser Zahlen ist daher $L=\{56, -28\}$

Formal ist das der Lösungsweg, der vom Lehrer meiner Nachhilfeschülerin verlangt wurde – allerdings ergänzt um den (in Schülerköpfen meist fehlenden) Zwischentext. Und: Wörter wie Gleichung, Variable, Einsetzen, Zahlen für x, umformen u.ä. kommen hier nicht vor.

Genauere Ausführungen, Begründungen und Empfehlungen finden sich im Internet unter http://peter.wolffcarsten.de. Ein Kontakt mit dem Autor kann per E-Mail an die Adresse peter@wolffcarsten.de hergestellt werden.

Hier seien die Hauptgesichtspunkte und Intentionen des Autors in Thesen zusammengefaßt:

– Der auch heute wirksame Überbau des mathematischen Gegenstands durch einen formalen Kalkül (nach dem Vorbild der math. Logik) bewirkt eine Überfrachtung mit Formalismen. Dadurch wird das Denken des Schülers auf die Schreibfiguren und deren Manipulation fokussiert und abgelenkt von den mathematischen Gegenständen.

- Ziel des Schulunterrichts in der elementaren Algebra muß sein, das mathematische Denken der Schüler zu fördern. Dazu gehören u.a. die Konzepte der Unbekannten, der Unbestimmten und der Veränderlichen – und Denkschemata, die solche Konzepte verwenden. Denn diese sind grundlegend zum Verstehen nicht nur der elementaren Algebra, sondern für die gesamte Mathematik. Sie bilden einen wesentlichen Teil mathematischen Denkens.
- Das, was geschrieben wird, hat für den schreibenden/lesenden Schüler erst dann einen Sinn, eine Bedeutung, wenn der in den Schreibfiguren ausgedrückte Sinn/der Gedanke vom Schüler gedacht wird – am besten, bevor er erfährt, was er in welcher Situation hinschreiben muß, damit der Lehrer zufrieden ist. Damit der Sinn gedacht wird, müssen die notwendigen Denkweisen und Denkschemata vom Schüler gelernt werden, durch kreative und konstruktive Tätigkeit seines Denkens. Dazu aber braucht der Schülers Anstöße (Impulse) von außen, durch Kommunikation. Das, was er etwa beim Lösen einer Gleichung denkt (der „Zwischentext“), ist wichtiger als das, was er hinschreibt. Konsequenz: Unterrichtskultur und Aufgabenwahl sind so zu gestalten, daß Schülern solche Impulse zuteil werden.
- Bei entsprechender Entwicklung des mathematischen Denkens kann weitgehend auf das Einüben rein-formaler Manipulationen wie etwa das Anwenden von Umformungsregeln (die womöglich auswendig gelernt werden) verzichtet werden.
- Unbekannte und Unbestimmte müssen bereits von Kindern in den ersten Schuljahren gedacht werden, nicht erst ab dem 5., 6. oder gar 7. Schuljahr, wenn „Gleichungen mit x“ behandelt werden.

Empfehlung an die Mathematikdidaktik:

Einmal systematisch zu untersuchen, ob eine Auffassung von „elementarer Algebra“, wie sie hier angedeutet ist, und ein entsprechender Unterricht nicht effektiver sein kann für das mathematische Verständnis der Schüler als die bisher noch übliche Auffassung und das übliche Vorgehen, bei dem der Hauptakzent auf dem formalen Umgang mit Schreibfiguren liegt.

Matthias ZELLER, Bärbel BARZEL, Freiburg

Der Einsatz von CAS im Mathematikunterricht - zum Stand der Forschung

Computeralgebrasysteme (CAS) zeichnen sich dadurch aus, dass symbolische Ausdrücke mit und ohne Variablen verarbeitet und ausgegeben werden können, häufig verbunden mit der Möglichkeit, Graphen und Tabellen zu erzeugen. Im Rahmen einer Expertise für das Ministerium in Thüringen wurden Veröffentlichungen zum Einsatz von CAS gesichtet, ausgewertet, kategorisiert und zusammengefasst. Von ca. 250 aktuellen Texten (nach 2000) aus mathematikdidaktischen und technologiespezifischen Zeitschriften (z.B. JMD, ZDM; IJCML, IJTME), Monographien, Sammelwerken, Metastudien und Tagungsbänden wurden ca. 150 Texte näher betrachtet. Die empirischen und theoriebasierten Ergebnisse sind in elf Kernaussagen zusammengefasst, die vielfach belegt werden können. Die Kernaussagen sind in die Bereiche ‚CAS beim Lernen', ‚beim Lehren' und, in der Leistungsmessung' gegliedert. Im Folgenden werden pro Bereich eine wichtige Kernaussage an einem Beispiel diskutiert und die weiteren Kernaussagen kurz vorgestellt.

1 CAS beim Lernen

1.1 Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden: Mit CAS können Ein- und Ausgaben algebraischer Ausdrücke sofort (ohne Unterbrechung durch regelgeleitete Umformungen mit Papier und Stift) in Bezug gesetzt und vergleichend untersucht werden. Diese lokale Zeiteinsparung ermöglicht es den Fokus auf den Bezug zwischen eingegebenem und ausgegebenem Term zu legen, wobei der Erwerb von konzeptuellem Wissen angeregt wird. Zudem entstehen global, also im gesamten Lösungsprozess, Zeiteinsparungen, die mehr Raum für konzeptuelle Tätigkeiten geben (Abdullah 2007). Dies soll an einem Beispiel aus einer Studie von Kieran und Drijvers (2006) verdeutlicht werden: Lernende untersuchten Polynome der Form xn-1, wobei für n unterschiedliche Werte einzusetzen sind. Jedes der Polynome enthält den Faktor (x-1); Polynome mit geradem n haben zusätzlich den Faktor (x+1). CAS dient hier zum Generieren von Beispielen für verschiedene n. Zentral dabei ist nicht das Prozedurale (z.B. Polynomdivision), da dies mit CAS automatisch durchgeführt wird, sondern es geht vielmehr um das Untersuchen der einzelnen Polynome und ihrer gegenseitigen Bezüge. Termstrukturen müssen dabei gezielt erzeugt werden und punktuell für einzelne Termabschnitte als auch insgesamt erkannt und miteinander in Beziehung gesetzt werden. Alle xn-1 -Polynome lassen sich in folgender

Form darstellen: (x–1)(xn-1+xn-2+…+x+1). Um diese Struktur zu erkennen, müssen die CAS-Ausgaben teilweise, entweder mit Papier und Stift oder mit CAS ausmultipliziert werden. In beiden Fällen wird eine symbolische Darstellung in eine andere übersetzt (Greefrath 2007), was ein wichtiger Bestandteil der für CAS charakteristischen Kompetenz ‚algebraic insight‘ ist (Ball und Stacey 2005). Dabei wird der Erwerb von konzeptuellem Wissen gefördert, CAS wird als Beispielgenerator zum mathematischen Labor und die Arbeitsweise der Lernenden gleicht der der Naturwissenschaften (Cuoco und Levasseur 2003).

1.2 Rechnerfreie Fertigkeiten können auch beim CAS-Unterricht erworben werden: Dieser Erwerb kann durch die bewusste Integration von rechnerfreien Phasen sowohl mit Papier und Stift, als auch mit umfassender Kopfmathematik in Bezug zu CAS geschehen. (Kieran und Yerushalmy 2004, Ingelmann 2009, Artigue 2004, Lagrange 2003)

1.3 Nutzung mathematischer Sprache kann durch CAS angeregt werden: Hierbei spielt zum einen die Kommunikation zwischen Nutzer und CAS eine Rolle, zum anderen regt die unterschiedliche Notation in traditioneller Sprache und CAS-Sprache zur Reflektion an. (Drijvers 2003, Greefrath 2007, Ball und Stacey 2005, Zeller und Barzel 2010)

1.4 Technische Fertigkeiten können fachliche Ziele sinnvoll ergänzen: Im Rechner muss explizit angegeben werden, nach welcher Variable aufgelöst werden soll. Der Aspekt, dass Gleichungen sich nach verschiedenen Variablen auflösen lassen wird damit stark betont. (Fuglestad 2005, Ball und Stacey 2005, Zbiek 2001, Drijvers und Trouche 2007)

2 CAS beim Lehren

2.1 CAS kann einen umfassenden, genetischen Aufbau der Unterrichtsinhalte begünstigen: Bei einem fachsystematischen Lernweg wird die Thematik in Schritte zerlegt und sequentiell erarbeitet. Der Einsatz von CAS wird dabei oft ‚verdient‘; d.h. erst wenn ein Verfahren rechnerfrei beherrscht wird, wird es an das CAS abgetreten und beispielsweise in Anwendungsaufgaben genutzt. Der Wert von CAS liegt dabei alleine in der globalen Verkürzung des Lösungsprozesses bei einer Aufgabe (Abdullah 2007), nicht jedoch in individueller kognitiver Anregung, durch die Möglichkeit CAS experimentell einzusetzen. Bei einem genetischen Lernweg werden Schülerinnen und Schüler anhand geeigneter Problemstellungen angeregt, neue Begriffe und Zusammenhänge selbstständig zu erschließen. Dabei können unter CAS-Einsatz unbekannte mathematische Verfahren zu Beginn des Lernprozesses als ‚Black-Box‘ genutzt werden (Buchberger 1990, Kendal & Stacey 2001). Später im

Lernprozess geht es um die Erarbeitung und das Durchdringen dieser Verfahren, auch rechnerfrei - sie werden dann zur ‚White Box'. Bei einer eigenständigen Begriffsgenese mit CAS können zu Beginn gleichzeitig angesprochene mathematische Felder quasi parallel behandelt und nach und nach einzeln vertieft werden. Den Lernenden gibt dies die Möglichkeit die ‚großen Gedanken' eines mathematischen Gebietes bereits zu Beginn zu entwickeln und immer weiter zu verfolgen (Goldenberg 2003). Dadurch können Bezüge zwischen mathematischen Feldern erkannt und verschiedene Bereiche miteinander verknüpft werden.

