Beiträge zum Mathematikunterricht 2008 Online

Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik
Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

vom 13.3. bis 18.3.2007 in Budapest

Herausgeberin: Eva Vásárhelyi

Produzenten der Online-Fassung: Michael Link, Susanne Prediger

Produzenten der CD-Fassung: Michael Link, Susanne Prediger, Karel Tschacher

Verlag der Papierfassung: Martin Stein Verlag, Münster

Verzeichnis aller Artikel

In diesem File werden die Artikel in alphabetischer Reihenfolge aufgeführt.

* weist auf eine erweiterte CD-Version hin

VORHÖLTER, Katrin
Modellierungsaufgaben als Sinnangebote für Schülerinnen und Schüler

GREEFRATH, Gilbert
Problemlöse- und Modellbildungsprozesse bei Schülerinnen und Schülern
COLLET, Christina und BRUDER, Regina
Langzeitstudie zu einer Lehrerfortbildung zum Problemlösen in Verbindung mit Selbstregulation
GREEFRATH, Gilbert
Untersuchung von Modellbildungs- und Problemlöseprozessen
SCHUKAJLOW, Stanislaw und LEISS, Dominik
Textverstehen als Voraussetzung für erfolgreiches mathematisches Modellieren – Ergebnisse aus dem DISUM-Projekt
MÜLLER, Marcel
Analysen zur Bearbeitungsqualität von Schülerlösungen bei Modellierungsaufgaben

HEFENDEHL-HEBEKER, Lisa und OLDENBURG, Reinhard
Wege in die Algebra
BERTALAN, Dagmar
Die Rolle verschiedener Repräsentationsformen in einem ersten Zugang zu linearen Gleichungen
FISCHER, Astrid
Darstellen mathematischer Strukturen mit Hilfe von zeichnerischen Diagrammen – Beispiele aus Klasse 5
GERHARD, Sandra
Algebra in der Grundschule – Von konkreten Größenvergleichen zu abstrakten Gleichungen

HENN, Hans-Wolfgang
Mathematikunterricht in Europa – A European Network (DQME II)
LIEDMANN, Céline
Developing Quality in Mathematics Education II
HENN, Hans-Wolfgang
Realitätsnaher Mathematikunterricht in europäischem Kontext
GÖTTGE, Silke und HÖGER, Christof
Mathematikunterricht in Europa – an european network (DQME II)

HUMENBERGER, Hans
Neues ins Spiel bringen – Spieltheorie für die Schule
ABLEITINGER, Christoph
Spieltheoretische Situationen dynamisch betrachtet
HAUER-TYPPELT, Petra
Das Nash-Gleichgewicht – ein zentrales Lösungskonzept der Spieltheorie
HUMENBERGER, Hans
Nash-Gleichgewicht und Minimax-Konzept – eine Gegenüberstellung

KAENDERS, Rainer
Niederländische Mathematikwettbewerbe in NRW – eine etwas andere Begegnung mit Mathematik
GORIS, Tom und LIPPERT, Matthias
Wie Mathematik entsteht: Der niederländische Mathematikwettbewerb A-lympiade
KAENDERS, Rainer H. und GORIS, Tom
Neugierig auf Mathematik: Wiskunde B-dag

KAISER, Gabriele und KRAUSS, Stefan
Professionswissen zukünftiger und praktizierender Mathematiklehrpersonen
BLUM, Werner – KRAUSS, Stefan und NEUBRAND, Michael
Zusammenhänge des Professionswissens mit Lehrermerkmalen, Unterrichtsqualität und Leistungszuwächsen der Schüler
KRAUSS, Stefan und BRUNNER, Martin
Professionelles Reagieren auf Schülerantworten: Ein Reaktionszeittest für Mathematiklehrkräfte
KÖNIG, Johannes und BLÖMEKE, Sigrid
Unterschiede im pädagogischen Wissen von Lehramtstudierenden mit und ohne Mathematik
SCHWARZ, Björn und KAISER, Gabriele
Professionswissen von Lehramtsstudierenden im Bereich Argumentieren und Beweisen

KAUNE, Christa und SJUTS, Johann

Das Telekom-Modellprojekt „Mathematik Gut Unterrichten“

KAUNE, Christa

Lehrercoaching zur Verbesserung der Unterrichtsqualität – das Telekom-Modellprojekt „Mathematik Gut Unterrichten“

SJUTS, Johann

Adaptivität und Diagnostik: Was die Bearbeitung passender Aufgabenstellungen aufdecken kann

KUNTZE, Sebastian und REISS, Kristina

Modellieren lernen – Ansätze des Projekts KOMMA zu Kompetenzmodellen und zur Förderung mit heuristischen prozessbezogenen Lösungsbeispielen

REISS, Kristina – KUNTZE, Sebastian –PEKRUN, Reinhard und UFER, Stefan

Die Kompetenz „Modellieren“ in Verbindung mit unterschiedlichen Leitideen – von Zielen der Bildungsstandards zu Fragen der Konzeption von Kompetenzmodellen

ZÖTTL, Luzia und REISS, Kristina

Modellierungskompetenz fördern mit heuristischen Lösungsbeispielen

ZAUNER, Harald –LINDMEIER, Anke und REISS, Kristina

„Habe ich alles bedacht?“ – Ein Modell zur Strukturierung heuristischer Lösungsbeispiele aus dem Bereich der Leitidee „Daten und Zufall“

LADEL, Silke

Zum Computereinsatz im Mathematikunterricht der Grundschule

LADEL, Silke

Zur Darstellung von Arithmetik bei der Gestaltung von Software für den Anfangsunterricht

HARRASS, Nicole

Analyse von Lernsoftware und sinnvollen Einsatzmöglichkeiten – Üben mit dem Computer im Arithmetikunterricht

KRAUTHAUSEN, Günter

Wie weiter mit dem Computer im Mathematikunterricht der Grundschule?

NOLTE, Marianne

Zur Situation von Menschen mit niedrigen mathematischen Qualifikationen

LÜBS, Bettina

Das Lernportal ich will lernen

NOLTE, Marianne

Zur Situation von Menschen mit niedrigen mathematischen Qualifikationen – Nichtrechner

REZAT, Sebastian und STRÄSSER, Rudolf

Mathematikbücher ? Instrumente des Lehrens und Lernens

REZAT, Sebastian

Mathematikbücher als Instrumente des Lernens

STRÄSSER, Rudolf

Das Mathematikbuch als Instrument des Lehrens

ROTH, Jürgen

Kunst – Mathematik – Musik: Visualisieren und Interpretieren

ANZENHOFER, Stefanie

Musikalische Graphen können den Mathematikunterricht beleben

WÖRLER, Jan

Mathematik und Konkrete Kunst: Verbindungen zwischen scheinbar fremden Welten

ROTH, Jürgen

Konkrete Kunst analysieren und gestalten – Mathematik fächerverbindend unterrichten

SILL, Hans-Dieter

Konzeption und Evaluation von Lehrerfortbildungen

RÖSKEN, Bettina

Zu innovativen Aspekten von Lehrerfortbildung

SILL, Hans-Dieter und HELLMIG, Lutz

Konzept einer Lehrerfortbildung zu polyvalenten Aufgaben

HELLMIG, Lutz und SILL, Hans-Dieter

Durchführung und Evaluation von Lehrerfortbildungen zu polyvalenten Aufgaben

SILLER, Hans-Stefan

Funktionales Modellieren – neue Wege für einen modernen Mathematik und Informatikunterricht

SILLER, Hans-Stefan
Über die Bedeutung der grafischen Repräsentation beim Funktionalen Modellieren

FUCHS, Karl Josef
Die Funktion – Basiselement der Informatik

SILLER, Hans-Stefan – FUCHS, Karl Josef und VÁSÁRHELYI, Éva
Funktionales Modellieren (kurz: FM) mit einem Hand-Held

STEINWEG, Anna Susanne

Mathematische Begegnungen im Elementarbereich

STEINWEG, Anna Susanne
Grundlagen matematischen Lernens von der Schule

BENZ, Christine
„Zahlen sind nichts Schlimmes“ – Vorstellungen von Erzieherinnen über Mathematik im Kindergarten

EINIG, Andrea
Zahlbegriffsentwicklung im frühen Kindesalter

GASTEIGER, Hedwig
Lernanregungen und -dokumentation im Alltag der Kindertagesstätte – ein kompetenzorientierter Förderansatz

WASSNER, Christoph und EICHLER, Andreas

Stochastik im Mathematikunterricht

EICHLER, Andreas
Alltäglicher Stochastikunterricht an deutschen Gymnasien

WASSNER, Christoph und KRAUSS, Stefan
Natürliche Häufigkeiten – Rückschau und Ausblicke zu einem gewinnbringenden didaktischen Konzept

BOROVCNIK,* Manfred
Gesetze des Zufalls

Sektionsvorträge

ABLEITINGER, Christoph und GÖTZ, Stefan
Konkurrenzgrenzen: kann man sie verstehen?

ANDŽĀNS, Agnis
Coding and Mathematical Competitions

APPELL, Kristina – ROTH, Jürgen und WEIGAND, Hans-Georg
Experimentieren, Mathematisieren, Simulieren – Konzeption eines MATHEMATIK-Labors

ASTLEITNER, Hermann
Zur Kompatibilität von mathematik-didaktischen und Instructional Design-Ansätzen zum komplexen Lernen

BECKMANN, Astrid
Fächerübergreifender Unterricht zwischen Mathematik und Kunst

BENÖLKEN, Ralf
Besonderheiten mathematisch begabter Mädchen im Grundschulalter

BESCHERER, Christine und SPANNAGEL, Christian
Aktivierendes Mathematik-Lernen zum Studienbeginn

BIKNER-AHSBAHS, Angelika
Wie konstruieren Lernende mathematisches Wissen?

BIRKENHAKE,* Christina
Symmetrie und Kunst im Geometrieunterricht

BRAUN, Thorsten und NIEHAUS, Engelbert
Förderung von Schüler(-inne)n mit besonderer mathematischer Begabung am Beispiel der Stochastischen Netze

BRENNER,* Hans-Joachim
Zur Vorbereitung auf und zu den Inhalten von regionalen Fortbildungsveranstaltungen

BROCKMANN, Bernhard
Computereinsatz im Mathematikunterricht – Ein Rückblick auf die Anfänge

BRÜCKNER, Axel
25 Jahre Potsdamer L-S-A-Modell

BRUNNER, Martin und KRAUSS, Stefan
Geschlechtsunterschiede in Mathematik: Eine Frage des Messmodells?
BÜRKER, Michael
Hundert Jahre Raumzeit – Grundideen der Relativitätstheorie als mathematikdidaktische Herausforderung
DEÁK,* Ervin
Ein neuer – didaktisch fundierter – Begriff der Verhältnisgleichheit von Streckenpaaren
DORFMAYR, Anita
Vom Duplikat zum Original – Das didaktische Potenzial von Hintergrundbildern
EHRET, Carola
Schreiben im Mathematikunterricht der Hauptschule
EID, Wolfram
Gedanken zur Gestaltung von Aufgaben für zentrale Abiturprüfungen
EISENMANN, Petr
Reale Experimente im Mathematikunterricht
FEST, Andreas
Aufspannende Bäume im jahrgangsstufenübergreifenden Projektunterricht
FILLER, Andreas
Modellierung als Entwurf von Prozessen: Wie müssen die Aufzüge fahren, damit das Chaos aufhört?
FRITSCH, Rudolf und KOMAN, Milan
Schwerpunktkurven
FRITZLAR, Torsten und HEINRICH, Frank
Doppelrepräsentation und mathematische Begabung – Theoretische Aspekte und praktische Erfahrungen
GAIDOSCHIK, Michael
Automatisierung arithmetischer Basisfakten: Zur Notwendigkeit eines strategie-zentrierten Erstunterrichts
GIRNAT, Boris
Lehrervorstellungen zur Allgemeinbildung im Geometrieunterricht der Sekundarstufen: Subjektive und fachdidaktische Ansichten im Kontrast
GRAUMANN,* Günter
Warum ist bei „reiner“ Musik Gis ≠ As? Ein Problemfeld zur Aufklarung über die reine Stimmung mittels Bruchrechnung
GRIESHOP, Gabriele
Die im Verlauf der akademischen Mathematik-Lehrerausbildung erworbenen Kompetenzen im Umgang mit Aufgaben – Exemplarisch aufgezeigt an der Fähigkeit, prozessorientiert zu erstellen und zu beurteilen
GRIGORAŞ, Roxana and HOEDE, Cornelis
Reasoning indicators – a case study
GUBLER-BECK, Annemarie
Konstruktiver Umgang mit Schülerfehlern: Hindernisse und Chancen
GUNČAGA, Ján and TKAČIK, Štefan
The notion of regulated function in the calculus teaching by Professor Igor Kluvánek
HAFTENDORN, Dörte
Matheomnibus – Mathematik für alle
HAMMER, Christoph
Anregungen für einen schüleraktivierenden Mathematikunterricht
HARTMANN, Mutfried
Ein Vorschlag zur Verbindung von Signifikanz und Effektstärke zu einer neuen statistischen Kenngröße
HARTMANN, Mutfried und LOSKA, Rainer
Mathematik ohne Regeln und Formeln?
HATTERMANN, Mathias
Der Zugmodus in dreidimensionalen dynamischen Geometriesystemen
HAUG, Reinhold
Problemlösen Lernen mit interaktiven Lernumgebungen – Eine empirische Studie zur Förderung heuristischer Strategien durch den Einsatz Dynamischer Geometrie-Software (DGS)
HENNECKE, Martin
Ein Blick hinter die Kulissen: Wie Schülerinnen und Schüler rechnen
HENNING, Herbert
Lauter schöne Körper – Entdeckungen bei Platonischen Körpern

Was für Konzepte und Wissensbestände aktivieren Experten und Novizen bei Bruchtermen und Bruchtermgleichungen?

RUWISCH, Silke

Vorstellungen über null und Null

SÁRVÁRI,* Csaba

Interaktive Hilfeleistung und Computer Algebra Systeme (CAS)

SCHÄFER, Ingolf

Rekonstruktion des Handlungspotenzials „schwacher" Schülerinnen und Schüler der Sekundarschule

SCHIERSCHER, Georg und LI-Schaan

Die Krümmung: Gefährtin der Steigung – aber Stiefkind des MU?

SCHILLER, Thomas

GPS-Beispiele im Mathematikunterricht

SCHINK, Andrea

Vom Falten zum Anteil vom Anteil – Untersuchungen zu einem Zugang zur Multiplikation von Brüchen

SCHLÖGLMANN, Wolfgang

Die Bedeutungsentwicklung mathematischer Konzepte und die Entstehung von Affekt

SCHMIDT, Barbara

Modellieren in der Schulpraxis – Beweggründe und Hindernisse aus Sicht der Lehrer

SCHNEEBERGER,* Martin

Diskursiver Mathematikunterricht – mathematische Probleme im adaptiven Lehrer-Schüler- bzw. Schüler-Schüler-Dialog lösen

SCHNEIDER, Edith

PISA Mathematik – Leistungen von ungarischen und österreichischen Schülerinnen und Schülern

SCHREIBER, Christof

Phasen übergreifende Veranstaltung in der Lehrerbildung

SCHULER,* Stephanie

Was können Mathematikmaterialien im Kindergarten leisten? – Kriterien für eine gezielte Bewertung

SCHULZ, Andreas

Text- und Aufgabenanalyse: Finden Standards Eingang in Klassenarbeiten?

SCHÜTTE, Marcus

Die sprachliche Einführung neuer mathematischer Begriffe im Grundschulmathematikunterricht

SCHWEIGER, Fritz

Mathematik als Kulturgut

SPRENGER, Jasmin

Operationsverständnis und Grundvorstellungen in Klasse 3 – Literaturanalyse und Interviewstudie

STANILOV, Grozio – PANAYOTOVA, Galina und SLAVOVA,* Slavka

Multiplikation von kurven zweiter Ordnung

STAUB, Sabine

Analyse und Evaluation von Mathematikunterricht in der Grundschule beim Umgang mit Text- und Sachaufgaben – eine Videostudie

STETTNER,* Eleonóra

Using Microsoft Excel to solve and illustrate mathematical problems

SZILÁGYINÉ SZINGER,* Ibolya

Die Entwicklung geometrischer Begriffe im Mathematikunterricht der Grundstufe – Das Quadrat und das Rechteck

SZŰCS, Kinga

Vergleichende Analyse der kognitiven Leistung von mutter- bzw. fremdsprachig unterrichteten Kursgruppen im Bereich der Analysis

THIEL, Oliver

Was denken Erzieherinnen über Mathematik?

TICHÁ, Marie

Wir lernen die Missverständnisse und Fehlvorstellungen der Studenten zu beheben

UFER, Stefan

Entwicklung geometrischer Beweiskompetenz in der Sekundarstufe I

ULLRICH, Ringo

„Mathe klingt gut" – Ein Projekt zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten im Grundschulalter anhand des Zusammenhangs von Mathematik und Musik

VOLLSTEDT, Maike

Vorwort

Die Mitarbeiter des Mathematikdidaktischen Zentrums der Eötvös Loránd Universität bedanken sich für die Ehre die 42. Jahrestagung für Didaktik der Mathematik vom 13. 3. -18. 3. 2008 in Budapest veranstaltet haben zu dürfen.
Wenn es wenigstens teilweise gelungen ist, den Anreizen des Tagungsortes, der schönen Stadt Budapest, durch die ideellen Anreiz der Tagungsinhalte etwas Konkurrenz zu machen, wäre aus Sicht der Veranstalter möglichst viel erreicht.
Dem stand kaum hinten nach durch eine möglichst überschaubare Vielfalt der Annäherungswege an das übergreifende Tagungsthema „Denkstrategien" – auch durch Beiträge aus dem Gastgeberland – die Weiterentwicklung gemeinsamer didaktisch-methodischer Anliegen zu befördern.
Das wissenschaftliche Programm umfasste 6 Hauptvorträge, 136 Sektionsvorträge, 29 selbstmoderierte Sektionen, 18 Posterpräsentationen, Sitzungen von 10 GDM-Arbeitskreisen, Doktorandentreffen, eine Sitzung der jungen Wissenschaftler und Begleitprogramme. Dabei wurden neue Entwicklungen, empirische Studien, theoriebildende Aspekte, Computernutzung, Zielsetzungen und Ergebnisse verschiedener Projekte auf allen Schulstufen und in der Lehrerausbildung diskutiert. Darüber hinaus wurden Präsentationen aus den Werken der Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter des Mathematikdidaktischen Zentrums und verschiedene interaktive Möglichkeiten, mathematische Spiele, etc. angeboten.
Casio, Texas Instruments und das ActiveMath EU Projekt baten je einen Workshop zum unterrichtlichen Einsatz des Classpads, des Programms CABRI 3D bzw. des Programmsystems ActiveMath an. Während der Tagung fanden mehrere Ausstellungen (Mathematics Museum, Mineral- und Biologische Sammlung) statt.
Elektronik-Unternehmen, Verlage, Buchhandlungen und die Zeitschrift "Mathematische Blätter für die Mittelschule" (Közepiskolai Matematikai Lapok) stellten ihre Produkte aus.
Mit Genugtuung kann registriert werden, dass die selbstmoderierten Sektionen als geeignete Arbeitsform den lebendigen Diskurs zwischen den Teilnehmern stimuliert haben.
So ist zu hoffen, dass ein wichtiges Ziel der Veranstalter, bei einer globalen Verdichtung des Programms innerhalb der wählbaren Veranstaltungswege ausreichend „Luft" und Freiraum für die Einzelbeiträge organisatorisch zu ermöglichen, erreicht werden konnte.

Ein geradezu auto- wie fremdstereotypes – auch kulinarisches – Anlocken durch ungarische „Gastfreundschaft“ sollte auch sozialem und intellektuellem Austausch dienen. Das Rahmenprogramm beinhaltete eine Gulyásparty, Ausflüge, einen Begrüßungstrunk mit gesanglichen Darbietungen der deutschsprachigen Minderheit in Ungarn, ein Orgelkonzert, einen Workshop für traditionelle volkskundliche Anfertigung von Ostereiern, und das gemeinsame Abendessen.

Der vorliegende Tagungsband enthält die Eröffnungsrede des Vorsitzenden der GDM Hans-Georg Weigand, die Hauptvorträge von Hans-Jörg Herber und Bernd Zimmermann, die Vorträge der GDM Förderpreisträgerinnen Marei Fetzer und Elke Söbbeke sowie Beiträge aus 19 selbstmoderierten Sektionen, 130 Sektionsvorträgen und 5 Posterpräsentationen.
Nachdem der Tagungsband seit 2004 als CD erscheint, wurde dieses Jahr die Möglichkeit geboten, eine erweiterte Version bzw. interaktive Unterlagen zu veröffentlichen. Die Sternchen neben den Nahmen von 24 Autoren und Autorinnen im Inhaltverzeichnis weisen auf diese Zusatzmaterialen hin.

Éva Vásárhelyi
Tagungsleiterin/Herausgeberin

Christoph ABLEITINGER, Wien

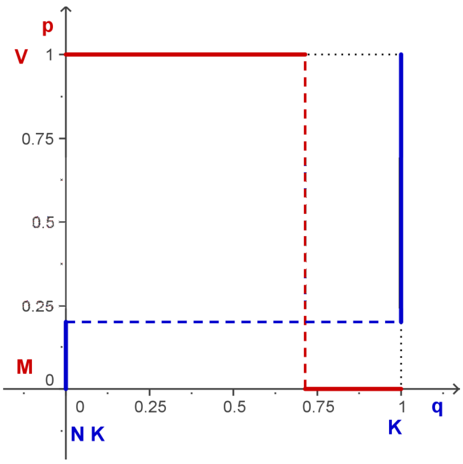
Spieltheoretische Situationen dynamisch betrachtet

Konflikt- und Entscheidungssituationen kommen im Leben meist nicht nur einmalig vor. Ein und dasselbe „Spiel" wird oft mehrere Male hintereinander ausgetragen. Dieser Artikel beschäftigt sich mit der Frage, wie die Entscheidungen der beteiligten Personen einander von Spiel zu Spiel beeinflussen und welche Strategien sich auf lange Sicht in solchen Prozessen behaupten können. Wir werden außerdem Antworten darauf erhalten, inwiefern Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien als Lösungen von Spielen zu interpretieren sind. Eine Analyse des didaktischen Potenzials soll den Bogen zum Schulunterricht spannen.

Das Lehrerin-Schüler-Hausübung-Spiel

		Lehrerin	
		kontrolliert	kontrolliert nicht
Schüler	verweigert	**4** **–** 1	0 **4**
	macht HÜ	1 **1**	**2** **–** 1

Die Analyse mit dem Nash-Konzept[1] bringt folgendes Ergebnis:



Es gibt – wie man auch leicht in der nebenstehenden Beste-Antwort-Grafik sieht – kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien, dafür aber eines in gemischten Strategien: $(p_{\text{Nash}}, q_{\text{Nash}}) = \left(\frac{1}{5}, \frac{5}{7}\right)$

Wie ist nun aber dieses Nash-Gleichgewicht zu interpretieren? Kann es als Verhaltensempfehlung an die beiden Spieler gesehen werden? Inwiefern kann es überhaupt als Lösung dieses Spiels betrachtet werden?

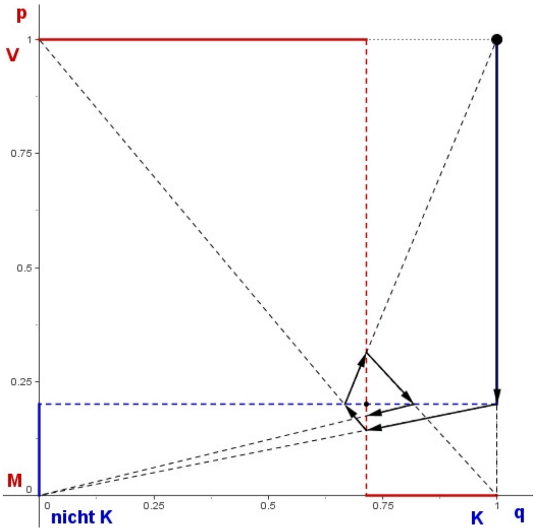
Um dieser Frage nachzugehen, blicken wir zunächst zurück auf die Vorgehensweise bei der Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts.

[1] Siehe dazu den Artikel „Das Nash-Gleichgewicht – ein zentrales Lösungskonzept der Spieltheorie" von Petra HAUER-TYPPELT in diesem Tagungsband.

Dabei geht man davon aus, dass der Schüler die relative Häufigkeit q kennt, mit der die Lehrerin in der Vergangenheit die Hausübung (HÜ) kontrolliert hat. Der Schüler hat dann, nach Vergleich dieser relativen Häufigkeit q mit q_{Nash} eine 0-1-Entscheidung zu treffen: ist $q < q_{\text{Nash}}$, so sollte er dieses Mal die HÜ verweigern, im anderen Fall sollte er die HÜ machen. Mit dieser Taktik spielt er in jedem Fall die beste Antwort auf die in der Vergangenheit verfolgte Strategie der Lehrerin.

Das iterierte Spiel

Vor dieser 0-1-Entscheidung steht der Schüler nun an jedem Tag. Dabei wird es manchmal dazu kommen, dass er die HÜ verweigert (wenn die Lehrerin fast nie kontrolliert hat) und manchmal dazu, dass er die HÜ macht (wenn die relative Häufigkeit des Kontrollierens gerade sehr hoch ist). Dadurch verändert sich mit jedem Tag auch seine eigene relative Häufigkeit des Verweigerns. Die ganz natürliche Frage ist nun, wie häufig der Schüler auf lange Sicht die HÜ machen wird.



Eine Antwort lässt sich mit Hilfe der Beste-Antwort-Grafik finden. Man startet in einem der vier Eckpunkte des Einheitsquadrates, z. B. im Punkt $(p,q)=(1,1)$. Das bedeutet, dass sich die beiden Spieler am ersten Tag, an dem ja noch keine Erfahrungswerte aus der Vergangenheit vorliegen, willkürlich für Verweigern bzw. Kontrollieren entschieden haben. Auf diese Anfangsbedingungen kommt es im vorliegenden Spiel, wie wir gleich sehen werden, aber nicht an.

Die Lehrerin hat an diesem ersten Tag die beste Antwort auf die Strategie Verweigern des Schülers gespielt. Das zeigt sich auch daran, dass sie sich bei dieser Strategienkombination auf ihrer Beste-Antwort-Linie befindet. Sie kann also mit ihrer Wahl zufrieden sein. Der Schüler hingegen befindet sich nicht auf seiner Beste-Antwort-Linie. Für ihn wäre es besser gewesen, die HÜ zu machen, wenn er nur gewusst hätte, dass er kontrolliert wird.

Die Lehrerin wird also bei der Strategie Kontrollieren und damit auf ihrer Beste-Antwort-Linie bleiben, während der Schüler ein paar Mal hintereinander die HÜ machen wird, um mit seiner relativen Häufigkeit näher zu seiner Beste-Antwort-Linie zu gelangen. Die Dynamik zielt also in Richtung des rechten unteren Eckpunktes des Einheitsquadrates. Es ändert sich so lange nichts am Verhalten der beiden Spieler, bis man eine Beste-Antwort-Linie schneidet. Das passiert in unserem Fall, wenn der Schüler so häufig hintereinander die HÜ gemacht hat, dass seine relative Häufigkeit q des Verweigerns unter $\frac{1}{5}$ gefallen ist. Dann ist nämlich die beste Antwort der Lehrerin auf diesen Zustand nicht mehr Kontrollieren. Die Dynamik zielt dann in Richtung der linken unteren Ecke, usw. Nach einigen Wiederholungen erkennt man, dass der Prozess zum Nash-Gleichgewicht konvergiert. Das lässt sich übrigens auch formal beweisen.

Man hat damit eine Rechtfertigung, das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien tatsächlich als Lösung dieses Spiels anzusehen. Zum einen treffen dabei natürlich wechselseitig beste Antworten aufeinander, wie wir das auch bei Nash-Gleichgewichten in reinen Strategien gefordert haben. Zum anderen stellt sich dieses Nash-Gleichgewicht auf Dauer ganz von selbst ein. Ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien ist also keineswegs als Verhaltensempfehlung für ein einmaliges Spiel zu verstehen. Wie auch? Was sollte ein Spieler mit dem Vorschlag anfangen, eine Strategie mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu spielen?

Eine andere Sichtweise

Wir müssen allerdings gemischte Strategien nicht unbedingt als relative Häufigkeiten im wiederholten Spiel auffassen. Sie können genau so gut als relative Anteile in großen Bevölkerungen gesehen werden. Bleiben wir beim HÜ-Spiel und betrachten wir jetzt insgesamt N Schüler. Es können also maximal N Hausübungen an einem Tag gemacht und maximal N Kontrollen von der Lehrerin durchgeführt werden.

Nun wird an einem bestimmten Tag eine gewisse Anzahl an Hausübungen gemacht und eine gewisse Anzahl an Kontrollen durchgeführt. Ist dabei der relative Anteil der Kontrollen z. B. größer als $\frac{5}{7}$, so ist es für die Schüler günstig, darauf mit der besten Antwort HÜ machen zu reagieren. Am Folgetag werden also alle Schüler, die die HÜ gemacht haben, bei ihrer Strategie bleiben. Sie spielen ja schon die beste Antwort auf die derzeitige Situation. Zusätzlich werden sich einige jener Schüler, die die HÜ verweigert haben, dazu entscheiden, die HÜ diesmal zu machen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass ein gewisser Prozentsatz a der HÜ-Verweigerer an diesem Tag zu HÜ-Machern wird. Analoges (ebenfalls mit Prozentsatz a) soll auch für die Anzahl der Kontrollen gelten, deren Entwicklung davon abhängt, wie groß die Anzahl der gemachten

Hausübungen gerade ist. Mit dieser Art der Modellierung findet also ein Anpassungsprozess statt, der im Gegensatz zum ersten Modell nur auf den Zustand im vorhergehenden Spiel reagiert, anstatt die gesamte Vergangenheit des Prozesses zu berücksichtigen.

Es zeigt sich, dass in diesem Modell die relativen Häufigkeiten des Verweigerns bzw. des Kontrollierens nur dann zum Nash-Gleichgewicht konvergieren, wenn $\lim_{t \to \infty} a = 0$ gilt, wenn also die Anpassungsbereitschaft mit der Zeit abnimmt und beliebig klein wird. In diesem Fall lässt sich das Nash-Gleichgewicht als relativer Anteil in einer großen Bevölkerung interpretieren, der sich ebenfalls auf Dauer von selbst einstellt.

Didaktische Bemerkungen

Interpretieren: Die zentrale Botschaft dieses Artikels beschäftigt sich gerade mit der Frage, wie Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien zu interpretieren sind. Diese Frage darf auch in der Arbeit mit Schülern nicht zu kurz kommen. Spieltheorie soll und kann nicht darauf reduziert werden, lediglich das Nash-Gleichgewicht formal zu berechnen. Spätestens wenn man Spiele mit mehreren Nash-Gleichgewichten (z. B. das in der Literatur häufig behandelte Spiel „Battle of the Sexes“) untersucht, stellt sich die Frage, welches nun tatsächlich auf lange Sicht gespielt wird.

Vernetztes Denken: Viele reale Prozesse lassen sich nicht mit einfachen Ursache-Wirkungs-Prinzipien verstehen. Es ist gerade bei gesellschafts- oder umweltpolitischen Themen notwendig, systemisches Denken – eine Größe wird von vielen anderen beeinflusst und beeinflusst auch umgekehrt die anderen Größen – an den Tag zu legen.

Iteratives Denken: Auch das „Denken in Schritten“ wird durch die Behandlung spieltheoretischer Dynamiken geschult.

Beste-Antwort-Grafik: Das didaktische Potenzial dieser Darstellungsform liegt unter anderem darin, dass beinahe der gesamte Informationsgehalt eines Spiels auf einen Blick erfasst werden kann. Sie ist außerdem der Schlüssel zur Interpretation gemischter Strategien, sobald man die Entwicklung der relativen Häufigkeiten in dieser Grafik abbildet. Nicht zuletzt bietet sie einen Einblick in die Struktur eines Spiels und ermöglicht so eine recht einfache Klassifikation aller 2×2-Spiele in Normalform.

Literatur

Hofbauer, J., K. Sigmund (1998): Evolutionary Games and Population Dynamics. Cambrigde University Press.

Sieg, G. (2005): Spieltheorie. Oldenburg Wissenschaftsverlag, München.

Agnis ANDŽĀNS, Riga, Latvia

oding and Mathematical om etitions

Introduction

The number of lessons devoted to exact disciplines is decreasing in many countries. Advanced topics are to go, and high – level mathematical education at school meet danger to become occasional and disintegrated.

In this situation mathematical olympiads appear to be a strong stimulating factor. Olympiad “curricula” hasn’t changed; it is developed further in an essential way. The standards that were elaborated in olympiad movement during many years in some sense have become the unofficial standards for advanced education in mathematics.

The spectrum of the mathematics covered by olympiads and other contests gradually becomes wider. This is caused by the fact that the traditional areas are more or less exhausted, and fresh ideas are needed to preserve the element of unexpectedness and creativity. Many general topics coming from theoretical computer science have become popular during last years:

- discrete continuity (see, e.g., [1]),
- problems based on the concept of automata (see, e.g., [2]),
- new types of algorithms (see, e.g., [3]),
- new types of impossibility proofs (see, e.g., [4]),

etc.

Here we consider another class of such problems, closely related to the concepts of coding and protocol.

eflection of classical esults in oding

There are three problem classes of this type. All of them heavily use the concept of the full tree. The first class is based on the following result.

raft s lemma

Suppose we have a_1 sequences of length 1, a_2 sequences of length 2, …, a_k sequences of length k, all consisting of the letters from the alphabet of size n, such that none of these sequences is an initial fragment of any other. Then the inequality

$$\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_k}{n^k}\le 1 \text{ holds.}$$

Exam le (Latvia, 1995). There are only two sounds in the language COCOCO. No word is the initial fragment of another one. Is it possible that there are 3 words of length 3, 4 words of length 4, 6 words of length 5, 8 words of length 6 and 9 words of length 7 in this language?

omment A number of "constructive" problems can be obtained using the fact that Craft's lemma gives also a sufficient condition for the existence of the set of "nonoverlaping" words.

The second class explores also the concept of Hamming distance.

Exam le In some army each soldier has a code – a 6-digit sequence consisting of the digits 0 and 1 only. Each two codes must differ in at least two positions. What is the largest possible number of soldiers in this army?

omment The idea of the "control digit" is used in the solution.

The third class is based on the classical method of obtaining the so – called "information theory lower bound" in the computational complexity theory.

Exam le There are 6 equally – looking coins, all with different masses. What is the smallest number of weightings on a pan balance that allows us to arrange the coins in the order of their masses?

omment For all these classes of problems a tool suitable on the middle and high school level is Dirichlet Principle and its various generalizations. The great educational value of this kind of problems is convincing the students in the value of general approaches and data structures.

I kno ou kno I kno Ty e Problems

As far as we know, the first (folklore) problem of this type used in competitions is the following one.

Exam le Two old and very clever friends meet each other after many years of dissociation. The following conversation takes place (we give, of course, only the essential part of it):

"A. I have three daughters, you know.

B. How old are they?

A. The product of their ages is 36, while the sum of them is equal to the number of the bus just now passing by.

B. I don't know their ages.

A. The eldest daughter has blue eyes.

B. Now I know how old they are."

The reader is also urged to tell how old they are.

The basis of the solution for this and similar problems is to find out what information is encoded in each statement. To obtain the answer (2; 2; 9), the reader should ask himself: **hy** B couldn't find the ages knowing both the sum and the product of them?

The problems of this type usually consist of two pieces of mathematics: the **logical art** and the **s ecific** algebraic/arithmetical/… part to which the logic must be applied. The differences in the difficulty level of the latter one can be significant. If in the example above the factorization of 36 solves the problem, the next example shows a more sophisticated situation.

Exam le (proposed by Bulgaria for IMO'91). Each of the boys A and B tells the teacher a positive integer but neither of them knows the other's number. The teacher writes two distinct positive integers on the blackboard and announces that one of them is the sum of the numbers they told him. Then he asks A, "Can you guess the sum of the two numbers?" If the answer is "No," the teacher asks B the same question, and so on. Suppose that the boys are intelligent and truthful. Prove that one of their answers eventually will be "Yes."

For a solution, see [5]. Further examples see, e.g., in [6], [7] and [8].

The analysis of the problems of this type provide to the students also deeper insight into the method of mathematical induction (see, e.g., [9]).

The following example shows a link with multi – valued logics.

Exam le (V.Ufnarovsky). John has guessed a number from the set $\{1;2;3\}$. Ann is allowed to ask him one question with possible answers "yes", "no", "don't know". Can she find out which number was guessed?

Problems ex loring the idea of a rotocol

After the announcement of the idea of public – key cryptosystem by W.Diffie and M.Hellman a lot of applications of this approach have emerged. May be the first contest problem on high – school level where the idea of a protocol is very clearly exploited is the following one.

Exam le (Russian olympiad, 1997, folklore).

The Judgment of the Council of Sages proceeds as follows: the king arranges the sages in a line and places either a white hat or a black hat on each sage's head. Each sage can see the color of the hats of the sages in front of him, but not of his own hat or of the hats of the sages behind him. Then one by one (in an order of their choosing), each sage guesses a color. Afterward, the king executes those sages who did not correctly guess the color of their own hat.

The day before, the Council meets and decides to minimize the number of executions. What is the smallest number of sages guaranteed to survive in this case?

For the solution see [10], p.94.

Most surprisingly, this idea seems to have passed almost unnoticed, and only few examples are known to the author.

onclusions

It seems that problems of the considered type have a great future in high school students' competitions, not only in problem – solving ones. Not speaking about their significance in the context of growing role of discrete mathematics, they provide rich possibilities for students' research, especially if combining them with the use of nondeterministic, probabilistic and other non – classical types of algorithms. They are closely related also to contests in informatics and linguistics, thus making an additional bridge between these disciplines and mathematics on a high – school level.

Literature

1. D.Bonka, A.Andžāns. Discrete Analogs of Continuous Processes in Mathematical Competitions. – In: Proc. 6th Conf. APLIMAT, Bratislava, STU, 2007. – pp. 271 – 276.

2. I.Bērziņa. Geometry and Computer Science Interplay for Secondary School Seniors. – In: Proc 7th Int. Conf. "Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives", Tartu, TU, 2006. – pp. 28 – 33.

3. L.Ramāna, A.Andžāns. The Influence of Computer Science on Mathematical Contests. – In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, Hildesheim, Franzbecker, 2000. – pp. 505 – 508.

4. A.Andžāns. Educational Possibilities of Impossibility Proofs. – In: Proc. 7th Int. Conf. APLIMAT 2008, Bratislava, STU, 2008. – pp. 905 – 909.

5. S.Savchev, T.Andreescu. Mathematical Miniatures. MAA, 2003.

6. T.S.Ferguson. A Know/Don't Know Game. – Mathematics Magazine, 1984, N°3, pp. 180 – 181.

7. S.Artemov, Y.Gimatov, V.Fedorov. Many Bits out of Nothing. – Kvant, 1995, N°2, pp. 15 – 17, 21 (in Russian).

8. J.Lasry, J.Morel, S.Solimini. On Knowledge Games. – Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, 1989, N°2y3, pp. 187 – 201.

9. M.Milg. What did the Conductor Say? – Kvant, 1973, N°8, pp. 38 – 44 (in Russian).

10. Mathematical Contests 1997. – 1998., edited by T.Andreescu and K.Kedlaya. American Mathematics Competitions, 1999.

Stefanie ANZENHOFER, Würzburg

Musikalische Graphen können den Mathematikunterricht beleben

Den folgenden Überlegungen liegt ein fächerübergreifender Ansatz für den Mathematik- und Musikunterricht zugrunde. Dabei werden Visualisierungen – graphische Darstellungen – in beiden Bereichen wechselseitig analysiert und interpretiert. Es ist das Ziel, einerseits ein besseres Verständnis mathematischer Begriffe zu erreichen und andererseits Schülern[1] eine Hinführung zu musikalischer Improvisation zu bieten, bei der ein Ausprobieren mit Tönen mit einer klanglichen Unbefangenheit möglich ist.

Musikalische Kompositionen können zum einen anhand der allen bekannten Standardnotation mit ihren fünf Parametern (Tonhöhe, Dauer und Einsatzzeitpunkt, Besetzung bzw. Klangfarbe, Dynamik sowie Artikulation) visualisiert und mit einem gewissen Maß an Interpretation von Musikern wiedergegeben werden. Zum anderen existieren seit dem 20. Jahrhundert Formen graphischer Notationen, Kombinationen aus Elementen der Standardnotation und bildlichen Darstellungsformen. (s. Abb. 1)

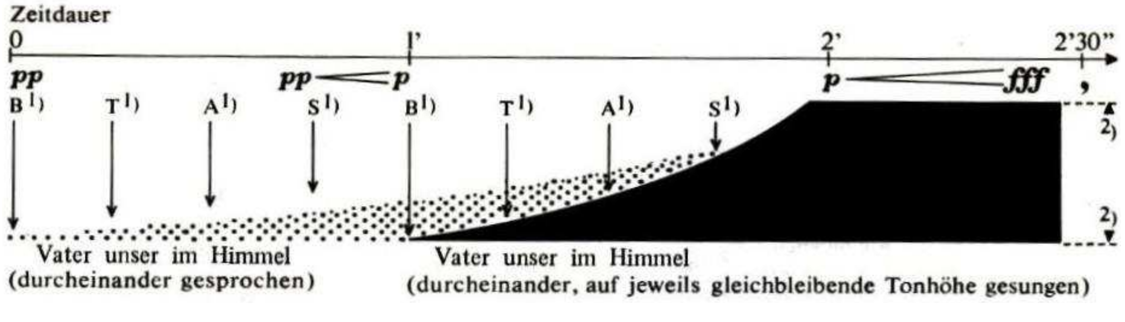


Abb. 1: Vater unser von Kurt Suttner [3]

Diese erfordert vom Musiker weitaus mehr Interpretationsfähigkeit, da die Klangwünsche des Komponisten ausschließlich bildlich angegeben und zumeist nicht alle oben erwähnten Parameter exakt festlegt werden.

Das Verständnis graphischer Darstellungen ist auch ein zentrales Element des Mathematikunterrichts und damit des Lehrens und Lernens von Mathematik. Graphische Darstellungen haben bei der Wiedergabe von Folgen, Funktionen und Relationen eine wichtige Bedeutung. Sie stellen eine Visualisierung dieser mathematischen Begriffe dar. Mit ihrer Hilfe

[1] In dem gesamten Text ist der Begriff *Schüler* geschlechtsneutral gebraucht, er umfasst somit auch *Schülerin.*

lassen sich Beziehungen und Abhängigkeiten klassifizieren sowie Veränderungen qualitativ und quantitativ erfassen. Es ist lange bekannt, dass Schüler Schwierigkeiten beim Erzeugen, bei der Interpretation sowie beim Lesen von Graphen haben.

Derzeit untersuche ich, wie durch das Einbeziehen „musikalischer Graphen“ das Verständnis der mit mathematischen Graphen zusammenhängenden Begriffe (Funktion, Relation, Kurve, Steigung, Krümmung,…) erweitert und dadurch insbesondere die drei Aspekte der Entwicklung eines funktionalen Denkens (vgl. [5]) unterstützt werden können.

Musikalische Graphen entstehen durch Kombination von Funktionsgraphen mit drei musikalischen Grundkompetenzen: Musik hören, Musik lesen und schreiben sowie Musik machen (vgl. [4]).

Graphen hören

Die Graphen können mithilfe von Computerprogrammen (z.B. Cinderella) durch eine Übertragung der y-Werte auf Tonhöhen zu MIDI-Klänge umgewandelt werden.

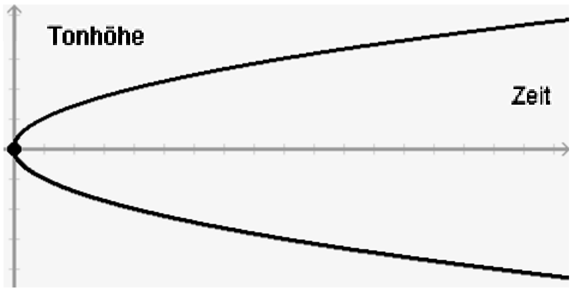


Abb. 2: Graph von $f(x) = \mp\sqrt{x}, x \geq 0$)

Das erste positive Moment beim Hören von Graphen ist die Unterscheidungsmöglichkeit von Funktions- und Relationsgraphen anhand des gleichzeitigen (Relation) oder nacheinander (Funktion) Erklingens von Tönen. Auf diese Weise erfahren Schüler, dass graphische Ähnlichkeit mit anderen Funktionsgraphen kein zwingender Grund für die Entscheidungsfindung ist. Am Beispiel der Wurzelrelation[2] $f(x) = \mp\sqrt{x}$ (mit $x \geq 0$) wird deutlich, dass ihre graphische Gleichartigkeit mit der Normalparabel, die bereits als Funktionsgraph bekannt ist, für die Klassifizierung nicht bedeutend ist. (s. Abb. 2)

Andererseits sollen Graphen von Standardfunktionen ausschließlich durch Hören wiedererkannt werden, wodurch bei Schülern eine genauere Betrachtung der Grapheneigenschaften hervorgerufen wird. Die hierfür ausschlaggebenden Charakteristika einer Sinusfunktion beispielsweise sind

[2] Alle dazu gehörenden Sounddateien stehen unter http://www.dmuw.de/mitarbeiter/anzenhofer

die beidseitig beschränkte Amplitude sowie das stetig wiederkehrende, symmetrisch wellenförmige Auf- und Absteigen der Tonhöhen. (vgl. [2])

Die Grapheneigenschaften können auch durch einen akustischen Vergleich verschiedener Funktionen beleuchtet werden. So können beispielsweise das Wachstum und das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion im Vergleich zur Funktion $y = y_c$ (Asymptote) hörend herausgearbeitet werden.

Graphen lesen und schreiben

Beim Hören eines Musikstückes sollen Schüler mithilfe von Graphen den Melodieverlauf ohne exakte Tonhöhen wiedergeben. In Abbildung 3 wurden die Takte 131 bis 138 aus dem Bolero von Maurice Ravel durch einen Studenten aufgezeichnet.[3]

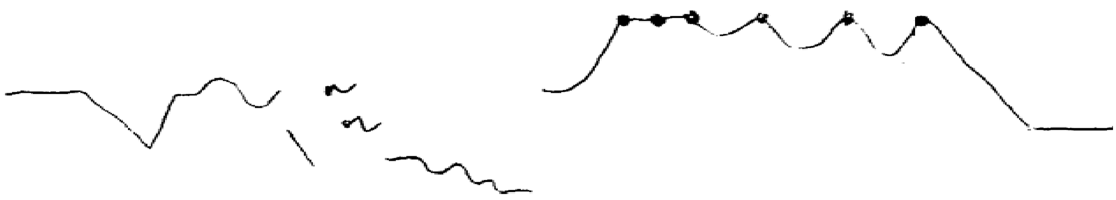


Abb. 3: Hörpartitur zu Bolero von Maurice Ravel

Auf diese Weise entwickeln Schüler eigenständig für sie bis dahin unbekannte Graphen, die sie aufgrund der Sprünge und des wellenförmigen und vielfältigen Verlaufs nicht als Funktionsgraphen eingestuft hätten.

Mit Graphen können Schüler auch exakte Notationsformen für Musik entwickeln. Wird etwa in einem Koordinatensystem eine Achse als Zeitachse und die zweite als Frequenz interpretiert, so gibt der (zweidimensionale) Graph dieses Zusammenhangs die zeitlich veränderliche Tonhöhe der Melodie an. Wird zusätzlich, als weiterer unabhängiger Parameter, die Dynamik eingeführt, so erhält man als (dreidimensionalen) Graphen eine Raumkurve. Derart können auch die anderen Parameter eingearbeitet werden. Aus einer mehrstimmigen Besetzung können ausschließlich Relationsgraphen folgen.

Beim Lesen und Schreiben von Graphen steht neben der Betrachtung der Grapheneigenschaften die Kreativität im Mittelpunkt. Die Schüler sollen durch Kombinieren bekannter Graphen für sie neue abschnittsweise definierte Funktionsgraphen gestalten und damit ihr Funktionenrepertoire erweitern.

[3] Linienverdickungen drücken ausschließlich Akzentuierungen aus keine Frequenz- oder Dynamikangaben.

Mit Graphen musizieren

Auch beim Musizieren mit Graphen steht die Betrachtung der Grapheneigenschaften im Vordergrund. Diese werden bei der Vertonung interpretiert und auf das akustische Moment übertragen. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ wird beispielsweise charakterisiert durch die Polstelle bei $x = 0$ und den asymptotischen Verlauf an den Rändern.

Eine andere Herangehensweise wird bei der Interpretation von graphischen Notationen benötigt. Das Entdecken von Figuren in den Partituren, die an Funktionsgraphen erinnern, kann bei einer musikalischen Umsetzung hilfreich sein. Für den Mathematikunterricht birgt es die Übertragungsfähigkeit mathematischer Graphen auf andere Abbildungsformen.

In jeder Aufgabe (Hören, Lesen und Schreiben von Graphen sowie Musizieren mit Graphen) werden die drei Aspekte des funktionalen Denkens (vgl. [5]) beleuchtet. Über die oben erwähnte Betrachtung der Grapheneigenschaften erlangen die Schüler eine Sicht als Ganzes. Das Änderungsverhalten wird durch die Übertragung auf Töne durch die Frequenzvariation hörbar gemacht. Auch der Zuordnungscharakter fließt einerseits über den akustischen Vergleich von Relations- und Funktionsgraphen andererseits über den funktionalen Zusammenhang von Ton und Koordinatenpunkt ein.

Die Besonderheit dieser Aufgaben liegt auf dem Moment des eigenständigen Entwickelns und Erfindens. Auf diese Weise sollen Schüler für sie neue und unbekannte Graphen entwerfen und entdecken, weswegen ein mathematisch kreativer Umgang mit Graphen zu vermuten ist. (vgl. [6])

Das Einfließen dieses Kreativitätsaspekts kombiniert mit dem auditiven Moment lässt eine Belebung des Mathematikunterrichts erwarten.

Literatur

[1] Kortenkamp, Ullrich: http://cinderella.de, 07.02.2007.
[2] Christmann, Norbert: Klänge sehen – Funktionen hören, in: LOGIN, 126/2003, S. 30-36.
[3] Frey, Max; Mettke, Bernd-Georg; Suttner, Kurt: Chor aktuell, Gustav Bosse Verlag, Regensburg 1983.
[4] Gallus, Hans Ulrich: Musikalische Fähigkeiten aufbauen, in: Jank: Musik-Didaktik, Cornelsen Verlag, Berlin 2005, S. 101-113.
[5] Vollrath, Hans-Joachim: Funktionales Denken, in: JMD, 10 (1989) 1, S. 3-37.
[6] Weth, Thomas: Kreativität im Mathematikunterricht, Verlag Franzbecker, Hildesheim 1999.

Kristina APPELL, Jürgen ROTH, Hans-Georg WEIGAND, Würzburg

Experimentieren, Mathematisieren, Simulieren – Konzeption eines MATHEMATIK-Labors

Mathematik wird in der Schule häufig als formales und kalkülorientiertes Fach erlebt, dessen Inhalte im Alltag der Schülerinnen und Schüler praktisch keine Rolle spielen. Dieser Fehleinschätzung kann u. a. durch Lernumgebungen begegnet werden, in deren Mittelpunkt interessante Phänomene stehen, die Schülerinnen und Schüler durch einen selbsttätigen aktiv-experimentellen Umgang mit realen Modellen und Simulationen mathematisch durchdringen. Beim Aufbau eines MATHEMATIK-Labors am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg wird diese Idee gegenwärtig umgesetzt.

1 Grundkonzept des MATHEMATIK-Labors

Das MATHEMATIK-Labor ist als Lernort für Schülerinnen und Schüler außerhalb der Schule konzipiert. Es sollen Schulklassen der 10. bis 12. Jahrgangsstufe an die Universität Würzburg kommen und sich in Kleingruppen drei Stunden mit *einem* Thema intensiv auseinandersetzen. Inhaltlich gibt es Themen mit erkennbarem Alltagsbezug (z. B. Bewegungen einer Baggerschaufel, Gangschaltung beim Fahrrad, Einparken, Scheibenwischer) aber auch solche mit eher „innermathematischen“ Bezügen (z. B. „Gleichdicks“, „Kurvenerzeugende Sehnen“, Spiralen, Spiegel). Dem MATHEMATIK-Labor liegt eine „Drei-Phasen-Idee“ zugrunde, die im Folgenden exemplarisch anhand der Laborstation „Bewegungen einer Baggerschaufel“ erläutert wird.

1. Phase: Experimentieren mit realen Modellen

Anhand von entsprechend aufbereiteten Echtmodellen (Fahrrad, Scheibenwischer, ...) und/oder Holz-, Plastik- bzw. Metallmodellen (Bagger, Spiralenzirkel, ...) werden Funktionsweisen des Modells erforscht, Erfahrungen gesammelt, Eigenschaften entdeckt und es wird die Mathematisierung vorbereitet. Am Baggermodell kann man z. B. entdecken, dass die Bewegungen des Baggerarms über Gelenkdreiecke (vgl. Abb. 1) mit einer Seite variabler Länge gesteuert werden und beim Baggerlöffel auch noch ein Gelenkviereck zum Einsatz

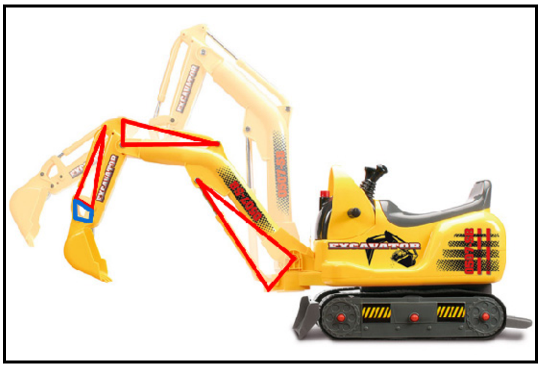


Abb. 1: Reales Baggermodell

kommt. Experimentell lässt sich erforschen, welche Bewegungen mit dieser Art der Steuerung möglich sind.

2. Phase: Mathematisieren

In dieser Phase werden Erfahrungen mit den Modellen aufbereitet, systematisiert und mathematische Darstellungen sowie analytische Beschreibungen entwickelt. Es geht also um das Auffinden und Darstellen mathematischer Zusammenhänge, die Klärung notwendiger mathematischer Grundlagen und evtl. die Überprüfung von Hypothesen. Die Bandbreite der dabei zu lösenden Probleme reicht von relativ überschaubaren Aufgabenstellungen bis hin zu sehr komplexen Problemen. Folgende Beispiele, die sich auf Abb. 2 beziehen, sollen diese Vielfalt verdeutlichen:

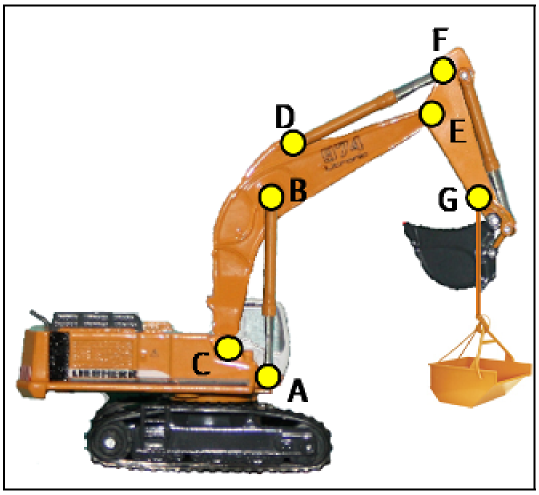


Abb. 2: Mathematisieren

- Auf welcher Kurve bewegt sich der Punkt B, wenn der Zylinder [AB] die Länge ändert? Wie ist das zu erklären?
- Eine am Punkt G befestigte Last soll senkrecht nach oben bewegt werden. Welcher funktionale Zusammenhang muss dazu zwischen den Längen der Zylinder [AB] und [DF] bestehen?

3. Phase: Computersimulationen systematisch variieren

Gestützt auf die erkannten Prinzipien und die mathematische Durchdringung der Phänomene werden Computersimulationen der Konfigurationen systematisch variiert. Dadurch sollen Erfahrungen mit realen Modellen vertieft, die Angemessenheit der Mathematisierung geprüft, neue Einsichten gewonnen und Erkenntnisse vernetzt werden. Simulationen bieten dabei den Vorteil, dass einzelne Einflussgrößen gezielter und präziser variiert werden können als an einem realen Modell. Darüber hinaus lassen sich damit auch Grenzfälle ansteuern, was mit einem realen Modell häufig gar nicht möglich ist. Abb. 3 ist zu entnehmen, wie

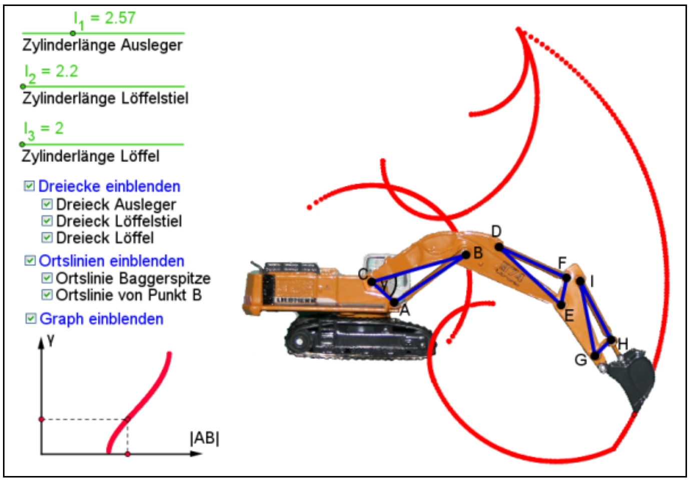


Abb. 3: Computersimulation (GeoGebra-Applet)

bei der Baggersimulation[1] Ortslinien zur Kennzeichnung und Analyse von Bewegungen sowie zur graphischen Darstellung von geometrisch gegebenen funktionalen Zusammen genutzt werden können.

Wir möchten betonen, dass die drei Phasen des MATHEAMTIK-Labors keine „Einbahnstraße" darstellen, sondern wechselseitig miteinander vernetzt sind. So lassen sich etwa Erkenntnisse, die mit realen Modellen bzw. Simulationen gewonnen wurden gegenseitig aufeinander beziehen, Entdeckungen an der Simulation können Anlass zu neuen Mathematisierungen sein usw.

2 Zielgruppen

Neben Schülerinnen und Schülern der 10. bis 13. Jahrgangsstufe möchten wir auch Studierende in Seminaren, Referendare während ihrer Ausbildung und Lehrkräfte in Fortbildungen dazu gewinnen, sich intensiv mit Laborstationen auseinanderzusetzen. Daneben ist es uns wichtig, Lehramtsstudierende während ihrer Ausbildung Lernumgebungen des MATHEMATIK-Labors gestalten und die Arbeit von Jugendlichen mit den Laborstationen betreuen zu lassen. Beides ermöglicht ihnen wichtige Erfahrungen im Hinblick auf ihr späteres Berufsleben.

3 Gestaltung des MATHEMATIK-Labors

Das MATHEMATIK-Labor ist konzeptionell zwischen Experimentierausstellungen und Projekttagen einzuordnen. Experimentieraustellungen fokussieren stärker auf die Phänomene und weniger auf deren mathematische Durchdringung. Während der Projekttage, die wir jährlich an der Universität Würzburg anbieten, setzen sich Schülerinnen und Schüler vier Tage lang intensiv mit offenen mathematischen Fragestellungen auseinander. Bei der Konzeption der Stationen des MATHEMATIK-Labors nehmen wir aufgrund des beschränkten Zeitrahmens von drei Stunden Einschränkungen im Vergleich zu Projekttagen in Kauf. So werden z. B. Computersimulationen fertig vorgegeben und Arbeitswege weitgehend vorstrukturiert, um *allen* Schülerinnen und Schülern erfolgreiches Arbeiten zu ermöglichen. Es werden aber auch Reflexionen eingefordert und offene Aufträge integriert, zu denen bei Bedarf Hilfestellungen abgerufen werden können. Die Schülerinnen und Schüler können selbstbestimmt im individuellen Tempo arbeiten, Aufgabenstellungen variieren und sollen dazu angeregt werden, eigene Fragen zu stellen und ihnen nachzugehen.

---

[1] Damit Möglichkeiten und Grenzen der Simulation richtig eingeschätzt werden, ist es wichtig, dass die mathematischen Grundlagen der zu untersuchenden Phänomene und damit der Simulation erkannt und verstanden sind, bevor die Simulation intensive genutzt wird.

4 Forschungsfragen

Im Rahmen der Entwicklung und Umsetzung des MATHEMATIK-Labors ergibt sich eine ganze Reihe von Forschungsfragen, die wir empirisch untersuchen wollen:

Verbindung von Experimenten mit realen Modellen und Simulationen

Das „Drei-Phasen-Konzept“ des MATHEMATIK-Labors fußt auf der Hypothese, dass Zusammenhänge dann besonders effektiv gelernt werden, wenn sowohl mit realen Modellen als auch mit Simulationen gearbeitet wird. Offen ist, ob sich diese Hypothese empirisch belegen lässt, wo ggf. Effektivitätssteigerungen ansetzen und in wie fern sich daraus Kriterien für die Gestaltung von Lernumgebungen ableiten lassen.

Umgang mit den Lernumgebungen

Uns interessiert, wie die Schülerinnen und Schüler mit den Lernumgebungen des MATHEMATIK-Labors umgehen. Insbesondere werden wir untersuchen, ob sie, wie intendiert, eigene Fragen stellen und diesen nachgehen oder „nur“ vorgegebene Arbeitsaufträge abarbeiten. Daneben wollen wir die Effektivität eines neuen Konzepts für die Partnerarbeitsphasen am Computer untersuchen. Uns interessiert in wie weit eine Rollenverteilung der beiden Partner positive Auswirkungen auf die Verarbeitungstiefe der mit den Simulationen gemachten Erfahrungen hat. Ein Partner bedient dabei in der Rolle des „Akteurs“ die Maus und damit die Simulation, während der andere Partner in der Rolle des „Mediators“ dafür sorgt, dass Arbeitsaufträge konsequent bearbeitet und Ergebnisse schriftlich festgehalten werden, also zwischen Arbeitsblatt und Computerumgebung vermittelt.

Vergleich zwischen Projektarbeit und MATHEMATIK-Labor

In welcher Weise unterscheiden sich die Arbeitsweisen von Schülerinnen und Schülern an Projekttagen und im MATHEMATIK-Labor? Wie müssen die Lernumgebungen aufbereitet werden, dass möglichst viel von der an Projekttagen beobachtbaren selbstständigen und kreativen Arbeitsweise auch im MATHEMATIK-Labor auftritt?

Derartige Lernumgebungen auch im Unterricht?

Welche Anpassungen sind notwendig, wenn man Lernumgebungen, wie sie im MATHEMATIK-Labor realisiert werden auch im „normalen“ Unterricht einsetzen möchte? Lassen sich solche Lernumgebungen im Unterricht nur zur Vertiefung und Vernetzung einsetzen oder auch zur Erarbeitung neuer Inhalte?

Informationen und Literaturangaben zum MATHEMATIK-Labor findet man im Internet unter der Adresse http://www.mathematik-labor.org. Nach und nach können dort auch die Simulationen abgerufen werden.

Hermann ASTLEITNER, Universität Salzburg

Zur om atibilit t von mathematik-didaktischen und Instructional Design-Ans tzen zum kom lexen Lernen

Zur Interaktion der achdidaktik Mathematik und der Erziehungs- issenschaft

Beispiele für eine Interaktion von Mathematik, Fachdidaktik Mathematik und Erziehungswissenschaft finden sich neuerdings in aktuellen Reaktionen auf den PISA-Schock z.B. in Prenzel Allolio-Näcke (2006). Es stellt sich die Frage, ob diese Interaktion fundiert erfolgt ist bzw. ob es mittlerweile tatsächlich kompatible oder sogar komplementäre Elemente in der mathematischen Fachdidaktik und der Allgemeinen Didaktik gibt, die zu einer gegenseitigen Konzeptkalibrierung und damit -weiterentwicklung führen können. Um diese Frage zu überprüfen, sollen in diesem Beitrag ein aktuelles mathematisch-didaktisches Konzept von V s rhelyi (2004) mit prominenten Ansätzen zur Allgemeinen Didaktik komplexen Lernens von Reigeluth (1) und VanMerrienboer Kirschner (2007) gegenübergestellt werden. Übereinstimmungen und Widersprüche werden in einer qualitativen Analyse, die vor allem auf aufgabenbezogenes Lernen bezogen ist, aufgezeigt. Dabei werden die tactics for generating meaning von Miles und Huberman (1 4) als Analysemethode eingesetzt. Bei der Suche nach einem Rahmenmodell, das den Vergleich von didaktischen Modellen erlaubt, konnte ein Modell von Reigeluth und Moore (1 , S. 55) mit den Dimensionen Lernergebnisse, Lernkontrolle, Fokus, Organisation, Interaktion und Lernunterstützung identifiziert werden.

Ergebnisse Der Vergleich von drei didaktischen Modellen

Folgendes kann zusammenfassend bei der Gegenüberstellung der drei didaktischen Ansätze festgehalten werden:

a) Lernergebnisse: Alle drei Ansätze enthalten keine explizite Verbindung zu anerkannten Lehrzieltaxonomien, die üblicherweise mit unterschiedlichen Lernergebnissen verbunden sind. Reigeluth (1) trifft keine Unterscheidung zwischen unterschiedlichen Lernergebnissen, führt aber Beziehungen zu aktuellen kognitiven Modellen an. Bei VanMerrienboer Kirschner (2007) steht prozedurales Wissen und damit die Anwendung von Wissen in lehrzieltaxonomischen Sinne im Vordergrund. Auch bei diesem Ansatz werden Beziehungen zu aktuellen kognitiven Modellen formuliert, ohne explizite Konzepte, die eine Verbindung zwischen im Ansatz jeweils

indentierten Lernergebnissen und kognitiven Modellen herstellen, zu liefern. Im Ansatz von V s rhelyi (2004) liegt auch kein Bezug zu einer Lehrzieltaxonomie vor, allerdings bildet das Konzept des Prototyps eine mögliche Verbindung: Beim Prototyp selber steht Wiedergeben als lehrzielrelevantes Lernergebnis im Vordergrund. Durch Abwandlungen des Prototyps können Verstehensprozesse angeregt werden. Der problemlösende Einsatz von Prototypen bzw. deren Abwandlungen betrifft das Lehrziel der Anwendung des Wissens. Die Förderung der Analogiebildung regt fachübergreifende Übertragungen und damit das Schaffen von neuem Wissen an. Bei allen drei Ansätzen werden prinzipiell unterschiedliche Lernergebnisse angestrebt, insofern ist kein Ansatz defizitär, was die Erzeugung von Lernergebnissen auf unterschiedlichen lehrzieltaxonomischen Ebenen betrifft. Explizite Unterscheidungen nach Lernergebnissen mit entsprechenden Konsequenzen in den Ansätzen liegen nicht vor. Nur V s rhelyi (2004) liefert ein elaboriertes theoretisches Konstrukt, nämlich das des Prototyps , das die Verbindung zwischen Lernergebnissen und kognitiven Modellen sparsam und schlüssig leisten kann.
b) Lernkontrolle: Die Kontrolle der Lehrziele und der Lehrinhalte durch Lernende ist bei Reigeluth (1) und VanMerrienboer Kirschner (2007) nicht - systematisch im Ansatz verankert - vorgesehen. Beide setzen auf die externe Vorgabe (z.B. durch ein Lehrsystem). Bei V s rhelyi (2004) sind zumindest ein Teil der Ziele und Inhalte, die fortgeschrittene Addita betreffen, von den Lernenden als wählbar postuliert. Insofern enthält der Ansatz von V s rhelyi (2004) systematisch verankerte Aspekte einer Lernerkontrolle und zwar in einem stärkeren Ausmaß als die beiden anderen Ansätze. Bei der Bewertung des Lernergebnisses werden in allen drei Ansätzen Kontrollmöglichkeiten für die Lernenden gesetzt, wobei speziell bei VanMerrienboer Kirschner (2007) und bei V s rhelyi (2004) multiple Formen der Leistungsbewertung Einsatz finden.
c) Fokus: Reigeluth (1) ist stark curriculum- bzw. fachbezogen, bei VanMerrienboer Kirschner (2007) steht die problem- und interdisziplinäre Orientierung im Vordergrund. Bei V s rhelyi (2004) spielt einerseits die Sache (das Fach) eine Rolle, andererseits die lernrelevanten Eigenschaften der Lernenden; auch sollte Wissen in mindestens zwei verschiedenen Fachbereichen (oder Subfachbereichen) verankert werden. Durch den besonderen Fokus auf Analogien wird auch interdisziplinäres Denken angeregt. Demzufolge deckt V s rhelyi (2004) einen breiteren Fokus ab als die beiden anderen Ansätze.
d) Organisation: Hinsichtlich einer möglichen Organisationsform des Unterrichts gilt, dass Reigeluth (1) keine expliziten Angaben macht. Der Ansatz von VanMerrienboer Kirschner (2007) ist stark individuumszent-

riert. Bei V s rhelyi (2004) ist hingegen eine freie Wahl der Sozialform des Unterrichtens möglich, wobei allerdings nur wenig elaborierte Aussagen über die Indikation entsprechender Sozialformen vorliegen. Auch in dieser Beurteilungsdimension deckt der Ansatz von V s rhelyi (2004) ein breiteres Spektrum an Einsatzmöglichkeiten ab. Allerdings wären – aufgrund ihrer hohen Aufgabenorientierung – auch die beiden anderen Ansätze prinzipiell dafür geeignet, Spezifikationen für die Organisationsform von Unterricht zu integrieren.
e) Interaktion: Ein ähnliches Bild zeigt sich bei der Beurteilungsdimension der Interaktionsformen, die von den jeweiligen Ansätzen berücksichtigt werden. Sowohl bei Reigeluth (1) als auch bei VanMerrienboer Kirschner (2007) steht die Interaktion Lernender mit einem unterrichtlichen Werkzeug oder Medium (z.B. omputer) im Vordergrund. Bei V s rhelyi (2004) finden sich auch Interaktionen zwischen den Lernenden (wenn z.B. Lösungen von anderen besprochen werden) und mit vielfältigen Werkzeugen (Arbeitsblätter, reale Figuren und omputersimulationen) berücksichtigt. In diesem Sinne erlaubt bzw. konzipiert der Ansatz von V s rhelyi (2004) vielfältigere Interaktionen als die beiden anderen Ansätze.
f) Lernunterstützung: Zunächst einmal erkennen alle drei Ansätze an, dass neben der kognitiven Entwicklung auch die affektive zu fördern ist. Bei Reigeluth (1) wird eine entsprechende Integration in Aussicht gestellt; bei VanMerrienboer Kirschner (2007) ist diese in Form von Einstellungen schon passiert, ohne allerdings Unterrichtsmaßnahmen systematisch auf deren Förderung abzustimmen. Im Ansatz von V s rhelyi (2004) spielt die Motivation der Lernenden als affektive Größe eine zentrale Rolle. Sie soll über bestimmte Aufgaben- und Ziel-Wahlen beeinflusst werden. Insofern zeigt der Ansatz von V s rhelyi (2004) eine offensivere Verankerung von affektiven Lernprozessen als das die beiden anderen Ansätze tun. Hinsichtlich der kognitiven Lernförderung bieten alle drei Ansätze differenzierte Fördermaßnahmen an. Allerdings zeigen hier die Ansätze von Reigeluth (1) und VanMerrienboer Kirschner (2007) mehr unterschiedliche und auf spezifische Lernprobleme abgestimmte Formen der Lernunterstützung an.

eiterent icklungen

Grundsätzlich kann festgehalten werden, dass die drei Ansätze auf vielen unterrichtsrelevanten Dimensionen vergleichbar sind. Da der Ansatz von V s rhelyi (2004) sehr viele Facetten einer didaktischen Theorie abdeckt, kann dieser Ansatz als Referenzansatz angesehen werden. Es stellt sich

dann die Frage, ob bzw. wie dieser Ansatz - unter Nutzung der beiden anderen - erweitert werden könnte:
a) Lernoptimierung: Lernhilfen sind unterschiedlich zu gestalten, je nachdem, ob z.B. ein Begriff, eine Prozedur oder ein Prinzip zu lernen bzw. als Sub-Aufgaben zu lösen sind.
b) Startpunkt für ein Anwendungsprogramm: Durch eine solche Maßnahme sollte erreicht werden, dass die Gestaltung von Aufgaben nach dem Ansatz von V s rhelyi (2004) stärker in Richtung Anwendungsprogramm (z.B. Training) geführt wird, damit auch Lehrer/innen, Mathematik-Didaktiker/innen, etc. diesen Ansatz unterrichtspraktisch einsetzen können.
c) Erweiterung zur Inneren Differenzierung: Der Ansatz von V s rhelyi (2004) ist explizit auf ein Konzept der Inneren Differenzierung (Herber V s rhelyi, 2002) bezogen, dennoch ergeben sich Weiterentwicklungsmöglichkeiten: Herber (2007) entwirft einen Ansatz, der eine Weiterentwicklung leistet, die die PSI-Theorie von Kuhl (2001) berücksichtigt. Die zentrale Frage dabei wird sein, eine Methodik zu finden, die sowohl eine hohe theoretische Komplexität ermöglicht als auch eine einigermaßen aufwandssparende Umsetzung stimuliert: Fallgeschichten könnten in der Lage sein, beides zu leisten.

Literatur

Herber, H.- . V s rhelyi, . (2002): Das Unterrichtsmodell Innere Differenzierung einschließlich Analogiebildung - Aspekte einer empirisch veranlassten Modellentwicklung. In: Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft, 6, 2, 5-1 .

Herber, H.- . (2007): Schule, die Schüler motiviert. Der Umgang mit Schülern im Unterricht nach Kuhls PSI-Theorie (Theorie der Persönlichkeits-System-Interaktionen). In: . Pühringer (Hg.), Festschrift für Dr. ohannes Riedl (S. 77- 2). Linz: VP-Eigenverlag.

Kuhl, . (2001): Motivation und Persönlichkeit. Interaktionen psychischer Systeme. Göttingen: Hogrefe.

Miles, M. B. Huberman, A. M. (1 4). Qualitative data analysis. Beverly Hills: Sage.

Prenzel, M. Allolio-Näcke, L. (Hrsg.). (2006). Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Münster: Waxmann.

Reigeluth, . M. (1). The elaboration theory: Guidance for scope and sequence decisions. In . M. Reigeluth (Ed.), Instructional-design theories and models. A new paradigm of instructional theory. Vol. II (pp. 425-453). Mahwah, N : Erlbaum.

Reigeluth, . M. Moore, . (1). ognitive education and the cognitive domain. In . M. Reigeluth (Ed.), Instructional-design theories and models. A new paradigm of instructional theory. Vol. II. (pp. 51-6). Mahwah, N : Erlbaum.

Van Merrienboer, . . G. Kirschner, P. A. (2007). Ten steps to complex learning. A systematic approach to four-component instructional design. Mahwah, N : Erlbaum.

V s rhelyi, E. (2004). Aufgaben und Lösungen im Sinne der inneren Differenzierung. Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft, , 1, 61-76.

Astrid BECKMANN, Schwäbisch Gmünd

Fächerübergreifender Unterricht zwischen Mathematik und Kunst

1 Die Idee

Fächerübergreifender Unterricht zwischen Mathematik und Kunst wird üblicherweise mit geometrischen Themen in Verbindung gebracht (Beckmann 2003, Weigand 2007). In einem Projekt der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd wurde der Frage nachgegangen, ob auch eine Verbindung zwischen Kunst und Algebra denkbar ist und Themen des Kunstunterrichts den algebraischen Begriffserwerb fördern können. Bei der dabei entwickelten Unterrichtskonzeption mit verschiedenen Stationen aus Kunst, Mathematik und Naturwissenschaft geht es um den Veränderungsaspekt und den Einsetzungsaspekt des Variablenbegriffs sowie um das Aufstellen von Termen.

2 Die Unterrichtskonzeption

Im Mathematikunterricht sollen die Schülerinnen und Schüler ein angemessenes Bild von Mathematik erwerben. Dazu gehört neben einem formalen, insbesondere auch ein inhaltliches Verständnis von mathematischen Begriffen. Im Zusammenhang mit dem Variablenbegriff heißt das, dass die Vorstellungen von der Veränderlichkeit (Veränderungsaspekt) und des möglichen Einsetzens (Einsetzungsaspekt) erfasst werden und die Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, den jeweiligen Aspekt im Kontext zu erkennen. Dabei wird davon ausgegangen, dass ein Begriff nicht beim einmaligen Erarbeiten gelernt wird, sondern dass der Unterricht immer wieder mit seinen Aspekten vertraut machen muss. Für einen Begriffserwerb im Sinne von *mathematical literacy* spielen Anwendungs- und Realitätsbezüge eine wichtige Rolle. Mathematisch bedeutsame Themen, die das Lernen des Variablenbegriffs unterstützen, sind Terme und Termumformungen, Funktionen und Gleichungen (Vollrath & Weigand 2007).

Die im Projekt entwickelte Unterrichtskonzeption leitet in drei Stationenblöcken auf den Einsetzungsaspekt, den Veränderungsaspekt und auf Termdarstellungen mit Variablen. Sie ist für die 8./ 9. Jahrgangsstufe von Realschule/ Gymnasium konzipiert und dient dem Begriffserwerb durch reflektierendes Vorgehen. Jeder Stationenblock enthält verschiedene Mathematik- und Kunststationen, wobei aus jedem Fach mindestens eine Station bearbeitet werden muss. Abschließend soll über die Gemeinsamkeiten der Mathematik- und Kunststation sowie über die jeweilige Rolle der Variable in den Beispielen reflektiert werden.

3 Die Stationen

Der erste Stationenblock betrifft schwerpunktmäßig den Veränderungsaspekt des Variablenbegriffs. In den mathematischen Stationen wird dieser Aspekt u.a. über naturwissenschaftliche Alltagsbezüge erfahren, indem Messgeräte zur Temperaturmessung, zur Höhen-, Luftdruck- und Schalldruckpegelmessung zur Verfügung stehen. Die Schülerinnen und Schüler führen bei einem Gang durch das Schulgebäude die Messungen durch und legen in den Messtabellen für die verschiedenen Variablen Spalten an. Der Ausgangspunkt der Kunststationen sind Gemälde von Pollock und Munch, bei denen unterschiedliche Kompositionen bzw. eine Veränderung der grotesken Hauptfigur bei Munch zu unterschiedlichen Gemälden führen (vgl. Abbildung 1). Hierbei spielt außer dem Veränderungsaspekt auch der Einsetzungsaspekt eine Rolle.

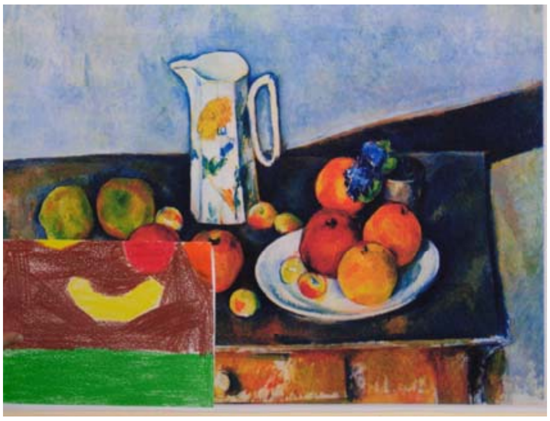


Abb.1: "Der Schrei" von Munch Abb. 2: Cezannes „Milchkrug…"
Variationen und Einsetzungen

Beim zweiten Stationenblock geht es schwerpunktmäßig um den Einsetzungsaspekt des Variablenbegriffs. In den Mathematikstationen spielen Berechnungen durch Einsetzen, Messungen an kreisförmigen Gegenständen sowie Zahlenrätsel und Sudoku eine Rolle. Die Kunststationen werden durch Bilder von Cezanne und Mondrian motiviert. Zum Beispiel wird bei dem Bild von Cezanne ein Bereich durch ein DinA4-Blatt abgedeckt, so dass eine Leerstelle/Platzhalter entsteht. Die Schülerinnen und Schüler sollen nun ein eigenes DinA4-Bild so bemalen, dass es in das Bild passt und Cezannes Gemälde erfasst (vgl. Abbildung 2). Cezanne hat an der betreffenden Stelle eine Zitrone gemalt.

Der dritte Stationenlauf enthält Arbeitsblätter zum Thema Terme und Termumformungen. Zum Beispiel sind für Punktmuster Terme aufzustellen, um dadurch ohne langes Zählen die Anzahl der Punkte schnell angeben zu können. Weiterhin ist über die Entstehung eines Sierpinski-Dreiecks zu reflektieren und Terme für die jeweilige Anzahl der kleinen Dreiecke aufzustellen. Dabei wird auch angeregt, eigene Sierpinskifiguren zu entwerfen und durch entsprechende Termen zu beschreiben.

4 Ergebnisse der Erprobung

Die unterrichtliche Erprobung des Stationenlaufs fand im Rahmen eines Projekttags im Dezember 2007 mit einer 9. Gymnasialklasse in Baden-Württemberg statt. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiteten die Stationen in Gruppen zu – meist – 4 Schülerinnen und Schülern. Sie konnten sich die Aufgaben weitgehend selbst wählen und bevorzugten zunächst meist die Kunststationen. Vor jedem neuen Stationenblock war jedoch auch eine Mathematikaufgabe zu wählen und abschließend der Reflektionsbogen mit Fragen zu Gemeinsamkeiten und der Rolle der Variablen zu beantworten. Auffallend war die hohe Motivation der Schülerinnen und Schüler, die über viele Stunden hinweg anhielt.

Die Auswertung der Schülerarbeitsblätter und der Reflektionsbögen ergab:

- Variablen werden sowohl in den Mathematik-, als auch in den Kunststationen erkannt. In der Erläuterung spielt insbesondere der Einsetzungsaspekt eine Rolle.

Schülerantworten: „Die Variablen stehen für Farben, für Bedeutungen“, “Bild zum Einsetzen, Zahlen für Zeichen einsetzen, Farben für Variablen einsetzen“, „Buchstaben sind zu ersetzen mit Farben oder Zahlen“. „Farben werden mit Zahlen verglichen. Der Aufbau eines Bildes kann dadurch wie ein Term sein.“

- Die Stationen regen eine Reflektion im Hinblick auf den Veränderungsaspekt an.

Schülerantworten: „L = veränderlich, da Lautstärke überall anders ist.“, „a, b , c, d, e sind veränderlich, da die Wahl der Farben für die jeweilige Variable egal ist.“, „Bei Station 1d hat jeder andere Sachen oder Farben für die Variable gewählt.“

Künstler	Munch	*Lucie*	*Magda*	*Saranda*	*Sandra*
Figur	Mensch, grotesk	*Engel*	*Teufel*	*Osterhase*	*Schneemann*

- In der Reflektion über die Stationen spielt sowohl der Änderungsaspekt, als auch der Einsetzungsaspekt eine Rolle.

Schülerantworten: „In der Mathematik stehen Variablen für Zahlen (unbekannt), die man beliebig tauschen kann, in Kunst stehen Variablen für Bilder, die veränderlich sind. In der Kunst kann man ein Bild zum Beispiel durch Einsetzen der anderen Figur verändern.“, „In der Kunst kann man durch das Ersetzen von Skizzen das Bild verändern.“

- Die Stationen führen nicht immer auf den Veränderungsaspekt als Eigenschaft der Variablen, wohl aber zu einer Reflektion über Veränderlichkeit.

Eine Schülergruppe beurteilte die Messwerte ihrer Tabelle als „relativ konstant“ (vgl. Tabelle). Vermutlich waren sie durch die Messfehlerdiskussion im Physikunterricht geprägt.

Ort	Treppenhaus	Aula	Draußen	Turnhalle
h (in Meter)	394,5	386,5	382,5	382
T (in °C)	21,9	21,6	-2	21

Weitere Schülerantworten: „Farben auf vorgegebenen Bildern können nicht verändert werden, da sie sonst nicht den Ansprüchen des Künstlers (Originalbild) entsprechen.“, „In Kunst sind sie veränderlich, jeder kann seine Farben wählen. In Mathe sind Zahlen gegeben, sodass die Variable ausrechenbar ist und unveränderbar ist.“ (hier zu Stationengruppe II),

- Die Stationen regen zu einer Reflektion über die Rolle der Variablen in unterschiedlichen Kontexten an.

Schülerantworten: „Das kommt auf verschiedene Kriterien an..“, „Es bestehen Zusammenhänge mit den nebenstehenden Zahlen. Hängen von anderen ab…“, „* Δ ? sind nicht veränderlich, da sonst ein falsches Ergebnis rauskommt.“

Zusammenfassung: Durch den Bezug zur Kunst werden Reflektionen im Hinblick auf den Variablenbegriff angeregt und dabei erweiterte Sichtweisen eröffnet. Beispielsweise wurde der Gesichtspunkt, dass jeder Künstler die Farb- oder Figurenwahl genau überlegt haben könnte und somit nicht veränderbar ist in der abschließenden Diskussion im Klassenverband noch einmal aufgegriffen und kontrovers diskutiert. Ein Schüler bemerkt: „In Kunst sowie in Mathe muss man Knobeln und man sollte zuerst sorgfältig nachdenken, bevor man mit Malen oder Rechnen/ Hinschreiben anfängt.“

In der Abschlussdiskussion wurde die Kombination von Kunst und Mathematik als überraschend und spannend eingestuft, worauf auch die folgende Notiz im Reflektionsbogen hinweist: „Beides waren kreative Herausforderungen, die uns viel Spaß gemacht haben und uns auf einfallsreiche Ideen haben kommen lassen.“

Literatur

Beckmann, A. (2003). Fächerübergreifender Mathematikunterricht, Bd 1, (Franzbecker)
Weigand et al. (2007) vgl. www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de
Vollrath & Weigand (2007). Algebra in der Sekundarstufe, 3. Aufl., (Spektrum)

Astrid BECKMANN, Schwäbisch Gmünd, Damjan KOBAL, Ljubljana

Claus MICHELSEN, Odense (Moderators)

Mathematical Literacy and Cross Curricular Competencies Through Interdisciplinarity, Mathematising and Modelling Science – Examples from the European ScienceMath-Project

The project ScienceMath is an interdisciplinary European co-operation project for the promotion of mathematical and scientific literacy. It is supported by the European Commission. Co-operation partners are universities and schools of Germany, Denmark, Finland and Slovenia. Objective is the development of proven teaching sequences and -modules that lead to a comprehensive and multidimensional learning of mathematic contents and concepts. It is the basic idea to encourage mathematic learning in scientific contexts and activities of the pupils. Here the project offers concrete teaching and learning material to integrate the formal aspects of the European mathematical lessons into interdisciplinary and applicable contents.

The basis of the project is an interdisciplinary approach with sciences especially with Physics. The pupils shall experience Mathematics in an appropriate interesting and important way by the means of extra-mathematical references; learning in interrelations shall contribute to an intuitive mathematic understanding. With the aid of scientific contexts and methods the gap between formal mathematics and authentic experience shall be closed and on the other hand the variety of mathematic items shall be experienced.

In the moderated session we present examples from the project:

- Introducing mathematical functions to students at the age of 13/ Einführung des Funktionsbegriffs in der Sekundarstufe I (Thilo Höfer)
- Two simple math ideas in technology (Damjan Kobal)
- Preparing the teachers for an interdisciplinary curriculum: Modelling courses for secondary in-service teachers (Claus Michelsen)
- Erkunden des Variablenbegriffs durch physikalische Experimente (Simon Zell)
- Fächerübergreifender Unterricht zwischen Mathematik/ Naturwissenschaften und Kunst (Astrid Beckmann)

Literatur

Please visit our website: www.sciencemath.ph-gmuend.de

Ralf BENÖLKEN, Münster

Besonderheiten mathematisch begabter Mädchen im Grundschulalter

In mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Berufsfeldern und Bildungsgängen ist in der Regel eine deutliche Unterrepräsentanz von Mädchen und Frauen festzustellen.[1] Dieses Phänomen zeigt sich auch in Projekten und Wettbewerben der Begabtenförderung im mathematischen Bereich, insbesondere in solchen, welche an Grundschulkinder gerichtet sind. So nahmen z. B. im Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse" zur Förderung mathematisch potenziell begabter Dritt- und Viertklässler im Schuljahr 2007/2008 insgesamt 123 Kinder teil, darunter 87 Jungen und 36 Mädchen, was einem Mädchenanteil von etwa 30% entspricht. Ähnliche Werte werden aus vergleichbaren Projekten in anderen Städten berichtet (vgl. z. B. BAUERSFELD & KIEßWETTER 2006). Eine mögliche Erklärung für dieses Phänomen besteht darin, dass Mädchen i. A. ein geringeres mathematisches Leistungsvermögen aufweisen als Jungen. Es kann aber auch an andere Erklärungsansätze gedacht werden, welche die Identifikation mathematisch begabter Mädchen erschweren. Ansätze dieser Art beziehen sich auf mögliche Besonderheiten und Unterschiede dieser Mädchen gegenüber mathematisch begabten Jungen bzw. gegenüber mathematisch durchschnittlich begabten Mädchen und Jungen. Sie finden sich in vielen Wissenschaftszweigen wie z. B. in der Mathematikdidaktik, der Hirnforschung oder der Sozialpsychologie. Aus dem zuletzt genannten Bereich stammt u. a. die Theorie der Attributionen, d. h. der subjektiven Ursachenzuschreibungen für Erfolg oder Misserfolg. BENÖLKEN (2008) formuliert auf der Basis einer Analyse verschiedener Studien zu geschlechtsspezifischen Besonderheiten im Attributionsverhalten die folgenden hypothetischen Besonderheiten mathematisch potenziell begabter Mädchen:

1. Mpb Mädchen besitzen im Vergleich zu mdb Mädchen motivationsförderlichere Attributionsmuster.[2]
2. Mpb Mädchen besitzen im Vergleich zu mpb Jungen motivationsabträglichere Attributionsmuster.
3. Mpb Mädchen ähneln in ihren Attributionsmustern aber eher den Jungen (beider Gruppen).

---

[1] Detailliertere Darstellungen und Statistiken zu diesem Phänomen finden sich z. B. bei BENÖLKEN 2008; BLUNCK 2007.

[2] „mpb" = „mathematisch potenziell begabt"; „mdb" = „mathematisch durchschnittlich begabt". Zur theoretischen Positionierung bzgl. mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter vgl. BENÖLKEN (2008).

Neben der Ableitung derartiger hypothetischer Besonderheiten auf der Basis von Literaturanalysen besteht ein weiterer Zugang in einer explorativen Vorgehensweise, z. B. in der Beobachtung von Kindern beim Bearbeiten mathematischer Problemaufgaben wie der sog. „Umfüllaufgabe“[3] während der Förderstunden des Projekts „Mathe für kleine Asse“:

> *„Tim hat einen Eimer mit 8 Litern Wasser. Außerdem stehen ihm ein 3-Liter- und ein 5-Liter-Eimer zur Verfügung. Wie kann er nur durch Umfüllen 4 Liter Wasser abmessen?“*

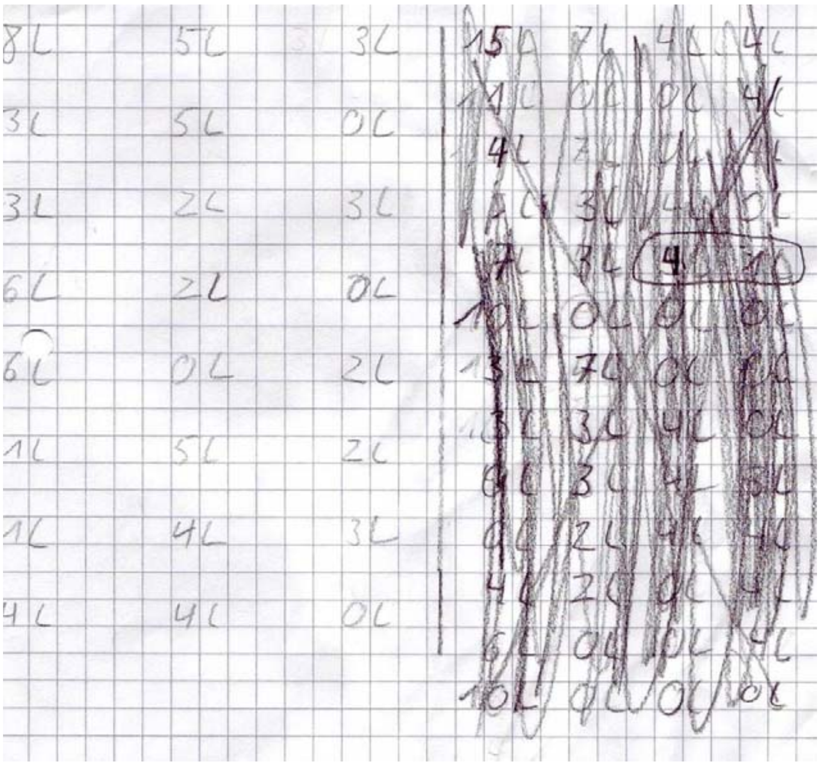


Abb. 1: Jungenlösung zur „Umfüllaufgabe“.

Bei der Lösungsdarstellung der Jungen zu dieser Aufgabe fiel eine „abstrakte Schlichtheit“ in dem Sinne auf, dass sie die Lösung ohne weitere Illustrationen so knapp wie möglich notierten. Zudem achteten sie vergleichsweise weniger auf die Nachvollziehbarkeit für andere sowie auf Sauberkeit, Ordnung und Übersicht. So übermalten sie falsche Ansätze, während Mädchen ein neues Lösungsblatt anfingen. Ferner verzichteten die Jungen in den meisten Fällen auf den Einsatz von Farben oder anderen Möglichkeiten der Veranschaulichung (vgl. das Beispiel in Abb. 1).

Demgegenüber tendierten die Mädchen zu „visuell-attraktiven“ und z. T. eher anschaulichen Lösungen. Sie stellten ihre Lösungen häufiger als Jungen mithilfe von Farben dar, formulierten aber auch vergleichsweise häufiger Lösungstexte. Zudem zeigte sich, dass die Mädchen eher auf saubere, ordentliche, übersichtliche und nachvollziehbare Lösungen achteten (vgl. die Beispiele in Abb. 2).

---

[3] Die methodische Gestaltung der Förderstunde zum Thema „Umfüllaufgaben“ mit der Lösung der Aufgabe beschreibt KÄPNICK (2001).

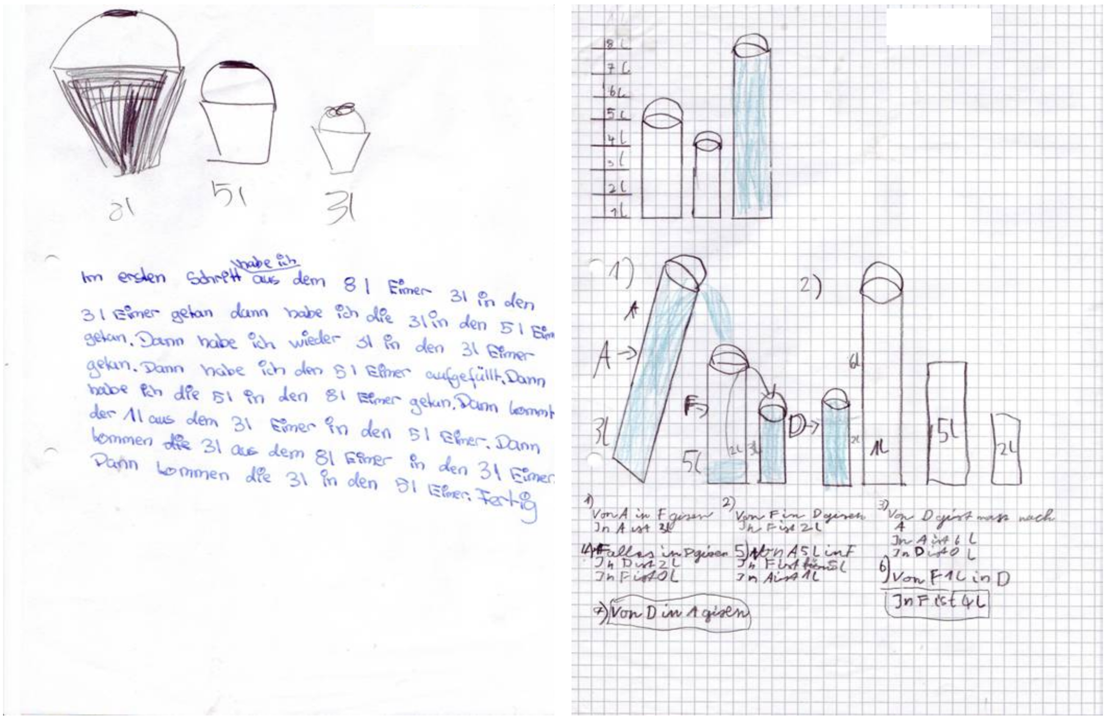


Abb. 2: Mädchenlösungen zur Umfüllaufgabe.

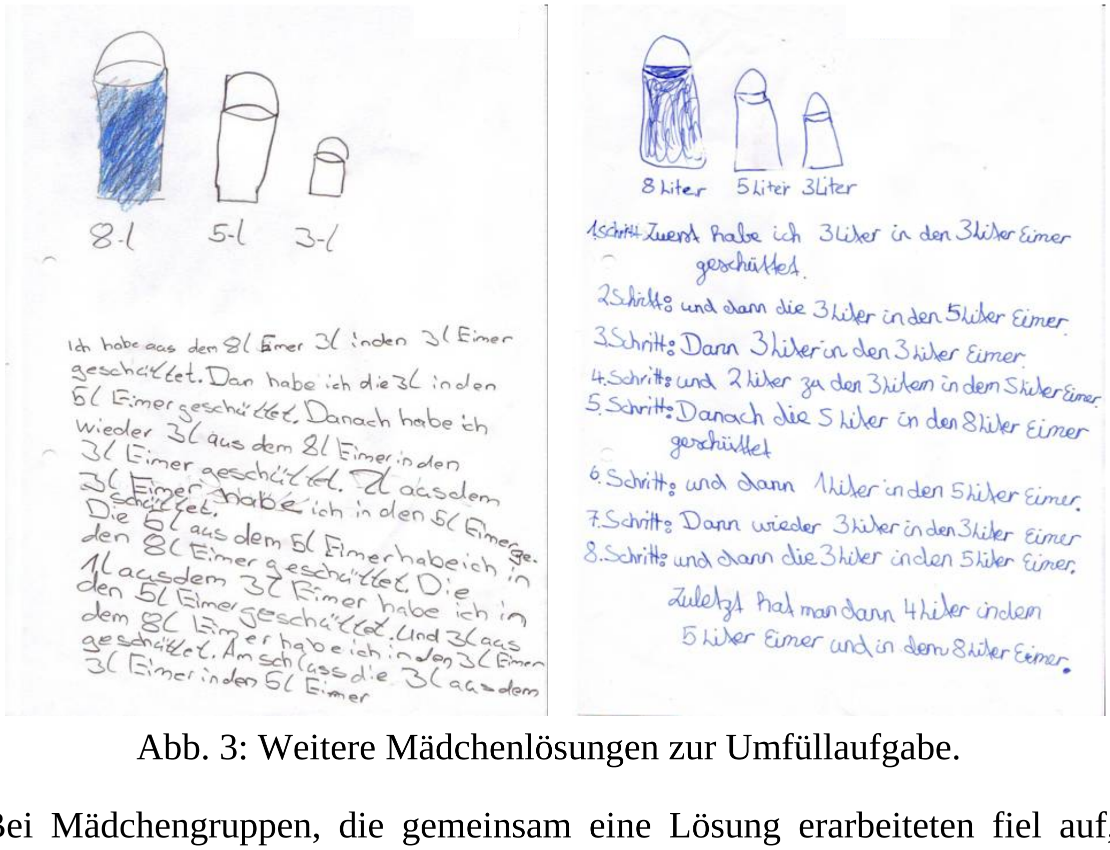


Abb. 3: Weitere Mädchenlösungen zur Umfüllaufgabe.

Bei Mädchengruppen, die gemeinsam eine Lösung erarbeiteten fiel auf, dass jedes Mädchen individuell fortfuhr, nachdem die Lösung von der Gruppe gefunden war und man sich auf eine Art der Lösungsdarstellung geeinigt hatte. Auf diese Weise fertigte jedes Mädchen der jeweiligen

Gruppe gemäß dem gemeinsam festgelegten Plan eine eigene Lösung an (vgl. Abb. 3).

Wenn die Mädchen ihre Lösungen vor der gesamten Gruppe präsentieren sollten, zogen sie es meist vor, gemeinsam mit den Kindern vorzutreten, mit denen sie in der Gruppenarbeit geknobelt und die Lösungsnotation festgelegt hatten. Offenbar fühlten sie sich so sicherer und waren eher bereit, dem Plenum ihre Lösungen vorzustellen.

Somit lassen sich die folgenden hypothetischen Besonderheiten ableiten:

1. Mpb Mädchen tendieren eher zu „visuell-attraktiven“ und z. T. eher anschaulichen Lösungen als mpb Jungen, die eher zu „schlichten“, „technischen“ und z. T. eher abstrakten Lösungen tendieren.

   In Bezug auf mpb Mädchen bedeutet dies, sie stellen ihre Lösungen häufiger mithilfe von Farben dar, formulieren aber auch häufiger Lösungstexte und achten mehr auf saubere, ordentliche und übersichtliche Lösungen.

2. Bei der Lösungserarbeitung arbeiten mpb Mädchen eher als Jungen kooperativ, die Lösungsdarstellung wird anschließend aber individuell vorgenommen (gemäß dem in der Gruppe vereinbarten Lösungsplan). Bei der Präsentation ihrer Lösungen präferieren mpb Mädchen offenbar das „Auftreten“ innerhalb einer (Klein-) Gruppe.

Die dargestellten Beobachtungen machten wir mehrfach beim Thema „Umfüllaufgaben“, aber auch sehr häufig bei anderen Problemfeldern. Stets fanden sich jedoch vereinzelt Kinder, die eine „untypische“ Lösung anfertigten (z. B. Jungen, die einen Lösungstext formulierten). Die o. g. hypothetischen Besonderheiten dürfen nicht isoliert betrachtet werden, da sie in einem komplexen Bedingungsgefüge motivationaler u. a. Faktoren stehen.

Literatur

Bauersfeld, H.; Kießwetter, K. (Hrsg.): Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder, Offenburg; Mildenberger 2006.

Benölken, R.: Attributionsmuster mathematisch potenziell begabter Mädchen im Grundschulalter. In: Käpnick, F.; Fuchs, M. (Hrsg.): Tagungsband zur Tagung „Mathematisch begabte Kinder – eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft“ (20./21.9.2007 in Münster; im Druck), 2008.

Blunck, A.: Das Geschlecht der Mathematik. In: Cederbaum, C.; Homeyer, von P. (Hrsg.): Ein Moment für Mensch und Mathematik, Freiburg i. B.; Freiburger Verlag 2007, S. 115 – 124.

Käpnick, F.: Mathe für kleine Asse 3./4. Schuljahr, Berlin; Volk & Wissen 2001.

hristiane BENZ, Karlsruhe

Zahlen sind nichts Schlimmes – Vorstellungen von Erzieherinnen ber Mathematik im indergarten

Die in den letzten ahren neu erschienenen Bildungs- und Orientierungspläne für Kindertageseinrichtungen greifen alle die frühe mathematische Bildung auf. Sie gehen jedoch unterschiedlich detailliert auf mathematische Inhalte sowie auf die methodisch-didaktische Umsetzung ein. Nun liegt es im Ermessen der einzelnen Einrichtungen, auf welche Art und Weise sie Angebote zur mathematischen Bildung gestalten. Die Ergebnisse der Belief-Forschung belegen, dass Menschen in ihrem Umgang mit Mathematik durch unterschiedliche Faktoren beeinflusst werden. Dabei handelt es sich z.B. sowohl um bewusstes Wissen als auch um Einstellungen, Vorstellungen, Haltungen und Emotionen (Leder et al. 2002). Diese Erkenntnisse werden auch von Vertretern der kognitivkonstruktivistischen Lernpsychologie (Seel 2003, 21 ff.) und der Neurobiologie (Roth 1 7, 2) gestützt. Eine Schlüsselrolle für die vorschulische Entwicklung von Kindern kommt den Erzieherinnen zu.

Design

Um Kenntnisse zu erlangen, welche Vorstellungen Erzieherinnen von Mathematik und Mathematiklernen im Kindergarten haben, wurden Anfang des ahres 2007 in Kindertageseinrichtungen 550 Fragebögen über die Träger verteilt, 2 1 Fragebögen wurden zurückgesandt. Des Weiteren wurden in 2 Fachschulen 30 angehende Erzieherinnen und Erzieher befragt. Von den insgesamt 5 Befragten waren 554 weiblich und 35 männlich. Die einzelnen Items des Fragebogens waren unterschiedlich konstruiert. Im ersten Bereich konnten die Erzieherinnen durch Mehrfachantworten ihre eigenen Empfindungen und Wertschätzung gegenüber der Mathematik zum Ausdruck bringen. Anhand einer mehrstufigen Ratingskala von 1-4 konnten die Erzieherinnen und Erzieher ihre Zustimmung zu einzelnen Aussagen über Mathematik und Mathematiklernen geben. Welche Kompetenzen Kinder in vorschulischen Einrichtungen erwerben sollen, wurde in offenen Fragen erhoben, um die Antworten nicht zu sehr einzuengen bzw. zu beeinflussen.

Ergebnisse

Empfindungen gegenüber Mathematik sind besser als ihr Ruf

Im Fragebogen wurden 4 Adjektive angegeben, die emotional neutral gesehen werden können (nützlich, wichtig, abstrakt, nutzlos). Ebenso wurden 4 Items die eindeutig emotional positiv besetzt sind (herausfordernd, interessant, klar verständlich, faszinierend) und 4 negativ belegte Adjektive aufgeführt.

nützlich	63%	verwirrend	35%	beängstigend	15%
wichtig	5 %	unverständlich	24%	klar verständlich	%
herausfordernd	52%	abstrakt	21%	langweilig	7%
interessant	40%	faszinierend	1 %	nutzlos	3%

Tab. l Empfindungen gegenüber Mathematik in %

Entgegen des häufig zitierten schlechten Images der Mathematik in der ffentlichkeit wurden die beiden höchsten Prozentwerte bei Adjektiven erzielt, die als neutrale Empfindung mit positivem Werturteil bezeichnet werden können, wie *nützlich* und *wichtig.* Die Prozentwerte, die darauf folgen, gehören zu *herausfordernd* und *interessant,* Dabei handelt es sich um Adjektive, die positiven Empfindungen zugeordnet werden können. Erst danach folgen zwei negative Empfindungen wie *unverständlich* und *verwirrend.* Es muss also festgehalten werden, dass positiv besetzte Emotionen weitaus häufiger vorhanden sind als negativ besetzte Emotionen. Wobei nicht zu unterschätzen ist, dass ein Drittel aller Fachkräfte in Kindertageseinrichtungen Mathematik als verwirrend empfindet.

Schematischer Aspekt als vorherrschender Aspekt

Es wurden den Erzieherinnen mehrere Aussagen angeboten, bei denen sie ihre Zustimmung in einer mehrstufigen Antwortskala von l (trifft in keiner Weise zu) bis 4 (trifft voll und ganz zu) angeben konnten. eweils 5 Aussagen konnten dem schematisch - formalen Aspekt[1] (z.B. Mathematik verlangt logische Präzision), dem Prozesscharakter (z.B. Probleme lösen ist ein Hauptbestandteil von Mathematik.) und dem Anwendungsaspekt (z.B. Mathematik schult Fähigkeiten, die einem im Alltag helfen) zugeordnet werden. Bei 6 % aller Erzieherinnen stand der schematischformale Aspekt im Vordergrund. 16% der Erzieherinnen gaben bei dem Anwendungsaspekt die größte Zustimmung. Für den Prozessaspekt trifft dies lediglich bei 4% der Erzieherinnen zu. Bei den fehlenden 12 % ließ sich kein Aspekt als vorherrschend feststellen.

Aktives, konstruktives Lernen von Mathematik erfährt große Zustimmung

Nach den Aussagen über verschiedene Sichtweisen von Mathematik wurden die Befragten mit Aussagen zum Erwerb mathematischen Wissens

[1] Bei der Einteilung wurde auf die Kategorisierung von Grigutsch, et al (1) zurückgegriffen, wobei der formale und schematische Aspekt zusammengefasst wurde.

konfrontiert. Die Aussagen, die sich eher auf behavioristische Lemtheorien beziehen hatten insgesamt einen Mittelwert von 2. , wobei Aussagen, die eher auf konstruktivistische Lerntheorien fußen, einen Mittelwert von 3.3 erreichten. Dabei legten die Erzieherinnen, die nicht mehr in der Ausbildung sind, etwas größeren Wert auf konstruktive aktive Aspekte. Eine konstruktivistische Auffassung von Lernen und die Einsicht, dass Kinder ihr Wissen bzw. ihre mathematischen Kenntnisse selbst konstruieren können und müssen, beinhaltet ein bestimmtes Fehlerverständnis:

Fehler sind dabei unverzichtbarer Bestandteil eines Lemweges und eine normale Erscheinung des entdeckenden Lernprozesses. Die recht niedrigen Mittelwerte von 2.5 (Das wichtigste, ist ein korrektes Ergebnis zu erreichen s. Abb. l links) und 2.3 (Fehler zu vermeiden, ist wichtig s. Abb. l rechts) bei den negativ formulierten Items zeigen durchaus eine positive Einstellung gegenüber Fehlem. Dass sich eine positive Betrachtungsweise der Fehler jedoch noch nicht allgemein durchgesetzt hat, wird daran deutlich, dass über ein Viertel der Befragten eine hohe Zustimmung und über 15% die höchste Zustimmung bei diesen Items gegeben haben.

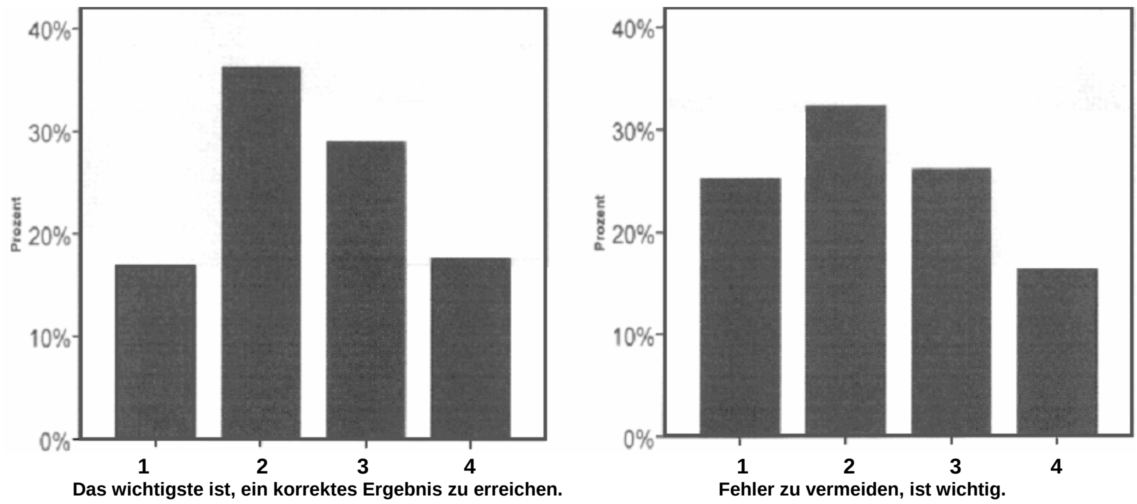


Abb. l: Einstellung zu Fehlern

Breites Spektrum an erwünschten Kompetenzen

Mit der offenen Frage Das sollten meiner Meinung nach Kinder im Kindergarten im mathematischen Bereich lernen sollte erfasst werden, welchen Kompetenzerwerb Erzieherinnen von Kindern in Kindertageseinrichtungen erwarten. Die Antworten wurden in folgenden Kategorien zusammengefasst. Angegeben wird die Häufigkeit der Nennungen.

Zählen	Mengen	Rechnen	Ziffern	Geometrie	Orientierung im ZR	Größen	Logik
47, %	3 ,4%	36%	2 ,5%	26,1%	25,6%	17,2%	3,6%

Tab. 2: Häufigkeit der genannten erwarteten Kompetenzen

Wie an der Tabelle zu sehen ist, ist das inhaltliche Spektrum sehr weit. Viele Bereiche der Grundschulmathematik wurden genannt. Das Zählen und der Umgang mit Mengen wurden am häufigsten genannt. Auch einfache Rechnungen sollen die Kinder nach Meinung der Erzieherinnen und Erzieher bereits lernen, wobei hier häufig folgende zusätzliche ußerungen gemacht wurden anhand von Situationen oder mit Gegenständen . Mathematische Kompetenzen im Bereich der Größen wurden seltener genannt. Dies erstaunt, da bei den Größen der Alltagsbezug der Mathematik doch sehr deutlich wird. Nachdenklich stimmen einige Aussagen, in denen von den Kindern hohe Kompetenzen erwartet werden, wie z.B.: *„Zahlen von 1-100, Ahnung vom Dezimalsystem (10 - 100 - 1000), Begriffe wie subtrahieren und addieren, kleines 1x1 sollten alle Kinder können* .

onse uenzen

Aufgrund der dargestellten Tendenzen erscheinen folgende Bausteine für eine Fort- und Ausbildung im Bereich vorschulischer mathematischer Bildung als sinnvoll und notwendig.

Begegnungen mit mathematischen Inhalten, die den Prozesscharakter der Mathematik verdeutlichen und den Erzieherinnen einen positiven Zugang zur Mathematik und Erfolgserlebnisse ermöglichen.

Aspekte konstruktivistischer Lerntheorien und ihre Auswirkungen auf die Mathematikdidaktik, die auch den Umgang mit Fehlern beinhalten.

Konkrete inhaltliche Ziele mathematischer frühkindlicher Bildung, die auf die Entwicklung des mathematischen Denkens von Kindern gegründet sind.

Literatur

Grigutsch, S., Raatz, U. Toemer, G. (1): Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 1 (l), 3-3 .

Leder, G., Pehkonen, E. Törner, G. (2002) (Hg.): *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education.* Dordrecht, TRhe Netheriands: Kluwer Academic Publishing

Roth, G. (1 7): *Das Gehirn und seine Wirklichkeit. Kognitive Neurobiologie und ihre philosophischen Konsequenzen.* Frankfurt: Suhrkamp.

Seel, N.M. (2003): *Psychologie des Lernens.* München, Basel: Reinhardt.

Dagmar BERTALAN, Essen

Die Rolle verschiedener Repräsentationsformen in einem ersten Zugang zu linearen Gleichungen

Eine vierwöchige Unterrichtsreihe zur anschauungsgestützten Einführung von Variablen, Termen und Gleichungen in Klasse 7 stellt die Grundlage des Projektes dar, aus dem hier berichtet werden soll. In der Unterrichtsreihe arbeiten die Schülerinnen und Schüler über lange Zeiträume hinweg in festen Vierergruppen zusammen. Die Arbeit je zweier Gruppen in drei Versuchsklassen wurde während der gesamten Unterrichtsreihe durch Video-Aufzeichnungen dokumentiert, um sie im Anschluss interpretativ analysieren zu können.

In diesem Aufsatz soll am Fallbeispiel einer Mädchengruppe dargestellt werden, welche Rollen verschiedene Repräsentationsformen bei der Bearbeitung der handlungsorientierten Einstiegsaufgabe zum Thema Gleichungen spielen.

Die Aufgabe

Zur Bearbeitung der Aufgabe haben die Schülerinnen einige weiße und einige mit einem schwarzen Punkt beklebte Streichholzschachteln sowie einen Vorrat an getrockneten weißen Bohnen bekommen. Bei der Aufgabe handelt es sich um eine modifizierte Version der ersten Aufgabe der Lernumgebung *Knack die Box* im mathbu.ch 7 (Affolter, W. u. a., 2003, S. 32/ 33). Die Aufgabenstellung lautet:

Legt mit Bohnen und leeren Boxen die beiden folgenden Anordnungen:

Anordnung A	*Anordnung B*
■■•••••	□□□•••

Füllt die Boxen so, dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. *In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden (insgesamt, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt).*
2. *In Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Bohnen.*

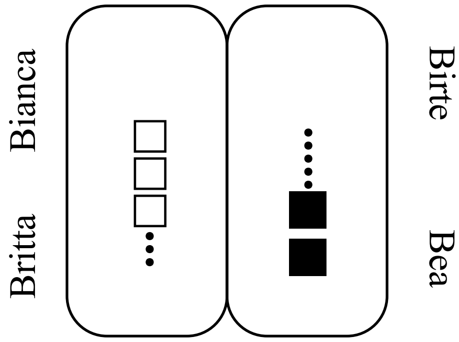
Wie viele Bohnen können in den schwarzen bzw. in den weißen Boxen liegen? [...][1]

Vielleicht helfen Euch Tabellen der folgenden Art beim übersichtlichen Aufschreiben Eurer Ergebnisse!

Anz. der Bohnen in einer schwarzen Box						
Anz. der Bohnen in einer weißen Box						

[1] Es wurde eine Teilaufgabe ausgelassen, die nicht Gegenstand des Aufsatzes ist.

Eine erste Lösung durch Probieren



Vor Beginn der Episode, die betrachtet werden soll, haben die Schülerinnen gemäß der Aufgabenstellung bereits mit Bohnen und leeren Boxen die Anordnungen auf den Tisch gelegt. Schematisch dargestellt ergab sich auf diese Weise das nebenstehende Bild. Die Boxen sind geschlossen. Die Episode beginnt damit, dass Birte vom Arbeitsblatt vorliest: „Füllt die Boxen so, dass folgende Bedingungen erfüllt werden. In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden, insgesamt, das heißt die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt." Die erste Bedingung wird dann von Bianca paraphrasiert:

31	Bianca	Also, in beiden Anordnungen, also in den beiden Sachen *(zeigt abwechselnd auf die beiden Boxenanordnungen auf dem Tisch)* sind gleich viele Bohnen Bohnen vorhanden
32	Bea	Stimmt doch gar nicht.
33	Bianca	Nö.
34	Britta	Check ich nicht wirklich.

Die Boxen werden in dieser Szene nicht als Variable wahrgenommen, sondern als konkrete leere Objekte. Die Schülerinnen wissen, dass sie leere Boxen auf den Tisch gelegt haben. Sie verstehen Bedingung (1) der Aufgabe als Aussage und stellen dann richtigerweise fest, dass diese auf die konkreten Anordnungen auf dem Tisch - mit den leeren Boxen - nicht zutrifft.

Im Anschluss an diese Szene liest Bianca noch einmal vor: „Insgesamt, das heißt die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt." Dadurch scheint ihr klar zu werden, dass noch Bohnen in die Boxen gelegt werden müssen. Sie stellt daraufhin fest, wie viele Bohnen in den Anordnungen draußen liegen. Folgende Szene schließt an[2]:

37	Bea	Dann müssen da noch ähm drei rein *(zeigt auf die weißen Boxen)*
38	Bianca	Dann müssen *(1 sec. Pause)* ja, aber # hier *(zeigt auf eine schwarze Box)* müssen ja auch noch in den Boxen welche rein. In jeder Box muss auf jeden Fall eine Bohne sein
39	Britta	# Zwei
	[...]	
42	Bea	Wart mal. Zweitens, in Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Bohnen

---

[2] Die Rauten im Transkript zeigen an, dass Britta Bianca ins Wort fällt.

Den Schülerinnen scheint hier nun klar zu sein, dass sie herausfinden sollen, wie viele Bohnen man in die Boxen legen muss, damit Bedingung (1) erfüllt ist. Da Bea in <42> auch noch die zweite Bedingung der Aufgabenstellung ins Spiel bringt, erhalten die Boxen nun Variablencharakter für die Schülerinnen: sie verkörpern gesuchte Unbekannte[3].

Bea knüpft an ihren Beitrag aus <42> an: Sie öffnet die schwarzen Boxen ein Stück <44 - 46> und sagt <44>: „Hier müssen gleich viele Bohnen drin liegen." Das Öffnen der Boxen deutet an, dass noch etwas passieren muss. Es liefert damit ein Bild für die gesuchten Unbekannten. In <46>, also noch während Bea dabei ist, die schwarzen Boxen zu öffnen, setzt Bianca zu einem Vorschlag an, macht dann jedoch einen Rückzieher und beginnt stattdessen, die weißen Boxen zu öffnen. Währenddessen überlegen Britta und Birte, was passiert, wenn man in die schwarzen Boxen je eine Bohne legen würde. Sie führen ihre Überlegung aber nicht zu Ende. Während Bianca die letzte weiße Box öffnet, setzt sie noch einmal zu einer Erklärung an, bricht aber wiederum ab. Während Britta dann noch einmal versucht, ihren Gedankengang auszuführen <56 - 60>, scheint Bianca ihren eigenen Gedanken nachzuhängen und zeigt schließlich erst auf die weißen Boxen und dann auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B. Dann hat sie eine Lösung gefunden <61>:

> Ich hab's. Hier müssen immer zwei rein *(zeigt auf die schwarzen Boxen),* das sind fünf *(zeigt auf die einzelnen Bohnen aus Anordnung A)*, das sind sieben *(zeigt in die erste schwarze Box)* und das sind neun *(zeigt in die zweite schwarze Box)*. Und hier sind drei *(zeigt auf die einzelnen Bohnen aus Anordnung B)* und wenn hier auch überall zwei kommen *(zeigt auf die weißen Boxen)* sind das sechs *(zeigt auf die weißen Boxen)* und das sind neun *(zeigt auf die einzelnen Bohnen aus Anordnung B)*, dann sind das gleich viele.

Biancas Kontext-spezifische Semantik sowie ihr ausgeprägtes Zeigen auf und sogar in Boxen deutet darauf hin, dass die konkrete Darstellung der Situation durch geöffnete Boxen und einzelne Bohnen sie bei der Lösung der Aufgabe entlastet hat.

Im Anschluss stellen die Schülerinnen die gesuchte Situation her, indem sie in jede Box zwei Bohnen legen. Dies zeigt, dass sie den Erfahrungskontext „Boxen und Bohnen" ernst nehmen. Darüber hinaus wird dadurch das Ergebnis fixiert.

Weitere Bearbeitung der Aufgabe

Durch Probieren finden die Schülerinnen im Anschluss weitere Lösungen, die sie aber nicht mehr durch das Hineinlegen von Bohnen in die Boxen

---

[3] Unterscheidung verschiedener Variablen-Aspekte nach Drijvers (2003): Platzhalter, sich ändernde Größe, Generalisierer, gesuchte Unbekannte und Symbol

konkretisieren. Die Bohnen der ersten Lösung - je zwei in jeder schwarzen und jeder weißen Box - bleiben bis zum Schluss in den Boxen liegen. Die Lösungen werden zunächst auch nicht auf andere Art und Weise fixiert. Die Schülerinnen entwickeln während des Probierens erste Ideen, welcher Zusammenhang zwischen den einzelnen Lösungen bestehen könnte. Die vermuteten Gesetzmäßigkeiten sind zu diesem Zeitpunkt aber nie vollständig. Ihre Anwendung in Verbindung mit Fehlern bei der rechnerischen Überprüfung der generierten Zahlenpaare führt zum Teil zu vermeintlich neuen Lösungen. Eigentlich bereits rechnerisch bestätigte richtige Zahlenpaare werden teilweise wieder angezweifelt. Diese Phase großer Verwirrung mündet letztendlich in den Beschluss, eine Tabelle anzulegen, um die Ergebnisse festzuhalten. Dabei orientieren die Schülerinnen sich an der Beispieltabelle des Arbeitsblattes. Sie tragen ihre bisherigen Ergebnisse (2/2), (5/4) und (8/6) ein, wobei (8/6) vorher noch einmal überprüft wird. Die Tabelle liefert nun die notwendige Übersicht, so dass die Schülerinnen die Gesetzmäßigkeit sofort erkennen: „Die Anzahl der Bohnen in der schwarzen Box steigt immer um drei. Die Anzahl der Bohnen in der weißen Box steigt immer um zwei.“ Sie wenden diese Gesetzmäßigkeit an, um weitere Tabelleneinträge zu erzeugen. Die Lösung (11/8) wird noch durch Nachrechnen an der Boxensituation überprüft. In der formulierten Gesetzmäßigkeit manifestiert sich ein Wechsel der Variablen-Rolle, der bereits vorher stattgefunden hat: die Schülerinnen sehen die Boxen nicht mehr als gesuchte Unbekannte, sondern als sich ändernde Größen.

Die Rolle der konkreten Boxen hat sich auf zwei Ebenen entwickelt. Bezogen auf den Lösungsprozess hat ein erster Ablösevorgang stattgefunden: die Schülerinnen argumentieren weiterhin in der bereichsspezifischen Semantik des Erfahrungsbereichs, die abschließende Herstellung der gesuchten Situation mit den konkreten Bohnen und Boxen ist aber nicht mehr notwendig, sie bleibt gedanklich. Außerdem hat sich auch die inhaltliche Rolle der Boxen verändert. Während sie in der ersten Phase zunächst nur konkret, dann als gesuchte Unbekannte wahrgenommen wurden, fokussieren die Schülerinnen in der zweiten Phase die Änderung ihres Inhalts. Die Tabelle hat als Übersicht erzeugende Darstellungsmöglichkeit der Ergebnisse in der zweiten Phase der Aufgabenbearbeitung eine Schlüsselfunktion. Erst als die Schülerinnen die Tabelle vor sich haben, erkennen sie die ganze Gesetzmäßigkeit.

Literatur

Affolter, W. u.a. (2003): mathbu.ch 7. Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I. Bern: schulverlag blmv AG und Zug: Klett und Balmer AG. S. 32/33.

Drijvers, P.H.M.: Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter. Utrecht 2003

Christine BESCHERER und Christian SPANNAGEL, Ludwigsburg

Aktivierendes Mathematik-Lernen zum Studienbeginn

Obwohl in didaktischen Veranstaltungen immer die Wichtigkeit eigenständigen und selbstbestimmten Lernens betont wird, werden viele fachwissenschaftliche Veranstaltungen nach dem Paradigma der Instruktion abgehalten. In Übungen, die fachwissenschaftliche Vorlesungen begleiten, werden vom Tutor oder allenfalls von guten Studierenden die Musterlösungen zu den Aufgaben oft einfach an der Tafel demonstriert. Die Teilnehmer selbst werden dabei kaum aktiv. Sie verfolgen die Lösungen bzw. stellen Fragen zu den vorgestellten Lösungswegen. Oft merken Studierende erst bei der Vorbereitung auf die Klausur, dass sie nicht im Stande sind, die Aufgaben selbst zu lösen, da sie evtl. in den Übungen der Illusion unterlegen sind, sie hätten den Lösungsweg verstanden (vgl. [1]).

Darüber hinaus kann bei Studierenden mit niedriger mathematischer Selbstwirksamkeit der Eindruck entstehen, dass die Aufgaben nur von Tutoren oder sehr guten Studierenden lösbar sind. Unter mathematischer Selbstwirksamkeit versteht man in Anlehnung an Bandura (vgl. [2]) die Überzeugung einer Person von sich selbst, mathematische Handlungen erfolgreich durchführen zu können. Eine Steigerung des eigenen Kompetenzgefühls wird durch derartiges Vorrechnen weitgehend verhindert.

Zahlreiche Studenten kommen zudem mit dem Bild gymnasialen Mathematikunterrichts, der sich durch einen hohen Anteil frontaler Phasen auszeichnet, an die Hochschule. Insbesondere in Lehramtsstudiengängen ist es wichtig, mit diesem Bild in den ersten Studiensemestern zu brechen, da sonst die Gefahr besteht, dass die Studierenden später in ihrer Berufspraxis nach alten Mustern unterrichten.

Didaktische Design Pattern eignen sich, um Best Practices in Lehr-/Lernszenarien zu kommunizieren [3]. Dem oben beschriebenen *Anti-Pattern* passiven Lernens kann das *Pattern* aktiven Mathematiklernens in fachwissenschaftlichen Übungen entgegengestellt werden [4]. Im Folgenden werden Elemente des Patterns beschrieben und die Ergebnisse einer empirischen Begleituntersuchung zur Lehrveranstaltung „Einführung in die Arithmetik“ vorgestellt.

1. Aspekte aktivierender Mathematik-Lernumgebungen

Die Selbstbestimmungstheorie von Deci & Ryan [5] gibt einige Anregungen, wie man Lernsituationen herstellen kann, die aktives, selbstbestimmt motiviertes Lernen fördern. Lernumgebungen müssen derart gestaltet sein, dass die Lernenden sich als *autonom*, *kompetent* und *sozial eingebunden* erleben. Im Zusammenhang mit dem Kompetenzerleben ist es für Lernende mit niedriger mathematischer Selbstwirksamkeit wichtig, Erfolgserlebnisse aufgrund eigener Tätigkeiten zu haben [2]. Prenzel et al. [6] ergänzen drei Aspekte für selbstbestimmt motiviertes Lernen: die wahrgenommene inhaltliche Relevanz des Lernstoffes, die wahrgenommene Instruktionsqualität und das wahrgenommene inhaltliche Interesse beim Lehrenden.

Das Pattern *Aktives Lernen in Mathematikübungen* [4] berücksichtigt diese theoretischen Aspekte folgendermaßen:

- Jede Woche bekommen die Studierenden 5-6 umfangreiche, offene Arbeitsanregungen, von denen sie sich mindestens zwei zur Bearbeitung auswählen sollen. Die Wahlfreiheit soll dabei die wahrgenommene Autonomie der Studierenden fördern. Die Arbeitsanregungen enthalten auch Tipps zur Bearbeitung und Hinweise auf Werkzeuge wie Tabellenkalkulation und Taschenrechner, die sich zur Lösung anbieten.

- In der Zeit zwischen den Übungsstunden und in der Übungsstunde selbst lösen die Studierenden in Kleingruppen die gestellten Aufgaben selbsttätig. Es werden weder in der Stunde Lösungswege präsentiert noch werden Musterlösungen ausgeteilt.

- Die Tutorinnen und Tutoren unterstützen in den Übungsstunden bei Problemen und geben individuelles Feedback. Sie verraten dabei nicht die Lösungen, sondern geben Anregungen zur Weiterarbeit.

- Die Studierenden erhalten darüber hinaus eine Rückmeldung zu ihren Leistungen durch eine Probeklausur, die im zweiten Drittel des Veranstaltungszeitraums geschrieben und mit schriftlichem Feedback zurückgegeben wird.

- Die soziale Eingebundenheit wird zum einen dadurch gefördert, dass Studierende sich in Kleingruppen (3-4 Personen) organisieren. Zum anderen wird eine virtuelle Lernplattform (z.B. Moodle) eingesetzt, um die Kommunikation zwischen allen Teilnehmern auch unter der Woche zu ermöglichen. Dabei wird zu jeder Arbeitsanregung ein eigenes Diskussionsforum bereitgestellt, in dem Fragen gestellt und Diskussionen geführt werden können.

- Da sich die Studierenden in den Übungen Aufgaben auswählen können, erhalten sie auch in der Klausur eine gewisse Wahlfreiheit, beispielsweise durch die Möglichkeit, sich aus 10 Aufgaben 5 auswählen zu können.

2. Ergebnisse einer empirischen Begleituntersuchung

Im Wintersemester 2007/08 wurden die Übungen zur Lehrveranstaltung „Einführung in die Arithmetik" im Studiengang Realschullehramt an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg erstmals nach diesem Konzept durchgeführt. Im Sinne des Aktionsforschungsansatzes [7] wurden dabei die folgenden Hypothesen untersucht:

- H1. Bei Studierenden mit niedriger mathematischer Selbstwirksamkeit (MSW) steigert sich diese im Laufe der Veranstaltungszeit.
- H2. Studierende mit hoher MSW sind zunächst empfänglicher für das Konzept. Dies gleicht sich gegen Ende des Semesters an.

Zur Erfassung der mathematischen Selbstwirksamkeit wurde der Fragebogen von Betz und Hackett [8] adaptiert. Dieser Fragebogen wurde zu Beginn und am Ende der Veranstaltung von den Studierenden beantwortet. Hypothese 2 wurde überprüft, indem der Motivationsfragebogen von Prenzel et al. [6] eingesetzt wurde, und zwar in der Mitte und am Ende des Veranstaltungszeitraums. Die Studierenden (N=50) wurden aufgrund ihres anfänglichen Wertes der mathematischen Selbstwirksamkeit per *median split* in zwei Gruppen aufgeteilt: diejenigen mit einem niedrigen Wert (MSW-) und diejenigen mit einem hohen Wert (MSW+).

zu H1: Eine Varianzanalyse mit Messwiederholung ergab einen signifikaten Unterschied zwischen den beiden Zeitpunkten (Anfang und Ende) in beiden Gruppen. Sowohl die Gruppe MSW- als auch die Gruppe MSW+ steigerte sich in ihrer Selbstwirksamkeit im Laufe des Veranstaltungszeitraums ($F(1,48)=7,49$; $p<0,01$; $\eta^2=0,14$). Der Mittelwert der Gruppe MSW- erhöhte sich von 130,3 auf 136,3 Punkte, der Mittelwert der Gruppe MSW+ von 157,0 auf 163,6 Punkte bei einem maximal möglichen Wert von 180 Punkten. Hypothese H1 betreffend wurden also nicht nur die Studierenden mit niedrigen mathematischer Selbstwirksamkeit gefördert, sondern alle Studierenden.

Zu H2: Eine multivariate Varianzanalyse über die sechs Aspekte Autonomie, Kompetenz, soziale Einbindung, Relevanz, Instruktionsqualität und inhaltliches Interesse der Lehrperson, die in der Mitte des Veranstaltungszeitraums erhoben wurden, ergab einen signifikanten Unterschied zwischen den Gruppen MSW- und MSW+ ($F(6,43)=2,92$; $p<0,05$; $\eta^2=0,29$). Post-Hoc-Tests mit einem korrigierten Alpha-Niveau von 0,008 ergaben Unterschiede in den Aspekten *Autonomie*, *Kompetenz* und *Interesse der Lehrperson*. Studierende der Gruppe MSW+ fühlten sich autonomer und kompetenter und nahmen stärker das inhaltliche Interesse der Lehrperson wahr. Eine multivariate Analyse über die sechs Aspekte am Ende der Veranstaltungszeit ergab wiederum einen signifikanten Unterschied zwischen beiden Gruppen ($F(6,43)=2,85$; $p<0,05$; $\eta^2=0,28$). Post-Hoc-Tests ergaben erneut einen Unterschied in den Aspekten Autonomie- und Kompetenzwahrnehmung, nicht aber beim inhaltlichen Interesse der Lehrperson. Hypothese H2 trifft somit insofern zu, dass Studierende mit hoher mathematischer Selbstwirksamkeit empfänglicher für das Konzept dahingehend sind, dass sie sich als autonomer und kompetenter wahrnehmen als Personen mit niedriger mathematischer Selbstwirksamkeit. Dies gleicht sich gegen Ende der Veranstaltungszeit aber nicht aus. Vermutlich liegt dies daran, dass die Zeitspanne zwischen den beiden Motivationsmessungen zu kurz war.

Weitere Analysen ergaben zudem, dass Studierende der Gruppe MSW- tendenziell mehr negative Empfindungen hatten, Studierende der Gruppe MSW+ eher positive Empfindungen. In zukünftigen Veranstaltungen sollen daher vor allem Studierende mit niedriger mathematischer Selbstwirksamkeitserwartung noch stärker unterstützt werden, insbesondere durch individuelles Feedback.

Literatur

[1] R. K. Atkinson, S. J. Derry, A. Renkl & D. Wortham (2000). Learning from Examples: Instructional Principles from the Worked Examples Research. Review of Educational Research 70(2), S. 181-214.

[2] A. Bandura (1998). Self-efficacy. The Exercise of Control. W. H. Freeman and Company, New York.

[3] R. Vogel & S. Wippermann (2004). Communicating didactic knowledge in university education. In: L. Cantoni & C. McLoughlin (Hrsg.), Proceedings of EDMedia 2004. June 21th-26th, 2004, Lugano, Switzerland, S. 3231-3235.

[4] C. Bescherer, C. Spannagel & W. Müller (2008). Anti Pattern and Pattern for Introductory Mathematics Tutorials. Erscheint im Proceedings-Band der EuroPLoP 2008, Irsee, Deutschland.

[5] E. L. Deci & R. M. Ryan (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Zeitschrift für Pädagogik, 39 (2), S. 223–238.

[6] M. Prenzel, K. Kramer & B. Drechsel (2001). Selbstbestimmt motiviertes und interessiertes Lernen in der kaufmännischen Erstausbildung - Ergebnisse eines Forschungsprojekts. In: K. Beck & V. Krumm (Hrsg.), Lernen und Lehren in der beruflichen Erstausbildung. Konzepte für eine moderne kaufmännische Berufsqualifizierung (S. 37-61). Leske und Budrich, Opladen.

[7] H. Altrichter & P. Posch (1998): Lehrer erforschen ihren Unterricht. Eine Einführung in die Methoden der Aktionsforschung. Verlag Julius Klinkhardt, Bad Heilbrunn.

[8] N. E. Betz & G. Hackett (1983). The Relationship of Mathematics Self-Efficacy Expectations to the Selection of Science-Based College Majors. Journal of Vocational Behavior 23, S. 329-345.

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen

Wie konstruieren Lernende mathematisches Wissen?

Annemarie ist auf dem Gymnasium und kam in Mathematik bislang gut zurecht. Das aber ändert sich plötzlich. Sie macht sehr viele Fehler bei Aufgaben zur Längen-, Flächen- und Volumenberechnung, als sie in unsere Förderung an der Universität Bremen kommt.

Die Frage, wie groß ein Quadrat mit der Seitenlänge 1m ist, beantwortet sie mit 4m und beschreibt die Größe mit ihren Armen. Die Frage, wie groß der Flächeninhalt eines Rechtecks ist, das 6cm lang und 4cm breit ist, beantwortet sie zunächst mit 20cm, später dann mit 24cm. Nachdem wir gemeinsam sehr viele Flächen – darunter auch ein Quadrat der Seitenlänge 1m – nach ihrer Größe durch echtes und gedankliches Auslegen vergleichen und auch den Umfang mit einbeziehen, stelle ich die Frage nach der Größe des obigen Quadrats erneut. Die erste Antwort lautet nun 40dm, die zweite 100dm, obwohl die Einheiten $1m^2$ und $1dm^2$ als Flächeninhalte entsprechender Quadrate definiert worden sind. Warum kann Annemarie Flächeninhalte nicht bestimmen? In der Literatur findet man „Verwechselung von Umfang und Flächeninhalt“ als Erklärung. Das aber greift zu kurz. Ich möchte zwei unterschiedliche epistemische Handlungsmodelle verwenden, um die Situation zu analysieren.

RBC+C – ein kognitives Handlungsmodell

Dreyfus (2007) versteht unter Konstruktion von Wissen einen Prozess vertikaler Reorganisation vorhandenen Wissens in einen neuen Kontext hinein. Kerngedanke ist ein geschachteltes Modell epistemischer Handlungen: Recognizing (R) meint Handlungen des Wiedererkennens bereits vertrauter Wissensbausteine. Diese Handlungen sind eingebaut in die epistemische Handlung des Auf- und Ausbauens von Wissen (Building-with, B). Building-with ist wiederum in einen Prozess der Konstruktion neuen Wissens (Constructing, C) eingebettet. Konstruktion und Aufbauen von Wissen setzt das Wiederkennen vertrauten Wissens voraus.

Was erkennt Annemarie nun eigentlich in den Aufgaben wieder? Offenbar Längeneinheiten. Sie berechnet den Umfang des Quadrats mit der Seitenlänge 1m richtig. Auch charakterisiert sie damit in eindeutiger Weise die Größe des Quadrats, denn die Größe eines Quadrats ist durch seine Seitenlänge oder auch durch den Umfang festgelegt. 4m oder 40dm beschreibt also die Größe des „Meter-Quadrats“ korrekt im Vergleich zu anderen Quadraten. Annemarie hat außerdem gelernt, dass man kleine Quadrate an die Seitenränder des großen legt und deren Anzahl multipliziert, denn sie erhält 100 „dm-Quadrate“, wie sie richtig erzählt. Warum aber gibt sie das Ergebnis in dm und nicht in dm^2 an?

In der Dimension dm^2 erkennt sie die Längendimension dm wieder (R). Hoch 2 hat für sie keine Bedeutung: Sie kann darin nichts wiedererkennen. Wenn „dm“ aber die Größe des „m-Quadrats“ beschreiben soll, dann geht das nur durch den Umfang. Der Prozess des Zusammenbauens (B) basierend auf den wiedererkannten Bestandteilen *Flächengröße* und *dm als Längendimension* führt folgerichtig zur Berechnung des Umfangs. Es ist nicht nötig, eine neue Einheit für die Flächengröße zu konstruieren. Also kommt es nicht zur „Construction“ einer Flächeninhaltsdimension.

Als mir das auffällt, erkläre ich, dass eine Strecke nur eine Vergleichsrichtung zulässt, eine Fläche aber zwei (Auslegerichtungen) und dass deshalb die Längeneinheit $1dm^1$ die Hochzahl 1, die Flächeneinheit $1dm^2$ die Hochzahl 2 mit sich führt. Die Flächengröße eines „Meter-Quadrats“ gibt Annemarie nun mit 10 000 dm^2, nämlich 10dm mal 10dm und man müsse wegen der 2 im Exponenten quadrieren. Die Hochzahl 2 in der Dimension wird nun wiedererkannt, aber als „Quadrieren“ und quadrieren kann man nur eine Zahl, also quadriert sie das Ergebnis 100. Die Dimension dm^2 wird also nicht als *ein* Zeichen angesehen. An dieser Stelle korrigiere ich: „dm^2 ist ein Zeichen, dahinter verbirgt sich das Vergleichen mit Quadraten der Größe $1dm^2$“. Wir vergleichen noch einmal, indem wir real und gedanklich Flächen auslegen (z.B. den Bügerpark mit „km-Quadraten“). Erst ab jetzt gelingt es Annemarie, dm^2 als ein Zeichen, nämlich die Dimension für eine Flächeneinheit, anzunehmen, als Bestimmungsmerkmal von Flächeninhalten in Aufgaben wieder zu erkennen (R) und die Flächeninhalte richtig zu ermitteln (B).

Aus dieser Analyse können wir mehrere Dinge lernen:

Es kann nur wieder erkannt werden, was bekannt ist: Jedes (Teil-)Zeichen zählt. Das, was wieder erkannt wird, ist Basis für das Aus- und Aufbauen von Wissen, auch wenn das Ergebnis nicht erwünscht, unangemessen oder falsch wird. (Wieder-)erkannt müsste nicht nur werden, *was* ein Sachverhalt (dm^2 als Flächeninhaltsdimension) *darstellt*, sondern auch *was* er *nicht darstellt* (nicht das Quadrat der entsprechenden Maßzahl). Wiedererkennen bezieht sich also auf positives und negatives Wissen.

SVSt – ein Modell kollektiver epistemischer Handlungen

Dieses Modell (Bikner-Ahsbahs 2005) beschreibt Handlungen, die in Klassen- oder Gruppengesprächen zur sozialen Konstruktion von Wissen führen. Sammeln (S) mathematischer Bedeutungen bezeichnet einen kollektiven Prozess des Sammelns gleichartiger Bedeutungen (Zeichen gleicher Objektarten). Bedeutungen, die in Gestalt von Zeichen gesammelt wurden, können dann miteinander oder mit anderen Wissensbausteinen verknüpft werden (V). Werden mathematische Einheiten durch kennzeichnende Merkmale z.B. in Beispielen erfasst, dann spricht Bikner-Ahsbahs von Struktursehen (St).

In unserem Beispiel muss man beim SVSt-Modell die gesamte soziale Situation in den Blick nehmen, die zur Bildung von Flächeninhaltseinheiten führt. Die soziale Situation stellt eine Dyade innerhalb einer Fördersituation mit mir als „Lehrerin“ dar. Das Setting ist also eine Reaktion auf Lernprobleme, die behoben werden sollen. Aufgaben werden z.B. gestellt, um herauszufinden, was genau Annemarie gelingt oder nicht gelingt, um dann einen Mangel an Erfahrungen auszugleichen, das Verständnis erneut zu prüfen und wieder Erfahrungsmangel auszugleichen. Betrachten wir nun die obige Situation mit dem SVSt-Modell.

Sie beginnt damit, dass Annemarie in Überprüfungsaufgaben ihr vorhandenes Wissen sammelt (S) und Verknüpfungen (V) herstellt, die sie zuvor vermutlich auch im Mathematikunterricht („falsch“) hergestellt hat. Während wir über die Größe von Quadraten sprechen, versuche ich die Bedeutung von Annemaries fehlerhaften Verknüpfungen zu verstehen. Auslegeaufgaben sollen den Mangel an Erfahrungen des Flächenvergleichs ausgleichen. In gemeinsamen (gedanklichen und realen) Prozessen des Auslegens (z.B. des Bremer Bürgerparks mit km^2-Quadraten in einem Stadtplan) hat Annemarie die Gelegenheit, mathematische Bedeutungen zum Auslegen von Flächen zu *sammeln* und zu *verknüpfen*. Nebenbei werden Beispiele für Einheitsquadrate gesammelt und in Flächeninhaltsvergleichen vielfältig verknüpft. Zu dem Zeichen dm^2 biete ich Bedeutungen (Auslegerichtungen zur Hochzahl 2, Abgrenzung zur Bedeutung „Quadrieren“) an, die Annemarie interpretierend aufgreift.

Zunächst weist Annemarie der 2 überhaupt keine Bedeutung zu, sie kann „2“ also nicht in einen Prozess des Sammelns mathematischer Bedeutungen aufnehmen. Ihre Sinnkonstruktionen beziehen sich nur auf Längendimensionen. Sobald die Bedeutung der 2 als Hochzahl auftritt, wird diese 2 mit dem ihr vertrauten Kontext des Quadrierens verknüpft. Aber erst als diese Verbindung ent-knüpft wird, kann die neue Flächeninhaltseinheit als Struktur gebildet und auf Volumeneinheiten übertragen werden.

Was lernen wir hieraus?

Verknüpfungen können offenbar nur mit Zeichen gelingen, die mit Bedeutungen versehen werden. Bedeutungen werden kontextbezogen hergestellt. Vertraute Verknüpfungen werden auch in neuen Kontexten hergestellt oder auf sie übertragen, selbst wenn sie falsch sind. Die Berücksichtigung aller relevanten Merkmale beim Sammeln von Bedeutungen, Ent-knüpfen falsch verknüpfter Zusammenhänge und das Zusammensetzen mehrerer Zeichen zu einer Einheit geschehen nicht von selbst.

Feine Unterschiede

Die Ergebnisse der beiden Analysen sind ähnlich. Mit dem RBC-Modell können kognitive Prozesse des Individuums analysiert werden, während das SVSt-Modell den Fokus auf das soziale Geschehen legt. Die Stärke des RBC-Modells liegt in der Frage, was Annemarie eigentlich genau wiedererkennt. Die Korrektur fehlerhafter Handlungen zu verstehen, gelingt erst durch Hinzunahme der Unterscheidung zwischen negativem und positivem Wissen.

Das SVSt-Modell erklärt nicht, es beschreibt die kollektiven epistemischen Handlungen der sozialen Situation und hilft, epistemische Prozesse zu verstehen. Gesammelt wird nur das, was wahrgenommen wird, dies kann aber in einem wechselseitigen Tun der Akteure voranschreiten. Fehlerkorrekturen werden als Ent-knüpfen und Neuverknüpfen erfasst, im RBC-Modell würde man das mit einem Wissenszuwachs beschreiben: Während Annemarie – nach dem RBC-Modell – positives *und* negatives Wissen zusammenbaut, beschreibt das SVSt-Modell diesen Sachverhalt sozial als gemeinsames Ent- und Neuverknüpfen.

Offenbar unterscheiden sich die beiden Modelle. Die Unterschiede aber sind eher fein. Deshalb muss man fragen: Braucht man überhaupt beide Modelle? Inwieweit beide Sichtweisen, die soziale Gestaltung und der individuelle Ertrag von Lernprozessen, gewinnbringend in ein Modell integriert werden können, das ist eine der Kernfragen, die in der empirischen Studie „Effective mathematical knowledge construction in interest-dense situations“[1] zusammen mit den israelischen Wissenschaftlern Tommy Dreyfus und Ivy Kidron geklärt werden sollen.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, Angelika (2005): Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Hildesheim: div Franzbecker.

Dreyfus, Tommy (2007): Processes of Abstraction in Context: The Nested Epistemic Actions Model. Baruch Schwarz & Tommy Dreyfus (Hrg.): Guided construction of knowledge in classrooms. An international workshop. Jerusalem: Hebrew University, 17-27.

---

[1] Dieses Projekt wird von der German-Israeli Foundation gefördert.

Christina Birkenhake, Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg und Berufliche Schule B7, Stadt Nürnberg

Symmetrie und Kunst im Geometrieunterricht*

Der vorliegende Bericht beschreibt ein Projekt, das an der Fachakademie für Sozialpädagogik (FAKS) in Nürnberg/Bayern im Schuljahr 2006/07 in einer 3ten Klasse durchgeführt wurde. Das Projekt stand unter dem Titel *Symmetrie in Mathematik und Kunst* und wurde in Zusammenarbeit mit dem Kunstunterricht unternommen. Die beteiligten Schülerinnen nahmen an der 5-jährigen Ausbildung zum Erzieher/in teil: zwei Jahre Sozialpädagogisches Seminar (SPS, Klassen 1 und 2), zwei Jahre Schulausbildung an der FAKS (Klassen 3 und 4) und ein Jahr Berufspraktikum. Voraussetzung für diese Ausbildung ist der mittlere Schulabschluß. Je nach zusätzlich belegten Fächern und erreichtem Notendurchschnitt besteht die Möglichkeit, die fachgebundene Fachhochschulreife, die Fachhochschulreife oder die fachgebundene Hochschulreife zu erwerben. Zu diesen zusätzlichen Fächern gehört Mathematik mit je drei Wochenstunden im 3ten und 4ten Schuljahr.

Die mathematischen Vorkenntnisse und Fähigkeiten der SchülerInnen der FAKS sind extrem inhomogen und in der Regel nicht mit denen von Schülern der Sekundarstufe II eines Gymnasiums zu vergleichen. In den zwei Jahren Mathematikunterricht muss zunächst, einem Schnellkurs gleich, der gymnasiale Stoff der Sekundarstufe I nachgeholt werden.

Kriterien zur Auswahl des Themas (vgl. [H] pp.35, 36)

(1) *Bedeutung innerhalb des Curriculums:* Das Projekt schloß zeitlich und konzeptionell an die Behandlung der analytischen Geometrie an und stellte so eine Vertiefung dieses Stoffes dar. Die Beziehung zur Kunst und die praktische Umsetzung der mathematischen Erkenntnisse in Kunstobjekte ließ das Projekt den im Curriculum vorgeschriebenen fachspezifischen Themen zuordnen.

(2) *Bedeutung für andere Schulfächer:* Beziehungen der Mathematik zur Kunst sollten am Beispiel von Symmetrie und Parkettierungen deutlich gemacht werden. Der Umgang mit Symmetriegruppen zeigt den Schülern, wie mathematische Inhalte für Kinder in kreativer und spielerischer Weise sinnlich erfahrbar gemacht werden können und so das Interesse am Experimentieren und Beobachten verstärkt werden kann.

(3) *Bedeutung für spätere Berufe:* u. (4) *Bedeutung für die gegenwärtige und spätere Lebenswelt der Schülerinnen:* [H] p.36 sagt, dass sich die „Bedeutung von Inhaltszielen des Geometrieunterrichts für spätere Berufe (ist) im wesentlichen auf Berufe ein(ge)schränkt, welche ein Studium der Mathematik voraussetzen, ...". Sicherlich gehört die Sozialpädagogik nicht zu diesen Berufen. Aber gerade hier sehe ich die große Notwendigkeit eines interessanten und nachhaltigen Mathematik- und insbesondere Geometrie-Unterrichts: Wie immer wieder gefordert sollte die Geometrie als Mittel zur Entfaltung spielerischer Fähigkeiten und zur Entwicklung von Freude an Mathematik dienen. Erzieher und Sozialpädagogen übernehmen heutzutage (und werden das auch in Zukunft tun) einen Großteil der Erziehung unserer Kinder: Erzieher betreuen Kinder in Horten und bei Nachmittagsbetreuungen. Da stellt sich ihnen unter anderem vermehrt die Aufgabe der Hausaufgabenbetreuung. Dieser müssen sie insbesondere auch im Fach Mathematik gewachsen sein. Wenn wir künftig mathematisch-naturwissenschaftlich interessierte Kinder und Erwachsene haben wollen, so dürfen Erzieher nicht mit Schrecken an ihren eigenen Mathematikunterricht denken, sondern müssen vielmehr Freude und Neugier auf Mathematik vermitteln. Dies ist aber nur möglich, wenn sie selber Mathematik als spannendes Kulturgut erfahren haben.
(5) *Kulturhistorische Bedeutung:* Symmetrien findet man in vielen Kunstwerken, insbesondere denen des Islam. Angehende ErzieherInnen werden in unserer multikulturellen Welt ständig mit Kindern und Jugendlichen mit Migrationshintergrund konfrontiert. So bietet das Thema Symmetriegruppen eine gute Möglichkeit, andere Kulturen besser zu verstehen, um so dieses später spielerisch im Berufsalltag umsetzen zu können. Auch im vorliegenden Fall erzeugten die Beispiele islamischer Kunst eine rege Diskussion. Muslimische Schülerinnen erläuterten die Hintergründe des Verbotes menschlicher Abbildungen in der muslimischen Kunst und versuchten so ihren Mitschülerinnen, muslimische Weltanschauungen zu erklären.

Das Projekt

Das Projekt schloß zeitlich und konzeptionell an die Behandlung der Analytischen Geometrie an. Zum besseren Verständnis der Vektoraddition wurde das xy-Koordinatensystem mit einem als unendlich gedachten Schachbrett verglichen und ein Vektor mit der Bewegung einer Spielfigur: Zum Beispiel entspricht der Vektor $\binom{1}{2}$ einer Bewegung des

Springers. Daraufhin sollten alle möglichen Positionen einer Spielfigur mit nur einer oder mehreren Bewegungsvorschriften/Vektoren markiert werden, wobei auch die inverse Bewegung berücksichtigt werden sollte. Die entstandenen Gitter im Koordinatensystem waren ein anschauliches Bild für die Gruppen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. In diesem Zusammenhang ließ sich der Begriff des Erzeugendensystems leicht veranschaulichen: mehr als zwei Vektoren erzeugen ebenfalls nur Ketten oder Gitter und leicht lassen sich minimale Erzeuger finden. Im Folgenden wurde der Gruppenbegriff auf die Bewegungsgruppen von Band- und Flächenornamenten ausgedehnt. Anhand von zahlreichen Beispielen entdeckten die Schülerinnen die weiteren möglichen Bewegungen wie Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen. Aus zeitlichen Gründen war es leider nicht möglich, die den Bandornamenten zugrundeliegenden 7 Symmetriegruppen von den Schülerinnen selbständig ausarbeiten zu lassen. Allerdings konnte anhand von vielen Bildbeispielen eine Liste der Symmetriegruppen verständlich erklärt werden. Die folgende Klassifikation diente der Unterscheidung der Symmetrien.

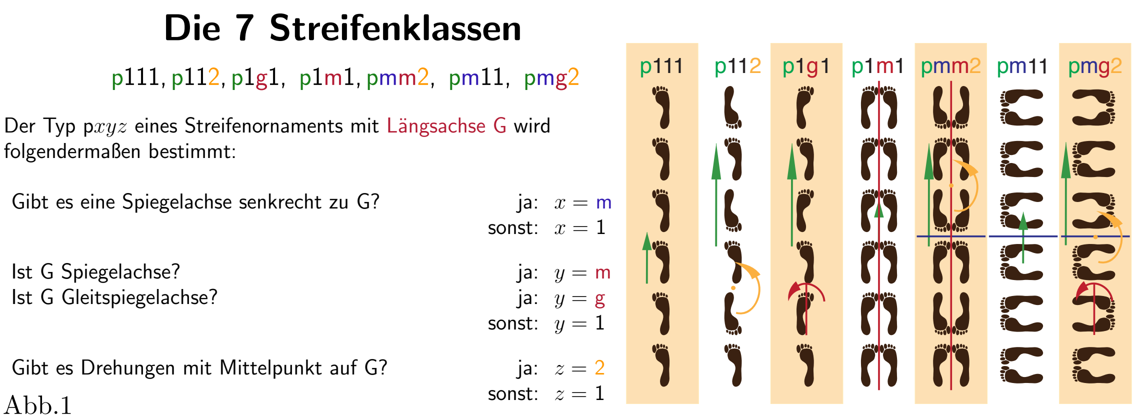


Abb.1

Zur genaueren Analyse der Flächenornamente beschränkten wir uns ebenfalls auf die Klassifikation Abb.2 (vgl. [Sch]). Der Umgang mit der Klassifikation wurde wiederum mit zahlreichen Beispielen, zumeist Mosaike aus der Alhambra, eingeübt. Des weiteren wurden die den Flächenornamenten zugrundeliegenden 5 verschiedenen Gitter untersucht, die von der Translationsuntergruppe erzeugt werden. Damit schloß sich wieder der Kreis zur analytischen Geometrie. Die Gitter

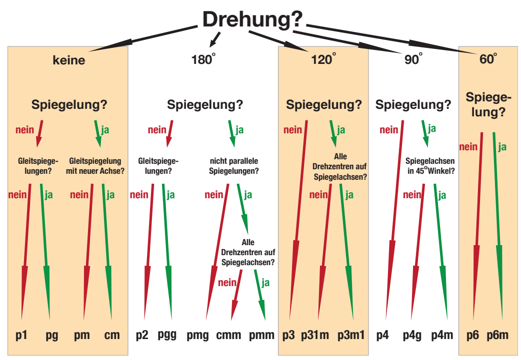


Abb.2

bieten einen guten Startpunkt zur Erzeugung eines einfachen Flächenornaments: Ein an einer Seite eines Fundamentalparallelogramm abgeschnittenes Flächenstück muss an der gegenüberliegenden Seite hinzugefügt werden. Viele schöne Ideen zu Aufgabenstellungen und Anleitungen in diesem Kontext bietet übrigens das Buch [K-M]. Da, wie ober erwähnt, nicht die ganze Klasse am Mathematikunterricht teilnimmt, wurden anhand der Beamerpräsentation [Bir] die übrigen Schülerinnen in die Klassifikation der Streifen- und Flächenornamente eingeführt. Neben den oben abgebildeten Graphiken der Klassifikationen konnten die Schülerinnen darin viele Photos von Mosaiken aus der Alhambra, der klassischen Quelle von Realisierungen der Symmetriegruppen, sehen. Abschließende Aufgabe war, selbstständig Ornamente zu fertigen. Die Wahl der Techniken, Materialien etc. stand den Schülerinnen frei. Dabei ist die Rosette Abb.3 entstanden. Die einzelnen Elemente sind jeweils mit selbst entwickelten geometrischen Flächenmustern versehen. Die Rosette hat einen Durchmesser von ca. 1,5 m.

Abb. 3

Für mehr Details zu dieser Rosette und das ganze Projekt verweise ich auf den Anhang.

Literatur

[Bir] http://christina.birkenhake.net ⇒ Vorträge und Workshops ⇒ Symmetrie - in Kunst, Natur und Mathematik ⇒ Symmetrieprojekt an der FAKS (2007)

[H] Gerhard Holland, Geometrie in der Sekundarstufe, Entdecken - Konstruieren - Deduzieren, Franzbecker (2007)

[K-M] L.C. Kinsey, T.E. Moore, Symmetrie, Shape, and Space, An Introduction to Mathematics Through Geometry, Key College Publishing (in coorperation with Springer), 2002

[Sch] D. Schattschneider, The plane Symmetrie groups: Their Recogniton and Notation, American Mathematical Monthly 85, 1978

Werner BLUM, Stefan KRAUSS, Kassel und Michael NEUBRAND, Oldenburg

Zusammenhänge des Professionswissens mit Lehrermerkmalen, Unterrichtsqualität und Leistungszuwächsen der Schüler

1. Das Projekt COACTIV

In den letzten Jahren wird zunehmend die Bedeutung des – insbesondere fachbezogenen – *Professionswissens von Lehrkräften* betont. Die diesbezügliche Forschungslage ist aber defizitär. Das Projekt COACTIV[1] (Leiter: Jürgen Baumert, MPI Berlin/ Werner Blum, Universität Kassel/ Michael Neubrand, Universität Oldenburg) hat sich zum Ziel gesetzt, erstens das Professionswissen von Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrern der Sekundarstufe I unter dezidiert fachbezogener Perspektive zu konzeptualisieren und mittels geeignet konstruierter Tests zu messen sowie zweitens Zusammenhänge zwischen diesem Wissen und anderen Lehrer-, Unterrichts- und Schülermerkmalen herzustellen (zur Details siehe Krauss u.a., 2004; Brunner u.a., 2006a). PISA 2003/04 bot die einmalige Gelegenheit, repräsentative Schülerdaten mit zugehörigen Lehrerdaten zu verbinden, indem die Mathematiklehrer der deutschen PISA-Klassen (Jahrgangsstufen 9 und 10) mit dem COACTIV-Instrumentarium umfassend befragt werden konnten. Zudem wurden sämtliche Klassenarbeiten sowie ausgewählte Unterrichts- und Hausaufgaben der PISA-Klassen analysiert (Jordan u.a. 2006).

Die COACTIV-Tests (für Details und Itembeispiele siehe Krauss u.a., eing.) basieren auf der gängigen Unterscheidung von fachdidaktischem und fachlichem Wissen. Betrachtet man Unterrichten von Mathematik vereinfacht als *Zugänglichmachen* mathematischer *Inhalte* für *Lernende*, so kann man beim *fachdidaktischen Wissen* zwischen drei Facetten differenzieren: Wissen über Lernende, über Inhalte und über Zugänglichmachen. COACTIV spezialisierte diese drei Facetten auf

1) Erkennen, Analyse und Vorhersage von typischen Fehlern und Schwierigkeiten,
2) Erkennen des multiplen Lösungspotentials von Aufgaben,
3) Erklären, Darstellen und Repräsentieren mathematischer Sachverhalte.

Der entsprechende COACTIV-Fachdidaktiktest 2004 enthielt 7 Items zum ersten, 4 Items zum zweiten und 11 Items zum dritten Aspekt, insgesamt also 22 Items. *Fachwissen* wurde konzeptualisiert als vertieftes Hintergrundwissen über den Stoff des Mathematikcurriculums der Sekundarstufe und ist damit vom Wissen der Schülerinnen und Schüler genauso abgegrenzt wie vom rein universitären Fachwissen. Der Fachwissenstest enthielt 2004 insgesamt 13 Items. Alle 35 Items waren offen (Dauer des Gesamttests mit diesen 35 Items: im Mittel zwei Stunden pro Lehrkraft).

2. Einige Befunde zum Professionswissen von Mathematiklehrern

Den COACTIV-Test zum fachdidaktischen und Fach-Wissen absolvierten 2004 die 198 Lehrkräfte, die ihre PISA-Klasse im ganzen zehnten Schuljahr unterrichtet haben, und zwar 85 aus Gymnasien und 113 aus anderen Schulformen (Hauptschulklassen waren 2004 nicht mehr beteiligt). Der Test wurde am Nachmittag des PISA-Testtages (in der Schule) von einem geschulten Testleiter durchgeführt. Die Tests wurden von 8 intensiv geschulten Kodierern ausgewertet, jedes Item wurde unabhängig von zwei

[1] Von der DFG gefördert wurde COACTIV von 2002 bis 2006 im Schwerpunktprogramm BiQua, ebenso wie Folgestudien von Stefan Krauss, Universität Kassel, von 2007 bis 2009.

Kodierern bewertet mit zufriedenstellender Interraterreliabilität (im Mittel $\rho = 0{,}81$).

Die größten Unterschiede im professionellen Wissen ergaben sich aus der Schulformzugehörigkeit der Lehrkräfte. Der Mittelwert in der gesamten Stichprobe beträgt beim fachdidaktischen Wissen 18,6 (SD = 5,6, empirisches Maximum 37) und beim Fachwissen 5,9 (SD = 3,4, theoretisches und empirisches Maximum 13). Diese Mittelwerte betragen für die Gymnasiallehrer 21,0 bzw. 8,5 und für die Nicht-Gymnasiallehrer 16,8 bzw. 4,0. Während der Unterschied beim Fachwissen erwartbar war, überrascht der Unterschied beim fachdidaktischen Wissen. Dieser verschwindet allerdings, wenn das Fachwissen kontrolliert wird (für eine genauere Diskussion und Interpretation dieser Werte siehe Krauss u.a., eingereicht). Die latente Korrelation zwischen fachdidaktischem und Fach-Wissen ist bei Gymnasiallehrern nahezu 1, d.h. die beiden Wissenskategorien sind hier (was typisch für Expertenwissen ist) empirisch nicht trennbar. Allerdings zeigt eine Gruppe von Realschullehrkräften, dass auch mit sehr wenig Fachwissen ein überdurchschnittliches fachdidaktisches Wissen möglich ist, d.h. es scheint mindestens zwei Wege zum fachdidaktischem Wissen zu geben. Interessant ist auch der Befund, dass keine Alters- oder Berufserfahrungsabhängigkeit des Professionswissens feststellbar ist (siehe Brunner u.a. 2006b). Das von uns erhobene fachnahe Wissen scheint demnach i.W. in der Lehrerausbildung erworben worden zu sein.

3. Zusammenhänge von Professionswissen mit anderen Merkmalen

Besonders interessant ist die Frage: Wodurch zeichnen sich Lehrkräfte mit hohen Werten im fachbezogenen Professionswissen aus? Welche Merkmale hat deren Unterricht? Was lernen deren Schülerinnen und Schüler? Dabei liegt bei COACTIV die Annahme zugrunde, dass *Lehrer*, vermittelt über den von ihnen erteilten *Unterricht*, die Leistungen und Einstellungen ihrer *Schüler* kausal beeinflussen (neben anderen wichtigen Einflussfaktoren wie Vorwissen, Intelligenz oder Elternhaus). Aus jeder dieser drei „Untersuchungssäulen“ greifen wir hier je einen Aspekt heraus:

3.1. Lehrer: *Überzeugungen* über das Fach und das Lernen
3.2. Unterricht: Disziplin und Art der *Lenkung*
3.3. Schüler: *Lernzuwachs* in Klasse 10 (von PISA 2003 zu PISA 2004)
Dabei basieren die Befunde zu den beiden ersten Aspekten ausschließlich auf Selbstberichten der Lehrer, objektive Unterrichtsbeobachtungen fanden nicht statt.

3.1. Bei den epistemologischen **Überzeugungen** der COACTIV-Lehrer zum Fach Mathematik unterscheiden wir grob zwischen einer eher statischen „Toolbox-Sichtweise“ („Mathematik besteht vor allem aus Fakten, Regeln und Verfahren“) und einer eher dynamischen „Prozess“-Sichtweise („Mathematik zu betreiben bedeutet, ständig Neues zu entdecken“). Bei den Überzeugungen über das Lernen von Mathematik kann man analog unterscheiden zwischen einer „Transmissions-Sichtweise“ („Mathematik ist am besten durch aufmerksames Zuhören zu lernen“) und einer „Konstruktivistischen Sichtweise“ („Eigenaktivität ist für das Lernen von Mathematik ganz entscheidend“). Die Zusammenhänge zum Professionswissen sind der folgenden Tabelle zu entnehmen („**“: signifikant auf 1%-Niveau):

Korrelationen	**Überzeugungen über das Fach Mathematik**		**Überzeugungen über das Lernen von Mathematik**	
	„Toolbox“	„Prozess“	„Rezeptive Lerntheorie“	„Konstruktivist. Lerntheorie“

Fachdidaktisches Wissen	-.37**	.12	-.34**	.30**
Fachwissen	-.33**	.12	-.27**	.21**
Skalen: Itemzahl / Cronbach's α	*5 / 0,75*	*4 / 0,66*	*12 / 0,87*	*12 / 0,88*

Man sieht, dass Lehrkräfte mit hohen Werten in beiden Wissensbereichen
- in starker Tendenz die sogenannte „Toolbox"-Sicht von Mathematik ablehnen,
- dazu tendieren (nicht signifikant), Mathematik als „Prozess" anzusehen,
- tendenziell deutlich „rezeptive Lerntheorien" ablehnen,
- erkennbar zu konstruktivistischen Sichtweisen vom Lernen tendieren.

3.2. Über ihren **Unterricht** sollten die Lehrerinnen und Lehrer in mehreren Selbstberichtsskalen Auskunft geben (einige wurden parallel auch auf Schülerseite eingesetzt; Baumert u.a., 2004). Wir berichten hier exemplarisch über vier dieser Skalen, zwei zu *Klassenführung und Schülerorientierung* und zwei zu den eingesetzten *Lehrstrategien*, genauer: zur Disziplin („In der Klasse wird in der Regel wenig gestört"), zur sozialen Unterstützung der Schüler („Ich helfe auch bei persönlichen Anliegen"), zur Art der Anleitung der Schüler („Ich gebe meistens jeden Schritt einzeln vor") und zum Umgang mit Erklärungen und Begründungen („Ich verlange, dass Antworten auch begründet werden"). Die folgende Tabelle zeigt die Zusammenhänge zum Professionswissen („*": signifikant auf 5%-Niveau; „**": signifikant auf 1%-Niveau):

Korrelationen	**Klassenführung und Schülerorientierung**		**Lehrstrategien**	
	Disziplin	Soziale Unterstützung	Kleinschrittige Anleitung	Insistieren auf Begründen
Fachdidaktisches Wissen	.16*	-.02	-.24**	.12
Fachwissen	.09	-.12	-.31**	.35**
Skalen: Itemzahl / Cronbach's α	*8 / 0,93*	*6 / 0,84*	*6 / 0,70*	*4 / 0,73*

Es ist also zu erkennen, dass
- die Disziplin in der Klasse tendenziell mit dem fachdidaktischen Wissen, nicht aber mit dem Fachwissen einer Lehrkraft zusammenhängt,
- das soziale Unterstützungsverhalten unabhängig ist vom Professionswissen,
- Lehrkräfte mit hohen Werten in beiden Wissensbereichen es tendenziell ablehnen, ihre Schüler immer kleinschrittig anzuleiten,
- das Bestehen auf Erklärungen und Begründungen vor allem mit dem Fachwissen der Lehrkraft in deutlichem Zusammenhang steht.

3.3. Die vielleicht spannendste Frage ist, ob das Professionswissen der Lehrkräfte mit den **Leistungszuwächsen** der Schülerinnen und Schüler zusammenhängt. Dazu wurde ein Mehrebenenmodell mit den 181 Klassen konstruiert, die keinen Lehrerwechsel zwischen Klasse 9 und 10 in Mathematik zu verzeichnen hatten. Auf der Individualebene der Schüler wurden dabei bekannte Prädiktoren mathematischer Leistung wie Vorwissen (Testleistung PISA 2003), Lesekompetenz, Intelligenz, Beruf der Eltern, sozioökonomischer Status und Migrationshintergrund statistisch kontrolliert.

Das zentrale Resultat ist, dass das fachdidaktische Lehrer-Wissen, substantiell gespeist durch einschlägiges Fachwissen, tatsächlich Leistungsfortschritte der Schüler in nichttrivialer Weise erklären kann. Auf Klassenebene wird diese Wirkung durch drei Mediatoren beschrieben: Bekannt ist bereits aus allgemein-erziehungswissenschaftlichen Studien, dass das Unterrichtsmanagement signifikant auf den Leistungszuwachs wirkt und ebenso die konstruktive Lernunterstützung (die Quelle der erstgenannten Lehrer-Fähigkeit ist aber nicht das fachdidaktische Wissen). Neu hingegen ist nach COACTIV, dass das kognitive Potential des Unterrichts einen entscheidenden Einfluss auf den Leistungszuwachs der Schülerinnen und Schüler hat. Indikator dafür ist die kognitive Qualität der Aufgaben aus den Klassenarbeiten dieses zehnten Schuljahrs, wobei deren Argumentationsniveau, deren innermathematisches Modellierungsniveau (zur Definition: Jordan u.a., 2006) und das Vorkommen anderer als nur technischer Aufgaben bei den „Typen mathematischen Arbeitens" (Neubrand & Neubrand, 2004) die maßgeblichen Parameter sind. Bemerkenswert und neu ist dabei der „fachbezogene Pfad". Er führt mit lauter signifikanten Koeffizienten vom fachlichen zum fachdidaktischen Wissen und von dort über das kognitive Potential zur Schülerleistung. Auf Klassenebene konnte so immerhin 30 % der Varianz der Schülerleistung in Klasse 10 erklärt werden (in Kürze werden Details hierzu publiziert).

3.4. Man kann diese Ergebnisse plakativ so zusammenfassen: Es zeichnet sich ein „*Profil eines Expertenlehrers*" ab, charakterisiert durch hohes fachbezogenes Professionswissen, dynamische Sichtweisen von Fach und Lernen, gutes Unterrichtsmanagement, Bestehen auf Begründungen und damit hohen Lernzuwachs der Schüler.

Literatur

Baumert, J., Kunter, M. , Brunner, M. et al. [2004]: Mathematikunterricht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und Schüler und ihrer Lehrkräfte. In: M. Prenzel et al. (Hrsg.), *PISA 2003 – Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland: Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.* Münster: Waxmann, S. 314-354.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S. et al. [2006a]: Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht; eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts. In: M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms.* Münster: Waxmann, S. 54-82.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S. et al. [2006b]: Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem fachspezifischen Professionswissen von Mathematiklehrkräften und ihrer Ausbildung sowie beruflichen Fortbildung? In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 9 (4),* 521-544.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S. et al. [2006]: *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt.* (Materialien aus der Bildungsforschung, Nr. 81.) Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M. et al. [2004]: COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In: J. Doll & M. Prenzel (Eds.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerforderung als Strategien der Qualitätsverbesserung.* Münster: Waxmann, S. 31-53.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W. et al. [eingereicht]: Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie.

Neubrand J. & Neubrand, M. [2004]: Innere Strukturen mathematischer Leistung im PISA-2000-Test. In: M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000.* Wiesbaden: VS – Verlag für Sozialwissenschaften, S. 87-107.

Manfred BOROVCNIK, Klagenfurt

Gesetze des Zufalls

Auf dem ersten Blick scheinen Gesetz und Zufall nicht vereinbar. Die Eigenheiten von Gesetzen des Zufalls sind entsprechend schwer zu verstehen. Einige Simulationsexperimente können hier zur Orientierung helfen. EXCEL wird benutzt, um Ideen von probabilistischen Gesetzen einzuführen.

1. Gesetze für den Zufall?

Die Deutung von Wahrscheinlichkeit als relativer Häufigkeit in einer längeren Versuchsserie ist wesentlich nicht nur für die Anwendung sondern für das Verständnis des Begriffs. Die Gesetze der Großen Zahlen haben eine eigenartige Konvergenz der relativen Häufigkeiten gegen die zugrunde liegende (unbekannte) Wahrscheinlichkeit zum Inhalt. Es gibt viele Anlässe, diese indirekten Gesetze falsch zu verstehen.

In den Naturwissenschaften geht es – zumindest in klassischer Auffassung – um die Klärung von Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen: Welche Versuchsbedingungen bewirken was. Werden diese in einem Experiment eingehalten, erlauben Gesetze die Vorhersage der Folgen. Entsprechend „einfach" ist es, ein naturwissenschaftliches „Gesetz" als falsch zu erkennen. Störgrößen und Messfehler erschweren allerdings eine Überprüfung.

Außerhalb der Naturwissenschaften ist das Einhalten der Versuchsbedingungen schwieriger. Beim Münzwurf etwa könnte man im Sinne der Physik ein Gerät bauen, das dann bei bestimmter Einstellung immer Kopf wirft. Statt die Störfaktoren auszuschalten versucht man aber, sie „auszugleichen". Also: Möglichst die Lage der Münze in der Hand nicht beobachten, hoch genug werfen etc. Der „Rest" trägt dann stochastische Züge, man spricht von der Wahrscheinlichkeit einer Münze, auf Kopf zu fallen. Welchen Gesetzen dieses „Experiment" nun folgt, ist zu klären. Vorab sehen wir ein: Wenn man über Gesetze des Zufalls spricht, so sind das nicht Gesetze im klassisch-naturwissenschaftlichen Sinne.

Für den allwissenden Laplaceschen Dämon gibt es keinen Zufall. In der wissenschaftstheoretischen Diskussion wird das als naiver Determinismus abgetan. Es ergeben sich auch aus der Sicht von Ethik und Religion unangenehme Konflikte mit dem freien Willen. Diesen Schwierigkeiten entgeht man, indem man den Zufall einfach als eine Denkweise interpretiert, die zu nützlichen Einschätzungen und Vorhersagen führt, egal ob es einen „inneren" Zusammenhang gibt oder wie ein solcher aussehen könnte. Man orientiert sich dann nur an den äußeren Erscheinungen, an erkennbaren statistischen Regelmäßigkeiten oder Gesetzen.

Den Zufall mathematisch zu beschreiben greift zu kurz. Nicht nur, weil vielen Menschen dies nicht zugänglich ist sondern wegen der inhärenten Verzerrung. Gleicherweise „gefährlich“ ist es, den Zufall und seine Gesetze durch die praktischen Auswirkungen zu illustrieren, wie man das mittels Simulation versucht. Der Zufall wird dabei in der Wirklichkeit nachgestellt. Die Ergebnisse erhalten einen szenario-artigen Charakter. Sie zeigen auf, wie sich Ergebnisse bei ‘Wirken‘ des reinen (fiktiven) Zufalls einstellen, wie sich Systeme entwickeln. Allerdings macht der Zufall alles möglich, er spielt die verrücktesten Dinge aus. Nach Murphy tritt alles ein, was auch nur irgendwie möglich ist. Nach endlichen vielen Schritten mag ein „Gesetz“ noch nicht sichtbar sein. Daher bemüht man sich üblicherweise, lange Serien zu erzeugen, um sich dieser „Störeffekte“ zu entledigen. Dann aber sieht man den Zufall nicht mehr am Werke.

Auf die relative Häufigkeit eines Ereignisses bezogen, heißt das, man hat zwar eine genaue Schätzung der unbekannten Wahrscheinlichkeit nach 10000 Simulationen des Einzelversuchs, aber über die Eigenheit des Zufalls lernt man daraus nichts. Was macht der Zufall? Wie stark variiert er? Welches Risiko hat man, nach einer kürzeren Serie (der Normalfall!), wenn man Ergebnisse verallgemeinern möchte.

2. Das Unterrichtsexperiment

Die Analysen stützen sich auf eine Unterrichtssequenz mit Jugendlichen im Alter von 14 Jahren. Aus logistischen Gründen mit 5 farbigen Würfeln in einem Würfelbecher durchgeführt. Gerade Zahl wurde als Zahl, ungerade als Kopf eines Münzwurfs protokolliert (Fig. 1). Nach n=600 Versuchen mit 290 Köpfen ergab sich eine Schätzung für die unbekannte Wahrscheinlichkeit von 0,483. Die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten nach der Zeit (entspricht der Länge der Serie) zeigt man üblicherweise in einem Schaubild (Fig. 2).

Nr.	Wert	Code	Klasse	Anzahl	Messung Ws. Kopf
1	g	0			
2	g	0			
3	u	1	g	310	
4	g	0	u	290	0,483
5	u	1		0	
6	u	1	gesamt	600	
7	g	0			
8	u	1			Zufall
9	g	0			0,522
10	u	1			
11	g	0			
12	g	0			
13	u	1			
14	u	1			
15	g	0			
16	g	0			
17	u	1			
18	g	0			
19	g	0			
20	u	1			
598	g	0			
599	g	0			
600	u	1			

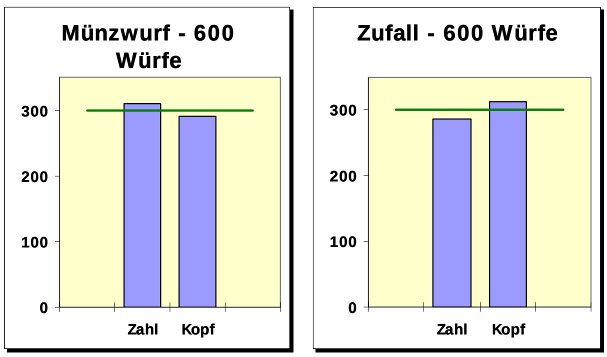


Fig. 1: Protokoll des Münzwerfens – Daneben ein späteres Simulationsergebnis

Die „letzten“ 200 Punkte in Fig. 2 variieren um weniger als 0,5%-Punkte. Das verleitet zu einer falschen Einschätzung der erreichten Präzision. *Aber*: ein neues Experiment würde +/- 4%-Punkte um p schwanken.

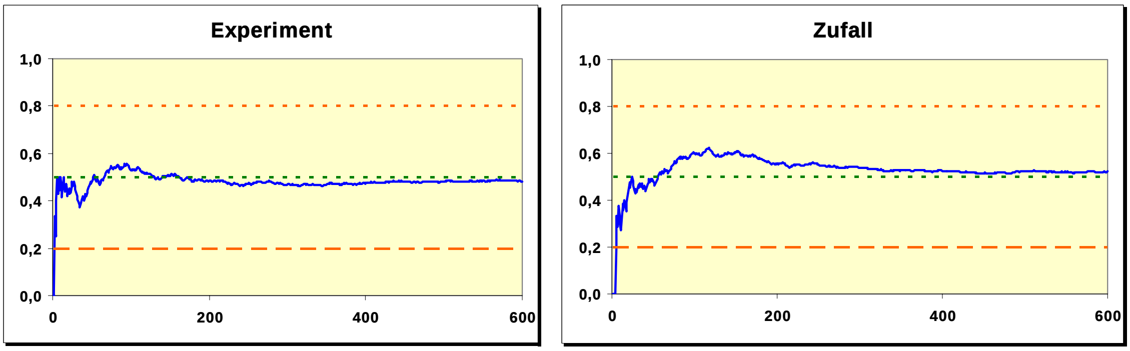


Fig. 2: Entwicklung der relativen Häufigkeit – Experiment und weitere Simulation

3. „Freudenthals Weg“ zum Gesetz der Großen Zahlen

Das Experiment mit 5 Würfeln in einem Becher legt nahe, das Schwanken der Bechergebnisse zu studieren: Wie viele haben den Wert 3 (oder einen der Werte von 0 bis 5). Stellt man die aktuellen Bechergebnisse der Entwicklung der relativen Häufigkeiten gegenüber, so erhält man einen Blick auf ein eigentümliches Verhalten des Zufalls: Der Stabilisierung auf lange Sicht steht der volle, ungebremste Zufall der aktuellen Bechergebnisse gegenüber. Hier ist eine Analogie zum Messen hilfreich. Wir tun so, als ob die Wahrscheinlichkeit p eine physikalische Größe darstellt (fiktiv bekannt). Gemessen wird durch folgendes Verfahren:

Man bestimme die relative Häufigkeit von ‚Kopf‘ in der jeweiligen 5er-Serie. In Fig. 3 zeigt sich die Wiederholstreuung der Messwerte, welche mit wenigen Ausnahmen zwischen 0,2 und 0,8 schwanken. Insgesamt streuen die Messwerte augenfällig, um eine Achse, die etwa bei ½ liegt. Das Messverfahren scheint richtig kalibriert.

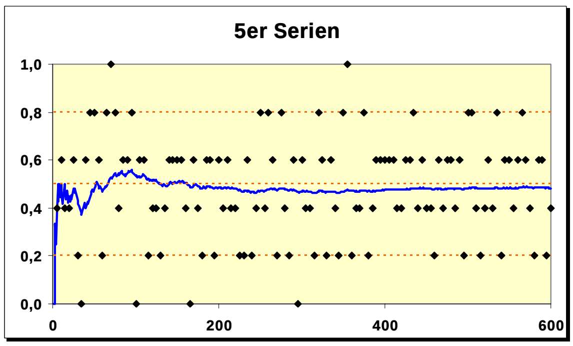


Fig. 3: Stabile Entwicklung der Häufigkeiten trotz vollen Schwankens der aktuellen Serien

In der Messtechnik kennt man den Begriff der Präzision von Messinstrumenten. Messungen der Wahrscheinlichkeit mit Fünfer-Serien führen zu Schwankungen der Messwerte zwischen 0,2 und 0,8. Das bedeutet, die Messfehler schwanken bis +/- 0,3. Das ist viel zu ungenau! Hilft ein „anderes Messverfahren“, etwa mit 20 Daten? Aus demselben Protokoll fasst man zwei benachbarte Serien zusammen und erhält Serien der Länge 10, schließlich bei einem weiteren Zusammenfassen Serien der Länge 20.

Der Effekt ist deutlich in Fig. 4 zu sehen. Nun liegen alle Werte, mit einer Ausnahme, innerhalb der Schwellenwerte 0,2 und 0,8; die Fehler sind viel kleiner, die Messwerte schmiegen sich eng um eine Achse bei 0,5. Fig. 3 und 4 zeigen im Vergleich die Verbesserung der Präzision.

Es bedarf gar keiner Konvergenzaussage mit einem obskuren Grenzwert, wenn die Länge der Serie über alle Maßen erhöht wird. Der Effekt darf ohne Vorbehalte von den bestehenden Daten übertragen werden, d.h. auch bei Erhöhung von 20 auf 40 Daten in der Messserie wird man mit einer Verbesserung rechnen.

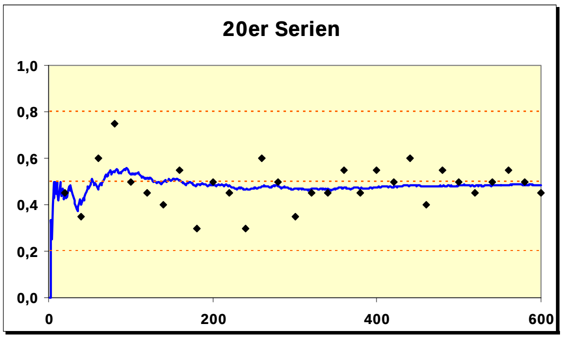


Fig. 4: Messwerte aus 20er Serien – die Achse bleibt gleich, die Mess-Werte sind viel präziser

5. Schluss

Der Zugang konzentriert sich durch die Fragen „Wie genau ist meine Messung, die auf 5 (bzw. 10 oder 20) Würfen basiert?“ auf die *Verteilung* der Messwerte; insbesondere gibt die Varianz Auskunft über die erreichte Präzision der Messung der unbekannten Wahrscheinlichkeit. Die Behandlung des Gesetzes der großen Zahlen unter Vermeidung des angesprochenen obskuren Grenzwerts der relativen Häufigkeiten ist schon in Freudenthal (1972) zu finden, wurde aber außer in Borovcnik (1992) nicht wirklich aufgegriffen. Zur Eigenheit von Wahrscheinlichkeit findet man mehr in Borovcnik und Peard (1996). Über intuitive Schwierigkeiten, die auch mit einer falschen Auffassung des Gesetzes der Großen Zahlen zusammenhängen, orientiert man sich u. a. in Borovcnik und Bentz (1991).

Literatur

Borovcnik, M.: *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik*. Mannheim: BI 1992.

Borovcnik, M., Bentz, H.-J.: Empirical research in understanding probability. In: Kapadia, R., Borovcnik, M.: *Chance encounters*. Dordrecht: Kluwer 1991, 73-106.

Borovcnik, M., Neuwirth, E.: *Ein rekursiver Zugang zur Binomialverteilung*. http://www.osg.or.at/ (2006)

Borovcnik, M., Peird, R.: Probability. In: Bishop, A., e. a. : *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer 1996, 239-288.

Fischbein, E.: *Intuitions in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel 1987.

Freudenthal, H.: ‚The empirical law of large numbers’ or ‘The stability of frequencies’. In: *Educational Studies in Mathematics* 4(1972), 484-490.

Manfred BOROVCNIK, Klagenfurt

Möglichkeiten von EXCEL in der Statistikausbildung

Das Poster soll einige statistische Konzepte illustrieren und aufzeigen, welche Möglichkeiten eine Tabellenkalkulation bietet, didaktische Ideen umzusetzen. Im Poster werden Ausschnitte aus Sequenzen zum Korrelationskoeffizienten, zum üblichen Zugang zur Beurteilenden Statistik (Alternativtest und Maximum likelihood) sowie zum Resampling-Ansatz gezeigt.

1. Dynamische Visualisierung

Denken ist von bildhaften oder strukturellen Vorstellungen begleitet. Fischbein (1987) spricht von Intuitionen. Primäre Intuitionen werden im besten Fall im Unterricht direkt aufgegriffen und – in Richtung offizieller Vorstellungen – verändert. Daraus entstehen begleitend sekundäre intuitive Vorstellungen, die ein flüssiges Handhaben der mathematischen Begriffe und ein tieferes Verständnis ermöglichen. Darüber hinaus haben sekundäre Intuitionen ein großes Gewicht im Hinblick auf die Akzeptanz der gelernten Begriffe bei den Lernenden. Wie dieses Wechselspiel zwischen Theorie und Intuitionen zum besseren Verständnis der Theorie beiträgt, kann man in Borovcnik (1992) nachlesen.

Intuitives Denken zu erfassen und zu beeinflussen ist schwierig. Hilfreich sind hier Darstellungen der Begriffe in Bildern und Materialien. Heute würde man wohl den Begriff „embodiment" verwenden, Visualisierung ist ein Teil davon. An der Idee der Visualisierung reizt insbesondere die dynamische Variante. Ein Begriff wird also nicht statisch in einem Bild erfasst, es werden vielmehr wesentliche Eigenschaften eines Begriffes durch Hantieren mit der Graphik einsichtig. Der Autor sieht in animierten Graphiken ein wesentliches didaktisches Werkzeug, das angesprochene Wechselspiel zwischen Intuitionen und abstrakten Begriffen in Gang zu bringen und ein tieferes Begriffsverständnis anzubahnen.

2. Einige Beispiele

Die Dynamik kann man ausnutzen, wenn man empirisch eine Regressionsgerade an bestehende Punkte anpasst und spielerisch durch Verschieben einer vorläufigen Geraden die Abweichungsquadrate verkleinert, bis man das Optimum erreicht (siehe Fig. 1a).

Die Darstellung der Daten in Tabellenform lässt bestimmte Berechnungen besonders einfach miteinander vergleichen: Daten, Vorhersage für die Daten in Form von Mittelwerten bzw. in Form von linearen Prognosen (das sind die Werte aus der Regressionsgeraden). Durch Ausrechnen von einfachsten Statistiken wie Mittelwerten und Varianzen dieser drei Datensätze parallel erschließt man eine elementare Interpretation des so genannten Bestimmtheitskoeffizienten R^2, dem Quadrat des Korrelationskoeffizienten, welche grundlegend für die weitere Begriffsbildung ist. Dynamisiert man noch die begleitende Punktwolke durch Regler für einzelne Punkte, sieht man die Invarianz der empirisch gefundenen Beziehung ein (siehe Fig. 1b).

Weitere Beispiele liegen auf der Hand: Beim Testen von Hypothesen in der beurteilenden Statistik kann man die Wechselwirkungen zwischen Fehler 1. und 2. Art, der Lage von zwei Alternativhypothesen zueinander etc. dynamisch schön herausarbeiten. Nicht neu, aber in der Dynamik wesentlich überzeugender als die statische Lehrbuchgraphik von ehedem (siehe Fig. 1c).

Auch komplexere Methoden wie die Maximum Likelihood-Methode zur Schätzung von Parametern werden einsichtig, wenn man dynamisch alle Modelle, die zur Verfügung stehen, durchprobiert. Man sieht die Verteilungen graphisch durch ihre Stabdiagramme (oder Dichtefunktionen) und justiert den in Frage stehenden Parameter so lange, bis man die vorhandene Beobachtung in ihrer Wahrscheinlichkeit optimiert (siehe Fig. 1d).

Wenn man Vertrauensintervalle wiederholt simuliert, spiegelt sich die Überdeckungswahrscheinlichkeit als Prozentsatz von überdeckenden Intervallen auf lange Sicht wider.

3. Zusammenfassung

„Früher" war eine Programmierumgebung notwendig, um dieses Medium und sein unerschöpfliches Potential zur Unterstützung von Lernprozessen zu nützen. Auch heute werden etwa Java oder andere graphische Werkzeuge dazu genützt. Der Autor möchte aufzeigen, dass EXCEL alles bietet, solche Animationen herzustellen. Es ist auch viel leichter, diese Animationen in EXCEL (oder einer anderen Tabellenkalkulation) herzustellen als üblicherweise angenommen. Die graphischen Möglichkeiten sind besser als der generelle Ruf. Die Möglichkeit, auch die Erzeugung von Daten zu simulieren, lässt dynamisch davon abhängige Graphiken darstellen.

EXCEL bietet überdies einen direkten Zugang für Studierende,

- die animierten Graphiken nicht nur abzuspielen, sondern selbst herzustellen
- Berechnungen mit den Graphiken zu verknüpfen, welche auftauchende Fragen beantworten helfen,

- zu verstehen, was diese Graphiken wirklich leisten – sie bilden keine magische Black box.

Studierende (der Betriebswirtschaft oder der Mathematik) machen sich die Technologie rasch zu Eigen und schöpfen die Möglichkeiten sehr gut aus, wie die Erfahrungen des Autors zeigen. Darüber hinaus gehören heute Fertigkeiten in einer Tabellenkalkulation zu den Grundtechniken, welche schon eine sekundäre Ausbildung vermitteln soll. Sie sind in vielen beruflichen und privaten Situationen mit Vorteil einzubringen. Dagegen sind Fertigkeiten in speziellerer Software ohne Belang und können nur strukturell auf andere Situationen übertragen werden.

In der Ausbildung in Statistik wird der Einsatz von Rechenhilfsmitteln ohnehin erforderlich sein, um langatmige Berechnungen und lästiges Arbeiten mit Tabellen zu vermeiden. Da ist eine Tabellenkalkulation jedem noch so guten Taschenrechner überlegen. Die Verbreitung von EXCEL ist als weiterer Pluspunkt anzumerken. Für statistische Feinarbeit bietet das Add-on REXCEL einen fließenden Übergang zur statistischen Sprache R. Für unterrichtliche Zwecke (in der Sekundarstufe und in der universitären Grundausbildung) reicht eine Tabellenkalkulation vollauf. Nicht alle Blätter des Posters wurden hier beschrieben; das Projekt deckt viele weitere Aspekte der Ausbildung ab.

Literatur

Bartz, S.: Excelblatt vereinfacht Stochastik. Stochastik in der Schule 27 (2007) 2, 25-29.

Borovcnik, M.: Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik. Mannheim: BI 1992.

Borovcnik, M.: Das Sammelbildproblem – Rosinen und Semmeln und Verwandtes: Eine rekursive Lösung mit Irrfahrten. Stochastik in der Schule 27 (2007) 2, 19-24.

Borovcnik, M., Neuwirth, E.: Ein rekursiver Zugang zur Binomialverteilung. http://www.osg.or.at/ (2006)

Christie, D.: Resampling mit Excel. Stochastik in der Schule 24 (2004) 3, 22-27.

Fischbein, E.: Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel 1987.

Lorenz, R. J.: Grundbegriffe der Biometrie, 4. Auflage. Stuttgart: Fischer 1996.

Meyer, J.: Excel-Files in der Lehrerfortbildung. Auf Anfrage beim Autor: J.M.Meyer@t-online.de

Neuwirth, E.: http://sunsite.univie.ac.at/mailman/listinfo/Improve-excel

Neuwirth, E., Arganbright, D.: The Active Modeler: Mathematical Modeling with Microsoft Excel. Brooks/Cole 2004.

Reckelkamm, B.: Der Tanz der Residuen - Erarbeitung statistischer Grundbegriffe mit Hilfe von EXCEL. Stochastik in der Schule 24 (2004) 3, 14-21.

Spreadsheets in Education: http://www.sie.bond.edu.au/

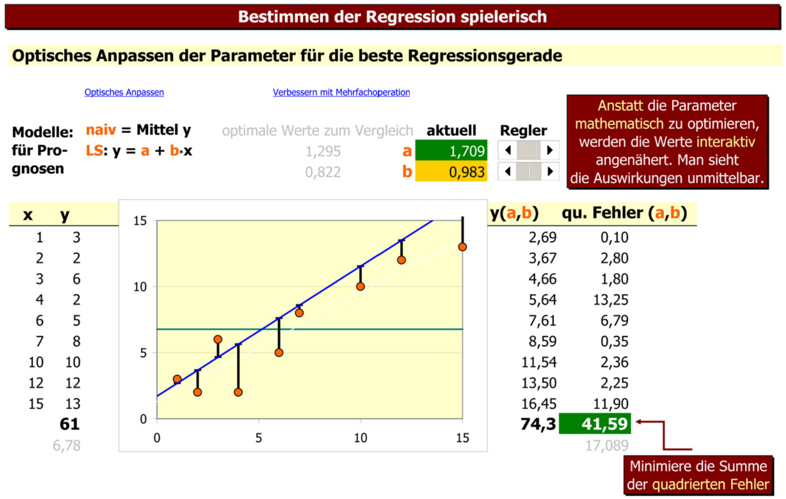


Fig. 1a

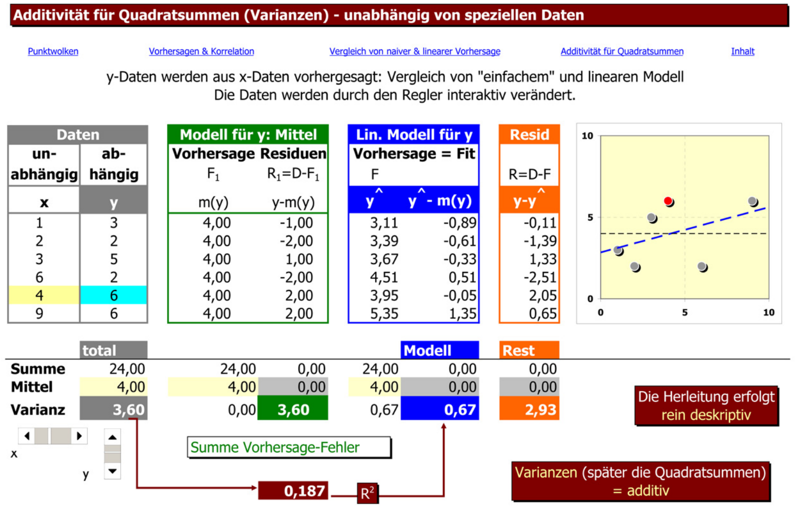


Fig. 1b

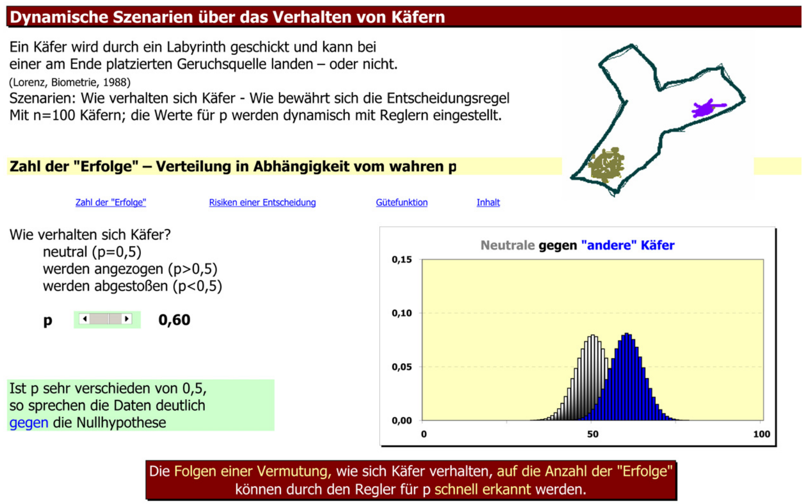


Fig. 1c

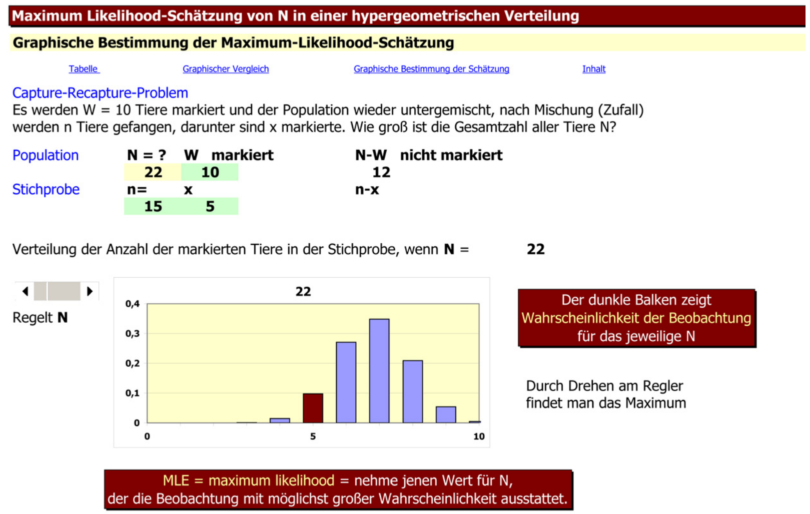


Fig. 1d

Rita BORROMEO FERRI und Björn WISSMACH, Hamburg

Gruppenverläufe beim mathematischen Modellieren

1 Theoretischer Hintergrund

Die Beobachtung von Gruppenprozessen beim mathematischen Modellieren nahmen einige Studien, zum Teil mit unterschiedlicher Schwerpunktsetzung, in ihrem Fokus. Ikeda und Stephens (2001) beispielweise analysieren die Effekte von Diskussionen in Kleingruppen und kommen zu dem Ergebnis, dass Gruppendiskussionen, vor allem zu Beginn des Modellierungsprozesses, zu besseren Lösungen führen. Treilibs, Burghardt und Low (1980) rekonstruierten vor allem die Phase der Bildung eines mathematischen Modells, welche sie „Formulation Phase“ nennen. Sie untersuchten geübte und ungeübte Modellierer im Vergleich und erstellten sogenannte „Flowcharts“, in dem die diskutieren Themenbereiche der Gruppen sowie die einzelnen Phasen festgehalten wurden. Ungeübte Modellierer, so rekonstruierten sie, haben Schwierigkeiten beim Bilden des Modells und gehen nicht so stringent an das Problem heran, wie geübte Modellierer. Ob geübt oder ungeübt sollte in meiner empirischen Studie nicht von Bedeutung sein. Vielmehr ergab sich die genauere Rekonstruktion von Gruppenprozessen durch die Frage nach der Unterscheidung der einzelnen Phasen des Modellierungsprozesses.

2 Ziele, Fragestellung und Design der Studie

Im Rahmen des KOM²-Projekts (Borromeo Ferri) war eine der Fragestellungen die Folgende:

- Können die in der didaktischen Literatur zum Modellieren beschriebenen Phasen beim Modellieren (Situationsmodell, Realmodell..) in den Vorgehensweisen der Lernenden rekonstruiert werden?

Das Analyseinstrument bildete der sogenannte Modellierungskreislauf unter kognitionspsychologischer Perspektive (Borromeo Ferri 2007) in Anlehnung an Blum/Leiss (2007).

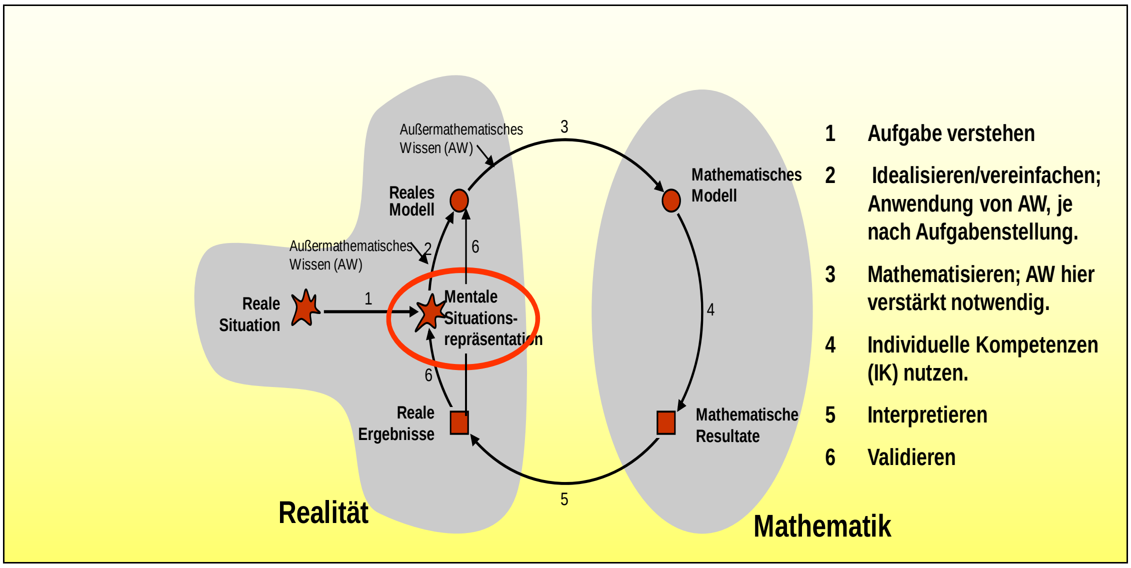


Abb1.: Modellierungskreislauf (Borromeo Ferri 2006)

Um diese Phasen empirischen zu unterscheiden, wurden zunächst individuelle Modellierungsverläufe (Borromeo Ferri 2007) rekonstruiert, die einen guten Einblick in die kognitiven Prozesse der Lernenden beim Modellieren in Verbindung mit deren mathematischen Denkstil ermöglichten. Weiterer Forschungsbedarf bestand darin, auch verstärkt auf die gesamte Gruppe zu schauen, so dass sich nachstehende Teilfragen ergaben:

- ⇒ Ist die Rekonstruktion von Gruppenverläufen möglich?
- ⇒ Wie lassen sich Gruppenverläufe charakterisieren?
- ⇒ Inwiefern lassen sich Gruppenverläufe unterscheiden?
- ⇒ Einfluss einzelner Individuen auf den Gruppenverlauf?

An dieser qualitativen Studie im haben 86 Schülerinnen und Schüler der 10. Klasse aus verschiedenen Gymnasien teilgenommen sowie deren drei zugehörigen Mathematiklehrenden. Neben Fragebögen für die Lernenden und Interviews mit den Lehrpersonen wurde jede Klasse 3 drei Stunden videographiert. In jeder Stunde lösten die Schülerinnen und Schüler eine Modellierungsaufgabe, wobei eine Gruppe immer im Fokus der Kamera lag. Bei Plenumsdiskussionen wurde die gesamte Klasse und die Reaktionen der Lehrperson gefilmt. Die Daten wurde vollständig transkribiert und im Sinne der Grounded Theory kodiert und analysiert.

Bezüglich der obigen Fragestellungen wurden zunächst Gruppen untersucht, die an derselben Aufgaben gearbeitet haben und diese schließlich mit Gruppen verglichen, die an einer anderen Aufgabe gearbeitet haben.

3 Ergebnisse

Die Rekonstruktion der Gruppenverläufe begann nach mehrfacher Sichtung des gesamten Datenmaterials mit einer ersten Codierung von Themen, die Bestandteil der Diskussion der Gruppe waren. Anschließend wurde genauer auf die einzelnen Diskussionsphasen zu bestimmten Themen fokussiert. Hier lag der Fokus auf der Beteiligung der verschiedenen Personen an der Diskussion, also der Aktivität der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, aber auch der Absplittungen von einzelnen Gruppenmitgliedern und Kleingruppen. Zusätzlich wurde geschaut, welches die prägenden und initiierenden Beiträge für die Diskussion zu diesem Thema waren. Ein weiterer Fokus lag darauf zu untersuchen, in welchen Phasen des Modellierungskreislaufes jeweils innerhalb der Diskussionen zu einem Thema gearbeitet wurde. Auf der Basis dieser Analysen wurden „Gruppenverläufe" rekonstruiert (Beispiel unten), wobei hier aufgrund des Platzmangels nur ein Teil des Verlaufs dargestellt werden kann.

Thema	**Phase**
Selbstständiges Lesen der Aufgabenstellung	MSR
Lösungsansatz: Strahlensatz	MM
Diskussion um Ansatzmöglichkeiten und Erdkrümmung	RM
Zeichnung Annaly	MM ,(RM- Rückgriffe)
Diskussion um die Einbeziehung der Erdkrümmung	(RM) → MM
Lösungsidee von Ann_Cathrin mit Sinus und Kosinus	MM
Intervention der Lehrerin	Nicht zum Thema
Diskussion um Einbeziehung der Erdkrümmung	RM → (MM)
Suche nach außermathematischem Wissen im Buch	

Der Begriff „Gruppenverlauf" wird von mir wie folgt charakterisiert:
Ein **Gruppenverlauf** ist der Modellierungsverlauf einer Gruppe, die eine Modellierungsaufgabe gemeinsam bearbeitet. Der Gruppenverlauf beschreibt den Modellierungsverlauf als eine gemeinsame Einheit. Grundlage dafür bilden die verschiedenen Themen der Diskussion und die Aktivitäten der Gruppenmitglieder sowie die Phasen des Modellierungsprozesses.

Die Rekonstruktion von Gruppenverläufen war demnach möglich und es konnten sowohl Gemeinsamkeiten als auch Unterschiede bei den Verläufen festgestellt werden. Des Weiteren erwies sich die Struktur einer Aufgabe als Einflussfaktor auf Gruppenverläufe. Das heißt Aufgaben, bei denen viele Zwischenrechnungen durchzuführen waren, um auf das Modell zu entwickeln, wechselten die Gruppe schneller ins mathematische Modell als bei anderen Aufgaben. So kam es zu Realmodellrückinterpretationen aufgrund der Zwischenergebnisse sowie zu Minikreisläufen.

4 Zusammenfassung

Stichpunktartig soll im Folgenden noch eine Zusammenfassung dargestellt werden:

- Gruppenverläufe sind empirisch rekonstruierbar
- Gruppenverläufe können unterschiedlich sein oder viele Gemeinsamkeiten aufweisen.
- Gruppenverlauf als tragbares Konzept Modellierungsprozesse von Lernenden zu beschreiben
- Möglichkeit mit mehreren Blickwinkeln auf Gruppenverläufe zu schauen
- Gruppenverlauf als Grundlage für vielfältige Ansätze, die das Modellieren in Gruppen untersuchen wollen
- Die Aufgabenstruktur hat Einfluss auf Gruppenverläufe

Literatur

[1] Blum, Werner; Leiß, Dominik (2007). How do teachers deal with modelling problems? In: Haines, Christopher (Hrsg.); Galbraith, Peter; Blum, Werner; Khan, Sanower: Mathematical Modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics Chichester: Horwood Publishing, S.222-231.

[2] Borromeo Ferri, Rita (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. In: Kaiser, G, und Sriraman, B. (Hrsg.) Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38 (2), S. 86-95.

[3] Borromeo Ferri, Rita (2007). Modelling from a cognitive perspective: Individual modelling routes of pupils. In: Haines, Christopher (Hrsg.); Galbraith, Peter; Blum, Werner; Khan, Sanower: Mathematical Modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics. Chichester: Horwood Publishing, S. 260-270.

[4] Ikeda, Toshikazu; Stephens, Max (2001). The effects of students' discussion in mathematical modelling. In: Matos, Joao Filipe; Blum, Werner; Houston, Ken; Carreira, Susanna Paula (Hrsg.): Modelling and Mathematics Education (ICTMA 9). Applications in science and technology. Chichester: Horwood Publishing, S. 381-390

[5] Treilibs, Vern.; Burkhardt, Hugh; Low, Brian (1980). Formulation processes in mathematical Modelling. Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Thorsten BRAUN, Engelbert NIEHAUS, Universität Koblenz-Landau

Förderung von Schüler(-inne)n mit besonderer mathematischer Begabung am Beispiel der Stochastischen Netze

Zielsetzung ist es, die Förderung von SchülerInnen mit besonderer mathematischer Begabung in regulären universitären Lehrveranstaltungen am Beispiel der Behandlung der Stochastischen Netze zu erläutern. Das Thema wird sowohl in den Bezügen zu den Lehrplänen der Sekundarstufe als auch in Bezug auf die Bedeutung für die Lehrerbildung dargestellt.

1. Mathematikdidaktische Konzeption der Lehrveranstaltung

Das im Rahmen von "WissenSchaf(f)t Zukunft" (Land RLP) und von der Deutschen Telekom Stiftung geförderte Projekt zielt auf die Einführung eines Förderprogrammes für SchülerInnen mit besonderer Begabung an der Universität Koblenz-Landau (Campus Landau) als Frühstudierende. Neben der originären Förderung von Hochbegabten soll die Hochbegabtenförderung selbst zu einem integrativen Bestandteil der Lehrerausbildung entwickelt werden. Bevor didaktische Themen zu den individuellen Begabungen (z.B. Diagnostik und Förderung) mit Studierenden behandelt werden, ist es aus Gründen der Praxisorientierung sinnvoll, eine Vorstellung davon zu gewinnen, zu welchen außerordentlichen Leistungen SchülerInnen in der Lage sind. Durch eine Integration in die reguläre Lehramtsausbildung und das gemeinsame Problemlösen in Lehrveranstaltungen bleiben diese besonderen Begabungen kein abstrakter didaktischer Studieninhalt, sondern der tägliche Umgang mit Lernenden aus der Schule lässt die Bandbreite individueller Schülerleistungen sowie die Notwendigkeit der Diagnostik und Förderung deutlich werden. Umgekehrt profitieren auch die teilnehmenden kleinen Schülergruppen von dieser Integration in die Lehrerausbildung, denn sie werden durch die angehenden Lehrerinnen und Lehrer bei den Problemlöseaufgaben im Kontext der Lehrveranstaltungen betreut.

2. Lehrplanbezug zu den Stochastischen Netzen

Eine Verbindung zwischen den Stochastischen Netzen und dem Lehrplan der Sek. I besteht durch die Verwendung von relativen Häufigkeiten im Stochastischen Netz, welche im Lehrplan unter der Leitidee L5 „Daten und Zufall“ aufgeführt werden. Diese Leitidee ist laut Lehrplan durch alle Klassenstufen hindurch zu behandeln. Für das Verständnis des Stochastischen Netzes ist es von Bedeutung, dass die Schüler den Unterschied zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit kennen, welcher in den Klassen 7/8 behandelt werden soll. Bei den Wegen durch das Stochastische Netz ergeben sich Verbindungen zu den Baumdiagrammen und der Pfadregel, welche in Klasse 5/6 Teil des

Unterrichtsinhalts sind und in Klasse 10 nochmals aufgegriffen und vertieft werden. Denn in beiden Fällen werden Pfade, die mit relativen Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten belegt sind, durch das Netz bzw. den Baum betrachtet. Ebenso bestehen Bezüge von sogenannten Spielen und Zufallsexperimenten aus Klasse 7/8 zu Stochastischen Netzen, wenn man die einzelnen Knoten im Stochastischen Netz als Spielzustände betrachtet.
Da man außerdem eine Inzidenzabbildung für die Repräsentation von Stochastischen Netz verwendet, ergibt sich dadurch ein Verbindung zu der Leitidee L4 „Funktionaler Zusammenhang" des Lehrplans, welche sich ebenso wie L5 durch die gesamt Sek. I zieht (besonders Klasse 7/8).
Eine weitere Verbindung zwischen dem Lehrplan und den Stochastischen Netzen ergibt sich aus der Forderung des Lehrplans, dass in der Sek. I ein Tabellenkalkulationsprogramm erlernt und mit ihm gearbeitet werden soll. Denn es ist möglich die Inzidenzabbildung mithilfe einer Adjazenzmatrix auszudrücken (siehe 3.), welche dann die Schüler in einem Tabellenkalkulationsprogramm umsetzen können. Das Tabellenkalkulationsprorgamm stellt eine Verbindung zwischen der symbolischen und ikonischen Darstellung des Stochastischen Netzes dar.

3 Behandlung von Stochastischen Netzen in den Lehrveranstaltungen

Ein Stochastisches Netz besteht aus einer Menge an Kanten und einer Menge an Knoten, die durch eine Inzidenzabbildung verbunden sind.

$$\Delta: \; A \longrightarrow (V \times V)$$
$$a_i \longmapsto (v_j, v_k)$$

An den Kanten, die zwei Knoten verbinden, befinden sich relative Häufigkeiten. Damit aus dem Netz auch ein Stochastisches Netz wird, muss die Summe über die relativen Häufigkeiten aller von einem Knoten ausgehenden Kanten gleich 1 sein. Diese Eigenschaft ergibt sich aus der Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes. In einem Wahrscheinlichkeits-experiment beschreiben die von einem Knoten ausgehenden Kanten alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes an diesem Knoten. Das Stochastische Netz besitzt also an jedem Knoten ein separates Zufallsexperiment, das ausgeführt wird, wenn sich der Spieler in diesem Zustand des Spieles befindet.
Der Bezug von den Stochastischen Netzen zur Schulmathematik ergibt sich nun, wie bereits unter 2. erwähnt, durch die einfachen stochastischen Elemente wie die relative Häufigkeit und durch die Möglichkeit das Stochastische Netz mithilfe einer Inzidenzabbildung anzugeben, wodurch sich eine Brücke zu den funktionalen Zusammenhängen ergibt.
Jedoch werden auch einige mathematische Grundlagen benötigt, die nicht im Lehrplan der Sek. I enthalten sind. So kann man das Netz anstatt mit der

Inzidenzabbildung auch mit Hilfe einer Adjazenzmatrix ausdrücken, so dass von den Schülern eine Matrizenmultiplikation durchgeführt werden muss, welcher erst in der Sek. II erlernt wird. Außerdem sind für die Darstellung des Stochastischen Netzes Elemente der Graphentheorie notwendig, die nicht Inhalt des Lehrplans Mathematik der Schule sind. Durch die individuelle Fähigkeiten der Frühstudierenden ist es jedoch recht schnell möglich, dass sich die Lernenden diese wichtigen Werkzeuge und Regeln während des Problemlöseprozesses aneignen. Zu diesen gehört z.B. eine Matrizenmultiplikation, die für die Verkettung von Abbildungen und die Berechnung von Zustandsübergängen im Stochastischen Netz notwendig ist.
Genau an dieser Stelle knüpft nun in den Veranstaltungen eine Zusammenarbeit zwischen den regulären Lehramtsstudierenden und den Frühstudierenden an. Die Lehramtsstudierenden sollen zusammen mit den Frühstudierenden die entsprechenden Lerninhalte erarbeiten und den Frühstudierenden bei deren Fragen unterstützen. Dabei wird die Zielsetzung verfolgt, dass Studierende bereits in ihrem Studium didaktisch in mathematischen Problemlöseaufgaben tätig sind. Vorraussetzung dafür ist natürlich, dass die Lehramtsstudierenden ein fundiertes Wissen über die mathematischen Grundlagen besitzen, da sie zugleich Problemlösende in einem für sie neuen Problem und Lehrende für Frühstudierde bezogen auf mathematische Grundlagen sind.
Eine weitere Zusammenarbeit zwischen den Studierenden bestand bei der Verwirklichung des eigentlichen Ziels der Veranstaltung, Probleme aus der Realität mithilfe der Fuzzy Logik, der Neuronalen Netze und der Stochastischen Netze zu modellieren. Die Stochastischen Netze dienen hierbei zur Verteilungs- und Ausbreitungsmodellierung. Im Zuge dieses Modellierungsprozesses gewährleisten die Lehramtsstudierenden bei dieser Zusammenarbeit, dass die Modellierungsideen auch in die Mathematik umgesetzt werden können, da bei ihnen das notwendige mathematisch-logische Denken und die Fähigkeit Mathematik in Anwendungssituationen zu erkennen bereits vorhanden sind, ohne dass sie die genauen Lösungen bereits kennen müssen.

4 Fazit

Probleme bei der Integration der SchülerInnen mit besonderen mathematischer Begabung entstanden vor allem an den Stellen, an denen die mathematischen Grundlagenkenntnisse der Lehramtsstudierenden gefordert wurden, da diese teilweise nur lückenhaft vorhanden waren. Als weiteres Problem erwies sich die begrenzte Kreativität der Lehramtsstudierenden bei den Modellierungsideen, da diese viel zu mathematisch dachten und nur mathematisch sinnvolle und fertige Lösungen anboten bzw. anbieten wollen, so dass viele tragfähige aber

unfertige Ideen nicht weiter ausgeführt wurden. Ein großer Problempunkt bei beiden Gruppen von Studierenden stellte auch die mathematische Formelsprache dar, wenn es galt, die jeweiligen Ideen in die richtige mathematische Sprache umzusetzen.
Chancen bei der Integration der SchülerInnen mit besonderer Begabung entstanden vor allem durch die Kreativität und das große Engagment der SchülerInnen bei den Modellierungsideen, da sie keine Angst vor Fehlern zeigten und sich auch nicht um die Umsetzung und Folgen der Ideen kümmerten, so dass dadurch viele gute Ideen entwickelt wurden. Überraschenderweise erwiesen sich auch die fehlenden Grundlagen bei den SchülerInnen nicht als Hindernis beim Modellierungsprozess. Insgesamt ergibt sich durch die Verbindung von Schülerförderung und Lehramtsausbildung die folgende empirisch zu untersuchende Forschungsfrage: In welchem Maße verändern offene Problemlöseaufgaben, die gemeinsam mit SchülerInnen bearbeitet, bei den Lehramtsstudierenden die spätere Unterrichtstätigkeit im Zusammenhang mit der Förderung des Stochastischen Denkens. In einer vergleichenden Untersuchung (mit und ohne Schüler bei der Problemlösung) sollen die Studierenden einschätzen, ob sich das Thema der "Stochastischen Netze" für den Unterricht der Sek. I didaktisch reduzieren lässt.

5 Literatur

[1] Braun, Thorsten; Niehaus, Engelbert: Application of stochastic networks to decision support for health service delivery (2007).

[2] Braun, Thorsten; Niehaus, Engelbert: Providing Health for rural communities: Statistical Training of decision support (2006).

[3] Busacker, Robert G.; Saaty, Thomas L.: Endliche Graphen und Netzwerke, R. Oldenbourg, München/Wien, (1968).

[4] Erfahrungsbericht (2000), Schülerin an der Universität Köln, http://mi.uni-koeln.de/Math-Net/mn_categories/pages/hb_unijournal.html (URL geprüft am 01.03.2008).

[5] Lessner, Günter: Elemente der Topologie und Graphentheorie, Herder, Freiburg/Basel/Wien, (1980).

[6] Rahmenlehrplan Mathematik, Klassenstufen 5 – 9/10, Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz (2007).

[7] Tücke, Manfred: Schulische Intelligenz und Hochbegabung für (zukünftige) Lehrer und Eltern, (Osnabrücker Schriften zur Psychologie; Bd. 9) (2005).

[8] Vock, Miriam; Preckel, Franzis; Holling, Heinz: Förderung Hochbegabter in der Schule, Hogrefe-Verlag (2007).

Hans-Joachim BRENNER, Erfurt

Zur Vorbereitung auf und zu den Inhalten von regionalen Fortbildungsveranstaltungen

1. **Inhalt des Beitrags**: Ich stelle Erfahrungen vor, die ich bei der Gestaltung und Durchführung von regionalen Fortbildungsveranstaltungen gewonnen habe. Die Teilnehmer sind erfahrene Mathematiklehrerinnen, die in der Regel mehr als 20 Jahre im Dienst sind.

2. **Rahmen und Ausgangspunkte**: Die Veranstaltungen werden von mir aus eigenem Antrieb heraus angeboten. Die Kolleginnen sind völlig frei, daran teilzunehmen. Das relativ hohe Alter der Lehrerschaft, der zum Großteil geringe Beschäftigungsumfang und die daraus resultierende Bezahlung (80%, 70%) der Thüringer Lehrer am Gymnasium und ein beachtlicher Arbeitsaufwand zur Erfüllung dienstlicher Pflichten, die die unmittelbare Durchführung des Unterrichts nicht berühren, haben auf das Streben nach Fortbildung keinen guten Einfluss.

3. **Was ich mitteilen möchte**

- Von anfänglichen missionarischen Gedanken (die Glaubenslehre vom guten Mathematikunterricht verbreiten) habe ich mich vollständig gelöst. Sie wirken beiderseits kontraproduktiv.
- Für mich überraschend: Mein Bemühen um Fortbildungsangebote ist in erster Linie ein Fortbildungsprogramm für mich.
- In Fortbildungen stelle ich meinen Unterricht, die gewählten Ziele, Inhalte und Methoden vor. Die Kolleginnen sind eingeladen, diese zu diskutieren und zu bewerten. Ich möchte auch eine Vertrauensbasis herstellen. Lernen ist Vertrauenssache!
- Ich strebe an, dass jede Kollegin Brauchbares und für sie Neues aus dem Gebiet der Schulmathematik mitnimmt. Die Auswahl erfolgt entsprechend den Erfahrungen auf mathematischem Gebiet.
- Ein Ziel: die Sensibilisierung der Kolleginnen für das eigene Lernen.
- Ich versuche den Kolleginnen zu vermitteln, dass WIR unsere Fortbildungsbemühungen zu allererst für UNS unternehmen. WIR benötigen für unsere innere Stabilität diese Anstrengungen und die daraus resultierenden Erfolge und Misserfolge.

4. **Zur Situation**

Paul Watzlawick schreibt, dass vor dem Ankommen gewarnt wird (Watzlawick 2007, S.73). Wo sind die Thüringer Lehrerinnen angekommen: in der Gymnasialen Oberstufe, so wie sie sich im Westen Deutschlands entwickelt hat. Und das war für die Kolleginnen nicht leicht; vieles aus der dort üblichen Schulmathematik war neu und unbekannt. Zu beachten ist auch, dass viele Lehrerinnen vor der Wiedervereinigung nicht in der Gymnasialen Oberstufe unterrichtet haben. Die Folgen bezüglich des Fach- und des fachdidaktischen Wissens sind klar (COECTIV, Baumert 2006, S.534). Trotz der schlechten Ergebnisse im Test muss festgestellt werden, dass viele Schwierigkeiten von den Kolleginnen überwunden wurden. Zu beachten ist auch, dass DDR-Lehrkräfte mit einer höheren Stundenzahl an Fortbildungen statistisch signifikant bessere Leistungen im Fachwissenstest hatten (Baumert 2006, S.538). In den Abituraufgaben fallen eine gewisse Termverliebtheit und Kalküllastigkeit auf (Untersuchung von $y = a \cdot \sqrt{x} - \ln x$ und von $g_t : \vec{x} = (0{,}3{,}t)^T + \lambda(1.t.2t)^T$, Abitur 2002), die oft mit einem scheinbaren Streben nach Exaktheit kaschiert werden. Diesen Aufgaben entsprechend wird in der Regel der Unterricht gestaltet. Die Folgen sind zum einen, dass die Komplexität des Unterrichtsgeschehens erheblich verringert werden kann und zum anderen, dass der soziale Prozess des Lernens in einem bestimmten Maße gelingt, was durch sich verändernde gesellschaftliche Rahmenbedingungen immer mehr an Bedeutung gewinnt. Eine dritte Folge ist, dass nicht nur die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten der Schüler darunter leidet. Das Problem besteht nun darin, dass diese Ohnmacht gegenüber den nicht vertrauten und den nicht verstandenen Teilen der Mathematik und der Schulmathematik den Kolleginnen mehr oder minder bewusst ist. („Das ist zu schwer für meine Schüler.“)

5. **Zur fachlichen Seite des Problems**

Lernen ist ein aktiver Prozess. Mathematische Fähigkeiten muss man sich fortwährend erarbeiten. Das Durchdringen mathematischer Konzepte ist eine zentrale Voraussetzung für das erfolgreiche Unterrichten (Ball 2001, S.433). Unter Beachtung der vielfältigen Belastungen der Kolleginnen stellen sich die Fragen, welche Verbesserungen ihrer mathematischen Fähigkeiten streben die Lehrerinnen an und in welcher Tiefe wünschen sie mathematische Konzepte zu durchdringen? Für die Untersuchung dieser Fragen möchte ich geeignete Beispiele erschaffen. (Handzettel, die nach Vorträgen von mir ausgegeben wurden und die „gut ankamen“ befinden sich im Anhang.)

6. **Zur emotionale Seite des Problems**

Nach Harry Frankfurt haben wir keine Wahl, uns dem zu unterwerfen, was wir von ganzem Herzen lieben (worum wir uns sorgen). Diese Liebe bringt zum Ausdruck, was wir nicht umhinkönnen von ganzem Herzen sein zu wollen. Die legitime Autorität dieser Liebe ist für ihn die einzige angemessene und letzte Grundlage normativer Einstellungen und Überzeugungen. Wir müssen uns selbst verstehen (verstehen lernen) und zu einem reifen Selbstvertrauen finden (Frankfurt 2007, S.70-71). In einer Erwiderung darauf stellt Bratman fest, dass die Rolle des Willens in unserem praktischen Leben vor allem mit überlegter, vernünftiger Stabilität zu tun hat (ebd., S.124). In Fortbildungsveranstaltungen ist eine meiner zentralen Botschaften, dass es für mich als erfahrenen Mathematiklehrer darauf ankommt, das richtige Verhältnis von Stabilität und Veränderungen bzw. Herausforderungen anzustreben. Beides Streben gehört zu unserer menschlichen Natur. Die Vernachlässigung von Herausforderungen stört die wechselseitige Abhängigkeit und somit unsere innere Stabilität.

„Gerechte Verhältnisse, Solidarität sowie sachangemessenes, konstruktives Verhalten setzen eine persönliche Reifung voraus, durch welche Menschen aus einer inneren Balance heraus zu handeln vermögen. … Selbststeuerungsfähigkeit beinhaltet auch, dass man einen Zugang zu seinem Selbst hat, weshalb sich Selbstreflexionskompetenz mehr und mehr zu einer auch gesellschaftlichen Schlüsselkompetenz zu entwickeln scheint." (Arnold 2008, S.329) Meine Absicht besteht nun darin, dass Anstöße für solche persönlichen Lernprozesse auch in Veranstaltungen über Schulmathematik gegeben werden. Ich möchte die Rolle, die die Beschäftigung mit Mathematik für die Persönlichkeitsentwicklung von erfahrenen Mathematiklehrerinnen spielen kann, stärker hervorheben und die Sensibilität für das eigene Lernen der Lehrerinnen in den typischen Lernsituationen (während des Unterrichts und bei der Unterrichtsvorbereitung) erhöhen.

Geht man davon aus, dass „nur durch starke Gefühle im Erwachsenenalter Verhalten noch verändert werden kann" (Roth 2004, S.23), dann muss auch im Vortrag der Vortragende echte Gefühle offenbaren. Es geht um Glaubwürdigkeit und Authentizität. Daher ist narratives Vorgehen geeignet.

Die Verantwortung der Fortbildnerin liegt im oben Erläuterten und in der Auswahl geeigneter mathematischer Probleme bzw. Inhalte. Ausschlaggebend für die Auswahl sind die vorhandenen Fähigkeiten der Lernenden und das Potenzial der Beispiele, um der Emergenz der Kognition/des Lernens bestmöglich zu entsprechen (vgl. Arnold 2005, S.53).

7. **Fortbildungsangebote**

Im ersten Teil sind die 1,5 stündigen Veranstaltungen aufgeführt, in denen ich Beispiele aus meinem Unterricht vorstelle. Dabei möchte ich mein Bemühen um einen problemorientierten und anschaulichen Unterricht demonstrieren und zu Diskussionen anregen. Im zweiten Teil der 3-6 stündigen Veranstaltungen sollen mathematische Themen zur Sprache kommen, die teilweise nur bedingt etwas mit unserem konkreten Unterricht zu tun haben. Ich verfolge dabei insbesondere zwei Ziele. Zum einen soll gezeigt werden, wie man anhand von Problemen und ihrer Bearbeitung zu Lösungsmethoden und Erkenntnissen gelangen und dabei verschiedene Begründungstiefen zulassen kann und wie sich dabei die Exaktheit schrittweise entwickelt. Und zum anderen soll der Bereich unserer Sicherheit im Beherrschen des Kalküls teilweise verlassen werden, um heuristische Strategien wieder bewusster einzusetzen und Erkenntnisse der Lehr- und insbesondere der Lernforschung am Beispiel diskutieren zu können.

Teil 1 a) Analytische Geometrie anschaulich unterrichten
- b) Die leichten und die schweren Funktionen
- c) Integrale ohne Hauptsatz
- d) Die Summe der Glieder der geometrischen Folge
- e) Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
- f) Einstiegsprobleme in die Integral- und Differenzialrechnung
- g) Inkommensurable Strecken und Euklidischer Algorithmus
- h) Extremwertaufgaben auf verschiedene Weisen lösen
- i) Die Eulersche Zahl e

Teil 2 a) Der Satz von Pick (Flächeninhalte, Eulerscher Polyedersatz, Euklidischer Algorithmus, Gitterpunkte, Teilbarkeit)
- b) Minkowski-Diagramme (nicht nur für Physiklehrer)
- c) Lineare Funktionen und Determinanten (die fundamentale Idee der linearen Funktion: von der ersten Klasse bis zur Hochschule)
- d) Stetige und nicht differenzierbare Funktionen (Probleme der Schulanalysis bis hin zum Beispiel von van der Waerden)
- e) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Winkelfunktionen, komplexe Zahlen, Satz von Vieta)

8. **Literatur**

Arnold 2005, Die emotionale Konstruktion der Wirklichkeit, Schneider Verlag

Arnold 2008, Emotionen und Lernen, Schneider Verlag

Ball/Lubienski/Mewborn 2001, in Richardson: Handbook of research on teaching

Baumert/Brunner/ u.a. 2006, COECTIV-Studie, Zeitschrift für Erziehungswissenschaft

Frankfurt 2007, Sich selbst ernst nehmen, Suhrkamp Verlag

Roth 2004, Vernunft ohne jedes Gefühl?

Watzlawick2007, Anleitung zum Unglücklichsein, Piper Verlag

Bernhard BROCKMANN, Augsburg

Computereinsatz im Mathematikunterricht – Ein Rückblick auf die Anfänge

Augsburg feierte 2006 im Goldenen Saal des Rathauses ein Jubiläum: Das Gymnasium bei St. Anna wurde 475. Zur Geschichte der Schule gehört auch eine Epoche mit der Zentralstelle für Computer im Unterricht [1]. An dieser Institution wurden über 3 Jahrzehnte lang Programme, Unterrichtsformen und Integrationsmodelle für den Computereinsatz im Unterricht entwickelt und erprobt, Beiträge von Lehrern und Schülern aus bayerischen Schulen aufbereitet und an interessierte Kollegen und Institutionen weitergegeben, Entwicklungen beobachtet und Erkenntnisse für die Schulen nutzbar gemacht.

Die Zentralstelle war in ihrem Bereich innovativ und richtungsweisend, was man am Interesse der Besucher aus den verschiedensten Institutionen (z. B. auch aus der GDM anlässlich der Jahrestagung 1976 in Augsburg) und aus vielen Ländern der Welt ablesen konnte. Die Zentralstelle gibt es seit 2001 nicht mehr, wohl aber Dokumente, welche die Anfänge des Computereinsatzes belegen, und viele Mitstreiter, die durch persönliches Engagement, Kreativität und Zielstrebigkeit die Entwicklung des Computereinsatzes im Mathematikunterricht maßgeblich geprägt haben.

Wenn jemand die Marksteine computerunterstützten Unterrichts von den ersten Ansätzen bis heute erforschen will, so kann er Zeitzeugen nach ihren Begegnungen, Erfahrungen und Einschätzungen befragen. Er kann aber auch versuchen, die aus heutiger Sicht wesentlichen Entwicklungslinien aus Dokumenten zu erschließen. Aus der Fülle der an der ehemaligen Zentralstelle für Computer im Unterricht vorhandenen Dokumente (ein Verzeichnis ist über den Autor dieses Beitrags erhältlich) seien einige wenige, leichter zugängliche Quellen herausgegriffen, aus denen Facetten des Computereinsatzes im Mathematikunterricht und Entwicklungstendenzen deutlich werden können.

Grundfragen des Computereinsatzes

Das Projekt „Computerunterstützter Unterricht Augsburg“ (1971 – 1976)

- analysierte die technischen, organisatorischen und pädagogischen Rahmenbedingungen für einen Computereinsatz in der Schule,
- suchte nach geeigneten Themen in den Fächern,
- entwickelte Programme und Begleitmaterialien für Einführungskurse in ein Lerngebiet (z. B. Algebra 7. Kl., Trigonometrie 10. Kl.), Einzelprogramme für Übung und Festigung (z. B. in der 6. Kl. im Bereich Brüche,

Dezimalzahlen und Zinsrechnung), Werkzeuge für Entdeckendes Lernen (z. B. der Eigenschaften von Quadratfunktionen),
- erprobte Unterrichtsmodelle für Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit, beim Einsatz im Computerraum und an einzelnen Terminals,
- schuf Freiräume für selbständiges Arbeiten und selbstverantwortliches Lernen im Fachunterricht und außerhalb der regulären Unterrichtszeit,
- beobachtete Schüler und Lehrer in veränderten Unterrichtssituationen,
- erforschte in Momentaufnahmen und Langzeitstudien Wirkungen von computerunterstütztem Unterricht.

Der Projektbericht [2] mit Beiträgen zum Fach Mathematik von B. Brockmann, I. Keil, K.-A. Keil, G. Kosmala, W. Lehnhart, U. Moencke, A. Petterlechner, W. Thum gibt in Kapitel 2 eine ausführliche Darstellung ausgewählter Einzelprogramme und Programmsysteme und dokumentiert in Kapitel 5 Untersuchungen und Einsatzerfahrungen. Themen sind u. a.: Aktivierung der Schüler (S. 544 – 565), Vergleich verschiedener Integrationsmodelle (S. 611 – 660), Vergleich verschiedener Einsatzformen eines Übungsprogramms (S. 694 – 610), Lernerfolg in Übungsprogrammen (S. 566 – 593; 661 – 670; 671 – 678), Variation von Aufgabentexte in der Übungsphase (S. 679 – 685), Benutzung der Möglichkeiten der Lernersteuerung (S. 686 – 697), Vergleich von Einzel- und Partnerarbeit bei Entdeckendem Lernen (S. 698 – 711), Qualität der von den Schülern gemachten Entdeckungen (S. 712 – 721).

Weitere Untersuchungsergebnisse finden sich im Abschlussbericht. zum Modellversuch „Einsatz von Computerterminals an der Schule“ [3], Kap. 2 (Mathematik) und Kap. 5 (Computerunterstützter Unterricht mit ein bis zwei Datensichtgeräten). Von besonderem Interesse sind die Ergebnisse der wissenschaftlichen Begleitung durch U. Karl im Projekt wie im Modellversuch (Kap. 4 bzw. Kap.7) sowie die eigenständige Dokumentation der Begleitforschung [4].

Auf die Frage „Was leistet CUU?“ sind im Projektbericht (S. 896 – 903) an erster Stelle die „Unterstützung anspruchsvoller Unterrichtsformen“ (Aktive, produktive Teilnahme der ganzen Klasse; Entdeckendes und selbstverantwortliches Lernen; sachbezogene Auseinandersetzung mit Problemen in Partner- oder Gruppenarbeit) sowie „Individualisierung“ und „Information über Lernstand“ genannt. Aus den Erfahrungen werden Empfehlungen abgeleitet: z. B. Wechsel mit anderen Unterrichtsformen, themenbezogene Einzelprogramme bzw. Kurse mit flexiblen Bausteinen, Erarbeitung von Vorschlägen für die Unterrichtskonzeption, Ausrichtung auf den Einsatz in der Breite.

BUS – Computernutzung an Schulen 1979 – 2001

Mit der zunehmenden Ausstattung der Schulen mit Rechnern wuchs der Beratungsbedarf in allen Fragen der Computernutzung. Die Zentralstelle suchte ein Forum für Information und Erfahrungsaustausch. U. Karl schuf mit der Zeitschrift BUS (lat. omnibus = für alle) ein Medium, das ab 1979 die Entwicklungen des Computereinsatzes in der Schule begleitete und auch im Rückblick noch all die Schritte nachvollziehen lässt auf dem Weg von zeitraubenden Versuchen mit rechnerspezifischen Algorithmen für einzelne mathematische Funktionen hin zum programmierbaren Taschenrechner mit integriertem Algebrasystem, vom mühevollen Basteln an Abbildungen mit alphanumerischen Zeichen über Graphikwerkzeuge hin zum dynamischen Geometriesystem, von Kurzbeschreibungen mit Unterrichtshinweisen für Einzelprogramme über Handreichungen mit Bedienungsanleitungen und Einsatzvorschlägen für Programmpakete hin zu fachdidaktisch ausgerichteten Broschüren (zu Geometrie bzw. Analysis) mit Lehrplanbezügen und Unterrichtsmodellen für den Einsatz ausgewählter Programme und Werkzeuge, von ersten Unterrichtsideen, ihrer Erprobung mit wechselnden Rechnertypen und Weiterentwicklung hin zu komplexen Programmsystemen (Stochastik-Studio 2004), von Sammeldisketten für unterschiedliche Formate und Betriebssysteme hin zu Programmdatenbanken auf dem Bayerischen Schulserver und zum Gesamtangebot auf CD mit Recherchemöglichkeiten nach Fächern und Altersstufen.

Beiträge mit Bezug zum Mathematikunterricht verfassten der Leiter der Zentralstelle (K.-A. Keil, W. Liessel) und die Mitarbeiter aus den Schularten (B. Brockmann, W. Conrad, M. Elser, G. Gigl, K. Keidel, D. Kirmse, W. Schmid, C. Schuster, K. Stampfl, F. Timpe), der Landesbeauftragte für Computereinsatz im Fach Mathematik (K. Rudert), Mitarbeiter aus dem Gymnasium bei St. Anna (G. Kosmala, H. J. Müller), Programmautoren und Mitglieder aus Arbeitskreisen (H. Andraschko, L. Daas, B. Eder, D. Hein, U. Freiberger, G. Kühlewind, W. Lorbeer, P. Rauschmayer, K. Rechenberger, T. Stark, K. Stecher, N. Wartha), Fachdidaktiker (S. Baptist, R. Hölzl, W. Neidhardt, H. Schumann, H.-G. Weigand, T. Weth, B. Winkelmann), Kollegen aus Schulen und Institutionen in Bayern und anderen Ländern (H. Appel, M. Christl, H.-J. Deckert, W. Fendt, R. Fichtner, W. Görs, H. Hof, W. Hofmann, M. Horn, W. Müller, M. Mulzer, W. Pröpper, H. Puhlmann, J. Schmailzl, H. C. Thoma) und insbesondere die BUS-Redaktion (U. Karl). Eine Bibliographie (chronologisch, thematisch oder nach Autoren geordnet, bei zentralen Themen z. T. mit Textauszügen bzw. Kommentaren) ist über B. Brockmann oder U. Karl (lernmuseum.de) erhältlich.

Literatur, Materialien in Archiven und Museen

[1] Keil, Karl-August (Hg.). Das Gymnasium bei St. Anna in Augsburg. 475 Jahre von 1531 bis 2006. Wißner-Verlag Augsburg 2006. *Darin:* Die Zentralstelle und das Computerprojekt am Anna-Gymnasium. S. 238 – 252. *Literatur:* S. 286 – 289.

[2] Keil, Karl-August (Hg.): Das Projekt Computerunterstützter Unterricht Augsburg. Augsburg 1976.

[3] Keil, Karl-August (Hg.): Modellversuch Einsatz von Computerterminals an der Schule. Augsburg 1977.

[4] Karl, Udo: Wissenschaftliche Begleitung zum Modellversuch Einsatz von Computerterminals an der Schule. Augsburg 1979.

[5] BUS. Zeitschrift für Computernutzung an Schulen. Hg. Zentralstelle für Computer im Unterricht Augsburg. Redaktion U. Karl. Hefte 1 (1979) bis 44 (2001). BUS-CD 1999, 2000, 2001, 2003/Archiv.

Wichtige Dokumente und Produkte aus der Arbeit der ehemaligen Zentralstelle für Computer im Unterricht wurden u. a. an folgende Institutionen weitergegeben:

- Computer, Programme, Handreichungen und Broschüren an das Schulcomputer-Museum in München (Sabel-Schulen, Schwanthalerstr. 57). *Ansprechpartner: Dr. Manfred Saller, ehemals Schulleiter des Städt. Thomas-Mann-Gymnasiums München und langjähriger Promotor der Fortbildungsveranstaltungen für EDV und Informatik für Lehrkräfte der Stadt München, Tel. privat 089-7142308.*
- Computer, Programme, Handreichungen und weitere Dokumente an das Gymnasium bei St. Anna, Augsburg, Archiv/Sammlung. *Die Zentralstelle war bis zu ihrer Einrichtung als selbständige Dienststelle dem Gymnasium bei St. Anna zugeordnet. Mit Schülern dieser Schule fanden die grundlegenden Erprobungen zum computerunterstützten Unterricht statt.*
- Zeitschrift BUS, alle Ausgaben (ab 1999 mit zugehöriger CD), Buchprogramme, Veröffentlichungen und schriftliche Materialien aus den Bereichen Mathematik und Informatik an die Universitäts-Bibliothek Bielefeld. *Die Materialien sind recherchierbar unter www.uni-bielefeld.de Fachinformationsportale – Mathematik – Literaturrecherche – Datenbanken&Multimedia – IDM-Datenbank. Die IDM-Datenbank des Instituts für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld umfasst eine internationale Sammlung von über 15000 Dokumenten und Materialien zum Mathematikunterricht, vorrangig „graue" Literatur aus Forschung, Verwaltung und Schulpraxis.*
- Handreichungen und Materialien sowie Restposten aus dem bis zum Jahr 2000 aktuellen Angebot, ergänzt um Produkte aus der Weiterführung von Arbeiten der ehemaligen Zentralstelle bis 2005, an das Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, Schellingstr. 155, 80797 München. *Ansprechpartner: E. Sailer, Tel. 089-2170-2235, edgar.sailer@isb.bayern.de, bzw. Bibliothek, Tel. 2233.*
- Dokumente und Übersichten an Udo Karl für das Archiv www.lernmuseum.de.

Auskunft über Inhalte und Lagerorte der Archiv-Materialien: Bernhard Brockmann, Burgfriedenstr. 10, 86159 Augsburg, Tel. 0821-573752. bernhard.brockmann@web.de.

Axel BRÜCKNER, Potsdam

25 Jahre Potsdamer L-S-A[1]-Modell

Das L-S-A-Modell gehört zu einem zentralen Ergebnis der von A. DIETZ geleiteten Forschungen zur mathematikmethodischen Theoriebildung[2] in den siebziger und achtziger Jahren des vorigen Jh. an der PH Potsdam. Es handelt sich dabei um ein umfassendes Konzept zur Gestaltung eines Mathematikunterrichts, an den eine Reihe von Effektivitätsforderungen gestellt werden: „... die Gestaltung des Mathematikunterrichts stärker als bisher auf die Aneignung von Allgemeinem, Umfassendem Transferierbarem als dem Wesentlichen einer notwendigen Basis für die rationelle, selbständige und schöpferische Bearbeitung von Besonderem und Einzelnem, von konkret-praktischen Aufgaben, zu orientieren.“[3]

Mathematiklernen wird aufgefasst als ein Prozess des Lösens von Aufgaben: von Lernaufgaben und von mathematischen Schüleraufgaben. Jedem Stoffabschnitt des Unterrichts wird eine primäre Lernaufgabe, eine so genannte Leitaufgabe, zugeordnet. Die Leitaufgabe ist die Aufforderung an die Schüler, sich (ganze) Komplexe von Stoffelementen (Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren, Zuordnungen zwischen mathematischen Stoffelementen und zwischen mathematischen Stoffelementen und außermathematischen Sachverhalten) anzueignen. Die Leitaufgabe kann durch das Lehrsystem vorgegeben werden, sie kann von den Schülern unter Führung des Lehrers gebildet und bearbeitet werden oder sie wird im Idealfall von den Schülern selbst entwickelt und gelöst.

Im Zuge der Leifaufgabenerarbeitung und- bearbeitung sind zu leisten:

- (Gesamt-)Zielorientierung und -motivierung: Was soll gelernt werden und warum und wozu?
- Vorgehensorientierung (Reflexion, Vorgehensplanung, Schaffung einer allgemeinen Handlungsorientierung): Auf welche Erfahrungen kann bereits zurückgegriffen werden? Wie kann zweckmäßig vorgegangen werden? Welche Hilfsmittel sind erforderlich bzw. geeignet?
- Nutzen und Anwenden der Ergebnisse der Planungsphase, Verwenden und Aneignen der Handlungsanleitung zur Lösung der Aufgaben einer Aufgabenklasse

---

[1] Leitaufgabe-Sekundäraufgaben-Aufgabensystem
[2] S. dazu vor allem DIETZ 1984.
[3] DIETZ 1983

- Kontrolle und Bewertung der erreichten Resultate - bis hin zur Einschätzung des Niveaus der bei den Schülern ausgebildeten Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten

Der Leitaufgabe werden zum Zwecke ihrer Erarbeitung und Bearbeitung Sekundäraufgaben zugeordnet. Dabei handelt es sich in der Regel um gewöhnliche mathematische Schüleraufgaben, durch die das Lernen von Mathematik ausgelöst und reguliert werden soll. Die Sekundäraufgaben dienen dazu, die Leitaufgabenbearbeitung zu unterstützen. Sie werden durch die Leitaufgabe determiniert und haben mit Bezug zur Leitaufgabe bestimmte Funktionen zu erfüllen, z. B. Unterstützung der Zielmotivierung, der Aneignung der Handlungsanleitung oder der Reflexion des Erreichten. Insgesamt bilden die Leitaufgabe und die durch sie maßgeblich bestimmten Sekundäraufgaben ein Aufgabensystem.

Die theoretischen Grundlagen und Vorleistungen für das L-S-A-Modell (das Leitaufgabenkonzept) sind insbesondere die Ergebnisse lernpsychologischer Untersuchungen der Forschungsgruppe um P. A. GALPERIN[4]:

1. Orientierungsgrundlagen für Handlungen (OH) Typ I bis IV (GALPERIN)
2. Etappenweise Aneignung von Handlungen (GALPERIN)
3. Kontrollhandlungen: Dialektik von Fremdkontrolle und Selbstkontrolle (GALPERIN)
4. Konzepte vom empirischen und theoretische Verallgemeinern (DAWYDOW)
5. Lernaufgabenbegriff (LEONTJEW)

Eine Lernaufgabe ist darauf gerichtet, Bedingungen für die Entstehung theoretischer Begriffe (Konzepte) zu analysieren und ein theoretisch verallgemeinertes Lösungsverfahren für eine Klasse konkret-praktischer Aufgaben zu entwickeln und anzueignen. Das allgemeine Lösungsverfahren kommt dann bei allen möglichen besonderen und konkreten Varianten von Aufgabenbedingungen zum Einsatz und wird im Sinne des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten genutzt, es wird zunehmend angereichert, es bewährt sich, wird vervollkommnet, es wird angeeignet.

Der klassische Schulunterricht ist gekennzeichnet durch die Lehr- und Lernmethode der empirischen Verallgemeinerung (empirisches Denken – Alltagsdenken). Sie wird beschrieben durch das Aufsteigen vom sinnlich Konkreten zum Abstrakten. Der Lernende sucht durch schrittweises

[4] Literaturangaben dazu findet der Leser in den genannten Quellen

Vergleichen vieler Gegenstände nach gemeinsamen Eigenschaften, die er dann generalisierend abstrahiert und zu einem Begriff formt, d. h. die invarianten Eigenschaften werden zu einem Begriff zusammengefasst. Damit lassen sich Dinge und Erscheinungen der Umgebung systematisieren und klassifizieren. Es entsteht ein empirisch gewonnenes Begriffssystem. Die theoretische Verallgemeinerung (theoretisches Denken – dialektisches Denken) ist dagegen gekennzeichnet durch das Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkret-Logischen. D. h., der (abstrakte) Begriff ist vorangestellt, der Lernende „entleiht" ihn sich der Wissenschaft. Er nutzt ihn bei der Erarbeitung und Bearbeitung des Konkreten. Dadurch wird ausgehend vom theoretischen Begriff sein Inhalt erschlossen durch die Übertragung auf das Konkret-Praktische. Die Lehr- und Lernstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten als theoretische Verallgemeinerung beginnt mit der Schaffung der so genannten Ausgangsabstraktion, die in ihrer zweiten Phase für die Untersuchung und Bearbeitung des konkreten Stoffes, der angeeignet werden soll, genutzt wird. Auf diesem Wege wird das Abstrakte mit Hilfe des Konkreten zunehmend inhaltlich erschlossen. Die Vielfalt des Konkreten wird auf dem Hintergrund des Abstrakten wahrgenommen. Der Geltungsbereich der Ausgangsabstraktion und ihre begriffliche Weite werden deutlich. Das Abstrakte verändert sich, wird zunehmend vervollständigt und verinnerlicht.

Um eine Leitaufgabe für einen Stoffabschnitt des Mathematikunterrichts zu konstruieren, ist als Vorarbeit das übergreifend Wesentliche gemäß der o. g. Hauptintention des Konzepts zu bestimmen.

Ein eigens dafür entwickelter Katalog ermöglicht die kritische Sichtung geeigneter Inhalte anhand von fünf Wesentlichkeitskriterien[5]: 1. Fachkriterium: Es werde jene Inhalte und Varianten fachsystematischer Fundierung gewählt, die den nachfolgenden Kriterien optimal genügen. 2. Praxiskriterium: Inhalte müssen substanziell und funktionell den Forderungen an die Allgemeinbildung und den Bedürfnissen nach der Schulzeit entsprechen. 3. Aneignungskriterium: Schwerpunkte, Struktur und Anordnung der Inhalte müssen eine aktive, zielorientierte, motivierte, selbständige Könnensentwicklung mit transferierbaren und praktisch nutzbaren Ergebnissen garantieren. 4. Kontinuitätskriterium: Die Inhalte sind auf die Schwerpunkte zu reduzieren, die einen kontinuierlichen Aneignungsprozess ermöglichen und tatsächlich wieder gebraucht werden. 5. Zeit-Relationskriterium: Umfang, Anordnung und Struktur der Inhalte müssen bei der zur Verfügung stehenden Zeit eine Könnensentwicklung entsprechend dem Aneignungskriterium ermöglichen.

[5] S. Dietz 1984

Als illustrierendes Beispiel wird für die punktuelle[6] Anwendung der Gestaltungsvorgaben der Stoffabschnitt „Kreislehre“ aufbereitet. Da der Abschnitt geeignet ist ein überschaubares, beziehungsreiches System geometrischer Sätze zu entwickeln und sinnvoll zu nutzen und da das Suchen nach Zusammenhängen, das Begründen und das Beweisen mathematiktypische Tätigkeitsbereiche sind mit entsprechender Bedeutung für den weiteren Lehrgang und die Zeit danach, wurde die Entwicklung einer Handlungsanleitung für einfache Beweisaufgaben und ihre weitere Vervollkommnung und Anwendung zum Gegendstand der Leitaufgabe bestimmt. Nach Sichtung einer Kollektion von Kreisaufgaben und der Behandlung wichtiger Begriffe zur Beschreibung von Lagebeziehungen und geometrischen Situationen am Kreis wird im Arbeitsbuchteil folgende Forderung zur Zielanalyse gestellt: (a) *Erläutere mit Hilfe der erarbeiteten Begriffe, worin die Problemstellungen in den Beispielaufgaben bestehen. Formuliere die zentrale Zielstellung für die Stoffeinheit.*

Daraus resultiert die **Gesamtaufgabe:** *Für die Bewältigung von Kreisaufgaben müssen wahre Aussagen über die Eigenschaften von Sehnen, Zentri- und Peripheriewinkeln und Tangenten erarbeitet werden. Stelle fest, wie man solche Aussagen finden und beweisen kann.*

Als Teilaufgabe der Gesamtaufgabe im Sinne einer Präzisierung werden die Lernenden zur Methodenreflexion aufgefordert: *(b) Wiederhole am Beispiel des Satzes über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, auf welchem Wege Aussagen über die Eigenschaften geometrischer Figuren gewonnen und bewiesen werden können.* Eine weitere Teilaufgabe soll die Schaffung der Ausgangsabstraktion veranlassen: *(c) Entwickle eine Anleitung zum Finden und Beweisen von Aussagen über die Eigenschaften geometrischer Figuren. Geh bei der Planung der Arbeitsschritte von der Teilaufgabe b aus.*

Die Anleitung wird dann verwendet, um zahlreiche Zusammenhänge am Kreis zu untersuchen und die gefundenen Vermutungen zu beweisen. Sie wird weiterentwickelt und vervollkommnet. Am Ende des Stoffabschnitts wird u. a. die Nützlichkeit der planenden Vorbetrachtungen gewertet.

Literatur

DIETZ, A.: Beiträge zur mathematik-methodischen Aufgabentheorie, Potsdam 1983

DIETZ, A.: Zur Weiterentwicklung des Potsdamer Modells der Theorie der Mathematikmethodik, Potsdam 1984

---

[6] Für die Gestaltung eines Gesamtlehrgangs nach dem Konzept ist die Konstruktion von Leitaufgabenfolgen vorgesehen.

Martin BRUNNER, Luxemburg & Stefan KRAUSS, Kassel

Geschlechtsunterschiede in Mathematik: Eine Frage des Messmodells?

Da mathematische Kompetenz zur erfolgreichen Teilhabe am gesellschaftlichen und beruflichen Leben essentiell ist, sind jegliche Geschlechterunterschiede in mathematischer Kompetenz von großer Bedeutung. Gegenwärtig zeigen viele Studien, dass Jungen und Mädchen sich geringfügig in ihrer mathematischen Kompetenz unterscheiden. Beispielsweise haben Hyde, Fennema und Petersen (1990) 53 Einzelstudien mit Daten von über einer Million Jugendlichen im Rahmen einer Meta-Analyse zusammenfasst. Die Ergebnisse der Einzelstudien wurden in Form von Effektstärken d repräsentiert (zur Berechnung von d wird vom Mittelwert der Jungen der Mittelwert der Mädchen abgezogen und diese Differenz durch die gemeinsame Standardabweichung geteilt; dabei repräsentiert d = .20 einen kleinen Effekt, d = .50 einen mittleren Effekt und d = .80 einen großen Effekt; s. Cohen, 1992). Ein zentrales Ergebnis der Meta-Analyse war, dass Jungen in der Altersgruppe von 15 bis 18 Jahren gegenüber Mädchen nur einen kleinen Leistungsvorsprung hatten (die mittlere Effektstärke über alle Studien lag bei d = .29). Dieser Befund wurde auch im Rahmen zahlreicher repräsentativer Schülerleistungsstudien repliziert. Beispielsweise wurde in allen drei bisherigen Erhebungszyklen von PISA in nahezu allen Teilnehmerstaaten bei 15-Jährigen Jugendlichen immer nur ein kleiner Effekt zu Gunsten der Jungen in Mathematik festgestellt (Organisation for Economic Co-operation and Development, 2007). Zusammenfassend scheint also die Frage nach Geschlechterunterschiede in Mathematik weitestgehend geklärt zu sein: Jungen sind geringfügig besser als Mädchen.

Doch vielleicht ist dieser Schluß etwas voreilig. Denn alle bisher referierten Befunde basieren auf dem gleichen Messmodell mathematischer Kompetenz, dem ***Standardmodell*** (s. Abbildung 1a), das in der pädagogischen und der psychologischen Forschung dominiert. Im Standardmodell wird davon ausgegangen, dass die Leistung bei Mathematikaufgaben *nur* von der mathematischen Kompetenz M der Jugendlichen abhängt. Da M nicht direkt beobachtet werden kann, wird es als eine latente Variable modelliert (in Abb. 1 werden latente Variablen als Kreise bzw. Ellipsen dargestellt). Auf die Ausprägung der latenten Variablen wird dann von den beobachteten Leistungen bei den Mathematikaufgaben (dargestellt als Rechtecke) geschlossen. Die prinzipielle Annahme ist, dass eine höhere Ausprägung von M mit besseren Leistungen bei allen eingesetzten Mathematikaufgaben einhergeht (der Pfeil deutet daher von *M* aus auf die Rechtecke; der unvermeidliche Messfehler bei den Einzelaufgaben wird in Abb. 1 durch Pfeile dargestellt, die von unten auf die Rechtecke zielen).

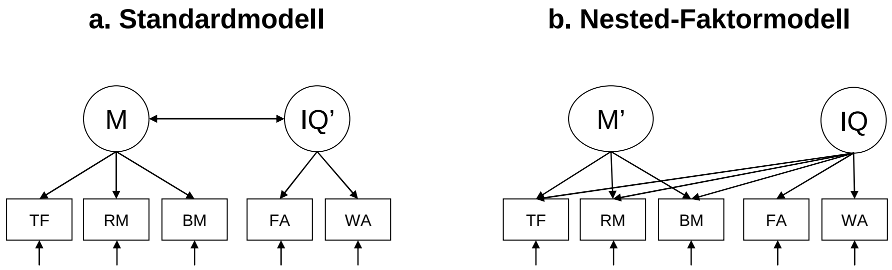


Abbildung 1. Alternative Messmodelle: (a) Standardmodell und (b) Nested-Faktormodell.

In der pädagogisch-psychologischen Forschung dominieren domänen- bzw. fachspezifische Konstrukte, die üblicherweise im Sinne des Standardmodells konzipiert werden. Selbstverständlich können aber auch domänenübergreifende Kompetenzen in das Standardmodell integriert werden. Von besonderer Bedeutung für die vorliegende Arbeit ist das Schlussfolgernde Denken *IQ'*, das für viele Forscher im Kern des Intelligenzkonzepts liegt. Entscheidend ist nun, dass im Rahmen des Standardmodells *IQ'* und *M* zwar assoziiert sein können (diese Korrelation ist durch den doppelköpfigen Pfeil zwischen *M* und *IQ'* dargestellt), aber prinzipiell als konzeptuell getrennte Konstrukte betrachtet werden: Die Leistung bei Mathematikaufgaben wird also nur von *M* und die Leistung bei Aufgaben zum Schlussfolgernden Denken aus einem Intelligenztest (z.B. Figurenanalogien) wird nur durch *IQ'* beeinflusst (Abb. 1a).

Das Standardmodell ist das vorherrschende Modell in der pädagogisch-psychologischen Forschung. Jedoch wird gegenwärtig in der Intelligenzforschung die Beziehung zwischen Intelligenz und mathematischer Kompetenz grundlegend anders aufgefasst. Insbesondere zeigen seit Spearman's (1904) bahnbrechender Studie hunderte von Untersuchungen, dass kognitive Leistungen über fachspezifische Domänengrenzen hinweg positiv korrelieren (Carroll, 1993). Diese positiven Korrelationen können durch eine generelle kognitive Fähigkeit *IQ* (was gemeinhin „Intelligenz" genannt wird) erklärt werden. Im Rahmen der Intelligenzforschung gehen daher aktuelle Messmodelle kognitiver Kompetenzen, wie das ***Nested-Faktormodells*** (Abb. 1b, Gustafsson & Balke, 1993) davon aus, dass die Leistung bei Mathematikaufgaben einerseits von einer mathematikspezifischen Kompetenz *M'* aber andererseits auch von *IQ* beeinflusst werden. Im Nested-Faktormodell können also bessere Leistungen bei Mathematikaufgaben mit einer höheren Ausprägung von *M’* und/oder einer höheren Ausprägung von *IQ* erklärt werden. Da schlussfolgerndes Denken im Kern der Intelligenzdefinition steht (Carroll, 1993) kann davon ausgegangen werden, dass Aufgaben zum schlussfolgernden Denken nur durch *IQ* beeinflusst werden. Weiterhin stellen *M’* und *IQ* zwei voneinander unabhängige Kompetenzen dar. Es besteht also kein systematischer (korrelativer) Zusammenhang zwischen *M’* und *IQ*.

Mit dem Standardmodell und dem Nested-Faktormodell existieren zwei alternative, theoretisch gestützte Messmodelle mathematischer Kompetenz. Jedoch wurden bislang Geschlechterunterschiede in Mathematik nahezu ausschließlich mit dem Standardmodell analysiert. Hierbei ist nun zu bedenken, dass – aus der Perspektive des Nested-Faktormodells – die beobachteten Geschlechterunterschiede bei Mathematikaufgaben auf Geschlechterunterschiede in *M’* und/oder Geschlechterunterschiede in *IQ* zurückgeführt werden können. Da im Standardmodell der Einfluss von *M’* und von *IQ* auf die Leistung bei Mathematikaufgaben nicht getrennt modelliert werden, vermengen Geschlechterunterschiede in *M* Geschlechterunterschiede in *M’* und *IQ*. Weiterhin ist zu bedenken, dass Geschlechterunterschiede in *IQ* nahezu Null sind (Neisser *et al.*, 1996). Zusammengenommen folgt daraus, dass die kleinen Geschlechterunterschiede, die bislang für *M* bei Anwendung des Standardmodells gefunden wurden, die tatsächlichen Geschlechterunterschiede in der mathematikspezifischen Kompetenz *M’* systematisch unterschätzen. Die Geschlechterunterschiede in der mathematischen Kompetenz *M* sind nur deshalb relativ gering, da bei Verwendung des Standardmodells die Geschlechterunterschiede in *IQ* nicht berücksichtigt werden. Im Umkehrschluß bedeutet dies, dass bei Verwendung des Nested-Faktormodells Geschlechterunterschiede in der mathematikspezifischen Kompetenz *M’* zu Gunsten der Jungen deutlich größer sein sollten als in *M*.

Diese theoretische Überlegung verifizierten wir empirisch mit repräsentativen Daten von 29.171 Neuntklässlern, die an der deutschen Erweiterung der PISA 2000 Studie teilnahmen (s. a. Brunner *et al.*, in Druck für eine ausführliche Darstellung der Analysen). Indikatoren der mathematischen Kompetenzen waren die zu Skalenscores zusammengefassten Leistungen bei Aufgaben, die technische Fertigkeiten (TF, s. Abb. 1), rechnerisches Modellieren (RM) oder begriffliches Modellieren (BM) erforderten. Aufgaben zum schlussfolgernden Denken waren Figuren- (FA) und Wortanalogien (WA). Anhand dieses Datensatzes konnten wir in unseren Analysen (Brunner *et al.*, in Druck, Tab. 2) die üblicherweise kleinen Geschlechterunterschiede in *M* bei Verwendung des

Standardmodells replizieren; der Leistungsvorsprung der Jungen betrug $d = .35$. Die interessante Frage war nun, um wieviel größer dieser Unterschied bei Verwendung des Nested-Faktormodells ist: Tatsächlich waren Jungen in diesem Modell deutlich besser als Mädchen in der mathematikspezifischen Kompetenz *M'*; ihr Leistungsvorsprung ist hier mit $d = .94$ als groß zu betrachten. (Geschlechterunterschiede zu Gunsten der Mädchen in *IQ'* mit $d = -.08$ und *IQ* mit $d = -.09$ waren jeweils nahezu Null).

Insgesamt verdeutlichen unsere Analysen, dass die Größe von Geschlechterunterschieden in Mathematik substanziell von der Wahl des Messmodells mathematischer Kompetenz abhängig ist. Wie auch in nahezu allen bisherigen Studien fanden wir kleine Geschlechterunterschiede bei Verwendung des Standardmodells. Jedoch resultierten große Geschlechterunterschiede bei Verwendung des Nested-Faktormodells. Der Grund hierfür ist, dass im Standardmodell Geschlechterunterschiede in *IQ* bei der Berechnung von Geschlechterunterschieden in der mathematischen Kompetenz *M* nicht berücksichtigt werden. Da sowohl das Standardmodell als auch das Nested-Faktormodell theoretisch und empirisch gestützt werden (Brunner *et al.*, in Druck), hängt die Frage nach der Größe von Geschlechterunterschieden in Mathematik also von einer theoretischen „Glaubensfrage“ ab: Beeinflusst die generelle kognitive Fähigkeit (die „Intelligenz“) die Leistung bei Mathematikaufgaben (Nested-Faktormodell) oder nicht (Standardmodell)? Beantwortet man diese Frage mit „ja“, sind Geschlechtsunterschiede in Mathematik wesentlich größer als bisher angenommen.

Literatur

[1] Brunner, M., Krauss, S., & Kunter, M. (in Druck). Gender differences in mathematics: Does the story need to be rewritten? *Intelligence*.

[2] Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies*. New York: Cambridge University Press.

[3] Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin, 112*, 155-159.

[4] Gustafsson, J. E., & Balke, G. (1993). General and specific abilities as predictors of school achievement. *Multivariate Behavioral Research, 28*, 407-434.

[5] Hyde, J. S., Fennema, E., & Lamon, S. J. (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin, 107*, 139-155.

[6] Neisser, U., Boodoo, G., Bouchard Jr., T. J., Boykin, A. W., Brody, N., Ceci, S. J., et al. (1996). Intelligence: Knowns and unknowns. *American Psychologist, 51*, 77-101.

[7] Organisation for Economic Co-operation and Development. (2007). *Pisa 2006. Science competencies for tomorrow's world. Volume 1: Analysis*. Paris: OECD.

[8] Spearman, C. (1904). "general intelligence," objectively determined and measured. *American Journal of Psychology, 15*, 201-293.

Michael Bürker, Freiburg

Hundert Jahre Raumzeit – Grundideen der Relativitätstheorie als mathematikdidaktische Herausforderung

Hermann Minkowski hat in einem berühmten Vortrag vor genau hundert Jahren die Einheit von Raum und Zeit postuliert:
„Von Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren".
Einsteins spezielle Relativitätstheorie war damals gerade drei Jahre alt. Für uns stellt sich die Frage, in wie weit wir die Grundideen und die nötigen Formeln, vor allem die Lorentztransformation so weit vereinfachen und visualisieren können, dass diese von Schülern der Oberstufe ohne besondere Kenntnisse der Physik verstanden und nachvollzogen werden können. Insbesondere besteht die Frage, ob dies im Rahmen des normalen Mathematikunterrichts, mit einfachen geometrischen Vorkenntnissen und vor allem durch Visualisierung mit dynamischer Geometrie-Software möglich ist. Entsprechende Unterrichtsversuche wurden im Januar 2008 mit Oberstufen-Schülern des Freiburg-Seminars durchgeführt. In diesem Seminar werden mathematikbegeisterte Schülerinnen und Schüler von Lehrkräften betreut und spezielle, oft über die Schulmathematik hinausgehende Themen behandelt. Für das Thema „Raumzeit" standen lediglich 4 Unterrichtsstunden zur Verfügung. In der ersten der beiden Doppelstunden haben zwei Studierende, Teilnehmer meines Seminars „Computereinsatz im Mathematikunterricht", die Schüler in das Arbeiten mit „Euklid-Dynageo" eingeführt und grundlegende Aspekte affiner Abbildungen (Definitionen und einfache Sätze) behandelt. In der zweiten Doppelstunde habe ich das Thema „Weg-Zeit-Diagramm", die grundlegenden physikalischen Eigenschaften wie das Relativitätsprinzip und die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und schließlich die Lorentztransformation „abbildungsgeometrisch übersetzt". Diese abbildungsgeometrische Übersetzung ist m. E. auch der Hauptgrund dafür, dass das an sich physikalisch ausgerichtete Thema „Raumzeit" mathematikdidaktisch zu Recht seinen Platz im fächerübergreifenden Mathematikunterricht hat. Das methodisch-didaktische Vorgehen sei im Folgenden an Hand einer Planarbeit mit 5 Arbeitsblättern skizziert.

Im ersten Arbeitsblatt sollen die Schülerinnen und Schüler die Vertauschung von Weg- und Zeitachse und die Abkehr vom orthogonalen hin zum schiefen Gitternetz, sowie die Begriffe ‚Ereignisse' und ‚Weltlinien' einüben (s. Abb. 1).

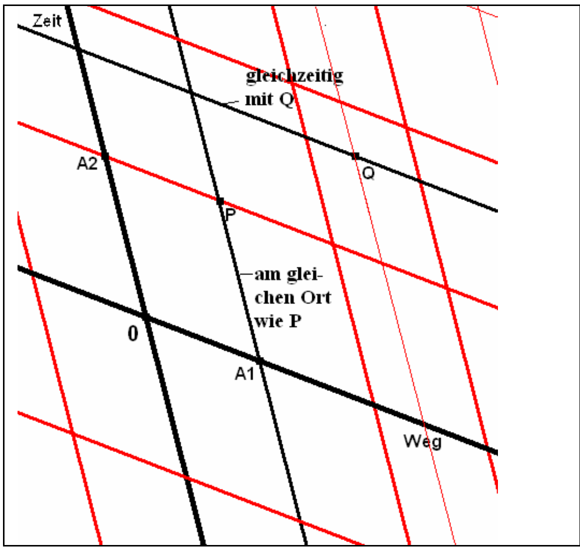


Abb.1

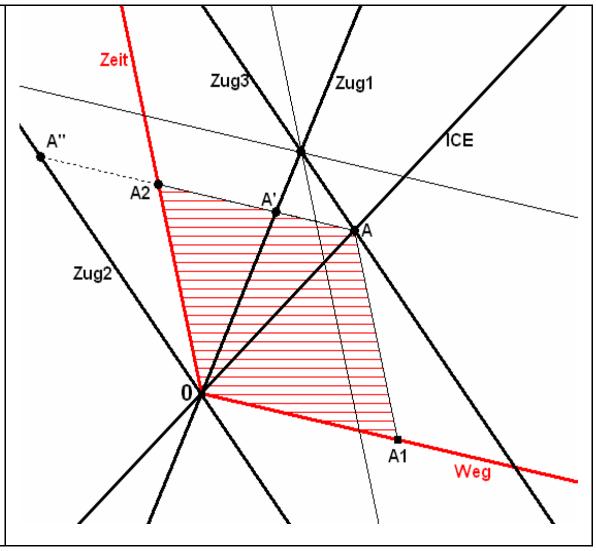


Abb. 2

Im zweiten Arbeitsblatt geht es um verschiedene Geschwindigkeiten im Weg-Zeit-Diagramm, deutlich gemacht durch vier Züge (Abb.2). Dabei sollen die Einheiten auf den Achsen so gewählt sein, dass der schnellste Zug (ICE) durch die (erste) Winkelhalbierende der beiden (schiefen) Achsen dargestellt wird. Zug1 bewegt sich mit 60%-iger ICE-Geschwindigkeit in Richtung, Zug2 mit 60%iger ICE-Geschwindigkeit in Gegenrichtung des ICE, Zug3 begegnet dem ICE im Punkt A mit gleicher Geschwindigkeit wie Zug2. Die Weltlinie des Zuges 1 geht durch O und den Punkt A', die des Zuges 2 durch O und A''. A' ergibt sich als Bildpunkt einer zentrischen Streckung des Punktes A von A_2 aus mit dem Faktor 0,6. Entsprechend ergibt sich der Punkt A'' als Bildpunkt einer zentrischen Streckung des Punktes A von A_2 mit dem Faktor -0,6, die Weltlinie des Zuges 3 als Parallele durch A zur Weltlinie des Zuges 2. Die Schüler sollen den Punkt bestimmen, in dem sich die Züge 1 und 3 begegnen. Sie sollen mittels Ziehen am Punkt A_1 das zunächst rechtwinklige Einheitsparallelogramm in ein schiefwinkliges verwandeln und dabei beobachten, dass sich die Weg-Zeit-Koordinaten des Schnittpunktes von Zug 1 und Zug 3 nicht verändern.

Im dritten Arbeitsblatt werden die zentralen Postulate der Rel.-theorie

1. *Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant.*
2. *Sind zwei Bezugssysteme gegeneinander gleichförmig bewegt, so nehmen die Naturgesetze in beiden Systemen die gleiche Form an.*

abbildungsgeometrisch folgendermaßen „übersetzt“: Wir wählen ein ***kartesisches Koordinatensystem*** mit folgenden Eigenschaften:

3. *Die Bewegung des Lichts (Lichtlinie) wird durch die erste Winkelhalbierende dargestellt.*
4. *Weg- und Zeitachse sind in jedem der beiden Bezugssysteme A und B achsensymmetrisch bezüglich der ersten Winkelhalbierenden.*

5. *Für beide Bezugssysteme gilt:*
Die beiden Wegachsen (Zeitachsen) gehen durch Spiegelung an der x-Achse (y-Achse) des kart. Koordinatensystems auseinander hervor.

(5) ist rein didaktisch bedingt. In der Literatur wird in der Regel eines der beiden gleichwertigen Systeme als kartesisches, das zweite durch ein schiefes Koordinatensystem dargestellt (z. B. [1]). Nützt man die Symmetrien mit (5) geometrisch voll aus, so wird die Lorentztransformation „elementargeometrisch fassbar": Die Einheitsrauten der beiden Bezugssysteme A und B erfüllen die Symmetriebedingungen (3) bis (5) (Abb. 3). Die Schüler sollen dabei den markierten Winkel bei S beobachten. Zieht man nämlich am Punkt A_1 unter Wahrung der genannten Symmetrien, so bleibt der markierte Winkel bei S stets ein Rechter. Warum? Dies kann mit elementargeometrischen Mitteln gezeigt werden (Abb. 4): Die beiden Dreiecke OTS und A_1MT sind ähnlich, weil sie in zwei entsprechenden Winkeln übereinstimmen. Somit sind auch die markierten Winkel bei M und S gleich weit. Da Winkel TMA_1 ein Rechter ist, ist auch Winkel OST ein Rechter. Nach dem Satz des Pythagoras ist damit $\overline{OS} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

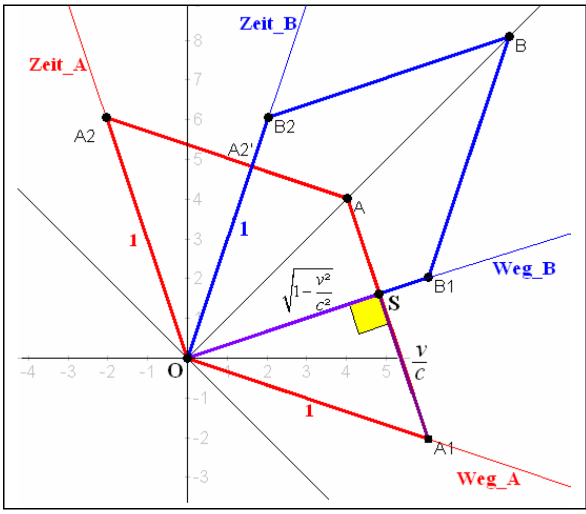


Abb. 3

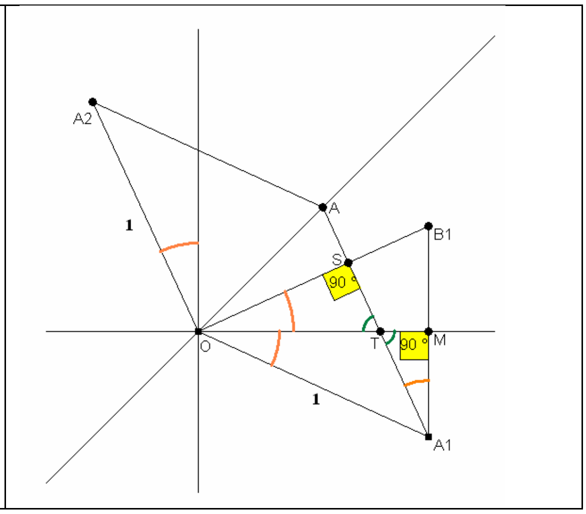


Abb. 4

Im vierten Arbeitsblatt wird die affine Abbildung beschrieben, welche die Einheitsraute OA_1AA_2 des A-Systems auf die Einheitsraute OB_1BB_2 des B-Systems abbildet (Abb. 5). Man kann sie als Verkettung zweier affiner Abbildungen deuten, nämlich der „symmetrischen" Euleraffinität, welche die Raute OA_1AA_2 auf die Raute $OA_1'A'A_2'$ abbildet, und der zentrischen Streckung von O aus mit dem relativistischen Faktor $\gamma = (1-v^2c^{-2})^{-0,5}$, welche die letzte Raute auf die Raute OB_1BB_2 abbildet. Wir erhalten die Abbildungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

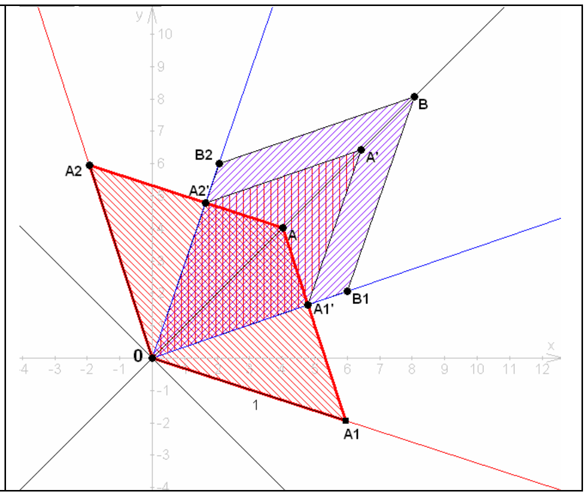
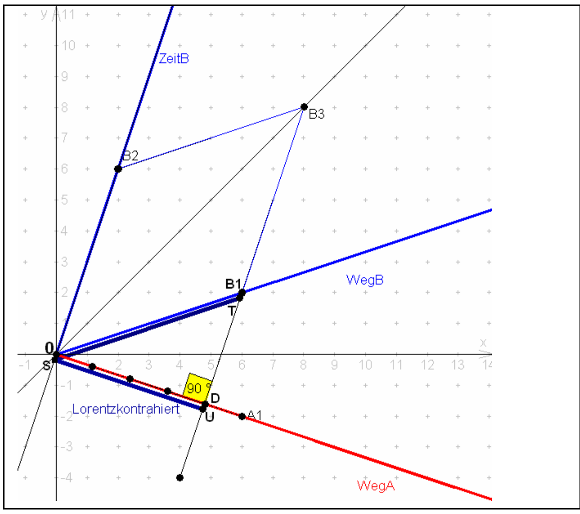


Abb. 5

Diese Matrixgleichung ist aber nichts anderes als die Lorentztransformation in „abbildungsgeometrischem Gewand“.

Im fünften Arbeitsblatt geht es um die Visualisierung der Lorentzkontraktion und der Zeitdilatation. Stellen wir uns einen starren Stab ST vor, der im eigenen B-System ruht und sich im A-System mit 60%iger Lichtgeschwindigkeit bewegt (Abb. 6). Der Beobachter A nimmt von diesem Stab nur die senkrechte Projektion SU auf die Wegachse des A-systems wahr. Es ist $\overline{SU} = (1-v^2c^{-2})^{0,5} \cdot \overline{OB_1}$



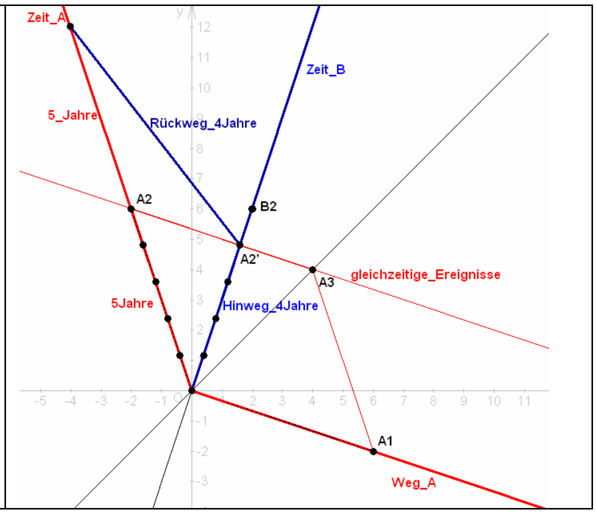


Abb. 6 *Abb. 7*

In Abb. 7 wird die Zeitdilatation durch eine Reise mit einer gleichförmig bewegten Rakete dargestellt, die sich der Zeitachse des B-Systems folgend vom A-System weg bewegt, anschließend zum in A ruhenden Beobachter (wieder gleichförmig bewegt) zurückkehrt. Während des Hinwegs sind im A-System (mit $vc^{-1} = 0{,}6$) 5 Jahre, im B-System lediglich 4 Jahre vergangen, das Gleiche auf dem Rückweg (Zwillingsparadoxon).

Literatur: R. Sexl, H. Schmidt: Raum, Zeit, Relativität, Vieweg-Verlag

Jana CACHOVÁ, Katheder Mathematik, PdF UHK, Tschechische Rep.

Ein Lehrer kann auch selbst dazulernen

Abstrakt

Der Beitrag beschäftigt sich mit der Problematik der Lehrerüberzeugung („Beliefs“) und der Möglichkeit ihrer positiven Veränderung durch Selbstreflexion und Reflexion. Er zeigt, wie Lehramtstudenten auf die Reflexion der pädagogischen Praxis reagieren. Der Beitrag behandelt die Frage, ob es möglich ist, die Lehrerüberzeugung („Beliefs“) in konstruktivistische Zutritte und „Investigative Teaching“ zu kultivieren.

With the support of GAČR 406-08-0710

as er arten Mathematiklehrer von den Lehrerkursen

- Vor allem neue Ideen und Anregungen zur Belebung des Unterrichts.

r Mathematiklehrer ist (anhand einer Umfrage)

au tziel des Mathe-Unterrichts	ichtigste om etenzen des Mathe-Lehrers
▪ logisches Denken entwickeln ▪ Probleme lösen (Analyse, Lösung und Synthese) ▪ reale Situationen lösen ▪ lehren, sich im praktischen Leben zu orientieren, Mathematik in der Praxis nutzen ▪ Rechnen fürs Leben lehren ▪ gesunden Verstand benutzen ▪ die Kenntnisse und Fertigkeiten der Schüler erweitern ▪ zur Genauigkeit und Sorgfalt führen ▪ Begriffe und Erkenntnisse sortieren und in Systeme einzuordnen ▪ systematisches Denken lehren ▪ Vorstellungskraft entwickeln ▪ Selbstständigkeit entwickeln	▪ Fachkundigkeit des Lehrers im Bereich Mathematik ▪ Fähigkeit, die Fertigkeiten, das logische Denken und die Vorstellungskraft der Schüler zu entwickeln ▪ Fähigkeit, Aufmerksamkeit zu erregen ▪ Kenntnisse verschiedener Arbeitsmethoden und -Formen ▪ Nutzung vom Anschauungsunterricht ▪ organisatorische Fähigkeiten, Unterrichtskoordination und - Führung ▪ Kenntnisse von Altersbesonderheiten ▪ Fähigkeit, mit Schülern und Eltern zu kommunizieren, zuhören können ▪ mitarbeiten ▪ selbst mit gutem Beispiel vorangehen

Wer einem Manne einen Fisch schenkt, gibt ihm für einen Tag zu essen. Wer ihn das Fischen lehrt, gibt ihm ein Leben lang zu essen. Sprichwort, China

Didaktik-Seminare im ereich Mathematik – eis iele as und ie

- Alle Themen können nicht behandelt werden, die Studenten müssen selbst Wege suchen
- Verschiedene Arbeitsformen und -Methoden müssen am konkreten Lehrstoff gezeigt werden (der mathematische Inhalt ist wichtig – die Mathedidaktik lässt sich nicht auf pädagogisch – didaktische Prinzipien ohne Mathematik beschränken)

LE E E EIM EIGE E U TE I T LE E

- Mit Reflexionen im Mathe-Unterricht beschäftigen sich Tichá, Hošpesová (2008)
- Nach Slavík (2004) oder Nezvalová (2003) kann die Reflexion zusammen mit der Deutung von Lehrsituationen das berufliche Denken des Lehrers entwickeln, mit einer aktiven Forschung in der Schulpraxis wird die didaktische Theorie in der Praxis umgesetzt

DIE STUDE TE LE E AUS A AL SE V SITUATI E DIE SIE I I E P A IS E LE TE Ziel – die Praxis mit der Didaktik verbinden

Aufgabe f r die Studenten (am Semesteranfang Mathe-Didaktik-Übung)

WÄHREND DER PÄDAGOGISCHEN PRAXIS INTERESSANTE SITUATIONEN IN DEN MATHE-STUNDEN BEOBACHTEN

- Die Situationen können die Tätigkeit vom Lehrer, Schüler, von Schülergruppen oder von der ganzen Klasse, den Lehrstoff, nicht herkömmliche Verfahren, Aufgabenlösungen oder Fehler betreffen… einfach alles Interessante aus der Praxis, worüber diskutiert werden kann (die Situationen müssen ein Problem beinhalten, für das es verschiedene Lösungen gibt)
- Die Studenten stellen die Situation zu Beginn des Seminars vor – entweder mit offenen Ende oder mit Auflösung
- Wenn es sich um eine kompliziertere Situation handelt (schwierigeres Problem zum Nachdenken), kriegen die Studenten ca. 3 min. zur selbständigen Analyse – Suche nach richtigen Wegen, richtigem Verhalten und Vorgehen
- Danach diskutieren sie ihre Vorschläge in Gruppen oder mit allen Teilnehmern

Die Studenten fanden meistens mehrere Lösungsvarianten. Sie zeigten Interesse an der Diskussion und erkannten Parallelen zu ihren eigenen Erfahrungen. Das Ziel dieser Aktivität ist die Erhöhung der Sensibilität gegenüber wichtigen Erscheinungen.

eis iel einer Situation

- Die Schüler bekamen ein Arbeitsblatt zur Übung des kleinen Einmaleins (sie sollten die Zahlen 2 bis 7 multiplizieren können). Im Arbeitsblatt waren jedoch auch Aufgaben mit den Zahlen 8 und 9 vorhanden. Die Schüler haben gleich darauf aufmerksam gemacht, dass das Arbeitsblatt auch Rechenaufgaben wie 9•7 oder 8•6 enthalten. Die Lehrerin antwortete, dass es das gleiche sei wie 7•9 und 6•8. Die Schüler gaben sich mit der Antwort zufrieden. Ist es aber richtig, so zu argumentieren? Z. B. 9 Bonbons für je 7 CZK und 7 Bonbons á 9 CZK ist doch ein Unterschied.

AU AS A E DIE STUDE TE V IEGE D GEA TET

<table>
<tr><th colspan="2">– in ezug auf die Sch ler</th></tr>
<tr><th>dagogisch – organisatorische ragen</th><th>ereich der Mathe-Didaktik</th></tr>
<tr><td>▪ Individuelle Unterschiede zwischen den Kindern
▪ Unterschiede im Arbeitstempo
▪ Probleme mit Kindern mit spezifischen Lernstörungen
▪ die Schüler wollen keine auf rechnerischen Fähigkeiten basierende Spiele spielen, bei den sie immer verlieren
▪ ablehnende Einstellung der Schüler (Ablehnung der Teilnahme an Lernaktivitäten), Disziplinlosigkeit der Schüler
▪ unerwartete Reaktionen der Schüler (sie wollen lieber Rechenaufgaben aus dem Lehrbuch lösen, als ein didaktisches Spiel zu spielen)
▪ didaktisches Spiel nicht verstanden</td><td>▪ Schülerfehler
▪ Aufgaben, die Schwierigkeiten bereiteten
▪ Unfähigkeit, eine Aufgabe selbstständig zu lösen; Unfähigkeit nicht standardmäßige Aufgaben zu lösen
▪ Begriffe und Bezüge, die den Kindern Schwierigkeiten bereiteten (Fehler in der Terminologie, Begriff nicht verstanden, Bezug zwischen den Begriffen nicht verstanden)
▪ Mangel an Vorstellungskraft und Erfahrung, Mangel an Modellen
▪ Wenig gefestigte Begriffe
▪ Nutzung eines komplizierteren Verfahrens anstelle einer einfacheren Formel
▪ Formelle Nutzung von Tests
▪ Probleme mit Raumorientierung, Vorstellungskraft</td></tr>
<tr><th colspan="2">– in ezug auf den Lehrer</th></tr>
<tr><th>auf die akult t bezogen</th><th>auf sich selbst bezogen</th></tr>
<tr><td>▪ Fehler des Lehrers
▪ Formelle Erklärung
▪ Der Lehrer schenkt dem Fehler zu wenig Aufmerksamkeit
▪ Nicht standardmäßige Methoden oder Verfahren
▪ Übertragung der Angst vor bestimmtem Lehrstoff auf die Schüler
▪ Formelle - (Korrigieren, Kennzeichnen von Fehlern usw.)

Die Studenten haben in der Praxis vorwiegend auf die positiven Erscheinungen geachtet, zur Analyse haben sie aber eher die negativen Erscheinungen gewählt.</td><td>▪ Eigene Fehler
▪ Mangel an Kompetenz
▪ Unfähigkeit, prompt auf Fehler oder nicht standardmäßiges Vorgehen zu achten
▪ Unzureichende, unklare Anweisungen (Mangel an Verständnis zwischen Lehrer und Schülern – die Schüler raten nur, was von ihnen der Lehrer will)
▪ Suche nach geeignetem Modell
▪ Mnemotechnische Hilfen
▪ Organisatorische Probleme (Problematik der Gruppenbildung für effiziente Arbeit)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Sonstiges</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Unübersichtlichkeit der Arbeitsunterlagen in Lehrbüchern, Fehler, Lehrbuchkritik
▪ Fragen zu Lehrstoffinhalten
▪ Fragen zu Tests und Bewertungen</td></tr>
</table>

Auch Lehrer können über die Situationen aus ihrem Unterricht nachdenken und dann zur zweit, bzw. zu dritt mit den Kollegen über konkrete Situationen diskutieren. Wichtig ist, in der Schule Diskussionspartner zu finden. **Gelingt es effektive Diskussionen zu f hren kann die Lehrer berzeugung sukzessiv in onstruktivismus gelenkt erden**

Die Lehrer berzeugung eliefs ist die kom lexe Einstellung des Lehrers zu den Unterrichtsfragen Sie umfasst

- die angewendeten Unterrichtsansätze
- seine Vorstellungen vom idealen Unterricht
- sein Verhältnis zu den Schülern
- die Mathematik in der psychischen Welt des Lehrers
- die Ziele und Prioritäten im Unterricht usw.

Ein guter Lehrer kann das Gleichgewicht zwischen den Zielen der Schule, den Bedürfnissen des Kindes und den Besonderheiten des Faches finden (mathematische Didaktik). Ich denke, dass solche Art des „guten Unterrichts" den Gedanken des sog. realistischen Konstruktivismus nach F. Kuřina entspricht (Grundgedanken vgl. z. B. Hejný, Kuřina, 2008).

Der „Investigative Teaching" erlaubt die Realisierung des Konstruktivismus in der Praxis (Stehlíková, Cachová 2006):

- Der Lehrer weckt im Schüler das Interesse an der Mathematik und ihrer Entdeckung.
- Der Lehrer bietet den Schülern Anregungen (Aufgaben und Probleme) und arbeitet mit ihnen in geeigneter Art und Weise.
- Dem Lehrer geht es vor allem um die aktive Teilnahme des Schülers.
- Der Lehrer sieht den Fehler des Schülers als ein Bestandteil des Lernens und Verstehens und einen Anstoß für die weitere Arbeit.
- Der Lehrer konzentriert sich bei seinen Schülern eher auf das Verständnis, als auf die Wiedergabe einer Antwort.

Anhand der Analyse der Unterrichtssituationen kann folgendes hinzugefügt werden: ***Der Lehrer*** *reagiert sensibel auf Schulsituationen und denkt über sie nach. Dadurch lernt er dazu.*

Im anregenden Unterricht geht es darum, ein Umfeld zu schaffen, das die Schüler zur aktiven und kreativen Arbeit animiert. Die grundlegende Frage ist die **reativit t des Lehrers**

Literatur

[1] *Hejný, M., Kuřina, F.* – Dítě, škola a matematiky, *Portál, Praha, 2008*

[2] *Nezvalová, D.* – Akční výzkum ve škole, *Pedagogika, 53 (3), 2003*

[3] *Stehlíková, N., Cachová, J.,* - Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe*, In:* Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP, *JČMF, Praha, 2006*

[4] *Slavík, J.* – Profesionální reflexe a interpretace výuky jako prostředník mezi teorií a praxí, *In:* Konference Oborové didaktiky v pregraduálním uč. studiu, *Brno, PdF MUNI, 2004*

[5] *Tichá, M., Hošpesová, A.* – Kvalifikovaná pedagogická reflexe – cesta ke zlepšení kultury vyučování?, In: Cesty zlepšování kultury vyučování matematice, *PdF JU, České Budějovice (2008)*

Dr. Yana CHEBOTOVA, Kharkiv

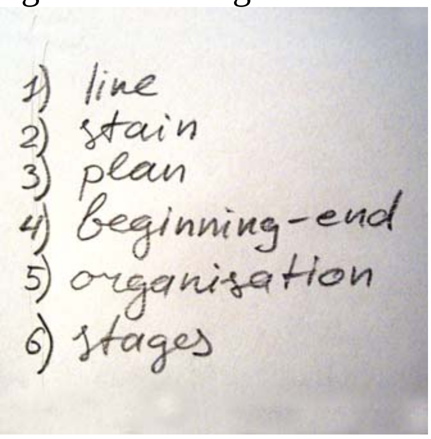
Algorithm of Developing Abstract Thinking

We offer a complex of practical tasks aimed at developing abstract thinking, ability to form ideal images and transform them in the desired direction. The ability to generate ideas on the basis of abstract notions that have no precise visual image is the basis for the development of imagination, spatial reasoning, and intuition. Operating with images on the level of imagination is as activity of complicated structure and difficult realization. The creative imagination uses multitype images. The created graphic composition should describe most completely the complicated abstract notion by synthesizing in itself a few simpler ones. Often, the created image like the theoretical notion includes a lot of elements. Transferring abstract ideas into graphic images, we help generate a new formation using all the personality's higher functions.

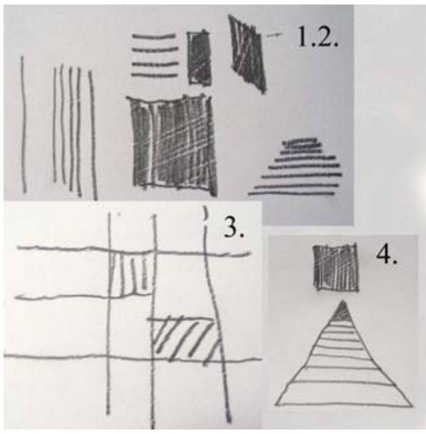
The source material (notion) for the work with the students should not contain familiar pictures (i.e. objects, colors, phenomena). The ideas are visualized in drawings, without using colors. The offered method is aimed at developing abstract thinking through drawing pictures. The students are suggested to make an image of a phenomenon or an idea which do not have a familiar visual symbol. As an example, philosophic notion – analysis, synthesis, theory; feelings – laughter, passion, uncertainty etc. can be taken. This task seems to be easy, but only at first glance. It can turn out to be quite difficult for persons with poorly developed imaginary and spatial reasoning. In such cases the teacher should suggest a special algorithm of actions furthering the work of imagination.

This algorithm consists of a few stages.

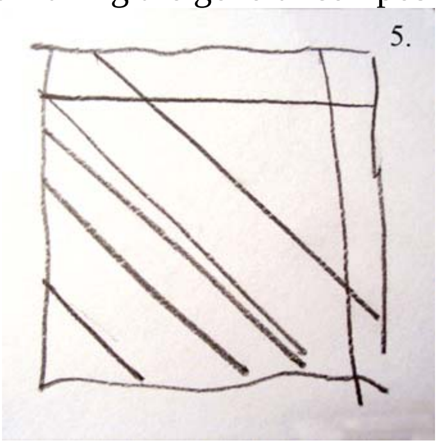
The first stage. A list of associations is made characterizing this notion from different sides using familiar images.



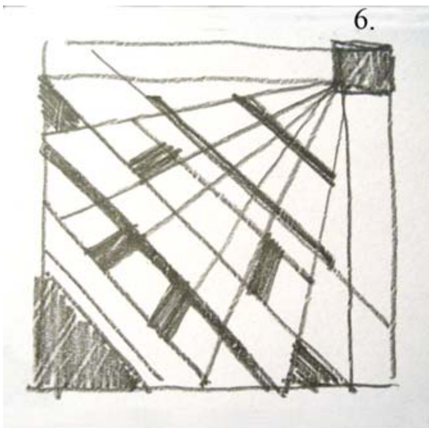
The second stage. A visualization is found for the associations in the form of schematic sketches.

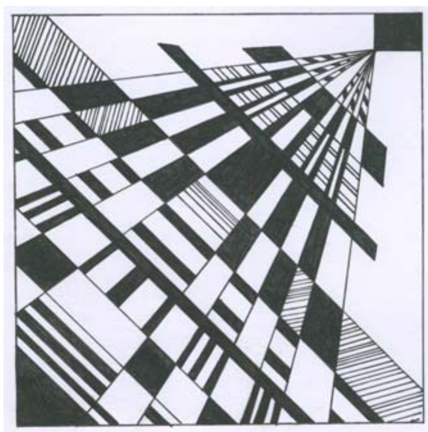


The third stage. The images are united into a structure containing a lot of simple characteristics of a complicated notion. The most capacious of them are the basic ones making the general composition structure.

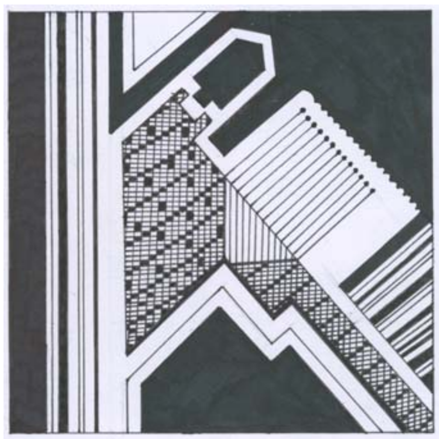


The fourth stage. Details (i.e. small elements) are added to the general composition structure which gives more detailed characteristic of the basic notion

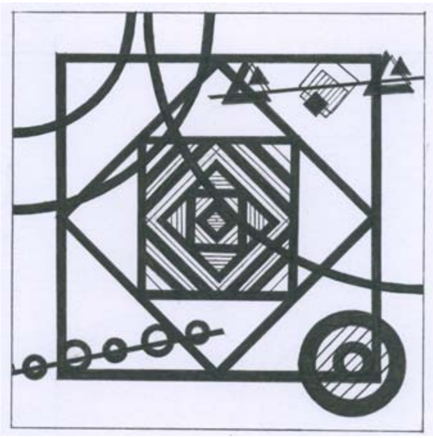




In the end of task the teacher can complicate the students' work and recommend coloring the composition. Depending on the students' emotional state the color gamut can be warm, cold or mixed.
For those students who cope with these tasks the teacher can suggest changing the created image under effect of imaginary circumstances. For example, the project is made more complicated (optimized) or, on the contrary, simplified.
The criteria of successful coping with the task is richness in details (their number), expressiveness of the general structure of the composition and its comprehensibility for detached onlookers. Neither the level of graphic competence nor implementation accuracy is evaluated.
While fulfilling such tasks, the students of mathematical subjects acquire certain habits in forming pictures in their imagination. These images are generalized and can be transformed and have tendencies to complication. It easies intellectual work with symbols and gives an active impulse to developing abstract thinking. Also the students learn the specific algorithm which simplifies first steps in their work with imaginary structures and gives certainty in successful implementation of the whole educational program.
Fulfilling the suggested tasks is useful for the students studying both mathematics and arts.

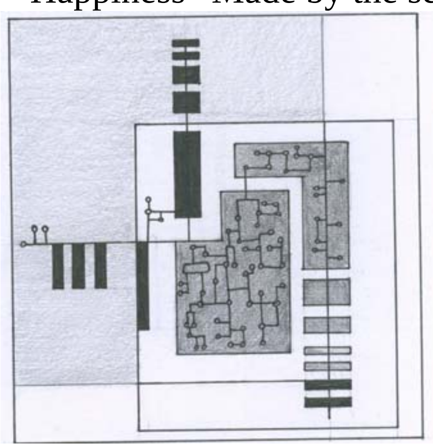


-"Statistics". Made by the second year student Seleznyov D.O.
- "Matrix". Made by the second year student Seleznyov D.O.



- “The project”. Made by the second year student
Lesovskaya Tatyana.
- “Project” Made by the first year student
Gopanchyk E.O.

-“Laughter” Made by the first year student Brik J.
-“Happiness” Made by the second year student Petrova J.



-“Analyse” Made by the second year student Timchenko A.

Christina COLLET, Regina BRUDER, Technische Universität Darmstadt

Langzeitstudie zu einer Lehrerfortbildung zum Problemlösen in Verbindung mit Selbstregulation

Der Vortrag gibt einen Überblick über ein einjähriges Projekt, in dem eine Lehrerfortbildung mit einem materialgestützten Unterrichtskonzept zum Erlernen von Problemlösen in Verbindung mit Selbstregulation im regulären Mathematikunterricht der Sekundarstufe I durchgeführt wurde. Die Ergebnisse der zugrunde liegenden Studie zeigen insbesondere Leistungssteigerungen der Schüler im Problemlösen während des Projektjahres. Im Fokus des Vortrages steht eine Follow-up-Untersuchung mit 10 teilnehmenden Klassen, die ein Jahr nach Ende des Projektes durchgeführt wurde.

Eine Förderung von Problemlösekompetenzen im Mathematikunterricht wird national und international als wichtig erachtet. Seit den 80er Jahren gibt es in der Mathematikdidaktik ein breites Spektrum an Ideen zum Fördern von Problemlösen (vgl. Törner et al., 2007). Viele dieser Überlegungen basieren auf Polyas vierstufigem Phasenmodell als Anleitung zum Lösen von Problemen. Die zum Problemlösen durchgeführten Studien bestätigen, dass Problemlösen durch Trainingsprogramme gefördert werden kann (vgl. z.B. Gürtler et al., 2002). Forschungsdesiderate zeigen sich in folgender Hinsicht:

- es fehlt derzeit an größeren Schülerstichproben mit empirisch erprobten Förderkonzepten zum Problemlösen (vgl. Heinze, 2007),
- Studien, die sowohl Effekte bei den beteiligten Lehrkräften und den Schülern untersuchen, gibt es kaum (vgl. Fishman et al., 2003).

Unsere Studie im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms BIQUA 2000-2006 hat diese Forschungsdesiderate aufgegriffen. In dieser Studie mit 48 beteiligten Lehrkräften (49 Schulklassen) wurden sowohl Effekte auf Schülerseite als auch bei den Lehrkräften mit quantitativen und qualitativen Methoden untersucht (vgl. Komorek et al, 2006). Das entwickelte und der Studie zugrunde liegende materialgestützte Unterrichtskonzept zum Problemlösenlernen in Verbindung mit Selbstregulation integriert Polyas vierstufiges Modell, ein Konzept zur langfristigen Förderung von Problemlösen im Mathematikunterricht von Bruder (2003) und das Prozessmodell zum selbstregulierten Lernen von Schmitz (2001). Aufbauend auf diesen theoretischen Grundlagen und den empirischen Befunden wurden bisherige Modelle zum selbstregulierten Problemlösen zu einem Prozessmodell zur selbstregulierten Bearbeitung mathematischer Probleme weiterentwickelt (vgl. Abbildung 1). Das entwickelte Prozessmodell stellt eine organische Verbindung von Problemlösen und Selbstregulation unter lerntheoretischen Aspekten her. Im Modell werden in Anlehnung an Schmitz (2001) drei Phasen unterschieden: vor, während und nach der selbstregulierten Problembearbeitung. Nach den Modellannahmen wirken die Variablen der präaktionalen Phase über die der aktionalen Phase auf die Variablen der postaktionalen Phase, welche die Variablen der präaktionalen Phase in einer folgenden selbstregulierten Problemlöseeinheit beeinflussen können. Bezogen auf den Problemlöseprozess werden drei wesentliche Phasen selbstregulierten Problemlösens unterschieden: Analyse- und Planungsphase, Ausführungsphase und Kontrollphase. Sie gehen fließend ineinander über, laufen unterschiedlich bewusst ab und zwischen ihnen können Rückkopplungen bestehen, die durch Pfeile gekennzeichnet sind. Aufgrund der strukturellen Ähnlichkeit zum Problemlösen und zum Modellieren werden die Phasen des Problemlösens mit wesentlichen Modellierungsphasen in Verbindung gebracht. Aspekte der Selbstregulation werden dagegen beim Modellieren selten berücksichtigt. Das entwickelte Prozessmodell wird im Vortrag zusammen mit ausgewählten Ergebnissen einer Langzeitstudie zum Problemlösen vorgestellt.

Die Ergebnisse der über drei Messzeitpunkte studierten Problemlösefähigkeit der 170 Schüler zeigen folgendes Bild: Die Schüler verbessern ihre Leistungen signifikant während des Projektjahres. Unterschiede mit Bezug auf den Fortbildungsinhalt der Lehrkräfte ließen sich während des Projektjahres nicht nachweisen, d.h. alle Gruppen (PL, PS, SR) entwickeln sich gleich stark und zeigen deutliche Leistungsentwicklungen. Signifikante Leistungsverbesserungen zeigen sich auch in der Follow-up-Untersuchung. Hierbei erzielen die Schüler, deren Lehrer im Projektjahr bezüglich Problemlösen und Selbstregulation (PS) fortgebildet wurden, die höchsten Zuwächse vom Nachtest zur Follow-up-Untersuchung.

In einem Vergleich der Leistungsergebnisse der Schüler zum Ende des 8. Schuljahres wird deutlich, dass die Schüler, die in der 7. Klasse nach dem Unterrichtskonzept unterrichtet wurden, am Ende des 8. Schuljahres vergleichbare bzw. höhere Leistungen aufweisen als die Schüler der 8. Klassen, die während des 8. Schuljahres danach unterrichtet wurden.

Insgesamt können mit dem entwickelten Unterrichtskonzept Lehrerkompetenzen bezüglich relevanter Aspekte beim Problemlösen

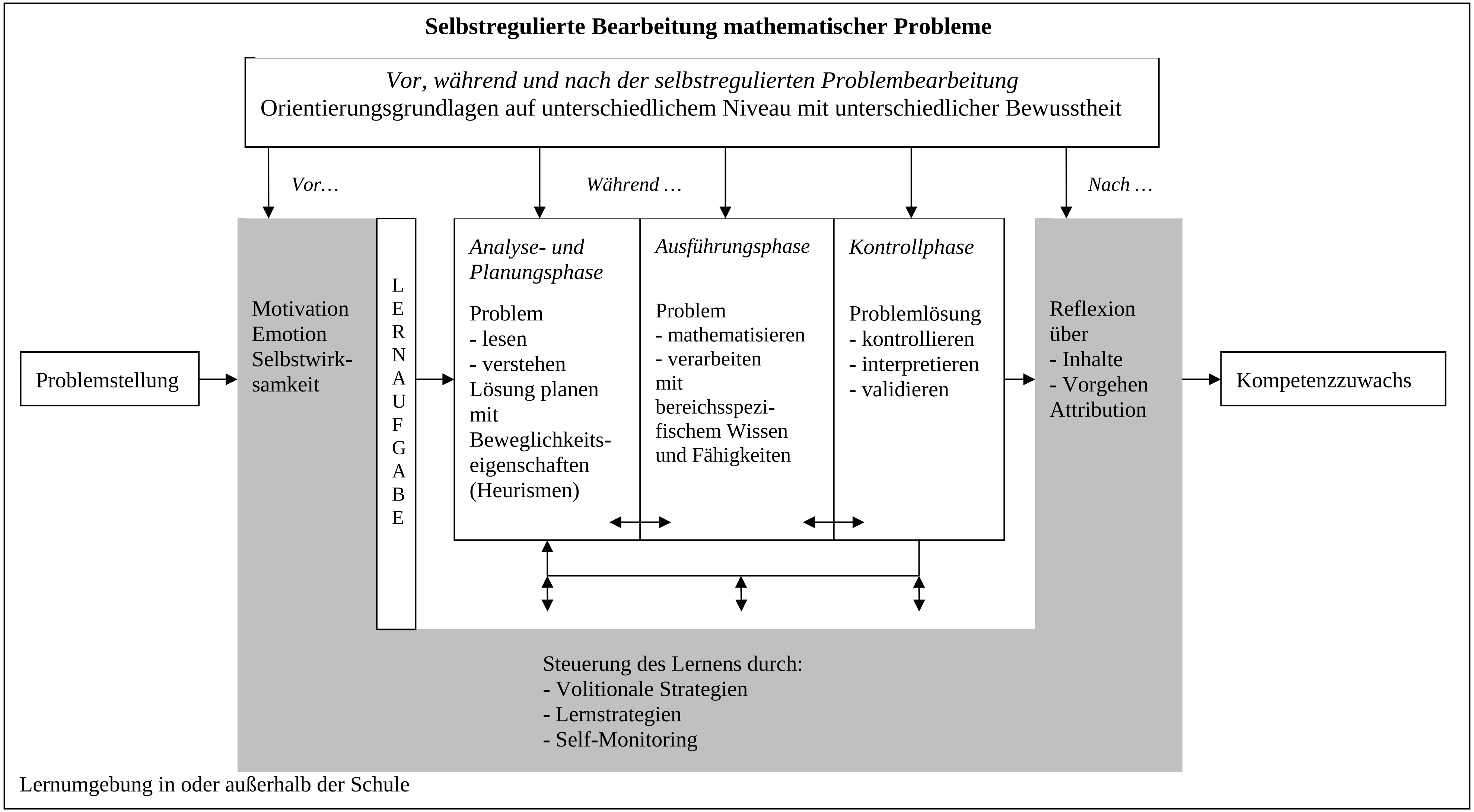


Abb. 1: Prozessmodell selbstregulierten mathematischen Problemlösens

bereichert und Problemlösekompetenzen bei Schülern verbessert werden. Die Ergebnisse der Follow-up-Untersuchung bestätigen eine Stabilität in der Problemlösefähigkeit der Schüler. Dieses Ergebnis zusammen mit den Ergebnissen der Hauptstudie (vgl. Komorek et al., 2006) können als Erfolg der Lehrerfortbildung und des Unterrichtskonzepts gewertet werden.

Literatur

Bruder, R. (2003): Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Material im Rahmen des BLK-Programms „Sinus“. Kiel: IPN.

Collet, C., Bruder, R. & Komorek, E. (2007): Self-Monitoring durch Stundenberichte zur Unterstützung der Implementation eines Unterrichtskonzepts. In: Greefrath, G. & Stein, M. (Hrsg.): Problemlöse- und Modellbildungsprozesse bei Schülerinnen und Schülern. Münster: WTM-Verlag, S. 1-17.

Fishman, B. J., Marx, R. W., Best, S. & Tal, R. T. (2003): Linking teacher and student learning to improve professional development in systemic reform. In: Teaching and Teacher Education, 19, S. 643-658.

Gürtler, T., Perels, F., Schmitz, B. & Bruder, R. (2002): Training zur Förderung selbstregulativer Fähigkeiten in Kombination mit Problemlösen in Mathematik. In: Zeitschrift für Pädagogik, 45. Beiheft, Weinheim und Basel: Beltz, S. 222-239.

Heinze, A. (2007): Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. Modelle und Unterrichtskonzepte aus kognitionstheoretischer Perspektive. In: Journal für Didaktik Mathematik (JDM), 28, Heft 1, S. 3-30.

Komorek, E., Bruder, R., Collet, C. & Schmitz, B. (2006): Inhalte und Ergebnisse einer Intervention im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I mit einem Unterrichtskonzept zur Förderung mathematischen Problemlösens und von Selbstregualtionskompetenzen. In: Prenzel, M. & Allolio-Näcke, L. (Hrsg.): Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms. Münster: Waxmann, S. 240-267.

Schmitz, B. (2001): Self-Monitoring zur Unterstützung des Transfers einer Schulung in Selbstregulation für Studierende. In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 15, S. 181-196.

Törner, G., Schoenfeld, A. & Reiss, K. (Hrsg.) (2007): Problem solving around the word: summing up the state of the art. In: ZDM, 39(5/6). Berlin, Heidelberg: Springer.

Ervin DEÁK, Budapest

Ein neuer - didaktisch fundierter - Begriff der Verhältnisgleichheit von Streckenpaaren

0.1 Dieser Begriff ist mit derselben geometrischen Grundkonfiguration verbunden wie die Strahlensätze und leistet auch dasselbe. (Z. B. kann die übliche Ähnlichkeitslehre in gewohnter Weise entwickelt werden.) Während aber die Strahlensätze die reellen Zahlen voraussetzen, liegen unser Begriff und der entsprechende Fundamentalsatz vollständig im Bereich der reinen Kongruenzgeometrie und bereiten der Entwicklung des reellen Zahlkörpers und der Maßgeometrie einen anregungsvollen Weg im Sinne eines konstruktiv-genetischen Aufbaus dieser Disziplinen. – Es handelt sich um einen integrierenden Bestandteil einer umfassenden Neugestaltung verschiedener Gebiete der Schulmathematik auf der Grundlage einer als „fundamentale Idee” fungierenden einheitlichen, allgemeinen Idee des Messens.

1.1 (a) Grundbegriffe des „Messens” im Bereich der Strecken. Wir unterscheiden vier Allgemeinheits-Stufen des elementaren Messens. (Im Diagramm der Abb. 1 zeigen die Pfeile jeweils in die Richtung zunehmender Allgemeinheit.) Das *„<u>Messen</u>* einer Strecke *g* mit einer Strecke *h*” bedeutet

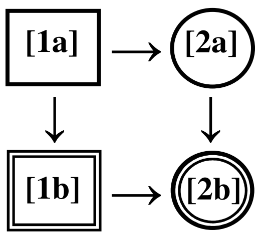


Abb. 1

[1a] die Gleichung $g = q \cdot h$ mit $q \in \mathbb{N}$,

[1b] die Gleichung $g = q \cdot \frac{h}{n}$ mit $q, n \in \mathbb{N}$,

[2a] die Division mit Rest (im weiteren DmR) $g = q \cdot h + r$, $q \in \mathbb{N}$,

[2b] die DmR $g = q \cdot \frac{h}{n} + r$, $q, n \in \mathbb{N}$ und r eine Strecke kleiner als h.

(b) Existiert die Division [1a] oder eine der Divisionen [1b], so ist dadurch das Verhältnis der Strecke *g* zur Strecke *h* vollständig erfasst. Mehrere Messungen vom Typ [2b] mit verschiedenen Werten $n_1, n_2, ..., n_k$ können durch eine einzige [2b]-Messung für ein $n \in \mathbb{N}$ ersetzt werden, so dass aus dem zugehörigen Quotienten sämtliche Quotienten rekonstruierbar sind, die zu diesen Werten n_i gehören; für *n* eignet sich z. B. das k.g.V. der Zahlen) $n_1, n_2, ..., n_k$.

(c) Mit einer noch so großen, aber *endlichen* Anzahl von [2b]-Messungen kommen wir also nicht über den Wirkungsgrad einer einzigen Messung hinaus. Die entscheidende Wendung auf dem Weg zur Maßgeometrie und überhaupt zum reellen Zahlkörper bildet aber die Vorstellung, eine *unendliche* Folge von Messungen dieses Typs für $n_1, n_2, ...$ durchzuführen.

1.2 Wir formulieren in diesem Sinne vier – formal verschiedene – Definitionen der <u>*Streckenverhältnisgleichheit*</u> (im Weiteren SVG) zweier Streckenpaare $(a;a')$ und $(b;b')$. Diese Definitionen sind auf Messungen der Art [2b] gegründet.

(V1) *Die Quotienten beim Messen von* a' *mit* $\frac{a}{n}$ *und von* b' *mit* $\frac{b}{n}$ *stimmen überein für* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(V2) *Für jede streng monoton wachsende Folge* $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ *von nichtnegativen ganzen Zahlen, stimmen die Quotienten beim Messen von* a' *mit* $\frac{a}{n_k}$ *und von* b' *mit* $\frac{b}{n_k}$ *für jedes* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *überein.*

(V3) *Die Quotienten beim Messen von* a' *mit* $\frac{a}{10^n}$ *und von* b' *mit* $\frac{b}{10^n}$ *stimmen überein für* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(V4) *Es gibt eine streng monoton wachsende Folge* $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ *von nichtnegativen ganzen Zahlen, sodass die Quotienten beim Messen von* a' *mit* $\frac{a}{n_k}$ *und von* b' *mit* $\frac{b}{n_k}$ *für jedes* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *übereinstimmen.*

((V3) ist eine Formulierung des Prinzips der üblichen – dem Zehnersystem angepassten – zahlenmäßigen Streckenmessung in der – auf dem reellen Zahlkörper aufgebauten – Maßgeometrie.)

1.3 Offenbar gelten die Implikationen $(V1) \Leftrightarrow (V2) \Rightarrow (V3) \Rightarrow (V4)$, es gilt aber auch $(V1) \Leftrightarrow (V2) \Leftrightarrow (V3) \Leftrightarrow (V4)$.

Zum BEWEIS würde es genügen zu zeigen, dass $(V4) \Rightarrow (V1)$. Statt dessen schieben wir zwischen (V4) und (V1) die folgende Aussage ein:

(G) *In jeder geometrischen Konfiguration wie in Abb. 2 (φ ein beliebiger Winkel zwischen* 0° *und* 180°*) verlaufen die Sekanten AB und* $A'B'$ *parallel.*

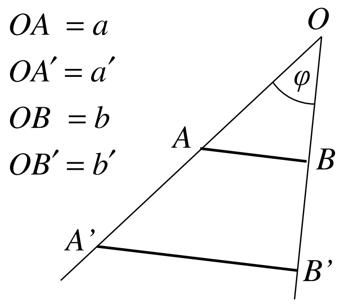


Abb. 2

(Durch das Einfügen von (G) in den Komplex der „eindimensionalen" Ausagen (V1) – (V4) erstreckt sich die ganze Problematik auf das „zweidimenionale" Problemfeld der Ähnlichkeit in der Ebene. Neben der Erweiterung der gewöhnlichsten Messungsidee auf unendliche Messungsalgorithmen bildet hier (G) den wichtigsten Motivations-Ausgangspunkt zur Proportionenehre.) $(G) \Rightarrow (V1)$ und $(V4) \Rightarrow (G)$ können sehr leicht und anschaulich bewiesen werden.

2.1 *Über einen Erfahrungshintergrund der Äquivalenz* (V1)$\Leftrightarrow$(G) *und über einen Aspekt der hier verfolgten strategischen Linie.*

(a) Der neue Begriff (V1) und seine Varianten (Abschwächungen) brauchen nicht ganz unerwartet über den Lernenden hereinzubrechen. Die Parallelität der Sekanten erscheint nämlich sehr leicht im Spezialfall, dass

1. sowohl a, a' als auch b, b' kommensurabel sind, also in einem rationalen Verhältnis stehen

2. und obendrein diese beiden Verhältnisse gleich sind.

(1. und 2. zusammen bedeuten, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass sowohl a' durch $\frac{a}{n}$ als auch b' durch $\frac{b}{n}$ restlos teilbar sind und die beiden Quotienten übereinstimmen).

Aus $A'B' \| AB$ folgt dann leicht, dass für *jedes* $n \in \mathbb{N}$ der Quotient beim Messen von a' mit $\frac{a}{n}$ derselbe ist wie beim Messen von b' mit $\frac{b}{n}$. (Allerdings kann dabei auch ein Rest auftreten (u. zw. für jedes n entweder in keiner dieser Messungen oder in beiden).

(b) Dieser Spezialfall unserer geometrischen Problematik ist das Abbild einer allgemeingültigen arithmetischer Gesetzmäßigkeit im Bereich der positiven rationalen Zahlen (wo ja zwei beliebige Elemente „kommensurabel" sind und daher das Analogon der Bedingung 1. gegenstandslos wäre):

Sind $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ *und* $a' = \frac{p}{q} \cdot a$, $b' = \frac{p}{q} \cdot b$, *so gilt für jedes Paar* $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m \cdot \frac{a}{n} \leq a' < (m+1) \cdot \frac{a}{n} \Leftrightarrow m \cdot \frac{b}{n} \leq b' < (m+1) \cdot \frac{b}{n}.$$

(Unter der angegebenen Bedingung sind ja beide doppelten Ungleichungen zu $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} < \frac{m+1}{n}$ äquivalent.) Aus dieser arithmetischen Tatsache folgt nun die eingeschränkte geometrische Tatsache unter (a) ganz natürlich: $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} < \frac{m+1}{n}$ ist nämlich gleichwertig sowohl mit $m \cdot \frac{a}{n} \leq a' < (m+1) \cdot \frac{a}{n}$ als auch mit $m \cdot \frac{b}{n} \leq b' < (m+1) \cdot \frac{b}{n}$, wenn a, a', b und b' Strecken mit $a' = \frac{p}{q} \cdot a$ und $b' = \frac{p}{q} \cdot b$ sind.

(c) In der Geometrie bedeutet aber die Kommensurabilitätsforderung für das Streckenpaar (a, a') und für das Streckenpaar (b, b') eine echte Einschränkung, während in der $\mathbb{Q}$-Arithmetik die analoge Forderung nichts sagend wäre.

2.2 Die allgemeine Äquivalenz (V1)$\Leftrightarrow$(G) stellt also eine echte Erweiterung der auf die rationalen Zahlen zurückführbaren eingeschränkten geometrischen Tatsache unter 2.1(a) dar, und auf dieser Erweiterung kann eine allgemeine geometrische Proportionenlehre aufgebaut werden. Allerdings wird dabei die Zahlenmäßigkeit eingebüßt. Darin liegt aber ein Motiv für die Erweiterung des rationalen Zahlkörpers zum reellen Zahlkörper, um die verlorene Harmonie von Geometrie und „Arithmetik" – auf einer höheren begrifflichen Ebene – wiederherzustellen und so zu einer echten „Maßgeometrie" zu gelangen.

2.3 (a) Von (V1) bzw. (V3) führt ein verzweigtes System von Wegen zum „zahlenmäßigen Messen" (besser: zur „zahlenmäßigen" Deutung) von Streckenverhältnissen.
(b) Der Begriff (V1) induziert unmittelbar den Gedanken, wie neben die Streckenverhältnis*gleichheit* eine Größer-Relation gestellt werden kann: „Das Verhältnis von von b' zu b ist größer als jenes von a' zu a, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass beim Messen von a' mit $\frac{a}{n}$ und von b' mit $\frac{b}{n}$ $(n = 1, 2, ...)$ der Quotient bei dem Paar (b', b) größer ist." (Geometrisch entspricht dem die Art der Nichtparallelität von $A'B'$ und AB in Abb. 3 , woraus auch erhellt, dass das Verhältnis von von b' zu b nicht größer und zugleich kleiner als jenes von a' zu a sein kann.)

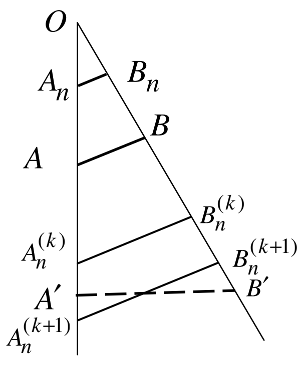
$OA = a$

$OA' = a'$

$OA_n = \frac{a}{n}$

$OA_n^{(k)} = k \cdot \frac{a}{n}$

$OA_n^{(k+1)} = (k+1) \cdot \frac{a}{n}$



$OB = b$

$OB' = b'$

$OB_n = \frac{b}{n}$

$OB_n^{(k)} = k \cdot \frac{B}{n}$

$OB_n^{(k+1)} = (k+1) \cdot \frac{b}{n}$

Abb. 3

3.1 (a) Von (V3) ausgehend führt dieses Prinzip zum üblichen Verfahren des Vergleichs von Streckenpaaren. Zu jedem geordneten Streckenpaar gehört nämlich eindeutig ein unendlicher Dezimalbruch – womit der entscheidende Schritt zum zahlenmäßigen Messen einer Strecke mit einer anderen Strecke getan ist –, und der Vergleich von Streckenpaaren beruht auf der üblichen (lexikographischen) Ordnung der unendlichen Dezimalbrüche.

Anita DORFMAYR, Wien

Vom Duplikat zum Original - Das didaktische Potenzial von Hintergrundbildern

Abstract: Einige neue Medien (z.B. GeoGebra) erlauben das Plotten von Funktionsgrafen auf Hintergrundbildern. Das didaktische Potenzial dieses Features ist breit gefächert. Neben dem darstellend-interpretierenden Arbeiten, dem Übersetzen von Zuständen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik, kann auch ein schöpferisch-kreativer Aspekt der Mathematik geweckt werden.

Neben allgemeinen didaktischen Überlegungen wird im Beitrag das Unterrichtsprojekt "Vom Duplikat zum Original" vorgestellt. Schüler lernen dabei, Bilder und Fotos mit Hilfe von Funktionsgrafen zu duplizieren und anschließend eigene Grafiken zu gestalten. Die Ergebnisse dieses Projektes lassen eine hohe Nachhaltigkeit des Erlernten vermuten.

1. Der österreichische Lehrplan

Das Thema Funktionen wird laut Lehrplan eines österreichischen Gymnasiums [3] von der 8. bis zur 12. Schulstufe behandelt. Die Schüler sollen Funktionen als eindeutige Zuordnungen kennen lernen, die als Graf, Term oder Tabelle dargestellt werden können, sowie mit verschiedenen Funktionsklassen arbeiten. Bei der Differential- und Integralrechnung stehen die Grundvorstellungen des Tangentenanstiegs und der Flächeninhaltsfunktion im Vordergrund. In Klassen mit mathematischem Schwerpunkt werden auch Themen wie Interpolation und numerische Integration behandelt.

Experimentell-heuristisches Arbeiten (zielgerichtetes Suchen nach Gesetzmäßigkeiten, Variieren von Parametern) ist ebenso zu trainieren wie darstellend-interpretierendes Arbeiten (Übersetzen von Zuständen in die Sprache der Mathematik, Wechsel von Darstellungsformen). Auch der schöpferisch-kreative Aspekt darf im Mathematikunterricht nicht zu kurz kommen. Die Schüler sollen zum selbsttätigen Arbeiten, Recherchieren, Dokumentieren, Argumentieren und Begründen angeleitet werden. Projektorientierter Unterricht, sowie der Einsatz neuer Medien sind ebenso vorgesehen wie die individuelle Förderung der Schüler.

Im Hinblick auf die geringe Anzahl an Unterrichtsstunden kommt die Gesamtheit dieser Forderungen einer Quadratur des Kreises gleich. Das im folgenden vorgestellte Projekt stellt einen Versuch dar, möglichst vielen dieser Forderungen des Lehrplans gerecht zu werden, und den Mathematikunterricht für die Schüler gleichzeitig spannend und lehrreich zu gestalten.

2. Projekt: Vom Duplikat zum Original

Bärbel Barzel präsentierte Schülern Screenshots wie in Abb. 1 und forderte sie auf, diese Bilder auf ihren Taschencomputern zu erzeugen [1, 2]. Bei der Vorlage, wie beim Ergebnis stehen Funktionsgrafen im Vordergrund. Es handelt sich daher um eine vorwiegend innermathematische Aufgabenstellung.

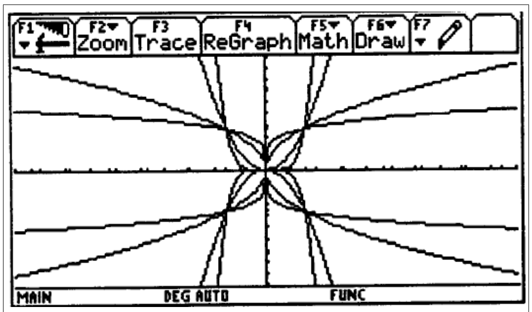


Abb. 1: Muster – Vorlage von B. Barzel

Neue Technologien wie GeoGebra erlauben das Einbinden von Hintergrundbildern und legen eine Weiterentwicklung von Barzels Idee nahe. Wir können Fotos als Vorlagen verwenden und die Schüler zum Verwenden stückweise definierter Funktionen anleiten. Spätestens wenn vom Schüler selbst erstellte Fotos verwendet werden, kann damit auch die Kreativität und Individualität der Schüler gefördert werden.

Projektidee und -ablauf

Ausgehend von dieser Idee wurde ein Projekt konzipiert und durchgeführt. Zuerst werden den Schülern Bilder vorgegeben, die sie mit Hilfe von Funktionsgrafen nachbauen – duplizieren – sollten. In einem Fotoworkshop sollen die Schüler dann an Hand selbst erstellter digitaler Fotos das Erlernte trainieren. Die Auswahl der Motive wird dabei den Schülern überlassen. Dies ermöglicht leistungs-differenziertes Unterrichten und fördert die Individualität und Kreativität der Schüler. Den Abschluss des Projektes stellt der Schritt vom Duplikat zum Original dar. Die Schüler entwerfen eigene Motive, zB. Firmenlogos, und modellieren sie mit Funktionsgrafen.

Das Projekt begleitet Schüler von der 8. bis zur 12. Schulstufe, wobei pro Jahr etwa vier Unterrichtsstunden vorgesehen sind: Von der 8. bis zur 10. Schulstufe stehen das Variieren von Parametern und das Modellieren mit verschiedenen Funktionsklassen und stückweise definierten Funktionen im Vordergrund. In der 10. oder 11. Schulstufe sollen die Kenntnisse im Rahmen des Fotoworkshops kreativ wiederholt und gefestigt werden. In der 11. und 12. Schulstufe können darauf aufbauend Fragen zur Differential- und Integralrechnung, v.a. Fragen zum Tangentenanstieg der (näherungsweisen) Bestimmung von Flächeninhalten, behandelt werden [5].

Schon vor Projektstart sollten die Schüler Funktionen als Term und Graf darstellen und interpretieren können, sowie grundlegende Erfahrungen mit Modellierungsaufgaben haben. Von Vorteil wären Grundkenntnisse in der Bedienung von GeoGebra, das Arbeiten mit Schiebereglern und Erfahrung mit eigenverantwortlichem Arbeiten.

Exemplarische Aufgabenstellung mit Schülerlösung: Düne

Vorlage:

Bild aus Abbildung 2 als Datei

Aufgabenstellung:

1. Modellieren der Dünen in GeoGebra
2. Erstellen einer Anleitung zum Nachzeichnen
   Jeder Schüler soll an Hand dieser Anleitung das Bild auch ohne Vorlage identisch in GeoGebra duplizieren können.
3. Erweiterung: Verwendung stückweise definierter Funktionen

Abb. 2: Düne [xxx]

Abbildungen 3 und 4 zeigen die Ergebnisse eines Schülers mit und ohne Verwendung stückweise definierter Funktionen. Er hat verschiedene Funktionstypen verwendet (Abbildung 2), war jedoch mit den „spitzen Übergängen", die in Abbildung 4 gut erkennbar sind, nur wenig zufrieden. Dieser Schüler beschäftigte sich im Anschluss daran (freiwillig) intensiv mit Differentialrechnung, um das Ergebnis zu verbessern[1].

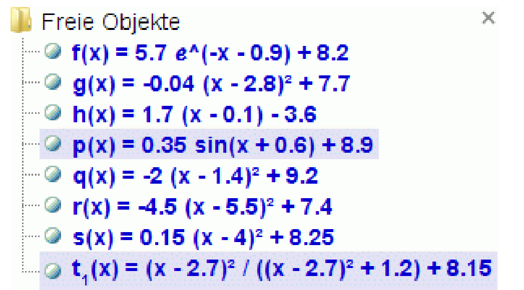


Abb. 3: Verwendete Funktionen - GeoGebra-Screenshot, Algebra Fenster

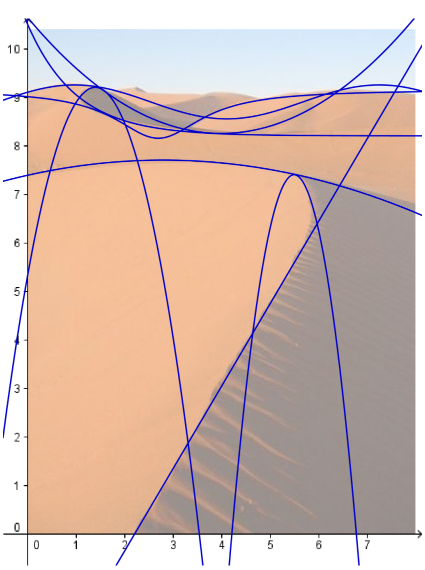


Abb. 4: Ergebnis ohne stückweise definierte Funktionen

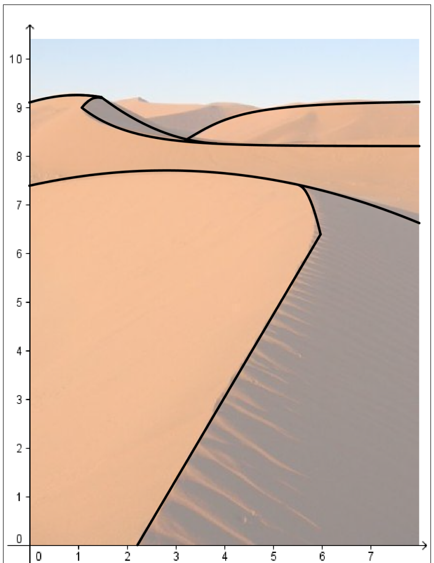


Abb. 5: Ergebnis mit stückweise definierten Funktionen

[1]Zum Zeitpunkt des Vortrags arbeitete der Schüler noch an dieser Verbesserung.

Weiterführende Aufgabenstellungen

Im Rahmen der Differentialrechnung modellieren die Schüler den Bogen von St. Louis. Dabei sind auf maßstabsgetreue Skalierung der Koordinatenachsen zu achten und die Richtung der Fundamente zu bestimmen. [4]

Eine Aufgabe zum Thema (numerische) Integration kann schon vor der Einführung der Integralrechnung bearbeitet werden. Dabei sind die Grenzen eines an einem Flussufer liegenden Grundstücks zu modellieren und sein Flächeninhalt (näherungsweise) zu bestimmen. So sollen Schüler selbstständig Methoden zur numerischen Integration erarbeiten. [4] Im Zusammenhang mit einer möglichst guten Modellierung der Grundstücksgrenzen können auch Methoden zur Interpolation eingeführt werden. [5]

Verschiedene weitere Aufgabenstellungen und exemplarische Lösungen von Schülern werden bei [5] präsentiert.

3. Ergebnisse

Das Projekt läuft derzeit in einer 11. Schulstufe. Die Schüler sind gerade mit dem Höhepunkt des Projektes, dem Fotoworkshop, beschäftigt.

Die Bedienung von GeoGebra stellte von Anfang an keine Probleme dar. Die Schüler experimentierten schon ab der 9. Schulstufe ohne Aufforderung des Lehrers mit der Verknüpfung von Funktionen, zB. mit Beträgen von trigonometrischen Funktionen. Die Kompetenzen der Schüler im Bereich des Modellierens mit Funktionsgrafen sind mittlerweile recht groß. Sie verwenden stückweise definierte Funktionen selbstverständlich und variieren Parameter zielgerichtet. Besonders gut ist der Unterschied zwischen Funktionsgraf und Kurve klar geworden. Die Schüler sind hoch motiviert und investieren viel Zeit darin, möglichst „glatte Verknüpfungen“ zwischen Funktionsgrafen zu erzielen. Dafür werden Methoden der Differentialrechnung als hilfreich erkannt und gern verwendet. Das oberste Ziel ist Motivation genug: Ein „schönes“ Ergebnis, dessen Motiv auch ohne Hintergrundbild erkennbar ist.

Literatur

[1] BARZEL Bärbel: Ich bin eine Funktion, in: Mathematik Lehren Heft 98, Friedrich Verlag Seelze 2000 S.39f.

[2] BARZEL Bärbel: Bilder schaffen mit Graphen, in: Mathematik Lehren Heft 102, Friedrich Verlag Seelze 2001, S.12-15.

[3] Österreichischer Lehrplan für die AHS: http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/Lehrplaene_der_Allgemein2102.xml [30.01.2008]

[4] Medienvielfalt im Mathematikunterricht, 2005-2006 http://www.austromath.at/medienvielfalt [30.01.2008]

[5] DORFMAYR Anita: http://www.dorfmayr.org/Materialien/ [30.01.2008]

Carola EHRET, Pädagogische Hochschule Freiburg

Schreiben im Mathematikunterricht der Hauptschule

Einführung

Zum Schreiben im Mathematikunterricht gibt es, insbesondere im englischsprachigen Raum (z.B. Waywood (1992)), bereits zahlreiche Arbeiten. Zu den bekanntesten deutschsprachigen Vertretern zählen Gallin und Ruf (2005) mit den Reisetagebüchern, die Eigenproduktionen von Selter (1994) oder auch die Themenstudie von Kuntze (2005) so wie die Forschungshefte nach Hußmann (2003).

Obwohl am Rande immer wieder auf schwächere Lernende eingegangen wird entstammen die hier exemplarisch genannten Arbeiten schwerpunktmäßig dem Primar- oder dem Gymnasialbereich. Fast ganz brach liegt das Feld der Hauptschule. Einigkeit herrscht sowohl darüber, dass gerade in diesem Bereich unseres Bildungssystems die größten Mängel und Defizite hinsichtlich der Sprachkompetenz vorhanden sind, aber auch darüber, dass allgemeine mathematische Kompetenzbereiche wie das Modellieren zu den zentralen Bereichen des Mathematikunterrichts gehören und ohne Sprache nicht adäquat umsetzbar sind. Demnach liegt auf der Hand, dass gerade die SchülerInnen der Hauptschule hier eine besondere Förderung benötigen. Dies war der Anlass für die Analyse und Erkundung des Themas „Schreiben im Mathematikunterricht in der Hauptschule“ (Ehret 2007).

Schreibanlässe in der Hauptschule

Wo bietet der Mathematikunterricht in den unteren Klassen der Hauptschule überhaupt Schreibanlässe?

Eine Möglichkeit, die Lernenden unmittelbar mit der Sinnhaftigkeit des Schreibens in Berührung zu bringen, ist der „**Wissensspeicher**“ in Form eines Spickzettels. Dessen Produktion motiviert unmittelbar, vor allem wenn er auch in den Klassenarbeiten verwendet werden darf, und gibt den Lernenden gleichzeitig ein Gefühl dafür, wie wichtig eigene Formulierungen für das persönliche Lernen sind.

Individuelle Reflexionen des eigenen Mathematiklernens im Rahmen eines **Lerntagebuchs** können helfen, Hemmungen sowohl gegenüber dem Schreiben als auch gegenüber dem Mathematiklernen selbst abzubauen. Wichtig für das Gelingen ist es, immer wieder an den SchülerInnen vertrauten Arbeitsweisen anzuknüpfen. So benötigen die Lernenden zunächst klare Strukturen, die in Form von direkten Fragen oder Satzanfängen gegeben sein können. Über die Nennung und Beschreibung von Inhalten in eigenen Worten („*Das haben wir heute gemacht*“) kommen die Lernenden zur Reflexion der Inhalte („*Das habe ich noch nicht verstanden*“) und ihrer eigenen Arbeit („*So habe ich heute gearbeitet*“).

Merkmale von Schreibanlässen

Die hier exemplarisch beschriebenen Schreibanlässe sind sehr verschieden. Im Rahmen dieser Arbeit werden die verschiedenen Schreibanlässe nach folgenden Merkmalen charakterisiert:

- Wer ist der Adressat? Schreibe ich in erster Linie für mich (privat) oder für andere (öffentlich)? (Bräuer 2000)
- Was ist die Funktion für den Schreibenden selbst? Geht es darum sich selbst Klarheit über eine Sache zu verschaffen (Kognition) oder soll das Geschriebene in erster Linie als Grundlage für den Austausch mit Gleichgesinnten dienen (Kommunikation)? (Hußmann 2003)
- Wie ist der Bezug zum Fach Mathematik? Geht es um die Inhalte selbst (mathematical writing) oder um eine Reflexion der Inhalte oder der persönlichen Haltung und Vorgehensweise der lernenden Schreiberinnen (commentary writing)? (Hoffman/Powell 1989)

Die Merkmale fallen trotz gewisser Überschneidungen nicht zusammen und können in unterschiedlichen Ausprägungen vorhanden sein. So dient der Spickzettel der Kognition auf privater Ebene und beschäftigt sich dennoch klar mit inhaltlichem Schreiben. Ein Forschungsheft kann über die Kognition hinaus als Kommunikationsgrundlage genutzt werden, ohne für die Öffentlichkeit, losgelöst vom Schreibenden, gedacht zu sein.

Mit „öffentlichem Schreiben" ist hier mehr gemeint als der Austausch mit anderen. Wenn für andere Menschen geschrieben wird sollte das Geschriebene ohne Anwesenheit und weitere Erklärungen der Autorin verständlich sein.

Schreibcurriculum

Die Kernfrage des Forschungsvorhabens ist, wie Hauptschüler an das Schreiben im Mathematikunterricht herangeführt und zum Einsatz des Schreibens als hilfreichem Werkzeug im Lernprozess angeleitet werden können. Aus der Analyse vorhandener Literatur unter Beachtung der beschriebenen Merkmale und der besonderen Bedürfnisse „schwacher" Lernender, sowie aus vielzähligen praktischen Erfahrungen der Autorin ging das folgende Schreibcurriculum hervor.

Die einzelnen Phasen sind als zeitlich überlappende Entwicklungsstufen zu betrachten, nicht aber als strikt nacheinander getrennt abzuarbeitende Lernstufen. Auch wenn etwa das Schreiben gezielt zur Präsentation genutzt werden kann bleiben persönliche Reflexionen und privates Schreiben von Bedeutung.

FUNKTION	METHODEN
1. Sensibilisierung Schreibhemmnisse überwinden	Blitzlicht Spicker Aufgabenkartei Lerntagebuch
2. Persönlicher Ausdruck Schreibgewohnheiten aufbauen	
3. Privates Schreiben Inhaltliche Arbeit	Forschungsheft Mathekonferenz
4. Öffentliches Schreiben Präsentieren	Themenstudie Portfolio

1. In der Phase der **Sensibilisierung** werden zunächst Berührungsängste gegenüber der eigenen sprachlichen Ausdrucksweise abgebaut und der Wert eigener Gedanken und Beiträge aus der Sicht der Lernenden gestärkt. Anknüpfend an vertraute Muster und Strukturen, beispielsweise im Rahmen der Aufgabenkartei (Barzel/Büchter/Leuders (2007)), werden die SchülerInnen zunehmend aktiv in die Unterrichtsgestaltung einbezogen. Beginnend mit kleineren mündlichen Beiträgen und klar strukturierte Eigenproduktionen können sich die Lernenden zunehmend freier äußern.

2. Die Sensibilisierung geht Hand in Hand mit dem **Aufbau von Schreibgewohnheiten** in der Phase des persönlichen Ausdrucks. In erster Linie geht es darum, eine überschaubare Zahl strukturierter Schreibmethoden regelmäßig und konsequent in den Unterricht zu integrieren. Die Lernenden nehmen das Medium zunehmend als hilfreiches Werkzeug zur Reflexion wie zur Dokumentation ihrer Arbeit wahr. Sie erkennen, dass sie selbst einen angemessenen Beitrag zu ihrem Lernen leisten, den die „fertige“ Mathematik des Schulbuchs nicht ersetzten kann.

Um die folgenden Phasen des privaten und öffentlichen Schreibens bewältigen zu können, benötigen die Lernenden die oben beschriebenen Vorerfahrungen.

3. Im Rahmen des inhaltlichen, **privaten Schreibens** in der dritten Phase nutzen sie das Potential gezielt um den individuellen Lernzuwachs zu dokumentieren. Sowohl die kognitive Funktion wird genutzt als auch das Produzierte als Basis zur Kommunikation verwendet. So kann ein Lerntagebucheintrag zunächst der Klärung der eigenen Gedanken dienen und anschließend als Hilfe für die gemeinsame Arbeit in einer Mathekonferenz eingesetzt werden. Durch die Verbindlichkeit des geschriebenen Wortes werden die Lernenden in die Verantwortung für ihre eigenen Gedanken genommen.

4. Das **öffentliche Schreiben** schließlich hat eine Präsentation der Eigenproduktionen zum Ziel. Sie sollen, losgelöst von dem Schreibenden, für sich selbst sprechen und allgemein verständlich sein. Die typische Präsentationsform des Portfolios ist in der aktuellen didaktischen Literatur vor

allem im sprachlichen Bereich stark vertreten, auch das Poster und die Themenstudie können hier angemessene Methoden sein.

Forschungsfragen

Das aktuelle Forschungsvorhaben zum Schreiben im Mathematikunterricht der Hauptschule fokussiert wesentlich auf die beiden ersten Phasen, in denen die Lernenden zum Einsatz des Schreibens befähigt werden.

Im Rahmen einer qualitativen Explorationsstudie soll das Schreibcurriculum Eingang in die Unterrichtspraxis finden und systematisch auf folgende Fragestellungen hin untersucht werden:

- Wie entwickeln sich HauptschülerInnen durch gezielte Förderung ihrer Schreibkompetenz hinsichtlich ihrer Motivation und Selbstkompetenz im Mathematikunterricht?
- Lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Schreibkompetenz und der allgemeinen mathematischen Kompetenz beobachten?
- Welche globalen und individuellen Schwierigkeiten haben Hauptschüler beim Schreiben?
- Lassen sich Schreibtypen beobachten? Wer profitiert vom Schreiben und welche Prozesshilfen sind sinnvoll?

Die Fragestellungen beziehen sich durchgängig auf die Perspektive der Lernenden und sollen entsprechend durch die Analyse von Schülerprodukten und Interviews verfolgt werden.

Literatur

Barzel, B. & Büchter, A. & Leuders, T. (2007): Mathematik Methodik. Berlin: Cornelsen

Bräuer, G. (2000): Schreiben als reflexive Praxis. Freiburg: Fillibach

Ehret, C. (2007): Heranführung von HauptschülerInnen an das schreibende Arbeiten in offenen Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Magisterarbeit PH Freiburg.

Gallin, P. & Ruf, U. (2005): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik Bd. 1&2. Seelze: Kallmeyer

Hoffman, M. & Powell, A. (1989): Mathematical and Commentary Writing. In: Mathematics Teaching, Heft 126, S. 55-57

Hußmann, S. (2003): Umgangssprache – Fachsprache/Lerntagebücher. In: Leuders, T. (Hrsg.): Mathematikdidaktik. Berlin: Cornelsen

Kuntze, S. (2005): Schülerinnen und Schüler schreiben über Unendlichkeit - Interdisziplinäre und mathematikbezogene Gedanken in Themenstudien. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 5, 10/2005, S. 18-24

Selter, Ch. (1994): Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag

Waywood, A. (1992): Journal Writing and Learning Mahematics. In: For the Learning of Mathematics, Heft 12/Juni 1992, S. 34-43

Andreas EICHLER, Münster

Alltäglicher Stochastikunterricht an deutschen Gymnasien

In der internationalen Stochastikdidaktik gilt die Befähigung von Schülern zu einer statistisch geprägten Denkweise als primäres Ziel des Stochastikunterrichts (Shaughnessy, 2007). Dieses Ziel, das mittelbar in die Formulierung der Standards für die Sekundarstufe I eingegangen ist, erfordert von Lehrkräften eine erhebliche Änderung ihrer bisherigen Unterrichtspraxis, selbst wenn diese stochastische Themen umfasste. Wie aber sowohl die bisherige, als auch die jetzige und möglicherweise Reformideen enthaltende alltägliche Unterrichtspraxis von „normalen" Lehrkräften aussieht, ist kaum bekannt (Eichler, 2006). Dies ist der Anlass für ein Forschungsprojekt zum alltäglichen Stochastikunterricht (Eichler, 2007), aus dem hier ein quantitatives Teilprojekt mit folgender Fragestellung skizziert wird:

- Welche Inhalte behandeln Lehrkräfte in ihrem Stochastikunterricht?
- Welche Ziele verfolgen Lehrkräfte mit ihrem Stochastikunterricht?
- Welches stochastikbezogene Wissen und welche Vorstellungen von der Stochastik erwerben Schüler aufgrund dieses Unterrichts?
- Welchen Einfluss haben unterschiedliche Orientierungen der Lehrkräfte auf das Wissen und die Vorstellungen ihrer Schüler?

Theoretischer Rahmen und Methodik

Das Forschungsprojekt geht von der Grundannahme aus, dass das Denken der Lehrkräfte einerseits der Schlüsselfaktor bei der Durchsetzung von Unterrichtsreformen ist und andererseits entscheidenden Einfluss auf das Wissen und die Vorstellungen von Schülern hat (Calderhead, 1996).

Der hier diskutierte Ansatz ist Teil eines größer angelegten Projekts, das die drei Ebenen des Curriculums, die Planung des Stochastikunterrichts durch die Lehrkräfte (*individuelle Curricula*), die Umsetzung dieser Planung (*tatsächliche Curricula*), deren Wirkung auf die Schüler (*realisierte Curricula*) sowie die Zusammenhänge der drei Curriculumsebenen untersucht (z.B. Eichler, 2007). Aus dem qualitativen Teil dieses Forschungsprojekts haben sich vier Typen individueller Stochastikcurricula ergeben (Abb. 1, vgl. Eichler, 2006), die sich insbesondere hinsichtlich der Ziele des Stochastikunterrichts stark unterschieden. Diese Unterschiede äußern sich den Gegensatzpaaren (Dimensionen) statischer vs. prozessorientierter und formaler vs. anwendungsorientierter Stochastikunterricht.

Mit Bezug auf die hier nur kurz charakterisierten Typen wurde ein Fragebogen mit vier Teilen entwickelt:

Teil 1: enthält eine Liste mit anzukreuzenden potentiellen Stoffinhalten des Stochastikcurriculums und die Möglichkeit, diese zu ergänzen.

Teil 2: enthält zu den vier Typen jeweils zwei charakteristische Aussagen zu den Zielen des Stochastikcurriculums.

Teil 3: enthält zu den vier Typen jeweils zwei charakteristische Aussagen zum Nutzen des Stochastikcurriculums für die Schüler.

Teil 4: enthält zu den vier Typen jeweils zwei charakteristische Aussagen hinsichtlich eines effektiven Stochastikunterrichts.

(Dimension 2)	Statische Mathematik	Mathematik als Prozess
Anwendung	Die *Anwendungsvorbereiter* verfolgen das Ziel, das Wechselspiel von Theorie und Anwendung aufzuzeigen. Dazu müssen Schüler zunächst die Theorie lernen, um sie im Anschluss anwenden zu können	Die *Alltagsvorbereiter* verfolgen das Ziel, exemplarisch an komplexer werdenden realen Problemen stochastische Methoden zu entwickeln, um Schüler zur Anwendung von Stochastik und zur Kritikfähigkeit zu befähigen.
Formalismus	Die *Traditionalisten* verfolgen das Ziel, eine breite theoretische Grundlage für die Stochastik zu entwickeln. Diese umfasst Algorithmen und Einsichten in die mathematische Struktur der Stochastik, nicht aber reale Probleme.	Die *Strukturalisten* verfolgen das Ziel, beginnend bei realistischen Problemen in einem Abstraktionsprozess das abstrakte System der Mathematik bzw. Stochastik hinter diesen Problemen zu verdeutlichen.

(Dimension 1)

Abbildung 1: Vier Typen individueller Stochastikcurricula

Jede dieser Aussagen sollte in fünf Stufen von voller Zustimmung bis zur Ablehnung beurteilt werden (kodiert von 1 bis 5, zusätzliche Ziele konnten in einem offenen Item angegeben werden).

Ein zusätzlicher Fragebogen für die Schüler der beteiligten Lehrkräfte orientiert sich am Konstrukt des *statistical knowledge* (Broers, 2006) als Kern des statistischen Denkens. Die innere Struktur dieses Konzepts umfasst die Aufteilung des Wissens in die Aspekte des deklarativen, prozeduralen und konzeptuellen Wissens (Hiebert & Carpenter, 1992). Der erste Teil des Fragebogens umfasst die Selbsteinschätzung der Schüler in Bezug auf 28 stochastische Konzepte (deklaratives und prozedurales Wissen), ob diese nicht erinnert (0), erinnert (1), ungefähr erklärt (2) oder sicher erklärt (3) werden können. Weiter waren die Schüler aufgefordert, miteinander in Beziehung stehende Begriffe zu kennzeichnen (konzeptuelles Wissen). Über das Wissen hinaus kennzeichnen Vorstellungen zur Stochastik die realisierten Curricula der Schüler. Dazu enthielt der Fragebogen offene und geschlossene Items, in denen die Schüler Beispiele für die Bedeutung der Stochastik – in Anlehnung an Ergebnisse der vorangegangenen qualitativen Untersuchung von realisierten Curricula (Eichler, 2007) – nennen sollten.

Insgesamt wurde eine nach Bundesländern geschichtete Zufallsstichprobe von 240 Gymnasien konstruiert, von denen 166 einer Befragung zugestimmt haben. Von diesen Schulen wurden jeweils zwei Lehrkräfte und jeweils drei ihrer Schüler mit unterschiedlichen Leistungen zur Teilnahme gebeten (Schuljahr 2007). Die folgende Diskussion basiert auf der Analyse von 107 zurückgelaufenen Lehrer- und 316 Schülerfragebögen.

Ergebnisse

Der von den Lehrkräften in der Sekundarstufe II behandelte Stoff ist geprägt durch einen klassischen Block der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1), der die Inhalte bedingte Wahrscheinlichkeit (2), Erweiterung von Verteilungen (3), Inferenzstatistik (4) und deskriptive Statistik (5) dominiert:

(1)	Laplace-W.-keit (97%), statistische W.-keit (72%), Baum (100%), Bernoulli-Exp. (99%), Binomialvert. (100%), Erwartungswert (95%), Standardabweichung (95%)
(2)	Bedingte W.-keit (81%), (Un)Abhängigkeit (80%), Satz von Bayes (74%)
(3)	Normalvert. (79%), hypergeometrische Vert. (49%), Poissonvert. (49%)
(4)	Hypothesentest (89%), Konfidenzintervalle (51%), Bayes-Statistik (27%)
(5)	Häufigkeiten (98%), Mittelwert (87%), Streuung (74%), Median (52%), Regression und Korrelation (16%)

Tabelle 1: Behandlung der Stoffinhalte durch die Lehrkräfte (n = 107)

Während sich die Lehrkräfte hinsichtlich der Inhalte nur wenig unterscheiden, lassen sich hinsichtlich der Ziele drei Faktoren identifizieren:

Faktor 1 (5 Items, Cronbachs α = 0,689)	Faktor 2 (6 Items, Cronbachs α = 0,707)	Faktor 3 (4 Items, Cronbachs α = 0,779)
Traditionelles Curriculum, kaum Anwendungsbezug	Curriculum mit starkem Anwendungsbezug	Curriculum mit starker Prozessorientierung

Tabelle 2: Faktoren hinsichtlich der Ziele des Stochastikcurriculums

Zum ersten Faktor gehören beispielsweise Aussagen, die von Repräsentanten der Traditionalisten (3 Aussagen) und Strukturalisten (2 Aussagen) stammen, z.B.: „Stochastik- bzw. Mathematikunterricht muss eine theoretische Grundlage schaffen, die im Studium aufgenommen und erweitert werden kann.“ Die Faktoren 2 und 3 korrelieren relativ stark positiv (r = 0,4), mit dem Faktor 1 dagegen schwach negativ (r = - 0,1 bzw. r = - 0,13).
Ein Hinweis darauf, dass die Selbsteinschätzung durchaus ein quantitatives Maß für das Wissen der Schüler ist, ist der deutliche Unterschied in allen erhobenen Wissensbereichen (vgl. zu diesen Tab. 3) zwischen Leistungskursschülern und solchen mit Grund- oder nicht spezialisierten Kursen.

	Kon1	AW	AW_a	AW_g	NU	NU_a	NU_g	Kon2	Kon2_a	Kon2_g
Wissen	0,44**	-0,06	0,17**	-0,23**	0,11**	0,28**	-0,18**	0,31**	0,29**	0,18**

Tabelle 3: Korrelationen zwischen dem Schülerwissen und weiteren Faktoren (Kon1: Verbindungen zwischen stochastischen Konzepten; AW: Anwendungen der Stochastik in der Realität (_a) und im Glückspiel (_g); NU: Beispiele für den Nutzen der Stochastik; Kon2: Beispiele für die Anwendung bestimmter stochastischer Konzepte)

Ebenso zeigt sich trotz schwacher Korrelationen des selbsteingeschätzten

„Wissens“ der Schüler und weiterer Faktoren (Tab. 3), dass ein Zusammenhang zwischen der Flexibilität im Umgang mit stochastischen Konzepten und der Bedeutungszuschreibung der Stochastik in der Realität besteht.

Die Zusammenhänge zwischen dem „Wissen“ der Schüler und der Orientierung der Lehrkräfte (vgl. Tab. 2) ist schwer zu beurteilen, da ein großer Anteil der Fragebögen nur entweder von der Lehrkraft oder den Schülern zurückgesandt worden und die verwertbaren Fallzahlen dementsprechend gering sind (ca. 50 Lehrkräfte mit ca. 150 Schülern). Hier wurden die verwertbaren Lehrkräfte in jeweils zwei Gruppen hinsichtlich der in Tab. 2 skizzierten Faktoren geclustert und die Mittelwerte zu allen oben genannten Schülerfaktoren (Tab.3) verglichen (t-Test). Dabei haben sich allerdings keinerlei statistisch relevanten Unterschiede ergeben. Ausnahme bildet hier eine zusätzliche Variable, die die Einstellung zur Stochastik beschreibt und die bei den Schülern der eher prozessorientierten Lehrkräfte signifikant höher ist, als bei eher nicht prozessorientierten Lehrkräften.

Aussagekräftiger für die schülerbezogenen Variablen (Tab. 3) ist die inhaltliche Ausrichtung des Stochastikcurriculums. Am deutlichsten ist die negative Auswirkung eines insgesamt sehr breit angelegten Curriculums zur Stochastik, das sich negativ auf das Wissen von Schülern auszuwirken scheint. So korreliert etwa die Anzahl der von den Lehrkräften behandelten Begriffe negativ mit dem „Wissen“ der Schüler ($r = -0{,}29^{**}$).

Auch mit Blick auf die didaktische Forschungslage zeigt sich aber insgesamt, dass noch wesentlich mehr Forschungsergebnisse notwendig sind, um angemessene Aussagen über die Zusammenhänge des alltäglichen Mathematikunterrichts und die realisierten Curricula von Schülern treffen zu können.

Literatur

Broers, N. J. (2006). Learning goals: The primacy of statistical knowledge. In A. Rossman, & Chance, B. (Hrsg.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador, Brazil: International Statistical Institute. Calderhead, J. (1996). Teachers: beliefs and knowledge. In D. C. Berliner (Ed.), *Handbook of education* (pp. 709-725). New York: MacMillan.

Eichler, A. (2006). Individuelle Stochastikcurricula von Lehrerinnen und Lehrern. *Journal für Mathematikdidaktik*

Eichler; A. (2007b). The impact of a typical classroom practice on students' statistical knowledge. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CD-Rom). Larnaca, Cyprus: Department of Education, University of Cyprus.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 65-97). Macmillan, New York.

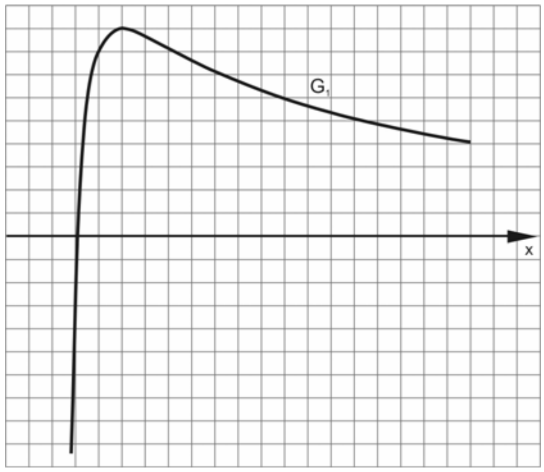
Shaughnessy, M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 957-1010). Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Wolfram Eid, Magdeburg

Gedanken zur Gestaltung von Aufgaben für zentrale Abiturprüfungen

Gegeben sind die Funktionen f_a in ihrem größtmöglichen Definitionsbereich durch $y = f_a(x) = 3 \cdot \frac{\ln x + a}{x}$, $a \in \mathrm{R}$. *Ihre Graphen seien G_a mit den Hochpunkten* $H_a\left(e^{1-a} \,\middle|\, f_a(e^{1-a})\right)$.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_1 in einem unvollständigen kartesischen Koordinatensystem.



Ergänzen Sie in der Abbildung die Ordinatenachse, ermitteln Sie die Skalierung der Koordinatenachsen und zeichnen Sie die Ortskurve der Hochpunkte der Graphen G_a ein.

Nennen Sie Schritte zum Ermitteln des Wertebereichs der Funktionen f_a .

Die oben vorgestellte Aufgabe war Bestandteil einer Prüfungsaufgabe im Abiturjahrgang 2006 (Grundkursniveau) in Sachsen-Anhalt. Ihre Bearbeitung bereitete den Prüflingen vermehrt Schwierigkeiten und führte zu recht breiter öffentlicher Diskussion, die jedoch die Besonderheiten der nachhaltigen Umstellungen im Schulsystem gerade in diesem Schuljahrgang völlig ausblendete. Dennoch war sie Anlass zu gründlicher Auseinandersetzung der Autorengruppe, verbunden mit breiter Reflektion über die Facetten der Gestaltung von Prüfungsaufgaben oder auch prüfungsnaher Aufgaben. Insbesondere standen zwei Themenkreise im Fokus des Interesses:

- Möglichkeiten der Gestaltung verschiedenartiger Aufträge
- Umreißen des Anspruchsniveaus für „gute“ Prüfungsaufgaben.

Bez. des ersten Aspektes eröffnet sich sofort ein weites Feld. Einige Ansätze, die sofort ins engere Zentrum der Diskussion rücken, sind sicher die folgenden:

(A) formale Aufgaben – Anwendungsaufgaben
(B) innermathematische Aufgaben – außermathematische Aufgaben
(C) überbestimmte oder unterbestimmte Aufgaben
(D) Aufgabentypen nach PISA: technische, rechnerische, begriffliche
(E) „Aufgabenformate“ nach PISA

(F) „Aufgabenziel“ (z. B. Aufgaben zur Kontrolle des Verständnisses von Begriffen, Sätzen und Verfahren; Aufgaben zur Kontrolle inhaltsbezogener oder allgemeiner mathematischer Kompetenzen)

(G) Aufgaben, die eine verbal sprachliche Darstellung erfordern (Signalwörter wie „Erläutern …“, „Beschreiben …“, „Interpretieren …“)

(H) präferierte Lösungsverfahren oder Strategien (algorithmisch; kalkülmäßig; heuristisch; Strategien wie Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten, Analogisieren; Konstruieren oder Berechnen)

Die derzeitige Struktur des Unterrichts in den Kernfächern in der Qualifikationsphase und die darauf aufbauende Gestaltung von Prüfungsaufgaben in Sachsen-Anhalt geben jedoch Anlaß zu weit filigranerer Arbeit am Aufgabensujet, als gemeinhin vermutet wird. Nach gemeinsam durchlaufenem Unterricht treffen die Prüflinge eine Entscheidung über die von Ihnen angestrebte Wertigkeit des erreichten Ergebnisses. Entsprechend dieser lösen sie dann am Prüfungstag Aufgaben auf Grundkursniveau oder auf Leistungskursniveau. Wegen der gemeinsamen Vorgeschichte aller Lernenden wird danach getrachtet, beiden durch die Wahl einheitlicher Sujets gerecht zu werden und Unterschiede durch geeignetes Verändern (nicht nur Erweitern) zu entwickeln. Das nachfolgende Beispiel eines „Paares“ von Prüfungsaufgaben verdeutlicht dies.

Grundkursniveau:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC gegeben:

$A(3 \mid 2)$, $B(4 \mid 9)$ und $C(1 \mid 8)$.

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist und ermitteln Sie eine Gleichung seines Umkreises k.

Es gibt einen weiteren Punkt C_1 auf dem Kreis k, für den die Inhalte der Flächen der Dreiecke ABC und ABC_1 gleich groß sind.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_1.

Leistungskursniveau

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Viereck ABCD durch die Eckpunkte gegeben:

$A(1 \mid 8)$, $B(3 \mid 2)$, $C(7 \mid 5)$ und $D(4 \mid 9)$.

Die Innenwinkel des Vierecks ABCD werden mit α, β, γ und δ bezeichnet.

a) Das Gradmaß des Winkels γ beträgt 90°.
Zeigen Sie, dass auch der Winkel α ein rechter Winkel ist und begründen Sie, dass das Viereck ABCD einen Umkreis hat.

Ermitteln Sie eine Gleichung dieses Umkreises k.

Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes der Vierecksfläche.

b) Es gibt einen weiteren Punkt A_1 auf dem Umkreis k, für den die Inhalte der Flächen der Vierecke ABCD und A_1BCD gleich groß sind.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A_1.

Mithin erhebt sich die Frage, in welcher Weise Varianten kreiert werden könnten. Neben der groben Unterscheidung aus mathematischer Sicht von Bestimmungs- bzw. Beweisaufgaben können diese Kategorien nachfolgend noch einmal in innermathematische und außermathematische Aufgaben unterteilt werden. Tiefer gehender sind in Anlehnung an *Bruder* Überlegungen zu den eine Aufgabe kennzeichnenden Komponenten:

Anfangssituation: Voraussetzungen, gegebene Größen, Informationen zu einem Sachverhalt usw.

Transformationen: Überführung der Anfangssituation in die Endsituation vom Gegebenen hin zum Gesuchten: Lösungsweg(e), mathematische Modelle, Beweiskette usw.

Endsituation: Gesuchtes, Behauptung, Schlussfolgerungen, Resultate usw.

Durch Kombination dieser drei Komponenten können acht Aufgabentypen charakterisiert werden[1]:

	Anfangssituation GEGEBENES	**Transformationen LÖSUNGSWEG**	**Endsituation GESUCHTES**	**Kurzbeschreibung**
1	x	x	x	gelöste Aufgabe (Stimmt das?)
2	x	x	-	„einfache" Bestimmungsaufgabe
3	-	x	x	„einfache" Umkehraufgabe
4	x	-	x	Beweisaufgabe
5	x	-	-	„schwere" Bestimmungsaufgabe
6	-	-	x	„schwere" Umkehraufgabe
7	-	x	-	Anforderung, eine Aufgabe zu erfinden
8	-	-	(-)	offene Problemsituation

[1] x bedeutet, dass das Element vorgegeben wird.

Durch Beachtung der verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten ergeben sich mögliche Aufgabenvariationen, nahe liegender weise unterschiedlichen Anforderungsniveaus. Im Mittelpunkt stehen dabei Aufgaben zum Leisten, weshalb die wesentliche Orientierungsgröße das Ziel „Kompetenzüberprüfung“ ist. Die Variation von Aufgaben in diesem speziellen Sinn kann somit wie folgt charakterisiert werden: Ausgangspunkt ist eine mathematische Schüleraufgabe, die für eine Kontrollarbeit vorgesehen ist. Diese Aufgabe ist geeignet, bestimmte allgemeine und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen bezogen auf bestimmte Anforderungsbereiche zu überprüfen. Durch Veränderungen (Ergänzungen, Weglassen, Modifizierung) von gegebenen oder gesuchten Größen sowie der Repräsentationsform der Aufgabe wird eine Veränderung der Anforderungsbereiche bei einzelnen mathematischen Kompetenzen oder eine Veränderung der zu überprüfenden mathematischen Kompetenzen erreicht. Die Bewertung der „Güte“ der entwickelten Aufgabe unter dem Gesamteindruck der Prüfungsaufgabe sollte hinsichtlich bedachter allgemeiner mathematischer Kompetenzen erfolgen (hilfreich könnte hierfür eine „Kompetenzmatrix“ sein, in der jedes der Felder wenigstens einmal besetzt sein sollte).

Allgemeine mathematische Kompetenzen	**Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen aus den Gebieten …**		
	Analysis	**Analytische Geometrie**	**Stochastik**
Probleme mathematisch lösen			
mathematisch modellieren			
mathematisch argumentieren, kommunizieren			
mathematische Darstellungen verwenden, Symbolik verwenden			

Literatur:

Bruder, R.: *Konzepte für nachhaltiges Lernen von Mathematik. Vortrag an der TU Kaiserslautern 2.2.2006*

Eid, W., u.a.: *Schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik, Kompetenzentwicklung und Aufgabenkultur, Franzbecker-Verlag 2007*

Andrea Einig, Pädagogische Hochschule Heidelberg

Zahlbegriffsentwicklung im frühen Kindesalter

- eine Fallstudie zur Entwicklung des mathematischen Denkens bei 3- bis 4-jährigen Kindern -

1 Bildungspolitischer Hintergrund

In allen Bundesländern, so auch in Baden-Württemberg, wird eine Stärkung der frühkindlichen Bildung in den Kindertageseinrichtungen angestrebt. Der Orientierungsplan für die baden-württembergischen Kindergärten gibt dazu im Entwicklungsfeld „Denken“ Anregungen und Hinweise. Diese umfassen auch die Förderung der mathematischen Kompetenzen. Über welche mathematischen Kompetenzen Kinder im Alter von 3-4 Jahren bereits verfügen und wie sich diese entwickeln, soll in einem Forschungsprojekt an der Pädagogischen Hochschule in Heidelberg untersucht werden. Das Projekt mit dem Titel „Zahlbegriffsentwicklung im frühen Kindesalter – eine Fallstudie zur Entwicklung des mathematischen Denkens bei 3- bis 4- jährigen Kindern“ wird im Rahmen des Programms „Bildungsforschung“ der Landesstiftung Baden–Württemberg unterstützt.[1] Ziel des Programms „Bildungsforschung“ ist es, die Grundlagenforschung zu Bildungsfragen, Bildungsprozessen und Bildungsergebnissen in Baden-Württemberg zu stärken.

2 Forschungsstand

Beschäftigt man sich mit aktuellen Forschungsergebnissen aus den verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen, wie der Entwicklungspsychologie, der Mathematikdidaktik oder auch der Hirnforschung, so stellt man fest, dass der Fokus der verschiedenen Forschungsrichtungen national wie international bisher kaum oder nur partiell auf der Entwicklung der mathematischen Kompetenzen der Kinder im Alter von 3 - 4 Jahren lag. Entweder wurden Kinder in einer anderen Altersgruppe (z.B. die Schulanfänger, vgl. Selter 1995) untersucht, nur Teilaspekte der Zahlbegriffsentwicklung herausgegriffen (z.B. die Entwicklung der Zählkompetenz, vgl. Fuson 1988) oder der Fokus lag auf der Prävention von Rechenstörungen (vgl. Krajewski 2003). Genau hier will dieses Forschungsvorhaben ansetzen, um mehr über die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen im frühen Kindergartenalter zu erfahren.

---

[1] Weitere Informationen zum Programm Bildungsforschung der Landesstiftung unter: http://www.landesstiftung-bw.de/themen/wissenschaft.php?id=245

3 Forschungsfragen

1. Wie entwickeln sich die mathematischen Basisfähigkeiten im Alter von 3 und 4 Jahren?
   - Gibt es kontinuierliche Entwicklungslinien oder sind diskontinuierliche Verläufe zu beobachten?
2. Wie gehen die Kinder im Alter von 3-4 Jahren mit Aufgaben zu den verschiedenen mathematischen Basisfähigkeiten um?
   - Wie verdeutlichen die Kinder ihre Denkwege am Material?
   - Inwiefern können die Kinder ihre Denkwege sprachlich erläutern?
   - Wie verändert sich die Qualität ihrer Handlungen und Äußerungen?

4 Datenerhebung

Für die Studie wurden in zwei Kindergärten im Raum Heidelberg die Kinder im Alter von 3 ½ Jahren ausgewählt. Insgesamt nehmen 25 Kinder an der Studie teil. Über einen Zeitraum von 12 Monaten werden sechs Einzelinterviews zu verschiedenen mathematischen Kompetenzen mit den Kindern durchgeführt. Eine solche kasuistische Längsschnittstudie bietet die Möglichkeit mit Hilfe vieler Daten individuelle Entwicklungen mathematischer Kompetenzen zu erfassen und in Beziehung zu setzen. Die Methode des Interviews eröffnet in der qualitativen Forschung einen wichtigen Zugang zum kindlichen Wissen. Daher findet die Datenerhebung in diesem Forschungsprojekt in Form von qualitativen Interviews statt. Sie sind für diese Altersgruppe ein geeignetes Instrument, um die Entwicklungsprozesse der Kinder wissenschaftlich zu erfassen. Aufgrund des Forschungsschwerpunktes, zu dokumentieren wie sich die mathematischen Fähigkeiten bei den Kindern in diesem Alter entwickeln, kommt außerdem die klinische Methode (vgl. Selter & Spiegel 1997) nach Piaget zum Einsatz. Das klinische Interview ist eine Variante des halbstandardisierten Interviews und zeichnet sich dadurch aus, dass es prinzipiell offen ist für individuelle Denkwege der Kindern aber auch vergleichbar durch festgelegte Leitfragen. Die Interviews werden alle auf Video aufgezeichnet, um neben den sprachlichen Äußerungen auch die Handlungen der Kinder zu erfassen. Bei der Datenerhebung sind einige Besonderheiten dieser Altersgruppe zu beachten. Die Verfahren müssen so kindgerecht sein, dass sie ein Kind weder sprachlich, kognitiv, emotional oder physisch überfordern. Daher werden die Aufgaben in einen kindgerechten Kontext eingebettet und anhand von konkretem Material dargeboten. Dadurch haben die Kinder die Möglichkeit, ihr Denken handelnd am Material darstellen und erklären zu können. Für die Erstellung des Leitfadeninterviews wurden Tests, wie z.B. HAWIK III (2000), ZAREKI-R (2006), SON 2 ½ -7 (2006), Manual: Test zur Früherfassung von Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht (2005), OTZ (2001), K-ABC (2001) und Studien, z.B. von Dehaene, Piaget, Karmiloff-Smith, Krajewski, Kaufmann usw. gesichtet, um darauf aufbauend relevante mathematische Kompetenzen, wie z.B. Simultanerfassung, Zählen, Abzählen, Seriation, Klassifikation oder auch Operationen, für das Leitfrageninterview zusammenzustellen. Daraus wurden neben der Einleitung (E) sieben weitere „Bausteine“ (B1 – B7) mit unterschiedlichen Kontexten konzipiert. Die Reihenfolge der sieben Bausteine ist variabel, so dass sie bei jedem Interview neu zusammengestellt werden können.

5 Datenauswertung

Durch Wegzug oder Krankheit verbleiben von den 25 Kindern noch 20 Kinder. Die Kinder wurden in vier Gruppen mit je fünf Kindern eingeteilt, zum einen in Mädchen und Jungen und zum anderen in Kinder mit und ohne Migrationshintergrund. Von diesen Kindern werden drei Interviews (am Anfang, in der Mitte und am Ende des Untersuchungszeitraums) analysiert und die Entwicklung einiger ausgewählter Basisfähigkeiten dokumentiert. In einem zweiten Auswertungsschritt werden sechs Kinder ausgewählt und Fallstudien erstellt. Bei diesen Kindern fließen alle sechs Interviews in die Analyse mit ein.

6 Erste Ergebnisse

Mittlerweile wurden alle Interviews geführt und die Interviews wurden teilweise ausgewertet. Im Folgenden sollen die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen und das Vorgehen der Kinder bei einigen Aufgaben skizziert werden.

6.1 Zählen (vorwärts)

Generell kann man feststellen, dass fast alle Kinder bereits zu Beginn der Studie die Zahlwortreihe vorwärts aufsagen können. Große Unterschiede gibt es allerdings im Umfang. Einige Kinder verbleiben noch im Zahlenraum bis fünf, viele können bereits bis 10 zählen. Dabei benutzen die Kinder oft die Finger als Hilfsmittel. Einige Kinder beherrschen die Zahlwortreihe schon weit über 20 hinaus. Sehr heterogen sind die Ergebnis auch bei der Bildung der Zahlwortreihe. Einige Kinder lassen konsequent Zahlen aus oder vertauschen die Zahlwörter. Einige Kinder bilden auch ihre eigenen Zahlwörter, so z.B. zweizehn, statt zwölf.

6.2 Subitizing

Diese Aufgabe wird den Kindern in Form von strukturierten Punktbildern (vgl. Müller & Wittmann 2002) dargeboten. Zu Beginn der Studie erkennen die meisten Kinder die Menge eins und zwei simultan, gegen Ende nimmt diese Fähigkeit aber deutlich zu. Auch die Begründungen nehmen im Laufe der Studie zu.

6.3 Division

Bei dieser Aufgabe geht es darum eine Menge von acht Gegenständen mit einem Partner zu teilen. Hierbei sind ganz unterschiedliche Strategien der Kinder zu beobachten:

- Sie teilen die Menge dadurch, dass sie jedem abwechselnd einen Gegenstand geben, entweder nacheinander oder mit beiden Händen gleichzeitig.
- Sie bilden zwei gleichlange, sich gegenüberstehende Reihen.
- Sie schauen die Gegenstände an und teilen nach dem äußeren Eindruck die Mengen in zwei gleiche Teile.
- Sie bilden mit den Gegenständen zwei Quadrate oder andere Muster und erklären, dass es gleich viele sind, weil es „gleich“ aussieht.

Ein ähnliches Vorgehen ist zu beobachten, wenn die Kinder die Menge von neun Gegenständen an drei Personen verteilen sollen. Auch hier zeigen sich die Strategien aufteilen, verteilen und das Legen von Mustern.

7 Literatur

Fuson, K. C. (1988): Children´s counting and concepts of number. New York: Springer.

Hellmich, Frank (2007): Bedingungen anschlussfähiger Bildungsprozesse von Kindern beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. In: bildungsforschung, Jahrgang 4, Ausgabe 1, URL: http://www.bildungsforschung.org/Archiv/2007-01/uebergang/

Krajewski, K. (2003): Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Dr. Kovac.

Ministerium für Jugend, Kultus und Sport Baden-Württemberg (2006): Orientierungsplan für Bildung und Erziehung für die baden-württembergischen Kindergärten. Pilotphase. Weinheim: Beltz.

Müller, G.N. & Wittmann, E. Chr. (2002): Das kleine Zahlenbuch. Band 2: Schauen und Zählen. Seelze: Kallmeyer.

Selter, C. (1995): Fiktivität der „Stunde null“ im arithmetischen Anfangsunterricht. Mathematische Unterrichtspraxis, H. 2, S. 11-19.

Selter, C. & Spiegel, H. (1997): Wie Kinder rechnen. Stuttgart: Klett

Petr EISENMANN, Ústí n. L. (Tschechische Republik)

Reale Experimente im Mathematikunterricht

Dieser Beitrag beschreibt ein Experiment aus dem Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. Die Schüler führen mit ihrem Lehrer ein Realexperiment durch, stellen ein dazugehöriges mathematisches Modell zusammen, lösen es und vergleichen die Messwerte mit den aus dem mathematischen Modell erworbenen Werten.

Wir gießen etwa 0,3 l kochendes Wasser in ein Blechtöpfchen ein. Das Töpfchen muss von der Unterlage gut wärmeisoliert werden. In einem Laborständer befestigen wir ein Thermometer und messen die Lufttemperatur in dem Zimmer (T_0). Das Thermometer tauchen wir nach ungefähr 5 Minuten in das Wasser. Nach zirka 3 Minuten notieren wir die in der Zeit $t = 0$ gemessene Temperatur. Die Temperatur messen wir dann in regelmäßigen Abständen von 4 Minuten. Es ist sehr empfehlenswert, die Messwerte gleich in Excel einzugeben. Die Messwerte aus unserem Experiment finden wir in der Tab. 1.

Tab. 1

Zeit	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
Temp.	72	69	64	59	56	53	50	47	45	43	42	40	39	38	37	35

Während der Messung stellen wir das dazugehörige mathematische Modell zusammen. Dieser Vorgang ermöglicht es den Schülern, die Wassertemperatur am Ende des Experiments vorherzusagen (d.h. nach ungefähr einer Stunde).

Hat eine Flüssigkeit eine höhere Temperatur als die Umgebungstemperatur, beginnt sie sich abzukühlen. Wir setzen voraus, dass das Töpfchen sich nach den oben genannten 5 Minuten auf die Wassertemperatur erwärmt hat. Unter der Umgebung verstehen wir also die Luft im Raum. Nach unserem Modell kühlt eine Flüssigkeit, deren Temperatur höher als die Umgebungstemperatur ist, zu jedem Zeitpunkt proportional zur Differenz von Eigen- und Umgebungstemperatur ab. Dieser Prozess wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_0\right) \tag{1}$$

beschrieben, in der T die Wassertemperatur ist. Für die Konstante k gilt $k < 0$, denn die Änderung der Wassertemperatur (die Ableitung der

Funktion T auf der linken Seite von Gleichung (1)) ist negativ, das Wasser kühlt ab.

Bestimmen wir die Lösung der Differentialgleichung (1). Durch Separation der Variablen lösen wir zunächst die zugehörige homogene Gleichung

$$\frac{dT}{dt} = kT \ .$$

Ihre allgemeine Lösung ist eine Funktion der Form

$$T = Ce^{kt} \ .$$

Durch Variation der Konstante erhalten wir dann als allgemeine Lösung der Gleichung (1) die Funktion $T(t)$ mit

$$T = T_0 + Ce^{kt} \ .$$

Jetzt müssen wir die Konstanten C und k bestimmen. Aus der Anfangsbedingung $T(0) = 72$ (s. Tab. 1) folgt $C = 49$ (die Lufttemperatur betrug bei unserem Experiment 23°C).

Um den Wert der Konstante k zu bestimmen, wählten wir hinsichtlich des Zeitverlaufs unseres Experiments die Wassertemperatur in der zwölften Minute. Aus der Bedingung $T(12) = 59{,}5$ ergibt sich dann $k \approx -0{,}02454$.

Die partikuläre Lösung von Gleichung (1), die die Bedingungen $T(0) = 72$ und $T(12) = 59{,}5$ erfüllt, ist die gesuchte Abhängigkeit der Wassertemperatur von der Zeit, für die gilt:

$$T = 23 + 49e^{-0{,}02454t} \ . \qquad (2)$$

Die berechneten Funktionswerte dieser Funktion übertragen wir in eine Tabelle neben den Messwerten (s. Tab. 2). Die zugehörigen Graphen beider Abhängigkeiten sind in Abb. 1 eingezeichnet.

Tab. 2

Zeit	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
Messw.	72	69	64	59	56	53	50	47	45	43	42	40	39	38	37	35
Modell	72	67	63	59	56	53	50	47	45	43	41	39	38	36	35	34

Am Ausgang des Experiments am Gymnasium diskutierten wir über die Übereinstimmung der Messwerte mit den Funktionswerten der Funktion (2). Die Schüler wiesen selbst auf eine Unvollkommenheit des gewählten mathematischen Modells hin. Während in der Realität die Wassertemperatur nach einer Zeit die Umgebungstemperatur erreicht, tritt sie in unserem mathematischen Modell erst im Grenzwertfall ein. Für die Funktion (2) gilt offensichtlich:

$$\lim_{t \to \infty} T(t) = 23 .$$

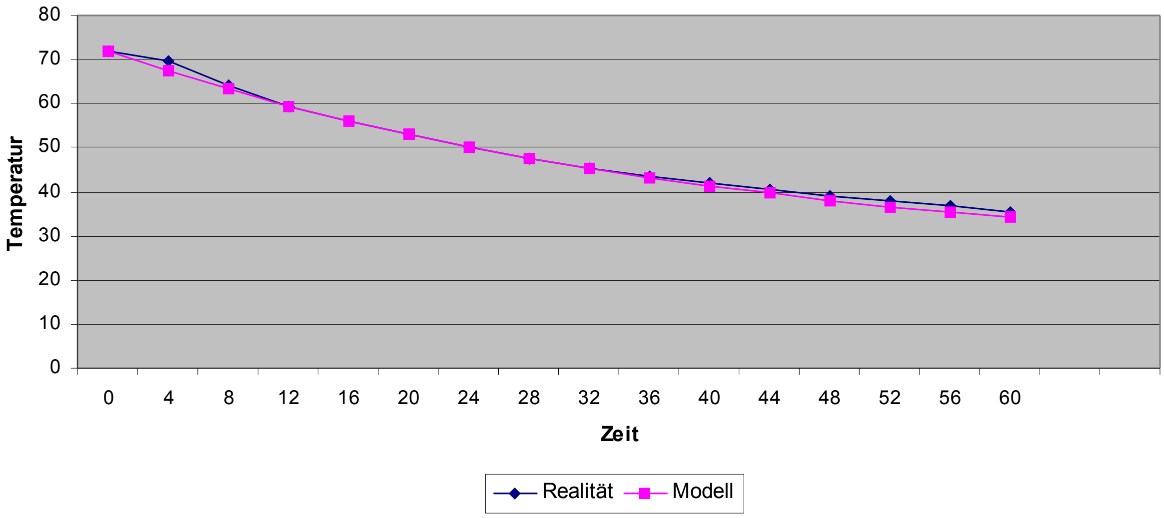


Abb. 1

Andreas FEST, Technische Universität Berlin

Aufspannende Bäume im jahrgangsstufenübergreifenden Projektunterricht[1]

Aufspannende Bäume spielen in vielen Fragestellungen der Netzplanoptimierung eine wichtige Rolle – als Teilgebiet der kombinatorischen Optimierung, also an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Informatik. In einem jahrgangsstufenübergreifenden Projekt haben im Dezember 2007 neun Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 7 bis 13 eines Berliner Gymnasiums drei Tage lang alltagsrelevante Problemstellungen untersucht und mit Hilfe der algorithmischen Graphentheorie gelöst. Mit und ohne Computereinsatz entwickelten sie ihre eigenen Lösungsstrategien, auch über die gegebene Problemstellung hinaus. Dabei wurden verschiedene Methoden verwendet, um die Algorithmen darzustellen: Daumenkinos, Rollenspiele sowie Programmierung mit der Software Visage [1]. Inspiriert wurde dieses Projekt durch das entsprechende Kapitel in [4] und das Modul W1-7/8 des Berliner Rahmenlehrplans [4].

Günstig verbunden – minimale aufspannende Bäume. Das Problem des minimalen aufspannenden Baumes beschreibt die Fragestellung, in einem gegebenen Netzwerk Kanten derart auszuwählen, dass alle Knoten des Netzwerks möglichst kostengünstig miteinander verbunden sind. Anwendung finden minimale aufspannende Bäume z.B. beim Ausbau von Telekommunikations- oder Verkehrsnetzen, bei der Verkabelung von Computernetzen oder als Teilproblem in komplexeren Optimierungsaufgaben.

Begriffsbildungsphase. Die Schülerinnen und Schüler werden mit der Problemstellung konfrontiert. Sie erhalten einen Arbeitsbogen mit einer motivierenden Aufgabe sowie mehrere Bögen zum Ausprobieren ihrer Lösung. Die SuS sind dabei besonders aufgefordert über die Struktur ihrer Lösung und ihren Lösungsweg zu reflektieren. Nach einer angemessenen Bearbeitungszeit erhalten sie zusätzlich ein elektronisches Arbeitsblatt, mit dem Wegemarkierungen gesetzt bzw. entfernt und Lösungen vom PC als Schiedsrichter überprüft werden können. Mit diesem Hilfsmittel entwickeln die SuS gute Lösungen und können ihren Lösungsweg im Gespräch verbalisieren. Im Gruppengespräch werden Begriffe wie Graph und Baum gemeinsam erarbeitet.

Erarbeitungsphase. Die Erarbeitungsphase umfasst den größten Teil der

[1] Gefördert durch das DFG-Forschungszentrum MATHEON

Projektdauer. Die SuS wählen verschiedene der folgenden Schüleraktivitäten. Dabei variieren sie die Zusammenstellung der Arbeitsgruppen.
Bäume. Eigenschaften graphentheoretischer Bäume werden erforscht und Parallelen zur Natur gezogen.
Anwendungen recherchieren. Die SuS informieren sich z.B. im Internet über praxisnahe Anwendungen minimaler aufspannender Bäume.
Algorithmen verstehen. Aus den eigenen Lösungswegen werden Algorithmen entwickelt und mit Lehrbuchalgorithmen verglichen.
Daumenkinos basteln. Der Ablauf der Algorithmen wird nachvollzogen und an einem Beispiel durch das Basteln eines Daumenkinos visualisiert.
Ein Rollenspiel entwerfen. Es wird auf dem Fußboden mit rotem Absperrband und farbigem Papier ein großer Graph gebaut. Dann werden einfache Standardalgorithmen zu Rollenspielen umformuliert, die auf dem Fußboden-Graphen ausgeführt werden können.
Programmierung der Algorithmen. Selbstentwickelte bzw. Lehrbuchalgorithmen werden in Zweiergruppen mit der Software Visage [1] in der Programmiersprache CindyScript [3] implementiert. Dazu erhalten die SuS die Beispielimplementation eines Standardalgorithmus und übertragen die Implementation auf einen anderen Algorithmus. Die verwendete Programmiersprache wird dabei durch das Anwenden während des Programmierens erlernt.
Variation der Problemstellung. Die SuS wandeln die gegebene Problemstellung ab und entwickeln und implementieren eigenständig geplante Software zu weiteren Problemstellungen der kombinatorischen Optimierung.

Präsentationsphase. Die zweite Hälfte des dritten Projekttages dient der Präsentation des Projekts für Mitschüler, Lehrer und Eltern der Projektteilnehmer. Jeder Teilnehmer muss zumindest seinen geleisteten Anteil erklären und präsentieren können. Dazu werden die Präsentationen zunächst in der Gruppe geübt.
Plakatwand. Die Problemstellung, Begriffe und Algorithmen werden auf selbst gestalteten Plakaten erläutert und visuell dargestellt. Das Daumenkino wird ausgehangen.
Das große Fußboden-Graphen-Spiel. Die Algorithmen werden im Rollenspiel auf dem Fußboden-Graphen durchgeführt und so dem Publikum erklärt. Die grundlegende Problemstellung und Lösungsvarianten können im Gespräch diskutiert werden.
Computerpräsentation. Die erstellten Computerprogramme und Visualisierungen werden am Bildschirm und Beamer vorgeführt und können vom Publikum ausprobiert werden. Details zur Implementation werden mündlich dargestellt.

Erfahrungen & Fazit. Dieses Unterrichtsprojekt wurde von den teilnehmenden Schülerinnen und Schülern so gut angenommen, dass von ihnen der Wunsch ausging, die Arbeit mit ähnlichen Projekten in einer Arbeitsgemeinschaft in gleicher Zusammensetzung fortzuführen. Der Erfolg des Projekts basierte dabei vor allem auf drei Säulen: der sehr breiten Altersmischung, der praxisorientierten Problemstellung sowie der Möglichkeit, eigene Algorithmen zu programmieren.

Letzteres wurde von den Projektteilnehmern ausdrücklich gewünscht und war für sie ein Kriterium, an dem Projekt teilzunehmen. Dank der leicht zu erlernenden Programmiersprache CindyScript und ihrer guten Integration in die Geometrie-Software Cinderella [3] war es sogar den SuS der achten Klasse möglich, ohne Vorkenntnisse eigene interaktive Arbeitblätter zu entwerfen. Die SuS höherer Klassenstufen haben die untersuchten Algorithmen problemlos in überraschend kurzer Zeit implementieren können. Eine Visualisierung des Algorithmus von Kruskal war innerhalb von 2,5 Stunden fertig programmiert. Das Programmieren der Algorithmen hilft den SuS dabei, das Verständnis der Algorithmen zu vertiefen, indem es ein nochmaliges mentales Strukturieren der Algorithmen verlangt. Darüber hinaus ist das Programmieren ein fester Bestandteil des Arbeitens in der kombinatorischen Optimierung. Somit wird den SuS das Bild eines authentischen Arbeitens in diesem Gebiet vermittelt.

Der jahrgangsstufenübergreifende Unterricht ermöglichte das Ausführen von Schüleraktivitäten auf unterschiedlichsten Schwierigkeitsleveln. Von Vorteil ist die Altersmischung besonders, da ältere SuS den jüngeren bei Verständnisproblemen sowie der Verbalisierung ihrer Ergebnisse (z.B. bei der Begriffsbildung oder der Formulierung in den Ausarbeitungen) helfen konnten. Während sich am Anfang des Projekts altershomogene Gruppen bildeten, brach im Verlauf des Projekts diese Trennung immer mehr auf. Allerdings zeigt sich die Gruppe hierbei insgesamt zu klein, so dass die Gruppendynamik zwischen den einzelnen Schüleraktivitäten zum Teil ausbaufähig gewesen wäre. Ideal wäre wohl eine Gruppe mit 15-20 Teilnehmern gewesen.

Vor allem die Möglichkeiten, die die Visualisierungssoftware Visage [1] den SuS bot, führte zu überraschenden Ergebnissen. So wurde eine Gruppe aus drei Achtklässlern durch das elektronische Arbeitsblatt dazu angeregt, eigene Arbeitsblätter mit variierten Aufgabenstellungen zu entwerfen. Sie zeichneten einen vereinfachten Stadtplan und stellten die Aufgabe, eine Stadtrundfahrt zu allen Sightseeingpunkten der Stadt zu planen. Ihr anfänglicher Lösungsansatz eines minimalen aufspannenden Baumes ist für diese Variante des Traveling-Salesman-Problems zwar suboptimal, da eine Baumlösung von einem Taxi doppelt abgefahren werden müsste, jedoch

konnten im vom Lehrer gelenkten Gruppengespräch hieraus die Prinzipien der Double-Tree-Approximation für das TSP (vgl. [2]) hergeleitet werden, ein wichtiges Ergebnis der kombinatorischen Optimierung, das sonst erst Mathematikstudenten in Vertiefungsvorlesungen lernen.
Eine weitere Gruppe älterer SuS nutzte ihre erlernten Programmier-fähigkeiten, um einen Online-Routenplaner zur Bestimmung optimaler Wege im Berliner U-Bahnnetz zu programmieren und ihre Lösung mit der Software Visage zu visualisieren. Dabei implementierten sie den Dijkstra-Algorithmus für kürzeste Wege (vgl. [2]).
Auch wenn sich bei diesem Thema die Vorteile der jahrgangsstufen-übergreifenden Projektarbeit als besonders positiv erwiesen, halten wir das Thema auch für die Behandlung im Klassenverband ab Klasse 7 als sehr geeignet, so wie es im Berliner Rahmenlehrplan [4] vorgeschlagen wird. Hierbei sind jedoch die anzubietenden Aktivitäten entsprechend der Klassenstufe auszuwählen.
Der Einsatz der Lernsoftware Visage erwies sich als sehr hilfreich bei der Strukturierung der Gedankengänge der SuS und motivierte sie, über die eigentliche Aufgabenstellung hinaus eigene Ideen zu verfolgen. Wird die Software zur Programmierung selbst entwickelter Lösungen eingesetzt, sind ausführliche Kenntnisse des Lehrers jedoch unverzichtbar, damit er den SuS die notwendigen Hilfestellungen geben kann.
Insgesamt ist zu konstatieren, dass in diesem Projekt die Lernziele der Module W1 7/8 und W1 9/10 des Berliner Rahmenlehrplans [4] erreicht wurden. Insbesondere konnten die prozessbezogenen Kompetenzen *Argumentieren*, *Probleme lösen*, *Modellieren*, *Darstellungen verwenden* und *Kommunizieren* der Schülerinnen und Schüler gefördert werden.

Das Projekt wurde zusammen mit Frau Kira Steffen an der Luise-Henriette-Schule in Berlin-Tempelhof im Rahmen der Projekttage zum Thema „Spannungen" durchgeführt. Materialien zum Projekt können von der Projekt-Homepage [1] geladen werden.

Literatur

[1] A. Fest, U. Kortenkamp: Visage – Visualisierung von Graphenalgo-rithmen. http://www.cinderella.de/visage/
[2] B. Korte, J. Vygen: Combinatorial Optimization. Springer 2001
[3] U. Kortenkamp, J. Richter-Gebert: Cinderella.2 – Die interaktive Geometrie-Software. http://www.cinderella.de/
[4] B. Lutz-Westphal: Günstig verbunden – Minimal aufspannende Bäume. In S. Hußmann, B. Lutz-Westphal (Hrsg.): Kombinatorische Optimierung erleben. In Schule und Studium, Vieweg 2007
[5] Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I, Fach Mathematik, Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport, Berlin 2006

Marei FETZER, Frankfurt a. M.

„Interaktion am Werk“ - Eine schulpraktische Fragestellung und ihre wissenschaftlichen Folgen

„Interaktion am Werk“ ist der Titel der Publikation zu meiner Dissertation (Fetzer 2007). Fünf Jahre Forschungsarbeit, gebannt auf gut dreihundert Seiten zwischen zwei Buchdeckeln. Den Anfang nahm diese Arbeit jedoch viel früher. Während meiner Zeit als Grundschullehrerin beobachtete ich, dass die Schülerinnen und Schüler meiner Klasse Mathematik vornehmlich mit Auswendiglernen assoziierten. Mathematikunterricht hatte ihrer Erwartung nach nichts zu tun mit Aktivitäten wie Entdecken, Ausprobieren oder Diskutieren. Wie konnte ich dem begegnen? Im Bemühen, die Einstellung der Kinder zu Mathematik zu verändern und ihr Lernen zu intensivieren, ließ ich die Schülerinnen und Schüler über mathematische Fragestellungen schreiben. Im Anschluss diskutierten die Kinder auf der Grundlage ihrer selbst verfassten Werke alternative Bearbeitungsweisen. Einzelne Kinder stellten ihren Lösungsweg an der Tafel vor. Schon nach kurzer Zeit konnte ich erfreuliche Auswirkungen dieser Arbeitsweise beobachten: Das Lernen der Kinder veränderte sich. Drei Jahre Arbeit mit Schreibanlässen in meiner Klasse haben mich als Lehrerin davon überzeugt, dass diese Methode das Mathematiklernen der Kinder verbessert.

Diese aus den Notwendigkeiten der Praxis erwachsene Idee der Arbeit mit Schreibanlässen bildet die Grundlage meiner Forschungsaktivitäten während meiner Promotionszeit. Für die Grundschullehrerin ist mit den positiven Erfahrungen mit der Methode ‚Schreiben im Mathematikunterricht’ das Ziel erreicht. Die Kinder setzen sich intensiver mit mathematischen Inhalten auseinander, wenn sie schreiben und auf der Grundlage ihrer Texte diskutieren. Für die Wissenschaftlerin dagegen stellt dieser Befund nicht den Zielpunkt, sondern den Ausgangspunkt der Forschungstätigkeit dar. Was ist das Spezifische an der Arbeit mit Schreibanlässen? Wo genau sind die lernförderlichen Momente beim Verschriftlichen und beim Diskutieren über selbst verfasste mathematische Texte zu verorten? Wie entstehen Situationen, die mathematisches Lernen begünstigen und wie lassen sie sich initiieren? Diesen und anderen Fragen gehe ich in meiner Dissertation nach. Dabei konzentriere ich mich auf die interaktiven Prozesse im Unterricht.

Interaktionsprozesse, in denen das Schreiben oder schriftlich fixierte Werke eine Rolle spielen, unterscheiden sich grundlegend von rein verbalen Unterrichtsprozessen. Interaktion am Werk ist grafisch basierte Interaktion. Sie ist geprägt von den Anforderungen des Verschriftlichens und bestimmt durch das Veröffentlichen der Werke. Aktivitäten wie Lesen, Zeigen und Verweisen sind aus dieser Interaktion nicht wegzudenken. Entsprechend unterscheiden sich auch die Lernbedingungen grafisch basierter Interaktionsprozesse von den Lernbedingungen verbal geprägter Unterrichtssituationen. Grafisch basierte Interaktionsprozesse, wie sie die Arbeit mit Schreibanlässen bestimmen, bieten spezifische Möglichkeiten für mathematisches Lernen. Diese Bedingungen der Lernermöglichung (vgl. Miller 1986) bilden meinen Forschungsfokus bei der Entwicklung einer Interaktionstheorie grafisch basierten Lernens.

Aus meiner wissenschaftlichen Arbeit sind Ergebnisse ganz unterschiedlicher Art hervorgegangen. Sie lassen sich den Bereichen Interaktionstheorie, Mathematikdidaktik und Unterrichtspraxis zuordnen. Im Folgenden werde ich schlaglichtartig ausgewählte Forschungsergebnisse aus den genannten drei Bereichen vorstellen. Auf diese Weise möchte ich in diesem Beitrag einen Einblick in meine Dissertation ermöglichen. Zunächst beginne ich mit einigen Worten zur empirischen Studie.

Die empirische Studie

Die empirische Studie erstreckte sich über drei Jahre, in denen ich mit den Kindern meiner Klasse vom ersten bis zum dritten Schuljahr mit Schreibanlässen gearbeitet habe. Da mich die unterrichtlichen Interaktionsprozesse interessierten, habe ich mich nicht darauf beschränkt, die fertigen Schülerwerke einzusammeln, sondern außerdem den Unterricht mit der Videokamera aufgenommen. Die Filmaufnahmen wurden transkribiert. Diese Transkripte bilden die Grundlage meiner Analysen. Dabei greife ich zur Rekonstruktion der Interaktionsprozesse auf verschiedene interpretative Verfahren zurück.

Die Arbeit mit Schreibanlässen ist im Rahmen meiner empirischen Studie auf zwei Phasen angelegt, die Verschriftlichungsphase und die Veröffentlichungsphase. Während der Verschriftlichungsphase arbeiten die Kinder allein oder zu zweit an mathematischen Problemaufgaben. Sie sind bemüht, ihren Bearbeitungsweg schriftlich zu fixieren. Die Veröffentlichungsphase ist eine Plenumssituation. Einzelne Kinder stellen ihren Lösungsweg an der Tafel vor. Es werden alternative Bearbeitungsweisen diskutiert. Während der Veröffentlichungsphase haben alle Kinder ihr eigenes schriftlich fixiertes Werk jeder Zeit zur Hand und vor Augen.

Meine interaktionistische Herangehensweise drückt sich in der Anlage der Studie an zwei Stellen aus. Zum Einen lasse ich die Kinder zu zweit schreiben. Auf diese Weise gestaltet sich das Verschriftlichen als interaktiver Prozess, der mit interaktionsanalytischen Verfahren rekonstruierbar wird. Zum Anderen integriere ich die Interaktionssituation des Veröffentlichens in die Arbeit mit Schreibanlässen: Meine Untersuchungen enden nicht, wenn die Kinder ihr Schreibprodukt in Händen halten. Ein Großteil meiner Forschung beginnt an dieser Stelle. In den Untersuchungen zeigt sich, dass unter interaktionstheoretischer Perspektive und in Bezug auf mathematisches Lernen gerade die Veröffentlichungsphase von herausragender Bedeutung ist.

Ergebnisse auf interaktionstheoretischer Ebene: Adaption des Analyseverfahrens

Wie müssen bestehende interaktionistische Ansätze ausdifferenziert bzw. weiterentwickelt werden, um den spezifischen Gegebenheiten einer grafisch basierten Interaktion gerecht werden zu können?

Bestehende Interaktionstheorien zum mathematischen Lernen erfassen die face–to–face Situation, die von Unmittelbarkeit von Zeit und Raum geprägt ist. Sie fokussieren den phonischen Aspekt, also das gesprochene Wort. Der Begriff ‚Interaktion' bezieht sich dabei auf die Interaktion zwischen menschlichen Akteuren. Interaktion im Zusammenhang der Arbeit mit Schreibanlässen unterscheidet sich jedoch von diesem Interaktionskonzept. Sobald geschrieben wird, sind Raum und Zeit der Interaktion überbrückbar. Die Produktion und die Rezeption einer Äußerung können sowohl zeitlich als auch räumlich weit auseinander liegen. Grafisch basierte Aktivitäten wie das Verschriftlichen und das Lesen der Werke sind integrativer Bestandteil der Interaktion. Folglich stellt eine Fokussierung auf die phonischen Aspekte des Interaktionsprozesses eine gravierende Einschränkung dar. Sogar ein Interaktionsverständnis, welches die Interaktion als ausschließlich von menschlichen Akteuren bestimmt annimmt, wird zu kurz greifen. Es sind nicht nur die menschlichen Akteure, die das Unterrichtsgeschehen beeinflussen. Auch die Schülerwerke und der Tafelanschrieb spielen eine Rolle im Interaktionsprozess. Diese Materialitäten wirken im Interaktionsverlauf.

Klassische Interaktionstheorien sind folglich unzureichend für die Beschreibung grafisch basierter Interaktionsprozesse. Um die Arbeit mit Schreibanlässen theoretisch zu fassen, wird die Entwicklung einer Interaktionstheorie grafisch basierten Lernens erforderlich. Das beginnt mit der Adaption der Analyseverfahren. Angemessene Analyseverfahren bilden die Basis für methodisch saubere Forschungsarbeit und Theorieentwicklung. Im Folgenden möchte ich anhand der Interaktionsanalyse verdeutlichen, warum Anpassungsbedarf des Analyseverfahrens besteht und wie ich in meiner Arbeit diesbezüglich vorgegangen bin.

Die ‚traditionelle' Interaktionsanalyse ist eine Methode zur Rekonstruktion der thematischen Entwicklung. Die Perspektive ist ausschließlich auf interaktive Prozesse gerichtet. Bei der Arbeit mit Schreibanlässen rückt jedoch eine Übergangsproblematik in den Blick, denn die Verschriftlichungs- und die Veröffentlichungsphase sind zwei unterschiedliche Interaktionssituationen. Kontinuitäten zwischen beiden Phasen lassen sich nur auf der individuellen Ebene, nicht aber auf der interaktiven Ebene rekonstruieren. Damit rücken die Schülerwerke in den Blickpunkt. Sie sind sowohl für die einzelnen Schülerinnen und Schüler als auch für die Wissenschaftlerin der greifbare thematische Link zwischen beiden Phasen. Mit dem Werk in der Hand und vor Augen eröffnen sich für die Kinder während des Veröffentlichens ganz spezifische Handlungsmöglichkeiten. Somit beeinflussen die Schülerwerke den Interaktionsverlauf der Veröffentlichungsphase. Dieser Tatsache muss auf der Analyseebene Rechnung getragen werden, indem die Schülerwerke systematisch in die Analyse integriert werden.

Grundlage der Einbindung der Schülerwerke in das Analyseverfahren ist in meiner Arbeit die Adjacency Pair Beziehung nach Sacks (1996). Ich integriere die Werke auf der Turn-Ebene in die Interaktionsanalyse. Voraussetzung dafür ist ein verändertes Verständnis des Turnbegriffs. In der ‚klassischen' Interaktionsanalyse werden Äußerungen zunächst sequenziell als Einzeläußerungen interpretiert. Im Anschluss wird jede Äußerungen als Turn auf vorherige Äußerungen gedeutet (s. z.B. Fetzer/Krummheuer 2005). Äußerungen werden auf diese Weise als zusammengehörende Paare (Adjacency Pairs) verstanden, wobei die erste Äußerung als First Pair Part und die zweite als Second Pair Part interpretiert wird. In meiner Dissertation erweitere ich dieses streng an Äußerungen und menschliche Akteure gebundene Verständnis des Turns. Aktivitäten können nicht nur im Zusammenhang vorheriger Äußerungen, sondern auch als Folge des Lesens des eigenen Werkes verstanden werden. In diesem Fall ist das Werk der First Pair Part und das Schülerhandeln der Second Pair Part. Angenommen, das Kind hätte zuvor auf sein eigenes Werk geschaut, wie ließe sich sein Handeln dann deuten? Dieses hier angedeutete von mir entwickelte Analyseverfahren eröffnet erweiterte Interpretationsmöglichkeiten. In vielen Fällen öffnet es der Wissenschaftlerin die Augen, wie substanziell Schülerinnen und Schüler argumentieren (s. z. B. Fetzer 2007, S. 137ff.).

Dieses Analyseverfahren birgt auch für andere Forschungsfelder Potenzial. Eine Beschränkung auf die Analyse grafisch basierter Interaktionsprozesse im Mathematikunterricht ist nicht gegeben. Des Weiteren lässt sich dieses Verfahren in den Grundzügen auch auf die Analyse von Interaktionsprozessen übertragen, in denen andere Materialitäten als die Tafel und Schülerwerke eine Rolle spielen. Außerdem ist die Idee, den Turnbegriff zu erweitern, anschlussfähig an Konzepte anderer Disziplinen. Latour geht in seinem Werk „Reassembling the Social“ (2005) beispielsweise davon aus, dass das Soziale nicht nur von menschlichen Akteuren, sondern auch von nicht-menschlichen Akteuren bestimmt ist und somit ‚neu gedacht’ werden muss. Auch Fiehler (1993) weist mit seiner Unterscheidung in kommunikativ bzw. praktisch dominierte Tätigkeitszusammenhänge darauf hin, dass der Turnbegriff sich nicht ausschließlich auf Äußerungen, sondern auch auf Handlungen und Materialitäten beziehen kann.

Ergebnisse auf mathematikdidaktischer Ebene:
Mathematisches Lernen beim Veröffentlichen

Welche Bedingungen ermöglichen im Zusammenhang der Arbeit mit Schreibanlässen mathematisches Lernen?

Im Allgemeinen wird das Lernen im Zusammenhang der Arbeit mit Schreibanlässen in der Verschriftlichungsphase vermutet. Im Rahmen meiner empirischen Studie lassen sich jedoch insbesondere in der Veröffentlichungsphase optimierte Lernbedingungen rekonstruieren. Wenn die Kinder einzelne Lösungswege an der Tafel vorstellen und alternative Bearbeitungsweisen im Plenum diskutieren, sind die Bedingungen für mathematisches lernen besonders günstig. Warum?

Das Besondere und im Bezug auf Lernermöglichung das Ausschlaggebende ist das Vorhandensein der medial grafischen Elemente Tafel und Schülerwerke. Jedes Kind hat sein eigenes Werk zur Hand und vor Augen, während an der Tafel erklärt wird. Vergleichen und Abgleichen zwischen Werk und Tafel ist für die Schülerinnen und Schüler jeder Zeit möglich. So werden Konsistenzen und Inkonsistenzen zwischen beiden medial grafischen Elementen identifizierbar. Unterschiede oder Gemeinsamkeiten in der Aufgabenbearbeitung stehen den Kindern gleichsam schwarz auf weiß vor Augen. Das gibt ihnen Sicherheit, sich aktiv in das Interaktionsgeschehen einzubringen und einzuwerfen „Ich kapier des irgendwie net“ (Fetzer 2007, S. 191) oder zu bestätigen „Ich hab das Gleiche gemacht“ (ibid., S. 262). Es ist die Grundlage zum Nachfragen „Wie kummsch n dann auf die zwölf“ (ibid., S. 201) und zum Anzweifeln „Das müsste doch eigentlich zwölf und ein Millimeter geben“ (ibid., S. 197).

Werden Schülerinnen und Schüler in der Veröffentlichungsphase aktiv tätig, können sie in ihrer Äußerung Bezug auf ihr eigenes Werk zu nehmen „Isch hatt auch so- guck- ja“ (ibid., S. 192). Oder sie können beim Sprechen durch Zeigen auf die Tafel verweisen „sieben Millimeter- da vorne“ (ibid. S. 198). Grafisch basierte Interaktionssituationen, wie sie bei der Arbeit mit Schreibanlässen entstehen, ermöglichen neben dem verbalen auch das non-verbale Argumentieren. Der Handlungsspielraum ‚verdoppelt' sich gegenüber ausschließlich verbalen Klassensituationen. Manches, was auf der rein verbalen Ebene für die Grundschulkinder nur schwer zu erklären ist, lässt sich durch unterstützendes Zeigen überzeugend darstellen.

Gleichzeitig werden die Argumentationen durch das erweiterte Handlungsspektrum expliziter und somit leichter nachvollziehbar. Es lässt sich besser feststellen, worauf sich einzelne Kinder beziehen, wenn sie dies durch Zeigen verdeutlichen „Unn dann hab isch von den zehn hier- die da hab isch die zehn raus" (ibid., S. 201f.). Das wiederum erleichtert anderen Kindern den aktiven Einstieg in das Unterrichtsgeschehen. Sie bringen sich ein, sie erklären und argumentieren.

In der Folge erhöht sich der Anspruch an das argumentative Niveau der Beiträge. Die Interaktionssituation verdichtet argumentatorisch. Das Partizipieren an einem solchen Interaktionsprozess lohnt sich in besonderem Maße. Die Bedingungen für mathematisches Lernen sind günstig. Das gilt für diejenigen Schülerinnen und Schüler, die sich aktiv in das Unterrichtsgeschehen einbringen. Ihre Argumentationen müssen Substanz haben, um in der argumentatorisch verdichteten Situation akzeptiert zu werden. Aber auch die Kinder, die eine zuhörende Rolle einnehmen, können viel Mathematik lernen. Es wird Mathematik auf hohem Niveau geboten. Die Lernbedingungen sind in Veröffentlichungssituationen sowohl für aktiv tätige als auch für rezipierende Kinder optimiert.

Ergebnisse auf unterrichtspraktischer Ebene:
Konsequenzen für die Arbeit mit Schreibanlässen

Welche unterrichtspraktischen Konsequenzen lassen sich im Anschluss an die theoretischen Weiterentwicklungen ziehen?

Im Anschluss an die empirische Studie und die theoretischen Weiterentwicklungen lassen sich Konsequenzen für den Einsatz der Arbeit mit Schreibanlässen im Unterricht ziehen (vgl. Fetzer 2007, S. 246ff.). Im Folgenden möchte ich drei Aspekte herausgreifen.

Aufgabenauswahl

In der Mathematikdidaktik hat es Tradition, sich über die Auswahl und die Formulierung von Aufgaben Gedanken zu machen. Immer wieder wird die Bedeutung des Aufgabenpotenzials betont. Auf der Basis meiner Dissertation lässt sich die Frage nach der Aufgabenauswahl in provokativer Weise beantworten: Die Wahl der Aufgabe ist fast unerheblich. Unter einer interaktionistischen Perspektive ist es nicht die Aufgabe, die Lernen ermöglicht, sondern die sich auf der Grundlage der Aufgabe ergebenden Interaktionssituationen. Deshalb ist es nur *fast* unerheblich, welche Aufgaben man für die Arbeit mit Schreibanlässen wählt. Es ist entscheidend, dass alternative Vorgehensweisen im Aufgabenbearbeitungsprozess realisierbar sind. Die Möglichkeit, Inkonsistenzen zu identifizieren, muss in der Aufgabe angelegt sein. Dann können die Kinder aktiv in die Plenumsdiskussion eingreifen und sagen: Ich habe es anders. Als Folge entwickeln sich gehäuft argumentatorisch verdichtete Interaktionssituationen, die Lernbedingungen optimieren sich.

Regelmäßigkeit im Einsatz

Die Arbeit mit Schreibanlässen lebt von der Regelmäßigkeit im Einsatz. Das gilt sowohl für das Verschriftlichen als auch für das Veröffentlichen. In meiner Studie lässt sich rekonstruieren, dass die Grundschülerinnen und Grundschüler dann vom Verschriftlichen profitieren, wenn sie wissen, für welche Rezeptionssituation sie schreiben. Erst, wenn sie Erfahrungen mit dem Veröffentlichen gemacht haben, greift das Lernpotenzial des Verschriftlichens. Dann versuchen sie, sich als versierte Rechner und gewandte Erklärer darzustellen und lernen beim Schreiben viel Mathematik. (vgl. Fetzer 2003) Auch für die Veröffentlichungsphase zählt die Erfahrung mit der Situation. Mit der Zeit erfassen die Grundschulkinder, dass der Tafelanschrieb nicht immer ‚die Wahrheit' ist. Sie lernen das, was an der Tafel steht, in Frage zu stellen und zu kritisieren: „Dann würd des ja eintausend- einhundert und elf geben- weil da steht elf elf" (Fetzer 2007, S. 236). Argumentationstheoretisch gesprochen (vgl. Toulmin 1969) erkennen die Kinder, dass nicht nur gegebene Daten, sondern auch bezweifelbare Konklusionen an die Tafel geschrieben werden können. Des Weiteren gewinnen die Schülerinnen und Schüler erst mit der Zeit Vertrauen in die argumentative Verlässlichkeit des eigenen Werkes. Sie erfassen ihr Werk als für sich und andere überzeugende Argumentationsgrundlage, auf die sie sich stützen können. Das gibt ihnen den Mut, sich aktiv in das Geschehen einzubringen. In der Folge verbessern sich sowohl ihre eigenen Lernbedingungen, als auch die der zuhörenden Kinder. Es lässt sich rekonstruieren, wie sich in solchen Fällen die unterrichtliche Interaktionssituation argumentatorisch verdichtet.

Erst verschriftlichen, dann veröffentlichen

Wie in diesem Beitrag in aller Kürze angerissen, ist es vor allem die Veröffentlichungssituation, die intensives mathematisches Lernen begünstigt (vgl. Fetzer 2006). Aber auch das Potenzial des Verschriftlichens lässt sich nur in der Kombination mit der Veröffentlichungsphase voll ausschöpfen.

Die Kinder lernen beim Verschriftlichen, indem sie die Veröffentlichungssituation gedanklich vorwegnehmen. Sie versuchen, auf den beim Verschriftlichen lediglich gedachten Rezipienten auf eine bestimmte Art und Weise zu wirken. Sie sind bemüht, sich ihm gegenüber als gute Mathematiker darzustellen. Grundschulkinder verschriftlichen, um zu veröffentlichen. Deshalb gehören Verschriftlichen und Veröffentlichen untrennbar zusammen.

Schlussbemerkung

Ausgangspunkt meiner Dissertation ist eine unterrichtspraktische Fragestellung. Als Grundschullehrerin ging es mir darum, das mathematische Lernen meiner Schülerinnen und Schüler zu verbessern. Als Wissenschaftlerin hat mich interessiert, *wie* die Arbeit mit Schreibanlässen das Lernen der Kinder beeinflusst. Im Bemühen, die vorgefundenen Interaktionsprozesse zu analysieren und zu beschreiben, habe ich rekonstruktiv gearbeitet. Einem solchen Vorgehen wird in der Mathematikdidaktik nicht immer positiv begegnet. Es sei im Hinblick auf Innovation von Unterricht wenig hilfreich. Ich möchte mit diesem Beitrag dazu anregen, meine Arbeit „Interaktion am Werk“ als Beispiel dafür zu nehmen, wie rekonstruktive Arbeiten konstruktive Anschlusspunkte bieten und somit auf Veränderung von Mathematikunterricht hinwirken können.

Literatur

Fetzer (2003): Verschriftlichungsprozesse im Mathematikunterricht der Grundschule aus interaktionstheoretischer Sicht. In: JMD 24 H. 3/4, S. 172-189.

Fetzer (2006): Veröffentlichen im Mathematikunterricht – ein Beitrag zu einer Interaktionstheorie grafisch basierten Lernens. In: Jungwirth/Krummheuer (Hrsg.): Der Blick nach Innen. Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht. Band 1. Münster: Waxmann.

Fetzer (2007): Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule. Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Fiehler (1993): Spezifika der Kommunikation in Kooperationen. In: Schröder (Hrsg.): Fachtextpragmatik. Tübingen: Narr, 343-357.

Krummheuer/Fetzer (2005): Der Alltag im Mathematikunterricht. Beobachten, Verstehen, Gestalten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Miller (1986): Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Sacks (1996): Lectures on Conversation. Cornwall: Blackwell Publishers.

Toulmin (1969): The uses of argument. Cambridge: Cambridge University Press.

Andreas FILLER, Heidelberg

Modellierung als Entwurf von Prozessen: Wie müssen die Aufzüge fahren, damit das Chaos aufhört?

Im Vordergrund didaktischer Diskussionen und Untersuchungen zur mathematischen Modellierung stehen Modelle, die reale Situationen möglichst gut beschreiben, erklären, teilweise auch prognostizieren und einer mathematischen Lösung zugänglich machen (deskriptive Modelle, vgl. [3], [5] und [6]). Hierzu findet sich in der mathematikdidaktischen Literatur eine Fülle von Anregungen. Von deskriptiven Modellen werden normative Modelle unterschieden, wofür jedoch wesentlich weniger Beispiele vorliegen. In dem vorliegenden Beitrag soll anhand einer Beispielaufgabe auf Modelle eingegangen werden, die sich als normative Modelle bezeichnen ließen; allerdings erscheinen die in der Informatik gebräuchlichen Begriffe „Entwurfsmodell" bzw. „Prozessmodell" geeigneter (vgl. z. B. [7] und [8]).

Ein Blick auf den sehr vielseitigen und verzweigten Modellbegriff der Informatik (die mitunter als die „Wissenschaft von der Modellbildung" bezeichnet wird und auf einen sehr allgemeinen Modellbegriff aufbaut, vgl. [1] und die Bezugnahme darauf in [7] und [8]) erscheint u. a. lohnenswert, um das Spektrum der im Mathematikunterricht behandelten Modelle zu erweitern. Zum Unterschied zwischen Modellierung im Mathematik- und Informatikunterricht schrieb Schwill: „*Originale mathematischer Modellierung sind überwiegend Teil der natürlichen Welt. Meist stehen sie im Zusammenhang mit Problemen geometrischen oder physikalischen Charakters ... und beruhen auf (in der Schule) wenigen quantifizierbaren Daten, die funktional miteinander verbunden sind. Die Informatik modelliert meist Sachverhalte, die einer vom Menschen geschaffenen Welt entstammen (z. B. Bürovorgänge, Fahrzeugströme, ...). Damit fehlt ihnen eine natürliche Einfachheit*" ([7], S. 23). Diese Sicht (eines Informatikdidaktikers) auf Modellbildungen im Mathematikunterricht entspricht sicherlich den hauptsächlich behandelten Modellen und entsprechenden Unterrichtsvorschlägen, charakterisiert aber m. E. keine Grenzen mathematischer Modellierung. Vielmehr sind mathematische Methoden auch leistungsfähig, um von Menschen geschaffene Sachverhalte oder Prozesse nicht nur zu beschreiben, sondern auch möglichst optimal zu gestalten bzw. zu verändern. Dies soll im Folgenden anhand einer Aufgabe illustriert werden, der hauptsächlich eine in der Informatik sehr gebräuchliche Art von Modellen (Entwurfsmodelle, spezieller handelt es sich hier um Prozessmodelle) zugrundeliegt. Die Lösungswege hingegen beruhen hauptsächlich auf mathematischen Überlegungen und Hilfsmitteln; die Vorgehensweise des

Modellierens lässt sich gut durch ein mehrfaches Durchlaufen des bekannten Modellierungskreislaufes nach Blum ([2], S. 200) beschreiben. Die Aufgabe (aus dem niederländischen Mathematikwettbewerb „A-lympiade“, vgl. [9]; im Folgenden nur sehr verkürzt wiedergegeben) wurde in einem Schülerzirkel mit Schülern 7. und 8. Klassen erprobt.

Ein Hochhaus mit 1200 Angestellten hat ein Erdgeschoss und die Etagen 1 bis 20, in denen jeweils 60 Angestellte arbeiten. Es gibt 6 Aufzüge mit einer Kapazität von jeweils 20 Personen. Zu Arbeitsbeginn kommt es zu chaotischen Situationen und langen Wartezeiten. Die Direktion stellt eine Aufsicht ein, die Maßnahmen ergreifen soll, um den Strom der Angestellten flüssiger verlaufen zu lassen. Folgende Fakten zur Geschwindigkeit der Aufzüge werden ermittelt:

- Zeitbedarf von Stillstand bis zu Stillstand ein Stockwerk höher oder tiefer: 8 s
- Von Stillstand bis Passieren des nächst höher oder tiefer gelegenen Stockwerks: 5 s
- Zeit zwischen dem Passieren zweier benachbarter Stockwerke: 3 s
- Vom Passieren einer Etage bis zum Stillstand in einem benachbarten Stockwerk: 6 s
- Ein Aufzug steht in einem Stockwerk durchschnittlich 10 s still.

Alle Angestellten kommen zwischen 8:45 und 9:00 herein (gleichmäßiger Strom.

Aufgabe I: Wie lange kann ein Fahrstuhl insgesamt im schlimmsten Falle unterwegs sein, bis er wieder im Erdgeschoss ankommt? Berechnet, wie lange es ungefähr dauert, bis alle Angestellten auf dem richtigen Stockwerk angekommen sind.