2.2 Integration offener Aufgaben wird durch CAS unterstützt: Einzelne Schritte offener Aufgaben (z.B. Modellierungsaufgaben) wie die Repräsentationswahl oder das Durchführen von Rechenverfahren werden von CAS unterstützt, womit der Fokus auf den charakteristischen Tätigkeiten, wie dem Bewerten von Modellen und Lösungen liegt. (Challis & Gretton 2002, Doerr & Zangor 2000, Böhm et al. 2004, Zeller & Barzel 2010)

2.3 CAS erhöht die Anzahl individueller Lösungswege: Untersuchungen zeigen, dass unter freier Medienwahl Lösungswege oft mehrere Repräsentationen und sehr individuelle CAS-Arbeitsweisen beinhalten. (Heid & Blume 2008, Drijvers 2003, Laakman 2008, Leng 2003)

2.4 Unterrichtsmethoden erscheinen mit CAS in einem neuem Licht: In Frontalphasen können Rechnerbildschirme projiziert werden und die technische CAS-Bedienung regt Klassendiskussionen an. In selbstständigen Phasen können Ergebnisse mit CAS überprüft werden. (Drijvers und Trouche 2007, Lagrange 2007, Ball & Stacey 2005, Barzel 2006)

3 CAS in der Leistungsmessung

3.1 CAS kann zu neuen Prüfungsformaten anregen: Tätigkeiten wie Argumentieren und Begründen, auf welchen im CAS Unterricht der Schwerpunkt liegt, lassen sich oft nur schwer schriftlich messen. Hierfür können mündliche Prüfungen oder Projektreferate mit CAS-Integration herangezogen werden (Thomas et al. 2004). Wird schriftlich geprüft, so muss nicht unbedingt CAS zur Verfügung stehen, denn es soll nicht die technische Bedienung abgeprüft werden (Neil 2009). Vielmehr ist es möglich, Lernenden die rein technische Arbeit abzunehmen, also in Aufgaben Lösungen anzugeben und diese von Lernenden in Bezug zu CAS bewerten und reflektieren zu lassen (Kieran & Drijvers 2006).

3.2 CAS kann die sprachlichen Anteile in Lösungen erhöhen: Werden Tätigkeiten wie Argumentieren und Begründen schriftlich geprüft, so beinhalten die Lösungen von CAS-Lernenden mehr frei geschriebene

Erklärungen in individueller Sprache und Notation als streng mathematische Aussagen und traditionelle Notation. (Bardini et al. 2004, Weigand 2006, Brown 2003, Bradford et al. 2009, Bichler 2007)

3.3 Neue Aufgabenformate nötig um zusätzliche Kompetenzen zu überprüfen: Wenn sich der Schwerpunkt von Unterricht verschiebt, so muss sich dies in neuen Prüfungsformaten widerspiegeln. Routiniertes Ausführen von Verfahren darf also nur in rechnerfreie Prüfungsteile integriert werden, der Schwerpunkt von Prüfungen liegt auf konzeptuellen Tätigkeiten. (Bichler 2007, Brown 2003, Thomas et al. 2004, Weigand 2006)

4 Reflektion und Ausblick

Während in quantitativen Erhebungen oft nur geringe Effekte von CAS nachgewiesen werden (z.B. Barzel 2006, Neumann 2010, Weigand und Bichler 2009), wird in vielen qualitativen Studien deutlich, welche Bereiche durch CAS wie beeinflusst werden (z.B. Drijvers 2003, Ball und Stacey 2005, Bruder und Ingelmann 2009). Demnach kann Lehren und Lernen durch CAS unterstützt werden und das Potential von CAS wird durch eine kognitiv aktivierende Unterrichtsgestaltung mit Fokus auf konzeptionellem Wissen besonders ausgeschöpft. Dazu sind aber die verpflichtende Integration von CAS, um die Unterrichtsentwicklung voranzutreiben, Fortbildungen und Lehrernetzwerke zur Unterstützung und öffentliche Akzeptanz von CAS nötig.

Literatur

Quellen sind in der Expertise aufgeführt (Veröffentlichung 2011)

Marc ZIMMERMANN, Christine BESCHERER, Ludwigsburg

(Um-)Wege in der Ausbildung von Mathematiklehrkräften

Zukünftige Mathematiklehrer/innen sind angehalten einen schüleraktivierenden und prozessorientierten Mathematikunterricht zu gestalten. Angehende Lehrkräfte erfahren in der universitären Ausbildungsphase zum Studienbeginn aber nicht selten nur lehrerzentrierte Vorlesungen mit großen Teilnehmerzahlen. Es ist somit fragwürdig, ob sie genug Erfahrungen diesbezüglich sammeln können, um später als Lehrerkraft einen aktivierenden Unterricht gestalten zu können.

Auf der GDM 2008 stellten Bescherer und Spannagel (2008) ein Konzept vor, welches das aktive Mathematiklernen zum Studienbeginn ermöglichen soll. Daraus entwickelte sich das vom BMBF geförderten Projekt SAiL-M (Semiautomatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik), welches unter anderem lernerzentrierte und prozessorientierte Konzepte (insbesondere unter Einsatz von Technologie) für die Mathematiklehre in der Lehramtsausbildung beschreibt und implementiert (Spannagel & Bescherer, 2009).

In diesem Beitrag werden zunächst nochmals die Grundideen des Konzeptes beschrieben. Anschließend werden die ersten Ergebnisse des Evaluationsdurchlaufes über zwei Semester (Wintersemester 2009/10 und Sommersemester 2010) des Projektes vorgestellt. Anhand dieser sollen eventuelle Auswirkungen auf die universitäre Ausbildung von Lehrkräften in Mathematik diskutiert werden.

1. Das Veranstaltungskonzept an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg

Das Handlungsmodell von Marzano und Kendall (2007) bildet den Rahmen der Veranstaltungskonzeption. Das Modell baut insbesondere auf das Selbst-System des Lernenden, bestehend aus den Einstellungen, Überzeugungen und Emotionen. Demnach werden Handlungen aktiv und engagiert durchgeführt, wenn sich die Person zutraut, die Handlung selbst durchführen zu können. Hierfür spielt Banduras (1997) Konzept der (mathematischen) Selbstwirksamkeitserwartung eine große Rolle. Weiter hat die Motivation der Person einen Einfluss auf die Ausführung der Handlung. Hier spielen die Selbstbestimmungstheorie nach Deci und Ryan (1993) sowie Motivationstheorien (Prenzel et al., 2001) eine entscheidende Rolle.

Aufbauend auf diesen Modellen und Konzepten wurden die Veranstaltungen „Einführung in die Arithmetik“ (Modul 1) und „Einführung in die Geometrie (Modul 2) in der Studieneingangsphase des Studiengangs für das

Lehramt an Realschulen umgestellt. In klassischen Veranstaltungen mit großen Teilnehmerzahlen nehmen die Studierenden meistens Informationen und Wissen nur rezeptiv auf (Holton, 2001). Im Gegensatz dazu soll bei dem Veranstaltungskonzept des Projektes durch Strategien zur wahrgenommenen Autonomie und Kompetenz, sowie sozialer Eingebundenheit die Eigenaktivität der Studierenden gefördert werden. Folgende Umstellungen wurden vorgenommen:

- Die „klassische“ Vorlesung wurde zu einem „aktives Plenum“ mit Gelegenheiten, in denen die Studierenden durch Diskussionen oder Arbeitsphasen selbst aktiv werden.
- Durch Vorlesungsaufzeichnungen und deren Bereitstellung über die Lernplattform Moodle, können die Studierenden Inhalte jederzeit wiederholen oder nacharbeiten.
- Das Übungskonzept wurde dahingehend umgestellt, dass die Studierenden pro Woche aus fünf bis sechs Arbeitsanregungen mindestens die Hälfte auswählen und diese bearbeitet sollen. Hilfe (keine Lösungen) zu den gewählten Arbeitsanregungen erhalten sie in jeder der über die Woche verteilten Übungen oder in Onlineforen auf Moodle.

Weitere und ausführlichere Beschreibungen der Veranstaltungskonzeption sind in Form von Didaktischen Design Patterns (DDP; Bescherer & Spannagel, 2009) unter anderem auf www.sail-m.de zu finden.

2. Evaluation des Veranstaltungskonzeptes

Über ein Jahr hinweg (Wintersemester 2009/10 und Sommersemester 2010) wurden die Studierenden des Studiengangs Lehramt an Realschulen an der PH Ludwigsburg (N=100) untersucht. Zu Beginn des ersten Semesters und jeweils am Ende der Semester wurden mittels Fragebogen die mathematische Selbstwirksamkeit und die Motivation der Studierenden erhoben. Parallel wurden auch die Studierenden an den Pädagogischen Hochschulen in Schwäbisch Gmünd, Weingarten, Karlsruhe und Weingarten untersucht, die nicht diese Veranstaltungskonzeption erlebten (N=1062).

Ursprünglich nahmen an der Studie 1162 Studierende (278 männlich, 884 weiblich, 3 ohne Angabe) teil. Aufgrund von personellen und organisatorischen Veränderungen innerhalb des Projekts und Bedingungen an den Hochschulen, konnten allerdings nur von 59 Studierenden (Treatmentgruppe: N=33) vollständige Datensätze über alle drei Messzeitpunkte hinweg gesammelt werden. Die Studierenden waren vorwiegend im ersten Semester (*Median*=1,00) der Studiengänge für die Lehrämter an Grund-, Haupt- und Realschulen mit dem Fach Mathematik.

Nach dem Ansatz der Aktionsforschung (Altrichter und Posch, 1983) wird innerhalb dieses Beitrages folgende Hypothese bezüglich des Veranstaltungskonzeptes untersucht:

H1: Durch aktivierende Veranstaltungen wird die Selbstwirksamkeitserwartung erhöht, insbesondere bei Studierenden mit niedriger mathematischer Selbstwirksamkeit.

Zur Erhebung der mathematischen Selbstwirksamkeit wurde innerhalb des Projektes der Fragebogen „MaSE-T" entwickelt und validiert (Zimmermann et al., eingereicht). Dieser umfasste 15 Items, die sich in die drei Subskalen „Innermathematische Problemstellungen", „Alltägliche mathematische Problemstellungen" und „Problemstellungen zum Begründen" aufteilen. Für die Vergleichbarkeit der beiden Gruppen wurden die Mittelwerte der jeweiligen Messpunkte unter der jeweiligen Schwerpunktwahl des Faches Mathematik (Hauptfach, Leitfach, affines Fach) berechnet (vgl. Tabelle 1 und Tabelle 2).

Tabelle 1. Mittelwerte der mathematischen Selbstwirksamkeit der Treatmentgruppe nach Schwerpunktwahl (N=33).

	Mittelwert MaSE-T (Messzeitpunkt 1) [1]	Mittelwert MaSE-T (Messzeitpunkt 2)	Mittelwert MaSE-T (Messzeitpunkt 3)
Hauptfach	51,5	58,4	59,6
Leitfach	53,6	59,5	59,6
affines Fach	55,8	61,0	59,5

[1]) Minimum: 15; Maximum: 75

Tabelle 2. Mittelwerte der mathematischen Selbstwirksamkeit der Kontrollgruppe nach Schwerpunktwahl (*N*=26).

	Mittelwert MaSE-T (Messzeitpunkt 1) [1]	Mittelwert MaSE-T (Messzeitpunkt 2)	Mittelwert MaSE-T (Messzeitpunkt 3)
Hauptfach	53,2	54,1	54,6
Leitfach	56,3	51,1	58,4
affines Fach	50,8	52,5	54,3

Eine Varianzanalyse mit Messwiederholung ergab keine signifikanten Unterschiede zwischen den Gruppen. Jedoch ergab sich ein signifikanter Unterschied ($p<0.001$) zwischen dem Messzeitpunkt 1 und Messzeitpunkt 2 bei den Hauptfachstudierenden der Treatmentgruppe. Insgesamt steigerten sowohl die Treatmentgruppe als auch die Kontrollgruppe ihre mathematische Selbstwirksamkeit innerhalb des Untersuchungszeitraumes. Die Treatmentgruppe steigerte sich durchschnittlich um 5,95 Punkte, während die Steigerung bei der Kontrollgruppe durchschnittlich 2,50 Punkte beträgt.

3. Diskussion und Fazit

Insgesamt muss die Untersuchung aufgrund der hohen Ausfallquote an Daten (94,9%) vorsichtig betrachtet werden. Es deuten sich allerdings einige Tendenzen an, die auf eine positive Auswirkung des Veranstaltungskonzeptes schließen lässt. So kann zum einen der signifikante Zuwachs der mathematischen Selbstwirksamkeit bei den Studierenden mit relativ niedriger Selbstwirksamkeit (vgl. Tabelle 1) als auch der durchschnittlich höhere Zuwachs der gesamten Treatmentgruppe darauf hindeuten, dass sich das Veranstaltungskonzept positiv auswirkt. Ein weiterer Evaluationsdurchlauf im Wintersemester 2010/11 und Sommersemester 2011 soll diese vorsichtigen Tendenzen bestätigen.

Literatur

Altrichter, H. & Posch, P. (1998). *Lehrer erforschen ihren Unterricht. Eine Einführung in die Methoden der Aktionsforschung*. Verlag Julius Klinkhardt, Bad Heilbrunn.

Bandura, A. (1997). Self-efficacy. The exercise of control. New York: Freeman.

Bescherer, C.; & Spannagel, C. (2009). Didaktische Entwurfsmuster für technologieunterstützte Übungen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*, Münster: WTM Verlag.

Bescherer, C. & Spannagel, C. (2008). Aktivierendes Mathematik-Lernen zum Studienbeginn. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Münster: WTM-Verlag.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihr Bedeutung für die Pädagogik. Zeitschrift für Pädagogik, 39(2), 223-238.

Holton, D. (2001). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study. Kluwer Academic, Dordrecht, Boston, London.

Marzano, R. J., & Kendall, J. S. (2007). The new taxonomy of educational objectives (2. Auflage). Thousands Oaks, CA: Corwin Press.

Prenzel, M., Kramer, K. & Drechsel, B. (2001). Selbstbestimmt motiviertes und interessiertes Lernen in der kaufmännischen Erstausbildung - Ergebnisse eines Forschungsprojekts. In: K. Beck & V. Krumm (Hrsg.). Lernen und Lehren in der beruflichen Erstausbildung. Konzepte für eine moderne kaufmännische Berufsqualifizierung. Leske und Budrich, Opladen.

Zimmermann, M., Bescherer, C. & Spannagel, C. (eingereicht). A questionnaire for surveying mathematics self-efficacy expectations of Prospective teachers. Eingereicht für den Tagungsband der CERME 7 vom 9. – 12 März 2011 in Rzezsow, Polen.

Katinka BRÄUNLING, Andreas EICHLER, Christoph MISCHO, Freiburg

Subjektive Theorien von Lehrerinnen und Lehrern zum Lehren und Lernen von Arithmetik (STELLA I)

Grundannahme des Projekts STELLA I (Förderung durch das Land Baden-Württemberg) ist es, dass Lehrkräfte die entscheidende Rolle im Transformationsprozess von staatlichen Lehrplänen bis zum Lernergebnis der Schüler und Schülerinnen spielen (Eichler, 2011, Hiebert & Grouws, 2007, Stein et al., 2007). Das in Abbildung 1 dargestellte Curriculums-Modell von Stein et al. (2007) beschreibt diesen Transformationsprozess.

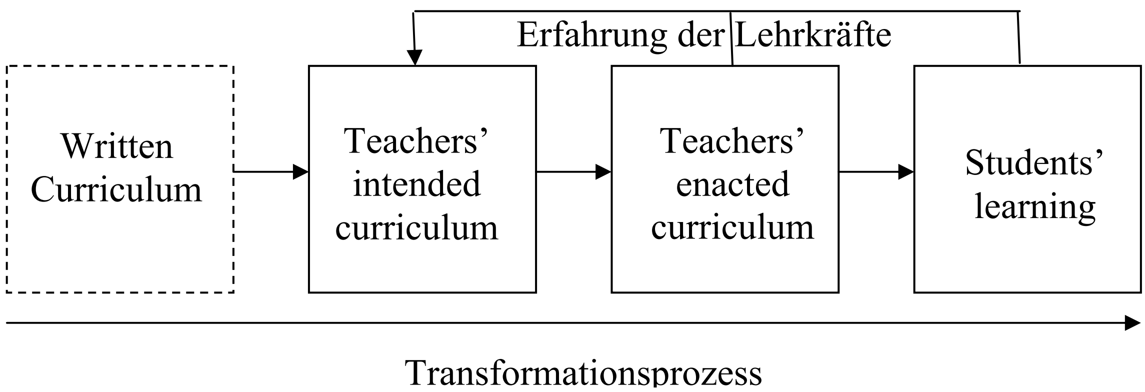


Abbildung 1: Transformationsprozess eines Curriculums

Im Projekt STELLA I sind die Transformationen des staatlichen Curriculums durch die individuelle Unterrichtsplanung (teacher's intended curriculum), sowie die Umsetzung der Planung im Unterricht als Ergebnis der Interaktion von Lehrkraft, Schülern und Stoff (teacher's enacted curriculum) zentral. Die innere Struktur der intended curricula wie auch der enacted curricula wird mit dem Konstrukt der Subjektiven Theorien (Groeben et al., 1988) modelliert.

Auf der Basis dieses Modells fokussiert das Projekt STELLA I folgende Aspekte:

- Inhaltlich werden die teachers' intended curricula und die teachers' enacted curricula bezogen auf die Arithmetik als zentralem Lerninhalt der Primarstufe und der unteren Sekundarstufe I betrachtet.
- Im Querschnitt sollen hier die Struktur der intended curricula bezogen auf mathematikbezogene Vorstellungen (beliefs; Philipp, 2007) sowie Lehrstile (instruktivistisch, konstruktivistisch) untersucht und zudem potentielle Unterschiede zwischen Lehrkräften der Primarstufe und der Sekundarstufe I identifiziert werden.

- Darüber hinaus soll in einem Quasi-Längschnitt die Entwicklung der intended curricula in der Zeit vom Ende des Lehramtsstudiums bis zum Eintritt in die Berufstätigkeit als eigenverantwortliche Lehrkraft untersucht werden.
- Schließlich soll die Handlungsrelevanz der intended curricula in der Realisierung der enacted curricula über Unterrichtsbeobachtungen geprüft werden.

Die Stichprobe besteht aus jeweils fünf Lehrkräften bezogen auf die beiden unterschiedlichen Schulformen sowie die unterschiedlichen Phasen der professionellen Sozialisation (Ende des Studiums, Ende des Referendariats, Berufspraxis). Methodisch werden halbstrukturierte Leitfadeninterviews wie auch Fragebögen für die Erhebung der intended curricula eingesetzt. Die Erhebung der enacted curricula erfolgt mittels Videographie. Die Auswertung des Datenmaterials erfolgt kodierend im Sinne der Qualitativen Inhaltsanalyse.

Mit der im 2. Schulhalbjahr 2011/12 beginnenden Analyse der Daten wird erwartet, neue Erkenntnisse hinsichtlich einer domänenspezifischen Struktur der intended curricula bezogen auf die Arithmetik (vgl. Eichler & Girnat in diesem Band) sowie hinsichtlich der Handlungsrelevanz der mathematikbezogenen Vorstellungen von Lehrkräften und schließlich deren Entwicklung im Referendariat zu erhalten.

Literatur

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Hrsg.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*. New ICMI Study Series, Bd. 15. Heidelberg, New York: Springer (im Druck).

Groeben, N., Wahl, D., Scheele, B. & Schlee, J. (1988). *Forschungsprogramm Subjektive Theorien. Eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts*. Tübingen: Franke.