Bei diesem Aufgabenteil ist zunächst ein deskriptives Modell zu erstellen, wozu vor allem die Idealisierung vorzunehmen ist, dass die Aufzüge auf jeder Etage halten.[1] Für die Mathematisierung muss die Fahrt eines Aufzugs beschrieben werden (Abb. 1), woran sich sehr elementare Rechnungen anschließen.

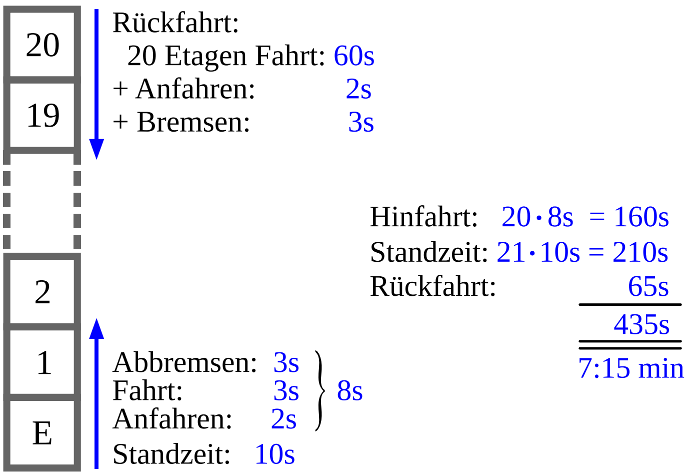


Abbildung 1

Als Ergebnis erhält man (bei Annahme des unwahrscheinlichen schlimmsten Falles) eine Fahrzeit von 7:15 min je Aufzug, womit der Transport insgesamt ca. 71 Minuten dauert. Obwohl die reinen Berechnungen sehr elementar sind, traten bei den beteiligten Schülern viele Fehler (vor allem

[1] Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist äußerst gering: $\frac{20!}{20^{20}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-8}$. Dennoch erschien die Modellannahme den Schüler selbstverständlich (Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte waren ihnen noch nicht vertraut). Wichtig ist es m. E., zu betonen, dass es sich um den schlimmsten Fall handelt und die Situation i. Allg. weniger dramatisch ist.

aufgrund vergessener Stand- und Bremszeiten) auf, die jedoch im Gespräch gegenseitig korrigiert werden konnten, wobei eine Schema ähnlich zu Abb. 1 gemeinsam entwickelt wurde. Es schloss sich ein zweiter Aufgabenteil an, wobei nun drei Aufzüge nur die Stockwerke 1-10 und drei Aufzüge die Stockwerke 11-20 bedienten und sich im Ergebnis bereits eine erhebliche Verbesserung der Situation einstellte.

Wesentlich offener sind die Aufgaben III und IV gehalten:

> Überlegt euch mindestens drei Fahrpläne für eine schnellere Abwicklung des Aufzugsverkehrs. Benennt für jedes Modell Argumente, die dafür oder dagegen sprechen.
>
> Verfasst ein Konzept für die Direktion, in dem ihr Vorschläge, wie der Menschenstrom zügiger weitergeleitet werden kann, vorstellt. Stützt das Konzept durch Berechnungen.
>
> Entscheidet, inwiefern ihr folgenden Umständen Rechnung tragen wollt:
>
> - Die Angestellten möchten nicht zu viel gegängelt werden und keine zu komplizierte Regelung – aber sie wollen schnell ankommen.
> - Die Direktion hat ihren Sitz im 15-ten Stockwerk und hätte in eurem Konzept am liebsten eine Vorzugsbehandlung.

Von den Schülern wurden folgende Vorschläge unterbreitet:

1. Die drei Aufzüge, welche zunächst die Stockwerke 1-10 bedienen, helfen den oberen Aufzügen, wenn sie mit den unteren Etagen fertig sind.
2. Bewohner der oberen Stockwerke müssen im 10. Stockwerk umsteigen. Dann benötigen die oberen Aufzüge weniger Zeit.
3. Jeder Aufzug steuert nur 3-4 Etagen an.
4. Die 3 Aufzüge, die in die unteren Etagen fahren, steuern mehr Etagen an (z. B. 1-11), als diejenigen, die in die oberen Etagen fahren.

Nach Diskussionen wurden die Vorschläge 3 und 4 bevorzugt. Die Schüler berechneten einige Beispiele, wobei die Erkenntnis reifte, dass ein systematischeres Vorgehen sinnvoll wäre. Es wurde ein Term für die Fahrtdauer eines Aufzugs aufgestellt, der die Etagen n bis m bedient (Abb. 2):

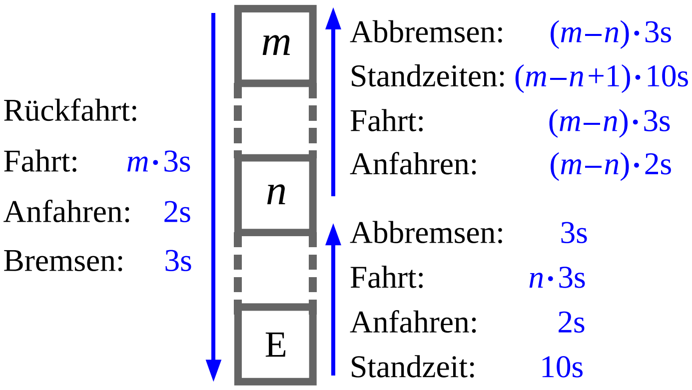


Abbildung 2

$$3m+5 \;+\; 3n+15 \;+\; 8(m-n)+10(m-n+1) \;=\; 21m-15n+30\,.$$

Unter Berücksichtigung der Anzahl $(m-n+1)\cdot 60$ von Angestellten, die in den Stockwerken n bis m arbeiten und der Kapazität der Aufzüge konnten die Schüler die Gesamtdauer für den Transport aller Angestellten in die Etagen n bis m berechnen, falls nur ein Aufzug in diese Etagen fährt:

$3 \cdot (m-n+1) \cdot (21m-15n+30)$. Auch hierbei traten diverse Fehler auf, die jedoch im Gespräch aufgeklärt werden konnten.

Unter Nutzung des aufgestellten Terms konnten die Schüler nun mithilfe einer Tabellenkalkulation viele verschiedene Varianten vergleichen und optimieren.

2 Aufzüge je Etage				
Aufzüge	von n	bis m	Zeit (s)	in min
1 und 2	1	7	1701	28
3 und 4	8	14	2142	35
5 und 6	15	20	2025	33

1 Aufzug je Etage				
Aufzug	von n	bis m	Zeit (s)	in min
1	1	4	1188	19
2	5	8	1476	24
3	9	11	1134	18
4	12	14	1296	21
5	15	17	1458	24
6	18	20	1620	27

1 Aufzug / Etage, Direktion bevorzugt				
Aufzug	von n	bis m	Zeit (s)	in min
1	1	5	1800	30
2	6	9	1548	26
3	10	13	1836	31
4	14	15	810	14
5	16	18	1512	25
6	18	20	1620	27

Die Bearbeitung der skizzierten offenen Modellierungsaufgabe erstreckte sich über zwei Zirkel von je 90 Minuten. Möglichst günstige Abläufe zu entwerfen, stellte für die Schüler eine reizvolle Herausforderung dar.

Ein Blick auf Modellierungskonzepte der Informatik kann auch Modellierungen im Mathematikunterricht bereichern. Entwurfsmodelle können dazu beitragen, den Modellierungskreislauf mehrfach zu durchlaufen und die Phasen der Strukturierung sowie Rückübertragung stärker zu betonen.

Literatur

[1] Apostel, L.: Towards the formal study of models in the non-formal sciences. In: Freudenthal, H. (Hrsg.): The concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciences. Dordrecht: Reidel, 1961.

[2] Blum, W.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In: Mathematische Semesterberichte 32 (1985), 2, S. 195-232.

[3] Blum, W.: Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In: Kadunz et al. (Hrsg.): Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 23. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1996, S. 15-38.

[4] Blum, W.: Mathematisches Modellieren – zu schwer für Schüler und Lehrer? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim: Franzbecker, S. 3-12.

[5] Henn, H.-W.: Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen. Oder: Von guten und schlechten Modellen. In: Hischer, H. (Hrsg.): Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 1999, S. 9-17.

[6] Maaß, K.: Mathematisches Modellieren. Berlin: Cornelsen Scriptor, 2007.

[7] Schwill, A.: Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik. In: Hischer, H.; Weiß, M. (Hrsg.): Fundamentale Ideen. Hildesheim: Franzbecker, 1995.

[8] Thomas, M.: Informatische Modellbildung. Dissertation. Univ. Potsdam, 2002.

[9] The Mathematics A-lympiad: **http://www.fi.uu.nl/alympiade/en**; dt. Übersetzungen: **http://www.learn-line.nrw.de/angebote/alympiade**.

Astrid FISCHER, Essen

Darstellen mathematischer Strukturen mit Hilfe von zeichnerischen Diagrammen - Beispiele aus Klasse 5

Die Verwendung unseres algebraischen Zeichensystems beruht auf vielen Konventionen, mit denen Schülerinnen und Schüler der Klasse 5 noch nicht vertraut sind. Dennoch sind sie in der Lage, sich mit strukturellen Beziehungen aus einander zu setzen, und haben Möglichkeiten, sie zum Ausdruck zu bringen. Beispielhaft werden in diesem Beitrag verschiedene Wege aufgezeigt, wie eine Schülerin die Idee einer unbestimmten Zahl kommuniziert.

Das Forschungsprojekt

Lange Zeit waren Mathematikdidaktiker der Ansicht, dass Kinder bis 12 oder 13 Jahren nicht in der Lage seien, Algebra zu verstehen, weil ihre kognitiven Möglichkeiten noch nicht ausreichend ausgebildet seien. In den vergangenen zwei Jahrzehnten wurden jedoch vermehrt Ansätze entwickelt, jüngere Schüler auf die Bedeutung und den Gebrauch der algebraischen Sprache vorzubereiten.[1]

Mein Forschungsprojekt stellt die Frage nach Fähigkeiten algebraischen Denkens, das Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 5 besitzen, und nach Möglichkeiten, dieses auszubauen. Damit überhaupt Hinweise darauf beobachtet werden können, brauchen die Kinder Anlässe zur Auseinandersetzung mit algebraischen Fragestellungen. Dazu wurde eine Lernumgebung entwickelt, die eine Perspektive von Algebra als Generalisierung[2] von beobachteten Phänomenen einnimmt: Ausgangspunkt ist die Beschäftigung mit arithmetischen Aufgaben, die sich strukturell gleichen. Diese bergen ein Potential für höhere Betrachtungsebenen: Zunächst liegen Beschreibungen der Gemeinsamkeiten der Aufgabenstellungen nahe und es können die Wirkungen der Rechenoperationen, welche sich in den Aufgaben gleichen, untersucht und erörtert werden. Sodann bietet diese Beschäftigung Raum für die Entwicklung von Vorstellungen zu Variablen, und Variablenterme können der gemeinsamen Repräsentation strukturgleicher Rechenaufgaben dienen.

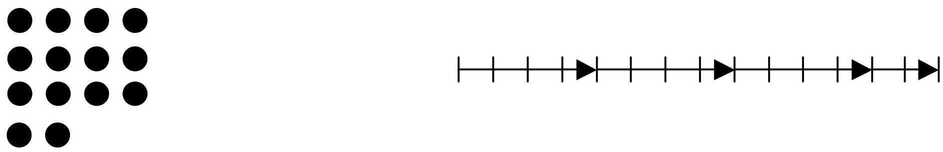
---

[1] In Malle (1993) werden z.B. im Gegensatz zur bis dahin üblichen Praxis Vorschläge zur Einführung von Variablen im 5. und 6. Schuljahr gemacht. Vgl. S. 15 und 65 – 78.
[2] Vgl. die Einteilung von Bednarz, Kieran und Lee (1996) von Zugängen zur elementaren Algebra in die vier Kategorien des Verallgemeinerns, Problemlösens, Modellierens und der Funktionen.

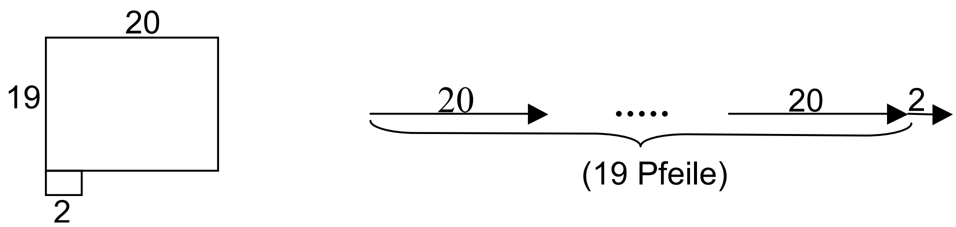
Die Lernumgebung

Die Kinder werden in einer Einführungsphase mit zwei Darstellungsarten für arithmetische Aufgaben vertraut gemacht, die ihnen zumeist aus dem Grundschulunterricht bekannt sein dürften: Das erste sind Punktmuster, das zweite Pfeilsequenzen am Zahlenstrahl. Beide respektieren die Strukturen der natürlichen Zahlen, also die Rechengesetze für die Operationen + und ·, und sind daher Diagramme im Sinne von Ch. Peirce[3], an denen durch regelkonforme Transformationen Erkenntnisse gewonnen werden können. Sie eignen sich daher zur Untersuchung von Rechenaufgaben:

Als Beispiel zur Demonstration der beiden Darstellungsarten wird hier die Aufgabe 3·4+2 veranschaulicht:



Nachdem die Kinder in der Einführung anhand kleinerer Übungen diese Darstellungsweisen kennen lernen, beschäftigen sie sich in einer zweiten Teilsequenz mit einer ersten umfangreicheren Fragestellung: sie vergleichen Produktpaare wie 8·6 und 7·7 und suchen nach Gründen, warum das Quadrat genau eins größer ist als das Produkt aus den beiden benachbarten Zahlen.[4] In dieser Teilsequenz werden die Darstellungen für größere Zahlen weiterentwickelt. 19·20+2 etwa kann nun so dargestellt werden:



Die anschließende, dritte Teilsequenz greift ein anderes Thema auf. Hier erhalten die Kinder Päckchen von Rechenaufgaben, die sich bis auf eine Zahl gleichen. In der ersten Aufgabe zu dieser Sequenz lauten sie:

---

[3] Eine ausführliche Darstellung des diagrammatischen Denkens bei Charles Peirce wird von Hoffmann (2005) gegeben.
[4] Eine detailliertere Darstellung dieser Aufgaben ist in Fischer (2007) gegeben.

$(5\cdot 2+4):2$ $(11\cdot 2+4):2$ $(36\cdot 2+4):2$
$(19\cdot 2+4):2$ $(28\cdot 2+4):2$ $(849\cdot 2+4):2$

Löst man diese Aufgaben mit dem Distributivgesetz für Division, so erkennt man: Das Ergebnis ist immer zwei größer als die variable Zahl. Die Kinder werden aufgefordert, die Lösungen zu bestimmen und zu erklären, woran es liegt, dass immer zwei mehr als die erste Zahl herauskommt. Diese Erklärung kann anhand der formal-arithmetischen Darstellungen oder auch mit Hilfe von Zeichnungen geschehen.

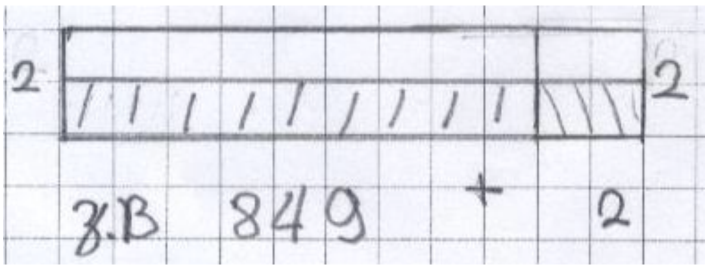
Die Lernumgebung wurde in mehreren Gymnasialklassen durchgeführt und der Unterricht mit Videokamera beobachtet. Der folgende Abschnitt zeigt die Lösung einer Schülerin zum ersten Arbeitsblatt in der dritten Teilsequenz.

Lauras Darstellung

Zu den Rechenaufgaben selbst hat Laura nur die Ergebnisse notiert, zu einer Aufforderung „Das fällt uns auf:“ steht auf ihrem Arbeitsblatt:

Die erste Zahl + 2 ist das Ergebnis.

Das Aufgabenblatt fordert zudem auf: „Zeichnungen dazu:“ Hier sieht man bei Laura:



Einen Teil dieses Arbeitsblattes hat Laura zuhause bearbeitet. In der folgenden Mathematikstunde stellt sie ihre Zeichnung an der Tafel vor. Eine ausführliche Analyse dieser Ausführungen ist hier jedoch nicht möglich. Wir konzentrieren uns auf die schriftlichen Darstellungen.

Hinweise auf die Idee einer unbestimmten Zahl bei Laura

Lauras allgemeine Darstellung der Rechenergebnisse ist zutreffend und prägnant. Jemand, der mit dem algebraischen Zeichensystem vertraut ist, würde die Aufgabenstellungen etwa mit der Darstellung $(x\cdot 2+4):2$ zusammenfassend beschreiben und dann als Ergebnis $x+2$ angeben. Laura verwendet anstelle einer solchen Variable x die verbale Beschreibung „die erste Zahl“. Diese Bezeichnung benennt die wesentliche Eigenschaft der Zahlen, für die sie steht, nämlich ihre Position im Aufgabenterm und damit ihre Beziehung zu den verwendeten Operationen. Mit dieser Zahlbezeichnung „die erste Zahl“ geht Laura sodann in ganz derselben Weise um wie es mit der Variablen x üblich ist: sie wendet die Operation „+2“ auf sie an. Dabei betrachtet sie den Ausdruck „die erste Zahl + 2“ nicht als eine Rechenhandlung, sondern bezeichnet ihn als Ergebnis. Dies ist ein Hinweis darauf, dass sie in ihm eine Zahl mit einem bestimmten Bauplan sieht. Es entspricht der algebraischen Sichtweise, „x+2“ als eine (von x abhängige) Variable zu verstehen.

Trotz des Plurals in der Aufforderung „Zeichnungen dazu“ fertigt Laura nur eine einzige Zeichnung an. Mit der Zeichnung hebt Laura die gemeinsame Struktur der Rechenaufgaben hervor: Ein Streifen – er hat die Länge von neun Kästchen – steht für die variable Zahl in den Aufgabentermen. Seine Länge ist nicht besonders gekennzeichnet, so dass ihm eine bestimmte Zahl zuzuordnen wäre. Allerdings ist er mit „z.B. 849“ beschriftet. Laura gibt hier eine mögliche Spezifizierung der unbestimmten Länge des Streifens an und betont zugleich, dass dies nur eine Möglichkeit ist. Die Höhe des Rechtecks von zwei Kästchen hingegen wird durch die Beschriftung rechts und links betont, ebenso wird die Breite des hinteren Abschnitts mit „2“ festgelegt. Laura unterscheidet auf diese Weise in ihrer geometrischen Darstellung zwischen Zahlen, die die Rolle von Konstanten einnehmen, und Zahlen, die variabel sind. Dies geschieht in der oben gegebenen formal-algebraischen Darstellung $(x\cdot 2+4):2$ durch die Verwendung von Zahlzeichen für konstanten Zahlen und die Verwendung eines Buchstabens für die variable Zahl.

Literatur:

Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (Hrg) (1996): Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluver Academic Publishers 1996.

Fischer, A. (2007): Einzelfall und Struktur – Verwendung von Anschauungshilfen zur Erfassung arithmetischer Gesetzmäßigkeiten. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Franzbecker: Heidelberg, S. 120 – 123.

Hoffmann, M. (2005): Erkenntnisentwicklung. Frankfurt a. M.: Vittorio Klostermann 2005.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig: Viehweg 1993.

Pascal Rolf FISCHER, Universität Kassel

vem@-online: Ein E-Learning-Vorkurs zur individualisierten Beseitigung mathematischer Defizite

1. Motive für einen E-Learning-Vorkurs

Da nicht alle Studienanfänger gleichermaßen über die für Ihr Studium notwendigen Mathematikkenntnisse verfügen, versuchen Vorkurse einerseits möglichst kostensparend, andererseits aber individuell den jeweiligen Defiziten entgegenzuwirken. Im Rahmen des Projekts "Multimediavorkurs Mathematik" der Universität Kassel wurde vor diesem Hintergrund ein Multimediaskript entwickelt, das sowohl zur Unterstützung der Vorkurse als auch Semester begleitend als Selbstlernmaterial oder Nachschlagewerk genutzt werden kann (vgl. [1]). Ungelöst bleibt bislang jedoch das Problem wachsender Teilnehmerzahlen resultierend aus der kostenlosen Teilnahme durch Finanzierung aus Studiengebühren und verbunden mit einer Raumnot im Zuge der Kurse. Trotz des innovativen Charakters des bereits entwickelten Materials bleibt auch weiterhin der Wunsch nach einer noch individuelleren Betreuung seitens der Studienanfänger latent (vgl. [2]).
Vor diesem Hintergrund ergab sich als zentrale Frage meiner Forschung: Ist es möglich, einen E-Learning-Kurs ("vem@-online") mit Online-Zeiten zu schaffen, der die wachsende und extrem heterogene Vorkursgruppe im Kollektiv, den Einzelnen dabei jedoch individueller betreut?
Will man sich dieser Frage nähern, so führt dies auf folgende Teilfragen:
Wie ist ein solcher Kurs sinnvoll realisierbar und welche Ergebnisse liefert dessen Evaluation? Welche Motive für die (Nicht)Teilnahme an der E-Learning-Variante lassen sich feststellen?
In diesem Kontext soll zudem erstmals untersucht werden, wie ein Studierender das Kasseler Selbstlernmaterial tatsächlich nutzt, ob sich hierbei Auffälligkeiten und didaktische Verbesserungsansätze zeigen.
Eine weitere Frage ist, auf welcher Basis die Teilnehmer die Themen selbstständig auswählen und ob/wie angebotene Entscheidungshilfen (selbstdiagnostische Tests, studiengangsspezifische Modulempfehlungen) genutzt werden.
Ein weiteres Ziel meiner Forschung ist die Identifizierung von Nutzertypen sowie Eingangsvoraussetzungen für erfolgreiches E-Learning seitens der Teilnehmer. Damit soll versucht werden, eine Art von "Erfolgswahrscheinlichkeit" für E-Learning aus der Nutzertypenanalyse abzulesen.
Die Vorstudie im Zuge des Vorkurses 2007 diente der Erprobung und Verbesserung des Konzeptes sowie der Vorbereitung der Hauptstudie 2008.

2. Der Kurs und das Untersuchungskonzept

vem@-online wurde in 2007 erstmals als Alternative zu den Präsenzveranstaltungen mit begrenzter Teilnehmerzahl angeboten. Es meldeten sich hierfür 41 Studienanfänger an, denen bei aktiver Teilnahme ein E-Learning-Zertifikat ausgestellt wurde.

Um den Teilnehmern ausreichend Raum für selbstständiges Arbeiten geben zu können, wurde der Kurs in dieser Variante auf 4 Wochen ausgedehnt. Zum gemeinsamen Auftakt und zur Vorbereitung auf die Selbstlernphasen fanden an den ersten beiden Tagen des Kurses Präsenzveranstaltungen mit einer dreistündigen Vorlesung am Vormittag und einer zweistündigen Übung am Nachmittag statt. Neben der Festigung der Inhalte hatten die Üben zum Ziel, die Selbstbewertung der Teilnehmer zu trainieren. An den folgenden zwei Tagen sollten die Studenten selbstständig in der Lernplattform lernen, ehe wir uns zum Wochenabschluss am Freitag noch an einem gemeinsamen Präsenztag trafen. Ab der zweiten Woche fand nur jeweils freitags ein Präsenztermin statt, an dem inhaltliche und organisatorische Themen gemeinsam behandelt wurden.

Technisch realisiert wurde der Kurs in Moodle, dem LMS der Universität Kassel. Hier wurden alle Module des Multimediaskripts verlinkt und durch Foren, Chats sowie selbstdiagnostische Tests angereichert. An allen Tagen, an denen die Teilnehmer selbstständig lernen sollten, standen studentische Hilfskräfte durchgehend von 9 - 17 Uhr in der Plattform bei Fragen oder Problemen zur Verfügung. Da Forenbeiträge dauerhaft sichtbar bleiben und auch durch Kommilitonen beantwortet werden können, konnten Fragen auch außerhalb der Betreuungszeiten diskutiert und ggf. auch im Nachhinein geklärt werden. Dies sorgte dafür, dass zu jedem Zeitpunkt in Moodle gelernt werden konnte und wurde.

Die o. a. diagnostischen Selbsttests wurden als Vor- und Nachtests zu den Modulen angeboten und enthielten modulspezifische Aufgaben zu Rechentechniken, Verständnis, Anwendungen und zur Fehlerdiagnose. Musterlösungen mit Bewertungsschemata ermöglichten es den Studierenden, ihre Lösungen selbst zu bewerten. Nach Eingabe der errechneten Punktzahl in Moodle wurde automatisch rückgemeldet, welche Module bzw. welche Teilbereiche eines Moduls bearbeitet werden sollten. In den verschiedenen Nachtests konnte analog der eigene Lernstand überprüft und individuelle Hinweise zum Nacharbeiten gegeben werden. Die selbstdiagnostischen Tests unterstützen so den Lerner bei der Auswahl der Inhalte und gaben zudem ein Feedback über den Leistungsstand. Studiengangsspezifische Empfehlungen zur Auswahl der Module sorgten außerdem dafür, dass das Lernen auch ausgerichtet auf den jeweiligen Studiengang stattfand.

Mein Untersuchungsdesign umfasste online realisierte Ein- und Ausgangstests mit personenbezogenen Fragen, Fragen zur Computernutzung und zu Gründen für die Teilnahme am Kurs (Eingangstest) sowie zur Bewertung des Kurses, zu Verbesserungsvorschlägen, zum Lernen in der Plattform und zur Selbsteinschätzung (Ausgangsbefragung).
Zu einzelnen Modulen gab es außerdem weitere Befragungen zur detaillierten Nutzung und Bewertung des jeweiligen Moduls und der dazu angebotenen Tests. Auch die individuellen Ergebnisse der Vor- und Nachtests stehen zur Datenauswertung zur Verfügung.
In den parallel in der üblichen Form ablaufenden Vorkursen wurde zum Ende eine Online-Befragung mit parallelen Fragen zur Bewertung des Kurses und zur Selbsteinschätzung der Lernenden durchgeführt und zusätzlich Gründe für die Entscheidung gegen die E-Learning-Variante erhoben.

3. Ergebnisse der Vorstudie

Kurz gesagt: vem@-online ist machbar und liefert bzgl. der Kursbewertung entweder bessere oder zumindest vergleichbare Ergebnisse.
Ein differenzierterer Blick in die Daten zeigt zunächst, dass wie erwartet in der E-Learning-Variante ein leicht erhöhter Männeranteil zu verzeichnen ist. Die Heterogenität der Gruppe bzgl. des Studiengangs ist jedoch durchaus vergleichbar mit der in den Präsenzkursen: Bei 42 Teilnehmern des E-Kurses waren 12 verschiedene Studiengänge zu verzeichnen. Betrachtet man das Durchschnittsalter der Teilnehmer, so zeigt sich interessanterweise sowohl im Median als auch im arithmetischen Mittel ein um ca. 3 Jahre höheres Alter der vem@-online-Teilnehmer.
Die Frage "Ich arbeite gerne am PC" beantworteten Präsenzgruppe und E-Learning-Gruppe vergleichbar: Die Teilnehmer meines Kurses zeigten damit anders als erwartet keine wesentlich höhere Affinität zur PC-Nutzung als Ihre Kommilitonen. Bzgl. der Frage nach dem Einsatz des PCs im letzten Schulhalbjahr ist interessanterweise eine stärkere Nutzung bei den Präsenzkursteilnehmern zu erkennen. In vem@-online zeigt sich hier hingegen ein eher dichotomes Bild, was sich durch das höhere Alter einiger Teilnehmer erklären lässt.
Bei der Frage nach Gründen für die Entscheidung gegen die E-Learning-Variante wurden nur in Einzelfällen technische Gründe (keine Flatrate, kein PC, kein Internet) angegeben. Hingegen stimmten 54,6% der Präsenzkursteilnehmer zu, dass Sie sich unsicher seinen, selbstständig genug zu lernen. Der Aussage "Ich will lieber eine Vorlesung haben" stimmten 92,5% zu - dies scheint bei den Präsenzkursteilnehmern zunächst wenig überraschend, kann jedoch auch als Wunsch interpretiert werden, mit dem

Vorkurs erstmals eine Vorlesung per se erleben zu können. Für die Hauptstudie ist diesbezüglich eine differenziertere Fragestellung geplant.
Der Blick auf die angegebenen Nutzungszeiten zeigt insgesamt eine regere Beschäftigung mit dem Material als dies in Präsenzkursen möglich wäre: Im Mittel arbeiteten die Teilnehmer nach eigenen Angaben von 1,5 bis 4,2 Stunden an den einzelnen Modulen, denen im traditionellen Präsenzkursszenarium durchschnittlich nur 1 - 1,5 Stunden gewidmet werden können.
Insgesamt wurde das Konzept von den vem@-online-Teilnehmern sehr positiv angenommen. Die angebotenen Nachtests wurden im Vergleich zu den Vortests häufiger bearbeitet, was für eine generelle Bevorzugung von Nachtests spricht. Deutlich wurde der Wunsch nach einer computergesteuerten Auswertung der Aufgabenlösungen anstatt einer Selbstbewertung geäußert. Die Umsetzung ist für die Hauptstudie bereits im Gange.

4. Ausblick auf die Hauptstudie

Derzeit findet in einem weiteren E-Learning-Projekt die Entwicklung der automatisch auswertbaren Vor- und Nachtests sowie eines großen Ein- und Ausgangstests statt. Ziel ist es, einerseits durch die automatische Auswertung der Lösungen validere Testergebnisse zu erhalten und andererseits einen Vergleich des Leistungszuwachses von Präsenz- und E-Learning-Gruppe vornehmen zu können. Auf diese Weise soll überprüft werden, ob mit vem@-online zumindest gleiche Lernzuwächse oder sogar noch bessere Ergebnisse erzielt werden können, womit aus finanzieller, organisatorischer und didaktischer Sicht eine sinnvolle Alternative zu Präsenzkursen gefunden wäre. Darüber hinaus sollen die Daten der Befragungen im Hinblick auf Eingangsvoraussetzungen seitens der Teilnehmer ausgewertet werden. Es soll überprüft werden, ob Studienanfänger überhaupt fähig dazu sind, in einem solchen E-Learning-Szenarium ausreichend selbstständig zu lernen - sicherlich eine interessante Fragestellung auch im Hinblick auf den Einsatz von E-Learning in anderen didaktischen Kontexten.

Literatur

[1] Biehler, R./ Fischer, P. R.: VEMA - Virtuelles Eingangstutorium Mathematik. *In:* Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6. 3. bis 10. 3. 2006 in Osnabrück. Hildesheim und Berlin 2006, S. 195 – 199.

[2] Fischer, P. R.: E-Learning als effizienteres Mittel für den Brückenschlag zwischen Schule und Universität? *In:* Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim und Berlin 2007, S. 779 - 782.

Rudolf FRITSCH, München, Milan KOMAN, Prag

Schwerpunktkurven

Die folgenden Beispiele – während eines Gastaufenthaltes des erstgenannten Autors in Prag entwickelt – sollen Lehrer anregen, ähnliche Fragen selbst zu finden sowie mit Dynamischer Geometrie Software und Computer-Algebra-Systemen zu behandeln.

Wir untersuchen einparametrige Scharen von Dreiecken und Vierecken mit festem Umkreis und bestimmen die geometrischen Örter der verschiedenen Schwerpunkte: Eckenschwerpunkt, Kantenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt; im Fall von Dreiecke fallen Eckenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt bekanntlich zusammen, bei Vierecken gilt dies nur für Parallelogramme. Mit Hilfe der Dynamischen Geometrie-Software Cabri und dem zugehörigen Befehl „locus“ visualisieren wir die zugehörigen Ortskurven; es handelt sich um algebraische Kurven, deren Gleichungen wir mit dem Computer-Algebra-System Maple bestimmen.

Als erstes Beispiel nehmen wir alle Dreiecke mit festem Umkreis und einer festen Seite. Der geometrische Ort des Eckenschwerpunkts ist offensichtlich das Bild des Umkreises unter der zentrischen Streckung mit dem Mittelpunkt der festen Seite als Zentrum und dem Faktor 1/3. Für den geometrischen Ort des Kantenschwerpunkts – das ist der Inkreismittelpunkt des Seitenmittendreiecks, der so genannte Spiekerpunkt des Dreiecks – finden wir eine interessantere Kurve, eine deformierte 8 (Abb. 1).

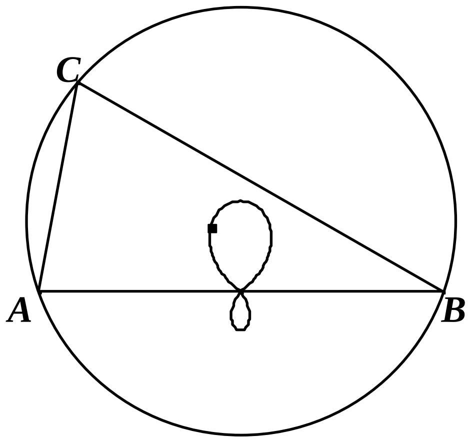


Abb. 1

Die feste Seite ist die Seite [$\boldsymbol{AB}$]. Zur algebraischen Beschreibung wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt der Strecke [$\boldsymbol{AB}$] als Ursprung und dem Punkt $\boldsymbol{B}$ als Einheitspunkt auf der x-Achse, das heißt wir haben $\boldsymbol{A}(-1,0)$, $\boldsymbol{B}(1,0)$. Der Mittelpunkt des festen Umkreises habe die Koordinaten $(0,\boldsymbol{h})$; damit ergibt sich für den Radius $\boldsymbol{r} = \sqrt{1+\boldsymbol{h}^2}$. Die dritte Ecke $\boldsymbol{C}(x,y)$ bewegt sich auf dem festen Umkreis. Mithilfe von Maple finden wir die Gleichung der Kurve

$$4\left(\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)^2+\boldsymbol{hr}^2\boldsymbol{y}\right)^2 -$$
$$-\boldsymbol{r}^2\left(\left(4\boldsymbol{x}^2+12\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{h}^2-\boldsymbol{r}^2\right)\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)^2+4\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2+4\boldsymbol{h}^2\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{y}^2\right)=0\text{,}$$

die in zwei Komponenten zerfällt.

$$2\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)^2+\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)\left(\boldsymbol{r}^2-\boldsymbol{hr}+4\boldsymbol{ry}\right)-2\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{x}^2=0$$

und

$$2\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)^2+\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)\left(\boldsymbol{r}^2+\boldsymbol{hr}-4\boldsymbol{ry}\right)-2\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{x}^2=0.$$

Plotted man die Komponenten und die Gesamtkurve, so ergeben sich folgender Bilder (Abb. 2)

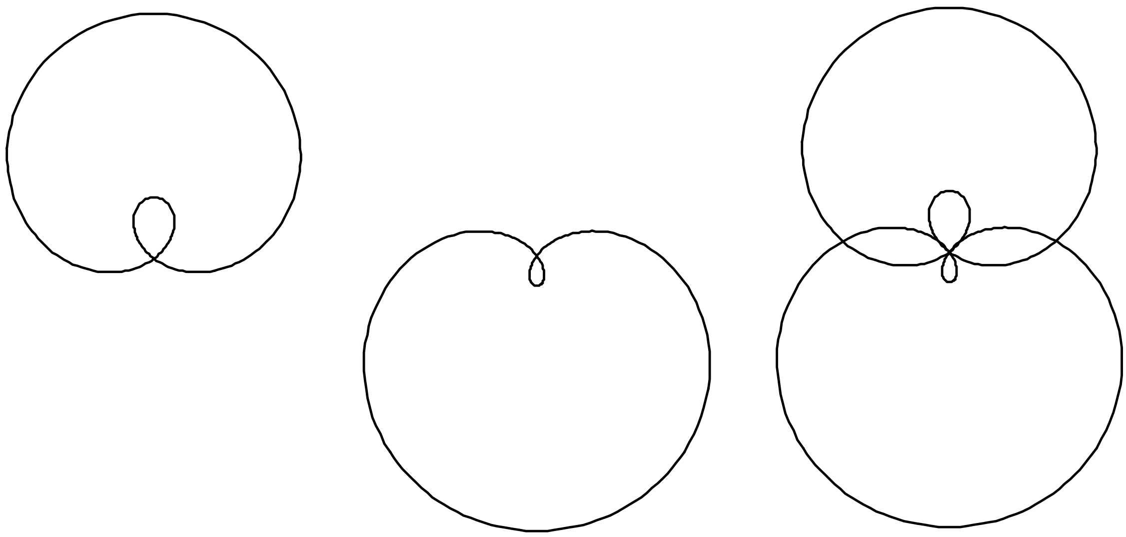


Abb. 2

Die Ortskurve des Kantenschwerpunktes setzt sich aus den beiden inneren Schleifen zusammen. Dann stellt sich die Frage nach der geometrischen und eventuell auch der physikalischen Bedeutung der übrigen Kurventeile.

Die geometrische Frage hat eine nahe liegende Antwort. Da die inneren Schleifen die Ortskurve des Inkreismittelpunkts des Mittendreiecks darstellen, sind die übrigen Kurventeile die Ortskurven der Ankreismittelpunkte des Mittendreiecks.

Physikalisch wird der Kantenschwerpunkt eines Dreiecks ermittelt, in dem man das homogene Massensystem durch ein System von Massenpunkten ersetzt: Als Punkte nimmt man die Seitenmitten und bringt in jedem Punkt das Gewicht der zugehörigen Seite als Masse an; die Gewichte sind proportional den Seitenlängen. Versieht man nun eine der Massen mit dem umgekehrten Vorzeichen, so erhält man den entsprechenden Ankreismittelpunkt als Schwerpunkt.

Als zweites betrachten wir Dreiecke mit festem Umkreis und fester Transversale, die vom Mittelpunkt halbiert wird. Dabei ergeben sich verschiedene Formen für die Ortskurve des Eckenschwerpunktes, abhängig vom Verhältnis s der Länge der Transversale zum Durchmesser des Umkreises (Abb. 3).

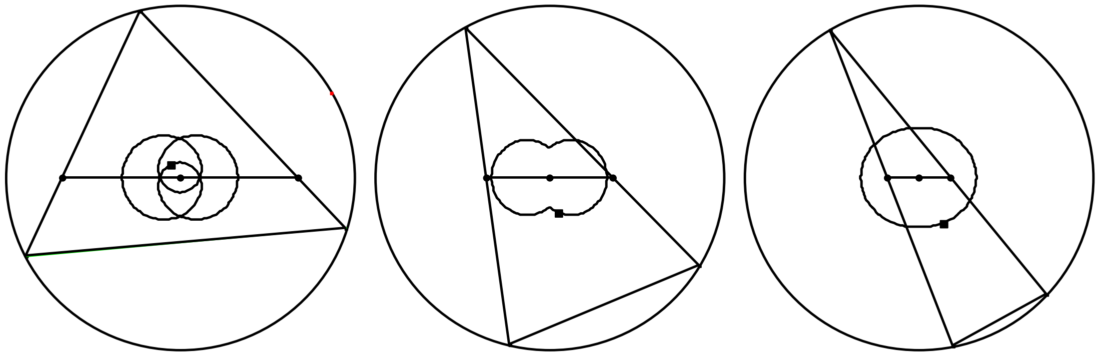


Abb. 3

Zur algebraischen Darstellung nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, den Einheitskreis als Umkreis sowie als Transversale die Strecke, die die Punkt $[0,-s]$ und $[0,s]$ verbindet. Damit erhält man die Gleichung:

$$(s^2+1)^2(x^2+y^2)^3-(x^2+y^2)\,((s^2+1)(6s^4-s^2+1)\,x^2+$$
$$+\,(2s^6+13s^4-4s^2+1)\,y^2)+s^2\,(3s^2-1)\,(3s^4+s^2+2)\,x^2+$$
$$+\,s^2\,(s^6+20s^4-11s^2+2)\,y^2-s^4\,(3s^2-1)^2=0.$$

Bei den folgenden Werten für s ändert sich die Form der Ortskurve:

$s=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58$: zwei innere Schleifen, die sich berühren,

$s=\sqrt{2}-1\approx 0{,}41$: zwei Spitzen,

$s\approx 0{,}25$ (positive reelle Wurzel des Polynoms $3s^6-11s^4+17s^2-1$): Die Wendepunkte verschwinden.

Das dritte Beispiel besteht aus einer Schar von konvexen Sehnenvierecken im Einheitskreis, deren Diagonalen sich in einem festen inneren Punkt S des Einheitskreises senkrecht schneiden. Alle diese Sehnenvierecke haben den gleichen Eckenschwerpunkt und den gleichen Flächenschwerpunkt. Der Eckenschwerpunkt ist der Mittelpunkt der Strecke $[OS]$ (O bezeichnet den Ursprung), der Flächenschwerpunkt teilt die Strecke $[OS]$ im Verhältnis 1:2. Die Ortskurve des Kantenschwerpunktes ist eine konvexe geschlossene Kurve (Abb. 4), deren eiförmige Form nur klar hervortritt, wenn der Punkt S in der Nähe des Randes des Einheitskreises gewählt wird. (Abb. 5).

Zur Ermittlung der Gleichung der Kurve haben unsere Möglichkeiten nicht ausgereicht. Sie wurde von Gregor Kemper, dem Inhaber des Lehrstuhls für Algorithmische Algebra an der Technischen Universität München bestimmt.

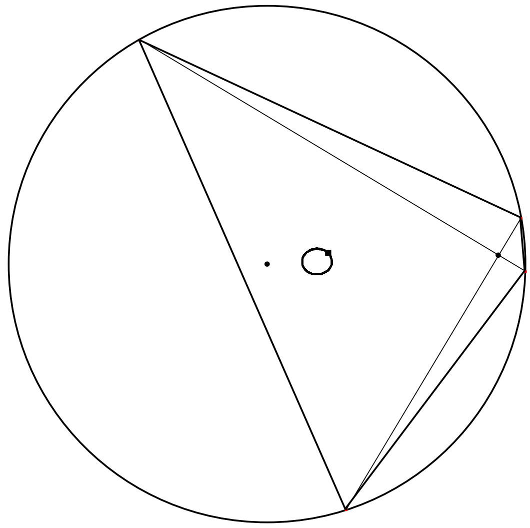


Abb. 4

Die Gleichung lautet:

$$8\boldsymbol{s}^2\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2)^2 - 8\boldsymbol{sx}(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2)((3\boldsymbol{s}^2+1)\boldsymbol{x}^2+(\boldsymbol{s}^2+1)\boldsymbol{y}^2)+$$
$$+2(13\boldsymbol{s}^4+17\boldsymbol{s}^2-8)\boldsymbol{x}^4+4(5\boldsymbol{s}^4+14\boldsymbol{s}^2-8)\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2+2(\boldsymbol{s}^4+11\boldsymbol{s}^2-8)\boldsymbol{y}^4-$$
$$-4\boldsymbol{sx}((3\boldsymbol{s}^4+13\boldsymbol{s}^2-10)\boldsymbol{x}^2+(\boldsymbol{s}^4+11\boldsymbol{s}^2-10)\boldsymbol{y}^2)+$$
$$+\boldsymbol{s}^2((2\boldsymbol{s}^4+35\boldsymbol{s}^2-33)\boldsymbol{x}^2+(13\boldsymbol{s}^2-17)\boldsymbol{y}^2) - 10\boldsymbol{s}^3(\boldsymbol{s}^2-1)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}^4(\boldsymbol{s}^2-1)=0.$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{s}$ die Länge der Strecke [***OS***].

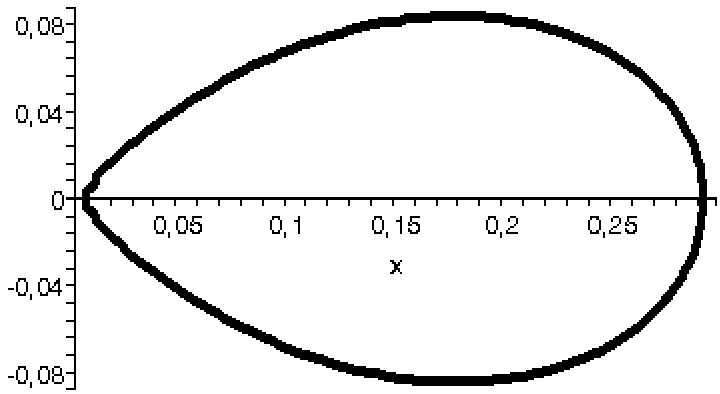


Abb. 5

Abb. 5. zeigt die Ortskurve für $\boldsymbol{s}$ = 0,9998.

Literatur

Milan Koman, Rudolf Fritsch: Jak se pohybují těžiště proměnných trojúhelníků·vepsaných do pevné kružice, Seiten 16-25 in: Ani jeden matematický talent anzmar, Hradec Králové: 2007 ISBN 978-80-7290-332-0

Torsten FRITZLAR, Halle, Frank HEINRICH, Braunschweig

Doppelrepräsentation und mathematische Begabung – Theoretische Aspekte und praktische Erfahrungen

Weitgehend geteilt wird die Annahme, dass es in verschiedenen, hinreichend komplexen (intellektuellen, sozialen, künstlerischen etc.) Bereichen spezifische Begabungen gibt. Besonders wichtig für die Charakterisierung mathematischer Begabungen im Hinblick auf unsere Thematik scheinen uns die folgenden Ansätze.

Krutetskii erkundete in den 50er und 60er Jahren des 20. Jahrhunderts die Struktur mathematischer Fähigkeiten in einer Gruppe von Schülerinnen und Schülern der fünften bis zehnten Schuljahrgangsstufe mit unterschiedlich ausgeprägten mathematischen Kompetenzen. Davon ausgehend entwickelte er eine Charakterisierung mathematischer Begabung im Schulalter und beschrieb verschiedene Ausprägungstypen, von denen sich der harmonische, in Abgrenzung zu den anderen, in gewisser Weise eingeschränkten Typen durch ein relatives Gleichgewicht von begrifflichen und bildhaft-anschaulichen Komponenten auszeichnet (Krutetskii, 1976).
Kießwetter formuliert auf der Grundlage seiner Überlegungen zu Theoriebildungsprozessen als wesentlichen Elementen des Tätigseins eines forschenden Mathematikers und seiner langjährigen Arbeit mit mathematisch begabten Jugendlichen „Kategorien mathematischer Denkleistungen", zu denen unter anderem das Wechseln der Repräsentationsebene, das Erkennen und Verwenden vorhandener Muster und Gesetze in „neuen" Bereichen gehört (Kießwetter, 2006).
Auch Käpnick, der in seiner grundlegenden mathematikdidaktischen Arbeit zu mathematischen Begabungen im Grundschulalter ein Merkmalsystem für mathematisch potenziell begabte Dritt- und Viertklässler formuliert und empirisch untermauert, zählt die Fähigkeit zum Wechseln der Repräsentationsebenen zu den mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen. Dieses ergibt sich für ihn auch aus der besonderen Bedeutung der gegenständlichen und anschaulichen Ebene im Mathematikunterricht der Grundschule und der erst allmählichen Entwicklung des sprachlich-begrifflichen Denkens in diesem Alter (Käpnick, 1998).
Aßmus untersucht derzeit die Möglichkeit, bereits für Zweitklässler ein Merkmalsystem mathematischer Begabungen zu formulieren. In dessen vorläufiger Version ist die „Fähigkeit zum Aufbau verschiedener interner Repräsentationen und zum Umgehen mit unterschiedlichen Repräsentationsformen" als Teil einer allgemeinen „Fähigkeit zu flexiblen Denkprozessen" enthalten (Aßmus, 2007, S. 249). Die von Aßmus explizierte Unter-

scheidung scheint uns wichtig. Sicher ist es gerade für junge Schüler nicht anspruchslos, zwischen verschiedenen Darstellungsweisen zu wechseln und dabei den mathematischen Inhalt jeweils wiederzuerkennen bzw. zu übertragen; eine diesbezügliche Flexibilität kann auf eine besondere Begabung hinweisen. Mindestens ebenso aussagekräftig ist unseres Erachtens jedoch die Fähigkeit, selbstständig zwischen strukturell verschiedenen mentalen Repräsentationen und dabei oft zwischen der begrifflichen und bildhaft-anschaulichen Modalität zu wechseln, um im Kießwetterschen Sinne neue mathematische Zusammenhänge und Bezüge zu finden, die sich für die weitere Problembearbeitung nutzen lassen (vgl. auch Nolte, 2004)

Die Vorteile einer solchen multimodalen Repräsentation und damit deren Indikatorfunktion für Begabung lassen sich auch denkpsychologisch begründen (vgl. insbesondere Klix, 1992).

Doppelrepräsentation

Bezüglich des Wechselns von mentalen Repräsentationen bleiben die bisher geschilderten Ansätze allerdings phänomenologisch begründet. An dieser Stelle können neurowissenschaftliche Untersuchungsmethoden weitere Anhaltspunkte bereitstellen. So konnte bisher in verschiedenen Untersuchungen gezeigt werden, dass Hochbegabte (beispielsweise in Musik) oder Hochtrainierte (beispielsweise im Kopfrechnen) bei der Bewältigung entsprechender komplexer Anforderungen verstärkt mehrere Repräsentationen aufbauen oder zusätzliche Hirnareale aktivieren (Winner, 1998).

Seidel ging in ihrer Untersuchung mit 12 (nach Lehrerurteil) mathematisch begabten und 12 normalbegabten Gymnasiasten der Frage nach, ob mathematisch Begabte zur Bewältigung komplexer mathematischer Anforderungen in stärkerem Maße sowohl begriffliche als auch bildhaft-anschauliche Repräsentationen – also eine Doppelrepräsentation – aufbauen als Normalbegabte. Dabei verwendete sie Probleme, die für die Schülerinnen und Schüler unter Berücksichtigung ihrer Erfahrungen und Vorkenntnisse sowohl algebraisch als auch anschauungsgeometrisch lösbar waren. Erwartungsgemäß zeigten die mathematisch Begabten bessere Leistungen, sie konnten mehr Probleme und diese schneller lösen als die Normalbegabten. Allerdings waren die besseren Leistungen durch die traditionellen Maße der Experimentalpsychologie nicht erklärbar; bezüglich IQ, Visualisierungsfähigkeit oder Gedächtniskapazität waren Unterschiede zwischen den beiden Versuchspersonengruppen nicht signifikant. Mittels EEG-Analysen konnte jedoch nachgewiesen werden, dass bei mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern bereits innerhalb der ersten Sekunde nach dem Instruktionsverstehen jene Hirnregionen aktiviert sind, die für die begriffliche und bildhaft-anschauliche Modalität verantwortlich gemacht werden, wohingegen bei Normalbegabten eine solche doppelte Aktivation nicht nachweisbar war. Bei einzelnen Schülern aus der Versuchsgruppe konnten außerdem bereits innerhalb der ersten 10 Sekunden der Problembearbeitung mehrfache Wechsel der Aktivation zwischen Arealen der begrifflichen und der bildhaft-anschaulichen Modalität nachgewiesen werden, Gruppenunterschiede waren allerdings nicht signifikant (Krause, Seidel, & Heinrich, 2004).

Schlussfolgerungen

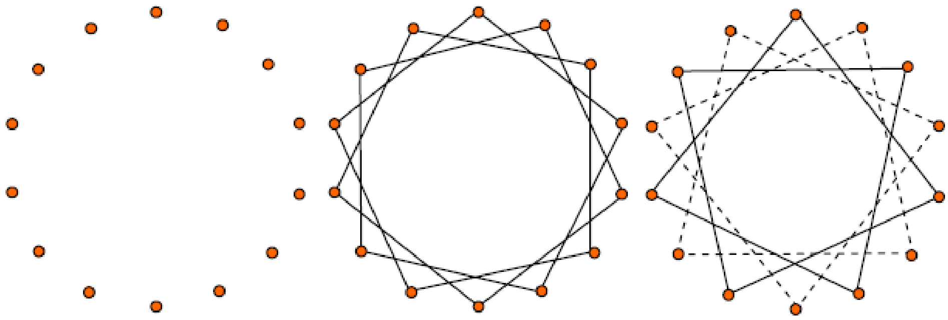
Es liegt nahe, die beschriebene Doppelrepräsentation als hirnphysiologisches Korrelat zum Wechseln der Repräsentationsebenen zu betrachten. Damit unterstützen die in der beschriebenen Fallstudie gewonnenen Befunde die Bedeutung dieser Fähigkeit als Indikator für mathematische Begabungen.

Die wahrscheinliche Existenz eines solchen hirnphysiologischen Korrelats darf nicht zum vorschnellen Schluss einer genetischen Determiniertheit verleiten. Dafür gibt es zu viele neurowissenschaftliche Untersuchungen, die die Plastizität des menschlichen Gehirns nachweisen. Allerdings deuten viele dieser Untersuchungen auch die Existenz von Zeitfenstern an, in denen hirnorganische und –funktionale Anpassungen durch eine „deliberate practice“ erfolgen können (Winner, 1998). Für uns liegt daher der Schluss nahe, Schülerinnen und Schülern möglichst frühzeitig und kontinuierlich das Sammeln von Erfahrungen im Bearbeiten von mathematischen Problemstellungen zu ermöglichen, die zum Einnehmen beider Betrachtungsweisen und zu Wechseln zwischen diesen anregen bzw. bei denen solche Wechsel besonders nützlich sind, weil sie eine Lösung ermöglichen oder den damit verbundenen (kognitiven) Aufwand erheblich reduzieren.

Aus Platzgründen können wir hier nur ein Problemfeld ansatzweise vorstellen, das im Regelunterricht einer vierten Klasse eingesetzt werden kann, sich aber insbesondere auch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Viertklässler eignet. Diesen gelingt es nach unseren Erfahrungen häufiger, die an sich geometrische Situation nicht nur mithilfe von Zahlen zu beschreiben, sondern durch arithmetische Beziehungen auch Regelmäßigkeiten auszudrücken, Hypothesen zu formulieren und „prüfende Beispiele“ zu konstruieren, die diese widerlegen oder glaubhafter machen können. Damit ordnen die Schülerinnen und Schüler die Sternfiguren in der begrifflichen Modalität in weiterführende Zusammenhänge ein und nutzen diese zur Problembearbeitung.

Sternfiguren

In der linken Abbildung sind 14 Punkte kreisförmig angeordnet. Wenn jeder Punkt nacheinander jeweils mit dem drittnächsten verbunden wird, so entsteht eine regelmäßige Sternfigur mit 14 Zacken. Sie ist im mittleren Bild zu sehen.



Verbindet man jeden Punkt des 14-Punkte-Kreises mit dem viertnächsten, so zerfällt der 14-Punkte-Kreis in zwei regelmäßige Sternfiguren. Im rechten Bild ist die zweite Sternfigur gestrichelt gezeichnet.

1. Zeichne weitere regelmäßige Sternfiguren am 14-Punkte-Kreis. Wann entstehen Sternfiguren mit 14 Zacken, wann zerfällt der Kreis in mehrere Sternfiguren?
2. Wie viele verschiedene regelmäßige Sternfiguren mit 14 Zacken können so gezeichnet werden?
3. Statt 14 kann auch eine andere Anzahl von Punkten im Kreis gezeichnet werden. Wie viele verschiedene regelmäßige, nicht zerfallende Sternfiguren gibt es dann jeweils?
4. Für welche Anzahlen gibt es besonders viele, für welche besonders wenige regelmäßige, nicht zerfallende Sternfiguren?

Literatur

Aßmus, D. (2007). Merkmale und Besonderheiten mathematisch potentiell begabter Grundschüler – aktuelle Forschungsergebnisse. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (pp. 246-249). Hildesheim: Franzbecker.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter*. Frankfurt am Main: Lang Verlag.

Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren – und was kann man von mathematisch besonders begabten Grundschülern erwarten, und was noch nicht? In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Eds.), *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? Ein Buch aus der Praxis für die Praxis* (pp. 128–153). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Klix, F. (1992). *Die Natur des Verstandes*. Göttingen: Hogrefe.

Krause, W., Seidel, G., & Heinrich, F. (2004). Multimodalität am Beispiel mathematischer Anforderungen. In *Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät. Band 64* (pp. 135-152). Berlin.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Nolte, M. (Ed.). (2004). *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans*. Hildesheim: Franzbecker.

Winner, E. (1998). *Hochbegabt. Mythen und Realitäten von außergewöhnlichen Kindern*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Karl Josef FUCHS, Universität Salzburg

Die Funktion – Basiselement der Informatik

0. Prolog

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgehen, dass die Überschrift weder mit einem Rufzeichen noch mit einem Fragezeichen abgeschlossen ist. Im Falle eines Rufzeichens am Ende des Beitragstitels wären die folgenden Darstellungen als Rechtfertigung für diese Behauptung zu sehen, im Falle eines Fragezeichens würde man eine Antwort auf die Darlegungen spätestens im Epilog zu diesem Beitrag erwarten.

1. Eine aktuelle Bestandsaufnahme

Richten wir also zunächst unseren Blick auf den Stellenwert des Funktionsbegriffs in wesentlichen Beiträgen zur Didaktik der Informatik. In der aktuellen Ausgabe *Didaktik der Informatik* von Peter Hubwieser [2] finden wird das Thema **prominent** in zwei Kapiteln (Funktionale Modellierung - Modellierung mit Hilfe von Funktionen) vertreten. Im Lehrbuch *Didaktik der Informatik* von Sigrid Schubert und Andreas Schwill [8] finden wir unter der Bewertung der verschiedenen programmiersprachlichen Zugänge das Prädikat **funktional**. Auch im *Modulkonzept – einem zeitgemäßen Ansatz zur informatischen Bildung für alle Schülerinnen* von Ludger Humbert [3] ist die Funktionale Modellierung als fächerkoordinierende Idee zwischen Mathematik und Informatik namhaft vertreten. Wir könnten also meinen, eine gewisse **Quantität** spricht für die Funktion als Basiselement der Informatik.
Die Publikationen von Hans – Stefan Siller von der Universität Salzburg zeigen schließlich, dass es sich auch um ein **aktuelles** Thema der Mathematik- bzw. Informatikdidaktik handelt [6; 7].

Nun aber zu zwei zentralen Aspekten der Funktionsbetrachtung.

2. Die historische Kontinuität

Für diese Annahme ist es zunächst unbedingt notwendig auf die junge Entwicklungsgeschichte der Didaktik der Informatik zu blicken:
Was wollen wir als den Beginn dieser wissenschaftlichen Disziplin ansetzen?

Ist es der Zeitpunkt des Erscheinens spezifischer fachdidaktischer Zeitschriften, so wäre dies bei der Informatica didactica das ausgehende vorige

Jahrhundert, bei der Zeitschrift LOGIN der Anfang der 90er Jahre. Grundlegende Arbeiten von Petra Knöß [4] über die *Fundamentalen Idee der Informatik im Mathematikunterricht* oder die *Fundamentalen Ideen der Informatik* von Andreas Schwill [5] aus Didaktik der Informatik sind zum einen Ende der 80er Jahre, zum anderen anfangs der 90er Jahre, als Bücher zur Didaktik der Mathematik erschienen bzw. wurden in Zeitschriften zur Didaktik der Mathematik publiziert, wobei Schwill den Funktionsbegriff als Basiselement der Informatik anspricht [5, Funktionale Programmiersprachen, S. 21]. Es wird daher sinnvoll sein, unseren historischen Blick über die ‚reine' Didaktik der Informatik als selbstständige Wissenschaft hinaus in die Didaktik der Mathematik weiterzuführen, wollen wir zu tatsächlicher **Kontinuität** des Begriffs gelangen.

Erweitert man den Blick, so wird man an die Diskussion der LOGO – Philosophie am Ende der 80er Jahre erinnert [1; 9]. Zieht man nun außerdem in Betracht, dass LOGO ein ‚Abkömmling' von LISP (= LISt Processing), einer streng funktionalen Sprache, ist, so verwundert es wenig, dass sich viele dieser Diskussionsbeiträge auch mit dem Grundelement ‚Funktion' kritisch auseinander setzten.

Gehen wir noch weiter in die Vergangenheit: Wir werden sehen, dass auch bei der Einführung des Taschenrechners Ende der 70er Jahre das Thema Funktion einen zentralen Stellenwert einnahm. Gemeint ist dabei die Diskussion über so genannte UPN – Rechner (UPN = Umgekehrte Polnische Notation – abgeleitet von der Polnischen Notation des Jan Łukasiewicz), die die klammerfreie funktionale PostFix – Notation verwendeten, und AOS – Rechner (= Algebraic Operation System), bei denen die Eingabe in der üblichen algebraischen InFix – Notation erfolgte.

Während die Berechnung des Ausdrucks (3 + 5) * 7 bei einem AOS – Rechner gemäß der Angabe als (3 + 5) * 7 (=) zu erfolgen hat, muss für einen UPN – Rechner der Ausdruck funktional aufbereitet werden und lautet somit: 3 (ENTER) 5 + (ENTER) 7 *.
Damit noch nicht genug. Da der Code in der bereits genannten funktionalen Programmiersprache LISP aus vordefinierten und selbst definierten Funktionen bestand, war die Implementierung von Funktionen bereits Ende der 50er Jahre ein Thema der Informatik.
Die mittlerweile weitgehend unbekannte Programmiersprache FORTH (= FO(U)RTH Generation Languages, kurz: 4GL), welche die UPN – Notation bei der Kodierung verwendet, wurde in den 60er Jahren entwickelt.

3. Die Funktion als Brückenelement zwischen Mathematik und Informatik

Um nachzuweisen, dass es sich bei der Funktion um einen Brückenbegriff zwischen Mathematik und Informatik handelt bzw. seit geraumer Zeit handelte, muss es uns gelingen, nachzuweisen, dass beide Sichtweisen, also von der Mathematik zur Informatik, aber auch jene von der Informatik zur Mathematik wesentlich zu einem umfassenden Bild von Funktionen beitragen.

Fakt ist, dass die Mathematik als Ausgangspunkt die Eigenschaften einer Funktion definiert, wobei jedem Element einer Ausgangsmenge **GENAU EIN** Element der Zielmenge zugeordnet wird. Diese ‚strenge' Festsetzung wurde von der Informatik in so genannten Funktionalen Programmiersprachen bzw. Anwendersystemen (Tabellenkalkulationsprogramme) implementiert und realisiert.

Was steuert aber nun umgekehrt die Informatik zum mathematischen Verständnis von bzw. Umgang mit Funktionen bei?

Durch ihre vielseitige Nutzung von funktionalen Darstellungen in Programmiersprachen sowie Anwendersystemen gewinnt die Mathematik in zweifacher Hinsicht.
Zum einen durch die Verwendung **sprechender Namen** wie

```
= 1 + GANZZAHL(ZUFALLSZAHL()*6)
```

(für die Simulation eines Würfelwurfs mit EXCEL) oder

```
(last(quote (a b c))
```

(zur Extrahierung von c aus der Liste (a b c) in LISP).
Denken wir im Gegensatz dazu an unsere Schüler/Innen, für die Funktionen ausschließlich nur den Namen *f* tragen dürfen.

Zum anderen gewinnt die Mathematik durch die in der Informatik bei der Implementierung nahezu selbstverständliche Verwendung

- einer **beliebigen Anzahl von Funktionsargumenten** (bis hin zu nil – adischen Funktionen ohne Argument wie die zuvor verwendete ZUFALLSZAHL()),
- von **Verkettungen von Funktionen** (wofür ebenfalls die beiden zuvor genannten Kodierungsbeispiele Belege sind).

Denken wir an unsere Schüler/Innen, die im Mathematikunterricht nur Funktionen mit einem Argument kennen lernen, wobei dieses nur *x* lauten soll. Jeder Lehrende / Jede Lehrende kann, bezogen auf diese Überlegungen, sicherlich über Probleme im Zusammenhang mit der Kettenregel der Differentialrechnung berichten.

4. Epilog

Kehren wir zum Anfang zurück:
Würde ein Rufzeichen an das Ende des Beitragstitels stehen, hoffe ich, überzeugende Gründe zur Rechtfertigung der Funktion als Basiselement informatischer (Aus)bildung geliefert zu haben.
Im Falle des Fragezeichens würde ich die Fragestellung mit **JA** beantworten. Die Darstellungen in den Abschnitten 1 bis 3 wären dann als Argumentationen für meine Zustimmung anzusehen.

Literatur

[1] Bender, Peter (1987): *Kritik der LOGO – Philosophie*. In: JMD – Zeitschrift der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Heft 1./2., S. 3 - 103.

[2] Hubwieser, Peter (2007): *Didaktik der Informatik*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

[3] Humbert, Ludger (2002): *Das Modulkonzept – ein zeitgemäßer Ansatz zur informatischen Bildung für alle Schülerinnen*. In: Informatica didactica 5; http://www.informatica-didactica.de

[4] Knöß, Petra (1989): *Fundamentale Ideen der Informatik im Mathematikunterricht*. Deutscher Universitätsverlag.

[5] Schwill, Andreas (1994): *Fundamentale Ideen der Informatik*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, S. 20 – 31.

[6] Siller, Hans - Stefan (2008): *PROGRAPH – Diagrams – A new old system for teaching functional modeling*. Angenommen zur Präsentation auf der ICME 11, TSG 22, Monterrey.

[7] Siller, Hans - Stefan (2008): *Two Subjects Sharing One Concept – Functions as Structuring Principles in Mathematics and Informatics Education*. Angenommen zur Präsentation auf der bzw. zur Publikation in den Proceedings zur ISSEP, Torun.

[8] Schubert, Sigrid; Schwill, Andreas (2004): *Didaktik der Informatik*. Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

[9] Ziegenbalg, Jochen (1987): *Anmerkungen zur „Kritik der Logo-Philosophie“*. In: JMD, Heft 4, S. 305 – 313.

Michael GAIDOSCHIK, Wien

Automatisierung arithmetischer Basisfakten: Zur Notwendigkeit eines strategie-zentrierten Erstunterrichts

1. Vorbemerkung zum Stellenwert frühen Automatisierens

Dass Kinder möglichst bereits am Ende des ersten Schuljahres die Plus- und Minusaufgaben im Zahlenbereich bis 10, zumindest teilweise auch schon bis 20 durch schnellen „Faktenabruf“ aus dem Gedächtnis lösen können sollten: Darüber scheint es in der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik weitgehend Einigkeit zu geben. Wenn auch dabei stets betont wird, dass dieses „Automatisieren“ erst auf Grundlage eines soliden Zahlverständnisses, von Einsicht in operative Zusammenhänge und keinesfalls durch ein „Auswendig*lernen*“ im Sinne einer Reiz-Reaktions-Konditionierung angestrebt werden sollte, setzt Ginsburg (1989) doch zumindest eine deutlich andere Gewichtung, wenn er vorschlägt, „(fact) mastery should be defined in terms of accuracy and understanding, not in extreme speed“ und dabei sogar (bei Erfüllung der Bedingungen "accuracy and understanding") das zählende Lösen der Grundaufgaben als "acceptable, even desireable approach" ansieht. Gegen Letzteres lassen sich gute Argumente anführen. Wesentlich erscheint mir aber Ginsburgs Ausdehnung von "fact mastery" auf das Ableiten von Grundaufgaben aus anderen Aufgaben (etwa 3 + 4 aus 3 + 3): Wenn wir das *Automatisieren solcher Ableitungsstrategien* auf Basis einiger weniger tatsächlich zu merkender Aufgaben - und *nicht* das *Automatisieren aller Grundaufgaben selbst* - zu einem zentralen Inhalt des Erstunterrichts machten, würde sich die Warnung vor dem "bloßen Auswendiglernen" erübrigen; und vieles spricht dafür, dass gerade auf diesem "Umweg" letztlich auch das *Auswendigmerken der abgeleiteten Aufgaben* befördert wird (vgl. Gaidoschik, 2007).

2. Empirische Studie zur Entwicklung additiver Lösungsstrategien

So einig sich die aktuelle deutschsprachige Fachdidaktik im Ziel einer frühen Automatisierung der arithmetischen Grundaufgaben ist, so wenig hat sie bislang untersucht, ob und in wie weit dieses Ziel im gegenwärtigen Unterricht auch erreicht wird. Studien zur Entwicklung kindlicher Lösungsstrategien im Bereich der "basic facts" liegen vor allem aus dem englischen Sprachraum vor, mit – bezogen auf die oben zitierten "Zielvorgaben" – ernüchterndem Ergebnis: Carpenter und Moser (1984) stellten in ihrer Längsschnittstudie am Ende des ersten Schuljahres nur bei etwa 11 Prozent der Kinder "Mastery of facts" im Zahlenraum bis 10 fest, wobei sie diese recht zurückhaltend definierten (Zählstrategien bei höchstens einem Drittel der gestellten Plus- und Minusaufgaben). Noch Mitte des zweiten Schuljahres war solche "Fact mastery" selbst im Zahlenraum bis 10 erst bei 45 % der untersuchten Kinder feststellbar. Wenn solche Ergebnisse von psychologischer Seite als (quasi naturgegebene) "Entwicklungsmerkmale" interpretiert werden, so ist dem entgegen zu halten, dass wir in solchen Studien stets zumindest *auch* das messen, was im Erstunterricht dieser Kinder an Lernanregungen gegeben oder eben auch vorenthalten wurde.

Diesen (meiner Vermutung nach wesentlichen) Einfluss des Unterrichts habe ich in einer eigenen Studie (Gaidoschik, in Vorbereitung) auf verschiedene Weise mit zu erheben versucht – im schmerzhaften Bewusstsein der begrenzten Aussagekraft der mir in diesem Bereich verfügbaren Mittel. So habe ich im Schuljahr 2006/2007 einerseits anfangs 160, durchgängig 139 durch Zufallsauswahl aus 20 niederösterreichischen Volksschulen gewonnene ErstklässlerInnen zu drei Terminen (zu Beginn, Mitte und am Ende des ersten Schuljahres) in qualitativen Interviews zu ihren Lösungsstrategien bei ausgewählten additiven Grundaufgaben befragt. Andererseits wurde über LehrerInnenfragebogen und Analyse von Schulbüchern und –heften versucht, die methodisch-didaktische Komponente des Unterrichts wenigstens etwas näher zu bestimmen.

In der LehrerInnenbefragung ergab sich unter anderem folgendes:

- Der Unterricht war in allen Klassen eng an den Vorgaben des jeweiligen Schulbuches orientiert; das Schulbuch wurde in der Regel zu 100 %, Seite für Seite, abgearbeitet und zumeist um Übungsblätter ergänzt, die aus anderen (ähnlich konzipierten) Schulbüchern entnommen wurden.
- Alle fünf Schulbücher, die in diesen Klassen Verwendung fanden, folgen dem Konzept der "kleinen und kleinsten Schritte", das in der aktuellen Fachdidaktik kaum noch Fürsprecher findet, in Österreich den Schulbuchmarkt aber nach wie vor dominiert. Auf den Übungsseiten finden sich vorwiegend, im meistverwendeten Buch nahezu ausschließlich, "graue Päckchen", also Zusammenstellungen von Aufgaben ohne operativen Zusammenhang. Diese tragen oft den Vermerk "Lege und rechne", was bei "grauen Päckchen" im Grunde einer "Anstiftung zum zählenden Rechnen" gleichkommt. Denselben "Tatbestand" erfüllen zahlreiche Veranschaulichungen (Addieren und Subtrahieren als "Springen am Zahlenstrahl", unstrukturierte Abbildungen, die keine quasi-simultane Anzahlerfassung erlauben).
- Die LehrerInnen wurden befragt, ob, wie lange und wie intensiv sie

einzelne Lösungsstrategien für die additiven Grundaufgaben im Unterricht thematisiert haben. Einige Ergebnisse:

– "Legen und Zählen" wurde von 71 % der Lehrkräfte (in den ersten Schulmonaten) als Lösungsstrategie im Unterricht „erarbeitet und trainiert".

– 62 % gaben an, die Strategie "Weiterzählen im Kopf" „erarbeitet und trainiert" zu haben, im Schnitt über einen Zeitraum von 3,5 Monaten.

– Demgegenüber wurde die Ableitungsstrategie "Verdoppeln plus 1" nach eigenen Angaben nur in 25 % der Klassen überhaupt zum Thema gemacht, in der Regel nur innerhalb eines Monats.

Die in den qualitativen Interviews zu Schulende erhobenen Strategien der Kinder sollten vor diesem Hintergrund interpretiert werden. Hier nur einige wenige Teilergebnisse (eine umfassende Darstellung ist in Vorbereitung):

– Ende des 1. Schuljahres erfüllten etwa 36 % der Kinder die Kriterien von Carpenter und Moser für "Fact mastery" im Zahlenbereich bis 10: Zumindest zwei Drittel der gefragten "nicht-trivialen" Plus- und Minusaufgaben im ZR 10 wurden von diesen Kindern entweder durch Faktenabruf oder durch Ableitungsstrategien gelöst. (Als "trivial" im Sinne von "fast von allen Kindern durch Faktenabruf gelöst" erwiesen sich Verdoppelungsaufgaben.)

– Dagegen lösten etwa 27 % der Kinder auch im Zahlenbereich bis 10 mehr als zwei Drittel der "nicht-trivialen" Aufgaben durch Zählstrategien; etwa 7 % lösten alle diese Aufgaben zählend.

– Etwa die Hälfte der Kinder löste wenigstens eine Aufgabe durch eine Ableitungsstrategie, obwohl der Unterricht (s.o.) dies nicht oder nicht ausreichend gefördert (oft sogar behindert) hat.

– Das Ableiten blieb bei vielen aber auf einzelne Aufgaben (mitunter eine einzige) beschränkt, während andere Aufgaben (die mit derselben Strategie leicht zu lösen wären) zählend bewältigt wurden.

– Auch viele jener Kinder, die keine einzige Aufgabe durch Ableitung lösten und vorwiegend „zählend rechneten", zeigten (im Rahmen von „Zusatzaufgaben" oder auch in der Art, *wie* sie zählend vorgingen) Einsichten, welche eine solide Grundlage auch für nicht-zählende Strategien sein könnten: offenkundig „ungenutztes Potential"!

3. Mögliche Schlussfolgerungen für den Unterricht

Dass im Mathematik-Erstunterricht in den untersuchten Klassen so manches den Anregungen der aktuellen Fachdidaktik zuwider lief, wurde bereits dargestellt. Lassen sich aber aus der Studie (obgleich nicht primär dafür konzipiert) auch konstruktive Hinweise für die Unterrichtsgestaltung gewinnen? Ich möchte, wie auch in meinem Vortrag auf der GDM-Tagung, vor allem zweierlei zur Diskussion stellen:

- Die bei SchulanfängerInnen in der Regel bereits vorfindlichen zählenden Lösungsstrategien sollten m. E. in der Weise aufgegriffen werden, dass ihnen *von Anfang an* Ableitungs-Strategien gegenübergestellt und den Kindern als letztlich einfacher und sicherer „schmackhaft gemacht" werden. Voraussetzung dafür sind Einsichten in Teile-Ganzes-Beziehungen von Zahlen, Operationsverständnis und einzelne bereits gemerkte Aufgaben. Auch diese Voraussetzungen bringen viele Kinder bereits in die Schule mit; mit den anderen sollte zunächst vorrangig an diesen Voraussetzungen gearbeitet werden. Im Unterricht zur (Weiter-)Entwicklung zählender Strategien (etwa zum „fortgeschritteneren" Weiterzählen) zu ermutigen, erübrigt sich dann.
- Sollen möglichst alle Kinder zu *„Ableitern"*, also zu *Nutzern* operativer Zusammenhänge werden, dann bedarf es gezielter Anstrengungen. Die *Einsicht* in operative Zusammenhänge (etwa im Rahmen "schöner Päckchen") führt nicht „von selbst" dazu, dass solche Zusammenhänge auch außerhalb der „Päckchen" als nicht-zählende Lösungsstrategie genutzt werden. Zumindest manche Kinder benötigen dafür ein gezieltes Training – zunächst in der Anwendung einzelner Strategien, dann gerade in der Auswahl der jeweils für eine bestimmte Aufgabe hilfreichen Strategie; dies scheint dem Autor auch in sonst vorbildlichen Lehrwerken derzeit zu wenig berücksichtigt.

Literatur

Carpenter, Thomas P. & Moser, James M.: *The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three.*- In: Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 15 (1984), No. 3, S. 179-202.

Gaidoschik, Michael: *Rechenschwäche vorbeugen - Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen.*- Wien: öbvhpt, 2007.

Ginsburg, Herbert P.: *Children's Mathematics. How they learn it and how you teach it.*- Austin: pro-ed, 2nd edition, 1989.

Hedwig GASTEIGER, München

Lernanregungen und -dokumentation im Alltag der Kindertagesstätte – ein kompetenzorientierter Förderansatz

Theoretischer Hintergrund

Der frühen Förderung mathematischer Grundfähigkeiten wird in den letzten Jahren vermehrt große Bedeutung beigemessen. Ausgelöst wurde diese verstärkte Diskussion unter anderem durch die Ergebnisse der internationalen Vergleichsstudien (vgl. HELLMICH 2007). Für die Förderung elementarer mathematischer Fähigkeiten gibt es bislang unterschiedliche Forschungsrichtungen. Sie reichen von der Identifizierung sogenannter „Risikokinder“ durch Testinstrumente, um entsprechende Fördermaßnahmen anschließen zu können (z. B. KRAJEWSKI 2003, GRÜßING 2006) bis hin zur Suche nach mathematisch bedeutsamen Lernsituationen, die sich an grundlegenden mathematischen Ideen orientieren (z. B. WITTMANN 2006, VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2001). Im Kindertagesstättenalltag kommen zum Teil lehrgangsartig konzipierte Einheiten mathematischen Inhalts zum Einsatz, die nach mehr oder weniger fest vorgegebenem Raster durchgeführt werden.

Das aktuelle Verständnis von Lernen als aktive, entdeckende, situative und soziale Tätigkeit legt nahe, gerade auch im vorschulischen Bereich in erster Linie natürliche Lernsituationen zu nutzen, diese weiterzuentwickeln und dabei die individuellen Fähigkeiten der Kinder möglichst detailgenau in den Blick zu nehmen, um weitere Unterstützung geben zu können und den Lernprozess der Kinder konstruktiv zu begleiten. Der Beobachtung und Dokumentation individueller Lernfortschritte kommt dabei eine große Bedeutung zu (vgl. SCHÄFER 2004), da der Überblick über den Entwicklungsstand eines Kindes eine zentrale Grundlage für herausfordernde und möglichst passgenaue Lernanregungen liefert. Zugleich ist die Aufgabe der Dokumentation eine Herausforderung für die Erziehenden, die als Chance zum persönlichen Weiterlernen genutzt werden kann, denn fachliche und fachdidaktische Grundlagen gelten als Voraussetzung dafür, die Fähigkeiten der Kinder überhaupt wahrzunehmen.

Forschungsfrage und Design der Interventionsstudie

Im Rahmen einer Längsschnittstudie wird folgender Fragestellung nachgegangen:

Zeigen sich in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen bei Kindern, deren Erzieherinnen/Erzieher gezielt mathematische Grundfähigkeiten beobachten und dokumentieren, Effekte im Vergleich zu einer Kontrollgruppe?

Die Untersuchung findet im Rahmen des Verbundprojekts „Stärkung der Bildungs- und Erziehungsqualität in Kindertageseinrichtungen und Grundschule und Gestaltung des Übergangs – TransKiGs“ statt, in dem sich das Bundesland Berlin der Aufgabe der Weiterentwicklung und Erprobung von Lerntagebüchern für Kita und Schule stellt.

Im Sommer 2006 bzw. 2007 wurden mit 42 Kindern der Projektkindertagesstätten sowie einer nach Alter, Geschlecht und Migrationshintergrund gleich geschichteten Kontrollgruppe zur Erhebung mathematischer Kompetenzen Einzelinterviews durchgeführt. Dafür wurde auf der Basis einer Zusammenschau bereits vorliegender Untersuchungen (GASTEIGER 2007) ein Test bestehend aus einem material- und einem paper-pencil-gestützten Interview entwickelt. Ein dritter Erhebungszeitpunkt ist für Sommer 2008 geplant, wobei ein Teil der Kinder seit September 2007 bereits die Schule besucht. Insofern wird die Abschlusserhebung sowohl an den Schulen als auch in den Kindertagesstätten durchgeführt.

Zur Dokumentation der mathematischen Grundfähigkeiten verwenden die Erziehenden das Instrument „Lerndokumentation“ (STEINWEG 2006). Ein nach inhaltlichen und prozessbezogenen Kriterien untergliedertes Raster soll die Beobachtung erleichtern und dazu beitragen, mathematische Lernsituationen bewusster wahrzunehmen. Voraussetzung für den Einsatz eines solchen Instruments ist sowohl ein mathematisch anregungsreiches Lernumfeld für die Kinder als auch das notwendige Grundwissen der Erziehenden über die Entwicklung mathematischer Grundfähigkeiten bei Kindern. Deshalb wurde begleitend zum Einsatz der Lerndokumentation eine Fortbildungsoffensive durchgeführt, die in drei Fortbildungsmodulen Hintergrundwissen und Anregungssituationen zu den Bereichen „Zahl, Zählen, Mengen“, Raum und Form“, „Maße, Zeit, Daten“ darbot, sowie in einem Modul das Wahrnehmen und Dokumentieren mathematischer Fähigkeiten in den Mittelpunkt rückte. Zudem hatten Koordinationspersonen die Möglichkeit, sich im Rahmen zweier Fachtagungen über die Lerndokumentation sowie über die heterogenen Voraussetzungen der Kinder im Übergangsbereich Kindertagesstätte-Grundschule weiterzubilden.

Die Kontrollgruppe blieb ohne geplante Intervention.

Erste Trend-Ergebnisse

Die Ergebnisse der Vorkenntnisuntersuchung in den Projektkindertagesstätten im Sommer 2006 signalisierten großen Handlungsbedarf. So konnten beispielsweise 41% der 3- bis 5-jährigen Kinder nicht bis 10 zählen. 86% erkannten die Würfelbilder 3, 4, 5 und 6 nicht. Die Kontrollgruppe zeigte bereits im Vortest signifikant bessere Leistungen.

Erste Trendergebnisse nach dem zweiten Erhebungszeitpunkt geben folgendes Bild (Abb.1).

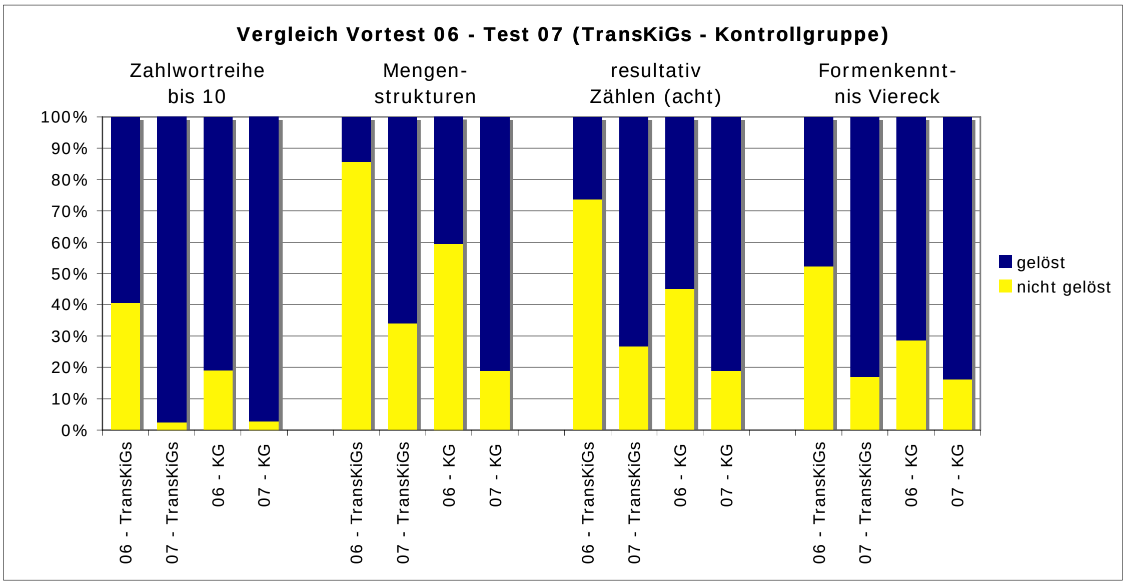


Abbildung 1

Die Kinder der Projektkindertagesstätten konnten ihren Entwicklungsrückstand bezüglich der Zahlwortreihe bis 10 nach einem Jahr aufholen, wobei davon auszugehen ist, dass sich die Leistungen der Kontrollgruppe von denen der Kinder in der Projektgruppe nach wie vor unterscheiden: 40% der Kinder in der Kontrollgruppe können bis 20 oder darüber hinaus zählen, in der Projektgruppe sind dies nur 27%.

Deutlich ist die Verbesserung der Leistungen der Kinder in der Projektgruppe beim Erkennen der Würfelbilder. Während 2006 nur 14 % die Würfelbilder erkannte, sind dies 2007 67% (Kontrollgruppe: 2006: 41%, 2007 81%).

Im Bereich resultatives Zählen und Formenkenntnis fand eine Annäherung der Leistungen an die der Kontrollgruppe statt.

In anderen Bereichen, wie z. B. beim Rückwärtszählen oder bei der Ziffernkenntnis waren keine deutlichen Verbesserungen der Projektgruppe im Vergleich zur Projektgruppe ersichtlich. Diese Ergebnisse geben einen ersten Einblick. Weitere Datenanalysen, auch hinsichtlich Migrationshintergrund, Alter und Geschlecht werden noch folgen.

Diskussion

Die ersten Ergebnisse dieser Untersuchung bestätigen einmal mehr die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen, die sich bei Kindern bereits im Alter von 3 bis 5 Jahren deutlich zeigen. An der fachdidaktischen Kompetenz der Erziehenden anzusetzen, ihre Beobachtungskompetenz zu schulen - verbunden mit Fortbildungsmaßnahmen zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen und mathematisch bedeutsamen Anregungssituationen - scheint jedoch eine Chance zu sein, den individuellen Unterschieden mit kompetenzorientiertem Blick zu begegnen, die man im Auge behalten sollte.

Literatur

GASTEIGER, Hedwig (2007). Stand der mathematischen Kompetenzdiagnosen am Übergang von Kindertagesstätten und Grundschule und zukünftige Perspektiven. http://www.transkigs.de/fileadmin/user/redakteur/Berlin/ExpertiseKompetenzdiagnosen_Gasteiger_10-2007.pdf (aufgerufen 5.3.2008)

GRÜßING, Meike (2006). Handlungsleitende Diagnostik und mathematische Frühförderung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule. In: Grüßing, M.; Peter-Koop, A (Hrsg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. Offenburg: Mildenberger

HELLMICH, Frank (2007). Möglichkeiten der Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten im vorschulischen Bereich. In: bildungsforschung, Jahrgang 4, Ausgabe 1, URL: http://www.bildungsforschung.org/Archiv/_2007-01/mathematik/ (aufgerufen 4.3.2008)

HEUVEL-PANHUIZEN, van den, Marja (2001). Children Learn Mathematics. Utrecht: FI

KRAJEWSKI, Kristin (2003). Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Kovac

SCHÄFER, Gerd (2004). Beobachten und Dokumentieren in KiTas. In: Kindergarten heute 8/2004.

STEINWEG, Anna Susanne (2006). Lerndokumentation Mathematik. http://www.transkigs.de/fileadmin/user/redakteur/Berlin/Lerndoku_Mathe_druckreif_12.06.pdf (aufgerufen 5.3.2008)

WITTMANN, Erich Ch. (2006). Mathematische Frühförderung vom Fach aus. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006, Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Sandra GERHARD, Frankfurt

Algebra in der Grundschule - Von konkreten Größenvergleichen zu abstrakten Gleichungen

Algebra in der Schule

In Deutschland wie in anderen Ländern wird traditionell Algebra erst nach einer langjährigen arithmetischen Ausbildung als „generalised arithmetic" (vgl. LINS & KAPUT 2004) in den Schulen eingeführt. Dies begründet sich zum einen dadurch, dass sich historisch gesehen vor allem die neuzeitliche Algebra aus der Arithmetik entwickelt hat, obwohl es auch eine geometrische Wurzel der Algebra gibt. Zum anderen basiert diese Reihenfolge auf der Piagetschen Stufentheorie, nach der ein Kind erst ab dem zwölften Lebensjahr in das formaloperationale Stadium übertritt (vgl. PIAGET & INHELDER 1972), das für das algebraische Denken als generalisiertes und formalisiertes arithmetisches Denken eine zwingende Voraussetzung ist.

Aber auch wenn Schülerinnen und Schüler erst ab dem zwölften Lebensjahr beginnen, sich mit der Algebra auseinander zusetzen, haben Schülerinnen und Schüler erhebliche Probleme mit dieser Disziplin. Wenn LINCHEVSKI (2001) von einer Trennung von Arithmetik und Algebra durch ein „cognitiv gap" sprechen, erinnert dies zunächst an Piaget. Aber

„the notion cognitive gap is reserved to these steps in the pupil's learning experience where without a teaching intervention [...] he or she would not make a certain step." (LINCHEVSKI 2001, S. 144)

Dies bedeutet, dass sich die Arithmetik den Schülerinnen und Schülern auf natürliche Weise erschließen kann, während die Algebra konkreter Unterrichtsgegenstand sein muss, damit sich algebraisches Denken entwickelt. Ein wichtiger Unterschied zu Piaget liegt darin, dass das Vorhandensein eines „cognitiv gap" nicht einer frühen Behandlung von Algebra in der Schule widerspricht. Das erfolgreiche Erlangen von algebraischen Kenntnissen ist nicht mehr primär abhängig von der geistigen Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler, sondern vielmehr von der Qualität der Vermittlung algebraischer Fähigkeiten.

Early Algebra

Die Idee der Vermittlung von algebraischem Denken vor dem zwölften Lebensjahr trifft auf fruchtbaren Boden. Es werden zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt (vgl. CARRAHER & SCHLIEMANN 2007). Die Pre-Algebra legt den Schwerpunkt darauf, den Übergang zwischen Arithmetik und Algebra zu erleichtern, in dem schon vor dem eigentlichen Algebra-Unterricht verschiedene Interventionen gestartet werden. Sie setzt also kurz vor dem eigentlichen Algebra-Unterricht an.

Die Early Algebra hingegen sieht die Arithmetik als Teil der Algebra und vermutet die Ursache der Probleme mit der Algebra unter anderem darin, dass der Arithmetik-Unterricht zu lange ohne algebraische Elemente auskommen muss. Deshalb setzt sie den Algebra-Unterricht innerhalb oder vor der Arithmetik an, zum Beispiel durch Förderung von arithmetischem und numerischem Argumentieren oder Umdeutung von arithmetischen Operationen zu Funktionen.

Das Measure-Up-Programm

Einen ungewöhnlichen Weg innerhalb der Early Algebra geht das Measure Up–Programm (vgl. Dougherty & Slovin 2004). Das Programm basiert auf einem Unterrichtsversuch von Davydov (1975) aus den sechziger Jahren. Im Rahmen dieses Unterrichtsversuchs wird abstraktes algebraisches Denken über Größen und Größenvergleiche bereits in der ersten Klasse noch vor den natürlichen Zahlen behandelt. Dazu werden von den Schülerinnen und Schülern zunächst konkrete Längen-, Flächen-, Volumen- und Massenvergleiche durchgeführt und die Größen anschließend zunächst durch unterschiedlich große Zeichen und schließlich durch Buchstaben abstrahiert und verschriftlicht. Erst dann erfolgt der Einstieg in die natürlichen Zahlen, die von den bereits erlernten symbolischen Darstellungen begleitet wird.

Forschungsvorhaben

Das Forschungsvorhaben setzt am MeasureUp-Programm an und versucht, die Idee der EarlyAlgebra auf deutsche Schulen bzw. Schülerinnen und Schüler zu übertragen, um dadurch mehr über das Lernen von Algebra durch Schülerinnen und Schüler zu erfahren. Da Algebra in Deutschland nicht Teil des Grundschulkurriculums ist und die Durchführung des MeasureUp-Programms einen längeren Zeitraum in Anspruch nimmt, kam ein Unterrichtsversuch während des regulären Unterrichts in einer staatlichen Grundschule zunächst nicht in Frage. Als Alternative bot sich an, das Programm an einer (Privat-)Schule mit einem hohen Anteil an freiem Unterricht durchzuführen, in diesem Fall in der vorbereiteten Umgebung einer Montessori-Schule.

Aus diesen Rahmenbedingungen, sowie dem Hintergrund und dem Stand der Forschung ergaben sich somit folgende vorläufigen Forschungsfragen:

- Kann das MeasureUp – Konzept methodisch auch als Freiarbeit realisiert werden und funktioniert es in dieser Form für Schülerinnen und Schüler der ersten Jahrgangsstufe / Grundschule in Deutschland?
- Wenn ja, welche Bedingungen müssen dafür vorliegen?
- Gibt es Zusammenhänge zwischen arithmetischen Kenntnissen der Schülerinnen und Schüler und ihrem Zugang zur Algebra?
- In welchen höheren Altersstufen ist das MeasureUp–Konzept noch fruchtbar?

Vorgehensweise

Bei der Klasse, in der das Projekt durchgeführt wurde, handelt es sich um eine jahrgangsgemischte Integrationsklasse 1-3, die von 11 Schülerinnen und 7 Schülern im Alter von 7 bis 11 Jahren, davon 4 Integrationskindern, besucht wird. Der Unterricht findet überwiegend in Freiarbeit statt, gemeinsame Aktivitäten sind selten. Dies ermöglicht es, einzelne Schülerinnen und Schüler sowie kleine Schülergruppen abgetrennt von den übrigen Schülerinnen und Schülern zu unterrichten.

Da ein Forschungsgegenstand der Zusammenhang zwischen arithmetischen Kenntnissen und Zugang zur Algebra ist, werden zunächst grundlegende Arithmetik-Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler, wie Zählen, Kenntnis des Stellenwertsystems, sowie Strategien bei den vier Gundrechenarten mittels des ElementarMathematsichen BasisInterviews (EMBI) überprüft (vgl. PETER-KOOP, A. ET AL. 2007). Anschließend wird das Thema Algebra allen Schülerinnen und Schülern vorgestellt und Freiarbeitshefte inklusive Material den Schülerinnen und Schülern frei zugänglich gemacht. Die Freiarbeitshefte sollen dabei folgende Kriterien erfüllen: Sie sollen eng an MeasureUp angelehnt sein, Montessori-Material und anderes Material mit einbeziehen, möglichst selbständig bearbeitet werden, sowie für alle Kinder der Klasse geeignet sein sollte. Bei Bedarf werden die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der Aufgaben in den Freiarbeitsheften einzeln oder in Kleingruppen betreut.

Erste Ergebnisse

Das EMBI ergab einen sehr heterogenen Kenntnisstand der Klasse in Arithmetik, mit der zu erwartenden Differenz zwischen den einzelnen Jahrgangsstufen. Das erste Freiarbeitsheft behandelt zunächst nur konkrete Längen-, Flächen- und Volumenvergleiche bis zur Abstraktion der Größen durch unterschiedlich große Zeichen, also noch keine Abstraktion durch Buchstaben und Buchstabengleichungen.

Die Arbeit mit den Schülerinnen und Schülern der ersten Klasse zeigte, dass bereits bei den Größenvergleichen einige Schwierigkeiten auftraten, denen jedoch mit intensiver Lehrerintervention begegnet werden konnte. Mit zunehmendem Alter fiel es den Schülerinnen und Schülern hingegen nicht schwer, die Größenvergleiche mit Zeichen zu abstrahieren und über die Arbeit mit dem Freiarbeitsheft hinaus durch Buchstabengleichungen, auch unter Einbeziehung der Kommutativität, darzustellen.

Ausblick

Auch wenn eine Einführung von abstraktem algebraisches Denken über Größen und Größenvergleiche bereits in der ersten Klassen möglich ist, scheint sie mit einem großen Lehraufwand verbunden zu sein. Zusätzlich stellt sich die Frage, ob es zweckmäßig ist, dass Schülerinnen und Schüler sich bereits in der ersten Klasse mit diesen Inhalten beschäftigen, zumal sich abzeichnet, dass Schülerinnen und Schüler der dritten Klassen weniger Schwierigkeiten mit dem Thema haben und sich dort noch nicht die Probleme abzeichnen, mit denen Schülerinnen und Schüler zu einem späteren Zeitpunkt zu kämpfen haben. Deshalb ist es naheliegend den weiteren Fokus auf Forschungsfrage „In welchen höheren Altersstufen ist das MeasureUp–Konzept noch fruchtbar?“ zu legen. Dazu ist es angedacht, das Konzept auf Klasse 5 zu übertragen. Parallel dazu wird das bereits begonnene Programm in Klasse 1-3 weiterverfolgt.

Literatur

1. Carraher, D.W. & Schliemann, A. D.(2007): Early Algebra and Algebraic Reasoning. In: F.K. Lester (Hrsg.), Second Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the national council of teachers of mathematics, USA: Information Age Publishing Inc.
2. Davydov, V. V. (1975): The Psychological Characteristics of the „Prenumerical“ Period of Mathematics Instruction. In: L. P. Steffe (Hrsg.), Children's Capacity for Learning Mathematics. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. Vol. VII. Chicago: University Of Chicago. S. 109-205.
3. Dougherty, B. & Slovin, H. (2004): Generalized Diagrams as a Tool For Young Children's Problem Solving. In: Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2, S. 295-302.

Weitere Literatur findet sich unter : http://www.math.uni-frankfurt.de/~gerhard

Boris GIRNAT, Münster

Lehrervorstellungen zur Allgemeinbildung im Geometrieunterricht der Sekundarstufen: Subjektive und fachdidaktische Ansichten im Kontrast

„Geometrie als ein Mittel zur Erreichung intellektueller Kompetenzen, zur praktischen Nutzung im Alltag, zur Entfaltung spielerischer Fähigkeiten und zur Entwicklung von Freude an Mathematik, als Begriffsapparat, als Kulturgut, als Feld für charakteristisches mathematisches Arbeiten.“ [2, 169]. Mit diesen Stichwörtern beschreibt ein Übersichtsartikel die neuen Einflüsse, die sich in der Geometriedidaktik in den 20 Jahren nach der fachwissenschaftlichen Orientierung der 70er Jahre entwickelt haben. Einer der Autoren – Graumann – geht noch weiter und ordnet all diese Aspekte der *Allgemeinbildung* unter: „Das Ziel des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen sollte ja nicht die Vermittlung der Ergebnisse mathematischer Forschungen [. . .] sein. Vielmehr müssen wir nach den allgemeingültigen Aspekten der Beschäftigung mit Mathematik Ausschau halten.“ [1, 34]. Die Konsequenzen für den Geometrieunterricht beschreibt er in seiner „Geometrie im Alltag“ folgendermaßen: „Mathematik darf sich [. . .] nicht verselbständigen, ihre Rolle leitet sich von ihrer Bedeutung für die jeweilige Lebenssituation ab, [sie ist] ein Hilfsmittel (tool) zur Bewältigung des gegenwärtigen und zukünftigen Lebens.“ [1, 33ff.].

Stellt ein Lehrer nach eigenem Bekunden die Allgemeinbildung ins Zentrum seines Unterrichts, so dürfte man vielleicht eine Unterrichtsgestaltung im Sinne Graumanns erwarten, wohl aber kaum eine Ansicht wie die folgende, die ein Lehrer über den Nutzen seines Geometrieunterrichts als Ganzen gegeben hat: „Zum Selbstzweck. Also ich sehe gar nicht ein, warum sich da der Mathematikunterricht rechtfertigen muss.“ Dieser Lehrer – im weiteren Lehrer C genannt – nimmt gegenwärtig an einer qualitativen Interviewstudie zum Geometrieunterricht der beiden Sekundarstufen unter Leitung des Verfassers teil. Ziel dieses Artikels ist es, die näheren Beweggründe dieser Antwort darzustellen und dabei zu verdeutlichen, wie der theoretische Hintergrund der Studie – das Forschungsprogramm Subjektive Theorie (FST) – einen Beitrag zur Mathematikdidaktik liefern kann.

FST stammt aus der Psychologie (vgl. [3]). Es geht vom Menschen als *reflektierendem Subjekt* aus und versucht, menschliches Verhalten als rationales Handeln vor dem Hintergrund subjektiver *Ziele*, *Überzeugungen* und

Beschreibungen – zusammengefasst als subjektive Theorien – zu erklären. Die Erkenntnismethode ist eine Interpretation halbstrukturierter Interviews. Gegenüber anderen Interpretationsweisen geht es dabei um die *argumentativen Zusammenhänge* zwischen den Aussagen. An dieser Stelle wird dies an den Aussagen verdeutlicht, die Graumann und Lehrer C gemacht haben.

Graumann	Lehrer C
„Mathematik darf sich nicht verselbständigen, ihre Rolle leitet sich von ihrer Bedeutung für die jeweilige Lebenssituation ab, [sie ist] ein Hilfsmittel (tool) zur Bewältigung des gegenwärtigen und zukünftigen Lebens.“ [1, 33ff.]	Auf Beweise angesprochen: „Ich sehe bei aller Anwendungsorientierung das Fach Mathematik. Also ich weiß, dass man sich damit auf dünnes Eis begibt, weil alles hieß jetzt immer Anwendung, Anwendung, muss auf Beruf, muss irgendwie nutzbar sein und so, Wissen darf nicht irgendwie hohl daherkommen und so – und trotzdem finde ich, dass da eigentlich mal sozusagen echte Mathematik drinsteckt.“
„Die Zusammenhänge [müssen] im Rahmen von Ganzheiten behandelt werden, wobei die Erkenntnisse auf konkrete Erfahrungen basieren und an realitätstreue Situationen angebunden sein sollen.“ [1, 33]	„Also ich wollte nur sagen, dass man es auch übertreiben kann mit der Anwenderei – also übertreiben, indem man zu viel Nichtmathematisches dazunimmt.“ Auf die Stoffauswahl angesprochen: „Dieses Wissen, das man wirklich ganz konkret braucht, das endet in Klasse 7. Ab da ist alles konstruiert. […] Dann ist es eigentlich auch egal, dann ist nur noch die Frage, wie finde ich das interessant, macht mir das Spaß.“
„[Der reformierte Geometrieunt.] hat eine Tendenz zum fächerübergreifenden Unterricht.“ [1, 34]	„Regeln akzeptieren, die von außen vorgegeben sind, und sich daran halten, ohne dass sie permanent hinterfragt werden müssen, das ist zum Beispiel eine Sache, die das Fach Mathematik bietet und andere Fächer vielleicht manchmal nicht so. Das finde ich zum Beispiel als eine Sache, die mir wichtig wäre.“

Diese Tabelle ist wenig hilfreich: Der eine sagt in der Regel das Gegenteil des anderen – zwischen den Meinungen abwägen kann man dadurch nicht. Nun soll gezeigt werden, wie gerade das erleichtert wird, wenn die Aussagen als subjektive Theorien interpretiert werden. Zunächst Graumann:

– (Ziel:) Der MU soll allgemeinbildend sein.

– (Explikation:) Allgemeinbildung erfordert Relevanz für alle Schüler angesichts gegenwärtiger und erwartbarer Lebenssituationen.
– (Deskriptive Aussage:) Das erreicht man nur, wenn man reale Probleme aus der Lebenswelt behandelt und daran Problemlösestrategien übt.
– (DA:) Wegen der verschiedenen möglichen Lebensläufe muss der Problembereich auf alltägliche Gemeinsamkeiten beschränkt werden.
– (Folge:) Mathematik soll als Mittel zur Lösung realer Probleme unterrichtet werden.
– (F:) Fachsystematik erfolgt nur so weit, wie sie der Problemlösung dient.
– (DA:) Reale Probleme haben nicht nur mathematische Aspekte.
– (F:) Auch nichtmathematische Aspekte müssen berücksichtigt werden.
– (DA:) Fachtrennung steht der Behandlung realer Probleme im Wege.
– (F:) Fächerübergreifender Unterricht ist wünschenswert, zumindest aber die Thematisierung nichtmathematischer Aspekte im MU.

Für Lehrer C sei noch eine Schlüsselstelle zitiert, in der er sich zur Allgemeinbildung äußert: „Also das ist eine allgemeinbildende Schule; und da kann man am Ende eben nicht speziell auf irgendein Berufsbild hin orientieren.“ Hier scheint der entscheidende Unterschied zu Graumann zu liegen: Beide verstehen den Begriff der Allgemeinbildung anders – Graumann als nutzbringende Bildung für alle; Lehrer C als Absage an eine spezielle Berufs- oder Studienvorbereitung. Versuchen wir nun, auch seine Aussagen in einen argumentativen Zusammenhang zu bringen:

– (Ziel:) Der MU soll allgemeinbildend sein.
– (Deskriptive Aussage:) Die Idee der Allgemeinbildung als Lebensbewältigung ist nach der 7. Klasse nicht mehr tragfähig.
– (Explikation:) Allgemeinbildung heißt (ab Klasse 7) eine zweckfreie Bildung ohne allzu starke Orientierung an späteren Lebensaussichten.
– (Z:) Der Unterricht soll prozessbezogene Kompetenzen vermitteln.
– (Deskriptive Aussage:) Schulfächer können verschiedene Kompetenzen unterschiedlich gut vermitteln.
– (Folge:) Jedes Fach soll sich auf seine Kernkompetenzen konzentrieren.
– (DA:) Der MU hat seine Kompetenzstärken im exakten Argumentieren.
– (E:) Exaktes Argumentieren umfasst Deduzieren, algorithmisches Bearbeiten, Rezipieren, Erkennen und Ordnen logischer Zusammenhänge.
– (F:) Der MU sollte sich auf diese Kompetenzen konzentrieren.
– (DA:) Diese Kompetenzen sind nicht an spezifische Inhalten gebunden.
– (DA:) Fachsystematik erleichtert das Lernen der Kompetenzen.

– (F:) Ganz gleich, welchen Inhalt man auswählt, man sollte ihn in einem fachsystematischen Zusammenhang darstellen.

Das FST kann nicht nur – wie eben gesehen – subjektive, zunächst befremdliche Ansichten verständlich und möglicherweise nachvollziehbar machen; der wesentliche Beitrag für die Didaktik über den Einzelfall hinaus besteht darin, dass subjektive Theorie *dieselbe Struktur* haben wie Ziel-Mittel-Argumentationen der Curriculumsdebatte. Man kann die Ansichten der Lehrer als *Alternativsichten aus der Praxis* auffassen und mit „offiziellen" Meinungen vergleichen: Hat Lehrer C damit Recht, dass der Graumannsche Begriff der Allgemeinbildung ab der 7. Klasse nicht mehr trägt? Ist die Arbeitsteilung in verschiedenen Schulfächern ein sinnvoller Vorschlag? Liegen die wichtigsten Prozessziele des MUs in der Rezeption vorgefertigter mathematischer Inhalte?

Das FST arbeitet dabei die (möglicherweise) strittigen Aussagen heraus und ordnet sie ihrem Typ (Normen, Explikationen, deskriptive Aussagen) zu. Damit *strukturiert es die Diskussion* vor: Explikationen betreffen nur den Gebrauch von Worten; über Normen argumentiert man anders als über Tatsachenbehaupten. Gerade in der Herausarbeitung deskriptiver Aussagen überwindet das FST die Frage nach der *Allgemeingültigkeit* qualitativer Untersuchungen: Indem das FST deskriptive Aussagen verortet, stellt es diese einer intersubjektiven Debatte zur Verfügung.

Literatur

[1] GRAUMANN, G. : Geometrie im Alltag – Konzeptionen, Themenübersicht, Praxisberichte. In: BLUM, W. (Hrsg.) ; HENN, H. (Hrsg.) ; KLIKA, M. (Hrsg.) ; MAASS, J. (Hrsg.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht (ISTRON-Reihe, Band 1)*. Hildesheim : Verlag Franzbecker, 1994, S. 31–59

[2] GRAUMANN, G. ; HÖLZL, R. ; KRAINER, K. ; NEUBRAND, M. ; STRUVE, H. : Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre. In: *Journal für Mathematikdidaktik (JMD)* 3 (1996), Nr. 17, S. 163–237

[3] GROEBEN, N. ; WAHL, D. ; SCHLEE, J. ; SCHEELE, B. : *Das Forschungsprogramm Subjektive Theorie – Eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts*. Tübingen : A. Francke Verlag GmbH, 1988

Silke GÖTTGE, Mannheim
Christof HÖGER, Heidelberg

Mathematikunterricht in Europa - a european network (DQME II)

Das Comenius network Projekt DQME II (developping quality in mathematics education) hat unter der Leitung des Instituts für die Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts der Universität Dortmund eine Gruppe von Lehrern und Fachdidaktikern aus verschiedenen europäischen Ländern zusammengeführt. Ziel des Projektes ist die Qualitätsverbesserung im Mathematikunterricht. Dazu werden Arbeitsmaterialien mit europäischem Bezug entwickelt, erprobt und optimiert. Ganz nebenbei lernt man Gleichgesinnte in vielen europäischen Ländern kennen und gewinnt bei den jährlichen Treffen einen interessanten Einblick in den Schulalltag des entsprechenden Partnerlandes. Europa rückt zusammen und lernt sich auch im schulischen Sektor kennen und verstehen.

Die Teilnehmer des Projekts arbeiten in vier verschiedenen Gruppen: die Forschungsgruppe, die Lehrerbildungssgruppe, die Gruppe zur Entwicklung der Arbeitsblätter sowie eine Gruppe zur Kooperation mit weiteren Projekten.

Die Referenten sind Mitglieder der Lehrerbildungsgruppe und haben in dieser an der Entwicklung und Erprobung eines Workshops zum Thema „Erstellen von Arbeitsblättern" mitgearbeitet.

Ziel dieses Workshops ist es den Teilnehmern eine Hilfe bei der Erstellung von Arbeitsmaterialien zu geben sowie ihre Kreativität zu wecken. Neben den äußeren Merkmalen gelungener Arbeitsblätter sollen die didaktische Funktion und die fachlichen Inhalte erarbeitet werden.

Zu Beginn des Workshops erhielten die Teilnehmer einen kurzen Überblick über das Comenius Networking Project und dessen zeitliche Entwicklung.

Die Einteilung der Gruppen erfolgte bereits durch die Anordnung der Tische und Stühle: vier Teilnehmer bildeten ein Team in einer der Farben gelb, rot, grün, blau.

An jedem Arbeitsbereich lag eine Aufgabenmappe in der entsprechenden Gruppenfarbe bereit. Diese Mappe enthielt:

- Stift
- zahlreiche Textbausteine in der Gruppenfarbe und vier Bildelemente
- 1 leeres DINA4 Blatt in der Gruppenfarbe zum Aufkleben der ausgewählten

Elemente
- Dreieck, Quadrat, Ellipse, Trapez in der eigenen Gruppenfarbe (jeder wählte eine Figur und beschriftet sie mit seinem Namen)
- ein Kommentarblatt in der eigenen Farbe.

Mit Hilfe dieser Materialien sollten die Teams je ein Arbeitsblatt zum Thema „Apollo Brücke in Bratislava“ anfertigen.

Nachdem sich die Teilnehmer geeinigt hatten, welche der Textbausteine verwendet werden sollen, mussten diese noch in eine sinnvolle Reihenfolge gebracht und mit Hilfe der Bilder ansprechend angeordnet werden. Dabei entstand ganz natürlich eine Diskussion über die Zielgruppe und den zur Bearbeitung erforderlichen Zeitrahmen. Diese Informationen wurden auf dem Kommentarblatt festgehalten.

Als diese Phase beendet war, erhielt das Team einen Klebestift, fixierte die endgültige Version und notierte weitere Anmerkungen zum entwickelten Auftrag.

In der Vorbereitung des Workshops wurde für diese erste Arbeitsphase ein Zeitrahmen von 30 Minuten geplant, benötigten wurde jedoch eine Dreiviertel Stunde.

Direkt im Anschluss gab jede Gruppe das soeben erstellte Arbeitsblatt an die „Nachbarfarbe“ weiter. Diese erhielt für alle „Fremdfarben“ je einen Kommentarbogen, den sie mit ihren Einschätzungen und Bewertungen des erhaltenen Arbeitsauftrags ausfüllte. Dadurch, dass alle Teams das gleiche Ausgangsmaterial zur Verfügung gestellt bekommen hatten, konnten sie sich in dieser Phase sofort auf die didaktische Aufbereitung konzentrieren. Dieses Vorgehen wiederholte sich noch zweimal bis jedes Team die übrigen Arbeitsblätter bewertet hatte. Am Ende wurden die Kommentarbögen gesammelt, farblich sortiert und der entsprechenden Gruppe übergeben. Neugierig lasen die Gruppen ihre Kommentarbögen und bemerkten durchgehend, dass hauptsächlich strukturelle Verbesserungsvorschläge und weniger inhaltliche Aspekte angemerkt wurden. Deshalb sollten die einzelnen Gruppen noch je einen Erwartungshorizont anfertigen.

Der von den Referenten angestrebte Modellierungsaspekt und die zugehörigen Textbausteine wurden von den einzelnen Gruppen nicht als zentral angesehen.

Für den folgenden Arbeitsauftrag wurden neue Gruppen den geometrischen Figuren entsprechend gebildet. Es gab jetzt je eine Gruppe „Trapez“, „Ellipse“, „Rechteck“ und „Parallelogramm“.

Jedes Team erhielt diesmal unterschiedliches Arbeitsmaterial zum Themenbereich „Klimaproblematik“. Die vorbereiteten Arbeitsmappen enthielten:

- ein Stimulus (Zeitungsbericht, Fotos von alternativen Energiequellen, Säulendiagramm zum Vergleich der verschiedenen Energiearten, Tabelle Energiebedarf Privathaushalte (EU-Vergleich))

- Folie und Folienstift
- keine vorformulierten Aufgaben

- Arbeitsauftrag: „Erstellen Sie zu Ihrem Stimulus ein Arbeitsblatt für Schüler (Alter: 15+), das in einer Unterrichtsstunde bearbeitet und besprochen werden kann.“

Da der beschriebene Workshop in einem Computerraum stattfand, entschieden sich die Teilnehmer für die Erstellung ihres Arbeitsblatts am PC.

Die Intention der Vortragenden die Klimaproblematik ins Bewusstsein der Schüler zu rücken veranlasste sie eine Altersangabe von 15+ festzulegen. Die zur Verfügung gestellten Stimuli legten Aufgabenstellungen nahe, die mit relativ wenigen mathematischen Voraussetzungen bewältigt werden können. Daher baten die Teilnehmer darum weiteres Material aus dem Internet verwenden zu dürfen. Diese Informationsflut verleitete jedoch eine Gruppe an ihrem eigentlichen Arbeitsauftrag vorbeizurecherchieren. Der ursprünglich vorgesehene Zeitrahmen von einer Stunde fiel dadurch recht knapp aus und die Rückkehr in die ursprünglichen Farbgruppen entfiel und wurde durch eine Präsentation im Plenum ersetzt.

In der Evaluation der Referenten konnten viele der angestrebten Ziele als erreicht angesehen werden. Die Arbeitsblätter waren anwendungsorientiert und mit angemessener Fachsprache versehen. Die Teilnehmer befanden sich zum Zeitpunkt der Durchführung des Workshops am Beginn ihrer praktischen Ausbildungsphase nach ihrem Studium, so dass die kleinschrittigen, eng geführten W-Fragen die offeneren, operationalisierenden Arbeitsaufträge überwogen. Durch die anschließenden Diskussionen wurde die Kompetenz zum Erstellen und Beurteilen von Arbeitsmaterialien erweitert. Wünschenswert wäre abschließend eine Erprobung der erstellten Materialien mit Schülern des jeweiligen Alters.

Als Konsequenzen für erneute Durchführungen des Workshops ergeben sich somit ein großzügigerer Zeitrahmen und eine größere Auswahl an Stimuli für die Arbeitsphase 2.

Weitere Informationen zum Projekt findet man unter der Internetadresse: www.dqme.eu

Tom GORIS, Freudenthal Institut, Universität Utrecht
Matthias LIPPERT, Gymnasium Schwertstraße, Solingen

Wie Mathematik entsteht: Der niederländische Mathematikwettbewerb A-lympiade

Einleitung: In den Niederlanden sind sie höchst populär und gelten als originelle und unverzichtbare Bereicherung für den Mathematikunterricht der Oberstufe: die Mathematikwettbewerbe „A-lympiade" und „Wiskunde B-dag". Sie wurden vom Freudenthal Institut Utrecht ins Leben gerufen, um zu Problemlösen, Modellieren, Argumentieren und Teamarbeit anzuregen.
Seit 2001 nehmen auch Schülerinnen und Schüler aus Nordrhein-Westfalen an der A-lympiade teil. Der Wettbewerb wird als Landeswettbewerb in NRW durch das Ministerium für Schule und Weiterbildung und als internationaler Wettbewerb durch das Freudenthal Institut Utrecht ausgerichtet.

Die Aufgaben können mit den Fachkenntnissen der Mittelstufe bearbeitet werden. Ihr Anspruch liegt eher im methodischen Bereich: Die Teilnehmer sind als Forscher gefordert, die selbst beurteilen, welche mathematischen Werkzeuge im gegebenen Zusammenhang angemessenen eingesetzt werden können. Oft bringt die Erfindung oder Weiterentwicklung von mathematischen Verfahren und Begriffen die entscheidende Lösungsidee.

Der Wettbewerb ist an Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 10 bis 13 gerichtet. Diese arbeiten in Teams von drei oder vier Schülerinnen oder Schülern zusammen. Innerhalb von sieben Stunden erarbeiten sie ein vollständiges Produkt, z. B. einen Bericht für einen fiktiven Auftraggeber. Bei der Problemlösung und Darstellung der Ergebnisse darf der Computer mit all seinen Möglichkeiten verwendet werden.
Weitere Informationen finden sich auf den Webseiten [1], [2], [3] und [4].

Organisation: Die A-lympiade (wie auch der Wiskunde B-dag) findet am vierten Freitag im November statt. Die Aufgaben liegen in deutscher Sprache vor. Jede Schule darf bis zu zwei Schülerarbeiten zur Landesrunde NRW einsenden. Zur Bewertung der Schülerarbeiten erhält jede teilnehmende Schule ca. 6 der eingesandten Schülerarbeiten und bringt diese in eine Rangfolge. Aus den zurückgemeldeten Rangfolgen wird dann ein Gesamtranking aller eingereichten Arbeiten ermittelt. Die erfolgreichsten Teams aus diesem Ranking werden im Februar zu einem Wettbewerbswochenende eingeladen. Hier bearbeiten sie weitere Aufgaben und die nordrhein-westfälischen Teilnehmer für das Finale werden ermittelt. Im März findet die zweitägige, internationale Finalrunde in

Garderen (NL) mit insgesamt ca. 16 Teams aus verschiedenen Ländern (Niederlande, Dänemark, St. Marten, Deutschland) statt.

Statistik: Zur Landesrunde NRW der A-lympiade haben 2007 ca. 60 Schulen Arbeiten von insgesamt 85 Teams eingereicht. Damit waren an der Landesrunde ca. 400 Schülerinnen und Schüler beteiligt. Im Jahr 2007 erreichte ein Team aus NRW international den dritten Platz.

Wiskunde A in den Niederlanden: In den Niederlanden sind zur Teilnahme an der A-lympiade nur Schülerinnen und Schüler aus Profilen der „Wiskunde A" (Wiskunde heißt übersetzt Mathematik) zugelassen. Diese Profile sollen auf Studienrichtungen vorbereiten, in denen mit Mathematik in erster Linie als Anwendung gearbeitet wird. Außer durch die mathematischen Inhalte zeichnet sich das Profil der Wiskunde A durch eine spezielle Aufgabenkultur im Sinne der „realistic mathematic education" (rme) aus.
Der Ansatz der „rme" impliziert eine Aufgabenkultur, in der den Schülerinnen und Schülern mathematisches Modellieren auf allen Ebenen abverlangt wird. Dies wird durch „eingekleidete" Aufgaben, in denen ein mathematisches Objekt wie z. B. eine Gleichung oder eine Funktion als Modell „erkannt" werden soll, nicht gewährleistet. Die Modellierung von Aufgaben im Sinne der „rme" ist für Schülerinnen und Schüler vollständig nachvollziehbar, überprüfbar bzw. selbst entwickelbar.
Seit 1989 arbeitet eine vom Freudenthal Institut Utrecht beauftragte Kommission aus Hochschullehrern und Lehrern komplexe Modellierungsaufgaben aus, die durch die A-lympiade zu Popularität gelangten und an Schulen verbreitet wurden, die aber auch in anderen Formen – beispielsweise den „praktischen opdrachten" (Facharbeiten) Eingang in den Unterricht gefunden haben. Zur Zeit besteht diese Kommission aus folgenden Mitgliedern: Tom Goris (Freudenthal Institut, Universität Utrecht), Dede de Haan (Freudenthal Institut, Universität Utrecht), Willem Hoekstra (Institut für Fachdidaktik der Mathematik, Universität Amsterdam), Johan van de Leur (Mathematisches Institut, Universität Utrecht), Matthias Lippert (Gymnasium Schwertsraße, Solingen), Ruud Stolwijk (Jac. P. Thijsse College, Castricum), Monica Wijers (Freudenthal Institut, Universität Utrecht) .

Aufgabenbeispiele: Aus der Vielzahl der mittlerweile für die A-lympiade entstandenen Aufgaben werden hier exemplarisch einige Fragestellungen vorgestellt:

Vorrunde 1999-2000: *Glatteis in Zeist*
Anhand eines Stadtplans und einiger Informationen über Streuwagen und

Salzdepots sollte ein Gutachten für die Stadt Zeist erstellt werden, in dem die Möglichkeiten zur Erhöhung der Effizienz beim Salzstreuen erörtert werden. Dabei sollten die folgenden Fragestellungen berücksichtigt werden: Wie beurteilt man, ob ein Streuplan effizient ist? Wie findet man einen möglichst effizienten Streuplan? Welche Randbedingungen beeinflussen die Effizienz des Streuplanes? Welche Auswirkungen haben Maßnahmen zu Verbesserung der Effizienz?

Vorrunde 2001-2002: *Gebietsneuordnung*
Ein Verfahren zur Planung einer Gebietsneustrukturierung sollte entwickelt werden. Die Aufgabe wurde schrittweise - ausgehend von konkreten und leicht zu berechnenden Beispielen bis hin zur Frage nach einem allgemeinen Verfahren - gestellt. Dabei sollten folgende Fragen behandelt werden: Was kostet eine vorgegebene Gebietsneuordnung? Wie findet man bei vorgegebenen Flächenanteilen eine preisgünstigste Gebietsneuordnung? Wie wirken sich weitere Randbedingungen wie die Forderung nach einer zusammenhängenden landwirtschaftlichen Fläche, der Erhaltung von Flüssen und Hauptverkehrsstraßen etc. auf das Lösungsverfahren aus?

Vorrunde 2005-2006: *Zwei gegen Hundert*
Ein bekanntes niederländisches Fernsehquiz sollte analysiert und verbessert werden. Dabei wurden folgende Fragestellungen untersucht: Welche Spielverläufe erbringen welche Gewinne? Welchen Einfluss haben die Joker? Was ist der maximale Gewinn?
Welche Veränderungen sind notwendig, wenn statt eines Kandidaten ein zweiter Kandidat am Spiel teilnimmt?

Finale 2005-2006: *Let´s play Darts*
Der Abschlussauftrag bestand darin, ein Dartspiel für Kinder mit einer Dartscheibe für Kinder und geeigneten Regeln zu entwerfen. Dazu musste das Dartspiel analysiert werden und es musste beurteilt werden, wie stark das Spiel durch Glück und Können beeinflusst wird. Folgende Fragen sollten in dieser Aufgabe behandelt werden: Welche Spielverläufe sind möglich? Woran erkennt man einen guten Dartwerfer? Warum ist die Dartscheibe so aufgebaut, wie sie ist? Welchen Einfluss hat eine Veränderung der Scheibe auf den Spielverlauf?

Anforderungen an die Aufgaben: Um Modellieren zu ermöglichen und zu motivieren, werden Kontexte gewählt, die aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler stammen (z. B. Fernsehquiz) oder die von Schülerinnen und Schülern als orientierungsstiftend empfunden werden können (z. B. Gebietsneuordnung). Die Problembehandlung muss sich für geschickten Einsatz und Weiterentwicklung von Mathematik eignen. Der Problemlöseprozess soll zu Diskussionen im Team anregen muss daher mehrere Sichtweisen und Lösungswege zulassen. Da Schülerinnen und

Schüler von der Jahrgangsstufe 10 an zur Teilnahme eingeladen sind, darf nur den Mittelstufenstoff vorausgesetzt werden. Gleichzeitig muss die Problemstellung anspruchsvoll genug sein, um unterschiedliche Kompetenzniveaus in den Schülerlösungen deutlich werden zu lassen.

Erfahrungen: Die Schülerinnen und Schüler kommen innerhalb der kurzen Bearbeitungszeit zu erstaunlichen Ergebnissen. Sie finden überwiegend geeignete Modellierungsansätze, formalisieren ihre

ABBILDUNG 1: Schülerlösung zur Finalaufgabe „Let’s play Darts“; Die Regeln wurden nach sorgfältiger stochastischer Analyse möglicher Spielverläufe aufgestellt.

mathematischen Überlegungen auf hohem Niveau und bringen kreative Ideen ein. Allgemeine Begründungen fehlen allerdings häufig: Z. B. geben in der Vorrunde 2005-2006 („Einer gegen Hundert“) die meisten Teams den maximalen Spielgewinn richtig an, begründen aber die Maximalität nicht. Stochastik wird auch dann selten eingesetzt, wenn es sich anbietet.
Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler beurteilten die Aufgaben und den Wettbewerb durchweg positiv. Dabei entsprachen die Aufgaben vielfach nicht dem Bild, das die Schülerinnen und Schüler von Mathematik haben. Die Möglichkeit, Mathematik im Team zu entwickeln, wurde von vielen Teilnehmern als sehr motivierend und bereichernd beschrieben.

Webseiten für weitere Informationen:

[1] Niederländische Mathematikwettbewerbe in NRW, http://www.learn-line.nrw.de/angebote/alympiade/.
[2] A-lympiade beim Freudenthal Institut, Universität Utrecht, http://www.fi.uu.nl/alympiade/
[3] Zentrum für mathematische und naturwissenschaftliche Bildung der Universität zu Köln, http://zmnb.uni-koeln.de/.
[4] Landesverband Mathematikwettbewerbe Nordrhein-Westfalen e.V., http://www.mathe-nrw.de/.

Günter GRAUMANN, Bielefeld

Warum ist bei „reiner“ Musik Gis ≠ As ?
Ein Problemfeld zur Aufklärung über die reine Stimmung mittels Bruchrechnung

Um ca. 600 v. Chr. wurde in Ägypten aus der weit verbreiteten Fünftonreihe (Pentatonik) eine ***siebenstufigen Tonleiter (Heptatonik)*** entwickelt. ***Pythagoras*** hat sie vermutlich dort kennen gelernt. Seine danach entwickelte Musiktheorie, in der die Tonschritte bzw. Tonintervalle[1] durch Verhältnisse von Saitenlängen beschrieben werden, wurde zur Grundlage der gesamten abendländischen Musik.
Die Oktave mit dem Verhältnis 2:1 (bzw. 1:2)[2] wird zunächst unterteilt in die Quinte mit dem Verhältnis 3:2 und die Quarte mit dem Verhältnis 4:3. Der Schritt von der Quarte zur Quinte (Ganzton bzw. Sekunde genannt) wurde von Pythagoras als Grundschritt der siebenstufigen Tonleiter gewählt; sein Verhältnis ergibt sich[3] aus $\frac{3}{2}:\frac{4}{3}$ zu $\frac{9}{8}$. Damit baut Pythagoras die gesamte Tonleiter auf: Zwischen der Sekunde und Quarte wird die pythagoreische Terz – bestehend aus der Summe zweier Ganztöne – und zwischen Quinte und Oktave werden die Sexte und Septime (als Summe aus Quinte und Ganzton bzw. Quinte und Terz) eingefügt.
Der Schritt zwischen Terz und Quarte bzw. Septime und Oktave ist allerdings kein Ganzton, sondern wesentlich kleiner und wird deshalb Halbton[4] genannt. Die pythagoreische Terz hat das Verhältnis $\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{64}$.

Da dieses Verhältnis nicht mehr aus kleinen Zahlen besteht, hat man schon kurz nach Pythagoras diese Tonleiter leicht abgewandelt. Als Verhältnis für

---

[1] Die Tonschritte bzw. Tonintervalle (bezogen auf den Grundton) werden der Reihe nach heute mit den lateinischen Ordinalzahlen bezeichnet: Prime, Sekunde, Terz, usw.
[2] Es ist das Verhältnis der entsprechenden Saitenlängen je nachdem wie herum man es sieht; es ist aber nach heutiger Kenntnis auch das Verhältnis der Wellenlängen und der Schwingungsdauer (Perioden) sowie das umgekehrte Verhältnis der Schwingungsfrequenzen. Da ich später auch mit Frequenzen arbeite, werde ich im Folgenden die Verhältniszahlen der Frequenzen verwenden.
[3] Die Verhältniszahlen entwickeln sich exponentiell, denn die Doppeloktave (Oktave der Oktave) hat offensichtlich das Verhältnis 4:1 und die Dreifachoktave das Verhältnis 8:1 usw. Die Addition bzw. Subtraktion von Tonintervallen entspricht daher der Multiplikation bzw. Division der zugehörigen Verhältnisse
[4] Der pythagoreische Halbton errechnet sich aus $\frac{4}{3}:\frac{81}{64}$ zu $\frac{256}{243}\approx 1{,}053\approx\sqrt{\frac{9}{8}}$. (Man beachte, dass die Halbierung eines Intervalls wegen des exponentiellen Wachstums der Verhältniszahlen der Quadratwurzel der zugehörigen Verhältniszahl entspricht.)

die Terz wurde dann statt $\frac{81}{64}$ die Zahl $\frac{80}{64} = \frac{5}{4}$ gewählt, was als wesentlich harmonischer empfunden wird[5]. Diese Terz wird deshalb oft auch als „harmonische Terz“ oder ***„reine Terz“*** bezeichnet. Die Folge davon ist allerdings, dass man mit einem *großen und einem kleinen Ganzton* (vom Grundton zur Sekunde bzw. von der Sekunde zur Terz) rechnen muss. Vorteilhaft wirkt sich die obige Abwandlung der Terz aber auf den Halbton (Differenz von Quarte und reiner Terz und Oktave zu reiner Septime) sowie die Sexte und Septime aus.

Die so entstandene Tonleiter wird seit der Antike bis in die Neuzeit im Abendland verwendet und tritt bei reiner Vokalmusik u. ä. auch heute noch auf[6]. Die ***Verhältniszahlen*** dieser sog. ***„reinen Stimmung“*** sind:

Tonschritt	großer Ganzton	kleiner Ganzton	Halb-ton	großer Ganzton	kleiner Ganzton	großer Ganzton	Halb-ton
Verhältnis	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

oder jeweils bezogen auf den Grundton

Intervall	Pri-me	große Sekunde	reine Terz	(reine) Quarte	(reine) Quinte	reine Sexte	reine Septime	Ok-tave
Verhältnis	1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1

Seit Ende des 19. Jhts. ist es üblich die Höhen (Frequenzen) der einzelnen Töne so zu normieren, dass der sog. Kammerton a’ die Frequenz 440 Hz hat. Mit dieser Normierung können wir dann die Tonhöhen (Frequenzen) aller vorkommenden Töne bestimmen. Zunächst berechnen wir die ***Frequenzen der Töne der C-Dur-Tonleiter in reiner Stimmung***.

Ton	c’	d’	e’	f’	g’	a’	h’	c’’
Frequenz	264 Hz	297 Hz	330 Hz	352 Hz	396 Hz	440 Hz	495 Hz	528 Hz

Die Frequenzen der entsprechenden Töne der höheren bzw. tieferen Oktaven entstehen daraus durch Multiplikation mit 2 oder 4 oder 8 etc. bzw. ½ oder ¼ etc.

Will man nun nicht nur von C ausgehend eine solche reine Dur-Tonleiter haben, so muss man weitere Töne einführen, die durch ***Erhöhung*** (gekenn-

[5] Aus Physik und Mathematik wissen wir heute, dass die Überlagerung von Sinus-schwingungen mit einfachen Verhältnissen von Schwingungsfrequenzen zu regelmäßi-gen Schwingungsverläufen führt, die unser Ohr/Gehirn als harmonisch interpretiert.
[6] Seit dem 18. Jht. ist die wohltemperierte Stimmung üblich. Weitere Einzelheiten zur Entwicklung der abendländischen Tonsysteme sowie deren Zusammenhang mit Mathe-matik und Mathematikunterricht siehe etwa bei Graumann (2007).

zeichnet mit dem Vorzeichen #) oder ***Erniedrigung*** (gekennzeichnet mit dem Vorzeichen ♭) ***der bisherigen Töne*** entstehen[7]. Beginnend mit dem neuen Grundton müssen wie in der oben beschriebenen Tabelle die Schritte

gr. Ganzton – kl. Ganzton – Halbton – gr. Ganzton – kl. Ganzton – gr. Ganzton – Halbton

durchgeführt werden.

Beginnen wir etwa mit dem Ton G, so ergibt sich die *reine G-Dur-Tonleiter* aus den Tönen *g, a, h, c, d, e, fis, g* , wobei sich „Fis“ als reine Septime von G aus ergibt (bzw. als gr. Ganzton von E aus oder als Halbton von G aus nach unten)[8]. Die Verhältniszahl (bezogen auf den Grundton c’) und die Frequenz dieses neuen Tons erhält man durch Anwenden der entsprechenden Brüche auf die Verhältniszahl von G bzw. dessen Frequenz, wobei wir für das Fis zwischen c’ und c’’ ggf. noch eine Oktave nach unten springen müssen (was einer Division der entsprechenden Zahlen durch 2 entspricht). Wir erhalten damit für den neuen Ton ***Fis*** (zwischen c’ und c’’) bezogen auf c’ die Verhältniszahl (3/2)·(15/8):2 bzw. ***45/32*** und aus (45/32)·264 die Frequenz ***371,25 Hz***.

Ebenso können wir die Verhältniszahlen und Frequenzen der Töne weiterer Tonleiter berechnen. Üblicherweise wandert man dabei in Quinten nach oben und unten (entsprechend dem sog. Quintenzirkel der Musiktheorie).

Nach der G-Dur-Tonleiter kommt daher die *reine D-Dur-Tonleiter* mit den Tönen *d, e, fis, g, a, h, cis, d* , wobei ***Cis*** (zwischen c’ und c’’) sich errechnet zu ***135/128*** bzw. ***278,4375 Hz***. Danach kommt die *A-Dur-Tonleiter* mit den Tönen *a, h, cis, d, e, fis, gis, a*, wobei ***Gis*** (zwischen c’ und c’’) sich errechnet zu ***25/16*** bzw. ***412,5 Hz***.

Gehen wir jetzt erst einmal im Quintenzirkel von C aus rückwärts, so stoßen wir auf die *F-Dur-Tonleiter* mit den Tönen *f, g, a, b, c, d, e, f* , wobei der Ton „***B***“ sich als Quarte von F aus nach oben (bzw. Quinte nach unten) ergibt und deshalb errechnet zu ***16/9*** bzw. ***469,3333 Hz***.

Als nächstes folgt die *B-Dur-Tonleiter* mit den Tönen *b, c, d, es, f, g, a, b,* wobei „Es“ (zwischen c’ und c’’) sich errechnet aus einer Quinte von B nach unten zu ***32/27*** bzw. ***312,8889 Hz***.

---

[7] Die Erhöhung (mit #) wird im deutschsprachigen Raum im Namen des Tones durch Anhängen der Silbe „is“ gekennzeichnet. Die Erniedrigung eines Tones (mit ♭) wird im deutschsprachigen Raum durch Anhängen der Silbe „es“ gekennzeichnet (Ausnahmen: „as“ statt „aes“ und „es“ statt „ees“ sowie „b“ statt „hes“).

[8] Eigentlich müsste auch a etwas höher sein, nämlich als gr. Ganzton (anstatt kl. Ganzton) von g aus gerechnet. Die Verhältniszahl (bezogen auf c’) wäre dann 27/16 anstatt 5/3, was einer „Differenz“ von (27/16):(5/3) = 81:80 entspricht. (Dieses Verhältnis ist gleich der „Differenz“ von großem und kleinen Ganzton und wird „syntonisches Komma“ genannt.) Für unsere Überlegungen spielt dieser Gesichtspunkt zunächst keine Rolle, bietet aber die Möglichkeit einer Vertiefung des Themas.

Eine Quinte weiter herunter kommen wir dann zur *Es-Dur-Tonleiter* mit den Tönen *es, f, g, as, b, c, d, es,* wobei sich das „***As***" aus dem obigen Es mit einer Quarte nach oben errechnet zu ***128/81*** bzw. ***417,185185 Hz***.

Wir können nun „***As***" (128/81 bzw. ≈ 417,2 Hz) mit „***Gis***" (25/16 bzw. 412,5 Hz) vergleichen und feststellen, dass der Ton „As" um 4,7 Hz (bzw. als Verhältniszahl 2048/2025) höher ist als das „Gis", was mit der (in Fußnote 8 angedeuteten) besonderen Rolle von a zu tun hat. Sonst ist in der Regel der „is"-Ton höher als der „es"-Ton, z.B. ist „***Dis***" um 3,9 Hz höher als „***Es***". Die genannten Differenzen betragen etwa ein Fünftel eines Halbtons, was Musiker noch gut unterscheiden können.
Man sieht hiermit, dass es Probleme gibt, wenn man auf Tasteninstrumenten mit den üblichen zwölf Tasten (sieben weiße und fünf schwarze) mehrere Tonleitern mit reiner Stimmung einrichten möchte.
Dieses Problem trat historisch zuerst im Mittelalter auf, als man ab ca. 1000 n. Chr. in Kirchen Orgeln installierte. Man versuchte dann zu Beginn der Neuzeit dieses Problem durch leichte Abweichungen von der reinen Stimmung zu beheben, wobei Verhältnisse aus größeren Zahlen verwendet wurden und erhielt die sog. mitteltönigen Stimmungen. Endgültig gelöst werden konnte das Problem aber erst im 18. Jahrhundert durch Einführung der sog. wohltemperierten Stimmung (mit gleicher Verteilung aller zwölf Halbtöne auf die Oktave), zu der man rechnerisch mit Wurzeln umgehen musste. Darauf können wir hier aber nicht mehr eingehen.

Erwähnt sei allerdings noch, dass man Ende des 19. Jahrhundert zur Beschreibung der Intervalle zu einem logarithmischen Maßstab überging, der so normiert war, dass der wohltemperierte Halbton den Wert 100 erhält. Diese Maßeinheit wird deshalb als „Cent" bezeichnet. Und zwar bildet man dazu den 2er-Logarithmus der Verhältniszahl und multipliziert sie mit 1200. Diese Darstellung von Intervallen bietet einerseits eine gute Anwendung für die Logarithmenrechnung und andererseits ein besseres Verständnis der Intervallgrößen. Der Oktave entspricht z.B. die Zahl 1200 Cent, während die Differenz von Gis zu As dem Wert 19,55 Cent entspricht. Zum Vergleich dazu hat der große Ganzton den Wert 203,9 Cent und das syntonische Komma den Wert 21,5 Cent. Bekannt ist, dass geschulte Musiker Unterschiede bis zu 5 oder 10 Cent wahrnehmen können, was also etwa einem 20tel eines Ganztons entspricht.

Literatur

GRAUMANN, G. (2007). Musikalische Stimmungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In: Der Mathematikunterricht Jg. 53, Heft 1/2, 2007, S. 6 -15.

Gilbert GREEFRATH, Karlsruhe

Untersuchung von Modellbildungs- und Problemlöseprozessen

Im Rahmen einer Fallstudie wurden Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben beobachtet. Diese Beobachtungen wurden unter Problemlöse- und Modellbildungsgesichtspunkten ausgewertet. In diesem Beitrag wird speziell der Frage nachgegangen, wie die Planungs- und Kontrollprozesse in den betrachteten Fällen ablaufen.

Problemlösen und Modellieren

Eine genauere Definition von Problemlösen und Modellbilden kann zum einen über die Begriffe *Problem* und *Modell* und zum anderen durch idealisierte Abläufe von Problemlöse- und Modellbildungsprozessen geschehen. In diesem Beitrag wird die gesamte Bearbeitung der Aufgaben sowohl als Problemlöseprozess als auch als Modellierungsprozess aufgefasst und beispielsweise die Schaffung des Modells nicht nur aus der Sicht des Modellierens, sondern auch aus der Sicht eines Planungsprozesses im Rahmen des Problemlösens betrachtet. Sehr grob betrachtet und idealisiert kann man sich Modellbildungs- und Problemlöseprozesse wie in der folgenden Abb. 1 parallel vorstellen.

Modellbildungsprozess	**Problemlöseprozess**
Analysieren	Verstehen der Aufgabe
Vereinfachen	Planen
Mathematisieren	Verstehen der Aufgabe Planen Ausführen Rückschau
Daten verarbeiten	Ausführen Verstehen der Aufgabe Planen Ausführen Rückschau
Interpretieren	
Validieren	Rückschau

Abb. 1

Dabei können einzelne Schritte des Modellierens, wie hier beispielsweise beim Mathematisieren beschrieben, evtl. einen weiteren Teil-Problemlöseprozess benötigen (Modellbildungsprozess s. z. B. Blum & Leiß 2005; Problemlöseprozess s. z. B. Polya 1995).

Untersuchung

Für die Untersuchung wurden offene Aufgaben mit Realitätsbezug verwendet. Die drei im Folgenden beschriebenen Schülerpaare bearbeiteten eine Aufgabe, bei der der Preis für das Verputzen eines Hauses bestimmt werden sollte (s. Greefrath 2006, S. 58 f.). Eine mögliche Lösung dieser Aufgabe besteht darin, mit Hilfe von Stützpunktvorstellungen Längen oder Flächen zu schätzen und auf dieser Grundlage ein Modell für das Haus zu entwickeln, um schließlich den Preis für das Verputzen zu ermitteln.

Die Arbeit der Schülerinnen und Schüler an den Aufgaben wurde videografiert. Um die Lösung der Aufgaben nicht zu beeinflussen, wurden die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der Aufgaben lediglich beobachtet. Für die im Folgenden beschriebene Fallstudie wurden drei Beobachtungen ausgewählt.

Zur Auswertung der Beobachtungen wurden die Videos komplett transkribiert. Im Rahmen eines offenen Kodierens mit drei Ratern wurden den einzelnen Äußerungen der Schülerinnen und Schülern konzeptuelle Bezeichnungen zugeordnet, die in mehreren Durchgängen diskutiert und modifiziert wurden. Diese Bezeichnungen wurden anschließend im Rahmen der Grounded Theory zu Kategorien zusammengefasst (s. Strauss & Corbin 1996, S. 43 ff.). Die entwickelten Kategorien sind: Planung, Datenbeschaffung, Datenverarbeitung und Kontrolle. Abschnitte, die keiner der genannten Kategorien zugeteilt werden konnten, wurden einer sog. Restkategorie zugeordnet. Diese Restkategorie hat einen maximalen Anteil von 5 % der Kodierungen je Beobachtung. Die Wahl von nur fünf Kategorien ist erfolgt, um eine reliable Kodierung der Beobachtungen durch unterschiedliche Rater zu ermöglichen. Die im Problemlöseprozess zentralen Kategorien Planung und Kontrolle sind dann auf wichtige Bausteine untersucht worden.

Zentrale Bausteine von Planungs- und Kontrollprozessen

Insbesondere interessieren Bausteine von Planungs- und Kontrollprozessen, die von besonderer Bedeutung für die Lösung von Modellierungsaufgaben sind und häufiger in den Beobachtungen der Schülerinnen und Schüler vorkommen. Wir betrachten die in Abb. 2 dargestellten zentralen Bausteine von Planungs- und Kontrollprozessen.

Fallstudie

Im Folgenden werden drei ausgesuchte Beobachtungen vorgestellt, die im Hinblick auf die zentralen Bausteine von Planungs- und Kontrollprozessen untersucht werden.

Beobachtung I: Explizite Planung und globale Kontrolle

Die Beobachtung I stammt von einer Gesamtschülerin und einem Gesamtschüler aus dem 8. Jahrgang. Sie haben sich ca. 22 Minuten mit der Auf-

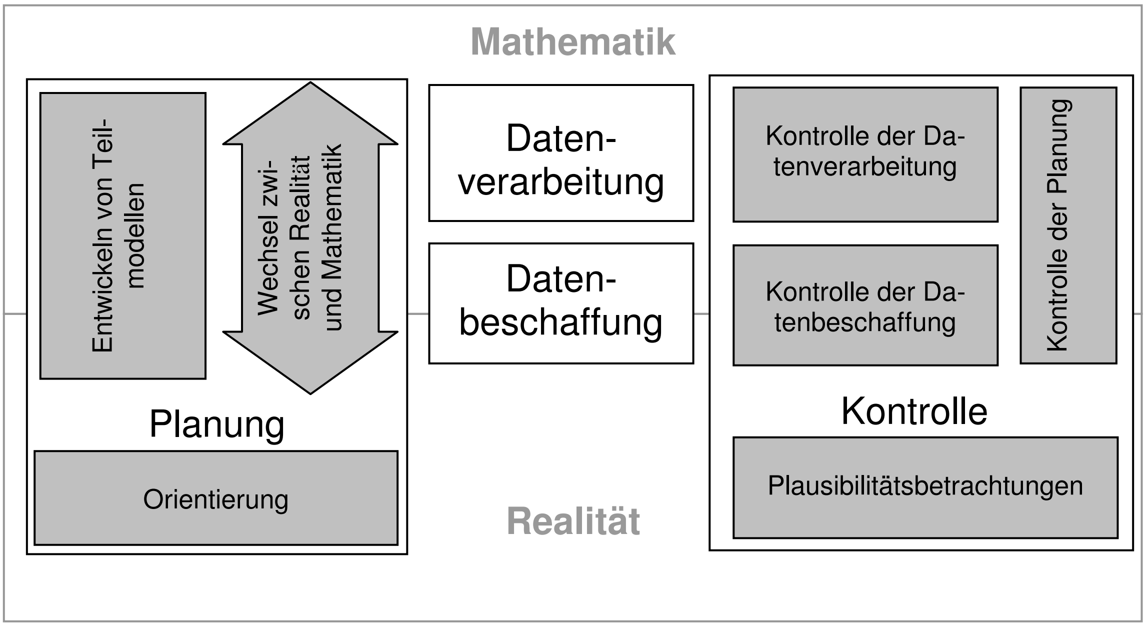


Abb. 2

gabe beschäftigt und aus mathematischer Sicht ein sehr genaues Ergebnis erzielt.

Die Schülerinnen und Schüler nehmen sich nach einer zielführenden Orientierungsphase Zeit für die Planung und diskutieren gründlich Vereinfachungen der Realität. Sie verwenden häufig mathematische Begriffe und wenden diese korrekt auf die Realität an. Außerdem werden die Objekte aus der Realität treffend mit den mathematischen Tätigkeiten und Vereinfachungen verknüpft. Planungsprozesse werden ausführlich diskutiert und sind in der Regel erfolgreich. Wechsel zwischen Planungen in der Realität und in der Mathematik finden häufiger statt und hängen auch inhaltlich zusammen. Es werden sowohl reale als auch mathematische Teilmodelle entwickelt.

Die Kontrollvorgänge betreffen den Plan der Aufgabenbearbeitung. Es werden dabei auch größere Abschnitte der Planung in den Blick genommen. Die Kontrollen einzelner Berechnungen und Datenbeschaffungen fehlen. Sie sind allerdings auch in den meisten Fällen nicht erforderlich.

Beobachtung II: Reale Planung und lokale Kontrolle
Die Beobachtung II stammt von zwei Hauptschülern aus dem 8. Jahrgang. Sie haben sich ca. 15 Minuten mit der Aufgabe beschäftigt und aus mathematischer Sicht ein sehr ungenaues Ergebnis erzielt.

Die Schülerinnen und Schüler benötigen häufiger Orientierungsphasen, um das Problem im Kontext zu erkennen. Die Diskussion verläuft stark realitätsverhaftet. Es werden keine mathematischen Begriffe verwendet und mathematische Prozessbeschreibungen nur auf niedrigem Niveau durchgeführt. Vereinfachungen werden wenig diskutiert. Insgesamt ist die Planung wenig abstrakt und oberflächlich.

Das Vorgehen bei der Bearbeitung der Aufgabe wird nur lokal kontrolliert. Beispielsweise wird nur die gerade durchgeführte letzte Berechnung angeschaut. Es gibt zwar Phasen, in denen die Datenbeschaffung kontrolliert wird, dabei wird aber nicht das Gesamtergebnis in den Blick genommen. Wenn Plausibilitätsbetrachtungen durchgeführt werden, dann nur für Teilergebnisse.

Beobachtung III: Implizite Planung und multiple Kontrolle
Die Beobachtung III stammt von zwei Gesamtschülerinnen aus dem 9. Jahrgang. Sie haben sich ca. 9 Minuten mit der Aufgabe beschäftigt und aus mathematischer Sicht ein ungenaues Ergebnis erzielt.

Die Schülerinnen und Schüler führen die Orientierungsphase still und sehr kurz aus. Sie beziehen sich in den Diskussionen im Wesentlichen auf die reale Situation. Die mathematischen Modelle werden verwendet, aber nicht diskutiert. Die Realität wird nicht bewusst vereinfacht oder diese Vereinfachungen werden nicht geäußert. Begriffe aus der Realität werden in mathematische Prozessbeschreibungen integriert.

Während der Aufgabenbearbeitung finden viele Kontrollvorgänge statt. Dabei kommen viele unterschiedliche Arten von Kontrollen, wie z. B. Kontrollen der Datenverarbeitung, Datenbeschaffung oder Planung vor. Die Kontrollprozesse beziehen sich auf lokale aber auch auf globale Aspekte.

Fazit

Es zeigt sich, dass das Planungs- und Kontrollverhalten der Schülerinnen und Schüler äußerst unterschiedlich ist und die idealisierten Prozessbeschreibungen des Modellierens und Problemlösens nur bedingt geeignet sind, diese Prozesse adäquat zu beschreiben und zu unterscheiden.

Literatur

Blum, W. & Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe, mathematik lehren 128, 18-21

Greefrath, G. (2006): Modellieren lernen mit offenen realitätsnahen Aufgaben, Köln: Aulis Verlag Deubner.

Polya, G. (1995): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme, 4. Auflage, Tübingen und Basel: Francke.

Strauss, A. & Corbin, J. (1996): Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung, Weinheim: Beltz Psychologie Verlags Union.

Gabriele GRIESHOP, Vechta

Die im Verlauf der akademischen Mathematik-Lehramtsausbildung erworbenen Kompetenzen im Umgang mit Aufgaben – Exemplarisch aufgezeigt an der Fähigkeit, Aufgaben prozessorientiert zu erstellen und zu beurteilen.

1. Relevanz der Aufgaben für das professionelle fachdidaktische Wissen

In Shulmans (1987) Konzeptualisierung des Professionswissens einer Lehrkraft wird die Kategorie „pedagogical content knowledge“ als eine ganz besondere Kategorie hervorgehoben. In dieser vermischt sich das Fachwissen mit dem allgemein pädagogischen Wissen. Was aber kennzeichnet das spezifische fachdidaktische Wissen einer Mathematik-Lehrkraft? Für Bromme (1992) ist bei Mathematik-Lehrkräften „das fachspezifisch-pädagogische Wissen gleichsam in den mathematischen Aufgaben kristallisiert“. Er bezeichnet Aufgaben als „Schnittstelle der Tätigkeiten von Lehrern und Schülern“ (Bromme et al. 1990). Diesen Gedanken folgend wird dem Umgang mit Aufgaben im Rahmen der COACTIV-Studie (Krauss et al. 2004) eine zentrale Rolle zugewiesen. Insbesondere wird hier das „Wissen über mathematische Aufgaben“ als eine Kompetenzfacette des nach mathematikbezogenen didaktischen Anforderungen ausdifferenzierten fachdidaktischen Wissens genannt.

2. Relevanz der Aufgaben für die Mathematik-Lehramtsausbildung

Verbindliche Standards darüber, welches „Wissen über mathematische Aufgaben“ die Mathematik-Lehramtsstudierenden bereits im Verlauf ihrer theoretischen Ausbildung entwickeln sollen, finden sich zunächst aus allgemein didaktischer Perspektive in den „Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften“ (KMK 2004). Um nun die mathematikdidaktische Perspektive zu berücksichtigen, wird der Blick auf die „Verordnung über Masterabschlüsse für Lehrämter in Niedersachsen“ (2007) gerichtet. Das Kultusministerium Niedersachsen hat die Fachkommission Mathematik ins Leben gerufen, um ein Kompetenzprofil der Absolventinnen und Absolventen des Mathematik-Lehramtsstudiengangs zu erarbeiten, das bei Eintritt in den Vorbereitungsdienst nachzuweisen ist. In einer Entwurfsfassung wird zum „Wissen über mathematische Aufgaben“ folgender Standard formuliert:

> *„Absolventinnen und Absolventen der ersten Phase analysieren unterschiedliche Aufgaben, Aufgabenformate und Übungsformen hinsichtlich ihres Einsatzes im Unterricht und konstruieren entsprechende Aufgaben.“*

3. Relevanz kompetenzorientierter Aufgaben

Mit Blick auf die Bildungsstandards der Mathematik und die zum Schuljahr 2006/2007 implementierten Kerncurricula in Niedersachsen gewinnt der kompetenzorientierte Umgang mit Aufgaben an Bedeutung. „Entscheidend für die Auswahl und die Entwicklung von Aufgaben ist der reichhaltige und ausgewogene Bezug zu den prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen“ (MK Niedersachsen 2006). Zudem stellen kompetenz-orientierte Aufgaben (Aufgaben, die zum erfolgreichen Lösen nicht ausschließlich technische Fertigkeiten erfordern) eine Möglichkeit dar, einen Mathematikunterricht zu realisieren, der den Qualitätskriterien entspricht (Blum et al. 2006).

Es ist allerdings ein Trugschluss zu denken, dass das bloße Vorhandensein kompetenzorientierter Aufgaben zur Qualitätsentwicklung bzw. Qualitäts-sicherung im Mathematikunterricht beiträgt. Beispielsweise kann durch falschen Einsatz im Unterricht das prozessbezogene Potenzial einer Aufgabe zunichte gemacht werden.

Um solch einen kontraproduktiven Einsatz zu vermeiden, sollten Lehrkräfte zum einen eine prozessbezogene Aufgabenanalyse durchführen können, damit das in einer Aufgabe steckende Potenzial an prozessbezogenen Kompetenzen erkannt wird (Walther 2004). Zum anderen sollten sie je nach intendiertem prozessbezogenen Kompetenzbereich „für die vielfältigen Gelegenheiten und Zwecke eigene Aufgaben erstellen oder vorliegende Aufgaben Ziel gerichtet variieren können“ (Büchter/Leuders 2005).

4. Das Wissen über das prozessbezogene Potenzial einzelner Aufgaben

Terhart (2000) empfiehlt, dass „Standards zunächst konkretisiert und handhabbar gemacht werden, damit überhaupt evaluiert werden kann“. Der oben zitierte Standard der Fachkommission Mathematik (Niedersachsen) kann unter Berücksichtigung der curricularen Bedingungen und der Relevanz kompetenzorientierter Aufgaben zum “***Wissen über das prozessbezogene Potenzial einzelner Aufgaben“*** (Forschungsfrage) konkretisiert werden. Der dazugehörige Standard wird für die Untersuchung wie folgt formuliert:

Absolventinnen und Absolventen der ersten Phase

- *analysieren unterschiedliche Aufgaben hinsichtlich ihres prozess-orientierten Einsatzes im Unterricht.*
- *konstruieren (erstellen/variieren) entsprechende Aufgaben je nach intendiertem prozessbezogenen Kompetenzbereich.*

5. Forschungsfrage und Untersuchungsdesign

Im Rahmen der Dissertation gilt es nun, sich ein Bild darüber zu machen, inwiefern der Gedanke eines prozessorientierten Umgangs mit Aufgaben in der Welt der Studierenden an der Hochschule Vechta eine Rolle spielt. Zu diesem Zweck ist ein 90minütiger Test entwickelt worden, an dem im Mai 2007 insgesamt 47 (von 56) Absolventinnen und Absolventen des Master-Lehramtsstudienganges im Fach Mathematik freiwillig teilgenommen haben.

Der Test umfasste vier offene Arbeitsaufforderungen. Zum einen sollte eine Aufgabe (Einkaufssituation) prozessbezogen analysiert werden, zum anderen sollten drei Aufgaben zu jeweils einem vorgegeben prozess-bezogenen Kompetenzbereich selbstständig erstellt werden. In einem zweiten Schritt sollte erläutert werden, warum die konstruierten Aufgaben die intendierten Kompetenzbereiche unterstützen. Um die Ergebnisse der Studierenden vergleichbar zu machen, stand der Test unter dem übergeordneten Thema der "Schriftlichen Addition" im dritten Schuljahr. Zwei der drei zu konstruierenden Aufgaben waren in realitätsnahe Situationen (Fußball-WM 2006 & Problemlösen, Bundesjugendspiele & Darstellen) einzubetten und die dritte zu konstruierende Aufgabe sollte durch Variieren einer in algebraischer Form vorgegebenen fünfschichtigen Zahlenmauer erstellt werden, so dass insbesondere der Kompetenzbereich Argumentieren/Kommunizieren unterstützt wird.

6. Auswertungsmethode und erste Ergebnisse der Studie

Ausgewertet wird in Anlehnung an das „Stufenmodell empirisch begründeter Typenbildung" (Kluge 1999) mit der Zielsetzung, typische Bearbeitungsmuster der Studierenden zu erkennen. Die Auswertung der Zahlenmauervariation ist bereits abgeschlossen. Als relevante Vergleichs-dimensionen werden die Variationsmöglichkeiten einer Zahlenmauer und die Kompetenzfacetten des Kompetenzbereichs Argumentieren/ Kommunizieren gewählt. Nach der Gruppierung der Fälle und der Reduzierung des Merkmalsraums lassen sich interessanterweise zwei Bearbeitungsmuster beobachten:

Der Arithmetische Nutzer:

Das Format der Zahlenmauer wird eher als „Trägermedium für Aufgaben" (Krauthausen 1996) zum Addieren, Subtrahieren und Ergänzen genutzt. Für die hier zugeordneten Fälle steht das Beschreiben/Begründen der rechnerischen Lösungswege im Vordergrund, die sich ausschließlich auf das mathematische Nachvollziehen einzelner Rechenschritte beziehen.

Der Algebraische Nutzer:

Die algebraische Struktur der Zahlenmauer wird tatsächlich genutzt. Für die hier zugeordneten Fälle steht das Erkennen und Nutzen mathematischer Zusammenhänge im Vordergrund. Auffälligkeiten, Regeln, Muster, die in der Natur der Zahlenmauer liegen, müssen erkannt, beschrieben und/oder zur Begründung genutzt werden.

7. Fazit

Im Sinne von Terhart (2000) „muss gleich von Beginn an erwogen werden, was man mit den Resultaten von Evaluation zu tun gedenkt bzw. welche Konsequenzen man zu ziehen bereit ist". Als Resultat aus der ersten Auswertung ergibt sich, dass die Studierenden weder die Variationsmöglichkeiten der Zahlenmauer noch die Fülle der zu berücksichtigenden Kompetenzfacetten ausschöpfen. Insbesondere lassen sich nur wenige Fälle in die Rubrik des "Algebraischen Nutzers" einordnen. Abschließend stellt sich die Frage, durch welche Maßnahmen in der modularen Struktur (der Hochschule Vechta) diese Defizite ausgeglichen werden können.

Literatur

Blum, W./Drüke-Noe, C./Hartung, R./Köller, O. (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret - Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bromme, R./Seeger, F./Steinbring H. (1990): Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler (IDM-Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Bd. 14). Köln: Aulis.

Bromme, R.(1992): Der Lehrer als Experte. Bern: Huber.

Büchter A./Leuders T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln – Lernen fördern – Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Kluge, S.(1999): Empirisch begründete Typenbildung – Zur Konstruktion von Typen und Typologien in der qualitativen Sozialforschung.Opladen: Leske u. Buderich.

KMK (2004): Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften. Download: http://www.kmk.org/doc/beschl/standards_lehrerbildung.pdf.

Krauss, S. et al.(2004): COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In: Doll, J./Prenzel M. (Hrsg.): Die Bildungsqualität von Schule. Münster: Waxmann, S. 31-53.

Krauthausen, G. (1996): Zahlenforscher – Didaktische Handreichungen. Handbuch zur Software Zahlenforscher 1 – Zahlenmauern. Donauwörth: Auer.

MK Niedersachsen (2006): Kerncurriculum für die Realschule – Mathematik. Download: http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_rs_mathe_nib.pdf

Shulman, L.S. (1987): Knowledge and teaching: foundations fo the new reform. In: Harvard Educational Research, 57(1), S. 1–22.

Terhart, E. (2002): Standards für die Lehrerbildung. Eine Expertise für die Lehrerbildung. Münster: Zentrale Koordination Lehrerbildung (ZKL Texte, 23).

Walther, G. (2004): Gute Aufgaben – Andere Aufgaben. Beschreibung des Moduls 1 für das Projekt SINUS-Transfer Grundschule. Internetseite: http://www.sinus-grundschule.de.

Roxana GRIGORAŞ, University of Bremen, Germany
Cornelis HOEDE, University of Twente, The Netherlands

Reasoning indicators – a case study

In the analysis of modelling processes, it is challenging to find out how reasoning processes are worked out by students. For this case study, a task on a predator-prey situation is designed with the purpose of encouraging argumentation. Written or verbal utterances of students aged 12 to 13 in group discussions are investigated with the aim to figure out in what way their logical reasoning is performed. It is examined how the students discuss and relate objects while modelling. Graphs are used to illustrate the intensity of students' discussions.

Framework

We assume that thinking leads to structures in the mind: a possible model for structures is a graph consisting of vertices that represents perception units or combinations of perception units, that on their turn can be linked, which is represented by arcs or edges. Arcs are ordered pairs of vertices, edges are just pairs of vertices. In discussions and notes of students as our empirical material, we consider words as the observable objects allowing us to infer that they are currently involved in a process of reasoning. In the theory of knowledge graphs [1], the basic idea is that certain substructures in the mind have been "framed and named". This process leads to words. Larger structures in the mind can be described by sentences. In principle every combination of words, e.g. in the form of sentences, is an indicator of a mental construct. We can roughly say that "thinking is linking" objects. In describing a problem before actually modelling, usually an exploration phase occurs in which the relevant concepts are gathered and represented. For this phase also specific indicators will be observable.

In the context of experiments in teaching mathematics we would like to have a clear picture of the kind of links that are made. This comes forward particularly in the investigation of reasoning processes involved in modelling.

The "Africa" task

We designed a predator-prey situation, where population of certain animals, under changing circumstances has to be worked out. For later use, we denote animals as following: A – antelopes, G – gnus, L – lions, M – monkeys, C – crocodiles, P – panthers, E – elephants, whereas the objects grass, trees and rain are denoted by X, Y and Z. The animals are living in three areas on two sides of a river. The possible food of every animal is explicitly stated. Among others, the following questions were posed:

“Suppose in the area with grass and trees there is no rain. By this, the amount of grass and the number of trees go down. Investigate what happens with all the species in the three areas. What happens if there is no more rain in the area where only grass grows? What happens if there is no more rain in the area where only trees grow?”

Methodological considerations

The 7th class students, having no special experience in modelling, were organised in teams of four and video-taped while working. They were free to form the teams by themselves, and had ninety minutes at their disposal for the entire task. Though general indications about how to manage their time according with each sub-task were given, students had in the end the freedom to arrange that on their own.

We studied the way students expressed their thinking by means of graphs. The use of graphs is well-known from knowledge representation theory. We refer to the vast literature on “semantic networks”, see e.g. [2]. We counted the number of times an object A, … Z was mentioned and the number of times a specific link was established. This led to the following graphs with vertex set in {A, G, L, M, C, P, E, X, Y, Z}. The labels on the edges give the number of times a link appeared.

.Fig.1a Extracted graph of the ‘white’ team

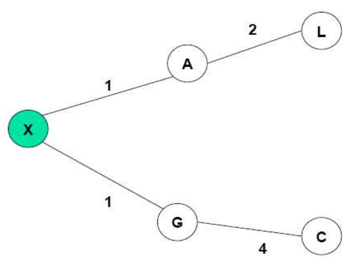


Fig.1b Extracted graph of the ‘red’ team

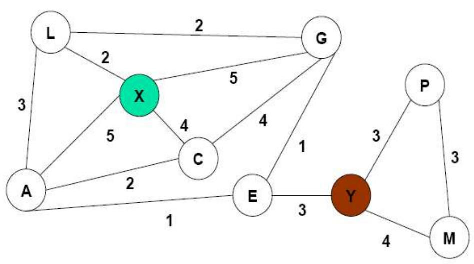
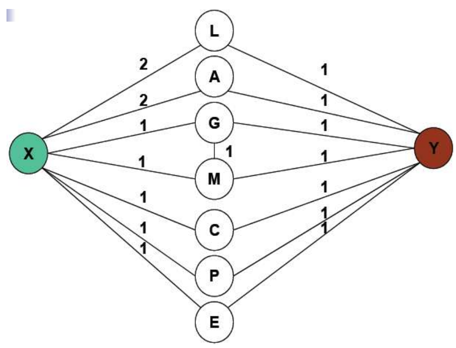


Fig.1c Extracted graph of the ‘grey’ team



Findings

The graphs in Fig. 1 were produced for three of the participating students' teams. Note that the graphs corresponding to the 'red' and 'grey' team contain almost all vertices. The graph in Fig. 1b is rather complex, with considerably long paths and high weights on the edges, which indicates that the students explored and found many links. In other cases teams considered fewer objects, see Fig. 1a. Also quite messy structures appeared, like in Fig. 1b.

In the following excerpt of a protocol we mention indicators:

41:29 Mara: *If* the trees dry up, *then* monkeys die off, *then* the elephant dies... (mumbling...) *because* the panther does not have food anymore...

41:39 Jana: Gnus and monkeys die off.

41:40 Susi: No!

41:42 Mara: Antelopes... and *thus* die off...

41:43 Susi: No!!!... (mumbling)

41:47 Mara: Yes, that's why!

41:51 Jana (to Susi): *If* the grass dries up ... (in the meantime Mara talks to Lea: we are at trees, they (Jana and Susi) are at grass). *If* Gnus and Antelopes are dead, *then* the crocodiles and lions are dying off...

42:26 Mara: *Then* have... *then* the elephants do not have food anymore...

The reasoning indicators we encounter for situations where links between objects are established are those expressing logical connections: "if... then... " and "because". Our analysis led to the following set of indicators for links between objects: *because*, *therefore*, *thus*, *fewer... fewer*, *if... then*, etc. Other types of indicators occur each time a statement about an object is made. This can involve a process, e.g. *die off*, or any other statement which clearly indicates that reasoning processes are performed. For the moment we make the distinction just between reasoning indicators present in statements about relations between objects and indicators to be found in simply statements about objects. We do not give here a list of indicators of the second type, since such a list would be specific to our case study. Each particular situation yields to a set of this type of indicators, but no generalisation is to be made about it.

The graphs as way to illustrate students' discussions contain much information in two dimensions: on one hand they consist and depict structural aspects of the argumentation, by the links established between objects, on the other hand provide semantic information, through the objects units students build on.

Our experiment has shown that there is ample use of reasoning indicators. An obvious research project it to collect and classify such indicators. Ideally they should be partitioned according to the four types of relationships between the real world and the mathematical world, as well as within these worlds, as we distinguished in [3]. A difficulty here is the fact that students use language to express relationships in different ways. A related didactical project would therefore be to train students to use ‘proper’ description.

Discussions

We can only shortly discuss some aspects of our use of graphs for representing the modelling process. The extracted graphs give a good picture of the outcome of the discussions in the teams. It also shows striking difference in the quality of graphs. On one side there is a complete coverage of the posed problems and quite rich structure, whereas on the other side only partial coverage is visible and the graph structure is rather simple.

Each graph is composed of vertices and edges, that were mentioned by participants of the team. This means that each participant contributed a subgraph of the total graph, that in a way expresses the role played by the participant in the discussions. For each element of the graph the frequency with which the element was mentioned by a participant is known from the protocols and this too sheds a light on the role played.

Finally, we should stress that in our graph theoretical analysis no distinction between types of links was made. Concepts were linked and no reference to the indicator was made. A more refined analysis could contain such references, which would enable to see where different types of logical reasoning were used and by whom.

Literature

1. P. James: Knowledge Graphs. In R.P. van der Riet & R.A. Meersman, ed.: Linguistic Instruments in Knowledge Engineering, (1992) 97-117.

2. J. F. Sowa: Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations, Brooks/Cole, (2000), ISBN 0 534 949657.

3. R. Grigoraş and S. Halverscheid: Modelling the Travelling Salesman Problem: Relations between the World of Mathematics and the Rest of the World. Submitted, (2008).

Annemarie GUBLER-BE K, Dortmund

onstruktiver Umgang mit Sch lerfehlern indernisse und hancen

In der Didaktik wird heute die Überzeugung vertreten, dass Fehler zum Lernen dazugehören (vgl. Bobrowski/Grassmann 2003, S.), weil Lernen als individuelle Konstruktionsleistung im sozialen Austausch aufgefasst wird. Angestrebt wird daher nicht, den Unterricht so (kleinschrittig) zu konzipieren, dass die Schüler keine Fehler machen können. Es geht vielmehr darum, eine konstruktive Lernatmosphäre zu schaffen und Schülerfehler zuzulassen, ja sogar herauszufordern, um dann konstruktiv mit ihnen umzugehen.

edeutung eines konstruktiven Umgangs mit ehlern

Schülerfehler sind im Allgemeinen keine Zufallsprodukte, sondern treten mit gewisser Regelmäßigkeit und Systematik auf. Ihnen liegen meist vernünftige Gedanken zugrunde, die aber nicht zum richtigen Ergebnis führen, weil ein Schüler individuelle Schwierigkeiten hat, ein Verfahren nicht vollständig verstanden hat, eine Aussage eines Mitschülers, des Lehrers oder eines Textes missverstanden hat, oder weil er gegen mathematische Konventionen verstößt (vgl. Franke 1 7, S. 32; Lorenz/Radatz 1 3, S. 5).

In der fachdidaktischen Forschung gibt es zu vielen mathematischen Teilgebieten Arbeiten, die dazu beitragen, solche typischen Schülerfehler und Schwierigkeitsfaktoren aufzudecken. Die entsprechenden Publikationen können dem Lehrer dabei helfen, bei seinen Schülern Fehlvorstellungen zu diagnostizieren.

Es geht also nicht um eine oberflächliche Symptomkur, sondern um Ursachenforschung mithilfe einer individuellen Fehleranalyse. Lehrer und möglichst auch ihre Schüler sollten herausfinden: Wo liegt der Fehler Was könnte sich der Schüler gedacht haben Wie muss es richtig heißen, wenn man dem Lösungsweg des Schülers folgt Warum Das gut gemeinte Angebot eines vermeintlich eleganteren Lösungsweges sollte erst an zweiter Stelle stehen. Durch die ernsthafte, inhaltliche Auseinandersetzung mit den individuellen Fehlern kann das Vertrauen in die eigene Leistungsfähigkeit gestärkt werden. Dazu ist es allerdings auch notwendig, den Schülern deutlich zu machen, wie viele richtige Gedanken hinter der letztendlich falschen Lösung stehen. Fehler werden in einem entsprechenden Unterricht also nicht als Defizite, sondern als Lernanlässe begriffen. Im Unterrichtsalltag erlebt die Lehrkraft aber nicht selten, dass die Schüler sich mit ihren Fehlern nicht beschäftigen und problematische Arbeiten nicht verbessern.

Im Folgenden werden einige Hindernisse benannt und anschließend Möglichkeiten aufgezeigt, die hancen für einen konstruktiven Umgang mit den Fehlern eröffnen.

Unterrichtsbeis iele indernisse

Im Rahmen eines Projekts zum Einsatz von Portfolios im Mathematikunterricht der vierten Grundschulklasse wurde unter anderem der Frage nach dem konstruktiven Umgang der Schüler mit ihren Fehlern nachgegangen. Um die Schüler zum Schreiben über den Umgang mit ihren Fehlern anzuleiten, wurden ihnen folgende Hilfsfragen vorgelegt:

- In welchem Arbeitsblatt hattest du einen Fehler
- Wie hast du den Fehler gefunden
- Was war falsch
- Was hattest du dir beim Rechnen überlegt
- Wie muss es richtig heißen Warum

Das Auswählen von Arbeitsblättern mit Fehlern sowie das Benennen des Fehlers war für die meisten Schüler kein Problem. Auch das Beschreiben der verwendeten Kontrollstrategien war für die Schüler im Allgemeinen möglich (vgl. Abb. 1). Dagegen fiel es ihnen deutlich schwerer, die richtige Lösung anzugeben, was darauf hinweist, dass sie aus ihren Fehlern trotz Kontrollblatt wenig gelernt hatten und die richtige Lösung immer noch nicht kannten.

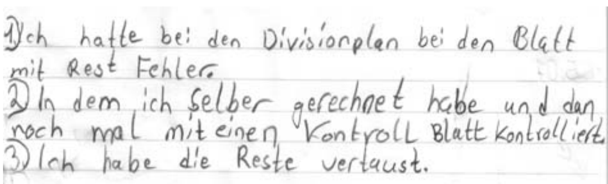


Abb. 1

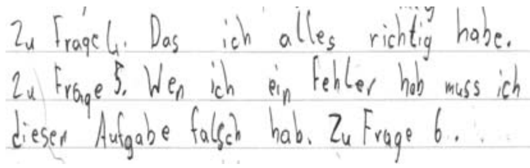


Abb. 2

Ein großes Problem bestand darin, dass auch den leistungsstärkeren Schülern ihre Gedanken beim Rechnen zum Zeitpunkt des Aufschreibens meist nicht mehr präsent waren. Während einige Schüler ein gutes Verständnis ihrer eigenen Fehler deutlich machten, waren etlichen Schülern die Gründe für ihre Fehler nicht klar. So äußerte ein Kind (vgl. Abb. 2) Wenn ich ein Fehler hab, muss ich diese Aufgabe falsch hab . Gemeint ist vermutlich: Wenn ich im Vergleich mit dem Kontrollblatt in meiner Bearbeitung ein abweichendes Ergebnis feststelle, dann werde ich wohl einen Fehler gemacht haben. Vielen Schülern war es weniger wichtig, aus ihren Fehlern zu lernen, sondern sie wollten vor allem alles richtig auf dem Blatt stehen haben (vgl. Abb. 2).

Weiterhin wurden die Kinder in so genannten Portfoliogesprächen auch nach ihren Fehlern, der Überarbeitungsabsicht und den Gründen, die eine

Überarbeitung verhindert hatten, gefragt. Es stellte sich dabei heraus, dass kein Schüler seine fehlerhaften oder unvollständigen Arbeiten überarbeitete. Der folgende Gesprächsausschnitt soll einige Gründe exemplarisch deutlich machen.

I: Hast du eigentlich schon alles selber korrigiert von deinem Malaufgabenplan
S: a.
I: Ich hab nämlich beim Arbeitsblatt vier bei Nummer drei noch irgendwo einen Fehler gefunden.
S: Bei wem
I: Bei dir. ( ) Könntest du dir vorstellen, dass du das noch mal durchguckst und versuchst den Fehler zu finden und zu verbessern
S: Das war viel zu schwer.

Die Interviewerin vermutet, dass der Schüler seine Arbeit noch nicht selbst kontrolliert hat, weil sie weiß, dass die Arbeit noch Fehler enthält. Der Schüler berichtet aber davon, bereits alles selbst korrigiert zu haben und kann sich überhaupt nicht vorstellen, dass die Arbeit noch Fehler enthält. Als die Interviewerin dabei bleibt, die Arbeit enthalte noch Fehler und versucht, ihn zur Korrektur anzuregen, lehnt er dies strikt ab und begründet dies damit, dass die Aufgaben viel zu schwer waren.

In diesem kurzen Gesprächsausschnitt zeigt sich sehr deutlich, was auch in anderen Gesprächen klar wurde: Vielen Kindern war nicht bewusst, dass ihre Arbeit noch Fehler enthielt oder nicht vollständig war. Zudem trauten sich etliche Schüler keine Verbesserung zu, weil sie meinten die Aufgabe sei zu schwer, oder weil sie keinen besseren Lösungsweg als den eingeschlagenen kannten, der ja zu einem falschen Ergebnis geführt hatte. Schließlich führte die Vermutung, dass die Lehrkraft ihre Überarbeitung nicht wertschätzen würde, dazu, dass die Schüler erst gar nicht die Absicht äußerten, sich noch einmal mit ihrer Arbeit auseinander zu setzen. Die Fehler wurden in diesem Fall nicht als Lernanlass wahrgenommen. In den oben erwähnten Eigenproduktionen zeigte sich dann, dass die entsprechenden Schüler häufig tatsächlich nichts aus ihren Fehlern gelernt hatten, obwohl sie sie selbständig gesucht und auch gefunden hatten, sich also auf einer oberflächlichen Ebene mit ihnen beschäftigt hatten.

Andere Schüler äußerten durchaus die Absicht, ihre Arbeit noch einmal zu überarbeiten, realisierten dies dann aber nicht, weil sie in einem Unterricht, der viele Pflichtaufgaben beinhaltete, keine Zeit für die als freiwillige Kür wahrgenommene Auseinandersetzung mit ihren Fehlern sahen. Im Unterricht zeigten sich durchaus Ansatzmöglichkeiten für einen konstruktiven Umgang mit den Schülerfehlern. Diese verpassten hancen werden im folgenden Abschnitt konstruktiv aufgegriffen.

hancen

Damit Lehrer und Schüler konstruktiv mit den Schülerfehlern umgehen können, müssen diese zunächst von der Lehrkraft benannt werden. Die zu Recht in der Didaktik immer wieder geforderte Überwindung einer defizitorientierten Sichtweise kann meiner Meinung nach nicht bedeuten, ein Recht auf den Irrtum einzufordern, das den Irrtum in der Versenkung verschwinden läßt, während man freundlich wegguckt (Baruk 1 , S. 61). Ich bin mit Baruk (1 , S. 11) der Meinung: Der Lehrer müßte doch zumindest darauf aufmerksam machen, wenn irgend etwas Falsches da steht, allein schon deshalb, weil es sonst mit seiner Bürgschaft für richtig gehalten werden kann und weil der Schüler sonst aus seinen Fehlern nichts lernen kann. Dazu reicht das selbständige Suchen der Fehler mittels Kontrollblatt nicht aus, so wichtig dies auch im Sinne der Übernahme von Verantwortung für den eigenen Lernprozess ist. Hier ist die Lehrkraft mit ihrer fachdidaktischen Kompetenz gefragt.

Nach dem Benennen der Fehler sollte der Lehrer im Unterricht Zeit für die Auseinandersetzung mit den Schülerfehlern geben, auch wenn er folglich ein oder zwei Arbeitsblätter weniger behandeln kann. Für das Ermöglichen verständnisgestützten Übens ist jedoch die Auseinandersetzung mit Fehlvorstellungen im Sinne des ersten Abschnitts entscheidender als das Bearbeiten möglichst vieler Übungsaufgaben. Zudem lässt sich so das Zutrauen der Schüler in ihre Verbesserungsfähigkeit und damit auch in ihre mathematischen Fähigkeiten stärken.

Schließlich sollte die Lehrkraft den Umgang mit Fehlern sichtbar positiv bewerten, indem sie zunächst alles Gelungene hervorhebt und ihre Schüler lobt, wenn diese Fehler finden. Ziel ist es, den Schülern die Angst vor ihren Fehlern zu nehmen. Neben der Arbeit an den eigenen, im Unterrichtsprozess aufgetretenen Fehlern, kann die Arbeit an typischen, aus der Literatur entnommenen Schülerfehlern entlastend wirken, weil die Schüler dadurch auch lernen, dass alle Schüler Fehler machen und dass Fehler also normal sind. Schließlich sollte die Überarbeitung der eigenen Arbeiten immer kontrolliert und gewürdigt werden.

Literatur

Baruk, Stella: Wie alt ist der Kapitän Über den Irrtum in der Mathematik. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag 1

Bobrowski, Susanne; Grassmann, Marianne: Vom Umgang mit Fehlern im Unterricht. In: Grundschule 2003, H. 3, S.

Franke, Marianne: Mißverständnisse oder mathematische Fehler In: Grundschulunterricht 1 7, H. 1, S. 30 – 33

Lorenz, . H./Radatz, H.: Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag 1 3

Ján GUNČAGA, Štefan TKAČIK, Ružomberok

The notion of regulated function in the calculus teaching by Professor Igor luv nek

Everybody familiar with basic calculus remembers properties of continuous functions defined on a bounded closed interval I. Some of the properties can be extended to suitable discontinuous function, namely to functions having right and left limits in each point of I, such functions are called regulated. We shall deal with a special class of regulated functions consisting of piece-wise functions.

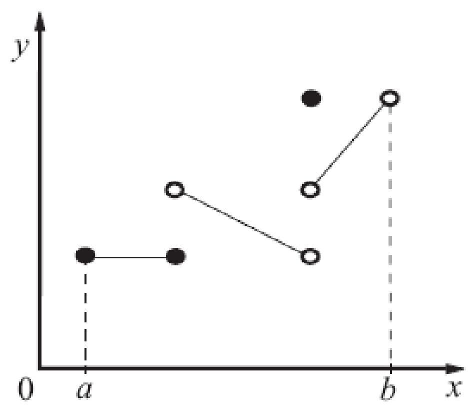
Introduction

Definition A function f is said to be regulated on an interval I if

a) the function f has the left limit at every point of the interval I except the left end point and
b) the function f has the right limit at every point of the interval I except the right end point.

In this definition, we do not require that the right limit and the left limit of the function at a point are the same. The function is not required to be defined at every point of the interval I.

A graph of a regulated function an I = $\langle a; b\rangle$.



Pro erties of the regulated functions

Lemma Each function continuous on an interval I is regulated on I.

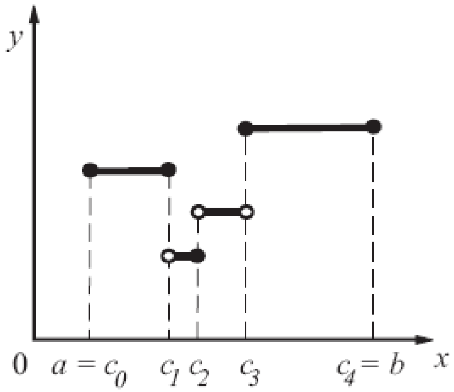
Lemma Each monotonic and bounded function on an interval I is regulated on I.

Theorem Let f be a regulated function on a bounded and closed interval I. Then f is bounded on it.

An important class of a regulated function consists of a piece-wise constant ones.

Definition A function f is said to be piece-wise constant on an interval I with end points a and b, a < b, (we admit $a = -\infty$ and $b = \infty$), if there is natural number n and interior points c_j, $j = 1, 2, \ldots, n - 1$ of the interval I such that $c_{j-1} < c_j$, for $j = 2, 3, \ldots, n - 1$, and if $c_0 = a$ and $c_n = b$, then the function f is constant on each of the interval $(c_{j-1}, c_j,)$, for $j = 1, 2, \ldots, n$.

Because of its shape piece-wise constant functions are also called step functions. It follows from the definition that if f is regulated on a interval I, then it is also regulated in each interval J ($J \subseteq I$).



The following theorem states that a function regulated on a bounded closed interval can be replaced with arbitrary accuracy by a step function.

Theorem : For a and b be number such that $a < b$ let f be a function regulated on the interval $\langle a; b\rangle$ and let ε be a positive number. Then there exists a step function g such that

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

for each point x of the interval $\langle a; b\rangle$ belonging to the domain of f. If the function f is continuous on the interval $\langle a; b\rangle$, then we can choose the function g to be right-continuous at each point of the interval $\langle a; b)$, or left-continuous at each point of the interval $(a; b\rangle$.

x	$\sqrt{x}$
20	4,4721
21	4,5826
22	4,6904
23	4,7958
24	4,8990
25	5,0000
26	5,0990
27	5,1962
28	5,2915
29	5,3852
30	5,4772

This theorem has numerous applications. It says, among other things, that for each regulated function on a compact interval (bounded and closed interval) an arbitrarily accurate table exists.

Exam le : In the Table, the values of the function $\sqrt{x}$ at the integers in the interval $\langle 20; 30\rangle$ are given. So, in this case $f(x)=\sqrt{x}$, $a = 20$, $b = 30$, n=10, $x_0 = a = 20$, $x_1 = 21$, $x_2 = 22$, and so on, $x_9 = 29$, $x_{10} = 30$. $y_0 = 4{,}4721$, $y_1 =$ 4,5826, and so on, $y_9 = 5{,}3852$, $y_{10} = 5{,}4772$. For example, the approximate value of $\sqrt{x}$ at 27 is 5,1962, etc.

To determine approximately $\sqrt{26{,}4}$, we use the described procedure and find out from the Table that $\sqrt{26{,}4}$ is approximately 5,0990. Similarly, the approximate value of $\sqrt{x}$ at 27,8 is 5,2915, the approximate value of $\sqrt{x}$ at 21,5 is 4,5826.

It is now apparent that a table of a function f in an interval $\langle a; b\rangle$ together with the described procedure for determining approximate values of f represents a step function g defined on the interval $\langle a; b\rangle$. The number which this procedure produces as an approximate value of the function f at a point $x \in \langle a,b\rangle$ is equal to the value of the step function g at x. If the rule of taking $y_{j\text{-}1}$ as an approximate value of f at $\frac{x_{j-1}+x_j}{2}$, for every $j = 1, 2, \ldots,$ n is adopted, then the corresponding step function g is left-continuous at each point of the interval $\langle a; b)$.

onclusion

Generalization of the properties any continuous function on the interval $\langle a; b\rangle$ leads to the notion of the regulated function. First advance of this type of functions are application in different approximation regulated function by piece-wise function. Second advance is that the regulated function is integrable in the interval $\langle a; b\rangle$. These properties we can use the effective methods for actual calculation of integral.

eferences

[1] Gunčaga J.: *Grenzwertprozesse in der Schulmathematik.* In: *Journal für Mathematik-Didaktik.* Stuttgart – Leipzig – Wiesbaden, 2006, Heft 1, s. 77 – 78

[2] Gunčaga J., Tkačik Š.: *Derivative of a function at a point*. In: *XII^th^ Czech – Polish – Slovak Mathematical School*, Ústí nad Labem, UJEP, 2005, s. 120 – 124

[3] Eisenmann P.*: Propedeutika infinitezimálního počtu.* UJEP, Ústí nad Labem 2002

[4] Fulier J.: *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy.* UKF, Nitra 2001
[5] Kluvánek I.: *Manuscrips for Diferencial and integral calculus*
[6] Königsberger B.: *Analysis I.* Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 2001
[7] Pickert G.: *Aufbau der Analysis vom Stetigkeitsbegriff her*. In: *Der Mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 1968, 21. Band, Heft 11, s. 384 – 388
[8] Wachnicki E., Powązka Z.: *Problemy analizy matematycznej w zadaniach. Cęść I.* AP, Kraków 2002

Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

Matheomnibus -- Mathematik für alle

1. Vorbemerkung

Die Leuphana Universität Lüneburg hat im WS 07/08 eine neues Studienmodell etabliert, in dem die Erstsemester gemeinsam in die vielfältigen Aspekte wissenschaftlichen Arbeitens eingeführt werden. Im Rahmen des Moduls "Fächerübergreifende Methoden" sollte die Veranstaltung "Mathematik für alle" einen Einblick geben in die Mathematik in unserer Welt und in der Wissenschaft. Es war in vielerlei Hinsicht ein Wagnis und eine Herausforderung. Aber es war auch eine Chance, die Haltung vieler Studierender zur Mathematik zu verändern. Über das Konzept und die Themen können Sie sich auch auf der Website **www.leuphana.de/matheomnibus** informieren. Dort stehen zudem die Vorlesungsfolien und die interaktiven Dateien. Das Gesamtkonzept des sogenannten Leuphana-Semesters ist auf der Universitäts-Site **www.leuphana.de** beschrieben.

2. Konzept

Fundamentale Ideen und Methoden, die die Rolle der Mathematik als Kulturgut und als Grundlage für viele Anwendungen in unserer modernen Welt beleuchten, sollen verständlich vorgestellt werden. Mathematik wird in der Schulzeit vorwiegend als kumulatives Fakten- und Formelwissen erlebt, welches es auswendig zu lernen gilt. Dass Mathematik nicht nur ein Produkt ist, sondern auch ein Prozess, dass sie eine geistige Möglichkeit bietet, die Welt in bestimmter Hinsicht zu strukturieren, dass es sich um eine aktive Fragehaltung und ein Tätig-Sein handelt, wird demgegenüber bislang kaum erfahren. Ein angstfreier Umgang mit Mathematik und eine veränderte Haltung können als wichtigstes Ziel gelten.

Qualitatives Vorgehen soll die Konzepte ohne Rechnerei erfahrbar machen, dabei werden besonders ausgewählte "Fokusaufgaben" die einzelnen Themen erschließen und im Hinblick auf eine Klausur die Entwicklung entsprechender Kompetenzen ermöglichen. Die Eigentätigkeit und das eigene Prüfen soll durch Dynamische Mathematiksoftware unterstützt werden. Möglichkeiten und Grenzen der Computer in der Mathematik kommen zur Sprache. Die Übungen finden in die Vorlesung s integriert tatt, gerade damit der Kalkülaspekt nicht Raum gewinnen kann.

Studierende der mathematikferneren Studiengänge sollen unsere Welt besser verstehen, für die anderen soll zudem der Mut geweckt werden, sich im Fachstudium angstfrei den dort ggf. noch notwendigen Vertiefungen mathematischer Kompetenzen zuzuwenden.

3. Inhalte im Überblick

3.1. Moderne Mathematik

Unsere elektronische Welt ist ohne Mathematik nicht denkbar. **Kryptografische Methoden** ermöglichen sichere Kommunikation, Elektonische Signatur und Vieles mehr. **Codierung** gibt es nicht nur im Handel (Barcode) sondern auch bei der Wandlung von Musik in Daten der CD. In das moderne Gebiet **Graphentheorie** führen Kürzeste Wege-Probleme, konfliktfreie Ampelschaltung und logistische Probleme ein.

3.2. Funktionen als ein zentrales Werkzeug

Die Funktionen der Schule werden unter übergreifenden Gesichtspunkten zusammengefasst, Ableitungen und Integrale werden in ihren Aussagen neu verstanden und verknüpft. Ein Grundverständnis von 3D-Funktionen ist heute wichtig.

3.3. Optimierung als Ziel

Der Optimierung dient die Mathematik in vielen Anwendungen. Lineares Optimieren steht im Fokus für viele Optimierungsprobleme, aber auch andere Optimierungsversuche und die Begrenztheit der Aussagen werden thematisiert. Lineare Algebra, Matrizen, lineare Gleichungssysteme werden in ihrer grundlegenden Relevanz vorgestellt. Markowketten geben den Fokus auf Entscheidungs- und Prognose-Methoden.

3.4. Numerik und Werkzeuge der Mathematik

Wenn man ein Problem nicht exakt lösen kann, so beschafft man mit Numerik wenigstens sinnvolle Zahlen. Dabei wird der Computer als Knecht für Mathematik-Bewältigung benutzt und seine Grenzen werden aufgezeigt.

3.5. Selbstverständnis und allgemeine Methoden der Mathematik

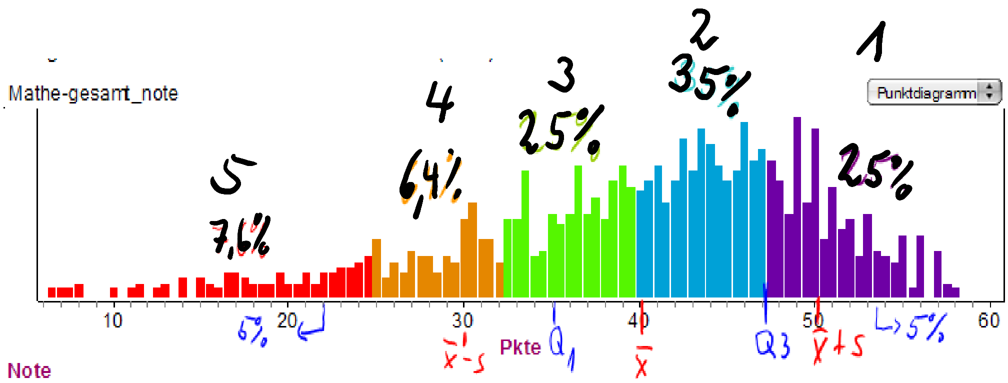
Modellierung von Wirklichkeit, Lösen im mathematischen Modell, Prüfung der Lösung an der Wirklichkeit, Entscheiden, Prognostizieren, Beweisen, ... werden als zentrale Aufgaben der Mathematik hervorgehoben. Mathematiker haben aber auch Freude an der Ästhetik und dem konsistenten Aufbau ihres Faches. So ergibt sich ein angemessener Blick auf das Selbstverständnis und die Rolle der Mathematik in den Wissenschaften.

4. Unterstützung der Studierenden

Auf einer **Moodle-Plattform** als Element des "blended learning" wurden Texte, Aufgaben und Lösungen bereitgestellt. In speziellen, thematischen Foren konnten Fragen an TutorInnen gestellt werden. Diese wurden zeitnah und umfassend beantwortet. **Tutorensprechstunden** ergänzten dieses Angebot. Die **Internetseite "matheomnibus"** **www.leuphana.de/matheomnibus** stellte vor allem die in der Vorlesung eingesetzten Applets und CAS-Seiten bereit und ermöglichte so, mit den **interaktiven Computerwerkzeugen** das Gezeigte nochmals in Ruhe selber durchzuführen und mit eigenen Beispielen zu erproben. Auch in der Klausur waren alle Taschenrechner, auch CAS-fähige, erlaubt. So soll auch das Bewusstsein anderer mathematik-nutzender Fächer für den Einsatz von Werkzeugen geschärft werden.

5. Klausur und Evaluation

1200 Studierende haben an der Vorlesung teilgenommen, mehr als es nach Ihrem Studiengang mussten. Die Klausur fand in einer Mischform aus Multiple-Choice~ und freien Fragen statt. Die Fragebögen wurden nach der von-Hand-Bewertung der freien Fragen mit der Software EvaExam automatisch ausgewertet. Das Ergebnis war für meine Begriffe beeindruckend gut. 60% hatten sehr gut (1) oder gut (2), aber dennoch war die Verteilung breit, hat also gut differenziert.. 7,6% sind in Mathematik durchgefallen.



Ich habe viele Themen aus der Schule jetzt erst richtig verstanden. Vorher konnte ich zwar die Rechenwege anwenden, aber ich wusste oft nicht wozu man das überhaupt braucht.
Der Realitätsbezug hat wirklich mathematisches Interesse geweckt.

Ich finde es gut, dass Sie versuchen die komplexen Themeninhalte für ALLE verständlich zu erläutern. Wir können jetzt zwar nicht alle Methoden einwandfrei anwenden, aber was viel wichtiger ist, verstehen wir die Zusammenhänge.

Literatur

[1] Dörte Haftendorn: **www.leuphana.de/matheomnibus**

[2] Dörte Haftendorn **www.mathematik-verstehen.de**

Christoph HAMMER, München

Anregungen für einen schüleraktivierenden Mathematikunterricht

Die Ergebnisse der internationalen Schulleistungsstudien TIMSS und PISA haben vor allem in Deutschland eine anhaltende Diskussion über Bildung im Allgemeinen und mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht im Besonderen ausgelöst.
Es stellt sich jedoch die Frage, ob die ernüchternden Befunde Folgen für den täglichen Unterricht in deutschen Klassenzimmern hatten.
Ohne differenziert auf die Vergleichsstudien einzugehen, sollen hier zwei pauschal formulierte Thesen vorangestellt werden:

<u>These 1:</u>

Die Befunde der Vergleichsstudien zeigen auch, dass Unterricht in Deutschland erfolgreich ist.

Die deutschen Schüler zeigten deutliche Schwächen bei Aufgaben, die Konzeptverständnis und Problemlösekompetenzen verlangen. Jedoch stellte sich immerhin heraus, dass sie über relative Stärken beim Bearbeiten von rechnerischen Standardaufgaben verfügen. Dies zeigt, dass das wichtigste Ziel einer überwiegenden Mehrheit unserer Lehrkräfte auch erreicht wird. Wer kann von seinem Unterricht schon behaupten, dass die Entwicklung von Problemlösekompetenzen im Mittelpunkt steht?
So besteht Hoffnung, dass durch andere Schwerpunktsetzung hin zu mehr Nachhaltigkeit und Problemlösefähigkeit aktuelle Defizite beseitigt werden können.

<u>These 2:</u>

Im deutschen Unterricht wird zu viel gelehrt und zu wenig gelernt.

Bei einem Besuch flämischer Lehrer in Augsburger Schulen im Juni 1999 fassten die Gäste ihre Eindrücke mit folgender Bemerkung zusammen:

„In Deutschland arbeiten die Lehrer und in Belgien arbeiten die Schüler."

Knapper lässt sich die Problematik kaum ausdrücken. Wesentlicher Aspekt soll in diesem Beitrag die Förderung der Schüleraktivität sein, die zugleich entlastend für die Lehrkräfte ist.

Zunächst wird eine kleine Auswahl von Unterrichtsmethoden vorgestellt, die sich bei vertretbarem Vorbereitungsaufwand als äußerst wirksam erwiesen haben. Im zweiten Teil wird unter der Überschrift „Aufgaben" dargestellt, welche Rolle Aufgaben im Unterricht spielen könnten. Konkrete Beispiele werden im Vortrag erläutert und können beim Autor erfragt werden.

Methoden:

a) Hausaufgabenfolie

Jeweils ein Schüler fertigt seine Hausaufgabe nicht nur im Heft, sondern auch auf einer Folie an und ist zu Beginn der nächsten Stunde für die Besprechung verantwortlich. Dabei steht am Anfang immer eine kurze Stoffzusammenfassung der letzten Stunde. Der Schüler muss auf Fragen aus der Klasse eingehen; unterlaufen ihm Fehler, sind alle Mitschüler gefordert, an deren Richtigstellung mitzuarbeiten.

Eine weitere leicht umzusetzende, gleichwohl sehr wirksame Methode mit vielfältigen Variationsmöglichkeiten ist:

b) Arbeit mit abgestuften Hilfen

Die Schüler erhalten Aufgaben, die sie allein oder in Gruppen lösen sollen. Haben sie dabei Schwierigkeiten, können sie auf vorbereitete Hilfen (z. B. am Lehrerpult liegende Hilfekarten) zurückgreifen. Der erste Hinweis soll beim Einstieg helfen, der letzte enthält die Lösung der Aufgabe.
Die Lehrkraft steht zur individuellen Beratung ohne Zeitdruck zur Verfügung. Werden mehrere Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad angeboten, kann auf elegante Weise Binnendifferenzierung realisiert werden. Ob mit Hilfekarten oder aufwändiger Nutzerführung am Computer – gemeinsam ist allen Varianten, dass die Lernenden auf ihrem Niveau und in ihrem eigenen Tempo arbeiten können und die Ausrede „das kann ich sowieso nicht" ins Leere geht.

c) Effiziente Gruppenarbeit

Gruppenarbeit will gelernt sein! Dies bezieht sich auf Lehrkräfte und Schüler. Zunächst eine allgemeine Vorbemerkung („Ich-Du-Wir-Prinzip"; Gallin/Ruf):
Nicht nur bei der hier in Rede stehenden Gruppenarbeit setzen Lernprozesse drei Phasen voraus: Der Lernende muss sich selbständig und intensiv mit der Materie beschäftigen (Ich), er muss sich darüber mit anderen (Lehrkraft, Klasse) austauschen (Du) und schließlich muss das Ergebnis (Regeln, Algorithmen) zusammengefasst werden (Wir). Leider kommt in vielen Unterrichtsstunden die „Ich-Phase" zu kurz.

Viele Lehrkräfte meiden Gruppenarbeit, weil sie die Erfahrung machen, dass sich dabei dieselben Schüler engagieren, wie im Klassengespräch.

Eine Variante, bei der man sich nicht hinter anderen verstecken kann, ist die Experten-Runde, die in zahlreichen Veröffentlichungen ausführlich beschrieben ist.

Aufgaben:

Um Schülerinnen und Schüler zu selbständigem Arbeiten anzuregen, reicht es nicht, entsprechende Methoden einzusetzen, es kommt auch darauf an, interessante Aufgaben richtig einzusetzen.

a) Probleme statt Aufgaben

Im vorherrschenden Drehbuch von Unterrichtsstunden (vgl. TIMSS-Video-Studie) wird neuer Stoff im fragend-entwickelnden Unterrichsgespräch erarbeitet und dann mit einer Folge von Aufgaben eingeübt. Hier wird für einen Unterricht plädiert, der mehr als bisher von Aufgaben gesteuert wird. Das Neue sollte bei der Lösung eines Problems auftauchen, so dass die Schüler die Fragen stellen und nicht der Lehrer.

b) Argumente statt Algorithmen

Unter den zahlreichen „neuen“ Aufgaben, die zum Teil schon in Lehrbüchern zu finden sind, gibt es den Typus „Fermi-Aufgaben“. Dabei handelt es sich um in jeder Hinsicht offene Aufgaben:
Weder sind die erforderlichen Daten bekannt, noch gibt es einen „Königsweg“ für die Lösung und dazu kommt noch, dass es kein „richtiges“ Ergebnis gibt. Entscheidend sind die Gedanken, Wege und Irrwege, die mathematischen Argumente. Solche Aufgaben öffnen einen Blick auf die Mathematik, wie sie auch ist: nämlich mehr als eine Sammlung von Formeln und Algorithmen.
Anregungen und Beispiele sind zum Beispiel von W. Herget veröffentlicht.

c) Aufträge statt Segmentierung

Um alle Schüler herauszufordern und zu aktivieren, sind differenzierende Aufträge günstig, die sinnvolle mathematische Beschäftigung auf jedem Niveau ermöglichen. Sie sind gut formuliert, wenn drei Aspekte enthalten sind:
Der Einstieg soll zum Problem hinführen und für niemanden eine unüberwindliche Hürde darstellen. Im Mittelpunkt steht eine gehaltvolle mathematische Problemstellung – der Kern der Sache. Der dritte Aspekt eines differenzierenden Auftrags lädt die Lernenden zu einem geistigen Höhenflug ein, der manchmal nicht jedem gelingt. Diese Rampe kann Verbindungen herstellen, Entdeckungen ermöglichen und neue Problemlösestrategien verlangen. Die hier angedeuteten Gedanken wurden

von Gallin/Ruf überzeugend dargestellt.
Eine Vielfalt an anregenden Beispielen für Aufträge und so genannte „Lernumgebungen“ findet man in der Lehrbuchreihe mathbu.ch.

Schlussbemerkung:

Niemand wird behaupten, dass sich Mathematikunterricht in Deutschland nach TIMSS und PISA flächendeckend weiterentwickelt hat. Dennoch gibt es da und dort Erfolg versprechende Ansätze.

Dabei sind drei Aspekte wichtig:

1. Niemand muss etwas neu erfinden, Umsetzung der bereits publizierten methodisch-didaktischen Anregungen wäre genug.
2. Wesentlich für nachhaltige Entwicklungsprozesse ist die professionelle Kooperation von Lehrkräften. Dies ist zwar nicht Thema dieses Beitrags, soll hier aber wenigstens erwähnt werden.
3. Weiterentwicklung der Unterrichtskultur braucht Unterstützung, Zeit und kleine Schritte!

Literatur:

1. Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts; Erfahrungsbericht zum BLK-Programm SINUS in Bayern, München 2002
2. SINUS Bayern; Beiträge zur Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, München 2007
3. Gallin/Ruf: Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. Sprache und Mathematik; Lehrmittelverlag des Kantons Zürich 1999
4. Herget, Scholz: Die etwas andere Aufgabe aus der Zeitung, Kallmeyer 1998;
5. Herget, Jahnke, Kroll,: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Cornelsen 2001
6. Gallin/Ruf: Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik (2 Bände), Kallmeyer
7. mathbu.ch; Schulverlag blmv AG, Bern, Klett und Balmer Verlag. Zug
8. www.sinus-bayern.de

Nicole HARRASS, Bielefeld

Analyse von Lernsoft are und sinnvollen Einsatzm glich-keiten - ben mit dem om uter im Arithmetikunterricht

In diesem Beitrag werden Möglichkeiten zur Analyse von Lernsoftware sowie deren Einsatzmöglichkeiten aufgezeigt. Beschränkt wird der Untersuchungsgegenstand auf Software, die zum Üben im Arithmetikunterricht eingesetzt werden kann. Zunächst wird ein Analyseverfahren vorgestellt, das verschiedene Phasen der Prüfung vorsieht. Zum Aspekt Rückmeldungen des Programms wird das Verfahren weiter konkretisiert. Hierzu werden auch ausgewählte Übungen beispielhaft analysiert.

onze tion eines Pr fverfahrens

Ziel ist es, eine bewusste Entscheidung bei der Auswahl von Lernsoftware zu treffen und zu klären, was ein Programm im Unterricht leisten kann. Das Verfahren (vgl. Abb. l) orientiert sich an einem vom LSW (1) entwickelten Prüfverfahren, das neben einer theoretischen Analyse auch Erprobungen in der Praxis vorsieht.

Die Softwarequalität wird gerade für den Mathematikunterricht von fachdidaktischer Seite stark kritisiert. Deshalb sind Kriterien zur *(Vor-) Auswahl* sinnvoll, die vorab über den Einsatz der Software im Unterricht im Sinne von k. o.-Kriterien rungieren (vgl. Krauthausen/Scherer 2007, 2 4). Beispielsweise kann eine Eemsoftware vor dem aktuellen Diskussionsstand der Fachdidaktik nicht bestehen, wenn das zugrunde liegende Lernkonzept, die Lerninhalte oder Lernziele dem aktuellen Lehrplan nicht entsprechen.

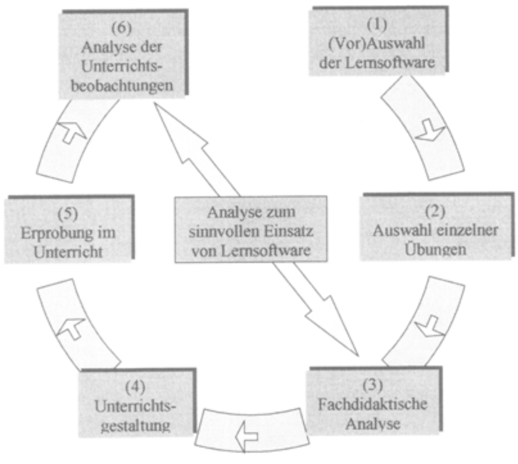


Abb l Prüfverfahren zur Analyse von Lernsoftware

Hält ein Produkt den Kriterien zur Vorauswahl stand, sollte eine detaillierte fachdidaktische Analyse durchgeführt werden. Es ist zweckmäßig, bei allen weiteren Kriterien nicht die Software allgemein, sondern *einzelne Übungen* für sich zu betrachten.

Es wird angenommen, dass ein verantwortungsvoller Einsatz von Lernsoftware nur gelingen kann, wenn sowohl an die Gestaltung von Lernsoftware als auch an den Medienumgang vergleichbare Anforderungen gestellt werden wie an einen guten Mathematikunterricht generell. Bei der *fachdidaktischen Analyse* müssen deshalb zunächst die Aspekte beleuchtet werden, die nach aktuellem Lernverständnis prinzipiell bei der Organisation von Lernprozessen zu berücksichtigen sind. Im Anschluss ist zu prüfen, welche medienspezifischen Besonderheiten diesbezüglich bedacht werden müssen. Für das Üben am omputer wird die Analyse der folgenden Bereiche als zentral erachtet: Übungstyp und didaktische Verortung der Übung im Lernprozess, Möglichkeiten der Differenzierung, Umgang mit Fehlern und Lernschwierigkeiten im Programm (s. unten), Verwendung angebotener Veranschaulichungen und Motivationsanreize.

Überlegungen zur *Unterrichtsplanung und -gestaltung* müssen im Anschluss unter Berücksichtigung der räumlichen Rahmenbedingungen und den Ergebnissen der fachdidaktischen Analyse konkretisiert werden.

Die beiden letzten Phasen sind eng miteinander verknüpft. Bei der *Erprobung einer Lernsoftware* im Unterricht müssen die Schüler gezielt beobachtet werden, um Genaueres über die Wirkungsweisen einer Übung am omputer zu erfahren. Die *Ergebnisse der Unterrichtsbeobachtungen* können mit den theoretischen (Vor-)Überlegungen verglichen werden und Konsequenzen für den zukünftigen Einsatz der ausgewählten Software abgeleitet werden.

eis ielhafte Analyse zum As ekt ckmeldungen des Programms

Eine entscheidende Rolle im Umgang mit Fehlern und Schwierigkeiten am omputer spielen die Rückmeldungen der Programme. Kritisch ist zu hinterfragen, ob diese Rückmeldungen einen konstruktiven Umgang mit Fehlern im Sinne des aktuellen Lehr- und Lernverständnisses bei den Schülern fördern. Beispielsweise wird häufig positiv betont, dass der omputer Kontrollfunktionen im Lernprozess übernehmen kann. In der Regel wird die Einsicht in den eigenen Fehler aber nicht unterstützt, wenn lediglich eine Falschmeldung auf dem Bildschirm erscheint.

In Abhängigkeit von Programmart und Programmziel sollte die Prüfung noch differenzierter sein. Denn ein und dasselbe Kriterium kann bei einer offenen Lernumgebung ganz anders zu bewerten sein als bei einem Trainingsprogramm. Eine unmittelbare Rückmeldung etwa mag im einen Fall durchaus Sinn machen, in einem anderen aber völlig kontraproduktiv sein (Krauthausen 2005, 2).

Zusammenfassend sei betont, dass es im Sinne eines konstruktiven Umgangs mit Fehlern wenig wünschenswert scheint, eine Software so zu programmieren, dass alle möglichen Fehlvorstellungen erkannt und vom Programm Schritt für Schritt aufgearbeitet werden können. Stattdessen ist zu prüfen, ob die Eigenreflexion und Selbstkontrolle des Schülers in Bezug auf seine Lösungswege und Ergebnisse z. B. durch gezielte Fragestellungen gestützt werden.

Analyse ausgewählter Übungen aus den Programmen Blitzrechnen und Lernwerkstatt

Analysiert werden die Übungen Wie viele und Zählen in Schritten aus dem Programm Blitzrechnen (Krauthausen 1 7/) und die Übungen Zahlenmauern und Würfelrechnen aus dem Programm Lernwerkstatt (Zur Linde 2002). Bei den Übungen des Programms Blitzrechnen werden Lösungen direkt nach der Eingabe vom Programm geprüft. Fehlerhafte Lösungen werden kurz angezeigt und dann automatisch gelöscht. Im Programm Lernwerkstatt muss ein Button angeklickt werden, wenn die Schüler die Bearbeitung ihrer Aufgabe prüfen lassen möchten. Sie erhalten entweder eine Fehlerrückmeldung bei falschem Ergebnis oder einen Punkt für die richtige Lösung. Weitere Aspekte sollen an dieser Stelle nicht erläutert werden, sondern es sei auf Harrass (2007) verwiesen.

Neben der theoretischen Analyse wurde der Einsatz der ausgewählten Programme in der Praxis erprobt. Im Rahmen einer empirischen Studie wurden hierzu Drittklässler beim Üben am omputer beobachtet, um tiefere Einsicht in ihre Vorgehensweisen zu erhalten. Immer 15 Kinder haben eine der oben genannten Übungen am omputer bearbeitet.

Obwohl die Ergebnisse im Programm Lernwerkstatt nicht automatisch geprüft werden, haben die Schüler nur in Einzel fällen vergessen, den Kontroll-Button anzuklicken. Vermutlich war dies auch ein Nebeneffekt des Punktesammelns . Größtenteils wurden die Schüler durch die Rückmeldungen der Programme auf fehlerhafte Eingaben aufmerksam. Da die Kontrolle bei dem Programm Blitzrechnen automatisch erfolgte, wurde die Fehleranzeige in Einzelfällen übersehen.

Die Reaktionen der Schüler auf die Fehlerrückmeldungen waren unterschiedlich. Unproblematisch war es, wenn der Schüler seinen Fehler selbst erkennen konnte und im Anschluss verbesserte. Größere Schwierigkeiten im Umgang mit der Fehlerrückmeldung zeigten sich insbesondere dann, wenn die Schüler den mathematischen Inhalt einer Übung nicht verstanden haben, die Regel nicht richtig anwenden konnten bzw. die Problemstruktur einzelner Aufgaben nicht durchschaut haben. Häufig kamen dann mehrere Fehler bei einer Aufgabe vor, was teilweise zum Abbrechen der Aufgabenbearbeitung führte. Die Rückmeldung des omputers konnte die Ursachen-Suche nicht unterstützen.

Viele Schüler überließen dem omputer die Kontrolle der Ergebnisse, ohne ihre Lösungen selbst zu prüfen. Selbst wenn Schülern bewusst war, dass das berechnete Ergebnis noch fehlerhaft war, nutzten sie mehrfach hintereinander die Kontrollfunktion des Programms zum Lösen einer Aufgabe und gaben die Kontrolle vollständig an den omputer ab.

Resümee

Bestimmte Analyseaspekte sind in Abhängigkeit von den Lernzielen und dem didaktischen Einsatzort bei der Prüfung von Lernsoftware unterschiedlich zu bewerten. Bei Aufgaben zur Automatisierung wie den Übungen aus dem Programm Blitzrechnen ist die Fehlerrückmeldung richtig und falsch angemessen, da davon ausgegangen wird, dass der Schüler die Aufgaben verstanden hat und seinen Fehler selbst finden kann. Problematisch ist dagegen, wenn diese Übungen im Unterricht zu früh eingesetzt werden. In diesem Fall werden Schwierigkeiten auftreten, die vorrangig darauf zurückzurühren sind, dass den Schülern das Verständnis für den jeweiligen Lerninhalt fehlt.

Im Umgang mit den Fehlerrückmeldungen im Programm Lernwerkstatt ist dagegen sowohl die Art der Fehlerrückmeldung kritisch zu betrachten als auch der Einsatz bei problemstrukturierten Aufgaben, weil an die untersuchten Übungstypen andere Anforderungen gestellt werden müssen als an die Übungen zur Automatisierung. Da dieses Programm auch bei der Analyse anderer medienspezifischer und fachdidaktischer Aspekte mehrfach kritisch diskutiert werden muss (vgl. Harrass 2007), sollten der Einsatz des Programms und die Auswahl der Übungen immer wohlüberlegt sein.

Literatur

[l] Harrass, Nicole: omputereinsatz im Arithmetikunterricht der Grundschule. Franzbecker, Hildesheim 2007

[2] Krauthausen, Günter: Blitzrechnen. Kopfrechnen im l. und 2. Schuljahr. Kopfrechnen im 3. und 4. Schuljahr. Klett, Leipzig 1 7/

[3] Krauthausen, Günter: omputer im Mathematikunterricht in der Grundschule - Ernüchterung eingekehrt In: Graumann, Günter (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 25-32. Franzbecker, Hildesheim 2005

[4] Krauthausen, Günter/Scherer, Petra: Einführung in die Mathematikdidaktik. 3. Auflage. Eisevier, München 2007

[5] LSW - Landesinstitut für Schule und Weiterbildung: Lernen mit Neuen Medien. Verlag für Schule und Weiterbildung, Soest 1

[6] Zur Linde, Ralf: Lernwerkstatt. Version 5.0. Medienwerkstatt, Mühlacker 2002

Mutfried Hartmann/Rainer Loska, Nürnberg

Mathematik ohne Regeln und Formeln?

Schüler klammern sich oft an Regeln und Formeln. Diese scheinen einfach und leicht anwendbar zu sein. Das mag zwar für die einzelnen Regeln und Formeln zutreffen. Für viele Schüler ist es aber ein Problem, zu wissen, welche Regel bei welchem Aufgabentyp auf welche Weise anzuwenden ist. Das seit Jahrhunderten in der Öffentlichkeit vorherrschende Bild von der Mathematik wird von Regeln und Formeln bestimmt, von formalen, abstrakten Notationen. Eine entsprechend lange Unterrichtstradition nährte diese Vorstellung. Überspitzt formuliert wird seit Adam Ries der Rechen- bzw. Mathematikunterricht im Wesentlichen als Training von Regeln und Formeln verstanden. Durch die Praxis eines regelgeleiteten Unterrichts wird den Schülern als "heimlicher Lehrplan" gleichzeitig vermittelt, dass Regeln und Formeln das Wesentliche der Mathematik sind.
Die in den letzten Jahren veränderten Bildungs- und Lernziele begünstigen jedoch eine andere Sicht und erfordern Veränderungen im Mathematikunterricht. Wir meinen, dass eine Reorganisation der Unterrichtsinhalte erfolgen muss und beziehen uns mit unseren Überlegungen und Vorschlägen hier auf die Sekundarstufe 1, insbesondere auf die Hauptschule. Im Mittelpunkt sehen wir die auf Verständnis basierte Sicherung von *Kernideen*, die das Fundament des Wissens bilden, und in großen Teilen das abstrakte Anwenden von Regeln und Formeln ersetzen können. Hier ist zwar ein höherer Aufwand gegenüber isolierten Regelanwendungen erforderlich. Der immer wieder neu aufgenommene Kampf im Dschungel der vielen Regeln würde jedoch wegfallen bzw. vermindert. Durch die Fokussierung auf wenige Kernideen wird letztlich auch eine Reduzierung des Lernstoffs erreicht. Weitergehende Problemstellungen werden auf bekannte Kernideen zurückgeführt, die dadurch implizit auch wiederholt werden.
Die Sicherung der Kernideen selbst beruht auf:

- Konsequente Grundlegung durch die Anschauung
  - Anschauliche Herleitungen werden zu einem eigenen Unterrichtsziel
  - Die Anschauung muss durchgängig - ggf. über Jahre hinweg - aufrecht erhalten werden
- Enge Verzahnung von Handlung, Bild und Notation
  - Begleitung der abstrakten Notation durch geeignete Sprechweisen, die auf die Anschauung referieren
  - Übungen zur Verknüpfung von Notation und Anschauung

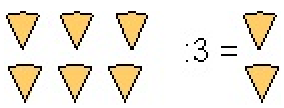
- Training
  - Trainiert wird anstelle der Regeln die Anschauung
  - Verstärkter Einsatz spezieller Übungen, die den Fokus auf möglichst nur einen bestimmten Aspekt der Kernideen legen unter Ausblendung anderer Aspekte ("fokussierende Übungen")
- Vielfältiger Bezug auf zentrale Kernideen, auch über verschiedene Jahrgänge hinweg

Beispiel aus der Bruchrechnung

Der übliche Bruchrechenunterricht zeichnet sich dadurch aus, dass zunächst in Einführungsstunden Rechenregeln anschaulich abgeleitet werden und dann in den Folgestunden in Aufgabenserien angewandt werden. Infolge dieses Vorgehens werden die anschaulichen Vorstellungen, auf deren Basis die Regeln abgeleitet wurden, vollständig durch ein kalkülhaftes Vorgehen der Schüler verdrängt. Sogar einfachste Operationen mit Brüchen – wie etwa $3 \cdot \frac{1}{7}$ – können selbst dann, wenn Bruchmaterialien zur Verfügung stehen, nicht mehr mit einer Handlung in Verbindung gebracht und umgekehrt solche Handlungen nicht als Rechnung dargestellt werden. Dies führt dazu, dass Schüler selbst einfache Sachkontexte im Rahmen der Bruchrechnung oft nicht geeignet modellieren können. Damit wird aber ein wesentliches Bildungsziel der Hauptschule nicht erreicht! Die Erfahrungen gerade auch im Bereich lernschwächerer Schüler zeigen, dass das verstärkte Training von Regeln und ihren Anwendungen auf Kosten der Begriffsbildung kontraproduktiv ist und nicht die notwendige Nachhaltigkeit sichern kann. Kurzfristige Erfolge beim Training isolierter Regeln täuschen darüber hinweg. In der trügerischen Hoffnung, ihre Schüler von scheinbar unnötigen Vorstellungen entlasten und diese durch vermeintlich einfache Regeln ersetzen zu können, muten viele Lehrer den Schülern letztlich eine nicht mehr handhabbare Fülle an abstrakten Regeln zu.

Wir plädieren deshalb auch hier für eine Reorganisation des Stoffes, also eine neue Gewichtung durch die Sicherung von Kernideen. Eine solche ist in der Bruchrechnung vor allem die quasikardinale Vorstellung: Gleiche Bruchstücke werden hinsichtlich ihrer Anzahl betrachtet und man rechnet wie mit natürlichen Zahlen.

Eine Aufgabe wie $\frac{6}{7} : 3$ würde durch Handlungen auf anschaulicher Basis so vorbereitet:

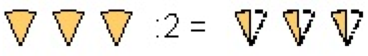


und schließlich wie folgt gelöst: $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6 : 3}{7} = \frac{2}{7}$

und nicht, wie es im regelgeleiteten Unterricht verbreitet ist:

$$\frac{6}{7}:3=\frac{6}{7}:\frac{3}{1}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\cancel{6}\cdot 1}{7\cdot\cancel{3}}=\frac{2\cdot 1}{7\cdot 1}=\frac{2}{7}$$

Die Grundlagen für den Aufgabentypus “Bruch durch Zahl” z.B. werden bei Zuhilfenahme des Kreismodells anschaulich gesichert:



$$\frac{3}{7}:2=\frac{3}{7\cdot 2}$$

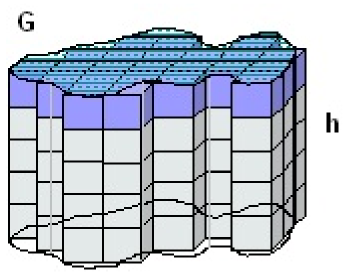
Die vier Rechenoperationen werden von Anfang an nicht voneinander getrennt, sondern gemischt vermittelt und jeweils verbal begleitet. Des weiteren sind fokussierende Übungen einzusetzen, bei denen die Schüler Handlungen bzw. Abbildungen flexibel interpretieren (z.B. ¼ von = ¼ mal = der 4. Teil von = geteilt durch 4 ..) und mit den unterschiedlichen Sprechweisen vertraut werden.

Bei der Multiplikation von Brüchen ist es verführerisch, die doch so einfache Regel “Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner” explizit zu verwenden. Trotzdem halten wir es für wertvoller, auch wenn es ungewohnt ist, hier von den Kernideen auszugehen. Über die Module “Zahl mal Bruch” und “Bruch durch Zahl” gelangen wir auf der Grundlage der Kernidee der Bruchteilbildung *Bruch mal = Bruchteil von* zur Multiplikation zweier Brüche. Dabei werden immer wieder die Kernideen aufgegriffen, damit wiederholt und nicht durch fragwürdige - auch hinsichtlich ihres längerfristigen Erfolgs - Automatisierungen von Regelanwendungen ersetzt. Rechenregeln werden nicht als zu lernende Merksätze notiert; allenfalls werden sie individuell von den Schülern benutzt. Der Rückgriff auf die Kernideen muss auch in den höheren Klassen immer wieder erfolgen.

Beispiel aus der Körperlehre

Häufig ist festzustellen, dass Schüler dann Schwierigkeiten bei der Bestimmung von Körpern haben, wenn diese keine Prototypen und nicht in der Normallage sind. Wir betrachten Begriffe in ihrem Aspektreichtum generell als zentrale Kernideen, die so im üblichen Unterricht nicht in der nötigen Intensität und im nötigen Umfang behandelt werden. Z.B. sollte der Begriff der geraden (und auch der schiefen) Säule den Schülern geläufig sein. Hierzu sind spezielle Übungen, die wir als *fokussierende Übungen* bezeichnen, einzusetzen. Bei solchen Übungen sollen sie ausschließlich trainieren, Modelle bzw. Abbildungen von Säulen in verschiedenen Lagen, in unterschiedlichen, vor allem ungewöhnlichen Proportionen zu identifizieren, damit

sie nicht nur Prototypen erkennen. Bei weiteren fokussierenden Übungen geht es z.B. ausschließlich darum, die für die Berechnung wichtigen Bestimmungsstücke Grundfläche und Höhe an Körpermodellen und auf Abbildungen herauszufinden. Erst, wenn ein aspektreiches Verständnis des Begriffs der geraden Säule gesichert, das mentale Modell genügend ausgebildet ist, hat es Sinn, bestimmte Operationen - z.B. die Berechnung der Volumina und Oberflächen von Körpern - auszuführen. Wenn die Schüler noch keine klar ausgebildeten Begriffe und Vorstellungen haben, besitzen solche weitergehende Übungen, die auf ihnen aufbauen, keinen Bildungswert.
Als wichtigste Kernidee für die Bestimmung des Volumens eines Körpers ist das Auslegen des Körpers mit Einheitswürfeln zu sehen, ganz in Analogie zum Flächeninhalt als Auslegen mit Einheitsquadraten. Die Vorstellung des Auslegens soll bereits in der Grundschule ausgebildet und in späteren Jahren immer wieder aufgegriffen werden. Dasselbe gilt auch für die weitere Kernidee des geschickten Zählens. Beide Ideen bilden die Grundlage dafür, dass sich das Volumen gerader Säulen als Produkt aus der Anzahl der Würfel, welche die Grundschicht bilden, und der Anzahl der Schichten, aus denen der Körper besteht, bestimmen lassen lässt.
Das geeignete Material hierzu sind Würfelbauten, mit denen propädeutisch in der Grundschule gearbeitet wird, die aber auch in der Sekundarstufe wieder verwendet werden sollen.



Um das Verständnis davon zu sichern, dass sich das Volumen einer geraden Säule als Vielfaches einer Grundschicht ergibt, sollen auch ungewöhnliche Säulenformen verwendet werden, bei denen sich das Volumen zwar nur näherungsweise, jedoch auf die gleiche Weise bestimmen lässt. Die Schüler sollten diese Sichtweise immer präsent haben bzw. jederzeit rekonstruieren können. Beim Arbeiten mit normierten Materialien sollen sie auch Größenvorstellungen von zentralen Stützgrößen (mm^3, cm^3, dm^3, ...) gewinnen, um mit ihrer Hilfe Abschätzungen der Volumina realer Körper vornehmen zu können. Anstatt Umrechnungszahlen mechanisch zu verwenden, sollen sie auf entsprechende Vorstellungen zurückgreifen können. Sie sollen z.B. rekonstruieren können, wie viele Würfel der Größe von 1 cm^3 in einen Würfel der Größe von $1dm^3$ passen.

An den Beispielen konnte nur angedeutet werden, auf welche Weise eine Reorganisation des Lernstoffes anhand von Kernideen erfolgen müsste. Es bleibt die Aufgabe, den Stoffkanon unter diesen Aspekten neu zu sichten, um ihn dann für den Unterricht nach und nach neu aufzubauen.

Mutfried HARTMANN, Nürnberg

Ein Vorschlag zur Verbindung von Signifikanz und Effektstärke zu einer neuen statistischen Kenngröße

Seit Beginn der Beurteilung von Verfahren mittels Hypothesentests besteht ein heftiger Diskurs über deren Sinn bzw. korrekte Anwendung. Bereits Fisher führte mit Neyman und Pearson diesen Diskurs in teils polemischer Form (Gigerenzer et al. 2006). In den letzten Jahrzehnten wurde eine heftige Debatte über die Bedeutung von Signifikanz bzw. Effektstärke geführt (Sedlmeier 1996). Allgemeiner Konsens besteht inzwischen wohl darin, dass weder ein signifikantes Abweichen der Stichprobe, noch die aus der Stichprobe berechnete Effektstärke alleine aussagekräftig für die Bedeutung eines Effekts sind. Es hat sich die Praxis durchgesetzt, beides anzugeben. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass auch dieses Vorgehen problematisch ist und wie stattdessen durch die Verbindung beider Größen zu einer einzigen statistischen Kenngröße das Problem gelöst werden könnte.

1. Das übliche Vorgehen

Angenommen mit einem statistischen Test soll ermittelt werden, ob ein in einer Population normalverteiltes Merkmal mit bekanntem Mittelwert μ_{Pop} und Streuung σ durch eine Behandlung auf ein höheres Niveau $\mu_{bePop} > \mu_{Pop}$ gehoben werden kann, so wird üblicherweise nur eine Stichprobe der Größe n behandelt und schließlich geprüft, ob deren Mittelwert $\mu_{Stichprobe}$ mit der Annahme $\mu_{bePop} \leq \mu_{Pop}$ hinreichend unvereinbar erscheint. Dazu wird anhand einer Prüfverteilung – in diesem Fall eine Normalverteilung der Streuung $\sigma_\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – geprüft, ob $\mu_{Stichprobe}$ außerhalb eines Konfidenzbereiches liegt. Da σ_μ mit wachsendem n beliebig klein gemacht werden kann, werden bei großem n selbst irrelevant kleine Effekte signifikant. Signifikanz sagt also nichts über die Relevanz einer Behandlung aus. Entscheidend ist vielmehr die sogenannte Effektstärke ε, im Wesentlichen also der Mittelwertsunterschied μ_{bePop} - μ_{Pop}, der um Skalenunabhängigkeit zu erreichen an der Populationsstreuung relativiert wird: $\varepsilon = \frac{\mu_{bePop} - \mu_{Pop}}{\sigma}$. Diese Effektstärke ist ebenso wenig bekannt wie μ_{bePop}. Deshalb kann nur ein Schätzwert $\frac{\mu_{Stichprobe} - \mu_{Pop}}{\sigma}$ angegeben werden.

2. Das Problem

Der Schätzwert für ε ist ebenso wie $\mu_{Stichprobe}$ ein Artefakt des Zufalls, der durch den Hypothesentest in keiner Weise abgesichert wird. Die Angabe beider Größen erweckt leicht den Eindruck, dass die Signifikanz als Anhaltspunkt dafür dienen könnte, den Schätzwert für die Effektstärke ernst zu nehmen. Das ist aber eine sehr gefährliche Missinterpretation. In Wirklichkeit ist nicht viel erreicht, denn,

- das was nicht interessiert, ein unter Umständen irrelevant kleiner Effekt, wird statistisch abgesichert und
- das was interessiert, die Effektstärke, schätzt man ohne jegliche statistische Absicherung.

3. Lösungsvorschlag: Absicherung einer Mindesteffektstärke

Das Problem könnte dadurch gelöst werden, dass anstelle irgendeines, eventuell auch irrelevanten Unterschieds ein relevanter Mindestunterschied statistisch abgesichert wird. Dazu genügt es natürlich nicht zu prüfen, ob die Stichprobe mit der klassischen Nullhypothese, dass die Behandlung keinerlei Verbesserung des Merkmals bewirkt, hinreichend unvereinbar scheint. Vielmehr muss geprüft werden, ob sie sogar mit der Hypothese unvereinbar ist, die Verbesserung sei höchstens irrelevant. Denn dann würde man sinnvoller weise davon ausgehen, dass die Behandlung mindestens eine relevante Verbesserung bewirkt. Um zu prüfen, welche Hypothese gerade noch auf dem 5% -Niveau abgelehnt werden kann, verschiebt man die Prüfverteilung aus ihrer üblichen Position (Abb.1) soweit nach rechts, dass die Grenze des Konfidenzbereichs mit dem Stichrobenmittelwert zur Deckung kommt (Abb. 2).

Da bei einer behandlungsbedingten Erhöhung des Mittelwerts um weniger als $d_{5\%}$ ein solches bzw. höheres Stichprobenergebnis in weniger als 5% der Fälle zu erwarten wäre, geht man sinnvoller weise davon aus, dass für die behandelte Population $\mu_{bePop} \geq \mu_{5\%}$ gilt (vgl. Abb.2). $\varepsilon_{5\%} = d_{5\%} / \sigma$ stellt also einen auf dem 5%-Niveau abgesicherten und damit in gewissem Sinne verlässlichen Mindesteffekt dar, der mit der Behandlung erreicht wird.

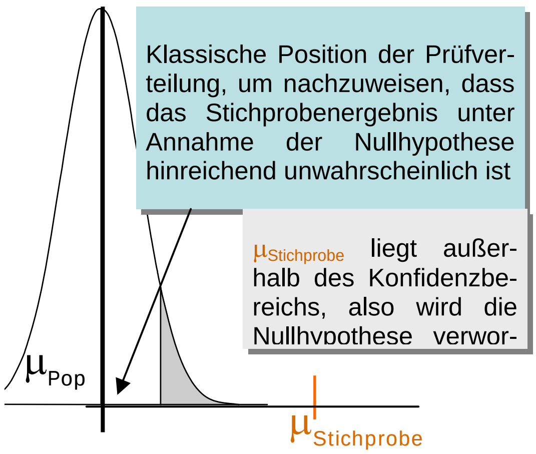


Abb. 1

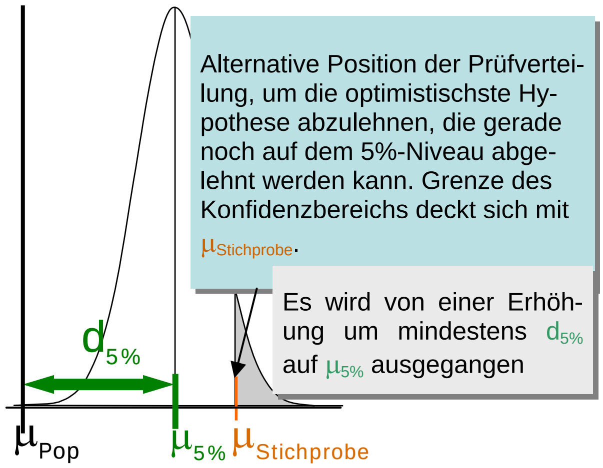
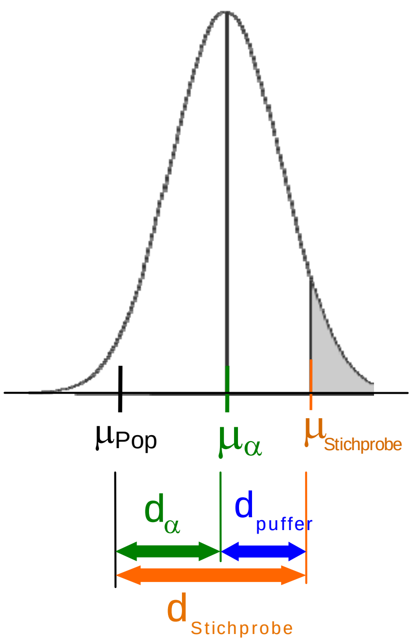


Abb.2

4. Berechnung der abgesicherten Effektstärke ε_α



Die abgesicherte Erhöhung d_α ist vom angestrebten Sicherheitsniveau α abhängig. Je höher dieses ist, umso größer wird der Sicherheitspuffer d_{Puffer} und umso kleiner die abgesicherte Distanz $d_\alpha .= d_{Stichprobe} - d_{Puffer}$. Der Sicherheitspuffer beträgt für $\alpha = 5\%$ etwa $1{,}6 \cdot \sigma_\mu$, für $\alpha = 1\%$ bereits etwa $2{,}3 \cdot \sigma_\mu$. Allgemein liefert die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung das entsprechende Vielfache des Standardfehlers. Es gilt also $d_{puffer} = -z(\alpha) \cdot \sigma_\mu$.

Damit erhält man für die auf dem α-Niveau abgesicherte Effektstärke:

$$\boxed{\varepsilon_\alpha = \frac{d_{Stichprobe} - \left(-z(\alpha) \cdot \sigma_\mu\right)}{\sigma}}$$

5. Zusammenhang der aus der Stichprobe geschätzten mit der abgesicherten Effektstärke

Setzt man $\sigma_\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ in obige Gleichung ein, so erhält man:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{d_{Stichprobe} - \left(-z(\alpha) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\sigma} = \frac{d_{Stichprobe}}{\sigma} - \frac{-z(\alpha)}{\sqrt{n}}$$

mit $\varepsilon_{\text{Stichprobe}} = \frac{d_{\text{Stichprobe}}}{\sigma}$ ergibt sich

$$\boxed{\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_{\text{Stichprobe}} - \frac{-z(\alpha)}{\sqrt{n}}}.$$

Die abgesicherte Effektstärke berechnet sich also als Differenz aus der auf Basis der Stichprobe geschätzten Effektstärke und eines Korrekturgliedes, welches besonders dann bedeutsam wird, wenn n klein bzw. das Sicherheitsbedürfnis groß ist.

6. Ein Beispiel

Angenommen für einen Versuch an 25 Probanden wurde das Signifikanz-Niveau auf 5% festgelegt und der aus den Versuchdaten berechnete p-Wert beträgt 1,3%. Damit einher geht ein aus dem Stichprobenwert geschätzter mittlerer Effekt (ε = 0,44). Diese Effektstärke könnte aber leicht ein Zufallsartefakt sein. Auf dem 5%-Niveau ließe sich, wie folgende Rechnung zeigt, nur eine sehr kleine Effektstärke absichern:

$$\varepsilon_{5\%} = \varepsilon_{\text{Stichprobe}} - \frac{1,6}{\sqrt{n}} = 0,44 - \frac{1,6}{\sqrt{25}} = 0,44 - 0,32 = 0,12.$$

7. Zusammenfassung

Die abgesicherte Effektstärke stellt eine sowohl leicht zu berechnende als auch leicht zu interpretierende Kenngröße dar. Sie sichert nicht nur irgendeinen eventuell nur irrelevanten insbesondere unbekannten Unterschied, sondern konkrete Effekte mittels des Signifikanztests ab. Insbesondere bei kleinen Effekten oder niedrigen Probandenzahlen vermeidet diese Kenngröße Überinterpretationen der Stichprobenergebnisse.

Literatur

[1] Gerd Gigerenzer, Zeno Swijtink, Theodore Porter u. a.: Das Reich des Zufalls: Wissen zwischen Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten und Unschärfen. Spektrum Akademischer Verlag 1999

[2] Peter Sedlmeier: Jenseits des Signikanztest-Rituals: Ergänzungen und Alternativen. In: Methods of Psychological Research Online 1996, Vol.1, No.4

http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Vortrag/GDM2008

Mathias HATTERMANN, Gießen

Der Zugmodus in dreidimensionalen dynamischen Geometriesystemen

Dynamische Geometriesysteme (DGS) im zweidimensionalen Raum sind eines der am Besten erforschten Gebiete der Mathematikdidaktik (Laborde 2006). DGS sind durch drei fundamentale Eigenschaften, den Zugmodus, die Ortslinien-/Ortsflächenfunktion und die Makrokonstruktionsmöglichkeit charakterisiert. Sie sind in der mathematikdidaktischen Community akzeptiert und vor allem Euklid DynaGeo und Cinderella fördern bereits den Mathematikunterricht in deutschen Klassenzimmern. Seit einiger Zeit sind zwei dreidimensionale Systeme, Cabri 3D und Archimedes Geo3D auf dem Markt, welche von Jean-Marie Laborde bzw. Andreas Goebel entwickelt wurden. Der Zugmodus, der Dynamik in die bisher starre Geometrie bringt, stellt die bedeutendste Funktion in DGS-Systemen dar. Aus diesem Grund wurde im Juli 2007 an der JLU-Gießen eine Studie durchgeführt, um erste Einblicke in das Nutzerverhalten von Studierenden in 3D-Umgebungen, zu erhalten.

Study Design

Warum können Ergebnisse, welche bspw. den Einsatz des Zugmodus in 2D-Umgebungen betreffen, nicht ohne weitere Untersuchungen in den 3D-Raum übertragen werden? Zu dieser Frage ist zu beachten, dass dem Anwender in 2D-Umgebungen mit Hilfe seines Eingabemediums, der Maus oder des Touchpads, eine volle Variabilität zur Verfügung steht, welche in 3D-Umgebungen nur noch eingeschränkt vorhanden ist. Aufgrund der Zweidimensionalität der Tischplatte, auf der die Maus bewegt wird, muss eine bestimmte Taste im jeweiligen Programm gedrückt werden, um auch Punkte im Raum zu erreichen, die außerhalb der Ebene liegen, in der zunächst gezogen werden konnte.

An der Studie nahmen 15 Studierende des Lehramtsstudiengangs für Realschulen teil, welche sich zwischen dem fünften und siebten Semester befanden. Die Probanden verfügten über Vorkenntnisse in 2D-DGS, da sie alle die Veranstaltung „Computer im Mathematikunterricht“ besuchten, in der sie u.a. mit Euklid DynaGeo arbeiteten. Im Verlauf einer Sitzung des Seminars „Kegelschnitte mit DGS“ arbeiteten die Probanden mit Cabri 3D, um die verschiedenen nichtentarteten Kegelschnittkurven auf experimentellem Wege, als Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, zu erkunden. Mit Archimedes Geo3D hatten die Probanden keine Erfahrung. Die Studierenden waren in sieben Gruppen eingeteilt, wobei sechs Gruppen jeweils aus zwei Teilnehmern bestanden und die siebte Gruppe aus drei Teilnehmern zusammengesetzt war. Vier Gruppen arbeiteten mit Cabri 3D, während den übrigen Gruppen Archimedes Geo3D zur Problemlösung zur Verfügung stand. Die Gruppen arbeiteten räumlich getrennt voneinander, wobei die Handlungen der Studierenden auf dem Bildschirm mit Hilfe der screen-recording software „Camtasia“ aufgenommen wurden und zudem eine Webcam installiert war, welche Bild und Tonaufnahmen von den Studierenden zur Analyse bereitstellte.

Forschungsfragen

Das Hauptinteresse lag zunächst darin, Studierende bei einem Lösungsprozess in 3D Systemen zu beobachten und dabei den Gebrauch des Zugmodus im Blick zu behalten. Es stellten sich folgende Fragen: Benutzen Studierende die Softwareumgebung überhaupt, wenn Sie Papier und Bleistift und reale Flächenmodelle zur Verfügung haben, die ebenso zur Lösung des Problems genutzt werden können? Benutzen die Probanden den Zugmodus und wenn ja in welcher Weise?

Aufgaben

Aufgabe eins bestand darin, einen Würfel zu konstruieren, ohne die in den Programmen zur Verfügung stehenden Makros zu benutzen. Die Aufgabe wurde gestellt, damit sich die Probanden anhand einer einfachen Aufgabe mit der neuen Softwareumgebung vertraut machen sollten. Auf die Ergebnisse von Aufgabe eins wird deshalb nicht weiter eingegangen. Die interessantere Aufgabe 2 hatte den folgenden Wortlaut: „Ein Kommilitone stellt folgende Thesen auf: „ Man kann einen Würfel derart mit einer Ebene schneiden, dass als Schnittfigur von Würfel und Ebene a) ein gleichschenkliges Dreieck, b) ein gleichseitiges Dreieck, c) ein rechtwinklig, gleichschenkliges Dreieck und d) ein regelmäßiges Sechseck entsteht.“ Konstruieren Sie nun mit Hilfe der bereits vorhandenen Funktion „Würfel“ einen Würfel, überprüfen Sie experimentell die obigen Aussagen und begründen Sie ihre gefundenen Ergebnisse.“

Bei dieser Aufgabe interessante Fragen waren die folgenden: Versuchen die Pobanden sich die Schnittfiguren vorzustellen ohne die Hilfe des Computers oder benutzen sie vielleicht Papier und Bleistift zur Lösungsfindung? Benutzen Sie den Zugmodus bei der Bearbeitung der Aufgabe und wenn ja in welcher Weise? Es existieren verschiedene Möglichkeiten zur Festlegung der Schnittebene. Durch die Definition der Ebene mit Hilfe dreier beliebiger Punkte im Raum ist bspw. ein kontrolliertes Ziehen der Ebene nicht möglich, demgegenüber besteht die Möglichkeit, drei geeignete bewegliche Punkte auf den Würfelkanten zur Definition der Ebene zu benutzen, um einen kontrollierten Zugprozess zu ermöglichen.

Ergebnisse

Zunächst ist zu erwähnen, dass alle Gruppen sowohl das gleichschenklige als auch das gleichseitige Dreieck konstruieren konnten. Dagegen bereiteten den Studierenden das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck (welches als Schnitt nicht existiert) und das gleichmäßige Sechseck (welches existiert) mehr Probleme. Zwei Gruppen äußerten die Vermutung, dass das gleichseitig-rechtwinklige Dreieck nicht existiert, sie konnten jedoch diese Behauptung nicht begründen. Einer weiteren Gruppe gelang es, die Nichtexistenz zu begründen, während eine Gruppe diese Frage nicht beantwortete. Drei Gruppen behaupteten, dass das gleichseitig-rechtwinklige Dreieck existiert, wobei zwei der Gruppen die Messfunktion für Winkel von Cabri 3D in Anspruch nahmen. Cabri zeigt aufgrund der mathematischen Modellierung einen Winkel von 90 Grad an, obwohl dieser kleiner ist. Hierbei entstanden interessante Diskussionen, am Ende gewann jedoch die Autorität des Computers und das gleichseitig-rechtwinklige Dreieck wurde als existent angesehen. Weiterhin fanden drei der Gruppen das regelmäßige Sechseck.

Ein erwähnenswertes Ergebnis betrifft die Nutzung des realen Flächenmodells des Würfels, welches den Probanden zur Verfügung stand. Es ist eindeutig festzustellen, dass die Nutzung des Realmodells die Nutzung der Softwareumgebung überwiegt. Darüber hinaus benutzten die Probanden die „alte Strategie“, indem sie versuchten sich die Schnittfiguren anhand des Realmodells und eines Blatt Papiers, welches die Schnittebene repräsentierte, vorzustellen. In diesem Fall diente die Software nur zur Validierung der Vermutungen, welche zuvor am Realmodell generiert wurden. Zur Überprüfung wurde eine Ebene durch drei feste Punkte definiert und die Schnittfigur exploriert. Teilweise benutzten die Studierenden auch die Bildschirmfigur als „Realmodell“, anstatt in der Softwareumgebung zu arbeiten. Hierbei kam es vor, dass die Probanden mit einem Blatt Papier vor dem Bildschirm hantierten, um sich Schnittfiguren vorzustellen. Weiterhin ist zu bemerken, dass die Studierenden Probleme bei der Verwendung des Zugmodus hatten, es konnte anhand der Aufzeichnungen nicht geklärt werden, ob der Zugmodus bereits in 2D-Umgebungen nicht durchschaut wurde oder ob die Probanden nicht in der Lage waren, die bereits gemachten Erfahrungen auf den 3D-Raum zu übertragen. So wurden bspw. von einer Gruppe viele Punkte auf den Kanten konstruiert und eine Ebene durch drei willkürlich gewählte Punkte definiert. Anschließend wurde die Ebene gelöscht und drei andere Punkte zur Definition der nächsten Ebene herangezogen. Einige Zitate aus den Aufzeichnungen belegen weitere Schwierigkeiten: „ Ich weiß nicht, ich habe nicht genügend Vorstellungskraft, um die Aufgabe zu lösen.“, „Wir können die Ebene nicht ziehen, da wir feste Punkte zur Definition der Ebene brauchen.“, „Gibt es eine Funktion, mit der man eine Ebene ziehen kann?“. Das erste Zitat belegt die Tatsache, dass der Proband zur Lösung des Problems nur die Möglichkeit des Vorstellens der Schnittfigur sieht und ihm die Möglichkeiten der Software, die ihm beim Lösen behilflich sein könnten, nicht bewusst sind. Die Zitate zeigen, dass das „Instrument“ des Zugmodus zur sinnvollen Nutzung nicht ausreichend verstanden wurde.

Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, dass Studierende - trotz des Vorhandenseins von Vorwissen in 2D-Systemen - den Zugmodus ohne Instruktion nur in Ausnahmefällen benutzen. Dieses Resultat ist mit den Ergebnissen von Rolet (1996) und Sinclair (2003) vergleichbar. Weiterhin ist die Frage zu klären, warum Studierende das Flächenmodell des Würfels zur Problemlösung präferieren. Nach der Analyse des vorhandenen Datenmaterials kann man folgende Hypothese aufstellen: Aufgaben, die den Probanden leicht fallen, werden im Kopf gelöst und in der Computerumgebung mit Hilfe einer fest definierten Ebene verifiziert. Für die Probanden schwierigere Aufgaben werden am realen Flächenmodell außerhalb der Computerumgebung diskutiert. Somit gilt es in weiteren Untersuchungen zu klären, in welchem Maß die Probanden geschult werden müssen, um die Vorteile der Computersoftware zu erkennen und kompetent mit dem Zugmodus zu operieren.

Literatur

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense.

Rolet, C. (1996). *Dessin et figure en géométrie: analyse et conceptions de future enseignants dans le contexte Cabri-géomètre*. (unpublished doctoral dissertation, University of Lyon1). Lyon, France.

Schumann, H. (2007). Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Ein Lehr- und Lernbuch der interaktiven Raumgeometrie mit Cabri 3D. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Sinclair, M. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics, 52(3)*, 289-317.

Petra HAUER-TYPPELT, Wien

Das Nash-Gleichgewicht – ein zentrales Lösungskonzept der Spieltheorie

1. Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien

Ob Koalitionsabkommen von Regierungen halten, ob Fördermengen- oder Preisabsprachen gebrochen werden – viele Situationen aus Alltag, Wirtschaft oder Politik lassen sich spieltheoretisch modellieren. Kommt es gelegen, verwenden auch Medien zur Verstärkung ihrer eigenen Prognosen gerne solche Modelle, die oft direkt zum spieltheoretischen Klassiker „Gefangenendilemma“ führen. Werfen wir daher den Blick zunächst auf dieses wohl populärste Beispiel der Spieltheorie, in seinem klassischen Gewand. Zwei Gefangene werden eines gemeinsamen Verbrechens beschuldigt. Es ist ihnen nicht lückenlos nachzuweisen, allerdings liegen Indizien vor. Die beiden Gefangenen sollen nun getrennt voneinander verhört werden, dazu wird ihnen folgender Handel vorgeschlagen: Schweigen beide Gefangene, so erhalten sie wegen nachweisbarer geringfügigerer Delikte jeweils 2 Jahre Haft. Gesteht nur einer der beiden, während der andere schweigt, bekommt er keine Haftstrafe. Derjenige, der schweigt, bekommt 5 Jahre Haft. Gestehen beide Gefangene, erhält jeder eine Haftstrafe von 4 Jahren. Jeder Gefangene muss alleine, völlig unabhängig vom anderen, entscheiden, wie er nun aussagt. Die übliche Darstellung solcher Spiele erfolgt mit einer Bimatrix (Abb. 1). Die Strategie *Gestehen* ist für beide Gefangene die jeweils beste Antwort auf beide möglichen Strategien des Gegners. Als **beste Antworten** werden jene Strategien bezeichnet, welche die höchste Auszahlung auf die jeweilige Strategie des Gegners einbringen. In der Bimatrix sind sie fett gedruckt.

		Gefangener 2	
		gestehen	schweigen
Gef. 1	geste-hen	**– 4** **– 4**	– 5 **0**
	schwei-gen	**0** – 5	– 2 – 2

Abb. 1

Damit ist auch optisch zu erfassen, dass mit der Strategienkombination (*Gestehen, Gestehen*) beste Antworten aufeinander treffen. Dieses Aufeinandertreffen von besten Antworten wird als ausgeglichener Zustand angesehen. Denn keiner der beiden Spieler kann durch einseitiges Abweichen von seiner Strategie seine Auszahlung erhöhen. Er würde sie sogar verringern, d. h. weniger Lebensjahre in Freiheit verbringen. In diesem Sinn ist die Strategienkombination (*Gestehen, Gestehen*) als Lösung des Spiels zu betrachten. Dieses Lösungskonzept, basierend auf dem Ermitteln des Aufeinandertreffens von besten Antworten und damit dem Finden des so genannten **Nash-Gleichgewichts** geht auf J. F. Nash zurück. Es fällt natürlich auf, dass beide Gefangene mit der Strategienkombination (*Schweigen, Schweigen*) eine höhere Auszahlung erhalten hätten. Allerdings wäre dann jeder für sich mit seiner Wahl unzufrieden, denn hätte er doch *Gestehen* gewählt (während der andere schweigt), wäre er sogar ohne Haft davon gekommen. Darin besteht das „Dilemma“ der Situation, an dem eine Absprache vor dem Verhör gar nichts ändern würde. Denn im spieltheoretischen Konzept nach Nash wird immer danach getrachtet, die höchste Auszahlung aus der Sicht *eines* Spielers zu erreichen. *Gestehen* ist gerade auch wenn der andere schweigt, beste Antwort – man kommt ohne Haft davon.

Einsichten aus dem klassischen Gefangenendilemma lassen sich auf andere, realitätsnahe Situationen übertragen, die sich besonders im Sinne eines fächerübergreifenden Unterrichts zur Behandlung im Schulunterricht anbieten. Die Analyse solcher Situationen erfordert Verbalisieren und regt zum Interpretieren und Diskutieren an, in der Folge auch zum Modellieren. Als Beispiel sei hier die Modellierung der in Österreich momentan aktuellen Frage „Hält die Regierungskoalition?“ (Abb. 2) gegeben. Das Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht in der Strategienkombination (*bleibt stur, bleibt stur*). In der Abbildung ist es durch Fettdruck der entsprechenden Auszahlungen, die als subjektive Nutzen zu interpretieren sind, gekennzeichnet. Bekannte Beispiele wie das „Opecspiel“ oder „Wettrüsten“ schlagen in dieselbe Kerbe.

		Partei 2	
		bleibt stur	gibt nach
Partei 1	bleibt stur	**–1** **–1**	–2 **3**
	gibt nach	**3** –2	2 2

Abb. 2

Besonders kreativ gehen Schüler/innen an Aufgabenstellungen heran, die aus ihrem direkten Lebensumfeld stammen. Das folgende „Schüler-Lehrerin-Hausübungsspiel“ eignet sich gut zur Behandlung mit sich ändernden Matrixeinträgen, die es zu interpretieren gilt. In der ersten Version des Spiels (Abb. 3) liegt eine gute Lernsituation vor. Die Auszahlungen für den Schüler sind immer für das Erstellen der Hausübung (HÜ) höher, ob die Lehrerin kontrolliert (2 > –2) oder nicht (1 > 0). Aus Sicht der Lehrerin ist immer Kontrollieren beste Antwort und somit dominante Strategie. Damit stellt sich mit der Strategienkombination (*macht HÜ, kontrolliert*) das

Version I		Lehrerin	
		kontrolliert	kontrolliert nicht
Schüler	verweigert HÜ	**1** –2	0 0
	macht HÜ	**2** **2**	1 **1**

Abb. 3

Nash-Gleichgewicht ein. Wie wirken sich Änderungen in den Matrixeinträgen aus? Im Unterricht bietet sich einerseits die Möglichkeit, Matrizen mit (teilweise) geänderten Einträgen zu interpretieren und andererseits selbst durch Ändern der Einträge Situationen zu modellieren. In der Version II (Abb. 4) des Spiels liegt eine nun nicht mehr erfreuliche Lernsituation vor. Die fett gedruckten Matrixeinträge markieren wieder die besten Antworten der Spieler auf die Strategie des Gegners. Es treffen in keinem der vier möglichen Felder beste Antworten aufeinander. Damit liegt kein Nash-Gleichgewicht in bis jetzt gewohnter Form vor, nämlich ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. Mit dem Nash-Konzept lassen sich aber auch solche Situationen lösen.

Version II		Lehrerin	
		kontrol-liert	kontrolliert nicht
Schüler	verwei-gert HÜ	**4** –1	0 **4**
	macht HÜ	1 **1**	**2** –1

Abb. 4

2. Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

Versetzen wir uns in die Situation des Schülers: Er wird versuchen, die Wahrscheinlichkeit, mit der die Lehrerin kontrolliert, einzuschätzen. Gehen wir also davon aus, dass die Lehrerin mit einer Wahrscheinlichkeit q kontrolliert. Welche Auszahlung hat der Schüler zu erwarten? Verweigert er die Hausübung, erhält er die Auszahlung –1 mit einer Wahrscheinlichkeit von q und die Auszahlung 4 mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-q$, damit insgesamt: $u_S = -5q + 4$. Macht der Schüler hingegen die Hausübung, hat er die Auszahlung $u_S = 2q - 1$ zu erwarten. Die grafische Darstellung dieser beiden linearen Funktionen visualisiert die Situation (Abb. 5): Die beiden Geraden schneiden einander bei $q = 5/7$, dort liefert jede Strategie die gleiche Auszahlung ($u_S = 3/7$). Ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrerin kontrolliert, kleiner als 5/7, bringt das Verweigern (V) der Hausübung die größere Auszahlung und ist damit beste Antwort. Ist $q > 5/7$ bringt das Machen (M) der Hausübung die höhere Auszahlung ein. Analog analysieren wir nun aus Sicht der Lehrerin. Nehmen wir an, der Schüler verweigert die Hausübung mit einer Wahrscheinlichkeit von p. Damit hat die Lehrerin bei der Wahl der

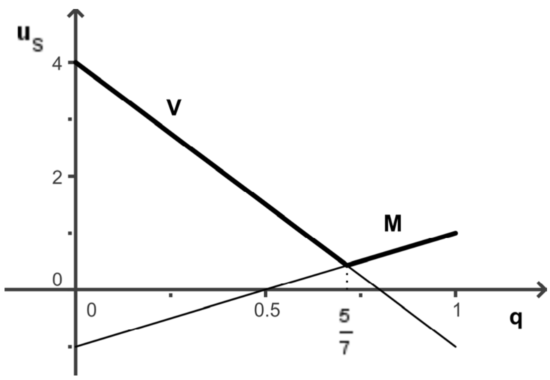


Abb. 5

Strategie *Kontrollieren* eine Auszahlung von $u_L = 3p + 1$ zu erwarten. Entscheidet sie sich dafür, nicht zu kontrollieren, hat sie mit $u_L = -2p + 2$ zu rechnen. Wie die Grafik (Abb. 6) zeigt, sollte die Lehrerin, falls der Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 1/5 die Hausübung verweigert, kontrollieren (K). Ist die Wahrscheinlichkeit kleiner als 1/5, sollte sie nicht kontrollieren (NK). Für den Fall p = 1/5 ist es egal für welche Strategie sie entscheidet (u_L = 8/5).

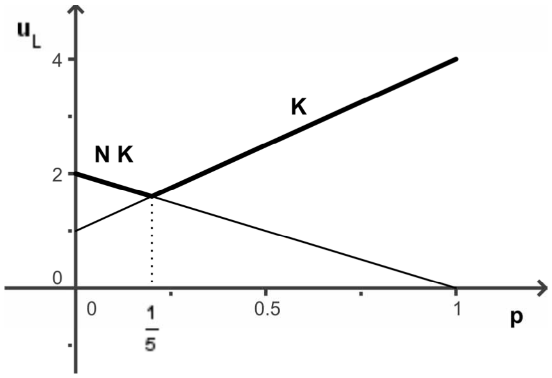


Abb. 6

Wir fassen die Ergebnisse der Überlegungen nun in der **Grafik der Beste-Antwort-Linien** zusammen (Abb. 7): Das entstandene Bild veranschaulicht zunächst das Ergebnis unserer Suche nach einem Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. In den Ecken des Einheitsquadrates, die der Kombination von reinen Strategien entsprechen, haben die Linien keinen Schnittpunkt, beste Antworten treffen nicht aufeinander. Es gibt aber einen Schnittpunkt im Inneren des Einheitsquadrates, nämlich bei (5/7, 1/5). In diesem Punkt treffen also beste Antworten aufeinander, damit liegt ein Nash-Gleichgewicht vor. Kein Spieler kann durch einseitiges Abweichen seine Auszahlung verbessern. Im Gegensatz zu Nash-Gleichgewichten in reinen Strategien, werden hier die Strategien nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gespielt. Es handelt sich um ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien**. Im Unterricht muss es nun daran gehen, diese Lösung zu interpretieren. Was bedeutet sie? Wohl kaum eine Verhaltensempfehlung oder -erklärung für ein einzelnes Spiel. Erst im wiederholten Spiel erschließt sich der Sinn. Dazu sei auf den in direktem Zusammenhang mit diesem Beitrag stehenden Artikel von Ch. Ableitinger im vorliegenden Band verwiesen.

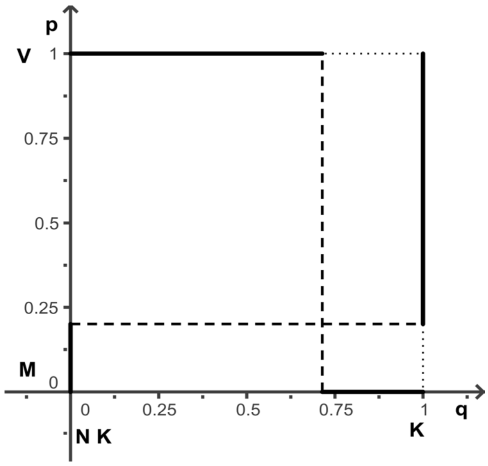


Abb. 7

Literatur

Sieg G.: Spieltheorie. Oldenburg Verlag, München, 2005

Sigmund K.: Spielpläne. Hoffmann und Campe Verlag, Hamburg, 1995

Wiese H.: Entscheidungs- und Spieltheorie. Springer Verlag, Heidelberg, 2002

Reinhold HAUG, Freiburg

Problemlösen Lernen mit interaktiven Lernumgebungen Eine empirische Studie zur Förderung heuristischer Strategien durch den Einsatz Dynamischer Geometrie-Software (DGS)

In den letzten Jahren haben sich die Nutzungsmöglichkeiten von Computern im Unterricht und speziell im Mathematikunterricht enorm erweitert. Der Markt für entsprechende Anwendungen (für den Unterricht, aber in besonderem Maß auch für die häusliche Verwendung) befindet sich in einem stetigen Wachstum.

Der Dialog über den vernünftigen Einsatz des Computers im Mathematikunterricht ist allerdings bei weitem noch nicht abgeschlossen. Die didaktische Diskussion hält an und wird sogar noch intensiver und zugleich extensiver geführt (vgl. Hole 1998, Weigand/Weth 2002, Barzel/Hussmann/Leuders 2005). Dabei wird in den didaktischen Publikationen die prinzipielle Frage, ob Computer im Mathematikunterricht einbezogen werden sollten, weitgehend affirmativ beantwortet.

Hinsichtlich dieser aktuellen Entwicklung war der Ausgangspunkt dieser Dissertation die bis dahin erschienenen Qualitativen Studien von Marades & Gutierrez (2000), Laborde (2000), Hölzl (1994 & 1999) sowie die quantitativen Studien von Gawlick (2000). Diese wurden konsequent evaluiert und im Hinblick auf die Förderung von heuristischen Problemlösestrategien in interaktiven Lernumgebungen (mit einer Dynamischen Geometrie-Software) untersucht. Das Ergebnis dieser Untersuchung war die Feststellung, dass eine neu gestaltete Lernumgebung folgende Aspekte (Ergebnisse) der vorangegangenen Studien berücksichtigen sollte:

- Lernprozesse von Schülern, die im Zusammenhang mit Dynamischer Geometrie-Software stattfinden müssen entschleunigt werden.
- Die Lernumgebung muss so gestaltet werden, dass die Lernenden immer wieder mit der Aufgabenstellung konfrontiert werden, da ansonst die Gefahr besteht, dass sie angesichts der vielen technischen Möglichkeiten (Werkzeuge) eine Art „Zielverlust“ erleiden.
- Die Lernenden müssen bei der Einführung in eine Dynamische Geometrie-Software ein Verständnis für die spezifischen dynamischen Repräsentationsformen geometrischer Objekte entwickeln.
- Die Lernumgebung sollte nach Möglichkeit so aufgebaut sein, dass sie immer wieder Prozesse zur Reflexion der eigenen Lernwege anstößt.

Auf der Grundlage dieser ersten Erkenntnisse wurden anschließend folgende Forschungsfragen formuliert:

1. Können heuristische Strategien des Problemlösens durch den Einsatz einer Dynamischen Geometrie-Software gefördert werden?
2. Begünstigt das vorstrukturierte Reflektieren sowie ein geeigneter Medienwechsel („Vom Computer zum Papier“) die Qualität des Problemlöseprozesses?
3. Welche Art der Lernorganisation unterstützt selbstständige Lernprozesse innerhalb interaktiver Lernumgebungen?

Als nächster Schritt mussten die heuristischen Problemlösestrategien identifiziert und festgelegt werden. So wurden nach einem längeren Evaluationsprozess drei heuristische Strategien gewählt (*Vermutungen aufstellen* / *Invarianten erkennen* / *Hilfslinien verwenden*), die einerseits als wichtige Problemlösestrategien betrachtet werden und andererseits gerade in der Dynamisierung durch eine Geometrie-Software ihre volle Wirkung entwickeln können.

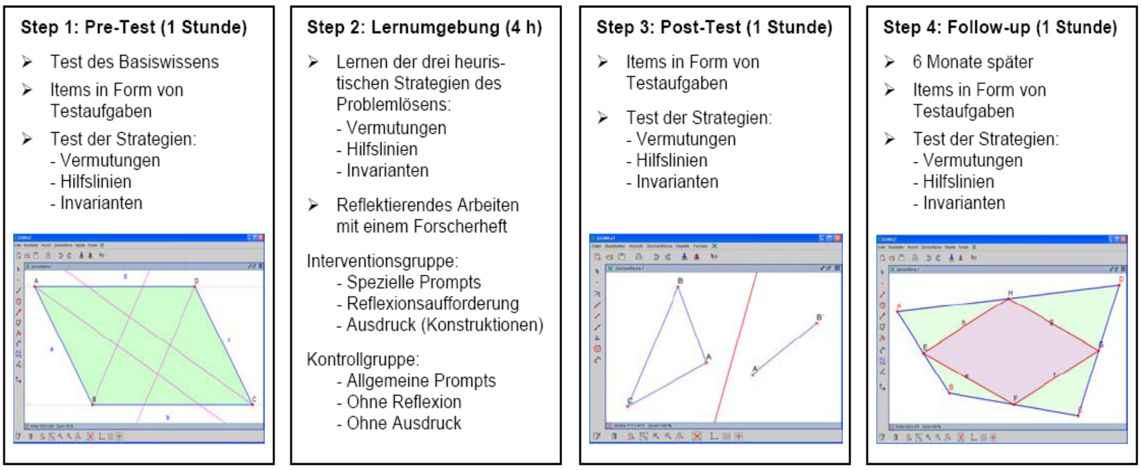
Bei dem Versuch diese drei Problemstrategien mit dem Modell des multimedialen Lernens von Mayer (2005) in Verbindung zu bringen, erkennt man schnell, dass sich diese den vier Prozessklassen (Selektion / Organisation / Transformation / Integration) zuordnen lassen. Da der Lernerfolg innerhalb der einzelnen Prozessklassen sehr stark von dem Vorwissen der Lernenden abhängig ist, werden hier Elaborationsprozesse nicht als eine weitere Prozessklasse angesehen. Vielmehr wird davon ausgegangen, dass innerhalb jeder Prozessklasse Elaborationsprozesse ablaufen. Die anschließende Tabelle verdeutlicht deshalb, wie die drei ausgewählten Problemlösestrategien beim Umgang mit den verschiednen Werkzeugen umgesetzt werden.

Prozessklassen	Lernstrategie für den Umgang mit Werkzeugen (DGS)
Selektion & Organisation	Die Konstruktion explorativ erkunden und relevante Zusammenhänge in Beziehung zueinander setzen. Dokumentation erster funktionaler Abhängigkeiten und weiterer Erkenntnisse in einem Forscherheft.
Transformation & Integration	Vermutungen aufstellen und überprüfen Invarianten als besondere Eigenschaften einer Konstruktion erkennen. Beim Konstruieren Hilfslinien verwenden. Heuristische Arbeitsweisen mit Hilfe von vorstrukturierten Prompts reflektieren und in einem Forscherheft dokumentieren

Damit diese heuristischen Strategien – *Vermutungen aufstellen* / *Invarianten erkennen* / *Hilfslinien verwenden* – auch substanziell gefördert werden, wurde neben den Erkenntnissen der vorangegangenen Studien vor allem die *Reflexion der eigener Lernprozesse*, der *Medienwechsel* (zwischen Computer und Papier) und die *Lernorganisation* fokussiert und versucht bei der Entwicklung der interaktiven Lernumgebung mit einzubeziehen. Hierbei stellte sich heraus, das vor allem vorstrukturierte Prompts die immer wieder zu Schreibanlässen auffordern eng in Zusammenhang mit produktiven Lernaktivitäten stehen und somit das Schreiben von Forscherheften fördern. Der Medienwechsel (Ausdruck von Konstruktionen, die teilweise als Arbeitsprodukte in das Forscherheft eingeklebt wurden) als auch der Wechsel bei den Lernenden zwischen Papier und Maus zeigte wiederum, dass Lernprozesse verlangsamt und Prozesskompetenzen wie Kommunizieren, Diskutieren und Argumentieren ein fester Bestandteil der dialogischen Partnerarbeit wurden.

Um diese interaktive Lernumgebung in einer Interventionsstudie zu validieren, wurde eine klassisches Pre- und Post-Test Untersuchungsdesign entwickelt und mit einem Follow-up Test noch erweitert. Das Resultat war ein vier Stufen Design, wie es in der folgenden Abbildung dargestellt wird:

Untersuchungsdesign (n=128):



Als erster Schritt innerhalb des vierstufige Untersuchungsdesign wurden Items in Form von dynamischen Testaufgaben für die drei heuristischen Problemlösestrategien (*Vermutungen aufstellen* / *Invarianten erkennen* / *Hilfslinien verwenden*) entwickelt und so lange pilotiert bis die Reliabilität von Cronbachs $\alpha \geq 0.7$ war (Werte die ≥ 0.7 werden in der Regel als gut bezeichnet vgl. Wirtz & Casper, 2002). Parallel hierzu wurde die Lernumgebung fertiggestellt und ebenfalls pilotiert, um alle Arbeitsblätter und dynamischen Programmoberflächen von inhaltlichen und sprachlichen Irritationen zu befreien.

In einem zweiten Schritt sollte dann das Vorwissen der einzelnen Schulkassen standardisiert werden. Hierfür wurden acht Einführungsmodule für das Programm GEONExT entwickelt, die den Lernenden die Navigation durch das Programm, die Funktionsweise der einzelnen Werkzeuge, die Zusammenhänge des Figur-Zugfigur-Konzepts sowie das Verständnis der spezifischen dynamischen Repräsentation geometrischer Objekte (z.B. die verschiedenen Punktdarstellungen) erklärten. Parallel hierzu bekamen die Lernenden eine Einführung in die dialogische Partnerarbeit, die zum einen das Arbeiten mit vorstrukturierten Forscherheften und zum anderen den kooperativen Umgang mit der Software verinnerlichen sollte.

In der Hauptuntersuchung nahmen dann drei Hauptschulen mit je zwei siebten Klassen teil, die per Losverfahren der Intervention – bzw. der Kontrollgruppe zugelost wurden (n = 130). Das Thema der Lernumgebung war die Erkundung der Achsensymmetrie.

Im Folgenden werden die vorläufigen Zwischenergebnisse der heuristischen Problemlösestrategien *Vermutungen aufstellen* / *Invarianten erkennen* / *Hilfslinien verwenden* mit Pre- und Post-Test Ergebnissen dargestellt.

Vermutungen aufstellen	M	SD
Interventionsgruppe: Pre-Test	1.09 (36,3%)	0.56
Interventionsgruppe: Post-Test	1.48 (49,3%)	0.69
Kontrollgruppe: Pre-Test	1.29 (43,0%)	0.59
kontrollgruppe: Post-Test	1.21 (40.3%)	0.59

Univariate Varianzanalyse:
F(1,118) = 20.495
p = .000**
d = .42

Hilfslinien verwenden	M	SD
Interventionsgruppe: Pre-Test	1.49 (37,3%)	1.03
Interventionsgruppe: Post-Test	2.57 (64,3%)	1.14
Kontrollgruppe: Pre-Test	1.51 (37,7%)	1.09
kontrollgruppe: Post-Test	1.98 (49.5%)	1.09

Univariate Varianzanalyse:
F(1,118) = 12.310
p = .001**
d = .32

Invarianten erkennen	M	SD
Interventionsgruppe: Pre-Test	2.37 (59,3%)	1.20
Interventionsgruppe: Post-Test	3.00 (75,0%)	1.10
Kontrollgruppe: Pre-Test	2.54 (63,5%)	1.15
kontrollgruppe: Post-Test	2.61 (65.2%)	1.17

Univariate Varianzanalyse:
F(1,118) = 7.941
p = .006**
d = .26

Literatur:

Barzel, B., Hußmann, St. & Leuders, T. (2005). Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelson.

Gawlick, Th. (2000). Eine Studie zum Einfluss des Einsatzes von DGS in anwendungsorientiertem Geometrieunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Hölzl, R. (1994). Im Zugmodus der Cabri-Geometrie**.** Interaktionsstudien und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Hölzl, R. (1999). Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software. Augsburg: Wißner-Verlag.

Hole, V. (Hrsg.). (1998). Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer: methodische und didaktische Grundfragen in der Sekundarstufe I. Donauwörth: Auer.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry software as a window on mathematical learning: empirical research on the use of Cabri-geometry. Gagatsis, Athanasios et al., 2nd Mediterranean conference on mathematics education

Marrades, R. & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. In: Educational Studies in Mathematics. An International Journal 44 (1-2), 87-125.

Mayer, R. E. (2005). The Cambridge handbook of multimedia learning. Cambridge: Cambridge University Press.

Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002). Computer im Mathematikunterricht**:** Neue Wege zu alten Zielen. Heidelberg ; Berlin : Spektrum, Akademischer Verlag.

Wirtz, M. & Caspar, F. (2002). Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität. Göttingen: Hoegrefe

Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Essen und
Reinhard OLDENBURG, Frankfurt

Selbstmoderierte Sektion ege in die Algebra

Die Methoden und Denkweisen der Algebra erschließen sich nicht von alleine. Deshalb kommt es in diesem Bereich besonders auf den unterrichtlichen Weg in die Algebra an. In der selbstmoderierten Sektion werden verschiedene Wege in die Algebra und die bisherigen Erkenntnisse dazu diskutiert.

Algebra ist die lingua franca der höheren Mathematik. Von Geometrie über Stochastik bis zu mathematischen Teilgebieten, die in der Schule nicht abgebildet werden, wird sie als selbstverständliche Grundlage benutzt. Die Funktion als Türöffner erstreckt sich auch auf die omputernutzung: omputer rechnen und über das Rechnen spricht man in Termen.

Es ist auch in der Schule möglich, zahlreiche Probleme zu behandeln, bei denen die Schüler und Schülerinnen erleben können, dass Algebra der Schlüssel zur Lösung ist. Allerdings sind viele dieser Erfolgserlebnisse erst später möglich, wenn ein umfangreicher algebraischer Werkzeugkasten zur Verfügung steht. David Tall hat das in seinem oft zitierten Satz zum Ausdruck gebracht: There is a stage in the curriculum when the introduction of algebra may make simple things hard, but not teaching algebra will soon render it impossible to make hard things simple. (D. Tall, M. Thomas: Encouraging Versatile Thinking in Algebra using the omputer, Educational Studies in Mathematics, 22 2, 125–147)

Es kommt beim Einstieg in die Algebra daher darauf an, den Kindern sinnvolles Lernen zu ermöglichen, das gleichzeitig langfristig tragfähige Grundvorstellungen aufbaut. Zu dieser schwierigen Aufgabe leisten die in der selbstmoderierten Sektion besprochenen Beiträge einen Beitrag.

D. BERTALAN berichtet über die Rolle verschiedener Repräsentationsformen in einem ersten Zugang zu linearen Gleichungen. In einer Unterrichtsreihe zum Einstieg in die Algebra in Klasse sieben wurden lineare Gleichungen handlungsorientiert eingeführt. Die Aufgaben wurden mit Hilfe von konkretem Anschauungsmaterial gestellt und von den Schülerinnen und Schülern in Vierergruppen bearbeitet. Im Vortrag soll erörtert werden, welche Rollen verschiedene Repräsentationsformen während der Bearbeitung der ersten Aufgabe durch eine Mädchengruppe gespielt haben.

A. FIS HER untersucht die Möglichkeiten zum Darstellen mathematischer Strukturen mit Hilfe von zeichnerischen Diagrammen anhand von Beispiele aus Klasse 5. In einer Unterrichtsreihe in Klasse fünf wurden Schülerinnen und Schüler angeregt, Zeichnungen als Werkzeuge zum Darstellen von arithmetischen Aufgaben kreativ zu nutzen. Im Vortrag werden Beispiele von algebraischen Aktivitäten gezeigt, die Kinder in diesem Zusammenhang entwickelt haben. Dazu gehören Darstellungen von Operationen und ihren Wirkungen und Ansätze zur Konstruktion von Variablentermen. Es werden insbesondere Vorformen von Variablen sprachlicher, zeichnerischer und formaler Art erörtert.

S. GERHARD berichtet über den Einstieg in die Algebra in der Grundschule über den Weg von konkreten Größenvergleichen zu abstrakten Gleichungen. Die Early Algebra versucht, algebraische Inhalte bis in die Grundschule vorzuziehen und dort zu etablieren und ist damit inzwischen international zu einem wichtigen Forschungsgegenstand geworden. Das auf Hawaii erprobte MeasureUp-Programm geht sogar soweit, abstraktes algebraisches Denken mittels Größen und Größenvergleiche bereits in der ersten Klasse noch vor den natürlichen Zahlen zu behandeln. Ziel des Promotionsvorhabens ist es, die MeasureUp-Idee auf deutsche Schulen bzw. Schülerinnen und Schüler zu übertragen. Hierzu werden erste Erfahrungen und Ergebnisse aus einem Unterrichtsversuch in einer jahrgangsgemischten Grundschulklasse vorgestellt.

Lutz HELLMIG, Hans-Dieter SILL, Rostock

Durchführung und Evaluation von Lehrerfortbildungen zu polyvalenten Aufgaben

Erfolg von Lehrerfortbildung ist – neben der Ausrichtung der Inhalte an den Bedürfnissen der Lehrer[1] und einem transferunterstützenden Design – auch von einem Beziehungsgeflecht unterschiedlicher und zum Teil marginal scheinender Faktoren abhängig. Für die Spezifik einer aus Präsenzveranstaltungen und internetgestützten Kommunikations- und Kooperationsphasen bestehenden Fortbildung sollen diese Faktoren dargestellt werden. Im Weiteren werden ein Überblick über die Methodologie der Evaluation gegeben und erste Trends der laufenden Evaluation beschrieben.

Zu ausgewählten Attributen des Fortbildungsprogramms

Die Lehrerfortbildung, deren Konzept Sill in diesem Band vorstellt, wendet sich an Mathematiklehrer fünfter Klassen und ist in die Initiative "Mathematik anders machen" der "Deutsche Telekom-Stiftung" (vgl. Rösken in diesem Band) integriert. Am Fortbildungsprogramm des Schuljahres 2007/2008 sind insgesamt 44 Lehrer in 5 Arbeitsgruppen in Mecklenburg-Vorpommern und Berlin beteiligt. In Mecklenburg-Vorpommern ist mit Beginn des Schuljahres 2006/2007 das längere gemeinsame Lernen aller Schüler der Klassenstufen 5 und 6 an einer Regional- oder Gesamtschule realisiert worden. Damit stehen die Lehrer dieser Klassenstufen in Mecklenburg-Vorpommern vor den gleichen Herausforderungen bezüglich des binnendifferenzierten Arbeitens wie seit längerem auch ihre Kollegen in Berlin und Brandenburg.

Die einjährige Fortbildung umfasst jeweils 4 Präsenzveranstaltungen und 3 dazwischen liegende Erprobungsphasen. Das Design der Fortbildung beruht auf einem Programm, das 2003 bis 2005 in Ontario, Kanada durchgeführt und evaluiert (Owston 2006) und von uns im Schuljahr 2006/2007 pilotiert wurde (Hellmig 2007).

Die Präsenzveranstaltungen dienen zunächst der Vermittlung der Charakteristik polyvalenter Aufgaben in Beziehung zu typischen Unterrichtsphasen des Mathematikunterrichts unter besonderer Berücksichtigung der Spezifik des Unterrichtens mit offenen Aufgaben. Darüber hinaus wird durch die Präsenzveranstaltungen ein wesentlicher Beitrag zum Aufbau einer "collaborating community" geleistet. Das Schaffen einer angenehmen Arbeitsatmosphäre und eines kollegialen Umgangs ist dabei eine notwendige Vor-

[1] Gemeint sind immer beide Geschlechter.

aussetzung. Der Fortbildungsort Schule, die Bereitstellung von kleinen Erfrischungen und die Vereinbarung der Du-Form für die Kommunikation befördern diesen Prozess.

Auf den Präsenzveranstaltungen wird ein erheblicher zeitlicher Rahmen für die mündliche Kommunikation und direkte Kooperation der Teilnehmer veranschlagt. In thematischen Gesprächsrunden zu Beginn der Präsenzveranstaltung wird jeder Lehrer um eine Reflexion der vorangegangenen Arbeitsphase gebeten. In diesem Gremium werden auch offene Fragen zur zurückliegenden Etappe geklärt. Zur Subsumierung der praktischen Erkenntnisse aus der letzten Erprobungsphase wird durch die Teilnehmer eine zusammenfassende Darstellung der Aufgabenerprobung in direkter gemeinsamer Arbeit erstellt. Diese Berichte werden im Internet veröffentlicht.

Eine konstruktive Kommunikation in den Erprobungsphasen beruht auf der Vereinbarung einer gemeinsamen, für alle Teilnehmer verbindlichen Aufgabe, deren Einsatz im Unterricht getestet, reflektiert und diskutiert werden soll. Grundlage für die Vereinbarung der Arbeitsaufgabe ist eine speziell für die Fortbildung entwickelte Broschüre, in der die theoretischen fachlichen Inhalte der Fortbildungen dargestellt und durch kommentierte Aufgabenvorschläge für alle Lernbereiche der Klassenstufen 5 und 6 illustriert werden. Das Bereitstellen eines Printmediums erachten wir als wesentlich für die Nachhaltigkeit der Fortbildung.

Die Erprobungsphasen dienen dem Transfer der Fortbildungsinhalte in die Schulpraxis. Durch die Unterrichtstätigkeit adaptieren die Lehrer die Prinzipien des Einsatzes polyvalenter Aufgaben auf ihre Person sowie ihr konkretes Arbeitsumfeld. Die Fortbildungsteilnehmer berichten und diskutieren über die Planung, Durchführung und Auswertung des Unterrichts sowie die Wirkung polyvalenter Aufgaben auf das Lernen der Schüler sowohl schulintern zwischen den Fortbildungsteilnehmern einer Schule als auch schulübergreifend innerhalb der Arbeitsgruppe. Die Berichte und Diskussionen offenbaren einen Reichtum an Ideen zur Gestaltung des Unterrichts und originellen Schülerantworten zu den erprobten Aufgaben. Um die Dominanz einer schulinternen Kommunikation zu Lasten der schulübergreifenden zu verhindern, wurden in einem Fall sechs Kollegen einer Schule auf zwei Fortbildungsgruppen aufgeteilt. Die gruppeninterne Kommunikation und Kooperation erfolgt internetgestützt über eine Moodle-Lernplattform. Die Struktur der Plattform und die technischen Elemente wurden bewusst einfach gehalten. Neben einem allgemeinen Block, der allgemeine Hinweise und Dokumente zum Download und ein Nachrichtenforum beinhaltet, wurde für jede Erprobungsphase ein separater Block angelegt. In diesen Blöcken stehen die Vortragsmanuskripte der entsprechenden Präsenzveranstaltungen sowie Foren zum Austausch über die Erprobungsaufgabe zur Verfügung. Es hat sich zur Aufrechterhaltung des Interesses der Teilnehmer an der Fortbildung bewährt, diese durch automatisch generierte eMails täglich über den Fortgang der Aktivität in den Foren zu informieren. Auf weitere Elemente des eLearning wurde verzichtet.

Methoden der Evaluation

Den theoretischen Hintergrund der Evaluation bildet das 5-Stufen-Modell der Evaluation von Lehrerfortbildungen nach Guskey (2000). Die fünf aufeinander aufbauenden Stufen erfassen (1) die Zufriedenheit der Teilnehmer mit der Fortbildung, (2) das Lernen der Teilnehmer, (3) die Unterstützung durch das System Schule, insbesondere durch die Schulleitung, (4) den Transfer der erworbenen Kenntnisse in den Unterricht und (5) die Auswirkungen auf das Lernen der Schüler. Für die beschriebene einjährige Fortbildung differenzieren wir die zweite Stufe in die Evaluation (2a) der Partizipation und (2b) der erworbenen Kenntnisse der Teilnehmer.

Um Daten für alle Stufen der Evaluation zu erhalten, werden mehrere Evaluationswerkzeuge eingesetzt. Vor Beginn der gesamten Fortbildung werden Daten zur Person und bisherige Fortbildungserfahrungen per Fragebogen erhoben. Eine Repertory-Grid-Befragung, die vor allem qualitativ ausgewertet wird, erfasst ein System persönlicher Konstrukte zur Beurteilung mathematischer Aufgaben durch die Teilnehmer vor und nach der Fortbildung. Kontinuierlich findet ein Monitoring der Aktivitäten der Teilnehmer im Forum statt. Hinzu kommen stichprobenartig Interviews mit Fortbildungsteilnehmern, Schulleitern und ab der zweiten Erprobungsphase Unterrichtsbesuche. In jeder Präsenzveranstaltung wird ein Feedbackbogen mit zwei offenen Fragestellungen eingesetzt. Nach Abschluss der Fortbildung werden Fragebögen zur Fortbildung durch Teilnehmer und Schulleiter bearbeitet, die Teilnehmer werden zusätzlich um eine Selbstauskunft zu den erworbenen Kompetenzen gebeten. Weiterhin stehen die in externer Evaluation durch das ZEPF der Universität Koblenz/Landau im Rahmen des Telekom-Projektes erhobenen Daten zur Verfügung.

Tendenzen der laufenden Evaluation

Die Teilnehmer äußern sich übereinstimmend zufrieden über die Gestaltung und die offene Arbeitsatmosphäre der Fortbildung. Mit fortschreitender Dauer richtet sich die Wahrnehmung der Teilnehmer immer stärker auf Aspekte der Fortbildung, die dem Kenntniserwerb und der Anwendung im schulischen Umfeld zuzurechnen sind. Die Akzeptanz der Fortbildung zeigt sich auch darin, dass bisher lediglich zwei Kollegen aus Krankheitsgründen aus der Fortbildung ausgeschieden sind.

Angestrebt, aber nicht in vollem Umfang erreicht, wurde eine Kontinuität in der internetgestützten Kommunikation. Dies wirkte sich nachteilig auf das Entstehen einer fachdidaktischen Diskussion in den Foren aus; häufig erfolgten Berichte über Unterrichtsstunden erst kurz vor der nächsten Präsenzveranstaltung und blieben ohne Reaktion der anderen Kursteilnehmer. Nur in sehr seltenen Fällen entwickelte sich eine Diskussion. Als weiteren hemmenden Faktor interpretieren wir die Terminierung der Präsenzveranstaltungen unmittelbar vor Ferienbeginn, motivationale Aspekte verblassten in der anschließenden unterrichtsfreien Zeit. Zudem gehört es nicht zum traditionellen Berufsbild der Lehrer, in schriftlicher Form über ihren Unterricht zu reflektieren. Durch eine Terminsetzung für das Schreiben von Beiträgen durch die Teilnehmer selbst soll dieser Tendenz begegnet werden.

Ein quantitativer Vergleich der Forenaktivität zwischen den einzelnen Gruppen lässt einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Beiträge und der Diskussionstiefe mit der Zahl der Gruppenmitglieder möglich erscheinen. Eine höhere Gruppenstärke könnte sich positiv auf die Diskussion auswirken, solange die Anonymität des Einzelnen durch eine zu große Gruppe ausgeschlossen werden kann.

Die Teilnehmer berichten in den Foren sowie in den Reflexionsphasen der Präsenzveranstaltungen von einer allgemein guten Akzeptanz der Aufgaben durch die Schüler. In einigen Fällen, wenn entsprechende Vorerfahrungen aus dem Primarbereich fehlen, müssen die Schüler an den Umgang mit mehreren Lösungswegen und mehreren Ergebnissen gewöhnt werden.

Die Berichte im Forum, vielmehr jedoch die Diskurse auf den Präsenzveranstaltungen und Unterrichtsbesuche zeigen, dass die Lehrer selbstständig das vermittelte Konzept zum Unterrichten mit polyvalenten Aufgaben auf ihr konkretes Arbeitsumfeld adaptieren und in verschiedene Unterrichts- und Arbeitsformen einbetten.

Literatur

[1] Guskey, Thomas (2000): *Evaluating Professional Development*. Thousand Oaks : Corwin Press, 2000

[2] Hellmig, Lutz (2007): Lehrerfortbildung im Blended Learning für Mathematiklehrer der Orientierungsstufe. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hildesheim : Franzbecker, 2007, S. 827-830

[3] Owston, Ron (2006): *Evaluation of a blended learning professional development program for middle-school mathematics and science teachers*. San Francisco : AERA, 2006

Hans-Wolfgang HENN, Dortmund

Realitätsnaher Mathematikunterricht in europäischem Kontext

1. Einführung

Unser Comenius-Network-Projekt „Developing Quality in Mathematics Education II“ ist die Fortsetzung und Erweiterung des Projekts „DQiME I“ von vier auf elf teilnehmende Länder. Es nimmt aus jedem Land ein Team bestehend aus Universitäten, Lehrerbildungsinstituten und Schulen teil. Folglich ist ein besonderes Merkmal dieses Projekts die starke Verbindung zwischen Theorie und Praxis und zwischen Forschung und Entwicklung des Mathematikunterrichts.

Ein Schwerpunkt unserer beiden Projekte ist die Entwicklung von Lernmaterialien und Lernumgebungen, die einerseits einen Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler haben und andererseits auch eine europäische Dimension enthalten. Ich möchte Ihnen zuerst einige Beispiele aus den im ersten Projekt entwickelten und getesteten Materialien vorstellen. Anschließend werde ich auf den diesbezüglichen Stand der Planung im aktuellen Projekt eingehen.

2. Zwei Beispiele aus DQiME I

Abb. 1

Die Straßenbahnkarte in Abb. 1 stammt aus Budapest. Sie wurde nach dem alten Verfahren entwertet. Hierbei werden bei der Entwertung zwei, drei oder vier Löcher in die Karte gestanzt. Das Stanzmuster eines Automaten ändert sich erst am nächsten Tag. Nahe liegende Fragen sind:

- Wie viele dieser Karten müsste man sammeln, um alle möglichen Stanzmuster zu besitzen?
- Passen alle Karten in eine Aktentasche?
- Wie schwer wäre die Sammlung aller Karten?

Kinder versuchen oft, alle möglichen Stanzmuster zu zeichnen. Die Aufgabe ist eine sehr gute Vorübung für das kombinatorische Abzählen großer Mengen.

Eine weitere, von unseren polnischen Partnern entworfene, in allen vier Ländern von DQiME I erfolgreich erprobte und weiter entwickelte Lernumgebung ist der „*Astronomer Jan*“. In einer Serie von Arbeitsblättern gibt Jan Informationen und stellt Arbeitsaufträge zu wissenschaftlicher Zahlenschreibweise, astronomischen Daten, zu Sonnensystem und Weltall. Die deutsche Fassung der Lernumgebung beginnt mit den Sätzen:

> *Hallo! Mein Name ist Jan und ich bin ein polnischer Astronom! Ich lebe mit meiner Frau Ania und meinem Sohn Tomas in Fromborg. Ich bin ein polnisches Mitglied eines internationalen Teams, das die Erde vor Asteroiden schützt!*

Viele weitere Beispiele sind über unsere Projekthompage zugänglich:

`http://www.dqime.uni-dortmund.de`

3. Beispiele aus DQME II

Als besonders ergiebig hat sich schon in DQiME I die enorme Vielfalt von (staatlich konzessionierten) Glücksspielen in den verschiedenen Ländern erwiesen. Diese Lernumgebungen „Games of Chance“ werden im laufenden Projekt DQME II weitergeführt. Drei Beispiele, die in den verschiedenen Ländern viele reizvolle und unterschiedliche Realisierungen haben, sind

- Lotto-artige Glückspiele,
- Keno-artige Glücksspiele,
- Rubbellose.

In Ungarn, dem Gastland unserer Tagung, gibt es jeden Monat neue Varianten von Rubbellosen, die zu interessanten Untersuchungen führen. Abb. 2 zeigt einige Beispiele.

Abb. 2

Eine Lernumgebung mit ebenfalls besonderer europäischer Dimension sind die Preise und Bedingungen für Pakete in den verschiedenen Ländern. Allein schon in Deutschland sind die Bedingungen und Konditionen der verschiedenen Paketdienste bezüglich der zulässigen Maße, Gewichte und der verlangten Gebühren sehr unterschiedlich. Abb. 3 zeigt die Vorschrift des Paketdienstes GLS. Neben einigen anderen Tarifen wurde dieser in einer Übungsaufgabe zur Vorlesung „Mathematik in den Klassen 5 – 10“ mit der folgenden Frage vorgestellt: „Angenommen, Sie wollen ein Paket mit einem möglichst großen Volumen verschicken, welche Maße müssen Sie jeweils wählen?“ Diese Vorlesung ist eine für alle Lehramtsstudiengänge verbindliche Didaktikvorlesung mit etwa 400 Hörern. Die Hörer setzen sich vom zukünftigen Grundschullehrer, der Mathematik als fachdidaktisches Grundlagenstudium wählen muss, bis zum zukünftigen Gymnasiallehrer, der schon Analysis I und II gehört hat, zusammen. Dementsprechend variantenreich waren die Bearbeitungen. Mit den Bezeichnungen Höhe h und $0 \leq h \leq 60$, Breite b und $0 \leq b \leq 80$, Länge x und $0 \leq x \leq 200$ (alles in cm) und der Gurtmaßbedingung $2h + 2b + x \leq 300$ bekommt man für das Volumen den Ansatz $V(b,h) = 2 \cdot h \cdot b \cdot (150 - h - b)$. Folgende, nicht immer erfolgreiche Methoden konnten wir beobachten:

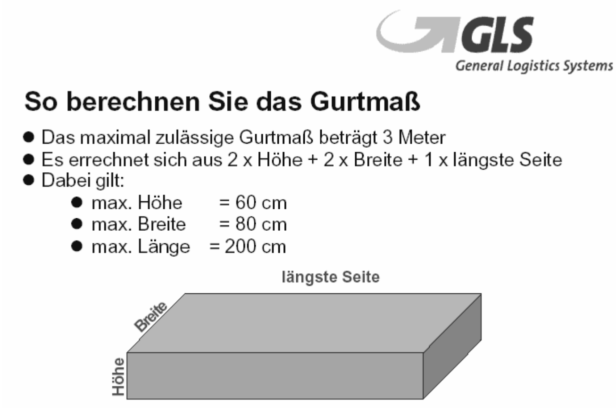


Abb. 3

a. Probieren mit Wertetabellen.
b. Probieren mit Wertetabellen bei (unbegründeter) Annahme einer quadratischen Grundfläche.
c. Zeichnen eines 3-D-Graphen mit dem Computer (vgl. Abb. 4).
d. Begründung, dass die Grundfläche quadratisch sein muss, also h = b. Dies führt auf eine Polynomfunktion vom Grad 3, deren Maximum anschließend bestimmt wird.
e. Ableitung nach h, danach Ableitung nach b (mit inhaltlicher

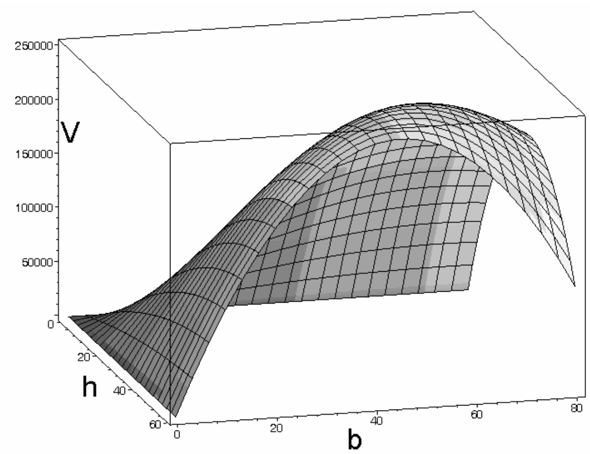


Abb. 4

Deutung des Vorgehens).

f. Bestimmung der Extrema einer Funktion zweier Variabler mit Methoden der höheren Analysis.

4. Ausblick: Der Mathekoffer

Abb. 5

Ein neues, von Andreas Büchter und mir konzipiertes Projekt ist der *Mathekoffer*. Er entstand nach einer Idee des Fördervereins MNU und wird von den Verlagen Erhard Friedrich und Ernst Klett produziert und vertrieben. Das Bundesministerium für Bildung und Forschung unterstützt den Mathekoffer ebenso wie die Deutsche Telekom Stiftung. Diese sorgt dafür, dass die Schulen den Koffer im Jahr der Mathematik bundesweit zu einem besonders günstigen Preis erwerben können. Der Mathekoffer besteht aus vier Themenboxen: Es geht um Zahlen, Terme, Gleichungen, um räumliches Denken und ebene Figuren, um Zufall und Wahrscheinlichkeit sowie um funktionale Zusammenhänge. Letztere werden beispielsweise durch hüpfende Bälle und Federn vermittelt. Experimente mit dem Würfel geben eine Antwort auf die Frage, warum die „6“ manchmal so lange auf sich warten lässt. Holzquader, Spiegel und Rauten helfen geometrische Vorstellungen aufzubauen, während Terme, Formeln und Gleichungen zuerst mit Plättchen und Stäben gelegt werden. Neben den Materialsammlungen gibt es zu jedem Thema eine Aufgabenkartei und einen Lehrerkommentar. Darüber hinaus hält der Mathekoffer unter der Überschrift „Messen, Schätzen, Überschlagen“ Arbeitsmaterial mit herausfordernden Fragen bereit, bei denen es immer wieder um Längen, Zeiten oder Gewichte geht. Beim „Zaubern, Spielen, Knobeln“ geht es um optische Täuschungen, Geheimcodes und Zahlentricks. Für weitere Information sei auf die folgenden Web-Adressen verwiesen:

`www.mathekoffer.mnu.de;  www.mathekoffer.de.`

Diesen bei der *didacta* 2008 in Stuttgart vorgestellten Mathekoffer werden wir auch in DQME II einsetzen und erhoffen uns damit eine Bereicherung des Mathematikunterrichts in unseren Partnerländern.

Martin HENNECKE, Hildesheim

Ein Blick hinter die Kulissen: Wie Schülerinnen und Schüler rechnen

1. Einführung

Im Fokus der ERaB-Studie steht die Erforschung der von Schülerinnen und Schülern verwendeten Rechenwege in der Bruchrechnung. Diese Fragestellung erfordert sowohl neue Wege bei der Kodierung als auch bei der Analyse der Daten. Entsprechende Ansätze wurden auf der letzten Jahrestagung der GDM vorgestellt (vgl. [1,2]). Zur Darstellung der Rechenwege von Schülergruppen lassen sich Rechengraphen verwenden (vgl. [3]). Exemplarisch sollen im Folgenden einige Möglichkeiten dieser Darstellungsform gezeigt werden.

Abbildung 1 zeigt einen Rechengraphen für 3697 Probanden aller Schulformen und Schuljahrgänge. Je zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn für einen Probanden ein Arbeitsschritt von Ausgangs- zum Zielknoten erfasst wurde. Die Kantenbeschriftung gibt die Anzahl derartiger Arbeitsschritte an. Die kleinen, an die Knoten annotierten Zahlen, geben die Summe der ein- bzw. ausgehenden Kantenbeschriftungen an.

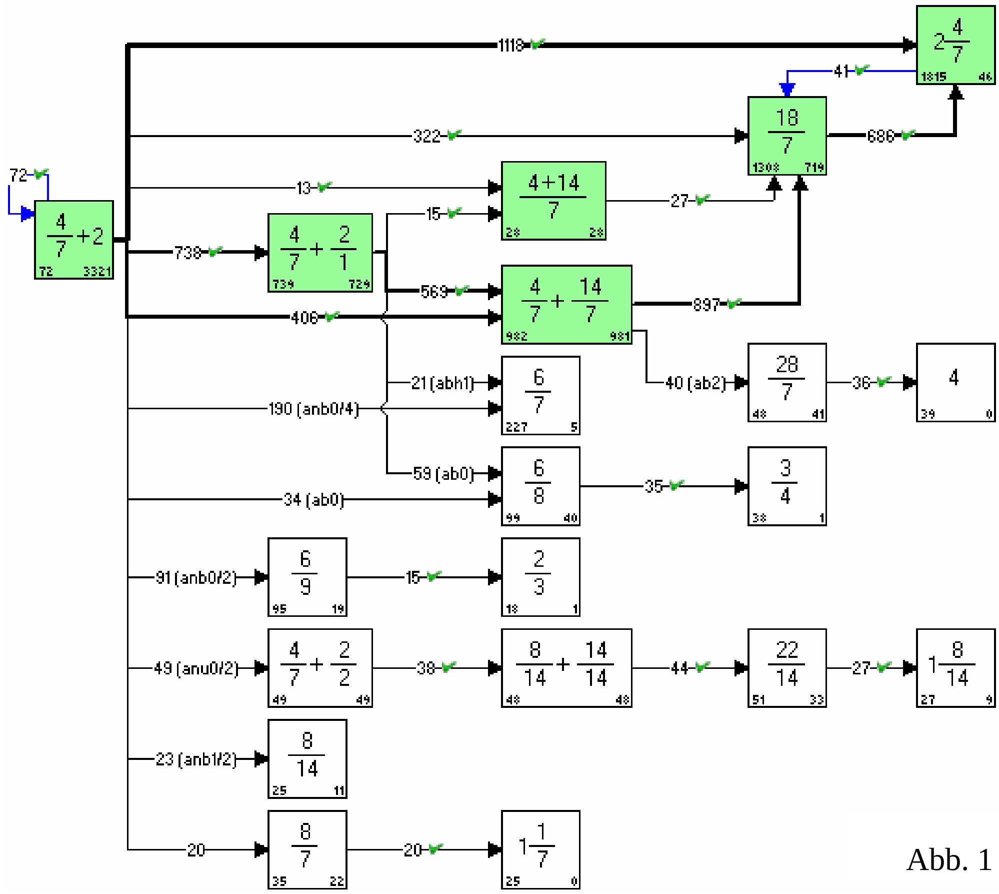


Abb. 1

Rechengraphen sind für die Fehlerforschung von besonderem Interesse, da sich typische Schülerfehler sofort leicht erkennen lassen. In Abbildung 1 sind insbesondere die Fehler $\frac{a}{b} + c = \frac{a+c}{b}$ (als anb0/4 gekennzeichnet), $\frac{a}{b} + c = \frac{a+c}{b+c}$ (anb0/2), $\frac{a}{b} + c = \frac{a}{b} + \frac{c}{c}$ (anu0/2) und $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ (ab0) leicht zu erkennen. Die Klassifikation der Fehler wurde mittels BUGFIX computerbasiert durchgeführt (vgl. [4]).

2. Richtige Rechenwege

Nachfolgend interessieren die 64 % der Schülerinnen und Schüler, die mit $2\frac{4}{7}$ bzw. $\frac{18}{7}$ ein richtiges Ergebnis fanden. Dem Rechengraphen lassen sich dabei zwei Rechenwege entnehmen: Der direkte Weg $\frac{4}{7} + 2 = 2\frac{4}{7}$ durch einfaches Umschreiben der Aufgabe in die gemischte Schreibweise und verschiedene Varianten eines schemageprägten Standardweges, bei dem zuerst durch Umwandlung der natürlichen Zahl ein Standardproblem hergestellt wird. Im Durchschnitt werden Direktweg und Standardweg etwa gleichberechtigt genutzt. Der Boxplot in Abbildung 2 zeigt dabei, wie stark die Mittelwerte der verschiedenen Schulklassen streuen.

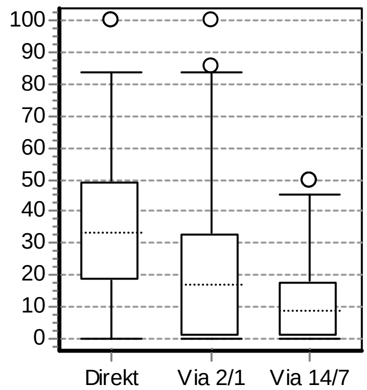


Abb. 2: Klassenunterschiede

Wie so oft ist der vergleichende Blick auf verschiedene Teilpopulationen interessant. Wie z. B. [3] zeigt, lassen sich Rechengraphen nach Schulform, Schuljahrgang oder Geschlecht der Probanden differenzieren. Im Folgenden wird auf Grundlage des Gesamtergebnisses der ERaB-Studie eine Differenzierung in leistungsstarke, mittlere und leistungsschwache Probanden vorgenommen (vgl. Abb. 3).

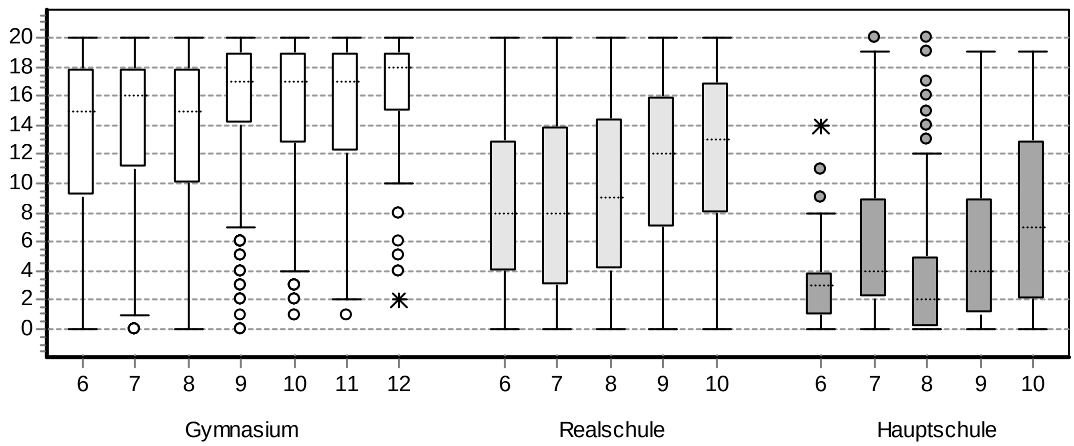


Abb. 3: Gesamtergebnis der ERaB-Studie im Bereich „Rechenaufgaben“

Die Gruppenbildung erfolgt über die Schuljahrgänge 6 bis 8 bzw. aus curricularen Aspekten bei der Hauptschule versetzt für die Jahrgänge 7 bis 9. Für Probanden mittlerer Leistungsstärke wurde für das Gymnasium der Bereich 11 bis 18 gelöste Aufgaben, für die Realschule der Bereich 5 bis 13 und für die Hauptschule der Bereich 3 bis 7 gewählt. Tabelle 1 zeigt die Besetzungen der jeweiligen Gruppen mit Probanden, die auf die Aufgabe „Berechne $\frac{4}{7} + 2$“ tatsächlich geantwortet haben. Die schlechte Bearbeitungsquote in der Hauptschule bedingt leider sehr kleine Gruppengrößen. Die Differenzierung von leistungsstarken Gymnasiastinnen und Gymnasiasten bzw. von leistungsschwachen Hauptschülerinnen und Hauptschülern ist etwas problematisch, da der Testbogen hier tendenziell zu einfach bzw. zu anspruchsvoll ist.

Die Aufgabe „Berechne $\frac{4}{7} + 2$“ gehört zu den leichteren Rechenaufgaben, entsprechend hoch fallen die durchschnittlichen Lösungsquoten der Probandengruppen aus (vgl. Tabelle 2).

Lösungsquoten und damit zusammenhängende statistische Kennzahlen sind typische Auswertungen beim Einsatz üblicher Kodierungsverfahren. Weiterführende Analysen bedürfen einer entsprechenden Kodierung bei der Erfassung.

Rechengraphen enthalten diese Daten bereits. Es ist daher z. B. leicht zu ermitteln, wie die Antwortenden zu ihren richtigen Lösungen gekommen sind. Tabelle 3 zeigt, dass die leistungsstarken Probanden tendenziell eher den Standardweg zur Addition von Brüchen verwenden, während die leistungsschwächeren Probanden mit dem Direktweg erfolgreicher sind.

	GY6-8	RS6-8	HS7-9
Starke	192	221	59
Mittlere	486	285	152
Schwache	240	158	35

Tab. 1: Antwortenden der Aufgabe

	GY6-8	RS6-8	HS7-9
Starke	98 %	77 %	71 %
Mittlere	84 %	54 %	35 %
Schwache	55 %	31 %	8 %

Tab. 2: Lösungsquote der Aufgabe

	GY6-8	RS6-8	HS7-9
Starke	43 %	40 %	57 %
Mittlere	46 %	64 %	71 %
Schwache	62 %	86 %	100 %

Tab. 3: Anteil Direktweg an den Lösungen

	GY6-8	RS6-8	HS7-9
Starke	43 %	35 %	43 %
Mittlere	41 %	47 %	54 %
Schwache	48 %	65 %	50 %

Tab. 4: Anteil Direktweg an versuchten Lösungen über Direkt- oder Standardweg

Der Standardweg über die Umwandlung der natürlichen Zahl in einen Bruch, die Bildung eines gemeinsamen Nenners und die Addition der Brüche birgt vielfältige Schwierigkeiten. Leistungsschwächere Probanden begehen dabei mehr Fehler als ihre leistungsstärkeren Mitschülerinnen und Mitschüler – beruht die höhere Bedeutung des Direktwegs also darauf, dass nur dieser bewältigt wird?

Mittels des Rechengraphen lassen sich die Fehler identifizieren, die im Zuge des Standardweges erfolgen. Dazu kann man neben den Fehlern, die nach Zwischenschritten wie $\frac{4}{7}+\frac{2}{1}$, $\frac{4}{7}+\frac{14}{7}$ oder $\frac{4+14}{7}$ folgen, auch die Fehler $\frac{4}{7}+2=\frac{6}{8}$ (ohne notierten Zwischenschritt) und $\frac{4}{7}+2=\frac{4}{7}+\frac{2}{2}$ (Umwandlung fehlerhaft) zählen. Wertet man alle diese fehlerhaften Rechnungen als Versuch, die natürliche Zahl umzuwandeln und dann die Brüche zu addieren, erhält man Tabelle 4. Auch bei dieser „Abschätzung nach unten“ zeigt sich der zuvor beobachtete Effekt, dass leistungsstarke und leistungsschwache Probanden andere Rechenwege wählen. Bezüglich der Realschule sind die Unterschiede signifikant. Im Gymnasium ist der Unterschied zwischen mittleren und leistungsschwachen Probanden leicht signifikant.

Wie lässt sich dieses Ergebnis interpretieren: Erkennen die leistungsschwächeren Probanden eher, dass es einen einfachen Weg gibt? Haben die leistungsstarken Probanden den Standardweg so gut automatisiert, dass sie gar nicht mehr über einfachere Alternativen nachdenken?

3. Fazit

Auch wenn das ausgeführte Beispiel nur ein kleines Mosaiksteinchen für das bessere Verständnis von Schülerrechnungen ist, zeigt es doch die Vorteile der Arbeit mit Rechengraphen. Die für Rechengraphen notwendige Kodierung der Notationen ist mit vertretbarem Aufwand zu bewältigen (vgl. [1]), liefert dafür aber eine hohe Flexibilität bei der Auswertung der Daten. Dies ist besonders bei explorativ angelegten Studien ein unschlagbarer Vorteil. Insbesondere werden aufwändige Nacherfassungen vermieden.

Literatur und elektronische Quellen

[1] Hennecke, M.: Fehlerdiagnostische Auswertung empirischer Studien in der Bruchrechnung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007.

[2] Winter, K.: Rechenfertigkeiten in der Bruchrechnung – Unterschiede in Schulformen und Klassenstufen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007.

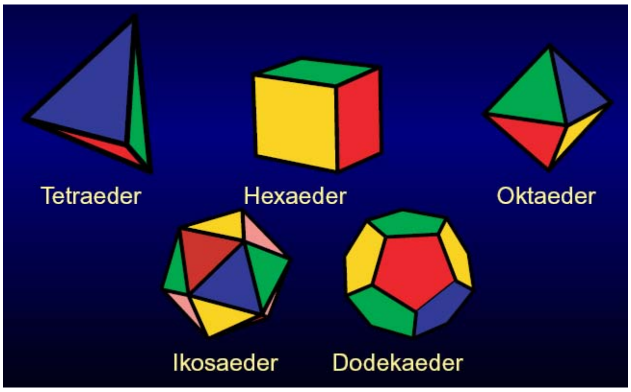
[3] Hennecke, M.: Rechengraphen – Eine Darstellungsform für Rechenwege von Schülergruppen. In: mathematica didactica, 1, 2007, S. 68-96.

[4] Hennecke, M.: Online Diagnose in intelligenten mathematischen Lehr-Lern-Systemen. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1999.

Herbert HENNING, Magdeburg

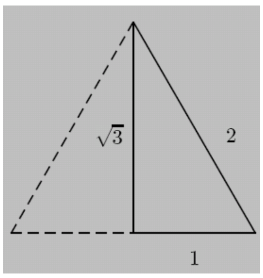
Lauter schöne Körper - Entdeckungen bei Platonischen Körpern

Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder sind als Platonische Körper in die Kulturgeschichte der Mathematik eingegangen und stehen für Erde, Feuer, Wasser, Luft und Gottes Welt .



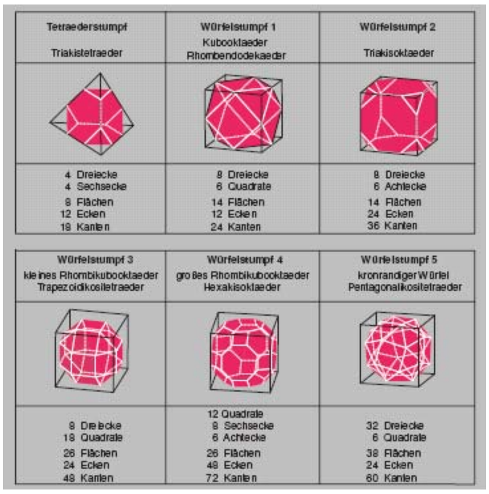
istorische etrachtung der Platonischen r er

Die erste De initi n der Plat nis hen K r er geht au Plat n ur l Dial g i ai s es hrei t er a eis iel des etraeders den K r er ur ugel r ersteht unter eine regel igen K r er einen esten K r er er ittels dessen die gan e u ihn es hrie ene Kugel in glei he und hnli he eile erleg ar ist Plat nstruiert die Plat nis hen K r er ittels rdreie en



und ietet u eden K r er eine ents re hende K nstru ti nsanleitung an

Dur h s hneiden n en Kanten entstehen aus den Plat nis hen K r ern die r hi edis hen K r er



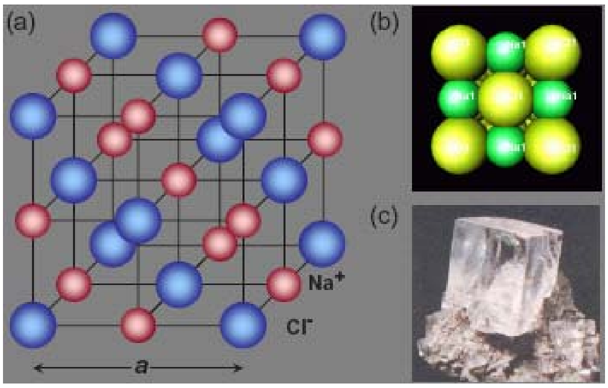
Mathematisches zu Platonische r er

a: Kantenlänge n: Anzahl der Seiten einer Begrenzungsfläche
m: Anzahl der Kanten einer körperlichen Ecke
e: Anzahl der Ecken des Polyeders
f: Anzahl der Seitenfächen
k: Anzahl aller Kanten

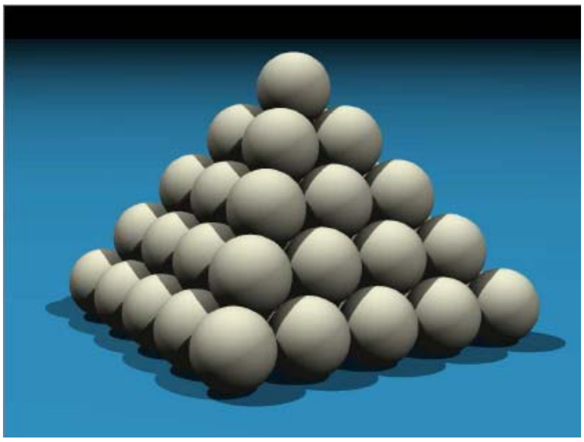
	n	m	e	f	k	Oberfläche	Volumen
Tetraeder	3	3	4	4	6	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{3}$
Hexaeder	4	3	8	6	12	$6a^2$	a^3
Oktaeder	3	4	6	8	12	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$
Dodekaeder	5	3	20	12	30	$3a^2\sqrt{5\,(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{4}\,(15+7\sqrt{5})$
Ikosaeder	3	5	12	20	30	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3\,(3+\sqrt{5})$

ristalle und Packungen

Die regulären Körper (bis auf Dodekaeder und Ikosaeder) tauchen in vielfältiger Weise als Formen in der belebten Natur auf, insbesondere in der Kristallographie aber auch bei Packungen von Kugeln.



In diesem Zusammenhang bieten sich die Behandlung von Gitterpackungen an. Im Folgenden ist eine fcc-Packung dargestellt.



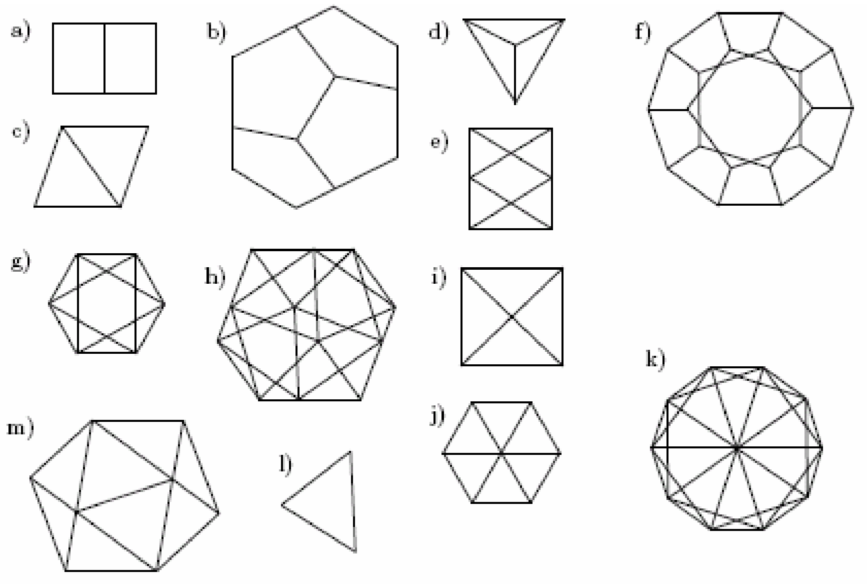
Im Schulunterricht (Klasse) bietet sich die Behandlung dieser Thematik durch folgende Aufgabe an.

Wie viele vollständige Konfettikreise lassen sich mit einem handelsüblichen Locher aus einem DIN A-4 Blatt höchstens stanzen?

Platonische r er im Schulunterricht

In der Sekundarstufe I bietet sich die Behandlung der Platonischen Körper an, um Räumliches Vorstellungsvermögen zu fördern. Im Folgenden sind einzelne Aufgaben dargestellt.

Die nachstehenden Bilder zeigen verschiedene Ansichten von Platonischen Körpern als Drahtmodelle. Zunächst sollen die Schüler diese benennen und die Projektionsrichtung beschreiben. Welche der Kanten und Winkel sind in wahrer Größe dargestellt?



Zur Festigung des Begriffes regelmäßiges (konvexes) Polyeder kann die folgende Aufgabe gestellt werden

1. *Sicherlich kennst du verschiedene regelmäßige Vielecke, deren Seitenflächen eines regelmäßigen Polyeders sein könnten. Gib alle an!*
2. *Untersuche, wie viele Vielecke an einer Polyederecke mindestens zusammenstoßen und wie viele es höchstens sind!*
3. *Kann man aus (1.) und (2.) eine Schlussfolgerung ziehen? Wenn ja, gib diese an, ansonsten begründe, warum nicht!*

Ausführliche Darstellungen u. a. zu Platonischen Körpern in der Astronomie und Kunst (Albrecht Dürer, Salvador Dali, ornelis M. Escher) sowie Interessantes zum Fußball als Polytop findet man unter

htt math uni-magdeburg de rivate henning

Hans- örg HERBER, Salzburg

Das Unterrichtsmodell Innere Differenzierung

Die Anfänge der Modellentwicklung liegen in den 70-er ahren: 1 73 wurde an einer Akademie zur Pflichtschullehrerbildung in Linz / O. . eine Gesamtschule für 10-14-jährige errichtet, in der heterogene Schülergruppen in ahrgangsklassen unterrichtet wurden (analog den ahrgangsklassen in der Primarschule). Der Autor, zu diesem Zeitpunkt Professor für Pädagogische Psychologie an dieser Akademie, unterrichtete an einigen Klassen dieser Gesamtschule bis 1 0 und entwickelte dabei – in Kooperation mit Kollegen an dieser Schule – das Grundmodell der Inneren Differenzierung (I.D.), welches bis dato in theoretischer und empirischer Forschung an Hand praktische Umsetzungsversuche weiterentwickelt wurde. Zentraler Ansatzpunkt dabei war und ist, dass Lernende und Lehrende immer spezifische, hochkomplexe, dynamische Interaktionssysteme bilden. Dazu gehören systematische Analysen und Rekonstruktionsversuche durch theoretische und empirische Überprüfungen des Modells I.D. und seiner fundierenden Komponenten:

a) *Kognitive und emotional-motivationale Wechselwirkungsprozesse* auf der Basis von Lewin (Lewin et al. 1 44, Mc lelland 1 5, Kuhl 2001, Herber V s rhelyi 2002a, Herber V s rhelyi 2003).
   Die wesentliche Aussage dieser Untersuchungen besteht darin, dass eine mittlere Aktivierung durch hohe Erfolgsmotivation und wenig Furcht vor Misserfolg (bezogen auf kürzere oder längere Planungshorizonte), hohe intrinsische Motivation und sachbezogene Interessen (wenig gestört durch extrinsische Motivationen), hohes Kompetenzstreben u.a. leistungsbezogene Motivationen (mittlere Risikobereitschaft, Toleranz für Abweichungen vom Erwarteten, Aushalten von Unsicherheit und Mehrdeutigkeit, etc.) insgesamt zu besseren kognitiven Leistungen führt als zu wenig oder zu hohe Erregung und Aktivierung, hervorgerufen durch geringen oder übermäßigen Anreiz bzw. durch zu hohe, lang anhaltende ngste im Falle von (verkrampfter, regressiv-rigider) Übermotivierung oder durch selbstentfremdende Aktivierung von außen . Herabregulierung negativen Affekts, verbunden mit Hinaufregulierung positiven Affekts auf ein moderates, selbstgesteuertes, ganzheitlich-integrierendes, positiv getöntes, doch analytisch kontrolliertes emotional-kognitives Informationsverarbeitungsniveau könnte als Ansatz einer systemischen (auch neurophysiologisch fundierten) funktionalen Erklärung für die zahlreichen, einander stützenden Befunde heterogener Provenienz herangezogen werden.

b) *Analogiebildung* als Basis jeglichen Lernens und als Grundprinzip individualisierenden Lehrens (Parisot et al. 1 6, Herber et al. 1 7, Herber 1 , V s rhelyi 1 , Herber et al. 2000, Fuchs et al. 2001, V s rhelyi 2003, Herber V s rhelyi 2004, V s rhelyi 2004, Herber V s rhelyi 2006, V s rhelyi 2006b, V s rhelyi 2007, Herber et al. 2007).

Für die meisten Menschen genügt nicht die reine Vorgabe der einmal gelernten Lösungsstrategie (des Algorithmus, etc.), um das entsprechende Ankerbeispiel zu erinnern und die neue Aufgabe lösen zu können. Über das vielfältige, an vielen konkreten und abstrakten Gedächtnisinhalten verankerte Vergleichen (mapping) von (Oberflächen-)Merkmalen und einfachen bis komplexen (Tiefen-)Beziehungen werden nach und nach konkrete Bestandteile des Ankerbeispiels erinnert und schließlich die ganze Aufgabe rekonstruiert. Damit ist auch die Reflexion auf den eigenen Lösungsweg möglich, um den Kern, die abstrakte Lösungsstrategie entfalten und übertragen zu können.

Bei der Analogiebildung glaubt man eine (relativ unbekannte) Targetstruktur (Zieldomäne) durch einfache oder zusammengesetzte, kombinierte Abbildungsprozesse auf Grund einer vertrauten Basisdomäne (Quelle, Source, Base) zu erkennen. Die gefundenen Beziehungen werden extrapoliert (von Bekanntem in das Unbekannte projiziert), wobei Treffer und Nicht-Treffer auftreten, die zur heuristischen Erfassung der unbekannten Struktur beitragen (Hypothesenbildung, Entwicklung von gezielten Such- und Überprüfungsstrategien). Durch die (Neu-)Strukturierung des Targetbereichs (der Zieldomäne) wird – durch rückkoppelnde Interaktion – auch der Basisbereich (Source, Base) restrukturiert (man erfährt damit Neues über ihn).

Analogiebildungsprozesse können das Lernen in Abzweigungs- alternierend mit Zusammenführungsphasen der I.D. unterstützen. Sie fördern eine:

Vernetzung von motorischen, ikonischen und/oder begrifflichen (bis zu symbolischen) *Repräsentationen* (Bruner 1 66);

Extensive Systemerweiterung – Zusammensetzungen der Abbildungen auf dem gleichen Niveau: Bekannte Elemente werden zu (neuen) Strukturen zusammengefügt (Assimilation nach Piaget 1 0);

*Intensive Systemerweiterung – (Neu)*Umstrukturierung des Systems durch (teilweises) Auflösen von (bekannten) Strukturen, so dass sich (neue) Strukturen ergeben (Akkomodation nach Piaget 1 0);

Gegensatzbildung zu bekannten Strukturen um neue Strukturen zu bilden bzw. zu erfassen.

c) *Prototypentheorie* als kognitionspsychologische Begründung von vernetztem Lernen mit besonderer Berücksichtigung der darin involvierten Gedächtnisprozesse (Herber 1 3, V s rhelyi 2006a).

Das zentrale Anliegen dabei ist, für spezifische Lehr- Lernprozesse den jeweils passenden didaktischen Prototyp mittels systematisch generierter Wechselwirkungsprozesse zwischen fachwissenschaftlichem und psychologisch-soziologischem Entwicklungsstand zu (re-)konstruieren. Der Inhalt des Gegenstandes wird grundsätzlich nach der inneren Logik der aktuellen Wissenschaft (ihrer Hintergrundsaxiome) eingeordnet. Anhand der pädagogischen Traditionen wird der wissenschaftliche Standpunkt im Sinne der Gesamtzielsetzung (Kenntnisse, Wissenserweiterung, Vermittlung von Wertehierarchien, Fähigkeitsentwicklung, etc.) zum didaktischen Prototyp transformiert. Der Prototyp enthält Grundelemente (Begriffe, Eigenschaften, Fakten, Erfahrungen, Methoden, Experimente, Verfahren, Gesetzmäßigkeiten, Zusammenhänge, Regeln mit ihren Querverbindungen) des Stoffes, Schülertätigkeiten, die mentale Auseinandersetzung mit dem Stoff, etc. – das alles muss durch pädagogische und psychologische Aspekte strukturiert werden.

Die Innere Differenzierung *ist ein Unterrichtsmodell* mit dem Schwerpunkt LERNKOMPETENZ, das den Lernenden ermöglicht NA H INNERER ENTS HEIDUNG immer mehr Verantwortung für die eigenen Lernprozesse übernehmen zu dürfen und zu können. Dazu gehört gezielte Schüleraktivitätslenkung um divergentes Denken und Tun zu ermöglichen und zusammenzuführen. So wird ein Schritt-für-Schritt generalisierendes Verständnis, eine regelgeleitete Abwandlung zum Prototyp für den ganzen Bereich angezielt, wobei in der intendierten methodischen Umsetzung – nach sachlogischen und psychologischen Kriterien (siehe unten) – selektierte Fundamentumsaufgaben für alle Schüler und interessens- bzw. begabungsabhängige Addita (auch durch Schüler) generiert werden (vgl. V s rhelyi 2007).

Auf der sachlogischen Ebene wird der durchzunehmende Stoff unter didaktischem Aspekt in Fundamentum und Additum eingeteilt.

Das Fundamentum enthält die sachlich und didaktisch wesentlichen, grundlegenden Elemente des Stoffes, die jedes Mitglied der Lerngruppe verstehen und anwenden lernen sollte.

Das Additum kann zur wissenschaftsfundierten Vertiefung, Erweiterung, Verallgemeinerung, etc. angeboten werden. (Vgl. dazu die aktuelle Forschungsarbeit von V s rhelyi 2007.) Das Fundamentum kann über Hyperlinks mit dem Additum verbunden werden, damit jede(r) Lernende – manchmal auf sehr idiosynkratische Weise – an wissenschaftliche Repräsentationsmodi anknüpfen kann.

In der psychologischen Analyse sollen die kognitiven, emotionalen, motivationalen und darüber hinaus persönlichkeitsbedingten Lehr- und Lernvoraussetzungen – so komplex und differenziert das eben möglich ist – berücksichtigt werden. Das heißt u. a., dass der Lehrer sein Wissen im betreffenden Sachgebiet und seine emotional-motivationale Beziehung zum entsprechenden Unterrichtsstoff auf die Lernvoraussetzungen seiner Schüler hin reflektieren und angemessen modifizieren sollte. (Die eigene Begeisterungsfähigkeit ist z.B. ein wichtiger Ansteckungs- bzw. Motivierungsfaktor für Menschen, mit denen man in einer emotional-sozialen Beziehung steht, vgl. z.B. Herber V s rhelyi 2006.)

Bei der Formulierung von Lehr- und Lernzielen müssen die sachlogisch fundierten Unterscheidungen von Fundamentums- und Additumsstoffen auf Grund der psychologischen Analyse überprüft werden. Wie die sachlogische Analyse die verschiedenen Aufbauarten eines Stoffes fachwissenschaftlich begründet, so legt die entwicklungs-, sozial- und persönlichkeitspsychologische Analyse fest, welche Wege und Methoden den jeweiligen Adressaten zumutbar sind. So wird den Besonderheiten der Interaktionsstruktur von Lehrenden und Lernenden Rechnung getragen. Dabei sind u. a. folgende Überlegungen von zentraler Bedeutung:

> Inwieweit können an Hand des durchzunehmenden Stoffes – im Sinne der allgemeinbildenden Fundamentumsziele – Lösungsansätze zur besseren Bewältigung von Problemen der individuellen bzw. gesellschaftlichen Lebenswelt initiiert werden

> Wie kann man auf dieser Basis zur wissenschaftlichen Vertiefung motivieren, um im Sinne der Additumsziele den wissenschaftlichen Systemzusammenhang mehr und mehr auszuloten Wie kann man dabei die kognitiven, emotionalen und motivationalen Besonderheiten der beteiligten Individuen berücksichtigen, um zu deren Selbstverwirklichung – und nicht Selbstverhinderung – beizutragen

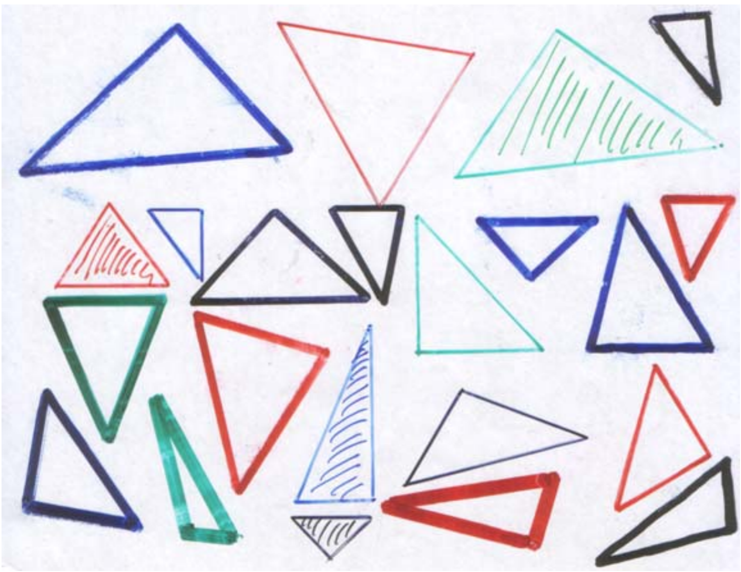
Um die Lernvoraussetzungen zu erheben, soll sichergestellt werden, über welche Begriffe und Regeln, über welches Faktenwissen, etc. Lernende verfügen müssen, damit sie die neue Problemstellung erfassen und adäquate Lösungswege erarbeiten zu können. Im Lichte neuer Forschungen hängt die Schnelligkeit, Präzision und Nachhaltigkeit des Erarbeitens und Behaltens von Unterrichtsstoffen zu 70 % von der individuellen Verfügung über entsprechende Lernvoraussetzungen ab. Dabei können Schüler in einen motivationalen Konflikt geraten: Wenn sie zugeben, dass sie Lücken in der Beherrschung sachbezogener Lernvoraussetzungen haben, und damit rechtzeitige Hilfe anstreben, kann dies ihrem sozialen Ansehen schaden, weil sie sich als hilfsbedürftig deklarieren müssen. Erbitten Lernende diese notwendige Hilfestellung in Form geeigneter Wiederholung nicht, riskieren sie Verständnisprobleme und Misserfolge beim Erlernen des neuen Stoffes. (Siehe dazu Herber 1   3, Astleitner   Herber 2007 und den Beitrag von Astleitner in diesem Band.)
Auf Basis einer systematisierten Lernvoraussetzungsanalyse kann den Lernenden gemäß seinem Entwicklungsstand ein individuelles Anforderungsprofil (samt Hilfestellung) geboten werden.
Entsprechend der komplexen (sachlogischen, psychologischen und didaktischen) Analysen werden mögliche Zugangswege zur individuellen Auseinandersetzung mit dem neuen Stoff angeboten.

Ein Mittel der Operationalisierung der oben angeführten Prinzipien stellt die Einstiegsmethode „*Problembegegnung-Prototyp*“ dar. Einstiegsbeispiele in ein neues Stoffgebiet sollten die wesentliche Struktur, die wesentlichen Merkmale und Relationen dieses Wissensgebietes abbilden und durch geeignete Aufgabenstellungen das Denken des Lernenden in die richtige Richtung lenken. Da man nicht jedem Schüler maßgeschneidert die individuell optimale Einstiegssituation schaffen kann, sollten wenigstens – je nach Lerntyp – didaktisch unterschiedliche Zugangswege (sachlich-repräsentationale Annäherungsmöglichkeiten, frei zu wählende Sozialformen, etc.) ermöglicht werden (didaktische Prototypen).

Die dabei in Einzel-, Partner- bzw. Gruppenarbeit *gefundenen Lösungsideen* sollen anschließend in Einzelarbeit an fundamentalen *Kriteriumsaufgaben* erprobt werden (Kriteriumsleistung), bevor die systematische Generalisierung (bis zu Randbereichen des Wissensstoffes) eingeleitet wird. Motivationspsychologisch gilt hier das Prinzip der Passung (Heckhausen 1), der optimalen Diskrepanz zwischen dem, was man schon weiß und kann, und dem, was noch erlernt werden muss (dies kann sich individuell sehr unterschiedlich darstellen). Dem Lernenden werden aktuelle Leistungsrückmeldungen zur Überprüfung des individuellen Lernfortschritts, Orientierungs- und Lösungshilfen angeboten (die Sozialform ist in der Phase des Übens/Anwendens wieder frei wählbar).

Nach der Fokussierung prototypischer Lösungsansätze muss im Anschluss die Entwicklung der Diskriminationsfähigkeit (die Eingrenzung der Gültigkeit einschlägiger Lösungserfahrungen, Schlussfolgerungen, etc.) durch die Unterscheidung richtiger von falschen Einsetzungsinstanzen (Randbeispiele, Gegenbeispiele, Ausnahmen) durch systematische Aufgabenstellungen herbeigeführt werden. Z.B. könnten die Annäherungsmöglichkeiten an den Gültigkeitsbereich des Pythagoreischen Lehrsatzes durch folgendes Arbeitsblatt – im Sinne der *Problembegegnung-Diskrimination“* – überprüft und so der Lernprozess abgeschlossen werden.

Kreu e die enigen Dreie e an ei denen Du den
P thag reis hen ehrsat an enden annst

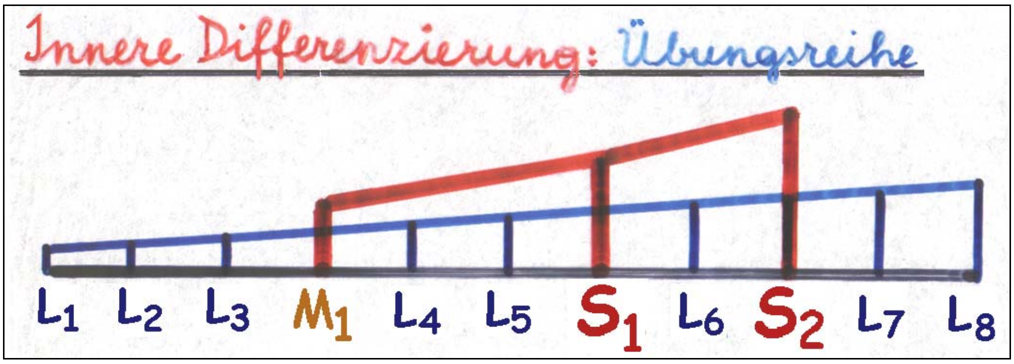


Der zentrale Prozessor der Inneren Differenzierung ist *die spezifische Strukturierung von Aufgabenserien*. Dabei wird ein Pool von Aufgaben angeboten, die alle als austauschbare (analoge) Modelle einer spezifischen Problemlösestrategie konzipiert sind, sich aber hinsichtlich der Verarbeitungstiefe , des Schwierigkeitsgrades, der thematischen Einbettung, etc. unterscheiden.

Grundsätzlich sollten Fundamentumsaufgaben (die von allen Schülern gelöst werden müssen) prototypische Exemplare darstellen, deren Schwierigkeitsgrad so gering wie möglich gehalten wird. Sie stellen zentrale Ankerbeispiele dar, die möglichst viele Merkmale, Relationen, Strukturen, etc. mit allen anderen (potentiellen) Aufgabenstellungen des jeweiligen Lösungsrationales teilen. Additumsaufgaben können sowohl zusätzliche (wissenschaftsbezogene) Vertiefungs- und Erweiterungsaspekte als auch erhöhte Schwierigkeits- und Komplexitätsgrade enthalten. Stellen Fundamentumsaufgaben optimale Herausforderungslagen für eine prototypische Allgemeinbildung dar, führen Additumsaufgaben gezielt zur wissenschaftsbezogenen Forschung hin (mit einem entsprechenden Anspruchsniveau im Sinne von Lewin et al. 1 44).

Die optimale Aktivierung der meisten Schüler kann mit einem systematischen Wechsel von leichten Aufgaben und mittelschweren Aufgaben aufrechterhalten werden (Herber 1   , intermittierende Verstärkung nach Skinner 1 73, Diskrepanzerlebnisse nach Heckhausen 1   ).

In einer Aufgabenserie für alle Schüler sollten daher zuerst leichte Aufgaben gegeben werden (positive Verstärkung der Erfolgsmotivation bzw. Reduktion der Misserfolgsangst), anschließend sollten im aufsteigenden Schwierigkeitsgrad mittelschwere bis schwere Aufgaben gegeben werden.
Nach jeder – herausfordernden – (mittel-)schweren Aufgabe sollte mindestens eine leichte Aufgabe eingeschoben werden, damit aufkeimende hemmende Misserfolgsangst wieder reduziert werden kann (intermittierende Verstärkung).
Am Ende einer Erarbeitungssequenz sollten jedenfalls mehrere sicher zu lösende Aufgaben gegeben werden.



Aus lernökonomischen Gründen sollten innerhalb einer solchen Aufgabenserie keine – unbegründeten – abrupten thematischen Variationen stattfinden (switch costs, overload, negative Interferenzen).

Astleitner hat in seinem Beitrag zu diesem Tagungsband den hohen Grad an theoretischer Elaboriertheit einer rezenten Modellversion von V s rhelyi (2004) in Vergleich zu prominenten internationalen Unterrichtsmodellen herausgearbeitet und fruchtbare Vorschläge zur Weiterentwicklung in kognitions- und persönlichkeitspsychologischer Hinsicht gegeben.

undamenta der Inneren Differenzierung

Schüler sind soziale Wesen, keine Automaten, die man auf Knopfdruck mit Wissen füttern kann. Der Lehrer kann nur helfen, indem er versucht, auf diese je besonderen Wesen einzugehen, vorsichtig Hilfen im Sinne von Hypothesen anzubieten und ständig rückzukoppeln, ob seine ‚Hilfe' hilfreich war oder nicht. Lehrer und Schüler müssen lernen, dass Lehrerhilfen nützen, aber auch behindern können. Keinesfalls aber sollte sich der Schüler alleingelassen fühlen. Er muss spüren (und oft genug gesagt bekommen), dass der Lehrer sein Bestes gibt, um ihm zu helfen. Dann wird er auch sein Bestes geben. (Herber 1 3, 117f.)

Literatur

Astleitner, H. Herber, H.- . (2007) (eds.). Task- and Standard-based Learning. Frankfurt: Peter Lang

Bruner, . S. (1 66). Studies in cognitive growth. New ork: Wiley

Fuchs, K. ., Herber, H.- . V s rhelyi, . (2001). hnlichkeit – Analogie – Innere Differenzierung. Ein Bericht über ein Unterrichtsprojekt zum Thema hnlichkeit. Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 205–20 .

Gentner, D. (1). The mechanism of analogical learning. In: Vosniadou, S. Ortony, A. (Eds.), Similarity and analogical reasoning. ambridge: University Press, 1 –241.

Gentner, D. Markman, A.B. (1 7). Structure Mapping in Analogy and Similarity. In: American Psychologist, Heft 1, 45–56.

Heckhausen, H. (1). Motivation und Handeln. Berlin: Springer

Herber, H.- . (1 3). Innere Differenzierung im Unterricht. Stuttgart: Kohlhammer

Herber, H.- . (1). Motivationsanalyse. Renningen-Malmsheim: expert, Wien: Linde

Herber, H.- ., V s rhelyi, ., Astleitner, H. Parisot, K. . (1 7). Analogisierende versus sequentielle Instruktion, situativ geänderte Aufgabenschwierigkeiten und Mathematikleistungen. In: Parisot, K. . V s rhelyi, . (Hg.), Integrativer Unterricht in Mathematik. Salzburg: Abakus, 25–40.

Herber, H.- ., V s rhelyi, ., Astleitner, H. Parisot, K. . (2000): Analogisierende versus sequentielle Instruktion, experimentell induzierte Aufgabenschwierigkeiten und Mathematikleistungen. In Patry, .-L. Riffert, F. (Hg.), Situationsspezifität in pädagogischen Handlungsfeldern. Innsbruck: STUDIENVerlag, 125–136.

Herber, H.- . V s rhelyi, . (2002a). Lewins Feldtheorie als Hintergrundsparadigma moderner Motivations- und Willensforschung (im Vergleich zu Behaviorismus, Psychoanalyse, Gestalt- und Kognitionspsychologie). Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft 6, Heft 1, 37–100.

Herber, H.- . V s rhelyi, . (2002b). Das Unterrichtsmodell Innere Differenzierung einschließlich Analogiebildung . Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft 6, Heft 2, 5–1 .

Herber, H.- . V s rhelyi, . (2003). Moderne Motivationsforschung als Paradigmenverschmelzung Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft 7, Heft 2, 5–60.

Herber, H.- . V s rhelyi, . (2004). Empirische Forschung in der Didaktik der Mathematik und ihre wissenschaftliche Dokumentation. In: Parisot, K. . V s rhelyi, . (Hg.), Positionen – Mathematikdidaktik in Entwicklung Publikationen der Teilnehmer des Dissertantenseminars 65– 0.
Elektronische Version: http://xml.inf.elte.hu/ mathdid/dissem2004/dissem2004.html

Herber, H.- . V s rhelyi, . (2006). Kompetenzstreben und Kompetenzerwerb: Funktionale didaktische Fördermöglichkeiten durch Differenzierung und Individualisierung. Teaching Mathematics and omputer Science 4/1, 1–52.

Herber, H.- ., V s rhelyi, ., Parisot, K.- . Astleitner, H. (2007). Task complexity and trait-treatment-interactions in learning mathematics. A quasi-experiment. In: Astleitner, H. Herber, H.- . (eds.), Task- and Standard-based Learning. Frankfurt: Peter Lang, 47–56.

Lewin, K., Dembo, T., Festinger, L. Sears, P.S. (1 44). Level of aspiration. In Hunt, .M. (Ed), Personality and the behavior disorders. Vol. 1. New ork: Ronald Press, 333-344.

Kuhl, . (2001). Motivation und Persönlichkeit. Interaktionen psychischer Systeme. Göttingen: Hogrefe

Maus, P. V s rhelyi, . (2006). Problemlösen mit Hilfe der Analogiebildung im Alltag und in der Mathematik. Mathematikinformation 47, Neubiberg: Begabtenförderung Mathematik

Mc lelland, D. . (1 5). Human motivation. ambridge: University Press

Parisot, K. ., Herber, H.- ., Astleitner, H. V s rhelyi, . (1 6): Analogie und Problemlösen. In: Parisot, K. . V s rhelyi, . (Hg.), Trends im Geometrieunterricht. Salzburg: Abakus, 7– 4.

Piaget, . (1 0). Psychologie der Intelligenz. Stuttgart: Klett- otta

Seel, H. (1 3). Allgemeine Unterrichtslehre. Wien: BV

Skinner, B.F. (1 73). Wissenschaft und menschliches Verhalten. München: Kindler (Amerikanische Erstausgabe: Science and human behavior. New ork: Macmillan, 1 53)

V s rhelyi, . (1). ombination of traditional and computer based tools as a strategy for problem solving. In University Münster (Ed.), reativity and mathematics education. Münster: Tagungsband, 163–166.

V s rhelyi, . (2003). Experimentieren um einen Satz zu finden – Vollständig separierbare Mosaike auf der Kugel und ihre Anwendungen. Teaching Mathematics and omputer Science, Debrecen, 1/2, 2 7–31 .

V s rhelyi, . (2004). Aufgaben und Lösungen im Sinne der Inneren Differenzierung. Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft , Heft 1, 61–76.

V s rhelyi, . (2006a). Bemerkungen zur Prototypentheorie – Begriffs - und Konzeptbildung. Teaching Mathematics and omputer Science, Debrecen, 4/2, 365–3 .

V s rhelyi, . (2006b). Über das Lernen mittels Analogiebildung. MU Heft 5, 20–36.

V s rhelyi, . (2007). Hintergrundstheorien des Unterrichtsmodells Innere Differenzierung. Handout zum Vortrag im Forschungsseminar (Salzburg) http://mathdid.inhun.com

Thilo H FER, Schwäbisch Gmünd

Einf hrung des unktionsbegriffs in der Sekundarstufe I

Ausgangssituation und didaktische Grundlagen

Nicht zuletzt aufgrund der Ergebnisse aus den TIMSS- und PISA-Studien gibt es Forderungen nach Unterrichts-Qualitätsmerkmalen wie das Lernen in realen Kontexten, die Verstärkung der Selbsttätigkeit und damit verbunden der aktiven Aneignung, das vernetzte und fächerübergreifende Lernen (vgl. Leuders 2005, S. 63). In PISA 2003 (S.173) zeigte sich zudem, dass die Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler, Probleme zu lösen, nicht im Einklang mit den erreichten mathematischen Fähigkeiten geht. Dies ist ein Problem, das schon vor PISA erkannt und von Kaput (1 4) als Insel-Problem bezeichnet wurde. Auch im Bereich der Funktionenlehre tritt das Insel-Problem auf (Michelsen Beckmann 2007, S. 45):

Am Beispiel des Funktionsbegriffs lässt sich das Insel-Problem in der (scheinbaren) Trennung zwischen mathematischen und empirischen Funktionen fassen, indem erstere durch algebraische Terme definiert sind und letztere – im Unterschied dazu – Alltagserfahrungen beschreiben.

In der Folge davon muss eine problemangewandte Mathematik in den Unterricht integriert werden, die nicht nur zur Problemlösung, sondern auch zur Weiterentwicklung der mathematischen Fähigkeiten genutzt wird. Eine Möglichkeit für solch eine Mathematik bietet der Unterricht von Funktionen und funktionalen Zusammenhängen mit Hilfe eines fächerübergreifenden Unterrichts zur experimentellen Physik. Michelsen (2006, S. 274) sieht in einem entsprechend angelegten, fächerübergreifenden Vorgehen eine wichtige Alternative zum herkömmlichen, von algebraischen Notationen dominierten Mathematikunterricht. In der vorliegenden Arbeit wurde die Erfüllung solcher Forderungen innerhalb der Einführung von Funktionen im Mathematik-/Physikunterricht von siebten Klassen am Gymnasium durchgeführt und getestet. Ziel war es, den Unterricht durch Bezug zu eingängigen Schülerexperimenten (vgl. Beckmann 2006 2003) anwendungsorientiert zu gestalten und an der Auswertung der Messwerte mathematische Ideen und Kompetenzen zu entdecken bzw. aufzubauen. Um ein umfassendes funktionales Denken zu fördern, wurde die Konzeption anhand des Hauses des funktionalen Denkens (vgl. Höfer 2006 200 , sowie Abb. 1) durchgeführt, welches die zu bedenkenden und zu fördernden grundlegenden Fähigkeiten zum funktionalen Denken abbildet.

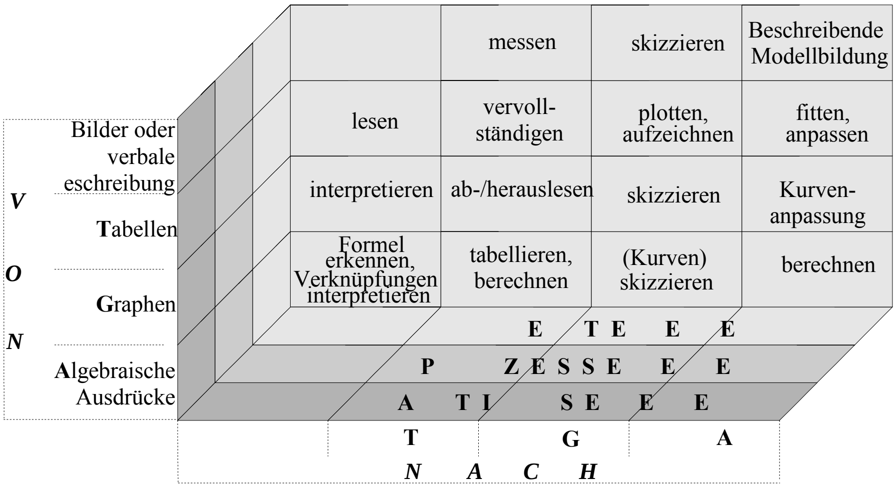


Abb. 1:

Das Haus des funktionalen Denkens

Einf hrung in die   unktionenlehre durch Sch lerex erimente

Eine grundlegende Idee der Sequenz ist es, die Schülerinnen und Schüler zunächst selbst die funktionalen Zusammenhänge zwischen experimentellen Messgrößen finden und beschreiben zu lassen, bevor die typischen Eigenschaften im Umfeld von Funktionen (wie z.B. die Steigung) durch den Lehrer eingeführt werden. Dadurch bietet sich die hance, dass die Schülerinnen und Schüler gängige Eigenschaften selbst entdecken und beschreiben, so dass der Lehrer diese Entdeckungen nur ernten und eventuell mit den exakten Bezeichnungen aus der Fachsprache versehen muss. Die vorliegende Unterrichtssequenz gliedert sich deshalb in zwei Teile. Als Vorkenntnis benötigen die Schülerinnen und Schüler lediglich das Wissen, wie man Messergebnisse zweier Größen tabellarisiert und in ein Koordinatensystem überträgt.

Den ersten Teil der Sequenz bildet eine siebenstündige Gruppenarbeit, in deren Verlauf jede Gruppe einen physikalischen Versuch durchführt und auswertet. Während der Auswertung werden die im Versuch beteiligten Messgrößen auf Zusammenhänge innerhalb der verschiedenen Darstellungsformen untersucht. Anschließend werden Verknüpfungen zwischen diesen, in den verschiedenen Darstellungen gefundenen, Zusammenhängen gesucht.

Im zweiten Teil werden die in der Gruppenarbeit entdeckten Zusammenhänge und Eigenschaften systematisch kategorisiert. Dabei wird die Reihenfolge nach den Funktionsklassen gewählt (proportional – antiproportional – linear). Dies hat den Vorteil, dass die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Darstellungsformen innerhalb einer Funktionsklasse direkt sichtbar gemacht werden können. Wichtigstes Prinzip in diesem zweiten Teil ist es, so viele Entdeckungen wie möglich aus dem ersten Teil aufzugreifen. Dies gelingt zum Beispiel, indem die auf den Arbeitsblättern präsentierten Aussagen und Entdeckungen vorwiegend aus der Gruppenarbeit entnommen werden. So wird den Schülerinnen und Schülern verdeutlicht, dass hier mit ihren eigenen Ergebnissen gearbeitet wird, sie also selbst die Entdecker dieser Zusammenhänge sind. Dadurch erhalten sie einen Bezug zum Unterrichtsgegenstand, durch den nicht zuletzt die Angst vor den neuen Inhalten genommen werden kann.

In der folgenden Tabelle wird eine Übersicht über die einzelnen Stunden der Sequenz gegeben:

Stunde	Inhalt
1	Umgang mit Messfehlern bei der Auswertung von Messreihen.
2 – 5	Durchführung der Schülerexperimente in Gruppen.
6 – 7	Präsentation und Besprechung der Ergebnisse, Interpretation der verschiedenen Darstellungen aus dynamischer Sicht.
–	Einführung: Terme zu verbal formulierten Gesetzmäßigkeiten
10	Definition: Proportionale Funktion (verbale Beschreibung).
11	Proportionale Funktionen im Koordinatensystem darstellen, Steigung(-sdreieck) von Geraden im Koordinatensystem.
12 – 13	Proportionale Funktionen in Tabellen darstellen, Tabellen systematisch untersuchen.
14 – 1	Antiproportionale Funktionen und Lineare Funktionen: Definitionen, Eigenschaften der Darstellungsformen und Bezug zu Anwendungen.

Erfahrungen aus der Er robung in der Unterrichts raxis

Es zeigte sich, dass sehr viele Ergebnisse (bis hin zum Steigungsdreieck) von den Schülerinnen und Schülern während der Gruppenarbeit selbst entdeckt wurden. Als richtig und für Wiederholungen der Einheit wichtig war es, dass die Ergebnisse auf den Arbeitsblättern als Scans aufgenommen wurden und von so vielen verschiedenen Gruppen wie möglich stammten. Im Unterricht gab es bei jedem Arbeitsblatt ein stolzes Das ist von uns , wenn eine Gruppe ihre eigene Schrift und Resultate wiedererkannte. Dadurch wurden nicht nur die Schüler dieser Gruppe sehr stark für die weiteren Aufgaben des Arbeitsblatts motiviert. Außerdem war der Zugang angstfreier als sonst, da den Schülerinnen und Schülern klar war, dass sie die Entdecker waren, der Sachverhalt also für jeden kapierbar ist.

Aufgrund der ständigen Verknüpfung zu den durchgeführten Experimenten konnte des Weiteren ein Bezug zwischen der abstrakten mathematischen Behandlung von Funktionen und der erfahrbaren experimentellen Realität hergestellt werden. In dessen Folge stellte sich ein sehr gutes Verständnis für die anschauliche Bedeutung der Darstellungen von Funktionen ein. So konnten beispielsweise Steigungen von Graphen ohne Schwierigkeiten als Geschwindigkeiten interpretiert, die Konvergenz eines Hyperbelastes gegen die x-Achse aus dem Zusammenhang zwischen Druck und Volumen begründet und die Verschiebung einer Geraden aufgrund eines additiven Gliedes im Term aus der Berücksichtigung der Federlänge ohne angehängte Masse erklärt werden.

Insgesamt zeigen unsere Erfahrungen, dass diese Unterrichtseinheit – neben den genannten positiven motivationalen und emotionalen Faktoren – insbesondere den im Insel-Problem geschilderten Schwierigkeiten entgegentritt und so den Schülerinnen und Schülern zu einem guten Verständnis der abstrakten Mathematik in empirischem Umfeld verholfen wird.

Zusatzmaterial

Eine detailliertere Beschreibung, sowie ausführliches Unterrichtsmaterial (Arbeitsblätter und Folien) sind zu finden unter:

sciencemath h-gmuend de

- Teaching material - Introduction to theory of functions

Literatur

Beckmann, A. (2006): Experimente zum Funktionsbegriffserwerb. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Beckmann, A. (2003): Fächerübergreifender Unterricht, Teil 2 (Physik). Berlin: Franzbecker.

Höfer, Th. (2006): Funktionales Denken ganzheitlich fördern. Beiträge zum Mathematikunterricht 2006, Franzbecker, Hildesheim.

Höfer, Th. (200): Das Haus des funktionalen Denkens - Entwicklung und Erprobung eines Modells für die Planung und Analyse methodischer und didaktischer Konzepte zur Förderung des funktionalen Denkens. Erscheint vsl. 07/200 im Verlag Franzbecker.

Kaput, . (1 4): The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In Biehler et. al. (eds.) *Mathematics didactics as a cientific discipline* (pp. 37 -3 7). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Leuders, T. (2.Auflage, 2005): Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Berlin: ornelsen Verlag Scriptor.

Michelsen, .; Beckmann, A. (2007): Förderung des Begriffsverständnisses durch Bereichserweiterung – Funktionsbegriffserwerb und Modellbildungsprozesse durch Integration von Mathematik, Physik und Biologie. In: MU – Der Mathematikunterricht 53, 1/2, S. 45 - 57.

Michelsen, . (2006): Functions: a modelling tool in mathematics and science. In: ZDM, Vol 3 (3), S. 26 -2 0.

PISA (Deutsches Pisa Konsortium) (2003): PISA 2003: Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs – Zusammenfassung.

Eva Hoffart, Justus-Liebig-Universität Gießen

Analysen zu den Aufgaben der Orientierungsarbeit in Hessen 2005

Im Land Hessen wurden im April 2005 die ersten flächendeckenden Orientierungsarbeiten im Fach Mathematik in allen dritten Klassen der Grundschulen geschrieben. Sie wurden als ein Element zur Sicherung und Weiterentwicklung der Qualität von Unterricht eingeführt – mit der doppelten Zielsetzung der Individualdiagnose und zum Leistungsvergleich unterschiedlicher Lerngruppen.
Die aktuelle Untersuchung wird sich intensiv sowohl mit den Aufgaben der Orientierungsarbeit als auch mit uns vorliegenden 2000 Bearbeitungen der Aufgaben durch Schüler beschäftigen. Weiterhin existieren halbstandardisierte und videographierte Interviews zu allen neun Aufgaben. Ziel der Untersuchung ist die Entwicklung einer Matrix zur Strukturierung der Analyse, Einschätzung und Konstruktion von Aufgaben für solche Arbeiten. Dabei werden verschiedene Perspektiven auf eine Aufgabe eingenommen.
Die Betrachtung der Aufgaben erfolgt zunächst im Sinne einer rationalen Aufgabenanalyse, bei der die Aufgabe anhand verschiedener mathematischer, didaktischer und psychologischer Aspekte betrachtet wird. Daraus folgt eine normative Beschreibung möglicher Bearbeitungsweisen. Anschließen wird sich eine empirische Aufgabenanalyse, bei der die deskriptive Darstellung und detaillierte Betrachtung der tatsächlichen Schülerlösungen im Vordergrund steht. Rationale und empirische Aufgabenanalyse beeinflussen und bedingen sich gegenseitig.

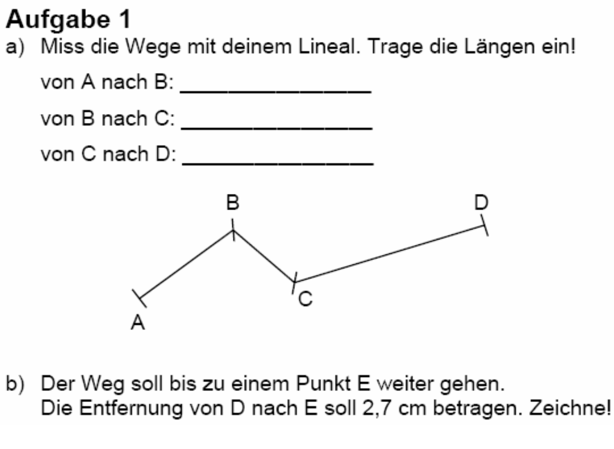


Abb. 1

Im vorliegenden Text wird die aktuelle Matrix auf die erste Aufgabe der hessischen Orientierungsarbeit 2005 angewandt. Es werden in gekürzter Form die normativen Überlegungen aus unterschiedlichen Blickwinkeln auf diese Aufgabe dargestellt.[1]

[1] Die zu erwartenden Schülerbearbeitungen im Sinne des normativen Blicks als ein Aspekt der Analyse und der deskriptive Ausblick befinden sich im Materialteil.

Formaler Blick auf die Aufgabe

Es handelt sich um eine Aufgabe mit zwei Teilaufgaben a) und b). Dabei ist die Lösung b) nicht von der Lösung a) abhängig. Fertigkeiten im Umgang mit dem Lineal (Anlegen, Messen, Ablesen) haben jedoch Bedeutung für beide Aufgabenteile

Betrachtet man den Aufgabenstamm, enthält Teilaufgabe a) zwei Sätze, die jeweils eine Aufforderung zum Messen bzw. zum Eintragen der Messungen enthalten. Es sind jeweils Schreiblinien zur Notation der drei Streckenlängen vorhanden. Teilaufgabe b) umfasst drei Sätze, die sowohl Erläuterung der Situation, als auch Aufforderung zum Zeichnen darstellen.

Wortwahl und Ausdrücke sind generell als altersgerecht zu bezeichnen.

Zwischen beiden Aufgabenteilen ist eine geometrische Zeichnung zu finden. Abgebildet ist der Streckenzug [AD] mit drei Teilstrecken [AB], [BC] und [CD]. Die Zeichnung ist zur Bearbeitung beider Teilaufgaben (Messen und Zeichnen) nötig.

Das Antwortformat von Teilaufgabe a) ist als freie geschlossene Antwort zu beurteilen, da drei Messwerte (Maßzahl mit Maßeinheit) als Ergebnis notiert werden. Im zweiten Aufgabenteil ist eine Strecke vorgegebener Länge zu zeichnen, wobei die Richtung der Strecke [DE] nicht angegeben wird. Somit liegt das Format einer freien offenen Antwort vor.

Inhaltlicher Blick auf die Aufgabe

Ein Bezug zum Rahmenplan Grundschule lässt sich durch den Arbeitsbereich Größen, speziell dem Größenbereich Längen, aufzeigen. Zu den Zielsetzungen gehört die Kenntnis der Längeneinheiten mit ihren Abkürzungen, wobei im 1./2. Schuljahr Meter und Zentimeter, im 3./4. Schuljahr Kilometer und Millimeter im Fokus stehen. Längenangaben in unterschiedlicher Form aufzuschreiben, wozu auch die für diese Aufgabe nötige Kommaschreibweise gehört, ist in den Zielen für das Ende der Grundschulzeit festgeschrieben.

Ein expliziter Bezug zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards für das Fach Mathematik in der Primarstufe ist nicht zu finden. In den inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen werden im Bereich Größen und Messen die nötigen Kompetenzen der Kenntnis der Standardeinheiten sowie das Messen von Größen beschrieben.

Im Sinne einer Sachanalyse sind Aspekte wie Größen als Ausdruck von Maßzahl und Maßeinheit, der Maßzahlaspekt an sich, die Maßzahl als Ergebnis eines Messvorgangs sowie die unterschiedlichen Schreibweisen von Längen relevant.

Die Fertigkeiten des Messens und Zeichnens entsprechen dem schuljahresbezogenen Niveau der zweiten Jahrgangsstufe, im Wissen über

Kommaschreibweise als Sortentrennung, speziell cm und mm, jedoch der dritten bzw. vierten Jahrgangsstufe.
Ihr Kontext ist als innermathematisch zu bezeichnen.

Kognitiver Blick auf die Aufgabe

Bei beiden Teilaufgaben ist die sprachlogische Komplexität als gering einzustufen, da die Reihenfolge der Satzteile mit der Reihenfolge der Bearbeitungsschritte einhergeht. Die Formulierung ist klar, der Satzbau ohne Verschachtelungen. Die verwendeten Begriffe „Weg“ und „weitergehen“ können zu Irritationen führen. Der Text enthält keine irrelevanten Informationen.
Die Denkschritte sind für beide Teilaufgaben einfach zu organisieren, womit eine geringe kognitive Komplexität gegeben ist. Teilaufgabe a) lässt sich mit drei nacheinander verlaufenden Denkschritten pro Messvorgang (Anlegen, Ablesen, Eintragen) bearbeiten. Die Bearbeitung von Teilaufgabe b) erfolgt in vier nacheinander verlaufenden Denkschritten (Anlegen, Abmessen, Zeichnen, Beschriften) oder anhand dreier Denkschritte (Anlegen, Zeichnen, Beschriften), wobei das Abmessen und das Zeichnen dann in einem Schritt parallel verlaufen.
Beide Teilaufgaben sind bezüglich dem Grundwissen zum Größenbereich Längen (Maßzahl + Einheit) sowie der Routinetätigkeit des Messens und Zeichnens mit dem Lineal dem Anforderungsbereich der Reproduktion zuzuordnen. Keinesfalls eindeutig ist eine entsprechende Zuordnung bezüglich der Beziehung der Längeneinheiten cm/mm und der Kommaschreibweise cm/mm in der Mitte des dritten Schuljahres.

Testtheoretischer Blick auf die Aufgabe

Formen von Leistungstests sind als „halbobjektiv“ zu bezeichnen, womit ein Einhalten der drei Gütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität generell schwierig ist.
Vergleichsdaten zu der Orientierungsarbeit 2005 sind nicht bekannt.
In Hinblick auf das Itemuniversum lässt die Aufgabe durchaus Schlüsse auf ähnliche Aufgaben zu.
Aufgrund der sprachlichen Formulierung ist keine Beeinflussung der Schwierigkeit zu erwarten.
Es handelt sich um die erste Aufgabe des Tests (Position).
Aus diesem Grund wird im Sinne des Reihenfolgeneffekts keine Wirkung vorheriger Aufgaben erwartet. Ebenso lässt sich keine Wirkung auf nachfolgende Aufgaben vorhersehen.

Diagnostischer Blick auf die Aufgabe

Die Aufgabe zielt auf das Verfahren des Messens und des Zeichnens ab. Eine Ergebnisorientierung liegt vor, da ausschließlich die Messwerte bzw. die zu zeichnende Strecke erwartet werden. Die Aufgabe ist als valide zu bezeichnen, da diese beiden Fertigkeiten im Vordergrund stehen und nicht durch andere Aspekte überlagert werden.

Das Antwortformat lässt aufgrund der Ergebnisorientierung kaum Rückschlüsse auf das Denken des Kindes zu. Eine multiple Lösbarkeit ist auch aufgrund der beiden Lösungsansätze in b) und der freien Lage der Strecke nicht gegeben.

Blick auf das Fehlerpotential der Aufgabe

In Teilaufgabe a) ist denkbar, dass die Schüler eine falsche Streckenlänge (Maßzahl) ermitteln, die falsche Maßeinheit verwenden, Maßzahl und Maßeinheit unvollständig notieren oder die Aufgabe an sich unvollständig bearbeiten.

Bei der zweiten Teilaufgabe b) ist ein Abtragen der falsche Streckenlänge [DE] möglich, es wird kein Streckenabschluss gesetzt bzw. kein Punkt E bezeichnet. Weiterhin ist eine Unsicherheit bezüglich der Lage Strecke DE möglich.

Ausblick

Aufgrund der rationalen Aufgabenanalyse wird deutlich, dass die vorliegende Aufgabe weder ausschließlich reproduktiv noch frei von Fehlerpotential ist. Unterstützt wird dieses Fazit durch die daraus folgende normative Betrachtung sowie den deskriptiven Ausblick auf die tatsächlichen Schülerlösungen (vgl. das Material zum Text). Der nächste Arbeitsschritt wird die empirische Analyse der vorliegenden Bearbeitungen sein. Danach ist die rationale Aufgabenanalyse mit der empirischen Analyse in Beziehung zu setzen.

Literatur

- Bromme, R., Seeger, F., Steinbring, H, (1990). Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler, Köln, Aulis Verlag Deubner & Co KG
- Büchter, A., Leuders, T. (2005), Mathematikaufgaben selbst entwickeln, Berlin, Cornelsen Verlag Scriptor
- Rost, J. (1996). Lehrbuch Testtheorie Testkonstruktion, Bern, Verlag Hans Huber

Andrea HOFFKAMP, Technische Universität Berlin

Wie kann man mit dynamischer Geometrie Software funktionales Denken fördern?

Funktionales Denken – Was ist das und was fällt daran so schwer?

Die Bezeichnung *funktionales Denken* taucht das erste Mal explizit in der Meraner Reform (1905) auf. Gemeint war eine gebietsübergreifende Denkgewohnheit, die den gesamten Mathematikunterricht betreffen sollte, nämlich das Denken in Variationen und funktionalen Abhängigkeiten und zwar über das Thema Funktionen im Algebraunterricht hinaus. Die *Erziehung zum funktionalen Denken* wurde als eine Sonderaufgabe herausgestellt. Nachdem der Begriff funktionales Denken in den 60ern und 70ern aus der Mode kam, gewinnt er seit den 80ern wieder an Bedeutung. Vollrath (1989) beschreibt funktionales Denken als "eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist." Damit bindet er funktionales Denken eng an den Funktionsbegriff. In den Bildungsstandards ist funktionales Denken als *Leitidee Funktionaler Zusammenhang* verankert.

Funktionen bzw. funktionales Denken sind komplexe Begriffe. Zum einen gibt es verschiedene Darstellungsmöglichkeiten funktionaler Abhängigkeiten, wie bildliche oder sprachliche Beschreibung, Tabelle, Graph, algebraischer Ausdruck. Zum anderen kann man funktionale Abhängigkeiten verschieden betrachten, nämlich unter dem Zuordnungsaspekt (horizontaler, punktweiser Zusammenhang), dem Kovariationsaspekt (vertikaler, dynamischer Zusammenhang) und Funktion als Ganzes/als Objekt. Viele Studien haben gezeigt, dass der Kovariationaspekt am meisten Schwierigkeiten bereitet. Dies zeigt sich z.B. beim Lesen und Interpretieren von Graphen und von Situationen, in denen funktionale Zusammenhänge erkannt werden sollen. Oftmals werden Funktionsgraphen als fotographische Bilder der Realsituationen interpretiert. Eine weitere Hauptschwierigkeit ist die Übersetzung zwischen den verschiedenen Darstellungsformen.

Funktionales Denken – Warum ist der Einsatz von dynamischer Geometrie Software sinnvoll?

Dynamische Geometrie Software (DGS) ermöglicht die Herstellung von Experimentierflächen, in denen mathematische Objekte visuell dynamisiert werden (Zugmodus) und somit der Kovariationsaspekt funktionaler Abhängigkeiten sichtbar wird. Darstellungsformen von Funktionen können interaktiv verknüpft und damit strukturelles Begriffsverständnis gefördert werden. Denkprozesse lassen sich auslagern und Operationen, die mental nicht vollzogen werden können, lassen sich extern darstellen. Dadurch "wird der Kopf frei" für weitere Überlegungen und Ansätze. Außerdem kann DGS Raum für eigenständiges Arbeiten und damit für individuelle Gedankengänge und persönliches Arbeitstempo lassen.

Erprobung zweier digitaler Lerneinheiten in Jahrgangsstufe 10

Es wurden zwei digitale Lerneinheiten entwickelt und in Jahrgangstufe 10 erprobt. Dabei wurde den Fragen nachgegangen, ob und wie es möglich ist den dynamischen Aspekt funktionalen Denkens sichtbar zu machen und zu fördern. Dazu wurde jeweils eine bildliche Beschreibung funktionaler Zusammenhänge mit der Darstellungsform Graph verknüpft und die Möglichkeit zum Experimentieren gegeben. Die Darstellungsform Graph wurde gewählt, weil sie sich besonders auf den Kovariationsaspekt bezieht. Zur Erprobung stand je eine Doppelstunde in zwei 10. Klassen (E-Kurse) einer Gesamtschule in Berlin zur Verfügung. Beide Lerngruppen haben das Thema Funktionen längere Zeit nicht im Unterricht behandelt. Auch ein Computereinsatz in Form von digitalen Lerneinheiten war den Schülern fremd. Die Lerneinheiten bestehen aus Internetseiten mit integrierten Java-Applets, die mit der DGS Cinderella http://cinderella.de erstellt wurden und unter www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp verfügbar sind. Die Schülerinnen und Schüler benötigten kein Spezialwissen über die Software und konnten direkt mit Hilfe der Applets die Arbeitsaufträge bearbeiten.

Lerneinheit Dreiecksfläche. Die Testgruppe bestand aus 19 Schülerinnen und Schülern einer eher lernschwachen Gruppe. Die Schülerinnen und Schüler erhielten einen Arbeitsbogen mit der Internetadresse der Lerneinheit und den Aufgabenstellungen. Sie bearbeiteten die Aufgaben mit Hilfe der Lerneinheit (Abb. 1) in Zweiergruppen am Computer. Im Anschluss an die gemeinsame Besprechung der Lösungen wurde ein schriftlicher Nachtest durchgeführt und schließlich ein Fragebogen zum Thema "Arbeiten mit dem Computer" ausgefüllt.

Lerneinheit Trapez. Diese Lerneinheit wurde bereits das zweite Mal in nun überarbeiteter Version mit 23 Schülerinnen und Schülern erprobt. Die Trapezaufgabe ist nach einem Aufgabenvorschlag aus den Bildungsstandards entstanden. Hier geht es um das Erkennen und Beschreiben funktionaler Abhängigkeiten in einer Situation, deren graphischer Darstellung, der Erkennung wichtiger Funktionseigenschaften (Extremwert) und zusätzlich um das Auffinden eines Funktionsterms. Die Fragestellung ist hier erweitert: Wie muss der Einsatz von DGS gestaltet sein, damit er bei komplexeren Aufgaben, in denen es sowohl um das Lesen von und Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsformen als auch um verschiedene Sichtweisen auf funktionale Abhängigkeiten geht, förderlich ist? Die Lerneinheit ist umfassender und beinhaltet mehrere Hilfen und Hinweise, z.B. gibt es Wiederholungsteile zum Thema Quadratische Funktionen oder Geradengleichungen. Nach der computer-unterstützten Bearbeitung des Arbeitsbogens zur Lerneinheit wurden die Ergebnisse im Klassenverband besprochen und schließlich ein Fragebogen zum Thema "Arbeiten mit dem Computer" ausgefüllt. Alle Unterrichtsmaterialien findet man auf der dem Tagungsband beiliegenden CD bzw. unter der oben angegebenen Internetadresse.

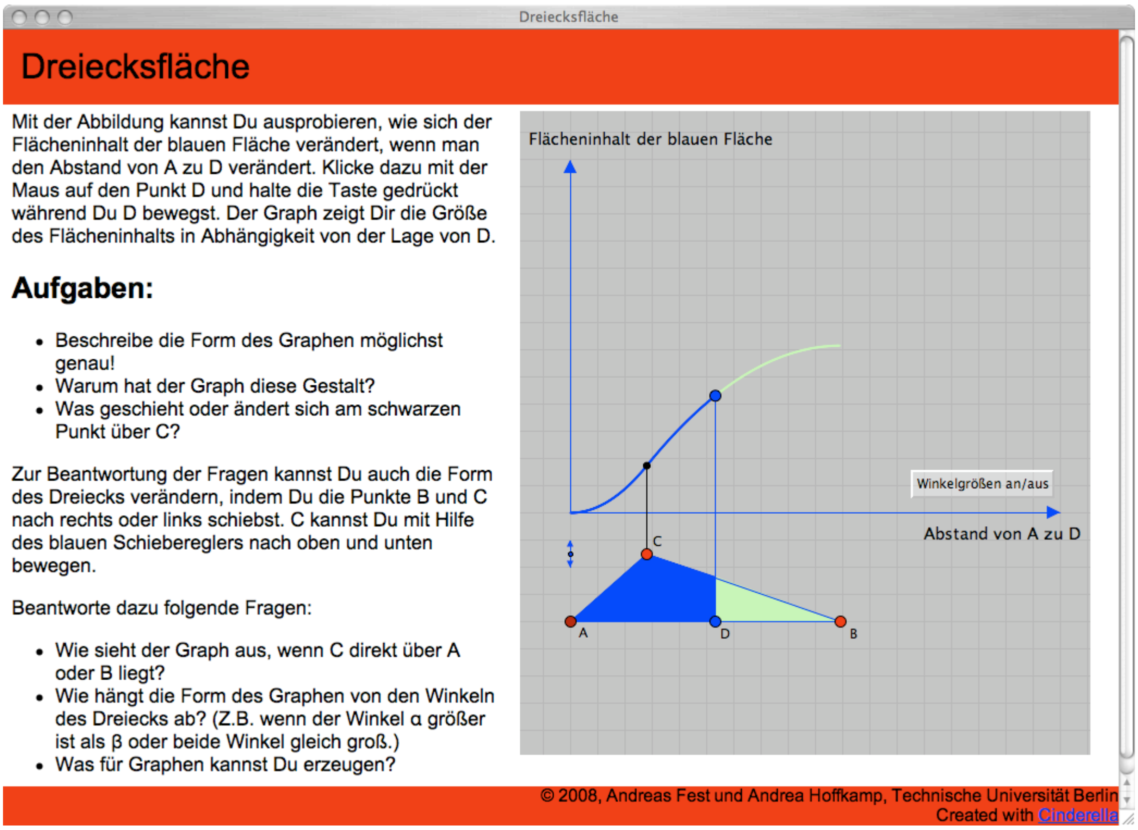


Abb 1: Bewegung des Punktes D macht den Kovariationsaspekt sichtbar. Bewegung der Punkte B und C erzeugt neue Situationen und dazugehörige Flächeninhaltsgraphen (Metavariation).

Ergebnisse. Die Ergebnisse beruhen auf Schülerbeobachtungen, Nachtest und Fragebögen. Sie bestätigen die eingangs aufgestellten Vermutungen zum DGS-Einsatz und sind so zu verstehen, dass sie weitere Forschungsrichtungen aufzeigen und in ausführlicheren Studien überprüft werden müssen.

Computerunterstütztes Arbeiten allgemein: Die Arbeit mit den Lerneinheiten wirkte sich sehr positiv auf die *Motivation* der Schülerinnen und Schüler aus. Zum einen hatte es den "Bonus des Neuen", aber zum anderen schätzten die Schülerinnen und Schüler das *selbstständige und individuelle Arbeiten* in einem *selbstbestimmten Arbeitstempo*. Dies erlaubte auch eine *bessere Binnendifferenzierung:* Lernschwache Schülerinnen und Schüler benötigten zwar oft die Hilfe seitens der Lehrperson, konnten aber dennoch in ihrem Rahmen und ihrem Tempo selbstständig arbeiten (und hatten somit das Gefühl auch etwas alleine geschafft zu haben), während lernstarke Schülerinnen und Schüler die Aufgaben teilweise komplett alleine bearbeiteten. Allgemein kam es zu wenig Frustrationserlebnissen: Fehler konnten selbst erkannt und korrigiert werden. Durch das *experimentelle Arbeiten* war eine größere *Variation der Gedankengänge* möglich. Außerdem wurde positiv hervorgehoben, dass der Computer Tätigkeiten wie Zeichnen, Rechnen u.ä. übernimmt und dadurch mehr Zeit für die eigentliche Problemstellung blieb.

Lerneinheiten und funktionales Denken: Durch Dynamisieren und Experimentieren werden funktionale Zusammenhänge und insbesondere der Kovariationsaspekt sichtbar und erkannt. Die dynamische Verknüpfung von Situation und Graph fördert Interpretations- und Leseleistungen. Insbesondere ist hier die Möglichkeit der *Metavariation* hervorzuheben, nämlich, dass nicht nur innerhalb der Situation Veränderungen untersucht werden können, sondern auch neue Situationen hergestellt und die Auswirkungen auf den Graphen beobachtet werden können. Ein Thema, auf das die Lerngruppe komplett unvorbereitet war, war in kurzer Zeit so einführbar, dass eine solide Basis geschaffen war, auf der man weiterarbeiten kann. Die Lerneinheiten müssen so gestaltet sein, dass sie genügend Raum für Fehler lassen und die Möglichkeit bieten produktiv mit den Fehlern durch weiteres Experimentieren umzugehen.

Literatur

Hoffkamp, A. *Funktionales Denken fördern durch den Einsatz von Dynamischer Geometrie Software.* Erscheint in: Aufgaben mit Technologieeinsatz, Bericht über die 25. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der GDM vom 28.-30.9.2007 in Soest. Franzbecker Verlag.

Krüger, K. Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts - das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte*, 47:221-241, 2000.

Kultusministerkonferenz. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Luchterhand, Darmstadt, 2003.

Malle, G. *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Vieweg, 1993

Müller-Philipp, S. *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht.* Waxmann, 1994.

Schlöglhofer, F. Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph. *mathematik lehren,* 103:16-17, 2000.

Vollrath, H.-J. Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10(1):3-37, 1989.

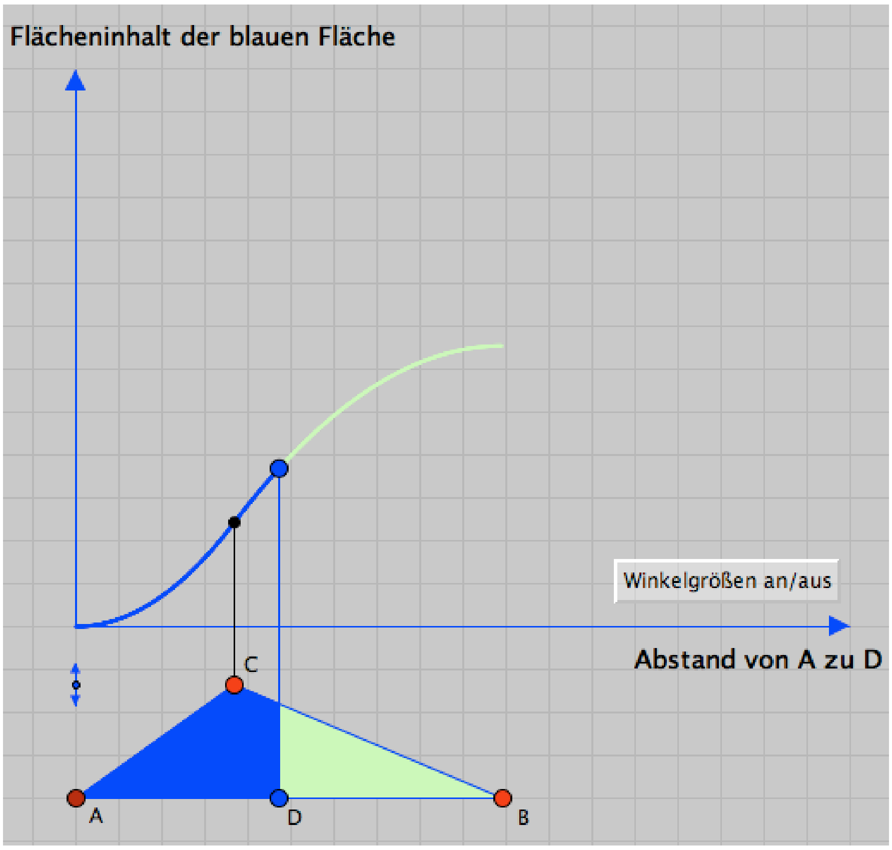
Name:	Arbeitsblatt zur Aufgabe "Dreiecksfläche"	Datum:

Bearbeite die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Lerneinheit im Internet. Notiere Deine Lösungen auf dem Arbeitsblatt.

Die Lerneinheit findest Du unter der folgenden Internetadresse:

http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp/Material/Dreieck

Der Flächeninhalt der blauen Fläche ändert sich in Abhängigkeit vom Abstand von A zu D. Diese Abhängigkeit kann man mit Hilfe eines Graphen darstellen.



1. Beschreibe die Form des Graphen möglichst genau!

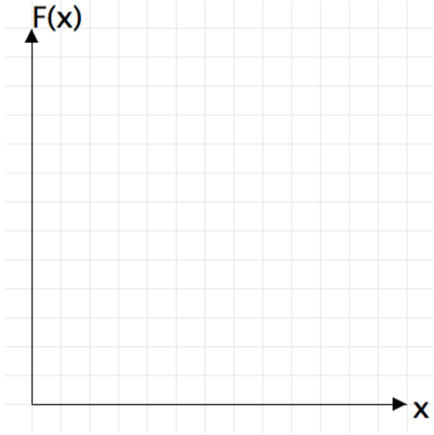
2. Warum hat der Graph diese Gestalt?

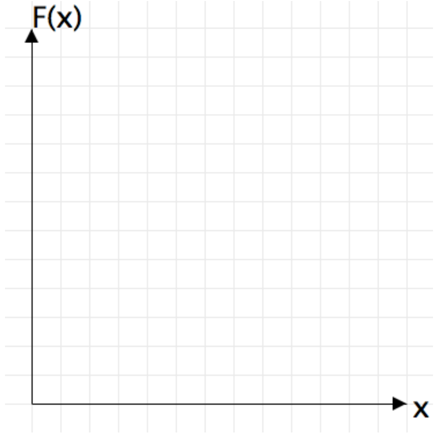
3. Was geschieht bzw. ändert sich am schwarzen Punkt über C?

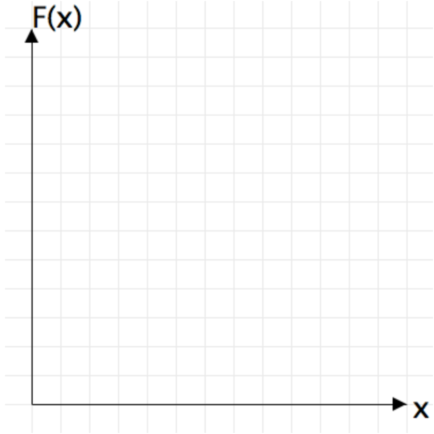
4. Wie sieht der Graph aus, wenn C direkt über A oder B liegt? Beschreibe in Worten! Warum sieht der Graph in diesem Fall so aus?

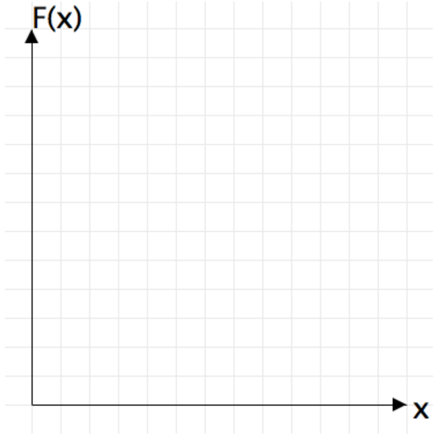
5. Wie hängt die Form des Graphen von den Winkeln des Dreiecks ab? (Z.B. wenn der Winkel α größer ist als β oder wenn beide Winkel gleich groß sind.) Beschreibe in Worten!

6. Was für Graphen kannst Du erzeugen? Skizziere die Graphen und die dazugehörigen Dreiecke! (nächste Seite)


F(x)
x


F(x)
x


F(x)
x


F(x)
x

Name:	Arbeitsblatt zur Trapezaufgabe	Datum:

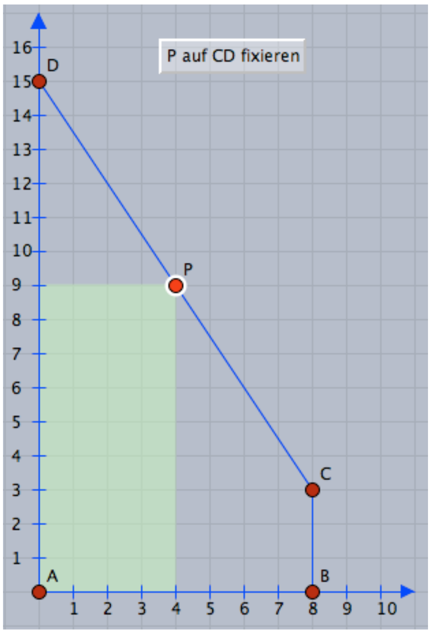
Bearbeite die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Lerneinheit im Internet. Notiere Deine Lösungen auf dem Arbeitsblatt.

Die Lerneinheit findest Du unter der folgenden Internetadresse:

http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp/Material/Trapezaufgabe/

Aufgabe 1:

Gegeben ist das abgebildete Trapez ABCD. Jeder Punkt der Trapezseite CD ist Eckpunkt eines Rechtecks, das dem Trapez einbeschrieben ist. Die Seiten der einbeschriebenen Rechtecke sind parallel zu den Koordinatenachsen. Der Punkt A ist immer ein Eckpunkt des Rechtecks.



Beschreibe, wie sich der Flächeninhalt des Rechtecks verändert, wenn man P auf CD von D nach C bewegt:

- Wann ist der Flächeninhalt gleich 0?

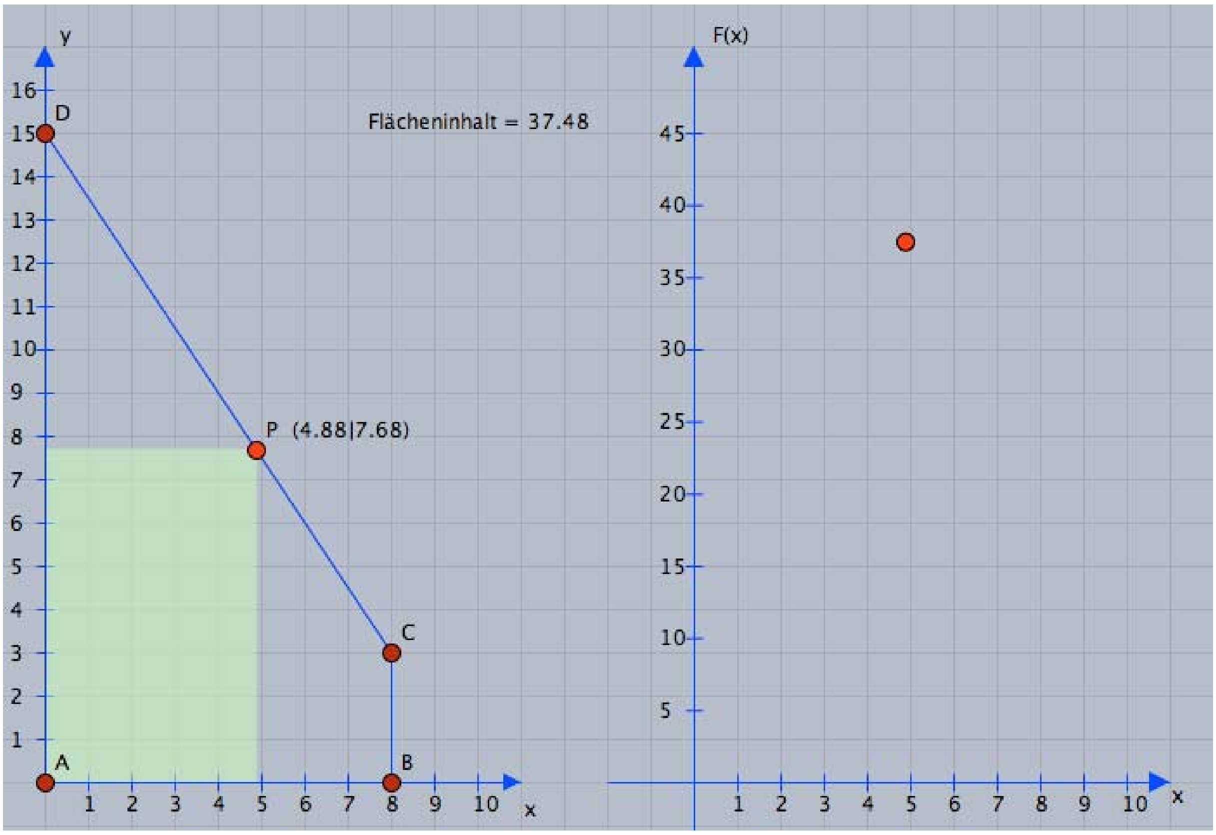
- Welche Werte kann der Flächeninhalt annehmen? Auch 100?

- Gibt es mehrere verschiedene Rechtecke, die aber denselben Flächeninhalt besitzen? Wenn ja, suche Beispiele dafür!

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinaten von P und dem Flächeninhalt des Rechtecks?

Aufgabe 2:

Wenn man den Flächeninhalt F(x) des Rechtecks abhängig von der x-Koordinate von P in einem Koordinatensystem abträgt, so erhält man einen Graphen.



- Skizziere den Graphen in obiger Abbildung.

- Erkläre anhand des Graphen, welche Flächeninhaltswerte einmal, zweimal, bzw. keinmal vorkommen.

- Wann ist der Flächeninhalt am größten?

Aufgabe 3:

Überlege Dir einen Funktionsterm für die Flächeninhaltsfunktion F.

Aufgabe 4:

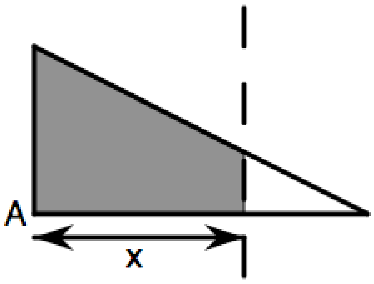
Begründe, dass sich der Flächeninhalt F mit der Gleichung $F=x\cdot(-1{,}5\cdot x+15)$ berechnen lässt, wobei x die erste Koordinate des Punktes P ist.

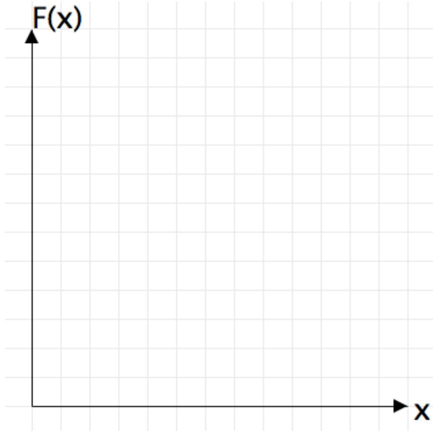
Name:	Test: Funktionale Abhängigkeiten graphisch darstellen	Datum:

Bei den folgenden Formen wird die gestrichelte Linie vom Punkt A um die Entfernung x nach rechts gezogen. Der Wert F(x) gibt die Größe der grau unterlegten Fläche an.

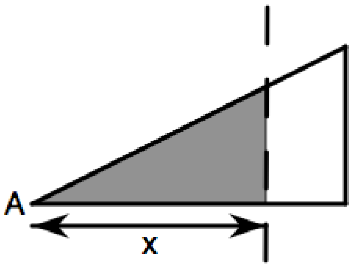
Zeichne in die Koordinatensysteme passende Graphen ein! Auf genaue Zahlenwerte kommt es dabei nicht an.

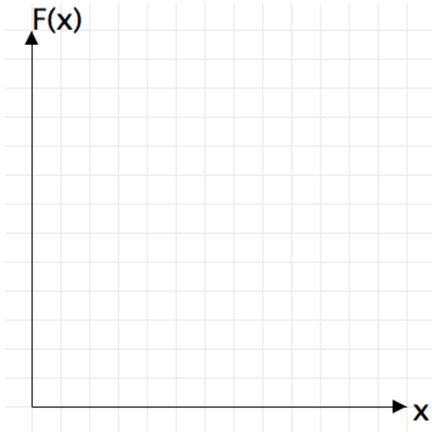
1.



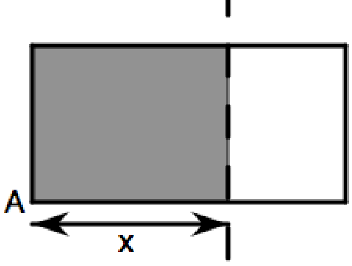


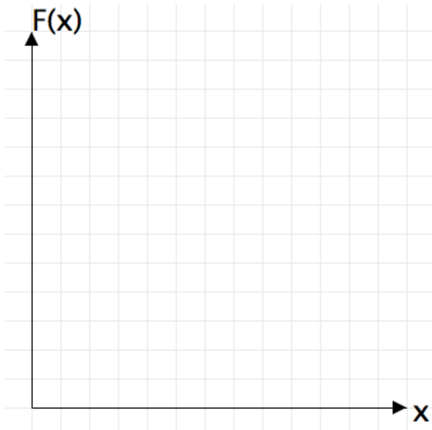
2.



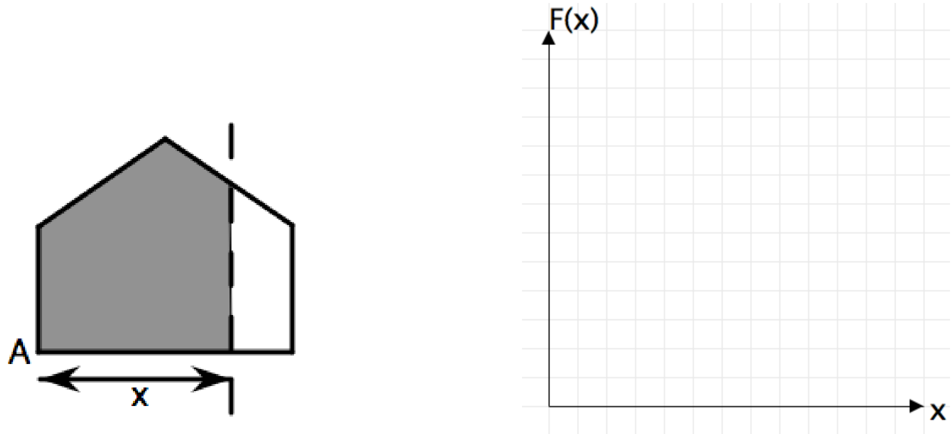


3.

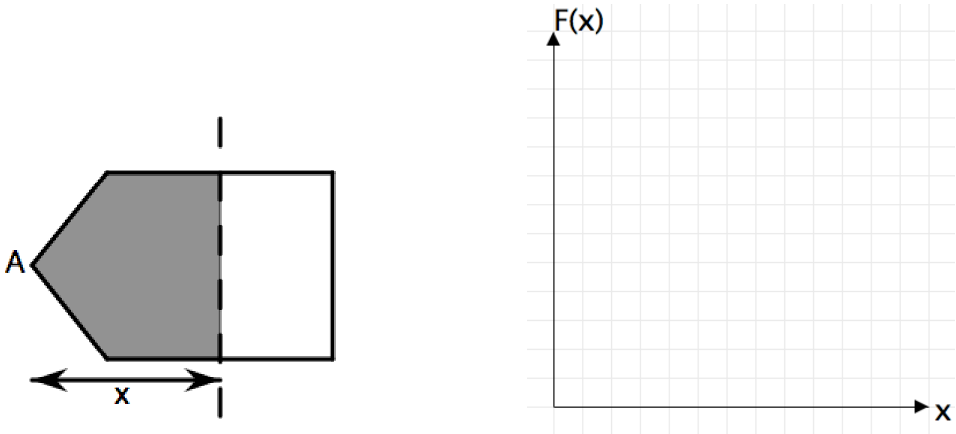




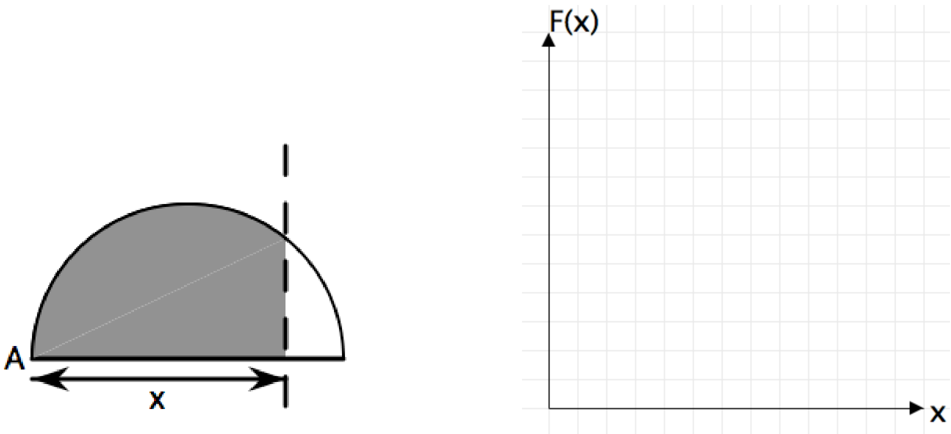
4.



5.



6.



Datum:	Fragebogen zur Arbeit mit dem Computer

Ich bin männlich ☐ weiblich ☐

Bitte beantwortet die folgenden Fragen sorgfältig. Danke!

1. Wie oft habt Ihr den Computer im Matheunterricht schon eingesetzt?

☐	☐	☐	☐	☐
sehr oft	oft	immer mal wieder	wenig	nie

2. Würdet Ihr gerne öfter im Matheunterricht mit dem Computer arbeiten?

☐ ja ☐ nein ☐ egal

3. Gibt es etwas, was Du besonders gut findest an der Arbeit mit dem Computer? Wenn ja, was?

4. Was ist für Dich anders, wenn Du beim Lösen mathematischer Probleme den Computer benutzt?

5. Hat Dir der Computer beim Verständnis des Flächeninhaltsgraphen geholfen?

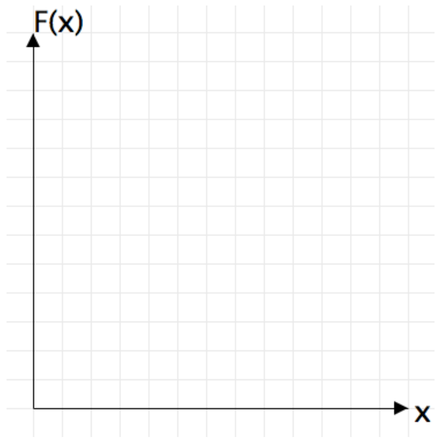
☐	☐	☐	☐
ja, sehr	ja, ein wenig	nein, das hab ich auch **mit** Computer **nicht** verstanden	nein, das hätte ich auch **ohne** Computer verstanden

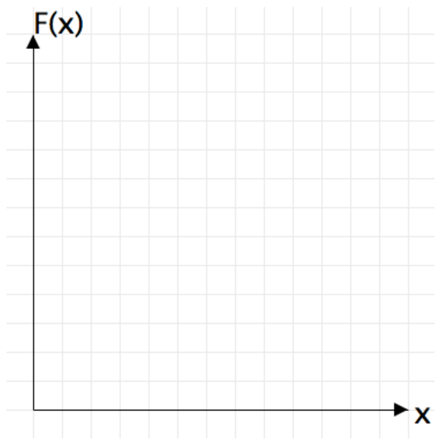
6. Kannst Du sagen, was genau Du besser verstanden hast, weil Dir der Computer zur Verfügung stand?

7. Denkst Du, dass es Dir für den Test geholfen hat, dass Du vorher am Computer das Verhalten der Dreiecksfläche untersucht hast?

☐	☐	☐	☐
ja, sehr	ein wenig	nein	weiß nicht

7. Denke Dir zwei eigene Beispiele aus: Zeichne zwei Formen und dazu passende Graphen.





Datum:	Fragebogen zur Arbeit mit dem Computer

Ich bin männlich ☐ weiblich ☐

Bitte beantwortet die folgenden Fragen sorgfältig. Danke!

1. Wie oft habt Ihr den Computer im Matheunterricht schon eingesetzt?

☐	☐	☐	☐	☐
sehr oft	oft	immer mal wieder	wenig	nie

2. Würdet Ihr gerne öfter im Matheunterricht mit dem Computer arbeiten?

☐ ja ☐ nein ☐ egal

3. Gibt es etwas, was Du besonders gut findest an der Arbeit mit dem Computer? Wenn ja, was?

4. Was ist für Dich anders, wenn Du beim Lösen mathematischer Probleme den Computer benutzt?

5. Welchen Aufgabenteil der Trapezaufgabe fandest Du am schwierigsten? Warum?

6. Hat Dir der Computer bei der Bearbeitung der Trapezaufgabe geholfen?

☐	☐	☐	☐
ja, sehr	ja, ein wenig	nein, das hab ich auch **mit** Computer **nicht** gekonnt	nein, das hätte ich **ohne** Computer gekonnt

7. Bei welchem Aufgabenteil der Trapezaufgabe fandest Du es besonders hilfreich, dass Dir der Computer zur Verfügung stand?

☐	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	garnicht

8. Kannst Du sagen, was genau Du besser verstanden hast, weil Dir der Computer bei der Trapezaufgabe zur Verfügung stand?

Markus HOHENWARTER, Florida Atlantic University; Yves KREIS, University of Luxembourg; Zsolt LAVICZA, University of Cambridge

Technology professional development and research collaboration: Towards an International GeoGebra Institute

Research suggests that, for the majority of teachers, solely providing technology is insufficient for the successful integration of technology into their teaching (Cuban, Kilpatrick and Peck 2001). It has been suggested that adequate training and collegial support increase teachers' willingness to integrate technology into their teaching and to develop successful technology-assisted teaching practices (Becker, Ravitz and Wong 1999). Our aim is to establish an International GeoGebra Institute (IGI) to be able to offer free structured training and support for teachers who are ready to integrate GeoGebra into their classrooms. In addition, we endeavour to organise and coordinate research projects in relation to GeoGebra to enhance the development of training and support materials. Whereas our initial plan is to establish an IGI site at Florida Atlantic University (USA), in the long run our goal is to collaborate with colleagues and set up other institutes in various locations around the world.

History of GeoGebra

GeoGebra (www.geogebra.org) is open-source dynamic mathematics software with rapidly growing worldwide popularity, especially in Europe and North America (Hohenwarter and Preiner 2007a, 2007b). The software was conceived as Markus Hohenwarter’s Master’s thesis project at the University of Salzburg, Austria. The basic idea of the development was to create dynamic mathematics software that incorporates geometry, algebra, and calculus, which other packages treat separately (spreadsheet and computer algebra extensions are soon to be added to the software), into a single easy-to-use package.

International GeoGebra Institute (IGI)

The unanticipated success of GeoGebra has demonstrated that non-commercial software packages have the potential to impact mathematics teaching and learning worldwide. There is an extensive self-supporting user community that shares free interactive teaching materials on the GeoGebraWiki and supports fellow users through the user forum. Volunteers from the user community have translated GeoGebra to 39 languages, offering the opportunity to use the software in local languages and in multicultural environments. The software runs on virtually any operating system as it requires only a Java plug-in and, unlike commercial products, students and teachers are not constrained with licenses to run the software on only a limited number of computers. Moreover, GeoGebra offers the powerful feature for teachers to create interactive online learning environments by supplying not only interactive worksheets, but also the entire software package for their students through the Internet. Such customised interactive worksheets have led many teachers to foster experimental and discovery learning for their students and to share thousands of such worksheets on GeoGebraWiki.

These developments have encouraged us to start working on the establishment of an International GeoGebra Institute where teachers and researchers, regardless of their location, aim to promote the learning and teaching of mathematics by supporting and coordinating the following activities:

1. offer free software for teachers, students, and anyone with non-commercial interest,
2. continue to enhance GeoGebra's capabilities and ease-of-use based on feedback from teachers and researchers,
3. offer free workshops, professional development, and teaching materials,
4. develop an organised structure to train, support, and possibly certify teachers who wish to participate in GeoGebra-related activities in their local areas, at conferences, and within IGI, and
5. design and support research projects in relation to GeoGebra and nurture a network of researchers who wish to contribute to any aspect of GeoGebra.

The first IGI site is currently being established at Florida Atlantic University, which will be followed by other sites around the world. Although IGI sites will have specific locations, the idea of working together on open-source software, professional development and research is more important than the actual location of IGI sites. We envision nurturing an accommodating network of IGI sites with colleagues working on various aspects of GeoGebra. The overall goal of IGI is to develop a supportive environment and continuous communication among participants and sites. According to this philosophy, every IGI site would only adopt ideas and materials that serve their local needs. With respect to research we anticipate that researchers will contribute to GeoGebra according to their specific research interests. We also hope that the network of IGI sites in different countries will offer the opportunity for researchers to conduct international comparative research and for teachers to collaborate with colleagues across borders. Moreover, we plan to support any incentives and funding applications that contribute to the objectives of IGI.

The IGI website will be a central part of this project that we hope to become the main channel of communication of interested people. Currently, we are designing this website which is likely to become available in the summer of 2008 (www.geogebra.org/IGI). The website will provide information about IGI locations, associated people, and related projects and activities. Local IGI sites can set up and maintain their own websites, which will be linked with the main IGI website.

IGI activities at Florida Atlantic University

With the support of the U.S. National Science Foundation (NSF) we are currently starting activities of the first IGI site at Florida Atlantic University (FAU). This site is currently developing GeoGebra professional development materials that can be adopted and extended by other IGI sites. The FAU-IGI site will coordinate the following activities:

- develop GeoGebra workshop and certification materials,
- offer workshops for teachers and future trainers throughout the US,
- further develop GeoGebra and implement new features of the software,
- develop an on-line support system for teachers,
- evaluate and improve the professional development activities and materials,
- design and implement research projects both on GeoGebra and IGI,
- deliver presentations at national and international conferences.

Other IGI sites will be able to base their activities on materials and experiences from the FAU-IGI site. However, all sites will be free to focus on specific elements or develop entirely new activities.

Evaluation and research activities in Florida

The activities of the FAU-IGI site will be constantly evaluated. The evaluation plan consists of four levels, the evaluation and review of

1. workshop and certification materials;
2. feedback from workshop participants;
3. workshop presenters;
4. the long term impact of the project.

The evaluation process will follow the principles of educational research methodologies, and serve as an instrument to continuously and constructively improve IGI activities. The primary goals of the evaluation are to establish standards for IGI activities and to provide constructive feedback for the IGI team. In addition, we aim to encourage team members and participants to engage in educational research to be able to improve teaching practices in a systematic and informed manner. Reports of all FAU-IGI activities, workshop materials, evaluation results, and research papers will be shared on the website of IGI. We hope that these materials will provide a foundation to assist activities at other locations.

Conclusion

GeoGebra has been rapidly gaining popularity among teachers and researchers around the world, because it is easy-to-use dynamic mathematics software that combines several aspects of different mathematical packages. In addition, because of its open-source nature an extensive user community has developed around it. However, most users of GeoGebra are currently teachers or researchers who are keen to integrate technology into their work. It is difficult to reach the 'average' teacher by providing free software without offering training and additional support. Hence, our aim is to develop a structure, which will manifest in GeoGebra Institutes around the world, to offer professional development for teachers and coordinate research activities in relation to GeoGebra. As the idea of the GeoGebra institute is fairly new, we are still looking for colleagues interested in participating in IGI related work in any way and at all levels.

References

BECKER, Henry J.; Jason L. RAVITZ and YanTien WONG (1999): Teacher and Teacher-Directed Student Use of Computers and Software. Teaching, Learning, and Computing: 1998 National Survey Report #3. USA: Center for Research on Information Technology and Organizations, University of California, Irvine and University of Minnesota.

CUBAN, Larry; Heather KIRKPATRICK and Craig PECK (2001): High Access and Low Use of Technologies in High School Classrooms: Explaining an Apparent Paradox. In: American Educational Research Journal, Vol. 38, No. 4, pp. 813-834.

HOHENWARTER, Markus and Judith PREINER (2007a): Dynamic mathematics with GeoGebra. In: Journal of Online Mathematics and Its Applications, Vol. 7, Article ID 1448.

HOHENWARTER, Markus and Judith PREINER (2007b): In: Journal of Online Mathematics and Its Applications, Vol. 7, Article ID 1574.

Hans HUMENBERGER, Wien

ash-Gleichge icht und Minimax- onze t – eine Gegen- berstellung

Die Spieltheorie ist ein Thema, das im Schulunterricht nicht sehr weit verbreitet ist. Aber insbesondere im Lichte fächerübergreifender Aspekte (Wirtschaft, Psychologie: Gefangenendilemma, Biologie etc.) hat die elementare Spieltheorie auch für den Schulunterricht einiges zu bieten (vgl. die letzte Seite dieses Beitrags). Dabei muss natürlich elementar betont werden, denn Spieltheorie als Forschungsdisziplin wird natürlich schnell sehr schwierig. Aus Platzgründen wird hier kaum mehr etwas über das Nash-Konzept[1] gesagt, wir wollen primär das Minimax-Konzept vorstellen, es dem (als bekannt vorausgesetzten) Nash-Konzept gegenüberstellen und zum Schluss einige Aspekte erwähnen, die aus fachdidaktischer Sicht für die Einbeziehung von Spieltheorie in den Schulunterricht sprechen.

Das Minimax-Konzept ist sehr risikoscheu, man trachtet dabei ungeachtet aller anderen Umstände, den eigenen *worst case* abzufedern: Wenn man mehrere Möglichkeiten zur Auswahl hat, wird jene gewählt, bei der der *worst case* am wenigsten schlimm ausfällt.

Ganz abgesehen von moralischen Bedenken gegenüber dem verwerflichen *Nichtbezahlen in öffentlichen Verkehrsmitteln* wollen wir dies am Schwarzfahrerspiel kurz erläutern. Zwei Personen, Fahrgast Franz (FF) und Kontrollor Karl (KK) haben je zwei verschiedene Möglichkeiten:

FF: schwarzfahren / bezahlen

KK: kontrollieren / nicht kontrollieren

		KK	
		kontroll.	nicht kontroll.
FF	schwarz fahren	3 -8	-2 1
	zahlen	-1 0	0 -1

Hier sind die (subjektiven) Auszahlungen an die Beteiligten in einer Bimatrix dargestellt. In jedem Feld steht links unten die Auszahlung an FF und rechts oben die an KK. Die Kombination der Strategien *schwarzfahren/kontrollieren* ist dabei natürlich die schlechteste für FF und die beste für KK.

Aus der Sicht von FF: bei *schwarzfahren* ist mein *worst case* – , bei *zahlen* nur – 1, also werde ich wohl *zahlen*.

---

[1] Siehe die Beiträge von . Ableitinger und P. Hauer-Typpelt in diesem Tagungsband.

Aus der Sicht von KK: Bei *kontrollieren* ist mein *worst case* – 1, bei *nicht kontrollieren* – 2, also werde ich *kontrollieren*.

Nun können sich aber beide fragen: Kann ich die *worst case*-Werte durch Mischen der Strategien sogar noch verbessern Wir machen dies am Beispiel von KK deutlich.

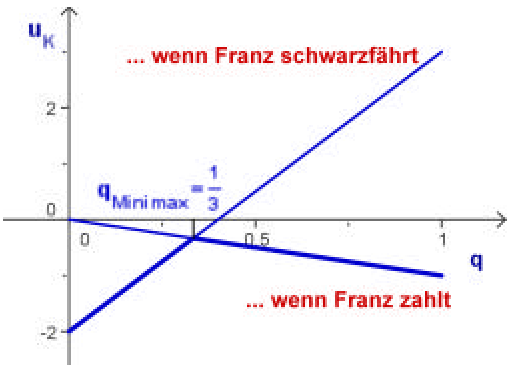
Kann KK seine beiden Möglichkeiten in einem bestimmten Verhältnis $q:(1-q)$ mischen , so dass seine durchschnittliche Auszahlung auf lange Sicht doch mehr als – 1 ist Im Sinne des Minimax-Konzepts ist also ein Mischungsverhältnis gefragt, bei dem der *worst case* möglichst wenig schlimm ist (d. h. das durchschnittliche Auszahlungsminimum maximal).

Wenn KK mit dem Verhältnis $\text{kontrollieren} : \text{nichtkontrollieren} = q:(1-q)$ spielt (Entscheidung jeweils z. B. durch ein Zufallsexperiment), so beträgt seine durchschnittliche Auszahlung $u_K(q)$ auf lange Sicht:

wenn FF schwarzfährt: $u_K(q) = 3\cdot q + (-2)\cdot(1-q) = 5q-2$

wenn FF zahlt: $u_K(q) = (-1)\cdot q + (0)\cdot(1-q) = -q$

Diese beiden Geraden können gezeichnet und zum Schnitt gebracht werden, sie schneiden einander beim Wert $q_{\text{Minimax}} = 1/3$.



Die unteren beiden ste dieser einander schneidenden Geraden sind etwas dicker gezeichnet, sie stellen bei gegebenem q das jeweilige Minimum der durchschnittlichen Auszahlung an KK, den jeweiligen *worst case* auf lange Sicht für KK dar. Da dieser möglichst wenig schlimm, dieses Minimum also möglichst groß werden soll, ist klar:

KK soll am besten $q_{\text{Minimax}} = 1/3$ wählen. Damit ist sein durchschnittliches Auszahlungsminimum nicht nur möglichst groß, sondern die durchschnittliche Auszahlung an ihn ist auch fixiert (gleichgültig, ob FF zahlt oder schwarzfährt), es beträgt – 1/3, dies ist besser als der obige Wert – 1.

Ganz analoge Überlegungen könnte auch FF anstellen: Wie soll ich meine beiden Strategien mischen schwarzfahren : zahlen $p:(1-p)$, so dass mein erwartetes Auszahlungsminimum möglichst groß wird (*worst case* möglichst wenig schlimm) Er käme zu einem Wert $p_{\text{Minimax}} = 1/10$.

Beim Nash-Konzept **E**agieren die Spieler immer auf den jeweiligen Fremdparameter (aus der Erfahrung als bekannt): Aus der Sicht von FF ist das die relative Häufigkeit q des Kontrollierens durch KK, aus der Sicht von KK relative Häufigkeit p des Schwarzfahrens von FF. In unserem Spiel würde dies sinngemäß bedeuten:

FF: Wenn KK häufig genug kontrolliert, werde ich wohl besser bezahlen.
KK: Wenn FF häufig genug schwarzfährt, werde ich wohl besser kontrollieren

Was hier genau häufig genug heißt, wird durch den so genannten Nash-Wert bestimmt, ein kritischer Vergleichswert in diesem Zusammenhang: $q > q_{\text{Nash}} = 1/5$ bzw. $p > p_{\text{Nash}} = 1/6$ (Werte hier ohne Begründung).

Im Gegensatz dazu drehen die Spieler/innen beim Minimax-Konzept aktiv an der Schraube eigener Parameter , ganz unabhängig davon, wie sich der/die Gegner/in verhält – natürlich unter einem anderen Gesichtspunkt bzw. mit einem anderen Ziel.

Im Folgenden eine prägnante Gegenüberstellung der beiden Konzepte:

ash- onze t	Minimax- onze t
Ziel Der/die Spieler/in wählt jedes Mal die beste Antwort auf den bisher gespielten Fremdparameter (REaktion). Langfristig stellt sich als *Folge* davon der eigene Nash-Wert von selbst ein[2].	**Ziel** Der/die Spieler/in will den *worst case* abfedern (risikoscheu) und wählt dazu bewusst (Aktion) den Minimax-Wert beim eigenen Parameter.
Das durchschnittliche fremde Auszahlungsmaximum wird dabei minimiert[3]. Dieser für den Gegner etwas unerfreuliche Aspekt ist hier nicht das Kriterium, sondern eine unschuldige Folgerung	Das durchschnittliche eigene Auszahlungsminimum wird dabei maximiert. Dies ist der primäre Gedanke und das eigentliche Kriterium
Die durchschnittliche Fremdauszahlung wird fixiert[4].	Die durchschnittliche Eigenauszahlung wird fixiert.

Die Spieltheorie in dieser elementaren Form bietet eine Fülle von positiven fachdidaktischen Aspekten, einige ausgewählte werden im Folgenden (manchmal nur stichwortartig) aufgezählt:

---

[2] Vgl. den Beitrag von . Ableitinger in diesem Tagungsband.

[3] Vgl. Abb. 5 und 6 im Beitrag von P. Hauer-Typpelt in diesem Tagungsband.

[4] Vgl. Abb. 5 und 6 im Beitrag von P. Hauer-Typpelt in diesem Tagungsband.

- **Gute Vernetzungsm glichkeit** Lineare Gleichungen, Zeichnen und Schneiden von Geraden, Relative Häufigkeiten, Durchschnittswerte (auf lange Sicht), etc. e nach Klassenstufe kann dabei auch von Wahrscheinlichkeiten bzw. Erwartungswerten gesprochen werden. Dadurch ergibt sich eine
- **reite Einsatzm glichkeit**
  Verschiedene Klassenstufen (– 12) und Schulformen, verschiedene Schwerpunkte (z. B. konomie in Wirtschaftsgymnasien)
- **Trotzdem nur enige innermathematische Voraussetzungen**
  Die involvierte Mathematik ist auf diesem Niveau relativ bescheiden und technisch leicht .
- **Darstellen** Bimatrix, Graphen – Diagramme
- **Inter retieren** Was *bedeuten* die Geraden Welche Auszahlungswerte sollen in der Bimatrix stehen (Diskussionen) Was passiert, wenn diese verändert werden
- **Im Vordergrund steht dabei der verst ndige Umgang**
  Semantik wichtiger als Syntax; Herausarbeiten der harakteristika bzw. Unterschiede; nicht: Einpauken des jeweiligen Algorithmus
- **Angemessenes ild von Mathematik ealit tsbez ge**
  Spieltheoretische Modelle sind wichtig in Wirtschafts-, Sozial-, Politikwissenschaften (auch Evolutionstheorie).
- **ealisierung der undamentalen Idee timieren**
  Beide Konzepte (Nash und Minimax) sind nach ihren (verschiedenen) Kriterien jeweils optimale Lösungen.
- **icht-Eindeutigkeit von L sungen**
  Von Modellierungsaufgaben ist man ja gewohnt, dass es verschiedene Modelle (Lösungen) geben kann, bei Optimierungsaufgaben wohl eher nicht. Aber auch beste Strategie kann hier verschieden interpretiert werden, je nachdem welche Kriterien (Nash, Minimax) man anlegt.
- **Mathematik als Prozess ist dabei gut m glich**
  – relativ hohe Eigenaktivität der Lernenden möglich
  – Intuitive Versionen der Lösungs**kriterien** liegen in beiden Fällen sehr nahe und können auch **selbst** erarbeitet werden:
  1) Nash: Ab einer gewissen Kontrollhäufigkeit ist zahlen besser . . .
  2) Minimax: Ich wähle jene Strategie, bei der mir am wenigsten passieren kann.
- **om utereinsatz** Plot der Graphen (auch 3D, Sattelfläche)

Stephan Hußmann und Conny Walzebug, TU Dortmund

indive
Individuelles Lehren lernen

individualisieren von Lernprozessen
differenzieren im Unterricht
vernetzen von Theorie und Praxis

Der professionelle Umgang mit der Heterogenität von Schülerinnen und Schülern ist ein zentraler Punkt des Lehrerhandelns. Sowohl gestandene Lehrpersonen als auch Anwärter und Studierende müssen sich mit einer großen Vielfalt an Fähigkeiten, Einstellungen und Interessen innerhalb einer Klasse auseinander setzen. Dabei bietet die sensible Wahrnehmung der individuellen Entwicklungslinien enorme Chancen für die Entwicklung des Einzelnen als auch für die ganze Lerngruppe, ganz im Sinne der bildungspolitischen Forderung einer stärkeren individuellen Förderung (vgl. Arnold 1999; Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 6. März 2003).
Ein bewusster und produktiver Umgang mit der Heterogenität erfordert jedoch die Ausbildung und Förderung bestimmter Kompetenzen, die bislang in vielen Bereichen der Lehrerbildung noch nicht ausreichend Beachtung gefunden haben. Diagnose- und Methodenkompetenz, ein differenzierter Umgang mit Aufgaben und nicht zuletzt eine Kultur des Zutrauens sind entscheidende Bausteine für eine Lehr-/Lernkultur, in der Verschiedenheit wertgeschätzt und genutzt wird (vgl. Weinert 1999). Das Projekt indive widmet sich diesem Thema und ist mit der Zielperspektive angetreten, Theorie und Praxis im Kern der oben beschriebenen Kompetenzen in der Ausbildung der Lehramtsstudieren und in Kooperation mit Projektschulen intensiver als bisher zu verbinden und systematisch auszubauen.

Als Kooperationsprojekt wird indive vom *Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts* (IEEM) an der Universität Dortmund und der *Arbeitsgruppe Schulpädagogik* an der Universität Duisburg-Essen gemeinsam mit einem Netzwerk regionaler Schulen getragen. Gefördert wird das Projekt von der Essener Stiftung Mercator. Im Fokus dieses Beitrags steht die fachdidaktische Perspektive des Projektes[1].
Indive versteht sich als Entwicklungs- und Forschungsprojekt im Sinne einer design science. Das bedeutet beispielsweise, dass Entwicklungs- und Forschungsarbeit eng aufeinander bezogen sind und in einer ständigen Wechselwirkung zur gegenseitigen Weiterentwicklung beitragen. Die Übersicht über die Projektschritte zeigt die enge Verzahnung der beiden Perspektiven:

[1] Umfassende Informationen zum Gesamtprojekt erhalten Sie auf unserer Internetpräsenz: www.indive.net.

Entwicklung	Forschung
Phase 0. Integration in bestehende Strukturen ,Aufbau der notwendigen Infrastruktur (Schulen, Seminare,…)	
Phase 1. • Entwicklung von Lehnarrangements/ Instrumente zur Diagnose und individuelle Förderung (Universität) • Einsatz der Lehnarrangements/Instrumente (Schulen)	**Phase 1.** • Qualitative Studie der Effekte hinsichtlich diagnostischer Kompetenz • Entwicklung der Evaluierungsinstrumente
Phase 2. • Überarbeitung und erneuter Einsatz von Lehnarrangements/ Instrumente zur Diagnose und individuelle Förderung (Universität) • Weiterbildung von Lehrpersonen (Universität)	**Phase 2.** • Qualitative und Quantitative Studie der Effekte hinsichtlich diagnostischer Kompetenz • Entwicklung der Unterstützungsinstrumente
Phase 3. • Einsatz der Unterstützungsinstrumente für die Entwicklung diagnostischer Kompetenz. • Weiterentwicklung der Unterstützungsinstrumente	**Phase 3.** • Qualitative und Quantitative Studie zu den Effekten der Unterstützungsinstrumente

Abbildung 1: Projektverlauf

ind!ve - das Entwicklungsprojekt

Die Entwicklungsarbeit bezieht auf verschiedene inhaltliche Stränge und verschiedene Adressaten:

1. Die Entwicklung von Lehr-/Lernarrangements zur Individualisierung von Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler,
2. die theoretisch reflektierte Entwicklung von Lernarrangements, deren Einsatz und Reflexion auf Seiten der Studierenden und
3. die an Theorie orientierte und in der Praxis verortete Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern in der Schule.