Hiebert, G.D., & Grouws, J. (2007). The effect of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 371-404). Charlotte: Information Age Publishing.

Mayring, P. (2003). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Weinheim: Beltz.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. (S. 257-315). Charlotte: Information Age Publishing.

Stein, M.K., Remillard, J., & Smith, M.S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 319-369). Charlotte: Information Age Publishing.

Johannes GROß, Landau

Analyse der Lösungsprozesse von Grundschulkindern bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben

Der Begriff „problemhaltige Textaufgaben“ bezeichnet eine Aufgabengruppe, die sich von „normalen Textaufgaben“, den sog. „Routineaufgaben“ unterscheiden (Rasch, 2001). Im Gegensatz zu Routineaufgaben liegen problemhaltigen Textaufgaben sehr anspruchsvolle mathematische Strukturen zugrunde. In der Fachdidaktik wird diese Aufgabengruppe im Vergleich zu Routineaufgaben eingeschränkter thematisiert. Da diese Aufgabengruppe auch kein spezifischer Bestandteil des Teilrahmenplans Mathematik in der Grundschule ist, setzen sie viele Grundschullehrer nicht in ihrem Schulunterricht ein (Stern, 2003). Weitere Forschung zu problemhaltigen Textaufgaben ist folglich notwendig, um diese Aufgabengruppe Fachdidaktikern und Lehrern näher zu bringen.

Eine Repräsentation ist ein physikalisches Objekt oder Ereignis, das für etwas anderes steht (Schnotz, Baadte, Müller & Rasch, 2010). Repräsentationsformen sind sehr wichtige Elemente des Problemlöseprozesses im Mathematikunterricht (Goldin, 2007). Die positiven Effekte von Repräsentationsformen auf das Problemlösen im Grundschulunterricht wurden bereits durch Studien belegt (Stern, 2005). Studien, die sich mit dem Aufbau von Problemlöseprozessen und der Nutzung verschiedener externer Repräsentationen bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben befassen, sind jedoch eher selten. Dies ist besonders unvorteilhaft, weil der direkte Einfluss problemhaltiger Textaufgaben auf die Problemlösekompetenzen der Grundschüler bereits in früheren Studien nachgewiesen werden konnte (z.B. Rasch, 2001). Das Schließen dieser Forschungslücke kann dazu Beitragen Schülern bei der Bearbeitung von Problemlöseaufgaben im Mathematikunterricht zu unterstützen.

Die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten ist ein wichtiges Ziel der Bildungsstandards im Fach Mathematik. Es gibt hier jedoch nur wenige Hinweise, wie man diese Kompetenzen bei den Schülern entwickeln kann. Studien konnten nachweisen, dass problemhaltige Textaufgaben die Problemlösefähigkeit von GrundschülerInnen steigern kann (Rasch 2001). Die PISA-Studie brachte im Bereich analytisch-problemlösendes Denken“ erhebliche Defizite von deutschen Schülern im Mathematikunterricht zu Tage (Collet, 2009). Die Wissenschaft hat nun die Aufgabe, diese Defizite zu erklären und Lösungen hierzu aufzuzeigen. Mit unserer Untersuchung versuchen wir dieses Ziel zu erreichen.

Das Ziel dieses Forschungsvorhabens ist die Analyse der Struktur von Problemlöseprozessen bei der Bearbeitung von komplexen Textaufgaben durch Grundschüler der 2. und 4. Klassenstufe im Allgemeinen und im Hinblick auf die Integration von Repräsentationsformen in den Problemlöseprozess. Um dieses Ziel zu erreichen, wurde ein Kategoriensystem entwickelt, um die Lösungsprozesse bei problemhaltigen Textaufgaben analysieren zu können. Unser System (Groß, Hohn, Telli, Rasch & Schnotz, 2011) besteht aus 14 Kategorien und 47 Facetten, die den gesamten Problemlöseprozess bei problemhaltigen Textaufgaben abdecken. Dieses Kategoriensystem wurde bereits im Rahmen einer Pilotstudie zur Analyse der Lösungsprozesse von Grundschülern der 2. und 4. Klassenstufe bei der Bearbeitung von problemhaltigen Textaufgaben eingesetzt (Groß Hohn, Telli, Rasch & Schnotz, 2011).

Literatur

Collet, C. (2009): Förderung von Problemlösekompetenz in Verbindung mit Selbstregulation fördern. Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen. In: Krummheuer, G. & Heinze, A. (Hrsg.), Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Band 2, Münster: Waxmann.

Goldin, G.A. (2007). Representation in School Mathematics A Unifying Research Perspective. In J. Kilpatrick (Ed.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp.275-285). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Groß, J., Hohn, K., Telli, S., Rasch, R. & Schnotz, W. (2011). Theoretical framework to analyze the problem solving process while handling complex mathematical story problems in primary school. p. 8. Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CEMRE 7), 09.-13.02.2011, Rzeszów, Poland.

Rasch, R. (2001). Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Hildesheim: Franzbecker.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A. & Rasch, R. (2010). Creative Thinking and Problem Solving with Depictive and Descriptive Representations. In L.Verschaffel, E. De Corte, J. Elen & T. de Jong (Eds.), Use of External Representations in Reasoning and Problem Solving. Amsterdam: Elsevier.

Stern, E. (2003). Lernen ist der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung: Der Erwarb mathematischer Kompetenzen. In: W. Schneider & M. Knopf (Hrsg.), Entwicklung, Lehren und Lernen – Zum Gedenken an Franz Emanuel Weinert (S. 207-217). Göttingen: Hoegrefe.

Stern, E. (2005). Kognitive Entwicklungspsychologie des mathematischen Denkens. In van Aster, M. & Lorenz, J. (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft (S.137-149).* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

SEBASTIAN KUNTZE, Ludwigsburg

Lehrkräfte für „große Ideen“ sensibilisieren – Ansätze des Projekts ABCmaths [1)]

Das Projekt „Awareness of Big Ideas in Mathematics Classrooms (ABCmaths)” verfolgt das Ziel, angehende und praktizierende Mathematiklehrkräfte für „große Ideen“ in Mathematik und für den Mathematikunterricht zu sensibilisieren. ABCmaths (www.abcmaths.net) ist ein Comenius Multilaterales Projekt, das von der Europäischen Kommission im Rahmenprogramm „Lebenslanges Lernen“ gefördert wird. In der zweijährigen Projektzeit werden Lernangebote zu großen Ideen für angehende und praktizierende Lehrkräfte erstellt und Entwicklungen professionellen Wissens in diesem Bereich untersucht. Konkret werden beteiligte Mathematiklehrkräfte durch Lernangebote unterstützt, die nach großen Ideen strukturiert sind und sich sowohl auf fachbezogenes und fachdidaktisches Wissen, als auch auf konkrete Beispiele von Interaktionen in Unterrichtssituationen beziehen, in denen große Ideen eine Rolle für Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern spielen können (Kuntze, Lerman, Murphy, Siller et al., 2010a, b). Diese Interventions- und Entwicklungsarbeit korrespondiert mit empirischen Studien, in denen Verbesserungspotentiale im professionellen Wissen von Lehrkräften identifiziert (Analysis of Needs Studies) und Wirkungen von Aus- sowie Fortbildungsmodulen untersucht werden (Evaluation Studies).

Im Projekt kooperieren vier Institutionen in drei Ländern (Deutschland, Großbritannien, Österreich). Beteiligt sind Stephen Lerman und Peter Winbourne von der London South Bank University, Bernard Murphy für Mathematics in Education and Industry (MEI), Hans-Stefan Siller, Karl Josef Fuchs, Christiane Vogl und Michael Schneider von der Paris-Lodron-Universität Salzburg sowie Sebastian Kuntze (Projektkoordination), Elke Kurz-Milcke, Anke Wagner und Claudia Wörn von der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg.

Im Wesentlichen bezieht sich die Projektarbeit von ABCmaths auf die vier in Abbildung 1 dargestellten Bereiche. Exemplarische Einblicke in Ergebnisse der Projektarbeit in diesen Bereichen geben die nachfolgenden Beiträge: Sebastian Kuntze und Elke Kurz-Milcke führen in den theoretischen Hintergrund von ABCmaths ein und stellen Ergebnisse einer empirischen Analysis-of-Needs-Studie zu professionellem Wissen über „große Ideen“ vor. Anika Dreher und Sebastian Kuntze knüpfen an Untersuchen zu globalen Überzeugungen von Lehrkräften an und verbinden Ergebnisse aus ABCmaths mit Reanalysen früherer Studien. Hans-Stefan Siller gibt einen Einblick in die Entwicklungsarbeit von ABCmaths im Schnittbereich der

Aktivitäten und Fragestellungen in ABCmaths

Theoretische Fragestellungen/ Entwicklungsbezogene Fragen:

Theoretische Arbeit:
Welches Wissen in Bezug zu Big Ideas kann aus theoretischer Perspektive identifiziert werden?

Entwicklung von Materialien und Konzepten für Unterricht sowie Aus- und Fortbildung:
Wie können Lerngelegenheiten zur Weiterentwicklung von Wissen zu Big Ideas gestaltet und in Aus- und Fortbildung integriert werden?

Fragestellungen für empirische Untersuchungen:

Studien zu professionellem Wissen von Mathematiklehrkräften:
Über welches mit Big Ideas verknüpftes Wissen verfügen angehende und praktizierende Mathematiklehrkräfte?

Evaluationsuntersuchungen:
Inwiefern kann dieses Wissen durch Aus- und Fortbildung von Lehrkräften gefördert werden?