Die Wirkung und Nachhaltigkeit dieser Entwicklungsarbeit soll sich an der Kompetenzentwicklung der Studierenden und Lehrpersonen messen lassen und ist in den folgenden Zielformulierungen für den Bereich ‚diagnostische Kompetenz' formuliert (in Anlehnung an Arnold 1999):

Lehrpersonen sollten die Kompetenzentwicklung der Schüler und Schülerinnen angemessen wahrnehmen, deren Fähigkeiten treffend einschätzen (Diagnose- oder Urteils*genauigkeit*) und die gewonnenen Erkenntnisse in tragfähige Förderkonzepte umsetzen.

Lehrpersonen sollen

- aus dem verfügbaren Methodenarsenal die für anstehende Unterrichtsentscheidungen angemessenen Diagnoseverfahren auswählen und Diagnoseverfahren selbst entwickeln;

- fähig sein, sowohl von Testexperten professionell konstruierte als auch unterrichtsbezogene, von Lehrern entwickelte Diagnoseverfahren anzuwenden, auszuwerten und zu interpretieren;
- fähig sein, pädagogisch-diagnostische Informationen in pädagogischen Entscheidungen, die einzelne Schüler bzw. Schülergruppen betreffen und für die langfristige Planung ihres Unterrichts zu nutzen.

Ein kleiner Einblick in die konkrete Arbeit der ersten Phase

Das Projekt befindet sich augenblicklich Mitte der zweiten Phase. Dies gestattet einen Einblick in die Entwicklungsarbeit der ersten Phase. Schon vor Beginn des jeweiligen Semesters treffen Projektlehrerinnen und –lehrer aller Schulformen in Praktikumsvorbereitungsseminaren mit den Studierenden zusammen, um frühzeitig gemeinsame Planungen für das Praktikum aufnehmen zu können. Dabei steht die Entwicklung von Diagnose- und Förderinstrumenten im Zentrum. Studierende lernen so viel früher als bei sonstigen Praktika ihre Klasse und weitere Rahmenbedingungen kennen. Die Einschätzungen der Lehrpersonen hinsichtlich einer Ausgangsdiagnose unterstützt die Entwicklung von Diagnoseinstrumente und Diagnosekompetenz auf Seiten der Studierenden, deren Instrumente den Lehrpersonen wiederum Rückmeldung geben hinsichtlich ihrer Urteilsgenauigkeit. Im Seminar lernen die Studierenden das didaktische Potential von Aufgaben hinsichtlich unterschiedlicher Zwecke kennen, z.B. Lernstände diagnostizieren, Selbsteinschätzung ermöglichen, Lernpotentiale besser einschätzen und Förderangebote gestalten. Diese materialisierte und mentale Kompetenz tragen sie in den Unterricht, aus deren Einsatz und Reflexion dann langfristig tragfähige Unterrichtsmaterialen erwachen, die in einem stetigen Entwicklungsprozess weiterentwickelt werden. Dies gelingt insbesondere dadurch, dass nachfolgende Jahrgänge auf Schülerprodukte vergangener Jahrgänge zurückgreifen und diese im Seminar analysieren können. Unterstützt wird diese Entwicklungsarbeit durch die indive-Lernplattform, die es erlaubt, Daten online zu präsentieren und auszutauschen, so dass alle Beteiligten des Projekts diese stets einsehen und bearbeiten können.

ind!ve - das Forschungsprojekt

Die Entwicklung der Forschungsinstrumente vollzieht sich parallel zur Entwicklungsarbeit und praktischen Umsetzung. Insbesondere die erste Phase wird durch qualitative Studien dazu genutzt, geeignete Untersuchungsinstrumente zu entwickeln. Dabei stehen die folgenden Aspekte im Fokus der Studie:

- Entwicklung von Instrumenten zur Beschreibung von Aspekten und Entwicklungslinien diagnostischer Kompetenz

- Beschreibung und Exploration von förderlichen und hemmenden Aspekten zur Ausbildung diagnostischer Kompetenz

Bislang liegen zu beiden Aspekten nur wenige Erkenntnisse im Bereich der Sekundarstufe im Fach Mathematik vor. Theoretischer Ausgangspunkt für unsere Arbeit ist die fachunspezifische Klassifizierung diagnostischer Kompetenz nach Helmke et al. (2004), die drei Merkmale ausmachen: a) Intelligenz und kognitive Komplexität, b) bereichsspezifische Fähigkeiten und Wissensstrukturen (methodisches und gegenstandsspezifisches Wissen) und c) spezifische Kenntnisse (z.B. Wissen über einzelne Schülerinnen und Schüler und Klassen). Diese Merkmale fließen in die Konzeption von (Selbst-)Diagnosematerial ein. Bislang zeigte sich, dass die Lehrpersonen bei der Konzeption von Aufgaben zur Ausgangsdiagnose die Fähigkeiten ihrer Schülerinnen und Schüler häufig unterschätzen, während sie bei Enddiagnosen zur Überschätzung tendieren (für den letzten Aspekt vgl. auch Hosenfeld et al., 2002). Diese Beobachtungen haben wir zum Anlass genommen, ein Forschungsdesign zu entwickeln, welches uns sowohl qualitativ als auch quantitativ Aufschlüsse darüber liefern wird, wie der Zusammenhang zwischen geschätzter und tatsächlicher Aufgabenschwierigkeit ist und welche Auswirkungen Kompetenzsteigerungen in den Merkmalen b) und c) besitzen. Es zeigt sich doch schon jetzt - ein gutes Jahr nach Projektbeginn -, dass die Vernetzung von Hochschule und Schule via Studierende im Praktikum deutliche Entwicklungen in diesen beiden Bereichen und damit auch für die Diagnosekompetenz nach sich ziehen. Die große Nachfrage nach Fortbildungsangeboten im Bereich der Diagnose und Förderung verdeutlicht zudem, dass die Entwicklungspotentiale auch von den Lehrpersonen wahrgenommen werden.

Literatur

Arnold, K.-H. (1999). Diagnostische Kompetenz erwerben. Wie das Beurteilen zu lernen und zu lehren ist. Pädagogik, 51 (7-8), 73-77.

Helmke, A., Hosenfeld, I., Schrader, F.-W. (2004). Vergleichsarbeiten als Instrument zur Verbesserung der Diagnosekompetenz von Lehrkräften. In: R. Arnold & C. Griese (Hrsg.), Schulmanagement und Schulentwicklung. Hohengehren: Schneider-Verlag

Hosenfeld, I., Helmke, A. & Schrader, F.-W. (2002). Diagnostische Kompetenz: Unterrichts- und lernrelevante Schülermerkmale und deren Einschätzung durch Lehrkräfte in der Unterrichtsstudie SALVE. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen. Zeitschrift für Pädagogik, 45. Beiheft (S. 65-82). Weinheim: Beltz.

Weinert, F. E. (1999): Concepts of competence (Contribution within the OECD project Definition and selection of competencies: Theoretical and conceptual foundations (DeSeCo)). Neufchatel: DeSeCo.

Maria INGELMANN, Regina BRUDER, TU Darmstadt

CAS-Einsatz in der Sekundarstufe I

Der Schulversuch CAliMERO entwickelt und erprobt ein Unterrichtskonzept zum Einsatz CAS-fähiger Taschencomputer im Mathematikunterricht an Gymnasien von Klasse 7 bis 10 in Niedersachsen. Seine Grundlage ist eine kompetenzorientierte Aufgabenkultur, die das vielschichtige Potenzial der Taschencomputer zum Entdecken von Mathematik ausnutzt und es für effektive Übungsprozesse mit Verständnisförderung einsetzt. Mit Hilfe von Schülerbefragungen und Leistungstests mit und ohne Rechnereinsatz wird der Erfolg dieses Konzepts überprüft. Von Schülern angefertigte Stundenprotokolle zeigen die Umsetzung des Konzepts.

Das Projekt CAliMERO

Ausgehend von dem in Niedersachsen bereits etablierten Einsatz von grafikfähigen Taschenrechnern (GTR) begann der Schulversuch im Schuljahr 2005/2006 mit dem Ziel einer Konzeptentwicklung für einen CAS-gestützten Mathematikunterricht ab Klasse 7 in 29 Klassen an sechs Gymnasien mit Evaluation. Zur Verwirklichung dieses Zieles sollen ein Curriculum und Gestaltungskonzept für einen Mathematikunterricht entwickelt werden, der den Rechner sinnvoll zur Förderung mathematischer Kompetenzen nutzt. Die beteiligten Fachlehrer haben in vierteljährlichen mehrtägigen Treffen gemeinsam die Unterrichtsbausteine diskutiert und ausgearbeitet, vgl. Bruder/Weiskirch (2007a,b,c).

Unterrichtskonzeption

Im Rahmen des Projekts CAliMERO soll der Einsatz moderner Technologie im Mathematikunterricht den nachhaltigen Lernprozess in mehrfacher Hinsicht unterstützen. Die Schülerinnen und Schüler sollen den Taschencomputer sowohl als Lernwerkzeug zum Entdecken mathematischer Zusammenhänge als auch als Rechenwerkzeug zum Anwenden von Mathematik nutzen. Daneben sollen sie auch die notwendige Werkzeugkompetenz erwerben, um den Rechner sicher beim Lösen mathematischer Problemstellungen einsetzen zu können. Besonderes Augenmerk wird auf die durch den Rechner gegebene Möglichkeit des Wechselns zwischen mathematischen Darstellungsformen gelegt.

Mit dem Einsatz von solchen methodischen Elementen wie Semantischen Netzen und Kontrollfragen zur Selbsteinschätzung soll Zielklarheit gefördert und die Übernahme von Verantwortung für den eigenen Lernprozess unterstützt werden. Wahlmöglichkeiten bei den Unterrichtseinstiegen und in den Übungsmaterialien helfen den Lehrkräften, die Besonderheiten der jeweiligen Lerngruppe zu berücksichtigen. Die Schüler können in den Übungsphasen selbstständig bestimmen, wann sie den Rechner einsetzen und mit welcher der zur Verfügung stehenden Darstellungsformen sie arbeiten. Auf diese Weise findet eine Binnendifferenzierung im Sinne multipler Lösungswege statt.

Durch den Einsatz vielfältiger Unterrichtsmethoden wie Gruppenpuzzle, Stationenlernen, Spielen, Planarbeit etc. soll eine individuell fördernde Unterrichtskultur geschaffen werden. Regelmäßige Kopfübungen und Strategien zum Problemlösen wurden ebenfalls in das Konzept eingebaut.

Ergebnisse der Schülerfragebögen

Der Evaluation nach zwei Projektjahren liegen die Ergebnisse der Projektschulen zugrunde (Projektgruppe N = 554). Daneben wurden fünf Vergleichsklassen an verschiedenen niedersächsischen Gymnasien in die Evaluation eingebunden, die im Mathematikunterricht mit GTR arbeiten (Vergleichsgruppe N = 106).

Eine deutliche Weiterentwicklung ist bei der Projektgruppe in Relation zur Vergleichsgruppe vor allem bei den Fragen zur Unterrichtsgestaltung zu erkennen. Nach Aussage der Lernenden wurde die Zeit für selbständige Entdeckungsprozesse sowie für das Ausprobieren verschiedener Lösungswege erhöht. Zudem bieten sich nach Schülerwahrnehmung mehr Möglichkeiten, Ergebnisse im Unterricht zu diskutieren und zu präsentieren.

Der Taschencomputer und dessen Einsatz im Mathematikunterricht werden von den Lernenden im Mittel positiv, jedoch auch sehr heterogen bewertet. Der Vergleich mit der Bewertung des GTR durch die Vergleichsgruppe zeigt, dass der CAS-Einsatz bei der Projektgruppe positivere Emotionen hervorruft. Dabei sind zwischen der Bewertung des Taschencomputers und der Mathematiknote keine signifikanten Zusammenhänge festzustellen.

Ergebnisse der Schülerleistungstests

In den Tests über jeweils 45 Minuten, die als Open-Ended-Tests konzipiert wurden, wechselten sich einfachere und anspruchsvollere Aufgabenstellungen ab. In der 7. Klasse fand der Test noch rechnerfrei statt, im Test für das 8. Schuljahr wurde auch der Einfluss der Rechnernutzung untersucht. Parallel dazu wurde ein rechnerfreier Kopfrechentest eingesetzt (15 min).

Es zeigt sich, dass die Lernenden der Projektschulen in den ersten drei Tests, also schon von Anbeginn schwächer abschnitten als die Vergleichsgruppe. Im Nachtest der Klasse 8 aber konnte die Projektgruppe im Mittel die Leistungen der Vergleichsgruppe erreichen. Es wird vermutet, dass die bessere Vorstellbarkeit mathematischer Zusammenhänge durch die eingesetzten Rechner, das kompetenzorientierte ganzheitlich angelegte Aufgabenkonzept sowie die Kontrollmöglichkeiten mit dem CAS diese Effekte gerade auch bei den leistungsschwächeren Lernenden bewirkt haben.

In Bezug auf die allgemeinen mathematischen Kompetenzen zeigt der Leistungstest für Klasse 8 stärkere positive Entwicklungen der Projektgruppe in Relation zur Vergleichsgruppe vor allem im Bereich der „Modellierungskompetenz“ und der Kompetenz „mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“.

Es gibt einige interessante Detailergebnisse, die noch näherer Erklärung bedürfen: Von Anbeginn und in allen weiteren Leistungstests schneiden die Jungen der Projektgruppe im Mittel bisher besser ab als die Mädchen. Die Tests des 8. Schuljahrs zeigen, dass die Jungen der Projektschulen besonders hohe Leistungszuwächse innerhalb des Jahres erzielt haben. In den Vergleichsschulen haben sich Jungen und Mädchen parallel entwickelt.

Die im Kopfrechentest in Klasse 8 gemessenen Rechenfertigkeiten zeigen, dass sich Projekt- und Vergleichsgruppe parallel positiv entwickeln. Diese nicht selbstverständliche Entwicklung wird auf die im Unterrichtskonzept von CAliMERO verankerten ritualisierten Kopfübungen zurückgeführt.

Ergebnisse der Stundenprotokolle der Schülerinnen und Schüler

Zur Auswertung lagen die Stundenprotokolle zu den Unterrichtseinheiten „Lineare Zusammenhänge“ und „Stochastik“ der Klasse 8 von jeweils zwei Schulen vor. Insgesamt wurden 404 Unterrichtsstunden protokolliert. Bei der Frage nach der Gestaltung des Unterrichts zeigt sich, dass verschiedene Elemente der Unterrichtskonzeption von CAliMERO im Unterricht etabliert sind. In 49 % der protokollierten Stunden gab es nach Aussage der Lernenden explizite selbstständige Arbeitsphasen, 26 % der Stunden enthielten Gruppenarbeitsphasen. In 15 % der Stunden wurden rechnerfreie Kopfübungen integriert.

In 54 % der dokumentierten Stunden wurde mit dem Taschencomputer gearbeitet, dabei wurde der Rechner in dem überwiegenden Teil der Stunden (81%) von den Schülern selbst benutzt. In 65% der Stunden gab es keine Probleme beim Rechnereinsatz. Probleme mit den Taschencomputern nahmen die Lernenden, wenn überhaupt, bei der Anwendung neuer Inhalte und wegen fehlender Grundkenntnisse wahr, dagegen sind die auftretenden technischen Schwierigkeiten erfreulich gering (in 11% der Stunden).

Es zeigt sich, dass es in den beiden ausgewerteten Unterrichtsbausteinen eine deutliche Abkehr vom klassischen Frontalunterricht gegeben hat und die Lernenden im Mathematikunterricht jetzt stärker miteinander arbeiten und lernen. Dabei wird die große Unbefangenheit der Schülerinnen und Schüler gegenüber der neuen Technologie deutlich. Die von den Lernenden dokumentierte Nutzung des Taschencomputers im Unterricht lässt weiterhin den Schluss zu, dass sich das freie Ausprobieren und Experimentieren mit dem Taschencomputer im Unterricht etabliert hat.

Ausblick

Insgesamt ist das Projekt CAliMERO erfolgreich angelaufen und das sich ständig im Dialog mit den beteiligten Lehrkräften weiter entwickelte Unterrichtskonzept hat sich bereits bewährt. In den folgenden Jahren wird auf eine stärkere Binnendifferenzierung im Unterricht und auf die Ausschöpfung des Rechnerpotenzials zur Kompetenzentwicklung hingearbeitet.

Literatur

Bruder, Regina; Weiskirch, Wilhelm (Hrsg.) (2007a): CAliMERO - Computer-Algebra im Mathematikunterricht. Band 1: Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler: Problemlösen lernen - Längen, Flächen- und Rauminhalte, Terme und Termumformungen - Einführung mit dem Taschencomputer (TC) - Kopfübungen - Basiswissen. Sek I CAS, T³ Deutschland.

Bruder, Regina; Weiskirch, Wilhelm (Hrsg.) (2007b): CAliMERO - Computer-Algebra im Mathematikunterricht. Band 2: Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler: Entdeckungen an Dreiecken und Vierecken - Mehrstufige Zufallsexperimente - Einführung mit dem Taschencomputer (TC) - Kopfübungen- Basiswissen. Sek I CAS, T³ Deutschland.

Bruder, Regina; Weiskirch, Wilhelm (Hrsg.) (2007c): CAliMERO - Computer-Algebra im Mathematikunterricht. Band 1: Methodische und Didaktische Handreichung: Problemlösen lernen - Längen, Flächen- und Rauminhalte, Terme und Termumformungen - Einführung mit dem Taschencomputer (TC) - Kopfübungen- Basiswissen. T³ Deutschland.

Ingelmann, Maria; Bruder, Regina (2007): Sinnvoller Einsatz von CAS in den Klassen 7 und 8. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007, Teil I. Hildesheim: Franzbecker.

Ingelmann, Maria & Bruder, Regina (2007b): Appropriate CAS-Use in Class 7 and 8. In: Woo, J.-H., Lew, H.-C., Park, K.-S., Seo, D.-Y. (Hrsg.): Proceedings of the 31st Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education.

Thomas Jahnke, Potsdam

Die empirische Wünschelrute und ihre Folgen

Das eigenartige an der empirischen Forschung ist, dass sie immer etwas hervorbringt; ob kleinste Examensarbeit oder International Survey, sie kann nicht leer ausgehen. Immer erhält sie Zahlen und damit Skalen, Intervalle, Ranglisten und, was dann der statistische Apparat dienlich zur Verfügung stellt, Mittelwerte, Standardabweichungen, Korrelationen und so fort. Man wünscht sich mit der empirischen Rute gleichsam Ergebnisse herbei. Durch das Messen erhält man Daten – eigentlich sogar nur Zahlen, deren Realitätsgehalt (oder genauer Realitätsbeschreibungsvermögen) außer Frage steht, ja dem ganzen Prozess eine Art quasi-naturwissenschaftlicher Dignität verleiht. Die Frage, ob man da tatsächlich etwas misst, was die Realität beschreibt und sinnvoll begreift, stellt sich gar nicht, weil der Gegenstand durch den Messprozess hervorgebracht und konstituiert wird. Solche Forschung produziert ihre Begriffe (heute sagt man dann auch *Konzepte*) und Ergebnisse parthenogenetisch, notfalls auch ohne jede Anleihen bei der bemessenen Realität oder Bezüge zu ihr. Und wenn man die Rotzigkeit (Pardon!) des Positivismus zugrunde legt, gilt das dann alles bis zu seiner Widerlegung, die – dessen sind sich die Pisaner und die involvierten *educational assessment*-Firmen, die PISA entwickelt und an bisher achtundfünzig Länder verkauft haben, sicher – faktisch wenn nicht sogar prinzipiell ausgeschlossen ist. Die Sache ist versiegelt. Wo Kritik nicht abprallt, freut sich die Forschungsindustrie über Folgeaufträge, die dann in der beschriebenen Art bearbeitet werden.

Eine erste Folge einer testorientierten Schulbildung und einer testresultat-gesteuerten Bildungspolitik ist, dass das, was in der Philosophie und der Soziologie als Entfremdung bezeichnet, in einer neuen Qualität den Lehrerberuf und das Lehren und Lernen an der Schule durchdringt. Es geht nicht mehr um die Sache selbst, um die Schüler, um die Lehrer, um ein gemeinsames Bildungserlebnis, es geht letztlich um Testresultate, anhand derer der Erfolg des Lehrens und Lernens gemessen und beurteilt wird. Verächtlicher und desinteressierter kann man mit einem Schüler kaum umgehen, als dass man sich z.B. in Multiple-Choice-Tests nur noch dafür interessiert, ob er an der richtigen Stelle ein Kreuz macht, und ihm dafür keinen oder einen Punkt gibt. Auch das hässliche Kompositum *Bildungsstandards* (die überdies auch noch *normiert* werden) bekräftigt aus sich selbst heraus, dass es nicht mehr um individuelle Lernprozesse oder kulturelle Teilhabe geht.

Beispiele für die Folgen solcher Entfremdung kann man (nicht nur den amerikanischen) Zeitungen entnehmen.

> **New York: Schüler bekommen für gute Leistungen bis zu 50 Dollar**
> Wie die "New York Times" berichtet, will die Stadt New York Schüler zu besseren Leistungen anspornen. Für gute Noten können die Schüler bis zu 50 Dollar erhalten. Insgesamt wurde bereits eine halbe Million US-Dollar ausbezahlt. 200 Schulen beteiligen sich an dem Programm, bei dem auch den Lehrern eine Sonderzahlung am Ende des Jahres winkt, falls Schüler ihre Noten verbessert haben. (…) Ende Februar wurde zudem damit begonnen, Schüler für gute Leistungen und vorbildliches Verhalten mit einem kostenlosen Handy zu belohnen. (Quelle: http://www.shortnews.de/start.cfm?id=700812)

Dieses Beispiel erscheint noch recht oberflächlich, eher als solches für problematische gesellschaftliche Verkehrsformen, fragliche Schulverhältnisse und für eine Verrohung pädagogischer Sitten oder Normen. Es geht viel grundsätzlicher darum, ob die in schulischen Bildungsprozessen angelegte, unmittelbare und authentische Begegnung der Beteiligten miteinander und mit der Sache nun durch eine äußere Zielvorgabe und ein äußeres Maß in ein mittelbares Verhältnis transformiert wird, dessen Zwecke deutlich und sichtbar außerhalb des eigentlichen Bildungsprozesses liegen.

Eine zweite Folge der Orientierung des Schulunterrichts auf Testbildung ist die Abwertung der Fächer, die nicht abgetestet werden. Ihr Wert sinkt herab zu dem einer ‚sozialen Veranstaltung', wie man zuweilen in leistungsorientierten Kreisen formuliert. Ästhetische Bildung und moralische Urteilsfähigkeit – um Termini des Erziehungswissenschaftlers Volker Ladenthin[1] aufzunehmen – sind in dem, was in der Testideologie als Grundbildung bezeichnet wird, offensichtlich verzichtbar. Dieser Verzicht wird sich gerade auch auf den Unterricht in den Grundschulen auswirken, die zunehmend nur als Orte der Präparation für die so genannten weiterführenden Schulen gesehen werden.

Eine dritte Folge der Testorientierung ist die Zunahme des Drucks auf die ohnehin überlasteten Lehrerinnen und Lehrer. Unter der Hand wird gerade von sich fortschrittlich dünkenden Fachdidaktikern – zum Teil wie mir scheint sogar frohlockend – festgestellt, dass man nun endlich ein taugliches Mittel gefunden habe, die Unterrichtenden an der Kandare zunehmen und in die Richtung einer als modern bezeichneter Didaktik zu zwingen. Dieser Zwang zum Fortschritt macht deutlich, dass es sich bei der Wünschelrute tatsächlich auch um eine Rute handelt.

---

[1] Vgl. Volker Ladenthin: PISA - Recht und Grenzen einer globalen empirischen Studie. Eine bildungstheoretische Betrachtung. Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Pädagogik 84 (2008)

Teaching to the Test?

Eine vierte Folge von Pisa&Co betrifft die vermeintlich qualitätsfördernde Wirkung eines testorientierten Unterrichts. Die internationale Kritik an den Testverfahren und an dem Gedanken, die ‚Erträge' schulischer Bildung könnten über periodisierte Tests in sinnvoller Weise gemessen und gesteigert werden, hat Deutschland nicht erreicht, und es ist bisher auch kaum zu einer sorgfältigen und redlichen Diskussion dieses selbstverständlich erscheinenden Gedankens hierzulande gekommen. Das ist auch nicht weiter erstaunlich, weil von den involvierten Testinstituten und den mit ihnen kooperierenden Wissenschaftler kaum zu erwarten ist, dass sie mit ihrem Test-Knowhow auch die Test-Kritik auf den Markt bringen.

Es liegt nahe, wenn man die ‚Weiterentwicklung des Unterrichts und vor allem die individuelle Förderungen der Schülerinnen und Schüler' durch Bildungsstandards[2] befördern oder anordnen will, deren Erreichen im Wesentlichen durch Tests überprüft wird, die Erfahrungen von Ländern und darunter insbesondere der USA zu rezipieren, die seit Jahren oder Jahrzehnten eine solche Politik verfolgen. Dass dies immer wieder auch zu unangemessenen bzw. unangebrachten Formen der Vorbereitung von Schülerinnen und Schülern auf diese Tests und damit zur Verhinderung bzw. Verminderung ihrer Lernfortschritte führt, ist bekannt.

Daniel Koretz, Erziehungswissenschaftler an der Havard-Universität und assoziierter Direktor des Center of Research, Standards, and Student Testing (CRESST) beschreibt in seinem Aufsatz *Alignment, High Stakes, and the Inflation of Test Scores*[3] einen Ausgangspunkt, über den eine öffentliche Diskussion in Deutschlang bisher kaum hinausgekommen ist:

> On common response to this problem has been to seek „tests worth teaching to". The search for such tests has led reformers in several directions over the years, but currently, many argue that tests well aligned with standards meet this criterion. If tests are aligned with standards, the arguments runs, they test material deemed important, and teaching to the test therefore teaches what is important. If students are being taught what is important, how can the resulting score gains be misleading? (p. 99)

Koretz begründet seinen Widerspruch gegen eine naive Testgläubigkeit theoretisch und empirisch unter anderem eindrücklich mit Sägezahnkurven („sawtooth pattern") für die gemessenen Leistungen der gleichen oder einer vergleichbaren Population, die sich in verschiedenen Erhebungen je nach den verwendeten Tests in unterschiedlichster Weise ergaben. Eine

---

[2] Beschluss der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring vom 02.02.2006

[3] Koretz, D.: Alignment, High Stakes, and the Inflation of Test Scores. Yearbook of the National Society for the Study of Education (2005) 104 (2), 99–118. (Online unter: http://www.blackwell-synergy.com/doi/abs/10.1111/j.1744-7984.2005.00027.x)

zusammenfassende Kritik einer testgeleiteten Schulpolitik ist u.a. bei Brian M. Stecher unter *„Consequences of large-scale, high-stakes testing on school and classroom practices"* in dem von ihm mit herausgegebenen Buch *Making Sense of Test-Based Accountability in Education*[4] nachzulesen:

> The net effect of high-stakes testing on policy and practice is uncertain. Researchers have not documented the desirable consequences of testing – providing more instruction, working harder, and working more effectively – as clearly as the undesirable ones – such as negative reallocation, negative alignment of classroom time to emphasize topics covered by a test, excessive coaching, and cheating. More important, researchers have not generally measured the extent or magnitude of the shifts in practice that the identified as a result of high-stakes testing.
> Overall, the evidence suggests that large-scale high-stakes testing has been a relatively potent policy in terms of bringing about changes within schools and classrooms. Many of these changes appear to diminish students' exposure to curriculum, which undermines the meaning of the test scores. (p. 99/100)[5]

Der im letzten Absatz angesprochene Antagonismus scheint der deutschen Kultusministerkonferenz möglicherweise von ihren Beratern vorenthalten worden zu sein: dass sich an den Schulen etwas bewegt, heißt noch nicht, dass diese Bewegung auch sinnvoll ist.
In dem *Position Statement on High Stakes Testing in PreK-12 Education* der *American Evaluation Association* (AEA) wird resümmiert:

> There is evidence that such testing often leads to educationally unjust consequences and unsound practices, even though it occasionally upgrades teaching and learning conditions in some classrooms and schools. The consequences that concern us most are increased drop out rates, teacher and administrator deprofessionalization, loss of curricular integrity, increased cultural insensitivity, and disproportionate allocation of educational resources into testing programs and not into hiring qualified teachers and providing sound educational programs. (…)
> Comparisons of schools and students based on test scores promote teaching to the test, especially in ways that do not constitute an improvement in teaching and learning. Although used for more than two decades, state mandated high stakes testing has not improved the quality of schools; nor diminished disparities in academic achievement along gender, race or class lines; nor moved the country forward in moral, social, or economic terms.
> (Siehe http://www.eval.org/hst3.htm!)

---

[4] Stecher, B. M.: Consequences of large-scale, high-stakes testing on school and classroom practices. In L. S. Hamilton, B. M. Stecher, and S. P. Klein (Eds.): Making Sense of Test-Based Accountability in Education. RAND. Santa Monica 2002. P 79 -100
(Online unter: http://www.rand.org/pubs/monograph_reports/MR1554/index.html)
[5] Hervorhebungen hier und im nächsten Zitat durch Th. J.

Alexander JORDAN, Bielefeld & Stefan KRAUSS, Kassel

Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht

Im Rahmen des DFG-Projekts „Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz“ (kurz: COACTIV) wurden die Mathematiklehrkräfte, deren Klassen an den PISA-Erhebungen 2003 und 2004 teilnahmen, befragt und getestet. Um die Qualität der im deutschen Mathematikunterricht gegen Ende der Sekundarstufe I eingesetzten Aufgaben zu untersuchen, wurden von diesen Lehrkräften Mathematikaufgaben eingesammelt, die sie in ihren Klassen (Jahrgangsstufe 9 und 10) im Schuljahr 2003/2004 verwendet hatten (im Unterricht, in Klassenarbeiten oder in Hausaufgaben). Diese Aufgaben (ca. 45.000) wurden anhand eines in COACTIV entwickelten Klassifikationsschemas beurteilt. Dabei sollte der Frage nachgegangen werden, welches Potential diese Aufgaben für Lerngelegenheiten im Mathematikunterricht bieten. In diesem Beitrag werden das Klassifikationsschema kurz vorgestellt und ausgewählte Ergebnisse berichtet. Eine ausführlichere Fassung kann in Jordan et al. (2006) und Jordan et al. (eingereicht) nachgelesen werden. Weitere Informationen zur COACTIV-Studie sind unter www.mpib-berlin.mpg.de/coactiv/index.htm zu finden.

1. Das Aufgabenklassifikationsschema

Um das Potential von Aufgaben für die Gestaltung von Lernprozessen im Mathematikunterricht detailliert untersuchen zu können, wurden alle eingesammelten Aufgaben nach verschiedenen Kategorien mit Hilfe eines in COACTIV entwickelten Klassifikationsschemas beurteilt. Die Kategorien des Schemas reichen dabei von eher technischen Kategorien (z.B. mathematisches Stoffgebiet der Aufgabe) bis hin zu Kategorien, die nur vor dem Hintergrund eines didaktischen Rahmenkonzepts mathematischen Arbeitens zu verstehen sind (z.B. Typen mathematischen Arbeitens, vgl. Neubrand 2003). Dabei ging es insbesondere auch darum, möglichst breit bereits vorhandene Konstrukte zur Kategorisierung von Aufgaben abzubilden. Ziel war letztlich die pragmatische Zusammenstellung einschlägiger Kategorien sowie deren theoretisch begründete Strukturierung in übergeordneten Dimensionen. Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Kategorien sowie die übergeordneten Dimensionen des Aufgabenklassifikationsschemas.

Dimension	Kategorie	Bedeutung der Ausprägungen
A-Inhaltlicher Rahmen	1-Stoffgebiet	1=Arithmetik, 2=Algebra, 3=Geometrie, 4=Stochastik
	2-Curriculare Wissensstufe	1=Grundkenntnisse, 2=Einfaches Wissen der Sek. I, 3=Anspruchsvolles Wissen der Sek. I
B-Kognitiver Rahmen	3-Typ mathematischen Arbeitens	1=Technische Aufgabe, 2=rechnerische Aufgabe, 3=begriffliche Aufgabe
C-Kognitive Elemente des Modellierungskreislaufs	4- Außermatisches Modellieren	0=Nicht benötigt, 1=Standardmodellierungen, 2=Mehrschrittige Modellierungen, 3=Modellreflexion, -validierung, -eigenentwicklung
	5-Innermathematisches Modellieren	0=Nicht benötigt, 1=Standardmodellierungen, 2=Mehrschrittige Modellierungen, 3=Modellreflexion, -validierung,-eigenentwicklung
	6-Grundvorstellungen	0=Nicht benötigt, 1=Eine elementare GV oder (triviale) Kombination von verwandten elementaren GV, 2=Eine erweiterte GV oder eine nicht-triviale Kombination von elementaren GV oder eine nicht-triviale Kombination von elementaren, aber nicht verwandten GV, 3=Mehr als dies
	7-Umgehen mit mathematikhaltigen Texten	0=Nicht benötigt, 1=Unmittelbares Textverstehen, 2=Textverstehen mit Umorganisation, 3=Verstehen logisch komplexer Texte
	8-Mathematisches Argumentieren	0=Nicht benötigt, 1=Standardbegründungen, 2=Mehrschrittige Argumentationen, 3=Entwicklung komplexer Argumentationen oder Beurteilen von Argumenten
	9-Umgehen mit mathematischen Darstellungen	0=Nicht benötigt, 1=Standarddarstellungen, 2=Wechsel zwischen Darstellungen, 3=Beurteilen von Darstellungen
D-Lösungsraum	10-Bearbeitungsrichtung	1=vorwärts, 2=rückwärts
	11-Anzahl der eingeforderten Lösungswege	0=kein Lösungsweg, 1=ein Lösungsweg, 2=mehrere Lösungswege

Tabelle 1: Überblick über ausgewählte Kategorien des Klassifikationsschemas

2. Ein Aufgabenbeispiel

31 Cent

Wie kannst du einen Geldbetrag von genau 31 Cent hinlegen, wenn du nur 10-Cent-, 5-Cent- und 2-Cent-Münzen zur Verfügung hast? Gib alle Möglichkeiten an und erläutere dein Vorgehen.

Betrachtet man bezüglich der in Tabelle 1 genannten Kategorien die Aufgabe *31 Cent*, so gehört diese zum Stoffgebiet Arithmetik („1“) und zu den begrifflichen Modellierungsaufgaben („3“). Für die Bestimmung der curricularen Wissensstufe ist entscheidend, dass dabei die für ein erfolgreiches Aufgabenlösen nötigen Wissenselemente (Arbeiten mit Größen) und der diesbezügliche Umgang mit natürlichen Zahlen bereits in der Grundschule behandelt werden („1“). Diese Aufgabe erfordert zudem ein einfaches Verständnis eines mathematischen Textes. Diesen muss man auf einem eher niedrigen Niveau sinnentnehmend lesen können („1“). Dabei geht es neben dem Ausführen einer anspruchsvollen innermathematischen Modellierung („3“) auch um komplexes Argumentieren („3“). Es müssen verschiedene Möglichkeiten systematisch durchgespielt und es muss sorgfältig begründet werden, warum alle Fälle gefunden wurden. Dabei sind der rechnerische Anspruch und auch die Intensität mathematischer Grundvorstellungen (es genügt eine elementare Grundvorstellung vom Addieren) offensichtlich sehr gering („1“). Zudem verläuft die Richtung der Auseinandersetzung entgegen der in der Mathematik üblichen Denkrichtung („2“), wobei kein Lösungsweg explizit gefordert ist („0“).

3. Ergebnisse

Bei den Analysen stellte sich heraus, dass das kognitive Aktivierungspotential der Aufgaben im Mathematikunterricht in Deutschland sehr niedrig ausgeprägt ist. Der durchschnittliche Wert in der Kategorie „Mathematisches Argumentieren“ über alle 45.000 Aufgaben war beispielsweise 0,06 (bei einer Skala von 0-3). Die Werte für die anderen Kategorien sind ähnlich niedrig. Daraus kann gefolgert werden, dass die Möglichkeit, Schülerinnen und Schüler über qualitätsvolle Aufgaben möglichst umfassend zu fördern, nur unzureichend genutzt wird. Die in Deutschland eingesetzten Aufgaben sind sehr homogen: Mathematisches Argumentieren findet kaum statt, die Aufgabentexte sind sprachlich wenig anspruchsvoll, außermathematische und innermathematische Bezüge werden im Sinne des Modellierens nur wenig hergestellt. Auch weitere Indikatoren für das kognitive Aktivierungspotential weisen auf einen kognitiv anregungsarmen Unterricht hin (vgl. Kunter et al., 2006). Die Schulformen unterscheiden sich zwar im Grad der Ausprägung dieser Indikatoren, doch finden diese Unterschiede auf einem insgesamt sehr niedrigen Niveau statt. Den Lernenden werden also im Hinblick auf diese Kategorien für die kognitive Aktivierung nur wenige Lerngelegenheiten präsentiert. Dass dieses geringe Potential zur kognitiven Aktivierung nicht nur aus theoretischer Sicht beklagenswert ist, sondern auch praktische Implikationen hat, konnte ebenfalls im Rahmen von COACTIV unter Nutzung der PISA-Schülerdaten gezeigt werden. So ließ sich in längsschnittlichen Analysen nachweisen, dass Schulklassen, in denen Aufgaben mit *relativ* höherem kognitiven Potential gestellt wurden (auch wenn dies nur selten der Fall war), deutlich bessere Leistungen im PISA-Mathematiktest der Klasse 10 aufwiesen (vgl. Kunter et al. 2006). Die wichtige Rolle, die den im Mathematikunterricht verwendeten Aufgaben zur Förderung mathematischer Kompetenzen theoretisch zugeschrieben wird, wird durch diese Befunde eindrucksvoll gestützt. Berücksichtigt man im Zusammenhang mit diesen Resultaten aktuelle bildungspolitische Veränderungen wie die Einführung der Bildungsstandards in allen Schulformen, so muss konstatiert werden, dass es auch nach mittlerweile mehreren Jahren intensiver Bemühungen zur Verbesserung der Aufgaben- und Unterrichtsqualität, wie sie in Programmen wie SINUS und SINUS-Transfer seit 1998 vorgenommen wurden, noch nicht hinreichend gelungen ist, eine kognitiv anregende Aufgabenkultur in den Schulen breit zu verankern. Dies ist aus unserer Sicht aber eine notwendige Bedingung für eine erfolgreiche Implementation der Standards (siehe Blum et al. 2006). Gerade im Sinne der damit einhergehenden zentralen Prüfungen ist es notwendig, dass Lehrerinnen und Lehrer ein kognitiv reichhaltiges Aufgabenmaterial im Unterricht darbieten. Nur so ist eine erfolgreiche Implementation der Standards und die damit intendierte nachhaltige Verbesserung des Mathematikunterrichts in Deutschland möglich. Hier sind Fachdidaktik und Lehrerbildung gleichermaßen gefordert, praktikable Konzepte zu liefern.

Literatur

[1] Blum, W. et al. [2006]: *Bildungsstandards Mathematik: konkret.* Berlin: Cornelsen-Scriptor.

[2] Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M. & Kunter, M. [2006]: *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben. Materialien aus der Bildungsforschung.* Berlin: Max-Planck-Institut.

[3] Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Ross, N., Brunner, M., Kunter, M. & Baumert, J. (eingereicht): Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterrichts. In: *Journal für Mathematikdidaktik.*

[4] Kunter, M., Dubberke, T., Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Löwen, K., Neubrand, M. & Tsai, Y. [2006]: Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lernprozesse. In: PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.): *PISA 2003. Untersuchungen im Verlauf eines Schuljahres.* Münster/ New York – München/ Berlin: Waxmann, S. 161-194.

[5] Neubrand, M. [2006]: „Mathematical Literacy“/ „Mathematische Grundbildung„: Der Weg in die Leistungstests, die mathematikdidaktische Bedeutung, die Rolle als Interpretationshintergrund für den PISA-Test. In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 6 (3), S. 338-356.

Edyta JUSKOWIAK, Adam Mickiewicz University, Poznan

The students strategies in the course of task solving with using the graphic calculator

Introduction

We learn mathematics through solving tasks. The analysis of that process is fundamental to answer the questions like: "how to teach mathematics?" or "how to teach to solve tasks?". That issue has been up-to-date for years, no matter what kind of tools are applied to solve mathematical tasks. The appearance of graphing calculators in Polish schools has provoked a research on the factual student's learning process with the use of that tool, in order to recognize both its advantages and disadvantages as well as its role and place in the process of learning and teaching mathematics. This knowledge is essential before the graphic calculator is generally widespread and permanently included into that process.

The goal, organization and tools of the study

The goal of the study under discussion was to examine and describe the ways of students' applications of the graphing calculator when solving a certain group of tasks. The performance of that goal resulted from a search for the answers to the following questions:

1. In what purpose do the students use the graphic calculator when working on a task?
2. What are the students' strategies[1] in the course of task solving?
3. What mathematical activities does the graphic calculator provoke?

The study was conducted in 2003. The subjects of the study were grade one students of a high school (gimnazjum) in Bielsko- Biała, where a program and a course book "Matematyka w gimnazjum z kalkulatorem graficznym I komputerem" (Kąkol, Wołodźko,2002) were being performed. The study took place during the accomplishment of the "Functions" section. Students' work during a lesson was observed (eight students on average were observed at every lesson), as well as four students who were observed during 45-minute extra classes for the period of four months.

The main research tool was a unique calculator program[2] enabling the records of the work being performed on the calculator. The program made it possible to record the work of each of the examined students, taking part in both regular lessons and individual extra classes. It is essential that the

[1] By a strategy we mean a conscious style of student procedures with the use of the graphical calculator, aiming at the solution to the task.
[2] The program was created at the Plymouth University

recording program allows to replay succeeding screen views of the calculator in a form of an accelerated film, as well as it allows to review the list of the bottoms pressed by the student.

The analysis of student's work

The application of the calculator recording program enabled a thorough investigation and an exact[3] reconstruction of the student's work performance when solving a task, with the use of a graphing calculator.

Task

For which "a" values the graphs of the f(x)=ax function will be perpendicular? Can they be parallel?

Remarks

The student, after learning the content of the task, starts looking for an example that would fulfill the requirements of the task. In order to achieve this, he compares the mutual position of the straight lines in the coordinate system, he concludes empirically. The student soon found an exceptional case y = x and y = -x, fulfilling the condition of the task This contributed to stating a hypothesis " the function slope coefficients must be opposite numbers". Making a few graphs with the use of the calculator caused the student to refute this assumption. The next stage of the work is finding the idea to solve the problem. To achieve this the student observed the graphs of the functions y = x and y = -x. The student performed a series of conclusions. He noticed that since the straight lines are perpendicular, they constitute four right angles. So one of the straight lines is the result of the rotation of the other straight line by an angle of 90° in relation to the origin of coordinates. So it is possible to find the image of any point belonging to one of the straight lines on the demanded straight line. In this way the student was looking for a formula of the line perpendicular to the graph of the function y = 2x. Finding this one, as well as other pairs of functions whose graphs are mutually perpendicular, enabled the student to formulate a general rule.

The student performed 13 trials. He found four examples of the pairs of functions whose graphs are mutually perpendicular. Finding the solution to the problem does not finish the student's work. Janek notices and formulates a new problem. The student answer was: The a coefficient of the second function must be a number opposite to the converse number of the a coefficient of the first function.

---

[3] An every step of the pupil's work was supplied documentary evidence by indication chosen by pupil of function of calculator with description of aim of their utilization.

The analysis of full course of work pupil on the task permits to affirm, that the student applied two working strategies:
1) *establishing the value of a parameter*, that is achieving the result through defining and setting values to the measures given in the task as the variables, as well as
2) *analyzing the graphical model*, that is achieving the result through gaining information from the given graphical model, which is preceded by examining a given graphical representation.

In aim of comparison of process work all students solving this task and applied by them the strategies of work, we let's look on a scheme[4] – students' procedure paths – the application of the calculator, in which are contained the results of observation of students work.

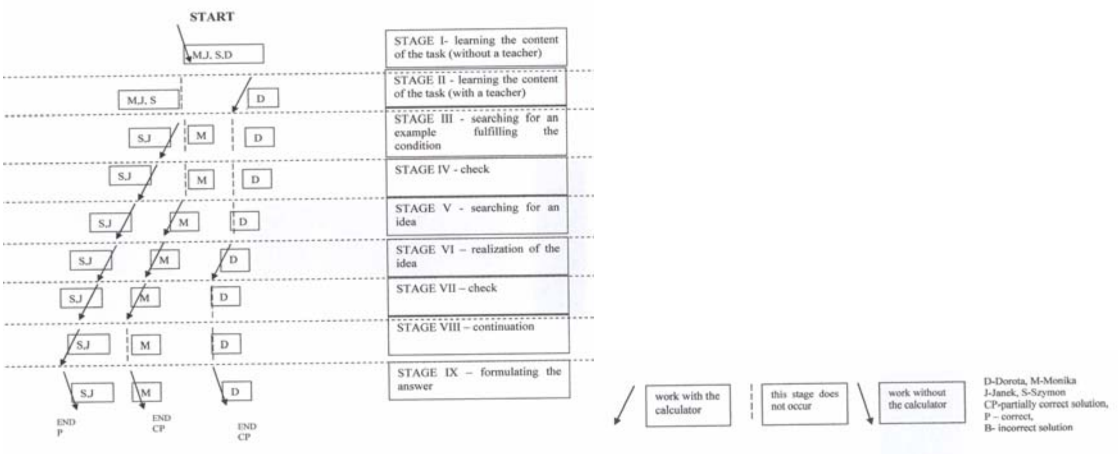


Fig. An example of a scheme – students' procedure paths – the application of the calculator

Students S And M applied the strategies of work called "**assigning the value of a parameter".** But during the student's D work, no strategy was not affirmed. This work depended on accidental, chaotic trials only. Despite this their observation permitted students at last to get partly correct answer (We by partly correct solution understand both full solution with mistakes, incomplete correct and incomplete with mistakes).

The example shows that the calculator with a recording program makes it possible to follow the student's activities thoroughly. The sequence of these

[4] The stages of the students' work revealed on the chart were specified and named as the result of the observation and analysis of calculator recordings and the students' work cards. The direction of the arrow slopes informs if a student used the calculator at that particular stage of work on the task. The work path of each student ends with the information about the final results of his work.

activities constitutes the manifestation of a certain strategy of the student's reasoning.

The above example shows that the graphing calculator with a recording program may be a tool enabling a thorough observation. It allows to follow the factual student's process on the task, and not to be content with a mere analysis of a student's work results, that is on the filled work cards. The graphing calculator with a recording program made it possible to observe the similarities and differences of the students' working strategies when solving the same task. In the study, the recording program supplemented with the analysis of working cards and a discussion with a student allowed to create substantial registers of both the goals, for which this tool was applied by the students, task solving strategies, and mathematical activities triggered by the application of the calculator[5]. This allows a statement, that the graphic calculator may play a positive role in the process of mathematical education, favor the development of a student's mathematical activity and creation of his own mathematics. The application of this didactic vehicle, as well as others, apart from its advantages, has disadvantages, too. The application of the recording program allowed me to observe the threats and limitations resulting from working with this tool. Learning them will definitely allow to eliminate some of the negative effects of the calculator applications.

References

[1] Dunham P., *Hand-held Calculators in Mathematics Education: A Research Perspective,* Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: A Collection of Papers, The Ohio state University (2000)

[2] Dunham P., Dick T., *Research on Graphing Calculators,* Mathematics Teacher (1994), www.tenet.edu/tcks/math/resources/graphcal.html

[3] Juskowiak E., *Sposoby wykorzystywania kalkulatora graficznego w procesie nauczania i uczenia się matematyki,* praca doktorska, UAM, Poznań (2004)

[4] Kąkol H., Wołodźko S., *Matematyka w gimnazjum z kalkulatorem graficznym i komputerem", klasa 1, Podręcznik,* Wilkowice (2002)

[5] Kutzler B., *The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics,* Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: A Collection of Papers, The Ohio State University (2000)

[6] Laborde C., *Why technology is indispensable today in the teaching and learning of mathematics?,*http://emptweb.mps.ohio-state.edu.dwme/t3/post/icme/papers.asp (2000)

[5] The study results are presented in a doctor's dissertation.

Gert KADUNZ, Klagenfurt

Schema und Gebrauch

Eher vonseiten einer Philosophie der Mathematik als aus mathematikdidaktischer Position wird die Frage nach dem ontologischen Status der Begriffe der Mathematik gestellt. Mit aller Vorsicht gesprochen, bemüht man sich in entsprechenden Überlegungen um die „Existenz“ mathematischer „Objekte“. Zugegebenermaßen werden Lernende im Regelunterricht damit ihre Lehrenden kaum konfrontieren. Gleichwohl findet man Unterrichtssituationen, in denen von den Lernenden ein Bedürfnis formuliert wird, dessen Erfüllung bzw. dessen Beantwortung eng mit der eben formulierten Frage nach der „Existenz“ verknüpft ist. Sowohl aus der eigenen Unterrichtserfahrung als auch aus Gesprächen mit unterrichtenden KollegInnen ist mir folgender Satz von Lernenden bekannt: „Mathematik verstehe ich, wenn ich hinter die Dinge blicke, die im Mathematikunterricht vorgestellt wurden.“ Hinter die Dinge blicken, also hinter die Symbole der Algebra, die Konstruktionen der Geometrie oder die Zeichen der Analysis und auch hinter deren Verwendungsweisen ermöglicht, so diese Vorstellung, den Zugriff auf die Wahrheiten der Mathematik. Erst wenn sich ein solcher Zugang zeigt, so als ob man eine Tür zu einem anderen Raum öffnet, erkennt man die Mathematik, wie sie wirklich ist. Dann, so wird erhofft, versteht man sie in ihren Facetten.

Mit diesem Bedürfnis nach dem Blick hinter die Dinge, und dies wird nicht nur von Lernenden so formuliert, ist oft eine bestimmte ontologische Sicht auf Mathematik verknüpft. Man kann diese mit aller Vorsicht als platonistisch bezeichnen. Ein Blick in die Geschichte der Philosophie zeigt unterschiedlichste Sichtweise und Positionen of den ontologischen Status der Mathematik (vgl. Hart, 1997). Die in den folgenden Überlegungen skizzenhaft vorgestellte Position ist weniger eine philosophische als vielmehr eine unterrichtspraktische. Sie verfolgt das Ziel, Lernenden zu zeigen, dass dieses ihr Lernen oft hemmende Bedürfnis nach der Suche nach Wahrheiten hinter den Dingen ihr Verständnis von Mathematik nicht notwendig fördert. Insofern könnte mein Unternehmen auch als ein psychologisches gesehen werden, wenngleich an keiner Stelle auf Psychologie Bezug genommen wird. Meine Überlegungen sind aber auch in keiner Weise so angelegt, dass daraus eine Entscheidung zugunsten eines speziellen ontologischen Standpunktes abgeleitet werden könnte. Ziel ist es, den Mathematik Lernenden bei Ihren Tätigkeiten zur Seite zu stehen, sie zu orientieren und ihnen dabei gleichzeitig eine vielleicht erfolglose Suche zu ersparen.

Eine theoretische Orientierung

Um meine Gedanken, wie man Lernende in dieser Frage beraten bzw. unterstützen könnte, zu entfalten, werde ich in knapper Form Ausführungen zum Verhältnis von Schema und Gebrauch bzw. Struktur und Handlung vorstellen und dabei die gegenseitige Bedingtheit von Schema und Gebrauch beschreiben. Es wird sich zeigen, dass dem Gebrauch – man könnte also auch sagen, dass der Handlung – eine für das Schema konstitutive Rolle zukommt, welche die Beziehung „das Schema regelt den Gerbrauch" nicht auf den Kopf stellt, sondern die Zweitrangigkeit des Gebrauches gegenüber dem Schema aufhebt. Insofern tritt das Schema, das hinter den Zeichen der Mathematik vermutet wird buchstäblich in den Vordergrund. Erfolgreiche Mathematik zeigt sich *sichtbar* im Gebrauch. Eine mögliche theoretisch fundierte Beschreibung von Handlungen – abseits der Vielzahl von Publikationen zu einem handlungsorientierten Unterricht – erlaubt die Semiotik des Charles S. Peirce und sein diagrammatisches Denken. Darauf wird am Ende meiner Ausführungen kurz verwiesen.

In einer Reihe von Arbeiten hat sich Sybille Krämer zum Thema *Schema und Gebrauch* geäußert (z.B. Krämer, 2004). In Sprache und Sprechen (Krämer, 2002), einer Arbeit die im Folgenden paraphrasiert wird, beschäftigt sie sich explizit mit Alternativen zu einer platonistischen Sicht auf Sprache. Nun ist es nicht eine der Kernaufgaben der Mathematikdidaktik, sich um sprachphilosophische Probleme zu bemühen. Alleine die Vorschläge, die Krämer offeriert, lassen sich per Analogie auf Fragen des Lernens von Mathematik insbesondere auf die eingangs formulierte Frage nach einer Mathematik, die sich hinter den Dingen befindet, verwenden[1]. Insofern besitzen sie eine gewisse „therapeutische" Wirkung. Welche Therapie bietet Krämer an?

Sie gründet ihre Untersuchung auf der Frage, ob „die Unterscheidung zwischen universellem Gebrauch und partikulären Schema ein sinnvolles Instrument des Sprachdenkens ist?" (S. 97). Ich überspringe Krämers Ausführungen zu platonistisch orientierten Sprachtheorien, welche das Sprechen durch dessen Orientierung an Regeln erklären, welche dem Sprechen logisch und genealogisch voraus gehen. Eine Alternativposition findet Krämer bei Autoren, welche eine solche gleichsam hierarchische Unterscheidung zur Erklärung von Sprache und Sprechen für nicht ziel führend erachten (vgl. S.111 ff). Für mein Unternehmen bedeutet dies, den Vorrang einer nicht greifbaren, sich dem Blick entziehenden Mathematik und deren Vorrang vor dem Mathematik treiben anzuzweifeln und gleich-

[1] Beispielhaft sei im Sinne der angesprochenen Analogie Kadunz 2006 erwähnt.

sam eine ontologische Rückstufung oder ontologische Gleichstellung anzubieten. Krämer konzentriert sich auf vier Autoren, um diese Gleichstellung für das Verhältnis von Sprache und Sprechen zu begründen. Es sind dies: Derrida, Wittgenstein, Luhmann und Davidson. Von diesen vier Personen sollen die Gedanken Wittgensteins, wie sie Krämer berichtet, eine mögliche Basis meiner Argumentation sein. Die Auflösung der Hierarchisierung Sprache- Sprechen und dann analog Mathematik-Mathematik betreiben erläutert Wittgenstein am Verhältnis von Regel und Regel folgen. Für ihn zählen Regeln zu den diskursiven Phänomenen, wobei innerhalb eines Diskurses keine übergeordnete Position eingenommen werden kann. Die Formulierung einer Regel und das Befolgen einer Regel sind Praktiken, die unterschiedlich sein können. Wenn wir (allgemeine) Regeln aufstellen, sei es in der Gestalt von Idealen, Paradigmen und Typen, so dienen diese als Maßstab zur Ordnung von Phänomenen. Ein Phänomen, so schreibt Krämer, welches wir uns als Typ oder als Regel vor Augen halten, ist nichts anderes, als eine besondere Verwendungsweise dieses Phänomens. Diesen Regeln ist jedenfalls gemeinsam, dass sie zu einem speziellen Zweck erdacht und verwendet werden.

Wendet man sich nun mit Wittgenstein dem Verhältnis von Regel und Regelbefolgung[2] (Schema und Gebrauch), so findet sich zwischen Regel und Handlung keine unmittelbare und geradlinige Verbindung. Dies hat zwei Ursachen. Zuerst ist zu bemerken, dass Regeln jeweils unterschiedlich gedeutet und interpretiert werden können. Insbesondere regeln Regeln ihre eigenen Anwendungen nicht. Folgen wir einer Regel, so deuten wir sie nicht. Wird hingegen eine Regel interpretiert, so erfolgt dies in Situationen, in denen wir uns orientieren, wir uns etwas überlegen. Eine praktische Handlung wird unterbrochen. Während der Handlung selbst folgt man der Regel blind. Der Gebrauch leitet uns dazu an. Man denke hier an das klassische Beispiel der schriftlichen Addition, welche ohne expliziten Rekurs auf die Additionsregeln gleichsam automatisch abgearbeitet wird. Insofern meint Wittgenstein (vgl. Krämer, 2002, S. 116), dass nicht die Regel vorgibt, wie *praktisch* zu handeln ist, sondern die Praxis zeigt, wie einer Regel zu folgen ist.

Was bedeutet dies für unsere Fragestellung und welche Antwort bzw. mathematikdidaktische Vorschläge können wir unseren Lernenden unterbreiten?

Zunächst können wir den Hinweis geben, dass Regeln, Schemata oder

[2] Eine lesenswerte Einführung in Wittgensteins Gedanken zur Mathematik und dort zu Themen wie Regel, Befolgen einer Regel, Schließen, Beweise oder Begriffe findet man bei Ramharter 2006.

Strukturen zu verstehen und zu wissen, wie ihnen zu folgen ist, sich aus der Praxis ergibt. Nicht der Blick hinter die Phänomene zeigt uns die Struktur, sondern der Blick auf die Phänomene. „Denk nicht, sondern schau“ formuliert Wittgenstein (Wittgenstein, §66) provozierend.

Weiters ist an zweierlei denken. Wenn wir das Verstehen von Mathematik auch als ein Verstehen von Strukturen sehen wollen, und wenn uns diese im Sinne des Schauens gleichsam vor Augen liegen, so ist vor allem mit dem Sichtbaren zu handeln. Einen strukturierten Ansatz bietet hier die Semiotik des Charles S. Peirce unter dem Titel des diagrammatischen Denkens. Damit hat Peirce ein Modell vorgelegt, wie Handlungen mit bestimmten Zeichen, die er Diagramme (Hoffmann, 2006) nennt, neues Wissen gewonnen werden kann. Es ist aber nicht nur, dass wir neues Wissen generieren können, sondern es ist auch das „wie“ dieser Konstruktion, das bemerkenswert ist. Nicht der suchende Blick durch die Diagramme, sondern der immer neue Blick auf die Diagramme, in die wir immer neue Muster hineinsehen, ermöglicht die Erzeugung dieses Wissens.

Ein letzter Punkt sei noch angemerkt. In der von Wittgenstein vorgeschlagenen Praxis und der daraus zu folgernden ontologischen Entlastung zeigt sich auch ein anderes Phänomen. Wenn verstehen von Strukturen und Regeln aus dem Handeln aber auch aus dem Beobachten von Handeln entstehen kann, so ist jenen Personen, welche Handlungen im Unterricht inszenieren, anstoßen und lenken – den Lehrenden – unter Bezug auf die oben genannten Positionen entsprechende Aufmerksamkeit zu schenken. Darüber ist nachzudenken.

Literatur

Hoffmann, M. H. G. (2005). Erkenntnisentwicklung. Frankfurt am Main, Vittorio Klostermann.

Kadunz, G. (2006). "Schrift und Diagramm: Mittel beim Lernen von Mathematik." Journal für Didaktik der Mathematik 27(3/4): 220-239.

Krämer, S. (2002). Sprache und Sprechen: Wie sinnvoll ist die Unterscheidung zwischen einem Schema und seinem Gebrauch. In S. Krämer & E. König (Hrsg.), *Gibt es eine Sprache hinter dem Sprechen?* (S. 97-125). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Krämer, S. (Hrsg.). (2004). *Performativität und Medialität*. München: Wilhelm Fink Verlag

Ramharter, E. und A. Weiberg (2006). *Die Härte des logischen Muß. Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Berlin, Parerga.

Hart, W. (Hrsg.). (1997). The Philosophy of Mathematics. Oxford, Oxford University Press.

Wittgenstein, L. (1977).: Philosophische Untersuchungen. Frankfurt am Main, Suhrkamp.

Rainer H. Kaenders, Universität zu Köln
Tom Goris, FI, Universität Utrecht

Neugierig auf Mathematik: Wiskunde B-dag

Einleitung. Der Anspruch, Kreativität, aktives Problemlöseverhalten und Beziehungshaltigkeit im Mathematikunterricht entstehen zu lassen, formt eine immer währende Herausforderung für Lehrer und Schüler. Gerade auf dem Gebiet der Mathematik und ihrer Strukturen selbst ist es nach den Enttäuschungen der *New-Math* Bewegung alles andere als selbstverständlich, Schüler mit Begeisterung mathematische Strukturen als solche erforschen zu lassen, so dass sie dabei ihren eigenen authentischen Fragen nachgehen können. Der *Wiskunde B-dag* ist eines der wenigen Beispiele von Mathematikwettbewerben, bei denen versucht wird aktives und selbstständiges Erforschen mathematischer Strukturen für alle Schüler zu ermöglichen. In einer Kultur zunehmender regelmäßiger Leistungsüberprüfungen ist unserer Auffassung nach eine Aufgabenkultur, in der Aspekte des Entdeckens und der aktiven Entwicklung von Mathematik zentral stehen, wichtiger denn je.

In verschiedenen anderen Schülerwettbewerben wird versucht, die selbstständige Beschäftigung mit Mathematik im Bereich der Problemlösung durch Modellierung zu erreichen. Beispiele hierzu sind etwa die *Modellierungswochen* an der TU Kaiserslautern, die *Mathematische Modelleer Competitie* an der Universität Maastricht, das Projekt *Diskrete Mathematik für die Schule* an der TU Berlin oder die vom Freudenthal Institut in Utrecht als internationaler Wettbewerb organisierte *Wiskunde A-lympiade*. Die *A-lympiade* ist das Pendant zum *Wiskunde B-dag* für Schüler, denen aller Voraussicht nach Mathematik später vor allem in Anwendungen begegnen wird (also in der Regel Grundkurs-Schüler). Der *Wiskunde B-dag* richtet sich dahingegen vornehmlich an Schüler, in deren weiterer Ausbildung die Mathematik selbst eine nicht unerhebliche Rolle spielen wird. Die Teilnahme an beiden Wettbewerben beschränkt sich nicht auf nur besonders gute Schüler: Eine Klasse nimmt als Ganze daran teil.

Für den Wiskunde B-dag sollen in diesem Beitrag Konzeption, Erfahrungen und Chancen sowohl in den Niederlanden als auch in NRW kurz beschrieben werden. Weitere Informationen finden sich auf den Webseiten [1], [2], [3], [4].

Die Organisation. Der *Wiskunde B-dag* wie auch die *A-lympiade* werden als internationaler Wettbewerb vom Freudenthal Institut der Universität Utrecht organisiert. In den Niederlanden wird der Wettbewerb seit 1999 durchgeführt und im letzten Jahr nahmen 170 Schulen daran teil. Seit 2005 findet der *Wiskunde B-dag* auch in Flandern und in NRW statt. Von diesen Schulen nehmen 19 flämische und 25 nordrhein-westfälische Schulen am offiziellen Wettbewerb mit der Endausscheidung teil. Darüberhinaus gibt es eine nicht bekannte Zahl von Schulen, die den Wettbewerb in ihr Unterrichtsprogramm aufnehmen, ohne an den offiziellen Wettbewerbsaktivitäten teilzunehmen.

Beide Wettbewerbe regen durch ihre besondere Aufgabenstellung, ihre Bearbeitungsform und ihr Bewertungsverfahren Schülerinnen und Schüler in hohem Maße zu kreativem Umgang mit Mathematik an. Schüler arbeiten in Dreier- oder Vierergruppen an diesen Forschungsaufträgen, die auch als Facharbeiten eingesetzt werden können. Der *Wiskunde B-dag* wird am Freudenthal Institut in Utrecht in Zusammenarbeit mit Lehrern, niederländischen Universitäten und der Universität zu Köln in deutscher, niederländischer und englischer Sprache entwickelt. In NRW werden die Wettbewerbe vom Schulministerium veranstaltet. Die Aufgaben werden von der *Wiskunde B-dag*-Kommission, einer Kommission aus Lehrern, Professoren und Unterrichtsentwicklern konzipiert, die aus folgenden Mitgliedern besteht: Frits Beukers (Mathematisches Institut, Universität Utrecht), Leon van den Broek (Mathematisches Institut, Radboud Universität Nimwegen), Aad Goddijn (Freudenthal Institut, Universität Utrecht), Rainer Kaenders (Seminar für Mathematik und ihre Didaktik, Universität zu Köln), Henk van der Kooij (Freudenthal Institut, Universität Utrecht), Rob van Oord (Coenecoop College, Waddinxveen), Pieter Zwetsloot (Atheneum College, Hageveld).

Die Wettbewerbe bisher. Über die Inhalte der Wettbewerbe seit 1999 geben wir hier einen kurzen Überblick.

1999: Wie baue ich mein eigenes Mobilfunknetz? In diesem ersten Jahr bekamen die Schüler nach einer Einleitung über den Entwurf von Mobilfunknetzen die Gelegenheit, ihr eigenes Mobilfunknetz zu entwerfen und dessen qualitative und quantitative Vorzüge zu begründen. Der Kontext war so gewählt, dass sehr schnell die Struktur eines geeigneten mathematischen Modells im Mittelpunkt der Betrachtungen stand.

2000: Gibt es nie wieder eine totale Sonnenfinsternis? Eine Sonnenfinsternis ruft viele Fragen hervor, bei deren Beantwortung die Mathematik eine zentrale Rolle spielt. Diese Fragen formten den Kern dieses *Wiskunde B-dag*.

2001: Wie kommt man mit einem Jeep durch die Wüste? Diese logistische Frage führt sehr schnell zu Fragen der Geometrie der Ebene, die dort untersucht wurden.

2002: Es gilt 1+1=2, aber wie geht's weiter? Eine *Rechenkette* für eine natürliche Zahl n ist eine steigende Folge natürlicher Zahlen, die beginnt mit 1 und endet mit n, wobei jede Zahl nach der Anfangszahl 1 die Summe zweier vorheriger Zahlen oder das Doppelte einer vorherigen Zahl ist. Zum Beispiel finden wir für 25 die Rechenkette: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25. Oder aber: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 24, 25. Die Untersuchung solcher Rechenketten führte zu sehr verschiedenen nichttrivialen Untersuchungen bei den teilnehmenden Schülergruppen.

2003: Was kann man mit Kniestücken klempnern? Ein *Tangle* ist ein Kniestück von 90° eines Spielzeugsystems, bei dem geschlossene Raumkurven aus solchen Tangles zusammengesetzt werden können. Dies führt automatisch zu interessanten mathematischen Fragestellungen, die auch von Schülern erfolgreich untersucht wurden.

2004: Verläuft der Lastweg eines Krans auf einer Geraden? Hier wurden Stangenkonstruktionen im Allgemeinen und Lastkurven bei Hebekränen im Besonderen untersucht. Mit Hilfe von DGS-Systemen konnte dieser Kontext in Fragen der euklidischen Geometrie übersetzt und erforscht werden.

2005: Wie viele Tauben passen in ein Schubfach? Das Schubfachprinzip, oder englisch: *pigeonhole principle*, hat viele interessante zahlentheoretische Konsequenzen, deren Entdeckung den Kern des *Wiskunde B-dag* in diesem Jahr formte.

2006: Welche Zeiten zeigt die Uhr beim Friseur? Wenn man beim Friseur die Uhr im Spiegel sieht, zeigt diese nur manchmal eine Uhrzeit an, die auch eine nicht gespiegelte Uhr anzeigen kann. Der hieraus entstehende Fragenkreis formte den Ausgangspunkt einer Entdeckungsreise, die schließlich in Beziehung zur Geometrie des Torus und zu elementarer Zahlentheorie, wie dem euklidischen Algorithmus, gesetzt wurde.

2007: Wie viele Ohren hat ein Polygon? Polygone formten das Untersuchungsgebiet des vergangenen Jahres, das unten näher beschrieben werden soll.

Das Beispiel: Polygone. *Einfache Polygone*, d.h. zusammenhängende Polygone ohne Selbstschneidungen, formten den Untersuchungsgegenstand im letzten Jahr. Zunächst wurden *eingestülpte* und *herausstehende* Ecken untersucht. Eine *Kapuze*[1] ist eine heraustehende Ecken p_i, bei denen benachbarte Eckpunkte p_{i-1} und p_{i+1} durch eine Diagonale verbunden sind, die innerhalb des Polygons verläuft. Die Schüler suchten nach extremen Polygone mit vielen und wenigen Kapuzen.

[1] In der Literatur ist hierfür der Begriff *Ohr* gebräuchlich, der aber aufgrund der einfachen Recherchemöglichkeiten für die Schüler im Internet durch *Kapuze* ersetzt wurde.

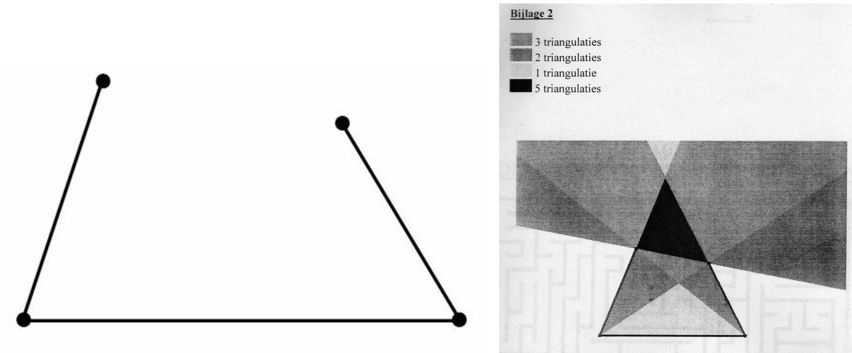


ABBILDUNG 1. Stratifizierung der Ebene für einen möglichen fünften Punkt des mit vier Eckpunkten vorgegebenen Polygons anhand der Anzahlen der möglichen Triangulierungen.

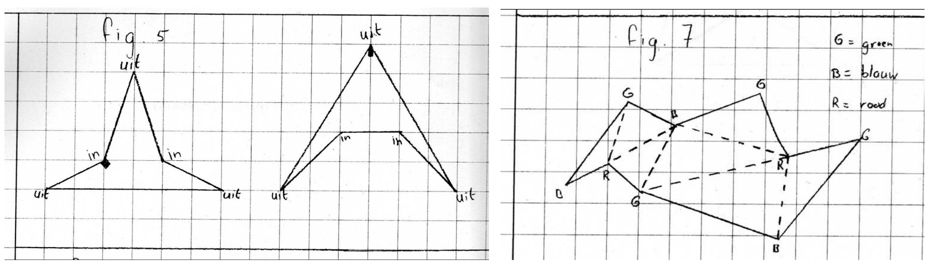


ABBILDUNG 2. Schülerlösung zur Kameraüberwachung eines Fünfecks und zur allgemeinen Abschätzung der Kamerazahl bei einem einfachen Polygon.

Mit Hilfe vollständiger Induktion, die als mathematische Technik nicht vorausgesetzt werden konnte, wurden verschiedene Sätze bewiesen, wie die Triangulierbarkeit einfacher Polygone oder die Existenz von mindestens zwei Kapuzen bei jedem einfachen Polygon. Dies gibt wiederum Anlass zu vielen neuen Fragen, wie etwa dem Zählen möglicher Triangulierungen (siehe Abb. 1). Schließlich konnten die entwickelten Werkzeuge zur Untersuchung der Frage eingesetzt werden, mit wieviel Kameras ein Polygon überwacht werden kann (siehe Abb. 2).

Die Schülerarbeiten zu diesem *Wiskunde B-dag* haben gezeigt, dass Schüler in der Lage sind, aktiv und selbstständig mathematische Strukturen zu untersuchen, auch wenn dabei eine geführte Einleitung unerlässlich scheint.

Webseiten für weitere Informationen:

[1] Niederländische Mathematikwettbewerbe in NRW,
http://www.learn-line.nrw.de/angebote/alympiade/.
[2] Wiskunde B-dag beim Freudenthal Institut, Universität Utrecht,
http://www.fi.uu.nl/wisbdag/
[3] Zentrum für mathematische und naturwissenschaftliche Bildung der Universität zu Köln, http://zmnb.uni-koeln.de/.
[4] Landesverband Mathematikwettbewerbe Nordrhein-Westfalen e.V.,
http://www.mathe-nrw.de/.

Friedhelm KÄPNICK, Münster

Das Internetprojekt „Aufgabe des Monats“ – Eine Zwischenbilanz nach siebenjähriger Arbeit

Das Internetprojekt[1] wurde von mir vor mehr als 7 Jahren im Zusammenwirken mit einem renommierten Schulbuchverlag entwickelt und gestartet. Bis heute haben wir etwa 60 Monatsknobeleien ins Netz gestellt, zu den Aufgaben mitunter einige wenige, oft aber auch viele Schülereinsendungen erhalten (durchschnittlich etwa 30 pro Monat, hinzu kommen monatlich ca. 1 000 Downloads) und diese kontinuierlich ausgewertet, sodass wir nun eine Zwischenbilanz zu dem erfolgreichen Projekt ziehen können.

Abb. 1: Beispiel einer „Aufgabe des Monats“

1. Ziele und Organisation des Internetprojekts

Die ***Hauptziele*** des Projektes kann man unter verschiedenen Perspektiven kennzeichnen. Zunächst sind die Monatsknobeleien ein attraktives Freizeitangebot für mathematisch leistungsstarke Grundschulkinder aus allen Bun-

[1] Im Internet kann man sich unter der Adresse „www.vwv.de“ die aktuelle Monatsknobelei sowie ein Archiv mit allen bisher veröffentlichten Aufgaben und entsprechenden Musterlösungen von Kindern ansehen und ausdrucken.

desländern der BRD. Unter dieser Sicht kann das Bearbeiten der Aufgaben dazu beitragen, dass Kinder vielfältige Problemstellungen und Anwendungen der Mathematik erfahren und dass ihr Spaß und Interesse am Knobeln sowie ihre Problemlösekompetenzen gefördert werden, bei längerfristiger Teilnahme auch mit nachhaltigen Wirkungen. Zugleich können Lehrerinnen und Lehrer die Aufgaben zum differenzierenden Lernen im regulären Mathematikunterricht oder zum Fördern leistungsstarker Kinder in außerunterrichtlichen Projekten einsetzen. Hierbei bieten Schülerlösungen zudem Möglichkeiten zur Diagnostik, wie etwa zu den Problemlösekompetenzen oder zu individuellen Problemlösestilen von Kindern. Schließlich bieten die regelmäßigen Einsendungen von Kindern uns die Möglichkeit, allgemeine Trends bzgl. der Entwicklung von Lern- und Verhaltensgewohnheiten sowie von mathematischen Kompetenzen der teilnehmenden Kinder zu erkennen und zu analysieren.
Die Umsetzung des Konzepts erfordert ein recht strenges Zeitregime. Für die Internetnutzer realisieren wir z.B. Monat für Monat folgenden ***Zeitplan***:

- Veröffentlichung einer Aufgabe immer am 1. Tag eines Monats,
- Lösungseinsendung bis zum 15. (bzw. 20.) Tag jedes Monats,
- Veröffentlichung von Musterlösungen, von interessanten Anschlussproblemen am Ende eines Monats.

Die Auswahl und die inhaltliche Aufbereitung einer Aufgabe sowie die Auswertung der Schülereinsendungen leisten meine Mitarbeiterin, Frau Dr. Fuchs, und ich gemeinsam, zum Teil auch mit Unterstützung von Studierenden. Im Rahmen von Examensarbeiten analysieren Studenten außerdem alle Einsendungen über jeweils einen bestimmten Zeitraum (meist für ein Kalenderjahr). Dazu stellen sie fortlaufend Statistiken zu den Teilnehmeranzahlen (unterschieden nach Alter, Geschlecht, Wohnort, Bundesland, …) zusammen und werten die Schülereinsendungen unter qualitativen Aspekten (z.B. Korrektheit, Vollständigkeit, Darstellungsform der Lösungen) aus. Mitarbeiter des Cornelsen-Verlags sind für die redaktionelle Fertigstellung der Aufgabenpräsentation und für die Veröffentlichung von ausgewählten Kinderlösungen verantwortlich. Sehr gelungene Schülerlösungen werden mit Buch- oder Sachgeschenken prämiert.

2. Inhalte, Qualitätsanspruch und Präsentation der Monatsknobeleien

- Die Aufgabeninhalte stammen aus der „Freizeitmathematik“, aus mathematischen Schülerwettbewerben oder aus interessanten Zahlen und Größenangaben aus den Bereichen Natur, Sport, Kultur, Architektur, Technik, …
- Bzgl. der zu leistenden mathematischen Anforderungen orientieren wir uns an den üblichen Lehrplaninhalten des 3. und 4. Schuljahres. Ein zu

einem späteren Zeitpunkt behandelter Unterrichtsstoff sollte zum Lösen der Knobelaufgaben nicht notwendig sein.

- Die Aufgabenpräsentation erfolgt in der Regel in Form eines kleinen Sachtextes mit einem zugehörigen Bild, einer Tabelle o. Ä.
- Begleitfiguren sind die Kinder Lisa, Maria, Fabian und Tim. Die Kinder sind jeweils in einem konkreten Alltagsproblem verwickelt. Dabei stoßen sie stets auf ein mathematisches Problem, die jeweilige „Aufgabe des Monats".
- Die sich am Internet-Projekt beteiligenden Kinder werden dann aufgefordert, die Internetkinder beim Problemlösen zu helfen.
  Die Situationen bzw. Geschichten stehen in einen Zusammenhang zu Besonderheiten des jeweiligen Monats, wie z.B. Wintersportsituationen im Januar, Faschingsfeiern im Februar oder Vorbereitungen zum Osterfest im März bzw. April.
- Die teilnehmenden Kinder werden außerdem oft aufgefordert, zum gelösten Problem ein interessantes Anschlussproblem zu bestimmen.

Besondere Vorzüge des Projektes im Vergleich zu anderen Fördermaßnahmen sehen wir in Folgendem:

- Es ist ein Angebot für sehr viele Schüler aus allen Regionen Deutschlands sowie aus Österreich, der Schweiz oder Italien (wie einzelne Einsendungen belegen).
- Die Offenheit des Angebots erfordert und fördert damit die Eigenverantwortlichkeit eines Kindes. Sie bietet ihm z.B. die Möglichkeit, selbst zu entscheiden, wann, wie oft, mit wem oder mit welchen Hilfsmitteln es eine Aufgabe lösen und ob es seine Lösung einsenden möchte.
- Die Monatsknobeleien stellen ein günstiges und attraktives Angebot für Lehrerinnen und Lehrer zur Bereicherung des regulären Mathematikunterrichts oder zum individuellen Fördern begabter Kinder dar.

Probleme bzw. Grenzen des Projektes resultieren aus

- dem erheblichen organisatorischen Aufwand,
- der eingeschränkten Möglichkeit zur individuellen Förderung von Begabungen,
- einer eingeschränkten Möglichkeit für die Diagnostik. (Dies gilt natürlich vor allem dann, wenn man nur eine Einsendung als Basis hat.)

5. Erkennbare allgemeine Entwicklungstrends

- Der Umgang mit dem Computer, einschließlich der Internetnutzung und der Darstellung bzw. Aufbereitung von Lösungen mithilfe der technischen Möglichkeiten des Computers, ist für viele Grundschulkinder zur Normalität oder sogar zu einem Hobby geworden.

- Der Anteil der teilnehmenden Kinder aus ländlichen Gebieten hat erheblich zugenommen.
- Eine weitere Tendenz besteht darin, dass inzwischen ein relativ großer Anteil der Einsendungen von Schulklassen und Arbeitsgemeinschaften stammt. Lehrerinnen und Lehrer nutzen offenbar unser Angebot (wie von uns gewollt) regelmäßig für ihren Mathematikunterricht bzw. für eine schulische Fördermaßnahme für leistungsstarke Kinder.
- Es gibt (wie von uns erwartet) immer wieder einige „Stammkinder", die sich über einen längeren Zeitraum aktiv am Internetprojekt beteiligen.
- Insgesamt beteiligten sich mehr Jungen als Mädchen am Internetprojekt. Bei bestimmten Aufgabeninhalten und –präsentationen (wie bei künstlerisch eingekleideten Aufgaben, bei Aufgaben mit Sachbezügen, die tendenziell insbesondere Mädchen „ansprechen") ist aber auch ein verstärkter Mädchenanteil feststellbar.
- Die Teilnehmerzahlen schwankten zum Teil beträchtlich.
  Sehr viele Einsendungen erhielten wir bei Einkleidungen von arithmetischen bzw. algebraischen Problemaufgaben und von eher bekannten mathematischen Knobeleien.
  Relativ wenige Einsendungen bekamen wir dagegen bei sehr anspruchsvollen oder eher ungewöhnlichen Aufgaben.
  Eine weitere Ursache für Schwankungen in den Teilnehmerzahlen sind u. E. terminliche Besonderheiten (Weihnachts-, Sommerferien, Schuljahresbeginn).
- Die teilnehmenden Kinder gaben selten interessante und substanzielle Anschlussprobleme an.
- Von vielen Kindern, aber auch von Lehrerinnen und Lehrern erhalten wir immer wieder sehr positive Rückmeldungen zu den Knobelaufgaben.

Das Lob der Nutzerinnen und Nutzer sowie die oft originellen und liebevoll angefertigten Lösungen bewogen uns, aus dem Fundus der Monatsknobeleien und der authentischen Kinderlösungen einen Jahreskobelkalender zu konzipieren. Dieser zeitlose Kalender, der z.B. als Wandschmuck im Klassenraum oder im Zimmer eines kleinen Matheasses hängen kann, bietet für jede Woche eines Jahres eine Knobelaufgabe. Die jeweilige Rückseite enthält neben originalen Kinderlösungen einige methodische Hinweise zu den konkreten mathematischen Themen, zu den Lernpotenzen einer Aufgabe und zu möglichen Ergänzungen bzw. Erweiterungen eines Problemfeldes.

Literatur

Fuchs, M.; Käpnick, F.: Knobelkalender – Mathe für kleine Asse. – Berlin: Cornelsen, 2007

Gabriele KAISER, Inga SCHWARZ, Hamburg

Mathematiklernen bei einer sprachlich und kulturell heterogenen Schülerschaft

Die unumstrittene Bedeutung der sprachlichen Lernvoraussetzungen für den Bildungserfolg erweist sich für Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund auf eine besondere Weise ausschlaggebend: Der u.a. in PISA 2000 festgestellte Leistungsrückstand dieser Population in Bezug auf das Leseverständnis in deutscher Sprache wirkt sich kumulativ in den mathematischen und naturwissenschaftlichen Leistungsbereichen aus.

Im Folgenden wird über einige Ergebnisse einer Studie berichtet, die unter besonderer Berücksichtigung der Erstsprache von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund untersucht, in welcher Weise die differenten sprachlichen Voraussetzungen deren Verarbeitung mathematischen Lehrstoffs beeinflussen[1]. Der Fokus dieser Untersuchung liegt auf der fachbezogenen Sprachstandsanalyse und der Auswertung der Lese- und Verstehensmuster. Eine solche Auswertung erfolgt eingebettet in die Rekonstruktion des Modellierungskreislaufs, wobei die Vorstellungen der Lernenden von der realen Situation und ihre Übersetzung ins mathematische Modell untersucht werden.

Der Datenkorpus der Untersuchung bezieht sich auf Sprachproben von 20 Jugendlichen mit russischem Sprachhintergrund. Die Sprachproben beinhalten Paraphrasen einer mathematischen Textaufgabe sowie das entsprechende Lösungsvorgehen. Bei der Vorlage handelt es sich um eine Textaufgabe aus dem Lehrbuch für Mathematik (Mathe live 7, 2000, S. 19):

> Im Salzbergwerk Bad Friedrichshall wird Steinsalz abgebaut. Das Salz lagert 40 m unter Meereshöhe, während Bad Friedrichshall 155 m über Meereshöhe liegt. Welche Strecke legt der Förderkorb bis zur Erdoberfläche zurück?

Dieser Aufgabentext wurde als Elizitierungsvorlage ausgewählt, da er viele Charakteristika der Bildungssprache aufweist: Der Inhalt wird meist durch zusammengesetzte Substantive vermittelt; der Strukturwortschatz in Form von Präpositionen hat eine zentrale Funktion; die Konjunktion „während“ wird nicht temporal (wie geläufig), sondern konfrontativ verwendet. Darüber hinaus entstammt der Sachkontext der Aufgabe nicht der Alltagswelt der Kinder.

Das durch die Sprachproben gewonnene Datenmaterial wurde in qualitativ orientierten Fallstudien ausgewertet mit dem Ziel, Muster als theoretische Beschreibungen zu entwickeln, in denen exemplarisch Umgangsweisen mit realitätsbezogenen Aufgaben deutlich werden.

---

[1] Diese Studie geht auf das DFG-Projekt von Gogolin, Kaiser, Roth „Mathematiklernen im Kontext sprachlich-kultureller Diversität“ zurück.

Ergebnisse - Muster in der Bearbeitung von Textaufgaben

In allen untersuchten Fällen konnten zwei Phänomene rekonstruiert werden, die eine zentrale Stellung bei der Auseinandersetzung der russischsprachigen Schülerinnen und Schüler mit der mathematischen Textaufgabe einnehmen. Diese Phänomene sind zum einen **das Aufbauen des Aufgabenverständnisses über Substantive** und zum anderen **die Vernachlässigung des Strukturwortschatzes**.

Der Zugriff auf einen Text über das Verstehen von Substantiven, die Inhalte transportieren, ist charakteristisch für die Auseinandersetzung von Mehrsprachigen mit Texten in der Zweitsprache. Auffällig in den vorliegenden Sprachproben ist, dass zentrale Begriffe der verwendeten Textaufgabe den Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereiten bzw. nicht bekannt sind. Hierzu im Folgenden einige Beispiele:

- Interpretation von „Salzbergwerk"[2]

> D: (4 Sek.) in einem Berg wird Salz abgebaut
> I: hm [bestätigend]...
> D: und und dies/ dieses Berg ist hundertfünfundfünfzig Meter über dem/ der Meereshöhe

- Verständnis von „Meereshöhe"

> I: hm (4 Sek.) [...] Meereshöhe – was kannst du dir drunter vorstellen ...
> D: ist eine Linie [lacht] so na ja
> I: ja
> D: das Wasser bleibt ja stehen $ sie hat ja keine – Hügel $
> I: $ aha $
> D: Meereshöhe – na wie hoch das Wasser ist

Es wird deutlich, dass insbesondere Komposita bei der Erschließung der Wortbedeutungen problematisch sind. Eine Analyse der Verstehensmuster zeigt eine durchgehend gleiche Art und Weise, mit solchen Verständnisschwierigkeiten umzugehen. Die Probanden **zerlegen die Komposita** in ihre Bestandteile und verwenden die Einzelbedeutungen für die weitere Auseinandersetzung mit der Textaufgabe. Dieses Muster wird im Folgenden eingehender dargestellt: Dabei werden zunächst die Ausprägungen dieses Musters und anschließend die funktionale Bedeutung seiner Anwendung beschrieben.

Das Muster wird hauptsächlich in Bezug auf die Begriffe „Meereshöhe" und „Erdoberfläche" aktiviert. Es zeigt sich, dass in keinem der Fälle das ebenfalls zusammengesetzte Substantiv „Förderkorb" durch diese Vorgehensweise erschlossen wurde. Aus diesem Grund kann die Hypothese auf-

---

[2] Die Transkriptauszüge sind geglättet und gekürzt.

gestellt werden, dass das Muster der Kompositazerlegung nur dann angewendet wird, wenn die Bedeutungen der Einzelteile der zusammengesetzten Wörter Schülerinnen und Schülern bekannt sind, und diese Einzelbedeutungen im Kontext der Textaufgabe aus der Sicht der Probanden Sinn ergeben bzw. sie bei der Aufgabenlösung weiterführen.

Das Muster konnte in drei Ausprägungen beobachtet werden: **1)**Verwendung von lediglich dem ersten Teil des Kompositums in der weiteren Bearbeitung; **2)** Reduktion des Kompositums auf den bekannten/ Sinn machenden Teil; **3)** Schaffung einer neuen Wortbedeutung, indem die Teilbedeutungen des zusammengesetzten Substantivs wörtlich genommen werden (vgl. den Transkriptauszug zu „Meereshöhe).

Eine Analyse der Sprachproben mit dem Fokus auf funktionale Aspekte des Mustergebrauchs ergibt, dass dieser den mehrsprachigen Schülerinnen und Schülern einen aktiven Gebrauch der Komposita erleichtert bzw. überhaupt ermöglicht. Dies gilt sowohl für das Leseverstehen als auch für die Paraphrase mit eigenen Worten. Das **Weglassen von Teilbedeutungen** „sorgt“ außerdem dafür, dass den Probanden überhaupt Begriffe zur Verfügung stehen.

Auf der **textuellen Ebene** ermöglicht die Anwendung des Musters die Konstruktion eines subjektiv sinnvollen Sachkontextes. In einigen Fällen reichte dieser Kontext aus, um auf dessen Grundlage eine Mathematisierung vorzunehmen, im anderen Fall bedurfte es jedoch des „episodischen Erzählens“ (Malle 1993), d.h. einer Erweiterung des gegebenen Sachkontextes, damit eine Mathematisierung erfolgen konnte.

Ein weiteres Muster, das bei der Bearbeitung der Textaufgabe in allen untersuchten Sprachproben eine Rolle spielt, stellt die **Vernachlässigung des Strukturwortschatzes**[3] dar. Dieses Phänomen ist gleichermaßen wie der Zugriff auf einen Text über Substantive charakteristisch für das Zweitsprachverstehen von Mehrsprachigen (vgl. z.B. Rösch 2003). Allen untersuchten Fällen gemeinsam ist, dass die Bedeutung der Präpositionen für eine zielführende Lösung nicht in ihrer Tragweite erkannt wurde. Die Ausdifferenzierungen im Auftreten dieses Musters in den Sprachproben manifestieren sich entlang zweier Dimensionen: **der Phase im Modellierungskreislauf**, in der es auftritt, und der **Intensität seiner Auswirkung auf das Verständnis** der gesamten Textaufgabe. Je nachdem, ob die Bedeutung der Präpositionen bereits in der mentalen Situationsrepräsentation berücksichtigt wurde oder nicht, ist ein nicht zielführendes Realmodell – im ersteren

[3] Die nachfolgenden Ausführungen beziehen sich in erster Linie auf den Umgang mit den Präpositionen „unter“ und „über“ (vgl. Aufgabentext).

Fall - oder eine Mathematisierung, der die entscheidenden mathematischen Bedeutungskomponenten von „über“ und „unter“ fehlen, die Folge. Die rekonstruierten Muster beeinflussen sich zum Teil gegenseitig: So bedingt in einigen Fällen der Zugriff auf die Aufgabe über Substantive eine Nicht-Beachtung der strukturtragenden Elemente des Textes. In diesem Fall ist es für ein zielführendes Lösungsvorgehen entscheidend, ob die Lernende die Fachbegriffe kennen: Ist es der Fall, wirkt sich die Vernachlässigung des Strukturwortschatzes nicht nachteilig auf den Lösungserfolg aus. Fehlt diese Kenntnis allerdings, können die Probanden die Gesamtbedeutung des Textes aus dem Kontext, mit Hilfe von Präpositionen, nicht erschließen.

Zusammenfassung und Ausblick

Im Verlauf der Untersuchung ließen sich drei unterschiedliche Ursachen für die Probleme der zweisprachigen Jugendlichen aus den Sprachproben rekonstruieren: **1)** Schwierigkeiten beim Herausbilden von theoretischen Begriffen (Dörfler 1988) **2)** fehlende mentale Vorstellung von theoretischen Konstrukten wie z.B. „Meereshöhe“ **3)** Schwierigkeiten mit implizit gegebenen Informationen. Als ein weiteres besonderes Hindernis erweist sich der deutschlandspezifische Kontext der eingesetzten und vieler realitätsbezogener Aufgaben, der nicht zu einem gesicherten Wissensbereich bei zugewanderten Schülerinnen und Schülern gezählt werden kann.

Als mögliche Konsequenz der vorliegenden Untersuchungsergebnisse erscheint aus mathematikdidaktischer Sicht eine sorgfältige Analyse der Aufgabentexte in Bezug auf Komposita als inhaltstragende Elemente und des Strukturwortschatzes notwendig. Eine nicht minder große Rolle kommt der Analyse von implizit verwendeten Wissen und Regeln zu mit dem Ziel, das gemeinsame Verständnis durch entsprechende Explizierungen zu sichern.

Literatur

Dörfler, W. (1988): Begriff als Tätigkeitsstruktur – Zur Unterscheidung von empirischem und theoretischem Begriff. In: Bender, P. (Hrsg.): Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Berlin: Cornelsen, S. 29-36.

Gogolin, I. et al. (2004): Mathematiklernen im Kontext sprachlich-kultureller Diversität. Unveröffentlichter Abschlussbericht an die DFG. Hamburg, Universität Hamburg.

Kietzmann, U., Kliemann, H. & Pongs, R. (2000): Mathe live 7. Stuttgart: Klett.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Braunschweig: Vieweg.

Rösch, H. (Hrsg.) (2003): Deutsch als Zweitsprache. Grundlagen, Übungsideen, Kopiervorlagen zur Sprachförderung. Hannover: Schroedel.

Gabriele Kaiser, Stefan Krauss

Selbstmoderierte Sektion zu „Professionswissen zukünftiger und praktizierender Mathematiklehrpersonen“

Zum Professionswissen zukünftiger und praktizierender Mathematiklehrerinnen und –lehrer werden seit einigen Jahren wissenschaftliche Studien durchgeführt, aus denen in diesem Symposium berichtet wurde.

Zum einen wurden aus der DFG-geförderten COACTIV-Studie (Projektleiter: Baumert, Blum, Neubrand) neuere Ergebnisse zum fachdidaktischen Wissen und zum Fachwissen von deutschen Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe vorgestellt:

Werner Blum, Michael Neubrand und Stefan Krauss berichteten über Zusammenhänge dieser beiden Wissensfacetten mit professionellen Überzeugungen der COACTIV-Lehrkräfte (über das Fach Mathematik und das Lehren von Mathematik) einerseits sowie mit Unterrichtsmerkmalen und mit Schülerleistungen andererseits.

Stefan Krauss und Martin Brunner beschreiben in ihrem Beitrag ein im Rahmen von COACTIV entwickeltes computergestütztes Instrument, mit dem untersucht werden kann, inwieweit Lehrkräfte (potentielle) Schülerbemerkungen fachlich korrekt beurteilen und wie lange sie dafür brauchen.

Zum anderen wurde im Symposium aus Studien im Zusammenhang mit der von der IEA im Jahr 2006 begonnenen internationalen Vergleichsstudie („Teacher Education and Development Study: Learning to Teach Mathematics“ – TEDS-M) berichtet (Projektleitung Blömeke, Kaiser, Lehmann). Hierbei wird erhoben, welches Wissen zukünftige Mathematiklehrpersonen der Primar- und Sekundarstufe im Rahmen ihrer Lehrerausbildung in beiden Phasen in den Bereichen Mathematik, Mathematikdidaktik und Erziehungswissenschaft erworben haben:

Johannes König und Sigrid Blömeke beschreiben in ihrem Beitrag ein Instrument zur Erhebung von Unterschieden im pädagogischen Wissen von Lehramtsstudierenden mit und ohne Mathematik als Fach und beschreiben erste Ergebnisse.

Björn Schwarz und Gabriele Kaiser stellen deutsche Ergebnissen aus einer TEDS-M vorgeschalteten Studie dar (MT21-Studie), und zwar über das mathematische und mathematikdidaktische Wissen von Lehramtsstudierenden speziell im Bereich Argumentieren und Beweisen.

Tünde KÁNTOR, Ungarn, Debrecen

Kooperative Unterrichtsmethoden für den Mathematikunterricht in Ungarn

Einleitung

In diesem Semester hatten wir an der Uni Debrecen einen neuen Kurs für Lehrerstudenten eingeführt. Die Ergebnisse der PISA (2000, 2003, 2006) Vermessungen zeigen dass in Ungarn die Leistung der Schüler unverändert ist. Unser Ziel war Entwicklung der Kompetenzen der Lehrerstudenten. Wir arbeiteten ein Kompetenzmodell für die Lehrerausbildung aus. Dieses Modell wurde aus der Erfahrung der Schulpraxis heraus entwickelt auf Grund der PISA Vermessungen. In der Lehrerausbildung in Rahmen der Fachdidaktik und in der Schulpraxis wurden neue Verfahren, Lehrmethoden ausprobiert und weiterentwickelt.

Der Beitrag des Faches Mathematik zur Bildung der Studenten

Mathematikunterricht trägt zur Bildung der Studenten bei, indem er ihnen insbesondere folgende Grunderfahrungen ermöglicht, die miteinander in engem Zusammenhang stehen:

- Technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen.
- Mathematik mit ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und äusserhalb der Mathematik erkennen und begreifen.
- In der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln allgemeine Problemlösefähigkeit erwerben.

Die Studenten bearbeiten Probleme und Aufgaben mit mathematischen Mitteln, lesen mathematische und fachdidaktische Texte, schreiben und kommunizieren über die Inhalte, Kooperationsbereitschaft, Dokumentation und Präsentation von Lernergebnissen. Der Auftrag der Lehrerbildung geht über den Erwerb fachspezifischer Kompetenzen hinaus, zusammen mit anderen Fächern zielt Mathematikunterricht auch auf Persönlichkeits- und Weltorientierung.

Kooperative Unterrichtsmethoden für die Mathematik sind heute sehr wichtig, aber wir müssen bei den Lehrerstudenten beginnen. An konkret Beispielen aus dem Mathematikunterricht für die Studenten wird gezeigt wie das „Ich-Du- Wir Prinzip“ Möglichkeiten zum Einsteig in die Form kooperativen Arbeitens bietet. Der Dreischnitt: Denken – Austauschen - Vorstellen ist ein Grundprinzip des kooperativen Lernens. So bekommen an den Kurs die Lehrerstudenten eine effektive Lehrmethode für Mathematikunterricht.

Unsere Ziele waren:

- Vorbereitung der Lehrerstudenten zum Kompetenzorientierten Mathematikunterricht theoretisch und praktisch.
- Bekanntmachung von PISA Kompetenzen und PISA Aufgaben.
- Neue Formen des Mathematikunterrichts, z.B. kooperatives Lernen.
- Die Entwicklung von Kooperationsbereitschaft.

Unsere Methoden waren:

Gruppenarbeit, Differentiation, Lesen und Schreiben, einen individuellen kompetenzorientierten Stundenplan zu machen, Schülerarbeiten und zwei Videoaufnahmen analysieren.

Unser Lehrplan war:

1. Lehr- und Lernverfahren in Mathematikunterricht
2. Kooperatives Lernen und andere Methoden
3. Differenzierung in Mathematikunterricht
4. Kompetenzorientierte Lehrerausbildung
5. Entwicklung der Kompetenzen im Mathematikunterricht
6. PISA Kompetenzen
7. PISA Aufgaben und Lösung in kooperativer Form, mit Analyse
8. Entwicklung von Schülerkompetenzen in den Klassen 7-12
9. Lehrerkompetenzen
10. Fehleranalyse, Fehlergruppierung
11. Fallstudien
12. Planung einer Kompetenzorientierte Mathematische Stunde

Wir beschäftigten uns

- mit den Formen und Verfahren den Schulpraxis: frontales, individuelles und kooperatives Lernen,
- mit den kooperativen und kompetitiven Methoden,
- mit den zehn häufigsten Fragen über kooperatives Lernen (Kagan),
- mit der personalen Schulpraxis den Studenten,
- mit der Theorie von Bruner, der Heuristik von Polya und Lakatos,
- mit Fehler und Fehleranalyse,
- mit den allgemeinen mathematischen Kompetenzen: reproduzieren, Zusammenhänge herstellen, verallgemeinern und reflektieren,
- mit den acht mathematische Kompetenzen ausgearbeitet von Niss.

Wir diskutierten

- ein Extremalaufgabe (Ein Farmer hat einen 120 Meter langen Zaun. Er möchte ein rechteckigförmiges Feld so umzäunen, dass der Flächen-Inhalt maximal wird),

- Polya: Die zehn Gebote für Lehrer und die Themen: Wer ist ein/e gut/e Lehrer/in?

Die Studenten spielten

- in Gruppen mathematische Spiele aus dem Buch Alan Bloomfield and Bob Vertes: People Maths: Hidden Depth.
- Unsere anderen Leitideen waren Raum und Formen. Die Studenten hatten Netze bekommen und die Aufgabe war Körper zu machen aus den Netzen. Es war schwer für Sie.

Die Studenten beobachten

- Videoaufnahmen aus der Schulpraxis. Ich möchte präsentieren wie geht das Kompetenzorientierte und kooperative Lernen in der Schule. Hausarbeit war ihre Meinung zu schreiben.

Die Studenten lesen

- Artikel aus unserem Mathematik-didaktischen Journal (Mathematikunterricht): A. Furdek (Achern): Neue Wegen in MU, und Hausarbeit war ihre Meinungen zu schreiben,
- offizielle Zusammenfassung der PISA Ergebnisse. Hausarbeit war ihre Meinung zu schreiben.

Die Studenten hatten gelöst im Rahmen der kooperativen Arbeit

- PISA und realitätsnahe Problemen: Das Rennauto, Der Zimmermann, Farm, Häuser, Schritte, Wasserwerke, Erlebnisbaden.

Die Studenten korrigierten und analysierten

- einige PISA Schülerarbeiten,
- einige Kompetenzarbeiten,
- einige Stundenpläne.

Die Studenten hatten ihre eigenen Stundenpläne zu verfertigen. Sie können freiwillig Themen wählen. Ich hatte ein spezielles Problem (Mason Problem) für Sie, aber nur ein Dritten der Studenten bearbeitete dieses Problem. Das war das erste und selbst erprobte, unterrichtsnahe Beispiel für die Lehrerstudenten.

Aus den Meinungen der Studenten

- Der Kurs war praxisorientiert, voll mit praktischen Situationen und Problemen.
- Wir hatten neue moderne Methoden und Verfahren kennengelernt.
- Es war gut dass wir über Fehleranalyse gehört hatten.
- Wir mussten auch zusammenarbeiten, Gedanken austauschen, argumentieren.
- Wir hatten methodische Artikel lesen und unsere Meinungen zu schreiben

- Ich probierte einige, an dem Kurs gelernte Methoden mit meiner Privat- Schülerin. Dieses Mädchen wurde erfolgreich an der Aufnahme- Prüfung.
- Ich empfehle wärmstens diesen Kurs auch für die anderen Lehrer-studenten.

Zusammenfassung

Dieser Kurs war erfolgreich. Die Studenten nahmen an den Stunden teil und waren fleissig. Sie hatten viele Hausarbeit: lesen, analysieren, schreiben und präsentieren.

Zuerst war unsere Gruppe keine „Gruppe“, später konnten sie zusammen-arbeiten. Die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen, z.B. des Argumentierens und Kommunizierens, hatte einen intensiven und effektiven Gedankenaustausch zwischen Studenten hervorgerufen. Wir hatten Partnerarbeit und Gruppenarbeit entwickelt. Die mathematischen Spiele, die Vorbereitung eines Materials für eine mathematisches Lager, Übersetzung aus dem Englischen und Italienischen, Lösung der PISA Problemen, Anwendung geometrischer Modelle waren auch sehr interessant für Sie.

Für mich war überraschend dass manchmal einige Studenten verschiedene, individuelle Meinungen hatten und heftig mit einander disputierten.

Ich hoffe dass unsere Studenten als Lehrer die neuen Unterrichts-Methoden in der Schulpraktik benutzen können.

Literatur

1. Ambrus, G.: Realitätsnahe Mathematik(Ungarisch), Bp. Műszaki Kiadó, 2007
2. Balázsi Ildikó-Szabó Vilmos-Szalay Balázs: A matematikaoktatás minősége, hatékonysága és az esélyegyenlőség. A PISA 2003 nemzetközi tudásmérés magyar eredményei (www.oki.hu)
3. Bloomfield, A. und Vertes, B.: People Maths: Hidden Depth.
4. Furdek Attila: Új utak a matematika tanításában, A matematika tanítása, 2007. 4. szám, Mozaik Kiadó, Szeged
5. Heacox, D.: Differenciálás a tanításban, tanulásban, SZIA könyvek 2006
6. Kagan, S.: Kooperatív tanulás, Bp. Ökonet 2004
7. Kántor, T. und Kovács, A.: Első lépések a kooperatív tanulás bevezetésére A 2004-2006. évi Varga Tamás Napok előadásai Matematikatanár-képzés Matematikatanár-továbbképzés, Nyitott Könyvműhely, Bp. 2007, 91-102
8. Kántor, T. und Kovács, A.: One problem - more solutions An experiment for the application of cooperative learning ProMath 2006, Problem Solving in Mathematics Education 2007, Komarno, Slovakia, 79-93
9. Kántor, T. und Kovács, A.: First steps in introducing cooperative learning. Matematika v skole, Ružemberok, 2008. 31-38

Dagmar KARRER, PH Freiburg

Modellieren mit leistungssch achen au tsch lern

In der Hauptschule hat der Alltagsbezug von Mathematik eine besondere Bedeutung, das Modellieren wird dabei jedoch in der Regel vernachlässigt. Viele Lehrer sind der Meinung, dass derartige Aufgaben für Hauptschüler zu schwer sind und verweisen dabei insbesondere auf die leistungsschwachen Hauptschüler. Hier wird eine Studie vorgestellt, die ihren Fokus auf das Modellieren bei besonders schwachen Hauptschülern richtet.

Ausgangssituation orschungs rojekt Stratum

Stratum steht für *„Strategies for teaching understanding in and through modelling“* und ist ein vom Forschungsverbund Hauptschule gefördertes Projekt unter der Leitung von Katja Maaß (Mathematik) und hristoph Mischo (Psychologie), PH Freiburg.

Ziel von Stratum ist die Entwicklung, Evaluation und Optimierung von *Unterrichtskonzepten für die Integration von Realitätsbezügen und Modellierungen in den Mathematikunterricht der Hauptschule.*

Die dreijährige Projektlaufzeit erstreckt sich von September 2007 bis August 2010. Im 1. Projektjahr werden Unterrichtseinheiten und Untersuchungsinstrumente entwickelt. Im 2. Projektjahr (Schuljahr 200 /200) werden die Unterrichtseinheiten in 6. Hauptschulklassen implementiert, sowie verschiedene Variablen auf Schüler- und Lehrerseite erhoben. Sowohl Versuchsgruppe als auch Kontrollgruppe umfassen je 20 Klassen. Beide Gruppen durchlaufen Prä- und Posttests. Die Versuchsgruppe erhält als Intervention ca. Doppelstunden zum Thema Modellieren; die Kontrollgruppe bleibt ohne Treatment. Im 3. Projektjahr finden die Auswertung der Daten und die Optimierung der Unterrichtseinheiten statt.

Folgende Aufgabe (Maaß 2007) ist ein *Beispiel für eine Modellierung*:

In den letzten ahren gab es in den Städten und Dörfern an der Elbe immer wieder Hochwasser. Die Menschen wurden in Notunterkünften untergebracht. Als Notunterkünfte werden auch häufig Turnhallen benutzt. Dadurch haben die Menschen wenigstens eine Matratze, auf der sie schlafen können. Wie viele Menschen können in einer Turnhalle auf Matratzenlagern untergebracht werden

Beim Lösen einer solchen offenen, komplexen und realitätsbezogenen Aufgabe durchläuft man einen *Modellierungsprozess* (Blum 1 5, Maaß 2004):

a) reales Problem verstehen – b) durch Vereinfachen des realen Problems ein Realmodell bilden – c) durch Mathematisieren des Realmodells ein mathematisches Modell bilden – d) durch mathematisches Arbeiten die Lösung ermitteln – e) die Lösung interpretieren – f) die interpretierte Lösung validieren.

Modellierungskompetenzen sind nach Maaß (2004) und Blum   Kaiser (1 7) die Fähigkeiten, Modellierungsprozesse zielgerichtet und angemessen durchzuführen, sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten in Handlungen umzusetzen.

Dazu nötige *Teilkompetenzen* sind: Kompetenzen zum Durchführen des Modellierungsprozesses; metakognitive Modellierungskompetenzen; modellierungsbezogenes Argumentieren; Mathematik als Lösungsmöglichkeit von realen Problemen erkennen.

Das Modellieren hat folgende *Ziele* (Blum 1 6, Kaiser 1 5, Maaß 2004):

Methodologische Ziele:	Anwenden von Mathematik in unbekannten Situationen;
Kulturbezogene Ziele:	die Bedeutung von Mathematik erkennen;
Pragmatische Ziele:	Umweltsituationen kennenlernen, verstehen und bewältigen;
Lernpsychologische Ziele:	positive Einstellung gegenüber Mathematik, höhere Motivation, bessere Leistungen;
Pädagogische Ziele:	Problemlöse-, Argumentationsfähigkeiten und heuristische Strategien entwickeln;

Doch können diese Ziele von leistungsschwachen Hauptschülern erreicht werden?

orschungsfokus Modellieren mit leistungssch achen au tsch lern

An erster Stelle steht die Frage, was leistungsschwach bedeutet. Begriffe wie Leistungsschwäche und Lernschwierigkeit werden uneinheitlich verwendet.

In dieser Studie bezieht sich *„leistungsschwach“* auf *„schwach in Mathematik“*. Betrachtet werden *die in Mathematik schwächsten 25% der Schüler*. Dies entspricht der Einteilung, die auch in Zusammenhang mit den Diagnose- und Vergleichsarbeiten Hauptschule Mathematik Baden-Württemberg (DVA HS 6 M) vorgenommen werden.

Da zu Beginn der Studie die Schülerergebnisse der DVA noch nicht vorliegen, muss ein anderes Kriterium dafür festgelegt werden, wie sich die 25% leistungsschwachen Schüler rekrutieren lassen. Entweder entscheiden darüber die Zeugnisnoten der Schüler in Mathematik Ende Klasse 5, da diese auch die von den Schülern wahrgenommenen Rückmeldungen bezüglich ihrer Mathematikleistungen sind. Dann könnten die leistungsschwachen Schüler (zusätzlich) adaptiv getestet werden. Oder die Leistungen des Prätests im Bereich mathematische Grundfähigkeiten entscheiden über die schwächsten 25%. (Die mathematischen Grundfähigkeiten werden getestet mit dem standardisierten Testverfahren DEMAT 4.)

orschungsstand

Bisher gibt es keine empirischen Ergebnisse zum Modellieren mit leistungsschwachen Hauptschülern. Es existieren Studien zum Modellieren im Gymnasium (Maaß 2004), zu Sachaufgaben bei Lernbehinderten (Häsel 2001) und zur Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule (Schäfer 2005).

orschungsfragen und orschungsinstrumente

1. Forschungsfrage:
Verändern sich bei den leistungsschwachen Hauptschülern durch die Intervention die Modellierungskompetenzen Finden einhergehend mit Veränderungen der Modellierungskompetenzen auch Veränderungen statt in den u. g. Bereichen Diese Fragen interessieren vor allem im Vergleich zu den anderen Hauptschülern.
In folgenden Bereichen können Veränderungen bei den leistungsschwachen Hauptschülern stattfinden (in Klammern sind die Instrumente zur Veränderungsmessung angeführt):

a) Modellierungskompetenzen (Modellierungskompetenztest aus Stratum)
b) mathematische Grundfähigkeiten (DEMAT)
c) motivationale Bedingungen, Beliefs bezüglich Mathematik, Selbstkonzept und Selbstwirksamkeit, emotionale Bedingungen (Fragebögen mit Items aus PISA, SELLMO Skalen zur Erfassung des schulischen Selbstkonzepts und SESSKO Skalen zur Erfassung der Lern- und Leistungsmotivation)

2. Forschungsfrage
Gibt es bei leistungsschwachen Hauptschülern einen Zusammenhang zwischen den einzelnen Schritten des Modellierungsprozesses und Kompetenzen wie Lesekompetenz, mathematische Grundfähigkeiten und Weltwissen Auch hier interessiert wieder der Vergleich zu den anderen Hauptschülern.
Als Instrumente dienen hier die standardisierten Testverfahren ELFE 1-6 (Ein Leseverständnistest für Erst- bis Sechstklässler), DVA HS 6 M und HAWIK-III (Hamburger-Wechsler-Intelligenztest für Kinder).

3. Forschungsfrage

Lassen sich schülerseitige Bedingungen bei den leistungsschwachen Hauptschülern für erfolgreiche bzw. erfolglose Förderung durch die Intervention identifizieren, z. B. in den Bereichen Lesekompetenz, Weltwissen und mathematische Grundfähigkeiten. Existieren hier Schwellenwerte oder Schwellenmodelle

Hier werden erneut ELFE, HAWIK, DEMAT und DVA genutzt werden.

eiteres Vorgehen und Ausblick

Folgende Schritte stehen nun an: Untersuchungsgruppe definieren, Ausarbeitung und Vertiefung der 3 Forschungsfragen, Überlegungen zu qualitativen Ergänzungen (z. B. Interviews oder Einzelfallbeobachtungen).

Die dargelegten Überlegungen stellen den Einstieg in das Dissertationsprojekt 6 Monate nach Beginn von Stratum dar. Das Ziel des Forschungsvorhabens ist es, zu untersuchen, ob und in welchem Maße leistungsschwache Hauptschüler im Vergleich zu den anderen Hauptschülern Modellierungskompetenzen besitzen und/ oder entwickeln. Weitere Überlegungen sind, Fördermaßnahmen zu entwickeln für das Modellieren mit leistungsschwachen Hauptschülern, basierend auf den gewonnenen Erkenntnissen.

Literatur

Blum, W. (1 5). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In H. Behnke O. Toeplitz (Hrsg.). Mathematische Semesterberichte. Band 32. Heft 2. Göttingen: Vandenhoeck Ruprecht.

Blum, W. (1 6). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht. Trends und Perspektiven. In Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Band 23.

Häsel, U. (2001). Sachaufgaben im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Analyse und empirische Studien. Hildesheim: Franzbecker.

Kaiser, G. (1 5). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann, T. ahnke, G. Kaiser . Meyer. Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Maaß, K. (2004). Mathematisches Modellieren im Unterricht. Ergebnisse einer empirischen Studie. Hildesheim: Franzbecker.

Maaß, K. (2007). Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I. Berlin: ornelsen

Schäfer, . (2005). Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Lernstand, Einstellungen und Wahrnehmungsleistungen. Eine empirische Studie. Hamburg: Kovac.

János KATONA, SZIE Ybl Miklós Faculty, Budapest

Solving 2 and 3-dimensional problems with help of dynamical geometry software

Introduction

The Hungarian tradition - to solve 3-dimensional geometry problem on synthetical way - can be supported by 3D dynamical geometry softwares and suitable worksheet. This method makes possible to balance with time pressure at the secondary mathematics education. In order to show the effectivity of this method we chose a complex and interesting 3-dimensional problem. There is a kind of complexity which is not based on high mathematical knowledge, but on manipulating with 3-dimensional objects. The connection with the perspective drawing in renaissance art makes the problem interesting.

Below we describe the parallel consideration in 3D geometry and its Cabri 3D implementation. The steps of the solution are structured according to the well-known problem solving strategies of Pólya. (The instructions on the worksheet are typing in *italics letters*, the help regarding useful Cabri tools are written in *[brackets]*.

Posing the complex problem

Find for a given quadrangle a pyramid based on it, which can be cut in a square.

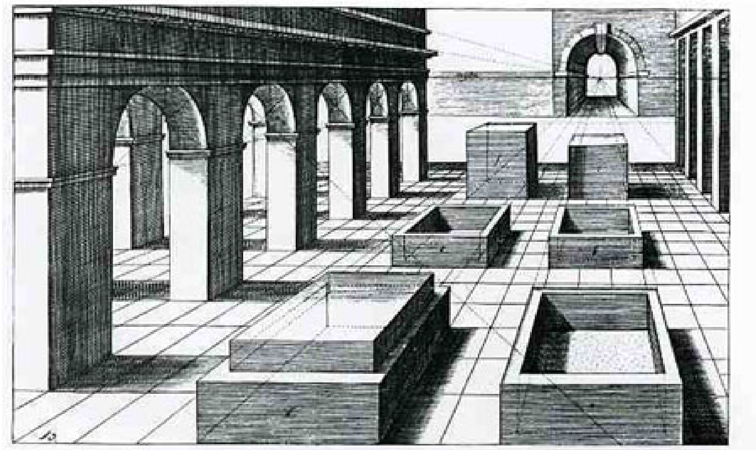
Understand the problem

Try to find another connection between the given quadrangle and square.
After an "excursion" on art by web search we find quadrangles demonstrating squares.

M. C. Escher: Belvedere

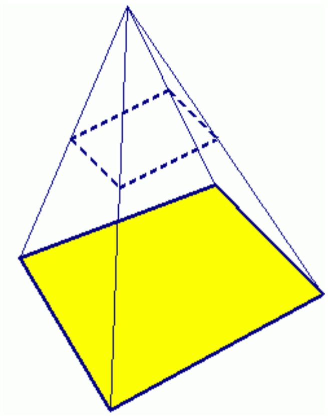
Gustave Caillebotte. *Le Pont de l'Europe*. 1876. Oil on canvas, 49 1/8 X 71 1/8". Musée du Petit Palais, Geneva.

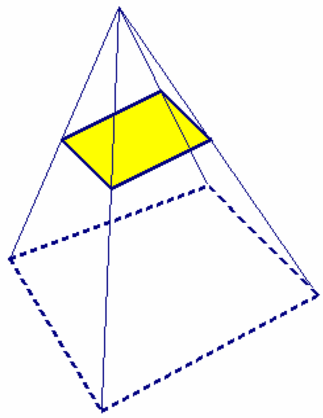
Hieronymus Rodler:
A vault the way you'd like it



3.60 Jan Vredeman de Vries, *Perspective Study*, from *Perspective*, Leiden, 1604.

These experiences indicate the change of our viewpoint from given quadrangle to square. We are looking for the centre of projection.





Devise a plan and carry out the plan:

Geometry construction

Consider the given quadrangle and suppose that the problem is solved.

We analyze the complete configuration and find out the following facts:

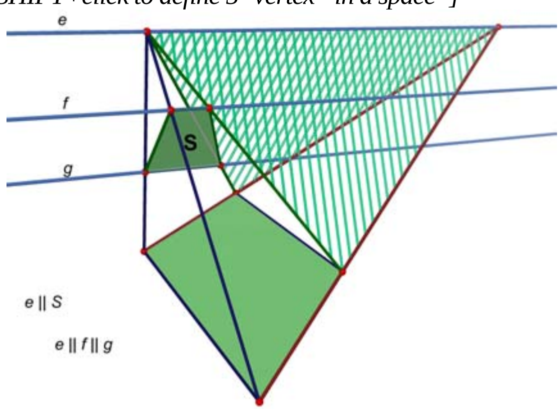
- Iff a cutting plane is parallel to the intersection line of two other planes, all the three intersection lines will be parallel.

In order to get a trapezoid as a cutting quadrangle we have to cut the pyramid by plane standing parallel to the intersection of two opposite faces.

Cabri 3D implementation

Quadrangle in Cabri 3D: [polygon tool / three times click on the base plane / double click to finish the quadrangle].

Pyramid: [pyramid tool / click on the quadrangle / SHIFT+click to define 5th vertex "in a space"]



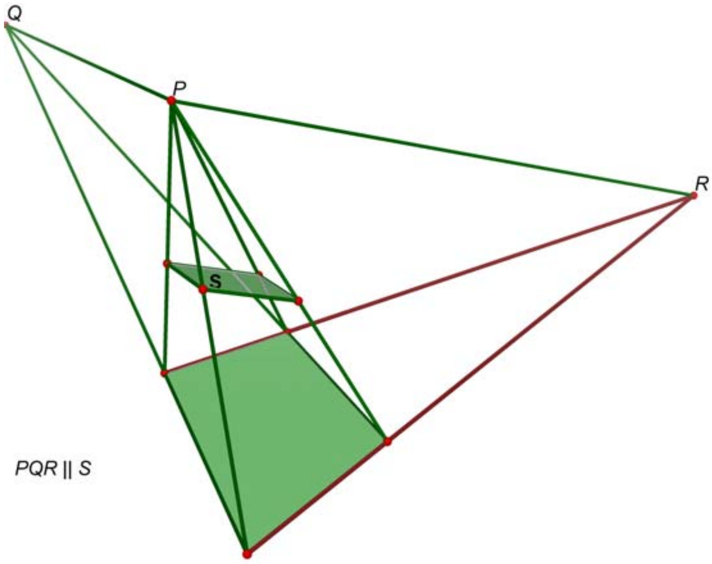
- If we cut the pyramid by plane standing parallel to intersection of both opposite face-pairs, the cutting quadrangle will be parallelogram.

Let PQ is the intersection the one of opposite face-pair, and PR is the intersection of the others. PQ and PR define a plane.

If we cut the pyramid by plane parallel to PQR, the intersection quadrangle will be a parallelogram.

- Finally we have to fix angles of diagonals and of sides to 90 degrees. If we choose the wanted (5th) vertex (P) on the Thales-sphere of segment QR, the cutting parallelogram will be rectangle, because in this case the QPR angle is right angle, and two edges of parallelogram are parallel to this angle.
- In addition, if we choose wanted vertex on the Thales-sphere of segment MN, (where diagonals of given quadrangle intersect line QR,) the cutting rectangle will be square, because its diagonals will be perpendicular to each other.

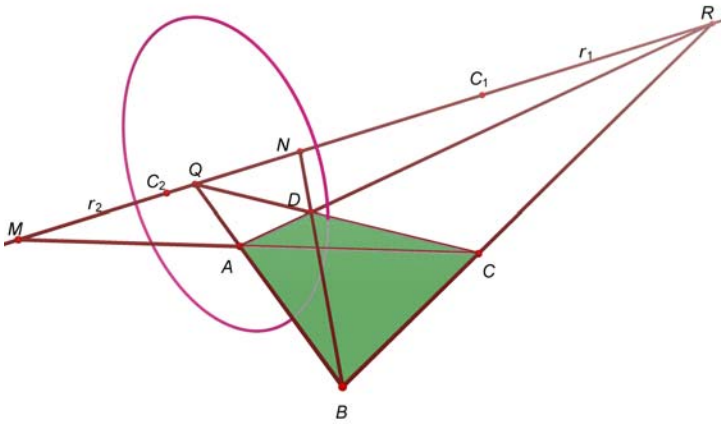
*The order of the last two steps can be changed, first determine a diamond and than a square.



Point Q and R: [Line tool / click on four edges of the pyramid / Intersection point tool / click on lines]

Plane S: [Plane tool / click on P,Q and R. / Parallel tool / click on plane PQR to define parallel to, and somewhere on an edge to define point through]

Parallelogram: [Intersection point tool / click on plane S and four edges of the pyramid. / Polygon tool / click on three intersection points / double click on the 4th point].



Point M and N: [Line tool / click on A & C and B & D and Q & R. / Intersection point tool / click on lines AC, QR and BD, QR]

Thales-spheres: [Midpoint tool / click on Q & R for getting C_1, and M & N for C_2. / Sphere tool / click on C_1 and R, then C_2 and M]

Intersection circle: [Intersection curve tool / click on two spheres. / (Now it is recommended to hide spheres by right click on them and choosing "Hide/Show" command)]

The solution: [Pyramid tool / click on the quadrangle ABCD / click on somewhere on the circle to define 5th vertex]

After it the cutting plane can constructed by method above.

Looking back (reflect)

Now we can answer the question if a given quadrangle can represent the central projection of a square.

- If the opposite sides of the given quadrangle are not parallel to each other (arbitrary quadrangle) the two Thales-spheres exist and they always intersect each other because the defining segments (PR and QS) harmonically separate each other.
- When the given quadrangle is a trapezoid, we get instead one of Thales-sphere a plane cutting the other sphere in a circle, too.
- In case of parallelogram our construction does not work. We know that any other construction could not give result because the parallelogram is an affine projection of the square. This means that the centre is an ideal point.

The vertex of the pyramid (this vertex is the centre of the projection) exists if and only if the given quadrangle differs from parallelogram. The parallelogram can not be considered as a perspective drawing of a square.

With help of dynamical geometry software it is possible to demonstrate the steps of the construction and examine the different cases. (The properties of starting quadrangle can be changed directly.)
By this way each user (users with less experiences with 3-dimensional geometry, too) can get an overview about the complex problem by each configuration.

Even beginners in using Cabri 3D could solve the problem during the workshop (in 90 minutes).

References

Colette LABORDE: Connecting geometrical, numerical and algebraic aspect of 3D geometry using Cabri 3D. Workshop CADGME Conference 2007, Pécs

János KATONA & Éva VÁSÁRHELYI: Cabri 3D Felhasználói kézikönyv. (URL: mahdid.elte.hu) 2008

Olaf KNAPP & Heinz SCHUMANN: Design und Evaluation von Instruktionsvideos für raumgeometrische Konstruktionen. Weingarten 2007

O. KNAPP & H. SCHUMANN: Evaluation of interactive on-screen videos for geometrical constructions in virtual space. In this proceedings, 2008

Éva VÁSÁRHELYI: Combination of traditional and computer based tools as a strategy for problem solving. Universität Münster: Creativity and Mathematics Education, pp.163-166, 1999

Christa KAUNE, Osnabrück

Lehrercoaching zur Verbesserung der Unterrichtsqualität - das Telekom-Modellprojekt "Mathematik Gut Unterrichten"

Die Qualität des Mathematikunterrichts an deutschen Schulen steht im Fokus des Modellprojekts der Deutschen Telekom Stiftung "Mathematik Gut Unterrichten". Unter diesem Motto engagieren sich Lehramtsanwärter, Lehrer und Wissenschaftler für die Verbesserung didaktischer und diagnostischer Kompetenzen von Mathematiklehrkräften. Angehende und im Beruf stehende Mathematiklehrkräfte aus ganz Deutschland bilden ein Qualitätsnetzwerk, das mathematische Unterrichtspraxis mit der Forschung über mathematische Denk-, Lehr- und Lernprozesse verknüpft und diese dann neu ausrichtet. Inhaltlich geht es um eine auf Forschung gestützte Ausrichtung an den mathematischen Denk-Lehr-Lernprozessen, methodisch um eine Entwicklung von Unterrichtsskripts für das Schulfach Mathematik, sozial um eine Vernetzung aller drei Phasen der Lehrerbildung.

Es gibt zwei Arbeitsbereiche für die Beteiligten: Der eine umfasst Planung, Dokumentation und Auswertung von Unterrichtsprozessen. Die Methode ist die videobasierte Analyse nach einem erprobten Kategoriensystem. Hier steht die auf Diskursivität und Metakognition zielende Interaktion im Mittelpunkt (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007; Cohors-Fresenborg, 2008, in diesem Band). Der andere betrifft die Analyse von Lernprozessen, Lernäußerungen und Lernprodukten der Schülerinnen und Schüler, die nach theoretischen Erkenntnissen erfolgt. Das besondere Augenmerk gilt der Individualität von Vorstellungen und Fehlvorstellungen (Sjuts, in diesem Band).

Methode des Lehrercoachings

Das Netzwerk von Mathematiklehrkräften soll in einer besonderen Form von Innovation Prozessqualität erhöhen: Jede Lehrkraft plant zunächst eine Unterrichtsstunde, führt diese selbst durch, dokumentiert den eigenen Unterricht und stellt das Unterrichtsvideo den anderen Netzwerkmitgliedern zur Verfügung. Am Institut für Kognitive Mathematik der Universität Osnabrück wird die dazu notwendige Aufbereitung der Unterrichtsvideos durchgeführt. Für eine Analyse steht ein Kategoriensystem zur Klassifizierung von metakognitiven Aktivitäten zur Verfügung. Sich ergebende Problemfelder im Lehrerhandeln werden beschrieben und bewertet. Auf gemeinsamen Regionaltreffen werden die Unterrichtsstunden analysiert und Maßnahmen zu einer potentiellen Verbesserung diskutiert. Hier hat sich gezeigt, dass die Auseinandersetzung mit dem eigenen videografierten Unterricht von den Beteiligten als effektiver eingestuft wird als eine gemeinsame Reflexion über nicht selbst bzw. nicht gemeinsam erlebten Unterricht.

Die schriftliche Formulierung einer Zielvorstellung steht als Ergebnis dieser Treffen. Das IKM bietet eine Begleitung der Lehrer beim Aufbau der Kompetenzen an und unterstützt diese bei der Überprüfung der Erreichung ihrer selbst formulierten Ziele. Schon nach einem halben Jahr lässt sich zeigen, dass gerade die theoriegeleiteten Projektmaßnahmen zu ersten Verbesserungen im Lehrerhandeln und in der Lernqualität führen.

Beispiel einer theoriegeleiteten Unterrichtsanalyse

Nachstehend wird gezeigt, wie Lehrern Hilfestellung gegeben wird, metakognitive Prozesse bewusster wahrzunehmen und Unterrichtsstunden hinsichtlich des Vorkommens zu vergleichen. Dazu werden sie angeleitet, das - am Institut für Kognitive Mathematik in einem DFG-Projekt entwickelte - Kategoriensystem zur Klassifizierung von metakognitiven und diskursiven Tätigkeiten anzuwenden. Dieses spezifiziert die drei Aspekte metakognitiver Aktivität, **Planung**, **Reflexion** und **Monitoring**, sowie **Diskursivität** und klärt Wechselwirkungen zwischen metakognitivem und diskursivem Verhalten. Die Lehrkräfte sollen durch ihre Analyseerfahrung in die Lage gesetzt werden, in ihrem Unterricht diese Kategorien zu berücksichtigen.

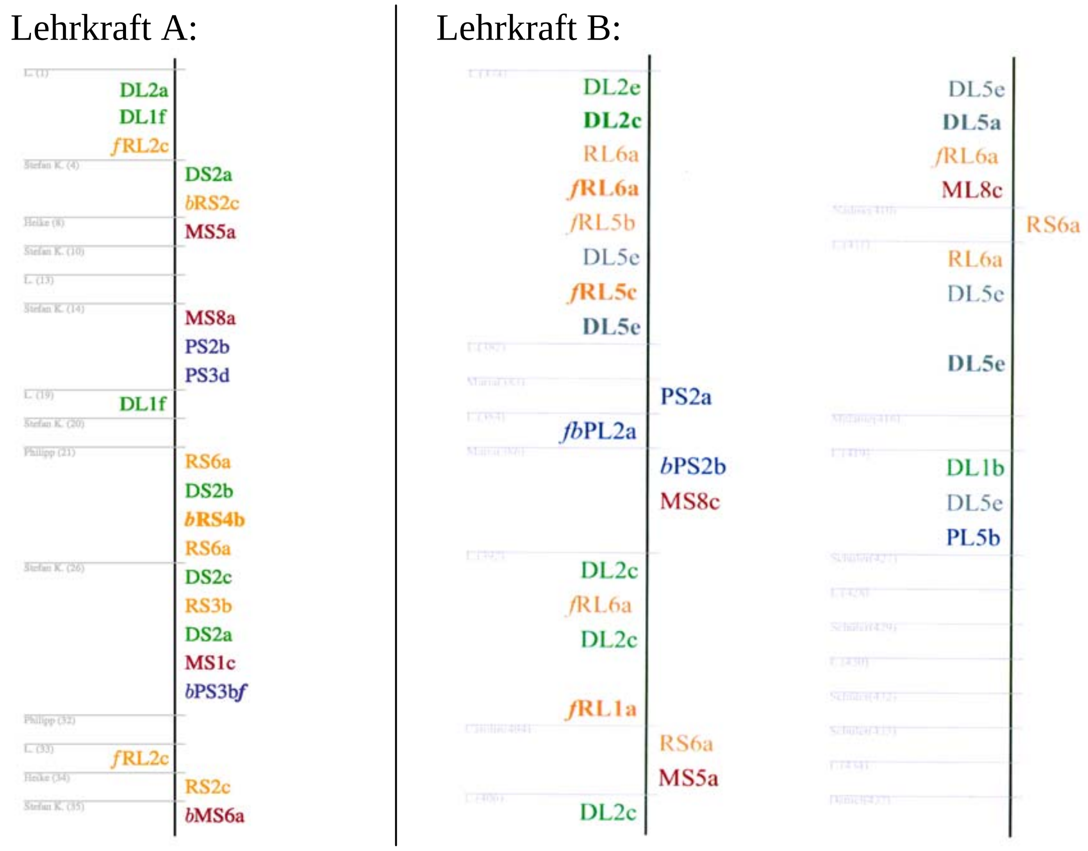
Am Ausschnitt einer Unterrichtsstunde eines Leistungskurses der Jahrgangsstufe 13, in der das Beweisen von Sätzen über kommutative Körper trainiert wurde, soll beispielhaft die Anwendung dieses Kategoriensystems gezeigt werden. Zu Beginn einer Doppelstunde wurden den Schülern mehrere Sätze vorgelegt, sie sollten nach Wahl zwei von diesen in Partnerarbeit beweisen. Die Lehrkraft beginnt (nach der Pause) die zweite Stunde mit einer Verankerung ihrer Äußerung. Im Transkript wird rechts in einer Spalte neben diese Äußerung die Kodierung DL2a ergänzt. Der erste Buchstabe weist auf **D**iskursivität hin, der zweite auf den Sprecher, hier auf die **L**ehrkraft. Sie eröffnet einen Diskurs (DL1f), die Teilkategorie D1 steht für die Eröffnung eines Diskurses und der Teilaspekt D1f für die Intention, eine Strategie zu überprüfen. DL2a ist ein Indiz für eine Verankerung, ein Nennen von Bezugspersonen, hier der Bezug auf Sören. In den Zeilen 2f fordert die Lehrkraft Sören zur **R**eflexion auf, er soll begründen, warum nach einer Werkzeuganwendung eine bessere Ausgangsposition für den weiteren Beweis vorliegen soll (*f*RL2c). Die Aufforderung wird durch das *f*, als Präfix vor die Bezeichnung der Kategorie gesetzt, deutlich. Sören kommt der Aufforderung direkt nach, zu sehen daran, dass die Bezeichnungen der unmittelbar aufeinander folgenden Kategorien von Lehrer- und Schüleraktivität übereinstimmen.

	L.:	So. Können wir? So, Sören hatte hier eben in der Pause ne Idee, dass man ei-	DL2a DL1f
2		gentlich fertig wäre, wenn ... Und vielleicht kannst du das erst noch einmal sagen, Sören.	*f*RL2c
4	Sören:	Also man wäre normalerweise ziemlich fertig, wenn man irgendwie äh Satz S4 zur Verfügung hätte, weil der Satz S4 regelt, wie man äh das Inverse in eine Funktion	*b*RS2c
6		reinziehen kann. Da ... da steht ja im hinteren Teil äh: $i_1(f_2(a,b))$ ist dann gleich $f_2(i(a),b)$, ...	DS2a
8	Herta:	*[während Sören spricht, leise im Hintergrund]* Welchen Satz? Ich versteh das nicht (. . .)	MS5a
10	Sören:	... Also wenn man diesen Satz quasi hätte, wäre man im Prinzip so ziemlich fertig, weil man dann halt das i reinziehen kann und die Sache ist dann damit gegessen...	
12		(3 sec)	
	L.:	So.	
14	Sören:	Ich krieg dann also ... Das i wird rein gezogen, dann krieg ich f_2 von i von ei. . .	PS2b
		äh i_1 ... von i_1 von n_2 Komma a, die beiden Inversen heben sich auf, dann hab ich	MS8a
16		f_2 von n_2 Komma a, damit kann ... ist das neutrale Element drin, und dann hab ich auf der rechten Seite ja auch noch zweimal das Inverse, und am Ende komm	PS3d
18		ich auf $a = a$.	

Das vorangestellte *b* in Zeile 4 zeigt an, dass er seine Äußerung begründet. Unterbrochen wird er dabei von Herta, die überwachend tätig ist und ein Verständnisdefizit anmerkt. Diese **M**onitoringtätigkeit wird mit MS5a klassifiziert. Zum Abschluss der Szene plant Sören zunächst eine Abfolge von Werkzeuganwendungen (PS2b), danach eine Abfolge von zu erreichenden Zwischenschritten mit dem Benennen einer Anschlussstrategie (PS3d). Die Planungsaktivität wird nur durch ein kurzes Einsprengsel unterbrochen. Hier wird Sören selbstüberwachend tätig und korrigiert seine vorherige Rechnung (MS8a). Die beiden Ausführungen der Planungsschritte rechnen wir nicht der Metaebene zu. Deshalb bleiben die Teile in den Zeilen 14f ungefärbt.

Identifikation spezieller Unterrichtsskripts

Eine Art der Auswertung, die zusätzlich zum Zählen der Anteile metakognitiver Aktivitäten durchgeführt wird, ist die Darstellung eines grafischen Profils. Dazu werden die aus dem Transkript die Kurzbezeichnungen aus der rechten Spalte herausgezogen und so auf beiden Seiten einer Achse angeordnet, dass links die Lehrer- und rechts die Schüleraktivitäten erfasst sind. Schüler- oder Lehrerbeiträge, die keine metakognitiven Anteile aufweisen, sind durch Angabe eines Namens, bei gleichzeitigem Fehlen einer Kategoriebezeichnung, zu erkennen. Der mit „Lehrkraft A“ überschriebene Speer gehört zu dem obigen Transkript. Die mit „Lehrkraft B“ überschriebenen bilden den Unterricht einer anderen Lehrkraft ab. Beide Speere visualisieren den jeweils für die Lehrkraft typischen Unterrichtstil.



In beiden Stunden sind metakognitive Aktivitäten festzustellen: Bei Lehrkraft A überwiegend auf Seiten der Schüler, bei Lehrkraft B von ihr selbst ausgeübt. In dem Profil von Lehrkraft B weist am Ende das Fehlen von Klassifizierungen auf einen großen Anteil von Äußerungen auf der Sach- und nicht auf der Metaebene hin. Deutlich sichtbar ist ihr Bemühen, die Schüler zur Reflexion aufzufordern, das Einfordern einer Zwischenbilanz (R6a) ist anspruchsvoll, in dieser Lerngruppe aber nur selten erfolgreich. Bemerkenswert ist die hohe Anzahl begründeter Äußerungen sowie der diskursiven Schüleraktivitäten im Profil der Szene von Lehrkraft A. Dies spiegelt eine hohe diskursive Unterrichtskultur in der Lerngruppe wieder.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. (2008, in diesem Band): Mechanismen von Metakognition und Diskursivität im Mathematikunterricht.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007): Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten bei schrittweise kontrolliertem Argumentieren im Mathematikunterricht. Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kaune, C.(2006): Reflection and Metacognition in Mathematics Education - Tools for the Improvement of Teaching Quality. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (4), 350-360.

Sjuts, Johann (2008, in diesem Band): Adaptivität und Diagnostik: Was die Bearbeitung passender Aufgabenstellungen aufdecken kann.

Hermann KAUTSCHITSCH
Universität Klagenfurt

Zins - Immunisierungsstrategien im Analysisunterricht*

1. Problemstellung und Bezeichnungen

Es geht um die Frage, wie ein bestimmter Geldbetrag für einen bestimmten Zeitpunkt gegenüber unvermutet auftretenden Zinssatzänderungen abgesichert werden kann. Dabei soll der Investitionsaufwand natürlich klein sein. Eine Investition in Aktien ist für manche zu riskant, Sparbücher dagegen haben eine zu geringe Rendite, deshalb wird eine Investition in Anleihen (gesamtfällige Obligationen) besprochen. Anleihen sind festverzinsliche Wertpapiere mit einer festen Laufzeit n. Jährlich erhält man am Ende des Jahres einen vertraglich festgelegten Geldbetrag G_k (Kupon), $1 \leq k \leq n$. Am Ende der Laufzeit erhält man die letzte Kuponzahlung und das investierte Kapital (sicherer nachschüssiger Zahlungsstrom). Bezeichnet $r = 1+i$ den Aufzinsungsfaktor und $v = 1/(1+i)$ den Abzinsungsfaktor zum aktuellen Marktzinssatz i, so gilt für den
Barwert (Present value) $PV = B = \sum_{k=1}^{n} G_k v^k$, für den
Endwert (Future value) $FV = E = \sum_{k=1}^{n} G_k \, r^{n-k} = B \cdot r^n$.

2. Experimentelle Beobachtungen und anschauliche Begründungen

Folgende Experimente werden mit EXCEL durchgeführt. Eine ausführliche Darstellung findet man auf der CD-Version.

1. Experiment: Einfluss von Zinsänderungen $\triangle i$
Modellannahme: Die Zinssatzänderung erfolge unmittelbar nach Beginn des Kaufes ($t = 0^+$), dann kann die ganzjährige Zinseszinsformel verwendet werden.
1. Beobachtung: Bei ein und demselben Zahlungsstrom ändern sich Bar- und Endwerte gegenläufig.

2. Experiment: Zeitpunkt t_D der Wertgleichheit
Variiere $\triangle i$ und vergleiche die Wertverläufe $V(t)$ zum Zinssatz $i + \triangle i$ mit dem geplanten Wert $\bar{V}(t)$ zum anfänglichen Marktinssatz i.
2. Beobachtung: Für jeden Zahlungsstrom existiert ein Zeitpunkt $t = t_D$, in dem der geplante Wert $\bar{V}(t)$ mit dem tatsächlichen Wert $V(t)$ übereinstimmt. Bezeichnet $B + \triangle B$ den Barwert zum veränderten Zinssatz $i + \triangle i$, so erhält man aus
$B(1+i)^{t_D} = (B + \triangle B)(1 + i + \triangle i)^{t_D}$ die *Gleichgewichtsformel*:

$$t_D = \frac{ln((B + \triangle B)/B)}{ln((1+i)/(1+i+\triangle i))}$$

Aus dem 2. Experiment ist auch abzulesen:

	$\triangle i < 0$	$\triangle i > 0$
$t < t_D$	$V > \bar{V}$	$V < \bar{V}$
$t = t_D$	$V = \bar{V}$	$V = \bar{V}$
$t > t_D$	$V < \bar{V}$	$V > \bar{V}$

Abb. 1

3. Experiment: Beobachte die Gleichwertigkeitszeitpunkte t_D für verschiedene Zinssatzänderungen $\triangle i$.
3. Beobachtung und 1. Überraschung: Selbst große Zinssatzänderungen in beliebiger Richtung bewirken nur kleine Änderungen von t_D.

$\triangle i$	t_D	
+ 6 %	4,6008	früher
+ 1 %	4,6251	
-1 % < $\triangle i$ < + 1 %		
- 1 %	4,6346	
- 3 %	4,6440	später

Abb. 2

4. Beobachtung und 2. Überraschung: Je stärker die Zinsen steigen, umso *früher* tritt t_D ein. Je stärker die Zinsen *fallen*, umso *später* tritt t_D ein.
Beide überraschende Beobachtungen ermöglichen einen Schutz vor unerwünschten Folgen aus Zinssatzänderungen (*Zinssatzimmunisierung*):

4. Experiment: Halte den Gleichwertigkeitszeitpunkt $t^\star$ für $\triangle i = -1\%$ fest und betrachte Zinssatzänderungen $\triangle i$ a) für $|\triangle i| > 1\%$ und b) für $|\triangle i| < 1\%$.
t_D bezeichne den Gleichwertigkeitszeitpunkt zu diesen Zinssatzänderungen $\triangle i$.

5. Beobachtung: a) Für $|\triangle i| > 1\%$ ist der geplante Wert $\bar{V}(t^\star)$ *immer* kleiner als der tatsächliche Wert $V(t^\star)$. Jede Zinssatzänderung, *unabhängig* von *Richtung* und *Ausmaß*, führt zu einem höheren Endwert.
b) Für $|\triangle i| < 1\%$ kann es passieren, dass $V(t_D) < \bar{V}(t^\star))$, dass also der tatsächlich erzielte Wert kleiner als der geplante Wert ausfällt.
Anschauliche Begründung von a):
1. Fall: Wenn $\triangle i > +1\%$, dann tritt nach Abb. 2 t_D früher ein, also ist $t^\star$ ein späterer Zeitpunkt als $t_D : t^\star > t_D$. Nach Abb. 1 gilt für diesen Zeitpunkt $t^\star : V(t^\star) > \bar{V}(t^\star)$.
2. Fall: Wenn $\triangle i < -1\%$, dann tritt nach Abb. 2 t_D später ein, $t^\star$ ist ein früherer Zeitpunkt ($t^\star < t_D$), nach Abb. 1 ist wieder $V(t^\star) > \bar{V}(t^\star)$.
Es gibt also nur eine Unsicherheitszone für $|\triangle i| < 1\%$. Diese kann systematisch verkleinert werden ($\triangle i \to 0$), so dass es praktisch keine Unsicherheit mehr gibt.

5. Experiment: Führe das 4. Experiment für $|\triangle i| < 0,1\%, |\triangle i| < 0,01\% \cdots$ nummerisch durch. Verwende dabei die Spalten:

$$| \triangle i \mid \frac{B+\triangle B}{B} \mid A = ln(\frac{B+\triangle B}{B}) \mid \frac{1+i}{1+i+\triangle i} \mid B = ln(\frac{1+i}{1+i+\triangle i}) \mid t_D = \frac{A}{B} \mid$$

6. Beobachtung: Für $\triangle i \to 0$ werden A und B immer kleiner, trotzdem scheint der Quotient $t_D = \frac{A}{B}$ einen bestimmten Wert D anzunehmen ($\triangle i \to 0 \Rightarrow t_D \to D$).

Damit hat man experimentell erhalten:
Zu jedem Zahlungsstrom $(G_1, G_2, \ldots, G_k, \ldots, G_n)$ gibt es einen Zeitpunkt $t = D$, in dem der tatsächliche Wert des Zahlungsstromes immer größer oder gleich dem geplanten Wert ist, ungeachtet wie groß und in welche Richtung eine Zinsänderung erfolgt: $\bar{V}(D) \leq V(D)$.
D heißt die *Duration* des Zahlungsstromes. Damit kennt man schon zum Zeitpunkt $t = 0$, welchen Wert der Zahlungsstrom zum Zeitpunkt $t = D$ mindestens haben wird (immunisierende Wirkung der Duration). Dies rechtfertigt den Namen "Duration": Zeitspanne, bis zu der der Zinssatz "eingefroren" ist ([1]).

3. Theoretische Begründungen

Im Folgenden wird der Grenzwert des obigen unbestimmten Ausdruckes aus den Bestimmungsstücken G_k und i des Zahlungsstromes ermittelt. Dabei wird der Barwert B als eine Funktion $B(i)$ der Variablen i angenommen (*Kontinuierliches* Modell).
Für den "neuen" Barwert $B + \triangle B$ für den Zinssatz $i + \triangle i$ erhält man:
$B + \triangle B = B(1 + \frac{\triangle B}{B})$ und $ln(\frac{B+\triangle B}{B}) = ln(1 + \frac{\triangle B}{B}) \approx \frac{\triangle B}{B} = \frac{\triangle B}{\triangle i} \cdot \frac{\triangle i}{B}$
Damit: Kann man $\frac{\triangle B}{\triangle i}$ abschätzen, dann auch $ln(\frac{B+\triangle B}{B})$ und damit D.
Linearisierung des Modells durch: $\frac{\triangle B}{\triangle i} \approx \frac{dB}{di}$
Mittels Summen- und Kettenregel und $\frac{dv}{di} = -v^2$ erhält man:
$\frac{dB}{di} = \sum kG_k v^{k-1}(-v^2) = (\sum kG_k v^k) \cdot v$
Damit ist: $\frac{\triangle B}{B} \approx \frac{dB}{di}\frac{\triangle i}{B} = -\frac{\sum kG_k v^k}{B} v\triangle i = -Dv\triangle i$ wenn man $\mathbf{D} = \frac{\sum \mathbf{kG_k v^k}}{\mathbf{B}}$ setzt.

Für den Zeitpunkt t_D der Gleichwertigkeit folgt aus
$ln(\frac{B+\triangle B}{B}) = ln(1 + \frac{\triangle B}{B}) \approx \frac{\triangle B}{B} \approx -Dv\triangle i$ und
$ln(\frac{1+i}{1+i+\triangle i}) = ln(1 + \frac{-\triangle i}{1+i+\triangle i}) \approx \frac{-\triangle i}{1+i+\triangle i}$:
$t_D \approx \frac{-Dv\triangle i(1+i+\triangle i)}{-\triangle i} = -Dv(1 + i + \triangle i)$

Damit: Wenn $\triangle i \to 0 \Rightarrow t_D \to D$ ("Nummerische" Konvergenz).
Für diesen Zeitpunkt D gilt nach Beobachtung 6: Der tatsächliche Wert $V(D)$ ist stets größer oder gleich dem geplanten Wert $\bar{V}(D)$, man ist zum Zeitpunkt D also immun gegenüber Zinssatzänderungen.

Bemerkung: Exakt erhält man D mittels der Regel von De L'Hospital oder aus dem ersten Glied in der Taylorentwicklung von $B(i)$. Berücksichtigt man auch das zweite Glied, erhält man den finanzmathematischen Begriff der Konvexität ([2]).

In der Regel ist es jedoch schwierig, eine Anleihe mit vorgegebener Duration zu finden. Eine einfache Rechnung zeigt (siehe CD-Fassung), dass man schon mit zwei Anleihen A_1 mit Duration D_1 und A_2 mit Duration D_2 durch eine Konvexkombination ein Portefeuille PF mit einer Duration $D_{PF} = wD_1 + (1-w)D_2 \in [D_1, D_2]$ erzeugen kann. Dabei ist w der Prozentsatz, mit dem in Anleihe A_1 investiert wird. Nach Rechnung gilt: $w = \frac{D_2 - D_{PF}}{D_2 - D_1}$.
Damit erhält man folgende *Immunisierungsstrategie* zur Absicherung eines Geldbetrages V in D Jahren:

1. Barwertprinzip: Ist i der aktuelle Marktzinssatz, dann beträgt das Investitionsvolumen $B = V(1+i)^{-D}$.
2. Suche zwei Anleihen A_1 und A_2 mit Durationen D_1 und D_2 so, dass: $D_1 < D < D_2$.
3. Durationsprinzip: Bilde ein Portefeuille aus A_1 und A_2 mit Duration $D_{PF} = D$. Investiere in A_1 $w\%$ von B und in A_2 mit $(1-w)\%$ von B, wobei $w = \frac{D_2 - D}{D_2 - D_1}$.

Dann wird zum Zeitpunkt $t = D$ mindestens der Betrag V vorhanden sein (siehe Experiment 8 auf der CD-Version).

4. Didaktischer Nutzen

An Hand dieses wirklichkeitsnahen Beispiels aus der Finanzmathematik können einige formale Qualifikationen und zentrale Begriffe aus der Analysis motiviert, angewendet oder geübt werden. Insbesondere entspricht das Vorgehen einer experimentellen und anschaulichen Mathematik ([3]). Folgende Nutzungsmöglichkeiten gibt es

- *im Modellierungsprozess*: Diskrete Prozesse durch kontinuierliche beschreiben, Linearisieren ($\frac{\triangle y}{\triangle x} \approx \frac{dy}{dx}$, $ln(1+x) \approx x$), Vereinfachen (Keine Berechnung von Transaktionskosten, keine mehrfachen Zinsänderungen, sondern nur eine knapp nach Kauf).
- in der *Analysis*: Ableitung und deren Regeln, einschließlich Kettenregel, Exponential- und Logarithmusfunktion, Grenzwerte, unbestimmte Ausdrücke, Regel von De L'Hospital, Taylorreihe, Auswirkungen des Abbruchs einer Taylorreihe nach dem ersten bzw. zweiten Glied.
- in der *experimentellen Mathematik*: Erzeugen und Interpretation von Tabellen und Graphen, Beobachten von Zuwächsen und Abnahmen und deren Interpretation, Finden von Vermutungen und deren anschauliche Begründungen, Arbeiten mit vorformatierten Arbeitsblättern.

Literatur

[1] Uhlir, H. / Steiner, P. (1994). *Wertpapieranalyse*. Heidelberg: Physika-Verlag.

[2] Bühlmann, N. / Berliner B. (1992). *Einführung in die Finanzmathematik*. Bern-Stuttgart-Wien: Haupt Verlag.

[3] Kautschitsch, H. / Metzler, W. (1994). *Anschauliche und Experimentelle Mathematik II.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Katharina KLEMBALSKI, Berlin

Seminarkurs Kryptografie – Zahlentheorie

Im Rahmen meines Forschungsprojektes habe ich ein Unterrichtskonzept zu den Themen Kryptografie und Zahlentheorie entwickelt. Dieses wird im Augenblick von mir erprobt.

Rahmenbedingungen

Das Unterrichtskonzept wird im Rahmen eines zweisemestrigen (zusätzlichen) Seminarkurses mit drei Wochenstunden in der Kursphase der gymnasialen Oberstufe an zwei Berliner Schulen umgesetzt. Die Schüler befinden sich gerade im zweiten Halbjahr der Kursphase und im zweiten Semester des Seminarkurses. Aus dem Seminarkurs heraus erstellt jeder Teilnehmer eine Facharbeit, deren Bewertung in die Abiturnote einfließt.

Anforderungen an einen Seminarkurs

Intention zur Einrichtung von Seminarkursen war es, Schüler besser auf die Anforderungen eines Studiums vorzubereiten. Eine zentrale Forderung an einen solchen Kurs ist daher die Vorbereitung auf das selbständige wissenschaftliche Arbeiten während des Studiums. In Berlin wird zusätzlich eine fachübergreifende Ausrichtung des Kurses gefordert (siehe [1] und [2]). Bei der Umsetzung dieser Forderungen haben die Lehrkräfte inhaltlich und methodisch große Gestaltungsspielräume.

Warum Kryptografie und Zahlentheorie?

Die Zahlentheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das für mehr als zwei Jahrtausende der reinen, eher anwendungsfernen, Mathematik zuzuordnen war. Jedoch sind es gerade Erkenntnisse der Zahlentheorie – beispielsweise Sätze über Primzahlen oder der Satz von Euler – die in den letzten 40 Jahren die Entwicklung moderner kryptographischer Verfahren ermöglicht haben. Diese sind von enormer praktischer Bedeutung und werden unter anderem beim Onlinebanking (Übertragungsprotokolle wie SSH), bei der Telefon- und Internetinfrastruktur (Zertifikate) und bei der Emailverschlüsselung eingesetzt.
Bei diesen Anwendungen spielt häufig die klassische Aufgabe der Kryptografie – die Geheimhaltung – eine untergeordnete Rolle. Stattdessen ist der sichere Nachweis der Identität eines Kommunikationsteilnehmers (digitale Unterschrift) bzw. die Sicherheit, dass gesendete/empfangene Nachrichten unverändert ankommen, von entscheidender Bedeutung (siehe [3]).

Das Thema verbindet somit auf natürliche Weise klassische, reine Mathematik mit modernen Anwendungen.

Darüber hinaus leistet es einen Beitrag zur informationstechnischen Grundbildung, indem Möglichkeiten und Grenzen kryptographischer Verfahren thematisiert sowie Schüler in die Lage versetzt werden, selbst kritisch Sicherheitsversprechen nachzuprüfen.

Weiterhin ermöglicht die Behandlung geeigneter zahlentheoretischer Inhalte neue Sichtweisen auf für Schüler durch jahrelangen Umgang vertraute Themen. Beispielsweise können durch Gegenüberstellung geeigneter Mengen mit ihrer Verknüpfung spezielle Eigenschaften der natürlichen Zahlen wie Assoziativität der Multiplikation, Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung oder Nullteilerfreiheit herausgestellt werden.

Es ist von großer Bedeutung für die praktische Umsetzung des Kurses, dass das gewählte Thema voraussetzungsarm ist. Das bedeutet insbesondere, dass der Kurs nicht auf Leistungskurs- oder Profilkurswissen aus Mathematik (oder Informatik) aufbaut. Somit kann jeder interessierte Schüler ohne spezielle Vorkenntnisse den Kurs belegen.

Kursaufbau
Die zwei Kurshalbjahre sind jeweils grob in drei größere Themenblöcke unterteilt – Kryptografie (I), Zahlentheorie (II), Kryptografie und Vertiefung (III). Die ersten beiden Blöcke dienen insbesondere der Vermittlung fachlicher Grundlagen und dem Bewusstmachen der verwendeten heuristischen Strategien. Sie nehmen zusammen knapp die Hälfte der Lernzeit ein. Die angewandten sowohl schüler- als auch lehrerzentrierten Unterrichtsmethoden sollen möglichst eigenverantwortliche Schülertätigkeit fördern. Im dritten Block ist zur Unterstützung individueller Interessen der Schüler sowie zur Stärkung der Methodenkompetenz, gerade in Vorbereitung auf das Schreiben der Facharbeit, eine längere Arbeitsphase integriert, in der Schüler längere Zeit eigenverantwortlich an verschiedenen Themen arbeiten. Diese werden am Ende dieser Phase den anderen Schülern präsentiert.

Das von den Schülern gewählte und bearbeitete Thema im dritten Block des zweiten Kurshalbjahres ist auch Thema der resultierenden Facharbeit. Dort hat die Präsentation zusätzlich eine unterstützende Funktion in Vorbereitung auf das Schreiben dieser Facharbeit. Die Abgabe der Arbeit erfolgt zwar erst am Ende des dritten Semesters, jedoch erscheint die (ausschnittsweise) Präsentation des Themas bzw. eines Zwischenstandes der Arbeit durch den Schüler zu diesem Zeitpunkt außerordentlich sinnvoll. Das betrifft einerseits die Unterstützung des Zeitmanagements dieser (in der Regel ersten längeren, schriftlichen und vorwissenschaftlichen) Arbeit, andererseits das Feedback zur Angemessenheit des Inhalts und der Darstellung durch die anderen Schüler und die Lehrkraft.

Im Folgenden stelle ich kurz wesentliche Inhalte und Leitgedanken für das erste Kurshalbjahr des Seminarkurses vor.

I. (Klassische) Kryptografie

Anhand ausgewählter überwiegend historischer Verschlüsselungsverfahren werden zentrale Begriffe und einfache Verfahren der Kryptoanalyse eingeführt. Probleme der Schlüsselübergabe oder der notwendigen Schlüsselzahl (und deren Verwaltung) bei modernen Anwendungen zeigen Grenzen dieser symmetrischen Verfahren.

II. Zahlentheorie

In diesem Abschnitt werden die mathematischen Grundlagen für moderne Verschlüsselungsverfahren auf Basis der Kongruenzrechnung unterrichtet. Inhalte sind: Sätze zur Teilbarkeit (mit Beweis), Rechnen mit Kongruenzen, Ermitteln des ggT mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus (mit Beweis), Primzahlen, Verteilung von Primzahlen, kleiner Satz von Fermat (mit Beweis), Vielfachsummensatz (mit Beweis).

III. (Moderne) Kryptografie

Die Idee asymmetrischer Verschlüsselungsverfahren wird zunächst anhand der nach Rivest, Shamir und Adleman benannten RSA-Chiffre einführt. Für den Nachweis der Korrektheit des Verfahrens, d. h. den Beweis, dass das Ver- und Entschlüsseln eine Nachricht unverändert lässt, nutze ich einen Spezialfall des Satzes von Euler mit dem Produkt zweier Primzahlen als Modul. Auf diese Weise sind alle notwendigen Beweise elementar – also auf Grundlage des bereits vorhandenen Wissens – möglich.

Wesentliche Vertiefungen im Zusammenhang mit der Anwendung des RSA-Verfahrens erarbeiten die Schüler in Partnerarbeit: Angriffe auf RSA, Chinesischer Restsatz und Anwendung auf RSA, Schweizer Postcard, u.a.

Erste Ergebnisse

Von den 11 bzw. 14 Schülern, die sich für den Kurs entschieden haben, haben 9 bzw. 12 das erste Kurssemester beendet. In zwei Fällen musste die Kurswahl aus schulorganisatorischen Gründen korrigiert werden, bei den anderen zwei Schülern haben Noteneinbrüche beim Übertritt in die Kursphase zu der Entscheidung geführt von dem – zusätzlichen – Seminarkurs zurückzutreten. Die vergebenen Noten am Ende des ersten Kurssemesters wichen bis auf 2 Fälle um höchstens eine Note von der entsprechende Kursnote im Fach Mathematik ab, sind mit dieser also vergleichbar (Notenskala von eins bis sechs).

Meine Beobachtungen bezüglich der Anzahl derjenigen Schüler, die im Anschluss an den Kurs tatsächlich eine Facharbeit schreiben, entsprechen denen anderer Lehrkräfte. So besuchen statt 9 bzw. 12 Schülern nur noch 9

bzw. 6 Schüler das zweite Kurshalbjahr, von denen wiederum nur 7 bzw. 4 eine Facharbeit angefangen haben. Das ist in erster Linie darauf zurückzuführen, dass Schüler in Berlin bis zum Ende des dritten Kurshalbjahres zu Gunsten einer Präsentationsprüfung von ihrer Wahl des Seminarkurses und der Facharbeit zurücktreten können. Beides sind Möglichkeiten, den Wahlpflichtbestandteil des fünften Prüfungsfaches zu erfüllen. Entscheidet sich der Schüler jedoch für eine Präsentationsprüfung, kann er nur eines der beiden Halbjahre des Seminarkurses in die Abiturwertung einbringen.
Daher ist der Anteil der Schüler, die nur im ersten Kurshalbjahr teilgenommen haben, nachvollziehbar, denn der Besuch eines weiteren Kurshalbjahres sowie das Schreiben einer Facharbeit ist im Gegensatz zur Präsentationsprüfung mit deutlich mehr Arbeitsaufwand verbunden.
Dass die Zahl der Schüler, die den Kurs besuchen, diejenige übersteigt, die eine Facharbeit schreiben, kann mit diesem Hintergrund als starkes Indiz für das hohe Interesse am Thema Kryptografie und Zahlentheorie gewertet werden. Dies wird durch entsprechende Äußerungen der Schüler im Unterricht und Fragebögen unterstützt.

Das hohe Schülerinteresse, die Intensität der Auseinandersetzung mit den behandelten Themen- und Problemstellungen sowie die beobachtete Qualität der Schülerleistungen (beispielsweise der Schülervorträge, aber auch der Klausuren) lassen das erstellte Kurskonzept sowie die ausgewählten Inhalte für den Schulunterricht geeignet erscheinen.

Ausblick

Seit Einführung der Seminarkurse wurden in Berlin außer den von mir erprobten nur fünf weitere im Fach Mathematik durchgeführt. Einer der Hauptgründe dafür ist der erhebliche Planungsaufwand für die durchführende Lehrkraft. Ich hoffe diesen durch die von mir erstellten Unterrichtsmaterialien verringern zu können.
Andere Bedenken seitens der Lehrer sind organisatorischer Art und beziehen sich auf eine ausreichende Anzahl der Schüler pro Schule, die sich für einen Seminarkurs entscheiden oder die „Ausbeute“ von Facharbeiten im Verhältnis zur Schülerzahl zu Beginn. Hier ist zu untersuchen inwieweit durch andere schulübergreifende Organisationsformen die attraktive Idee des Seminarkurses in der Praxis „gerettet“ werden kann.

Literatur

[1] Verordnung über die gymnasiale Oberstufe in der Fassung vom 18. April 2007. Hrsg. von der Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport

[2] Die fünfte Prüfungskomponente im Abitur – Handreichung. Hrsg. von der Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport. 2006

[3] J. Buchmann: Einführung in die Kryptographie. Springer, 2004

Anna KLINGNÉ TAKÁCS, Kaposvár

The difficulties of the teaching of analysis in the transition of the middle and higher education at Kaposvár University

I have been teaching for 25 years. I used to teach in the lower and higher classes of primary school and secondary school, too. I have been teaching at Kaposvár University for 4 years.

I have been dealing with Bruner's representational theory and I am trying to adapt it to my research. Bruner examined the codes with the help of which man stores the information arriving from the external world. All thought processes may happen on one of three kinds of level according to it:

- Material level (actual objective acts, activities)
- Iconic level (visual education, situation)
- Symbolic level

The 3 representation methods take part in each phase of the teaching process. In my opinion visual education is very important, that is why I tried to provide everyday, lifelike illustrations to help the acquisition of the material.

My students study:

- Agribusiness and agricultural rural development programme
- Agricultural engineering programme
- Finance and accountancy programme

We find that our students have little success in mathematics. But why is it so? In my opinion one of the reasons is that higher education became multitudinous, and so even the ones with average ability get into universities. On the other hand: as I see, the problem is that in the teaching-learning process the foundations of mathematics is left for higher education, but this way the acquisition of other subjects is hindered, too, became the "laying of foundations" is not finished yet.

The teaching-learning process is damaged on the different levels of education.

How can we make up for these differences in higher education?

I think this topic is important because analysis of mathematics is a basic subject for our students and they have to know functional operations in order to be able to describe economic processes with the help of functions.

We found that they have deficiencies in the following:

- The order of doing operations on numbers (this is very important)
- The rules of the index laws
- Methods of fractions

Before starting studying the students are tested in mathematics. Questions are about the number and function abstraction and about the model creation in the test. We reveal their deficiencies based on their solutions.
We saw the weakest result in the solution of solving the equations and inequalities and defining of the domain, too.
In these tasks the students could achieve only 10-20%.
These types of tasks are really important in the course of the first six-month (semester) mathematics.
We recommend an optional subject to the students. It was called Teaching of mathematics using the computer. This course was going in parallel with the mathematics I. (calculus) subject.
85% of the students took the course. We taught with my colleague in 3 groups: finance and rural development students and in a mixed group.
The subject had a threefold aim:

- The development and conditioning of the basis
- To link it closely with higher mathematics
- To link it with the use of computers.

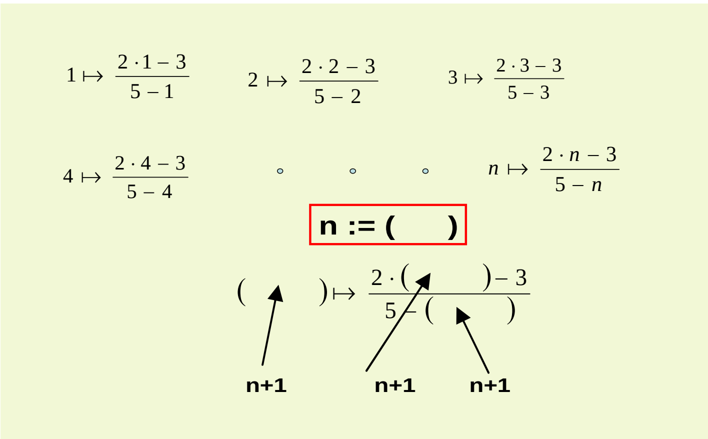
I first tried to develop:

- To solve the equations and inequalities, because we have to use at the monotonic sequences and find the limits and define the domain, too

We dealt with the next types:

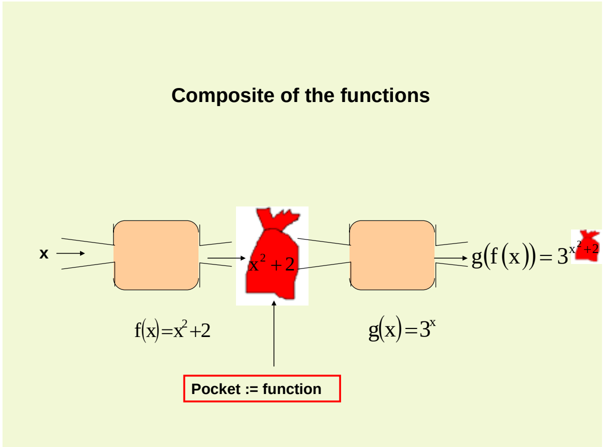
$$\frac{3x-5}{2x+3} < 1 \quad (1) \qquad \left|\frac{3-4x}{9+2x}+2\right| < 1 \quad (2)$$

Methods on expressions helped by work using numbers; we had to substitute many numbers for the expressions.
They had many problems of the monotonic sequence to determine number n+1 in a series.
I teach it in the following way:



- another problem is the composite function, because we have to use it at the derivative functions

I teach it in this manner:

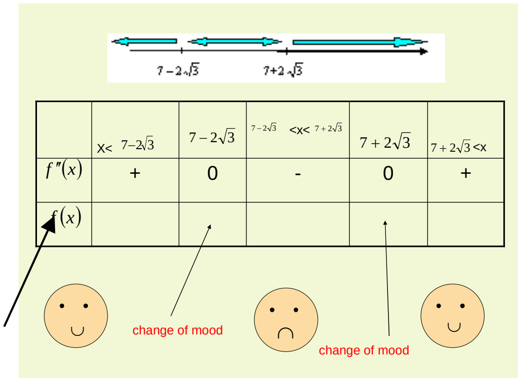


(packet disassembly)

I made the table about **the derived of the composite function** (packet= function).

The next table shows the convex or concave of the function:

change of mood = inflection pont



We also discussed the functional representation, there was an opportunity to consider the domain, where it is worth representing them, we could apply Excel for the multiplication and reciprocal of functions. It also helped in understanding limit value.

The illustration of fundamental conceptions is relatively good. However only few if any were able to illustrate the functional diagram based on the features resulting in the means of differential calculus. Excel provided help in this problem. I discovered that the students enjoyed using the computer for checking, after we had solved the tasks in a traditional way.

At the beginning of December we made the students write the test again.

I think the use of the computer is an opportunity to help the interaction between the cognitive levels listed above. In the last semester we collected positive feedback during teaching this subject. The use of Excel is effective, and it facilitated the formulation of the definitions of sequence

and function. It was important to use a programme which is available for every student and they can use it during preparation, as well. Within the frames of this subject there is a possibility for development in my opinion.
After finishing the exams I enquired the students' opinion concerning the subject:

- Did the subject help in the revision of the relevant chapters of the secondary school teaching matter? Yes 79% Partly 21%
- Did it facilitate to concentrate on the mathematical problem? Yes 59% No 12% Partly 29%
- Did you use Excel for checking at home? Yes 36% No 47% Partly 17%
- In your opinion would it be useful to connect the sequel to further mathematical studies? Yes 68% No 3% Partly 29%

The opinions of our students:

- The lessons were held in a pleasant and relaxed atmosphere; they helped me to understand new information, and enriched my knowledge.
- It was very useful and rewarding.
- It was a great help to make up for my deficiencies. I appreciated the relatively slow pace and the step-by-step solutions.
- The secondary school teaching material became more systematic, owing to the subject.
- It helped a lot to understand the subject-matter of the lectures.
- In my opinion it helped me in the practical acquisition of mathematics. The representation of functions in Excel supported the visualization of the tasks solved in an algebraic way.
- It was useful, it helped in learning.
- It would have been more enjoyable in a bigger classroom, with more working computers. Excel did not cause any problems, it is an excellent means for checking. It is a pity that due to schedule problems, I could not register for the subject any longer.

In the future we plan the application of computer methods in the further basic chapters of mathematics.

Bibliography:

[1] Ambrus, A.: Bevezetés a matematika didaktikába, 35, ELTE EÖTVÖS KIADÓ, Budapest, 2004

Olaf KNAPP & Heinz SCHUMANN, Weingarten

Evaluation of interactive on-screen videos for geometrical constructions in virtual space

How can students learn to solve problems in mathematics by using appropriate computer tools? Furthermore, how should these tools and supporting media be designed that especially people, who are not interested in mathematics, can be motivated to act in an individual, specific and effective way? Possibly with new constructive strategies, which enable interactive solving of problems, such as concept formations, calculations, finding sets, heuristics, proof strategies, constructions etc.

With appropriate computer tools for mathematical education like dynamic geometry systems, intelligent tutorial systems etc., students can get an individual approach to mathematics. Ingenious dynamic spatial geometry systems like Cabri 3D (BAINVILLE & LABORDE 2004 - 2007) allow the naïve user an interactive and intuitive approach to generate and manipulate spatial constructions without knowing the methods of descriptive geometry. As follows, our statements are limited to geometrical constructions in virtual space by using Cabri 3D (SCHUMANN 2007).

Videos (screen-recorded, real filmed, trick filmed, animated filmed etc.) can support the usage of these tools and build a bridge between tools and users. On the one hand, they can help, support, and unburden teachers while working with students; on the other hand they can lead students to an independent self-action. Beyond the pure mathematics and the mathematics education skills, the students should improve media literacy in the sense of critically handling the media, and achieve methodological competence.

Considering learn-, cognition- and instruction-psychological reflections, these kinds of videos belong to the learning by imitation and observation. They represent basics of learning processes (ATKINSON ET AL. 2000, BANDURA 1971; KLAUER & LEUTNER 2007).

A first pilot study with 165 fourteen-year-old German students showed, that there are statistically significant differences in mean values between various film modes regarding voice comments, text comments, different appearance of catchword cards, menu numbering and preview pictures concerning the instruction of spatial reconstructions. In a second pilot study with 242 students it could be shown, that there are statistically significant differences of preferences between these film modes (KNAPP & SCHUMANN 2007). The instructionally designed film mode with the statistically significant highest and most effective reconstruction results, which was also preferred by the students, and other quantitative and qualitative research results of the pilot studies were used to create a design for interactive instructionally on-screen videos (IIVs).

So we characterize an IIV as a film, which enables the user in an individual step by step human-computer-interaction input-output schemata to study and emulate an expert's problem solution. We implemented a start-, pause-, stop-button, sliding controller, and catchword cards representing menus as basic interactive options to operate with the IIV. Of course, the user can use permutations of the above mentioned options.

According to the mentioned pilot studies, nine different types of worked-out solution procedures in worked-out examples were created as IIV. In particular, videos for spatial orientation, visualization, and rotation were created by using worked-out examples for exact construction, dynamic penetration, analogical formation, facetted solids, composition of solids, manipulative fit in exercise, solids´ net in an edge model of a cube, parallel projection and an orientated cone put on a sphere.

Methodology

The reproduction and comprehension achievements (KMK 2003: AFB 1 and 2) were investigated by appropriate measurements. Definitions of terms, applied measurements and the corresponding theoretical reflections were explained in the lecture.

The possible intervened variables of the students were limited to cognitive efficiency, anxiety, math self-assessment, computer experiences, each with its subvariables as well as special questions for each worked-out example.
The possible intervened variables of the different geometrical contents of the IIVs were examined such as available time (150 % of the film duration), mouse-pointer-length (absolute, per minute), words (absolute, per minute), clicks (left, right, long, short), used features within Cabri 3D to attain the construction goal etc.

The data were collected by questionnaires, software-based solution for human-computer-interaction according to ACM-usability-standard and from objective, valid, and reliable tests to apply qualitative and quantitative measurements for analyses.

For organisational reasons, the survey could only be carried out by intact groups (= school classes). As a classical statistical evaluation tool (BORTZ & DÖRING 2006), the analysis of covariance was chosen to compare mean values. 262 fourteen-year-old students of secondary schools in the south of Baden-Württemberg, Germany, took part in this study. To allow for possible intervened students variables, the students take different pre-tests and measurements. After the pre-tests, every school class operated with one of the nine IIVs. While interacting, each student had to reconstruct the worked-out solution procedure of the worked-out example by using Cabri 3D.

Results and discussion

One IIV included a physical instruction by using keyboard keys. Analyses of variances and t-tests showed statistically significant differences in mean values. For that reason the IIV took not part in further analyses. We state the hypotheses that the IIVs are not able to instruct in an appropriate way above physical instructions.

Above all films and probands, the IIVs led to absolute means over 70% concerning reproduction achievements and over 50% concerning comprehension achievements compared with the experts´ solution. These results were gained even with the limited editing time.

Over all, IIVs reproduction and comprehension achievements correlated with $r = 0.345$.

One- and two-factorial-analyses of covariance and appropriate coefficients of correlation (Bravais-Pearson, rank-biserial etc.) showed statistically significant gender differences. Central tendencies were that boys attained higher reproduction and comprehension achievements than girls.

In one- and two-factorial- analyses of covariance concerning reproduction achievements boys got statistically significant higher differences in mean values of medium effect size (ROST 2005) than girls. The IIVs showed statistically significant differences in mean values of medium effect size.

In one- and two-factorial- analyses of covariance concerning comprehension achievements boys got statistically significant higher differences in mean values of small effect size than girls. The IIVs showed statistically significant differences in mean values of medium effect size.

The larger the tool-content based IIV mouse-pointer-length per minute was the minor were the reproduction and comprehension achievements. The analyses of content-tool based IIV like the absolute number of right or left clicks showed medium, the film duration and the clicked tools within Cabri 3D showed small influences to the reproduction and comprehension achievements.

There were content-tool and tool-content based differences, respectively between the examined IIVs. However, we state that for each IIV, its mathematical content and the used tools empiric studies had to be carried out to prove the didactical surplus value.

The students preferred the start-pause-buttons and start-pause-buttons together with the sliding controller permutations of interactive film options. However, no statistically significant differences could be found, but we have to bear in mind that several cells were undersized for a general statistical phrase.

Besides the gender, the mental rotation ability, playing 3D computer games and the feeling of being pressed for time showed statistically significant influences of medium effect size for reproduction achievements. With regard to comprehension achievements the reasoning showed an influence of medium effect size.

The examined students liked to operate and handle with IIVs, were very concentrated, and were positively touched.

IIVs with worked-out solution procedures in worked-out examples can yield in fast and effective learning. The success depends on special abilities like mental rotation and reasoning.

Referring to the extern and intern validity of the studies, IIVs contain a huge potential at least for teaching and learning of spatial geometry in schools. Different quantitative and qualitative analyses showed, that IIVs can help students to learn individually, get the feeling of success, become motivated, learn to reproduce and understand mathematical contents (here spatial dynamic geometrical constructions) and work very concentrated. Empirical studies of the implementation of IIVs in interactive learning environments ("tutorials") still don't exist and are urgently needed.

References

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. W. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research,* Vol. 70 No. 2, (pp. 181-214).

Bainville, E. & Laborde, J.-M. (2004-2007). *Cabri 3D* (Software). Deutsche Version von H. Schumann. Grenoble: Cabrilog.

Bandura, A. (1971). *Psychological meddling: Conflicting theories*. New York: Aldine Atherton Inc.

Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*. 4. Auflage. Heidelberg: Springer.

Klauer, K. J. & & Leutner, D. (2007). *Lehren und Lernen. Einführung in die Instruktionspsychologie*. Weinheim, Basel: Beltz PVU

Knapp, O. & Schumann, H. (2007). *Design und Evaluation von Instruktionsvideos für raumgeometrische Konstruktionen.* Preprint, PH Weingarten.

KMK (2003). *Bildungsstandards*. http://www.kmk.org (20.03.2008)

Rost, D. H. (2005*). Interpretation und Bewertung pädagogisch-psychologischer Studien*. Weinheim und Basel: Beltz.

Schumann, H. (2007). *Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum.* Ein Lehr- und Lernbuch der interaktiven Raumgeometrie mit Cabri 3D. Hildesheim: Franzbecker

Damjan KOBAL, University of Ljubljana

Ancient mathematical ideas and their a   licability in technology and teaching

We present two simple but very applicable mathematical ideas. The idea of an arithmetic mean, is used in car differential (differential gear). The idea of continuous and discrete functions is applied in modern electronic communications. Both ideas are very useful to present and motivate the interdisciplinary approach and intuitive value of abstract mathematical ideas in teaching.

The arithmetic mean and differential gear

We all know, that a car is powered by a motor. But how   How is the power (the rotation) of the motor transferred to the wheels that make the car move. On a bicycle, we use a chain that transfers the rotation of the pedal to the back wheel. Is it not done very similarly for a car, just that the source of power is a motor and not our muscles   Well, the very first cars were truly done that way. By the use of a chain the rotation was transferred from the motor to the (back) axle. So both, right and left wheel rotated simultaneously and made the vehicle to move.

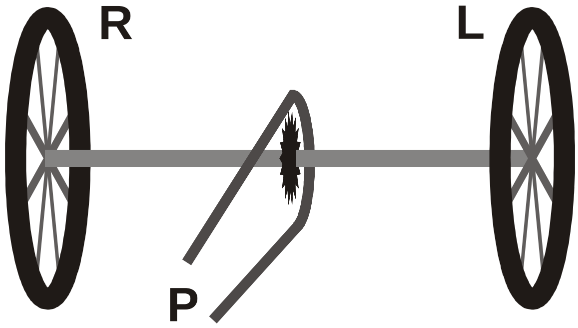


Figure 1: Right and left wheels are attached to the same axes of rotation

With a look on the picture, disregarding possible transmission ratio and denoting power' (engine rotation) by P, right wheel rotation by R and left wheel rotation by L, we get a very simple equation:

$$P = R = L$$

But does a car work like that   Well, the very first cars did function like that and as a consequence, the steering was very hard. In a left turn the left wheel slows down and the right speeds up a bit. Their average speed remains unchanged. If P is their average speed, R is the speed of the right and L is the speed of the left wheel, then their moving is described by a simple equation:

$$P = \frac{R + L}{2}$$

ould this simple formula be mechanically realized for powering right and left wheels of a car But how It might be surprising, but a positive answer to this question has been known for over 2000 years. In fact, a mechanical realisation of the formula for arithmetic mean is surprisingly simple.

Imagine first, that equal powering of the right and left wheels is achieved by a rotating handle on a disc', which is attached to the right and left disc, that are welded at the end of the right and left wheel axes, as shown on the bellow picture.

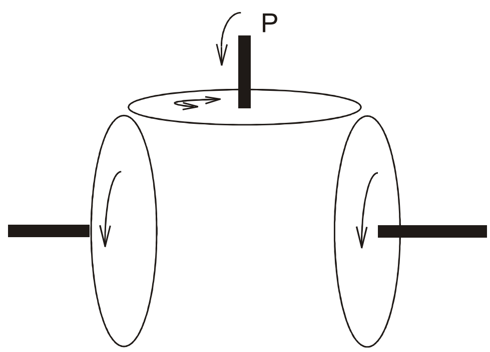


Figure 2: Right, left and freely rotatable powering discs

Instead of discs we can imagine cogs. It is obvious, that with a help of such a mechanism, a rotation of the handle P' would imply an equal rotation of the left and right wheel, thus *P=R=L*. This seems like still far away from the desired arithmetic mean equation. But it is not. Denoting

$$\frac{L - R}{2} = X,$$

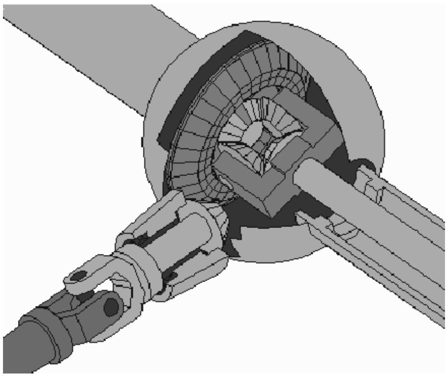
we have

$$R = P - X \text{ and } L = P + X.$$

The value of *X* can be understood as a free parameter in the relation of three variables within the arithmetic mean equation.

Namely, if we allow that our power disc' in the above picture, is freely rotatable (free variable *X*) around the handle', as shown in the picture, we already have a model of a differential gear.

It is a nice exercise to think about the different values of the variable *X* in different situations, like when we drive straight, when turning left or right, when one of the wheels is blocked.



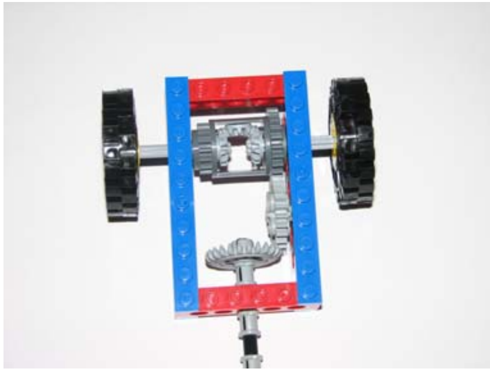


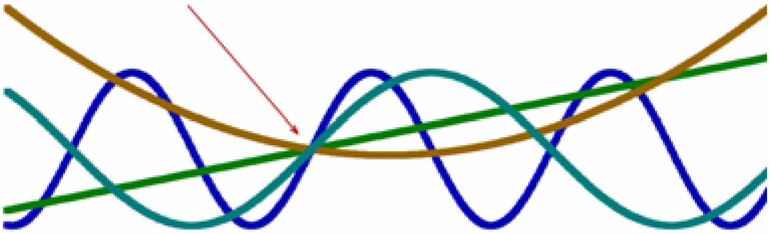
Figure 6: Drawing of a differential gear with universal joint and Lego model of differential

Today, one can easily experiment with the idea, as even Lego (Technics) provides sophisticated but yet simple models of devices like differential gear. And with such a model one can ask many interesting questions related to practical car driving' issues (like snow driving) and relate them to the abstract mathematical meanings of the arithmetic mean formula. A creative teacher can further find many interesting historical findings which are related to the invention and development of these ideas in car technology.

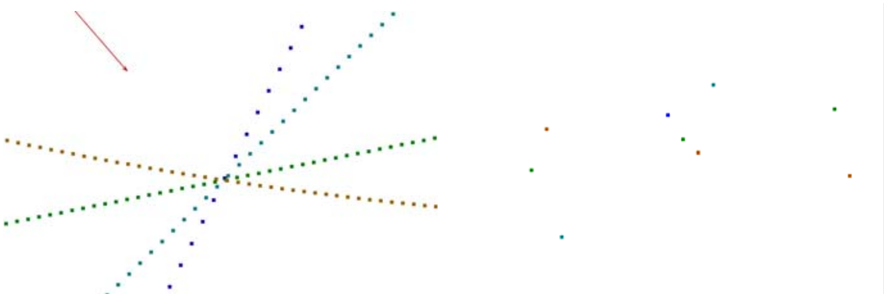
The conce t of a discrete function in a modern communication technology

Sounds can be represented by functions. Many modern computer programs (like *Mathematica*) can not only *draw* but also *play* functions. For example by *playing* the function $sin(2\pi\ 440\ t)$ one gets a pure A tone'.

Let us look at the graph of four different functions. We made the functions to intersect (at a point indicated by red arrow) just to make it easier to explain our idea. It seems we have four different and precisely described functions . It is clear that if we think of functions as sounds, this picture could easily be transformed (imagine colour filter) into four different (clearly heard) sounds. And this is basically the trick of digital technology. People talking on a phone and real life users and customers of audio technology have very limited ear sensitivity and can be fooled to truly hear four different sounds from the bellow picture. In fact we can say, that our eyes were fooled to see four different functions bellow, while mathematically (that is precisely) speaking, we even do not have one function defined at the whole visible interval.



To see and comprehend what we are talking about, let us focus to the intersection point indicated by red arrow. On the left picture bellow one can still recognize the above functions, while on the right picture even stronger focus shows us, that we used only a very small portion of a function' to transmit four functions with limited but sufficient resolution'.



How many functions like that can be squeezed into one discrete function How many phone conversation can be squeezed into a single phone line Of course it depends on the quality of the sound required (density of discrete points, which represent particular functions) and on the ability of technology to listen and record ever shorter bits of time.

With modern computer technology this wonderful and simple idea can easily be simulated by dynamic presentation of functions, when zoom in and zoom out can nicely and intuitively visualize how relative to human eye and ear a discrete or continuous looking functions can be.

Literature

[1] Kobal D. (2007); ScienceMath: http://uc.fmf.uni-lj.si/com/

Johannes KÖNIG & Sigrid BLÖMEKE, Humboldt-Universität zu Berlin

Unterschiede im pädagogischen Wissen von Lehramtstudierenden mit und ohne Mathematik

Der Beitrag stellt eine Studie zur Erfassung des fachübergreifenden, pädagogischen Wissens angehender Lehrkräfte vor, die im Rahmen von TEDS-M durchgeführt wurde. Sie ermöglicht neben wichtigen Einblicken in die Struktur des pädagogischen Wissens eine Exploration von Unterschieden in den deskriptiven Ergebnissen von Lehramtstudierenden der Sekundarstufe mit und ohne Mathematik als Fach in der Lehrerausbildung.

1 Theoretischer Rahmen

TEDS-M steht für *Teacher Education and Development Study: Learning to Teach Mathematics* und ist die erste internationale Vergleichsstudie zur Lehrerausbildung, die auf repräsentativen Stichproben basiert. Initiiert wurde sie von der *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA), die deutsche Forschungsleitung liegt bei Sigrid Blömeke, Gabriele Kaiser und Rainer Lehmann. Zielpopulation sind angehende Mathematiklehrkräfte der Primar- und Sekundarstufe. Als Testmodell wird der Ansatz der Kompetenzorientierung, wie er von Weinert (2001) ausgearbeitet und von Bromme (1992) für den Lehrerberuf spezifiziert wurde, zugrunde gelegt. Als Wissensdomänen der professionellen Kompetenz von angehenden Lehrkräften werden in Anlehnung an Shulman (1986) die drei Bereiche Mathematik, Mathematikdidaktik und Erziehungswissenschaft-Pädagogik unterschieden. Während TEDS-M bei der Entwicklung geeigneter Instrumente zur Erfassung der fachbezogenen Wissensdomänen auf Erfahrungen aus vorherigen Studien zurückgreifen konnte (vgl. Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2008), war eine zusätzliche Pilotierungsstudie nötig, um ein valides und reliables Instrument zur Erfassung des pädagogischen Wissens zu entwickeln, das als nationale Ergänzung durchgeführt wird, wobei sich die USA und Taiwan an der Durchführung beteiligen. .

Ausgangspunkt von TEDS-M ist die Auffassung von Unterrichten und Diagnostizieren als Kernaufgaben von Lehrkräften (KMK, 2004). Für die Beschreibung zentraler, relativ fachunabhängiger Anforderungen, die an Lehrkräfte in diesem Zusammenhang gestellt werden, greifen wir auf die Basiskomponenten der Unterrichtsqualität (Slavin, 1994) zurück und betrachten sie aus didaktischer Perspektive. Mit dieser Verschränkung von Allgemeiner Didaktik und Unterrichtsforschung gelangen wir zu fünf Dimensionen, in die wir das pädagogische Wissen theoretisch unterteilen: Strukturierung von Unterricht, Umgang mit Heterogenität, Klassenführung, Motivierung und Leistungsbeurteilung.

Diese fünf Dimensionen sind nicht nur aus der Perspektive zentraler beruflicher Anforderungen und ihre Bewältigung durch Lehrpersonen, sondern auch in Hinblick auf die Inhalte der Lehrerausbildung von Bedeutung. Es zeigen sich inhaltliche Bezüge zu gemeinsamen Themen von Prüfungsordnungen unterschiedlicher Bundesländer sowie zu curricularen Schwerpunkten der KMK-Standards für die „Bildungswissenschaften“ (KMK, 2004). Insofern ist davon auszugehen, dass die Dimensionen konzeptuell ausbildungsrelevante Inhalte abdecken.

Bei der Entwicklung geeigneter Testaufgaben, die sowohl deklaratives als auch prozedurales Wissen angehender Lehrkräfte erfassen, fokussiert die nationale Ergänzungsstudie auf die folgenden Themen (der jeweiligen Dimension): komponenten- und prozessbezogene Planung und Analyse von Unterricht, curriculare Strukturierung (Strukturierung von Unterricht); Differenzierungsmaßnahmen, Methodenvielfalt und begründeter Methodeneinsatz (Umgang mit Heterogenität); störungspräventive Unterrichtsführung und effektive Nutzung der Unterrichtszeit (Klassenführung); Leistungsmotivation und Motivierungsstrategien im Unterricht (Motivierung); Funktionen, Formen, zentrale Kriterien der Leistungsbeurteilung sowie Urteilsfehler durch Lehrkräfte (Leistungsbeurteilung).

2 Untersuchungsdesign

Zur Pilotierung der Items wurde eine empirische Studie durchgeführt. Um das Feld der zweiten Ausbildungsphase für TEDS-M unberührt zu lassen, wurden N = 802 angehende Lehrkräfte in der ersten Ausbildungsphase zu Beginn des Wintersemesters 2007/08 befragt (zu weiteren Details dieser Stichprobe vgl. König & Blömeke, eingereicht). Auf Anfrage erklärten sich mehrere Hochschullehrkräfte von zehn Standorten in Deutschland und Österreich zu einem Einsatz des Tests an ihren Lehramtstudierenden in einer ihrer Veranstaltungen bereit. Allerdings handelt es sich bei der Teilnahmegruppe daher nicht um eine Zufalls-, sondern um eine Gelegenheitsstichprobe. Für Analysen zur Konstruktvalidierung stellt dies nicht zwangsläufig ein Problem dar. Die hier vorgestellten deskriptiven Ergebnisse zu Unterschieden von Lehramtstudierenden mit und ohne Mathematik können hingegen lediglich explorativen Charakter beanspruchen.

In die nachfolgend dargestellten Analysen gingen 50 Testaufgaben ein, die sich in der Pilotierung bewährt haben (vgl. zu Beispielaufgaben König & Blömeke, eingereicht). Aus den 50 Aufgaben konnten 136 Punkte bezogen werden, die als dichotome Variablen (1 = Merkmal vorhanden, 0 = Merkmal nicht vorhanden) einer Skalierung im Rasch-Modell unterzogen wurden. Wir prüften die Annahme der Mehrdimensionalität gegen die Annahme der Eindimensionalität des Konstrukts. Die Ergebnisse, welche wir an anderer Stelle detaillierter ausführen (König & Blömeke, eingereicht), sprechen für das fünfdimensionale Modell und entsprechen somit unseren theoretischen Annahmen. Doch auch das eindimensionale Modell zeigt eine hohe Reliabilität und kann bei zusammenfassenden Fragestellungen angewendet werden. Dies soll im Folgenden unter der Fragestellung geschehen, ob Unterschiede zwischen Lehramtstudierenden mit und ohne Mathematik im pädagogischen Wissen bestehen.

Um dieser Frage nachzugehen, verwenden wir eine Subgruppe der befragten Lehramtstudierenden. Wir fokussieren auf das deutsche Ausbildungssystem, um mögliche internationale Unterschiede auszuklammern, und auf Studierende im Masterstudiengang bzw. Hauptstudium, um eine möglichst homogene Gruppe hinsichtlich ihres Ausbildungsstands zu erhalten. Eine weitere Eingrenzung auf die Sekundarstufen-Lehrämter führt letztlich zu einer trennscharfen Einteilung in zwei Gruppen von Lehramtstudierenden: Solche, die *Mathematik als Unterrichtsfach* studieren (n = 71), und solche, die *Mathematik überhaupt nicht* studieren (n = 83).

3 Ergebnisse

Während sich diese beiden Gruppen in ihrer Abiturnote nicht unterscheiden ($F(1,152) = 1.297$, $p = .257$, $\eta^2 = .008$), zeigt ein Vergleich der mittleren Werte beim pädagogischen Wissen, dass die Lehramtstudierenden mit Mathematik signifikant besser abschneiden als diejenigen ohne Mathematik ($F(1,152) = 7.011$, $p = .009$, $\eta^2 = .044$). Die Effektstärke Eta-Quadrat verweist zwar auf einen Unterschied mit eher geringer Bedeutsamkeit. Der Unterschied bleibt jedoch bestehen, wenn die Abiturnote, das Geschlecht und das Alter der Lehramtstudierenden in einer Kovarianzanalyse als unabhängige Variablen zusätzlich einbezogen werden. Insofern kann dem Ergebnis Stabilität zugesprochen werden.

Auch wenn dieses Ergebnis durch Datenexploration erzeugt wurde, wirft es doch die Frage auf, warum Lehramtstudierende mit Mathematik in einer Testung des fachübergreifenden Wissens vergleichsweise besser abschneiden. Ein Erklärungsansatz ist, dass Siebeffekte durch das Fach Mathematik im Laufe der Ausbildung ihren Niederschlag finden. Denn in ihren Eintrittsvoraussetzungen (hier operationalisiert in Form der Abiturnote) unterscheiden sich die beiden Gruppen nicht.

Wir gehen von der Existenz einer Diskrepanz in der Lehrerausbildung zwischen der Fachwissenschaft und dem Schulfach, für das eine Lehrbefähigung angestrebt wird, aus. Im Studium der Mathematik dürfte die Fachwissenschaft in größerer Entfernung zum Schulfach stehen, als es in anderen Studiengängen, etwa in den neueren Sprachen, der Fall ist. Dies könnte, verglichen mit dem Ausmaß in anderen Fächern, einen häufigeren Fachwechsel oder Studienabbruch unter Lehramtstudierenden mit Mathematik nach sich ziehen (Selbstselektion). Darüber hinaus könnte ein Mechanismus stärkerer Fremdselektion zum Beispiel in Form höherer Durchfallquoten bestehen. Als Konsequenz ist im fortgeschrittenen Stadium der Lehrerausbildung für Mathematik eine vergleichsweise höhere Konzentration an zukünftigen Lehrkräften vorhanden, die insgesamt ihre Ausbildung erfolgreicher durchläuft und daher auch über vergleichsweise höhere fachübergreifende Kenntnisse verfügt. Ein konkurrierender Erklärungsansatz bezieht sich auf Unterschiede in den fachdidaktischen Lerngelegenheiten, die sich auf Leistungen im fachübergreifenden Bereich auswirken – ggf. ergänzt um Unterschiede in der Nutzung fachübergreifender Lerngelegenheiten durch die beiden untersuchten Gruppen.

Unsere Interpretationen stellen Vermutungen dar, die ein Forschungsdefizit deutlich machen: Es gibt bislang keine systematischen Vergleichsstudien zu Lehramtstudierenden mit unterschiedlichen Fächern. Diese könnten wichtige Einblicke liefern, etwa zur differenziellen Kompetenzentwicklung angehender Lehrkräfte, die mit unterschiedlichen curricularen Anforderungen konfrontiert werden und damit spätere berufliche Anforderungen möglicherweise mit unterschiedlichem Erfolg bewältigen.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2008). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer*. Münster: Waxmann.

Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte*. Bern: Huber.

KMK (2004). Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.12.2004.

König, J. & Blömeke, S. (einger.). Fachübergreifendes Wissen angehender Lehrkräfte: Wie kann es getestet werden und welche Struktur hat es?

Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15,* 4-14.

Slavin, R. E. (1994). Quality, Appropiateness, Incentive, and Time: A Model of Instructional Effectiveness. *International Journal of Educational Research, 21,* 141-157.

Weinert, F.E. (2001). Concept of Competence. In: Rychenj, D.S. & Salganik, L.H. (ed.), *Defining and Selecting Key Competencies*. Göttingen.

Vlasta KOKOL-VOLJC, Universität Maribor, Slowenien

DGS im Mathematikunterricht der Primarstufe

1. Einleitung

Euklidische Geometrie ist einer der Grundbereiche in der Schulmathematik. Geometrische Begriffe, die in den ersten Schuljahren entwickelt werden, dienen als Darstellungsmittel in verschiedensten Bereichen der Mathematik.

Der Computer ist heute ein alltägliches Werkzeug auch für die Schüler der Primarstufe. Sie werden mit der Arbeit am Computer meistens bereits zuhause bekannt - nach wie vor steht aber ein "Computerunterricht" gleich nach dem Schuleintritt an allen Grundschulen in Slowenien im Angebot.

In diesem Beitrag wird eine Pilotuntersuchung zu Verwendung von DGS (Dynamische Geometrie-Software) im Mathematikunterricht der 4. Klasse (Primarstufe) vorgestellt.

Die Untersuchung *"Narišimo premico" ("Lass uns eine Gerade zeichnen")* wurde im Dezember 2007 und Januar 2008 mit den Schülern des 4. und 5. Schuljahr an 5 Grundschulen in Maribor (Slowenien) durchgeführt - und dient als Pilotuntersuchung für ein im Schuljahr 2008/09 geplantes Projekt.

2. Geometrie in der Primarstufe

Geometrie, zeichnet sich im Schulmathematik durch verschiedene Aspekte aus (Schwartze 1984).

(a) Geometrie ist eines der elementarsten mathematischen Modelle. Durch das Beobachten der Umgebung bilden Schüler bereits sehr früh ein mathematisches/geometrisches Modell, indem sie die Objekte aus ihrer Umgebung als reine Formen beobachten und darstellen.

(b) Geometrie ist eine der einfachsten symbolischen Sprache innerhalb der Mathematik.

(c) Geometrie bietet Objekte und Techniken an, die das Darstellen/Visualisieren von einem breiten Spektrum mathematischer Begriffe aus verschiedenen Bereichen der Mathematik ermöglichen.

(d) Geometrie kann als einer der Aspekte mathematischer Begriffe angesehen werden.

Wegen (a) und (b) spielt die Geometrie in den ersten Schuljahren, neben der elementaren Arithmetik, eine Schlüsselrolle bei der Entwicklung des mathematischen Denkens und der Kommunikation in der und über die Mathematik (Vollrath 1981). Wegen (c) und (d) ist es besonders wichtig, dass die elementaren geometrischen Begriffe in der Primarstufe mathematisch adäquat eingeführt werden.

Einer dieser Grundbegriffe der Euklidischen Geometrie, der gleich in den ersten Schuljahren eingeführt wird, ist die Gerade.

3. Gerade

Nach dem slowenischen Lehrplan wird der Begriff *Gerade* (gemeinsam mit der Halbgerade und der Strecke) im 4. Schuljahr als ***"Eine Gerade ist eine unendlich lange gerade Linie"*** eingeführt.

Die Schüler werden mir dem Namen bekannt sowie mit den abstrakten Eigenschaften des Begriffs:

- "*gerade*" (als eine Unveränderbarkeit der Richtung)
- "*unendlich*" (unendlich fortgesetzt in beiden Richtungen)

Die erste der beiden Eigenschaften wird in einer traditionellen Bleistift-Papier Umgebung mit dem Zeichnen der Gerade entlang eines Lineals dargestellt.

Die zweite Eigenschaft (die Unendlichkeit) kann jedoch mit traditionellen Mitteln kaum veranschaulicht werden. Dieser Aspekt der Gerade kommt oft nur in der Ausgangsbeobachtung/Handlung zur Deutung (durch Ausgangsmodelle wie zB. geraden Flugzeugsspuren auf dem Himmel). Obwohl *Gerade* ein Grundbegriff der Geometrie ist, ist es ein sehr abstraktes mathematisches Modell und bei manchen Schülern werden nicht alle Aspekte dieses Begriffs entsprechend entwickelt. Das führt zu einer nichtadäquaten Vorstellung und verschiedenen Missdeutungen.

Im ersten Teil der Pilotuntersuchung "Narišimo premico" (mit 93 Schülern des 5. Schuljahres an 5 Grundschulen, im Dez. 2007) wurde gezeigt, dass die häufigsten Fehlvorstellungen in Verbindung mit dem Begriff *Gerade*, mit der Eigenschaft der Unendlichkeit (*Gerade wird unendlich fortgesetzt, unendliche Anzahl der Punkte auf der Gerade*) verbunden sind.

Diese Fehlvorstellungen zeigen sich in verschiedenen Formen:

1.) Schwache Visualisierungsfähigkeit des Begriffs - insbesondere der Eigenschaft *"konstante Richtung"*. Die Frage:

Haben zwei gezeichnete Geraden einen Schnittpunkt? (3.1. - Abb.1) haben 79,6% der befragten Schüller mit "nein" (4,3% mit "ja") beantwortet.

2.) Nichtadäquate Vorstellung der *Gerade* als *"Menge von unendlich vielen Punkte"*. Die Frage:

Wie viele Punkte sind gezeichnet auf dieser Zeichnung? (3.2.- Abb.2) haben 83,8% der Schüler mit "3" beantwortet - und keiner mit "unendlich".

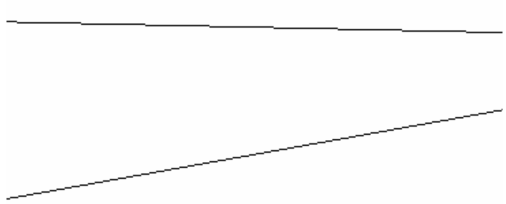


Abb. 1

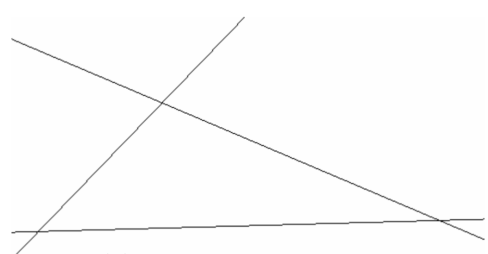


Abb. 2

3.) Die charakterisierenden Eigenschaften einer Gerade sind nur zum Teil präsent. Auf die Frage:

Was sind die wichtigsten Eigenschaften einer Gerade? (3.3.)

haben 39,8 % der Schüler mit *"sie läuft gerade"* beantwortet. Keiner der Schüler hat erwähnt, dass die Gerade unendlich ist.

4. DGS - Werkzeug zur Konstruktion einer Gerade

Durch zahlreiche empirische sowie theoretische Untersuchungen wurde gezeigt, dass eine didaktisch angemessene Verwendung von DGS sehr unterstützend bei der Entwicklung mathematischer Begriffe wirken kann (Kokol-Voljc 1999, Laborde 2003). Bereits in den ersten Schuljahren lassen sich DGS Programme im Unterricht didaktisch einsetzen um damit eine adäquate Entwicklung geometrischer Begriffe zu fördern (Kokol-Voljc 2003).

<u>Ein Experiment:</u>

In der Pilotuntersuchung "Narišimo premico" wurde im 2. Teil das Computerprogram *"Cabri Geometre II Plus"* als ein zusätzliches Werkzeug bei der Konstruktion einer Gerade eingesetzt.

Die Untersuchung wurde mit 2 Parallelklassen (4. Schuljahr: 4.a, 4.b) durchgeführt. In der Klasse 4.a (21 Schüler) wurde das Thema "Gerade" traditionell (ohne Computer) eingeführt und geübt. In der Klasse 4.b (18 Schüler) wurde in 2 Unterrichtseinheiten zum Thema Gerade (Einführungsstunde, Übungsstunde) zusätzlich zu den traditionellen Zugänge (Papier Bleistift, Tafel) auch am Computer gearbeitet:

1. Einführungsstunde[1]:
    - Phase 1: Beobachtung langer gerader Spuren in der Natur
    - Phase 2: Eine lange gerade Linie wird mittels Bleistift und Lineal gezeichnet und als Gerade benannt
    - Phase 3: Gerade wird bezeichnet (*p, n, g, ...*)
    - Phase 4: Geraden werden mittels *Cabri Geometre II Plus* gezeichnet (10 Min samt der Erklärung der Arbeit)
2. Übungsstunde:

    In der Übungsstunde zu Thema: "Gerade, Halbgerade, Strecke" wurde 15 Min am Computer mittels *Cabri Geometre II Plus* in verschiedenen Farbe gezeichnet (Geraden, Halbgeraden, Strecken) - und der Bildschirm (d.h. die Zeichnung auf dem Bildschirm) beobachtet (Bild bewegt).

<u>Ergebnisse:</u>

3 Wochen nach den Unterrichteinheiten zum Thema Gerade wurde in den Klassen 4.a und 4.b eine Befragung durchgeführt (mit dem gleichen

---

[1] In der gleichen Unterrichtseinheit wird auch der Begriff der Halbgerade eingeführt

Fragebogen, der im Dez. 2008 in den 5. Klassen verwendet wurde) - mit folgendem Ergebnis:

Frage	*Antwort*	*4.a (traditionell)*	*4.b (mit DGS)*	*5. Klasse*
3.1.	*"Nein"* *"Ja"*	71,4 % 9,5%	33,3% 44,4%	79,6 % 4,3 %
3.2.	*"3 Punkte"* *unendlich viele*	66,7% 4,8 %	55,6 % 22,2 %	83,8 % -
3.3.	*- läuft gerade* *- ist unendlich*	47,6 % 4,7 %	50 % 27,8 %	34 % 0 %

5. Schlussbemerkungen

Aus den Ergebnissen der vorgestellten Pilotuntersuchung lässt sich vermuten, dass der Einsatz von DGS bei der Einführung des Begriffs *Gerade* in der 4. Schuljahr eine unterstützende Wirkung auf die Begriffsentwicklung hat.
Die dem Begriff zugrunde liegende Eigenschaften: *"konstante Richtung"* und *"unendliche Punktmenge"*, werden bei der Verwendung von DGS - zusätzlich zu der traditionellen Konstruktionen mit Bleistift und Lineal - bei mehr Schülern adäquat entwickelt, als wenn die Gerade nur mit Bleistift und Lineal konstruiert wird. Damit wird durch die Verwendung von DGS die Entwicklung der mathematisch-theoretischen Bedeutung mathematischer Begriffe unterstützt. Dabei werden Bleistift und Lineal nicht durch Computer ersetzt, sondern ergänzt und bereichert.

Literatur:

KOKOL-VOLJČ, V.(1999): Dynamische Geometrie-Software und mathematische Begriffsbildung. *In: UBRAND, M. (ed.):* B*eiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5. 3. 1999 in Bern*. Hildesheim: Franzbecker, 1999, pp. 305-308.

KOKOL-VOLJČ, V.(2003): Early development of mathematical concepts using dynamic geometry. *In: WEI-CHI, Y. (ed.): Proceedings of the Eighth Asian Technology Conference in Mathematics : December 15-19, 2003, Chung Hua University, Hsinchu, Taiwan*. Blacksburg (VA): ATCM, 2003, pp. 202-209.

LABORDE C. (2001): Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6(3), 283-317

LABORDE, C. (2003): Usage de Cabri-Junior pour l'aide à l'apprentissage du raisonnement déductif, *atelier au congrès ITEM*, Reims juin 2003

SCHWARZE, H.(1984): Elementarmathematik aus didaktischer Sicht, Band 2: Geometrie. Standardwerk des Lehrers, Handbuch einer wissenschaftlich begründeten Unterrichtspraxis. Bochum: Kamp, 1984. ISBN 3-592-72114- 3

VOLLRATH, H.-J. (1981): Geometrie im Mathematikunterricht. *In: STEINER, H. G. – WINKELMANN, B. (1981): Fragen des Geometrieunterrichts. IDM-Reihe), Koln*

Ulrich KORTENKAMP, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd;
Yves KREIS, Universität Luxemburg

Intergeo – Interoperable Interactive Geometry for Europe

Mit Hilfe interaktiver Geometrie am Computer kann Mathematikunterricht beträchtlich verbessert werden. Der Einsatz moderner und elaborierter Programme macht es möglich, Zeichnungen und Skizzen zum Leben zu erwecken, so wie das Kino Bilder als Film lebendig werden ließ. Obwohl bereits etliche sehr gute Lerninhalte existieren, die mit Hilfe interaktiver Geometriesoftware erstellt wurden, führt der Einsatz an den meisten Schulen noch ein Schattendasein. Meist liegt dies daran, dass die Lehrkräfte die neuen Möglichkeiten noch nicht kennen oder keinen Zugang zu entsprechender Soft- und Hardware haben.

Das von der Europäischen Union (EU) mit knapp 1,5 Mio. Euro geförderte Projekt Intergeo [1] nimmt sich der drei wesentlichen Herausforderungen an, die einem EU-weiten Einsatz interaktiver Geometrie im Wege stehen: Fehlende Suchmöglichkeiten, Inkompatibilitäten zwischen Programmen sowie fehlende Informationen zur Qualität der vorhandenen Beispiele.

Intergeo soll es so allen europäischen Lehrerinnen und Lehrern ermöglichen, qualitativ hochwertige Unterrichtsmaterialien zu finden, einzusetzen und wieder zu verwenden. Mehr als 3.000 Materialien der Projektpartner stellen eine Ausgangsbasis der Datenbank dar, die durch weitere Inhalte aus den Reihen der Anwender um ein Vielfaches zunehmen soll. Ansprechpartner aus den Kultusministerien und Schulverwaltungen sind ebenso an Intergeo beteiligt wie Lehrplanexperten. Softwarehersteller und Autoren von Unterrichtsmaterialien können als assoziierte Partner an dem Projekt teilnehmen. Nach der offiziellen Projektlaufzeit von drei Jahren wird die gesamte Infrastruktur der Öffentlichkeit übergeben, damit die Initiative nachhaltig weitergeführt werden kann.

Finden und Sichern von Inhalten

Das Intergeo-Konsortium (Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, Universität Montpellier II, Deutsches Forschungszentrum für künstliche Intelligenz, Cabrilog, Universität Bayreuth, Universität Luxemburg, Universität Kantabrien, Technische Universität Eindhoven, Maths for More und Südböhmische Universität Budweis, siehe [3]) bringt bereits mehr als 3.000 Konstruktionen, Aufgaben und sonstige Unterrichtsmaterialien in das Projekt ein. Weitere 9.000 Dateien wurden in einer ersten Umfrage von ihren Autoren zugesagt. Diese existierenden Inhalte sollen mit landes- und lehrplanspezifischen Metadaten versehen werden, die das Auffinden passender Beispiele für den eigenen Unterricht erleichtern.

Dabei müssen nicht nur die unterschiedlichen Lehrpläne auf Landes- und Staatsebene berücksichtigt werden (zum Beispiel bei der Suche nach Inhalten für die 9. Klasse Realschule in Baden-Württemberg, für die auch Inhalte anderer Klassenstufen z.B. in Zypern geeignet sein könnten), sondern es müssen auch sprachliche Barrieren überwunden werden. So heißt zum Beispiel der Strahlensatz in Frankreich *théorème de Thalès*, aber eine Suche eines deutschen oder britischen Lehrers (*enlargement*) nach *Thales* darf diese Materialien nicht finden (und umgekehrt) [9].

Ein weiteres Problem von Lehr/Lerninhalten aus dem Web ist die meist unklare rechtliche Situation: Dürfen die elektronischen Arbeitsblätter modifiziert werden? Dürfen sie in das lokale Netz der Schule eingespeist werden? Dürfen fremdsprachige Inhalte übersetzt werden? Innerhalb des Projekts werden diese urheberrechtlichen Fragen für alle Inhalte geklärt, sodass Lehrerinnen und Lehrer sich nicht weiter mit diesen Fragen beschäftigen müssen. Standardmäßig wird hierbei die Verwendung einer Creative Commons-Lizenz [5] empfohlen.

Kompatibilität zwischen verschiedenen Programmen

Weiterhin entwickelt Intergeo ein gemeinsames Dateiformat für interaktive Geometrieprogramme. Damit können alle oben erwähnten Beispiele genutzt werden – unabhängig davon, welche Software in der Schule vorhanden ist. Das Erreichen dieses Ziels wird dadurch gewährleistet, dass im Projektkonsortium die (europäischen) Hersteller führender kommerzieller und freier Produkte (Open Source) vertreten sind.

Qualitätskontrolle

Schließlich bewerten Experten und Praktiker die Materialien hinsichtlich ihrer Eignung für den Schulunterricht. Diese Bewertungen können von den Anwendern ebenso eingesehen bzw. ergänzt werden wie zusätzliche Kommentare und Beurteilungen durch andere Nutzer des Intergeo-Portals.

Im April 2008 veröffentlicht das Intergeo-Konsortium das sog. Deliverable 6.1, den Quality Assessment Plan [7]. Dieser dient als Grundlage für die Evaluation von DGS-basierten Inhalten auf der Intergeo-Plattform. Im zweiten und dritten Projektjahr werden vom Intergeo-Konsortium in drei Runden ausgewählte Materialien im Unterricht getestet und die Testergebnisse ebenfalls auf der Plattform veröffentlicht. Dadurch soll gewährleistet werden, dass Lehrerinnen und Lehrer nicht nur passende, sondern verlässlich gute Inhalte finden, die sie im eigenen Unterricht verwenden können.

Im weiteren Verlauf sollen auch andere empirische Forschungsprojekte die Möglichkeit erhalten, ihre Ergebnisse über Intergeo zu veröffentlichen. Dazu werden im *Work Package 6 (Quality Assessment)* ebenfalls verbindliche Standards erarbeitet.

Projektorganisation

Die (geförderte) Projektdauer beträgt 36 Monate. Im ersten Jahr wird die benötigte technische und administrative Infrastruktur aufgebaut. Die Benutzergruppen werden bei regionalen Treffen informiert und Landesvertreter für alle Mitgliedsländer der EU werden identifiziert und bestimmt. Die Kompatibilität zwischen den einzelnen einbezogenen Anwendungen ist in Vorbereitung und die existierenden Konstruktionen werden in einer web-basierten Anwendung gesammelt.

Während des zweiten Jahres werden die gesammelten Dateien mit Qualitätsinformationen ergänzt und die Benutzergruppen werden durch substantielle, zugängliche Inhalte weiter motiviert. Das gemeinsame Dateiformat wird fertig gestellt. Außerdem wird die Intergeo-Konferenz vorbereitet.

Schlussendlich ist das dritte Jahr der erfolgreichen Übergabe des Projektes an die Allgemeinheit gewidmet: die Plattform und die Konstruktionssammlung sind reif und werden benutzt; herunterladbare Dateien sind zugänglich. Die Intergeo-Konferenz findet als erste Konferenz in einer Reihe statt, die von den Projektpartnern nach der Projektdauer weitergeführt werden soll. Weitere Testreihen in Schulen werden nun auch von Projekt-Externen durchgeführt.

Einladung zum Mitmachen

Das Intergeo-Projekt wird von einem Konsortium aus 10 Partnern [3] unter der Leitung der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd durchgeführt. Um die Wünsche und Bedürfnisse von Nutzern des Projektes und anderen Software-Herstellern besser berücksichtigen zu können, und um die Ergebnisse auch nach Ablauf der Förderung zu sichern und die Plattform weiter zu betreiben, gibt es verschiedene weitere offizielle Rollen.

Am stärksten werden sogenannte *Associate Partners (AP)* in das Projekt eingebunden. Personen und Institutionen können diese Mitgliedschaft über das Intergeo Project Office beantragen. Über die Aufnahme als Assoziierter Partner entscheidet die Hauptversammlung. Assoziierte Partner werden in interne Diskussionen/Entscheidungen eingebunden und erhalten Zugang zum internen Bereich der Intergeo Webseite. Von den Assoziierten Partnern wird ein aktives Interesse am Projekt erwartet. Assoziierte Partner beteiligen sich aktiv, indem sie beispielsweise

- das Dateiformat für eigene Softwareentwicklungen implementieren,
- Inhalte für die Projekt-Plattform zur Verfügung stellen,
- gemeinsam mit Projektpartnern die Ontologie weiterentwickeln, oder
- Materialien in Unterrichtsversuchen erproben und die Ergebnisse auf der Intergeo Plattform protokollieren.

Assoziierte Partner besitzen kein Stimmrecht bei den Hauptversammlungen. Derzeit gibt es bereits knapp 20 bestätigte APs, darunter unter anderem Forschungsgruppen (INRP, Montpellier, oder CMAF, Lissabon) und Softwareautoren von 2D- und 3D-DGS (Z.u.L, DynaGeo, Archimedes Geo3D und andere) [4].

Derzeitiger Stand der Intergeo-Plattform und weitere Informationen

Im Moment läuft eine erste Version der Intergeo-Plattform [2] im Probebetrieb. Es ist bereits möglich, sogenannte *Traces* von interaktiven Inhalten zu „hinterlassen", d.h. auf DGS-Inhalte im WWW zu verlinken. Dabei ist es notwendig, die Autorenschaft und die Lizenz, unter der die Inhalte angeboten werden, anzugeben. Dadurch stehen bereits jetzt über 1000 mit verschiedenen Programmen erstellte *Traces* (Stand 31. März 2008) zur Verfügung.

Allen Interessierten am Projekt empfehlen wir, den Intergeo-Newsletter zu abonnieren [8]. Mit diesem Newsletter wird regelmäßig über die Fortschritte des Projekts und die Benutzbarkeit der Plattform informiert.

Literatur und Webadressen

[1] Intergeo Webseite (2008): http://inter2geo.eu/

[2] Intergeo Plattform (2008): http://i2geo.net/

[3] Intergeo Konsortium (2008): http://inter2geo.eu/de/consortium

[4] Intergeo Assoziierte Partner (2008): http://inter2geo.eu/de/partner

[5] Creative Commons-Lizenz (2008): http://creativecommons.org/

[6] Kreutzer, Till (2007): Rechtsfragen bei E-Learning. Ein Praxis-Leitfaden. Hamburg: Multimedia-Kontor.

[7] Mercat, Christian; Sophie Soury-Lavergne und Jana Trgalova (2008): Quality Assessment Plan. Deliverable 6.1 of the Intergeo Project, available from http://inter2geo.eu/en/deliverables.

[8] Intergeo Newsletter (2008): http://lists.inter2geo.eu/mailman/listinfo/newsletter.

[9] Libbrecht, Paul; Cyrille Desmoulins; Christian Mercat; Colette Laborde; Michael Dietrich und Maxim Hendriks (2008): Cross-Curriculum Search for Intergeo. Submitted for MKM 2008.

Stefan KRAUSS, Kassel & Martin BRUNNER, Luxemburg

Professionelles Reagieren auf Schülerantworten: Ein Reaktionszeittest für Mathematiklehrkräfte

1 Einleitung

Mathematiklehrkräfte haben im Unterricht häufig über die fachliche Korrektheit von Schülerantworten zu urteilen. Im Rahmen der umfassenderen COACTIV-Studie, in der Kompetenzen, Überzeugungen, motivationale Orientierungen und das Berufserleben der Mathematiklehrkräfte der PISA-Klassen 2003/2004 untersucht wurden (zur COACTIV-Studie siehe z.B. www.mpib-berlin.mpg.de/coactiv/index.htm), wurde auch ein Computerinstrument neu entwickelt, bei dem die teilnehmenden Lehrkräfte auf dem Bildschirm präsentierte (fiktive) Schülerantworten möglichst rasch im Hinblick auf deren fachliche Richtigkeit zu beurteilen hatten (siehe Abb. 1).

Theoretisch lässt sich die Notwendigkeit einer solchen Fähigkeit aus den von Doyle (1986) postulierten Faktoren der Unterrichtsrealität ableiten, nämlich der grundsätzlichen Unvorhersehbarkeit der Ereignisse im Klassenzimmer, der Spontaneität und Gleichzeitigkeit vieler Ereignisse sowie der Öffentlichkeit aller Handlungen. Eine klassische Beispielsituation, in der diese Faktoren für Lehrer/innen spürbar werden, ist die oftmals erforderliche rasche und unmittelbare Einschätzung der fachlichen Richtigkeit einer Schülerantwort zu einer mathematischen Fragestellung. Zur Wahrung ihrer Expertenstellung sollte die Mathematiklehrkraft die inhaltliche Korrektheit der Bemerkung – wenn möglich schnell und im Kopf – überprüfen und entsprechend reagieren können. Eine inhaltlich falsche Lehrerreaktion könnte sich negativ auf den weiteren Unterrichtsverlauf auswirken (ein Fehler wird nicht korrigiert) und ein zu langes Zögern könnte sich negativ auf die von den Schülern wahrgenommene fachliche Autorität der Lehrkraft auswirken.

2 Instrument

Das Computerinstrument, im Folgenden „RK-Instrument" genannt (RK für „Reaktionskompetenz"), begann mit folgender Startseite:

Wir werden Ihnen im Folgenden 12 Schülerantworten auf einfache mathematische Aufgabenstellungen präsentieren. Ihre Aufgabe ist es, jeweils möglichst schnell festzustellen, ob die Schülerantwort richtig oder falsch ist. Stellen Sie sich dabei bitte vor, Sie müssten im Unterricht auf die jeweilige Schülerantwort reagieren!

Sobald Sie den „weiter"-Button drücken, erscheint eine Aufgabenstellung und gleichzeitig die dazugehörige Schülerantwort: Ihre Zeit beginnt zu laufen. Die Zeit stoppt, wenn Sie entweder „richtig" oder „falsch" angeklickt haben.

Nach dieser einführenden Instruktion erschien die erste Aufgabe (Abbildung 1 zeigt den Screenshot von Aufgabe 5, die weiteren Aufgaben aus dem RK-Instrument sind Krauss & Brunner, eing., zu entnehmen).

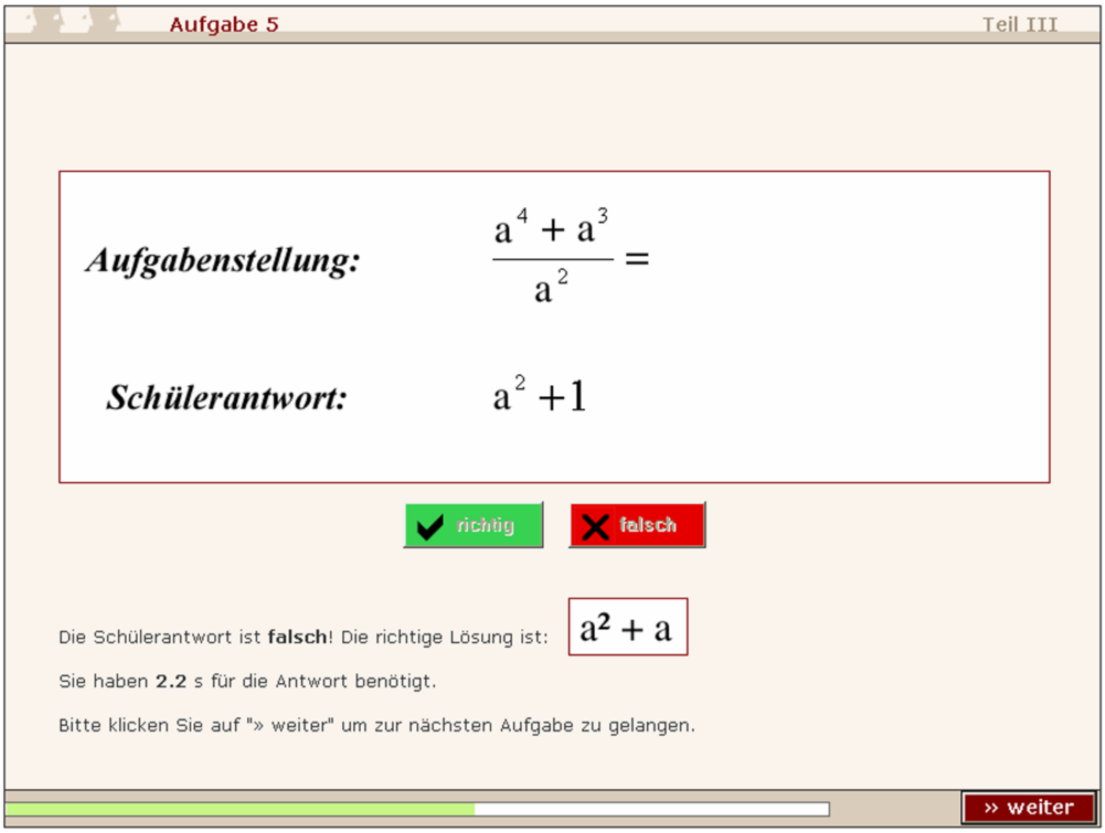


Abbildung 1: Screenshot der Reaktionszeituntersuchung (Aufgabe 5). Nach dem Drücken des „weiter“-Buttons“ erscheinen Aufgabe und Schülerantwort gleichzeitig (oben) und die Zeit beginnt zu laufen. Nachdem die Lehrkraft sich für „richtig“ oder „falsch“ entschieden hat, wird Feedback über Reaktionszeit und Korrektheit der Entscheidung gegeben (unten).

Die Reaktionszeit, die in die Analysen eingeht, ist also die Zeit, die verstreicht vom Drücken des „weiter“-Buttons bis zum Drücken des „richtig“- oder „falsch“-Buttons und beinhaltet somit auch die Zeit zur Erfassung der Situation (Lesen und Verstehen der Aufgabenstellung). Für jede Aufgabe können mit dem Computerinstrument zwei Dimensionen erfasst werden: Erstens, ob die Lehrkraft richtig reagiert hat, und zweitens, wie lange sie für ihre Reaktion gebraucht hat.

Insgesamt wurden 12 Aufgaben aus dem Mathematikunterricht sowie dazugehörige fiktive (d.h., richtige bzw. falsche) Schülerantworten präsentiert. Von allen Aufgaben kann angenommen werden, dass sie von Mathematiklehrkräften – unabhängig von der Schulform – *ohne Zeitdruck* in der Regel problemlos gelöst werden können.

3 Gewichtung von „Richtigkeit“ und „Geschwindigkeit“

Wie sollen die Richtigkeit und die Geschwindigkeit einer Reaktion zur Messung der Reaktionskompetenz RK integriert werden? In der experimentellen Psychologie, in der Reaktionszeitparadigmen eine wichtige Untersuchungsmethode darstellen, existiert dafür leider keine „Standardprozedur“, das diesbezügliche Vorgehen hängt vielmehr stark vom jeweiligen Forschungsinhalt ab: Grundvoraussetzung und Ziel von gelingendem Mathematikunterricht ist die fachliche Korrektheit. Schülerfehler sind nur dann eine didaktische Chance für individuelle Lernprozesse, wenn sie adaptiv als Anknüpfungspunkt zur Wiederherstellung der inhaltlichen Korrektheit aufgegriffen werden können. Eine fachlich richtige Einschätzung im Mathematikunterricht, auch wenn sie zögerlich ist, ist hiernach in jedem Fall einer Fehleinschätzung vorzuziehen, und zwar unabhängig davon, wie schnell diese Fehleinschätzung erfolgt. Aufgrund dieser theoretischen Überlegung wurden die insgesamt 185 teilnehmenden Lehrkräfte für jede einzelne Aufgabe in eine Rangreihe gebracht, den besten Rangplatz 185 erhielt dabei die Lehrkraft mit der schnellsten korrekten Reaktion, danach kamen alle weiteren korrekten Reaktionen, danach alle falschen, und den letzten Rangplatz 1 erhielt die Lehrkraft mit der langsamsten falschen Reaktion (die langsamste korrekte Reaktion war demnach genau einen Rangplatz besser als die schnellste falsche Reak-tion). Details zur Stichprobe und zur Durchführung können Krauss und Brunner (eing.) entnommen werden.

Mit der gewählten Scoringmethode zur Integration von „Korrektheit“ und „Reaktionszeit“ konnten befriedigende Reliabilität für RK (Cronbach’s α = .68) und Trennschärfen (r_{it} für die 12 Items von .19 bis .42) erreicht werden. Aufgrund der computerbasierten Durchführung und Auswertung kann ferner von einer hohen Objektivität des Verfahrens ausgegangen werden.

4 Ergebnisse

4.1. „Richtigkeit“ und „Geschwindigkeit“

Die Lehrkräfte reagierten durchschnittlich bei 8,8 der 12 Items (SD = 1,5) korrekt. Die fachliche Korrektheit war also nicht immer das wichtigste Kriterium für die Lehrkräfte, vielmehr nahmen sie einen relativ großen Prozentsatz inhaltlich falscher Reaktionen in Kauf. Im Schnitt benötigten die Lehrkräfte 9,7 Sekunden (SD = 4,0) für eine Reaktion (inklusive Lesen und Verstehen der Aufgabe). Die relativ hohe Standardabweichung von 4 Sekunden deutet auf die beträchtlichen Unterschiede bezüglich der durchschnittlichen Reaktionszeit in der COACTIV-Lehrerstichprobe hin.

4.2. Reaktionskompetenz und Alter

Erwirbt man Reaktionskompetenz mit zunehmender Routine und Unterrichtserfahrung (wie Expertisetheorien vorhersagen würden) oder verliert man diese Kompetenz sogar eher mit zunehmendem Alter (wie Theorien zur ontogenetischen Entwicklung der mentalen und psychomotorischen Geschwindigkeit vorhersagen würden)? Im COACTIV-Datensatz ergab sich kein signifikanter Unterschied zwischen alten und jungen Lehrkräften (es waren lediglich leichte Tendenzen zugunsten der jüngeren Lehrkräfte zu finden), die Daten legen somit einen Ausgleich zwischen den gegenläufigen Theorien nahe.

4.3. Reaktionskompetenz und Schulform

Es zeigte sich, dass Mathematiklehrkräfte des Gymnasiums über signifikant höhere Reaktionskompetenz verfügten als ihre Kollegen aus anderen Schulformen. Dieser Vorteil setzte sich zu etwa gleichen Teilen aus den beiden Konstituenden von RK zusammen: Lehrkräfte des Gymnasiums reagierten etwas öfter richtig und waren auch etwas schneller bei ihren Reaktionen. Dieser Befund ist nicht ohne weiteres zu erklären, da er interessanterweise auch auf einige *sehr leichte* Items zutrifft, für die gleiche Expertise für Lehrkräfte aller Schulformen angenommen werden kann.

4.4. Reaktionskompetenz und Professionswissen

Das Fachwissen und das fachdidaktische Wissen einer Lehrkraft (siehe dazu Krauss et al., eing.) hängen stark mit der Reaktionskompetenz zusammen (die Korrelation von RK mit dem Fachwissen beträgt $r = .38$, und mit dem fachdidaktischem Wissen $r = .29$). Diese Korrelationen können auch den Vorteil der Gymnasiallehrkräfte erklären: In Regressionsmodellen kann gezeigt werden, dass die Schulform über das höhere Professionswissen hinaus keinen Beitrag mehr zur Reaktionskompetenz liefert (vgl. Krauss & Brunner, eing.).

5 Literatur

Doyle, W. [1986]: Classroom Organization and Management. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching. A project of the American Educational Research Association* (3rd ed., pp. 392-431). New York: Macmillan.

Krauss, S. & Brunner, M. [eing.]: Professionelles Reagieren auf Schülerantworten: Ein Reaktionszeittest für Mathematiklehrkräfte [eingereicht beim Journal für Mathematikdidaktik JMD].

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W. et al. [eing.]: Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie [eingereicht beim Journal für Mathematikdidaktik JMD].

Günter KRAUTHAUSEN, Hamburg

Wie weiter mit dem Computer im Mathematikunterricht der Grundschule?

1 Grundsatzfrage abgeschlossen?

In ihrem Handbuch ›Grundschule und neue Medien‹ schrieben Mitzlaff/Speck-Hamdan bereits 1998: »Es geht heute […] nicht mehr um die Frage des ›ob‹, sondern um einen selbstverständlichen, pädagogisch sinnvollen Einsatz des Computers als ein Medium neben anderen« (Mitzlaff/Speck-Hamdan 1998, 11). Zu dieser Überzeugung, so scheint es, passen auch die Erfahrungsberichte, das Marktangebot an Software, die ›einschlägigen‹ Investitionen sowie Fortbildungsangebote. Allerdings gibt es gute Gründe, die Grundsatzdiskussion noch nicht für erledigt zu halten.

Erstens: Solange das Softwareangebot für die Grundschule immer noch zu über 90 % fachdidaktisch deutlich unzureichend ist, sollte die Grundsatzfrage nach dem Sinn erlaubt sein. Zweitens sollte eine Grundsatzdiskussion *prinzipiell* möglich bleiben, schon wegen der schnellen Entwicklung neuer Technologien und Anwendungen, die heute noch gar nicht abzusehen sind. Und drittens finden sich Diskussionsanlässe im Abstract zu dieser Sektion (im Folgenden kursiv gedruckt zitiert):

»Über einen frühen Computereinsatz bereits in der Grundschule herrscht heute bei Lehrkräften und Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler weitgehend Konsens.« Trifft das wirklich zu? Gewiss, es gibt diverse Praxisberichte, aber immer noch findet man allzu unkritische Euphorie. Es gibt diverse Handbücher zum Computereinsatz in der Grundschule – meist von Pädagogen/Psychologen, keines aus der Mathematikdidaktik (ganz anders als in der Sekundarstufe). Auffallend aber ist bei diesen grundschulbezogenen Werken, dass dort entweder Mathematik gar nicht vorkommt oder in höchst fragwürdiger Weise, d. h. recht weit entfernt vom fachdidaktischen Diskussionsstand.

»Dass auch die Politik dies unterstützt, zeigt sich in aus Steuergeldern finanzierten Programmen zu einer besseren Ausstattung von Grundschulen mit Computern. Laut einer Erhebung des BMBF aus dem Jahre 2006 sind inzwischen 98% der Grundschulen mit Geräten ausgestattet.« Erneut die Frage: Was besagt das? Wie ist es um die Auslastung und Funktionsbereitschaft Schulnetzwerke bestellt? Wollen Microsoft und Intel wirklich die Schule nach vorne bringen? Die bloße Anwesenheit der Maschine ist gar kein Argument. Ihr Nutzen entsteht erst durch eine sachgerechte Integration in den Unterricht.

ICT-integrativer Unterricht führt vermehrt zu projekt- und problemorientiertem Lernen und anderen neuen Lehr- und Lernmethoden.« Diese Formulierung suggeriert die Fantasie, dass wünschenswertes Lernen und Lehren durch Technik wenn nicht gar ›hergestellt‹, so doch quasi-automatisch befördert werden könne. Dass das so vielleicht gar nicht einzulösen ist oder sogar kontraproduktiv sein könnte, lassen solche Formulierungen gedanklich nicht mehr zu. 2.) Die Proklamationen sind auch in vergleichbaren Fällen *so* allgemein, dass ihr Wohlklang kaum mehr Fragen nach der Konkretisierung einfordert; und derer gäbe es doch viele: Wie *integriert* man denn ICT sinnvoll in Unterricht? Wie muss man sich diesen projekt- und problemorientierten Unterricht vorstellen?

2 Software(-typen)

Der Computereinsatz im Mathematikunterricht der Grundschule gestaltet sich bislang recht einseitig, was die verschiedenen Verwendungsarten bzw. Softwaretypen betrifft. Zu 94 % (Krützer/Probst 2004) werden Übungs- oder so genannte ›Lernprogramme‹ von – wie wir wissen – meist minderer Qualität eingesetzt. Hier wäre also zu prüfen, ob andere Kategorien der Computernutzung in Einklang zu bringen wären mit einem wünschenswerten Verständnis des Lernens und Lehrens von Mathematik, z. B.:

Werkzeugprograme (Textverarbeitung, Tabellenkalkulation), Simulationen (›Was-wäre-wenn-Situationen‹), Konstruktionswerkzeuge (BAUWAS), mathematische Spiele, Hilfsprogramme (Tools). Die Leistungsmerkmale von Suchmaschinen wie Google oder auch die innovativen Möglichkeiten von Smartboards oder Wikis machen erneut deutlich, dass auch aufgrund solcher technischen Entwicklungen immer wieder die Grundsatzdiskussion wichtig ist und bleibt. Neue Chancen mögen daraus gewiss erwachsen. Fachliche und fachdidaktische Substanz kann aber auch hier recht schnell hinter beeindruckenden Oberflächen verschwinden. Auch das ist kein Muss, aber die Gefahr besteht, und deshalb muss man darüber nachdenken (dürfen).

3 Professionellere Softwarebewertung

Seit Mitte der 1980er Jahre wurden Kriterien-Kataloge entwickelt, z. B. von den Landesinstituten nahezu aller Bundesländer. Am bekanntesten ist vielleicht die in Soest entwickelte Software-Datenbank SODIS (Software Dokumentations- und Informations-System). Auch hier gilt zumeist: Solche Kataloge sind häufig recht technikorientiert, die fachdidaktische Güte eines Produkts wird allzu oft mit einer oder wenigen lapidaren, jedenfalls viel zu unspezifischen Fragen abgetan, und nicht selten sind die Bewertungen als solche diskussionswürdig. Bewertung, fachdidaktische Postulate und die konkrete Software kollidieren hier allzu oft.

Vereinzelte Anätze einer stärker fachdidaktisch fokussierten Entwicklung von Gütekriterien wurden meistens nicht fortgeführt (Becker-Mrotzek/Meissner 1994/1995; Brinkmann/Brügelmann o. J.). Was also würde man sich aus heutiger Sicht wünschen?

- *Unumgänglich*: ein Instrumentarium mit nachdrücklich *fachdidaktischem* Fokus.
- *Wichtig:* Die Berücksichtigung eines *Spektrums* fachdidaktischer Postulate, diverser Software-Kategorien und Verwendungssituationen.
- *Wünschenswert*: Ein *multifunktionales* Instrumentarium für unterschiedliche Einsatzbereiche:
  - Bewertungen im Rahmen fachdidaktischer Forschung
  - Bewertung für den Schulalltag und durch die Lehrkräfte: Hier müsste sich ein im Umfang und Aufwand reduziertes, gleichwohl aussagekräftiges Profil einer Software generieren lassen.
  - Hilfreiches Referenz-Kompendium für Neu-Entwicklungen

4 Wirkungsforschung

Der breite Einsatz des Computers ist seit vielen Jahren schulische Realität. Was indessen neben der o. g. Bewertungsproblematik in der Forschung fehlt, ist ein hinreichendes Wissen über mindestens zwei Fragen:

1.) Wie sieht eine sinnvolle *Implementation* einer (möglichst guten) Software im Unterricht konkret aus? Wo erhalten Lehrkräfte Hilfe für einen sinnvolle Implementation des Mediums? Etc.

2.) Dass der Computer das Lernen tatsächlich befördert, ist bislang eher eine Hoffnung als eine tragfähige Tatsache. Eine Wirkungsforschung, die uns eine hinreichend verlässliche Effizienz bei gleichzeitig gesundem Verhältnis von Aufwand und Nutzen, also einen medienspezifischen Zusatznutzen des Computereinsatzes nachweisen würde, gibt es kaum. Und wie ist die Ernüchterung in den USA und Großbritannien einzuordnen, wo bereits die Computer wieder aus den Klassenzimmer geräumt werden? (Popp 2007)

5 Lehrerbildung

Je souveräner die Lehrpersonen im Fach und in der Fachdidaktik stehen, desto verantwortlicher können sie mit den Medien umgehen und um so unabhängiger werden sie von Vordergründigem und Marketingstrategien.

Es geht also nicht in erster Linie um eine *computer*bezogene Kompetenz. Vielmehr müssen die Lehrkräfte darin bestärkt werden, dass sie in v. a. *Ex-*

perten für das Lernen und Lehren (von Mathematik) sind. Was aber noch zu wenig Berücksichtigung in der Lehrerausbildung findet, ist die Verbindung der fachdidaktischen Ausbildung mit dem konkreten Anwendungsfeld ›Computereinsatz‹.

6 Die Schule als Markt

Aus Sicht eines Verlages ist es nur verständlich, dass er keine Notwendigkeit zu höheren Investitionen sieht, wenn sich eine Software mit minimalen Entwicklungs- und Produktionskosten bestens verkauft. Verlage argumentieren zunächst marktwirtschaftlich, für innovatives Engagement ist da wenig Platz. Auch hier gilt also das Motto: Wir bekommen das, was wir akzeptieren: Solange die Grundschule Software aus der Ramschkiste oder vorrangig elektronische Arbeitshefte kauft und der Absatz von HighQ-Produkten die kritische Masse nicht erreicht, so lange wird die Grundschule so etwas auch bekommen, und zwar *nur* so etwas. Würde sich derartiges hingegen nicht verkaufen lassen, wäre es eher heute als morgen vom Markt verschwunden. Insofern ist es an der Schule selbst, nachdrücklicher als bisher zu formulieren, was sie für einen sinnvollen Computereinsatz braucht und was nicht. Das Wichtigste aber wäre dann ein weitaus konsequenteres Kaufverhalten als bislang.

Literatur:

Becker-Mrotzek, M./Meißner, H. (1994): Forschungsprojekt Computer-Lernprogramme in der Grundschule. Abschlußbericht.

Becker-Mrotzek, M./Meißner, H. (1995): Kriterien für die Bewertung von Computer-Lernprogrammen. Grundschule, H. 10, S. 13-15

DEP – Didaktische Entwicklungs- und Prüfstelle für Lernsoftware Primarstufe: http://www.agprim.uni-siegen.de/dep/

Krützer, B./Probst, H. (2004): IT-Ausstattung der allgemein bildenden und berufsbildenden Schulen in Deutschland. Bestandsaufnahme 2004 und Entwicklung 2001 bis 2004. Berlin

Mitzlaff, H./Speck-Hamdan, A. (1998, Hg.): Grundschule und neue Medien. Frankfurt/M.

Popp, M. (2007): Web 0.0 im Klassenzimmer. SPIEGEL ONLINE 8.5.2007

Schwichtenberg, E. (2001): Mit dem PC in der Klasse – Erfahrungen und Probleme. In: Büttner, C./E. Schwichtenberg (Hg.), Grundschule digital. Möglichkeiten und Grenzen der neuen Informationstechnologien, S. 106-126. Weinheim

SODIS (2000-2008): Datenbank der deutschen Länder und Österreichs für Medien in der Bildung. http://www.sodis.de/

Spitzer, M. (2005): Vorsicht Bildschirm! Elektronische Medien, Gehirnentwicklung, Gesundheit und Gesellschaft. Stuttgart

von Hentig, H. (2002): Der technischen Zivilisation gewachsen bleiben. Nachdenken über die Neuen Medien und das gar nicht mehr allmähliche Verschwinden der Wirklichkeit. Weinheim

Yves KREIS, Gilbert BUSANA, Christian MEYERS
Universität Luxemburg, Fakultät LSHASE, Forschungsgruppe EMACS

Negative Zahlen in der Grundschule

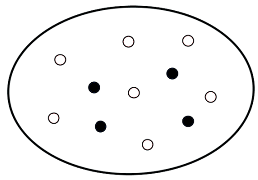
Für Grundschüler gehören negative Zahlen intuitiv zum Allgemeinwissen: im Winter bringt der Wetterbericht Angaben über negative Temperaturen, Stockwerke in Tiefgaragen werden mit negativen Zahlen gekennzeichnet.

In unseren Ausführungen berufen wir uns auf die Forschungsergebnisse von Robert Dieschbourg und vom CSMP-Programm und benutzen die in luxemburgischen Schulen üblichen Illustrationsmedien Zehnerabakus und Stellentafel, die zur Zeit anstelle vom Zwanzigerfeld oder dem (leeren) Zahlenstrahl benutzt werden.

Rote und blaue Zahlen

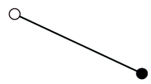
Den Ausgangspunkt, am Ende der ersten oder am Anfang der zweiten Klasse, bilden konkrete Situationen mit „farbigen" Zahlen.[1] In dieser Einführung stehen „rote" und „blaue"[2] auf derselben Stufe, wir sprechen also noch nicht von positiven bzw. negativen Zahlen.

Versetzen wir uns in folgende konkrete Situation:
Zwei Freunde spielen mehrere Gesellschaftsspiele. Gewinnt Lea, zeichnet sie einen roten Punkt; jedes Mal wenn Leo gewinnt, zeichnet er einen blauen Punkt.

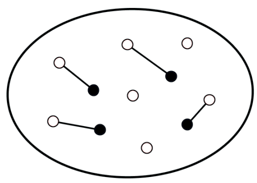


Wie viele Spiele haben die zwei Freunde gespielt? Wer hat am meisten gewonnen? Wie viele Spiele? Und die/der andere?

Anschließend zeigen wir ein *elementares Gleichspiel*, indem wir einen roten Punkt mit einem blauen Punkt verbinden und wenden dieses Konzept auf unsere konkrete Situation an.



Wir können das Resultat auch mit roten und blauen Zahlen anschreiben: $7\,(\text{rot}) + 4\,(\text{blau}) = 3\,(\text{rot})$. Also hat Lea gewonnen.



Andere mögliche Resultate[3]:

- Leo gewinnt z. B. $6\,(\text{blau}) + 4\,(\text{rot}) = 2\,(\text{blau})$
- ein totales Gleichspiel z. B. $6\,(\text{rot}) + 6\,(\text{blau}) = 0$

---

[1] Anwendung der Pädagogik der Situationen von Caleb Gattegno

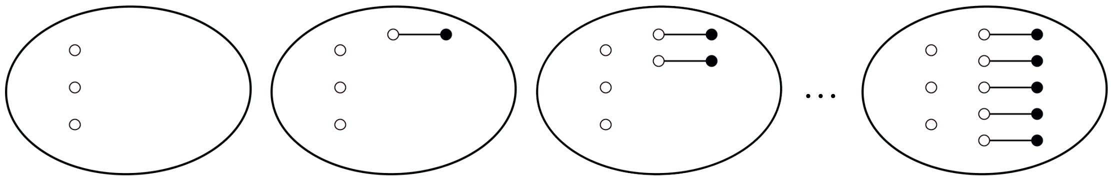
[2] Natürlich hätten wir auch andere Farben wählen können.

Für den Druck wird rot als weiß und blau als schwarz dargestellt, vgl. Original: http://dl.emacs.uni.lu/publications/projects/DIDMATH/GDM2008-YK-GB-CM.pdf

[3] Die Anzahl der Spiele ist im Moment unwesentlich.

Bei den ersten Spielen mit den roten und den blauen Zahlen zeichnen wir jedes Mal die roten und die blauen Punkte, suchen elementare Gleichspiele und zählen die Punkte, die übrig bleiben. In der Weiterführung kann dann ein erstes fundamentales Resultat erarbeitet werden.

Illustrieren wir wieder mit Hilfe einer konkreten Situation:
Eines Abends gewinnt Lea mit dem Schlussresultat 3. Überlegen wir, wie die Spiele an diesem Abend verlaufen sein können.



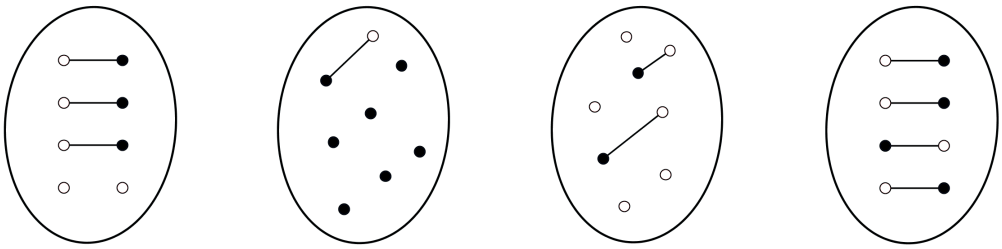
Wir können schlussfolgern:
Wir ändern nichts am Schlussresultat, wenn wir Gleichspiele hinzufügen.

Positive und negative Zahlen

Wir möchten Ende der zweiten bzw. Anfang der dritten Klasse eine Ordnungsrelation einführen, welche die Menge der blauen und roten Zahlen strukturiert.[4]

Als konkrete Situation nutzen wir die folgende:
Lex spielt allein mit zwei Würfeln. Jedes Mal, wenn er 7 Punkte oder mehr erreicht, zeichnet er einen roten Punkt und hat „gewonnen"; sonst zeichnet er einen blauen Punkt und hat „verloren". Bei jedem Spiel wirft er 8 Mal.

Illustrieren wir mögliche Resultate:



Ordnen wir die Resultate, indem wir zum Beispiel mit dem schlechtesten Ergebnis beginnen. Wir finden $6\,(\text{blau}) < 0 < 2\,(\text{rot}) < 4\,(\text{rot})$.

Wir haben positive („rote") Zahlen und negative („blaue") Zahlen; 0 ist weder positiv noch negativ. Wir schreiben alle Zahlen schwarz, die „blauen" kennzeichnen wir durch einen Strich[5] über den Zahlen.

---

[4] Nun ist die Anzahl der Spiele wesentlich und muss bei allen Beispielen gleich bleiben.

[5] Ähnlich der Schreibweise in den U.S.A., wo zum Teil ein Zirkumflex benutzt wird. Diese Notation erlaubt uns, im Gegensatz zur traditionellen Schreibweise, mögliche Verwechslungen des Operationszeichens und des Positionszeichens auszuschließen.

Beziehung zwischen der Subtraktion in $\mathbb{N}$ und der Addition in $\mathbb{Z}$

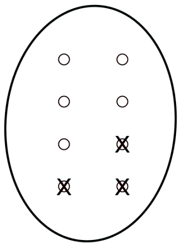


Abb. 1: $8-3$

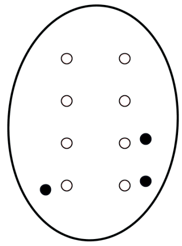
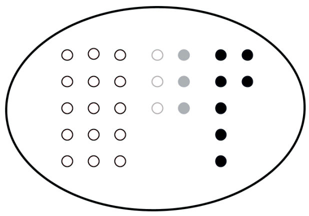


Abb. 2: $8+\overline{3}$[6]

Die Abbildung 1 veranschaulicht die Subtraktion in $\mathbb{N}$: Wir nehmen 3 rote Punkte weg. Die Abbildung 2 veranschaulicht die Addition (derselben negativen Zahl) in $\mathbb{Z}$: Wir fügen 3 blaue Punkte hinzu. Wir können also schlussfolgern, dass $8-3=8+\overline{3}$ ist.

Somit kommen wir zur Regel:
Anstatt rote Punkte wegzunehmen, fügen wir dieselbe Anzahl blauer Punkte hinzu; also: $a-b=a+\overline{b}$.

Unterschreitung und negative Zahlen



Wir wollen $15+\overline{7}$ rechnen. Wir stellen die Rechnung dar und wenden das fundamentale Resultat „Wir ändern nichts am Schlussresultat, wenn wir Gleichspiele hinzufügen“ auf die Rechnung an.[7]

Wir finden $15+\overline{7}=16+\overline{8}=17+\overline{9}=18+\overline{10}$ und können später direkt die Frage $15+\overline{7}=\boxed{}+\overline{10}$ stellen.

Vorteile bei der Anwendung der positiven und negativen Zahlen

1. Bei einer Subtraktion wie z. B. $138-82$ haben die zwei Zahlen in der traditionellen Schreibweise nicht denselben Status. Ausgehend von dem Minuenden müssen wir den Subtrahenden hervorheben.

   Bei der Aufgabe $138+\overline{82}$ haben die zwei Operanden denselben Status. Sie können gleichzeitig dargestellt werden nämlich 138 (rot) und 82 (blau).

2. Es ist unwichtig an welcher Stelle wir mit dem Ausrechnen beginnen. Betrachten wir zur Illustration die Rechnung $7253+\overline{3628}$.

---

[6] $8+\overline{3}$ wird gelesen als “8 plus 3 Strich”.

[7] Diese Vorgehensweise eignet sich besonders, wenn die letzte Ziffer eine 9, eine 8 oder eine 7 ist und kann somit auch angewandt werden bei $24+\overline{19}$ oder $75+\overline{28}$.

$$\begin{array}{ccccc} & 7 & 2 & 5 & 3 \\ + & \bar{3} & \bar{6} & \bar{2} & \bar{8} \\ \hline & 4 & & & \end{array}$$

Abb. 3

$$\begin{array}{ccccc} & 7 & 2 & 5 & 3 \\ + & \bar{3} & \bar{6} & \bar{2} & \bar{8} \\ \hline & & {\scriptstyle 10} & & {\scriptstyle 10} \\ & 4 & \bar{4} & 3 & \bar{5} \\ & & {\scriptstyle \overline{10}} & & {\scriptstyle \overline{10}} \end{array}$$

Abb. 4

$$\begin{array}{ccccc} & 7 & 2 & 5 & 3 \\ + & \bar{3} & \bar{6} & \bar{2} & \bar{8} \\ \hline & & {\scriptstyle 10} & & {\scriptstyle 10} \\ & 4 & \bar{4} & 3 & \bar{5} \\ & {\scriptstyle \bar{1}} & & {\scriptstyle \bar{1}} & \end{array}$$

Abb. 5

$$\begin{array}{ccccc} & 7 & 2 & 5 & 3 \\ + & \bar{3} & \bar{6} & \bar{2} & \bar{8} \\ \hline & & {\scriptstyle 10} & & {\scriptstyle 10} \\ & 4 & \bar{4} & 3 & \bar{5} \\ & {\scriptstyle \bar{1}} & & {\scriptstyle \bar{1}} & \\ \hline & 3 & 6 & 2 & 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle 10} & & {\scriptstyle 10} \\ & 7 & 2 & 5 & 3 \\ + & \bar{3} & \bar{6} & \bar{2} & \bar{8} \\ & {\scriptstyle \bar{1}} & & {\scriptstyle \bar{1}} & \\ \hline & 3 & 6 & 2 & 5 \end{array}$$

Abb. 6 Abb. 7

Wir können z. B. mit den Tausendern beginnen (vgl. Abb. 3).

Das Resultat ändert nicht, wenn wir Gleichspiele hinzufügen. An jeder Stelle an der negative Ziffern bleiben, fügen wir eine positive 10 und eine negative 10 hinzu (vgl. Abb. 4).

Dann wenden wir für die negative 10 die „Hopp-Regel" – wie beim Zehnerabakus oder in der Stellentafel üblich – an: 10 Steine werden durch einen 1 Stein links daneben ersetzt (vgl. Abb. 5). Letztlich rechnen wir aus und finden das gesuchte Resultat (vgl. Abb. 6).

Wir können natürlich auch ausrechnen, ohne die Zwischenresultate anzuschreiben. Was wir an Schnelligkeit gewinnen, verlieren wir an „Freiheit"! Wir müssen auf der Einerplatte beginnen (vgl. Abb. 7).[8]

3. Wir können ein negatives Resultat erhalten.
4. Wir können mehrere positive und negative Zahlen addieren.
5. Wir haben das Recht uns zu irren und müssen trotzdem nicht neu beginnen, z. B. wenn wir irrtümlich angenommen haben das Resultat sei positiv/negativ indem wir nur die Stelle mit dem höchsten Stellenwert betrachtet haben.

Literatur

COMPREHENSIVE SCHOOL MATHEMATICS PROGRAM (1995): Mathematics for the First Grade/Upper Primary Grades (Part I–IV)/Intermediate Grades (Part I–VI). Teacher's Guide. USA: McRel.

DIESCHBOURG, Robert (1971/1973/1974/1975): Un enseignement de la mathématique moderne pour des enfants mentalement handicapés. In: Nico 10/13/16/19. Bruxelles: Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique, S. 34 bis 62/S. 53 bis 97/S. 129 bis 152/S. 39 bis 57.

DIESCHBOURG, Robert (1972): Une méthode de soustraction en 1ère année primaire. In: Nico 11. Bruxelles: Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique, S.65 bis S.69.

PAPY, Frédérique (1970/1971/1972/1976): Les enfants et la mathématique 1/2/3/4. Bruxelles: Didier.

[8] Die Hunderterstelle können wir als $\left(10+\bar{6}\right)+2$ rechnen, wobei wir die „Freunde der 10" nutzen. Die Zehnerunterschreitung wird somit erneut vermieden.

Manfred KRONFELLNER, Wien

Begriffsbildung und Begriffsvorstellung

Frage: Was versteht man unter einer (lokalen) Maximumstelle?

Häufige Antwort (auch bei Studenten): f ‘(x)=0 ….

Dies ist ein besonders drastisches Indiz für die alt bekannte Tatsache, dass der algorithmische Aspekt die begriffliche Seite der Mathematik im Unterricht überwuchert. Um letztere mehr ins Rampenlicht zu rücken wurden in den letzten Jahrzehnten mehrere Ansätze entwickelt um durch Gegenüberstellung dieser Aspekte den unterrepräsentierten deutlicher ins Bewusstsein zu rücken:

- Instrumental understanding – relational understanding (SKEMP 1986)
- Procedural knowledge – conceptual knowledge (HIEBERT 1986, HAAPASALO/KADIJEVICH 2000)
- Process - object (“as two sides of the same coin”; SFARD 1991)
- Algorithmic mathematics – dialectic mathematics (SIU 2002)

Um auch innerhalb des begrifflichen Aspekts den Prozesscharakter von Begriffsentwicklung und Begriffsbildung zu betonen stellen einige Autoren der eigentlichen Definition „Vorstufen“ (häufig auch unter Verweis auf die historische Entwicklung) voran: „procept“ (TALL), „conception“ (MORENO 1992; u. a.)

Auch das Konzept der Grundvorstellungen (BENDER 1991, vom HOFE 1995) bzw. „conception image“ (VINNER 1976) zielen in eine ähnliche Richtung.

Dennoch ist das Wissen über Definitionen zentraler mathematischer Begriffe nach wie vor dürftig.

> *„Less gifted persons usually did not know the correct definitions…. Examinees could correctly state an ‘official’ definition but would not notice a contradiction between this definition and his or her other, more ‘private’ conceptions and, worse, would not try to compare the two parts of his or her knowledge.“* (PRZENIOSLO 2006, S. 127)

SchülerInnen arbeiten – nach DÖRFLER (1991) – nicht mit Definitionen sondern mit „prototypischen Repräsentanten“. Nicht selten bleibt aber nur ein dominierender Repräsentant im Gedächtnis der SchülerInnen, etwa:

ein Spezialfall: z. B.: $\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$

bzw. $a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a$

ein Algorithmus: *f'(x)=0* (Siehe oben!)

eine Deutung: *f'(x)* = Tangentensteigung

bzw: $\int_a^b f(x)dx$ = Flächeninhalt

usw.

Das sind zwar wichtige Prototypen oder Grundvorstellungen, aber wenn das die einzigen Assoziationen sind, ist das mir zu wenig.

Sind Definitionen notwendig? Können/sollen/müssen/dürfen wir sie von SchülerInnen verlangen? Brauchen wir etwa eine allgemeine Funktionsdefinition oder genügt es nicht auch lineare Funktionen, Polynomfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen, … zu definieren? (Schließlich definieren wir auch natürliche Zahlen, negative Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen, aber wir geben keine Definition von „Zahl“!) Oder brauchen wir eine Definition von Folge als Funktion mit Definitionsmenge ℕ? Brauchen wir eine Definition von „Dreieck“ als „Durchschnitt eines Winkelfeldes mit einem Parallelstreifen“, die in Zeiten der New Math Kindern aufoktroyiert wurde?

Es geht – meiner Meinung nach – nicht nur um die Begriffe selbst, sondern vielmehr um ein adäquates Bild von Mathematik.

> *„Beim Lernen von Begriffen kann der Schüler auch etwas über Begriffsbildung lernen. Es ist jedoch hochgradig illusionär, wenn man meint, dass sich dieses Lernen von selbst ereignet.“* (VOLLRATH 1987)

> *„Does the high school student or the college freshman have any idea about the structure of mathematics? The first reaction to this question might be: why should he? Usually nobody tells this student explicitly anything about the structure of mathematics …* (VINNER 1976)

Das Erlernen von abstrakten Begriffen beinhaltet für den Lernenden so viele potentielle Schwierigkeiten, *“that the organization of the learning process undoubtly requires taking special steps.”* (PRZENIOSLO 2006)

Ein paar Vorschläge:

(i) Man muss sich - als Lehrender wie als Lernender - für den Prozess des Begriffserwerbs Zeit nehmen.

(ii) Man muss diesen Prozess auch in Aufgaben verpacken und in der Leistungsbeurteilung den SchülerInnen wieder abverlangen. (Alles andere wäre „Feiertagsdidaktik"!)

Beispiele:

1. Definition der (lokalen) Maximum- bzw. Minimumstelle:

   als Prozess (vgl. KRONFELLNER 2003)

   bzw. als Prüfungsaufgabe:

a) Was versteht man unter einer (lokalen) Maximumstelle?
b) Beschreibe in Worten, warum …. keine zielführende Definition ist!
c) Beschreibe in Worten, wie man mit Hilfe der Differenzialrechnung (lokale) Extremstellen ermitteln kann!
d) Gibt es auch lokale Extremstellen, die man nicht mit Hilfe der Differenzialrechnung erhält?

2. Definition von a^n als Prozess schrittweise für $n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, (ggf $\mathbb{C}$)

   bzw. als Prüfungsaufgabe:

   a) Wie ist a^n definiert für $n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$?
   b) Nenne Gründe für die Erweiterung des Potenzbegriffs!

3. Trigonometrische Funktionen analog: ($\alpha \in]0°,90°[$, $\alpha=0°$, $\alpha=90°$, $\alpha \in [0°,360°[$ bzw. $\alpha \in [0, 2\pi[$, $\alpha \in \mathbb{R}$)

4. Ein historisch-genetischer Zugang zum Funktionsbegriff
   (Vgl. KRONFELLNER 1998, S. 67ff)

U.v.a.m.

Es bleibt zu hoffen, dass PISA und Standards – ohne deren Wert in Abrede stellen zu wollen - nicht so viel Aufmerksamkeit der LehrerInnen beanspruchen werden, dass dann das schwächste Glied im Mathematik-unterricht, die Begriffsbildung, wieder weiter aus dem Blickpunkt rückt.

Literatur

BENDER, P.: Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: Postel, H., Kirsch, A., Blum, W.: Mathematik Lehren und Lernen. Festschrift für Heinz Griesel, Schoedel, Hannover, 1991, S. 48 - 60

DÖRFLER, W.: Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: Dörfler, W., Peschek, W., Schneider, E., Wegenkittl, K. (Hrsg.): Computer – Mensch – Mathematik. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik,, Band 21, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1991

GRAY, E., TALL, D.: Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, The Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2), 115-141.

HAAPASALO, L., KADIJEVICH, D.: Two Types of Mathematical Knowledge and Their Relation. JMD 21 (2000) H.2, 139 - 157

HIEBERT, J. and LEFEVRE, P., Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis, in: Hiebert J. (ed.), Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics, Erlbaum, Hillsdale, New Jersey, 1986

vom HOFE, R.: Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1995

vom HOFE, R.: Probleme mit dem Grenzwert – genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. JMD 19 (1998) H.4, S. 257 – 291

KRONFELLNER, M.: Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtsspezifischen Beispielen. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1998

KRONFELLNER, M.: Concept definition as a classroom activity. Proceedings 3rd Colloquium on the Didactics of Mathematics 2003, Rethymnon, Kreta, S. 242-248

MORENO, L.: Calculus: A historical and didactical approach. Vortrag, Quadrennial Meeting of the International Study Group for History and Pedagogy of MathematicsToronto, August 1992

PRZENIOSLO, M.: Cognitive structures connected with the calculus notions held by representatives of various intellect types. JMD 27 (2006), H.2, S. 113 – 139

SFARD A.: On the dual nature of mathematical conception: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1991

SIU, M.K.: "Algorithmic Mathematics" and "Dialectic Mathematics": The "Yin" and "Yang" in Mathematics Education. Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level) (2nd, Hersonissos, Crete, Greece, July 1-6, 2002)

SKEMP, R.: The Psychology of Learning Mathematics. Penguin Books, Harmondsworth 1986

TALL, D.: Procepts. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/procepts.html

VINNER, S.: The naive concept of definition in mathematics. Educational Studies in Mathematics, Vol 7, No 4, Dec 1976, S. 413 – 429

VOLLRATH, H. J.: Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1987, Heft 3, S. 123–127

Sebastian KUNTZE und Kristina REISS, München

Modellieren lernen – Ansätze des Projekts KOMMA zu Kompetenzmodellen und zur Förderung mit heuristischen Lösungsbeispielen [1]

Mathematisches Modellieren stellt einen für viele Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts bedeutsamen Aspekt mathematischer Kompetenz dar. Dabei können Tätigkeiten des Modellierens inhaltsbereichsspezifisch unterschiedlichen Charakter haben, was sich einerseits in der theoretischen Konzeption von Kompetenzmodellen und andererseits bei der Gestaltung von Lernumgebungen niederschlagen kann.

In dieser moderierten Sektion werden diese Fragestellungen aufgegriffen. Dabei wird ein Einblick in Ansätze und Arbeiten des Projekts KOMMA (Reiss, Pekrun, Kuntze, Lindmeier, Nett & Zöttl, 2007) gegeben. Hier bildet die Konzeption von Kompetenzmodellen eine Grundlage für die Gestaltung und Evaluation computergestützter und auf heuristische Lösungsbeispiele fokussierender Lernumgebungen.

Ein Ausgangspunkt für KOMMA ist die Zielsetzung, orientiert an Bildungsstandards mathematischen Kompetenzaufbau zu unterstützen. Da insbesondere das Modellieren vielen Schülerinnen und Schülern schwer fällt (Blum, 2007), sollen die Lernenden hier im Zusammenhang mit den Leitideen „Messen“ und „Daten und Zufall“ gefördert werden. Eine Grundlage dafür bildet die Arbeit an Kompetenzmodellen, die von Reiss, Kuntze, Pekrun und Ufer (in diesem Band) vorgestellt wird.

Um die Lernenden beim Kompetenzaufbau im Bereich des Modellierens in Verbindung mit den genannten Leitideen zu unterstützen, wurde das Unterrichtskonzept des „Lernens mit heuristischen Lösungsbeispielen“, das bei der Förderung von Beweis- und Argumentationskompetenz erfolgreich eingesetzt werden konnte (z.B. Reiss et al., 2006), weiterentwickelt. In Analogie zu heuristischen Lösungsbeispielen zum geometrischen Beweisen besteht ein wesentliches Merkmal darin, dass auf den Prozess des Modellierens fokussiert wird. Wissen über Modellierungsprozesse gehört ganz wesentlich zu dem an diesen Lösungsbeispielen erlernbaren Lösungsprinzip. Insofern rücken Beobachtungen des Modellierungsprozesses aus einer Metaperspektive bei den neu konzipierten heuristischen Lösungsbeispielen zum Modellieren mit in den Vordergrund. Eine exemplarische Umsetzung dieser Gedanken an einer Lösungsbeispielsequenz zur Volumenmessung

[1] Dieses Forschungsvorhaben wurde vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert (Bew.-Nr. PLI3032).

findet sich beispielsweise in der Staatsexamensarbeit von Breitenbücher (2007). In dieser Lösungsbeispielsequenz wird der Modellierungskreislauf zur Verdeutlichung teilweise auch für dieselbe Problemstellung mehrfach durchlaufen, was den Fokus der Lernenden auf den Prozess des Modellierens, auf Gütekriterien für verschiedene Modellierungen, sowie auf den Vergleich dieser Modellierungen untereinander lenken kann.
Ebenfalls in Verbindung zur Leitidee „Messen" stehen die heuristischen Lösungsbeispiele zur Flächenmessung von Zöttl und Reiss (in diesem Band). Insbesondere die computergestützte Version der KOMMA-Lernumgebung erlaubt eine selbststeuerungsunterstützende Form der Gestaltung dieser heuristischer Lösungsbeispiele und ihrer Einbindung in die Lernumgebung. Im Hinblick auf die Förderung von Metawissen der Schülerinnen und Schüler zu Modellierungsprozessen wird ähnlich wie bei Breitenbücher (2007) ein reduziertes Modellierungskreislaufmodell zur Strukturierung der Lernumgebung verwendet.
Grundüberlegungen zur Konzeption der ebenfalls lösungsbeispielbasierten KOMMA-Lernumgebung im Bereich Statistik stellen Zauner, Lindmeier & Reiss (in diesem Band) vor. Die Überlegungen zu einem Strukturierungsmodell für die verwendeten heuristischen Lösungsbeispiele tragen dem Kompetenzmodell des Nutzens von Darstellungen und Modellen in statistischen Kontexten Rechnung. Außerdem werden auch Grundgedanken eines Phasenmodells naturwissenschaftlicher Vorgehensweisen in angepasster Form eingebunden. Diese Elemente der KOMMA-Lernumgebung zielen insbesondere auf metakognitive Hilfen bei eigenen Modellierungsschritten. Metakognitive Strategien könnten sich gerade beim Kompetenzaufbau im Bereich „Modellieren" als entscheidend erweisen.

Literatur

Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren – zu schwer für Schüler und Lehrer? In Beiträge zum Mathematikunterricht 2007 (S. 3–12). Hildesheim: Franzbecker.

Breitenbücher, F. (2007). *Konzeption prozessbezogener heuristischer Lösungsbeispiele zur Förderung von Modellierungskompetenz am Beispiel der Bestimmung von Rauminhalten*. [Zulassungsarbeit zum 1. Staatsexamen]. Ludwig-Maximilians-Universität München.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 194-208). Münster: Waxmann.

Reiss, K., Pekrun, R., Kuntze, S., Lindmeier, A., Nett, U. & Zöttl, L. (2007). KOMMA– ein Projekt zur Entwicklung und Evaluation einer computergestützten Lernumgebung. *GDM-Mitteilungen*, 83, 16-17.

Sebastian KUNTZE und Luzia ZÖTTL, München

Auf Aufgaben bezogene Überzeugungen und übergreifende Beliefs von Lehramtsstudierenden [1]

Professionelles Wissen von Mathematiklehrkräften einschließlich unterrichts- und fachbezogener Überzeugungen gehört zu den Kontextfaktoren für schulischen Wissensaufbau im Mathematikunterricht (Weinert, 1996; Pekrun & Reiss, zitiert nach Reiss, 2005; Kuntze, im Druck). Dies liegt daran, dass Lehrkräfte Lerngelegenheiten und Kommunikationsprozesse im Unterricht orchestrieren und ganz wesentlich mitgestalten. Es entspricht dabei einer pragmatischen Herangehensweise, professionelles Wissen als Überbegriff über deklarative und prozedurale Wissensbestandteile einerseits und präskriptive Überzeugungen und Beliefs andererseits zu verstehen, da klare Trennungen zwischen diesen Aspekten problematisch sind (Pajares, 1992). Es lassen sich jedoch gewisse Komponenten professionellen Wissens unterscheiden, die zwar Überschneidungsbereiche aufweisen, als Konstrukte für die Untersuchung von Unterricht aber hilfreich sein können. So unterscheidet Shulman (1986) die Bereiche „pedagogical knowledge", „subject matter knowledge", „curricular knowledge" und „pedagogical content knowledge". Nach Baumert et al. (2004) kann jeder dieser Bereiche Ausprägungen zwischen deklarativen Kognitionen und präskriptiven Überzeugungen aufweisen. Unterschieden werden können ferner situationsbezogenes, oft episodisch angelegtes Wissen und Überzeugungen einerseits gegenüber eher situationsübergreifenden Orientierungen und Beliefs zum Lehren und Lernen andererseits. Törner (2002) unterscheidet hier drei Ebenen unterschiedlicher „Globalität" von Beliefs: Während auf der oberen Ebene beispielsweise epistemologische Beliefs zur Disziplin Mathematik anzusiedeln sind, wie etwa die Grundorientierungen epistemologischer Beliefs der Prozess-, Schema-, Anwendungs- und Formalismusorientierung, betrifft die mittlere Ebene bestimmte Inhaltsbereiche wie Geometrie oder Stochastik. Die untere Ebene bezieht sich auf Überzeugungen zu einzelnen curricularen Inhalten. Hier könnten etwa auch Vorstellungen zu konkreten Aufgaben angesiedelt werden, die aufgrund der im Folgenden kurz skizzierten potentiellen Relevanz für die Aufgabenkultur des Mathematikunterrichts von besonderer Bedeutung sein dürften. Solche aufgabenbezogene Vorstellungen wurden beispielsweise von Biza, Nardi und Zachariades (2007) untersucht, die Überzeugungen zu mit Aufgaben verbundenen Lernzielen in den Blick nahmen.

[1] Dieses Forschungsvorhaben wurde vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert (Bew.-Nr. PLI3032).

Auswahl, Gestaltung von Aufgaben und der Umgang mit ihnen spielen für den Mathematikunterricht eine zentrale Rolle. In teils internationalen Studien hat sich allerdings immer wieder abgezeichnet, dass die in deutschen Klassenräumen bearbeiteten Aufgaben oft wenig kognitiv aktivierend sind oder oft auf wenig kognitiv aktivierende Weise bearbeitet werden (Neubrand, 2002; Knoll, 2003; Jordan et al., 2006). Gerade mehrschrittige Bearbeitungsstrategien, wie sie beim Modellieren (Blum & Leiß, 2005; Maaß, 2006) auftreten, werden oft bei der Gestaltung von Aufgaben oder deren Bearbeitung im Mathematikunterricht wenig berücksichtigt. Dies ist umso bedauerlicher, als lebensweltliche Bezüge wie bei Aufgaben mit hohem Modellierungsgehalt meist ein Verankern mathematischen Wissens in situierten Bezügen (vgl. Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001) und ein dementsprechendes Relevanzerleben ermöglichen.
Es liegt auf der Hand, Ursachen für die Auswahl von Aufgaben und für die Art ihrer Bearbeitung im professionellen Wissen von Mathematiklehrkräften zu suchen. Von Bedeutung dürfte dabei insbesondere sein, welchen Erkenntniswert oder welches Lernpotential, welchen Bezug zu Zielen des Unterrichts, welches Anforderungsniveau oder auch welchen individuellen Anreizwert Aufgaben aus Sicht von Lehrerinnen und Lehrern haben. Solche aufgabenbezogenen Überzeugungen könnten vermittelt durch unterrichtsbezogene Entscheidungen einen erheblichen Einfluss auf die Aufgabenkultur des Unterrichts einer Lehrkraft haben. Da sich aufgabenbezogene Überzeugungen nicht nur aus Unterrichtserfahrungen aktiver Lehrkräfte speisen dürften, ist auch von Interesse, über welche aufgabenbezogenen Überzeugungen Lehramtsstudierende verfügen. Möglicherweise greifen diese auch auf eigene Erfahrungen aus der Schülerperspektive zurück.
Vor dem Hintergrund des oben angesprochenen Spannungsfeldes zwischen situationsbezogenen und situationsübergreifenden Komponenten professionellen Wissens ist ferner von Interesse, inwiefern aufgabenbezogene Überzeugungen mit übergreifenden Orientierungen wie epistemologischen Grundüberzeugungen (Grigutsch, Raatz & Törner, 1995), rezeptiven bzw. konstruktrivistischen Sichtweisen des Lehrens und Lernens (Staub & Stern, 2002) oder Überzeugungen zur Motivierung von Lernenden im Unterricht (vgl. Stipek et al., 2001) zusammenhängen.
Im Mittelpunkt der Untersuchung stehen also folgende Forschungsfragen:
Über welche aufgabenbezogenen Beliefs verfügen Lehramtsstudierenende?
Gibt es Zusammenhänge mit situationsübergreifenden Orientierungen?

Untersuchungsmethoden und Stichprobe

N=230 Studierende wurden mit einem Fragebogen nach ihren aufgabenbezogenen und situationsübergreifenden Überzeugungen befragt. Der Fragebogen enthielt Multiple-Choice-Items, bei denen die Studierenden auf einer vierstufigen Likert-Skala Zustimmung oder Ablehnung zu den einzelnen Items äußern konnten. Da insbesondere persönliche Einschätzungen der Studierenden im Hinblick auf das einer Aufgabe zugemessene Lernpotential für die spätere Unterrichtspraxis entscheidend sein könnten, konzentrieren wir uns im Folgenden auf diesen Bereich.

Speziell die zweite Forschungsfrage wurde mit Hilfe einer Clusteranalyse (Ward Method) untersucht, um Gruppen von Probanden mit unterschiedlichen aufgabenbezogenen Einschätzungen zu identifizieren und so deren übergreifende Beliefs vergleichend betrachten zu können.

Ergebnisse

Die befragten Lehramtsstudierenden bevorzugten insgesamt eher die Aufgaben mit einem geringeren Modellierungsgehalt. Dabei zeigten sich kaum Unterschiede zwischen Studierenden verschiedener Lehramtsstudiengänge oder verschiedener Geschlechter.

Aus der Clusteranalyse zu persönlichen Einschätzungen bezüglich des einer Aufgabe zugemessenen Lernpotentials gingen zwei Cluster hervor, von denen eines (N=47) sich durch eine vergleichsweise positivere Einschätzung insbesondere auch der Aufgaben mit höherem Modellierungsanteil auszeichnete, während das andere, mit N=183 weit größere Cluster den Aufgaben mit höherem Modellierungsanteil gegenüber eine zurückhaltende Einschätzung zeigte. Diese beiden, nur auf Basis ihrer aufgabenbezogenen Einschätzungen gewonnenen Cluster wiesen signifikante Unterschiede bei einigen übergreifenden Beliefs und Orientierungen auf.

Diskussion

Der Befund, dass Aufgaben mit höherem Modellierungsgehalt konsistent ein vergleichsweise weniger hohes Lernpotential zugemessen wurde, könnte bei aller bei der Interpretation der Ergebnisse gebotenen Vorsicht auf eine entsprechende Orientierung im professionellen Wissen hinweisen, bei der Aufgaben mit hohem Modellierungsgehalt eher nicht der verbreiteten Aufgabenkultur entsprechen. Hier stellt sich eine Reihe von Anschlussfragen etwa nach aufgabenbezogenen Überzeugungen praktizierender Lehrkräfte, nach Entwicklungen in diesem Bereich oder nach der Entstehung solcher Überzeugungen.

Die beobachteten Anzeichen für erwartete Zusammenhänge mit übergreifenden Beliefs könnten darauf hindeuten, dass aufgabenbezogene Überzeugungen in einer moderaten Verbindung mit allgemeinen unterrichts- und fachbezogenen Beliefs stehen.

Literatur

Baumert, J., Blum, W. & Neubrand, M. (2004). [Vortrag zum COACTIV-Projekt im Rahmen des 7. BIQUA-Rundgesprächs. Augsburg, 07.05.2004].

Biza, I., Nardi, E. & Zachariades, T. (2007). Using Tasks to Explore Teacher Knowledge in Situation-Specific Contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 301–309.

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128, 18–21.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1995). *Mathematische Weltbilder bei Lehrern. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik*. Preprint Nr. 296. Duisburg: Gerhard-Mercator-Universität.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J. Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M. & Kunter, M. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenklassifikation im COACTIV-Projekt*. Materialien aus der Bildungsforschung, Nr. 81. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Knoll, S. (2003). *Verwendung von Aufgaben in Einführungsphasen des Mathematikunterrichts*. Marburg: Tectum.

Kuntze, S. (im Druck). Zusammenhänge zwischen allgemeinen und situiert erhobenen unterrichtsbezogenen Kognitionen und Überzeugungen von Mathematiklehrerinnen und -lehrern. *Unterrichtswissenschaft*.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 115–118.

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen*. Hildesheim: Franzbecker.

Pajares, F.M. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332.

Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 601–646). Weinheim: Beltz.

Reiss, K. (2005). *Die Bedeutung von Interesse und Motivation für das Mathematiklernen*. [Vortrag an der Universität Kassel am 17.01.2005].

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4–14.

Staub, F., & Stern, E. (2002). The Nature of Teacher's Pedagogical Content Beliefs Matters for Students' Achievement Gains. *Journal of Educ. Psych.*, 94 (2), 344–355.

Stipek, D., Givvin, K., Salmon, J. & MacGyvers, V. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Educ.*, 17, 213–226.

Törner, G. (2002). Mathematical Beliefs – A Search for a Common Ground. In: G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Hrsg.). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (S. 73–94) Dordrecht: Kluwer.

Weinert, F. (1996). Lerntheorien und Instruktionsmodelle. In F. Weinert (Hrsg.). *Enzyklopädie der Psychologie. Pädagogische Psychologie. Band 2: Psychologie des Lernens und der Instruktion* (S. 1–48). Göttingen: Hogrefe.

Gunta LĀCE, Universität Lettlands

Von den Schülern gewählten Strategien für die Lösung der Problemaufgaben in der Kombinatorik

Die Aufgaben, die Kombinatorik rechnet, kann man in fünf Gruppen einteilen:

- Gibt es ein Objekt, das den gegebenen Anforderungen entspricht?
- Mindestens ein Objekt entsprechend den gegebenen Anforderungen finden!
- Wie viele Objekte entsprechend den gegebenen Anforderungen gibt es?
- Einen Algorithmus finden, mit dem man alle Objekte konstruieren kann, die den gegebenen Anforderungen entsprechen.
- Ein irgendwie extremales Objekt zu finden, der den gegebenen Anforderungen entspricht.

In dieser Untersuchung wurde festgestellt, welche Strategien für die Lösung der Problemaufgaben die Schüler aus verschiedenen Altersgruppen (Klassen 5-6, Klassen 7-8, Klassen 9-10) wählen. An der Untersuchung nahmen die Schüler teil, deren Allgemeinkenntnisse und Fertigkeiten in der Mathematik auf einem optimalen Niveau sind. (Nach dem lettischen Leistungsbewertungssystem werden die Schülerleistungen als ungenügend bewertet, wenn sie in der Abschlussarbeit weniger als 35% der Gesamtpunktenzahl erreichen, genügend – bei 35-60%, optimal – bei 61-90%, ausgezeichnet – bei mehr als 90% von der Gesamtpunktenzahl. Insgesamt in dieser Untersuchung haben 16 Schüler der 6-ten Klassen, 12 Schüler der 7-ten Klassen und 16 Schüler der 9-ten Klassen teilgenommen. Die Untersuchungsteilnehmer haben vorher keine Kombinatorikaufgaben gelöst. Die Ergebnisse der Untersuchung wurden durch die Analyse der Videoaufnahmen und durch die Rückmeldungen der Schüler über ihre Vorgehensweise bei der Lösung der Problemaufgaben festgestellt.

Die Untersuchungsteilnehmer haben individuell gearbeitet. Sie sollten die folgende Aufgabe lösen:

Wie viele verschiedene zweistellige Zahlen kann man aus den gegebenen Ziffern bilden:

a) 1, 2;

b) 1, 2, 3;

c) 1, 2, 3, 4,;

d) 1, 2, 3, 4, 5;

e) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

Die Lösungszeit wurde nicht begrenzt. Wenn die Schüler wollten, durften sie Fragen an den Untersucher stellen. Am Anfang wurde geplant, dass der

Untersucher sich nur dann in die Arbeit einmischen wird, wenn die Schüler ihm die Fragen stellen. Aber solche Situation ist nicht vorgekommen, weil **alle** Schüler der sechsten Klasse bei der Lösung die gleichen Fehler zugelassen haben. Sie waren überzeugt, dass die Ziffern in der Zahl unterschiedlich sein sollen, das bedeutet, dass sie schon im Beispiel a) nur die Zahlen 12 und 21 geschrieben haben, aber sie hatten keine 11 und 22. Wenn dieser Fehler nicht beseitigt würde, würde das Ziel der Untersuchung nicht erreicht.

Ein Beispiel: ein typisches Gespräch zwischen dem Untersucher und einem Sechsklässler;

Schüler: *Liest die Aufgabenstellung schnell durch und ohne nachzudenken schreibt auf*

a) 12; 21;
b) 12; 21; 13; 31; 23; 32;

Untersucher: Bist du sicher, dass du alle Zahlen aufgeschrieben hast?

Schüler: *Schaut das Geschriebene schnell durch.* Ich denke ja. Gibt es noch was?

Untersucher: Ja, natürlich.

Schüler: *Schaut mehrmals das Geschriebene durch, gleichzeitig fährt er mit dem Finger mit.* Ich weiß nicht, es gibt nichts mehr. *(mehrere Schüler schreiben die Zahlen 1,2 und 2,1 hinzu)*

Untersucher: Kannst du nacheinander die kleinsten zweistelligen Zahlen langsam nennen?

Schüler: 10, 11, 12, 13…

Nur 7 von 16 Schülern haben bei 11 aufgehört. Die anderen haben weitergezählt. Niemand von den Untersuchungsteilnehmern hat ohne zu zweifeln die Zahl 11 in die Lösung hineingetragen. Alle (!) haben erstaunt gefragt, ob man auch solche Zahl hineintragen kann?

Obwohl man festgestellt wird, dass die Aufgabenstellung auch die Zahlen erfüllen, deren Ziffern gleich sind, trotzdem werden sie als Ausnahmen betrachtet und am Ende geschrieben. Zum Beispiel: 12; 21; 13; 31; 23; 32; 11; 22; 33.

80% der Untersuchungsteilnehmer haben am Anfang alle Zahlen geschrieben, die die Aufgabenstellung erfüllen, und danach haben sie sie addiert. 20% der Untersuchungsteilnehmer haben alle Zahlen in den Beispielen a), b), c) und d) geschrieben. Bei dem Beispiel e) habnen sie geahnt, dass es einen günstigeren Weg sein soll, um diese Aufgabe zu lösen. 4 Schüler haben erfunden, wie viele Zahlen gibt es, ohne sie alle aufzuschreiben. Die anderen 6 haben nachgedacht, aber danach haben sie sowieso alle 49 Zahlen aufgeschrieben.

Die Schüler, die die Lösung gefunden haben, ohne das Aufschreiben aller Zahlen, wurden aufgefordert ihre Lösungsmethode zu begründen. Diese Schüler hatten Schwierigkeiten bei der Verwendung konkreter Begriffe, deshalb haben sie selber festgestellt, dass sie von der Richtigkeit der Lösung überzeugt sind, aber die nicht begründen können.
Der Unterschied zwischen den Lösungen der Schüler der Klassen 7 und 6 lag darin, dass die älteren Schüler schon im Beispiel d) eine allgemeinere Lösungsstrategie herauszufinden versucht haben.
In den vorhandenen Lehrwerken in der lettischen Sprache werden solche Übungen mit Hilfe von Multiplizieren gelöst. Zum Beispiel: wenn man die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 benutzen darf, dann denkt man so: die erste Ziffer der zweistelligen Zahl kann man siebenartig wählen; nach jeder Ziffer kann man eine von den 7 Ziffern schreiben. Also man kann insgesamt 7*7=49 Zahlen schreiben. Nur ein Untersuchungsteilnehmer hat diese Strategie genutzt. Die anderen Schüler, die nach einer allgemeinen Lösungsstrategie gesucht haben (10 von 13), stützten sich auf die vorher gewonnenen Ergebnisse. Die typische Begründung eines Schülers der siebten Klasse warum man mit Hilfe von fünf Ziffern 25 verschiedene zweistellige Zahlen bilden kann:
Wenn es vier Ziffern vorgegeben sind, dann kann man 16 Zahlen schreiben (sie werden einfach aufgeschrieben und addiert). Wenn man die Ziffer 5 benutzt, kann man vier Zahlen aufschrieben, in denen 5 die erste Ziffer ist: 51, 52, 53, 54. Und 4 Zahlen, in denen 5 die zweite Ziffer ist: 15, 25, 35, 45. Es gibt noch die Zahl 55. Also insgesamt kann man 16 + 4 + 4+ 1 = 25 Zahlen bilden.
Nur 8 von den Schülern der sechsten und siebten Klassen haben die Zahlen nacheinander aufgeschrieben. Zum Beispiel: 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31…
7 Schüler haben alle Zahlen nacheinander geschrieben, ausgenommen die, deren Ziffern gleich sind. Zum Beispiel: 12, 13, 21, 23, 31, 32, 11, 22, 33.
9 Schüler haben zuerst alle Zahlen aus dem vorigen Beispiel geschrieben, dann die, die man bilden kann, in dem man die nächste Ziffer hinzufügt. Zum Beispiel: 12, 13, 21, 23, 31, 32, 11, 22, 33, 14, 41, 24, 42, 34, 43, 44.
Im Allgemeinen haben die Schüler der sechsten und siebten Klassen die Aufgaben mit Spaß und Erfolg gelöst. Es gab wenig Fehler. Die Fehler sind überwiegend dann entstanden, weil die Schüler zu unaufmerksam die geschriebenen Zahlen addiert haben. Die Aufgabe wurde in 7 – 13 Minuten gelöst.
Krasse Unterschiede gab es in der Lösungsweise der Schüler der neunten Klasse. 3 von 17 Untersuchungsteilnehmern der neunten Klasse hatten eine ähnliche Lösungsstrategie wie die jüngeren Schüler.

4 von 17 Schülern haben sofort die allgemeine Strategie gewölt, das heisst, sie haben im Kopf oder schriftlich gerechnet, wie viele Zahlen entsprechend der Aufgabenstellung gibt es. Der Schnellste hat das in zwei Minuten gemacht. Diese Schüler konnten in Vergleich zu den jüngeren Schülern auch ihre Lösung besser begründet. Trotzdem haben auch in der neunten Klasse 3 Schüler ihre Lösung so begründet – *so ist es einfach und alles. Ich denke, dass die Lösung richtig ist, aber ich kann nicht erklären warum.*
3 Schüler konnten die Aufgabe nicht lösen. Sie alle haben sich bemüht eine allgemeine Lösung zu finden, aber wenn sie Pech hatten, haben sie gar nicht versucht die Zahlen entsprechend der Aufgabenstellung zu schreiben und sie einfach zu addieren. Auf die Frage des Untersuchers: Warum? – haben sie mit der Gegenfrage geantwortet: Darf man so schreiben?
4 Schüler haben versucht zuerst allgemein zu denken, aber dann haben sie sich entschieden die gefragten Zahlen aufzuschreiben. Sie brauchten eine längere Lösungszeit. Die längste Lösungszeit war 32 Minuten.

Schlussfolgerungen:

Die Ergebnisse der Untersuchung bestätigen die Annahme, dass man die Aufgaben der Kombinatorik in jede von den untersuchten Altersgruppen in den Mathematikunterricht einsetzen kann.
Die verhältnismäßig schlechten Ergebnisse der Schüler der neunten Klasse kann man damit begründen, dass sie die Lösungsstrategien der Kombinatorikaufgaben sich nicht angeeignet haben, deshalb in allgemeiner Weise können sie nur einige Aufgaben lösen, aber eine Lösung durch die Versuche scheint für sie nicht akzeptabel.
Bei der Einsetzung der Kombinatorikaufgaben in den Lerninhalt wenigstens seit der fünften Klasse, hätten die Schüler eine Möglichkeit die Lösungsstrategien auf dem Versuchsweg auszuarbeiten, denn in diesem Alter ist Experimentieren für sie ein völlig natürlich.

Die Forschung wurde mit Unterstützung der Europäischen Sozialfonds durchgeführt.

Literatur:

www.liis.lv
Leuders Timo (Hrsg.). Mathematik Didaktik.Cornelsen Verlag Scriptor GmbH&Co. KG, Berlin. 2003.
France I., Lace G., Pickaine L., Miķelsone A.. Matematika 7. Klasei. Lielvards. Riga. 2007. (Lettisch)

Silke LADEL, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd

Zur Darstellung von Arithmetik bei der Gestaltung von Soft are f r den Anfangsunterricht

Zum intergrund

Den Anlass, sich tiefer mit der Darstellung von Arithmetik bei der Gestaltung von Software für den Anfangsunterricht zu beschäftigen, gab eine empirische Untersuchung zum Umgang von Erst- und Zweitklässlern mit ausgewählter Software, die im Herbst 2006 stattfand (Ladel 2007). Über einen Zeitraum von zehn Wochen arbeiteten insgesamt 60 Kinder zweimal pro Woche je 15 bis 20 Minuten mit ein- und derselben Software. Hierfür wurde die Software Blitzrechnen 1/2 , Mathematikus 1/2 sowie die Förderpyramide 1/2 ausgewählt. Eine Frequenzanalyse der in Anspruch genommenen Hilfen ergab, dass die Kinder am häufigsten auf die Hilfen der Software zurückgriffen. Diese enthalten entweder Erklärungen zu Aufgabenstellungen oder Veranschaulichungen zur jeweiligen Aufgabe. Eine Vertiefung der Forschungsarbeit erfolgte in Richtung der Veranschaulichungen und Repräsentationsformen.

Darstellung arithmetischer Inhalte bei ausge hlter Soft are f r den Anfangsunterricht Mathematik

Arithmetische Aufgaben werden bei Software meistens symbolisch gestellt und bearbeitet. Eine Ausnahme stellt die Software Blitzrechnen dar. Beim Auswählen einer Aufgabe durch die Schülerinnen und Schüler erscheint diese zunächst in einer Kombination von symbolischer und ikonischer Darstellung. Die Kinder können dann von sich aus auf die symbolische Darstellung wechseln. Von dieser geht die Beschreibung im Folgenden aus.

Bei einem Repräsentationswechsel am omputer sind zwei Dinge von Interesse:

- Erfolgt der Darstellungswechsel automatisch oder manuell
- Erfolgt der intermodale Transfer automatisch oder muss er vom Nutzer geleistet werden

Ein automatischer Wechsel erfolgt meist dann, wenn die Kinder ein- oder mehrmals falsche Antworten eingegeben haben. So wechselt die Software die Förderpyramide nach dem zweiten Fehler auf die ikonische Darstellungsform. Der intermodale Transfer wird dabei ebenfalls automatisch geleistet, sodass der Lösungsweg der zuvor symbolisch repräsentierten Aufgabe ikonisch veranschaulicht wird. Eine solche Hilfe zur Lösung erfolgt bei Mathematikus 1 erst nach dem dritten Fehler. Der automatische Wechsel der Darstellung kann auch innerhalb der symbolischen Repräsentation erfolgen. So stellt z.B. Mathematikus 2 die Aufgabe nochmals symbolisch, jedoch auf andere Art dar.

Aus didaktischer Sicht interessieren besonders die manuellen Repräsentationswechsel. Diese werden den Kindern bei der Software Blitzrechnen sowie Mathematikus 1 angeboten. Bei Blitzrechnen werden die Kinder visuell durch das Aufblinken eines Plättchen-Icons darauf hingewiesen auf die kombinierte ikonische und symbolische Darstellungsform zu wechseln. Der intermodale Transfer in diese Richtung wird automatisch vom Programm geleistet. Bei Mathematikus 1 erfolgt der Hinweis auditiv und fordert auf, die gestellte Aufgabe mit Plättchen zu legen – entweder am P oder mit dem konkreten Material. Hier muss der intermodale Transfer von der Schülerin bzw. dem Schüler geleistet werden.

ie gehen inder mit den e r sentationsformen und - echseln um Ergebnisse einer em irischen Untersuchung

Beide Möglichkeiten des manuellen Repräsentationswechsels wurden von den Kindern kaum in Anspruch genommen, obwohl bei den automatischen Wechseln deutlich wurde, dass diese durchaus hilfreich sein können. Theoretisch könnte dieses Ignorieren dadurch erklärt werden, dass die Schülerinnen und Schüler die mathematischen Operationen bereits sehr gut verinnerlicht haben und sie sich auf der vorletzten Stufe des mathematischen Lernprozesses, dem Rechnen mit reinen Ziffern, befinden. Letztendlich ist bei der Software Blitzrechnen der Schritt zur letzten Stufe, der Automatisierung, auch als Ziel gedacht. Gegen diese Annahme sprechen jedoch diverse Beobachtungen und Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler. Die Gründe für die fehlende manuelle Nutzung der Wechselmöglichkeit müssen demnach eher in der Gestaltung der Repräsentationen und deren Wechsel am P liegen.

Beim Umgang der Schülerinnen und Schüler mit der Software konnten v.a. zwei Dinge festgestellt werden:

Zum einen sehen die Kinder die ikonische Repräsentationsform nur für nicht so leistungsstarke Kinder als geeignet an. Wie es auch im Unterricht ohne das Medium P der Fall ist, möchte man keine Nachhilfe in Anspruch nehmen. Hier ist also zu überlegen, wie Software auf nicht-symbolische Art und Weise gestaltet werden kann, so dass deren Nutzung von den Kindern nicht als Schwäche gesehen wird und sie motivierend wirkt.

Zum andern hatten die Schülerinnen und Schüler teilweise Probleme den Zusammenhang, also den intermodalen Transfer, zu sehen und gedanklich nachzuvollziehen.

Dafür werden zwei Dinge als verantwortlich angesehen. Einerseits ändert sich die Art der symbolischen Darstellung der Aufgabe, indem die zuvor in einem Aufgabenblock präsentierte Aufgabe nun von diesem losgelöst und einzeln präsentiert wird. Andererseits ist es in manchen Fällen zudem der Fall, dass sich das Hintergrundsbild ändert.

Daraus folgernd werden zwei Gestaltungsprinzipien formuliert:

- Die Darstellung einer Aufgabe sollte bei einem Repräsentationswechsel gleich bleiben.
- Bei einem Aufgabentyp sollte die Bildschirmgestaltung immer gleich bleiben.

Die Bildschirmgestaltung betrifft dabei nicht nur das Hintergrundsbild, sondern generell die Repräsentationsformen. Es macht einen Unterschied, ob auf der Bildschirmseite ständig ein Platz für die jeweils andere Repräsentationsform reserviert ist, sie also räumlich simultan vorhanden ist, oder ob diese auf Wunsch erst hinzukommt.

- Verschiedene Repräsentationsformen sollten räumlich simultan nebeneinander stehen ohne sich gegenseitig zu behindern.

Eine solche Behinderung ist bei Mathematikus 1 der Fall, dadurch dass das Zwanzigerfeld mit den Plättchen die Eingabeleiste für die Lösung verdeckt. Zur Eingabe der Antwort müssen die Schülerinnen und Schüler die virtuell-enaktive Ebene entweder schließen oder an eine andere Stelle des Bildschirms verschieben.

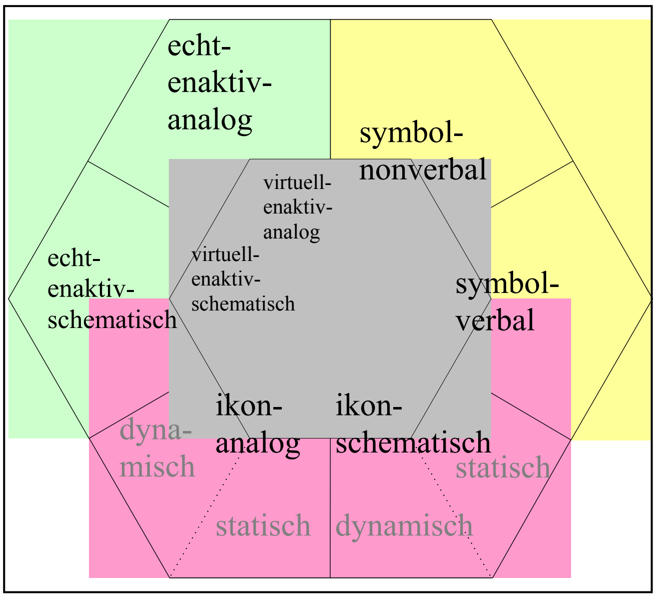
Eine weitere Beobachtung betrifft die virtuell-enaktive Tätigkeit der Kinder am P . Die Plättchen müssen einzeln gezogen und korrekt im Zwanzigerfeld platziert werden, was sehr viel Zeit in Anspruch nimmt. Es gilt demnach:

- Eine virtuell-enaktive Darstellung sollte möglichst schnell realisierbar sein.

e r sentationsmodell

Die Untersuchung der Gestaltung von Repräsentationsformen und deren Wechsel bei der Darstellung und Bearbeitung von Aufgaben am P führte dazu, die Repräsentationsformen im Hinblick auf den omputer näher zu betrachten. Ausgehend vom E-I-S-Modell nach Bruner erfolgte eine theoriebasierte Weiterentwicklung zu nebenstehendem Repräsentationsmodell.

Das große Sechseck stellt die Lernumgebung dar, das graue



bezieht sich auf den omputer als Arbeitsmittel, dessen Vorteil zum einen darin liegt, ikonische Darstellungen auf ganz andere Art und Weise z.B. durch Animationen zu repräsentieren. Des Weiteren gilt:

„Der Computer stellt ein Werkzeug dar, das es erlaubt, Darstellungen „auf Knopfdruck“ zu erzeugen, in einfacher Weise zwischen Darstellungen zu wechseln, gleichzeitig mehrere Darstellungen auf dem Bildschirm zu erzeugen, die zudem interaktiv miteinander verknüpft sind, oder Darstellungen zu verändern“ (Weigand/Weth 2002).

olgerungen aus dem mathematischen Lern rozess

Diese von Weigand und Weth formulierten Möglichkeiten des omputers stellen eben die Eigenschaften dar, die ein Arbeitsmittel braucht, um laut Aebli den Prozess der Verinnerlichung zu fördern:

„Im Prozess der Verinnerlichung gilt daher die folgende Regel: Jede neue, symbolischere Darstellung der Operation muß mit der vorangehenden, konkreteren in möglichst enge Verbindung gebracht werden“ (Aebli 1987).

An dieser Stelle setzt die weitere Forschungs- und Entwicklungsarbeit des Projekts an. Unter Beachtung der gefundenen Gestaltungsprinzipien und auf der Grundlage des Prozesses der Verinnerlichung wird an einem Beispiel aufgezeigt, wie Software für den Anfangsunterricht Mathematik zu gestalten ist, um diesen Prozess zu fördern.

Literatur

[1] Aebli, H. (1 7): Zwölf Grundformen des Lehrens. Stuttgart: Klett- otta

[2] Ladel, S. (2007): Erst- und Zweitklässler arbeiten mit ausgewählter Mathematik-Lernsoftware - Eine Untersuchung zum Kommunikationsverhalten und zur Nutzung von softwarespezifischen Hilfen. In: Beckmann, A. (Hg.): Ausgewählte Unterrichtskonzepte im Mathematikunterricht in unterrichtlicher Erprobung. Band 4 Lernen an Stationen, S. – 117.

[3] Weigand, H-G.; Weth, T. (2002): omputer im Mathematikunterricht: neue Wege zu alten Zielen. Akademischer Verlag. Heidelberg. Berlin

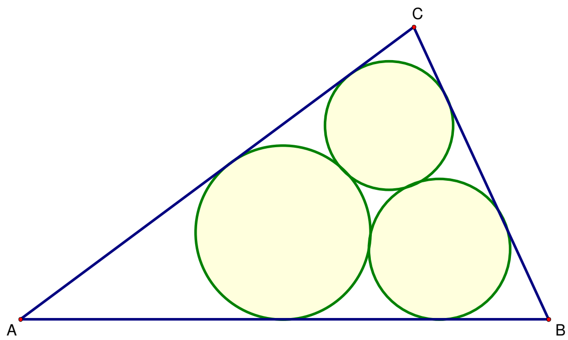
Ingmar LEHMANN, Berlin

Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung

1. Die Malfatti-Story

1802 fand der italienische Mathematiker Malfatti (1731–1807) eine Lösung der folgenden Aufgabe, die er 1803 dann veröffentlichte:

> Wie lassen sich in ein gegebenes Dreieck drei sich nicht überlappende Kreise so einbetten, dass ihre Gesamtfläche möglichst groß ist?



Malfatti konstruierte die drei Kreise derart, dass sie einander und je zwei Seiten des Dreiecks berühren. Steiner (1796-1863) fand 1826 eine elegante Konstruktion. Seit 1929 bzw. 1967 weiß man, dass die sogenannten *Malfatti-Kreise* nicht die maximale Bedeckung eines Dreiecks liefern. Einen Beweis dafür lieferten 1992 Zalgaller und Los'. 2007 zeigte Guy schließlich, dass der *Leuchtturm-Satz* u.a. auch auf die Konstruktion der Malfatti-Kreise angewendet werden kann.

2. Konstruktion der Malfatti-Kreise

2.1 Konstruktion nach Malfatti (mit vorherigen Berechnungen)

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras und der Ähnlichkeit von Dreiecken erhält man ein Gleichungssystem, dessen Lösungen die Tangentenabschnitte an die Malfatti-Kreise sind. Damit lassen sich die Malfatti-Kreise (mit Zirkel und Lineal) konstruieren.

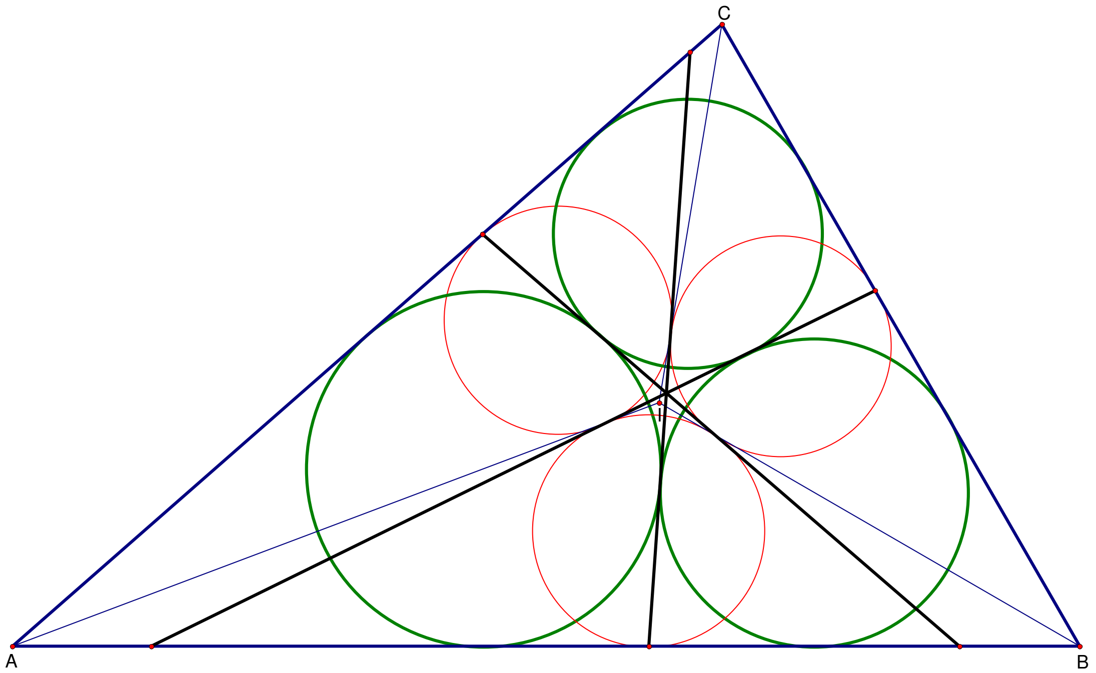
2.2 Konstruktion nach Steiner-Petersen (ohne vorherige Berechnungen)

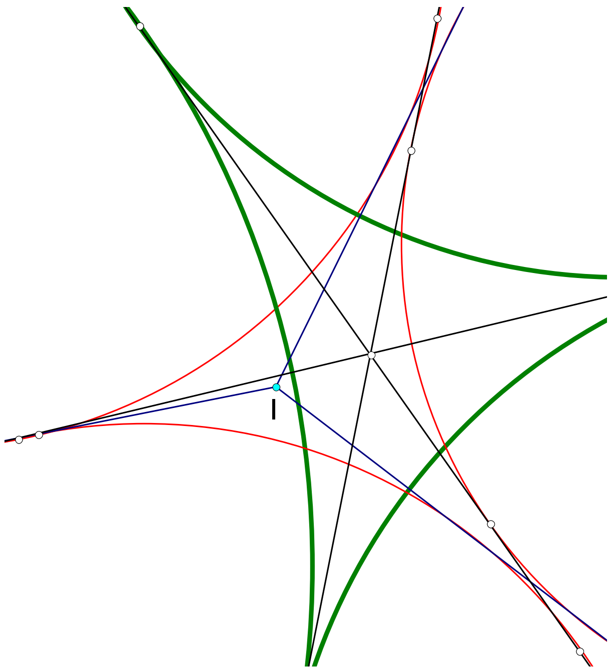
Petersen gelang 1879 – auf der Basis der Steiner-Konstruktion – eine elementargeometrische Lösung, die ich für die Schule zumindest für durchführbar halte. Diese Variante ist im Übrigen wenige Jahre später sogar schon in ein Schulbuch für Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen aufgenommen worden.

Die entscheidende Stelle in der ganzen Konstruktion beruht auf einem Satz, den Steiner 1826 fand:

Jede der gemeinsamen Tangenten der Malfatti-Kreise berührt zugleich zwei der drei Inkreise der drei Teildreiecke ΔBCI, ΔCAI, ΔABI, wobei I der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ΔABC ist.

Zur Veranschaulichung hier dieser Zwischenschritt:





Die Inkreise berühren sich (im allgemeinen Fall) nicht; sie werden aber eben doch auch von den Tangenten der Malfatti-Kreise berührt, allerdings in unterschiedlichen Punkten.

Inkreise: dünn,

Malfatti-Kreise: fett

Vorüberlegungen (Analysis)

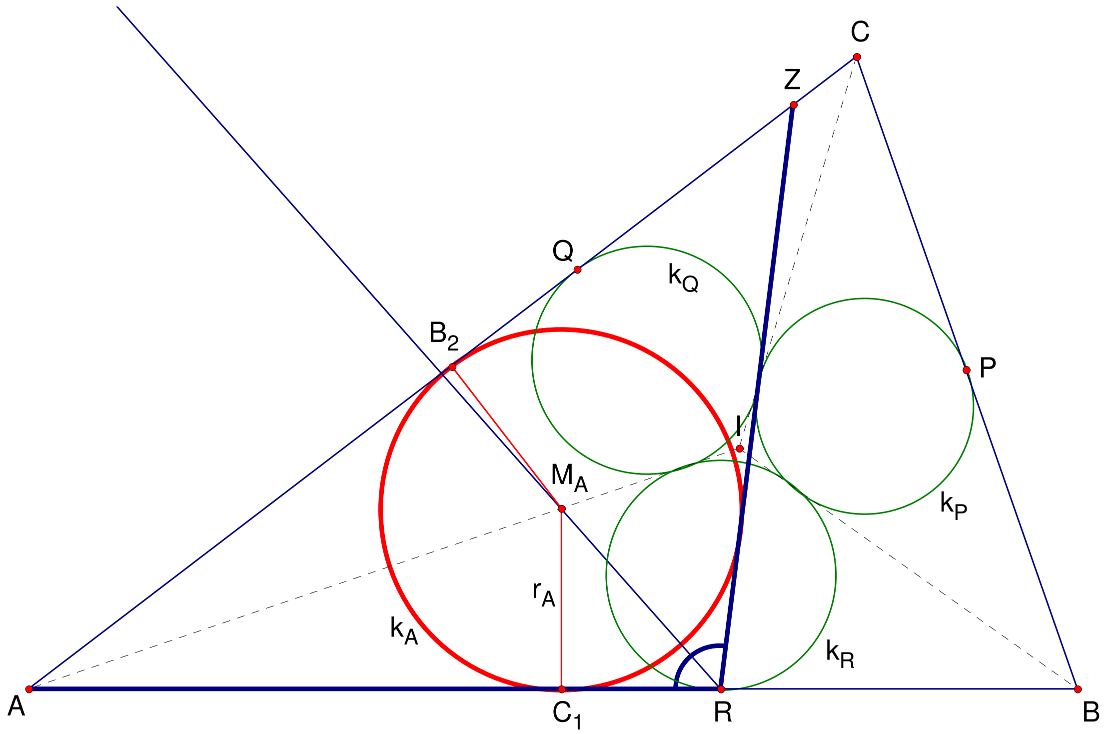
a) Die Mittelpunkte der Malfatti-Kreise müssen auf den Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel liegen.

b) Um die Malfatti-Kreise konstruieren zu können, benötigen wir den Mittelpunkt I des Inkreises k (als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden).

c) Die Eigenschaft, dass sich die drei Malfatti-Kreise paarweise berühren, erfordert zwischen je zwei dieser Kreise eine gemeinsame Tangente.
Könnte man diese Tangenten konstruieren, so erhielte man die Mittelpunkte der gesuchten Berührkreise durch die Konstruktion von weiteren Winkelhalbierenden.

d) Erstaunlicherweise erhält man diese Tangentenpunkte als Berührpunkte von drei Hilfskreisen mit den Dreiecksseiten. Diese Hilfskreise sind gerade die Inkreise der drei Teildreiecke ΔBCI, ΔCAI, ΔABI, die durch die Konstruktion der Winkelhalbierenden entstehen.

e) Die gesuchten Geraden sind nun gerade die Tangenten von den Berührpunkte an die Hilfskreise (Thaleskreis).



3. Die Malfatti-Kreise in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft

Ich habe das Malfatti-Problem in zwei Arbeitsgemeinschaften (Klassenstufen 10 und 11) im WS 2007/08 behandelt:
– Zirkel 10a: 14 Schüler (kein Mädchen dabei),
– Zirkel 11a: 6 Schülerinnen, 15 Schüler.

Zu den Malfatti-Kreisen

Mein ursprünglicher Versuch, ohne vorherige algebraische Betrachtungen auszukommen, ist kläglich gescheitert. Obwohl ich eine Reihe von Sätzen aus der Elementargeometrie wiederholt hatte, fanden die Schüler keinen Zugang. Auch Aufgaben zur „Japanischen Tempelgeometrie" halfen letztlich wenig, sodass ich eine von mir geführte Konstruktion behandelt habe.

Zur Konstruktion nach Malfatti – mit vorherigen Berechnungen

Mit der Konstruktion selbst gab es keine Schwierigkeiten. Die Herleitung der Gleichungen für die Tangentenabschnitte lässt sich mühelos erarbeiten. Die Lösungen des Gleichungssystems habe ich ohne Beweis mitgeteilt. Meine Schüler waren irritiert, weil ein CAS sie hier nicht weiterbrachte.

Zur Konstruktion nach Steiner-Petersen – ohne vorherige Berechnungen

Die Konstruktion setzt zwar im Wesentlichen nur Schulstoff voraus, dennoch ist diese Konstruktion sehr schwierig. Allein die Analysis sprengt den Rahmen einer Schulstunde. Die Konstruktion selbst wurde dann mit Hilfe eines DGS durchgeführt. Die Freude, diese „riesige Konstruktion" per Makro demonstrieren zu können, war allen ins Gesicht geschrieben.

Fazit und Schlussfolgerungen

Anstelle der Konstruktion können auch ausgewählte Elemente derselben behandelt werden. Auch Vorbetrachtungen zum Thema sind hilfreich.

- Das Malfatti-Problem wird für ein gleichseitiges Dreieck diskutiert.
- Das Malfatti-Problem wird für ein beliebiges Dreieck diskutiert, indem die Lösung von Zalgaller und Los' vorgegeben wird.
- Für die Konstruktion der Malfatti-Kreise in einem beliebigen Dreieck empfehle ich Vorbetrachtungen oder vorbereitende Aufgaben.

In jedem Fall zeigt sich wieder einmal, wie ertragreich solche geometrischen Fragestellungen – wie das Malfatti-Problem – sein können.
Das betrifft sowohl die fachlichen Komponenten als auch die didaktischen – mit diesem Thema werden Schüler *und* Lehrer (heraus-)gefordert.
Aber derartige anspruchsvolle Themen, die motivieren und zudem ein „Durchhalten", einen „langen Atem" erfordern, sind rar! Die Reihe der Tätigkeiten, die sich zum Teil zwanglos ergeben, ist beeindruckend:

Entdecken, Vermuten, Experimentieren, Präzisieren, Verallgemeinern, Spezifizieren, Begründen, Widerlegen, Zeichnen, Konstruieren, Rechnen (Termumformen), Verbalisieren – das wollen wir doch erreichen.
Darüber hinaus genießen wir die Ästhetik der konstruierten Malfatti-Kreise!

Dass Schüler diese Konstruktion letztlich nicht vollständig begründen können, das ist ein Preis, den ich zu zahlen bereit bin!

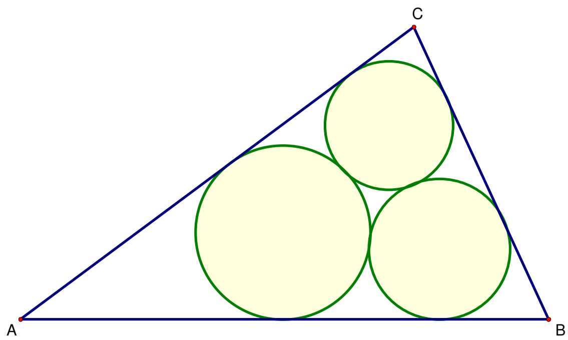
Ingmar LEHMANN, Berlin

Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung

1. Die Malfatti-Story

1802 fand der italienische Mathematiker Malfatti (1731–1807) eine Lösung der folgenden Aufgabe, die er 1803 dann veröffentlichte [1]:

> Wie lassen sich in ein gegebenes Dreieck drei sich nicht überlappende Kreise so einbetten, dass ihre Gesamtfläche möglichst groß ist?



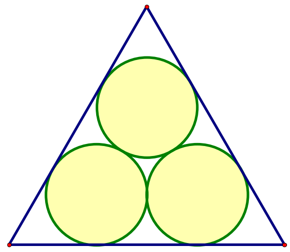
Malfatti konstruierte die drei Kreise derart, dass sie einander und je zwei Seiten des Dreiecks berühren. Dazu berechnete er zunächst die drei Tangentenabschnitte dieser Kreise.
Das ursprüngliche Problem, ein so genanntes „Packungsproblem", lautete ein wenig anders. Für die weiteren Betrachtungen bezeichnen wir dieses Problem als das *erste* (oder ursprüngliche) *Malfatti-Problem*. Den Fall des gleichschenkligen Dreiecks hatte schon der schweizerische Mathematiker Jacob Bernoulli (1654–1705) betrachtet. Der ebenfalls aus der Schweiz stammende Jakob Steiner (1796-1863) fand 1826 [2] eine elegante Konstruktion für ein beliebiges Dreieck.

In der Literatur wurde immer wieder behauptet, Steiner habe keinen Beweis für seine Lösung angegeben. Richard Guy [3] stellt jedoch fest, dass Steiner einen solchen Beweis erbracht hat – wenn auch verstreut über mehrere Abschnitte innerhalb zweier Arbeiten.

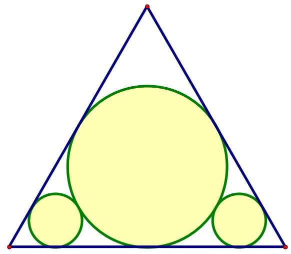
Auch weitere Mathematiker – wie z. B. Plücker, Cayley und Clebsch – zog dieses Problem an. Aber sie alle glaubten – wie schon Malfatti –, die Lösung erfordere, dass jeder der drei Kreise genau zwei der Dreiecksseiten als Tangenten haben müsse. Nachdem seit 1803 niemand an dieser Lösung Malfattis gezweifelt hatte, entdeckten dann jedoch 1929 Lob und Richmond [4] etwas Merkwürdiges. Sie konnten zeigen, dass Malfatti sich für den Fall des gleichseitigen Dreiecks geirrt hat.

Malfattis Lösung für den Fall des gleichseitigen Dreiecks erreicht eine Bedeckung von fast 73 %; genau: $(\sqrt{3}-\frac{3}{2}) \cdot \pi \approx 0{,}729$.

Diese 73 % konnten Lob und Richmond jedoch noch einmal um 1 % steigern! Dazu muss einer der drei Kreise selbst maximal werden, also zum Inkreis werden – und folglich alle drei Seiten des gleichseitigen Dreiecks berühren. In zwei Ecken werden zwei „kleine“ (gleichgroße) Kreise platziert. Diese Konfiguration erreicht eine Bedeckung des Dreiecks von fast



74 %; genau: $\frac{11\sqrt{3}}{81} \cdot \pi \approx 0{,}739$.



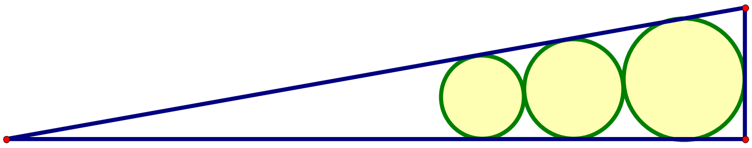
Damit war klar, dass die sogenannten *Malfatti-Kreise*, also jene drei Kreise, die jeweils genau zwei der Dreiecksseiten als Tangenten haben, nicht die maximale Bedeckung eines Dreiecks liefern.

Die Verbesserung um etwa 1 % ist dabei marginal. Entscheidend ist, dass Lob und Richmond mit Hilfe eines Spezialfalls eine zuvor stillschweigend vorausgesetzte Annahme, dass also die Kreise einander und je genau zwei Seiten des Dreiecks berühren, grundsätzlich zu Fall gebracht haben.

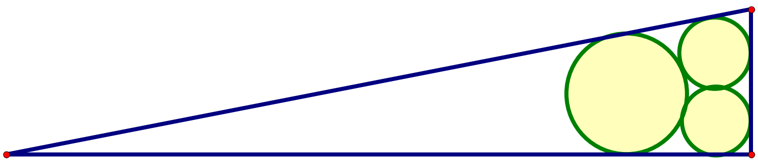
Aber es kommt noch dramatischer!

1965 findet Howard W. Eves (1911-2004) etwas noch Seltsameres [5]:

Wenn nämlich das (rechtwinklige) Ausgangsdreieck lang und schmal ist, sieht man mit bloßem Auge, dass Malfattis Lösung nicht stimmt.



Offenbar bedecken die nebeneinander liegenden Kreise (hier etwa 50 % Bedeckung) einen größeren Anteil des Dreiecks als im folgenden Fall mit den drei Malfatti-Kreisen (hier etwa 35 % Bedeckung):

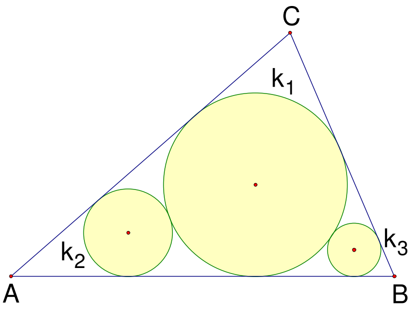


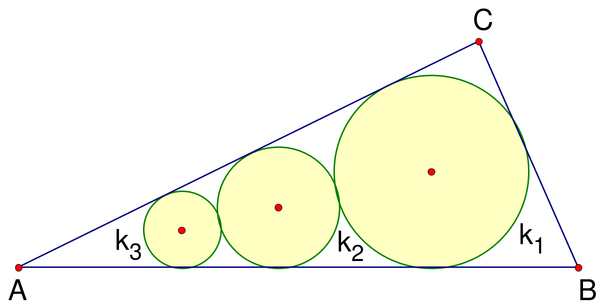
Zieht man letzteres nur lang genug, sinkt die Bedeckung unter 1 %.

Wer nun aber glaubt, damit sei es noch nicht genug der Kuriosa, mit denen sich die Mathematiker im Hinblick auf die Maximierung der drei Kreise konfrontiert sahen, wurde zwei Jahre später eines Besseren belehrt. 1967 zeigte Michael Goldberg [6], dass Malfattis „Lösung“ *niemals* korrekt ist – und zwar unabhängig von der Form des gewählten Dreiecks.

Das war ein Paukenschlag! Richard Guy formuliert dies so, dass Malfatti letztendlich sein eigenes Problem missdeutet hat.

Die richtige Lösung nutzt *stets* den Inkreis des Ausgangsdreiecks als einen der drei Kreise, m.a.W., einer der Kreise berührt stets alle drei Seiten des Dreiecks. Eine solche Konfiguration hat damit eine der beiden folgenden Anordnungen:



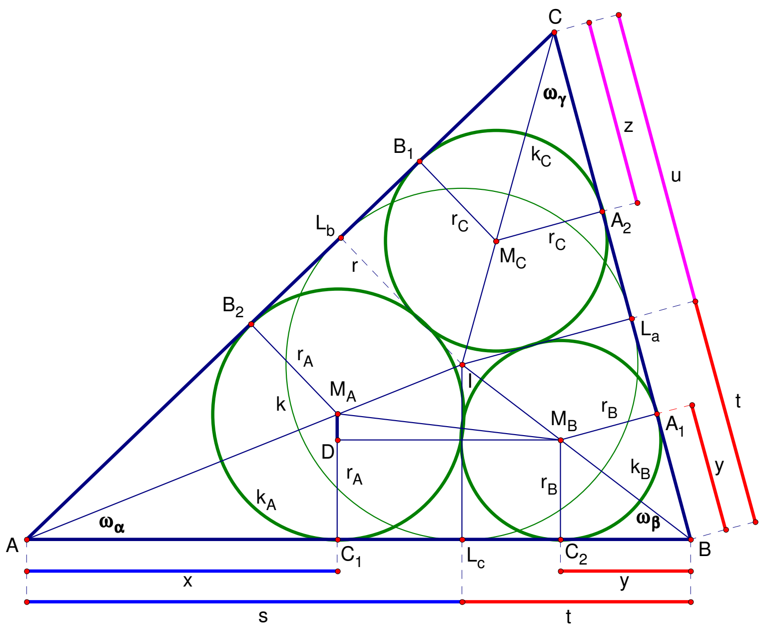


Goldberg nutzte für seine Lösung Berechnungen und Zeichnungen. Einen vollständigen mathematischen Beweis liefern 1992 erstmals Zalgaller und Los' [7]. Nichtsdestotrotz – 2007 (bzw. für Eingeweihte schon 2005) gab es die nächste Überraschung! Guy zeigte [3], dass der *Leuchtturm-Satz* u.a. auch auf die Konstruktion der Malfatti-Kreise angewendet werden kann.

2. Konstruktion der Malfatti-Kreise

Eine elementargeometrische Konstruktion, die auf vorherige algebraische Berechnungen verzichtet, ist relativ anspruchsvoll.

2.1 Konstruktion nach Malfatti (Variante mit vorherigen Berechnungen)



ΔABC, Seiten a, b, c; Winkel α, β, γ;

Winkelhalbierende w_α, w_β, w_γ;

Inkreis $k\,(I, r)$;

Malfatti-Kreise k_A, k_B, k_C mit M_A, M_B, M_C und r_A, r_B, r_C;

Berührpunkte mit den Dreiecksseiten

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras und der Ähnlichkeit von Dreiecken ergeben sich die drei folgenden Gleichungen

$$x + y + \frac{2r\sqrt{xy}}{\sqrt{st}} = s + t, \quad y + z + \frac{2r\sqrt{yz}}{\sqrt{tu}} = t + u \quad , z + x + \frac{2r\sqrt{zx}}{\sqrt{us}} = u + s.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir als Lösungen die Tangentenabschnitte x, y und z an die Malfatti-Kreise

$$x = \frac{1}{2}(s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}),$$

$$y = \frac{1}{2}(s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}) \text{ und}$$

$$z = \frac{1}{2}(s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}).$$

Malfatti teilte im Übrigen die Lösungen nur mit. Der Weg, auf welchem er sie fand, sei sehr kompliziert, wie er angibt[1].

Aus diesen Lösungen lassen sich nun die Malfatti-Kreise konstruieren, da die Quadratwurzeln mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Somit ist die gesamte Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar.

Mit dem Inkreismittelpunkt I und dem Inkreisradius r sind $\overline{AI}$, $\overline{BI}$, $\overline{CI}$ konstruierbar, also auch s, t, u bekannt (durch die Lote von I auf die Seiten). Die geometrische Konstruktion von x, y, z gestaltet sich sogar recht einfach, wenn noch folgende Beziehungen beachtet werden:

$$|\overline{AI}| = \sqrt{r^2 + s^2}, \quad |\overline{BI}| = \sqrt{r^2 + t^2}, \quad |\overline{CI}| = \sqrt{r^2 + u^2}.$$

Die entscheidende Hilfsstrecke $\overline{PQ}$ hat die Länge

$$m = \frac{1}{2}(\sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2} - s - t - u + r).$$

Für diese Strecke gilt nämlich dann

$$x = |\overline{AI}| - m, \qquad y = |\overline{BI}| - m, \qquad z = |\overline{CI}| - m.$$

Konstruktion

Dreieck ΔABC, Winkelhalbierenden, Inkreis $k(I, r)$, damit $\overline{AI}$, $\overline{BI}$, $\overline{CI}$

Berührpunkte von k mit den Dreiecksseiten liefern s, t, u

Konstruktion der Hilfsstrecke $\overline{PQ}$

---

[1] Zur Lösung dieses Gleichungssystems vgl. [8].

$\overline{PQ}$: (1) $|\overline{AI}|$, (2) $+|\overline{BI}|$, (3) $+|\overline{CI}|$, (4) $- s$, (5) $- t$, (6) $- u$, (7) $+ r$, (8) halbieren

Konstruktion von Hilfsstrecken der Längen x, y bzw. z

Abtragen dieser Hilfsstrecken im Dreieck, damit die Berührpunkte A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2

Senkrechten in diesen Berührpunkten schneiden die Winkelhalbierenden in den gesuchten Mittelpunkten M_A, M_B, M_C der Malfatti-Kreise k_A, k_B, k_C mit den Radien r_A, r_B, r_C

Anmerkung

Es gibt acht Lösungen für den Fall, dass die Mittelpunkte M_A, M_B, M_C der Malfatti-Kreise auf den sich im Mittelpunkt I des Inkreises schneidenden Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ liegen.

2.2 Konstruktion nach Steiner-Petersen

(Variante ohne vorherige Berechnungen)

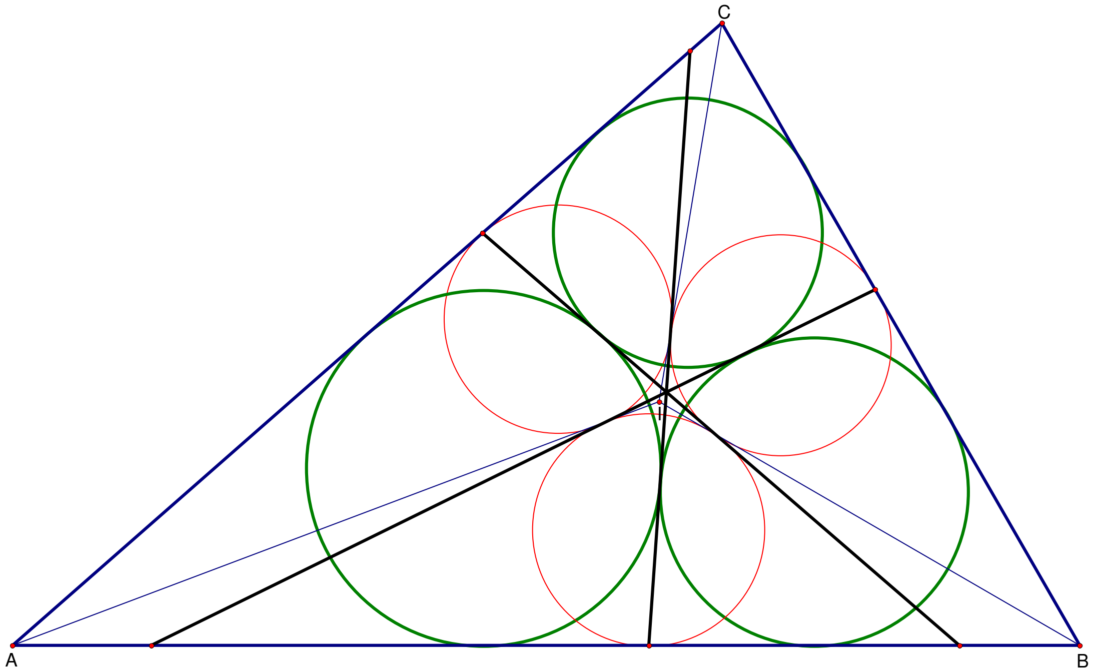
Steiner wies darauf hin, dass seine Konstruktion mit Hilfe der Kreispotenzsätze begründet werden könne, und verallgemeinerte die Aufgabe noch, indem er anstelle der drei Seiten eines Dreiecks drei Kreisbögen voraussetzte. Steiner selbst gab – wie man bis vor kurzem glaubte – keinen Beweis seiner Konstruktion an. Deshalb schrieb man zunächst Schröter (1874) das Verdienst zu, diesen Satz zuerst bewiesen zu haben [9]. Eine einfachere Ableitung – ohne den Begriff der *Inversion* – geht auf Petersen (1879) zurück [10]. Ihm gelang eine elementargeometrische Lösung, die ich für die Schule zumindest für durchführbar halte. Diese Variante ist im Übrigen wenige Jahre später sogar schon in ein Schulbuch für Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen aufgenommen worden [11].

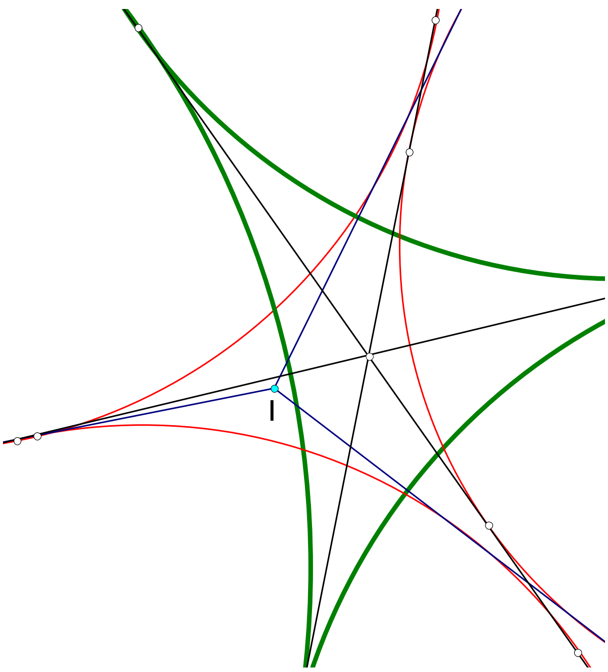
Noch 1962 werden im *Handbuch der Schulmathematik* die Malfatti-Kreise behandelt [12]. Allerdings wird hier der Begriff der *Inversion* eingesetzt, der im Rahmenplan nicht vorkommt. Danach verlieren sich die Spuren Malfattis in der Schulmathematik.

Die entscheidende Stelle in der ganzen Konstruktion beruht auf einem Satz, den Steiner 1826 fand:

> Jede der gemeinsamen Tangenten der Malfatti-Kreise berührt zugleich zwei der drei Inkreise der drei Teildreiecke ΔBCI, ΔCAI, ΔABI, wobei I der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ΔABC ist.

Zur Veranschaulichung zeigen wir hier diesen Zwischenschritt.





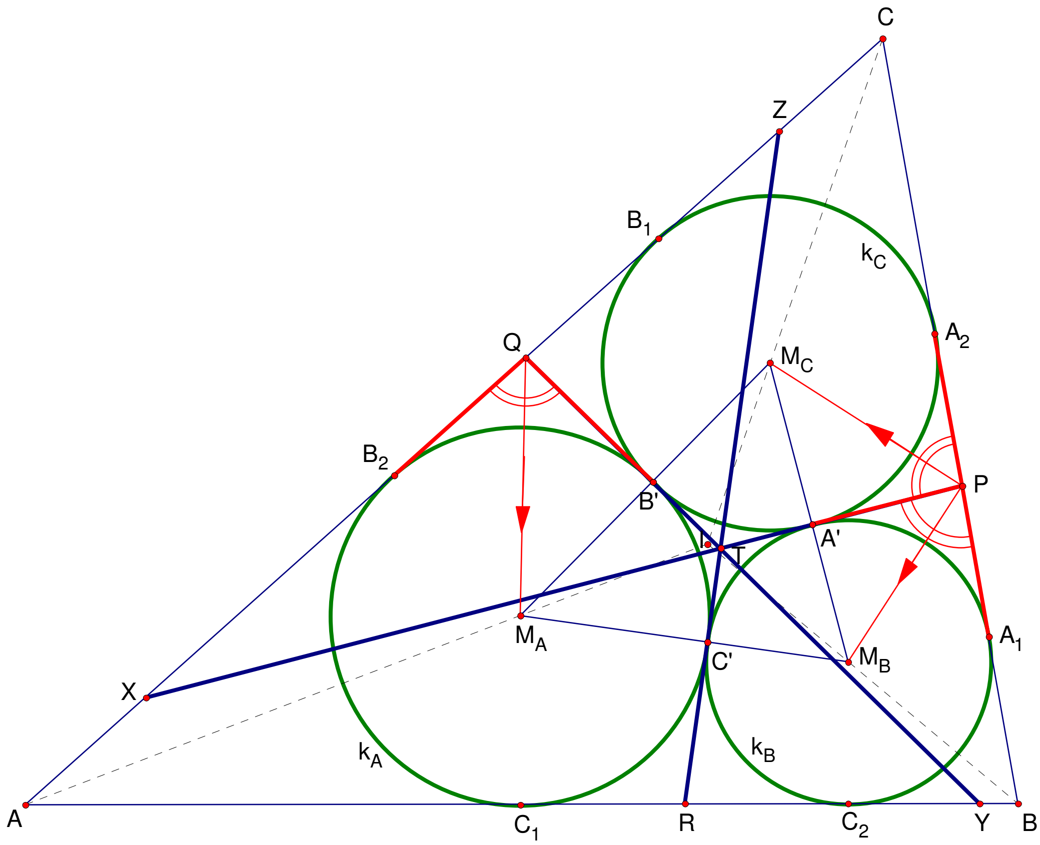
Die Inkreise berühren sich (im allgemeinen Fall) nicht; sie werden aber eben doch auch von den Tangenten der Malfatti-Kreise berührt, allerdings in unterschiedlichen Punkten.

Inkreise: dünn,

Malfatti-Kreise: fett

Vorüberlegungen (Analysis)

a) Die Mittelpunkte M_A, M_B, M_C der Malfatti-Kreise k_A, k_B, k_C mit den Radien r_A, r_B, r_C müssen auf den Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ der drei Innenwinkel α, β, γ liegen.



b) Um die Malfatti-Kreise konstruieren zu können, benötigen wir den Mittelpunkt I des Inkreises k (als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden).

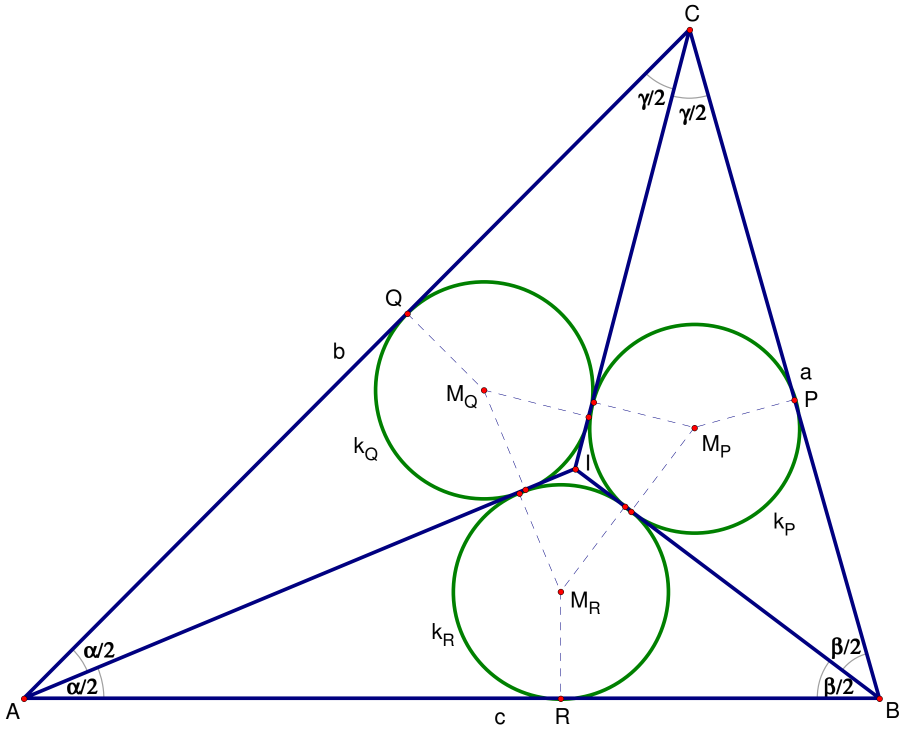
c) Die Eigenschaft, dass sich die drei Malfatti-Kreise paarweise (in den Punkten A', B', C') berühren, erfordert zwischen je zwei dieser Kreise eine gemeinsame Tangente.

Könnte man diese Tangenten konstruieren (etwa PX und QY), so erhielte man die Mittelpunkte der gesuchten Berührkreise durch die Konstruktion von weiteren Winkelhalbierenden:

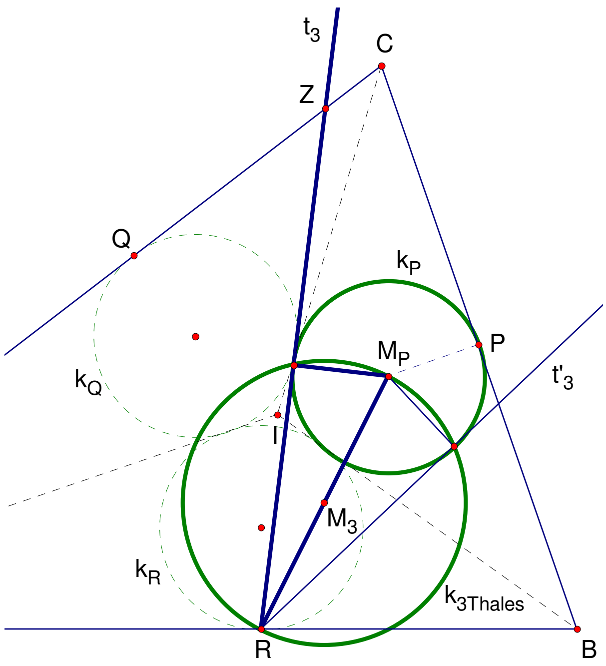
– Winkelhalbierende des Winkels $\angle AQY$ schneidet w_α im Punkt M_A,
– Winkelhalbierende des Winkels $\angle BPX$ schneidet w_β im Punkt M_B,
– Winkelhalbierende des Winkels $\angle CPX$ schneidet w_γ im Punkt M_C.

d) Erstaunlicherweise erhält man die Tangentenpunkte P, Q, R als Berührpunkte von drei Hilfskreisen mit den Dreiecksseiten. Diese Hilfskreise k_P, k_Q, k_R sind gerade die Inkreise der drei Teildreiecke ΔBCI, ΔCAI, ΔABI, die durch die Konstruktion der Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ entstehen.

e) Die gesuchten Geraden
PX, QY, RZ (bzw. $\overline{PX}$, $\overline{QY}$, $\overline{RZ}$) sind nun gerade die Tangenten von den Punkten P, Q, R an die Hilfskreise k_P, k_Q, k_R.



Tangente t_3 von R an den Hilfskreise k_P:



Der Thaleskreis $k_{3\text{Thales}}$ über $\overline{RM_P}$ (mit dem Mittelpunkt M_3) liefert zwei Berührpunkte mit dem Kreis k_P (M_P, $|\overline{M_P P}|$).

Die Tangente t_3 schneidet die Seite $\overline{AC}$ im Punkt Z.

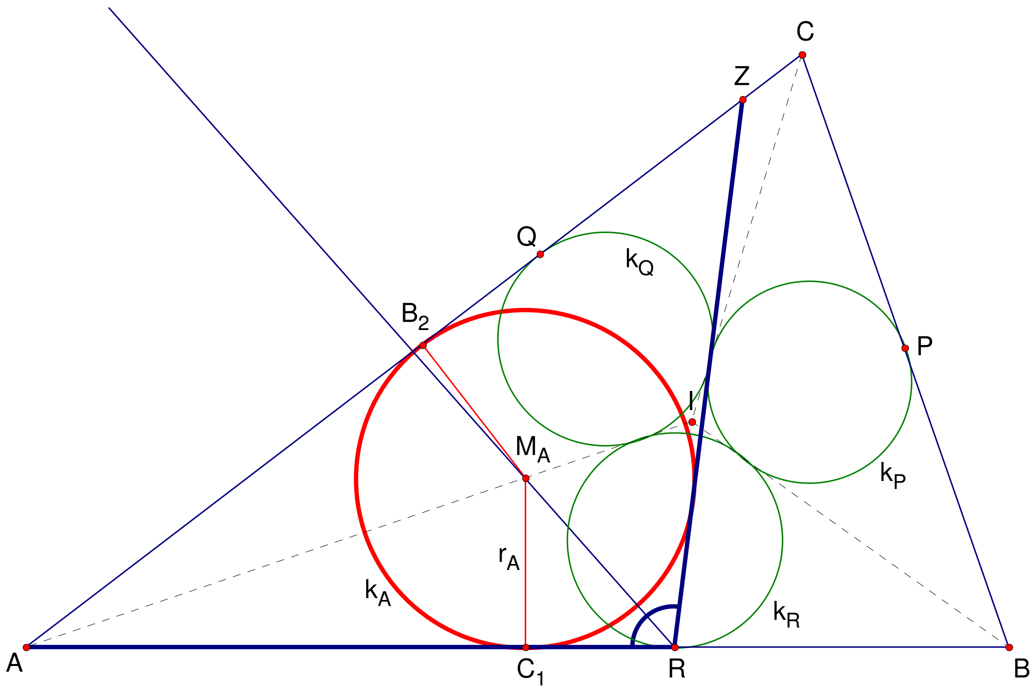
(Die zweite Tangente t'_3 von R an den Hilfskreise k_P benötigen wir nicht.)

Analog werden dann die Punkte X und Y konstruiert.

f) Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ARZ$ schneidet die Winkelhalbierende $\overline{AI}$ des Winkels $\angle BAC$ im Punkt M_A, dem gesuchten Mittelpunkt unseres ersten Malfatti-Kreises k_A.

Das Lot von M_A auf die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ liefert den gewünschten Radius $r_A = |\overline{M_A B_2}| = |\overline{M_A C_1}|$.

Die beiden weiteren Malfatti-Kreise erhalten wir analog.



Die *Konstruktion* (samt Konstrutionsbeschreibung) kann jetzt erfolgen:

– Dreieck ΔABC, w_α, w_β, w_γ, Inkreis k mit Inkreismittelpunkt I

– Inkreise k_P, k_Q, k_R der drei Teildreiecke ΔBCI, ΔCAI, ΔABI

– Tangentenpunkte P, Q, R als Berührpunkte

– Tangenten von den Punkten P, Q, R an diese Inkreise (Thaleskreise)

– Konstruktion der Winkelhalbierenden der Winkel, die aus den Dreiecksseiten und $\overline{PX}$, $\overline{QY}$ bzw. $\overline{RZ}$ bestehen

– Schnittpunkte dieser (neuen) Winkelhalbierenden mit w_α, w_β, w_γ sind die Mittelpunkte M_A, M_B, M_C der Malfatti-Kreise k_A, k_B, k_C

– Konstruktion der gesuchten Malfatti-Kreise k_A, k_B, k_C (Radien r_A, r_B, r_C als Lote von den Mittelpunkten M_A, M_B, M_C auf die Dreiecksseiten)

Den *Beweis*, dass die so konstruierten Kreise die genannten Bedingungen auch erfüllen, lasse ich hier ebenso aus wie die *Determination*.

(Für die *Determination* ist zu beachten:
Die Punkte X, Y, Z treten zweimal auf. In Abhängigkeit von der Lage der Punkte A, B, C liegen sie wechselweise auf einer von zwei Dreiecksseiten.)

3. Die Malfatti-Kreise in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft

Ich habe das Malfatti-Problem in zwei Arbeitsgemeinschaften (Klassenstufen 10 und 11) im WS 2007/08 behandelt:

– Zirkel 10a: 14 Schüler (kein Mädchen dabei),

– Zirkel 11a: 15 Schüler, 6 Schülerinnen.

Mangelndes Vorwissen kann ich schlecht anderen anlasten; ich leite diese Zirkel im Rahmen der Mathematischen Schülergesellschaft „Leonhard Euler“ (MSG [2]) jeweils seit der Klassenstufe 7.

Lehrer, die ich gefragt habe, kennen das Malfatti-Problem gar nicht – weder den Namen Malfatti noch das Problem. Allerdings gab es bereits 1875/1910 ein Schulbuch [11], das dieses Problem behandelt hat. Deutschsprachige Zeitschriften zur Mathematikdidaktik sparen das Thema nahezu völlig aus; ganz anders in den USA. Lediglich die Schülerzeitschrift *alpha* titelte 1989 einen Beitrag mit „Eine interessante geometrische Aufgabe“ [13]. 1994 widmete sich die Schülerzeitschrift *Kvant* dem Thema [14]. 2002 und 2003 behandelte die Zeitschrift *Monoid* das Problem [15].

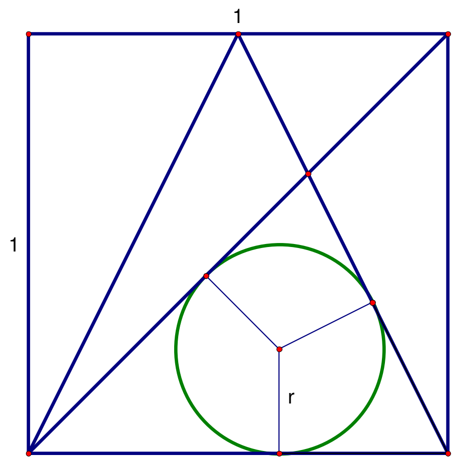
Im Netz findet man einige Seiten zum Thema. Unbedingt empfehlen kann ich die Seite von Arne Madincea[3].

Zu den Malfatti-Kreisen

Eine Konstruktion der Malfatti-Kreise ist nicht trivial – das haben wir gesehen. Mein ursprünglicher Versuch, ohne vorherige algebraische Betrachtungen auszukommen, ist kläglich gescheitert. Obwohl ich eine Reihe von Sätzen aus der Elementargeometrie wiederholt hatte, fanden die Schüler keinen Zugang.

Daraufhin habe ich einen neuen Anlauf versucht, indem ich Aufgaben zur „Japanischen Tempelgeometrie“ gestellt habe. Hier ein Beispiel aus dem Jahre 1877:

Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 und der Mittelpunkt einer Seite, der mit zwei Eckpunkten verbunden ist. Konstruiere und berechne den Radius r des Kreises (s. Figur).



Obwohl einige Schüler bei Additions- und Subtraktionstheoremen der Winkelfunktionen durchaus Nachholbedarf hatten, konnten Aufgaben dieses Typs gemeistert werden.

Das half aber letztlich wenig, sodass ich eine von mir geführte Konstruktion behandelt habe. Das schloss von mir vorgegeben Bezeichnungen ein.

---

[2] Die Homepage der MSG finden Sie unter https://www.mathematik.hu-berlin.de.

[3] http://www.madincea.homepage.t-online.de . Die Seite http://www.lutzgehlen.de/ ist zur Zeit leider nicht aufrufbar.

Zur Konstruktion nach Malfatti – Variante mit vorherigen Berechnungen

Diese Konstruktion habe ich erst nach der Steiner-Petersen-Konstruktion behandelt. Mit der Konstruktion selbst gab es keine besonderen Schwierigkeiten.

Die Herleitung der drei Gleichungen zur Berechnung der Tangentenabschnitte lässt sich mühelos erarbeiten, da Ähnlichkeit von Dreiecken und der Satz des Pythagoras zur Verfügung stehen.

$$|\overline{M_A M_B}| = r_A + r_B \,. \tag{1}$$

$$|\overline{DM_A}| = r_A - r_B \tag{2}$$

$$|\overline{DM_B}| = |\overline{C_1C_2}| = c - x - y = 2\sqrt{r_A r_B} \tag{3}$$

$$|\overline{A_1A_2}| = a - y - z = 2\sqrt{r_B r_C} \tag{4}$$

$$|\overline{B_1B_2}| = b - z - x = 2\sqrt{r_C r_A} \tag{5}$$

$$\Delta AC_1M_A \sim \Delta AL_cI \,,\ \Delta BC_2M_B \sim \Delta BL_cI \,,\ \Delta CB_1M_C \sim \Delta CL_bI$$

$$r_A = \frac{rx}{s},\ r_B = \frac{ry}{t},\ r_C = \frac{rz}{u} \qquad (6),\ (7),\ (8)$$

$$c = |\overline{AB}| = |\overline{AC_1}| + |\overline{C_1C_2}| + |\overline{C_2B}| = x + 2\sqrt{r_A r_B} + y = u + x$$

$$x + \frac{2r\sqrt{xy}}{\sqrt{st}} + y = s + t = c \tag{9}$$

Analog folgt

$$y + \frac{2r\sqrt{yz}}{\sqrt{tu}} + z = t + u = a, \quad z + \frac{2r\sqrt{zx}}{\sqrt{us}} + x = u + s = b \qquad (10),\ (11)$$

Ganz anders stellt sich die Situation dar, wenn es um die Lösung des Gleichungssystems geht:

$$x + y + \frac{2r\sqrt{xy}}{\sqrt{st}} = s + t, \quad y + z + \frac{2r\sqrt{yz}}{\sqrt{tu}} = t + u, \quad z + x + \frac{2r\sqrt{zx}}{\sqrt{us}} = u + s.$$

Hier geeignete Substitutionen zu finden, erfordert viel, sehr viel Erfahrung.

Ohne gezielte Hilfen werden hier Schüler nicht zum Ziel kommen.

Die Lösungen

$$x = \frac{1}{2}(s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}\,),$$

$$y = \frac{1}{2}\ (s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}\ ) \text{ und}$$

$$z = \frac{1}{2}\ (s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}\ ).$$

sollten deshalb ohne Beweis mitgeteilt werden.

Meine besten Schüler waren an dieser Stelle sehr irritiert, weil selbst der Einsatz eines Computer-Algebrasystems sie hier nicht weiterbrachte.

Aus diesen Lösungen lassen sich dann die Malfatti-Kreise problemlos konstruieren (siehe vorn), wenn noch ein Hinweis auf die Hilfsstrecke $\overline{PQ}$ mit

$$m = \frac{1}{2}(\ \sqrt{r^2 + s^2}\ + \sqrt{r^2 + t^2}\ + \sqrt{r^2 + u^2} - s - t - u + r),$$

gegeben wird.

Zur Konstruktion nach Steiner-Petersen – Variante ohne vorherige Berechnungen

Die Konstruktion von Jakob Steiner (bzw. Julius Petersen) setzt zwar im Wesentlichen nur solche Elemente wie
– Kreis und Tangente (Satz des Thales – bzw. seine Umkehrung),
– Winkelhalbierende (Berührkreis an die Schenkel eines Winkels),
– Inkreis, Berührradien, Peripheriewinkel, Sehnen-Tangenten-Winkel,
– Sehnenviereck

voraus, dennoch ist diese Konstruktion insgesamt sehr schwierig.

Dabei sind die genannten Konstruktionselemente (neben den Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal) und die meisten elementargeometrischen Sätze, die benötigt werden, für sich genommen durchaus Schulstoff. Aber allein die Analysis, also die Vorüberlegungen, wie eine solche Konstruktion eventuell durchzuführen sei, sprengt doch den Rahmen einer Schulstunde. Wir haben gemeinsam – also mit meiner Unterstützung – für diese Vorüberlegungen etwa 50 Minuten gebraucht. Aber der Aufwand lohnt sich!

Meinen alten Leitspruch bei Konstruktionen („Hilfslinien, Hilfslinien, Hilfslinien!“) musste ich allerdings mehrfach in Erinnerung rufen.

Madincea schlägt in diesem Zusammenhang vor: „Weil es mit der Übersichtlichkeit einer Konstruktion jedoch oft hapert, umgekehrt natürlich das Bedürfnis einer ästhetisch ansprechenden Figur bei den Kindern groß ist, habe ich die Gesamtaufgabe modularisiert und lasse ein Teilergebnis kopieren, damit das Endergebnis schön aussieht.“

Die Konstruktion selbst wurde dann von allen mit Hilfe eines DGS[4] durchgeführt. Einschließlich der Makros, die die Schüler für die Konstruktion benutzen wollten (z. B. ein Makro für die Konstruktion des Inkreises eines Dreiecks), lag die Konstruktion in etwa 45 Minuten vor.

Als Höhepunkt wurde anschließend die gesamte Konstruktion ihrerseits als Makro gesichert. Die Freude, diese „riesige Konstruktion" per Makro einsetzen und demonstrieren zu können, war allen ins Gesicht geschrieben.

Zwei Schüler wollten dann auch noch solche Fälle diskutieren, in denen per Zugmodus eine oder mehrere Eigenschaften der Malfatti-Kreise verloren gehen. Hierzu haben wir diskutiert, dass die Punkte X, Y, Z zweimal auftreten. In Abhängigkeit vom gegebenen Dreieck ΔABC liegen sie wechselweise auf einer von zwei möglichen Dreiecksseiten – diese dann als Geraden betrachtet.

Fazit und Schlussfolgerungen

Anstelle der Konstruktion – ob mit oder ohne vorherige Berechnungen – können auch ausgewählte Elemente dieser Konstruktionen behandelt werden. Aber auch geeignete Vorbetrachtungen zum Thema können hilfreich sein – so man eine Konstruktion der Malfatti-Kreise anstrebt.

• Das ursprüngliche Malfatti-Problem kann für ein gleichseitiges Dreieck diskutiert werden.

a) Malfatti-Kreisen konstruieren und die jeweiligen Flächeninhalte berechnen; die Konstruktion der Malfatti-Kreise setzt – selbst für diesen Spezialfall – anwendungsbereites Wissen voraus,

b) Inkreis und zwei weitere Kreise konstruieren und die jeweiligen Flächeninhalte berechnen.

Am Ende werden die Ergebnisse von Lob und Richmond bestätigt.

• Das ursprüngliche Malfatti-Problem kann für ein beliebiges Dreieck diskutiert werden, indem die Lösung von Zalgaller und Los' vorgegeben wird.

Da in jedem Fall der Inkreis des gegebenen Dreiecks benötigt wird, lassen sich die beiden anderen Kreise relativ einfach konstruieren.

Die Eigenschaft, maximalen Flächeninhalt zu haben, wird an Kreisen für die von Zalgaller und Los' gegebene Fallunterscheidung

$$\sin\frac{\alpha}{2} \geq \tan\frac{\beta}{4} \qquad \text{und} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} < \tan\frac{\beta}{4}$$

[4] The Geometer's Sketchpad

überprüft. Im Endergebnis wird bestätigt, dass diese Fallunterscheidung die beiden verschiedenen Platzierungen für den dritten Kreis k_3 rechtfertigt.

Wenn die Lösung, d. h. welcher Art die drei Kreise sind, vorgegeben wird, bleibt immer noch genügend zu tun; insbesondere werden manche Schüler stocken, wenn sie die Kreise k_2 und k_3 konstruieren sollen. Hier hilft der Hinweis, dass diese beiden Kreise ihrerseits Inkreise gleichschenkliger Dreiecke sind.

- Für das (zweite) Malfatti-Problem, also die Konstruktion der Malfatti-Kreise in einem beliebigen Dreieck, sollten Vorbetrachtungen angestellt oder vorbereitende Aufgaben gestellt werden.

Die Art und Weise dieser Einstimmung auf das eigentliche Problem hängt stark davon ab, welche geometrischen Vorkenntnisse vorhanden sind, welche Kompetenzen in Bezug auf das Konstruieren vorliegen.

Darüber hinaus bietet es sich an, das Thema zu variieren.

Für das (zweite) Malfatti-Problem kann z. B. die Forderung aufgehoben werden, dass die drei Malfatti-Kreise im Innern des Dreiecks liegen müssen (Peter Yff, 1997).

In jedem Fall zeigt sich wieder einmal, wie ertragreich solche geometrischen Fragestellungen – wie das Malfatti-Problem – sein können.

Das betrifft sowohl die fachlichen Komponenten als auch die didaktischen – mit diesem Thema werden Schüler *und* Lehrer (heraus-)gefordert.

Aber derartige anspruchsvolle Themen, die motivieren und zudem ein „Durchhalten“, einen „langen Atem“ erfordern, sind rar!

Die Reihe der Tätigkeiten, die sich zum Teil zwanglos ergeben, ist beeindruckend:

Entdecken, Vermuten, Experimentieren, Präzisieren, Verallgemeinern, Spezifizieren, Begründen, Widerlegen, Zeichnen, Konstruieren, Rechnen (Termumformen), Verbalisieren – das wollen wir doch erreichen.

Darüber hinaus genießen wir die Ästhetik der konstruierten Malfatti-Kreise!

Dass Schüler diese Konstruktion letztlich nicht vollständig begründen können, das ist ein Preis, den ich zu zahlen bereit bin!

Literatur

[1] Malfatti, Gianfrancesco: Memoria sopra un problema stereotomico. Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze, No.10,1(1803), 235-244.

[2] Steiner, Jakob: Einige geometrische Sätze. J. reine angew. Math. 1(1826), 38-52; Einige geometrische Betrachtungen. J. reine angew. Math. 1(1826), 161-184; Fortsetzung der geometrischen Betrachtungen, ibid. 252-288; (auch *Gesammelte Werke*. Band I. Berlin, Reimer, 1881, 17-76)

[3] Guy, Richard K.: The Lighthouse Theorem, Morley & Malfatti – A budget of paradoxes. Amer. Math. Monthly 114(2007)2, 97-141

[4] Lob, H. and H. W. Richmond: On the solutions of Malfatti's problem for a triangle. Proc. London Math. Soc. 2, No. 30, 1930, 287-301.

[5] Eves, Howard: A Survey of Geometry, rev. ed. Boston, MA: Allyn & Bacon, 1965, p. 245.

[6] Goldberg, Michael: On the Original Malfatti Problem. Math. Mag. Nr. 40, 1967, 241-247.

[7] Залгаллер, В. А.; Лось, Г. А.: Решение проблема Мальфатти. Украинский геометрический сборник 35, 1992, 14–33 [Zalgaller, V.A.; Los', G.A.: The solution of Malfatti's problem. Journal of Mathematical Sciences. 72 (1994)4, 3163–3177.

[8] Loeber, Kurt: Beiträge zur Lösung und Geschichte des Malfattischen Problems und seiner Erweiterungen. Halle, Dissertation, 1914.

[9] Schröter, H.: Die Steinersche Auflösung der Malfattischen Aufgabe. Crelles Journal 77 (1874), 230-244.

[10] Petersen, Julius: Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben. Kopenhagen, 1879.

[11] Hoffmann, Gustav: Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben mit Übungsbeispielen für Schüler höherer Lehranstalten insbesondere der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. Leipzig, Reisland, 1910.

[12] Mönnig, Paul: Die Berühraufgabe von Malfatti. In: Wolff, G. (Hrsg.): Handbuch der Schulmathematik 5. Hannover, Schroedel, 1962, S. 43-47.

[13] Grosche, G.: (nach einer Idee von S. Tunn) in alpha 23(1989)3, 52-54.

[14] Беленький, В.; Заславский, А.: О задаче Мальфатти. Квант 4 (1994), 38–42 [Belen'ky, V.; Zaslavsky, A.: On the Malfatti problem.]

[15] Monoid 22(2002)69,28 (Spezialfall des gleichseitigen Dreiecks);

Fuchs, Hartwig: Vier berühmte Konstruktionsaufgaben – eine Seite geometrischer Knobeleien. Monoid 23(2003)74, 7.

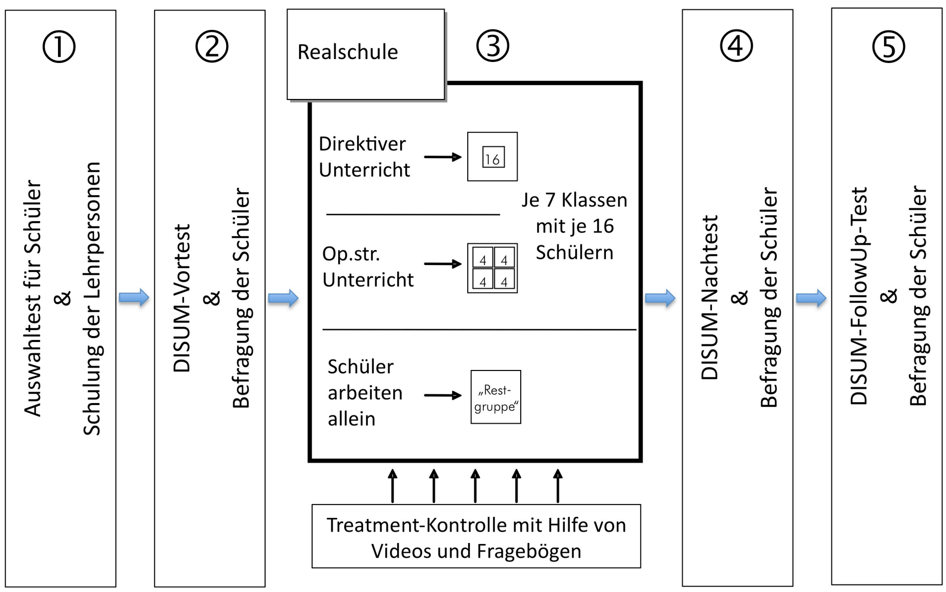
Dominik LEISS / Werner BLUM / Rudolf MESSNER / Marcel MÜLLER / Stanislaw SCHUKAJLOW / Reinhard PEKRUN

Modellieren lehren und lernen in der Realschule

1. Untersuchungsdesign

Im Verlauf des letzten Jahrzehnts wurde nicht nur in der Mathematikdidaktik, sondern auch in der Bildungspolitik und öffentlichen Debatte über Schule und Unterricht verstärkt die Forderung nach Anwendungsorientierung im Unterricht erhoben; kurz gesagt: Modellieren ist en vogue!
Dessen ungeachtet ist jedoch noch weitgehend unklar, wie man Lernenden z.B. den Satz des Pythagoras nicht nur in innermathematischen Zusammenhängen nahebringen kann, sondern wie man es als Lehrperson zudem ermöglicht, dass dieses Wissen auf außermathematische Bereiche transferiert und angewandt werden kann.

An dieses Forschungsdesiderat versucht das DFG-Projekt DISUM[1] anzuknüpfen. Dessen Hauptziel ist es herauszufinden, wie sich verschiedene Formen des unterrichtlichen Lehrerhandelns auf die Modellierungskompetenz von Schülern auswirken. Hierzu wurden im Rahmen einer Unterrichtseinheit zum Modellieren die beiden Lehrformen *direktiver* und *operativ-strategischer Unterricht* anhand einer Interventionsstudie in 2 x 7 Realschulklassen (je 16 leistungshomogene Schüler) des 9. Jahrgangs vergleichend untersucht. Dabei lag das folgende Design zugrunde:



---

[1] *"Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten Unterricht am Beispiel Mathematik"; Leiter:* W. Blum, R. Messner (beide Uni Kassel) und R. Pekrun (Uni München).

① Auswahltest und Schulung der Lehrpersonen

Jedem Schüler wurde anhand eines raschskalierten Tests, bestehend aus normierten Bildungsstandardsaufgaben als Ankeritems, ein mathematischer Fähigkeitswert zugewiesen. Anhand dessen konnten 14 leistungshomogene 16er-Klassen zusammengestellt werden. Die restlichen Schüler einer Klasse („Restgruppe“) bildeten jeweils eine eigene Untersuchungsgruppe, auf die in diesem Beitrag nicht näher eingegangen werden soll.

②DISUM-Vortest

Im Zentrum des Unterrichts und folglich auch der Tests stand die mathematische Modellierungskompetenz der Schüler, bezogen auf die Themengebiete *Satz des Pythagoras* und *Lineare Funktionen*. Dementsprechend bestand der raschskalierte Test aus Aufgaben, die an diesen Inhalten ausgerichtet waren, konzentriert auf die Kompetenzen *Modellieren* und *technisches Arbeiten.* Darunter waren auch Aufgaben enthalten, zu deren Lösung nur Teilaspekte des Modellierungsprozesses wie z.B. das Konstruieren eines Realmodells benötigt werden (siehe Blum/Leiß 2005).

③ Unterrichtseinheit

In der 10stündigen Unterrichtseinheit, die unmittelbar auf die Einheit zum Satz des Pythagoras folgte, wurden in allen 14 Klassen dieselben Modellierungsaufgaben in derselben chronologischen Abfolge behandelt. Dem lag die Intention zugrunde, dass sich der Unterricht lediglich in der Lehrform unterscheiden sollte. Dabei sollte in 7 Klassen *direktiver* und in 7 Klassen *operativ-strategischer Unterricht* durchgeführt werden.

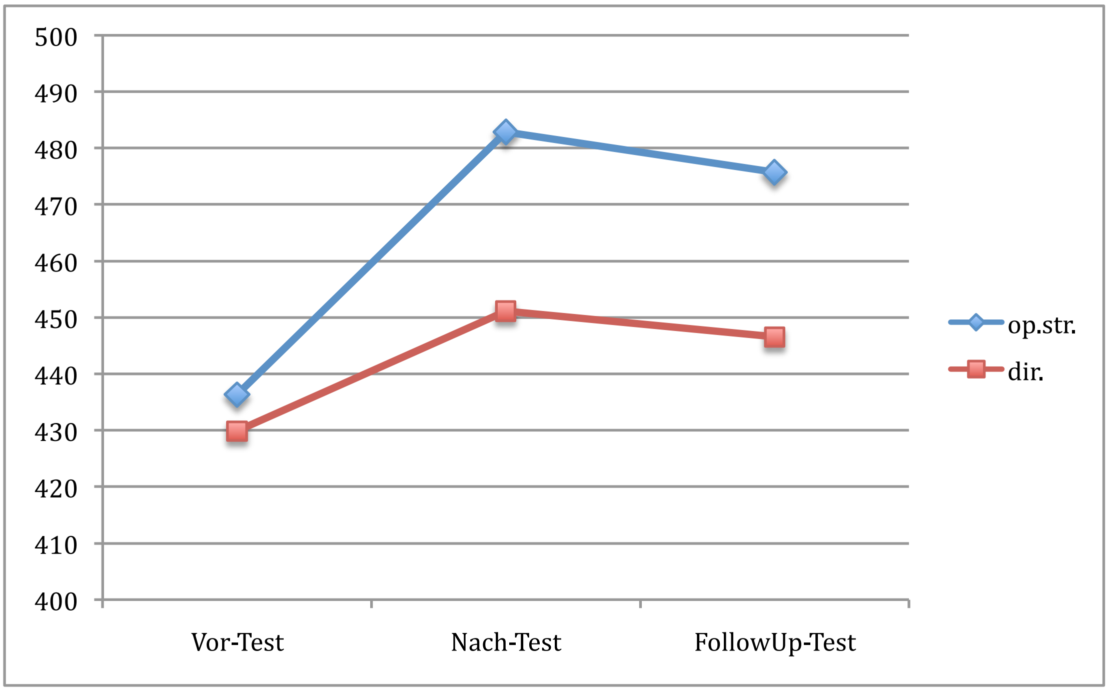
> Beim *direktiven Unterricht* handelt es sich um eine Lehrform, bei der die klar strukturierte und zielgerichtete Erarbeitung von gemeinsamen Bearbeitungsmustern für Modellierungsaufgaben sowie die nachvollziehende Einzelarbeit der Lernenden im Vordergrund stehen. Die Lehrperson orientiert sich bei ihren Hilfen am durchschnittlichen Leistungsniveau der Klasse.
>
> Im *operativ-strategischen Unterricht* steht das selbständige individuelle und ko-konstruktive Lernen in Gruppen im Mittelpunkt. Dabei orientieren sich die Lehrhandlungen am individuellen Schüler und versuchen, nur minimale Hilfestellungen zu geben, so dass die Lernenden herausgefordert werden, sich ihre eigenen Bearbeitungsmuster aufzubauen.

④ Nach- und ⑤Follow-Up-Erhebung

Sowohl bei der Nacherhebung unmittelbar im Anschluss an die DISUM-Unterrichtseinheit als auch bei der Follow-Up-Erhebung drei Monate später sind dieselben bzw. parallelisierte Instrumente wie in der Vorerhebung verwendet worden (zum Testdesign siehe Leiß & Blum 2007).

2. Quantitative Ergebnisse der Leistungstests[2]

Bei der folgenden Abbildung sind die durchschnittlichen Schülerleistungen der beiden Gruppen „operativ-strategischer Unterricht“ und „direktiver Unterricht“ zu den drei Testzeitpunkten dargestellt:[3]



Die Grafik verdeutlicht, dass es in beiden Gruppen zwischen Vor- und Nachtest mit einer Fünftel bzw. knapp einer halben Standardabweichung zu signifikanten Leistungszuwächsen gekommen ist. Die drei Monate später festzustellenden geringen Leistungsabfälle sind hingegen nicht signifikant, so dass von einer gewissen Nachhaltigkeit der in der Einheit vermittelten Inhalte ausgegangen werden kann. Neben diesem zunächst für beide Lehrformen positiven Ergebnis zeigt sich allerdings auch, dass die operativ-strategische Gruppe wesentlich höhere Zuwächse erzielt als die Schüler, die im Rahmen der direktiven Lehrform unterrichtet wurden.

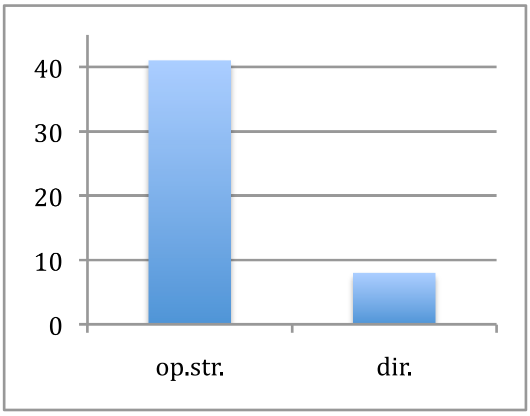
Bei der Analyse dieser Daten gilt es zu berücksichtigen, dass die eingesetzten Tests so konstruiert sind, dass primär zwei mathematische Kompetenzen sowie zwei Themengebiete in unterschiedlichem Ausmaß bei der Lösung der Testaufgaben eine Rolle spielen. Dies führt dazu, dass die oben beschriebenen eindimensional skalierten Ergebnisse inhaltlich nur schwer

---

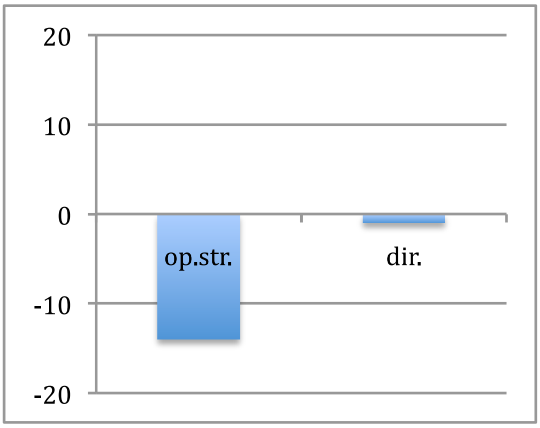
2 Die Ergebnisse sind auf einen Mittelwert von 500 und eine Standardabweichung von 100 transformiert.

3 Bei dieser Darstellung wurden die Vortestwerte der beiden Untersuchungsgruppen dadurch angepasst, dass bei der direktiven Gruppe die 7 leistungsschwächsten und bei der operativ-strategischen Gruppe die 7 leistungsstärksten Schüler nicht berücksichtig wurden. Zu erklären sind diese Unterschiede im Vortest dadurch, dass der Auswahltest weniger stark auf Modellierungskompetenz abzielt als der Vortest und somit die ursprüngliche Homogenisierung der Leistungsstärke teilweise aufgehoben wurde.

interpretiert werden können, da zunächst unklar bleibt, auf welche mathematischen Bereiche sich die Lernfortschritte beziehen. Folglich wurden – basierend auf stoffdidaktischen Analysen der Aufgaben – zwei mehrdimensionale Skalierungen vorgenommen, eine bezüglich der beiden Kompetenzen Modellieren und Technisches Arbeiten und eine bezüglich der beiden Themengebiete Pythagoras und Lineare Funktionen. Die folgenden Grafiken zeigen jeweils einen Aspekt dieser beiden Skalierungen.



Unterschiede zwischen Vor- und Nachtest
Dimension: Modellieren



Unterschiede zwischen Vor- und Nachtest
Dimension: Lineare Funktionen

Zeigen sich bezüglich des „technischen Arbeitens“ ungefähr gleich große Zuwächse in beiden Lehrformen, so verdeutlicht die linke Grafik, dass die operativ-strategisch unterrichteten Schüler deutlich größere Lernfortschritte im Bereich des Modellierens erzielen. Kritisch anzumerken ist jedoch, dass die Modellierungsfortschritte – betrachtet man die konkreten Testleistungen nach dieser zehnstündigen Modellierungseinheit – normativ betrachtet in beiden Gruppen ernüchternd sind. Dies unterstreicht, wie schwierig die Vermittlung der viel geforderten Modellierungskompetenz offenbar ist. Zudem deutet die rechte Grafik darauf hin, dass die Kompetenz Modellieren lediglich am je aktuellen Unterrichtsinhalt erworben werden kann, denn bezüglich dem unterrichtlich weiter zurückliegenden Inhalt *Lineare Funktionen* konnten in beiden Lehrformen keine (Modellierungs-)Fortschritte festgestellt werden.

Über die Gesamtauswertung der Studien sowie über weitere Analysen der Test- und Fragebogendaten wird an anderer Stelle detailliert berichtet.

Literatur:

Blum, W. & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der “Tanken”-Aufgabe. In: mathematik lehren, Heft 128, 18-21.

Leiss, D. & Blum, W. (2007). Modellierungskompetenz – Vermitteln, Messen & Erklären. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim: Franzbecker, 312-315.

Brigitte LENEKE, Magdeburg

Offener Mathematikunterricht durch Aufgabenvariation

Das Projekt zur Gestaltung von Aufgabenvariation hat sich der Idee verschrieben, darüber nachzudenken, **wie** Schülerinnen und Schüler an der Erzeugung von Aufgaben beteiligt werden können, möglichst breite Erfahrungen im Unterricht dazu zu sammeln und auszuwerten sowie die gewonnenen Erkenntnisse und vor allem die Materialien dem „Unterrichtsalltag" zur Verfügung zu stellen.

1. Unterrichtsgestaltung zur Aufgabenvariation

Bewährt hat sich bisher folgender Unterrichtsverlauf (vgl. [1]):

a) Es wird eine Aufgabe (**Initialaufgabe**) vorgegeben und gelöst.
b) Die Schülerinnen und Schüler werden dann aufgefordert, diese Initialaufgabe zu variieren:
   b_1) ohne bewusste Anwendung heuristischer Strategien;
   In dieser Anfangsphase ist es günstig, durch so genannte „Leitfragen" den Schülerinnen und Schülern das Anliegen und das Prinzip der Aufgabenvariation nahe zu bringen (vgl. [2]).
   Beispiel: Was passiert, wenn die Eingangsdaten in ihrer Größe verdoppelt (verdreifacht, halbiert,...)werden?
   b_2) indem jeder in der Aufgabe vorkommende Begriff nacheinander sinnvoll abgeändert wird (What-if-not-strategy);
   b_3) bewusster Einsatz von **Basisstrategien**: geringfügig Ändern, Analogisieren, Verallgemeinern, Spezialisieren, Lücken beheben, Zerlegen, Kombinieren, Umzentrieren, Umkehren, Kontext ändern, Iterieren, anders Bewerten.
c) Die einzelnen Vorschläge werden gesammelt.
d) Die gesammelten Vorschläge werden dann geordnet, gruppiert, vorbewertet und ausgewählt.
e) Die Lösung und Bearbeitung der ausgewählten Aufgabenvarianten erfolgt in unterschiedlichen Sozialformen und Arbeitsaufteilungen.
f) Die Lösungen werden in geeigneter Form und Darstellung vorgestellt.

Insbesondere ging es darum, in den einzelnen Klassen zu beobachten, **wer** die Variationen zu den *„Initialaufgaben"* komponiert, **wie** dafür hilfreiche **Strategien** entwickelt und angewendet werden können, **wer** die gesammelten Anstöße und Fragen strukturiert, bewertet und selektiert und **wie** der weitere Lösungsprozess der „Aufgabenvariationen" gestaltet werden kann. Durch Aufgabenvariation können Probleme „geöffnet" werden, was gleichzeitig Möglichkeiten offeriert, zu einem „offenen Unterricht" zu kommen.

2. Inhaltliche und didaktisch-methodische Aspekte

Durch die Methode der Aufgabenvariation können die Schülerinnen und Schüler mehr aus der bloßen Reaktion auf fremd gestellte Aufgaben herauskommen und erleben, wie ihre eigenen Fragen und Aufgaben den weiteren Unterrichtsprozess gestalten. Das Suchen nach neuen Fragen zu einem (gestellten) Problem zwingt zum inhaltlichen Durchdenken des Problems sowohl vom Sachkontext als auch von der mathematischen Seite her. Fächerübergreifende Fragestellungen, Vernetzungen auf unterschiedlichen Ebenen und zwischen verschiedenen (mathematischen) Bereichen ergeben sich wie von selbst und erfordern das entsprechende Wissen und Können von den Schülerinnen und Schülern. Das Aufgabenvariieren eröffnet allen Schülerinnen und Schülern Möglichkeiten, ihre Stärken und Schwächen zu erkennen und realistisch mit ihnen umzugehen.

3. Unterrichtsbeispiel

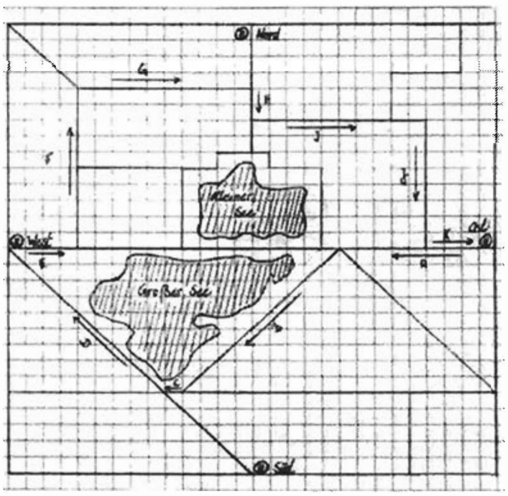
a) Initialaufgabe (Klasse 7)

Die Karte zeigt den Grundriss einer 196 ha großen, quadratischen Parkanlage.

a) Berechne die dazugehörige Seitenlänge des Parks und bestimme anschließend den Maßstab der Zeichnung.

b) Ein Jogger läuft die durch die Buchstaben A bis K gekennzeichnete Strecke.

- Wie viele Kilometer legt er dabei zurück?
- Schafft er die gesamte Strecke in 20 ½ Minuten, wenn er mit einer konstanten Geschwindigkeit von 16,3 km/h läuft?
- Wie viel Zeit benötigt er genau? (vgl. auch [4])



Die Lösungsidee wurde in der 1. Stunde im Unterrichtsgespräch erarbeitet. Von der Lehrerin erging der Hinweis neue Aufgaben zu finden, indem einfach jeder Begriff oder jede Größe der Initialaufgabe verändert wird. Die dann aufgestellten Aufgaben wurden in der 2. Stunde nach inhaltlichen Gesichtspunkten zusammengefasst in fünf Gruppen bearbeitet.

b) Variationsrichtungen

1. Andere Flächengröße vorgeben.
2. Statt Vorgabe des Flächeninhalts, den Umfang der Parkanlage geben.
3. Den Maßstab vorgeben und damit dann die Seitenlänge, den Flächeninhalt und den Umfang des Parks bestimmen.
4. Finden und berechen anderer Laufrouten mit gleichen Anfangs- und Endpunkt.
5. kürzeste/ längste Wege zwischen 2 Standorten bestimmen
6. andere Laufgeschwindigkeiten wählen
7. näherungsweises Bestimmen der Seeflächen
8. Flächenbestimmung zum Beispiel zwecks Begrünung
9. Anlegen von bestimmten Dingen (Spielplatz, Ruheebenen)
10. Kostenberechnung für anzulegende Dinge

Bei der Verfolgung der einzelnen Variationsrichtungen mit dem Ziel des Findens konkreter Aufgabenvariationsrichtungen können die Schülerinnen und Schüler einzelne oder auch mehrere der o. g. Basisstrategien anwenden.
Jede Gruppe hatte eine komplexere Aufgabenvariante oder zwei kleinere Aufgaben und eine Hausaufgabe zu bearbeiten, deren Lösungen dann in der Präsentation vorgestellt wurden. Schülerinnen und Schüler, die ähnliche inhaltliche Aspekte in ihren Aufgabenvarianten hatten, arbeiteten in einer Gruppe.
Als Beispiel seien hier die Aufgaben der Gruppe 2 vorgestellt:

1. *Bestimmt näherungsweise die Fläche und den Umfang der beiden gegebenen Seen. Findet dabei möglichst verschiedene Verfahren (mindestens 2) und schätzt deren Ergebnisse bezüglich ihrer Genauigkeit ab.*
   Wie viel Prozent beträgt die Fläche des kleinen Sees im Vergleich zum großen See?

Hausaufgabe:
Besucht gemeinsam einen Park in eurer Nähe. Versucht diesen möglichst genau zu skizzieren!
Geht, wenn möglich, einmal um den Park herum und gebt mit Hilfe eurer gezählten Schritte den Umfang des Parks an. (Sollte dies nicht gehen, bestimmt eine Seitenlänge des Park auf die gleiche Art und Weise.) Vergesst nicht die Angabe: 1 Schritt entspricht ...... m.

2. *Bestimmt rechnerisch die Größen aller Teilflächen, die sich zwischen den Wegen befinden. (Bitte keine gerundeten Werte)*
   Berechnet die wahre Länge der Strecke B.

4. Fazit und Ausblick – Literatur

Insgesamt wurde deutlich, dass sowohl die einzelnen Schülerinnen und Schüler als auch dann die jeweiligen Gruppen in sehr viel größerem Maße als bisher den Unterrichtsverlauf gestalteten. Die Schülerinnen und Schüler erlebten, wie sich durch ihre eigenen Fragen und Aufgaben der Unterricht öffnete. Sie erlebten aber auch, dass die Anforderungen an ihr anwendbares Wissen und Können komplexer waren als bei anderen Aufgaben. Dies umfasst sowohl konkrete mathematische inhaltliche und prozessbezogene Kompetenzen (vor allem auch in ihrer Vernetzung untereinander) als auch soziale Kompetenzen. Bei der Reflexion ihrer Tätigkeit urteilten die Schülerinnen und Schüler sehr objektiv über vorhandene Stärken und Schwächen – auch eine wichtige Zielstellung der Aufgabenvariation.

|1| Schupp, Hans : Thema mit Variationen – Aufgabenvariation im Mathematikunterricht
Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2002

|2| Der Mathematikunterricht - Variationen über ein mathematisches Thema; Jahrgang 49, Heft 5/2003

|3| Leneke, B.: Aufgabenvariation im Mathematikunterricht (Teile 2 und 3)
Technical Report Nr.3, 2003 und Technical Report Nr. 2, 2007
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik
www.math.uni-magdeburg.de/reports/2003/leneke-0303.pdf
www.math.uni-magdeburg.de/reports/2007/TechReportLeneke2007.pdf

|4| Leneke, B.; Stankewitz, M.: Rund um einen Park – Aufgabenvariation in Klasse 7; PM, Heft 5/46. Jg. Oktober 2004

Lea LEPMANN, Tiit LEPMANN, Tartu

Beliefs der Mathematiklehrer über die Entwicklung der kognitiven Kompetenzen anhand der Aufgaben

Einführung

Mathematiklehrpläne vieler Länder präsentieren in den Leistungslisten neben den reinen Fachkompetenzen auch Standards der allgemeinen kognitiven Kompetenzen. Diese Kompetenzen heißen unterschiedlich: *allgemeine mathematische Kompetenzen* (Deutschland), *prozess competencies* (USA) oder *common competencies* (Kanada). Auch der Kompetenzeninhalt ist einigermaßen unterschiedlich.

Der Hauptteil der Kompetenzen der Schulmathematik wird anhand der Aufgaben gebildet. In der Auswahl der im Lernprozess benutzbaren Aufgaben widerspiegeln sich die Kenntnisse des Lehrers davon, die Entwicklung welcher Kompetenzen er für wichtig hält und welche Möglichkeiten versteckt in der Aufgabe er dafür sieht. Die Forschungen haben gezeigt, dass unterschiedliche Lehrer auch unterschiedliche Kompetenzen für wichtig halten (Neubrand, 2006; Ticha, 2006). Es ist festgestellt, dass man bei den Mathematiklehrern 4 unterschiedliche Aspekte über die Mathematik und deren Lehren/Lernen sich unterscheiden lassen: den Formalismus-Aspekt, Anwendungs-Aspekt, Prozess-Aspekt und Schema-Aspekt (Grigutsch, Raatz, Törner, 1997).

Untersuchungsdesign

Ausgehend vom oben Stehenden haben wir im Rahmen der Grant ETF 6453 erforscht wie hoch die Lehrer unterschiedliche kognitive Kompetenzen bildende Aufgaben im Unterricht einschätzen. In der ersten Etappe der Forschung (mit 30 Lehrern) haben wir versucht herauszufinden, welche Merkmale die Lehrer bei der Beschreibung der Aufgabe benutzen. Wir haben uns der Repertory Grid-Technik bedient (Bruder, Lengnink, Prediger, 2003). Dafür haben wir zu einem Thema (Lineargleichungen) 2 kognitiv gegensätzliche Aufgaben gewählt. Die Lehrer sollten zu jeder von beiden Aufgaben möglichst viele solche Merkmale aufschreiben, die eine Aufgabe innehat und die bei der anderen Aufgabe fehlen.

Es hat sich herausgestellt, dass bei der Beschreibung der Aufgabe die Lehrer sich in der Regel nur der rein mathematischen Merkmale bedienten. Allgemeine kognitive Merkmale wurden sehr selten genannt und dabei fehlte den Lehrern die passende Terminologie.

In der zweiten Etappe der Forschung haben wir eine mögliche Liste der kognitiven Kompetenzen aufgestellt und haben erforscht wie die entsprechenden Kompetenzen tragenden Aufgaben nach der Meinung der Lehrer

im System der Aufgaben des Lehrbuchs vertreten sein sollten. Im Fragebogen haben wir 56 Behauptungen zu den möglichen Rollen der Aufgabe vorgegeben. Wir haben die Lehrer gefragt wie groß könnte der Anteil die entsprechende Kompetenz bildender Aufgaben bei einem größeren einheitlichen Thema auf der III. Schulstufe (7. – 9. Klasse) sein. Die Lehrer haben ihre Meinung auf der 5-Punkte Skala geäußert: 1 – einzelne Aufgaben auf das Thema, …, 5 – die meisten Aufgaben auf das Thema.
Diese Resultate ermöglichen uns auch indirekt das einzuschätzen für wie wichtig die Lehrer die Aufgaben einer oder anderer Art im Unterricht dieser Alterstufe halten[1].

Einteilung der Aufgaben nach den gestaltet werdenden Kompetenzen

Wir haben 56 betrachtete mögliche Kompetenzen unserer Forschung in 7 Gruppen eingeteilt:

Kompetenzen, die anhand der Aufgabe gestaltet werden	Wesentlichkeit der Aufgabe (Skala 1 – 5)
Lösen der Aufgabe setzt nur Routinetätigkeit voraus	4,0
Aufgabe ist hauptsächlich auf die Fachaneignung orientiert	3,8
Aufgabe bietet Möglichkeiten zur Bildung der Verbindungen	3,3
Aufgabe bietet Möglichkeiten zur Kommunikation	2,5
Aufgabe bietet Möglichkeiten zur Entwicklung des logischen Denkens	2,4
Aufgabe bietet Anwendungsmöglichkeiten und ist Interesse erweckend	2,3
Aufgabe unterstützt Entwicklung des kreativen Denkens	2,1

Wie es aus der Tabelle hervorgeht, halten die Lehrer für wesentlich gerade die routinemäßigen, hauptsächlich auf die Fachaneignung gerichteten Aufgaben. Dagegen am wenigsten erwarten die Lehrer im Lehrbuch die Entwicklung des kreativen Denkens unterstützende Aufgaben. Schwach ist die Unterstützung der Lehrer ebenso für die Aufgaben, die logisches Denken und Kommunikationsfertigkeit der Schüler entwickeln. Wenn man Alterseigenarten der Schüler dieser Schulstufe und die Situation in den Schulen berücksichtigt (zu große Klassen, überfüllte Lehrpläne), scheint das Forschungsresultat ganz normal zu sein. Anderseits ist es klar, dass das Hauptziel des Unterrichts in der Schule nicht nur das Beibringen der Fachkenntnisse sein darf.

[1] Solche indirekte Frage nach der Wichtigkeit hat uns ermöglicht, die Antworten der Lehrer mehr zu differenzieren.

Einteilung der Lehrer auf Grund der Auffassungen

Für die Einteilung der Lehrer (170 Lehrer) nach dem Verhalten zu den Kompetenzen haben wir Clusteranalysis benutzt. Es hat sich herausgestellt, dass 3 Lehrergruppen sich klar voneinander unterscheiden lassen. Der I. Lehrertyp ist **Fachlehrer** (50% der Befragten), der II. Typ ist **der Lehrer, der Schüler entwickelt** (32%) und der III. Typ ist **der Lehrer, der Interesse erweckt** (18%).

Das wesentliche gemeinsame Kennzeichen dieser Lehrergruppen ist, dass die Lehrer aller Gruppen hoch die Aufgaben schätzen, die auf die Aneignung der mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten gerichtet sind. Leider begnügt sich der **Fachlehrertyp** nur mit hoher Einschätzung derartiger Kompetenzen. Der Fachlehrertyp sieht in den Aufgaben nur das Mittel fürs Lehren der mathematischen Kenntnisse. Der **entwickelnde Lehrer** sieht in der Aufgabe zusätzlich auch das logische und kreative Denken des Schülers entwickelnde Werte. Die Lehrer dieser Gruppe schätzen hoch folgende Behauptungen: die Aufgabe fordert selbständiges Denken, selbständige Schlussfolgerungen, Synthese des Vorhandenen, Begründung, Verallgemeinerungen, die Klassifizierung der Begriffe und Gegenstände, Unterscheiden der Wichtigen Information, die Wahl der passenden Methode, inhaltliches Interpretieren des gelernten Modells, die Verbindung des neuen mit dem Vorhandenen, führt zu den Überlegungen, entwickelt die Kreativität, zeigt die innermathematischen Verbindungen. Der **Lehrertyp, der Interesse erweckt**, wird dadurch charakterisiert, dass er hoch die Aufgaben bewertet, die das Interesse der Schüler für die Mathematik erwecken. Als Lehrstoff sieht er vor allem die Aufgaben mit dem lebenswichtigen aktuellen Inhalt. Es ist interessant hinzuzufügen, dass die Lehrer dieser Gruppe im Vergleich zu den anderen etwas niedriger die Bedeutung dieser Aufgaben einschätzen, die sowohl direkt auf das Lernen der Mathematik als auch auf die Entwicklung des Denkens gerichtet sind.

Lehrertyp und Hintergrundmerkmale

Beliefs der Lehrer sind wesentlich dadurch beeinflusst in welcher Umgebung er arbeitet (Furinghetti, 1996). Um den Hintergrund unterschiedlicher Lehrer zu charakterisieren, haben wir sie um folgende Angaben gebeten: Geschlecht, Alter, Alter der Schüler, das Verhalten zu den staatlichen Niveauarbeiten und zu den Abschlussprüfungen, Vorbereitung der Schüler zur Außenkontrolle und zum Wettbewerb in der Mathematik. Die Analyse der Hintergrundmerkmale hat gezeigt, dass Beliefs der Lehrer und Gehören zu einem oder anderem Typ durch das Niveau der Schüler und durch die Schulstufe, wo der Lehrer hauptsächlich unterrichtet, bedingt sind. Je begabter seine Schüler sind, desto wahrscheinlicher ist die Tatsache, dass der

Lehrer zu dem entwickelnden Lehrertyp gehört. Je weniger begabte Schüler er unterrichtet, desto wahrscheinlicher gehört er zum Fachlehrertyp. Andererseits hat es sich herausgestellt, dass der Lehrer, der nur auf der Gymnasialstufe (Klassen von X. bis XII.) unterrichtet, wahrscheinlich Fachlehrertyp ist: 77% der Lehrer gehört gerade zu dieser Lehrergruppe. Dagegen unter den Hauptschulelehrern ist der Anteil der Fachlehrer bedeutend kleiner. Die Tatsache, dass die auf der Gymnasialstufe unterrichtenden Lehrer stärker als die anderen Lehrer auf das Fachlehren orientiert sind, ist dadurch bedingt, dass im Estnischen Gymnasium eine enorm große Rolle die Staatsprüfung spielt. Leider ist aber das Lernen für die Prüfung im größten Teil gerade Fachlernen und keine entwickelnde Tätigkeit.

Zusammenfassung

Zum Schluss möchten wir noch hinzufügen, dass Alles vorgehend Beschriebene sich sehr gut mit den Leistungen Estlands in den internationalen Testen TIMSS 2003 und PISA 2006 verbindet. Obwohl Estland in beiden Forschungen sehr gute mittlere Leistungen hatte (TIMSS – die 8. Stelle in der Reihenfolge der Staaten, PISA – die 14. Stelle), muss man gestehen, dass diese Leistungen dank dem sehr hohen Niveau der Schüler beim Lösen der Aufgaben möglich waren, die nur reproduktive Kompetenzen das heißt niedrigere kognitive Kompetenzen fordern. Dagegen haben unsere Schüler noch große Probleme beim Lösen der Aufgaben des höheren Niveaus, bei der produktiven Benutzung der Mathematik, bei Begründungen und Überlegungen. Die von den Lehrern angebotene Reihenfolge der kognitiven Kompetenzen nach ihrer Wesentlichkeit entspricht exakt den Leistungen unserer Schüler in dem internationalen Testen.

Literatur

Bruder, R., Lengnink, K., Prediger, S. (2003) Ein Instrumentarium zur Erfassung subjektiver Theorien über Mathematikaufgaben. Preprint Nr. 2265. Darmstadt.

Grigutsch, S., Raatz, U., Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik*, 19(1), 3 – 45.

Furinghetti, F. A theoretical framework for teachers´ conceptions. (1996) *Current State of Research on Mathematical Beliefs III. Proceedings of the MAVI-3 Workshop*. Helsinki, 19 – 25.

Neubrand, M. (2006) Professionalität von Mathematiklehrerinnen und –lehrern: Konzeptualisierungen und Ergebnisse aus der COACTIV- und der PISA-Studie. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Vorträge auf der 40 Tagung für Didaktik der Mathematik in Osnabrück*. Franzbecker, 5 – 12.

Ticha, M. (2006) Sind die Reflexionen des Unterrichts zuträglich? *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Vorträge auf der 40 Tagung für Didaktik der Mathematik in Osnabrück.* Franzbecker, 521 – 524.

Nikola LEUFER, Dortmund

Vom „richtigen“ Umgang mit Alltagserfahrung bei realitätsbezogenen Aufgaben

Die Anbindung von Inhalten und Tätigkeiten im Mathematikunterricht an außerschulische Kontexte und Praktiken wird aus unterschiedlichen Gründen immer zentraler: Einerseits verlangt die Forderung nach einer anwendungsorientierten Schulausbildung das Füllen fachinhaltlicher Konzepte und Strukturen mit lebensweltlichen Inhalten und die Reflexion über den Zusammenhang von Mathematik und Welt. Andrerseits werden Realitätsbezüge als Möglichkeit zur Sinnstiftung und Motivation diskutiert. Die Hoffnung ist, dass Kinder und Jugendliche Mathematik leichter und lieber lernen, wenn sie weniger abstrakt und mehr kontextbezogen erlebt und erworben werden kann.

Geht man weiter davon aus, dass Diskrepanzen zwischen der Lebenswelt der Lernenden und dem Schulkontext hinderlich für Lern- bzw. Schulerfolg sein könnten, dann müssten Realitätsbezüge im Mathematikunterricht einen Beitrag zum Abbau solcher Diskrepanzen leisten und Schulleistungen fördern und angleichen können. Diese Überlegungen sollen im Folgenden aus soziologischer Perspektive problematisiert werden.

Aufgaben mit Alltagsbezug

Als „Aufgaben mit Alltagsbezug“ lassen sich Aufgaben bezeichnen, die entweder inhaltlich (z. B. realitätsbezogene Text- bzw. Sachaufgaben) oder in den geforderten Tätigkeiten bewusst an außerschulische Lebenswelten angebunden sind (z. B. Schätzaufgaben). Trotz dieser Einbettung muss bei solchen Aufgaben jedoch ein dezidiert mathematischer Blick (oder „mathematical gaze“, vgl. Dowling 1996, S. 403) eingenommen werden, mit dem die beschrieben „reale“ Situation betrachtet und bewertet wird. Aufgaben mit Alltagsbezug stellen somit zwei nicht-mathematische Anforderungen an die Lernenden:

- Erstens: das Ernstnehmen des außermathematischen Kontextes und der erfolgreiche Anschluss des Problems an außermathematische Erfahrungen und Kenntnisse, die hierfür natürlich (meist schulextern) erworben und verfügbar sein müssen.
- Zweitens: die Kenntnis darüber, dass es sich um einen rekontextualisierten Text handelt, d.h. dass etwas (nämlich die „Realität“, auf die sich

die Aufgabe bezieht) aus ihrem ursprünglichen Zusammenhang (dem wirklichen „Alltag“) gelöst und in einen neuen Kontext („Schule“) gestellt wird. Insofern müssen „realistische Überlegungen“, die in den im Aufgabentext geschilderten Situationen angestellt werden könnten, einer bestimmten mathematischen Sichtweise untergeordnet werden.

Kurz: Der außermathematische/außerschulische Kontext der Aufgabenstellung muss ernst genommen werden, aber nicht *zu* ernst. Das „richtige Erkennen“ und Handhaben von Kontexten wird zu einer zusätzlichen Anforderung beim Bearbeiten alltagsbezogener Aufgaben.

Das „Lesen von Kontexten“ nach Basil Bernstein

Der Bildungssoziologe Basil Bernstein hat über mehrere Jahrzehnte ein Modell pädagogischer Prozesse entwickelt (z. B. Bernstein 1996), mit dem insbesondere das erfolgreiche „Lesen“ von Grenzen *zwischen* Kontexten als Fähigkeit zum Erkennen der Bedeutung eines Kontextes bzw. eines Diskurses („Recognition Rules“) beschrieben und verortet werden kann. Die „Realisation Rules“ dagegen sind notwendig, um sich *innerhalb* des Kontextes, d. h. in der entsprechenden Situation, angemessen zu verhalten bzw. auszudrücken.

Bernstein definiert für die Aufgaben von Recognition und Realisation Rules zwei Konzepte: „Classification“ (Klassifizierung) überträgt die Kontextgrenzen und „Framing“ (Rahmung) überträgt die Sozialisierung bzw. die Strukturen der Kommunikation in die interaktionale Praxis. Die Kontrolle über die Kontextgrenzen und die Kontrolle über den Modus der Sozialisierung können außerhalb einer Interaktion, z. B. in institutionellen Bedingungen, liegen.

Recognition und Realisation Rules sind also auf der Ebene des Individuums, z. B. des Lernenden, eine Art Repräsentation der Konzepte Klassifizierung und Rahmung. Bei starker Abgrenzung der Kontexte spricht man von „starker“ Klassifizierung, sonst von „schwacher“. Bei starker Kontrolle über die Elemente der Kommunikation (z. B. über die Reihenfolge der Lernschritte, die Auswahl der Inhalte und die Kriterien der Evaluation) spricht Bernstein von „starker“ Rahmung.

Kinder, die die Grenzen zwischen Schul- und Alltagswissen nicht souverän oder anders als erwartet ziehen wollen oder können, werden bei alltagsbezogenen Aufgaben „schlecht evaluiert“, wenn sie (aus der Sicht der Aufgabensteller) *unangemessen* auf ihr Alltagswissen zugreifen. Mit der Terminologie Bernsteins lassen sich zwei Arten von *Unangemessenheit* im Zugriff auf Alltagswissen charakterisieren:

1. Nehmen Schüler den „Hinweis“, sich auf ihr Alltagswissen zu beziehen, zu *ernst*, dann schließen sie womöglich von der geschwächten Rahmung einer Aufgabe (in Bezug auf die Auswahl der Inhalte) auch auf schwache Klassifizierung und wählen eine nicht-offizielle Recognition Rule aus. Sie produzieren Texte (Antworten) in denen sie sich nach den Regeln der häuslichen Praxis und nicht des offiziellen Schulkontextes äußern.
2. Greifen Schüler *nicht* auf ihr Alltagswissen zu, so gehen sie (möglicherweise aufgrund von Vorerfahrungen) von einer starken Klassifizierung und einer starken Rahmung des Mathematikunterrichtes aus. Sie ignorieren dann die Schwächung der Rahmung oder werden beim Bearbeiten der Aufgabe irritiert bzw. behindert.

Soziales Milieu und alltagsbezogene Aufgaben

Interessiert man sich für den (angemessenen) Umgang mit Grenzen zwischen Mathematik und Alltag dann wird schnell deutlich, dass eine entsprechende Untersuchung sich auch mit *kulturellen Aspekten* auseinandersetzen muss. „Benachteiligung“ erfährt ein Kind bzw. eine bestimmte soziale Gruppe schließlich dann, wenn die „kulturellen Anforderungen“ der Schule nicht dem „kulturellen Kapital“ des Kindes bzw. der Gruppe entsprechen (was keine Defizittheorie begründen muss, sondern zunächst nur ein Problem „relativer Benachteiligung“ darstellt). Von (relativer) „Benachteiligung“ durch alltagsbezogenen Aufgaben würde man dann sprechen, wenn die Unangemessenheit im Umgang mit Alltagserfahrung bei Kindern aus bestimmten Milieus häufiger auftritt.

Die Überbetonung der häuslichen Praxis

Untersuchungen (z. B. Verschaffel 1994, Holland 1981; Cooper & Dunne 2000) zeigen tatsächlich, dass Recognition Rules über unterschiedliche soziale Milieus nicht gleich verteilt sind. Diesen Studien zufolge beziehen sich mehr Kinder der „unteren“ Klassen „unangemessen“ auf ihr Alltagswissen (im Sinne einer Überbetonung) als Kinder der Mittelklasse. Arbeiterkinder tendieren demnach dazu, nicht-spezielle, d.h. lokale, nicht-offizielle Recognition Rules zu wählen – was darin resultiert, dass auch nicht-spezielle Kontexte gewählt werden, z. B. Kontexte der Peer-Groups oder der Familie. Die untersuchten Arbeiterkinder scheitern insgesamt häufiger daran, die „stark“ klassifizierte Natur der Schulmathematik in Anbetracht des suggerierten Realismus der Aufgabenstellung zu erkennen.

Die Überbetonung der offiziellen Praxis

Während man das Feld der Überbetonung der häuslichen Praxis in der internationalen Diskussion durchaus als intensiv bearbeitet bezeichnen kann, ist das Phänomen der Überbetonung des „offiziellen“ Kontextes noch wenig analytisch erforscht. Problematisierungen verbleiben hier meist auf der Ebene der Feststellung fehlender Alltagsbezüge. Insbesondere fehlt der Blick auf Zusammenhänge, die über die Schule hinaus verweisen.

Um eigenständige Erwägungen (z. B. das Validieren in realitätsbezogenen Aufgaben, Schätzen, Überschlagen) erfolgreich durchzuführen, ist neben kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten auch eine Souveränität im Umgang mit „Alltagswissen“ und mit eigenen Erfahrungen nötig: Die Schüler müssen einerseits die entsprechenden außerschulischen Kenntnisse erworben und verfügbar haben. Andrerseits müssen sie das Selbstbewusstsein besitzen, ihren lebensweltlichen Kontext im Mathematikunterricht neben den offiziell erlernten Algorithmen als legitime Quelle für Plausibilitätserwägungen und Lösungsansätze einzusetzen.

Wie eine eigene Studie in einer zehnten Klasse Gymnasium mit einem Migrantenanteil von 100% gezeigt hat, gibt es Schüler, die sehr deutlich zwischen lebensweltlichen Praktiken und solchen (offiziellen), die sie im Schulkontext für angemessen und erfolgreich halten, unterscheiden – und ihre lebensweltlichen Erfahrungen und Verhaltensmuster dem Schulkontext unterordnen. Wenn sich diese Strategie in der Schulsozialisation der Schülerinnen und Schüler als besonders erfolgreiche Praxis im Umgang mit Alltagserfahrung erwiesen hat, dann könnte eine Schwächung der Rahmung des Mathematikunterrichtes und der Distanz zwischen Schule und Alltagswelt eine tatsächliche Hürde für diese Schüler darstellen. Für die beobachteten „bildungserfolgreichen Migranten“ also – eine soziale Gruppe, die in Bernsteins Modell (noch) nicht erfasst ist – könnten Realitätsbezüge dann entgegen aller Erwartungen zu einer Benachteiligung führen, insbesondere wenn diese Jugendlichen bewusst ihr „belastetes häusliches Milieu“ vor den Schultoren zurückzulassen.

Literatur

Bernstein, B. (1996) Pedagogy, Symbolic Control and Identity: Theory, Research, Critique. London: Taylor & Francis.

Cooper, B.; Dunne, M. (2000). Assessing Children's Mathematical Knowledge: Social Class, Sex and Problem-Solving. Buckingham (Philadelphia): Open University Press.

Dowling, P. (1996). A sociological analysis of school mathematics texts. In: Educational Studies in Mathematics 31, S. 389-415.

Holland, J. (1981). Social class and changes in orientation to meaning. In: Sociology, 15, 1, S. 1-18.

Verschaffel, L.; de Coerte, E.; Lasure, S. (1994). Realistic Considerations in Mathematical Modeling of School Arithmetik Word Problems. In: Learning and Instruction (4). S. 273-294.

Céline Liedmann, TU Dortmund

<u>D</u>eveloping <u>Q</u>uality in <u>M</u>athematics <u>E</u>ducation <u>II</u>

Das Comenius-Netzwerk „Developing Quality in Mathematics Education II“, kurz DQME II, ist das Nachfolgeprojekt des gleichnamigen Projektes DQIME. Dieses, von 2004 bis 2007 durchgeführte, Projekt zielte auf die Qualitätsverbesserung des Mathematikunterrichts, insbesondere durch die Entwicklung von realitätsnahen Aufgaben. Aufgrund der ersten erfolgreichen Entwicklung kulturübergreifender und realitätsnaher Unterrichtsmaterialien mit europäischem Kontext startete im Jahr 2007 das Folgeprojekt DQME II. Es stellt das zweitgrößte von der europäischen Kommission im Jahr 2007 bewilligte und geförderte Projekt dar. Von ursprünglich vier europäischen Ländern wurde es auf folgende elf Länder erweitert: Dänemark, Deutschland, England, Italien, Niederlande, Österreich, Polen, Rumänien, Schweden, Slowakei und Ungarn. Zudem ist DQME II das erste Netzwerk aus dem Bereich „Mathematikunterricht“. Sein wesentliches Merkmal ist die Vernetzung von Theorie und Praxis. Diese Vernetzung wird durch die insgesamt 36 Partnerinstitutionen, die sich aus Universitäten, Lehrerfortbildungsinstitutionen und Schulen zusammensetzen.

Hintergrund und Intention

Die erstrebenswerte Vernetzung zwischen Mathematik und Realität ist keine neue Erkenntnis. PISA (2003) orientierte die Testkonzeption des mathematischen Schwerpunktgebiets ebenfalls unter dem Ansatz einer „realistischen Mathematik“ wie sie auch schon 1977 von Freudenthal aufgestellt wurde (vgl. Freudenthal, 1977). In ähnlicher Form findet sich dieser Bezug in der Grundorientierung an den Winter´schen Grunderfahrungen in vielen Kernlehrplänen in Deutschland wieder.

Die Ergebnisse von TIMSS (2000) und PISA (2003) zeigten insbesondere Defizite der Schüler im Bereich der Bearbeitung von realitätsnahen Aufgaben und des Modellierens auf. Eine Analyse von Schülerfragebögen in TIMSS III ergab, dass über 80% Prozent der befragten Schüler der Meinung sind, „dass die Anwendung von Mathematik auf Alltagsprobleme so gut wie nie oder bestenfalls in einigen Stunden vorkomme“ (Baumert & Köller, 2000, S.279). In TIMSS (2000) wurde zudem das mathematische Weltbild der Schüler ermittelt. Dabei wurde eine „schematisch-algorithmische Ausrichtung“ (Köller, Baumert & Neubrand, 2000, S.267) ohne Realitätsbezug festgestellt. Seitdem sind einige Bestrebungen unternommen worden gegen diese Defizite anzugehen. So führt u.a. Blum (2007) eine Fülle von Modellierungsaufgaben an, denen ein Realitätsbezug zugeordnet werden kann. Leider zeigt sich jedoch, dass das „Modellieren auch für *Lehrer* schwer ist, der Unterricht […] komplexer und weniger vorhersagbar [zu werden scheint]" (Blum, 2007, S. 3). Genau hier setzt DQME II durch seine internationale und praxisorientierte Ausrichtung an. Die Grundintention des Projekts ist es daher „gute" realitätsnahe Aufgaben und Modellierungsaufgaben in den europäischen Mathematikunterricht zu implementieren.

Projektaufbau

Das Projekt gliedert sich in drei aufeinanderfolgende Phasen, die sich teilweise inhaltlich überschneiden:

- Phase 1 (Nov. 2007 bis Okt. 2008.): Entwicklung und Testung der Lernmaterialien und Lehrmethoden; Erfahrungen und Feedback der Lehrer werden auf der Kommunikationsplattform angeboten
- Phase 2 (Okt. 2008 bis Sept. 2009): Testung, Modifikation und Evaluation von neuen Lernmaterialien und Lehrmethoden; Diskussion der Workshopeindrücke; Erfahrungen und Feedback der Lehrer werden auf der Kommunikationsplattform angeboten
- Phase 3(Sept. 2009 bis Sept. 2010): Diskussion über die Eindrücke der Unterrichtspraxis; Überprüfung der neuen Lernmaterialien und Lehrmethoden

Aufgrund dieser Projektgestaltung kristallisierten sich vier Projektgruppen heraus: Die Forschungsgruppe, die Materialentwicklungsgruppe, die Lehrerfortbildnergruppe und die Kooperationsgruppe. Diese Gruppen sind je nach ihren Aufgabenbereichen mit unterschiedlich ausgebildeten Projektpartnern besetzt.

Die Forschungsgruppe setzt sich aus Professoren und wissenschaftlichen Mitarbeitern zusammen, die sich unter anderem mit der Beantwortung folgender Fragen beschäftigt:

- Was ist Modellieren?,
- Was ist eine „gute" Modellierungsaufgabe?
- Wie können Lehrer „gute" Aufgaben erkennen? und
- Welche Lehrmethoden werden zur Bearbeitung von Modellierungsaufgaben benötigt?

Aktuelle Forschungsergebnisse zum theoretischen Hintergrund werden von dieser Gruppe immer wieder in den Prozess integriert.

Professoren, wiss. Mitarbeiter, Lehrer und Lehrerfortbildner beschäftigen sich in der Materialentwicklungsgruppe mit der Entwicklung, Erprobung und Modifizierung von realitätsnahen Aufgaben. Zuerst entwickeln die Projektpartner Aufgaben, die zuerst im eigenen Land eingesetzt und getestet werden. Einen entscheidenden Beitrag leisten hier die Projektlehrer, die ihre Erfahrungen aus dem Unterricht in das Netzwerk mit einbringen und Modifikationen direkt vornehmen können. Im Anschluss an die Modifizierung wird ein neuer Testdurchlauf in einer anderen Schule und damit häufig auch in einem anderen Land gestartet. Aus diesem Grund erfolgt mindestens eine Übersetzung ins Englische. Die DQME-Kommunikationsplattform ermöglicht zudem den schnellen und interaktiven Austausch zwischen allen teilnehmenden Partnern. Auffälligstes Charakteristikum der so entstehenden Aufgaben ist zum einen ihre fächerübergreifende sowie aufgrund der internationalen Zusammenarbeit ihre kulturübergreifend Eigenschaft. In der Lehrerfortbildnergruppe arbeiten überwiegend Lehrerfortbildner und Lehrer, die sich mit der Erarbeitung von Fortbildungsmodulen beschäftigen. Sie treffen eine Auswahl des Projektmaterials, das sie mit entsprechenden Lehrmethoden den Lehrern in den Fortbildungen vorstellen. Das Resultat intensiver Auseinandersetzungen ist ein gemeinsamer Aufgabenpool mit Anregungen zur konkreten Umsetzung, der dennoch eine individuelle Unterrichtsgestaltung jedes einzelnen zulässt.
In der Kooperationsgruppe arbeiten unter anderem Projektpartner, die gleichzeitig in anderen Projekten tätig sind. Sie sichern den Wissensaustausch der Projektinhalte auf europäischer Ebene. Ein solcher Austausch über Umsetzungsmöglichkeiten und noch vorhandene Schwachpunkte in den Aufgaben fördert das gemeinsame Ziel den Mathematikunterricht zu „verbessern“. Eine weitere Aufgabe dieser Gruppe ist die Organisation von Schülerwettbewerben auf nationaler und internationaler Ebene, um zum einen die europäischen Länder näher zu bringen und zum anderen die Projektmaterialien in einem anderen Kontext zu überprüfen. Hier bearbeiten Schüler unterschiedlicher Schulformen und verschiedener Länder die Projektaufgaben. Insgesamt starten die am Projekt beteiligten Schüler mit höchst unterschiedlichen Lernvoraussetzungen, was u. a. auch auf die verschiedenen curricularen und unterrichtlichen Schwerpunkte innerhalb der einzelnen Länder zurückzuführen ist. Vor diesem Hintergrund wird deutlich, wie wichtig und gleichzeitig wie schwer es ist, realitätsnahe Aufgaben zu entwickeln, die diesen heterogenen Anforderungen gerecht werden und denen möglichst viele Schüler motivierend entgegensehen.

5. Ausblick

Das Projektmaterial wird auf vielfältigen Wegen veröffentlicht. Anfangs wird es durch die Überprüfung der Aufgaben in den Partnerschulen herausgegeben. Eine für das DQME II - Projekt eingerichtete Kommunikationsplattform im Internet dient zum Austausch der Materialien und den bei der Bearbeitung der Aufgaben gemachten Erfahrungen. Nach ausführlicher Überprüfung des Projektmaterials wird es auf der Homepage veröffentlicht. Die Homepage-Adresse des neuen Projekts www.dqme2.eu ist noch im Aufbau und kann daher erst in Kürze aufgerufen werden. Zurzeit ist die Homepage-Adresse des alten Projekts mit vielen Materialien unter www.dqime.uni-dortmund.de zugänglich. Auf der Ebene der Fortbildungen sind mindestens eine jährliche Konferenz für Lehrer eines oder mehrer Länder geplant, um immer wieder den Informationsaustausch zu forcieren und alle mit den aktuellen Projektmaterialien vertraut zu machen.

Literatur

Baumert, J., Bos, W. & Lehmann, R. (2000): *TIMSS/III Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn.* (Band 2).

Baumert, J. & Köller, O. (2000): Unterrichtsgestaltung, verständnisvolles Lernen und multiple Zielerreichung im Mathematik- und Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe. In: *Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn.* (Band 2). S. 271- 315.

Blum, W. (2007): Mathematisches Modellieren- zu schwer für die Schüler und Lehrer? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, S. 3- 12.

Freudenthal, H. (1977): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd. 1.

Köller, O., Baumert, J. & Neubrand, J. (2000): Epistemologische Überzeugungen und Fachverständnis im Mathematik- und Physikunterricht. In: *Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie–Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn* (Bd. 2). S. 229- 269.

Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., u.a. (2004):. *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.*

Winter, H. (1996):. Mathematikunterricht u. Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der DMV 2*, S.35-41.

Anke LINDMEIER, München und Aiso HEINZE, Regensburg

Überlegungen zu Aspekten professioneller Kompetenz von Mathematiklehrkräften und ihrer Erhebung

Professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften ist aus vielen Perspektiven ein interessanter Untersuchungsgegenstand: Aus einer Prozess-Produkt-Perspektive auf den Unterricht ist das Wissen und Handeln der Lehrperson ein wichtiger Einflussfaktor auf das Lernergebnis, für die Aus- und Weiterbildung von Lehrkräften können richtungsweisende Erkenntnisse für konzeptionelle und praktische Rahmenentwürfe gewonnen werden und – um ein weiteres Feld zu nennen – kann aus einem sozialkonstruktiven Blickwinkel die Analyse eines Teilnehmers des sozialen Rahmens Unterricht neue Einblicke in das Verständnis des Gesamtgefüges geben. Derzeit wird das Professionswissen von Lehrpersonen beispielsweise in der Studie COACTIV und der IEA-Studie TEDS-M (vgl. Krauss et al., 2004; Tatto et al., 2008; Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2008) erhoben. Wesentlich für die validen Erfassung einer im Sinne von Weinert (2001) verstandenen handlungsbefähigenden professionellen Kompetenz von Mathematiklehrkräften sind drei Punkte: Verständnis des Kompetenzinhalts und seiner Struktur, die Operationalisierung dessen in Tests und schließlich die Bewertung der Bearbeitungen. Im Folgenden soll darauf näher eingegangen werden.

Professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften

Als wegweisend für das Verständnis von professioneller Kompetenz von Mathematiklehrkräften wird die Unterscheidung von Shulman (1986) zu mathematischem, fachdidaktischem und pädagogischem Wissen angesehen. Dabei werden die einzelnen Wissensbereiche in verschiedenen Studien allerdings unterschiedlich konzeptualisiert. So werden den Probanden für die fachmathematische Komponente in TEDS-M Fragen zur Schulmathematik vorgelegt, die höchstens zwei Jahre über die maximal zu unterrichtende Klassenstufe hinausgehen (Tatto et al., 2008). In COACTIV werden dagegen Items fokussiert, die ein vertieftes Wissen der relevanten schulmathematischen Inhalte abfragen (Krauss et al. 2004). Betrachtet man fachdidaktische Items aus den beiden Studien, so wirken diese insbesondere bei den Skalen zu Schülerfehlern sehr mathematiknah. Die Identifikation von Fehlermustern beispielsweise stellt eine Anforderung dar, eine Gesetzmäßigkeit über verschiedene Beispiele hinweg zu identifizieren und kommt damit einer typisch mathematischen Kompetenzfacette nahe.

Erfassung der Komponenten von Lehrerkompetenz

Zum Einsatz kommen in Studien zur Erfassung von professioneller Kompetenz verschiedener Berufsgruppen vor allem Paper & Pencil Formate sowie inzwischen auch computerbasierte Verfahren. Gemeinsam ist den Ansätzen, dass durch die Vorgabe einer Situation, die für professionellen Erfolg relevant ist, auf Basis der Bearbeitung des Probanden sein tatsächliches Verhalten in dieser oder einer ähnlichen Situationen vorausgesagt werden soll. Dabei ist jedoch zu beachten, dass das Herauslösen relevanter Situationen nur auf Basis eines hinreichend genauen, aber auch nicht zu spezifischen Kompetenzverständnisses gelingen kann. Die dargestellten Situationen müssen also in einem gewissen Sinne repräsentativ für die Kompetenzanforderungen sein. Besonderes Augenmerk ist zudem auf die Darstellung der Situationen zu legen. Es erscheint z. B. in Testfragen, die sich auf Planung von Unterricht beziehen oder bei der Bewertung hypothetischer Schülerarbeiten durchaus sinnvoll, die Situation in Text- oder Bildform zu präsentieren[1]. Wird jedoch gefragt, wie ein Lehrer eine fehlerhafte Schüleräußerung zu einem Lernanlass transformiert, so kann die Beschreibung der Schüleräußerung in Textform ungeeignet sein. Solche Situationen können meist nur stark verkürzt oder durch umfangreichen Text dargestellt werden. Dies könnte durch eine videobasierte Darstellung des Items, die einen höheren Informationsgehalt erlaubt, abgemildert werden. Selbst wenn eine Situation weitgehend verlust- und verzerrungsfrei dargestellt werden könnte, so ist fraglich, ob die Bearbeitung in einem (schriftlichen) offenen Antwortformate die gleichen kognitive Prozesse in Gang setzt wie im Unterricht. Damit bleibt der Zusammenhang zwischen den erhobenen Wissensaspekten von professioneller Kompetenz und dem tatsächlichen Lehrerverhalten fraglich. Dies könnte durch technologiegestützte Erfassungsmethoden, die Ton- und Videoaufnahmen einschließen, verbessert werden, da handlungsorientierte situative Bearbeitungen ermöglicht würden[2].

Bewertungsverfahren und ihre Gültigkeit

Als dritten Kernpunkt zur Erfassung professioneller Kompetenz gilt es, die Bewertungsverfahren zu bedenken. Die Verwendung von geschlossenen Antwortverfahren wie z.B. Multiple-Choice setzt unter anderem voraus, dass die Beantwortungsmöglichkeiten bekannt und begrenzt sind. Dies ist jedoch bei den meisten der denkbaren Items zur Erfassung der Kompetenz-

---

[1] Solche Aufgabenformate finden sich in den meisten Untersuchungen, so auch bei Krauss et al., 2004 und Tatto et al., 2008.

[2] Krauss et al., 2004 kündigen deswegen videobasierte Items mit computergestützter Erfassung in COACTIV an.

komponenten nicht der Fall – in Lehrsituationen gibt es eine Vielzahl möglicher und sinnvoller Entscheidungen. Somit werden oft zu Recht offene Antwortformate eingesetzt. Dabei tritt das Problem des Ratings nach der Erhebung zu Tage: Welche Antworten sind als korrekt, welche als inkorrekt anzusehen. Zum Einsatz kommt meist ein Rating-Verfahren, dass auf die Einschätzung von Experten zurückgreift. Dabei werden entweder Bearbeitungen von Experten nach Ihrer Güte beurteilt oder die Bearbeitung eines Experten als Maßstab verwendet. Dieses Verfahren kann nur mit Sorgfalt eingesetzt werden, da sowohl die Frage danach, wer zum Kreis der Experten zählt als auch die Frage nach der Objektivität von Beurteilungen auf der Basis von Experteneinschätzungen zu bedenken sind.