Abbildung 1: Bereiche der Projektarbeit in ABCmaths

großen Ideen „Funktionale Zusammenhänge beschreiben“ und „vielfältige Darstellungen nutzen“. Auch der Beitrag von Elke Kurz-Milcke und Sebastian Kuntze gehört zur Entwicklungsarbeit von ABCmaths: Im Fokus steht hier die große Idee „Perspektive wechseln“ mit einem Schwerpunkt im Inhaltsbereich „Daten und Zufall“. Betont werden Lernanlässe für die Grundschule. Schließlich stellen Christiane Vogl, Hans-Stefan Siller und Sebastian Kuntze Ergebnisse einer empirischen Studie zu Vorstellungen von Lehramtsstudierenden in Verbindung mit der großen Idee „Modellieren“ vor. Ausführlichere Beiträge zur Projektarbeit werden unter anderem auch im Rahmen von CERME und PME vorgestellt.

Literatur

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Siller, H.-S., Kurz-Milcke, E., Winbourne, P., Fuchs, K.-J., Wagner, A., Wörn, C., Vogl, C. & Schneider, M. (2010a). Große Ideen in der Mathematik sehen – Mathematik im Unterricht mit großen Ideen transparenter machen. ABCmaths – ein EU-gefördertes internationales Drittmittelprojekt. GDM-Mitteilungen, 89, 44-47.

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Siller, H.-S., Kurz-Milcke, E., Winbourne, P., Fuchs, K.-J., Wagner, A., Wörn, C., Vogl, C. & Schneider, M. (2010b). Supporting teachers’ awareness of big ideas in mathematics classrooms. In Pinto, F.M. & Kawasaki, T.F. (Eds.), Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4 (p. 360) Belo Horizonte, Brazil: PME.

1) Das Project ABCmaths wird mit Unterstützung der Europäischen Kommission (503215-LLP-1-2009-1-DE-COMENIUS-CMP) finanziert. Diese Veröffentlichung gibt lediglich die Sichtweisen der Autoren wieder. Die Kommission haftet nicht für jedwede Nutzung der in diesem Beitrag enthaltenen Informationen.

Stefanie RACH, Meike GRÜSSING, Aiso HEINZE, Hans MOORMANN, Stefan UFER, Kiel

Lernen aus Fehlern im Mathematikunterricht – Fehlerkultur und Strategien zum Umgang mit Fehlern

In der pädagogischen Forschung ist es Konsens, dass aus Fehlern im Lernprozess Situationen mit Lernpotential im Unterricht erwachsen können. Oser et al. (1999) schlagen ein mehrstufiges normatives Modell zum erfolgreichen Lernen aus Fehlern vor, dessen Stufen aus dem Erkennen eines Fehlers (Was ist falsch?), der Analyse des Fehlers (Warum ist das falsch?) und der Korrektur des Fehlers (Wie ist es richtig?) bestehen. Guldimann & Zutavern (1999) ergänzen dieses Modell um einen Schritt zum Aufbau von Vermeidungsstrategien (Wie kann man den Fehler vermeiden?). Besonders in Bezug auf den Mathematikunterricht ist anzunehmen, dass eine Erklärung des Fehlers in vielen Fällen für ein erfolgreiches Lernen notwendig ist, da hierdurch erst Vermeidungsstrategien entwickeln werden können.

Vorgestellt werden Design und erste Ergebnisse einer Implementationsstudie mit etwa 30 Mathematikklassen der Jahrgangsstufen 6-9. Ziel der Untersuchung ist es, unterrichtliche Möglichkeiten der Anregung von Strategien zum Lernen aus Fehlern zu evaluieren. Dazu werden zwei Interventionen über ein halbes Schuljahr lang implementiert und empirisch-quantitativ evaluiert. Eine Intervention zielt vorwiegend darauf, Fehler in unterrichtlichen Lernsituationen positiv zu besetzen. Im Rahmen einer zweiten Intervention setzen die Lehrkräfte zusätzlich Unterrichtselemente ein, die das Erklären von (fremden) Fehlern durch die Lernenden beinhalten und Vermeidungsstrategien für solche Fehler erarbeiten.

In einem Vortest-Nachtestdesign mit Kontrollgruppe werden Veränderungen in der Einstellung der Schülerinnen und Schüler zu Fehlern und dem Lernen aus Fehlern mit einem erprobten Fragebogen erhoben. Als Kontrollvariablen dienen das Interesse an Mathematik und das mathematische Selbstkonzept der Lernenden.

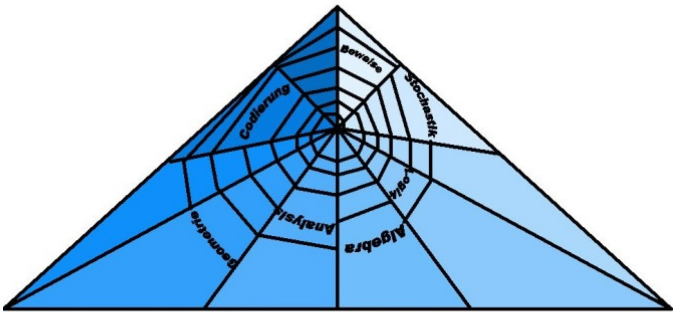
Literatur

Guldimann, T. & Zutavern, M. (1999). “Das passiert uns nicht noch einmal!“ Schülerinnen und Schüler lernen gemeinsam den bewußten Umgang mit Fehlern. In W. Althof (Hrsg.), *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern* (S. 233-258). Opladen: Leske+Budrich.

Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des „negativen“ Wissens. In W. Althof (Hrsg.), *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern* (S. 11-41). Opladen: Leske+Budrich.

Astrid BRINKMANN, Münster; Michael BÜRKER, Freiburg

Bericht des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“



Im Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ der GDM, gegründet 2009, wird eine altbekannte und zentrale Forderung an das Lernen von Mathematik neu betrachtet: Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sollen nicht isoliert voreinander, sinnlos und beziehungslos nebeneinander gelehrt und gelernt werden, sondern in ihrer Wechselbeziehung zueinander, also vernetzt.

In der Sitzung des Arbeitskreises auf der GDM-Tagung 2011 wurde über bisherige und geplante Aktivitäten des Arbeitskreises berichtet. Abgerundet wurde das Sitzungsprogramm durch einen Vortrag von Michael Bürker zum Freiburger Münster in mathematischer Sichtweise – passend zum Tagungsort und zum Arbeitsschwerpunkt des AKs.

Wir geben nachfolgend Kurzfassungen zu den einzelnen Tagungsordnungspunkten:

Top 1. Astrid Brinkmann: Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“

Der erste Band der neuen Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ [1], [2] ist beim Aulis Verlag erschienen. Reihenherausgeberin ist Astrid Brinkmann; die Herausgeber des ersten Bandes sind Astrid Brinkmann, Jürgen Maaß und Stefan Siller.

Die Herausgeber/innen und Autor/innen der Schriftenreihe gehören dem Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ an. Sie präsentieren Ideen und Vorschläge zum Mathematikunterricht, die im Arbeitskreis diskutiert, verbessert und angereichert worden sind. Die Schriftenreihe richtet sich an Mathematiklehrende an Schulen. Die einzelnen Artikel sind daher so aufbereitet, dass Lehrende sie möglichst unmittelbar und gewinnbringend in ihrem Unterricht einsetzen können. Für weitere Details, insbesondere zum ersten Band, verweisen wir auf den Artikel von Brinkmann, Maaß und Siller in diesen Beiträgen zum Mathematikunterricht 2011.

Für den zweiten Band der Schriftenreihe liegen bereits mehrere Artikel vor; weitere Artikel für die Folgebände sind in Arbeit oder angekündigt.

Wir möchten ausdrücklich auch Nicht-Mitglieder unseres Arbeitskreises ermuntern, uns passende Beiträge für die Schriftenreihe einzureichen! (An: astrid.brinkmann@math-edu.de)

**Top 2. Jürgen Maaß:
Kurzbericht über die 2. Tagung des AKs in Linz, 30.04.–01.05.2010**

Die zweite Tagung des Arbeitskreises wurde von Jürgen Maaß in Linz organisiert. In einem Rückblick werden diejenigen, die nicht auf der Tagung dabei sein konnten, informiert. Kurzfassungen der Tagungsbeiträge findet man unter: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html

**Top 3. Andreas Filler, Katharina Klembalski, Swetlana Nordheimer:
Einladung zur 3. Tagung des AKs mit Lehrer/innen-Fortbildung**

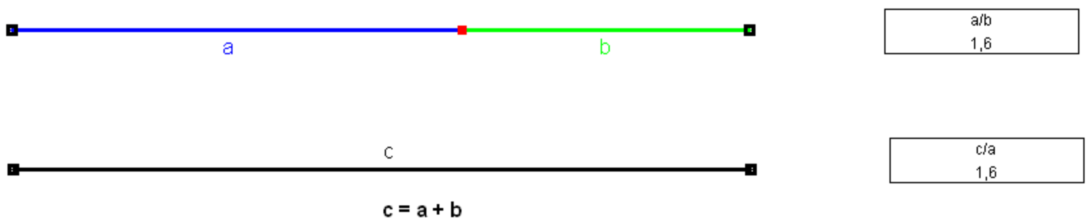
Die 3. Tagung des Arbeitskreises wird am 13.–14. Mai 2011 an der Humboldt-Universität zu Berlin stattfinden. Erstmalig wird im Rahmen dieser Tagung auch eine Lehrer/innen-Fortbildung angeboten, für die bereits mehrere sehr interessante Beiträge geplant sind (siehe: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html).

**Top 4. Michael Bürker:
Das Freiburger Münster mathematisch unter die Lupe genommen**

Da die PH Freiburg Gastgeber der diesjährigen GDM-Tagung ist, habe ich mich näher mit einem der Glanzpunkte von Freiburg, dem Freiburger Münster beschäftigt, angeregt durch verschiedene Kollegen an Freiburger Schulen, die sich bereits intensiv in Unterrichtsprojekten mit dem Freiburger Münster fächerübergreifend, fächerverbindend und vernetzend auseinandergesetzt haben. So hat sich Jürgen Kury, Fachleiter am Seminar für Didaktik und Lehrerbildung für berufliche Schulen in Freiburg, bereits in den 90er Jahren in einem Projekttag mit dem Münster beschäftigt, ich mich im Rahmen eines Unterrichtsversuchs, den Studierende meines Seminars „Einsatz unterschiedlicher Unterrichtsmethoden“ mit Schüler/innen des Freiburg-Seminars und einer 12. Klasse eines Freiburger technischen Gymnasiums durchgeführt haben. Ebenso ist Prof. Wolke, emeritierter Mathematikprofessor und Zahlentheoretiker als Mitglied des Münsterbauvereins ein exzellenter Kenner dieses gotischen Sakralbaus. Wir drei haben am Mittwoch, dem Ausflugsnachmittag etwa 50 Teilnehmern der Tagung eine Führung durchs Münster mit mathematischem Schwerpunkt geboten. Mathematische Aspekte wie die Zahlensymbolik des Mittelalters und der Goldene Schnitt sind in der gesamten Architektur „verborgen“, und dies galt es sozusagen für das interessierte Mathematiker-Publikum ans Tageslicht zu befördern. Denn bei einer „normalen“ Führung durchs Freiburger Münster gehen in aller Regel solche mathematischen Aspekte unter. Im Folgenden will ich etwas zum Goldenen Schnitt sagen, für die Zahlensymbolik verweise ich auf den Beitrag in diesem Band, den Jürgen Kury und ich in einem eigenen Vortrag am Dienstag, dem „Lehrertag“, den Tagungsteilnehmern geboten haben.

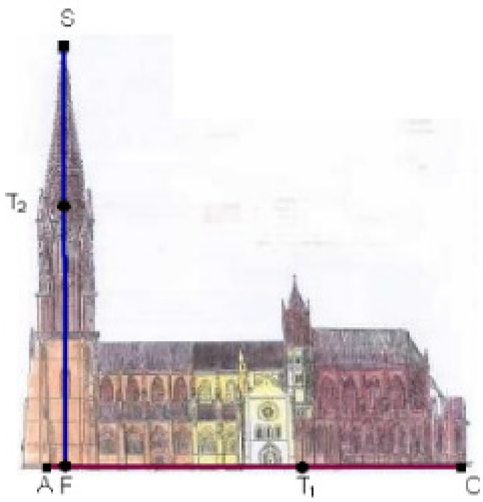
Goldener Schnitt:

Bekanntermaßen ist eine Strecke c im Verhältnis des Goldenen Schnitts geteilt, wenn c die Summe zweier Teilstrecken a und b ist, für die die Gleichung $\frac{c}{a}=\frac{a}{b}$ gilt, wobei a die längere der beiden Teilstrecken ist.



Man kann dies am besten mittels dynamischer Geometrie-Software veranschaulichen.

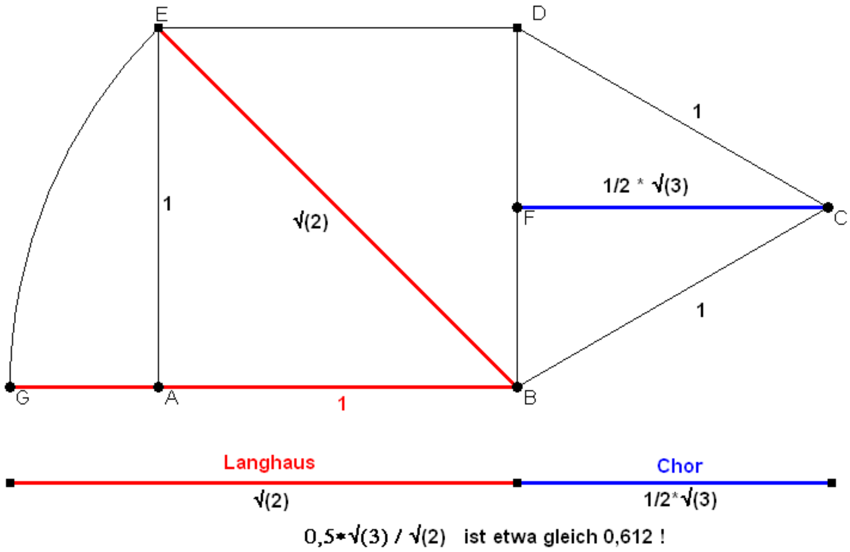
Für das Münster bleibt festzuhalten, dass zum Einen die Länge des Münsters gleich der Höhe des Münsterturms ist (210 Ellen ≈ 116 m),



zum Anderen, dass beide Längen im Verhältnis des Goldenen Schnitts geteilt sind, der Turm in Turmschaft und Turmhelm, d.h. die Strecke FS durch T_2, und die Münsterlänge durch Langhaus und Chor, d.h. die Strecke AC durch T_1.

Interessant ist nun, dass die Baumeister der damaligen Zeit für den Goldenen Schnitt nicht die übliche Konstruktion verwendet haben, die in allen

Schulbüchern dazu gezeigt wird, sondern der folgenden Konstruktionsidee gefolgt sind:



Zeichne ein Einheitsquadrat, trage von B aus über A bis G dessen Diagonale ab. Diese Länge entspricht dem Langhaus. Zeichne über BD ein gleichseitiges Dreieck. Dessen Höhe entspricht dem Chor. Das Verhältnis

$$\mathit{Chor} : \mathit{Langhaus}$$

ist dabei fast genau gleich dem Kehrwert der Goldenen Zahl, nämlich etwa 0,612! Ein merkwürdiger Zufall!

Die Unterrichtsmaterialien zum Thema „Mathematik am Freiburger Münster befinden sich auf den Internetseiten unter [3] und [4].

Literatur:

[1] Brinkmann, Astrid (Reihenhrsg.). Schriftenreihe: *Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht.* München: Aulis Verlag.

http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

[2] Brinkmann, Astrid; Maaß, Jürgen; Siller, Hans-Stefan (Hrsg.). 2011. *Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 1.* München: Aulis Verlag. ISBN 987-3-7614-2836-8.

[3] Bürker, Michael:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/infos.html#Lehrerfortbildungen

[4] Kury, Jürgen:

http://www.zum.de/Faecher/M/BW/M9N/LP5/muenster.html

Katja EIELRTS, Kassel, Christine BESCHERER, Ludwigsburg, Cornelia NIEDERDRENK-FELGNER, Nürtingen-Geislingen

Arbeitskreis ´HochschulMathematikDidaktik´

Die dritte Arbeitskreissitzung fand am 21. Februar 2011 an der Pädagogischen Hochschule Freiburg im Rahmen der GDM-Tagung statt. Durch seine drei gewählten Sprecherinnen sind verschiedene Hochschulformen vertreten: Prof. Dr. Christine Bescherer (Pädagogische Hochschule Ludwigsburg), Vertr.-Prof. Dr. Katja Eilerts (Universität Kassel) und Prof. Dr. Cornelia Niederdrenk-Felgner (Hochschule für Wirtschaft und Umwelt Nürtingen-Geislingen).

Gute Hochschullehre zeichnet sich dadurch aus, dass sie nicht nur an den Fachinhalten orientiert ist, sondern vor allem den Lernprozess der Studierenden im Blick hat. Für die Hochschullehre in Mathematik ergibt sich hier eine besondere Herausforderung, da das Fach für viele Studierende ein - oft wenig geliebter - Pflichtteil ihres Grundstudiums ist und zudem noch den Ruf hat, zum „Aussieben“ benutzt zu werden. In der Schule werden zunehmend didaktisch-methodische Konzepte im Mathematikunterricht verwirklicht, die sich erheblich vom traditionellen Vorgehen unterscheiden. Die Änderung traditioneller und erprobter Veranstaltungsformen hin zu der Umsetzung eines individualisierten, möglichst selbstständigen Mathematiklernens in den Hochschulen wird nicht nur erschwert durch das grundsätzliche Problem der Einführung „neuer“ Lehr-/ Lernformen in traditionelle Studiengänge, sondern auch durch die großen Teilnehmerzahlen in den einzelnen Vorlesungen.

Der Arbeitskreis verfolgt zwei Zielrichtungen:

- Austausch von Ideen und Erfahrungen zu innovativen Lehr-/ Lernkonzepten aus der Praxis der Hochschulveranstaltungen in Mathematik.
- Vernetzung von Personen und Entwicklung einer fachdidaktischen Forschungscommunity, die sich mit Fragen, Untersuchungen und Projekten zum Mathematiklernen an der Hochschule befasst.

Als Impulsreferat dieser Arbeitskreissitzung zum Thema „Vorlesungsstrukturen neu denken“ hielt Nils Buchholtz (AG Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Universität Hamburg) einen Vortrag zum Thema:

„TEDS-Telekom – Ergebnisse des Längsschnitts über drei Messzeitpunkte“

Zentrales Ziel der von der Deutschen Telekom Stiftung geförderten Studie ist die Evaluation des ebenfalls von der Stiftung finanzierten Projekts „Mathematik Neu Denken“, ein Forschungs- und Entwicklungsvorhaben zur Neuorientierung der Gymnasiallehrer-Ausbildung im Fach Mathematik an den Universitäten Siegen und Gießen (ab WS 2009/2010 auch Duisburg-Essen). Die innovativen Ansätze des Projekts wurden aus einem externen Blickwinkel in Hinblick auf die erzielten Effekte im Bereich der mathematischen, mathematikdidaktischen und erziehungswissenschaftlichen Kompetenzentwicklung der Studierenden und der Entwicklung der zugehörigen Überzeugungen *(beliefs)* untersucht.