Ansatz für ein modifiziertes Kompetenzmodell

Aufgrund der oben diskutierten Schwierigkeiten und mit Blick auf die Chancen, die sich durch den Einsatz neuer Technologien ergeben, schlagen wir ein modifiziertes Modell für fachdidaktische Kompetenz vor, das neben einer Basiskomponente „fachdidaktisches Wissen“ auch eine reflektive und insbesondere eine stärker handlungsorientierte situativ-aktive Komponente enthält[3]. Zu den Grundlagen des fachdidaktischen Wissens zählen wir hier z. B. Wissen über mögliche Darstellungsformen und Zugänge, typische Schülerfehler und Fehlvorstellungen aber auch Wissen über curriculare Umsetzungen von Mathematik. Die reflektive Komponenten enthält prä- und postaktive Elemente eines reflektiven Umgangs mit dem fachlichen Inhalt und dessen Umsetzung im Unterricht, z. B. die Auswahl und Sequenzierung von Aufgaben, die Fähigkeit zur Diagnose von Fehlbearbeitungen und Analyse von Lernpfaden sowie die Evaluation von konkreten Implementierungen oder die Einschätzung der subjektiven, situierten Schwierigkeit von Aufgaben. Ferner fallen organisatorische Strategien und die Fähigkeit zu Methodenkritik unter die reflektiven Fähigkeiten. Die situativ-aktive Komponente bildet schließlich die Fähigkeit zur spontanen Aktivierung des Wissens und der reflektiven Kompetenz, z. B. in direkter Reaktion auf einen Schülerfehler oder die spontane Aktivierung diagnostischer Kompetenz. Insbesondere zur Erfassung post-aktiver reflektiver und situativ-aktiver Fähigkeiten scheinen technologiebasierte neue Aufgabenformate gewinnbringend.

[3] Elemente dieser Unterscheidung finden sich auch im Rahmenmodell zur TEDS-M. In deren Modell werden *pre-active knowledge of planning for mathematics teaching and learning* und eine interaktiv verstandene Wissenskomponente *enacting mathematics for teaching and learning* berücksichtigt (Tatto et al., 2008).

Ausblick

Die oben angeführten Überlegungen haben uns veranlasst, eine Software zu entwickeln, die als Testwerkzeug eingesetzt werden kann. Darin können herkömmliche Paper & Pencil Formate ebenso digital umgesetzt werden wie die angesprochenen technologiebasierten Testformate. Die Software leistet sowohl text-, bild-, ton- als auch videobasierte Darstellungen von Testitems und ermöglicht übliche geschlossene wie auch offene Antwortformate. Darüber hinaus können mit Hilfe einer Webcam und eines Mikrofons zudem verbale Äußerungen und handschriftliche Bearbeitungen erfasst werden, wobei durch eine Timeout-Lösung auch zeitlicher Druck auf den Probanden ausgeübt werden kann. Das Spektrum möglicher Erhebungsmethoden wird dadurch erheblich erweitert und somit ist es denkbar, handlungsnahe Kompetenz besser abbilden zu können. Dies ist jedoch stark von der sorgfältigen Auswahl und den Darstellungen geeigneter Items abhängig. Auch die oben angesprochene Schwierigkeit der Bewertung von Bearbeitungen bleibt bestehen und kann nur auf Grundlage einer sorgfältigen Analyse mit Hilfe von Experten-Ratingverfahren gelöst werden.

Es bleibt zu zeigen, ob durch einen stärker situativen Ansatz die Beziehungen zwischen dem, was Mathematiklehrkräfte wissen und den Situationen, in denen sie dieses Wissen anwenden können, transparenter werden. Inwieweit die Erweiterung der Erhebungsmöglichkeiten zu einem Gewinn in Bezug auf die valide Erfassung der professionellen Kompetenz von Mathematiklehrkräften führt, ist zunächst in Evaluationsstudien zu zeigen.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2008). Kompetenzmessung bei angehenden Lehrerinnen und Lehrern. Ergebnisse einer empirischen Studie zum professionellen Wissen, zu den Überzeugungen und zu den Lerngelegenheiten von Mathematik-Studierenden und -Referendaren. Münster: Waxmann.

Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M., et al. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In: Doll, J. & Prenzel, M. (Hrsg.), Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerforderung als Strategien der Qualitätsverbesserung (31-53). Münster: Waxmann.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. Educational Researcher 15, 4-14.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. & Rowley, G. (2008). Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Conceptual Framework. Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), Leistungsmessungen in Schulen (17-31). Weinheim: Beltz.

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Aarau

Das Kompetenzmodell HarmoS Mathematik

Die Arbeiten am Kompetenzmodell HarmoS Mathematik, welches die Grundlage für die Festlegung nationaler Bildungsstandards in der Schweiz bilden soll, sind nahezu abgeschlossen und Vorschläge für Bildungsstandards formuliert. Die erarbeiteten Papiere werden zurzeit übersetzt, die Terminologie und Darstellungsweisen unter den verschiedenen Konsortien harmonisiert, danach werden Gutachten eingeholt, bevor die Papiere in einen demokratischen Prozess der Vernehmlassung kommen. Diese Tagung bietet die Gelegenheit, innezuhalten und das Erreichte zu reflektieren, denn nicht anders als bei mathematischen Problemen stellt sich auch hier die Polya'sche Frage, inwieweit die gefundenen Resultate für die Lösung zukünftiger Probleme nutzbar gemacht werden können[1]. Ich will im Folgenden die Kernideen und einige Besonderheiten des Kompetenzmodells darstellen und einige kritische Fragen und unbefriedigende Antworten dazu formulieren[2].

1. Harmos Mathematik - ein mehrdimensionales Modell

Das Kompetenzmodell HarmoS Mathematik ist ein mehrdimensionales Modell, in dem verschiedene, für die Beschreibung von mathematischen Kompetenzen wichtige Aspekte und Faktoren in eine systematische Ordnung gebracht werden:

1) *Kompetenzbereiche:* Mathematische Kompetenz ist zum einen auf verschiedene Bereiche[3] der Mathematik (z.B. "Form und Raum" oder "Daten und Zufall")[4] bezogen.
2) *Kompetenzaspekte*: Mathematische Kompetenz ist zum anderen auf unterschiedliche Handlungsaspekte (z.B. "Operieren und Berechnen" oder "Argumentieren und Begründen")[5] bezogen.

---

[1] Ein weiterer wichtiger Schritt ist ein gemeinsamer Lehrplan für alle Deutschschweizer Kantone.

[2] Beat Wälti geht in seinem Beitrag auf die empirische Validierung des Modells und die Vorschläge zu den Bildungsstandards ein, Roland Keller und Elisabeth Moser auf die Anpassungen und speziellen Konzeptionen für die Jahrgangsstufe 4.

[3] Mit den Bereichen sind "Domänen" und nicht "Themenbereiche" oder "Teildisziplinen" gemeint, wobei der Unterschied mit Bezug auf unser Modell nicht gravierend ist.

[4] Die in HarmoS Mathematik unterschiedenen *Kompetenzbereiche* sind: Form und Raum; Zahl und Variable; Funktionale Zusammenhänge; Grössen und Masse; Daten und Zufall.

[5] Die in HarmoS Mathematik unterschiedenen *Kompetenzaspekte* sind: Wissen, Erken-

3) *Kompetenzniveaus / Anforderungsniveaus*: Mathematische Kompetenz oder besser: mathematische Kompetenzen können verschiedene Personen in unterschiedlicher Ausprägung, d.h. auf unterschiedlichem Niveau besitzen. Aufgaben lassen sich unterschiedlich schwierig formulieren. Sie werden entsprechend den Kompetenzniveaus der Lernenden verschiedenen Anforderungsniveaus zugewiesen.
4) *Entwicklungsdimension*: Mathematische Kompetenz kann sich entwickeln: Kompetenzen sind mit Bezug auf verschiedene Jahrgangsstufen darzustellen (im HarmoS-Projekt: 4, 8 und 11).
5) *Nicht-kognitive Dimensionen:* Mathematische Kompetenz ist nicht auf Wissen und Können beschränkt, sondern umfasst auch affektive und soziale Facetten[6].

Wenn man das Kompetenzmodell veranschaulichen will, muss man sich zwangsläufig auf zwei- oder dreidimensionale Teilmodelle beschränken. Abb. 1 zeigt ein dreidimensionales Teilmodell, bei dem die nicht-kognitiven Dimensionen ausgeblendet und in der Entwicklungsdimension eine Jahrgangsstufe herausgegriffen wird.

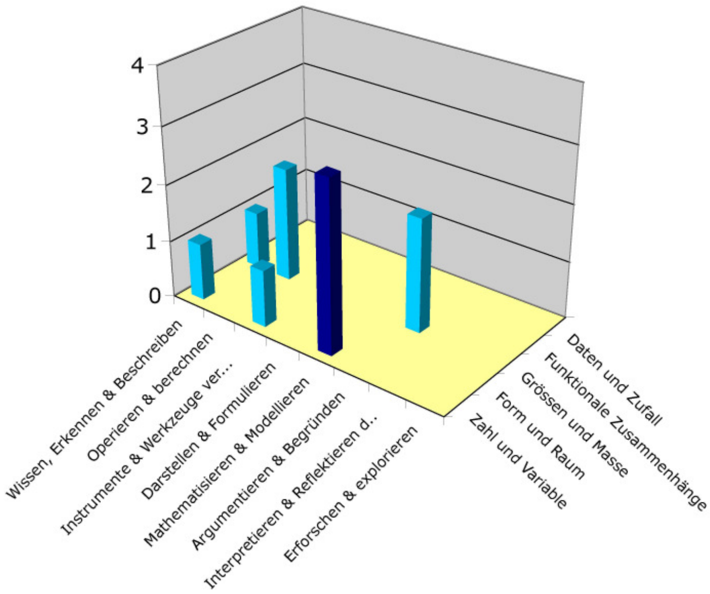


Abb. 1

Die Grundlage für das ganze Modell bildet eine Matrix, die – als noch leere "heuristische" Matrix - für alle Jahrgangstufen gleich ist und nur einen Leitfaden zur Formulierung von Kompetenzbeschreibungen liefert. Die Zellen der heuristischen Matrix wurden für die verschiedenen Jahrgangstufen mit unterschiedlichen Kompetenzbeschreibungen gefüllt, dabei blieben manche Zellen leer, für die Jahrgangstufe 4 wurden mache Aspekte/Bereiche zusammengezogen. Auf diese Weise entstanden 3 verschiedene

nen und Beschreiben; Operieren und Berechnen; Instrumente und Werkzeuge verwenden; Darstellen und Formulieren; Mathematisieren und Modellieren; Argumentieren und Begründen; Interpretieren und Reflektieren der Resultate; Erforschen und Explorieren.

[6] Vgl. Weinerts Definition in Klieme 2003, S.21

"Cando-Matrizen" (je eine für die Jahrgangsstufen 4, 8 und 11).

Die verschiedenen Kompetenzbeschreibungen wurden durch Aufgaben erläutert, die in der Mehrzahl eigens dazu konstruiert wurden und ein Spektrum unterschiedlicher Schwierigkeitsniveaus abdecken sollten – die Festlegung der Kompetenzniveaus erfolgte empirisch auf der Basis des Raschmodells.

Leider konnten wir im Modell nicht genauer auf die nicht-kognitiven Dimensionen eingehen. Was die Kompetenzbeschreibungen der Cando-Matrizen angeht, so ist eine Berücksichtigung der Motivation immer parallel überlegt worden: bei allen Kompetenzaspekten mit Ausnahme der ersten beiden (Wissen, Erkennen und Beschreiben; Operieren und Berechnen) erschien es uns sinnvoll, von einer Kompetenz nur zu sprechen, wenn die entsprechenden kognitiven Fähigkeiten auch mit einer gewissen Bereitschaft, sie anzuwenden, verbunden sind. Schwieriger ist es dagegen, Aufgaben zur Illustration zu entwerfen, und noch schwieriger - und mit Bezug auf die HarmoS Ziele vielleicht auch nicht sinnvoll – verschiedene Grade des Motiviertseins quantitativ zu bestimmen.

2. Besonderheiten des Kompetenzmodells

Das HarmoS-Kompetenzmodell soll als Referenzsystem für *Mindeststandards* fungieren und ist deshalb auf den unteren Leistungsbereich zugeschnitten. Der Grundgedanke ist, einen mathematisch anspruchsvollen Kernbereich für alle SchülerInnen (zumindest auf einem niedrigen Level) zugänglich zu machen. Deshalb sind nur solche Kompetenzen formuliert, von denen man realistischer Weise erwarten kann, dass sie von allen SchülerInnen – wenn auch in unterschiedlichem Grad – erworben werden können. Von leistungsfähigeren SchülerInnen kann man nicht nur erwarten, dass sie diese Kompetenzen in höherem Grad, sondern auch, dass sie darüber hinausgehende mathematische Kompetenzen erwerben können. Um Regel- oder Idealstandards festzulegen, braucht man deshalb zusätzliche eigens auf diesen Zweck zugeschnittene Kompetenzmodelle.

Die Dimension der Kompetenzniveaus ist nicht mit der Entwicklungsdimension zu verwechseln: Das Modell ist nicht so konzipiert, dass man alle Niveaus der Jahrgangstufe 8 durchlaufen muss, um danach die unterste Niveaustufe der Jahrgangsstufe 11 erreichen zu können.

Im Unterschied zum KMK-Modell sind die Kompetenzaspekte im HarmoS Modell keine "allgemeinen Kompetenzen[7]": erst durch den Bezug der

[7] Man sollte hier m.E. eher von "abstrakten Kompetenzen" bzw. "abstrakten Kompetenzbeschreibungen" sprechen.

Kompetenzaspekte auf die Kompetenzbereiche lassen sich Kompetenzen erfassen, die auf einem mittleren Abstraktionsniveau formulierbar sind.

Unsere Hypothese, dass es empirisch unterscheidbare Kompetenzen nach Massgabe der Kompetenzbereiche, aber auch nach Massgabe der Kompetenzaspekte gibt, wurde bestätigt.

3. Offene Fragen – unbefriedigende Antworten

Im Folgenden sind zur Diskussion einige offene Fragen formuliert – die Antworten spiegeln *nicht* die Meinung des Konsortiums wider: es sind *unbefriedigende* "Default"-Antworten, d.h. Antworten, die gesetzt sind, sofern wir nicht bessere Antworten geben.

Wer muss die nationalen Bildungsstandards erfüllen? – Die Schülerinnen und Schüler.

Kann man den Missbrauch von Bildungsstandards verhindern? – Nein.

Welche Frei(heits-)räume bleiben dem Mathematikunterricht offen? – Die Freiheit besteht darin, zu den gesetzten Zielen die richtigen Mittel zu bestimmen, d.h. *kompetenzorientiert* zu unterrichten.

Wie legitimiert man Bildungsstandards? – Durch probabilistische Überlegungen basierend auf empirischen Untersuchungen.

Welche Rolle sollen die nicht-kognitiven Momente im Weinertschen Kompetenzbegriff für die Bildungsstandards spielen? – Man muss sich auf die "wesentlichen" Facetten des Weinertschen Kompetenzbegriffs beschränken und deshalb auf die nicht-kognitiven Momente verzichten.

Literatur

[1] Klieme, Eckhard, u.a. [2003]: Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise. http://www.dipf.de/publikationen/volltexte/zur_entwicklung _nationaler _bildungsstandards.pdf

[2] Linneweber-Lammerskitten, Helmut und Wälti, Beat [2005]: Is the definition of mathematics as used in the PISA Assessment Framework applicable to the HarmoS Project? in: ZDM Vol. 37, 2005

[3] Linneweber-Lammerskitten, Helmut und Wälti, Beat [2006]: Was macht das Schwierige schwierig? Überlegungen zu einem Kompetenzmodell im Fach Mathematik. in: Criblez et al. (Hg.): Lehrpläne und Bildungsstandards, Bern (hep) 2006, 197-227

Matthias LUDWIG , PH Weingarten
Binyan, XU, East China Normal University Shanghai

Mathematik auf der Ananas- Eine chinesisch-deutsche Studie zu den Modellierungskompetenzen.

Während der letzten Jahre galt es als ein zentrales Ziel für den Mathematikunterricht die Fähigkeiten bei den Schülerinnen und Schülern so zu entwickeln, damit diese die Beziehung zwischen realer Welt und Mathematik erkennen und so die Rolle der Mathematik in der Welt sehen. (KMK, 2003; NCTM 2006). Solche Fähigkeiten sind stark mit den mathematischen Kompetenzen verbunden. In unserer Studie wurden die Modellierungskompetenzen von Schülern untersucht, welche sich mit einem authentischen Problem, dem Schälen einer Ananas, beschäftigten.

Theoretischer Rahmen

Mathematische Modellierungskompetenzen werden u. a. definiert als die Fähigkeit relevante Fragen, Variablen, Beziehungen, und geeignete Annahmen in einer gegebenen realen Situation zu finden und diese dann in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, anschließend das resultierende mathematische Problem zu lösen und die Lösung wieder in Beziehung zur realen Welt bzw. zum Ausgangsproblem zu setzen. (Blum et al., 2007a, S.12) Hinzu kommt noch die Fähigkeit zu strukturieren, zu mathematisieren, zu interpretieren und zur Analyse und zum Vergleich von Modellen. (Blum 2002) In unserer Studie haben wir uns stark an den Modellierungskreislauf von Blum (2007b) angelehnt (siehe Abb. 1). Allerdings gehen wir in unserem Stufenmodell davon aus, dass die jeweiligen Modellierungsschritte aufeinander aufbauen und sukzessive durchlaufen werden. Dass dem nicht immer so sein muss, hat Boromeo-Ferri (2006) gezeigt. Es ist aber klar, dass jeder Schritt eine kognitive Hürde darstellt und je weiter man sich im Kreislauf befindet, desto näher ist man dem Ziel bzw. der Problemlösung. Wir haben deswegen folgende Niveaustufen bezogen auf das Ananas-Problem unterschieden.

Stufe 0: Die Realsituation wurde nicht erfasst. Es fällt schwer die Aufzeichnungen der Schüler mit der Aufgabenstellung in Verbindung zu bringen. Die Schüler haben also nicht den Einstieg in den Modellierungskreislauf gefunden. (Die Schüler haben z.B. nur etwas Zusammenhangloses auf Papier geschrieben oder ein Ananasbild gezeichnet.)

Stufe 1: Der Schüler hat die reale Situation erkannt und versucht diese zu strukturieren um ein mathematisches Modell zu finden, letztendlich mündet dies aber in keiner weiterführenden Idee. (Die Schüler notierten z. B., dass man durch dieses Verfahren den Fleischverlust minimiert, und es wurden die schwarzen Punkten (Fruchtstände der Ananas) versetzt aufgezeichnet.)

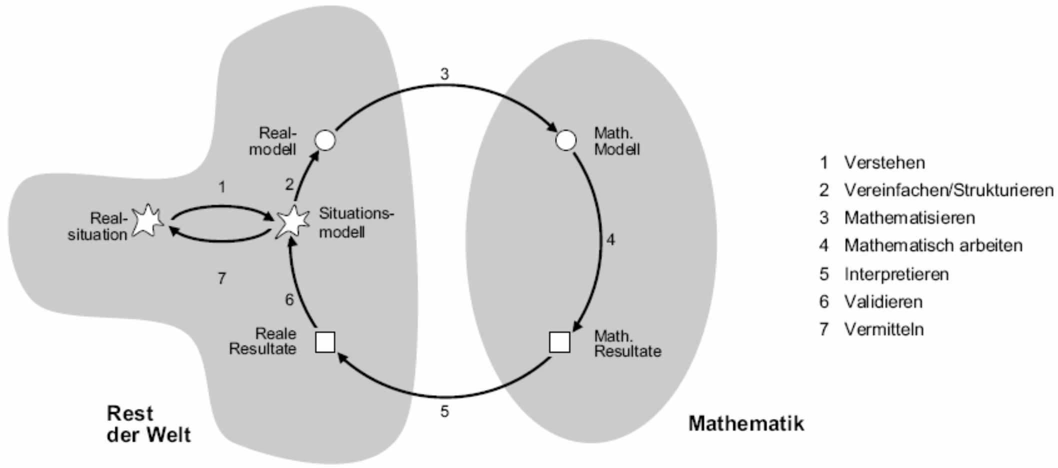


Abbildung 1: Der Modellierungskreislauf nach Blum (2007b)

Stufe 2: Die Schüler äußern eine sinnvolle Vermutung und sind in der Lage ein mathematisches Modell vorzuschlagen, aber dieses Modell wurde nicht konsequent mathematisiert. (Die Schüler verwenden z.B. den Zylinder als Modell. Die schwarzen Punkte wurden z. B. zu Vierecken verbunden.)

Stufe 3: Den Schülern gelingt es, das reale Modell in ein mathematisches Modell zu übersetzen und versuchen damit zu arbeiten, letztlich finden sie aber keine befriedigende Lösung, oder es liegt eine unsaubere Argumentation vor. (Die Schüler entwickeln gute Ideen z.B. Verwendung eines Punktemuster, Verbindung der Punkte zu einem Quadrat. Letztendlich scheitern die Schüler daran, dass sie nicht zeigen, dass die Diagonale der kürzeste Weg auf der Ananas ist.)

Stufe 4: Die Schüler schaffen es nun, das reale Modell in ein mathematisches Modell zu übersetzen und auch mathematisch zu behandeln, es fehlt aber noch die Rückkopplung mit der realen Welt. (Die Schüler führen alle Schritte wie Rechnungen, Beweise, richtig aus, aber dann wurde nicht auf Anfangsproblem zurückgeführt.)

Stufe 5: Die Schüler zeigen den vollständigen Modellierungsprozess bis hin zur Validierung und Diskussion der Ergebnisse (Sie zeigen z.B auch um wie viel Prozent der Spiralweg kürzer ist.)

Die Studie

Die Studie wurde mit mehr als 1100 Schülerinnen und Schülern in den Jahrgangstufen 9 bis 11 an mehreren süddeutschen (n=7) und Shanghaier (n=3) Gymnasien durchgeführt. Wir gaben folgende reale Situation vor:

Jedes Jahr im April ist in Shanghai Ananassaison. Wenn man zu dieser Zeit eine Ananas in Shanghai kauft wird sie vom Obstverkäufer kunstvoll geschält. Nach dem Schälprozess sind auf der Ananas mehrere Spiralen zu sehen. Warum schält der Obstverkäufer die Ananas auf diese Art und Weise und nicht anders? Ist es besonders einfach? Oder verringert er damit den Verlust von Fruchtfleisch? Gibt es andere Gründe? Finde eine mathematische Begründung dafür.

Bevor die Schülerinnen und Schüler den Arbeitsauftrag bekamen, wurde ihnen ein 90 Sekunden langes Video in Landessprache gezeigt auf dem der komplette Schälprozess zu sehen ist. Am Ende des Videos wurde ihnen folgende Frage gestellt: Warum wird die Ananas so geschält? Finde eine mathematische Begründung dafür. Nun wurde das Video noch einmal gezeigt, so dass sich die Schüler die Situation diesmal aus einem mathematischen Blickwinkel betrachten konnten. Die Schülerinnen und Schüler hatten anschließend 25-35 Minuten Zeit sich Gedanken zur Situation zu machen und diese schriftlich auf einem Antwortbogen zu fixieren. Einige Ergebnisse wurden anschließend den Klassenkameraden präsentiert.

Ergebnisse und Diskussion

Zunächst ist feststellbar, dass die durchschnittlich erreichten Levels in den einzelnen Jahrgangstufen bei den chinesischen und deutschen Schülern fast identisch sind (siehe. Abb. 2). Allerdings zeigt sich, dass die Art und Weise wie diese Durchschnittslevel zusammen kommen sehr unterschiedlich in Bezug auf Geschlecht und Nationalität ist. Die chinesischen Mädchen sind immer besser als die chinesischen Jungen und in Deutschland sind die Jungen nur in Jahrgangsstufe 11 besser als die Mädchen. Diese Unterschiede scheinen zwar deutlich, aber auf Grund der großen Standardabweichung nur für Klasse 9 in China signifikant ($p<.01$); siehe auch Tabelle 1. Es zeigt sich, dass Level 5 in Deutschland nur von den Jungen und da auch nur in Klasse 11 erreicht wird. In China wird Level 5 fast nur in Klasse 11 erreicht, dort aber von beiden Geschlechtern gleichermaßen. Erfreulich ist, dass die Durchschnittswerte mit jeder Jahrgangsstufe besser werden, einen großen Sprung macht die Leistung in Klasse 11, besonders bei den deutschen Jungen und den chinesischen Mädchen ist hier ein hochsignifikanter Leistungszuwachs ($p<.005$) zu beobachten. Die chinesischen Jungen steigern sich jedes Jahr höchstsignifikant ($p<.005$). Bei den deutschen Mädchen fällt der Leistungszuwachs nicht so stark aus, da diese schon von einem höheren

Niveau in Klasse 9 starten. Einen nationalen Unterschied stellt man bei der Anzahl der Lösungen bis Level 2 fest. In China scheint Level 3 eine Hürde zu sein. Von dem Teil der Schüler welche Level 2 erreichen schaffen es nur 42 % auf Level 3 und weiter. In Deutschland können von den Schülern welche Level 2 erreichen immerhin 66% Level 3 und mehr erreichen. Hier scheint Level 4 die Hürde zu sein. Zur Erinnerung: Level 3 bedeutet, dass man im selbst gefundenen mathematischen Modell rechnen kann, Level 4 heißt dass man seine Rechnung auch noch begründen kann. Das bedeutet für die Schüler aus Shanghai, dass sie sich in ihrem eigenen Modell nicht zurecht finden, die deutschen Schüler haben dagegen Probleme das rechnerische Ergebnis zu begründen und zu interpretieren.

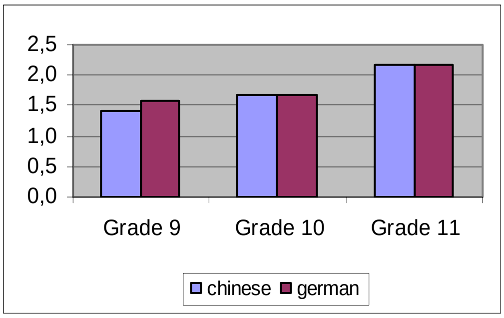


Abb. 2 Durchschnittlich erreichte Level

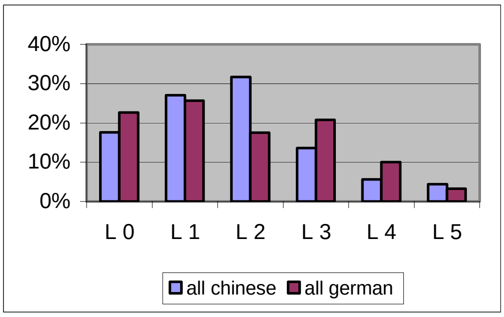


Abb. 3 Welche Stufen wurden erreicht

	Kl. 9			Kl. 10			Kl. 11		
	N	∅	SD	N	∅	SD	N	∅	SD
chin. w.	103	**1,63**	1,27	124	**1,71**	1,09	106	**2,30**	1,30
chin. m.	103	**1,18**	1,20	129	**1,64**	1,15	115	**2,07**	1,49
deutsch. w.	64	**1,78**	1,34	76	**1,83**	1,46	53	**2,09**	1,18
deutsch m.	81	**1,43**	1,45	71	**1,49**	1,37	83	**2,21**	1,50

Tabelle 1 Die Daten mit Mittelwert und Standardabweichung

Literatur

Boromeo Ferri, R.(2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process, ZDM 2006 Vol.38 (2). S. 86-95

Blum, W. et al. (2007a). Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study. Springer.

Blum, W.(2007b). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht.In: Humenberger et al (Hrsg.), Festschrift für HWH, Hildesheim: Franzbecker. S. 8-23.

Blum, W.et al. (2002). ICMI Study 14: Application and modelling in mathematics education – Disscussion document. Educational Studies in Matematics 51(1-2), S. 149-171.

KMK (Kultusministerkonferenz) (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Bildungsschnitt.

NCTM (2006). Principles and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

Bettina LÜBS, Bonn, Lüneburg

Das Lernportal ich will lernen

www.ich-will-lernen.de: Rechnen

Am Weltalphabetisierungstag 2004 wurde das vom BMBF gefördete Internet-Lernportal ich-will-schreiben-lernen für funktionale Analphabeten freigeschaltet. Bis Februar 2008 gab es 145.000 Anmeldungen. Zur Zeit gibt 10.000 Nutzer und 3500 Lerner lernen regelmäßig in diesem Portal. 2005 mit der Comenius Medaille, 2006 mit dem Digita und EureleA ausgezeichnet, ist es diesem Lernportal gelungen Analphabeten eine Brücke in die Welt der Schrift zu „bauen".

Für das erfolgreiche Lernportal konzipiert der Deutsche Volkshochschul-Verband im *Projekt Zweite Chance Online* nun auch Einheiten für Nichtrechner (siehe Artikel Nolte). Erwachsene Nichtrechner können dort ihr Basiswissen im Rechnen in erwachsenengerechten Lebenswelten auffrischen. Aufgrund von Selbsteinschätzung und Diagnose wird dem Lerner ein individuelles Lernen im Netz anonym oder in Kursen als Blended Learning ermöglicht. Das Portal bietet in dem Bereich *Lernen*, an fünf Tagen die Woche Übungspakete, in leicht „zu verdauenden" Portionen an. Am Wissen eines jeden Lerners ansetzende Übungen sollen schnell zum Erfolg führen. Spielerische Übungen erhöhen den Spaß am *Lernen* und fördern das Bleibeverhalten. Um so sicherer der Lerner im Umgang mit dem Computer, den Aufgabentypen und dem Portal insgesamt wird, desto selbstbestimmter kann er seinen eigenen Lernweg steuern und jederzeit bestimmen, wann er genug gelernt hat. Die Bereiche *Unterhaltung* und *Kontakt* vermitteln Schreiben und Rechnen als kulturelles Ereignis und durchbrechen die Isolation der Einzelnen, da die Möglichkeit besteht sich per Mail, Forum oder Chat in diesem geschlossenen Bereich auszutauschen.

Der Bereich *Alltagsorganisation und Lernen* bietet szenische Angebote, die das Schreiben und Rechnen miteinander verbinden.

Aufgabentypen

Über 30 unterschiedliche Aufgabenformate stehen dem Lerner ab Mai 2008 zur Verfügung.

Zahlen in Lücke eingeben beinhaltet Aufgabentypen wie: Audioausgabe/Zahleneingabe, Leerfelder-/Umkehraufgaben, Textaufgaben, Bildkarten beschriften, Wendekarten, Sudoku, Container, Schüttelkugel, Zahlenpyramide und Tabelle.

Als *Drag and drop-Aufgaben* stehen Sortieren, Aussortieren, Reihenfolge bestimmen, Aufgaben bauen, Domino, Memory, Triomino, Bildbaustelle, Zuordnen, Fallende Zahlen, Zahlenstrahl und Stellenwertafel zur Verfügung.

Als *Markieraufgaben* findet der Lerner Suchbilder (Veränderungen markieren) und kann Mengen markieren.

Bei den *Single Choice/Multiple-Aufgaben* muss der Lerner aus einem Antwortangebot die richtige oder mehrere richtige Antworten auswählen.

Aufgaben mit Tutorenanbindung ermöglichen dem Lerner darüber hinaus in einem gestellten Kontext eingene Aufgaben zu entwickeln.

Ausblick

Zur Förderung der Abschluss- und Beschäftigungsfähigkeit werden Lernende ab Ende 2008 auch in den Bereichen *Deutsch, Mathematik und Englisch* mit berufsbezogenen Angeboten im Blended Learning beim Nachholen eines Hauptschulabschlusses unterstützt.

Thomas LÜTHJE, Lüneburg

Räumliche Fähigkeiten von Kindern im Vorschulalter – Untersuchungsdesign und erste Ergebnisse

Problemstellung und Zielsetzung

Raumvorstellung ist eine bedeutsame Komponente menschlicher Intelligenz und eine zentrale Fähigkeit von lebenspraktischer Bedeutung, die unsere Wahrnehmung der Umwelt und damit die Qualität der Interaktion mit dieser nachhaltig beeinflusst (vgl. Maier 1999).

Entsprechend ist die Förderung der Raumvorstellung eines der zentralen Ziele des Mathematikunterrichts der Grundschule. Doch leider stehen bislang nur unzureichende Informationen über die räumlichen Fähigkeiten, insbesondere von Schulanfängerinnen und Schulanfängern, zur Verfügung.

Dies ist auch darauf zurück zu führen, dass nach wie vor keine adäquaten psychometrischen Tests zur Erhebung räumlicher Fähigkeiten für diese Altersgruppen vorliegen (vgl. Kerns & Berenbaum 1991). Aufgaben aus der psychometrischen Forschung setzen implizit eine Strategiehomogenität voraus und erweisen sich damit ohnehin als problematisch zur Erfassung räumlicher Fähigkeiten.

Denn bereits Barrat (1953) wies darauf hin, dass Probanden bei der Bearbeitung von Aufgaben zum räumlichen Vorstellungsvermögen unterschiedliche Strategien verfolgen können und intendierte Lösungsstrategien im Extremfall kaum angewendet werden. Zudem ergeben sich aus zahlreichen Untersuchungen Hinweise darauf, dass auch die Erfolgsrate in psychometrischen Tests zur Raumvorstellung auf die Art und Anzahl der zur Lösung angewandten Strategien zurückzuführen ist (vgl. Quaiser-Pohl 1998).

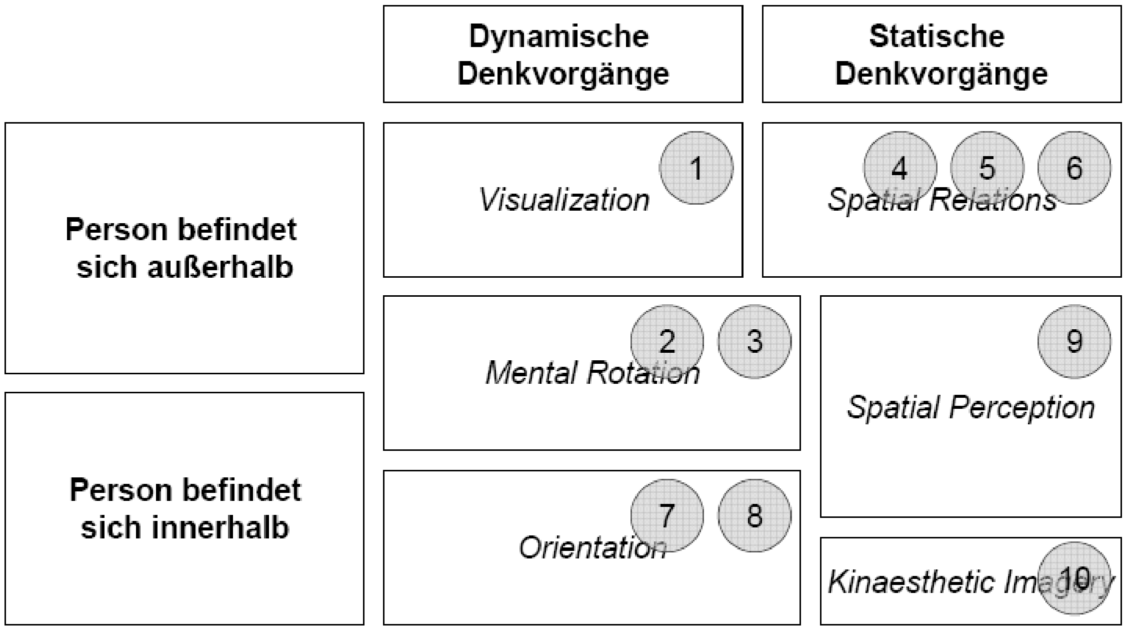
Daher verfolgt die geplante Untersuchung primär kein psychometrisches Ziel, denn eine rein quantitative Auswertung wird den Fähigkeiten der Schulanfängerinnen und Schulanfängern nicht gerecht. Nicht die Identifikation von Eigenschaften und Eigenschaftsdimensionen steht im Mittelpunkt, sondern die möglichst genaue Erfassung und differenzierte Beschreibung von Lösungsstrategien und damit subjektiver Sichtweisen.

Untersuchungsdesign

Die Formulierung der Zielsetzung macht deutlich, dass diese Untersuchung zunächst Ziele qualitativer Forschung verfolgt, denn diese hat den Anspruch, Lebenswelten von innen heraus aus der Sicht der handelnden

Menschen zu beschreiben und somit Zugänge zu subjektiven Sichtweisen zu ermöglichen.

Um aber dem Forschungsgegenstand und damit dem Kriterium der Konstruktvalidität gerecht zu werden und um ein möglichst breites Spektrum an Aufgaben zur Raumvorstellung abzudecken, wurde für die Konstruktion der insgesamt zehn Aufgaben zunächst ein integratives Strukturmodell kumulativ zusammengetragener räumlicher Teilfertigkeiten von Maier (1999) zu Grunde gelegt (Tab. 1). Die Kreise kennzeichnen die einzelnen Aufgabenkomplexe.



Tab. 1: Wesentliche Komponenten der Raumvorstellung (nach Maier 1999, S. 52)

Bei der Konzeption der Aufgaben ergaben sich diverse Schwierigkeiten.

Zum einen liegen Aufgaben zum räumlichen Vorstellungsvermögen fast ausschließlich in Form von *Paper-and-Pencil-Tests* vor. Die Übersetzung einer zweidimensionalen Darstellung eines dreidimensionalen Kontextes stellt jedoch eine zusätzliche Anforderung mit eigenen spezifischen Schwierigkeiten dar. Deshalb wurde bei der Konzeption der Aufgaben von diesem Format abgesehen.

Ein weiteres Problem stellte die Normierung und speziell die Wahl des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben dar, da bis heute mit Ausnahme weniger Aufgaben zur Erfassung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen von Schulanfängerinnen und Schulanfängern kaum Vergleichsdaten zum räumlichen Vorstellungsvermögen vorliegen.

Deshalb war es umso wichtiger, die Aufgaben in einer ersten explorativen Studie im November 2006 zu erproben. Die entwickelten Aufgaben wurden

25 Vorschülerinnen und Vorschülern im Rahmen von teilstandardisierten Einzelinterviews vorgelegt. Die Anweisungen wurden vorformuliert und nach Rücksprache mit den Kindergärtnerinnen und Kindergärtnern dem sprachlichen Niveau der Kinder angepasst.

Die entwickelten Aufgaben wurden im Anschluss an diese erste Vorstudie hinsichtlich ihres Schwierigkeitsgrades, ihrer Eignung zur Veranschaulichung kindlicher Lösungsstrategien und mit Bezug auf erste Hypothesen ausdifferenziert und im März 2007 in einer zweiten Vorstudie mit ebenfalls 25 Vorschülerinnen und Vorschülern evaluiert.

Datenerhebung

Die Hauptstudie wurde im Juni 2007 mit 25 Vorschülerinnen und 40 Vorschülern im Durchschnittsalter von 6 Jahren und 3 Monaten aus insgesamt vier Kindergärten in Niedersachsen durchgeführt. Unter den ausgewählten Kindergärten befanden sich zwei städtische und ein paritätischer Kindergarten aus verschiedenen Stadtteilen Lüneburgs, sowie ein Förderkindergarten aus Hannover.

Auswertung

Für die Auswertung der Hauptstudie liegen sowohl schriftliche Protokolle als auch Videoaufzeichnungen der Einzelinterviews vor.

Die Auswertung der Protokollbögen erfolgt rein quantitativ. Sie erlaubt eine schnelle Aussage darüber, wie viele Kinder und welche Gruppen von Kindern in der Lage sind, eine bestimmte Aufgabe korrekt zu lösen.

Die Videoaufzeichnungen sollen sowohl aufgaben- als auch kindorientiert ausgewertet werden. Unabhängig vom Aufgabentyp und damit unabhängig von der implizierten Strategie bietet sich das System von Schultz (1991) an, das drei allgemeine Strategien unterscheidet: *„(a) imaginal movement of the test object (move object or MO), (b) subject movement (move self or MS), and (c) identification of key features of the test object and subsequent noting of that feature's presence, absence, or change (key feature or KF)“* (S. 478). Die Verwendung dieses Systems erlaubt dann Aussagen darüber, ob die Verwendung bestimmter Lösungsstrategien eher auf Merkmale der Aufgabenstellung oder auf interpersonale Unterschiede zurückzuführen ist.

Für eine differenzierte Analyse der einzelnen Aufgabenkomplexe erwiesen sich diese Kategorien allerdings als zu ungenau, so dass sie im Auswertungsprozess zu spezifizieren und kategorisieren sind. So wird ein breites Spektrum von unterschiedlichen Strategien bei gleichen Aufgaben erkennbar. Hierbei soll auch der Frage nachgegangen werden, inwieweit die Strategien der Kinder den implizierten Strategien der Aufgabe entsprechen und ob die implizierten Strategien auch tatsächlich die effizientesten sind.

Erste Ergebnisse

Die Ergebnisse der beiden Vorstudien und erste Ergebnisse der Hauptstudie zeigen sehr hohe Lösungsraten bei allen Aufgaben mit leichten Vorteilen bei den Vorschülern.

Die Ergebnisse weisen auch darauf hin, dass Aufgaben zur räumlichen Vorstellung sehr unterschiedlich bearbeitet werden und die verwendeten Lösungsstrategien erheblich von den implizierten Strategien abweichen ohne dadurch automatisch an Effizienz zu verlieren.

Vorschülerinnen und Vorschüler verfügen über vielfältige Lösungsstrategien und kombinieren diese auch innerhalb verschiedener Aufgaben und Subaufgaben. Dieser Kombinationsaspekt verlangt nach einer prozessorientierten Anpassung der bekannten Systeme zur Kategorisierung von Lösungsstrategien.

Unabhängig davon unterstreichen diese Ergebnisse die Notwendigkeit qualitativer Verfahren zur Beschreibung räumlicher Fähigkeiten von Vorschülerinnen und Vorschülern.

Literatur

Barrat, E. S. (1953): *An analysis of verbal reports of solving spatial problems as an aid in defining spatial factors.* In: The Journal of Psychology 36, S. 17-25.

Kerns, K. A.; Berenbaum, S. A. (1991): *Sex differences in spatial ability in children.* Behavior Genetics 21, S. 383-396.

Lohmann, D.F.; Pellegrino, J.W.; Alderton, D.L.; Regian, J.W. (1987): *Dimensions and components of individual differences in spatial abilities.* In: Irvine, S.H.; Newstead, S.E.: Intelligence and cognition: Contemporary frames of reference, S. 253-312. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers.

Maier, P. H. (1999): *Räumliches Vorstellungsvermögen – Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen.* Donauwörth: Auer Verlag.

Quaiser-Pohl, C. (1998): *Die Fähigkeit zur räumlichen Vorstellung. Zur Bedeutung von kognitiven und motivationalen Faktoren für geschlechtsspezifische Unterschiede.* Münster: Waxmann Verlag.

Schultz, K. (1991): *The contribution of solution strategy to spatial performance.* Canadian Journal of Psychology 45, S. 474-491.

Brigitte LUTZ-WESTPHAL, Berlin

Mathematik authentisch lehren

Authentizität im Mathematikunterricht und Lehre

Ein Ziel von Mathematikunterricht und universitärer Lehre sollte sein, Mathematik authentisch zu vermitteln. Authentizität soll dabei unter verschiedenen Aspekten gewährleistet werden. Einerseits sollen die Inhalte authentisch für das Fach sein, anderseits soll die Beschäftigung mit Mathematik die Lernenden persönlich ansprechen und herausfordern, also in diesem Sinne authentisch sein (vgl. [4] Kap. 1). Bereits Wittenberg fordert eine „gültige Begegnung mit der Mathematik" ([9] S. 50), dem Schüler müsse „am Elementaren ein echtes Erlebnis dieser Wissenschaft erschlossen werden" (ebd). Freudenthal spricht davon, dass der prozesshafte Charakter der Mathematik „erlebte Wirklichkeit" werden solle ([1] S. 126). Und schliesslich finden wir bei Vollrath den Begriff des Authentischen: „Ein Unterricht, der zuverlässige Erfahrungen mit Mathematik vermittelt, soll authentisch genannt werden." ([8] S. 26). Dieser Unterricht habe drei Fragen zu beantworten: Was ist Mathematik? Wie entsteht Mathematik? Was kann man mit Mathematik anfangen?

Sehr konkret bezüglich der authentischen Begegnungen von Lernenden mit dem Stoff werden Gallin und Ruf mit ihrem Konzept des dialogischen Lernens ([2]). Durch die individuelle Auseinandersetzung mittels Lerntagebüchern erleben Lernende sich selbst in der Rolle von Forschern. Sie müssen selbstständig Fragen an den Stoff entwickeln und auch Irrwege in der Erarbeitung in Kauf nehmen. Sie haben dadurch die Chance, auf authentische Weise Mathematik zu treiben. Für zukünftige Lehrerinnen und Lehrer erweist sich die Arbeit mit Kernideen im Sinne von Gallin und Ruf als guter Anknüpfungspunkt, um authentische Erlebnisse mit Mathematik haben und vermitteln zu können (vgl. [6]).

Authentische Vermittlung von Mathematik muss nicht zwangsläufig mit realen Anwendungen und Datensätzen einhergehen. Viel mehr bemüht sie sie sich mit realitätsnahen Beispielen (idealerweise aus der Lebensumwelt der Schülerinnen und Schüler) Anlässe und Anreize für authentische Begegnungen mit Mathematik zu schaffen.

Vorlesung auf neuen Wegen

Im Sommersemester 2007 fand an der TU Berlin eine Vorlesung „Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen" für Lehramtsstudierende statt. Im Rahmen dieser Vorlesung wurde versucht, das Konzept vom authentischen Mathematiklernen umzusetzen. Erfahrungen aus dem Unterricht in Schulen zu denselben Themen flossen dabei mit ein. Die Grundidee war, Inhalte und Lehr- bzw. Unterrichtsmethoden parallel zu vermitteln. Diese Idee wurde bereits in [3] verwirklicht, daher lag dieses Buch der Vorlesung zugrunde. Nach anfänglicher Skepsis bei einigen Studierenden, die eine dicht gedrängte Stoffvermittlung im sonst üblichen universitären Stil erwartet hatten, war eine große Bereitschaft, sich auf dieses Konzept einzulassen, zu verzeichnen. Da die Übungen zur Vorlesung (aus organisatorischen Gründen) weitgehend klassisch abgehalten wurden, ergab sich eine gute Mischung aus traditionell und experimentell.

Abb. 1: Vorlesung ganz anders: Studierende entwickeln einen Graphenalgorithmus. (Foto: privat)

Alles ganz einfach?

Eine interessante Beobachtung ist, dass die Studierenden, die fast alle in dieser Vorlesung zum ersten Mal Kontakt mit diskreter Mathematik hatten, dieses Fachgebiet als zugänglicher empfinden als andere Fachgebiete, denen sie im Studium bereits begegnet waren (vgl. auch [5]). Zwei Fragebogenantworten zeigen dies beispielhaft. Gefragt war, das Fachgebiet der diskreten Mathematik in Abgrenzung zu anderen Fachgebieten zu beschreiben. Eine Studentin schreibt: „Diskrete Mathematik ist nicht nur „frontale Vermittlung" wie in allen anderen Fächern. Man muss und darf selber mitdenken, sich beteiligen etc. [daraus folgt] man kommt viel besser mit dem Stoff mit." Ein Kommilitone äußert sich so: „Auch arbeitet man entspannter in der Diskr. MA und ist experimentierfreudig [...]"

Dieses Phänomen war auch immer wieder in verschiedenen Unterrichtsversuchen zu beobachten. Beispielsweise sagte ein Schüler in einer 8. Klasse vor der anstehenden Klassenarbeit über ein Thema der kombinatorischen Optimierung: „Das haben doch alle verstanden, da schreiben doch alle eine 1!“ Themen der angewandten diskreten Mathematik, problemorientiert aufbereitet und mit dem Ziel einer authentischen Vermittlung und Begegnung können also offensichtlich den Zugang zum Mathematiklernen erleichtern.

Lassen wir noch eine Studentin zu Wort kommen, die die Auswirkungen des speziellen didaktischen Ansatzes sehr direkt auf den Punkt bringt: „Erste Gedanken waren, „wir sind hier wie im Kindergarten“. (Sorry) Aber [in] Wirklichkeit ist diese Vorlesung mit Übung sehr gut. Man ist einfach nicht gewöhnt, selber die Lösungswege zu finden. Mit Ana, LinA [Analysis, Lineare Algebra] kann man das gar nicht vergleichen. Da wird nur reingestopft, ohne dass man überhaupt etwas verstanden hat. Man steht ziemlich alleine da. [...]“

Ausblick

Die Unterrichts- und Lehrkonzepte für die angewandte diskrete Mathematik konnten ohne Voreingenommenheit durch bereits tradierte Unterrichts- und Lehrverfahren entwickelt werden. Für die klassischen Gebiete des Mathematikunterrichts und der Lehrerausbildung ist es schwieriger, mit einem gleichermaßen unbefangenen Blick zur Sache zu gehen. Viele Generationen von Mathematikern und Didaktikern haben sich schon über eine gute Vermittlung der Inhalte Gedanken gemacht. Dennoch wird es sich lohnen, auch hier einen Versuch zu wagen.

Das „Herzstück“ der didaktischen Aufbereitung der Kombinatorischen Optimierung war eine spezielle didaktische Stoffanalyse. Diese - zunächst vom Stoff ausgehende - Methode könnte auch in anderen Fachgebieten helfen, erneut einen unverbrauchten Blickwinkel einzunehmen und den einen oder anderen Aspekt ans Licht zu holen. Im Gegensatz zur klassischen stoffdidaktischen Sicht (vgl. auch die interessanten Thesen zur didaktisch orientierten Sachanalyse von A. Vohns [7]) wird hier nicht von der vorgegebenen Struktur des Inhalts ausgegangen (Mathematik als Produkt), sondern der Stoff nach möglichen Erarbeitungswegen und Kernideen abgesucht.

Zusätzlich hilft eine metamathematische Analyse, die für das Fachgebiet typischen mathematischen Methoden zu erkennen und zu beschreiben. Für die authentische Vermittlung von Mathematik ist es ganz besonders wichtig, sich spezifischer Arbeitsweisen des Fachgebietes bewusst zu sein. Für die Analysis beispielsweise erscheint es aus Schülerperspektive häufig so, dass dieses Fachgebiet nur aus Kurvendiskussion besteht. Dass in der mathematischen Forschung vielmehr die Modellierung und auch numerische Aspekte im Vordergrund stehen, wird im Mathematiunterricht demnach zu sehr vernachlässigt. Hier hilft eine präzise Analyse der typischen mathematischen Methoden, den Stoff neu zu strukturieren (beispielhaft für die diskrete Mathematik durchgeführt in [4] Kapitel 3).

Die Verbindung von einem vom Stoff und dessen Arbeits- und Forschungsmethoden ausgehenden Blickwinkel und lehrmethodischen Grundsätzen, die auf individuelle Erarbeitungswege bauen, könnte helfen, Mathematik in Unterricht und Lehre authentischer vermitteln zu können.

Literatur

[1] H. Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1, Klett, Stuttgart, 1. Auflage, 1973.

[2] P. Gallin und U. Ruf: Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen: Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik, Kallmeyer, Seelze-Velber, 1998.

[3] St. Hußmann und B. Lutz-Westphal. Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht, Vieweg, Wiesbaden/Braunschweig, 2007.

[4] B. Lutz-Westphal: Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht, Dissertation TU Berlin 2006, Online-Version: `http://www.math.tu-berlin.de/~westphal/diss_final_online.pdf`

[5] B. Lutz-Westphal: „Auch arbeitet man entspannter in der Diskreten Mathematik und ist experimentierfreudig“. Nachlese einer Vorlesung, S. 6-9, in: GDM-Mitteilungen 84 (2007).

[6] B. Lutz-Westphal: „Vielleicht lag es daran, dass ich am Samstag bei IKEA frühstücken war.“ Lehramtsstudierende auf der Suche nach Kernideen, *in Vorbereitung*.

[7] A. Vohns: Grundlegende Idee und Mathematikunterricht. Entwicklung und Perspektiven eines fachdidaktischen Prinzips, Dissertation Universität Siegen 2007.

[8] H.-J. Vollrath: Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001.

[9] A. I. Wittenberg Bildung und Mathematik. Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach, Klett, Stuttgart, 1963.

ürgen MAASZ (Linz, sterreich)

PISA und Politik - neue erausforderungen f r die Mathematikdidaktik

PISA ist auch ein Synonym dafür, dass die Mathematikdidaktik nach vielen ahren bildungspolitischer Bedeutungslosigkeit wieder mehr öffentlich zur Kenntnis genommen wird und vielleicht einen Einfluss auf spürbare Veränderungen des Mathematikunterrichts gewinnt, der über den leider oft zu kleinen Kreis engagierter DidaktikerInnen und LehrerInnen hinausgeht. Wie gehen wir damit um Können wir über das Verhältnis von Wissenschaft und Politik etwas aus unserer Geschichte (New Math) oder der allgemeinen Wissenschaftsgeschichte von Plato über G. Galilei und G. Bruno bis hin zu Deutscher Physik und der Rolle von Wissenschaft in aktuellen Debatten über Klima, Umwelt und Energie etc. lernen Sollen und wollen wir das

PISA ist ein emotional stark besetztes Thema: Die Wogen der Debatte gehen hoch über unsere Wasserglas hinaus und haben offenbar mehr Bedeutung als üblich, wie sich etwa an der Medienresonaz ablesen läßt. Auf der materiellen Ebene geht es um erheblich größere Beträge und Projekte als sonst, auf der ideellen um (ob nur vielleicht oder tatsächlich bleibt genauer zu untersuchen) deutlich mehr Einfluss auf den üblichen Mathematikunterricht. Außerdem ahnen wir, dass Entscheidungen, die im Zeichen von PISA fallen oder nicht fallen, vielleicht wieder für einige ahrzehnte den Status Quo bestimmen – unabhängig davon, welch hervorragende mathematikdidaktische Arbeit dann geleistet wird. Diese Erfahrung haben wir jedenfalls mit der Neuen Mathematik gemacht. Nach ihrem Scheitern war für lange Zeit frustrierende Ruhe, das Erbe des Scheiterns lastet schwer auf uns. Es ist recht frustrierend, wenn man sein ganzes Leben als MathematikdidaktikerIn damit verbringt, wissenschaftlich gut begründete Vorschläge und Konzepte für besseren Mathematikunterricht zu entwickeln und wo immer möglich in Kooperation mit besonders engagierten LehrerInnen auch in der Praxis zu erproben, ohne wirklich etwas in der gewünschten Breite zu verändern, obwohl doch offensichtlich und vielfach empirisch bestätigt ist, dass der Mathematikunterricht im Durchschnitt verbessert werden kann und muss.

Leider war es – vielleicht aufgrund der persönlichen Betroffenheit wesentlicher MathematikdidaktikerInnen – bisher nicht möglich, diese Periode der Mathematikdidaktik historisch präzise aufzuarbeiten. Mir scheint, die heutige Didaktik der Mathematik könnte viel aus einer solchen Aufarbeitung lernen, insbesondere über das Verhältnis von konomie, Politik, Schul-wirklichkeit und Didaktik. Schön wäre es, wenn man Fehler, die damals gemacht wurden, heute vermeiden könnte, indem man aus dieser Geschichte lernt.

Was tun Bevor ich der Frage nachgehe, erwähne ich noch einmal ausdrücklich, dass ich meine Überlegungen zur Diskussion stelle und selbstverständlich nichts Verbindliches für alle MathematikdidaktikerInnen fixieren will. Die Überlegungen gehen in zwei Richtungen: Was können und sollen wir alle, als Verein tun Und was machen wir einzeln, als WissenschaftlerInnen, die als ExpertInnen beratend tätig sind oder selbst politisch tätig werden, z.B. mit dem Ziel, als MinisterIn für Bildung (oder Schule, LehrerInnenausbildung etc.) zuständig zu sein. Zum letzteren gebe ich vorab einen kleinen Hinweis: Es gibt keinen empirischen Beleg dafür, dass MathematikdidaktikerInnen die besseren PolitikerInnen sind.

Die GDM ist seit einigen ahren bildungspolitisch aktiv, veröffentlicht Stellungnahmen, auch gemeinsam mit anderen wissenschaftlichen Vereinigungen. Aus meiner Sicht sind diese Stellungsnahmen wohl erwogen und wissenschaftlich korrekt, aber leider nicht so wirksam wie erwünscht. Vermutlich wird dieser Punkt deutlicher, wenn wir einen unerwarteten Vergleich starten: Wie erfolgreich sind wir als Lobby für guten Mathematikunterricht oder für eine gute mathematische Ausbildung von SchülerInnen und StudentInnen im Vergleich zu anderen Lobbies, die auf Regierungen einwirken Offenbar sind Landwirtschaftsverbände oder Pharmalobbies wesentlich erfolgreicher. Der größere Erfolg liegt aus meiner Sicht nicht an den besseren Argumenten, wohl aber an der professionelleren Organisation (Stichwort: etwa ein großes Büro in Brüssel) und an der wesentlich impertinenteren Forderungsstrategie. Im Klartext: Wir fordern viel zu wenig und viel zu selten sehr viel mehr Geld und schon gar nicht für uns als Organisation (damit wir ein großes Büro in Brüssel unterhalten können). Am Beispiel: Im Zusammenhang mit den Ergebnissen von PISA und o. Wird immer wieder gefordert, dass auch hierzulande (wie in Ländern, die bei PISA besser abgeschnitten haben) LehrerInnen ihre gesamte Arbeitszeit in der Schule verbringen sollen. Als erfolgreiche und selbstbewusste Lobby müsste man darauf nicht wie bisher reagieren, sondern offensiv: Selbstverständlich, gute Idee Schauen wir uns doch gleich mal hier im Ministerium oder im Industriellenverband um, wo die Forderung an die LehrerInnen so vehement erhoben wird. Zu jedem Arbeitsplatz für einen Akademiker bzw. eine Akademikerin gehören selbstverständlich ein Büro, ein Sekretariat sowie einige Stellen für nichtakademische MitarbeiterInnen. Wie würde das Ministerium oder die Industriellenvereinigung arbeiten, wenn alle ohne MitarbeiterInnen in einem Raum sitzen müssten und als Arbeitsfläche jeweils eine halbe Schulbank hätten Das kann doch keine ernste Frage sein Also brauchen wir zur Realisierung der berechtigten und unterstützenswerten Forderung für jede einzelne Lehrkraft ein Büro, ein Sekretariat sowie einige Stellen für nichtakademische MitarbeiterInnen Wie bitte Zu unverschämt Nun gut, für den Beginn würden vielleicht einige Stellen für Netzwerkbetreuung, Administration, Betreuung der Sammlungen und naturwissenschaftlichen Experimentalräume sowie der Medien für den Unterricht und nicht zuletzt aller administrativen Tätigkeiten genügen, die jetzt von pädagogischer und fachlicher Tätigkeit abhalten. Das klingt auf den ersten Blick extrem und ungewohnt. Wenn es aber über einige ahre bei jeder passenden und unpassenden Gelegenheit wiederholt wird, geraten langsam Politik und Wirtschaft unter Rechtfertigungsdruck – und nicht die LehrerInnen.

Wer mag schon solche Lobbyarbeit betreiben Wir nicht – wir sind ja MathematikdidaktikerInnen. Wer sonst Hauptberufliche Lobby-Leute. Im Büro in Brüssel arbeiten ja auch nicht die besten LandwirtInnen, sondern speziell ausgesuchte LobbyistInnen, die offenbar ihren ob gut machen.

Damit öffnet sich auch der Blick auf einen für die bildungspolitische Wirksamkeit ganz wichtigen Punkt, nämlich die unterschiedlichen Spielregeln in den verschiedenen Bereichen der Gesellschaft. Es wäre sehr naiv anzunehmen, dass die Bildungspolitik einfach das wissenschaftlich beste mathematikdidaktische Konzept auswählt und dann umsetzt. Selbst wenn es das beste Konzept gäbe (sehr im Widerspruch zu dem, was die Mathematikdidaktik über ahrzehnte hinweg mühsam erreicht hat, nämlich das Wissen, dass es solch ein universelles bestes Konzept nicht gibt), ist es nicht einmal selbstverständlich, dass die Bildungspolitik überhaupt irgendeine mathematikdidaktische Expertise einbezieht, wenn sie Entscheidungen über Mathematikunterricht fällt.

Welche Regeln gibt es denn in der Bildungspolitik Zur Beantwortung dieser Frage helfen wie so oft Theorie und Praxis in unterschiedlicher Weise. eder kann versuchen, selbst bildungspolitisch aktiv zu werden, Kontakt zu PolitikerInnen, Leuten aus den Ministerien oder Medien aufzunehmen und direkt oder indirekt Einfluss zu nehmen. Wer so etwas erstmals probiert, wird – vielleicht mit Überraschung – feststellen, dass viele andere Menschen es ebenfalls versuchen, auch solche, die ersichtlich nichts von Mathematikdidaktik verstehen. Wer es theoretisch angeht, wird zunächst feststellen, dass die möglicherweise hilfreichen Wissenschaften zur Analyse Politologie, Soziologie oder Gesellschaftswissenschaften sind, Mathematikdidaktik aber nichts oder nur sehr wenig darüber aussagt, wie sich guter Mathematikunterricht bildungspolitisch realisieren lässt. Mit anderen Worten: Als MathematikdidaktikerInnen sind wir in der Bildungspolitik genauso Amateure wie die meisten anderen, die in diesem Feld tätig sind oder sein wollen – inklusive vielen von den Menschen, die derzeit ein Ministeramt innehaben. Selbstverständlich gibt es in der Mathematikdidaktik auch KollegInnen, die zusätzlich zu ihrer mathematikdidaktischen Qualität auch im Bereich Theorie und Praxis der Bildungspolitik qualifiziert sind, weil sie sich über ihr eigentliches Fachgebiet hinaus damit beschäftigt haben.

Solch eine Betätigung kann auch dazu führen, dass KollegInnen in den Sog parteipolitischer Auseinandersetzung geraten, wie es in sterreich am Beispiel des Buches von Hopmann u.a. geschehen ist. Das Buch wurde in sterreich zum politischen Streitpunkt zwischen VP und SP . Ich skizziere diesen Streit hier kurz, weil damit zugleich erläutert wird, in welcher Hinsicht die Frage Hält PISA, was es verspricht gesellschaftlich, ökonomisch und politisch relevant ist.

Eine der HerausgeberInnen, Gertrude Brinek, ist VP Wissenschaftssprecherin. Ihr und der OVP insgesamt wurde vorgeworfen, mit dem Angriff auf PISA und dem (zu) hohen Stellenwert, der den Testergebnissen in der österreichischen Bildungspolitik zugestanden wird, die ahre der VP Bildungspolitik unter Ministerin Gehrer verteidigen zu wollen. Wenn PISA falsch misst oder überinterpretiert wird, sei die Bildung(spolitik) in sterreich gar nicht so schlecht, wie sie laut PISA Testergebnissen ist. PISA ist für weite Kreise in der SP jedoch gleichbedeutend mit der Hoffnung, nun mit dem Rückenwind aus der Wirtschaft und der OE D endlich doch noch den jahrzehntelangen Bildungsstreit zu gewinnen und Gesamtschulen einzuführen. Wenn PISA kritisiert wird, wird die Hoffnung in Frage gestellt und deshalb gibt es sehr heftige Reaktionen aus der SP , die weit über den alltäglichen Parteienstreit hinausgehen.

Fazit Die **GDM als Lobby** muss lernen, noch besser wirksam zu sein, wenn sie tatsächlich Verbesserungen erreichen will. Das bildungspolitische Engagement von **einzelnen MathematikdidaktikerInnen** als BeraterInnen oder gar als BildungspolitikerInnen muss sich offenbar nach den Spielregeln der Politik richten, um erfolgreich zu sein. Nach meinen Eindrücken aus den letzten ahren ist unser Einfluss und Erfolg jedenfalls geringer als erhofft.

Literatur

Stefan Thomas Hopmann, Gertrude Brinek, Martin Retzl (Hg./Eds.): PISA zufolge PISA – PISA According to PISA. Hält PISA, was es verspricht – Does PISA Keep What It Promises , LIT VERLAG, Wien – Zürich 200

Katja MAASS, hristoph MIS HO, Dagmar KARRER, Freiburg

Stratum – Modellieren in der au tschule

In der didaktischen Diskussion besteht Konsens darüber, dass Modellierungen in den Mathematikunterricht integriert werden sollen. Die hier beschriebene Studie wendet sich der Hauptschule zu. Basierend auf theoretischen Konzepten sollen Unterrichtseinheiten entwickelt und empirisch evaluiert werden.

Stratum im berblick

Wesentliche Forschungsfragen sind: Fördern realitätsbezogene Aufgaben die Modellierungskompetenzen und die mathematischen Kompetenzen der Hauptschüler Haben Modellierungsaufgaben Einfluss auf die Einstellungen und motivationalen Merkmale der Hauptschüler Theoretische Grundlage für die Studie sind empirische Untersuchungen zum Mathematikunterricht, insbesondere in der Hauptschule, Befunde zur Unterrichtsqualität, die Diskussion um Beliefs und um Modellierungen. Stratum hat im September 2007 begonnen und läuft bis August 2010. Die Intervention wird im zweiten ahr, also im Schuljahr 200 /0 in 6. Klassen erfolgen. Während dieser Zeit sollen in den Unterricht ca. bis 10 Doppelstunden zum Modellieren integriert werden. Interventionsgruppe und Kontrollgruppe umfassen je 20 Klassen. In der summativen Evaluation (Pre- und Posttest) sowie in der formativen Evaluation werden eine Vielzahl von Variablen erhoben und zwar auf Schülerseite (Kompetenzen in Mathematik, im Modellieren, im Lesen, Weltwissen; motivationale Merkmale; Beliefs und wahrgenommener Unterricht) und auf Lehrerseite (fachwissenschaftliche, didaktische, methodische und pädagogische Expertise, Beliefs, motivationale Merkmale). Im Folgenden wird der Aspekt der Aufgabenentwicklung exemplarisch dargestellt.

Modellierungsaufgaben - f r den Unterricht und zum Testen

Theoretischer Hintergrund: Modellierungsaufgaben sind offene, komplexe und realitätsbezogene Aufgaben, zu deren Lösung ein Modellierungsprozess durchlaufen werden muss. Dazu sind folgende Schritte nötig: 1. Text und Situation verstehen, 2. Realmodell aufstellen, 3. mathematisches Modell aufstellen, 4. Lösung innerhalb des mathematischen Modells finden, 5. Lösung interpretieren, 6. Lösung

[1] Stratum steht für Strategies for teaching understanding in and through modelling und wird vom Forschungsverbund Hauptschule gefördert. Stratum ist eine Kooperation zwischen der PH Freiburg, der PH Ludwigsburg, dem RP Freiburg und zwei Schulen im Bereich Freiburg.

validieren (Blum Leiß 2006). Modellierungskompetenzen umfassen die zum Durchlaufen des Modellierungsprozesses nötigen Teilkompetenzen: Kompetenzen im Argumentieren, Kompetenzen über das Modellieren auf einer Metaebene nachzudenken sowie die Fähigkeit, die Möglichkeiten der Mathematik zum Lösen von realen Problemen zu sehen (Maaß 2004). Die Bearbeitung von *Textaufgaben*, die von den üblichen Textaufgaben dadurch abweichen, dass sie weniger oder mehr Angaben als nötig beinhalten, können erste Schritte auf dem Weg zum Erwerb von Modellierungskompetenzen darstellen (Verschaffel 2002). Diese Aufgaben werden im Folgenden als unterbestimmt bzw. überbestimmt bezeichnet.

Pilotstudie I

In einer qualitativen Interviewstudie wurden 15 Hauptschüler aus allen ahrgängen verschiedene, eigens entwickelte Modellierungsaufgaben vorgelegt. Die Interviews wurden mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring evaluiert.

Die Aufgaben sollten für den Einstieg in das Modellieren in der Hauptschule geeignet sein. Dazu wurden einfache über- und unterbestimmte Aufgaben mit schülernahen Kontexten ausgewählt. *Beispielaufgabe: Ingo meint, dass er viel zu viel Zeit in der Schule verbringt. „Die meiste Zeit des Jahres sitze ich in der Schule!“, stöhnt er. Was meinst du dazu?*

Die Pilotstudie I zeigt, dass Modellieren in der Hauptschule grundsätzlich möglich ist. Die Schüler zeigen Interesse für unterschiedliche Realitätsbezüge, wenn sie die Aufgaben verstehen. Allerdings gibt es sehr große Leistungsunterschiede, außerdem verunsichern die neuen Aufgabenarten die Schüler. Motivationale Hilfen haben einen positiven Einfluss auf die Schüler. Probleme beim Modellieren lassen sich in allen Teilschritten des Modellierungsprozesses identifizieren. Basierend auf diesen Erkenntnissen sowie dem theoretischen Hintergrund wurden Aufgaben und Unterrichtseinheiten für Stratum entwickelt.

Pilotstudie II – Modellierungsaufgaben zum Testen

Eine wesentliche Frage ist, ob die Modellierungskompetenzen mit offenen oder geschlossenen Aufgaben getestet werden sollen. Haines und rouch (2005) haben gezeigt, wie man geschlossene Aufgaben zum Modellieren entwickeln kann. In PISA wurden offene und geschlossene Formate verwendet und Baumert und Köller (1) stellen fest, dass die offenen Aufgaben keinen Gewinn an Validität mit sich bringen. Für ein offenes Aufgabenformat spricht, dass Modellierungsaufgaben selbst offen sind und die Schüler auch lernen müssen, selbstständig zu argumentieren. Für ein geschlossenes Format spricht, dass die Auswertung objektiver und ökonomischer ist und weniger Anforderungen an die Motivation und Fähigkeit zur Verschriftlichung stellt, dafür aber u. U. höhere Anforderungen an die Lesekompetenz. Für die Pilotierung der Testaufgaben wurden die beiden folgenden Aufgaben ausgewählt:

So: hristian liebt die 3 **So**mmermonate uni, uli und August. Da bin ich fast 1000 Stunden im Wasser, freut er sich. Sein Freund David glaubt das nicht und will es nachrechnen.

Ma: In den letzten ahren gab es in den Städten und Dörfern am Rhein immer wieder Hochwasser. Die Menschen wurden in Notunterkünften untergebracht. Als Notunterkünfte werden auch häufig Turnhallen benutzt. Dadurch haben die Menschen wenigstens eine **Ma**tratze, auf der sie schlafen können. Wie viele Menschen können in einer Turnhalle auf Matratzenlagern untergebracht werden

Für beide Aufgaben wurde nun ein offenes (OF) und ein Multiple- hoice (M)-Format entwickelt. Da in der Pilotstudie I alle Teilschritte im Modellieren bei der Bearbeitung durch die Hauptschüler identifiziert werden konnten, bietet es sich an, die Modellierungsaufgaben im Test auch in Teilaufgabe zu untergliedern. Die Anforderung erscheint in diesem Fall zwar geringer als bei einer ganz offenen Formulierung, sie stellt aber sicher, dass das offene Format und das geschlossene Format vergleichbar sind. Für den Teilschritt Realmodell bilden sind beispielsweise folgende Items zur Aufgabe **So** entwickelt worden:

M : Welche Überlegung ist für das Lösen der Aufgabe völlig unwichtig
O hristian wohnt sehr dicht am See.
O Es regnet 10 Tage im Monat
O Auf dem See sind 5 Segelschiffe.
O hristian ist am Tag ungefähr 4 Stunden im Wasser.
O Ein Monat hat ungefähr 30 Tage.

OF: Was musst du alles überlegen und was musst du alles schätzen, um die Aufgabe zu lösen Schreibe deine Überlegungen und Schätzungen auf

Methoden: Es wurden zwei Testversionen entwickelt (V1: So M , Ma OF, V2: Ma M , So OF). In der Pilotierung hat jeder Schüler in der Stichprobe (N 75) jede Version zu zwei verschiedenen Testzeitpunkten (Abstand ca. 1 Woche) bearbeitet, innerhalb einer Klasse bekam jeweils die Hälfte V1, die andere Hälfte V2, nach einer Woche war es umgekehrt. Die offenen Aufgaben wurden in der Auswertung geratet mit 0 bis 2 Punkten, etwa ein Drittel der Schüler wurden doppelt geratet. Die Interraterreliabilität wurde durch Interklassenkorrelation bestimmt. Sie lag jeweils über .6 und war damit zufrieden stellend. Für die geschlossenen Items gab es 0 oder 1 Punkt, also insgesamt pro Aufgabenteil 5 Punkte.

Ergebnisse: Die Reliabilität über alle Teilaufgaben im M -Format liegt bei .572, über alle Aufgaben im offenen Format bei .4 1. Zwar erwartet man bei homogenen Konstrukten eine Reliabilität von . , da es sich bei dem Konstrukt Modellierungskompetenzen um ein sehr komplexes Konstrukt handelt, kann die Reliabilität nicht bei . liegen. Bei PISA wurde für Problemlösekompetenzen eine Reliabilität von .6 erreicht und die Reliabilität der Aufgaben im M -Format kommt diesem Wert sehr nahe. Zwischen dem Summenwert von allen Teilaufgaben im M -Format und dem Summenwert von allen Teilaufgaben im offenen Format liegt eine höchst signifikante Korrelation von .305 vor. Vergleicht man die Formate bei beiden Aufgaben separat für jeden Inhalt, so liegt bei der Aufgabe So eine niedrige Korrelation und bei der Aufgabe Ma keine Korrelation vor. Zwischen beiden Aufgaben im M -Format liegt eine signifikante mittlere Korrelation von .3 0 vor, die möglicherweise auf intelligentes Raten deutet. Viele offene Teilaufgaben wurden überhaupt nicht bearbeitet. *Konsequenzen*: Die höhere Reliabilität im M -Format, die Korrelation zwischen den beiden Aufgaben im M -Format sowie die Korrelation zwischen den Summenwerten über beide Aufgaben im M -Format einerseits und im offenen Format andererseits sowie das Nichtbearbeiten vieler offener Teilaufgaben sprechen dafür, die Modellierungskompetenzen im geschlossenen Format zu testen. Dagegen spricht nach wie vor, dass das schriftliche Argumentieren zu den Kompetenzen im Modellieren gehört und im M -Format nicht getestet wird. Eine Lösung für das Projekt kann darin liegen, zwei Aufgaben im M -Format und ergänzend eine offene Aufgabe zu wählen.

Literatur

Baumert, ürgen, Köller, Olaf (1): Nationale und internationale Schulleistungsstudien: Was können sie leisten, wo sind ihre Grenzen In: Pädagogik 50 (6),12-1 .

Blum, Werner, Leiß, Dominik (2005): Modellieren im Unterricht mit der Tanken -Aufgabe. In: mathematik lehren 2005 (12).

Haines, hristoph, rouch, Rosalind, Davis, ohn (2001): Understanding students' modelling skills. Aus: . Matos, K. Houston, W. Blum, S. arreira (Eds.): Modelling and mathematics education: I TMA- . hichester: Horwood publishing, 366-3 0.

Verschaffel, Lieven (2002): Taking the modelling perspective seriously at the elementary school level: Promises and pitfalls. PME 26, 1, 64 - 0.

Hartwig MEISSNER, Münster

Technology related Arithmetic

Technology has changed daily life and mathematics teaching in upper classes. But in most countries all over the world we still waste more than 50% of the time in mathematics lessons in grades 3 and 4 in primary schools (Schipper 1998, Schmassmann 2007) to teach and train paper & pencil techniques which later on will not be used any longer, neither inside nor outside from schools. In this paper we will present ideas how to get a more technology oriented arithmetic curriculum for primary schools.

We will not *discuss here the use of calculators[1]. We will concentrate on traditional goals and how they should be changed, goals like number sense, mental arithmetic, estimation abilities, rounding and approximation skills.*

Brief Analysis

Paper & pencil techniques were developed to get a tool for computing with big numbers. Other tools were logarithms or the slide rule (*Rechenschieber* in German) or different types of an abacus or different types of tables or sticks and other mathematical devices. Our modern tools for computing with big numbers now are calculators or computers. Using these machines is much more comfortable than practicing paper & pencil techniques, they are quicker and safer to get the correct result. Thus paper & pencil techniques are not practiced any longer outside from schools.

Teaching and learning paper & pencil techniques in primary schools is combined with two problems. First, the numbers get reduced into sequences of digits (*Rechenzahl* in German). The original meaning of the number as a measurement number (*Groesse*) or a quantity number (*Masszahl*) gets lost. Of course, then also the computation result is just a sequence of digits and often for the student it is not easy to check if all the digits are correct. Second, young children get confronted with the burden to learn different techniques to manipulate sequences of digits. These syntactical activities are quite different from the semantic activities they had practiced before. Very often a necessary understanding is missing.

These two problems are more fundamental than usually discussed. Introducing paper & pencil skills demands a change from common sense experiences on to an algorithmic thinking. Distinguishing these two types of mental processes we refer to a polarity in thinking which already was discussed before by many other authors. Vygotzki talks about spontaneous and

[1] But there are references below which discuss the use of calculators in more detail.

scientific concepts, Ginsburg (1977) compares informal work and written work, or Strauss (1982) discusses a common sense knowledge vs. a cultural knowledge. Strauss especially has pointed out that these two types of knowledge are quite different by nature, that they develop quite differently, and that sometimes they interfere and conflict ("U-shaped" behavior).

Via the *Dual Process Theories* we get an explanation: Our cognition operates in two quite different modes which we will call here *System 1* and *System 2* (for more details see Kahneman/Frederick 2005 and Leron/Hazzan 2006). Working on a mathematical problem will happen in parallel where a spontaneous or intuitive thinking (*System S1*) may interfere with an analytical or reflective thinking (*System S2*). S1 processes are fast and automatic and need not much working memory, but they are very resistant against changes. To transform or to coordinate S1 experiences into appropriate and more flexible S2 experiences the processes must become conscious. Discussions are an important tool to bring unconscious processes into consciousness.

Number Sense

In the German language there are two words with a different meaning. *Zahlbegriff* is the term for describing the analytical and logical aspects. With *Zahlgefuehl* or *Zahlengefuehl* the intuitive and emotional aspects are summarized. It is interesting to see that most of the German literature concentrates on *Zahlbegriff* only. Most authors avoid discussing aspects of *Zahlgefuehl* (except the dissertation Lange 1984). In the English literature however there is only the one word "number sense" and it describes a more balanced view. Here the term includes both aspects, common sense and analytical components: „Number sense refers to an intuitive feeling for numbers and their various uses and interpretations; an appreciation for various levels of accuracy when figuring; the ability to detect arithmetical errors, and a common sense approach to using numbers. ... Above all, number sense is characterized by a desire to make sense of numerical situations (Reys 1991, cited in Sowder/ Schappelle, 1994, p. 342).

Number sense not only refers to numbers but also to both, to conscious and to unconscious techniques to manipulate numbers, and it also includes a feeling about possible outcomes of these techniques. With a good number sense we roughly can predict the result of calculations, sometimes spontaneously (intuitively) and sometimes consciously (by approximating). Especially we can develop an intuitive feeling for additive and multiplicative structures. We can get a feeling for computation results like skilled painters sometimes have when they decide without any measuring how much wallpaper they will need for that room.

Number Sense and Technology

Number sense as described above is necessary to remain mentally independent up to a certain degree from the use of technology. A good number sense allows us (intuitively in *System S1*) to control the results or to discover computation mistakes. And there are possibilities to use technology to further the development of that number sense, see (*)-references below.

Using technology consciously is done in *System S2*. In a technology related arithmetic we therefore need a balance to remain mentally independent up to a specific degree from just pressing buttons. We need spontaneous reactions in *System S1* if something goes wrong. These reactions will depend on the size and the order of numbers used and on the operations performed.

Number Sense in Different Number Spaces

In daily life not all numbers are equally important. Often rounded numbers are used, e.g. for the size of a swimming pool or a garbage container, for the distance between two cities or between the earth and the moon, or for the weight of an elephant or a lion, etc. "To make sense of a numerical situation" most of the multi digit numbers are unimportant, in daily life they are replaced by rounded numbers.

This means we intuitively distinguish (in *System S1*) between unimportant (multi digit) numbers and important (rounded) numbers. Putting all these "important" numbers on the number line we do not get an equidistant pattern but a pattern which looks more like a logarithmic pattern. It seems as if we determine the importance of numbers in a similar way as we perceive the intensity of light or of sounds (Weber-Fechner law). This would mean that especially in large number spaces there are only a few "important" numbers. The larger the number space is the more unimportant numbers it will have. Do we still need then the paper & pencil techniques for all these unimportant numbers, when we have calculators?

Future of Paper & Pencil Skills

We argue paper & pencil techniques should disappear in a technology related curriculum. Instead we suggest introducing two new strands. On the one hand we recommend using a calculator when we need quick results or when it can be used as a methodological tool. The other strand must expand the traditional mental arithmetic curriculum. Here we round big numbers and do mental computations then with the rounded numbers. We must further more intensively traditional activities like skill training (addition tables, multiplication tables, stimulus response knowledge, etc.), applying commutative, associative, distributive law and other rules, applying consciously known properties, training of tricks, etc. There also are possibilities to train mental arithmetic via the use of calculators (Meissner 2006).

The new curriculum strand *Mental Arithmetic* also must include activities how to detect arithmetical errors and calculator activities to develop a number sense for additive and multiplicative structures. For more details see the "Discussion Forum" web page below.

References[2]

Ginsburg, H. (1977). Children's Arithmetic. New York: Van Nostrand

Kahneman, D. & Frederick, S. (2005). A Model of Heuristic Judgement. In K.J Holyoak & R.J.Morrison (Eds.), The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning, pp. 267-293, UK: Cambridge University Press

(*) Lange, B. (1984). Zahlbegriff und Zahlgefühl. Lit-Verlag, Muenster, Germany

Leron, U. & Hazzan, O. (2006). The Rationality Debate: Application of Cognitive Psychology to Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics, Vol. 62/2.

(*) Meissner, H. (2007). Arithmetikunterricht modernisieren. In: Beitraege zum Mathematikunterricht 2007, pp. 879-882. Franzbecker Verlag Hildesheim, Germany

(*) Meissner, H. (2006). Taschenrechner in der Grundschule. mathematica didactica, 29. Jg., Heft 1, pp. 5-25. Franzbecker Verlag Hildesheim, Germany

Schipper, W. (1998). Schriftliches Rechnen - ein Fossil mit Zukunft. In: Grundschulzeitschrift, H. 119, pp. 10-16

Schmassmann, M. (2007). Personal comments describing Situations in Switzerland

Sowder, J.; Schappelle, B. (1994). Number Sense-Making. In: Arithmetic Teacher 41, pp. 342-345, NCTM. Reston VA, USA

Strauss, S. (Ed., 1982). U-shaped Behavioral Growth. Academic Press, New York.

See also the web pages

(*) Discussion Forum on the Future of Paper & Pencil Skills:
http://wwwmath1.uni-muenster.de/didaktik/u/meissne/WWW/Forum-P&P.htm

(*) Investigations with Calculators in Primary Schools:
http://wwwmath1.uni-muenster.de/didaktik/u/meissne/WWW/TRint.htm

(*) Summary report on TIM Calculator Projects in Germany:
http://wwwmath1.uni-muenster.de/didaktik/u/meissne/WWW/TR.htm

---

[2] References marked with an asterix (*) also discuss possibilities how and why to use calculators in a technology related arithmetic education

Marco MEYER, Engelbert NIEHAUS, Koblenz-Landau

Förderung von Schüler(-inne)n mit besonderer mathematischer Begabung am Beispiel der Fuzzy-Theorie

Zielsetzung ist es, die Förderung von Schülerinnen und Schüler mit besonderer mathematischer Begabung in regulären universitären Lehrveranstaltungen am Beispiel der Behandlung der Fuzzy-Theorie zu erläutern. Das Thema wird sowohl in den Bezügen zu den Lehrplänen der Sekundarstufe als auch in Bezug auf die Bedeutung für die Lehrerbildung dargestellt.

1. Mathematikdidaktische Konzeption der Lehrveranstaltung

Das im Rahmen von "WissenSchaf(f)t Zukunft" (Land RLP) und von der Deutschen Telekom Stiftung geförderte Projekt zielt auf die Einführung eines Förderprogrammes für Schülerinnen und Schüler mit besonderer Begabung an der Universität Koblenz-Landau (Campus Landau) als Frühstudierende. Neben der originären Förderung von Hochbegabten soll die Hochbegabtenförderung selbst zu einem integrativen Bestandteil der Lehrerausbildung entwickelt werden. Bevor didaktische Themen zu den individuellen Begabungen (z.B. Diagnostik und Förderung) mit Studierenden behandelt werden, ist es aus Gründen der Praxisorientierung sinnvoll, eine Vorstellung davon zu gewinnen, zu welchen außerordentlichen Leistungen Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, um daraus die Notwendigkeit für entsprechende Differenzierungsmaßnahmen im Unterricht zu erkennen. Durch eine Integration in die reguläre Lehramtsausbildung und das gemeinsame Problemlösen in Lehrveranstaltungen bleiben diese besonderen Begabungen kein abstrakter didaktischer Studieninhalt, sondern der tägliche Umgang mit Lernenden aus der Schule lässt die Bandbreite individueller Schülerleistungen sowie die Notwendigkeit der Diagnostik und Förderung deutlich werden. Umgekehrt profitieren auch die teilnehmenden kleinen Schülergruppen von dieser Integration in die Lehrerausbildung, denn sie werden durch die angehenden Lehrerinnen und Lehrer bei den Problemlöseaufgaben im Kontext der Lehrveranstaltungen betreut.

2. Lehrplanbezug zur Fuzzy-Theorie

Grundlegend für die Fuzzy-Theorie ist der Funktionenbegriff, welcher im Lehrplan für die Realschule über alle Klassenstufen hinweg, unter der Leitidee L4 [6], Funktionaler Zusammenhang, immer wieder behandelt und erweitert wird. Das grundlegende Verständnis von Funktionen wird für die Definition der Zugehörigkeitsfunktion benötigt, denn unter der

Zugehörigkeit von x zu einer Menge wird funktional durch den Wert f(x) aus dem Intervall [0,1] beschrieben. Bereits in der Orientierungsstufe werden Daten graphisch dargestellt, jedoch weder der Funktionenbegriff noch eine entsprechende formale Vorschrift erwähnt. In Klasse 7/8 werden Zuordnung, also lineare Funktionen, behandelt, an Graphen dargestellt und später mit entsprechenden Funktionstermen und -vorschriften beschrieben. Dies ist für die Interpretation von Zugehörigkeitsfunktionen wesentlich.
In Klassenstufe 9 erfolgt dann eine Erweiterung der Funktionenbegriffes über die nicht linearen Funktionen und den Potenzfunktionen in Klasse 10.
Als weitere Grundlage der Fuzzy-Logik werden logische Strukturen benötigt.
Mengenlehre ist notwendig um Definitionsbereiche einzuschränken. Die Mengenlehre wird abstrahiert und die Verknüpfung zwischen Logik und Mengen hergestellt und auf die Fuzzy-Theorie erweitert.

$$x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$$

In der Literatur kann festgestellt werden, dass Schülerinnen und Schüler mit besonderer mathematischer Begabung die Fähigkeit besitzen, mathematisch-logische Strukturen schnell zu durchdringen . In Fördermaßnahmen wird dieses Thema selbst thematisiert und auf die Fuzzy-Theorie erweitert.

3. Behandlung der Fuzzy-Logik in den Lehrveranstaltungen

Fuzzy-Logik ist einer Erweiterung der Boolschen Logik. Die Aussagen werde hierbei durch Fuzzy-Mengen dargestellt.

Eine unscharfe Menge A (Fuzzy-Menge) wird charakterisiert durch eine Funktion μ_A von einer Grundmenge Ω in das reelle Einheitsintervall [0,1].

$$\mu_A : \Omega \to [0,1]$$
$$x \to : \mu_a(x) \in [0,1]$$

Die charakteristische Funktion μ_A wird Zugehörigkeitsfunktion genannt, ihre Werte heißen Zugehörigkeitsgrade zur Menge A.

Damit ist es nun möglich ist, Alltagsbegriffe wie "gut" oder "schlecht" mit individuellen Zugehörigkeitsfunktionen darzustellen (Anwendungsorientierung).
In den Veranstaltungen sollten Schüler und Studierende gemeinsam Probleme mit Hilfe von Stochastischen Netzen, Fuzzy-Logik und Neuronalen Netzen modellieren und Lösungen finden. Die Fuzzy-Logik diente hierbei zur Implementierung von unscharfem Expertenwissen.
Als Voraussetzung wird hier der Funktionenbegriff wie bereits in Punkt 2

geschildert benötigt. Desweiteren sind auch Kenntnisse aus der formalen Logik nötig, um Aussagen verknüpfen und Folgerungen ziehen zu können. So kann die Fuzzy-Logik eigentlich erst eingeführt werden, wenn ein solides Grundverständnis für die Logik auf formaler Ebene mit Wahrheitstafel vorhanden ist.
In diesem Punkt ist die Zusammenarbeit zwischen Studierenden und Schülern gefragt ist, denn die Schülerinnen und Schüler haben in diesem Gebiet trotz der Kompetenzen im logisch-strukturierten Denken kein formales Grundlagenwissen, welches in Kooperation mit der Studierenden erarbeitet werden soll. Von den Studierenden verlangt diese Tatsache zunächst einmal eine solide Basis des benötigten Wissens, sowie ein didaktisch sinnvolles Vorgehen im Umgang mit den Schülern in der Gruppe, um dieses Grundlagenwissen mit ihnen zu erarbeiten. Ein weiterer Vorteil der Zusammenarbeit ergibt sich aus dem Erfahrungsvorteil der Studierenden, der es ihnen erlaubt, beim gemeinsamen Problemlöseprozess die mathematischen Aspekte in unterschiedlichen Ansätze zu erkennen, die Schüler bei deren mathematischen Formalisierung der Ideen zu unterstützen, aber auch die formalen Aspekte des Prozesses selbst korrekt zu notieren.

4 Fazit

Probleme bei der Integration der SchülerInnen mit besonderer mathematischer Begabung entstanden vor allem an den Stellen, an welchen die mathematischen Grundlagenkenntnissen der Studierenden gefordert wurden, da diese zum Teil nur sehr lückenhaft vorhanden waren. Ein weiterer Problempunkt stellte die teilweise fehlende Kreativität der Lehramtsstudierenden bei der Modellierung dar. Diese versuchten sehr häufig, möglichst vollständige und komplexe mathematische Modelle von Beginn an, ohne sinnvolle Reduktionen im ersten Schritt, zu erstellen, was recht schnell zum Scheitern führte, ebenso wie zum sofortigen Verwerfen von Ideen, zu welchen keine geeigneten mathematischen Mittel zu existieren schienen. Auch Mängel in der Formalisierung von mathematische Ideen in der Sprache der Mathematik stellte die Lerngruppen vor Probleme. Für Schülerinnen und Schüler war die mathematische Schreibweise zwar zunächst nicht sehr vertraut, aber das Erweitern und Entwickeln von mathematischen Modellen und die Kreativität im Modellierungsprozess müssen bei den SchülerInnen positiv erwähnt werden. Herauszustellen ist die Unvoreingenommenheit, mit der sie an die Probleme herangingen und sehr interessante Ansätze anboten und keine Angst vor Fehlern zeigten. Die fehlenden Grundkenntnisse und Mängel in der formalen Sprache brachten hier keine großen Nachteile mit sich, da die SchülerInnen diese Lücken sehr schnell schliessen konnten.

Insgesamt kann man daher vermuten, dass sich das Thema Fuzzy-Logik mit der entsprechenden didaktischen Reduktion auch im Unterricht der Sek. I im Rahmen von Differenzierungsmaßnahmen verwenden lässt, denn Fuzzy-Theorie schafft hier eine Brücke zwischen Alltagsargumentation mit logischen Strukturen und der mathematischen Modellierung. Ferner ergibt sich aus dem gemeinsam Problemlösen von SchülerInnen und Studierenden im Umgang mit offenen problemorientierten Aufgaben die folgende empirische Fragestellung: In welchem Maße wirkt sich die Kreativität und Offenheit der Lehramtsstudierenden bei der eigenen Problemlösung auf die Auswahl und Strukturierung von offenen Lernumgebungen als spätere Lehrerin oder Lehrer aus.

5 Literatur

[1] Biewer, Benno, Fuzzy Methoden, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1997)

[2] Erfahrungsbericht (2000), Schülerin an der Universität Köln, http://mi.uni-koeln.de/Math-Net/mn_categories/pages/hb_unijournal.html

(URL geprüft am 01.03.2008)

[3] Feuring, Thomas, Fuzzy-Neuronale Netze, Dissertation, Münster (1995)

[4] Meyer, Marco, Niehaus, Engelbert, Providing Health for rural Communities: Fuzzy data and fuzzy rules for decicion support, 2006

[5] Meyer, Marco; Niehaus, Engelbert, Sustainability by application of fuzzy theory to decision support for health service delivery, 2007

[6] Neubauer, Aljoscha, Stern, Elsbeth, Lernen macht intelligent. Warum Begabung gefördert werden muss, Dva (Februar 2007)

[7] Rahmenlehrplan Mathematik, Klassenstufen 5 – 9/10, Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz (2007)

[8] Schulte, Ulrich, Einführung in Fuzzy-Logik, Fortschritt durch Unschärfe, Franzis Verlag GmbH, München (1993)

[9] Tücke, Manfred, Schulische Intelligenz und Hochbegabung für (zukünftige) Lehrer und Eltern, (Osnabrücker Schriften zur Psychologie; Band 9), 2005

[10] Vock, Miriam; Preckel, Franzis; Holling, Heinz, Förderung Hochbegabter in der Schule, Hogrefe-Verlag, (2007)

Wolfram Meyerhöfer, Potsdam

Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden

Im Umgang mit verfestigten Rechenproblemen wird innerhalb der Mathematikdidaktik am Verstehen der Schüler gearbeitet. Trotzdem wird auch hier meist der Begriff der Rechenschwäche oder andere Begriffe, die auf das Vorhandensein einer Krankheit rekurrieren, verwendet. Außerdem gelingt es Mathematikdidaktikern bislang kaum, die Rolle der Schule im Problemkreis herauszuarbeiten. Dies scheint auf habituelle Begrenzungen zurückzugehen:

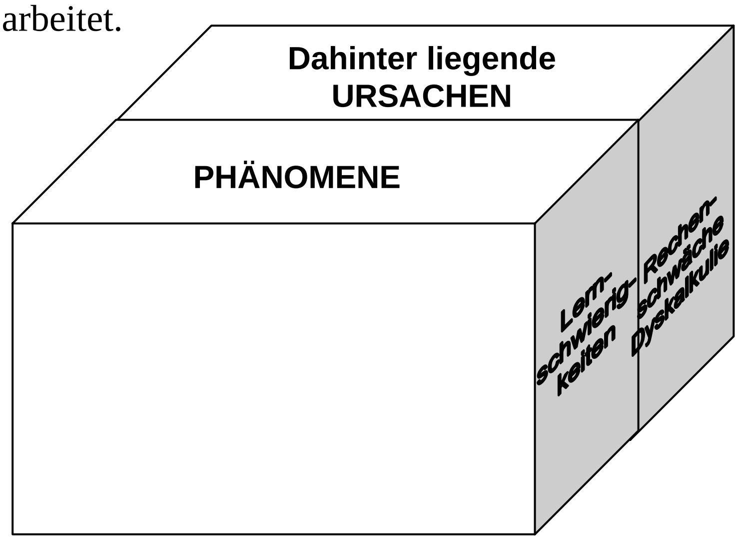
Meine These ist, dass verfestigte Rechenprobleme dadurch entstehen, dass die der Mathematik innewohnenden Hürden des Verstehens für das Individuum nicht bearbeitet wurden. Das kann viele Ursachen haben, aber die Erfolge von „Rechenschwächetherapien“ deuten an, dass hier nur in seltenen Fällen – die sich im Umfeld von geistigen Behinderungen bewegen – eine organische Ursache zu finden ist. Im Kern entstehen in dieser Sichtweise besondere Schwierigkeiten im Rechnen (diesen Begriff schlägt Schipper 2001, S.4 vor) durch Defizite im Lehrprozess. Wenn man das klar herausarbeitet, dann kann man systemische Probleme (sehr gut herausgearbeitet bei Steeg 2001) besser einordnen. Darüber hinausgehend muss man sich in dieser Sichtweise mit den professionellen Defiziten des einzelnen Lehrers und mit habituellen Problemen des Berufes befassen. Mathematikdidaktikern fällt eine solche notwendig kritische Analyse sehr schwer, sehen sie doch die Lehrer als die Hauptzielgruppe ihrer Arbeit. Sie wissen um die Empfindlichkeit dieser Zielgruppe gegen Kritik. Vielleicht sind sie auch habituell nicht weit genug vom Lehrer entfernt, um das System Schule und Lehrer wirklich fundamental zu kritisieren.

Im Vortrag habe ich herausgearbeitet,

- dass viele mathematikdidaktische Ansätze eine Krankheitszuweisung an den Schüler latent mitschleppen, obwohl sie manifest eine Krankheitszuweisung ablehnen,
- dass auch schulsystemanalysierende Ansätze wie der des Rechenschwächetherapeuten Steeg (2001) eine Krankheitszuweisung vornehmen. Hier wird lediglich Schule als Verursacher der Krankheit herausgearbeitet.
- dass Ansätze wie der von Jörg Kwapis (Zentrum zur Therapie der Rechenschwäche) den Rechenschwächebegriff konsequent umdeuten möchten („Abstraktions- und Wissensmängel im Bereich der elementaren Arithmetik“), aber die im Begriff Rechenschwäche sedimentierten Krankheitszuweisungen im Kopf des Rezipienten nicht vermeiden können,

- dass Zugänge wie der von Hans-Dieter Gerster, der den Rechenschwächebegriff konsequent meidet bzw. sich davon distanziert („sogenannte rechenschwache Kinder“), dem Problem der Ursachenbenennung für die besonderen Schwierigkeiten im Rechnen nicht entkommt.

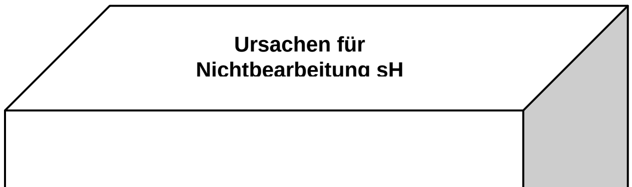
In der folgenden Grafik habe ich das Begriffsproblem dargestellt. Ansätze, die mit dem Konstrukt Rechenschwäche arbeiten, folgen folgender Struktur: Es gibt Phänomene bei Schülern in Form von verschärften Lernschwierigkeiten, von Versagen, von besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. Diese Phänomene haben eine Ursache, diese Ursache ist eine Rechenschwäche oder eine Dyskalkulie. Hier sieht man auch sehr schön, wie der Eindruck entsteht, dass Psychiater und Therapieinstitute am eigentlichen Problem arbeiten, an dem, was hinter den Phänomenen liegt. Didaktik wird dann geradezu abgestempelt als das, was nur an der Oberfläche der Phänomene arbeitet.



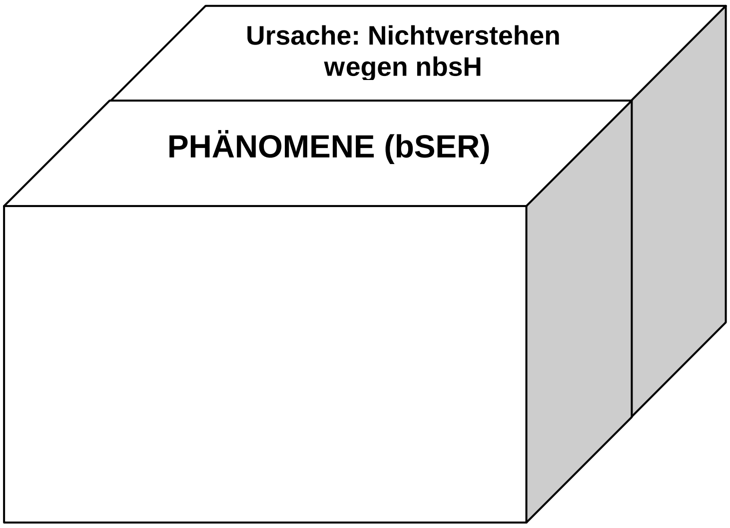
Röhrig (1996, S. 125-158) zeigt, dass die Phänomene und die Ursachen in diesem Konstrukt nicht deutlich voneinander getrennt werden. Es verbleibt immer im Unklaren, was die Rechenschwäche eigentlich ist: Das Fehlermachen oder der Grund des Fehlermachens. Aber selbst wenn man Phänomen und Ursache deutlich trennen würde, lädt diese Sichtweise zu unscharfen Ursachenbenennungen ein, insbesondere zu latenten Pathologisierungen. Wir erkennen das, wenn wir uns die diversen Kataloge denkbarer Ursachen für Rechenschwäche ansehen.

Nun könnte man die Sache auch einfach so sehen: Es gibt die Phänomene, und es gibt die dahinter liegenden Ursachen: Didaktisches Versagen, Renitenz, körperliche bzw. geistige Schädigungen bzw. Behinderungen. Aber mir scheint diese Sichtweise nicht differenziert genug, außerdem gibt sie Antworten, wo sie Fragen stellen sollte, wie sich in einer alternativen Sichtweise deutlich zeigt:

Ich schlage vor, die Sache eher dem aktuellen Wissensstand über Phäno-



mene und Ursachen entsprechend darzustellen und gelange zu folgender Struktur:



- Wir sind mit Phänomenen konfrontiert, man kann sie Rechenversagen oder mathematisches Versagen nennen oder mit Schipper besondere Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens (bSER).
- Das Versagen hat seine Ursachen im Nichtverstehen. Konkreter: Das mathematische Lernen birgt bestimmte Hürden, und im Lehr- bzw. Lernprozess müssen diese Hürden bearbeitet werden. Erfolgt dies nicht im für das Individuum notwendigen Maße, so versteht es nicht. Ich spreche dann von „nicht bearbeiteten stofflichen Hürden“: nbsH.
- Es gibt Ursachen dafür, dass die stofflichen Hürden (sH) nicht bearbeitet werden. Ich denke, dass wir hier unseren Blick vorrangig auf didaktisches Versagen, nachrangig auf Renitenz[1] oder Behinderung lenken sollten.

In dieser Sichtweise ist immer noch die *Frage* existent, ob es nicht vielleicht doch eine Krankheit gibt, die man Rechenschwäche nennen könnte. Nur *voraussetzen* würde ich das nicht wollen. Als Forscher muss man in meinem Modell die Frage stellen, welcher Art das Nichtverstehen ist, welche sH nicht bearbeitet wurden und warum. Mir scheint, dass mit dieser Sichtweise das Problem „vom Kopf auf die Füße gestellt wird“: Rechnen wird in einem schulischen und außerschulischen Lernprozess erlernt. Wenn dieser Lernprozess gestört ist – sichtbar am Scheitern –, dann muss im Forschungsprozess zunächst der Lernprozess rekonstruiert werden. (Dies passiert im Konstrukt der Rechenschwäche nicht, wahrscheinlich wird implizit

[1] Ich führe diesen Typus nur ein, weil Lehrer gelegentlich damit argumentieren, dass ein Schüler eben das Rechnen nicht erlernen wolle. Ich weiß nicht, ob es eine echte Renitenz gegen Lernen gibt. Ich nehme an, dass hier eher Folgen von dauerhaftem Scheitern aufgrund von nbsH vorliegen. Ich möchte das aber eher als Forschungsfrage formulieren.

oder explizit bereits angenommen, dass das Scheitern im Individuum fußt und der Lernprozess deshalb nur Ausdruck der Ursache ist.) Da der Lernprozess bezüglich der Mathematik kein urwüchsiger ist, muss der Lehrprozess rekonstruiert werden. Wenn der Lernprozess vor der Folie des Lehrprozesses rekonstruiert wird, dann bietet sich auch die Chance, empirisch Krankheitsmerkmale zu rekonstruieren, falls es sie geben sollte.

Weitere Andeutungen zu sich ergebenden Forschungsfragen:
Zunächst zwingt das Modell uns dazu, die Phänomene des Versagens bzw. der besonderen Schwierigkeiten von den Ursachen dafür zu trennen. Es nimmt die Erkenntnis auf, dass die betroffenen Menschen Kernelemente der Arithmetik nicht verstanden haben, dass sie also sH nicht bearbeitet haben. Wir haben damit die Forschungsfrage, welche Elemente der Arithmetik Kernelemente sind, die dann auch von 100% der Schüler verstanden werden müssen. Eine solche Forderung gehört in Lehrpläne, wenn wir diesen Kern irgendwann wirklich wissen. Aus der vorhandenen Literatur und Aussagen von Rechenschwächetherapeuten entnehme ich die These, dass dies folgende sind:

- kardinaler und relationaler Zahlbegriff
- Logik des Stellenwertsystems
- Operationslogik: Welche Fragen stellen die Rechenoperationen und auf welche Weise beantworten sie diese Fragen? Teil davon: Warum funktionieren die schriftlichen Rechenverfahren?
- herausgehoben: Operationslogik der Division auch relational als Voraussetzung der Bruchzahlentwicklung

Gehören Messprobleme auch zu dienen stofflichen Hürden? Sind „Orientierungsschwierigkeiten“ in Wirklichkeit Schwierigkeiten im Quantifizieren von Längen, vielleicht auch von Gewichten?

Wir wissen, dass manche Rechenschwächetherapien sH bearbeiten, und zwar auf verschiedene Weise. Andere Therapien bearbeiten anderes. Funktionieren diese verschiedenen Bearbeitungsstrategien bzw. Therapien? Warum funktionieren sie? Tun die Leute wirklich das, was sie zu tun vorgeben bzw. zu tun glauben? Wir haben damit auch eine schöne Falsifikationsmöglichkeit für den hier vorgestellten Ansatz, denn vielleicht stellt sich ja heraus, dass gar nicht die stofflichen Hürden bearbeitet werden.

Röhrig, Rolf (1996): Mathematik mangelhaft. Rowohlt Verlag, Reinbek.

Schipper, Wilhelm (2001): Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. Occasional Paper der KMK 182, Dezember 2001

Steeg, Friedrich H. (2000): Rechenschwäche: eine schulinduzierte Kognitionsstörung? Über das nicht ganz zufällige Entstehen von Rechenschwäche aus dem Zusammentreffen der Schülerindividuen mit quasi-mathematischem Anfangsunterricht in der Grundschule. In: ZDM 2000/3, S.77 – 87

Elisabeth MOSER OPITZ, TU Dortmund/PH Bern

Rechenschwäche erfassen – Screening für die Schuljahre 4-8

Obwohl im Moment Tests zum Erfassen von Mathematikleistungen wie Pilze aus dem Boden schießen (www.testzentrale.de), sind Instrumente zum Erfassen von Schülerinnen und Schülern mit Rechenschwäche immer noch Mangelware, insbesondere für höhere Klassen.

In der traditionellen Psychodiagnostik werden zur Diagnose von Rechenschwäche in der Regel ein standardisierter Mathematik- und Deutschtest sowie ein IQ-Test durchgeführt. Wenn zwischen den Leistungen im IQ- und im Mathematiktest eine Diskrepanz von 1.5 Standardabweichungen vorliegt, wird von einer Rechenstörung gesprochen (Jacobs & Petermann, 2005). Die Verwendung von standardisierten Verfahren hat den Vorteil, dass Objektivität in hohem Maß gegeben ist und ein Vergleich mit einer Bezugsgruppe möglich ist. Es gibt aber auch eine Reihe von Nachteilen. So wird das verwendete Diskrepanz-Kriterium von verschiedensten Seiten her im Frage gestellt (vgl. zusammenfassend Moser Opitz 2007, 15ff.). Weiter geben standardisierte Tests keine Förderhinweise und beschränken sich oft einseitig auf das Abrufen von Kopfrechenaufgaben oder auf die Kenntnis der schriftlichen Verfahren. Dadurch wird zu wenig berücksichtigt, dass rechenschwache Schülerinnen und Schüler spezifische Lerninhalte nicht verstanden haben (Moser Opitz, 2007; Schäfer, 2005).

Eine Alternative stellen qualitative Verfahren dar: klinische Interviews, Lernstandserfassungen oder Beobachtungsbogen. Diese bieten den Vorteil, dass die interne Validität erhöht werden kann und dass Denkwege, Strategien aber auch Fehlvorstellungen der Schülerinnen und Schüler differenziert erfasst werden können. Qualitative Erfassungen beinhalten aber auch eine Reihe von Nachteilen. So erfolgt in der Regel eine Einbuße von Objektivität, die Testgütekriterien werden wenig beachtet und die Durchführung ist oft mit einem hohen zeitlichen Aufwand verbunden. Zudem fehlen zuverlässige Informationen zum Schwierigkeitsgrad von Aufgaben und die Einschätzung des Leistungsstandes bleibt dem subjektiven Urteil der Testperson überlassen.

Um den Nachteilen der beiden Diagnoseformen zu begegnen, wird ein Diagnoseverfahren angestrebt, in welchem in einem ersten Teil ein Screening mit einer standardisierten Aufgabensammlung durchgeführt wird. Mit Schülerinnen und Schülern, welche den vorgeschlagenen Grenzwert nicht erreichen, erfolgt im Anschluss eine ausführliche qualitative Lernstandserfassung (Abb. 1). Dabei wird vorgeschlagen, für die erste Phase der Diagnose nicht die üblichen lernzielorientierten Tests zu verwenden, sondern kriteriumsorientierte Instrumente zu entwickeln, welche spezifisch den Lernstoff bzw. die Strategien erfassen, welche rechenschwache Schülerinnen und Schülern nur schwer zu erwerben scheinen, sogenannt basalen Lernstoff bzw. „Basisstoff" (vgl. Moser Opitz 2007, 217ff.).

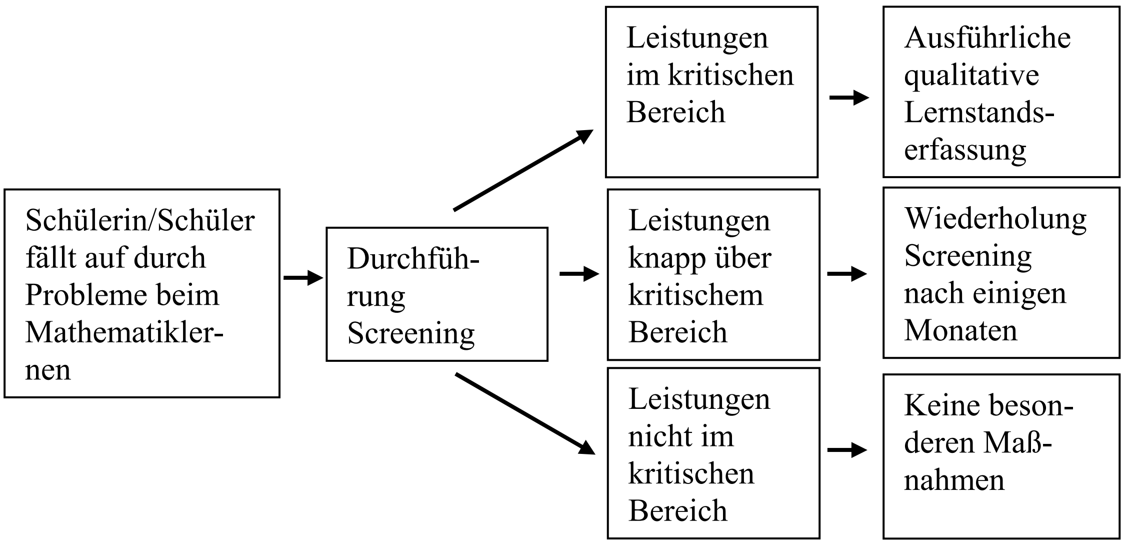


Abb. 1: Zweistufiges Diagnoseverfahren

Solche Instrumente müssen allerdings zuerst entwickelt werden. Sie müssen folgende Kriterien erfüllen:

- Überprüfung von zentralen mathematischer Kompetenzen
- Erfüllung der Anforderungen bezüglich Testgütemerkmalen
- didaktisch sinnvolle Aufgaben enthalten
- Hinweise geben für weiterführende Diagnostik bzw. auf stoffliche Lücken
- einfache und ökonomische Durchführung
- Verwendung eines empirisch und theoretisch bestimmten Cut-off Scores
- Verhindern falsch-negativer Klassifikationen

Im Rahmen eines Auftrags des Erziehungsdepartements des Kantons Bern/CH wurden für die Schuljahre 1-3 bereits solche Instrumente erstellt (www.erz.be.ch/besmath). Ein ähnliches Instrument soll auch für die höheren Schuljahre entwickelt bzw. validiert werden. Als Grundlage dafür dient ein Test, welcher bereits im Rahmen eines Forschungsprojektes eingesetzt wurde. Es handelt sich um einen Einzeltest, der Aufgaben enthält, wie sie in Abb. 2 dargestellt sind. Zusätzlich zu den Ergebnissen der Aufgaben wird die Strategieverwendung bewertet (abrufen, abzählen, halbschriftlich, Normalverfahren).

Bereiche (Anzahl Aufgaben)	**Aufgabenbeispiele**
Addition, Subtraktion (je 5)	143 + 50, 199 + 198, 690 – 50, 701– 698
Ergänzen (5)	73 + _ = 100, 1595 + _ = 1600, 1000 – _ = 670
Verdoppeln/Halbieren (5)	2 • 17, 1 • 107, 18 : 2, 180 : 2
Multiplikation, Division (je 5)	30 • 40, 10 • 256, 24 : 6, 160 : 4, 160 : 40
Dezimalsystem (11)	Bündeln, Zahlenstrahl, 10 000 – 1, 10 000 – 10
Zählen in Schritten (3)	Zweierschritte vw (185), Zehnerschritte rw (137)
Operationsverständnis (3)	Veranschaulichung von 16 + _ = 20, 3 • 5 = 13 und 20 : 5 mit einer Zeichnung, Geschichte oder Material
Textaufgaben (4)	T. hat eine CD-Sammlung. Er gibt L. 6 CDs. Nun bleiben ihm 37. Wie viele hatte T. am Anfang in seiner Sammlung?

Abb. 2: Testaufgaben

Die Testgütemerkmale sowie die Ergebnisse von Faktorenanalysen wiesen in der Voruntersuchung hervorragende Werte auf (vgl. Moser Opitz 2007, 159ff.). Das Instrument wurde aufgrund von inhaltlichen Überlegungen und den Ergebnissen einer Rasch-Skalierung überarbeitet.

Der Test wird in der Schweiz an einer Stichprobe von ca. 300 Schülerinnen und Schülern in den Schuljahren 4-8 validiert (Primar- und Realklassen, Klassen für Lernbehinderte, vereinzelt Sekundarschülerinnen und –schüler). In Deutschland sollen ca. 200 Schülerinnen und Schüler aus NRW an der Erprobung teilnehmen (Grundschule, Hauptschule, Förderschule). Getestet werden einerseits Kinder und Jugendliche, bei welchen die Lehrpersonen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen feststellen, andererseits eine Vergleichsgruppe (Kinder ohne Schwierigkeiten beim Mathematiklernen). Als Kontrollvariable wird zudem der IQ erhoben. Anhand der Daten aus diesen Stichproben soll das Instrument skaliert werden.

Zu diskutieren sein wird die Setzung eines Grenzwertes. Die Festlegung eines „kritischen Bereichs“ ist in jedem Fall eine Entscheidung, welche auf der Basis von Vorannahmen geschieht und immer zu einem Teil willkürlich bleibt (vgl. Zieky, 2001; Rost, 2004). Auf der Datenbasis der Voruntersuchungen in der Schweiz wird im Moment davon ausgegangen, dass Schülerinnen und Schüler, welche 80% der Aufgaben gelöst haben (Rohwert von 70 Punkten), über Kenntnisse des basalen Lernstoffes verfügen. Die Daten aus den 120 ersten Testungen in der Schweiz scheinen diesen Wert zu bestätigen. Allerdings sind die Leistungen der bisher getesteten deutschen Schülerinnen und Schüler deutlich schlechter (Abb. 3).

	CH (M, SD)	**NRW** (M, SD)
Gesamtstichprobe (N =119/59)	60 (15.9)	47.9 (14.9)
Rechenschwach (N = 64/28)	51.9 (10.2)	42.8 (14)
Vergleichsgruppe (N = 55/31)	69.2 (15.3)	52.1 (14.4)

Abb. 3: Erste Ergebnisse

Es muss nun überprüft werden, ob sich diese Leistungsunterschiede auch in einer größeren Stichprobe zeigen. Im Moment können über Gründe dafür nur Vermutungen angestellt werden. Es könnte sein, dass die Unterschiede durch die Stichprobenzusammensetzung zustande kommen. Da in der Schweiz die Selektion erst nach dem 6. Schuljahr erfolgt, werden in der Schweiz in den Klassen 5 und 6 Schülerinnen und Schüler aus einem breiteren Leistungsspektrum getestet als in Deutschland. Zu diesem Aspekt werden die Ergebnisse des IQ-Tests weiter Aufschluss geben.

Falls sich diese Leistungsunterschiede auch in den größeren Stichproben zeigen sollten, wird dies noch eine Reihe von Fragen aufwerfen.

Literatur

Jacobs, C.; Petermann, F. (2005): Diagnostik von Rechenstörungen. Kompendium Psychologische Diagnostik. Band 7. Göttingen u.a.: Hogrefe.

Moser Opitz, E. (2007): Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern u.a.: Haupt.

Schäfer, J. (2005). Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Lernstand, Einstellungen und Wahrnehmungsleistungen. Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

Rost, J. (2004): Psychometrische Modelle zur Überprüfung von Bildungsstandards anhand von Kompetenzmodellen. In: Zeitschrift für Pädagogik 50, 662-678

Zieky, M. (2001): So much has changed: How the setting of cutscores has evolved since the 1980s. In: Cizek, G.J. (Hrsg.). Setting performance standards. Concepts, methods, perspectives. Mahwah, New Jersey u.a.: Erlbaum

Renate MOTZER, Augsburg

"Gerechtigkeit" als fächerübergreifendes Thema - mathematische Modellierung der Vergabe von Spenderorganen

Kann die Mathematik helfen, ein Verteilungsproblem gerecht zu lösen? Dieser Frage gingen im Religionsunterricht Schülerinnen der 10. Klasse im Rahmen einer fächerübergreifenden Unterrichtseinheit zur Organspende nach. Es wurde erarbeitet, wie verschiedene Kriterien für die Vergabe eines Spenderorgans in mathematischen Modellen verarbeitet werden können und wie sich unterschiedliche Gewichtungen auf die Auswahl auswirken würden.
Anlass dieser 5 Schulstunden umfassenden Unterrichtsreihe war die Zulassungsarbeit der Studentin Nadine Lamnek. Sie studiert die Fächerkombination Mathematik und katholische Religionslehre für das Lehramt an Realschulen. In ihrer Zulassungsarbeit beschäftigte sie sich mit dem fächerübergreifenden Arbeiten in Mathematik und Religion zum Thema „Gerechtigkeit". Die Unterrichtsreihe wurde im Rahmen des Religionsunterrichts abgehalten. Das Thema Organspende findet sich dort im Lehrplan der 10. Klasse als ein Aspekt des Themas „Dürfen wir alles, was wir können? – Chancen und Gefahren für ein menschenwürdiges Leben".

Der mathematische Aspekt dieses Themas wurde eingeleitet durch ein Glücksrad, auf dem 6 Namen standen, die auf eine Spenderniere warten. Die Lehrerin schlug vor, am Glücksrad zu drehen, um den Empfänger zu ermitteln. Der Klasse war schnell klar, dass dieses Verfahren nicht sonderlich geeignet ist. Nun wurde diskutiert, welche Kriterien es geben könne. Dabei wurde herausgestellt, dass es zunächst Kriterien gibt, die darüber entscheiden, ob jemand überhaupt auf eine Warteliste kommt, dazu gehören z.B. medizinische Kontraindikationen (z.B. Tumore und Infektionen) und nichtmedizinische (z.B. die mangelnde Bereitschaft eines Patienten, sich an die Anweisungen des Arztes zu halten).

Für diejenigen, die in eine Warteliste für ein bestimmtes Organ aufgenommen werden, werden dann weitere Kriterien der Allokation (Verteilung) betrachtet. Zunächst muss die Blutgruppe passen. Dann wird das sog. HLA-Match (Histokompatibilitätsantigen) ermittelt: Es gibt die Anzahl der Übereinstimmungen der Gewebetypen zwischen Spender und Empfänger an. Es gibt 6 mögliche Übereinstimmungen. Als nächstes wird die Wahrscheinlichkeit angegeben, dass der Patient jemals wieder ein gutes HLA-Muster erreicht. Hier kann im Unterricht mit der Klasse darüber geredet werden, wie man wohl so eine Wahrscheinlichkeit bestimmt. Wird eine relative Häufigkeit verwendet, die man ermittelt, wenn man mit den Werten von früheren Spenderorganen vergleicht? (Das Material, das die Studentin von Eurotransplant (vgl. [3]) bekam, sagt nichts darüber aus, wie diese Wahrscheinlichkeit ermittelt wird.)

Außerdem werden die Dringlichkeit (Code 4: medizinisch notwendig, Code 2: psychischer Leistungsdruck, Code 1: soziale Indikation) und die Wartezeit (in Jahren) beachtet.

Eurotransplant ermittelt außerdem: Die Entfernung zwischen Spenderregion und Empfängerzentrum und eine Import-/ Export-Bilanz der beteiligten Nationen. Diese beiden Kriterien wurden in der Unterrichtssequenz nicht weiter berücksichtigt.

Der Klasse wurden nun Daten von 6 Personen gegeben, die auf eine Spenderniere warten. Zunächst sollten die Schülerinnen (es handelte sich um eine reine Mädchenklasse) entscheiden, wer in die Warteliste aufgenommen wird. Nach durchaus kontroversen Diskussionen wurden 5 aufgenommen. Für diese 5 Personen stand nun die Frage im Raum, wie die 4 genannten Kriterien gewichtet werden sollten.

Dazu wurden 3 mögliche Modelle vorgestellt:

Die Werte werden **linear** verrechnet und unterschiedlich gewichtet: der Wert für das HLA-Match wird mit 100 multipliziert, bei der Wahrscheinlichkeit wird 100 – 2*Prozentzahl gerechnet, der Code der Dringlichkeit wird mit 50 multipliziert, ebenso die Jahre der Wartezeit. Die Summe der 4 Einzelwerte wird ermittelt. Wer die höchste Summe hat, soll das Organ erhalten. Diese Gewichtungen entsprechen den bei Eurotransplant üblichen.

Später rechneten die Schülerinnen mit anderen Gewichtungen, um die Ergebnisse zu vergleichen. Auffällig war zunächst, dass eine hohe Wahrscheinlichkeit das Punkteergebnis verschlechtert, bei einer Prozentzahl von über 50 würde sogar abgezogen statt addiert werden. Man könnte das Modell auch dahin abändern, dass ab 50 % diese Komponente auf 0 gesetzt wird (ist in der Praxis eher üblich). Inhaltlich wurde diskutiert, warum eine hohe Prozentzahl das Ergebnis verschlechtert: dann hat der Patient eine bessere Chance, jemals wieder ein geeignetes Organ zu bekommen, wenn er dieses nicht bekommt.

Im 2.Modell werden die Werte **potenziert**. Das HLA-Match scheint besonders wichtig: es wird hoch 5 genommen. Bei der Wahrscheinlichkeit soll wieder 100 – 2* Prozentzahl verwendet werden, diesmal wird dieser Wert aber noch hoch 3 genommen (beim Durchrechnen zeigte sich, dass diese Festlegung zu einer zu starken Gewichtung dieses Kriterium führte; auch dies ist eine Erkenntnis, zu der die Schülerinnen selbst kommen sollten). Der Dringlichkeitscode wird hoch 4 gerechnet, die Wartezeit hoch 2.

Man könnte auch noch die potenzierten Werte gewichten. Darauf wird aber zunächst verzichtet, um den Unterschied zwischen den beiden Zugängen: linear gewichtet bzw. potenziert deutlich zu machen.

Später können auch hier die Schülerinnen die Potenzen ändern bzw. sie gewichten.

Aus mathematischer Sicht können Eigenschaften von Potenzfunktionen wiederholt werden, vor allem kann verglichen werden, wie schnell Potenzfunktionen steigen und welchen großen Unterschied es machen kann, wenn die Potenz nur ein bisschen höher gewählt wird.

Als drittes Modell wird ein **Vergleichsmodell** gewählt: bzgl. jeden Kriteriums wird ein Sieger festgestellt. Wer bei mehreren Kriterien Sieger ist, erhält das Organ. Auch hier könnte variiert werden, indem der 2./3. Rang auch noch eine Rolle spielt, entweder nur dann, wenn sonst kein eindeutiger Sieger zu ermitteln ist, oder man gewichtet wiederum nach den Rängen.

Dieses Modell hat den Schülerinnen jedoch nicht so gut gefallen, da es nicht berücksichtigt, wie groß die Abstände zwischen den Patienten sind. Modell 1 oder 2 wurde als gerechter empfunden.

Als die Schülerinnen diese 3 Modelle auf die Daten der 5 Personen anwandten, stellten sie fest, dass nicht immer die gleiche Person die Spenderniere bekommen würde.

In einer weiteren Unterrichtseinheit wurde ihnen nun ein Excel-Datenblatt zur Verfügung gestellt, in das sie die Patientendaten und die Gewichtungen eintragen konnten. Sie konnten nun selbstständig die Gewichtungen verändern und die Auswirkungen auf die Reihenfolge innerhalb der Warteliste untersuchen. Ihre Beobachtungen hielten sie schriftlich fest und diskutierten sie anschließend in der Klasse.

In der anschließenden Stunde wurde Rückblick gehalten. Die Hauptfrage war: ist es sinnvoll, ein mathematisches Modell einzusetzen, wenn doch verschiedene mathematische Modelle zu unterschiedlichen Ergebnissen führen?

Die meisten Mädchen bejahten diese Aussage mit folgenden Argumenten:

Eine Entscheidung zu treffen geht schneller und leichter, wenn man sich im Vorfeld auf ein Modell geeinigt hat und dann im aktuellen Fall nur noch den Listenersten errechnen muss. Man hat konkrete Kriterien, also kaum persönliche Einflüsse und damit eine objektivere Entscheidung. Es ist gerechter als ein persönliches Auswahlverfahren und alle Patienten werden gleich behandelt. Aufgefallen ist den Schülerinnen auch noch, dass beim Vergleichsmodell alle Kriterien gleich gewichtet sind, was als Vorteil, aber auch als Nachteil dieses Modells gewertet werden kann.

Als Nachteile wurden genannt: Je nach Modell ergibt sich ein anderes Ergebnis. In den Modellen kann die Gewichtung verändert werden: wer darf sie im Ernstfall festlegen? Sind die Gewichtungen und die Formel zur Punkteberechnung fest, so entscheidet die Gesamtpunktzahl und nicht mehr die Wichtigkeit eines bestimmten Kriteriums (was im Einzelfall vielleicht doch vordringlich sein könnte). Das Vergleichsmodell wurde als zu einseitig angesehen, ebenso bestimmte Gewichtungen in den vorgegebenen Modellen.

Aufgefallen in dieser Unterrichtsstunde ist, dass viele Schülerinnen nicht von den gegebenen Modellen abstrahieren konnten auf die allgemeine Frage, ob eine mathematische Modellbildung sinnvoll ist. Ihre Antworten bezogen sind häufig auf Details der behandelten Modelle.

Schließlich wurde bei einem Gesamtrückblick auf die Unterrichtseinheit festgestellt, dass die Rolle der Mathematik darin besteht, eine entscheidende Hilfestellung zu geben, denn ohne sie wäre die Verteilung noch ungerechter. Die Rolle der Religion wurde darin gesehen, dass es sich hier um eine Entscheidung über Leben und Tod handelt, dass das Gebot der Nächstenliebe verlangt, dass man denen hilft, die auf ein Spenderorgan angewiesen sind, und dass die Ebenbildlichkeit Gottes, die für jeden Menschen gilt, fordert, dass alle den gleichen Anspruch auf Hilfe haben und die Verteilung gerecht sein muss.

Weiterhin wurde von den Schülerinnen eingebracht: Je mehr Menschen Organe spenden, desto weniger Probleme gibt es bei der Verteilung und desto geringer ist auch das Risiko von Organhandel.

Dass die Mathematik Helferin sein kann bei der Frage nach einer gerechten Verteilung kann auch im Zusammenhang mit Wahlsystemen erörtert werden. Der Unmöglichkeitssatz von Arrow kann hier die Grenzen dessen, was die Mathematik für die Gerechtigkeit beitragen kann, sehr gut aufzeigen. (vgl. [1]). Eine Hinführung zum Baumdiagramm in der Stochastik kann Frage sein, wie der Gewinn bei einem „abgebrochenen Spiel“ gerecht verteilt werden kann (vgl. [2]).

Literatur:

[1]: Meyer, J.: Paradoxien bei direkten Wahlen, Math. Lehren, No. 88, 50-54 (1998)

[2]:http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/hennproj/henn2/ Stochastische_Modellbildung_07.htm

[3]: http://www.eurotransplant.nl/

Marcel MÜLLER, Kassel

Analysen zur Bearbeitungsqualität von Schülerlösungen bei Modellierungsaufgaben

Im Rahmen des von der DFG geförderten Projekts DISUM[1] haben Schüler aus neunten Realschulklassen sowohl in Test- als auch in Unterrichtssituationen Modellierungsaufgaben u.a. aus dem mathematischen Themengebiet Lineare Funktionen bearbeitet. Um zu erfassen, welche Leistungseffekte die zehnstündige DISUM-Unterrichtseinheit insbesondere hinsichtlich der Modellierungskompetenz der Schüler bewirkt, gibt es einen Vor-, einen Nach- und einen Follow-up-Test (zum Test- und Untersuchungsdesign siehe Leiss & Blum, 2007). Die Schülerlösungen wurden mit einem in DISUM entwickelten Kodiermanual ausgewertet und anschließend raschskaliert. Jede Schülerlösung wurde hierfür von geschulten Hilfskräften dichotom (Scores 0/1) kodiert. Dieses Scoringsystem ermöglicht zwar, in üblicher Weise Leistungseffekte zu messen, allerdings ist es mit diesem groben Bewertungsschema nicht möglich zu analysieren, wie sich Teilkompetenzen des Modellierungsprozesses (z.B. das Bilden eines Realmodells) bei den Schülern entwickeln.[2] Deshalb wurde zu Beginn des Jahres 2008 der Versuch unternommen, ein Instrument zur feineren, multidimensionalen Erfassung der Bearbeitungsqualität (BQ) von Schülerlösungen bezüglich Modellierungsaufgaben zu entwickeln (für ähnliche Intentionen vgl. Arbeiten aus dem ICTMA-Kontext, z.B. Haines, Izard & LeMasurier, 1993).

1. Operationalisierung des Begriffs der Bearbeitungsqualität

Unter der *BQ* einer Schülerlösung – mit „Schülerlösung" ist das Produkt und nicht der Lösungsprozess gemeint – bezüglich einer Modellierungsaufgabe soll Folgendes verstanden werden:

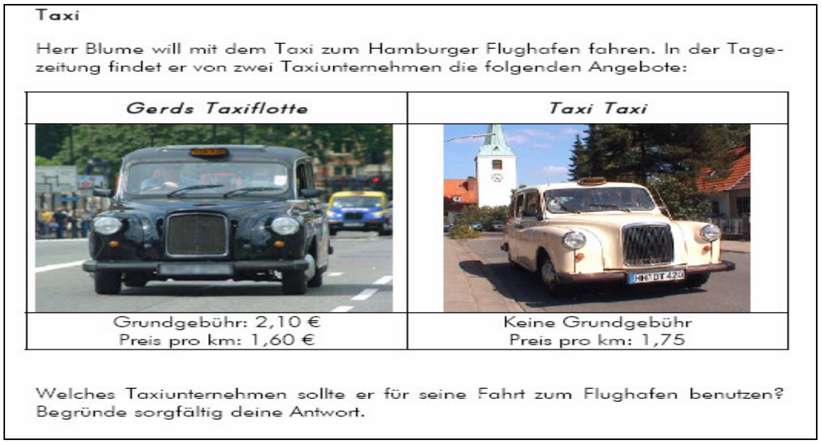
Die BQ einer Schülerlösung setzt sich aus den vier weitgehend unabhängigen Dimensionen *Lösungsgüte*, *Erkennbarkeit der erfassbaren*[3] *Modellie-*

[1] DISUM („Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik") ist ein interdisziplinäres Projekt zwischen Mathematikdidaktik (Prof. Dr. W. Blum – Universität Kassel), Erziehungswissenschaft (Prof. Dr. R. Messner – Universität Kassel) und Pädagogischer Psychologie (Prof. Dr. R. Pekrun – Universität München). Nähere Informationen zum Projekt sind u.a. auf der Homepage www.disum.de und in dem Beitrag von Dominik Leiss u.a. in diesem Heft zu finden.

[2] Das Projekt hat bisher bewusst darauf verzichtet, Teilkompetenzen des Modellierens im Detail zu untersuchen.

[3] Erfassbar meint, dass nur jene Modellierungsschritte bei einer Schülerlösung in das Kodierschema aufgenommen werden, die reliabel identifiziert werden können.

rungsschritte, *Korrektheit der erfassbaren Modellierungsschritte* und *Darlegungsqualität* zusammen. Die nähere Beschreibung dieser vier Dimensionen soll anhand der DISUM-Testaufgabe „Taxi“ geschehen:


Taxi

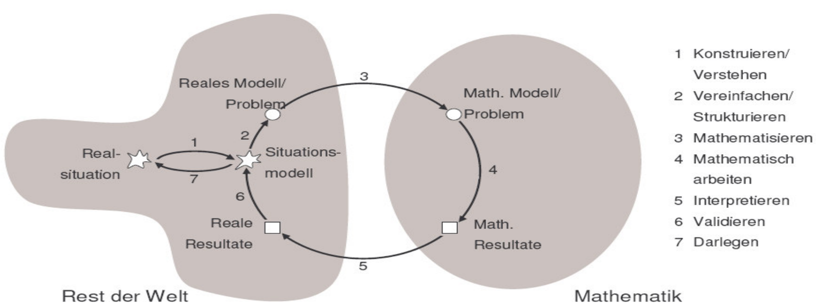
Herr Blume will mit dem Taxi zum Hamburger Flughafen fahren. In der Tagezeitung findet er von zwei Taxiunternehmen die folgenden Angebote:

Gerds Taxiflotte	*Taxi Taxi*
Grundgebühr: 2,10 € Preis pro km: 1,60 €	Keine Grundgebühr Preis pro km: 1,75

Welches Taxiunternehmen sollte er für seine Fahrt zum Flughafen benutzen? Begründe sorgfältig deine Antwort.

Zur Bestimmung der *Lösungsgüte* ist allein das Endergebnis der Schülerlösung von Bedeutung und nicht die evtl. dokumentierten Lösungsschritte. So erhält eine Schülerlösung den höchsten Score für diese Dimension, wenn die richtige Entfernung (14 km) bestimmt wurde, bei der beide Unternehmen gleich viel kosten. Wurde eine feste Annahme (z.B. 20 km Entfernung zum Flughafen) getroffen und die richtige Schlussfolgerung gezogen, so erhält diese Schülerlösung den nächst niedrigeren Score, usw.

Bei der *Erkennbarkeit der erfassbaren Modellierungsschritte* liegt je Modellierungsschritt (d.h. je Teilkompetenz) eine dichotome Kodierung vor. Die aus einer Schülerlösung identifizierbaren Modellierungsschritte sind die Schritte 2, 3, 4 und 5 (siehe untere Abb.). Die Modellierungsschritte „Konstruieren/Verstehen“ und „Validieren“ sind nicht zuverlässig zu kodieren und wurden dementsprechend nicht in das Kodierschema aufgenommen (vgl. Fußnote 3). Der Modellierungsschritt „Darlegen“ wird dagegen durch die Dimension „Darlegungsqualität“ erfasst.



Siebenschrittiger DISUM-Modellierungskreislauf

Der Modellierungsschritt „Vereinfachen/Strukturieren“ beispielsweise gilt als erkennbar, wenn eine Schülerlösung irgendeine sinnvolle Annahme enthält (ggfs. auch nur implizit, wie z.B. in einer dokumentierten Rechnung).

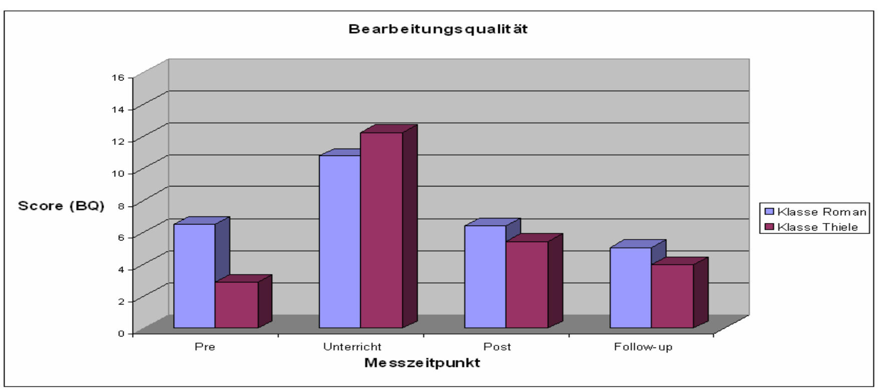
Innerhalb der Dimension *Korrektheit der erfassbaren Modellierungsschritte* wird bewertet, inwieweit die vier oben genannten Schritte in dem Sinne korrekt sind, dass sie eine angemessene Beantwortung der Fragestellung ermöglichen.

Mit der *Darlegungsqualität* wird bewertet, inwieweit der Lösungsweg vollständig und strukturiert dargelegt wurde.

Um eine konsistente Kodierung der einzelnen Dimensionen bzw. deren Unterkategorien zu gewährleisten, wurden detaillierte aufgabenspezifische Kodieranweisungen entwickelt. Zur Bestimmung der Interkodiererreliabilität haben eine von mir geschulte Examenskandidatin und ich ca. 150 Schülerlösungen unabhängig voneinander kodiert. Dabei konnte eine Übereinstimmung bei der Kodierung der einzelnen Kategorien zwischen .77 und .96 (Cohens-Kappa[4]) erreicht werden. So kann konstatiert werden, dass die aufgabenspezifischen Kodieranweisungen eine zuverlässige und objektive Kodierung der Schülerlösungen ermöglichen.

2. Erste Ergebnisse aus DISUM bezüglich der Bearbeitungsqualität von Schülerlösungen

Die folgenden Ergebnisse bezüglich der BQ basieren auf den Schülerlösungen zweier DISUM-Klassen mit je 16 Schülern.



Die Schüler der Klasse von Frau Thiele konnten im Gegensatz zur Klasse von Frau Roman im Posttest signifikante Leistungszuwächse bezüglich deren BQ im Vergleich zum Pretest erzielen. Betrachtet man die individuellen

[4] Cohens Kappa ist bekanntlich ein zufallsbereinigtes Übereinstimmungsmaß zwischen zwei Ratern.

Schülerleistungen und versucht mit Hilfe von linearen Regressionsanalysen die Posttestleistung eines Schülers auf Grundlage von dessen Pretest- und Unterrichtsergebnissen vorherzusagen, so muss festgestellt werden, dass dies nicht möglich ist. Ein wesentlicher Grund dafür ist die geringe Varianz der Schülerlösungen aus dem Unterricht. Fast alle Schüler erzielen im Unterricht eine hohe BQ, da sie dort Lehrerunterstützung erhalten und sich zusätzlich gegenseitig bei der Bearbeitung der Aufgaben helfen, wohingegen sie in den Testsituationen auf sich allein gestellt sind.

Analysiert man die Leistungszuwächse der Schüler von Frau Thiele auf der Ebene der Teilkompetenzen, so kann festgestellt werden, dass diese ermutigend hohe Zuwächse in dem Bereich „Erkennbarkeit und Korrektheit des Vereinfachens/Strukturierens“ und im Bereich „Erkennbarkeit und Korrektheit des Mathematisierens“ erzielen. Für die Parallelaufgabe zur Aufgabe „Taxi“ aus dem Posttest beispielsweise kann konstatiert werden, dass die Schüler von Frau Thiele nun in der Mehrzahl korrekte Annahmen treffen und auch in der Lage sind, ihre Realmodelle zu mathematisieren, wozu sie im Pretest bei der Aufgabe „Taxi“ in der Mehrzahl nicht in der Lage gewesen waren.

3. Zusammenfassung und Ausblick

Abschließend lässt sich sagen, dass das entwickelte Instrument geeignet ist, Schülerlösungen reliabel, objektiv und mehrdimensional zu erfassen, wodurch insbesondere Teilkompetenzen des Modellierens genauer analysiert werden können. Damit allerdings auch der Einfluss des Unterrichts auf den Posttest näher untersucht werden kann, ist es nicht ausreichend, allein die Produkte aus dem Unterricht hinsichtlich der BQ zu analysieren. Vielmehr ist es notwendig, bei der Bestimmung der BQ der Schülerlösungen aus dem Unterricht auch die Lösungsprozesse zu analysieren. Hierfür liegen im Rahmen von DISUM zahlreiche Videoaufzeichnungen des Unterrichts vor; über entsprechende Analyseergebnisse berichtet das DISUM-Team an anderer Stelle.

Literatur

Haines, C., Izard, J. & LeMasurier, D. (1993): Modelling intentions realised: Assessing the full range of developed skills. In: Teaching and Learning Mathematics in Context (Eds: Breiteig, T., Huntley, I. & Kaiser-Messmer, G.). Chichester: Horwood, S. 200-212

Leiss, D. & Blum, W. (2007). Modellierungskompetenz – Vermitteln, Messen & Erklären. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim: Franzbecker, S. 312-315.

Katalin MUNK S , Budapest

P ESE TATI S MADE LEA I G MAT EMATI S I MULTIG ADE S LS

We used Bruner's representation modes in mathematics learning of pupils age 6-10. In this short article we focused on the iconic mode. We designed picture series for the pupils, which were presented by P -s, as a main element of narrative learning environment.

The didactic roblem

In small schools, in multigrade schools the pupils' results are not good enough. These small schools are in remote areas of the country, the family background of the pupils does not give enough aid for the children to prepare for school - this is a complex problem, problem of health service, of region development, of permanent working place, etc. In this situation, how schools can help the student

We think, teachers should recognise the problems of learning, in this case mainly communication gapes of the learning, and they should minimalise them. .

Theoretical background

In our research we use Bruner's theory focused on representation modes, which include:

1. enactive (concrete - actions on objects) mode,
2. iconic (pictorial - visuals/images) mode,
3. symbolic (abstractions - words, numerals) mode.

One of the first Bruner's publications was talking about mathematics learning: Representation and Mathematics Learning (Bruner, 1 65). Bruner conducted a research on mathematics education in a laboratory. There were 6 students (age) and teachers , one of them was Z. Dienes. Pupils learnt abstract algebra, solving quadratic equations and so on by hands-on activity, visualisation and symbolisation.

To built mathematics education on this theory is a big task for nowadays researches. Nakahara in 2007 read a keynote paper: ultivating

Mathematical Thinking through Representation (Nakahara, 200). He made a detailed list of representation modes:

S2. Symbolic representation
Representations used in mathematical notation, such as numbers, letters, and symbols

S1. Linguistic representation
Representations that use everyday languages, such as apanese or English

I. Illustrative representation
Representations that use illustrations, figures, graphs, and so on

E2. Manipulative representation
Representations such as teaching aids that work by adding the dynamic operation of objects that have been artificially fabricated or modelled

E1. Realistic representation
Representations based on actual states and objects (Nakahara, 3. p.)

Illustrative or iconic representation could play central role in learning process. We used the results of researches are going in our department about traditional and computer based tool for teaching little children. (Vas rhelyi, 1 , Berta, 2003). Pictures help deep understanding, they give examples of hands-on activity and they give strong motivation to speaking about: What happened at the lesson In the early childhood narrative learning environment is the way toward to paradigmatic thinking (Bruner, 1 1).

Social background of students affects their school results - we know it from everyday experience and from big statistical studies. But what about mathematics Some very poor children became famous mathematician, but in the same time the mathematics is the biggest gape of finishing the school for low SES pupils. They have special education need, even they are gifted (Bishop, 1 4). Intensive usage of iconic mode can help low SES pupils (Murray, 1 5).

Ex eriment

In the framework of international researches[1] we started to work with multigrade schools at Eötvös University (ELTE), Hungarian head of the projects is Andrea K rp ti from ELTE.

---

[1] NEMED, http://www.nemed-network.org/

Hungarian multigrade schools have four grades of elementary school, where two grades learn together in one classroom.

Population

We started to work with 16 multigrade schools. We sent proposals of this program over 00 schools, and 1 schools answered that they want to participate. At the end 16 was encountered. It was almost a random list, because the motivation of the teachers was so different: some of the teachers were very interested in new methods of education, some of them were sent by their head of the school, somebody wanted to do anything before closing her school. We organised in-service trainings in these schools and also at the university. We organised a half year long developing program for the 16 schools. In the second part of the project we were worked with four schools, which were chosen by university.

Number of pupils was 243 in the 16 schools and 3 in the 4 schools. The pupils age was between 6-10. Every teachers had academical degree of education.

Learning by picture series,The stories of a teddy beer family

Presentations are constructed by me and are designed by kos Schlosser and udit Schlosser helped the work, too. They are saved at university homepage.

In the first part we had four presentations

a. Glasses, about measuring
b. Excursion, practising spatial orientation
c. In the past, about Egyptian number writing
d. Travelling, about data handling

In the second part of the developing program we made new presentations. One of them is about polyhedrons.

Data collection

We collected pupils' feedback, teachers' reports and we visited sometime the schools.

Discussion

The pupils and the teachers are waiting very much the next PowerPoint presentation on teddy beer family The pupils like solving the tasks and the problems given by pictures, the teacher integrate our supplement learning material in their classroom work. These are the elements of our success, but our picture series are not examples for the teachers. Teachers learnt making P presentation, they made nice shows on social life of the school, but they do not do learning material, they are waiting for our work. We think, using independently Bruner's representation modes is a too hard task for the elementary teachers. The teachers need continuous help to solve didactic problems of teaching of low SES gifted pupils.

eferences

Berta Tünde: ombination of traditional and computer based tools in mathematicseducation, ournal ZDM , Issue Volume 35, Number 1 / February, 2003 http://matserv.pmmf.hu/anniv/cd hun/prezentaciok/berta.pdf,

Bishop, A. .: ultural conflicts in mathematics education: developing a research agenda. *For the learning of mathematics*, 14. (2) (1 4) 15-1 . p.

Bruner, . Kenney, H.: Representation and Mathematics Learning, *Monographs of the Society for Research in Child Development*, Vol. 30, No. 1, Mathematical Learning: Report of a onference Sponsored by the ommittee on Intellective Processes Research of the Social Science Research ouncil (1 65), pp. 50-5 .

Bruner, .: The Narrative onstruction of Reality. (1 1). ritical Inquiry, 1 :1, 1-21.

Murray, K.: *Narrative Partitioning: The ins and outs of identity construction Rethinking Psychology: Volume 1 - Conceptual Foundations* (ed . Smith, R. Harr , Luk van Langenhove) Sage, 1 5.

V s rhelyi, .: ombination of traditional and computer based tools as a strategy for problem solving. In: reativity and Mathematics Education (Tagungsband), 1 . Münster, 163-166.

Fritz NESTLE, Ulm (Ludwigsburg)

Anmerkungen zum Thema e-testing

Hinführung[1]. Die Prämissen, auf denen die derzeitige Lernorganisation in Deutschland beruht, haben wenig oder gar nichts mit Lernfähigkeit oder Lernmotivation der Lernenden zu tun.

Die schlimmsten Folgen hat die Zeitssteuerung des Bildungsprozesses. Zum Beispiel müssen im Sekundarbereich zufolge der KMK-Vereinbarung aus Sitzung 314 für die allgemeine Hochschulreife, sei es in G8, sei es in G9, 265 Jahreswochenstunden abgesessen werden. Transparente Kriterien dazu, welche Qualifikationen in dieser Unterrichtszeit erworben werden sollte, werden nicht thematisiert. Das heißt unter anderem, dass ein Abiturszeugnis nichts darüber aussagt, ob der Inhaber über ein auch nur grundlegendes Verständnis für den Prozentbegriff verfügt oder ob er weiß, ob Ecuador in Afrika, der Antarktis oder sonst wo liegt. **Überprüfbar** definierte Bildungsstandards liegen in weiter Ferne. Die Ausarbeitung solcher überprüfbarer Standards scheint auch nicht das Ziel der Arbeit des „Instituts für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen“ zu sein.[2]

Eine überwiegend durch solche Zeitvorgaben gesteuerte Schulkultur fokussiert die Nutzung der heutigen Informationsverarbeitung – wie vor 40 Jahren die der audiovisuellen Medien – auf die punktuelle Ausarbeitung von e-learning-Sequenzen. Google verzeichnet am 20.1.2008 mehr als 20 Millionen Berichte über solche Anstrengungen. Dagegen ist e-testing als Grundlage von überprüfbaren Bildungsstandards mit 340 Fundstellen nur mit rund einem Hunderstel Promille einschlägiger Arbeiten vertreten (davon die ersten 6 vom Verfasser dieses Beitrags).

Ein Vergleich dazu: Ötzis Schuhe sind vor 5 000 Jahren mit Liebe und Anstrengung in handwerklicher Einzelarbeit entstanden. Die Schuhindustrie stellt heute bessere Schuhe in größerer Auswahl und mit geringerem Aufwand her. Lehrkräfte hingegen investieren heute noch landauf landab zehn bis 20 Prozent ihrer Arbeitszeit in die Entwicklung von selbst ausgearbeiteten Lernkontrollen für ihre Schüler. Der konsequente Einsatz von e-testing würde diese Zeit sparen, wäre objektiver (weniger willkürlich) und würde zugleich das Verhältnis zwischen Lehrkraft und Schüler rational entkrampfen: Bildung hinkt nach gegenüber der industriellen Produktion.

Schulbehörden schließen sich häufig der Verteufelung von „teaching to the test“ an. Besser wäre es, statt dessen ein zielgerichtetes „learning for the test“

1 Ausführlichere Informationen zum Thema in www.bildungsstandards.de
2 Blum et al. Bildungsstandards Mathematik: konkret; Cornelsen Scriptor 2006

zu fördern und dazu die Repräsentation des „syllabus“ in den Tests zu sichern. Grund genug, im Vorgriff auf eine weniger anachronistische Lern-kontroll-organisation einige Gesichtspunkte zum Thema „e-testing“ zu reflektieren.

Ein Nebenziel ist dabei, einige der „Vor-“Urteile im Bereich des e-testing bewusst zu machen. Das Hauptziel ist die Trennung zwischen Lehrbemühungen auf der einen Seite und der Bewertung des Lernerfolgs auf der anderen Seite.

Das Prinzip „Wer lehrt, prüft.“ korrumpiert und liefert die Lernenden der Willkür – manchmal auch dem Machtmissbrauch – der Lehrenden aus. Statt dessen sollte auch im Bereich des Lernens die externe Evaluation der Lernergebnisse Standard werden. Dann kann die schwache Lehrkraft nicht mehr wie derzeit die Noten willkürlich manipulieren und ihre mangelnde Lehrleistung durch gute Noten zudecken.

Die Verwendung externer e-testing-Module entlastet nicht nur die Lehrenden. Sie schafft zudem die Möglichkeit, den Ergebnissen selbstorganisierten Lernens den gleichen Rang einzuräumen wie denen eines klassischen Unterrichts. Für „outputgesteuertes“ Lernen ist dies unverzichtbar. Entscheidend sollte sein, **was** gelernt worden ist, nicht **wie** gelernt worden ist.

Bisher waren die sachlich überholten Monopole für Information und Bewertung prägend für das Selbstverständnis vieler Lehrkräfte. Insbesondere wurde in Teilbereichen der Lehrerbildung die abstruse Vorstellung gepflegt, dass eine hohe fachliche Kompetenz der Lehrenden den besten Unterricht garantiere. Heute werden auch Fähigkeiten zu Analyse, Steuerung und Unterstützung von Lernprozessen einbezogen.

E-testing heute. Das Bild von e-testing ist vielfach noch geprägt von der Erinnerung an Markierungsbögen, auf denen mit weichem Bleistift eines von vier oder fünf mit A bis D (beziehungsweise E) gekennzeichneten Feldern zu schwärzen war. Diese Auswahlantwortaufgaben (multiple choice) waren zudem oft dümmlich:

> Wie heißt die Hauptstadt von Baden-Württemberg?
> (A) München, (B) Paris, (C) Stuttgart, (D) Heilbronn

Mittlerweile bestimmt nur noch die Frage nach dem finanziellen Programmieraufwand, ob nur Auswahlantworten oder auch gebundene Freiantworten verwendet werden, und welche Fehlertoleranz man einbaut.

E-testing eröffnet bei geeigneter Organisation auch die Chance, Lern- und Bildungsziele unabhängig von der manchmal trägen Kultusbürokratie zu definieren. Insbesondere ist es mit geeigneten Modulen möglich, Grundqualifikationen, die im Lauf der Schuljahre nach „Abhaken“ durch Vergessen verloren gehen, aktuell und individuell zu überprüfen. Innerhalb der heutigen Schule geschieht das so selten, dass unabhängig von „G8“ oder „G9“ viele die Schule mit unverzeihlichen Lücken verlassen. Zu Beginn des Studiums müssen diese mit größerem Aufwand geschlossen werden.

Im **Dortmunder Manifest**[3] wurden vom Verfasser Minimalforderungen zusammengestellt, die man an e-testing-Module stellen sollte, wenn es um die Definition von überprüfbaren Standards geht:

- Ein e-testing-Modul besteht aus einer Gruppe vergleichbarer Aufgaben, die unmittelbar am Computer bearbeitet werden können. Der Computer liefert eine direkte Rückmeldung über den Bearbeitungserfolg. (Fast alle objektiv feststellbaren kognitiven Qualifikationen können in dieser Form definiert werden.)

- Als Bildungsstandard wird die erfolgreiche Bearbeitung einer hinreichend umfassenden Zufallsauswahl aus einer solchen Aufgabengruppe definiert.

- Die erfolgreiche Bearbeitung eines Bildungsstandards wird nach einer entsprechenden Zertifizierung als gleichwertig zur entsprechenden Bearbeitung in der Schule anerkannt

- Jeder Interessierte hat über Internet oder UMTS freien Zugang zu den Bildungsstandards. (Das ermöglicht selbstorganisiertes Lernen.) Für die Zertifizierung von Bearbeitungen können Gebühren erhoben werden.

Die Gleichwertigkeit von frei erworbenen zu in der Schule gelernten Qualifikationen ist die wichtigste Forderung. Damit erst erhalten Alternativen zum klassischen schulischen Lernen eine Chance. Das „Risiko“: manche Lerner erreichen die Qualifikationen der Hochschulreife mit weniger als den 265 ministeriell geforderten Jahreswochenstunden. (Vergleich: Wer von Dresden nach Wien will, muss mindestens 265 Stunden unterwegs sein. - Zur Zeit Seumes[4] war dies Standard auf Schusters Rappen.)

Nach dem Vorbild des Deutschen Instituts für Normung (oder der amerikanischen ETS oder NCTM) sind die Entwicklung nach der open-source-Idee und ein von der Schulbürokratie unabhängiger Anbieter als Distributor für solche Standards denkbar und wünschenswert. Die Monopolstellung des staatlichen Schulwesens bei der Vergabe von Zugangsberechtigungen für die berufliche und universitäre Bildung hat in Deutschland im Gegensatz zu vielen anderen Ländern (z.B. SAT oder TOEFL in USA) bisher ein konsequentes Input-Output-Denken verhindert.

---

3 www.bildungsoptionen.de/manifest.htm

4 Johann Gottfried **Seume**: Spaziergang nach Syrakus im Jahre 1802

Zugang zu e-Testing-Items. In der klassischen Theorie der Entwicklung psychologischer Tests nach Lienert[5] wäre ein freier Zugang zu den Testitems nicht denkbar. Im Gegensatz dazu sollten die Items einer Lernkontrolle jederzeit für jedermann im Internet zugänglich (und wie zum Beispiel bei Wikipedia gegebenenfalls korrigierbar) sein – und so zahlreich, dass ein Auswendiglernen entweder als Lernziel erwünscht oder wegen des Variantenreichtums kaum möglich ist.

Technische Realisierung (in PHP). PHP ist eine hinreichend komplexe, internetgeeignete Sprache, um die geeignete Präsentation von Items und die angemessene Auswertung von Antworten sicherzustellen. Beim Einsatz eines Programmgenerators, zum Beispiel der Übungs- und Testplattform eExercise[6], erfordert die Entwicklung keine PHP-Kenntnisse.

Didaktische Realisierung, speziell Scorefunktionen. Ein Teil der Faszination von Computerspielen geht davon aus, dass erfolgreiche Spieler sich und aller Welt ihren Scorewert präsentieren können. Dieser Scorewert wird unter anderem von der Zeitkomponente maßgeblich bestimmt. Generell ist auch ein Testergebnis um so mehr wert, je weniger Zeit für das Finden des Ergebnisses individuell aufgewendet wird. Ein Beispiel von vielen für eine Scorefunktion, die diesen Anspruch erfüllt (Scorewert $score; Zahl der richtigen $zr und Zahl der falschen $zf Einsetzungen, Zeit $arbeitszeit):

```
$score = 2*round(((2*$zr-$zf) + 1000/$arbeitszeit)*($zr/6))
```

Bewertung von Items, Finanzprobleme. Wo im Internet das Expertenrating durch demokratischere Bewertungsformen ersetzt worden ist, wie beispielsweise bei Ebay für die Vertrauenswürdigkeit oder bei Wikipedia für die inhaltliche Richtigkeit, scheinen die Bewertungsergebnisse dem Expertenrating ebenbürtig zu sein. Für die Übertragung auf die Entwicklung von Bildungsstandards darf Gleiches erwartet werden, wenn die Bewertung der Aufgaben durch andere Aufgabenentwickler oder die Bearbeiter der Aufgaben freigegeben wird.

Item-Entwicklung durch Schüler. Eigene Erfahrungen zur Beteiligung der Schüler an der Gestaltung von Aufgaben sind durchweg positiv. Diese aktive Beteiligung schafft doppelten Nutzen: Die Entwicklung geht schneller. Die Schüler lernen allein schon durch die Arbeit an den Aufgaben.

---

5 Gustav A. Lienert/ Ulrich Raatz, Testaufbau und Testanalyse 6. Auflage 1998

6 http://sourceforge.net/projects/eexercise/ , http://enderssr.ikp.physik.tu-darmstadt.de/teaching/eexercise/ , Nestle N. et al. 2007 eExercise: Möglichkeiten zur Beobachtung individueller Lernstrategien .von Studierenden in einer freien, webbasierten Aufgabenplattform, Tagungs-CD zur DPG-Frühjahrstagung Regensburg (Lehmanns, Berlin)

Marianne NOLTE, Hamburg

Zur Situation von Menschen mit niedrigen mathematischen ualifikationen - ichtrechner

Samantha: Ich bin 25 ahre alt und ich kann Ihnen nicht sagen, wie spät es ist. Ich habe Probleme Telefonnummern zu wählen, Geld zu zählen, mit meinem Kontostand umzugehen, Trinkgeld zu geben, Richtungen zu finden, Entfernungen einzuschätzen und überhaupt einfaches mathematisches Wissen im Alltag anzuwenden. (nach Abeel, 2003, S. 1)

Samantha ist kein Einzelfall. Analog zu Analphabeten gibt es eine Gruppe von Erwachsenen, die nicht behindert sind und deren rechnerische Kompetenzen so gering sind, dass sie den Alltag nur mit Mühe und teilweise erheblichen Kompensationsstrategien bewältigen können. Die Spanne der Kompetenzen betroffener Personen reicht von völliger Unkenntnis, wie im genannten Beispiel, bis hin zu solchen, die über einige, aber nicht ausreichende Kenntnisse verfügen. Diese Situation führt zu Abhängigkeiten. Eine selbständige Entscheidung z.B. über Versicherungen, Bankgeschäfte, die Einteilung des Arbeitslohnes ist Nichtrechnern in der Regel nicht möglich. Sie sind zwar formal, aber nicht in der Realität, unbeschränkt geschäftsfähig.

Betroffene Personen sind darauf angewiesen, von sehr vertrauten Freunden oder Lebenspartnern Hilfe zu erfahren. Diese Erfahrung führt zu starken psychischen Belastungen. Nichtrechner (Nolte 2004) schämen sich dafür, nicht rechnen zu können. Sie entwickeln Verschleierungstechniken, damit die Probleme nicht bekannt werden und haben Angst davor, entdeckt zu werden. Es wurde von psychosomatischen Reaktionen berichtet, Schweißausbrüchen, wenn Rechnen droht.

Über die Probleme dieser Menschen ist in der ffentlichkeit, zumindest in Deutschland, kaum etwas bekannt.

Anzahlen

Alle Untersuchungen, die in den letzten ahren durchgeführt wurden, zeigen, dass es auch in der Bundesrepublik eine Gruppe von Personen gibt, deren mathematische Kenntnisse so gering sind, dass man sie als Nichtrechner bezeichnen kann. Der Bundesverband Alphabetisierung e.V. verweist auf die IALS-Studie (International Adult Literacy Survey, vgl. die deutsche Fassung: Grundqualifikationen, Wirtschaft und Gesellschaft, 1 5) (Döbert und Hubertus 2000), in der neben schriftsprachlichen ebenfalls rechnerische Kompetenzen etwa im Umgang mit Rechnungen, Bankbelegen oder Zinstabellen die notwendigen Rechenoperationen richtig anzuwenden (ebd., S. 2) ermittelt wurden. In dieser Studie werden 7, % der erwerbstätigen Bevölkerung als Risikogruppe bezogen auf ihre rechnerischen Kompetenzen beschrieben (Lehmann 1 , S. 6 f).

Aus den Studien der letzten ahre, die Kompetenzen von Schülerinnen und Schüler untersuchten, können Rückschlüsse auf zu erwartende Probleme im Erwachsenenalter gezogen werden. Nach der Pisa-Studie 2000 wurde ein Viertel der untersuchten 15- ährigen als so schwach eingestuft, dass ihre mathematische Grundbildung unter den Anforderungen oder auf dem Niveau der Anforderungen der Grundschule anzusiedeln ist (Kompetenzstufe I). Dieses Bild hat sich auch in der Pisa-Studie von 2003 (OE D 2004) nicht verbessert. Die Aufgabenbeispiele veranschaulichen die Anforderungen. So konnten 6,7% der ugendlichen den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 und 4 nicht aus den vorgegebenen Multiple- hoice-Antworten entnehmen (Rhein-Zeitung.de vom 17. 6. 02).

In der IGLU Studie wurden 2001 sprachliche, naturwissenschaftliche und mathematische Kompetenzen von Grundschülern erhoben. Die Daten ergaben, dass knapp 20% der Kinder nur die Kompetenzstufen I oder II erreichten (Walther, Geiser et al. 2004). Damit werden die Anforderungen des Mathematikunterrichts in der Grundschule noch nicht erfüllt. Es könnten sich im Verlauf der Schulzeit noch Verbesserungen ergeben. Es ist jedoch zu erwarten, dass am Ende der Schulzeit ein erheblicher Anteil der mit diesen Anzahlen erfassten Schülerinnen und Schülern noch nicht ausreichend Rechnen gelernt hat.

Im Zusammenhang mit Erhebungen aus England werden bei etwa 20 % der Erwachsenen schwere Störungen vermutet. Was unter schweren Störungen verstanden wird, wird deutlicher, wenn die konkreten Aufgaben beschrieben werden. Z.B. hatte ein Viertel der Erwachsenen Probleme Wechselgeld (bei 2) zu berechnen.

Gesellschaftliche Relevanz

A literate and numerate population is the goal of any industrialised society. Literacy and numeracy skills carry the means by which children are equipped for the education processes on which their location in the adult world will depend. As a country's cultural identity is also underpinned by the knowledge and skills transmitted from one generation to the next, basic skills also give access to a country's cultural heritage and values. (Bynner o. .).

Für Personen mit sehr geringer mathematischer Grundbildung ergeben sich über den Alltag hinaus auch im Berufsleben Schwierigkeiten. Mit dazu bei trägt die wachsende technologische Entwicklung (Bynner (o. .), Moser (2004)). In der genannten Studie von Bynner wird Arbeitslosigkeit als ein großes Problem beschrieben. Zeiten, in denen Überbrückungsmaßnahmen durchgeführt werden, werden von Zeiten unterbrochen, in denen eine reguläre Arbeit durchgeführt wird. Dies trifft für überwiegend für Männer zu. Frauen übernehmen überwiegend eine traditionelle Rolle in der Familie.

Kosten für die Gesellschaft

Aus England sind ebenfalls Kosten für die Gesellschaft bekannt. ... in 1 3 the government funded Adult Literacy and Basic Skills Unit (ALBSU) estimated that poor basic skills, including inadequate levels of numeracy, cost British industry 4,6 billion a year (ALBSU, 1 3) a concern which runs through the government's ompetitiveness' White Papers. (oben und handa 2000, S. 30). Die Autoren weisen darauf hin, dass mangelnde Fähigkeiten beim Rechnen ebenso schwerwiegend sein kann wie Analphabetismus, sowohl was das Individuum betrifft als auch die Kosten für die Gesellschaft.

Was kann man tun?

Die offensichtliche Abhängigkeit und die damit verbundene starke seelische Belastung führen dazu, dass Betroffene sich in hohem Maße überwinden müssen, über ihre Probleme zu sprechen. Eine Situation zu entwickeln, die massive psychische Sperren zu überwinden ermöglicht, ist ein erster Schritt. Gleichzeitig verfügen Erwachsene über eine breitere Wissensbasis als Kinder und ugendliche. Sie haben Aufgaben bewältigt, die Rechnen erfordern, ohne ausreichend Rechnen zu können.

Bisher gibt es insbesondere in Deutschland viel zu wenig Angebote für betroffene Personen. Die Entwicklung von altersangemessenen Materialien, die von lebensweltlicher Bedeutung für die Lernenden sind und gleichzeitig sehr elementare Inhalte aufgreifen, ist von besonderer Bedeutung.

Langpaap (2005) hat in seinen Untersuchungen erste Erfahrungen mit einem sehr individuellen Zugang über die Bedeutung von lebensweltlichen Erfahrungen einen Zugang sowohl zu den individuellen Kenntnissen zu finden, als auch diese als Ausgangspunkt zu nehmen mathematische Lernprozesse zu initiieren. Diese sehr individuelle Zuschreibung der Arbeit lässt sich jedoch nicht in Gruppen durchführen.

Mit dem Internetportal www.ich-will-lernen.de des deutschen Volkshochschulverbands (siehe Artikel Bettina Lübs) soll ein solcher erster Zugang ermöglicht werden. Neben Angeboten anonym in dem Portal zu arbeiten, werden Kurse angeboten, die Betroffenen Lernen auch in der Gruppe mit einer Lehrperson ermöglicht.

Literatur

Abeel, S. (2003). My Thirteenth Winter. A Memoir. New ork, S HOLASTI IN .

Bynner o. . http://www.staff.vu.edu.au/alnarc/onlineforum/AL_pap_bynner.htm_top (download März 200)

oben, D. and N. handa (2000). The Problem: The risis of Adult Innumeracy. Perspektives on Adults Learning Mathematics. Research and Practice. D. oben, . O Donoghue and G. E. Fitzsimons. Dordrecht Boston, London, Kluwer Academic Publishers 307-327.

Döbert, M. und P. Hubertus (2000). Ihr Kreuz ist die Schrift. Münster, Stuttgart, Klett.

Gal, I., D. Tout, et al. (1). Numeracy and the International Life Skills Survey. Adults Learning Maths (ALM) Newsletter No. 6 Spring.

Langpaap, . (2005): Förderung rechenschwacher Erwachsener ausgehend von originären Alltagserfahrungen. In: G. Graumann (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Vorträge auf der 3 . Tagung für Didaktik der Mathematik vom 2 . 2. bis 4. 3. 2005 in Bielefeld. Hildesheim/Berlin: Franzbecker. 335-340.

Lehmann, R. H. (1). Qualifikationsdefizite in der erwerbsfähigen Bevölkerung in Deutschland. Einige Befunde des International Adult Literacy Survey. unge Menschen in der berufsorientierten Alphabetisierung. Eine internationale Fachtagung. W. Stark, T. Fitzner und . Schubert. Stuttgart 66-72.

Nolte, M. (2004). Rechenstörungen im Erwachsenenalter. Aufmerksamkeitsdefizit, Hyperaktivität, Teilleistungsstörungen. Dokumentation der Ringvorlesung in Hamburg im Sommer 2002. M. Schulte-Markwort, E. Reich-Schulze, M. Nolte et al. Hamburg, Feldhaus.

OE D (2001). Lernen für das Leben. Erste Ergebnisse der internationalen Schulleistungsstudie PISA 2000.

Schlöglmann, W. (2002): Brauchen Erwachsene Mathematik Forschungsschwerpunkte und Ergebnisse im Bereich Mathematiklernen bei Erwachsenen. Alfa-Forum. Zeitschrift für Alphabetisierung und Grundbildung, 4 , 22-24.

Walther, G., H. Geiser, et al. (2004). Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten ahrgangsstufe in einigen Ländern der Bundesrepublik Deutschland. IGLU. Einige Länder der Bundesrepublik Deutschland im nationalen und internationalen Vergleich. W. Bos, E.-M. Lankes, M. Prenzelet al. Münster, Waxmann 117-140.

Edyta NOWINSKA, Universität Osnabrück

KogMaL-R: Kognitionsorientiertes Mathematik-Lehren in der Realschule

Die in den TIMSS- und PISA-Studien nachgewiesenen Defizite deutscher Schüler in der selbstständigen Anwendung des in der Schule erworbenen Wissens stellen für die Unterrichtswissenschaft eine neue Herausforderung dar. Ausgehend von diesen empirischen Befunden wird in verschiedenen Projekten untersucht, wie Unterricht – als eine der zentralen Einflussvariablen auf die Leistung der Schüler – geeigneter gestaltet werden könnte. Eines dieser Projekte ist das Forschungs- und Entwicklungsprojekt „KogMaL-R“ [1]: Die unzureichenden mathematischen Kenntnisse von Realschülern, die sich seit Jahren nach Schulabschluss um einen Ausbildungsplatz bei der *Georgsmarienhütte GmbH* bewerben, führten dazu, dass die *Stiftung Stahlwerk Georgsmarienhütte* dem Institut für Kognitive Mathematik der Universität Osnabrück ein Unterrichtsentwicklungsprojekt bewilligte. In diesem soll ein Konzept für wirksameren Mathematikunterricht an der Realschule entwickelt und vor Ort erprobt werden.

KogMaL-R zeichnet sich aus durch:

- eine Orientierung an den Denk- und Verstehensprozessen der Lernenden;
- eine kognitionstheoretische Auffassung der Schulmathematik als Werkzeug zur präzisen Darstellung von intuitivem Wissen;
- ein intensives videobasiertes Lehrercoaching.

Ziel ist eine zukünftige Veränderung des Mathematikunterrichts zu Beginn der Realschule in Klasse 5. Vorbereitet wird dies durch zwei Pilotstudien. Ein Tandem von zwei Lehrkräften unterrichtet in zwei folgenden Jahren gemeinsam einen Wahlpflichtkurs der Klassenstufe 6.

Ausgangslage

Eine Analyse der PISA-2000E-Ergebnisse zeigt [8], dass ein Lernzuwachs von Realschülern während eines Schuljahres nicht bei solchen Items nachgewiesen werden kann, die folgende Kompetenzen erfordern:

- Sinnentnahme aus einer verbal gestellten Aufgabenstellung (*sprachlogische Komplexität*)
- Verstehen und sinnvolles Benutzen von – auch nur einfachen – Formeln (*Formalisierung von Wissen*).

---

[1] KogMaL-R steht für **Kog**nitionsorientiertes **Ma**thematik-**L**ehren an der **R**ealschule. Die Kennung „-R“ ist angefügt, da eine zweite Säule im Gesamtprojekt „KogMaL“ sich unter Leitung von Inge Schwank mit dem Bereich Kindergarten/Grundschule beschäftigt (siehe auch: www.ikm.uni-osnabrueck.de/reddot/75.htm).

Zielsetzung

Ziel von KogMaL-R ist es, die Nachhaltigkeit des Mathematikunterrichts dadurch zu verbessern, dass das bei vielen Schülern zumeist nur fragmentarisch vorhandene mathematische Wissen unter einem einheitlichen Gesichtspunkt geordnet und dadurch die Zugriffsmöglichkeit auf dieses Wissen verbessert wird. Erreicht werden soll dieses sowohl durch eine Veränderung in der stoffdidaktischen Ausrichtung des Mathematikunterrichts als auch durch eine Verbesserung der Unterrichtskultur.

Die stoffdidaktische Veränderung zielt darauf, weite Teile der Schulmathematik kognitionstheoretisch zu strukturieren. Dem Begriff *Funktion* kommt hier insoweit eine tragende Rolle zu, als er nicht nur als ein mathematisches Werkzeug behandelt wird, sondern vor allem als Bestandteil eines mathematischen Betriebsystems, das die Strukturierung von Vorstellungen wesentlich erleichtert. Kaune ([5], S.69) führt dazu aus, dass „mit den Begriffen Funktion, Variable, funktionale Abhängigkeit, Stellenzahl, Argument usw. nicht nur Begriffe im mathematischen Sinne intendiert sind, für die es im Prinzip explizite Definitionen gibt, sondern dass diese auch ein Netzwerk bilden, in das Fragetechniken, Standpunktwechsel, Formalisierungs- und Rechentechniken eingebunden sind." Die sichere Verfügbarkeit des Werkzeugs *Funktion* ermöglicht es, Teilgebiete der Schulmathematik nach einer gemeinsamen Leitidee zu unterrichten.

Maßnahmen

Damit dies gelingen kann, sind die Schüler in ihren Kompetenzen zu fördern

- bei der mathematischen Beschreibung von Anwendungssituationen den zu modellierende Sachverhalt mit Hilfe von (mehrstelligen) Funktionen darzustellen,
- das Funktionskonzept sicher und flexibel anzuwenden, so dass dieses für sie zu einem universell einsetzbaren kognitiven Werkzeug wird.

Diese Maßnahmen passen aufgrund der Betonung von Prozesskompetenzen in besonderem Maße zu den Reformbemühungen, wie sie in den Bildungsstandards formuliert sind.

Ein besonderes Augenmerk gilt weiter einer Unterrichtsgestaltung, die Vorstellungen und Fehlvorstellungen der Schüler möglichst erkennbar werden lässt und die Schüler zu metakognitiven Aktivitäten anspornt. Dabei ist die neue kognitionsorientierte Aufgabenkultur Grundlage für eine diskursive Unterrichtsführung, bei der die Kommunikationsprozesse zwischen den Schülern im Vordergrund stehen (vgl. [6]).

Viele der Aufgaben zeichnen sich dadurch aus, dass sie an den Kontext des Unterrichts, an die Vorstellungen und Fehlvorstellungen der Lernenden aber auch an die Merkmale der beteiligten Lehrkräfte angepasst sind. Videobasierte Unterrichtsanalysen spielen eine wichtige Rolle, um den Bedarf an Maßnahmen zu identifizieren. Der Konzeption der Aufgaben [2] liegt das Osnabrücker Curriculum [1] zugrunde, dessen Leitidee eine kognitionstheoretische Auffassung von Schulmathematik ist: diese liefert geistige Werkzeuge zur präzisen Darstellung von intuitiv verstandenem Wissen. Eine der Konsequenzen, die diese Leitidee impliziert ist, dass dem Aufbau von Modellvorstellungen in den Köpfen der Schüler Vorrang eingeräumt werden muss vor der Vermittlung von mathematischem Sachwissen.

Da bereits zahlreiche Studien belegen, dass es unrealistisch ist, den Unterricht dadurch ändern und die Schülerleistungen dadurch verbessern zu wollen, dass man Lehrkräften neue Materialen zur Verfügung stellt und darauf hofft, dass diese wie gewünscht eingesetzt werden (vgl. [4]), investieren auch wir viel Kraft und Zeit in die Weiterbildung der beteiligten Lehrkräfte. Angeboten wird eine inhaltliche und methodische Beratung sowie ein intensives Lehrercoaching, das auf der Analyse von videografierten Unterrichtsstunden aufbaut. Ziel ist die Veränderung der Lehrer-Schüler-Interaktionen

- durch eine Stärkung der Lehrkräfte in ihrer Diagnosekompetenz bezüglich der mathematischen Denk-, Lern- und Lehrprozesse;
- durch einen Verbesserung der Lehrkräfte in ihrer Unterrichtskompetenz, die Schüler zur Reflexion eigener Fehler und Fehlvorstellungen anzuleiten;
- und schließlich durch die Sensibilisierung der Lehrkräfte für differenzierte Interventions- und Fördermöglichkeiten.

Das Training zu metakognitiven und diskursiven Aktivitäten der Lernenden und der Lehrenden dient nicht nur der Verbesserung der Qualität der unterrichtlichen Interaktionen sondern auch dem Aufbau eines tieferen Verständnisses von mathematischen Begriffen, Werkzeugen und Methoden. Die Bedeutung von metakognitiven und diskursiven Aktivitäten von Lehrenden und Lernenden für die Qualität von Mathematikunterricht erklärt Cohors-Fresenborg [3]. Dass die metakognitiven Kompetenzen der Schüler in der Rangfolge der Effektstärken auf den Lernerfolg schon an vierter Stelle stehen, ist inzwischen schon Lehrbuchwissen ([7], S.35).

Erste Ergebnisse

Wie jede Implementationsforschung, die auf eine Unterrichts-Veränderung zielt, unterliegt auch KogMaL-R zahlreichen Einflussfaktoren, die den Erfolg der Umsetzung der Maßnahmen und infolge den Gesamterfolg der Intervention bedingen (Für eine genauere Analyse von Einflussfaktoren auf solche Implementationen s. [4]). Unsere Studie zeigt, dass die Implementation von kognitionstheoretisch konzipierten Maßnamen auf der einen Seite und der Lernerfolg der Schüler auf der anderen Seite nicht nur durch

Merkmale seitens der Lehrkräfte - wie fachliche Kompetenz und persönliches Bild von Mathematik - beeinflusst sind, sondern auch wesentlich durch die Fähigkeiten der Lehrkräfte, Präzision, Monitoring und Diskursivität im Unterrichtsgespräch wertzuschätzen und zu praktizieren.

Insgesamt konnten wir nachweisen, dass sich folgende Maßnahmen positiv auf die Qualität der unterrichtlichen Interaktionen, das tiefere Verständnis von mathematischen Begriffen, Werkzeugen und Methoden sowie auf den Lernerfolg der Schüler auswirken: gezielte Weiterbildung der beteiligten Lehrkräfte unter Berücksichtigung ihrer Kompetenzen, Training der Lehrkräfte und Schüler zu metakognitiven und diskursiven Aktivitäten, Analyse der Wirkmechanismen des Mangels an Monitoring, Reflexion und Präzision, kognitionsorientierte Aufgabenentwicklung. Unsere Studie bestärkt uns insbesondere in der Überzeugung, dass ein Mangel an solchen geistigen Werkzeugen, die die Lehrenden und Lernenden zur (Selbst-)Reflexion, zur (Selbst-)Überwachung und zum bewussten Planen von Denkprozessen befähigen, das verständnisvolle Lehren und Lernen von Mathematik und den Aufbau eines kognitiven, mathematischen Betriebsystems gravierend behindert.

Literatur

[1] Cohors-Fresenborg, E., (2001): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: Das Osnabrücker Curriculum. *Der Mathematikunterricht*, 1, 5-13.

[2] Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2008): Von Anweisungen zu Funktionen, Arbeitsbuch für Schülerinnen und Schüler, Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik Nr.41. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V.

[3] Cohors-Fresenborg, E.: Mechanismen von Metakognition und Diskursivität im Mathematikunterricht (in diesem Band).

[4] Gräsel, C & Parchmann I. (2004): „Implementationsforschung – oder: der steinige Weg, Unterricht zu verändern". *Unterrichtswissenschaft* 3/2004, S. 196-214.

[5] Kaune C. (1995): Der Funktionsbegriff als ein Fundament für den gymnasialen Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In H. G. Steiner und H.-J. Vollrath (Hrsg.) Neue problem- und praxisbezogene Ansätze in der mathematikdidaktischer Forschung, S. 66-76. Köln: Aulis.

[6] Kaune, C. (2001): Merkmale eines konstruktivistischen Unterrichtsskripts und eine Analyse dazugehöriger Lehr- und Lernprozesse. *Der Mathematikunterricht*, 47(1), 14-34.

[7] Meyer H. (2004): Was ist guter Unterricht? Berlin: Cornelsen Scriptor.

[8] Sommer N. (2008, in Druck): Lernzuwachs und kognitive Aufgabenanforderungen – Untersuchungen am PISA-E-2000- Datensatz. *Journal für Mathematik-Didaktik.*

Andreas OBERSTEINER, München

Was passiert im Gehirn beim Kopfrechnen? - Eine neurophysiologische Untersuchung der Hirnaktivitäten beim Lösen zweistelliger Additionsaufgaben

Bedeutung von Textaufgaben für die Kompetenzentwicklung

Das Lösen einfacher Additionsaufgaben durch Kopfrechnung ist eine grundlegende mathematische Fähigkeit und eine der ersten Aufgabenstellungen im arithmetischen Anfangsunterricht. Dabei ist von Bedeutung, dass solche Aufgaben nicht nur isoliert gelöst werden können, sondern dass entsprechende Lösungsstrategien in verschiedenen Kontexten anwendbar sind (Reiss, 2004). Mathematische Kompetenz beinhaltet nämlich wesentlich die Fähigkeit des Modellierens, also des Abstrahierens der mathematischen Problemstellung aus einem alltäglichen Kontext (OECD, 2004). Um diese Kompetenz bei Schülerinnen und Schülern bereits früh zu fördern, werden im Mathematikunterricht der Grundschule Textaufgaben mit alltagsnahen Inhalten eingesetzt. Eine interessante Fragestellung ist in diesem Zusammenhang, wie groß der Einfluss des Präsentationsformats auf das Lösungsverhalten der Schüler ist bzw. ob sich dieser Einfluss ggf. im Laufe der Zeit verändert. Der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe hängt ferner wesentlich von den Vorkenntnissen eines Schülers ab (Stern, 1997). Demnach wäre zu erwarten, dass ältere Schüler auf Grund ihrer größeren Vorkenntnisse dieselben Aufgaben schneller und korrekter lösen als jüngere. Im Bereich des Kopfrechnens ist aber angesichts täglicher Unterrichtspraxis von Grundschülern und der üblichen Vernachlässigung dieser Form des Rechnens in höheren Klassen sowie der Verwendung des Taschenrechners nicht a priori klar, ob das Alter hier einen positiven Einfluss auf die Leistung hat.

Neurowissenschaftliche Grundlagen mathematischer Prozesse

Aus neurowissenschaftlicher Sicht ist dabei interessant zu klären, welche Prozesse beim Lösen mathematischer Aufgaben unterschiedlicher Art im Gehirn stattfinden. Aus zahlreichen Studien ist bekannt, dass etwa das Abrufen mathematischer Fakten wie beim kleinen Einmaleins auf anderen Prozessen beruht und in anderen Teilen des Gehirns stattfindet als das exakte Lösen einer schwierigeren Additionsaufgabe. Der Parietallappen des Gehirns hat sich als Kernregion der Zahlenverarbeitung herausgestellt (für einen kurzen Überblick siehe z. B. Kucian & von Aster, 2005). Diese Region ist besonders beim exakten Berechnen einer Lösung aktiv, weniger beim Abruf auswendig gelernter Fakten. Erhöhte Hirnaktivierungen zeigten sich, wenn Aufgaben in symbolischer Schreibweise (also mit arabischen

Ziffern) dargeboten wurden, aber beispielsweise auch bei nicht-symbolischen Aufgaben zum Größenvergleich.

Das Projekt BrainMath

In dem interdisziplinär angelegten Projekt BrainMath wird untersucht, welchen Einfluss die Faktoren Alter, Präsentationsformat und Gefühlszustand auf das Verhalten und die Hirnaktivierungen beim Berechnen zweistelliger Additionsaufgaben im Kopf haben. In diesem Beitrag geht es lediglich um Einflüsse der beiden zuerst genannten Faktoren.

Aufgaben

Es wurden Additionsaufgaben im zweistelligen Bereich vom Typ ZE+ZE=ZE (Zehner- und Einerstelle jeweils ungleich Null) mit und ohne Zehnerübergang verwendet. Solche Aufgaben können nicht allein durch Faktenabruf gelöst werden, sondern es sind Rechenvorgänge notwendig. Die Aufgaben wurden je zur Hälfte in numerisch-algorithmischer Form (also z. B. „58+37=?“) oder in Form von kurzen Textaufgaben (z. B. „Robert ist 26 Jahre alt, sein Großvater ist 52 Jahre älter. Wie alt ist der Großvater?“) präsentiert (*Präsentationsformat*). Große Unterschiede in den Bearbeitungszeiten, aber geringe Unterschiede in der durchschnittlichen Lösungsrate für solche Aufgaben wurden in einem Vortest festgestellt. Die Aufgaben schienen deshalb geeignet für die Untersuchung von Unterschieden in der Hirnaktivierung.

Methode

Die Hirnaktivitäten im parietalen Bereich wurden mit Nah-Infrarot-Spektroskopie (NIRS) gemessen, einem Verfahren zur Messung der lokalen Durchblutungsverhältnisse im Gehirn. Dabei wird dem Probanden eine Art Haube auf den Kopf gesetzt, aus welcher kurzwelliges Infrarotlicht abgegeben wird. Dieses wird je nach lokaler Durchblutungsstärke unterschiedlich stark reflektiert und von Lichtdetektoren aufgenommen. Der Effekt beruht auf der Beobachtung, dass das Nah-Infrarotlicht von oxygeniertem (sauerstoffreichem) und reduziertem (sauerstoffarmem) Hämoglobin (O_2Hb bzw. HHb) unterschiedlich stark absorbiert wird. Aus dem Verhältnis zwischen ausgesendetem und reflektiertem Licht kann deshalb die regionale Konzentrationsänderung von O_2Hb und HHb berechnet werden.

Stichprobe und Design

Die Untersuchung wurde mit 46 Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 4 einer Grundschule und 44 Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 8 einer Realschule in Bayern durchgeführt. Der Versuchsaufbau bestand aus zwei Blöcken (*Bedingungen*), einem „Leseblock“ und einem

„Rechenblock". Während in letzterem für alle präsentierten Aufgaben das korrekte Ergebnis berechnet werden sollte, musste man beim Leseblock die Aufgaben lediglich durchlesen ohne das Ergebnis zu berechnen. Aufgrund dieser Vergleichsbedingung konnten bei der Auswertung Hirnaktivitäten identifiziert werden, die nur für das Lesen verantwortlich waren. Der Leseblock beinhaltete 24 und der Rechenblock 44 Aufgaben. Sowohl die Abfolge der Aufgaben innerhalb der Blöcke als auch die Reihenfolge der beiden Blöcke waren zufällig. Die Aufgaben wurden einzeln an einem Bildschirm gezeigt und die Versuchspersonen mussten über die Tastatur eine von vier möglichen Antworten auswählen. Außer den Gehirnaktivitäten wurden Reaktionszeiten und Trefferanzahlen gemessen.

Vor der Durchführung der NIRS-Messungen bearbeiteten alle Versuchspersonen einen schriftlichen Mathematikleistungstest zur Einschätzung ihrer allgemeinen mathematischen Leistungsfähigkeit.

Ergebnisse

Die beiden Versuchsgruppen unterschieden sich signifikant ($t(73.68) = 6.13$, $p < .001$, $d = 1.29$) in der durchschnittlichen Bearbeitungszeit pro Rechenaufgabe (10,8 Sek. bzw. 8,0 Sek.), kaum hingegen in der durchschnittlichen Trefferquote (95,8% bzw. 96,3%). In beiden Gruppen wurde ein hoch signifikanter Zusammenhang ($p < .001$) zwischen der Trefferquote und dem Aufgabentyp gefunden, kein signifikanter Zusammenhang bestand dagegen zwischen Trefferquote und Präsentationsformat. Aufgaben mit Zehnerübergang wurden also signifikant häufiger falsch gelöst als Aufgaben, bei denen kein Zehnerübergang notwendig war. Dagegen machte es bezogen auf die Fehlerrate keinen signifikanten Unterschied, ob die Aufgaben in numerisch-algorithmischer Form oder als Textaufgaben gestellt waren.

Hinsichtlich der Bearbeitungszeit zeigte sich in beiden Gruppen eine hoch signifikante Abhängigkeit ($p < .001$) von den Variablen Präsentationsformat und Aufgabentyp. Zusätzlich gab es hier auch Interaktionseffekte zwischen Präsentationsformat und Jahrgangsstufe ($F(1,88) = 35.85$, $p < .001$). Die Schüler benötigten also für die Bearbeitung von numerisch dargebotenen Aufgaben weniger Zeit als für Textaufgaben. Der Einfluss des Präsentationsformats war aber für Schüler der 4. Jahrgangsstufe ausgeprägter als für Schüler der 8. Jahrgangsstufe. In beiden Gruppen wurden Aufgaben mit Zehnerübergang signifikant langsamer gelöst als Aufgaben ohne Zehnerübergang.

Ein interessantes Ergebnis sind ferner die Korrelationen zwischen Mathematikleistung im schriftlichen Test und den Leistungen im PC-Test. Hier findet sich für die Gruppe der Viertklässler ein negativer korrelativer Zusammenhang zwischen Mathematikleistung und Bearbeitungszeit ($r = -.30$, $p < .05$) (leistungsstärkere Schüler benötigten also weniger Zeit), kein solcher Zusammenhang besteht jedoch zur Fehlerquote. Für die Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 8 zeigt sich ein umgekehrtes Bild: Leistungsstärkere Schüler lösten die Aufgaben mit weniger Fehlern ($r = .40$, $p < .01$), waren aber nicht unbedingt schneller (keine Korrelation mit der Bearbeitungszeit).

Vor der Auswertung der Daten der NIRS-Messung wurde eine so genannte Region of Interest (ROI) im parietalen Bereich des Gehirns definiert, für welche die Konzentrationsänderungen von O_2Hb und HHb berechnet wurden. Ein direkter Vergleich der beiden Gruppen gestaltet sich aufgrund der großen Unterschiede in den Bearbeitungszeiten als schwierig. Die Auswertungen sind noch nicht abgeschlossen. Erste Berechnungen ergaben, dass sich während der Rechenbedingung bei Textaufgaben in der Gruppe der Grundschüler eine stärkere Aktivierung zeigte als bei numerisch gestellten Aufgaben. In der Gruppe der Achtklässler konnten keine deutlichen Unterschiede ausgemacht werden.

Zusammenfassung

Alle Schüler bearbeiteten die Aufgaben weitgehend korrekt, allerdings benötigten Schüler der 4. Jahrgangsstufe dafür deutlich mehr Zeit. Es überrascht nicht, dass die Fehlerquoten insgesamt sehr niedrig sind, da die Aufgaben im Prinzip für alle Schüler ab der 2. Klasse lösbar sind und kein Zeitdruck bestand. Der höhere Zeitbedarf der jüngeren Schüler verbunden mit verstärkten Hirnaktivierungen im parietalen Bereich könnte als Hinweis auf automatisierte Strategien bei älteren Schülern und einen routinierteren Umgang mit den Modellierung erfordernden Textaufgaben interpretiert werden.

Literatur:

Kucian, K. & von Aster, M. (2005). Dem Gehirn beim Rechnen zuschauen. Ergebnisse der funktionellen Bildgebung. In von Aster, M. & Lorenz, J. H. (Hrsg.). Rechenstörungen bei Kindern (S. 54-72). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

OECD (2004). Lernen für die Welt von morgen. Erste Ergebnisse von PISA 2003. Heidelberg: Elsevier.

Reiss, K. (2004). Bildungsstandards und die Rolle der Fachdidaktik am Beispiel der Mathematik. Zeitschrift für Pädagogik, 50(5), 635-649.

Stern, E. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen. Ergebnisse aus dem SCHOLASTIK-Projekt. In Weinert, F. E. & Helmke, A. (Hrsg.). Entwicklung im Grundschulalter (S. 157-170). Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Tatjana OLIJNYK, Sweta DOZENKO, Vika KONARSHEWSKA, Charkow

Die Besonderheiten der Einführung der pädagogischen Technologie der Entwicklung des kritischen Denkens.

Die Unbestimmtheit der übergehenden Kriseprozesse, die Vergrößerung der Informationsumfänge, die Entwicklung der Sozialsysteme, die Notwendigkeit die Prognoserisiko zu berücksichtigen verursacht eine führende Rolle des kritischen Denkens nicht nur für die einzelnen Organisationen sondern auch für die ganze Gesellschaft. Das Hauptziel der kritischen Denkensformierung ist die effektive Problemlösung in allen Bereichen der Menschenwirksamkeit. Kritisch nachdenkender Mensch um seine Entscheidung zu argumentieren sucht die gescheiteren Beweisgründe. Dabei legt er eine große Menge von Tatsachen, Ideen und Theorien aus, es ist fast unmöglich mit ihm zu manipulieren. Solcher Mensch erkennt das Recht anderer Person auf ihre eigene Meinung an und ist für die produktive Austausch und den Kompromissbeschluss der Gesellschaftsprobleme bereit.

Unzweifelhaft, dass im Struktur des Nationalkurikulums der allgemeinen Schulausbildung, ist es die Entwicklung des kritischen Denkens als eines der Ausbildungsschlüsselziele für die Berufs- und Sozialadaptierung der Persönlichkeit in heutigen Verhältnissen zweckmäßig zu betrachten. Wie Praxis zeigt um das kritische Denken zu stimulieren muss der Lehrer die Zeit geben und mit der unriskierten Umgebung für die Ausnutzung des kritischen Denkens versehen. Zu dieser Umgebung gehören die Möglichkeiten frei nachzudenken, verschiedene Meinungen und Ideen anzunehmen, aktiv zu lernen, andere kritische Denken zu würdigen, eigene Sicherheit und Verständnis eigenes Denkenwertes zu entwickeln, an die Fähigkeit von jedem die kritischen Überlegungen zu produzieren zu glauben. Die Analyse der pädagogischen Technologie der Entwicklung des kritischen Denkens zeigt, dass das entscheidende Verbiendungsglied in ihrer Verwirklichung die persönlichen Lehrerseigenschaften in der Verbindung mit seinem eigenen kritischen Denken sind. Anders gesagt ist das bewusste Lehrersberücksichtigen der Bedürfnisse und Interesse der Schüler, die Einführung der Innovationsreorganisationen mit der Analysefähigkeit zu eigenen Tätigkeit und zu den ständigen Selbstvervollkommnungen, dem Streben die Atmosphäre der Berufsentwicklung, Initiative, der Zusammenarbeit und Experimentierung zu schaffen verbindet.

Die besondere Aufmerksamkeit muss der Lehrer den Kognitivstrategien und den Wechselbeziehungen zwischen den Informationselementen schenken, das heißt die Aufmerksamkeit auf die Wechselbeziehungen im Lehrplan zu akzentuieren und die Wahrnehmungstechniken, Interpretationen, Organisierung, Analyse, Schätzung, Bewahrung und die Kenntnisseerwerbung zweckmäßig zu formieren. Die Lehrer, die solcherweise arbeiten, zugen nicht das Inhaltslernen und die Aneignung der bekannten Lösungsmethoden der bestimmten Gesamtheiten der typisierten Probleme, sondern die Diskussionsstimulation, das Auslegen der wichtigsten Inhaltsfragen bevor. Also wird das Hauptproblem die Absonderung solches Inhalts (Fakten, Begriffe, Objekte u.s.w.) auf dessen Verständnisgrund die Schüler die erworbenen Kenntnisse und die Fähigkeiten im Leben verwerten könnten.

Die besondere Aufmerksamkeit muss man den Fähigkeiten schenken, die mehr effektive Aneignung nicht nur der Information, sondern auch der Tätigkeiten (Kommunikation, Techniken und Verfahren des Denkens) bedingen. Unzweifelhaft, dass man sich bei der Lehrprozessesprojektierung auf die Formierung der bestimmten Bedingungen konzentrieren muss, die den Schülern bei der Selbstnachforschung und der Ausnutzung der optimalen Forschungswege und Problemlösungen auch der Entwicklung der nötigen Typstätigkeiten geneigt sind. Es ist wichtig auch etwas Neues oder die vervollkommnte Lösung der bestimmten Aufgabe auf dem Grund der Erneuerung der Tätigkeitsaufeinanderfolge und der Analyse ihrer Effektivität zu entdecken, die Denkensprozesse, deren Ergebnis die Originalität, Untrivialität, außerordentliche äußernde Ideen sind zu stimulieren.

Für die Formierung der Fähigkeiten des kritischen Denkens geben die Arbeitsprotokolle (die die erfüllten Aufeinanderfolge erneuern) die unikalen Möglichkeiten bezüglich auf die Reflexivsuche der Effektivwege der Lösung, das Verständnis der Dynamik der modellierten Prozesse und die Beherrschung der Prognosefähigkeiten. Auf solcher Weise entsteht die Reflexion auf dem Grund der Analyse der Antwortlösung zu den Ausgangsinformation, der Anwendung der nötigen theoretischen Thesen und Methoden, die zur Erfahrungserwerbung der Ausnützung schon bekannten Kenntnisse in den neuen Situationen beitragen.
Die Besonderheit der Technologieausarbeitung des kritischen Denkens sind die interaktiven Methoden auf dem Grund der Erfüllung drei Hauptbedingungen: (a) die Bearbeitung des Stoffes, der mehr als eine Behandlung gibt, und die Nötigkeit eigene Meinung zu produzieren und zu halten, (b) das Verständnis der anderen Unterscheidungsmeinung, (c) die Nachdenken, besonders in der schriftlichen Form, über die Veränderung des eigenen Denkens. Im ganzen ist die Rede über die vernünftige

Annahme, die sich in verschiedenen Formen, z.B.: (1) in der Fähigkeit durchsichtige und fruchtbare Charakteristikmittel zu finden, (2) in den sorgfältigen Nachdenken, die sich auf die Tatsachen und Kenntnisse über die Möglichkeiten oder Alternativtätigkeiten gründen, (3) und endlich in der gedankenvollen Veranschlagung der verbrauchten Tätigkeiten und der gemachten Auswahl zeigen kann.

Die besondere Bevormundung braucht die Fragesystematik [3], in der jeder Fragetyp dem bestimmten Niveau der Problemkompliziertheit entspricht und zum tieferen Informationsverständnis führt: 1) buchstäbliche Fragen; 2) Fragen für die Ausnutzung der existierenden Kenntnisse; 3) Interpretationsfragen; 4) analytische Fragen; 5) Synthesefragen; 6) Veranschlagungsfragen. Außerdem muss man für die Kognitivsphäre die Taxonomie von Blum beachten [3] bezüglich auf die 6 Niveaus der Erkennungsziele der geistigen Tätigkeit (die Kenntnisse, Verständnisse, Ausnutzung, Analyse, Synthese, Veranschlagung), die für das Lernen jeder Disziplin auf allen Ausbildungsniveaus ausgenützt werden kann.

Selbstverständlich haben die heutzutagen Tendenzen das Veranschlagungsprozess beeinflusst. Das akzentuiert die Aufmerksamkeit auf die Messung der qualitativen Charakteristiken und der Parameter und muss zum Schülerbewusstsein des Niveaus eigener Erreichungen, zur Bestimmung der Ziele und Richtungen der weiteren Anwachsung, der Fähigkeitsentwicklung zur Planung auf dem Grund der Selbstbeobachtungs- und Selbstrechenschaftsmethoden beitragen. Auf solcher Weise ist zweckmäßig den allmählichen Übergang vom Veranschlagungsvorgang zur Lehrpriorität, von den schriftlichen Arbeiten zu den projektierten, von der Gedächtnistestierung zur Verständnisveranschlagung, Interpretation, Ausnützung, Analyse, Synthese, von der Lehrerveranschlagung zur Schülerveranschlagung, von der Ergebnisveranschlagung zur Prozessveranschlagung, von der Kenntnisseveranschlagung zur Fähigkeitsveranschlagung, von der Veranschlagung, die die Endergebnisse widerspiegelt, zur Veranschlagung, die auf die Entwicklung gerichtet ist zu verwirklichen.

Der Lehrer ist ein Reflexivpraktiker, der ständig den Einfluss seiner Wahlen und Tätigkeiten und die Berufsanwachsensmöglichkeiten aktiv sucht. Diese Technologie wird eingeführt, wenn der Lehrer

- stimuliert die Schüler zur Interpretation verschiedener Ideen, verwertet die Interdisziplinareinstellungen zum Unterricht und zur Ausbildung,

kommt auf die Nachdenken der Schüler als auf den Grund der Lehrertätigkeit
durch die Gruppen- oder Personenzusammenwirkung und die schriftliche Arbeit
(das Hören, die Diskussionen, die Beispiele der

- Schülernachdenken mündlich oder schriftlich) heran,
- wählt und verwertet eine Ausbildungs- und Unterrichtsstrategiemenge um das kritische Denken der Schüler und die Entwicklung der Aufgabelösungsfertigkeiten zu aktivisieren,
- motiviert die Schüler zur Verantwortung für die Bestimmung und die Ausnutzung der Lernensressourcen, versorgt verschiedene Rollen im Ausbildungsprozess (der Lehrer erleichtert das Lernen) um den Inhalt, das Ziel und die Bedürfnisse der Schüler zu stimulieren,
- schafft die individuellen Verschiedenheiten achtende Ausbildungsgemeinschaft, analysiert das Milieu und die Zusammenwirkung im Klassenraum und erfüllt die bestimmten Anwendungen um die Sozialbeziehungen, Schülermotivation und ihre Produktivmitarbeit zu verbessern,
- verwertet das Verständnis der Individuell- oder Gruppenmotivation, des Betragens um das Ausbildungsmilieu zu schaffen, das die positive Sozialzusammenwirkung, aktive Lernensteilnahme und innere Motivation stimuliert, nutzt die klaren Verfahren und Erwartungen aus, die die Verantwortung der Schüler für sich selbst und andere, die Schülerzusammenarbeit und die Fähigkeit selbständig zu arbeiten garantieren, und stimuliert die zielstrebigen Ausbildungstätigkeiten,
- erweckt bei den Schülern die Interesse für die Stunden, die mit ihren persönlichen Interessen verbunden sind, erlaubt den Schülern einen Auswahl in ihrem Lernen zu haben und motiviert sie die Fragen zu stellen und die Aufgaben zu lösen, die für die Schüler wichtig sind,
- verwertet die Technikkenntnisse der verbalen, unverbalen und indirekten Kommunikation um das aktive Lernen, die Zusammenarbeit und die Unterstützungsbeziehungen im Klassenraum zu stimulieren,
- wählt, bearbeitet und verwertet die Einschätzungsstrategien, die den Lernensresultaten entsprechen, für die Schülerleistungsinformierung und die Unterrichtskorrigierung, für die Aktivisierung der Schülerselbsteinschätzung, damit die Schüler ihre starken Seiten und Bedürfnisse aufklären können und die individuellen Unterrichtsziele bestimmen, schätzt den Tätigkeitseinfluss auf die Individuen und Gruppen in der Klasse durch die Wahrnehmung der Klassenzusammenwirkung, das Abfragen und die Analyse der Schülerarbeit ein.

Literatur

1. Jewdokimow W., Olijnyk T., Gorkowa S., Mikitük M. Das Entwicklungspraktikum des kritischen Denkens. Charkow: Tornado (2002).

2. Kluster D., Meredit K., Stil D., Templ T. Das kritische Denken für die Hochschullehrer und die Studenten. Kyiv: Milenium (2001).

Friedhelm PADBERG, Bielefeld

Unser Stellenwertsystem - keineswegs leicht und problemlos!

1. Zur Entwicklung und Komplexität des dezimalen Stellenwertsystems

Um zu wissen, dass in 234,56 die Ziffer 3 drei Zehner sowie die Ziffer 6 sechs Hundertstel bedeutet, sind jeweils drei Informationen notwendig: Die Position der Ziffer zum Komma (links/rechts), ihr Stellenwert sowie ihr Zahlenwert müssen bekannt sein. Unsere Zahlschrift ist daher hoch abstrakt, aber gerade deswegen ausgesprochen leistungsfähig (vgl. Padberg 2008).

Das dezimale Stellenwertsystem für natürliche Zahlen bzw. seine Vorläufer sind erstmalig nachweisbar in Babylonien (2. Jahrtausend v. Chr., Basis allerdings 60, nicht 10), in Indien (6. Jahrhundert n. Chr.) und im arabischen Raum (Ende des 8. Jahrhunderts n. Chr.). Das dezimale Stellenwertsystem erreicht Europa um 1000 n. Chr. und setzt sich hier nach langem Kampf gegen die römische Zahlschrift erst gegen Mitte des 16. Jahrhunderts durch. Etwa um die gleiche Zeit (1585) publiziert S. Stevin den Band „De Thiende“ und erweitert so den Einsatzbereich des dezimalen Stellenwertsystems über den Bereich der natürlichen Zahlen hinaus. Während sich diese Erweiterung des dezimalen Stellenwertsystems im wissenschaftlichen Bereich rasch durchsetzt, erfolgt dies in der Schule und im täglichen Leben in Deutschland erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts.

2. Untersuchungsergebnisse

Forschungsergebnisse zum dezimalen Stellenwertsystem gibt es bislang nur sehr wenige. Bei unserer Untersuchung (Heckmann/Padberg), aus der die Dissertation von K. Heckmann (2006) hervorgegangen ist, handelt es sich um eine Längsschnittuntersuchung (Dauer: 1 Jahr) an Realschülern des 6. Schuljahres mit insgesamt knapp 500 schriftlichen Tests (Dauer: 1 Unterrichtsstunde) sowie 47 videodokumentierten Einzelinterviews.

Die Antworten auf die folgenden Aufgaben dokumentieren die Entwicklung der Kenntnisse und Fehlvorstellungen der untersuchten Realschüler bezüglich der Anordnung der Stellenwerte vom Beginn (vor der Bruchrechnung; T1) über die Mitte (nach der Bruchrechnung; T2) bis zum Ende des 6. Schuljahres (nach der Dezimalbruchrechnung; T3):

a)|b) Kreuze die a) Zehntel, b) Hundertstel an in 7, 654.

Ergebnisse (%, Auswahl)

	6 (r)	5	n.b.
T1	10	31	38
T2	10	58	21
T3	53	36	6

	5 (r)	6	4	n.b.
T1	12	28	9	41
T2	13	48	6	23
T3	55	35	3	6

Vor der Behandlung der Dezimalbruchrechnung (T3) sind die Stellenwerte Zehntel und Hundertstel den Schülern weitestgehend unbekannt, wie die geringe Quote richtiger (unter der Ratewahrscheinlichkeit!) sowie der hohe Anteil ausgelassener Aufgaben (nicht beantwortet: n.b.) klar aufzeigt. Der Rückgang bei n.b. von T1 zu T2 führt überraschenderweise nicht zu einer Erhöhung der richtigen Lösungen, sondern zu einer drastischen Steigerung der Hauptfehlerstrategie, nämlich die erste Stelle nach dem Komma bei Zahlen mit 3 Dezimalen als Hundertstel, die zweite Stelle als Zehntel (und die dritte Stelle als Einer/Eintel) aufzufassen. Die wachsende intuitive Erfahrung (auch durch die Bruchrechnung) von T1 zu T2 führt also nicht zu einer zunehmenden intuitiv-richtigen Interpretation, sondern zu einer sehr starken Fehlvorstellung, die sich auch nach (!) der systematischen Behandlung der Dezimalbruchrechnung auf einem sehr hohen Niveau hartnäckig hält und so die Quote richtiger Lösungen zu diesem Zeitpunkt sehr stark drückt.

Diese Hauptfehlvorstellung beruht darauf, dass viele Schüler auch die Zahl nach dem Komma als natürliche Zahl auffassen, im Beispiel also als siebenKOMMAsechshundertvierundfünfzig(stel), und daher die 6 folgerichtig als Hundertstel deuten. Zu dieser Komma-Trennt-Vorstellung (vgl. Padberg 2002), die auch in den Interviews öfter sichtbar wurde und die fatale Konsequenzen hat (keine feste Position der Stellenwerte, falsche Zusammenhänge zwischen den Stellenwerten, Fehler bei der Anordnung und bei den Rechenoperationen) werden die Schüler verführt durch die Aussprache von Größen im Alltag (3,45m: drei Meter fünfundvierzig), durch die entsprechende, problematische Bezeichnung von

Dezimalbrüchen (3,45: dreiKommafünfundvierzig) in den Medien sowie durch eine häufige Überbetonung der Analogien zu den natürlichen Zahlen bei der Erweiterung des Stellenwertsystems.

Neben dieser Hauptfehlvorstellung tritt die Fehlvorstellung „Komma als Symmetrieachse“ deutlich zurück, wie die beiden Ergebnistabellen klar zeigen.

Die Entwicklung der Kenntnisse und Fehlvorstellungen der untersuchten Realschüler bezüglich des Zusammenhanges zwischen den Stellenwerten kann den folgenden Aufgaben entnommen werden:

c) Wieviel Zehntel bilden einen Einer? d) Wieviel Zehntel einen Zehner? Ergebnisse (%, Auswahl)

	10 (r)	n.b.	1	100
T1	38	42	2	1
T2	53	26	5	4
T3	62	23	5	4

	100 (r)	n.b.	1	10
T1	26	42	7	7
T2	38	19	15	20
T3	32	27	26	5

Die Ergebnisse der den Aufgaben c) und d) vorgeschalteten Aufwärmaufgabe (Wieviel Zehner bilden einen Tausender?) überraschen (relativ geringe Quote richtiger Lösungen, relativ häufige Auslassungen (n.b.), Fehler) und zeigen, dass auch bzgl. der Behandlung des Stellenwertsystems im Bereich der natürlichen Zahlen noch deutlicher Forschungsbedarf besteht.

Die Lösungsquote bei Aufgabe c) ist schon relativ gering, aber möglicherweise dennoch überhöht, da eine Fehlerstrategie (vgl. d) ebenfalls zur richtigen Lösung 10 führt. Die hohe Quote an Auslassungen deutet auf eine große Unsicherheit hin, obwohl diese Aufgabe nach der Behandlung der Bruchrechnung eigentlich trivial sein müsste. Die Lösung 100 könnte insbesondere auch von Schülern mit der Fehlvorstellung „Komma als Symmetrieachse“ stammen.

Bei Aufgabe d) ist die sehr geringe Quote richtiger Lösungen (zu T3 abfallend!) ebenso wie die hohe Quote von Auslassungen (zu T3 deutlich ansteigend!) erschreckend. Bei T2 sind deutliche Effekte der Bruchrechnung erkennbar, die aber rasch wieder verpuffen (siehe T3!). Die

Hauptfehlerstrategie 1 beruht auf der Gleichsetzung von Zehnteln und Zehnern, also auf der Überbetonung der Analogie zu |N bzw. auf der KT-Strategie. „“Zehn“ kommt in der Aufgabenstellung – sogar zweimal – vor und wird vermutlich darum überraschend häufig als Lösung genannt.

Nicht nur bei der Frage nach dem Zusammenhang, sondern auch nach der Anordnung der Stellenwerte lässt sich beobachten, dass es trotz der niedrigen Mittelwerte durchaus auch Klassen gibt, in denen die Schüler diese Aufgaben erfolgreich lösen. Die Berücksichtigung der im folgenden Abschnitt genannten Konsequenzen für den Unterricht könnte daher bei deutlich mehr Lehrern zu höheren Erfolgen führen.

3. Konsequenzen

Die Erweiterung des Stellenwertsystems in Klasse 5|6 darf nicht – wie oft üblich – blitzschnell unter Zeitdruck (am Schuljahresende) erfolgen, sondern muss gründlich thematisiert werden. Eine parallele Behandlung der gemeinen Brüche und der Dezimalbrüche kann den Zeitdruck deutlich reduzieren und so zu einem vertieften Verständnis beitragen. Eine Betonung der Analogie zu |N ist eher schädlich, wie die Hauptfehlerstrategie deutlich zeigt, eine Betonung der zentralen Unterschiede ist dagegen wichtig und hilfreich. So lassen sich gut Widerstandsniveaus gegen gängige Fehlvorstellungen aufbauen. Eine Veranschaulichung der Stellenwerte etwa durch Zehnerblöcke auch bei der Erweiterung des Stellenwertsystems in Klasse 5|6 ist nach umfangreichen amerikanischen Untersuchungen sehr hilfreich. Um hierbei jedoch zu vermeiden, dass die Zehnerblöcke-Welt und die Rechen-Welt in den Köpfen der Schüler unverbunden nebeneinander existieren, müssen intermodale Transfers zwischen diesen Welten bewusst realisiert werden.

Literatur:

Kirsten Heckmann: Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde. Berlin 2006.
Friedhelm Padberg: Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche – Dezimalbrüche. 3. Auflage, Heidelberg 2002.
Friedhelm Padberg: Elementare Zahlentheorie. 3. Auflage, Heidelberg 2008.

Werner PESCHEK, Klagenfurt

Thema „Bildungs“-Standards:

Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe

Einem internationalen Trend folgend und vor dem Hintergrund der mäßigen PISA-Ergebnisse 2000 wurde in Österreich im Jahre 2002 mit der Entwicklung von „Bildungsstandards“ für den Mathematikunterricht der 8, Schulstufe (M8) begonnen; seit 2005 werden jährlich auch umfangreiche Pilottests für M8 durchgeführt. (Parallel dazu oder wenig später wurde auch mit der Arbeit an Standards für andere Fächer und/oder für andere Schulstufen begonnen.) Noch im heurigen Jahr soll eine gesetzliche Verankerung der Standards erfolgen, eine bundesweite Testung ist nach jüngsten Berichten erst ab 2012 vorgesehen.

Im Oktober 2006 wurde das Österreichische Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik an der Universität Klagenfurt mit der Überarbeitung und Finalisierung der bis dahin vorliegenden Konzepte und Entwürfe für M8 betraut. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf das in diesem Rahmen entwickelte, bis auf weiteres „offizielle“ Standard-Konzept M8 (Institut für Didaktik der Mathematik 2007).

Das Standardkonzept M8

Das entwickelte Konzept geht von folgenden Grundannahmen aus:

Standards legen *normativ/präskriptiv* Kompetenzen fest, die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende einer bestimmten Schulstufe entwickelt haben sollen. Sie fokussieren also nicht auf das Unterrichtsgeschehen (Input), sondern wollen den *Ertrag von Unterricht festlegen und überprüfbar machen* (Outputsteuerung und -kontrolle). Standards müssen daher überprüfbar sein – die entsprechenden Kompetenzen müssen also entsprechend *exakt beschrieben und operationalisiert* sein.