Die Evaluationsstudie konzentriert sich im Bereich Mathematik und Mathematikdidaktik auf die in den ersten Semestern der Mathematiklehrerausbildung für Gymnasien zentralen Domänen des professionellen Wissens, wie sie durch Shulman (1986) und Bromme (1992, 1997) herausgearbeitet wurden, sowie die zugehörigen Überzeugungen, zu deren Erfassung auf die Arbeiten von Grigutsch, Raatz & Törner (1998) zurückgegriffen wurde:

- Universitäres mathematisches Wissen im Bereich Analysis und Lineare Algebra/Analytische Geometrie;
- Mathematikdidaktisches Wissen im Bereich Didaktik der Oberstufe;
- Elementarmathematik vom höheren Standpunkt als Verzahnung dieser beiden Wissensdomänen im Sinne von Felix Klein;
- Berücksichtigung der Überzeugungen *(beliefs)* zur Mathematik als Wissenschaft und zum Lehren und Lernen von Mathematik;

Zurückgegriffen wurde dabei unter anderem auf Ansätze der internationalen Lehrerbildungsstudie **T**eacher **E**ducation and **D**evelopment **S**tudy – Learning to Teach **M**athematics (TEDS-M 2008; Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010), einer Studie der IEA zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung, die einen externen Bezugsrahmen darstellt.

Einen weiteren externen Maßstab bilden Universitäten, die unter freiwilliger Teilnahme an der Evaluation für Testungen gewonnen werden konnten. Insgesamt konnten so die Anfängerkohorten an den fünf Universitäten Gießen, Siegen, Bielefeld, Essen und Paderborn getestet werden. An der Universität Siegen nahmen zudem für einen direkten Vergleich sowohl die fortgeschrittenen Studierenden der geförderten Projektjahrgänge als auch die neue Eingangskohorte an der Erhebung teil.

Um Aussagen über den Lernstand und die Lernstandsentwicklung der Anfängerkohorten treffen zu können, ist die Studie als echter Längsschnitt angelegt. Die Messzeitpunkte, an denen die Studierenden mit einem 90-minütigen *paper and pencil* Test befragt wurden, lagen dabei zu Beginn des ersten Semesters (Dez. 2008), am Ende des zweiten Semesters (Juli 2009) und am Ende des vierten Semesters (Juli 2010). Zentrale Annahmen für die Auswertung der Ergebnisse der Testungen waren messbare Leistungsfortschritte vom ersten zum dritten Erhebungszeitpunkt, also vom Beginn des ersten Semesters zum Ende des vierten Semesters, sowie, dass diese Leistungsfortschritte in ihrer Höhe nach dem erzielten Eingangsniveau, den Lernvoraussetzungen der Studierenden und den an den Universitäten angebotenen Lerngelegenheiten, also dem Innovationspotential der Studiengänge (Integration der Wissensdomänen, Umfang der Lerngelegenheiten usw.) variieren. Die Ergebnisse des Längsschnitts über alle drei Messzeitpunkte liegen mittlerweile vor und wurden in Ausschnitten im Arbeitskreis dargestellt.

Um den Einfluss von verschiedenen – auch über das Projekt „Mathematik Neu Denken“ hinausgehenden – institutionellen und hochschuldidaktischen Aspekten auf den individuellen Kompetenzerwerb darüber hinaus aus einem anderen methodologischen Blickwinkel zu untersuchen, wurden mit 19 Studierenden zusätzlich problemzentrierte Leitfadeninterviews nach Witzel (1982) durchgeführt, bei denen die Studierenden über die Wahrnehmung und Einschätzung von Lerngelegenheiten und hochschuldidaktischen Aspekten ihres Studiums befragt wurden. Die Interviews werden derzeit mit der Methode der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2000) ausgewertet. Insgesamt liegt der Studie damit ein „Mixed-Methods-Design“ zugrunde.

Die Ausweitung der Studie auf die Kohorte des von der Deutschen Telekom Stiftung geförderten Projekts „Mathematik Besser Verstehen“ an der Universität Duisburg-Essen befindet sich derzeit in Planung.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010): TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann Verlag.

Bromme, R. (1992): Der Lehrer als Experte: Zur Psychologie des professionellen Wissens. Bern: Huber.

Bromme, R. (1997): Kompetenzen, Funktionen und unterrichtliches Handeln des Lehrers. In: Weinert, F. E. (Hg.): Enzyklopädie der Psychologie: Psychologie des Unterrichts und der Schule. Bd. 3. Göttingen: Hogrefe, S. 177–212.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998): Einstellung gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. Journal für Mathematik-Didaktik, 19, S. 3-45.

Mayring, P. (2000): Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Shulman, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching. In: Educational Researcher, Jg. 15, H. 2, S. 4–14.

Witzel, A. (1982): Verfahren der qualitativen Sozialforschung. Überblick und Alternativen. Frankfurt/New York: Campus Verlag.

In der anschließenden Diskussionsrunde wurden die folgenden Fragen diskutiert:

- Sind lehramtsspezifische Veranstaltungen sinnvoll und wenn ja, wie lassen sie sich realisieren?
- Was können wir aus den Abbrecherquoten lernen?
- Wie sehen das Gießener und Siegener Konzept eigentlich aus?

Abschließend wurden neben der Gewinnung neuer Teilnehmer mögliche Ideen für die Weiterarbeit des Arbeitskreises im Rahmen einer Herbsttagung zum Thema „Vorlesungsstrukturen neu denken“ besprochen.

Anfragen bezüglich des Arbeitskreises und Interesse bzgl. Teilnahme an der Herbsttagung 2011 können den Sprecherinnen jederzeit unter der E-Mail Adresse: didaktik@hochschulmathematik.de mitgeteilt bzw. weitere Informationen der Homepage: www.hochschulmathematikdidaktik.de entnommen werden.

Gert KADUNZ, Klagenfurt

Treffen des GDM Arbeitskreises „Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik“ in Freiburg

Wie seit zahlreichen Bundestagungen wurde auch im Rahmen der Tagung der GDM in Freiburg ein Treffen des Arbeitskreises veranstaltet. Die Tagesordnung umfasste folgende Punkte:

1. Bericht über die Herbsttagung 2010
2. Der aktuell erschienene Sammelband „Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik“
3. Planung der Herbsttagung 2011
4. Kongress der Deutschen Gesellschaft für Semiotik 2011
5. Sonstiges

Ad 1.) In der Zeit vom 22. bis 24. September 2010 wurde die diesjährige Herbsttagung in der Benediktiner Abtei St. Stephan in Augsburg veranstaltet. Das Tagungsprogramm zeigte den breiten Querschnitt mathematikdidaktischer Fragen, welche von den Kollegen und Kolleginnen des Arbeitskreises behandelt werden. Astrid Fischer (Oldenburg) berichtete in ihrem empirisch fundiertem Vortrag über Fragestellungen der elementaren Algebra und deren Interpretationen mit Mitteln der Semiotik. Willi Dörfler (Klagenfurt) erörterte in seinen epistemologisch orientierten Ausführungen die Beziehung von möglichen Referenten zu jenen Zeichen, die in der Mathematik verwendet werden. Zum Thema der Aufmerksamkeit sprach Falk Seeger (Bielefeld) in seinem kognitionspsychologisch fundierten Beitrag. Einen Forschungsansatz, welcher eine Qualifikationsarbeit lenken könnte, wurde von Christina Krause (Bremen) vorgestellt. Wie ist vorzugehen, wenn eine semiotische Sicht auf die Konstruktion mathematischen Wissens beschrieben werden soll? Christof Schreiber (Frankfurt) unternahm in seinem kurzen Impulsbeitrag „In the mind“ den erfolgreichen Versuch, eine ausführliche Diskussion zu den Relata des Peirce’schen Zeichenbegriff anzustoßen. Zu Fragen im Umfeld „mathematischen Bewusstseins“ stellte Ysette Weiss-Pidstrygach (Göttingen) ein vielschichtiges und umfangreiches Projekt vor, welches sie in Kooperation unter anderem mit Rainer Kaenders (Köln) und Ladislav Kvasz (Prag) betreibt. Im letzten Vortrag der Herbsttagung präsentierte Felix Poklukar (Klagenfurt/Ferlach) eine semiotische Sicht auf die Entwicklung von Begriffen in der Physik.

Ad 2.) Im Dezember 2010 erschien bei Franzbecker der aktuelle Sammelband des Arbeitskreises: „Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik“ (ISBN 978-3-88120-813-0). Die Beiträge dieses Bandes behandeln einige der zentralen Fragen der Mathematikdidaktik. Die Bandbreite der Überlegungen reicht von Vorschlägen zum Einsatz der Semiotik in der Ausbildung von Lehramtsstudierenden über erkenntnistheoretische Überlegungen zur Mathematik und Mathematikdidaktik bis hin zu einer detaillierten Aufgabenanalyse mit Mitteln der Linguistik.

Ad 3.) Für die Zeit vom 28. September bis einschließlich 30. September 2011 ist die diesjährige Herbsttagung des GDM Arbeitskreises "Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik" geplant. Ort ist wie schon in den letzten Jahren die Benediktiner Abtei St. Stephan, Stephansplatz 6 86152 Augsburg. Interessierte sind herzlich zur Teilnahme an dieser Veranstaltung eingeladen. Die Tagung wird vor allem durch Vorträge zu aktuellen Forschungsvorhaben bestimmt sein. Gleichzeitig sind moderierte Diskussionen zu speziellen Fragen aus Semiotik und Linguistik – stets mit Bezug zur Mathematikdidaktik – willkommen. Aktuelle Informationen findet man unter: http://wwwu.uni-klu.ac.at/~kadunz/semiotik/

Ad 4.) In der Zeit vom 12. – 16. Oktober 2011 veranstaltet die DGS (Deutsche Gesellschaft für Semiotik) in Potsdam einen Semiotik-Kongress (http://www.semiose.de/index.php?id=0,80). In die Planung wurde auch eine Sektion "Kulturwissenschaft und Mathematik: Lernen von Peirce. Virtualität und Erfahrung in Kulturwissenschaft, Mathematik und Naturwissenschaft“ aufgenommen. Moderiert wird diese Sektion von Prof. Dr. Elize Bisanz und Prof. Dr. Herbert Gerstberger. Interessierte sind zur aktiven Teilnahme an diesem Kongress herzlich eingeladen. Weitere Informationen findet man unter: 630,68-.

Ad 5.) Von den anwesenden Kolleginnen und Kollegen wurden die bisherigen Sprecher des Arbeitskreises in ihrer Funktion bestätigt. Dies bedeutet, dass auch in der nächsten Funktionsperiode Barbara Schmidt-Thieme (Universität Hildesheim), Willi Dörfler und Gert Kadunz (beide Universität Klagenfurt) als Sprecherin bzw. Sprecher des Arbeitskreises fungieren werden.

Christof SCHREIBER, Frankfurt & Silke LADEL, Karlsruhe

Arbeitsgruppe „Lernen, Lehren und Forschen mit Neuen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe“

Die Arbeitsgruppe hatte in diesem Jahr eine selbstmoderierte Sektion, in der Felix Krawehl, Christof Schreiber, Bernhard Rauh und Silke Ladel vortrugen. Außerdem fand das regelmäßige Treffen der Arbeitsgruppe statt.

1. Selbstmoderierte Sektion

Felix Krawehl (Universität Hamburg) stellte ‚Bausteine der (e-)Portfoliomethode für mathematikdidaktische Lehrveranstaltungen’ vor, und betrachtete diese in der Perspektive der Didaktik der Mathematikdidaktik (D2M) und ebenso der Perspektive der Lernenden. Dazu ging er auf die Verwendung von Portfolios in den unterschiedlichen Phasen der Lehrerbildung ein. Anwendungsmöglichkeiten und deren Auswirkung auf die Studienstruktur stellte er dar. Seine eigene Umsetzung in universitären Veranstaltungen illustrierte er anschaulich. Dabei wies er auf die Kollaborationsmöglichkeiten verwendeter Lernplattformen hin.[1]

Christof Schreiber (Goethe-Universität Frankfurt) beschrieb im Rahmen seines Vortrages ‚Schriftlichkeit, Mündlichkeit und Neue Medien’ den ‚Mathe-Chat’, die wikibasierte Lernplattform ‚WiLM@’ und das Konzept von mathematischen Podcasts aus der Primarstufe als drei Beispiele für schriftliche und mündliche Kommunikation zu mathematischen Themen. Diese ordnete er in ein zweidimensionales Modell von Schriftlichkeit und Mündlichkeit ein. Dabei eröffnete er Perspektiven für mathematische Lernprozesse, aber auch für die mathematikdidaktische Forschung.[2]

Bernhard Rauh (PH Ludwigsburg) referierte Forschungsergebnisse aus dem Forschungsprojekt COLEM. Im Zentrum standen theoretische Erträge. Als entscheidender 'didaktischer Mehrwert' Digitaler Medien im elementaren arithmetischen Bereich wurde die Unterstützung der Übersetzung zwischen verschiedenen Repräsentationsformen konturiert. Dieses Potential scheint gewichtiger zu sein als der Beitrag Digitaler Medien zur ‚Konsolidierung und Automatisierung’ bereits erworbenen Wissens. Die Möglichkeit zur ‚mediatisierten Handlung’ mit am Computerbildschirm ikonisch dargestellten Objekten stellt für die Förderung des Operationsverständnisses einen Zwischenschritt im intermodalen Transfer zwischen enaktiver und ikonischer Repräsentation dar. Besonders bei rechenschwachen Schü-

[1] Siehe Krawehl (2011) in diesem Tagungsband.

[2] Siehe Schreiber (2011) in diesem Tagungsband.

lerinnen und Schülern könnte diese Unterstützung von besonderer Bedeutung zu sein.[3]

Silke Ladel (PH Karlsruhe) stellte unter dem Titel ‚Multiplex-R: Zum Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen von Zahlen und Operationen bei 5-bis 8-jährigen Kindern' erste Ergebnisse einer Untersuchung zur Gestaltung und Problematik von Darstellungswechseln vor. Eingebettet ist diese Untersuchung in das Projekt Multiplex-R, bei dem sie der Frage nachgeht, ob und wenn ja wie der Aufbau grundlegender Zahl- und Operationskonzepte durch den Einsatz von Multi-Touch-Technologie unterstützt werden kann. In dem Zusammenhang wurde im Vortrag auf das Teil-Ganze-Konzept und Finger-Symbol-Sets eingegangen.[4]

2. Treffen der Arbeitsgruppe

Zum Treffen am Donnerstag waren die folgenden Tagesordnungspunkte vorgegeben:

- TOP 1: Rückblick auf die Tagung in Tabarz 2010
- TOP 2: Resümee der Sektion in Freiburg
- TOP 3: Weitere Schritte für die Veröffentlichung
- TOP 4: Planung Treffen Karlsruhe (Mai 2011)
- TOP 5: Sonstiges

Zu TOP 1: Rückblick auf die Tagung in Tabarz 2010:

In Tabarz gab es in 2010 zunächst ein Vortreffen von Freitag auf Samstag mit einer Arbeitssitzung am Samstag. Hier gab es Präsentationen von Felix Krawehl zum ‚Rahmen für mathematik-didaktische Evaluation von Unterrichtssoftware', von Silke Ladel zu ‚Finger-Symbol-Sets zur Verbesserung des Zahl- und Operationsverständnisses', von Hartwig Meissner zum ‚Projekt Taschenrechner (TIM): Kopfrechentraining und Entwicklung von Zahlgefühl', von Alexandra Merkel zu ‚WiLM@ - wiki-basierte Lernumgebung zum kooperativen Lernen mit Neuen Medien im Mathematikunterricht' und von Christof Schreiber zu ‚Neue Medien in allen Phasen der Lehrerbildung'. Die Beiträge wurden ausführlich diskutiert und boten die Grundlage für den Marktplatz am Samstag. Die Kombination von Vorträgen im Vorfeld und Marktplatz im Rahmen der Arbeitsgruppensitzung scheint rückblickend sehr gut gelungen.

[3] Siehe Rauh (2011) in diesem Tagungsband.

[4] Siehe Ladel (2011) in diesem Tagungsband.

Im Rahmen der Arbeitskreissitzung wurden auch erste Schritte für eine gemeinsame Veröffentlichung geklärt und ein Treffen im Frühjahr 2011 nach der GDM-Tagung geplant, das besonders für die Veröffentlichung genutzt wird.

Zu TOP 2: Resümee der Sektion in Freiburg:

Die Organisation der Vorträge als gemeinsame selbstmoderierte Sektion findet allgemein positive Rückmeldung. Die Abfolge der Vorträge in einem Raum, das gemeinsame Auftreten und die Moderation wurden positiv erfahren. Gewünscht wurde, dass die Sektion noch klarer sichtbar würde, was auf der kommenden GDM-Tagung unterstützend wäre. Eine selbstmoderierte Sektion der Arbeitsgruppe ‚Lernen, Lehren und Forschen mit Neuen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe' ist auch für die nächste GDM-Tagung gewünscht.

Zu TOP 3: Weitere Schritte für die Veröffentlichung:

Die Arbeitsgruppe ‚Lernen, Lehren und Forschen mit Neuen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe' plant eine Veröffentlichung mit der Zielgruppe Mathematikdidaktiker, Lehrende im Bereich der Lehrerbildung, Studierende, Referendare und Referendarinnen. Das Ziel ist, Aufmerksamkeit zu schaffen für den Einsatz Neuer Medien zum Lernen, Lehren und Forschen im Mathematikunterricht der Primarstufe. Hierbei wurde erneut der Begriff der ‚Neuen Medien' diskutiert.

Für die Beiträge wird es ein ‚Peer-Review Verfahren' geben. Je Beitrag werden dies zwei Reviews sein, eines von einem Mitautor, eines von einem der Herausgeber. Ein Inhaltsverzeichnis (evtl. mit Einteilung in Unterbereiche), ein Vorwort und die Einleitung als Überblick gestalten die Herausgeber.

Die Beiträge sollten 15-25 Seiten haben, je nach Zahl der Beiträge. Näheres ist im Mai bei einem gemeinsamen Treffen festzulegen.

Als Deadline für ein Abstract von 2-4 Seiten steht nun der 29. April 2011 fest. Diese gehen allen Mitautoren anschließend gesammelt zu, zur Vorbereitung eines Treffens im Mai. Zum Treffen am 20./21. Mai werden die Abstracts dann jeweils mit einem Kurzvortrag von 10-15 Minuten vorgestellt und ausführlich diskutiert.

Das Erscheinen ist für 2012 geplant.

Zu TOP 4: Planung Treffen Karlsruhe (Mai 2011):

Das Treffen wurde nach der Lage im Doodle auf den 20./21. Mai 2011 gelegt und findet an der Pädagogischen Hochschule in Karlsruhe statt. Geplant ist dabei je eine Arbeitsphase am Fr. 13-18 Uhr und am Sa 9-13 Uhr.

Es ist für jeden der Beiträge eine Kurzpräsentation à 10-15 min. und eine anschließende Diskussion à 45 min. geplant, in welcher der Beitrag ausführlich besprochen werden kann.

Zu TOP 5: Sonstiges:

Silke Ladel weist nochmals auf den aktuellen Stand des Auftrittes in Madipedia hin. Felix Krawehl hat hier die Arbeitsgruppe bereits sehr gut dargestellt. Alle Mitglieder der Arbeitsgruppe sind aufgerufen, den Auftritt weiterhin noch zu ergänzen, wobei Felix Krawehl seine Unterstützung anbietet.

Die Tagung des Arbeitskreises Grundschule in Tabarz 04.-06.11.2011 steht unter dem Motto ‚Medien und Materialien'. Das kann auch die Bedeutung der Neuen Medien für das Lernen, Lehren und Forschen in den Fokus rücken. Diskutiert wird eine erneute Beteiligung mit einem Marktplatz, der evtl. öffentlicher wird, als im vergangenen Jahr. Die Zahl möglicher Beiträge ist aber noch recht unklar. Das Thema wird auf dem Treffen im Mai erneut aufgegriffen werden.

Der Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik (AKMUI) der GDM tagt dieses Jahr vom 23.-25.09.2011 in Soest. Der AKMUI kommt der Bitte unserer Arbeitsgruppe nach, ein Thema zu wählen, zu dem auch unsere Arbeitsgruppe einen Beitrag erbringen kann.