Unter *Kompetenzen* werden *längerfristig* verfügbare kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten verstanden, die von Lernenden entwickelt werden können und sie befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben, sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten einzusetzen.

Mathematische Kompetenzen stellt man sich in M8 modellhaft als dreidimensionale Konstrukte vor, die sich

- auf *mathematische Tätigkeiten* (was getan wird),
- auf *mathematische Inhalte* (womit etwas getan wird)
- sowie auf die *Art und Komplexität* der erforderlichen (kognitiven) Prozesse

beziehen.

Ein Modell mathematischer Kompetenzen

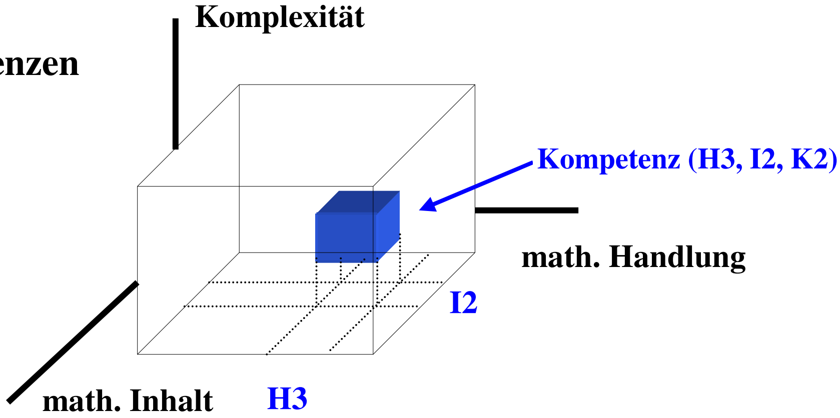


Abb. 1

Eine spezifische mathematische *Kompetenz* (besser: Kompetenzbereich) wird in diesem Modell also durch einen bestimmten *Handlungsbereich*, einen bestimmten *Inhaltsbereich* und durch einen bestimmten *Komplexitätsbereich*, also durch das *Tripel (Hi, Ij, Kk)* charakterisiert.

Mathematische Kompetenzen gibt es (fast beliebig) viele … aber nicht alles kann Standard (für die 8. Schulstufe) sein:

Mathematische Standards meinen jene Teilmenge denkbarer mathematischer Kompetenzen, über die S & S einer bestimmten Schulstufe verfügen sollten.

Orientierungen für die Auswahl von Standards geben neben der Fachmathematik und Fachdidaktik vor allem bildungstheoretische Konzepte, Lehrpläne, sehr wesentlich aber auch die Erfahrungen und Einschätzungen von Lehrerinnen und Lehrern. Für die Standards M8 wurden folgende Handlungs-, Inhalts- bzw. Komplexitätsbereiche festgelegt:

Handlungsbereiche

- H1: Darstellen, Modellbilden
- H1: Rechnen, Operieren
- H3: Interpretieren
- H4: Argumentieren, Begründen

Inhaltsbereiche

- I1: Zahlen und Maße
- I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
- I3: Geometrische Figuren und Körper
- I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen

Komplexitätsbereiche

- K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten
- K2: Herstellen von Verbindungen
- K3: Reflektieren

Eine Konkretisierung und Operationalisierung der dadurch erfassten Standards erfolgt anhand von sogenannten *Orientierungsaufgaben*. Diesen Aufgaben kommt eine zweifache Orientierungsfunktion zu:

- Die Aufgaben sollen das dreidimensionale Standardmodell konkretisieren und erläutern.
- Die Aufgaben sollen Standards exemplarisch operationalisieren und Hinweise auf die Anforderungen bei den bundesweiten Standardtests geben.

Die Orientierungsaufgaben sind somit nicht unmittelbar für die Unterrichtsarbeit gedacht, allenfalls lassen sie sich im Unterricht als Diagnoseinstrumente einsetzen.

Steuerungs- und Evaluierungsfunktion der Standards M8

auf Systemebene:

- Herstellen von Gemeinsamkeiten/Verbindlichkeiten
- kollektive Übernahme von Verantwortung (Professionalisierung), Transparenz
- Orientierung für Lehrplan- und Schulbuchentwicklung, Aus- und Weiterbildung von Lehrer(inn)en
- Identifikation von partiellen Defiziten ⇒ Maßnahmen

auf Schulebene:

- Verständigung über Gemeinsamkeiten/Verbindlichkeiten,
- kollektive Übernahme von Verantwortung, Transparenz
- Orientierung für gemeinsame Schul- und Unterrichtsentwicklung
- Identifikation von partiellen/relativen Stärken und Schwächen ⇒ Ursachenanalyse, gemeinsame Anstrengungen

auf Klassenebene:

- Transparenz hinsichtlich verbindlichen Grundwissens und -könnens
- Orientierung für unterrichtliche Schwerpunktsetzungen
- Diagnosen als Grundlagen für die Planung des weiteren Unterrichts
- Identifikation von partiellen/relativen Stärken und Schwächen der Klasse

(Was) haben Standards mit Bildung zu tun?
(vgl. Krainer u. a. 2007, S. 185)

Was man in einigen hundert Testaufgaben erfassen kann, ist selbstverständlich nicht mathematische Bildung. Aber Standards können – wenn sie gut überlegt und begründet erstellt wurden – Gemeinsamkeiten beschreiben und herstellen, die nicht nur für eine aktive Teilnahme des/der Einzelnen am Leben in unserer Gesellschaft unerlässlich sind, sondern auch eine unverzichtbare Voraussetzung und Grundlage für (mathematische) Bildung darstellen. Pointiert ausgedrückt:

„Ein Mathematikunterricht, der sich darauf beschränkt, die Schüler und Schülerinnen zur Lösung der Standardaufgaben zu befähigen, ist armselig. Ein Mathematikunterricht, der sich jedoch begründeten Standards entzieht, ist erbärmlich und gesellschaftlich inakzeptabel."
(Krainer u. a. 2007, S. 185)

Literatur

Institut für Didaktik der Mathematik (Hrsg.) (2007): *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe*. Universität Klagenfurt, 120 S. http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf

Krainer, K., Kühnelt, H., Peschek, W. und Wintersteiner, W. (2007): *Fachbezogenes Bildungsmanagement und Standards.* In: Labudde, P. (Hrsg.): Bildungsstandards am Gymnasium. Korsett oder Katalysator? h.e.p. verlag ag: Bern, S. 181-190.

Katja PETERßEN, Weingarten

Begründungssituationen im Mathematikunterricht der Grundschule

Eine Untersuchung in den Klassen 3 und 4

Begründen gilt einerseits als typisch mathematische Tätigkeit – ein Schritt hin zum Beweisen - andererseits stellt es auch eine wichtige allgemeine mathematische Kompetenz dar, die von den Schülern eingefordert wird. Von daher ist es von Interesse, wie Lehrer mit dem Begründen im Mathematikunterricht umgehen. Als zentrale Fragen der Untersuchung ergeben sich somit:

1) Welches Bild haben Lehrer vom Begründen?
2) Wie gestalten Lehrer Unterricht, in dem sie die Schüler zum Begründen anregen wollen?

Um diese Fragen zu beantworten und den Ist-Zustand beschreiben zu können, wurden bei zehn Lehrern der Klassen 3 und 4 Videoaufnahmen gemacht und offene Interviews durchgeführt. Jeder Lehrer wurde gebeten, eine Mathematikstunde zu halten, in der das Begründen eine Rolle spielen sollte. Eine weitere Themenvorgabe bestand nicht, da die Themenauswahl auch Gegenstand der Untersuchung ist.

An dieser Stelle möchte ich die konkrete Unterrichtsgestaltung näher schildern. Zum einen werde ich kurz auf die gewählten Themen der einzelnen Stunden eingehen, zum anderen auf die tatsächlich geschaffenen Begründungssituationen.

1. Gewählte Stundenthemen

Um die Bandbreite der gewählten Themen aufzuzeigen, hier eine tabellarische Übersicht über die Stundenthemen, die jeweilige Leitidee und die Stellung der Stunde in der gesamten Unterrichtseinheit.

Stundenthema	**Leitidee**	**Stellung der Stunde in der gesamten Einheit**
Ägyptische Zahlzeichen	Zahl	Einführung in den Zahlenraum bis 10000
Zahlenrätsel	Zahl	Einführung in den Zahlenraum bis 1 Million
Halbschriftliche Division	Zahl	Einführung
Achsensymmetrie	Raum und Ebene	Einführung

Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Würfel und Quader	Raum und Ebene	Innerhalb der Einheit „Flächen und Körper“
Rauminhalte schätzen, messen und vergleichen	Messen und Größen	Einführung
Knobelaufgabe „Geld“	Messen und Größen	„eingestreute“ Stunde[1]
Textaufgabe „Wo wohnen die Kinder?“	Daten und Sachsituationen	Innerhalb der Einheit „Textaufgaben zu Wegen und Orten“
Textaufgabe „Wann treffen sich die Kinder?“	Daten und Sachsituationen	„eingestreute“ Stunde
Wahrscheinlichkeit: Welche Strategie gewinnt?	Daten und Sachsituationen	Isolierte Stunde[2]

Die Vielfalt der Themen spiegelt auch die in den Interviews deutlich gewordene Meinung der Lehrer wieder. Hinsichtlich der Eignung von Themen äußerten sich Lehrer überwiegend positiv und aufgeschlossen. Die einzige Ausnahme stellt die Stunde zur Wahrscheinlichkeit dar; nach eigenen Aussagen fiel es dem Lehrer sehr schwer, ein geeignetes Thema zu finden. Wahrscheinlich führte dies zur isolierten Einzelstunde.

Einführungsstunden sind aus zwei Gründen überproportional vertreten. Zum einen halten Lehrer die Einführung in ein Thema für wesentlich geeigneter, Dinge begründen zu lassen, als Wiederholungs- oder Übungsstunden. Zum anderen wählten Lehrer Einführungen aus organisatorischem Anlass: Sollte sich der Termin der Videoaufnahme aus irgendeinem Grund verschieben, so sei dies mit Einführungsstunden leichter zu bewerkstelligen. Jedoch zeigt ein besonderer Fall, dass es auch bei Stunden innerhalb einer Einheit keinerlei Probleme gibt, Begründen zu lassen. Hier musste die Aufnahme zweimal verschoben werden und der entsprechende Lehrer wählte jeweils Themen, die „gerade dran waren“.

---

[1] Der Begriff „eingestreute Stunde“ bezeichnet Einzelstunden, deren Thema und Inhalt innerhalb eines Schuljahres immer wieder aufgegriffen wird.

[2] Der Begriff „isolierte Stunde“ bezieht sich auf eine Einzelstunde, die keinerlei Verbindung zu anderen Stunden oder Themen aufweist. In diesem Falle wurde das Stundenthema speziell für diese Untersuchung ausgewählt und geplant. Ohne die Untersuchung hätte diese Stunde so nie stattgefunden.

2. Wie schaffen Lehrer Begründungssituationen?

Bei der Analyse der Videoaufnahmen im Hinblick auf die Frage „Wie schaffen Lehrer Situationen, in denen die Schüler Begründungen abgeben?“, lassen sich vier verschiedene Momente erkennen:

- Die explizite Aufgabenstellung,
- die gewählte Arbeitsform,
- die eingesetzten Medien und
- kommunikative Impulse.

Aufgabenstellung

Um Begründungssituationen zu schaffen, wählen Lehrer explizite Begründungsaufgaben. Dabei handelt es sich um Aufgaben, in denen die Begründungserwartung ausdrücklich enthalten und den Schülern bereits vor Bearbeitung der entsprechenden Aufgabe bekannt ist. Der Unterricht wird auf diese Aufgabenstellung hin ausgerichtet und geplant. Die Begründungsaufgabe nimmt eine zentrale Stellung in der Stunde ein, teilweise zieht sie sich durch sämtliche Unterrichtsphasen. Im Extremfall taucht sie sogar in den Hausaufgaben auf. Ein Beispiel:

Finde alle Möglichkeiten, die es gibt, 31€ mit 10€, 5€ oder 2€ zu legen. „Aber es kommt noch eine Aufgabe dazu. Du sollst nicht nur alle Möglichkeiten finden, sondern du sollst auch dir ganz sicher sein, dass es keine weitere Möglichkeit gibt. Ja? Und du musst uns, wenn du dran kommst, auch beweisen können, dass es keine andere Möglichkeit gibt oder erklären können, warum das so ist, dass es keine weitere Möglichkeit gibt.“[3]

Arbeitsform

Hier trägt die gewählte Arbeitsform in einer bestimmten Unterrichtsphase stark dazu bei, den Schülern Begründungen abzugewinnen. Natürlich spielt auch hierbei die Aufgabenstellung eine Rolle, jedoch ist die Arbeitsform ausschlaggebend dafür, dass Begründungen explizit geäußert werden. Dieselbe Aufgabe in anderer Arbeitsform würde eventuell nur zu so genannten inneren Begründungen führen, zu Begründungen, die im Kopf des jeweiligen Schülers ablaufen. Angestrebt waren jedoch laut geäußerte Begründungen.

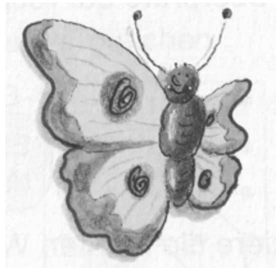
In den untersuchten Stunden führten kooperative Arbeitsformen wie der Forscherauftrag, die Strategiekonferenz oder das Partnergespräch zu expliziten Schülerbegründungen, obwohl die Schüler nicht ausdrücklich

---

[3] Zitat aus einer Unterrichtsstunde.

dazu aufgefordert wurden. Dieser Effekt konnte zwar nicht immer bei allen Schülern der jeweiligen Klasse beobachtet werden, jedoch bei einem großen Teil.

Medieneinsatz



Interessanterweise regten die in der Stunde zur Achsensymmetrie eingesetzten Bilder (Beispiel rechts[4]) zu einem lebhaften Unterrichtsgespräch an, in dessen Verlauf etliche Begründungen von den Schülern eigenständig, ohne zusätzliche Aufforderungen von Seiten des Lehrers hervorgebracht wurden. Auch kamen hierbei Begründungen zustande, die dem argumentativen Aspekt des Überzeugens, der im Mathematikunterricht doch eher selten vorkommt, entsprachen.

In den übrigen Stunden ließ sich ein ähnlicher Effekt der eingesetzten Medien nicht feststellen. Dies könnte jedoch auch daran liegen, dass der Medieneinsatz zum Teil von entsprechenden Begründungsaufgaben begleitet wurde oder die Arbeitsform als ausschlaggebend für die erbrachten Begründungen angesehen wurde.

Kommunikative Impulse

Hierbei reagieren Lehrer mit Fragen nach dem Warum, Weshalb, Wieso, der Aufforderungen, etwas zu begründen, zu beweisen, zu erklären oder auch mit der so genannten Weil-Fortsetzung[5] (direkte Impulse) oder auch mit Provokationen, der Aufforderung, etwas genau anzuschauen oder dem Hinweis auf einen Fehler (indirekte Impulse) in geeigneten Situationen auf entsprechende Schüleräußerungen.

Die von den Lehrern dabei genutzten Situationen und Anlässe sind zahlreich und vielfältig. Sie reichen vom Schülerfehler bei der Hausaufgabenkontrolle, über präsentierte Rechenwege, egal ob richtig oder falsch, über Verständnisprobleme in Erarbeitungsphasen bis hin zu richtig oder falsch bearbeiteten Aufgaben in der Anwendung des neu Gelernten.

Literatur

Malle, G. (2002): Begründen. Eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren H.110 (Februar 2002).

---

[4] Aus: Zahlenzauber 3. Mathematikbuch für die Grundschule. Oldenbourg, S.39.

[5] Beispiel: Der vom Lehrer begonnene Satz „Diese Lösung ist richtig, weil …“ wird von einem Schüler fortgesetzt und beendet.

Eva-Maria PLACKNER, Bamberg

Vorwissen zu geometrischen Begriffen aufspüren - eine explorative Studie in der Grundschule

Begriffsbildung spielt im Geometrieunterricht eine große Rolle. In der Grundschule stehen dabei weniger Definitionen im Mittelpunkt, als vielmehr der Einbezug der Alltagserfahrungen der Kinder und eine umgangssprachliche oder auch zeichnerische Beschreibung der Begriffe. So entwickeln die Kinder im Laufe der Zeit ihr Begriffssystem. Dabei durchlaufene Zwischenphasen können auf unterschiedliche Weisen, z.B. durch Standortbestimmungen, erfasst werden.

Üblicher Weise finden bei der Entwicklung von Standortbestimmungen systematische Überlegungen statt, bezüglich der Teilfähigkeiten die erhoben werden sollen und mit welchen Aufgaben das in welcher Reihenfolge geschehen soll (vgl. Sundermann/Selter, 2006).

Design der Untersuchung

In der hier beschriebenen explorativen Studie (n=588) wurde mit der Weißblatterhebung ein völlig anderes Konzept gewählt, um dem Vorwissen der Kinder zu geometrischen Begriffen auf die Spur zu kommen. In 28 Schulklassen über alle vier Schuljahre hinweg wurden verschiedene Parameter dieser Standortanalyse variiert und deren Auswirkungen auf das gezeigte Wissen untersucht.

Die Weißblatterhebung ist eine offene Form der schriftlichen Befragung, bei der als Vorgabe nur ein Begriff oder ein Begriffspaar gegeben wird, verbunden mit der Aufforderung, alles auf einem leeren Blatt zu notieren, was man zu diesem Begriff (Begriffspaar) weiß. Durch die offene und weit gefasste Fragestellung wird das Denken deutlich weniger eingeschränkt als durch eine Vielzahl von enger gefassten Teilfragen und so ist auch eher anzunehmen, dass durch die Fragestellungen noch keine Antworten suggeriert werden. Dennoch stellte sich im Vorfeld der Untersuchung bereits die Frage, ob und inwieweit äußere Faktoren einen Einfluss auf die Antworten der Kinder haben. Deshalb wurde in einem Teil der Klassen mit kariertem Papier, in einem anderen Teil der Klassen mit weißem Papier gearbeitet. Auch der Arbeitsauftrag wurde geringfügig variiert. Die Auswahl der Begriffe orientierte sich am bayrischen Lehrplan für die Grundschule und die darin für die einzelnen Jahrgangsstufen besonders relevanten Begriffe (1.Kl.: Dreieck und Viereck, 2.Kl.: Rechteck und Quadrat, 3.Kl.: Würfel, 4.Kl.: Quader und Würfel). Die konkrete Formulierung des Arbeitsauftrages lautete zunächst immer gleich: "Schreibe (und male) alles auf, was dir zu ... in den Kopf kommt." In der Hälfte der Klassen war der Zusatz "und male" im Arbeitsauftrag enthalten, in der anderen Hälfte wurde darauf verzichtet, die Kinder extra auf die Möglichkeit des Zeichnens hinzuweisen. Lediglich in der 1. Klasse wurde auf diese Unterscheidung verzichtet und den Kindern gleichermaßen die Aufforderung zum Malen mit gegeben, vor allem darum, weil die Studie in den ersten Wochen des Schuljahres durchgeführt wurde und ein großer Teil der Erstklässler im Schriftspracherwerb noch nicht weit genug war, um selbstständig einen aussagekräftigen, mathematischen Text zu verfassen. Bei der Durchführung der Standortbestimmung wurde darauf geachtet, dass den Kindern außer den mündlich gegebenen Arbeitsaufträgen keine zusätzlichen Hilfen gegeben wurden, die implizierte Antworten enthalten hätten. Es wurde lediglich darauf hingewiesen, dass es man im dem Falle, dass man zu einem Begriff gar nichts weiß, durchaus auch ein unbeschriebenes Blatt abgeben könne.

Ergebnisse der Exploration

Die befragten Kinder konnten mit dem Arbeitsauftrag etwas anfangen und hielten ihre Antworten schriftlich fest. Bei der Auswertung dieser Weißblätter wurde dann zunächst einmal auf Formalitäten geachtet, bevor sich dann die detailliertere inhaltliche Auswertung anschloss.

Zu den *formalen Kriterien* gehörte zunächst einmal die Nutzung des Blattes. Dabei zeigte sich, dass kariertes Papier von 84% der Kinder hochkant verwendet wurde, wohingegen nur 61% des weißen Papiers hochkant genutzt wurden und immerhin 39% der weißen Blätter im Querformat. Ein weiterer Aspekt der Blattnutzung war die Frage, inwieweit das Papier formatfüllend oder nur teilweise beschrieben wurde. Dabei zeigte sich, dass das weiße Papier eher dazu verleitete, formatfüllend zu arbeiten (76%), wohingegen auf kariertem Papier die Verhältnisse eher ausgewogen waren, allerdings der Trend eher zu einer nur teilweisen Nutzung des Papiers ging (55% der Kinder). Auf beiden Papiersorten und auch unabhängig von der Formulierung der Fragestellung verwendeten die Kinder eine Kombination aus einem Textteil mit ergänzenden Zeichnungen. Lediglich in der 1. Klasse arbeitete ein relativ großer Teil der Kinder nur mit Zeichnungen. Bei den Zeichnungen in allen Jahrgangsstufen handelte es sich meist um reine Freihandzeichnungen, wobei sich zusätzlich beobachten ließ, dass auf weißem Papier das Lineal häufiger verwendet wurde, als auf kariertem.

Eine erste Annäherung an die *inhaltlichen Kriterien* erfolgte über die Einteilung der Antworten hinsichtlich der Fragestellung, ob in Bezug auf die Alltagswelt geantwortet, oder rein mathematisch argumentiert wurde. Meist wurde von den Kindern die Kombination gewählt. Am deutlichsten war dieser Trend in der 3. Klasse zu beobachten, wo 82% der Kinder ein stark vom Spielwürfel geprägtes Verständnis des geometrischen Begriffs Würfel aufwiesen, sie aber gleichzeitig auch aus mathematischer Sicht die Eigenschaften des Körpers beschrieben. In der 4. Klasse war mit 62% am stärksten die rein mathematische Herangehensweise zu beobachten, bei der die Eigenschaften von Würfel und Quader meist gegenübergestellt und sowohl die Gemeinsamkeiten als auch die Unterschiede dargestellt wurden.

Getrennt voneinander wurden dann die Zeichnungen und auch die Texte hinsichtlich ihres Inhalts und auch im Hinblick auf die Richtigkeit betrachtet. Bei der *Kategorisierung der Zeichnungen* auf den Weißblättern erschien es sinnvoll, zu unterscheiden, ob die vorliegende Bearbeitung eher von Seiten der Kunst oder von der Mathematik her angefertigt wurde. Zu den Zeichnungen mit künstlerischem Aspekt gehören gemalte Alltagsgegenstände als Repräsentanten (z.B. eine Tafel als Rechteck oder eine Triangel als Dreieck), das Zeichnen von angepassten Alltagsgegenständen als Repräsentanten (z.B. dreieckige Tannenbäume oder verschiedene "Quadertiere"), sowie das Zeichnen von personifizierten Repräsentanten (z.B. Dreiecke mit Gesicht und Beinen). Mit Abstand die beliebteste Kategorie dabei war das Zeichnen von Alltagsgegenständen als Repräsentanten, die fast die Hälfte aller Kinder wählte, die von der Kunst her kommend etwas zum Thema malten. Nur 1% der befragten Kinder zeichnete ohne einen erkennbaren Zusammenhang mit dem Thema.

Die Zeichnungen der Kinder, die eher einer mathematischen Herangehensweise zuzuschreiben sind, ließen sich in die folgenden drei Kategorien einteilen: das Zeichnen von rein mathematischen Repräsentanten, das Zeichnen von Mustern zum Thema und das Geben eines zeichnerischen Gegenbeispiels. Diese letzte Kategorie wurde zwar nur verhältnismäßig selten gewählt, aber dennoch gaben 3% der Kinder (verteilt auf alle Jahrgangsstufen) Gegenbeispiele an. Über die Hälfte der Kinder zeichneten rein mathematische Repräsentanten.

Analog ließen sich auch bei den *Texten* die unterschiedlichen vorkommenden Kategorien in zwei Gruppen zusammenfassen. Auch hier gibt es Texte, die rein in der Fachwissenschaft zu verorten sind und Texte, die eher affektive und methodische Punkte beinhalten. Zu der zweiten Gruppe gehört das Nennen von Alltagsgegenstände mit dazu passender Form (die schriftliche Entsprechung zum Zeichnen von Alltagsgegenständen als Repräsentanten), das Nennen von Einsatzmöglichkeiten (z.B. mit dem Würfel kann gespielt werden, oder aus Quadern kann man etwas bauen), das Herstellen eines persönlichen Bezugs und das Erwähnen von

Vorerfahrungen durch das Herstellen von Modellen. Besonders auffällig dabei war, dass insgesamt zwar nur relativ selten vom Herstellen von Modellen berichtet wurde, dass es aber einige Klassen gab, in denen z.B. im vorhergehenden Schuljahr ein Würfel gebastelt wurde und in diesen Klassen fast alle Kinder darauf Bezug nahmen. Auch bei den Texten hat nur 1% der befragten Kinder ausschließlich Dinge ohne einen erkennbaren Zusammenhang zum Thema geschrieben.

Zu den von der Mathematik her kommenden Kategorien gehören das Einordnen der Begriffe zu den Oberbegriffen (geometrische Figuren/ Körper), das Nennen von Gegenbeispielen (3%), das Nennen von richtigen Eigenschaften (66%), das Nennen von falschen Eigenschaften (12%) und das präzise Verwenden von Fachbegriffen (19%).

Bemerkungen zu den Ergebnissen

Durch diese Ergebnisse scheint es mir als gerechtfertigt, die Weißblatterhebung als geeignetes Werkzeug zur Standortbestimmung zu bezeichnen. Die Arbeiten der Kinder sind im hohen Maße aussagekräftig und der Arbeitsauftrag konnte sie dazu veranlassen, relevante Eigenschaften der Figuren und Körper zu beschreiben. Außerdem ließ sich trotz der freien Fragestellung ein hohes Maß an richtig verwendeten Fachbegriffen feststellen. Die Kinder gebrauchten die Begriffe dabei aus eigenem Antrieb und nur selten wurden sie dabei falsch gebraucht. Interessant sind auch die Ergebnisse in zwei 4. Klassen, in denen kurz vor der Erhebung die entsprechende Geometriesequenz stattfand. 40% der entsprechenden Weißblätter bilden alle Lehrplanziele zum Thema Quader und Würfel vollständig ab, weitere 50% bilden sie immerhin teilweise ab. Das zeigt meines Erachtens eindrücklich, dass es nicht nötig ist, viele kleine Einzelfragen zu stellen, um ein umfassendes Bild dessen zu erhalten, was Kinder zu einem Thema gelernt haben oder wissen.

Außerdem wurde deutlich, dass es sinnvoll ist, im Mathematikunterricht nicht ausschließlich auf kariertem Papier zu arbeiten, da weißes Papier beispielsweise viel eher die Verwendung des Lineals zum Zeichnen als sinnvoll erscheinen lässt.

Literatur

Sundermann, Beate und Christoph Selter (2006). Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor

Svetlana POLUSHKINA, Julia REIBOLD, Regina BRUDER, Technische Universität Darmstadt

Online-Lehrerfortbildungen an der Technischen Universität Darmstadt

Seit September 2005 werden an der Technischen Universität Darmstadt von der Arbeitsgruppe „Fachdidaktik der Mathematik“ unter der Leitung von Prof. Dr. Regina Bruder regelmäßig Online-Fortbildungen für Mathematik-Lehrkräfte angeboten. Im Vortrag gehen wir auf die Ziele und methodische Gestaltung dieser Fortbildungen ein, die sich auf aktuelle Forschungsergebnisse an der TU Darmstadt stützen. Blitzlichtartig werden auch einige Ergebnisse der Fortbildungen vorgestellt. Das wichtigste Ergebnis stellen die Kompetenz- und Qualifikationszuwächse bei den teilnehmenden Lehrkräften dar. Diese können nach der moderat konstruktivistischen Sicht, die hier vertreten wird, nur durch eine aktive Mitarbeit der Kursteilnehmer/innen erreicht werden. Die Kurse sind so angelegt, dass eine aktive Mitarbeit erforderlich ist.

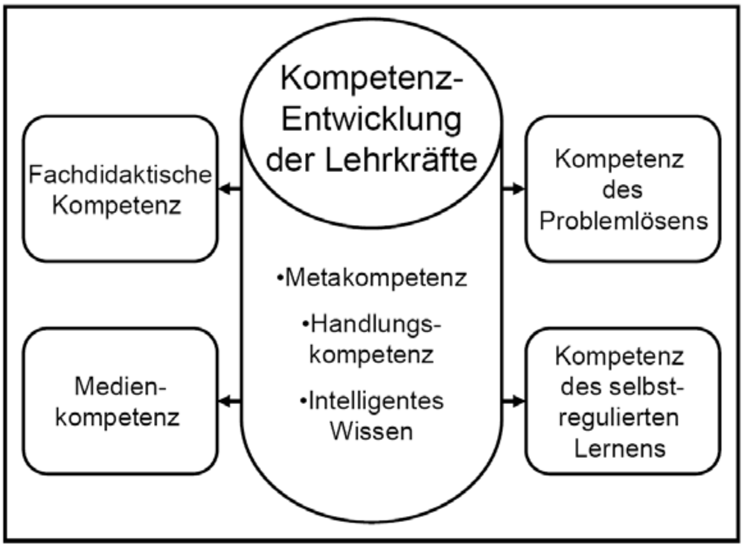


Abb. 1: Lernzielbereiche der Online-Lehrerfortbildungen

Das zentrale Ziel der Fortbildungskurse besteht in der Förderung der Kompetenzentwicklung der Lehrkräfte. Dabei werden nach Weinert (1999) drei Kompetenzbereiche unterschieden: Intelligentes (also verknüpftes und effizient zugängliches) Wissen, Handlungskompetenz und Metakompetenz. Die Entwicklung aller dieser Bereiche wird in den Kursen für die jeweiligen thematischen Zielkompetenzen gefördert. Thematisch fokussieren die Kurse auf der fachdidaktischen Kompetenz, der Medienkompetenz, der Kompetenz des Problemlösens sowie auf der Kompetenz des selbstregulierten Lernens. Die Lernzielbereiche der Online-

Lehrerfortbildungen sind in Abbildung 1 zusammengefasst.

Das Angebot umfasst derzeit drei am IQ Wiesbaden akkreditierte Kurse:

- Im Kurs „Basics“ werden den Lehrkräften Methoden (wie Kopfübungen, Lernprotokolle und Wissensspeicher) vorgestellt, die dazu beitragen, das mathematische Basiswissen bei den Schülerinnen und Schülern zu festigen und verfügbar zu halten. Die Lehrkräfte werden dazu angehalten, unter Berücksichtigung der Bildungsstandards gemeinsam solche ‚Basics’ zu benennen und die Werkzeuge der Ausgangsniveausicherung in ihren heterogenen Schulklassen binnendifferenzierend einzusetzen.
- Im Kurs „Mathematik rechnergestützt lehren und lernen“ werden gezielt die Medienkompetenzen der Lehrkräfte gefördert, insbesondere im Umgang mit gängiger Software, die für die Gestaltung der Lernmaterialien und unmittelbar im Unterricht eingesetzt werden kann. Angemessene Integration der Rechnerunterstützung in die Unterrichtsgestaltung erweitert den (mathematischen) Horizont und fördert die Medienkompetenz der Schülerinnen und Schüler. Die Ergebnisse der Forschungsprojekte CAliMERO (Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren) und TIM (Taschenrechner im Mathematikunterricht) fließen in die Konzeption des Kurses mit ein.
- Der Kurs „Problemlösen lernen und Selbstregulation“ vereint zwei fachübergreifende Themenbereiche. Die Lehrkräfte befassen sich mit den Elementen heuristischer Bildung (Strategien, Prinzipien und Hilfsmitteln), den Selbstregulationstechniken sowie mit den Verfahren der Förderung der Motivation der Schüler/innen. Die Lehrkräfte erstellen Aufgaben und längerfristige Hausaufgaben, die die Fähigkeiten der Schüler/innen zum Problemlösen fördern und die Schüler/innen zum selbstständigen Lernen befähigen helfen. Dieser Kurs und der Kurs „Basics“ sind zunächst im Rahmen des DFG-Schwerpunkprogramms BIQUA (Bildungsqualität von Schule) entstanden. Im Vortrag wird zur Illustration eine von einem Kursteilnehmer erstellte Problemlöseaufgabe vorgeführt. Des Weiteren werden die Evaluationsergebnisse für mehrere Kursanläufe vorgestellt (Bruder et al., 2006). Ab dem Schuljahr 2008/09 wird dieser Kurs hessenweit als Wahlmodul zur Implementierung der Bildungsstandards angeboten.

Weitere Kurse, z. B. zum mathematischen Modellieren, werden entwickelt.

Alle Kurse sind modular aufgebaut, die Module bauen aufeinander auf. Zu Beginn wird ein optionaler Präsenz-Workshop ausgetragen, die anschließende Online-Phase des Kurses dauert 12 Wochen. Im Portal www.prolehre.de auf der Lernplattform Moodle werden online Kursmaterialien (Theorie, Musterbeispiele und Arbeitsaufträge) zur Verfügung gestellt. Außerdem erhalten die Kursteilnehmer/innen einen Zugang zur Aufgabendatenbank madaba (www.madaba.de), die erprobte Materialien zur Unterrichtsvorbereitung bietet. Die Lehrkräfte werden bei der Aneignung und Umsetzung der im Kurs vorgestellten Konzepte begleitet und unterstützt. Zusätzlich zum Intelligenten Wissen über die Kursthemen, erwerben die Kursteilnehmer/innen Handlungskompetenzen, wofür sie eigene konzeptkonforme Beispiele für Unterrichtsmaterialien (Arbeitsprodukte) entwickeln. Ausgewählte Ergebnisse werden auf www.problemloesenlernen.de gespeichert.

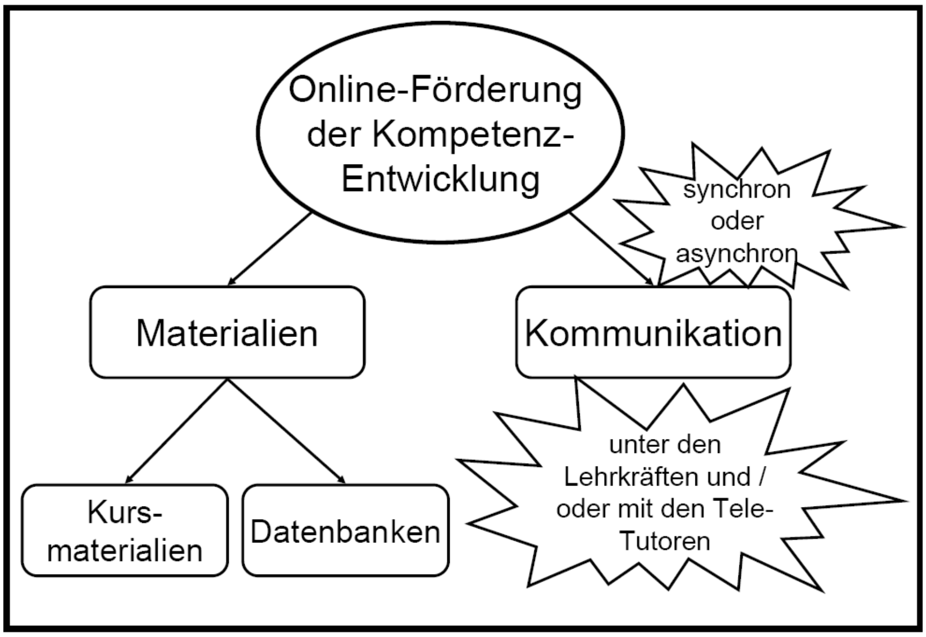


Abb. 2: Online-Förderung der Kompetenzentwicklung

Zur Förderung der Metakompetenz werden Forumsdiskussionen von den Tele-Tutoren angeregt, in denen die Lehrkräfte über die Konzepte und ihre Umsetzung reflektieren und diskutieren. Des Weiteren dienen ein Nachrichtenforum und E-Mail zur asynchronen Kommunikation unter den Lehrkräften und / oder mit den Tele-Tutoren. Zur synchronen Kommunikation werden regelmäßige Chatsitzungen abgehalten, in denen inhaltliche und technische Fragen besprochen und geklärt werden. Im Vortrag werden einige Beispiele für die Ergebnisse der Online-Kommunikation gezeigt. Die Komponenten der Online-Förderung der Kompetenzentwicklung, die in den Fortbildungskursen eingesetzt werden, sind in Abbildung 2 zusammenfassend dargestellt.

Zur individualisierten Förderung der Kompetenzentwicklung und Kontrolle der Lernleistungen erhalten die Kursteilnehmer/innen Rückmeldungen zu den selbst erstellten Unterrichtsmaterialien. Die Arbeitsprodukte der Lehrkräfte, die von den einzelnen Aufgaben bis zu ganzen Unterrichtseinheiten reichen, werden im Hinblick auf die Erfüllung bestimmter theoriegestützter Kriterien unter die Lupe genommen. Der zu Grunde liegende ganzheitliche Ansatz zur Beurteilung der Qualität von Lehr- und Lernmaterialien (Collet et al., in Druck) umfasst mehrere Kriterienkategorien und Unterkategorien, dabei können die jeweils relevanten Merkmale flexibel fokussiert und Entwicklungspotential festgestellt werden.

Neben der Förderung der Erreichung der Lernziele, stellt die nach jedem Kurs durchgeführte Kursevaluation ein weiteres Kernelement der kontinuierlichen Sicherung und Entwicklung der Qualität der Fortbildungskurse dar (siehe Abbildung 3). Im Vortrag werden neben den quantitativen auch einige qualitative Ergebnisse der Kursevaluationen präsentiert. Diese unterstützen die gegenwärtige Konzeption und Gestaltung der Kurse und fließen in die weitere Entwicklung mit ein.

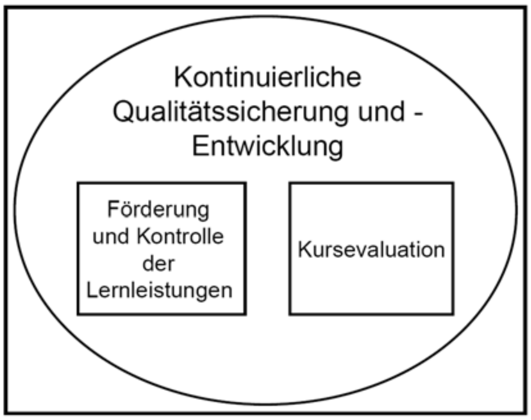


Abb. 3: Sicherung und Entwicklung der Qualität der Lehrerfortbildungen

Literatur

- Bruder, R., Ströbele, M., Komorek, E., & Collet, C. (2006). *Projektbericht zur vertieften Evaluation des Lehrerfortbildungsprojektes SINUS -Transfer in Hessen vom Mai 2004 bis Juli 2005: Projekt EVAHESI, Darmstadt.*
- Collet, C., Bruder, R., & Ströbele, M. (in Druck). Intelligent und reflektiert Mathematik üben - Zur didaktischen Qualität von Lehr- und Lernmaterialien. In: *mathematik lehren*, 147. Themenheft „Üben mit Konzept“.
- Weinert, F.E. (1999). Die fünf Irrtümer der Schulreformer. Welche Lehrer, welchen Unterricht braucht das Land? *Psychologie heute, 26(7)*, 28-34.

Renate RAS H, Landau

r hes o eratives Denken beim Arbeiten mit Textaufgaben – utzen verschiedener e r sentationsebenen

Über Sachverhalte können schon zu Schulbeginn alle vier Grundrechenoperationen angesprochen werden. Ein frühes Operationsverständnis ist mit Handlungen bzw. mit Vorstellungen von diesen Handlungen verbunden. Textaufgaben sind gut geeignet, diese Vorerfahrungen aufzugreifen und weiter zu entwickeln. Der Text repräsentiert dabei eine anschauliche Ebene, die Grundlage für enaktive, ikonische und symbolische Lösungsdarstellungen sein kann. Dabei sind die Vorerfahrungen für die einzelnen Operationen und die Beziehungen zwischen diesen, wie nicht anders zu erwarten, unterschiedlich entwickelt und vom bisherigen Zahlbegriffsverständnis abhängig.

Additive Grundkom etenzen

Texte, die additive Zusammenhänge widerspiegeln, konnten in der hier zugrunde liegenden Untersuchung von nahezu allen Schulanfängern (häufig unter Hinzunahme von Arbeitsmitteln) bearbeitet werden. Sachsituationen, die das Subtrahieren, Multiplizieren oder Dividieren repräsentierten, wurden vor allem dann erfolgreich bearbeitet, wenn für die Kinder die Verbindung zur Addition deutlich wurde bzw. sie die Rechnung auf ihr additives Grundverständnis zurückführen konnten. Wenn ich acht Dinge gerecht an zwei Personen verteilen soll, hilft diese additive Sicht - ebenso, wenn dreimal hintereinander eine zwei gewürfelt wird und die Augenzahl bestimmt werden soll. Dabei kann der für Schulanfänger vertraute Zehnerraum durchaus auch einmal überschritten werden, wenn Material zur Stützung der Zählkompetenzen bereitgestellt wird. Die additive Grundkompetenz ist vor allem für Kinder der 1. und 2. Klassenstufe eine wichtige Stütze, aber auch ältere Grundschulkinder nutzten immer wieder additive Zusammenhänge beim Bearbeiten von Textaufgaben, die eigentlich andere Operationen ansprachen.

onstruieren unbekannter o erativer Zusammenh nge mit Material

Wenn der mathematische Zusammenhang nicht auf vertraute Operationen zurückzuführen war, versuchten die meisten Schulanfänger die für sie unbekannten operativen Beziehungen über Handlungen zu konstruieren - in der Regel mit den Fingern und bei weiterem Materialangebot, das die Grenzen des eingeschränkten Finger-Zahlenraumes besser überwinden ließ, mit Plättchen, Zählstäbchen, Muggelsteinen oder ähnlichem. Diese Konstruktionsbereitschaft lässt mit zunehmendem Schulalter scheinbar nach. Dritt- und Viertklässler, die inzwischen sicher über alle vier Rechenoperationen verfügten, suchten die Lösung fast ausschließlich mit Hilfe ihrer Rechenfähigkeiten. War dieses Wissen nicht lösungsfördernd, gaben sie die Lösungssuche häufig auf. Sie nutzten seltener eine heuristisch-probierende Lösungssuche als junge Grundschulkinder und verwendeten von sich aus kaum lösungsunterstützende Mittel, wenn es der Kopf nicht schaffen konnte. Ein Vergleich des Lösungsverhaltens zwischen einer Viertklässlerin und einer Erstklässlerin, die beide zur leistungsstärkeren Schülergruppe gehörten, soll dies verdeutlichen.

Die Aufgabe Max und an haben zusammen 10 Sammelbilder. Max hat 4 mehr als an. Wie viele hat Max, wie viele hat an wurde ohne weitere Unterweisung durch die Interviewerin von der Erstklässlerin auf folgende Weise bearbeitet:

Zunächst nahm sie 4 einzelne Würfel. Also 4 hat Max mehr, zusammen haben sie 10. Sie griff zu einem Zehnerstab. Also 4 hat Max mehr, also 1, 2, 3, 4. Sie tippte dabei 4 Würfel auf dem Zehnerstab an und grenzte diese von den übrigen Würfeln ab. Die hat schon der Max mehr. Sie schaute auf den Zehnerstab und wollte zunächst noch Würfel dazu nehmen, verwarf diesen Gedanken aber gleich wieder. (Zusammen haben sie 10.) Sie betrachtete das restliche Stück des Zehnerstabes und zeigte immer jeweils links und rechts auf einen Würfel: Das ist der erste und das ist der erste, das ist der zweite und das ist der zweite, Sie überlegte kurz und sprach dabei ganz langsam: Dann hat der an 3 und Max 7.

Die Viertklässlerin, die die gleiche Problemstellung in einem etwas größeren Zahlenraum zu bearbeiten hatte (30 Legosteine, Differenz zwischen den beiden Mengen 6), reagierte auf folgende Weise:

Mhm, das ist ja wohl ne Knobelaufgabe. Da muss man sich ja ehrlich gesagt erst was ausdenken: 14 und 16. Nee, haut nicht hin. Sie überlegte: Es muss aber trotzdem noch 30 ergeben Die Interviewerin gab die Anregung: Du könntest doch erst einmal mit den beiden Zahlen 14 und 16 beginnen Hier liegen auch Zehnerbündel mit Stäbchen, insgesamt 30 Stück, du könntest auch damit probieren. Die Viertklässlerin nahm das Material zwar in die Hand, legte es dann aber wieder zur Seite und fuhr mit ihren Überlegungen fort: Das geht ja nicht, wenn 6 mehr sein sollen. Aber es gibt ja keine andere Aufgabe, dass man auf die 30 kommt, höchstens mit ‚Mal . Können wir die Aufgabe überspringen

Ein Fazit aus diesen Beobachtungen könnte sein, Grundschulkinder stärker dazu anzuregen, verschiedene Repräsentationsebenen in Abhängigkeit vom Niveau der Aufgabe und ihren eigenen Möglichkeiten zu nutzen. Durch das Zurückgreifen auf die handelnde Ebene können zum einen mathematische Zusammenhänge erhellt werden, zum anderen wird auch das Arbeitsgedächtnis entlastet, weil man sozusagen parallel zum Denken arbeiten kann.

Darstellen der o frechenaktivit ten

Mit den sich entwickelnden Kopfrechenfähigkeiten fielen weitere Besonderheiten auf, die eine unterrichtliche Betrachtung von Textaufgaben berücksichtigen sollte. Das Kopfrechnen erfordert in den Klassenstufen 1 und 2 von den Lernenden noch eine hohe Konzentration auf einzelne Rechenschritte. Bei Textaufgaben wie den folgenden, die bei den Lösenden in der Regel sofort Kopfrechenaktivitäten auslösen, scheitern vor allem leistungsschwächere Kinder. Sie errechnen häufig ein Ergebnis, können aber aus den einzelnen Rechenschritten keine Rechenaufgabe, die bei Textaufgaben in der Regel von Anfang an verlangt wird, konstruieren.

Die 33 Kobolde des Waldes fürchten den Donner: Als das Gewitter kommt, verstecken sich 12 in einer Höhle, die anderen suchen Schutz unter einem großen Stein. Wie viele sind unter dem Stein (Kl. 2)

Bei dieser Aufgabe rechnen viele Zweitklässler ausgehend von der 12 und nehmen schrittweise Zahlen dazu, bis sie die 33 erreichen. Die Kinder sollten darin bestärkt werden, genau diese Rechenaktivitäten zu notieren. So bleibt anfangs die Denk- und Rechenebene eng mit der Darstellungsebene verbunden.

Teilen fällt nicht immer leicht. Ich esse gern Schokolade. 26 Schokoladenriegel soll ich mit meiner Schwester teilen. Wie viele muss ich abgeben (wenn es gerecht sein soll) (Kl. 2)

Die Zweitklässler nehmen auch hier oft eine additive Sicht ein und beginnen damit, die 26 gleichmäßig aufzubauen: 10 und 10 kann s nicht sein, 11 11 ist 22, 12 12 ist 24, 13 13 26. Die Rechenaktivitäten des Kindes werden in der Regel im Unterricht nicht sichtbar, da nach dem Schema Frage-Rechnung-Antwort nur eine Rechenaufgabe verlangt wird. Beim Abbilden der Rechenhandlungen sollten auch Terme, unvollständige Aufgaben, formale Notierungsfehler zunächst toleriert werden, damit die Schülerinnen und Schüler lernen, die mathematisch-symbolische Ebene als Darstellungsinstrument zu nutzen (vgl. Rasch 2007).

Verbindung verschiedener e r sentationsebenen

An verschiedenen Stellen der Untersuchung zeigte sich, dass es wichtig ist, die einzelnen Repräsentationsebenen für die Kinder sichtbar aufeinander zu beziehen. Ebenso sollten die Stärken und speziellen Anwendungsbereiche der Darstellungsmöglichkeiten für die Lernenden deutlich werden.
Das Hantieren mit Material kann immer dann nützlich sein, wenn die operativen Beziehungen, die in der Aufgabe stecken, für die Lösenden nicht sofort ersichtlich sind. Wie man das Material in diesen Fällen nutzen kann, muss erlernt werden, am besten von Schulanfang an, wo Grundschulkinder auf die enaktive Ebene noch angewiesen sind. So können Übungen zu Zuordnungen und zur Paarbildung gemacht werden. Kinder können im Zusammenhang mit einer entsprechenden Textaufgabe darin unterwiesen werden, wie man einen Unterschied mit Material bestimmen kann. Ebenso kann der Bezug zu additiven Beziehungen mit Material verdeutlicht werden, wenn es zum Beispiel um das Teilen oder Malnehmen geht, um nur einige Beispiele zu nennen. Diese Übungen zum Hantieren mit Material sollten in der Regel immer mit der mathematisch-symbolischen Stufe verbunden werden: Wie kann das, was gelegt wurde, durch Zahlen, Rechenaufgaben, Terme (später Gleichungen) dargestellt werden. Im Laufe der Grundschulzeit sollte deutlich werden, dass jedes Darstellungsmittel seine Grenzen hat und bspw. die skizzierende zeichnerische Ebene mitunter dem Hantieren mit Arbeitsmitteln überlegen ist oder dass die Rechenaufgaben oft am kürzesten und am genauesten die Lösungssituation abbilden können.

Literatur

Rasch, R. (2007): Fördern eines frühen Operationsverständnisses durch das Bearbeiten von Sachaufgaben in den Klassenstufen 1 und 2. In: Sache-Wort-Zahl, Heft 5, S. 42-47, Aulis.

Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Weingarten und Dieter Klaudt, Ludwigsburg

Zahldarstellung und Zahlauffassung anhand von Zahlbildern im Zehnerfeld

Zahlbilder

Der Einsatz von Zahlbildern beim Einprägen von Zahlen, beim Aufbau von visuellen Vorstellungen sowie zur Unterstützung des Rechnens hat in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition. Bereits in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts tauchten Zahlbilder in Verbindung mit völlig neuen Methoden zur Entwicklung des Zahlbegriffs auf: den so genannten Zahlbild- oder Anschauungsmethoden (vgl. MAIER 1990, S. 112). Diese Methoden intendierten die Abkehr von den bis dahin üblichen Zählmethoden und betonten die Relevanz einprägsamer Zahlbilder zur Förderung der Zahlbegriffsentwicklung. Welche bildlichen Zahldarstellungen sich zur Unterstützung des Lernprozesses am besten eignen, darüber disputierten die Anhänger der Anschauungsmethoden heftig. Eine Vielzahl von Zahlbilddarstellungen wurden entwickelt und ein Konsens zeichnete sich damals nicht ab, allerdings kristallisierten sich folgende Gestaltungskriterien (a.a.O., S. 113): Zahlbilder sollen leicht überschaubar und einprägsam sein. Einzelne Zahlbilder sollen voneinander klar zu unterscheiden sein, insbesondere die von benachbarten Zahlen. Zahlbilder sollen so strukturiert sein, dass sie eine Hilfe beim Rechnen darstellen. In jedem Zahlbild soll das vorangegangene erkannt werden. Das zuletzt genannte Kriterium geht auf KÜHNEL (1922, 29) zurück, der sich Anfang des 20. Jahrhunderts ebenfalls mit der Frage „Welche Zahlbilder benutzen wir nun?" (ebd.) auseinandersetzte.

Heutzutage wird Zahlbildern im mathematischen Anfangsunterricht wieder eine zentrale Rolle zugeschrieben (vgl. GERSTER u. SCHULZ 2004, 344ff; KAUFMANN 2006, 167; SCHÜTTE 2004, 5ff) und auch heute variieren die Darstellungsformen: Als Zahlbilddarstellungen findet man beispielsweise Punktemuster mit Fünferstruktur und ohne vorgegebene Rahmung (vgl. Abb. 1 WITTMANN u. MÜLLER 1990, 23ff), Punktebilder im Zwanzigerfeld, die auf der Grundlage des Arbeitsmittels „Rechenschiffchen" entwickelt wurden (Abb. 2; KAUFMANN u. WESSOLOWSKI 2006, 53) sowie Punktebilder im Zehnerfeld, die entweder linear oder en bloc angeordnet sind (GERSTER u. SCHULZ 2004, 344ff; SCHÜTTE 2004, 5ff).

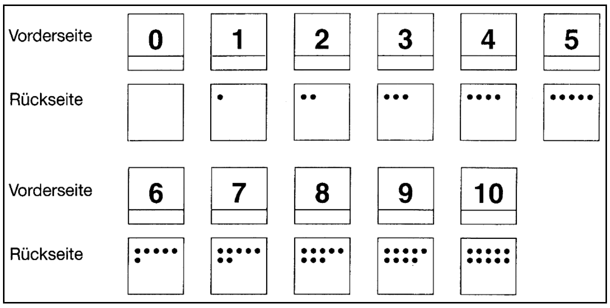


Abb. 1: Punktbilder zu den Zahlen 1 bis 10

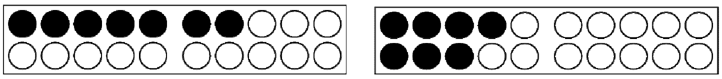


Abb. 2: Darstellung der Zahl 7 im Zwanzigerfeld

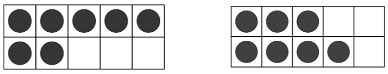


Abb. 3: Zahl 7 im Gitterraster „Zehnerfeld“

Wie GERSTER und SCHULZ plädiert SCHÜTTE aufgrund der Übersichtlichkeit und Überschaubarkeit für die Zahlbilder im Gitterraster. Sie sieht dabei deutliche Vorteile in der en bloc-Anordnung der Punkte, da diese Strukturierung der Punkte unter anderem die Möglichkeit zur guten visuellen Gliederung bietet sowie das Erkennen von geraden und ungeraden Zahlen erleichtert (SCHÜTTE 2004, S. 5ff). Bei SCHÜTTE findet sich ein ganz neuer Aspekt im Umgang mit Zahlbildern: die Eigenstrukturierung durch die Kinder verbunden mit der Entwicklung einer gemeinsamen Darstellung im wechselseitigen Austausch (ebd.). In der aktuellen Diskussion werden die von den Anschauungsmethodikern entwickelte Kriterien (s.o.) um folgende erweitert: Zahlbilder sollten quasi-simultane Erfassung, das mentale Zerlegen und das Erkennen von Zahlbeziehungen ermöglichen.

Motivation und Forschungsfragen

Angeregt durch die möglichen Aktivitäten mit Zahlbildern im Zehnerfeld zum Aufbau von Zahl- und Operationsvorstellungen, haben wir uns im Rahmen der individuellen Förderung von Kindern mit Lernschwierigkeiten[1] für die Arbeit mit diesem Material entschieden (RATHGEB-SCHNIERER 2007, 103ff). Aus Erfahrungen und Beobachtungen, die wir innerhalb einer Gruppe von 12 Kindern mit den

[1] An der Beratungsstelle der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg.

Aktivitäten zur Eigenstrukturierung und Erkennung von Zahlbildern im Zehnerfeld machten, entwickelten sich verschiedene Forschungsfragen und das Bedürfnis, diesen an einer weitaus größeren Stichprobe nachzugehen: (1) Wie strukturieren Kinder Zahlbilder im Zehnerfeld? (2) Werden bestimmte Darstellungen beim Erstellen, beim Erkennen und beim mentalen Operieren bevorzugt? (3) Werden bei der Erstellung und Erkennung mathematische Grundstrukturen genutzt? (4) Wird das mentale Operieren von der Darstellung des Zahlbildes beeinflusst?

Aufgaben und Umsetzung mit Convertible PCs

In Anlehnung an die Forschungsfragen entwickelten wir auf der Grundlage von Zehnerfeldern drei verschiedene Aufgaben: eine zur Zahldarstellung, eine zur Zahlauffassung und eine zum mentalen Operieren. Um den Prozess der Aufgabenbearbeitung auch bei einer größeren Stichprobe untersuchen zu können, werden zur Umsetzung Convertible PCs (Stiftcomputer) eingesetzt. Diese ermöglichen auch Kindern, die den Umgang mit der Maus noch nicht beherrschen, direkte Eingaben auf der grafischen Benutzeroberfläche.

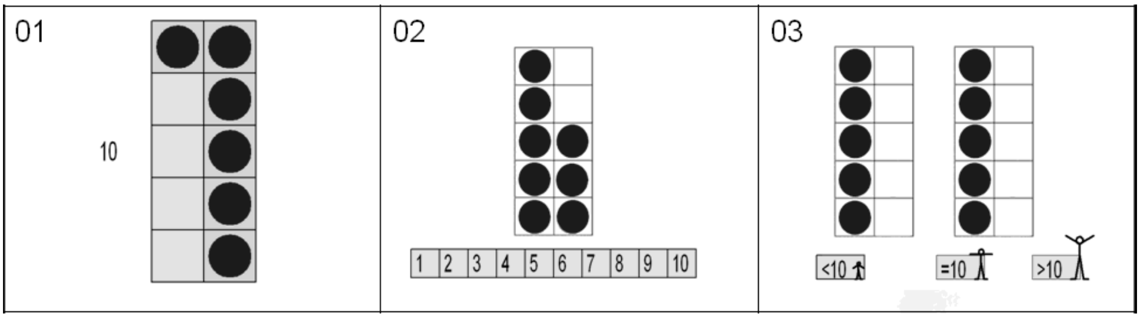


Abb. 4: Übersicht der drei Umgebungen

Die Aufgabenstellung zur Zahldarstellung beabsichtigt die Eigenstrukturierung von Zahlbildern im Zehnerfeld. Den Kindern wird ein leeres Zehnerfeld in Kombination mit einer Zahl präsentiert und sie haben die Aufgabe, ein entsprechendes Zahlbild zu gestalten. Jede Zahl von 2 bis 9 wird jeweils mit einem quer- und einem hochformatigen Zehnerfeld kombiniert (durch Wiederholungen insg. 35 Einzelaufgaben), wobei wir darauf achteten, keine direkten Nachbarzahlen nacheinander zu präsentieren. In den Protokollen der Bearbeitung werden folgende Daten gespeichert: Name, Aufgabe, Zeit, markierte Felder (Bsp. siehe Abb. 5). Bei der zweiten Aufgabenstellung interessiert uns der reversible Prozess: Ein komplettes Zahlbild und eine Zahlenleiste der Zahlen 2 bis 10 erscheinen auf dem Bildschirm und durch Antippen der entsprechenden Stelle in der Zahlenleiste erfolgt die Zuordnung der passenden Zahl zum

Zahlbild (insg. 35 Einzelaufgaben). Das mentale Zusammenfügen zweier Zahlbilder steht bei der dritten Aufgabenstellung im Vordergrund. Bei jeder Einzelaufgabe (insg. 35) tauchen zwei hochformatige Zehnerfelder mit verschiedenen Zahlbildern auf, die entweder beide linear oder en bloc dargestellt werden. Bei der Bearbeitung muss die Entscheidung für eine passende Kategorie getroffen werden: zusammen kleiner, größer oder gleich 10.

<table>
<tr><th>Name, Aufgabe, Zeit, Felder</th><th>Erklärung:</th><th colspan="2">Feldnummern</th></tr>
<tr><td>sonja ,6 h, 17, 1,2,3,4,5,6</td><td>einzeln markiert</td><td rowspan="5">Quer:
1 2 3 4 5
6 7 8 9 0</td><td rowspan="5">Hoch:
1 6
2 7
3 8
4 9
5 0</td></tr>
<tr><td>sonja ,6 h, 9 ,16,27,38</td><td>Paare markiert</td></tr>
<tr><td>sonja ,6 q,10 ,123,678</td><td>2 Gesten: Würfelsechs</td></tr>
<tr><td>sonja ,4 h,11, 1627 ,3498,</td><td>2 Würfelvierer markiert</td></tr>
<tr><td>sonja ,9 h,12345 , 6789</td><td>5 und 4 in Reihe</td></tr>
</table>

Abb. 5: Kommentierte Beispieldaten aus Umgebung 1

Pilotphase und erste Ergebnisse

Als erster Schritt wurden die Umgebungen in zwei verschiedenen Kontexten erprobt: In einem Mathecamp (14 Kinder), wo die Aufgaben an einer Station freiwillig bearbeitet werden konnten und mit 16 Kindern eines zweiten Schuljahrs im Rahmen des regulären Schulalltags. Es interessierten uns hierbei vorwiegend Aspekte wie Programmfehler, die Art der Aufgabeninstruktion, die Größe der „Arbeitgruppe“, die Integration in den Schulalltag, die Akzeptanz der Computerumgebung sowie das Zurechtkommen der Kinder mit der Computerumgebung und den einzelnen Aufgabenstellungen. Als zweiter Schritt wurden die Umgebungen mit 75 Schülerinnen und Schülern des 2. Schuljahrs erprobt.

Im Moment liegen Ergebnisse der ersten Erprobungsphase vor, die hier aus Platzgründen leider nicht mehr dargestellt werden können. Weiteres siehe:

- http://mathematik.ph-weingarten.de/~rathgeb
- http://www.ph-ludwigsburg.de/1559.html

Literatur

Eine Liste der im Beitrag angeführten Literatur kann bei den Autoren unter folgenden Adressen angefordert werden:

rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de klaudt@ph-ludwigsburg.de

Charlotte RECHTSTEINER-MERZ, Weingarten

Zahlenblickschulung als Möglichkeit zur Schulung flexibler Rechenkompetenzen bei schwachen Kindern – in Klasse 1

Kurze Projektbeschreibung

Im Rahmen des vorliegenden Projekts wird die Rechenwegsentwicklung mit und ohne Zahlenblickschulung bei schwachen Kindern des ersten Schuljahrs untersucht. Dabei sind folgende Forschungsfragen leitend:

- Wie können schwache Kinder ihre Rechenwege artikulieren?
- Kann durch ein integratives Programm zur Zahlenblickschulung auch bei schwachen Kindern flexibles Rechen gefördert werden?
- Verändern sich die Rechenwege im Laufe des Lehr-Lernprozesses?
- Treten Unterschiede zwischen Kindern mit und ohne Zahlenblickschulung auf?

In der Studie soll der Blick auf die jeweils schwächsten Kinder aus acht ersten Klassen gerichtet werden.

Begriffsklärung

Unter „Zahlenblick" versteht Schütte (2004, 143ff) die Fähigkeit des augenblicklichen Sehens und des augenblicklichen Nutzens von Zahlbeziehungen. Dies beinhaltet, dass Zahlen geschickt zerlegt und neu zusammengesetzt werden können. Sie bezieht sich auch auf Threlfall (2002), der von situationsbezogenen, aufgabenspezifischen Herangehensweisen spricht.

Schütte beschreibt die Notwendigkeit der Schulung des Zahlenblicks auf dem Weg zum flexiblen Rechnen als „übergeordnetes Prinzip" (2002, 3), welche dem halbschriftlichen Rechnen vorangestellt werden muss.
Um den Begriff „Zahlenblick" genauer fassen zu können, möchte ich ihn mit anderen Begriffen, die inhaltlich sehr nahe liegen in Verbindung bringen, davon abgrenzen oder Überlappungen aufzeigen.
Ein verwandter Begriff, ist der des „Zahlengefühls", den Dehaene (1999) als number sense bezeichnet: Die „intuitive Repräsentation von Anzahlen" (ebd., 17) ist bereits bei Babys und auch bei Tieren vorhanden ist. Jeder Mensch und auch Tiere haben eine Begabung für Zahlen, die reflexartig von Geburt an verstanden werden (vgl. ebd, 94). Lorenz (1997, 94f) übersetzt „number sense" als „Zahlengefühl" und betont die Schwierigkeit einer Definition. In Anlehnung an Sowder (1992, 18f) beschreibt er Zahlengefühl unter anderem als flexibles Zusammensetzen und Zerlegen von Zahlen. Lorenz verdeutlicht, dass Zahlengefühl nur durch reichhaltige

Zahlerfahrungen entstehen kann (1997, 95).
In neuerer Literatur findet man bei Lorenz den Begriff „Zahlensinn“ (2005, 113, 2006, 6ff.). Er zeigt den Zusammenhang von Rechenstrategien und Zahlensinn auf dem Weg zum flexiblen Rechnen auf (2006, 7). Die Verknüpfung des Zahlensinns mit der Ausbildung metakognitiver Kompetenzen beschreibt er (2005, 121ff.) als einen Aspekt. Durch den Austausch von Lösungswegen am Zahlenstrich reflektieren die Kinder ihr Handeln.
Das Zahlengefühl beschreibt eine angeborene, intuitive Fähigkeit und bildet dadurch die Grundlage für die Entwicklung des Zahlensinns und des Zahlenblicks.
Zwischen Zahlensinn und Zahlenblick besteht die Überlappung meines Erachtens in der Betonung der Entwicklung flexibler Rechenstrategien. Auch die Notwendigkeit der Ausbildung metakognitiver Kompetenzen sehen sowohl Lorenz (2005, 2006) als auch Schütte (2002, 2004, 2008) als einen wichtigen Aspekt an. Einen wesentlichen Unterschied sehe ich in der Schulung. Nach Lorenz kann der Zahlensinn durch den Austausch von reflektierten Lösungswegen entwickelt werden (2005, 116 ff). Schütte hingegen beschreibt bei der Schulung des Zahlenblicks Aktivitäten, die „den Rechendrang auf(zu)halten und den Blick auf die Art der Aufgabe lenken“ (2004, 144), damit die Kinder lernen die Zahlbeziehungen augenblicklich zu
sehen und zu nutzen.

Zahlenblickschulung nach Schütte

Bei der Schulung des Zahlenblicks wird sowohl dem reichhaltigen Zahlenwissen, als auch dem Aufbau metakogntivier Kompetenzen ein großes Gewicht beigemessen (vgl. Schütte, 2008, 84).
Im engeren Sinne beinhaltet die Zahlenblickschulung (ebd., 85ff):

- Aufgabeneigenschaften und Aufgabentypen erkennen
- Zahl- und Aufgabenbeziehungen erkennen
- Lösungen „sehen oder Wege der Vereinfachung finden

Im weiteren Sinne betrachtet lässt sich feststellen, dass auch beim „Experimentieren und Erforschen“ und beim „Muster und Strukturen erkennen und fortsetzen“ der Blick auf Zahl- und Aufgabenbeziehungen gefordert und dadurch auch gefördert wird.
Auch Rathgeb-Schnierer (2006, 296) schließt, dass die differenzierte Schulung des Zahlenblicks ein wesentlicher Aspekt auf dem Weg zum flexiblen Rechnen darstellt.

Programm zur Zahlenblickschulung in Klasse 1

Das von mir entwickelte Programm bezieht sich auf die Ideen zur Zahlenblickschulung von Schütte und beinhaltet vier Bausteine: Blitzblick, Leerer Zahlenstrahl, Sortieren und Ordnen - Aufgabentypen erkennen, Zahl- und Aufgabenbeziehungen erkennen. Es ist kumulativ und systematisch für die Klasse 1 aufgebaut. Die Aktivitäten werden kontinuierlich ungefähr eine Stunde wöchentlich durchgeführt und werden integrativ mit der gesamten Klasse behandelt.

Da zu Beginn von Klasse 1 der Aufbau von Zahlvorstellungen im Vordergrund steht, beinhaltet das Programm zunächst zwei Module zu Übungen zum Blitzblick und zu Orientierungen am leeren Zahlenstrahl. Im weiteren Verlauf des Schuljahres kommen die anderen beiden Module hinzu. Beim Sortieren und Ordnen stehen Aktivitäten im Mittelpunkt, bei welchen Aufgabentypen erkannt, sortiert und geordnet werden sollen. Im vierten Baustein geht es um Zahl- und Aufgabenbeziehungen und deren Veränderungsmöglichkeiten.

Bei allen Aktivitäten steht der Metablick auf die Zahlen und Aufgaben im Vordergrund, so dass der Rechendrang zurückgehalten wird.

Mit diesen Übungen einher geht die Ausbildung metakognitiver Kompetenzen, die durch das Nachdenken über die Mathematik, die eigene Sicht darauf und den Austausch mit anderen angeregt werden kann.

Exemplarisch werden hier kurz zwei Übungen aus dem Programm vorgestellt:

1. Übung zum Blitzblick

   Eine Punktefeldkarte wird nur sehr kurz gezeigt. Die Kinder beschreiben wie viele Punkte sie insgesamt sehen. Sie beschreiben auf welche Arten sie die Gesamtzahl erschlossen haben. Sie vergleichen untereinander und tauschen sich aus.

2. Übung zum Ordnen und Sortieren

   Bei dieser Übung geht es um das schnelle „Zusammensehen“ von zwei Zehnerfeldkarten (vgl. Rathgeb-Schnierer, 2007, 111).

   Zwei Kinder spielen gemeinsam, so dass sie sich über Ideen austauschen und diese begründen können. Zunächst liegen drei Karten mit folgender Aufschrift auf dem Tisch: „bleibt unter der 10“, „trifft die 10“, geht über die 10“. Die Zehnerfeldkarten liegen verdeckt auf dem Tisch. Immer zwei werden gleichzeitig umgedreht und müssen nun durch schnelles Erkennen einer der drei Kategorien zugeteilt werden.

   Bei dieser Übung geht es nicht um das genaue Berechnen des Ergebnisses, sondern vielmehr um das schnelle „Zusammensehen“ von zwei Punktefelddarstellungen und das Abschätzen des Ergebnisses.

Verankerung des Programms im Projekt

Das Programm wird seit September in den Klassen mit Zahlenblickschulung durchgeführt. Die Lehrerinnen der Klassen haben eine Schulung erhalten in Form von Gesprächen und durch eine genaue Aufgabenbeschreibung, mit Erklärungen wie die Aufgabe durchzuführen ist, mit welcher Zielsetzung und worauf besondern Wert zu legen ist. Die Aufgaben werden kontinuierlich jede Woche ungefähr eine Schulstunde durchgeführt. Dies
wird von den Lehrkräften in einer Tabelle festgehalten.

Literatur

Dehaene, S. (1999). Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können. Basel: Birkhäuser Verlag

Lorenz, J.-H. (1997). Kinder entdecken die Mathematik. Braunschweig: westermann

Lorenz, J.-H. (2005). Grundschulkinder rechnen anders. Die Entwicklung mathematischer Strukturen und des Zahlensinns von „Matheprofis“. In: Rathgeb-Schnierer, E./ Roos, U. Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht. München: Oldenbourg, 113 - 122

Lorenz, J.-H. (2006). Die Entwicklung von Zahlensinn. In: Die Grundschulzeitschrift, H. 191, 6 – 9

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Hildesheim: Verlag Franzbecker

Rathgeb-Schnierer, E. (2007). Rechenschwache Kinder arbeiten mit Zahlbildern im Zehnerfeld. In: Filler, A./ Kaufmann, S. (Hrsg.). Kinder fördern – Kinder fordern. Hildesheim: Verlag Franzbecker

Schütte, S. (2002b). Die Schulung des „Zahlenblicks“ als Grundlage für flexibles Rechnen. In: Die Matheprofis – Lehrerhandbuch 3. München: Oldenbourg

Schütte, S. (2004). Rechenwegnotationen und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jg. 25, Heft 2, S. 130 – 148.

Schütte, S. (2008). Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. München: Oldenbourg

Sowder, J. (1992). Estimation and Number Sense. In: Grouws, Douglas A. (Ed.): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan, 371 - 289

Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. In: Educational Studies in Mathematics 50, 29 - 47

Christian REINHARD, Universität Frankfurt/ Main (IDMI)

Wiki-basierte Lernumgebung zum kooperativen Lernen mit Neuen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe – wiLM@

Die Entstehung und die Weiterentwicklung der wiki-basierten Lernumgebung „wiLM@" wird innerhalb des Medienprojektes Lehr@mt verwirklicht, welches - in Kooperation mit der Universität Frankfurt - vom Hessischen Kultusministerium gefördert wird.

Das Projekt Lehr@mt

Das Projekt Lehr@mt hat sich die grundlegende Qualifikation im Bereich der Medienkompetenz für die Beteiligten aller Phasen der Lehrerbildung zum Ziel gesetzt. Dazu sollen Produkte für Aus- und Fortbildung erstellt und Aus- und Fortbildungsangebote durchgeführt werden. Kooperationsstrukturen aller an der Lehrerbildung Beteiligten sollen ausgebaut, sowie die mediendidaktische Unterrichtsforschung gefördert werden. Unabhängig von der Fächerkombination sollen Lehramtsstudierende, Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst und Lehrerinnen grundlegende Fähigkeiten im Bereich der Medienkompetenz erwerben. Sie sollen befähigt werden, Medien zu nutzen, diese im Unterricht zielgerichtet einzusetzen sowie Unterrichtsszenarien zu entwickeln und zu betreuen. Durch diesen Unterricht sollen vor allem auch die Schülerinnen und Schüler Medienkompetenz erwerben. Es wird dabei beabsichtigt, die mediendidaktische Fachunterrichtsforschung in alle Phasen der Lehreraus- und Lehrerfortbildung zu integrieren. Zur Umsetzung des Gesamtprojektes gibt es eine Kooperation des Kultusministeriums, der Universität Frankfurt, des Amtes für Lehrerbildung, einiger Studienseminare und zahlreicher Schulen. Im Folgenden soll nun die Entwicklung von wiLM@ vorgestellt werden, die sich an den vorgestellten Zielen orientiert. In erster Linie gehe ich dabei auf die technische Umsetzung und die Struktur von wiLM@ ein.

Mathematikdidaktische Einordnung

Die Entwicklung von wiLM@ ordnet sich in die Reihe der Diskussionen zu Verschriftlichungsprozessen im Mathematikunterricht der Primarstufe ein (vgl. Ruf & Gallin 1998, Selter 1993, Fetzer 2007). Sie alle sehen im Verschriftlichen von Lösungsbemühungen einen lernförderlichen Aspekt. Krummheuer spricht von der Problematik der Flüchtigkeit verbaler Schüleräußerungen in Lernsituationen und regt eine schriftliche Fixierung vor allem des Lösungsweges an (Krummheuer 1997). Gerade in mathematischen Lernprozessen komme es auf eine schriftlich-grafische Kommunikation an, da in vielen mathematischen Darstellungen schon die Idee präsent ist „und nicht ausschließlich als deren Repräsentation in Form eines Symbols oder Zeichens verstanden werden muss“ (Schreiber 2006). Zum einen wird dem Schreiber während des Verschriftlichens nochmals deutlich, inwieweit seine Argumentationsschritte in sich stimmig sind, zum anderen kann sich der Rezipient auf das Geschriebene beziehen und sich dadurch am Argumentationsprozess beteiligen. Die schriftlich-grafische Darstellungsweise ist damit zentraler Bestandteil mathematischer Kommunikation. Mit Blick auf die narrativen Argumentationen bei Grundschülern in kollektiven Aufgabenbearbeitungsprozessen wird mit der Entstehung von wiLM@ der Forderung nach schriftlicher Fixierung Rechnung getragen. Die Schülerinnen und Schüler sind nun gefordert, nur noch schriftbasiert zu kommunizieren.

Technische Hinweise

In der Erprobungsphase von wiLM@ werden 2 Tablet-PC‘s und 2 Cintiqboards eingesetzt, die jeweils über einen Touchscreen verfügen. Die Schülerinnen und Schüler können ihre Lösungen direkt auf dem Bildschirm mit einem Stift verschriftlichen (vgl. Abb.1). Um auf die Lernumgebung wiLM@ zugreifen und Inhalte veröffentlichen zu können, wird eine funktionsfähige Internetverbindung benötig. Die Lösungen der Schülerinnen und Schüler werden in einer Datenbank auf einem Server gespeichert und bleiben so für den Nutzer jederzeit abrufbar. Um die Aktivitäten vor den Rechnern und die Aktionen während des Bearbeitens von Lösungen auf den Bildschirmen festzuhalten, wird das Programm Camtasia Studio benutzt. WiLM@ basiert im technischen Sinne auf einem Wiki, worin die Möglichkeit enthalten ist, Gedanken und Ideen anderen Menschen im Internet zu zeigen und so gemeinschaftlich an veröffentlichtem „Content“ zu arbeiten.

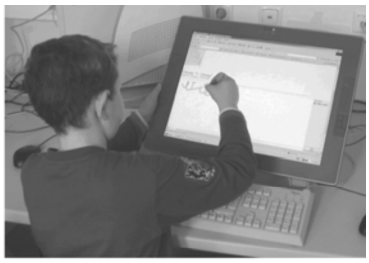


Abb.1 Schüler während der Bearbeitung einer Aufgabe.

Inhaltsaspekte von wiLM@

Das Untersuchungsdesign von wiLM@ hält eine hohe Interaktionsmöglichkeit zwischen den beteiligten Schülern bereit.

Um wiLM@ als Kommunikationsform einordnen zu können, mache ich mir die Ausarbeitung von Koch/ Österreicher zu nutze. Diese unterscheiden in ihrem linguistischen Ansatz Mündlichkeit und Schriftlichkeit in zwei Dimensionen - in eine konzeptionelle und eine mediale (Koch/ Öesterreicher 1985). WilM@ lässt sich daher in eine konzeptionell-mündliche und

medial-schriftliche Kommunikationsform einordnen.
Da eine mündliche Interaktion zwischen den Schülern mit wiLM@ nicht möglich ist, wird eine Kommunikation erforderlich, die schriftlich-grafisch basiert ist. Diese Kommunikation kann zeitgleich (synchron) oder zeitversetzt (asynchron) geschehen. Bearbeiten Schüler zur gleichen Zeit eine Lösung eines anderen Schülers, so liegt eine synchrone Kommunikation vor. Die Schülerinnen und Schüler können im Whiteboardfenster die Entstehung einer Lösung zeitgleich miterleben, an ihr weiterarbeiten und bei Bedarf mit dem Kommentarfeld über die Tastatur Ideen und Gedanken „quasi – synchron" veröffentlichen. Beziehen sich die Kinder auf eine zeitlich zurückliegende Lösung, die in der Datenbank abgespeichert ist, kann von einer asynchronen Kommunikationsform gesprochen werden. Diese zum Teil synchrone, zum Teil asynchrone Kommunikationsform unterstützen kooperatives Lernen im Unterricht.
Durch die schriftliche Fixierung von Gedanken und Ideen der Schülerinnen und Schüler verändert sich der Status der Lösungen und macht sie gleichsam angreifbar bzw. verhandelbar. Bruner spricht von „Externalisierung" und meint damit eine „... Aktivität, in welcher (kollektive) Gedanken, Ideen und Absichten eine äußere Gestalt annehmen..." (Bruner, 1996). Richtet man den Blick stärker auf den Prozess der Herstellung eines gemeinsamen Werkes, das eine „äußere Gestalt annimmt", so begegnet man dem Begriff des „Oeuvre" (Bruner, 1996). Ein Oeuvre ist damit stärker auf die Veröffentlichung und die Rezeption hin angelegt. WiLM@ ist in drei *Öffentlichkeitsbereiche* unterteilt. Es bleibt dabei den Kindern überlassen, in welchem Bereich sie sich aufhalten. Innerhalb des „privaten Bereichs" arbeiten die Schülerinnen und Schüler alleine an der Entstehung einer Lösung und haben die Möglichkeit, ihre bisher erstellten Inhalte über einen Button einer bestimmten Gruppe von Schülern zu zeigen. In diesem zweiten Öffentlichkeitsbereich können die Kinder gemeinsam alternative Bearbeitungsweisen (weiter-)entwickeln. In einem dritten Schritt kann eine Lösung „für alle sichtbar" werden und erreicht die höchste Öffentlichkeitsstufe. Eine wesentliche Hürde, die mit der Entwicklung von wiLM@ überwunden wurde, ist die Möglichkeit der Dokumentation von Lösungsprozessen. Mit Hilfe eines Scrollbalkens am Arbeitsblatt lassen sich entstandene Lösungen wie in einem Film ansehen. So lässt sich die Entstehung einer Lösung zeitlich versetzt nachvollziehen.

Perspektive

Die Entstehung von wiLM@ wird in einer mehrstufigen Entwicklung verwirklicht. Die technische Realisierung und die erste Erprobung von wiLM@ wurden mit Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern am Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik in Frankfurt verwirklicht. Derzeit wird wiLM@ an einer Schule im Kreis Fulda eingesetzt. In Zukunft sollen weitere Schulen an der Entwicklungsphase teilnehmen. WiLM@ ist unter einem forschungsorientierten Blickwinkel entwickelt worden. Die Modifizierung und Weiterentwicklung von wiLM@ schließt aber einen flächendeckenden Einsatz im Unterricht an Schulen in Hessen nicht aus („Design Based Research“). In den kommenden Semestern soll innerhalb phasenübergreifenden Veranstaltungen mit Studierenden und Lehramtsanwärtern wiLM@ an verschiedenen Schulen im Mathematikunterricht eingesetzt und unter einer zuvor festgelegten Fragestellung erprobt, ausgewertet und weiterentwickelt werden. Hierbei müssen geeignete mathematische Lerninhalte ausgewählt und an die jeweilige Lerngruppe angepasst werden. Transkripte zu ausgewählten Szenen werden dann anhand festgelegter Forschungsfragen analysiert und ausgewertet.

Literatur

Bruner, J. (1996): The Culture of Education. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Fetzer, M. (2007): Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule. Bad Heilbrunn. Klinkhardt.

Koch, P. /Oesterreicher, W. (1985): Sprache der Nähe – Sprache der Distanz. Mündlichkeit und Schriftlichkeit im Spannungsfeld von Sprachtheorie und Sprachgeschichte. In: Deutschmann, O. & Flasche, H. u.a. (Hrsg.): Romanistisches Jahrbuch. Band 36. Walter de Gruyter, Berlin, New York. 1- 43.

Krummheuer, G. (1997): Narrativität und Lernen. Mikrosoziologische Studien zur sozialen Konstitution schulischen Lernens. Weinheim. Deutscher Studien-Verlag.

Ruf, U. & Gallin, P. (1998): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Ruf, U. & Gallin, P. (2000): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 2: Spuren legen – Spuren lesen: Unterricht mit Kernideen und Reisetagebüchern. Kallmeyer, Seelze-Velber.

Schreiber, C. (2006): Rekonstruktion inskriptionsbasierter Problemlöseprozesse aus semiotischer Perspektive. In: Krummheuer, G./ Jungwirth, H. (Hrsg.) Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht. Waxmann: 153 – 187.

Schreiber, C. (2008): eLearning in phasenübergreifenden Veranstaltungen in der Lehrerbildung für die Primarstufe. In: L-News. Johann Wolfgang Goethe - Universität: Frankfurt, Nr. 28, 16 – 21.

Selter, C. (1993): Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden.

Selter, C. (1994): Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr. Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden.

Kristina REISS, Sebastian KUNTZE, Reinhard PEKRUN, Stefan UFER, München

Die Kompetenz „Modellieren" in Verbindung mit unterschiedlichen Leitideen – von Zielen der Bildungsstandards zu Fragen der Konzeption von Kompetenzmodellen [1]

Einführung

Als einer von sechs Kompetenzbereichen der KMK-Standards für den Mittleren Abschluss und für den Hauptschulabschluss (KMK, 2003, 2004) weist das mathematische Modellieren Verbindungen zu verschiedenen anderen Kompetenzbereichen und Leitideen auf. Vor dem Hintergrund von Ergebnissen, die auf ein vergleichsweise hohes Anforderungsniveau von Modellierungsaufgaben hindeuten (vgl. Blum, 2007), stellt sich die Frage nach Basiskompetenzen von Lernenden in diesem Bereich.

Dabei sollte nach Inhaltsbereichen differenziert werden: Aus dem Bereich der Leitideen „Daten und Zufall" und „Messen" werden daher beispielartig Überlegungen zu Kompetenzmodellen vorgestellt und diskutiert, die auf Erfordernisse des jeweiligen Inhaltsbereichs abgestimmt sind.

Kompetenz „Modellieren" in Verbindung mit verschiedenen Leitideen

Die Kompetenz, Probleme zu lösen, die Schritte des mathematischen Modellierens erfordern, wird verbreitet als ein wesentliches Förderziel des Mathematikunterrichts angesehen (z.B. Blum, 2007; Blomhøj & Jensen, 2003; Maaß, 2006). Dies spiegelt sich auch in den KMK-Standards für den Mittleren Abschluss und für den Hauptschulabschluss (KMK, 2003, 2004) wider, bei denen das Modellieren einer von sechs Bereichen allgemeiner mathematischer Kompetenz ist. Diese Kompetenzen sollen in Verbindung mit verschiedenen Leitideen gefördert werden. Dies bedeutet, dass sich Kompetenzaufbau im Bereich Modellieren nicht etwa beispielsweise nur auf die Leitideen „Messen" oder „funktionaler Zusammenhang" beschränken sollte, für die es bereits zahlreiche unterrichtspraktische Vorschläge gibt (z.B. Greefrath, 2006; Blum & Leiß, 2005). Problemstellungen, die mathematische Modellierungen erfordern, finden sich vielmehr in vielen Anwendungsbereichen der Mathematik, die Verknüpfungen zu mehreren Leitideen einschließen. So hat beispielsweise die Nutzung stochastischer und statistischer Modelle eine zentrale Bedeutung für den Umgang mit Daten und zufallsbehafteten Erscheinungen.

[1] Dieses Forschungsvorhaben wurde vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert (Bew.-Nr. PLI3032).

Dabei zeigt sich, dass Prozesse des Modellierens zwar abstrakt und idealtypisch mit Kreislaufmodellen (Blomhøj & Jensen, 2003; Blum & Leiß, 2005; Maaß, 2006) beschrieben werden können, es ist aber unabhängig von diesen Kreislaufmodellen mit dem Blick auf verschiedene Leitideen zu vermuten, dass das inhaltliche Umfeld Auswirkungen auf die Natur von Denkprozessen des Modellierens haben kann. So könnten beispielsweise inhaltsabhängig Überschneidungen zu anderen Kompetenzbereichen wie dem Problemlösen oder dem Nutzen von Darstellungen (KMK, 2003, 2004) auftreten. Dies kann insbesondere im Hinblick auf das Ziel der Konzeption eines inhaltsübergreifenden Kompetenzmodells des Modellierens Probleme aufwerfen.

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass Kompetenzen des Modellierens entsprechend der verschiedenen in Modellierungskreisläufen beschriebenen Phasen gleichsam in „Unter-Kompetenzen“ zerfallen. Diese sind recht heterogen, denn beispielsweise Fähigkeiten des algorithmischen Anwendens eines mathematischen Modells müssen nicht zwingend mit Fähigkeiten einhergehen, mathematische Ergebnisse vor einem lebensweltlichen Kontext adäquat interpretieren zu können.

Darüber hinaus werfen die oft beobachteten ungeordneten Sprünge zwischen Modellierungsphasen (Blomhøj & Jensen, 2003; Borromeo-Ferri, 2006) weitere Probleme auf. Nicht zuletzt aus diesem Grunde schlagen Blomhøj und Jensen (2003) vor, erst mit dem Vorliegen der Kompetenz, einen ganzen Modellierungskreislauf durchlaufen zu können, von Modellierungskompetenz zu sprechen. Diese Herangehensweise blendet andererseits jedoch Teilkompetenzen des Modellierens, die auch mit anderen Kompetenzbereichen wie dem Verwenden von Darstellungen im Zusammenhang stehen könnten, unter Umständen aus.

Eine Lösungsmöglichkeit könnte es sein, zunächst bezogen auf einzelne Leitideen und Inhaltsbereiche zu überlegen, wie derartige bereichsspezifische Kompetenzen des Modellierens beschrieben werden können.

In diesem Beitrag werden wir uns auf Beispiele im Bereich der Leitideen „Daten und Zufall“ und „Messen“ konzentrieren.

Überlegungen zu einem Kompetenzmodell für das Modellieren im Bereich der Leitidee „Messen“

Wie auch anhand der Beispielaufgaben der KMK-Bildungsstandards deutlich wird, eignen sich Inhalte der Flächen- und Volumenmessung in schulischen Kontexten nicht nur gut, um mit anregenden Aufgaben modellierungsbezogene Lerngelegenheiten zu schaffen, sondern auch, um das Durchlaufen von Modellierungsphasen zu verdeutlichen. Überlegungen zu Kompetenzmodellen des Modellierens in diesem Bereich können sich daher an Kreislaufmodellen orientieren. Um der Schwierigkeit der Heterogenität verschiedener Modellierungsschritte und der Sprünge zwischen diesen zu begegnen, könnte ein Kompetenzmodell orientiert an bestehenden Überlegungen zur Beschreibung von Aufgaben (Neubrand, 2002) die Anzahl von Gedankenschritten und einzubeziehenden Wissenseinheiten als Merkmal für Komplexität heranziehen. Auf diese Weise könnten Merkmale im Zusammenhang mit der mindestens erforderlichen Gedankenschrittanzahl beim Modellieren als ein erstes, grobperspektivisches Kriterium für die Anforderungen eines Modellierungsproblems gesehen werden. In einer feineren, stärker auf Teilkompetenzen fokussierten Herangehensweise können andererseits einzelne Modellierungsschritte betrachtet werden.

Überlegungen zu einem Kompetenzmodell für das Modellieren im Bereich der Leitidee „Daten und Zufall“

Auch für die Beschreibung lebensweltlicher Zusammenhänge, in denen Daten betrachtet werden und in denen eventuell zusätzlich zufällige Streuung oder Unsicherheit in Erscheinung tritt, spielen Fähigkeiten des Modellierens eine wichtige Rolle. Ein Merkmal des Modellierens in diesem Bereich ist, dass Modellierungsprozesse oft stark von der Nutzung von Darstellungen geprägt sein können (vgl. Fröhlich, Kuntze & Lindmeier, 2007). Es bietet sich also an, für den Inhaltsbereich der Statistik Kompetenzen des Modellierens verschränkt mit Kompetenzen des Nutzens von Darstellungen zu betrachten.

Zwei Grundgedanken, die in Kuntze, Lindmeier und Reiss (2008, im Druck) näher ausgeführt werden, können Anforderungen des Nutzens von Darstellungen und Modellen in statistischen Kontexten beschreiben: Einerseits sind Fähigkeiten des Umgangs mit „graphischen Darstellungen von Daten und der Manipulation von Daten durch Reduktion bzw. Raffung“ (vgl. Kröpfl, Peschek, & Schneider, 2000) als Bezugspunkt für Modellierungen von Bedeutung, andererseits bildet das Verständnis für statistische Variabilität („variation“; vgl. Watson et al., 2003) eine Grundlage für viele Modellierungsschritte. Vor diesem Hintergrund schlagen Kuntze, Lindmeier und Reiss (2008, im Druck) ein Kompetenzmodell für die Kompetenz „Nutzen von Darstellungen und Modellen in statistischen Kontexten“ vor, das diese Aspekte berücksichtigt. Dieses Kompetenzmodell konnte empirisch mit dem eindimensionalen Rasch-Modell beschrieben werden (Kuntze, Lindmeier und Reiss, 2008, im Druck).

Zusammenfassung und Ausblick

Bei der Gegenüberstellung dieser beiden Beispiele für Überlegungen zu Kompetenzmodellen des Modellierens in Verbindung mit unterschiedlichen

Leitideen wird deutlich, dass auf diese Weise auf inhaltliche Spezifika der jeweiligen Inhaltsbereiche eingegangen werden kann. Darüber hinaus haben sich die Kompetenzmodelle insbesondere im Bereich Statistik bereits in ersten quantitativen Untersuchungen bestätigt. Gerade für Evaluationsuntersuchungen von Lernumgebungen – und übrigens auch für deren Konzeption – können diese Kompetenzmodelle und die auf deren Basis entwickelten Testinstrumente eine Grundlage darstellen. Solche Untersuchungen werden auch im Projekt KOMMA (Reiss et al., 2007) durchgeführt, an dem über 2000 Schülerinnen und Schüler teilnahmen.

Literatur

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its applications*, 22(3), 123–139.

Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren – zu schwer für Schüler und Lehrer? In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 3–12). Hildesheim: Franzbecker.

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128, 18–21.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für die Didaktik der Mathematik,* 38 (2), 86-93.

Fröhlich, A., Kuntze, S. & Lindmeier, A. (2007). Testentwicklung und -evaluation im Bereich von „Statistical Literacy“. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 783–786). Hildesheim: Franzbecker.

Greefrath, G. (2006). *Modellieren lernen*. Aulis Verlag Deubner, Köln, 2006,

Kröpfl, B., Peschek, W. & Schneider, E. (2000). Stochastik in der Schule: Globale Ideen, lokale Bedeutungen, zentrale Tätigkeiten. mathematica didactica, 23(2), 25-57.

KMK (Kultusministerkonferenz). (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. München: Wolters Kluwer.

KMK (Kultusministerkonferenz). (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss*. München: Wolters Kluwer.

Kuntze, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (2008). “Using models and representations in statistical contexts” as a sub-competency of statistical literacy – Results from three empirical studies. *ICME 11*.

Kuntze, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (im Druck). „Daten und Zufall“ als Leitidee für ein Kompetenzstufenmodell zum „Nutzen von Darstellungen und Modellen“ als Teilkomponente von Statistical Literacy. *Tagungsband 2006/2007 des GDM-Arbeitskreis Stochastik.*

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 115–118.

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen*. Hildesheim: Franzbecker.

Reiss, K., Pekrun, R., Kuntze, S., Lindmeier, A., Nett, U. & Zöttl, L. (2007). KOMMA– ein Projekt zur Entwicklung und Evaluation einer computergestützten Lernumgebung. *GDM-Mitteilungen*, 83, 16-17.

Watson, J.M., Kelly, B.A., Callingham, R.A., & Shaughnessy, J.M. (2003). The Measurement of School Students’ Understanding of Statistical Variation. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 34(1), 1-29.

Sebastian REZAT, Gießen

Das Mathematikbuch als Instrument des Lernens

Trotz der vielfältigen Möglichkeiten, die die neuen Technologien im Mathematikunterricht eröffnen, bleibt die zentrale Rolle des Mathematikbuches als Instrument des Lehrens und Lernens unangetastet: „But despite the obvious powers of the new technology it must be accepted that its role in the vast majority of the world's classrooms pales into insignificance when compared with that of textbooks and other written materials." (Howson 1995, S. 21) Der Einzug der neuen Technologien in den Mathematikunterricht wurde von der mathematikdidaktischen Forschung von Anfang an mit regem Interesse begleitet. Im Zusammenhang mit den neuen Technologien ist es von Anfang an der Schüler, der als Nutzer im Zentrum des Interesses der mathematikdidaktischen Forschung steht. Neue Technologien werden als Instrument betrachtet, die Schüler zum Lernen von Mathematik einsetzen. Die Rolle des Lehrers stand bislang kaum im Zentrum des Interesses.

Ebenso wie die neuen Technologien sind auch Mathematikbücher Instrumente, die Lehrer und Schüler zum Lehren bzw. Lernen von Mathematik einsetzen. Falls die Nutzung des Mathematikbuches überhaupt thematisiert wird, dann ist es – im Unterschied zu den neuen Technologien – bislang die Nutzung durch den Lehrer, die im Zentrum des Interesses der mathematikdidaktischen Forschung steht (vgl. Sträßer im gleichen Tagungsband). Damit einher geht die weit verbreitete Ansicht, dass es der Lehrer ist, der bestimmt, was Schüler in ihrem Mathematikbuch nutzen (vgl. z. B. Pepin & Haggarty 2001). Mathematikbücher sind jedoch gleichzeitig ‚Schülerbücher' (vgl. Sträßer 1979) und werden von den Verlagen auch unter dieser Bezeichnung angeboten. Das Mathematikbuch ist demnach nicht nur ein Instrument des Lehrers, sondern auch und vor allem konzipiert als Instrument des Schülers zum Lernen von Mathematik. Bislang gibt es jedoch kaum empirische Erkenntnisse darüber, wie Schüler das Mathematikbuch zu diesem Zweck einsetzen. Dieses Desiderat bildete den Ausgangspunkt einer qualitativen empirischen Studie an zwei Gymnasien zur Nutzung des Mathematikbuches durch den Schüler. Im Folgenden werden nach einem kurzen Überblick über das Design der Studie einige Ergebnisse vorgestellt.

Design der Studie

Über einen Zeitraum von drei Wochen haben Schüler der Jahrgangsstufen 6 und. 12 zweier verschiedener Gymnasien in Ostwestfalen ihre Nutzung des Mathematikbuches dokumentiert, indem sie die von ihnen genutzten

Stellen mit einem Textmarker in ihrem Mathematikbuch markiert und jeweils den Grund ihrer Nutzung angegeben haben. Parallel dazu wurde der Unterricht in diesen Klassen / Kursen beobachtet, um einerseits die Verwendung des Mathematikbuches durch den Lehrer zu dokumentieren und andererseits – im Sinne der Triangulation – die Nutzung des Mathematikbuches durch die Schüler während des Unterrichts zu beobachten. Im Anschluss an diese Phase der Datenerhebung wurden Leitfadeninterviews mit ausgewählten Schülern zu einigen ihrer Nutzungen durchgeführt.

Die so gewonnenen Daten wurden entsprechend dem Kodierverfahren der Grounded Theory (vgl. z. B. Strauss & Corbin 1996) kodiert und vor dem Hintergrund der ergonomischen Theorie des Instruments (Rabardel 1995) ausgewertet, die bereits gewinnbringend im Zusammenhang mit der Nutzung von neuen Technologien durch Schüler angewendet wurde (vgl. Monaghan 2007).

Typische Verwendungsweisen von Mathematikbüchern durch Schüler

Die Studie zeigt, dass es neben einigen Schülern, die ihr Mathematikbuch genau dann verwenden, wenn der Lehrer es von ihnen verlangt, viele Schüler gibt, die ihr Mathematik darüber hinaus selbstständig nutzen. Diese ‚selbstständigen Nutzer' lassen sich zunächst hinsichtlich der Intentionalität ihrer Nutzung des Mathematikbuches unterscheiden. Einige Schüler lassen in den Kommentaren zu ihrer Nutzung keine Intentionalität erkennen. Typische Schülerkommentare, die auf nicht-intentionale Nutzungen verweisen, sind: ‚aus Langeweile', ‚aus Spaß', ‚aus Interesse'. Häufig nutzen Schüler in diesen Zusammenhängen Abbildungen in den Büchern. Intentionale Nutzungen stehen im Wesentlichen im Zusammenhang mit folgenden Intentionen:

- Das *Bearbeiten von Aufgaben*: Schüler nutzen das Buch, weil sie Hilfe für das Bearbeiten von Aufgaben suchen.
- *Nachschlagen*: Schüler schlagen sowohl während des Unterrichts als auch in anderen Zusammenhängen (z. B. im Zuge der Bearbeitung der Hausaufgaben) Begriffe oder Regeln bzw. Sätze im Buch nach.
- *Ergänzen*: Schüler nutzen das Buch als Ergänzung zum Mathematikunterricht, weil sie z. B. eine Erklärung des Lehrers nicht verstanden haben.
- *Lernen*: Schüler nutzen das Buch zum Lernen in einem weiten Sinne. Alle Kommentare, die auf das Üben, Wiederholen, Nacharbeiten und Lernen von mathematischen Inhalten verweisen, werden dazu

gezählt, ebenso wie das Vorbereiten auf eine Klausur, die in beiden Kursen der Jahrgangsstufe 12 im Anschluss an den Beobachtungszeitraum geschrieben wurde.

- *Antizipieren* und *Nachholen*: Schüler nutzen das Buch auch, um verpassten Unterricht nachzuholen sowie um dem Unterricht durch Vorarbeiten vorzugreifen.

Anhand des zugrunde liegenden Datenmaterials konnte nicht nur ermittelt werden, dass Schüler ihr Mathematikbuch selbstständig mit diesen Intentionen nutzen, sondern auch, wie sie das Buch jeweils verwenden.

Im Zusammenhang mit dem *Bearbeiten von Aufgaben* lassen sich zwei Vorgehensweisen unterscheiden: Das *regelorientierte* Bearbeiten von Aufgaben und das *beispielorientierte* Bearbeiten von Aufgaben. Beim regelorientierten Bearbeiten von Aufgaben nutzen Schüler vornehmlich Kästen mit Merkwissen als Hilfe. Entsprechend verwenden sie beim beispielorientierten Bearbeiten von Aufgaben Musterbeispiele bzw. Aufgaben mit Lösungen.

Beim *Nachschlagen* lassen sich 4 unterschiedliche Vorgehensweisen der Schüler unterscheiden:

- Beim *lexikalischen Nachschlagen* verwenden die Schüler das Inhalts- oder Stichwortverzeichnis, um auf die gesuchte Information zuzugreifen.
- Beim *kastenorientierten Nachschlagen* blättern Schüler im Mathematikbuch und lesen selektiv nur die Kästen mit Merkwissen, die in der Umgebung des relevanten Themas stehen.
- Beim *überschriftenorientierten Nachschlagen* suchen die Schüler die Überschrift des relevanten Themas und lesen auf der (Doppel-)Seite, wo die Überschrift zu finden ist. Insbesondere scheinen sie nicht umzublättern, selbst wenn das Thema auf der nächsten Seite fortgesetzt wird.
- Beim *korrespondenzorientierten Nachschlagen* suchen die Schüler durch Blättern im Buch nach einem Stichwort, einer Formulierung oder einer Abbildung, die im jeweiligen Kontext relevant ist und lesen dann von dort linear im Buch weiter.

Beim *Lernen* kann grundsätzlich zwischen dem Lernen anhand von Aufgaben und dem Lernen anhand von inhaltsdarbietenden Elementen des Mathematikbuches unterschieden werden. Schüler wählen dazu entweder Teile aus, die ihnen der Lehrer speziell zu diesem Zweck empfohlen hat oder treffen die Wahl selbstständig. Bei der selbstständigen Auswahl gehen Schüler so vor, dass sie Aufgaben oder inhaltsvermittelnde Elemente auswählen, die im direkten Umfeld von Aufgaben stehen, die im Zusammenhang mit dem Unterricht bearbeitet wurden. Nur vereinzelt konnte die Nutzung von Elementen beobachtet werden, die zum selbstständigen Üben für Schüler in den neueren Mathematikbüchern zu finden sind. Ein anderes Vorgehen ist das *Regellernen*, bei dem Schüler selektiv die Kästen mit Merkwissen lesen, um die ‚Regeln' zu lernen. Neben diesen Verwendungsweisen, zeigt sich aber auch, dass Schüler Elemente zum Lernen inhaltsspezifisch auswählen.

Fazit

Die vielfältigen Nutzungsweisen des Mathematikbuches durch Schüler belegen, dass das Mathematikbuch als ‚Schülerbuch' verwendet wird. Gleichzeitig wird aber deutlich, dass sich die selbstständigen Nutzungen der Schüler z. B. bei der Auswahl von Aufgaben zum Üben maßgeblich an lehrervermittelten Nutzungen orientieren. Ein besseres Verständnis der Nutzung des Mathematikbuches durch Schüler kann damit auch zu einem bewussterem Einsatz des Mathematikbuches beim Lehren von Mathematik führen, indem z. B. typische Verwendungsweisen durch die Schüler bei der Verwendung durch den Lehrer mitberücksichtigt werden.

Literatur

Howson, G. [1995]: Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts. Vancouver: Pacific Educational Press.

Monaghan, J. [2007]: Computer Algebra, Instrumentation and the Anthropological Approach. In: *International Journal for Technology in Mathematics Education, 14*(2007)2, 63-71.

Pepin, B. & Haggarty, L. [2001]: Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *33*(2001)5, 158-175.

Rabardel, P. [1995]: Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains. Abgerufen am 02.01.2008 von http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act_group=1.

Sträßer, R. [1979]: Schülerbücher. In: D. Volk (Hg.): *Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht*. München: Fink.

Strauss, A. & Corbin, J. [1996]: Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung. Weinheim: Beltz.

Christina ROECKERATH

Wechselwirkung von Populationen in einem begrenzten Lebensraum Modellierung, Simulation und mathematische Analyse im Unterricht

Die Notwendigkeit von Modellierung im Mathematikunterricht ist in der fachdidaktischen Diskussion unumstritten. Dennoch besteht zurzeit noch ein großer Mangel an geeignetem Unterrichtsmaterial.

Im Rahmen des Vortrags wird ein Modell aus der Biologie vorgestellt, das für Schülerinnen und Schüler zugänglich ist ohne dabei auf Authentizität und Relevanz zu verzichten. Es handelt sich um ein dynamisches, computergestütztes Simulationswerkzeug, das auf der Basis eines einfachen Konzeptmodells die Entwicklung von Populationen abbildet und die Herleitung einer mathematischen Beschreibung ermöglicht. Es kann somit sowohl im Biologie- als auch im Mathematikunterricht eingesetzt werden.

Das reale System

Betrachtet werden zwei Arten, die einen gemeinsamen, beschränkten Lebensraum bewohnen. Die Individuen einer Art treten untereinander und zu Individuen der anderen Art in Wechselwirkung. Diese Phänomene bezeichnet man als intra- bzw. interspezifische Wechselbeziehungen. Beispiele dafür sind Konkurrenzverhalten um Ressourcen oder Lebensraum, wie es bei Nahrungskonkurrenz und Revierverhalten der Fall ist. Die Interaktion zwischen den Arten kann hemmend oder fördernd auf das jeweilige Wachstum wirken, wie es bei Räuber-Beute oder symbiotischen Systemen der Fall ist. Wesentlich ist, dass die intra- und interspezifischen Wechselbeziehungen und die Beschaffenheit des Lebensraumes die Entwicklung der einzelnen Arten bestimmen.

Vom realen System zum Konzeptmodell

Wir wählen ein einfaches Konzeptmodell, das durchaus auch für Schüler unterer Jahrgangstufen nachvollziehbar ist. Der Lebensraum wird auf ein Feld mit einer festen Anzahl von Kästchen abgebildet. Jedes Kästchen steht für einen klar abgrenzbaren Bereich des Lebensraumes und der darin vorhandenen Nahrungsressourcen. Jedes Individuum, welches sich in einem solchen Bereich des Lebensraums befindet, wird im Modell durch einen je nach Spezies gefärbten Punkt im entsprechenden Kästchen dargestellt. Die Bereiche sind so gewählt, dass Individuen, die sich gemeinsam in einem Bereich befinden, interagieren.

Wir betrachten hier die Entwicklung der beiden Arten von Generation zu Generation. Dazu wird die Entwicklung des realen Systems auf diskrete Zeitpunkte abgebildet. Zur Vereinfachung nehmen wir eine separierte Generationenabfolge an, wie sie bei einjährigen Pflanzen und Insekten zu beobachten ist.

Vom Konzeptmodell zum stochastischen Modell

Zur Realisierung des Konzeptmodells als stochastischer Prozess wurde ein computergestütztes Werkzeug entwickelt, das Basistool, mit dem die Schüler die Wechselbeziehungen selbstständig modellieren können.

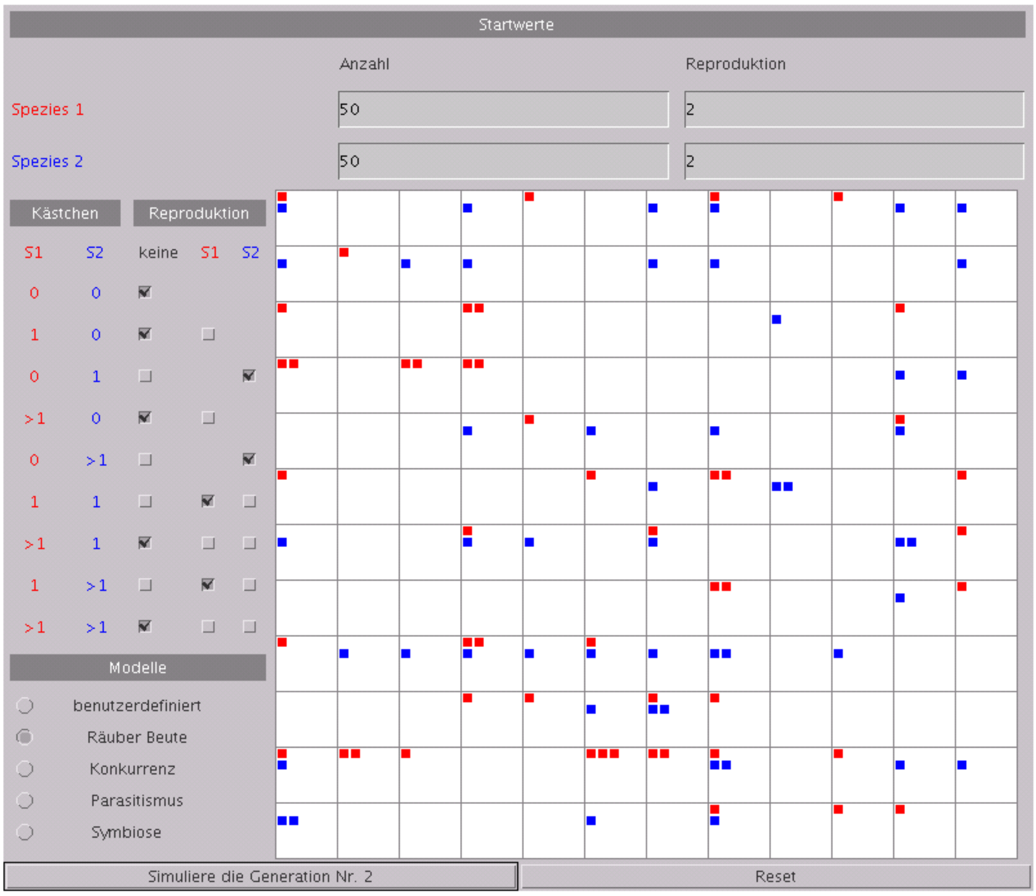


Abbildung 1: Das Basistool

In Abbildung 1 ist die graphische Oberfläche des Basistools dargestellt. Im oberen Bereich können die Schüler die Startgröße der Populationen und die jeweilige Anzahl der direkten Nachkommen eines reproduktionsfähigen Individuums eingeben. Im linken Teil kann die intra- und interspezifische Wechselbeziehung der Arten festgelegt werden. Vordefiniert sind Räuber-

Beute-, Konkurrenz-, Parasitismus- und Symbiose-Beziehungen. Wie in Abbildung 1 dargestellt, wird beim Starten der Simulation die eingegebene Anzahl an Individuuen zufällig auf dem Feld verteilt. Das Programm wertet die Situation kästchenweise entsprechend der durch die Schüler festgelegten Wechselbeziehung aus und bestimmt somit die Individuenanzahlen der beiden Arten für die nächste Generation.

In Abbildung 1 wird exemplarisch die Simulation einer Räuber-Beute-Beziehung dargestellt. Die Art, in der die Wechselbeziehung festgelegt wurde, ist im linken Bereich ablesbar. Die in rot dargestellte Spezies 1 steht für die räuberische Population. Die Beutetiere werden durch die blau dargestellte Spezies 2 abgebildet. Ein Räuber braucht Beute, um nicht zu sterben und sich reproduzieren zu können. Beutetiere können sich nur reproduzieren, wenn kein Räuber sie frisst. Pro Kästchen sind dabei allerdings nur genug Nahrungsressourcen für die Reproduktion eines Beutetiers vorhanden. Befinden sich mehrere Räuber in einem Kästchen, so löst das aufgrund von Revierverhalten Stress bei den Tieren aus, sodass keine Reproduktion stattfindet.

Vom stochastischen zum deterministischen Modell

Das Basistool bietet eine Grundlage, um auf für Schüler gut verständliche Weise eine mathematische Beschreibung für den simulierten Prozess zu entwickeln. Die Anzahlen der Individuen zum Zeitpunkt t seien mit $S_1(t)$ und $S_2(t)$ bezeichnet. Aufgrund der separierten Generationenabfolge, hängt die Änderung der Individuenanzahlen vom Zeitschritt t zum Zeitschritt t+1 ausschließlich von der Reproduktion ab. Die Reproduktionsfunktionen $R_1(S_1, S_2)$ und $R_2(S_1, S_2)$ geben an, wie viele Individuen reproduktionsfähig sind, wenn sich S_1 Individuen der einen und S_2 Individuen der anderen Spezies zufällig auf dem Feld verteilen. Die Anzahl der Nachkommen je reproduktionsfähigem Individuum seinen durch r_1 für die Spezies 1 und r_2 für die Spezies 2 angegeben. Die Individuuenanzahlen der einzelnen Spezies zum Zeitpunkt t+1 ergeben sich aus deren Reproduktion zum Zeitpunkt t. Mit den Reproduktionsfunktionen kann eine mathematische Beschreibung der Entwicklung der beiden Arten durch die Differenzengleichungen

$$S_1(t+1) = r_1 \ R_1(S_1(t), S_2(t))$$

$$S_2(t+1) = r_2 \ R_2(S_1(t), S_2(t))$$

angegeben werden.

Eine für Schüler nachvollziehbare Herleitung der Reproduktionsfunktion kann auf dem Wege der Simulation durchgeführt werden. Dazu wurde ein weiteres computergestütztes Werkzeug entwickelt, welches für eine Spezies die Simulation der Reproduktionen bei einer festen Individuenanzahl der einen Spezies und einer variablen Individueenanzahl der andere Spezies durchführt und die resultierende Anzahl an reproduktionsfähigen Individuuen in einem Koordinatensystem darstellt. Die enstehenden Graphen nähern die Reproduktionsfunktionen an. Schüler können hier mit diversen bekannten Ansätzen eine passende Funktion finden. Auf einem eher universitären Niveau lässt sich eine Herleitung der Reproduktionsfunktion mit Mitteln der Stochastik durchführen.

Prognosen für das reale System durch die Modelle

Ein gutes Modell liefert Prognosen für das modellierte reale System.

Viele Bi-Systeme entwickeln sich bei unveränderten äußeren Einflüssen im Verlaufe der Zeit über verschiedene Stadien hin zu einem relativ stabilen Endzustand, dem Klimaxstadium.

Das entwickelte Modell bildet diese Phänomene der Realität ab. Zur besseren Anschauung dieser Tatsache dient das Langzeittool, welches die Entwicklung der Arten über einen längeren Zeitraum darstellt. Für jede Generation wird die aus der Simulation resultierende Individuenanzahl der Spezies als Punkt in ein Koordinatensystem eingetragen. Dies liefert eine anschauliche Darstellung der Langzeitentwicklung der beiden Arten.

Neben dem Langzeittool können Schüler die selbstentwickelte mathematische Beschreibung zur Herleitung von Aussagen über das reale System nutzen. Zum Beispiel weisen mittels Grenzwertbetrachtungen erhaltene Annäherungen an stationäre oder periodische Punkte auf Klimaxstadien hin.

Einsatz im Unterricht

Die vorgestellten Modellierungswerkzeuge lassen sich vielfältig im Mathematik- und auch im Biologieunterricht einsetzen. Sie stellen fächerübergreifendes, anwendungsbezogenes Unterrichtsmaterial dar, das - je nachdem wie weit in die mathematische Analyse eingedrungen wird - in sämtlichen Jahrgangstufen des Gymnasiums wie auch an der Universität sinnstiftend und altersgemäß eingesetzt werden kann.

Bettina RÖSKEN, Universität Duisburg-Essen

Zu innovativen Aspekten von Lehrerfortbildung

Professionalisierung von Lehrenden ist einerseits lebenslanges, in den Alltag des Berufes eingebettetes Lernen, als auch andererseits mit bildungspolitischen Anforderungen belegt. Eine besondere Herausforderung bei der Implementierung von Lehrerfortbildungsangeboten liegt somit darin, die Bedürfnisse der Lehrenden und diejenigen des Systems zu balancieren. Als ein erfolgreicher Zugang hat sich im Verlauf des Projektes „Mathematik Anders Machen“ - einer bundesweiten Initiative zur Mathematiklehrerfortbildung - erwiesen, in besonderer Weise Lehrende, als eigenverantwortlich in die Planung Ihrer Lernprozesse zu integrieren.

„Instead of teaching, I told stories. Anything to keep them quite and in their seats. They thought I was teaching. I thought I was teaching. I was learning“. Mit diesen Worten weist Frank McCourt in dem Buch *Teacher Man*, in welchem er eindrucksvoll seine Erlebnisse an einer New Yorker Highschool beschreibt, auf einen Dualismus von Lehren und Lernen hin. Diesem Aspekt trägt auch Tenorth (2007) Rechnung, wenn er formuliert „Fortbildung, das ist für mich zunächst nur ein anderer Name für den Alltag des Berufs [...]“. Damit ist zu beachten, dass alle Fortbildungsangebote in einen fortlaufenden Lernprozess implementiert werden (Guskey, 2000).

Eine sich ständig verändernde Schullandschaft zwingt jedoch auch Veränderung von außen auf. Insbesondere ist aktuell eine außerordentliche Bewegung durch bildungspolitische Reformen zu konstatieren, die durch Schlagwörter wie Bildungsstandards, Schulzeitverkürzung, zentrale Abschlussarbeiten und Zentralabitur umrissen werden können. Hiermit einher gehen auch neue Anforderungen an Lehrende, denen eine Schlüsselrolle in jedem Neuordnungsprozess zukommt. Somit bewegt sich Lehrerfortbildung zunächst in einem Spannungsfeld zwischen den Bedürfnissen der Lehrenden und bildungspolitischen Anforderungen. Lehrerfortbildungsangebote, die einer „Top-down“- Implementierung entsprechen, sind einfach zu initiieren, tragen aber immer die Gefahr, dass sie die Bedürfnisse der beteiligten Akteure nicht sensibel balancieren.

Professionalisierung von Lehrenden

In der internationalen Literatur wird Lehrerfortbildung zunächst in einem größeren Zusammenhang unter *Professional Development* diskutiert. Im Wesentlichen sind dementsprechende Ansätze von zwei verschiedenen Philosophien geprägt, die wie folgt umrissen werden können. Zum einen dient Lehrerfortbildung dem unmittelbaren Krisenmanagement und zielt ab auf das Ausgleichen von Defiziten an Wissen und Fähigkeiten (Posch, 1998). Zum anderen wird Lehrerfortbildung als „Empowering“ von Lehrenden verstanden, dabei steuern diese ihre Lernprozesse ausgehend von ihren Stärken und Qualitäten weitestgehend selbst (Clarke & Hollingworth, 2002). Diese Philosophien finden Ausdruck in verschieden Ansätzen zur Professionalisierung. Dabei sind traditionelle Ansätze eher durch einen starken inhaltlichen Fokus bei festem Rahmen und engen Zielen geprägt. Sie basieren auf Wissen von außen (Krainer, 1996) oder in der Terminologie von Cochran-Smith and Lytle (1999) auf *Knowledge-for-Praxis.* Dahingegen sind innovative Ansätze sensitiv für die Bedürfnisse der Lehrenden, adressieren Gruppen von Lehrenden und sind von der Gesamtkonzeption, wie Ann Lieberman auf einer Tagung zur Professionalisierung von Lehrenden so treffend formulierte, nicht vom Typ *either/or*, sondern *both/and*. Wiederum der Konzeption von Cochran-Smith and Lytle (1999) folgend, wird die Relation von Theorie und Praxis solcher Ansätze durch das Konstrukt *Knowledge-of-Practice* beschrieben. Dabei bieten theoretische Aspekte sowohl einen Reflexionsrahmen als auch einen interpretativen Hintergrund für die in der Praxis erlebten Phänomene.

Das Projekt *„Mathematik Anders Machen“*

„Mathematik Anders Machen[1]*“* ist eine bundesweite Initiative zur Lehrerfortbildung in Mathematik, die ein breites Kursangebot aus bereits bestehenden sowie neuen, nach den Wünschen der Lehrenden konzipierten, Angeboten bereithält.

Ein besonderes Anliegen der Initiative ist es, den Bedarf der Lehrenden zu identifizieren, um entsprechende Angebote leisten zu können. Vor dem Projektstart wurde aufgrund dessen eine breit angelegte Befragung durchgeführt, die zu zahlreichen Erkenntnissen hinsichtlich Themen und Konditionen von Lehrerfortbildung führte (Jäger & Bodensohn, 2007); komplementiert werden diese Daten durch weitere Interviews und Gespräche mit Lehrenden (Rösken, in Vorbereitung).

Das Kursangebot von *„Mathematik Anders Machen“* reicht von Kursen *à la carte* zu Kursen *on demand*. Zum Projektstart im Januar 2007 konnte bereits ein breites Kursspektrum auf der Projekthomepage angeboten wer-

---

[1] Projektleiter sind Prof. Dr. Jürg Kramer, Humboldt-Universität zu Berlin und Prof. Dr. Günter Törner, Universität Duisburg-Essen, gefördert wird die Initiative von der Deutsche Telekom Stiftung.

den, in welchem insbesondere auf die Expertise unserer fachdidaktischen Kolleginnen und Kollegen zurückgriffen werden konnte. Mittlerweile sind bundesweit 36 Kurse zu fachlich-fachdidaktischen, pädagogisch-methodischen als auch internationalen Themen im Angebot. Damit können Lehrende auch auf Fortbildungen zugreifen, die bisher in ihrer Region nicht verfügbar waren. Das Projekt ermöglicht aber auch, innovative Fortbildungskonzepte aufzugreifen, wie beispielsweise den „blended-learning“ – Ansatz zu polyvalenten Aufgaben (vgl. Sill und Hellmig, in diesem Band). Neben diesen Kursangeboten können Lehrerinnen und Lehrer darüber hinaus eigene Fortbildungswünsche benennen, zu denen ihnen dann geeignete Referenten an die Seite gestellt werden. Das langfristige Ziel bei der Bearbeitung dieser besonderen Anfragen liegt darin, zu verschiedenen Themen ein Expertennetz aufzubauen.

Alle Kurse werden von einem Referententandem, bestehend aus einem Hochschullehrenden und einem Schullehrenden, angeboten, so dass bereits bei der ersten Konzeption des Kurses Theorie und Praxis verbunden sind. Die Fortbildungen können von mindestens 15 Fachkolleginnen –und kole einer Schule oder benachbarter Schulen bestellt werden, dabei gewährleistet ein Lehrer die Organisation der Fortbildung vor Ort. Das Kursmaterial wird auf der Homepage als *open access* angeboten. Alle Kurse werden evaluiert, zu drei verschiedenen Terminen für die Teilnehmenden und zu zwei verschiedenen Terminen für die Referenten. Dabei werden insbesondere die Referenten aktiv in den Evaluationsprozess einbezogen, indem sie für Ihren Kurs 10 Lernziele formulieren.

Diskussion

Mittlerweile blicken wir auf 54 durchgeführte Kurse zurück, weitere 21 sind terminiert und 26 in Vorbereitung. Es besteht eine hohe Nachfrage nach Kursen von Lehrenden aus allen Schulstufen. Erste Evaluationsergebnisse belegen, dass die Kurse sehr gut angenommen werden und den Erwartungen der Lehrerinnen und Lehrer gerecht werden. Von wissenschaftlicher Seite herausfordernd sind dabei Kurse *on demand*, die viele Arbeitsschritte initiieren, bis der letztlich konzipierte Kurs dann wiederum anderen Gruppen von Lehrenden auf der Homepage zur Verfügung gestellt werden kann.

Als erstes wichtiges und umfassendes Fazit lässt sich konstatieren, dass auch wir Teil eines lernenden Systems sind, in dem Sinne, dass das Projekt sich mit den Herausforderungen, die nicht nur von Lehrerseite an uns herangetragen werden, ständig weiter entwickelt. Als besonders wichtig hat sich dabei erwiesen, eine gewisse Flexibilität bereit zu halten, um auf die unterschiedlichsten Bedürfnisse der Lehrerinnen und Lehrer entsprechend reagieren zu können. Erfolgreiche Lehrerfortbildung erweist sich dabei als Zusammenspiel verschiedenster Faktoren, die in unterschiedlicher Stärke zusammenwirken und unter denen insbesondere „softe" Faktoren, wie Akzeptanz und Wertschätzung sowie Umgebungsvariablen, als bedeutend ausgemacht werden können (vgl. Rösken, in Vorbereitung).

Literatur

Clarke, D. & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education* 18, 947-967.

Cochran-Smith, M. & Lytle, S. (1999). Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. *Review of Research in Education, 24* (2), 251-307.

Guskey, T. R. (2000). *Evaluating Professional Development*. Thousand Oaks: Corwin Press.

Jäger, R. S. & Bodensohn, R. (2006). *Die Situation der Lehrerfortbildung im Fach Mathematik aus Sicht der Lehrkräfte. Ergebnisse einer Befragung von Mathematiklehrern.* Available: http://www.schule-interaktiv.de/backstage/schule-MAM/documentpool/17_01_07_mathematiklehrerbefragung.pdf. [23.12.2007].

Krainer, K. (1996). Probleme und Perspektiven der Lehrerfortbildung. In G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz & E. Schneider (Eds.), Schriftenreihe der Mathematik: Bd. 23. *Trends und Perspektiven: Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur "Didaktik der Mathematik" in Klagenfurt vom 26.-30.9.1994* (S. 205-230). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Posch, P. (1998). Zur 'Philosophie des Lehrerfortbildungsprogramms Pädagogik und Fachdidaktik für LehrerInnen'. In *Schulinnovationen – Naturwissenschaft im Unterricht*, April 1998. Klagenfurt: Interuniversitäres Institut für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung (IFF).

Rösken, B. (in Vorbereitung). Hidden dimensions in the Professional Development of Mathematics Teachers – Giving Agency to the Teachers.

Tenorth, E. (2007). *Lehrer wird man im Job und ein guter Lehrer durch Fortbildung im Beruf.* http://www.mathematik-anders-machen.de/index2.html, [21.02.2007].

Katrin ROLKA, Dortmund

„Bei kleineren Zahlen kann alles kommen" – Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zum Gesetz der großen Zahlen

In der Stochastik spielen Daten und Zufall eine wichtige Rolle, womit durchaus eine gewisse Unsicherheit verbunden ist. Herget (1997) formuliert überspitzt: „„[…] fast sieht es so aus, als wäre nur eines wirklich ganz sicher: In der Stochastik ist nichts wirklich sicher!" (S. 8). Demgegenüber charakterisiert Hefendehl-Hebeker (2003) Stochastik als „Modellierung zufallsabhängiger Phänomene in der Sprache der Mathematik" (S. 22). Diese beiden Positionen lassen sich durch folgende Frage verbinden: *Wie kann man den Zufall in den Griff bekommen?* Diese Frage geht auf Büchter et al. (2005) zurück und war leitend für die Entwicklung einer Lernumgebung im Rahmen des Projektes KOSIMA.[1] Die hier vorgestellten Ergebnisse sind Teil einer größeren Studie, in der die Erprobung der Lernumgebung im Mittelpunkt stand. Insbesondere ging es dabei um die Frage, wie sich stochastische Vorstellungen bei Schülerinnen und Schülern entwickeln.

1. Theoretischer Hintergrund

In Anlehnung an Büchter et al. (2005) sind mit Vorstellungen „individuelle Gedanken, „Bilder", Meinungen oder Verständnisse über mathematische Inhalte oder bestimmte mathematische Situationen" (S. 2) gemeint. Diese weit gefasste Beschreibung beinhaltet sowohl vorunterrichtliche als auch fachlich tragfähige Vorstellungen. Das Interesse an stochastischen Vorstellungen besteht bereits seit mehr als 30 Jahren. Fischbein (1975) unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen „primären" und „sekundären Intuitionen". Primäre Intuitionen bezeichnen die Vorstellungen, die sich bei Schülerinnen und Schülern ohne systematische Instruktion entwickeln. Diese werden vielfach nicht reflektiert und sind dementsprechend teilweise fachlich nicht tragfähig. Lange bevor Schülerinnen und Schüler eine systematische Reflexion im Unterricht erleben, haben sie bereits vielfältige Erfahrungen mit Zufallsphänomenen im Alltag gesammelt (Büchter et al., 2005). Die sekundären Intuitionen umfassen die fachlich tragfähigen und erwünschten Vorstellungen, die durch Instruktion bei den Schülerinnen und Schülern entstehen sollen.

---

[1] KOSIMA ist ein langfristig angelegtes Forschungs- und Entwicklungsprojekt für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I unter der Leitung von Bärbel Barzel, Stephan Hußmann, Timo Leuders und Susanne Prediger (vgl. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/kosima/).

Es ist vielfach beobachtet worden, dass sich vorunterrichtliche und tragfähige Vorstellungen konträr gegenüberstehen (Duit & von Rhöneck, 1996; Prediger, 2005). Im Sinne konstruktivistischer Annahmen, dass sich Lernen immer auf der Basis bereits vorhandener kognitiver Strukturen vollzieht, kommt den vorunterrichtlichen Vorstellungen eine besondere Rolle zu. Es gilt, diese aufzugreifen und daran anzuknüpfen, so dass sie um fachlich tragfähige Vorstellungen erweitert und bereichert werden können.

In der Stochastik ist eine oftmals berichtete Vorstellung im „Gesetz der kleinen Zahlen" zu finden (Tversky & Kahneman, 1973). Das empirische Gesetz der großen Zahlen besagt, dass sich die relativen Häufigkeiten von Ereignissen bei langen Versuchsreihen um feste Werte stabilisieren. Demgegenüber steht der Wunsch, auch Einzelereignisse vorhersagen zu können (Konold, 1989). Auf kurze Sicht kann jedoch im Sinne des Gesetzes der großen Zahlen keine Aussage gemacht werden, während auf lange Sicht die Aussagekraft dieses Gesetzes zum Ausdruck kommt. Hefendehl-Hebeker (2003) formuliert diesen Gegensatz treffend:

> „Der Zufall ist im Einzelfall nicht kalkulierbar. Auf lange Sicht hat er jedoch in gewissem Sinn Methode. Diese Einschätzung zu präzisieren gehört zu den Aufgaben einer Einführung in die Stochastik." (S. 13)

Mit der Unterscheidung zwischen kurzer und langer Sicht kann demnach die eingangs gestellte Frage beantwortet werden: Auf lange Sicht ist es möglich, den Zufall in den Griff zu bekommen.

2. Studie

Ziel der Lernumgebung ist es, Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufen 5 bzw. 6 die Möglichkeit zu geben, systematische Erfahrungen mit den Gesetzmäßigkeiten des Zufalls zu sammeln (Hußmann & Prediger, im Druck). Die hier vorgestellten Ergebnisse stammen aus videodokumentierten Einzelinterviews, die ca. 12 Wochen nach Ende der Erprobung der Lernumgebung durchgeführt wurden. Dabei wurden den Schülerinnen und Schülern Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung vorgelegt, von denen hier eine exemplarisch vorgestellt wird (vgl. Abb. 1).

Da ein 20er-Farbwürfel Bestandteil des Spiels war und im Rahmen der Lernumgebung ebenfalls Diagramme wie in Abb. 1 eingesetzt wurden, sind die Schülerinnen und Schüler mit der Art der Aufgabenstellung vertraut.

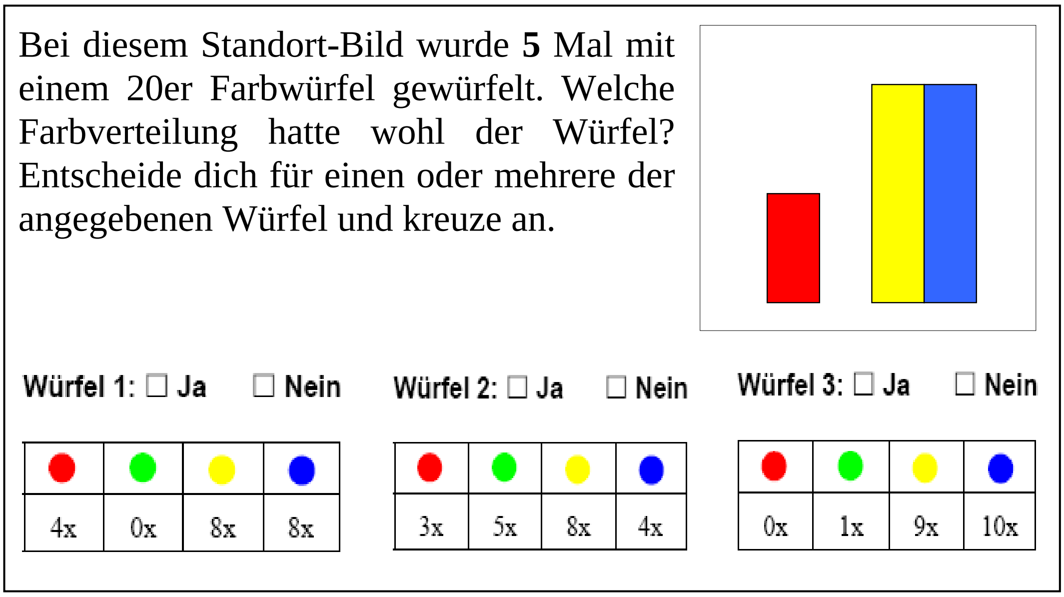


Abb. 1: Beispielaufgabe

Würfel 1 zeigt die Farbverteilung, die mit großer Wahrscheinlichkeit bei einer hohen Anzahl von Würfen gemäß der theoretischen Wahrscheinlichkeit zu dem abgebildeten Diagramm führt. Während Würfel 3 unmittelbar ausgeschlossen werden kann, ist die Entscheidung bei Würfel 2 nicht ganz offensichtlich. Allerdings kann auch dieser Würfel aufgrund der niedrigen Wurfzahl zu dem dargestellten Diagramm geführt haben.

3. Ergebnisse

Von den 12 durchgeführten Einzelinterviews kann aus Platzgründen lediglich ein kleiner Interviewausschnitt präsentiert werden:

I: Du kannst mir ja mal sagen, was du denkst, welcher Würfel es war oder vielleicht waren es auch mehrere.

S: Mhm, also ich denk, die ähm, die Nummer Eins, also hier die [zeigt auf Würfel 1].

I: Mhm, warum?

S: Weil das ziemlich gut passen würde, […]. Bei den anderen da wäre das unlogisch, […] also kann ich nicht genau sagen. Weil bei kleineren Zahlen haben wir ja, haben wir gelernt, dass bei kleineren Zahlen, da ist dann, also kann alles kommen, da kann dann auch, wenn nur ein Gelber ist, dann kann da nur ein Gelber kommen zum Beispiel, da, aber bei größeren Zahlen, wenn ich jetzt irgendwie fünfzig habe, von denen nehmen würde, dann wäre auf jeden Fall Rot, ach ähm Blau und Gelb wäre, also würde dann am meisten gewählt werden, aber also bei so wenigen, fünf, kann eigentlich jede Zahl vorkommen.

Die Ausführungen des Schülers in dem kurzen Transkriptausschnitt verdeutlichen, dass er stark um die sprachliche Formulierung seiner Ideen ringt. Die Aussage „bei kleineren Zahlen kann alles kommen“ wird zunächst ergänzt durch den kontrastierenden Verweis auf 50 als größere Zahl. Schließlich gelingt es ihm auch zu äußern, dass eine Unterscheidung zwischen einer kleinen und einer großen Anzahl von Durchführungen notwendig ist, um eine Aussage über den zugrunde liegenden Würfel machen zu können – wenngleich er in diesem Ausschnitt 50 als große Zahl bezeichnet.

4. Fazit

Der Beitrag sensibilisiert für Schwierigkeiten bei der Durchdringung des Gesetzes der großen Zahlen. Dabei stellt die Unterscheidung zwischen kurzer und langer Sicht auf verschiedenen Ebenen eine Herausforderung für Schülerinnen und Schüler dar. Auf der inhaltlichen Ebene betrifft dies die Tendenz, die Ergebnisse langer Versuchsreihen auch auf kurze übertragen zu wollen (Konold, 1989), auf der sprachlichen Ebene die Ausformulierung der Ideen. Unterstützend wirken dabei vielfältige Erfahrungen, die Schülerinnen und Schüler in systematischer Weise mit Zufallsphänomenen sammeln und reflektieren.

Literatur

Büchter, A., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2005). Den Zufall im Griff? – Stochastische Vorstellungen fördern. *Praxis der Mathematik in der Schule 47*(4), 1-7.

Duit, R. & von Rhöneck, C. (1996) (Hrsg.). *Lernen in den Naturwissenschaften.* Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel: Dordrecht & Boston.

Hefendehl-Hebeker, L. (2003). *Didaktik der Stochastik I – Wahrscheinlichkeits-rechnung.* Vorlesungsausarbeitung: Duisburg.

Herget, W. (1997). Wahrscheinlich? Zufall? Wahrscheinlich Zufall…. *mathematik lehren 85*, 4-8.

Hußmann, S. & Prediger, S. (im Druck). Je größer die Wurfzahl, desto sicherer die Wette. Wettkönig spielen – Den Zufall auf lange Sicht verstehen. *Praxis der Mathematik in der Schule*.

Konold, C. (1989) Informal conceptions on probability. Cognition and Instruction 6(1), 59-98.

Prediger, S. (2005). Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen. Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *mathematica didactica 28*(2), 23-47.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, 76, 105-110.

Jürgen ROTH, Würzburg

Konkrete Kunst analysieren und gestalten – Mathematik fächerverbindend unterrichten

Schülerinnen und Schüler sollen die Erfahrung machen, dass Mathematik im Alltag vorkommt. Dies kann z. B. dadurch ermöglichet werden, dass man sie immer wieder in unerwarteten Zusammenhängen mathematische Aspekte entdecken und mathematisch argumentieren lässt. Visualisierungen sind einerseits *das* Thema der bildenden Kunst und andererseits, aus didaktischer Perspektive betrachtet, wichtig für Lernprozesse. Sie sind oft ansprechend und damit potentiell motivierend, erleichtern die Fokussierung auf (geometrische) Strukturen und haben das Potential als Verständnisgrundlagen für mathematische Zusammenhänge zu fungieren. Visualisierungen und deren Analyse sind also ein guter Ansatzpunkt für eine fächerverbindende Zusammenarbeit zwischen Kunst- und Mathematikunterricht.

1 Konkrete Kunst analysieren

In der Konkreten Kunst spielen insbesondere Visualisierungen von *mathematischen* Ideen eine große Rolle. Deshalb findet man hier sehr leicht Kunstwerke, die sich zur mathematischen Analyse eignen. Im Folgenden erläutere ich an konkreten Beispielen, wie man dadurch Inhalte zu den Leitideen „Messen" sowie „Raum und Form" der KMK-Bildungsstandards[1] erarbeiten und Verständnis fördern kann.

Mit Hilfe von offenen Aufgaben können sich Schülerinnen und Schüler wesentliche Aspekte des Messens von Flächeninhalten z. B. anhand des Kunstwerks „Konstruktion um das Thema 3:4:5" von Max Bill (vgl. Abb. 1) selbstständig erarbeiten.[2] Die Aufgabe „Finde soviel Quadrattypen wie möglich." führt (wenn man von der Farbgebung absieht) zu einem ersten Vergleich der vorkommenden Quadrate, z. B. anhand ihrer Kantenlängen. „Mit welchen Quadrattypen lässt sich das Kunstwerk auslegen?" Hier werden erste Erfahrungen mit dem für das Messen zentralen Aspekt des Auslegens mit einer Einheit gesammelt (vgl. Abb. 2). Dabei wird deutlich, dass das Bild nicht mit jedem kleineren Quadrat ausgelegt werden kann. Diese Erkenntnis lenkt den Blick auf die Frage der Teilbarkeit. Durch den Auftrag, das mittlere weiße Quadrat bzgl. des Flächeninhalts mit einem der grauen rechtwinkligen Dreiecke zu vergleichen, setzen sich die Schülerin-

[1] Vgl. Kultusministerkonferenz (2004)
[2] EUKLID DynaGeo-Applets zu allen beschriebenen Kunstwerken findet man im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de/dynageo/kunst/.

nen und Schüler implizit mit dem direkten und dem indirekten Vergleich auseinander. Mögliche Zugänge zu diesem Problem sind in Abb. 3 angedeutet. Eine Auseinandersetzung mit dem Titel des Bildes kann den Satz des Pythagoras als Flächensatz in den Blick rücken (vgl. Abb. 4). Dadurch kann auch die Bildkomposition (z. B. die schwarzen Balken und die weißen Quadrate) besser verstanden werden. Insbesondere wenn ein dynamisches Geometriesystem eingesetzt wird, führt die Frage, ob das „schräge" Quadrat in der Mitte auch anderes eingebaut werden könnte (vgl. Abb. 5), zur Erkenntnis, dass es nur wenige ganzzahlige Zahlentripel gibt, die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. Hier kann sich eine Auseinandersetzung mit den pythagoräischen Zahlentripeln anschließen.

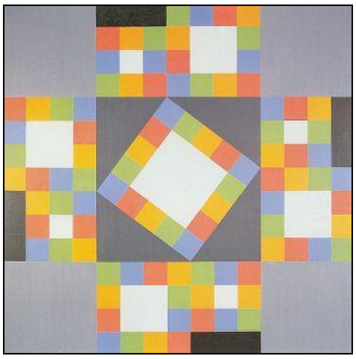


Abb. 1: Max Bill: Konstruktion um das Thema 3:4:5, 1980

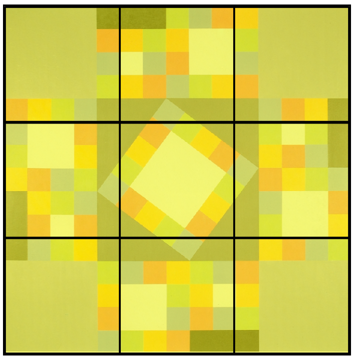


Abb. 2: Das Bild kann mit einigen seiner Teilquadrate parkettiert werden.

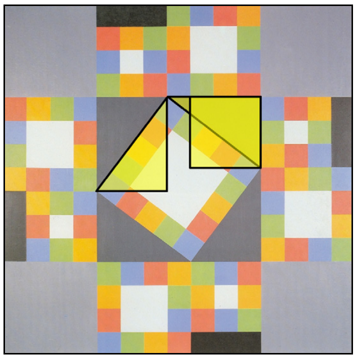


Abb. 3: Flächeninhaltsvergleich zwischen Quadrat & rechtwinkligem Dreieck

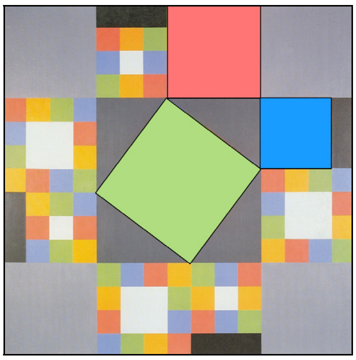


Abb. 4: Der Bildtitel und der Satz des Pythagoras

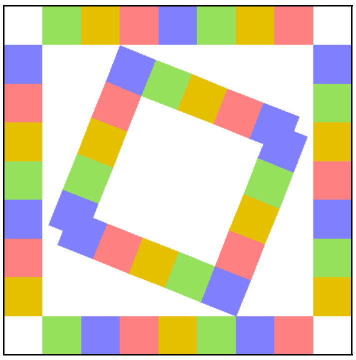


Abb. 5: Das schräge Quadrat lässt sich *nicht* beliebig einfügen.

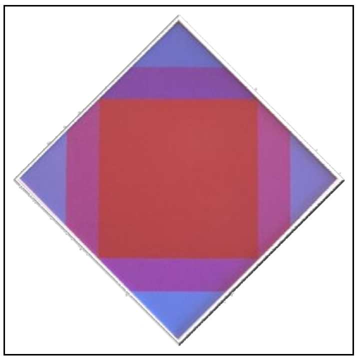


Abb. 6: Max Bill: Strahlung aus Rot, 1972/74

Das Bild „Strahlung aus Rot" von Max Bill in Abb. 6 eignet sich gut zur Erarbeitung der Erkenntnis, dass sich nicht alle Flächeninhalte exakt durch Auslegen mit Einheitsquadraten bestimmen lassen. Dies kann zur Einführung der Inkommensurabilität genutzt werden. Daneben kann auch die Einsicht gelingen, dass selbst „komplizierte" Flächeninhalte durch „einfachen" Flächenvergleich bestimmbar sind. Der Arbeitsauftrag kann hier ganz offen ausfallen: „Wie groß sind die Flächeninhalte aller Teilflächen der Figur, wenn das innere Quadrat den Flächeninhalt 1 FE besitzt?“ Fasst man das Kunstwerk als Überlagerung eines großen Quadrats, eines regulären Achtecks und des kleinen inneren Quadrats auf, so lassen sich der Flächeninhalt und die Kantenlänge des großen Quadrats erarbeiten. Mit Hilfe der Konstruktionshilfslinien für die Achteckkonstruktion (vgl. Abb. 7) können die Flächeninhalte der äußeren kleinen Dreiecke und damit der Flächeninhalt des Achtecks bestimmt werden.

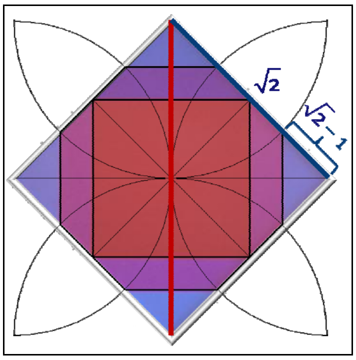


Abb. 7: Bill: Strahlung aus Rot – Konstruktionslinien

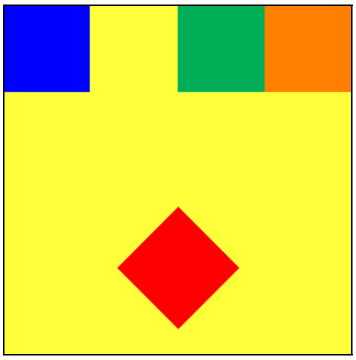


Abb. 8: Graeser: Translokation B, 1969

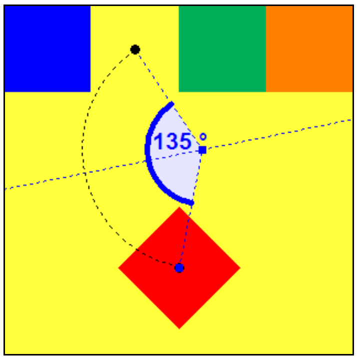


Abb. 9: Mögliche Drehung des Quadrats

Geometrische Grundformen wie z. B. das Quadrat und ihre (Symmetrie-) Eigenschaften, aber auch Beziehungen zwischen (Teil-)Figuren lassen sich anhand von konkreten Kunstwerken besonders gut untersuchen. Betrachtet man etwa Camille Graesers Werk „Translokation B“ (vgl. Abb. 8), so suggeriert die Farbgebung, dass das auf der Ecke stehende rote Quadrat aus der Lücke in der oberen Quadratreihe heraus bewegt wurde. Eine einfache Verschiebung entlang der gedachten Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der quadratischen Lücke und des roten Quadrats, bringt die beiden Quadrate nicht miteinander zur Deckung. Dazu ist anschließend noch eine Drehung des verschobenen Quadrats um seinen Mittelpunkt notwendig. Ohne Drehung geht es offensichtlich nicht, ja es ist sogar möglich, das rote Quadrat nur mit Hilfe einer Drehung aus seiner Ausgangslage in die aktuelle Position zu bewegen (vgl. Abb. 9). Hier gibt es viel zu erforschen, zu entdecken und zu begründen. Folgende Fragen können dabei handlungsleitend sein:

- Wo liegt das Zentrum der gesuchten Drehung?
- Gibt es evtl. mehrere geeignete Lagen für das Drehzentrum?
- Um welchen Drehwinkel muss man jeweils drehen?

Die Geometrie hilft komplexe Strukturen zu analysieren. Richard Paul Lohses Bild in Abb. 10 lässt sich etwa durch zentrische Streckungen des zentralen Quadrats bzgl. der Bildmitte als Streckungszentrum verstehen. So können die in Abb. 11 gekennzeichneten Quadrate erzeugt werden. Verlängert man deren Seiten bis zum Bildrand, so entsteht die gesamte Bildstruktur. Wie erhält man aber die nötigen Streckungsfaktoren und warum besteht der Zusammenhang aus Abb. 12 zwischen den Kantenlängen der acht konzentrischen Quadrate? Es bieten sich vielfältige Anlässe zur Erforschung von Strukturen und mathematischen Fragestellungen.

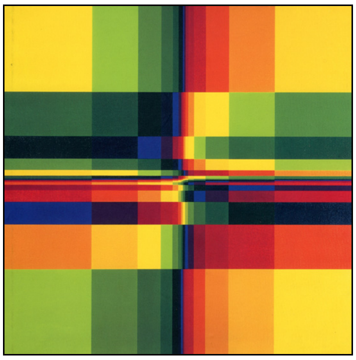


Abb. 10: Lohse: Fünfzehn systematische Farbreihen mit vertikaler und horizontaler Verdichtung, 1950-67

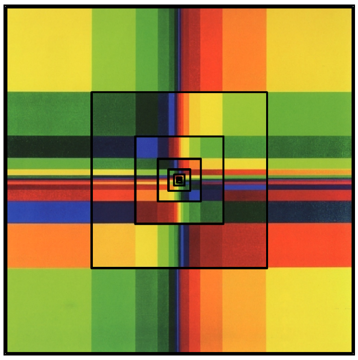


Abb. 11: Zentrische Streckung des zentralen Quadrats am Bildmittelpunkt erzeugt das ganze Bild.

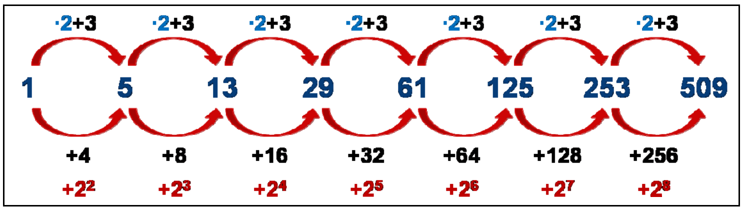


Abb. 12: Zusammenhang zwischen den Kantenlängen der in Abb. 11 schwarz eingezeichneten Quadrate

2 Konkrete Kunst kreativ gestalten

Hat man ein Kunstwerk mathematisch analysiert, so bietet es sich zur Vertiefung und Vernetzung der so erworbenen Kenntnisse an, diese selbst zur kreativen (Um-)Gestaltung von Kunstwerken zu nutzen (vgl. Roth 2007). Für das eben betrachtete Kunstwerk von Lohse (vgl. Abb. 10) könnte ein Arbeitsauftrag zur Vertiefung lauten: „Entwickle das Kunstwerk durch Abbildungen so weiter, dass seine Symmetrieeigenschaften erhalten bleiben.“ Vernachlässigt man die Farben, so erkennt man, dass das Bild alle Symmetrieeigenschaften des Quadrats besitzt. Zur Lösung der Aufgabe müssen diese Eigenschaften und Gestaltungsfragen reflektiert werden. Ein mögliches Ergebnis zeigt Abb. 13.

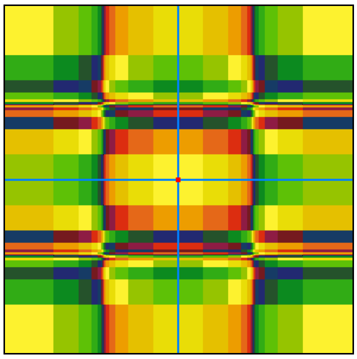


Abb. 13: Mit Abbildungen kann das Kunstwerk weiterentwickelt und kreativ gestaltet werden.

Literatur

Kultusministerkonferenz (Hrsg.): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.Wolters Kluwer Deutschland GmbH, München, 2004

Roth, Jürgen: Konkrete Kunst und Bewegung – Mathematik als Kreativitäts- und Interpretationswerkzeug. In: Lauter, M. & Weigand, H.-G. (Hrsg.): Ausgerechnet ... Mathematik und Konkrete Kunst. Spurbuchverlag, Baunach, 2007, S. 22-28

Jürgen ROTH, Würzburg

Kunst – Mathematik – Musik: Visualisieren und Interpretieren

Der Blick über das eigene Fach hinaus kann für den Unterricht aller Fächer bereichernd sein. Dies gilt allerdings nur dann, wenn fächerverbindende Ansätze nicht Selbstzweck sind. Es müssen vielmehr Themen in den Mittelpunkt gestellt werden, zu denen *alle* beteiligten Fächer beitragen *und* bei denen sie inhaltlich von der Zusammenarbeit profitieren können. Ein solches Thema, das in den Fächern Kunst, Mathematik und Musik eine wesentliche Rolle spielt, ist die *Visualisierung*. Jede Visualisierung bedarf der *Interpretation*. Einerseits müssen Visualisierungen vom Nutzer interpretiert werden um einen Zugang dazu zu finden und andererseits werden beim Erstellen von Visualisierungen die zugrundeliegenden Phänomene interpretiert. Dieses Zusammenspiel wird auch aus folgender, von Kadunz für die Mathematikdidaktik formulierter Arbeitsdefinition des Begriffs „Visualisierung" deutlich: „Die durch den Gebrauch von Metaphern geprägte Tätigkeit des ergänzenden Wechsels zwischen Analogem und Propositionalem, zwischen Bildhaftem und nicht Bildhaftem oder zwischen konkurrierenden Attraktoren ist das charakteristische Merkmal von Visualisierung."[1]

Ganz ähnlich wird das in der Musik gesehen, wo Kompositionen in Partituren notiert (also visualisiert) werden, damit verschiedene Musiker sie in vergleichbarer Weise erzeugen können.[2] Das Ergebnis, die Notation, „ist ein Zeichensystem zur schriftlichen Codierung akustischer Ereignisse. Es muss wiedererkennbar, übertragbar und direkt decodierbar sein. Dabei wird das der Zeitlichkeit ausgelieferte auditive Phänomen durch die Visualisierung in einen Zustand der Beständigkeit und Verfügbarkeit über Zeit und Raum gebracht, der individuellen Zuordnung enthoben und zu einem Kommunikationsmittel zwischen Komponist, Interpret und Hörer."[3] Seit dem 20. Jahrhundert existieren auch graphische Notationen, die Klangerlebnisse bzw. Klangvorstellung in Form von bildlichen Darstellungen visualisieren und von Musikern bei der Aufführung wieder kreativ interpretiert werden müssen. Hier setzt Stefanie Anzenhofer an, wenn sie von der Prämisse ausgeht, dass musikalische Graphen den Mathematikunterricht beleben können. Sie stellt fest, dass in beiden Fächern graphische Darstellungen eine nennenswerte Rolle spielen und es hier wie dort Schüler-

[1] Kadunz (2003, S. 147)
[2] Musik wird daraus allerdings erst durch künstlerische Interpretation.
[3] Kalwies (2005, S. 194)

schwierigkeiten im Umgang mit diesen Darstellungsformen gibt. Vor diesem Hintergrund setzt sie sich mit der Frage auseinander, in wie weit man Schülerinnen und Schülern den Zugang zu Funktionsgraphen erleichtern kann, wenn man sie mit drei zentralen Aspekten der Musik in Verbindung bringt, nämlich dem Musik machen, dem Musik hören sowie dem Lesen und Schreiben von Musik. Wesentlich ist dabei für sie die Visualisierungen von Musik mittels Funktionsgraphen (musikalische Graphen) und deren Vertonungen.

Die Kunst des 20. Jahrhunderts weißt verschiedene Strömungen auf. Da gibt es z. B. die Künstler, die von der „Realität" ausgehen, diese aber im Zuge der Visualisierung deutlichen Abstraktionsprozessen unterwerfen, daneben aber auch solche, wie etwa in der Konkreten Kunst, die nicht die „Realität" abbilden, sondern Ideen visualisieren wollen. Dazu gehören insbesondere auch mathematische Ideen. „Die ursprünglich fest mit den Grundformen und Abbildungen der euklidischen Geometrie verbundene konkrete Kunst fand (…) immer wieder überraschende Anknüpfungspunkte an neue Inhalte und Methoden (…) der Mathematik (…)." Guderian (2002, S. 235) Jan Wörler stellt in seinem Beitrag diese Verbindung zwischen Mathematik und Konkreter Kunst heraus. Er deckt exemplarisch auf, wie „Konkrete Künstler" mathematische Themen aufgreifen, verarbeiten und dadurch ungewöhnliche Einblicke in teilweise komplexe mathematische Zusammenhänge erlauben. Dabei wird auch das Potential von Computeranimationen zur Erforschung und Interpretation der Kunstwerke eingesetzt. Wie diese intensive Beziehung zwischen Konkreter Kunst und Mathematik gewinnbringend für den Mathematikunterricht genutzt werden kann arbeitet Jürgen Roth in seinem Beitrag „Konkrete Kunst analysieren und gestalten – Mathematik fächerverbindend unterrichten" heraus. An konkreten Beispielen wird gezeigt, wie sich Schülerinnen und Schüler durch die Analyse von Kunstwerken Lehrplaninhalte selbstständig erarbeiten können. Schülerinnen und Schüler vertiefen die erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten, wenn sie sie zur kreativen Gestaltung von Kunstwerken einsetzen.

Literatur

Guderian, Dietmar: Über »ureigene Mittel und Gesetzmäßigkeiten« in der konkreten Kunst in Europa nach 1945. In: Lauter, Marlene (Hrsg.): konkrete kunst in Europa nach 1945. Hatje Cantz Verlag, Osterfildern-Ruit, 2002, S. 228-235

Kadunz, Gert: Visualisierung – Die Verwendung von Bildern beim Lernen von Mathematik. Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Band 3, Profil Verlag, München, Wien, 2003

Kalwies, Hannelore: Notation/Notenlehre. In: Helms, Siegmund; Schneider, Reinhard & Weber, Rudolf (Hrsg.): Lexikon der Musikpädagogik. Gustav Bosse Verlag, Kassel, 2005, S. 194-196

Franziska RUDOLPH-ALBERT, München und Aiso HEINZE, Regensburg

Mathematische Kompetenzentwicklung und Sprachfähigkeit bei Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund in der Grundschule

Die Benachteiligung von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund im deutschen Bildungssystemsystem ist durch die empirische Bildungsforschung seit langem belegt worden. So findet man Kinder aus Migrationsfamilien hauptsächlich an Hauptschulen und ihr Anteil an den Gymnasien ist unterproportional gering (Herwartz-Emden, 2003). Durch die erziehungswissenschaftliche Forschung ist bekannt, dass bereits in der Grundschulzeit ein großer Rückstand bei Schulkindern mit Migrationshintergrund in Bezug auf die sprachliche Kompetenz in der Schulsprache besteht.

Schulleistungsstudien wie etwa IGLU oder LAU 5 (Bos u.a., 2003; Lehmann, Peek & Gänsfuß, 1997) haben daneben auch Leistungsunterschiede zugunsten von Schülerinnen und Schülern ohne Migrationshintergrund in Bezug auf die mathematische Kompetenzentwicklung aufgezeigt. IGLU-E weist dabei für die 4. Klasse auf einen Leistungsunterschied im Fach Mathematik zwischen deutschen und Migrantenkindern von etwa einem Schuljahr hin. Die Hamburger Lernausgangsuntersuchung LAU 5, die zu Beginn des Schuljahres in allen fünften Klasse durchgeführt wurde, kommt zu einem ähnlichen Ergebnis und gibt für die Leistungsdifferenz eine Effektstärke von d=0,50 an. Neben den individuellen Leistungen wurde bei LAU 5 auch der Einfluss der Klassenebene untersucht. In Bezug auf die Mathematikleistung erklärt diese 18,5% der Varianz. Zudem zeigte sich hier, dass ein hoher Migrantenanteil in einer Klasse einen signifikant negativen Einfluss auf die Leistungen der Kinder nichtdeutscher Herkunft hat. Auch bei der Hannoverschen Grundschulstudie konnte ein deutlicher Einfluss der Klassenebene festgestellt werden. Hier werden sogar 26% bzw. 23% der Leistungen für Textaufgaben bzw. Arithmetik durch Merkmale der Schulklassen erklärt (Tiedemann & Billmann-Mahecha, 2004).

Die vielfach nachgewiesenen Leistungsdefizite von Kindern mit Migrationshintergund in Mathematik werfen die Frage nach den Ursachen dafür auf. Als eine mögliche Einflussvariable ist sicherlich die Sprache als Basis für schulische Lernprozesse anzusehen. Schulische Leistungen sind an sprachliche Kompetenzen gebunden, entscheidend sind dabei aber die Kompetenzen in der jeweiligen Unterrichtssprache. Die Sprache der Schule stellt für Kinder mit Migrationshintergund eine besondere Herausforderung dar, auch wenn sie die Umgangssprache im Aufnahmeland beherrschen. Die Unterrichtssprache dürfte auch für das Fach Mathematik eine zentrale Rolle spielen. Zwar hat die Scholastik-Studie gezeigt, dass die Mathematikleistung zu Beginn der Grundschulzeit noch stark durch die kognitiven Grundfähigkeiten geprägt ist, doch ist anzunehmen, dass die Sprachfähigkeit für die mathematische Begriffsbildung und damit für den Erwerb mathematischer Kompetenz eine bedeutsame Rolle einnimmt. So laufen die Lernprozesse nicht allein auf material- oder handlungsorientierter Basis ab. Für die Verinnerlichung von Operationen und die Ausbildung von mentalen Prozessen ist auch eine über Sprache vermittelte Interaktion mit anderen Personen notwendig.

Forschungsfragen und Design der Untersuchung

Vor dem aufgezeigten theoretischen Hintergrund betrachten wir in diesem Beitrag folgende Forschungsfragen:

- Welche Unterschiede zeigen Kinder mit und ohne Migrationshintergund am Ende der 1. Klasse und am Ende der 2. Klasse bezüglich der individuellen Mathematikleistung?
- Welchen Einfluss haben Sprachstand und kognitive Grundfähigkeiten auf die Leistungsunterschiede zwischen Kindern deutscher und nichtdeutscher Herkunft im Bereich Mathematik?
- Welchen Einfluss hat die Klassenebene auf die individuelle Mathematikleistung am Ende der Jahrgangsstufe 1 bzw. 2 und welche Rolle spielen dabei die verschiedenen Klassenmerkmale?

Die hier präsentierte Auswertung basiert auf dem ersten und dem zweiten Messzeitpunkt der Längsschnittstudie „Sozialisation und Akkulturation in Erfahrungsräumen von Kindern mit Migrationshintergrund – Schule und Familie“ (SOKKE) zur Leistungsentwicklung von Schülerinnen und Schülern während der Grundschulzeit (vgl. Heinze, Herwartz-Emden & Reiss, 2007). An der Untersuchung nahmen 556 Schüler und Schülerinnen (344 mit und 212 ohne Migrationshintergrund, 280 Jungen und 276 Mädchen) aus 25 Klassen aus 9 Schulen am Ende der ersten und zweiten Jahrgangsstufe teil. Die Schulen wurden so gewählt, dass Sozialregionen mit geringem, mittlerem und hohem Anteil an Kindern mit Migrationshintergrund vertreten sind. Der mittlere Migrantenanteil pro Klasse beträgt 60,87% (SD=24,28).

Es wurden u.a. Daten zur Mathematikleistung (DEMAT 1+, Krajewski, Küspert & Schneider, 2002; DEMAT 2+, Krajewski, Liehm & Schneider, 2004), zu den kognitiven Grundfähigkeiten (CFT 1, Cattell, Weiß & Osterland, 1997) und zum Sprachstand (SFD, Hobusch, Lutz & Wiest, 2002) erhoben. Die Daten zum Sprachstand wurden dabei auch für die Kinder ohne Migrationshintergrund erhoben.

Ergebnisse

Die Ergebnisse zeigen, dass die Kinder mit Migrationshintergrund bereits am Ende des ersten Schuljahrs schwächere Mathematikleistungen aufweisen als die Schülerinnen und Schüler ohne Migrationshintergrund. Während die Kinder deutscher Herkunft M=24,92 Punkte (SD=7,34) erreichen, sind es bei den

Kinder nichtdeutscher Herkunft nur M= 22,82 Punkte (SD=7,26). Der Unterschied ist hoch signifikant (t(488)=3,13, p<0,01) und weist eine moderate Effektstärke von d=0,29 auf. Dieser Trend setzt sich auch in der zweiten Klassenstufe fort (Kinder ohne Migrationshintergrund M=19,94, SD=10,51; Kinder mit Migrationshintergrund M=17,22, SD=8,98; t(471)=3,01, p<0,01, d=0,25)[1]. Unter der Kontrolle der Variablen kognitive Grundfähigkeiten und Sprachstand verschwinden die signifikanten Unterschiede sowohl zu Messzeitpunkt 1 als auch zu Messzeitpunkt 2.

Die Betrachtung der einzelnen Subskalen des DEMAT 1+ ergab, dass die Unterschiede zwischen Schülern mit und ohne Migrationshintergrund nur bei den Skalen Mengen-Zahlen, Zahlenraum, Teil-Ganzes und Sachrechnen zu finden sind. Bei zwei Subskalen (Mengen-Zahlen und Teil-Ganzes) verschwinden die Unterschiede bei Kontrolle des CFT. Unter Kontrolle des Sprachstandes (SFD) lassen sich bei allen vier Skalen keine signifikanten Unterschiede mehr finden. Zur Lösung der Aufgaben der Skalen Zahlenraum und Sachrechnen sind mentale Repräsentationen von mathematischen Begriffen notwendig. Da die Unterschiede hier nur nach Kontrolle des SFD verschwinden, ist anzunehmen, dass die sprachliche Kompetenz zum Aufbau mentaler Repräsentationen beiträgt. Hinsichtlich des DEMAT 2+ lassen sich ähnliche Effekte aufzeigen. Werden der CFT und die Ergebnisse des DEMAT 1+ kontrolliert, gibt es nur noch Unterschiede bei den Skalen Zahleigenschaften, Längenvergleich und Verdoppeln. Unter Kontrolle des SFD verschwinden auch diese. Während bei den Skalen Zahleigenschaften und Längenvergleich ebenfalls auf den Einfluss mentaler Repräsentationen geschlossen werden kann, ist dies beim Verdoppeln zunächst unklar.

Zur Untersuchung des Einflusses der Klassenebene auf die Mathematikleistung wurden Mehrebenenanalysen gerechnet. Es zeigt sich, dass die Klassenebene sowohl am Ende von Klasse 1 (7,6%) als auch am Ende von Klasse 2 (6%) nur einen geringen Einfluss auf die individuelle Mathematikleistung hat. Die Klassenmerkmale mittlere kognitive Fähigkeiten, mittlerer Sprachstand und prozentualer Anteil an Kindern mit Migrationshintergrund haben zu beiden Messzeitpunkten keinen signifikanten Einfluss auf die individuelle Mathematikleistung. Die Tatsache, dass der Migrantenanteil pro Klasse keinen Einfluss hat, ist insofern auffällig, dass dieser zwischen 8% und 95% variiert.

Diskussion

Die Ergebnisse unserer Untersuchungen deuten daraufhin, dass Kinder mit Migrationshintergrund bereits am Ende des ersten Schuljahres schwächere Mathematikleistungen aufweisen als die Kinder deutscher Herkunft. Die Dif-

---

[1] Der Mittelwert der Gesamtstichprobe beträgt zu Messzeitpunkt 1 M=23,67 (SD=7,36) und zu Messzeitpunkt 2 M=18,31 (SD=9,68). Die Ergebnisse der Gesamtstichprobe liegen etwas unterhalb der Normierungsstichproben des DEMAT 1+ bzw. DEMAT 2+.

ferenz bestätigt sich auch am Ende der zweiten Klasse. Die Unterschiede verschwinden aber jeweils unter Kontrolle der kognitiven Grundfähigkeit und des Sprachstands. Betrachtet man die einzelnen Subskalen der Mathematiktests genauer, so fällt auf, dass die Unterschiede bei den Skalen Zahlraum, Sachrechnen, Zahleigenschaften, Längenvergleich und Verdoppeln nur unter Kontrolle des Sprachstandes verschwinden. Auffällig ist, dass es sich bei den ersten vier um Skalen handelt, zu deren Lösung ein spezifisches mathematisches Verständnis notwendig ist. Die Tatsache, dass hier die Unterschiede nur nach Kontrolle des Sprachstandes verschwinden, deutet erwartungskonform darauf hin, dass im Mathematikunterricht vor allem die Sprache für den Aufbau mentaler Repräsentationen, die zum Lösen der Aufgaben dieser Skalen unerlässlich sind, eine entscheidende Rolle spielt. Aus mathematikdidaktischer Sicht wäre es einerseits interessant spezifischere Tests zu entwickeln, mit denen dieser Kompetenzbereich genauer untersucht werden kann. Zum anderen sollten Möglichkeiten einer sinnvollen Förderung von Kindern mit Migrationshintergrund in diesem Bereich generiert werden.

Literatur

Bos, W., Lankes, E. M., Prenzel, M., Schwippert, K., Walther, G. & Valtin, R. (Hrsg.) (2003). *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.

Cattell, R. B., Weiß, R. & Osterland, J. (1997). *Grundintelligenztest CFT-1 - Skala 1*. 5. Auflage. Göttingen: Hogrefe.

Heinze, A., Herwartz-Emden, L. & Reiss, K. (2007). Mathematikkenntnisse und sprachliche Kompetenz bei Kindern mit Migrationshintergrund zu Beginn der Grundschulzeit. *Zeitschrift für Pädagogik 53*(4), S. 562-581.

Herwartz-Emden, L. (2003). Einwandererkinder im deutschen Bildungswesen. In: K. S. Cortina, J. Baumert, A. Leschinsky, K. U. Mayer & L. Trommer (Hrsg.), *Das Bildungswesen in der Bundesrepublik Deutschland. Strukturen und Entwicklungen im Überblick.* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt, S. 661-709.

Hobusch, A., Lutz, N. & Wiest, U. (2002). *Sprachstandsüberprüfung und Förderdiagnostik für Ausländer- und Aussiedlerkinder (SFD)*. Horneburg: Persen.

Krajewski, K., Liehm, S. & Schneider, W. (2004): *Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen (DEMAT 2+)*. Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K., Küspert, P. & Schneider, W. (2002): *Deutscher Mathematiktest für erste Klassen (DEMAT 1+)*. Göttingen: Hogrefe.

Lehmann, R. H., Peek, R. & Gänsfuß, R. (1997). *Aspekte der Lernausgangslage von Schülerinnen und Schülern der fünften Klassen an Hamburger Schulen.* Hamburg: Behörde für Schule, Jugend und Berufsbildung.

Tiedemann, J. & Billmann-Mahecha, E. (2004). Kontextfaktoren der Schulleistung im Grundschulalter. Ergebnisse aus der Hannoverschen Grundschulstudie. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie 18*, 113-124.

Christian RÜEDE, Universität Zürich

Was für Konzepte und Wissensbestände aktivieren Experten und Novizen bei Bruchtermen und Bruchtermgleichungen?

Werden im Unterricht über mehrere Wochen Bruchterme und Bruchtermgleichungen behandelt, entwickeln die Schüler und Schülerinnen Auffassungen davon, wie mit Bruchtermen und Bruchtermgleichungen umzugehen ist: Sie entwickeln erstens Vorstellungen von *formalisierbaren* (und damit auch explizierbaren) Regeln, wie zum Beispiel $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ oder $A\cdot B=0 \Rightarrow A=0 \vee B=0$. Zweitens bauen sie ein Verständnis von *nicht formalisierbaren* Regeln (also von impliziten Normen) auf. Beispielsweise erfahren sie, dass je nach Gleichung eine andere Lösungsstrategie angemessen ist. Bei $\frac{1}{2x+1}+\frac{2x}{2x+1}=x^2$ wird anders vorgegangen als bei $\frac{x}{x-2}+\frac{2}{x+2}=1$. Ferner hängt die Bedeutsamkeit mathematischer Ausdrücke vom Kontext ab. Ist der Term $\frac{5x+15}{4x+12}$ zu vereinfachen, wird er anders behandelt als wenn er in der Gleichung $\frac{5x+15}{4x+12}=\frac{25}{4x+12}$ vorkommt.

Im Zentrum dieses Beitrags steht eine (noch nicht abgeschlossene) Untersuchung, die nach den Unterschieden des Verstehens bei Novizen – hier Schüler und Schülerinnen – und bei Experten – hier Mathematiklehrpersonen – fragt. Die aktuelle Stichprobe der Schüler und Schülerinnen (n=19) besteht aus einer Klasse der 9. Jahrgangsstufe eines Schweizer Gymnasiums. In dieser Klasse wurde vor Beginn der Untersuchung das Thema „Bruchtermgleichungen“ behandelt, wobei einerseits Wert auf die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Lösungswegen gelegt wurde und andererseits auf die Diskussion von möglichst verschiedenartigen Bruchtermgleichungen. Die aktuelle Stichprobe der Mathematiklehrpersonen umfasst Gymnasiallehrpersonen (n=4) mit einem fachwissenschaftlichen Studienabschluss in Mathematik.

1. Sortieren von Bruchtermgleichungen

Das Sortieren von Problemen ist eine bekannte Methode zur Erfassung von Expertisewissen (Chi et al. 1981). Für die vorliegende Untersuchung wurden zwanzig Kärtchen hergestellt und mit je einer Bruchtermgleichung beschriftet. So stehen auf den Kärtchen 1, 7 und 14 folgende Gleichungen:

1 $\quad \frac{x^2+x-6}{(x-2)(x+3)}+\frac{5x+15}{4x+12}=x^2$

7 $$\frac{x^2+x-6}{(x+1)(x+5)}=\frac{x-6}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}$$

14 $$\frac{x^2-1}{x^2-2}+\frac{x^2-3}{x^2-2}-x=0$$

Alle Probanden mussten diese Kärtchen sortieren, und zwar nach ähnlichem Vorgehen, wenn sie die Gleichungen von Hand lösen würden. Während der Sortierung arbeiteten die Probanden ohne Zeitdruck und ohne etwas aufzuschreiben. Am Schluss mussten sie schriftlich festhalten, worin sich die Lösungsstrategien innerhalb jeder Gruppe ähneln.

Die Auswertung der so erhaltenen Daten basiert, wie bei solchen Sortiermethoden üblich, auf einer *Cluster-Analyse* der Sortierungen und auf einer *Kategorisierung* der Gruppenbeschreibungen. Es zeichnen sich folgende erste Resultate ab:

- Experten gruppieren sehr ähnlich. Differenzen ergeben sich nur in Bereichen, die ausgehandelt werden müssen, zum Beispiel bei Gleichungen wie $\frac{x}{2x+1}=\frac{2}{5}$. Hier kann man gleichnamig machen, die Lösung sofort erraten oder man kann gleiche Zähler anstreben und danach die Nenner gleich setzen. Die vorgenommene Kategorisierung der Gruppenbeschreibungen erlaubt es nicht, solche Feinheiten zu unterscheiden. Allerdings ermöglicht die eindeutige Homogenität innerhalb der Sortierung der vier Experten, von *der* Experten-Sortierung zu sprechen. Deshalb können die Sortierungen der Novizen mit einer Art Expertennorm verglichen werden.
- Experten sind in der Lage, die Folgen ihrer Umformungen im Kopf abzuschätzen. Zum Beispiel erkennen sie bei Gleichung 14 im Voraus, dass nach dem Zusammenfassen der Brüche gekürzt werden kann. Novizen hingegen tendieren dazu, die Gleichung 14 und eine Gleichung wie $\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x^2-1}$ in die gleiche Gruppe zu legen.
- In Chi et al. (1981) wird festgestellt, dass Aufgaben von Novizen nach Oberflächenstrukturen und von Experten nach Tiefenstrukturen sortiert werden. Spätere Studien verfeinern und differenzieren diese Beobachtung, z.B. Medin & Ross 1989. Auch bei der hier untersuchten Sortierung findet ein Wechselspiel von Oberfläche – das heißt Struktur – und Tiefe – also Lösungsstrategie – statt. So ist bei Gleichungen vom Typ $A\cdot B=0$ gerade ein angemessenes Erfassen der Termstruktur entscheidend. So scheinen unsere Experten die strukturellen Merkmale ausnahmslos angemessen für die Wahl einer

Lösungsstrategie zu nutzen, ganz im Gegensatz zu den Novizen, wo strukturelle Merkmale oftmals mit der Wahl der Lösungsstrategie konfundieren.

Nebst einer Kontrastrierung von Experten und Novizen liefert die Sortierungen auch Daten für eine pädagogische Diagnose der einzelnen Schüler und Schülerinnen und können so für den Unterricht genutzt werden. So müssen beim Sortieren Bezüge hergestellt werden bzw. abgeschätzt werden, welche Umstände (das heißt Gleichungen) welche Folgen (also Lösungsstrategien) erfordern. Die Sortierung in Gruppen verlangt ein Abgrenzen der einzelnen Gleichungen voneinander, also auch ein Abschätzen davon, was *nicht* angemessen ist – ein schönes Beispiel für negatives Wissen (Oser 2005).

Insgesamt umfasst die Art und Weise, wie jemand die Gleichungen sortiert, einen relevanten Teil der Auffassung von Bruchtermgleichungen. Weil die hier erfassten Mathematiklehrpersonen über die entsprechende fachliche Expertise verfügen, sind sie in der Lage, bei den Sortierungen der Schüler und Schülerinnen individuelle Qualitäten wie auch Defizite sofort zu erkennen, also zu diagnostizieren, wie ihre Schüler und Schülerinnen mit Bruchtermgleichungen umgehen.

2. Interviews

Die Daten, die beim Sortieren erhalten werden, erklären nicht, weshalb Novizen und Experten mit Bruchtermen und Bruchtermgleichungen anders umgehen. Aus diesem Grund wurden leitfaden-strukturierte Interviews durchgeführt mit dem Ziel, Vorgehensmerkmale beim Umformen zu beschreiben. Die Interviews waren in zwei Teile gegliedert: Im ersten Teil wurden den Probanden Bruchterme (z.B. $\frac{6x^3+9x^2}{4x+6}$) vorgelegt und gefragt, wie diese zu vereinfachen seien. Im zweiten Teil wurden ihnen Bruchtermgleichungen (z.B. $\frac{20x^3+30x^2}{4x+6}=\frac{12x+18}{8x+12}$) vorgelegt, deren Terme strukturell ähnlich zu den Bruchtermen im ersten Teil des Interviews waren. Gefragt wurde nach erfolgversprechenden Umformungen.

Die Interviews werden nach der Methode der Didaktischen Rekonstruktion ausgewertet (Gropengiesser 2007). Zum jetzigen Zeitpunkt der Auswertung zeichnet sich ab, dass bei Bruchtermen ein „vertikaler Blick“ und bei Bruchtermgleichungen ein „horizontaler Blick“ dominiert: So schlagen Novizen wie auch Experten bei einem Term wie $\frac{6x^3+9x^2}{4x+6}$ vor zu kürzen. Hingegen tendieren dieselben Novizen (und auch ein Teil der Experten) bei einer Gleichung wie $\frac{20x^3 + 30x^2}{4x+6} = \frac{12x+18}{8x+12}$ zum Gleichnamigmachen. Der Unterschied zwischen Novizen und Experten zeigt sich darin, dass sich die Experten selbstständig korrigieren. Sie machen im Kopf gleichnamig, multiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner und erkennen, dass dadurch eine Gleichung dritten Grades entsteht. Als Konsequenz untersuchen sie die Gleichung genauer und schlagen daher das Kürzen der Gleichung vor.

3. Aus- und Seitenblick

In der hier vorgestellten Studie wird das Handeln von Personen im engen Bereich des Umformens von Bruchtermen und Bruchtermgleichungen untersucht. Ein solches Handeln wird geleitet durch Auffassungen von formalisierbaren wie auch nicht-formalisierbaren Regeln. Im ersten Fall, bei formalisierbaren Inhalten, kann das Verstehen durch Konstrukte wie etwa Grundvorstellungen (vom Hofe 1995) beschrieben werden. Der zweite Fall, das Verstehen nicht-formalisierbarer Inhalte, ist Gegenstand der hier vorgestellten Studie. Es geht hier um „Grundauffassungen“ von Konzepten, die nicht formalisiert werden können, aber entscheidend sind für einen angemessenen Umgang mit Objekten wie z.B. Termen und Gleichungen.

Solche „Grundauffassungen“ zeichnen sich durch folgende Attribute aus: Erstens leiten sie, *wie* mit den mathematischen Inhalten umzugehen ist – Grundvorstellungen beschreiben, *was* mit den mathematischen Inhalten gemeint ist. Zweitens entsprechen ihnen implizite Normen – Grundvorstellungen sind Vorstellungen von expliziten Normen. Drittens sind „Grundauffassungen“ als singulär konzipiert (als Folge eines Konstruktivismus) – Grundvorstellungen sind als regulär konzipiert (als Folge eines Mentalismus). Viertens orientieren sie sich am Expertentum – Grundvorstellungen am Regulären.

Literatur

Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121–152.

Gropengiesser, H. (2007). Didaktische Rekonstruktion des Sehens. Beiträge zur Didaktischen Rekonstruktion, Bd. 1 (Nachdruck). Oldenburg.

Medin, D.L., Ross, B.H. (1989). The specific character of abstract thought: Categorization, problem solving, and induction. In Sternberg, R.J. (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence*. Vol. 5, 189–223. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Oser, F. (2005). *Lernen ist schmerzhaft – zur Theorie des Negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur.* Weinheim / Basel: Beltz Verlag

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Silke RUWISCH, Lüneburg

Vorstellungen über null und Null

Die detaillierten Fehleranalysen in den 1980er Jahren haben aufgezeigt, dass ein großer Anteil falscher Rechenergebnisse auf Schwierigkeiten im Umgang mit null und Null zurückzuführen ist (Gerster 1982, 1989, Lörcher 1985, Radatz 1980, Wagner 1994). Mehr als 20 Jahre später und gleichzeitig mehr als 25 Jahre nach Hefendehl-Hebekers (1981, 1982) Fallstudie zu den Vorstellungen von Jugendlichen zu null und Null stellt sich zum einen die Frage, ob diese Schwierigkeiten nach wie vor bestehen, zum anderen aber auch, welche Vorstellungen im Umgang mit null und Null dabei jeweils wie ineinander greifen.

1. Die Ambiguität von null und Null

Ontogenetisch wie phylogenetisch treten null und Null als besonders in Erscheinung, sollen aber gleichzeitig als ein Gleiches unter Gleichen aufgefasst werden: Null als eine von zehn Ziffern sowie null als eine von unendlich vielen Zahlen. Diese Ambiguität ergibt sich aus folgendem Umstand: Die Null wurde als ein Zeichen eingeführt, welches die Abwesenheit von Zeichen bezeichnet. Sie erhält damit den Charakter eines Metazeichen, eines Zeichens, welches auf einer höheren Ebene operiert (vgl. Rotman 2000). Dadurch entstehen sowohl Mehrdeutigkeiten als auch „Andersartigkeiten“:

- Trotz der formalen Bedeutung der Ziffer Null in einer Zahldarstellung als nicht besetzte Stelle, variiert die inhaltliche Bedeutung mit der Position der Ziffer Null.
  Zwischen anderen Ziffern führt dieses „Nicht-besetzt-Sein“ zur Markierung des freien Platzes; der Unterschied zu anderen Ziffern zeigt sich insbesondere bei den schriftlichen Rechenverfahren, bei denen „nicht besetzt“ gleichgesetzt wird mit „als Platz beachten, jedoch nicht als bedeutungstragende Zahl verrechnen“. Führende Nullen natürlicher Zahlen verändern den Wert der Zahl nicht, können also tatsächlich ignoriert werden, nachfolgende Nullen ver“zehn-hoch-n“fachen die Ausgangszahl.
- Um der Zahl null in der Rahmung der anderen natürlichen Zahlen Bedeutung zu verleihen, können diese Aspekte nur teilweise sinnvoll erweitert werden: Abwesenheit von etwas als Kardinalzahl „0“, Null als Startpunkt des Zählens, ohne „selbst zu zählen“, erscheinen noch plausibel; Null als Größe, als Ordnungszahl oder Operator sind jedoch kaum fassbar.

- Null als Rechenzahl ist ebenfalls ambiguitiv. Die Null erhält allenfalls als Differenz gleicher Zahlen eine in das bisherige Operationsverständnis passende Bedeutung. In allen anderen Fällen müssen Schülerinnen und Schüler nicht nur ihr Verständnis der Rechenoperationen ändern, sondern ebenfalls Differenzierungen vornehmen, welche Rolle die Null jeweils spielt: neutral bei Addition und Subtraktion, absorbierend bei der Multiplikation und fast undurchschaubar bei der Division.

2. Die Fragebogenstudie zur Null

2.1 Verständnisbereiche

1) Null allgemein
   Einleitend wurden die Kinder befragt, welche Aspekte der Null sie für erwähnenswert und wissenswert halten.
2) Null als Rechenzahl (Ziffer und Zahl)
   Einen zweiten Schwerpunkt bildeten Aufgaben, zu denen Kinder in einer Tabelle links das Ergebnis der Aufgabe angeben, rechts eine Begründung für dieses Ergebnis aufschreiben sollten: 7+0=, 7–0=, 7·0=, 7:0=, 0+7=, 0–7=, 0·7=, 0:7=, 3·4·0=, 3·4:0=, 3+4+0=, 2400:40, 240:4=, 2040:4=, 2040:40“
3) Null als Divisor
   Wegen der Besonderheit der Null als Divisor wurden die Schülerinnen und Schüler mit verschiedenen Auffassungen anderer Kinder konfrontiert und gebeten, sich dazu zu positionieren.
4) Persönlicher Bezug zur Null – Rechengeschichten zur Null

2.2 Durchführung

155 Viertklässlerinnen und Viertklässler aus sechs Klassen zweier Hamburger Grundschulen wurden schriftlich zu ihren Vorstellungen über die Null befragt. Sie hatten 45 Minuten Zeit, sich individuell mit den Aufgabenstellungen der drei Fragebogenseiten auseinanderzusetzen, wenngleich wir eine Bearbeitung in der konzipierten Reihenfolge unterstellten.

2.3 Ergebnisse

An dieser Stelle sollen lediglich die Ergebnisse zum Operationsverständnis aufgegriffen werden.

Tritt Null als Summand, Faktor oder Subtrahend auf, so geben 96 % der Kinder das richtige Ergebnis an. Vier Kinder übergeneralisieren Null als „ändert nichts“ und geben bei allen Teilaufgaben 7 als Ergebnis an; für zwei weitere Kinder ist jeweils die zuerst aufgeführte Zahl durchgehend die

Ergebniszahl. Die Anzahl richtiger Antworten halbiert sich, wenn drei Summanden oder Faktoren vorgegeben sind, von denen Null als letzter auftritt: Dabei bereitet der Faktor „Null“ mehr als doppelt so häufig Schwierigkeiten als der Summand.

Erwartungsgemäß problematischer verhält es sich, wenn Null als Minuend, Dividend oder Divisor auftritt.

Da die Viertklässlerinnen und Viertklässler aus dem Unterricht noch keine negativen Zahlen kennen, müssen sie eigenständig eine Möglichkeit finden, mit der Aufgabe 0–7 umzugehen. Erstaunlicherweise geben nur 5 Kinder an, die Aufgabe sei nicht lösbar, weitere 11 bearbeiten diese Teilaufgabe nicht und 6 halten das korrekte Ergebnis -7 fest. Über 80 % der Kinder geben 0 oder 7 als Ergebnis an, beide Ergebnisse kommen ungefähr gleich häufig vor. Die – knappen – Begründungen lassen erkennen, dass das Ergebnis „7“ zumeist auf falsch übertragene Kommutativitätsannahmen gründet: „das ist dasselbe wie bei 7–0.“ Beim Ergebnis „0“ sind sich viele Kinder hingegen der Merkwürdigkeit sowohl der Aufgabe als auch ihres Ergebnisses bewusst, wissen allerdings nicht, wie sie damit korrekt verfahren sollen: „0–7=0 Man kann von der Null keine abziehen, also Null.“

Tritt Null als Dividend auf, so geben immerhin 77 % der Kinder die korrekte Antwort „0“, während die restlichen entweder „7“ als Ergebnis festhalten oder aber die Aufgabe auslassen bzw. für nicht lösbar halten.

Die Null als Divisor ist – wie erwartet – für die Kinder am schwierigsten zu handhaben. Nur ein Kind hält diese Aufgabe für nicht lösbar, weitere zwölf Kinder lassen die Aufgabe aus, könnten somit ebenfalls der Ansicht sein, sie sei nicht lösbar. 63 % halten „0“ für das richtige Ergebnis, 28 % dagegen „7“. Die Begründungen für die Antworten sind sehr kurz. Besonders auffällig erscheint, dass „etwas nicht rechnen können“ nicht gleichzeitig bedeutet, dass die Aufgabe kein Ergebnis hat. Zieht man in diesem Zusammenhang die Äußerungen der Kinder zum dritten Verständnisbereich heran, so werden die Anzahlen bestätigt: 57 % halten „0“ für das richtige Ergebnis, 26 % die Ausgangszahl, 8 % geben Anna Recht, dass durch Null nicht geteilt werden dürfe. Die schriftlichen Begründungen der Kinder fallen auch bei diesem Aufgabenkomplex eher knapp aus und bestehen in der Wiederholung der Behauptung, der Angabe einer Rechenaufgabe oder einer Bestärkung der Gültigkeit „weil es so ist.“

3. Interpretation und Ausblick

Die Ambiguität von Null und null wird von den Kindern meist selbst erwähnt: „Die Null gehört zu den Zahlen, hat bei Plus, Minus, Geteilt und Mal aber nur die Bedeutung von nichts. Mit der Null kann man Zahlen aber auch größer machen, wenn man zum Beispiel an die Eins eine Null hinten dran hängen würde, würde aus der Eins eine Zehn werden.“ (Rosanna).

Da weder das Zeichen, noch die Zahl in ihren Aspektbedeutungen, noch das Operieren mit ihr – sei es als Zahl oder als Ziffer – eindeutig ist und damit die Ambiguität in den anderen Teilbereichen überstrahlen könnte, verbleibt bei vielen Kindern eine Unsicherheit, die verstärkt wird durch die noch prinzipielle Unsicherheit jüngerer Schülerinnen und Schüler hinsichtlich ihres Zahl- und Operationsverständnisses. So kann auch bei richtig angegebenem Ergebnis nicht davon ausgegangen werden, dass diesem das entsprechende Verständnis unterliegt: Bspw. übergeneralisieren viele Kinder die absorbierende Wirkung der Null bei der Multiplikation auf die Division und geben sowohl bei 0 : 7 als auch bei 7 : 0 als Ergebnis null an. Während sie damit bei ersterem zu den richtigen Antworten zählen, treten sie bei letzterem in der Gruppe der falschen Antworten auf. Die schriftlich festgehaltenen Begründungen der Kinder sind jedoch häufig nicht vorhanden oder so knapp, dass sie bezüglich des dahinter liegenden Verständnisses nicht belastbar sind.

Die Fragebogenstudie kann nachweisen, dass die seit langem bekannten Schwierigkeiten im Umgang mit Null und null bei allen Kindern eine Rolle spielen. Für eine genauere Klärung der jeweils von den Kindern konstruierten Zusammenhänge erscheint eine schriftliche Befragung jedoch als nicht reichhaltig genug. Wenngleich noch Material vorliegt, welches intensiverer – auch semiotischer – Auswertung bedarf, so müssen zur Klärung der einleitenden Fragestellung weitere und reichhaltigere Daten z.B. in Interviews erhoben werden.

Literatur

Gerster, Hans-Dieter (1982). Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie. Freiburg: Herder.

Gerster, Hans-Dieter (1989). Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren. In: Grundschule, 21, 12, 26-29.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (1981). Zur Behandlung der Zahl Null im Unterricht, insbesondere in der Primarstufe. In: mathematica didactica, 4, 4, 239-252.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (1982). Die Zahl Null im Bewusstsein von Schülern. Eine Fallstudie. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 2, 1, 45-63.

Lörcher, Gustav Adolf (1985). Einmaleinskenntnisse bei Schülern der Sekundarstufe. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 191-194.

Radatz, Hendrik (1980). Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.

Rotman, Brian (2000). Die Null und das Nichts. Eine Semiotik des Nullpunktes. Berlin: Kadmos.

Wagner, Hans-Jürgen (1994). Die Bedeutung der Null innerhalb der Addition im Zahlenraum 0 bis 20 als Problem pädagogischer Vermittlung. Diss. Heidelberg: Pädagogische Hochschule.

Csaba SÁRVÁRI, Pécs

Interaktive Hilfeleistung und Computer Algebra Systeme (CAS)

Einleitung

Die Nutzung eines CAS im Mathematikunterricht hat Auswirkungen auf das ganze Curriculum.
Die neueren Versionen von Maple CAS bieten spezielle Möglichkeiten für schrittweise Lösung, für differenzielle Hilfeleistung. Mit diesem Mittel verknüpft mit Instruktionen kann auch die kognitive Selbstregelung und die metakognitive Denkungsart gestützt werden.
In unserem Vortrag werden unsere ersten Erfahrungen in Pecs behandelt.

Der interaktive Kommunikationsprozess

Die nichttraditionellen Elemente des interaktiven Kommunikationsprozesses an unseren Kursen sind:

- das E-Learning System und ein lokales Netz
- ein Computer Laboratorium mit Projektor und Tight VNC Kontrollsystem
- das Computer Algebra System

Ein E-Learning System hat im allgemeinen die folgenden Funktionen: Lernstoffquelle, thematisierte Auswahl des Lernmaterials, Rückkopplung, Dokumentation, Kontakt zwischen Studenten und Studenten - Lehrern. Hauptfunktion des E-Learning Systems, als Element des interaktiven Kommunikationsprozesses, ist die Verbindung der verschiedenen Phasen der Lerntätigkeit. In dieser Hinsicht ist das E-Learning System Organisator des Lernprozesses mit längster Periode.
Das Tight VNC Kontrollsystem ist ein besonderes Mittel der interaktiven Hilfeleistung. Mit VNC steuert man einen anderen Computer über Intranet oder Internet fern. VNC ist die Abkürzung für "Virtual Network Computing" und zeigt den Desktop eines anderen Rechners an.
Die Hauptfunktion des Tight VNC System ist die Ausführung der Interaktion zwischen Studenten und zwischen Studenten und Lehrern. Dieses System hilft uns, kurzfristige Rückkopplungen zu verwirklichen.

Interaktive CAS-Mittel

Maple CAS hat – so wie alle CAS - verschiedene Mittel, um bei der interaktiven Problemlösung wirksam zu helfen. Die Verwendung von CAS zieht sich voll durch den Prozess der Instrumentalen Genese.
Der Begriff der Instrumentalen Genese wurde von L. Trouche (2003) eingeführt. Ein Mittel (CAS) wird durch den Prozess der 'instrumentalen

Genese' zu einem mathematischen Werkzeug. Die instrumentale Genese ist ein zweiseitiger interaktiver Prozess:
Instrumentation ist der Prozess, in dem sich der Student während der Transponierung des Wissens am Computer mit den Möglichkeiten und Grenzen des CAS vertraut macht. Die andere Seite der Instrumentalen Genese, die „*Instrumentalization*", zeigt in Richtung des Mittels. Diese hat mehrere Stufen: die Entdeckung der verschiedenen Funktionen des Mittels, die Transformation des Mittels, die Ergänzung der Funktionalitäten mit neuen Elementen.
Die Instrumentale Orchestrierung ist die äußere Organisation der instrumentalen Genese. Es ist eine besondere Organisation von Raum und Zeit in der Arbeit im Unterricht, eine komplexe interaktive Tätigkeit (Sárvári, 2005).
Die Maple-Bibliothek **Student[Calculus1]** ist ein Mittel für die schrittweise Berechnung der Ableitung, des Grenzwertes einer Funktion und von Integralen. Eine andere Möglichkeit bietet das **Paket Student** mit Verfahren zur Unterstützung der experimentellen Arbeitsweise bei der Berechnung der Integrale. Beide Bibliotheken unterstützen besonders erfolgreich die selbständige Arbeit der Studenten.
Mit dem ersten Beispiel möchte ich die Experimentierung, die Verallgemeinerung und die Konstruktion als interaktive Tätigkeiten demonstrieren.

1. Beispiel *Man bestimme das Integral*

```
> with(Student[Calculus1]):
infolevel[Calculus1] := 1:#damit Information wird gegeben
> Int(x*exp(sqrt(x)),x);
```

$$\int x\, e^{(\sqrt{x})}\, dx$$

Erstens bitten wir um eine Anweisung:

```
> Hinweis(%);
Creating problem #1
```

$$[\mathit{Partielle}, x^{(3/2)}, 2\, e^{(\sqrt{x})}], [\mathit{Substitution}, u = \sqrt{x}, u]$$

Wir bekommen zwei Vorschläge und probieren den zweiten Vorschlag aus!

```
> Regel[%[2]](%%);
Applying substitution x = u^2, u = x^(1/2) with dx =
2*u*du, du = 1/2/x^(1/2)*dx
```

$$\int x\, e^{(\sqrt{x})}\, dx = \int 2\, u^3\, e^u\, du$$

Was wäre es, wenn wir $t = e^{\sqrt{x}}$ setzen ? Wir wollen auch diese Substitution ausprobieren!

```
Regel[Substitution,t=exp(sqrt(x))](Int(x*exp(sqrt(x)),x));
Creating problem #2
Applying substitution x = ln(t)^2, t = exp(x^(1/2)) with dx
= 2*ln(t)/t*dt, dt = 1/2/x^(1/2)*exp(x^(1/2))*dx
```

$$\int x\, e^{(\sqrt{x})}\, dx = \int 2\ln(t)^3\, dt$$

Anstatt der ursprünglichen Aufgabe lösen wir den verallgemeinerten Fall, d.h.

$$\int \ln(t)^k\, dt$$

Man kann die partielle Integration versuchen. Dafür wird die **intparts** Prozedur aus der Bibliothek **student** mit **simplify** kombiniert aufgerufen:

```
> simplify(intparts(Int(ln(t)^k,t),ln(t)^k));
```

$$\ln(t)^k\, t - k \int \ln(t)^{(k-1)}\, dt$$

Das kann dann als eine rekursive Prozedur geschrieben werden:

```
> logint:=proc(k)
  if k=1 then RETURN(t*ln(t)-t) else
   t*ln(t)^k-k*logint(k-1)
fi
end:
```

Rufen wir diese Prozedur für k =3 auf, so bekommen wir als Ergebnis:

```
> 2*logint(3);
```

$$2\, t\ln(t)^3 - 6\, t\ln(t)^2 + 12\, t\ln(t) - 12\, t$$

```
> subs(t=exp(sqrt(x)),%);
```

$$2\, e^{(\sqrt{x})}\ln(e^{(\sqrt{x})})^3 - 6\, e^{(\sqrt{x})}\ln(e^{(\sqrt{x})})^2 + 12\, e^{(\sqrt{x})}\ln(e^{(\sqrt{x})}) - 12\, e^{(\sqrt{x})}$$

```
> factor(simplify(%,symbolic));
```

$$-2\, e^{(\sqrt{x})}(-x^{(3/2)} + 3\, x - 6\sqrt{x} + 6)$$

Als Kontrolle kann die Integration mit Hilfe von Maple direkt erledigt werden.

Interessant ist der Fall, wenn Maple keinen Hinweis geben kann, und das Integral nicht unmittelbar bestimmt werden kann. In diesen Fällen sollen zusätzliche spezielle Umformungen eingesetzt werden, und eine zusammengesetzte interaktive Tätigkeit kann uns Erfolg bringen.

2. Beispiel *Man bestimme das folgende Integral*

```
> Int((1+exp(-x))/(1+x*exp(-x)),x);
```

$$\int \frac{1 + e^{(-x)}}{1 + x\, e^{(-x)}}\, dx$$

Wir warten neugierig, was für einen Rat uns das System gibt.

```
> Hinweis(%);
Creating problem #1
```

$$[Substitution, u = -x, u]$$

```
> Regel[%](%%);
Applying substitution x = -u, u = -x with dx = -1*du, du = -1*dx
```

$$\int \frac{1+e^{(-x)}}{1+x\,e^{(-x)}}\,dx = \int \frac{1+e^{u}}{-1+e^{u}\,u}\,du$$

Damit sind wir nicht um vieles klüger geworden und suchen wiederum um Rat:

```
> Hinweis(%);
```

$$[\ ]$$

Das System kann uns nichts sagen! Wir versuchen daher selbst $e^{(-x)} = \frac{1}{e^x}$ zu setzen!

```
> Regel[umschreiben,exp(-x)=1/exp(x)](Int((1+exp(-
x))/(1+x*exp(-x)),x));
```

$$\int \frac{1+e^{(-x)}}{1+x\,e^{(-x)}}\,dx = \int \frac{e^{x}+1}{e^{x}+x}\,dx$$

Sofort sieht man, dass der Zähler die Ableitung des Nenners ist. Dafür ist die Substitution $t = e^x + x$ zweckmäßig.

```
> Regel[Substitution,t=exp(x)+x](%);
Applying substitution t = exp(x)+x with dt = (exp(x)+1)*dx
```

$$\int \frac{1+e^{(-x)}}{1+x\,e^{(-x)}}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt$$

Es ist schon ein Grundintegral. Mit dem **value** Befehl kann somit die Lösung gefunden werden.

```
> value(%);
Reverting substitution using t = exp(x)+x
```

$$\int \frac{1+e^{(-x)}}{1+x\,e^{(-x)}}\,dx = \ln(e^{x}+x)$$

Literatur

Trouche, L. (2003). Managing The Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Environment (CBLE) : Guiding Student's Process Command Through Instrumental Orchestrations, http://www.lkl.ac.uk/research/came/events/reims/2-Presentation-Trouche.doc

Sárvári, Cs.(2005). Zur Integration von CAS in die Lernumgebung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, 501-504.

Ingolf SCHÄFER, Universität Bremen

Rekonstruktion des Handlungspotenzials „schwacher“ [1] Schülerinnen und Schüler der Sekundarschule

In diesem Vortrag geht es darum, welches Handlungspotenzial im Bezug auf den Gegenstand Mathematik Schülerinnen und Schüler haben, die im gewöhnlichen Unterricht als leistungsschwach gelten, und wie dieses Handlungspotenzial in den jeweiligen Situationen aufgebaut wird. Dabei soll ausgehend von einer psychologischen Handlungstheorie der Begriff des Handlungspotenzials erläutert und in Beispielen seine Entstehung in Fördersituationen rekonstruiert werden.

Stand der Forschung

Das Phänomen „leistungsschwacher“ Schüler wird im Grundschulbereich häufig unter dem Begriff der „Rechenschwäche“ diskutiert. Dabei zeigt sich, dass „Rechenschwäche“ nicht durch wenige Faktoren beschrieben werden kann, sondern ein überaus komplexes Phänomen darstellt (Lorenz, 1991, Moser Opitz, 2007) und eine angemessene Förderung nicht im kleinschrittigen Aufdröseln, sondern eher in einem aktiv-verständnisfördernden Unterricht liegt (Lorenz, 1991, Wittmann, 2001, Moser Opitz 2007). Eine Sammlung zum Thema „Rechenschwäche“ in der Sekundarstufe 1 stellt derzeit Siegbert Schmidt zusammen.

Die gesammelten Kenntnisse über Strategien, typische Fehler u.v.m. sind zum großen Teil von der Grundschule auf die Sekundarstufe 1 übertragbar, wenn es um das Rechnen an sich geht. Die pyschologisch-motivationale Komponente und deren Bedeutung ist aber bisher nur wenig berücksichtigt worden.

Theoretisch-methodischer Hintergrund

Grundlage unseres theoretischen Hintergrunds bildet ein psychologisch-soziologischer Ansatz zur Handlungstheorie. Wir gehen dabei von einem Handlungsbegriff aus, wie ihn Oerter (Oerter, 1982) vorschlägt. Dabei ist Handlung die primäre Realität. Alle Art der Vergegenständlichung in der Umwelt und Herstellung von Sozialität kann nur über Handlungen erfolgen. Insbesondere wird der Objektbezug zum Gegenstand Mathematik über Handlungen hergestellt.

Vor diesem Hintergrund fassen wir „Rechenschwäche“ als situativen Man-

[1] Die Begriffe „schwach“ bzw. „rechenschwach“ werden hier benutzt, um umständlichere sprachliche Konstrukte zu vermeiden. Eine bessere Beschreibung liefert der zweite Abschnitt.

gel an Handlungsoptionen auf. Dieser situative Mangel kann also nicht einseitig und dauerhaft einem Individuum zugeordnet werden, sondern stellt sich je nach Situation ein oder nicht.

Um diese Situationen genauer zu untersuchen, führen wir den Begriff des *Handlungspotenzials* ein. Unter dem Handlungspotenzial einer Person bezüglich eines Gegenstands verstehen wir die Summe der Möglichkeiten zu handeln, die ein Subjekt im Bezug auf eben diese Gegenstände in bestimmten Situationen hat.

Es ist offenbar, dass sich das Handlungspotenzial nicht vollständig beschreiben[2] lässt, sondern dass wir vielmehr Indikatoren für die Gestalt des Handlungspotenzials aus den tatsächlich gegebenen Handlungen des Individuums in der jeweiligen Situation und den Handlungen in ähnlich gelagerten Situationen gewinnen.

Für uns sind zwei Dimensionen des Potenzials von großer Bedeutung: Zum einen die kognitive Dimension, für die die epistemischen Handlungen des *Wiedererkennens*, des *Aufbauens* und des *(Re-)Konstruierens* im Sinne der RBC-Modells[3] (Hershkowitz et al., 2001) als Indikatoren fungieren. Zum anderen die psychologisch-motivationale Dimension. Hierbei suchen wir nach Handlungen, die das Erfüllt- oder Nichterfülltsein der drei psychologischen Grundbedürfnisse *Kompetenzerlebnis*, *Autonomieerlebnis* und *sozialer Eingebundenheit* (Deci & Ryan, 2000) anzeigen. Wir verwenden diese Handlungen als Indikatoren für die motivationale Komponente, denn nach der Selbstbestimmungstheorie (Deci & Ryan, 2000) ist gerade die Erfüllung dieser Bedürfnisse notwendig für die Entstehung von intrinsischer Motivation .

Ein Analysebeispiel

Im Folgenden soll beispielhaft die Analyse eines Ausschnitts einer Sitzung mit einem Schüler der 6. Klasse Sekundarschule näher dargestellt werden.

Ziel dieser Förderung war einerseits eine Lernumgebung zu schaffen, die alle drei Grundbedürfnisse befriedigt und dadurch die Vermeidungstendenzen gegenüber Mathematik sofern vorhanden abschwächt und andererseits die Berücksichtigung der Lernwünsche des Kindes. Die Aufgabe in Abb. 1 war Gegenstand des folgenden, kurzen Transskriptausschnitts.

---

[2] Wir sehen im Handlungspotenzial ein Art lokaler Messgröße für Kompetenzen. Es ermöglicht eine detailliertere, feinere Untersuchung als mittels klassischer Tests.

[3] RBC steht für *Recognizing (Wiedererkennen), Building-With (Aufbauen)* und *Constructing (Konstruieren).*

Abb. 1: Onkel Peter rechnet 25:5. Was denkt er sich dabei?

(4:06) S: Der [zeigt mit Finger auf Onkel Peter] rechnet immer 5 zurück.

(4:09) L: Mmhm. Warte mal ... Und wie kommt er dann.. und wie nutzt ihm das irgendwie 25 auszurechnen? Also 25 durch 5 zu berechnen? Nutzt ihm das da irgendwas? Immer diese 5 abzuziehen? Immer 5 zurückzurechnen? (Ende 4:30)

(4:42) S: Ich glaub eher nicht.

(4:50) S: Doch. Wenn er von 25 bis 5 zurückzählt und wenn er die, diese Schritte zählt. Das ist dann das Ergebnis. (betont)

Für die Rekonstruktion des Handlungspotenzials wurde eine Analyse des Transskripts in drei Schritten vorgenommen. Zuerst wurde eine inhaltliche Analyse auf fachlicher Ebene durchgeführt, dann wurden die entsprechenden epistemischen Handlungen identifiziert und im letzten Schritt die Erfüllung der drei psychologischen Grundbedürfnisse geprüft.

Inhaltlich zeigt der Schüler hier, dass er das allgemeine Muster aus dem Teilbild fortsetzen und Division als iterierte Subtraktion verstehen kann. An epistemischen Handlungen erkennt man ein Aufbauen mit den Strukturen und eine Rekonstruktion[4] der Aufteilungsvorstellung der Division. Der Erkenntnisprozess von Minute 4:42 bis 4:50 stellt eine Kompetenzerfahrung dar, die ihren Ausdruck in der Betonung findet.

Was bedeutet das nun für das Handlungspotenzial? Der Schüler hat in dieser Situation das Potenzial die Rechenstrategie des „Onkel Peter" zu durchschauen und selbst auch mit dieser Strategie Divisionsaufgaben zu lösen. Durch das Kompetenzerlebnis wird zumindest eines seiner Grundbedürfnisse befriedigt, so dass wir einen motivierenden Charakter der Situation unterstellen können.

Freilich bedeutet das nicht, dass dieser Schüler diese Strategien bereits vollständig gelernt hat, wie sich im Verlauf der Sitzung zeigte: In einer ähn-

[4] Wir sprechen hier nicht von einer Konstruktion, weil wir davon ausgehen, dass diese Vorstellung mindestens einmal im Leben des Schülers bereits konstruiert wurde.

lichen Situation eine Viertelstunde später scheint diese Lösungsstrategie durch die aktuellen, neuen Kontexte zu verblassen. Die Frage lautet also wie man das Handlungspotenzial für nachfolgende Situationen in diesem Bereich ausdehnen kann?

Einige Beobachtungen

Abschließend einige Beobachtungen, die sich während der Analyse von solchen Einzelförderungssitzungen mit unterschiedlichen Schülern der Klassen 6-10 der Sekundarschule bzw. Hauptschule häufig gezeigt haben.

1.) Obwohl zum Teil sehr gute und vollständige Grundvorstellungen zu arithmetischen Operationen verwirklicht worden sind, werden diese beim Rechnen schlicht ignoriert. Es scheint, dass diese Vorstellungen während des Rechenvorgangs nicht in Zusammenhang mit der Operation gebracht werden können.

2.) Es gibt ein typisches Verlaufsmuster „kleiner Schritte“, d.h. die Schüler lösen nur winzige Teile einer Aufgabe und warten nach jedem Teil auf eine Bestätigung der Richtigkeit des Ergebnisses. Dabei entsteht nach Außen der Eindruck fehlender Selbstständigkeit (z.T. vermutlich ein Produkt der Unterrichserfahrung).

3.) Die Schüler rekonstruieren in den Fördersituationen „Ausschnitte“ des Schulalltags und offenbaren dabei implizit vermittelte Teilbilder z. B. auf Mehltüten „da stehen immer Brüche drauf“ (gemeint waren 1/2 und 1/4; aus Übungsaufgaben mit 1/4 kg Mehl im Unterricht).

Literatur

Deci, E. L. and Ryan, R. M. (2000). The" What" and" Why" of Goal Pursuits: Human Needs and the Self-Determination of Behavior. Psychological Inquiry, 11(4), 227–268.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., and Dreyfus, T. (2001). *Abstraction in Context: Epistemic Actions*. Journal for Research in Mathematics Education, 32(2), 195–222.

Lorenz, J. H. (1991). *Rechenschwache Schueler in der Grundschule. Eklärungsversuche und Foerderstrategien*. Teil 1+2. JMD, 12(1), 3-34 und 171-198.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie: Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern.* Haupt Verlag AG.

Oerter, R. (1982). *Interaktion als Individuum-Umwelt-Bezug.* , 101-127. in Lantermann, E. (1982). *Wechselwirkungen : psychologische Analysen der Mensch-Umwelt-Bezie–hung* . Göttingen : Verlag für Psychologie.

Wittmann, E. Ch. (2001). *Ein alternativer Ansatz zur Förderung „rechenschwacher“ Kinder*. www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/mathe2000/pdf/foerderkonzept.pdf

Georg SCHIERSCHER, LI-Schaan

Die Krümmung: Gefährtin der Steigung – aber Stiefkind des MU?

Abriss

Nicht selten hört man, dass 100% Steigung ‚lotrecht' bedeute und dass zwischen Steigung und Steigungswinkel ein linearer Zusammenhang bestehe! Ist da vielleicht im Mathematikunterricht [MU] etwas schief gelaufen? Steigung und Krümmung sind günstige Objekte zum Erlernen math. Begriffsbildung und Methodik als auch „vergleichender Anatomie". Mit den Werkzeugen des Computers lässt sich die im MU vernachlässigte Krümmung ebener Kurven schön veranschaulichen und numerisch angehen.

Steigung – Gerade

Abb. 1: Verkehrssignal: 24 % Steigung.

Abb. 2: Verkehrssignal: 15 % Gefälle.

Verkehrssignale regen zu Fragen an wie:

- Was bedeutet 24 % Steigung (Abb. 1) bzw. 15 % Gefälle (Abb. 2)?
- Wie kann in der Sprache der Mathematik zwischen Steigung und Gefälle unterschieden werden?
- Inwieweit sind die obigen Abb. zum „Nennwert" zu nehmen?
- In welcher Beziehung stehen Steigung und Steigungswinkel?
- Was bedeutet 100 % Steigung bzw. 100 % Gefälle?

Auf die letzte Frage bekommt man häufig – auch von Erwachsenen – die Antwort: «100 % Steigung/Gefälle = senkrecht hoch/tief, also 90°» (!) Schlimmer noch: «50 % Steigung = 45°-Anstieg», also ein linearer Zusammenhang zwischen Steigung und Steigungswinkel. (!!)

Die Richtung/Steigung einer Geraden ist (intuitiv) konstant; die **Konstanz entsprechender Seitenverhältnisse** der ähnlichen Stützdreiecke (Abb. 3) bietet sich geradezu an zur Definition der Steigung m.

In der Sek I ist es nun wichtig, Vor- und Nachteile der verschiedenen Wahlmöglichkeiten $m=\frac{\Delta x}{\Delta h}$, $m=\frac{\Delta y}{\Delta h}, \dots, m=\frac{\Delta x}{\Delta y}$, $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu diskutieren.

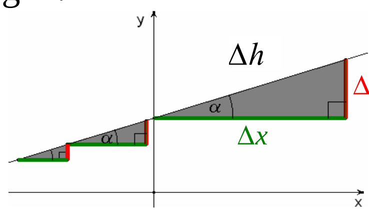


Abb. 3: Stützdreiecke.

Der Lernende mag stufengemäss, d.h. elementargeometrisch (Abb. 4), trigonometrisch (Abb. 5) und dann formal, wiederholt erfahren, dass zwischen der Steigung und dem Steigungswinkel kein linearer Zusammenhang besteht, dass also im allgemeinen $\tan(2\alpha) \neq 2 \cdot \tan(\alpha)$.

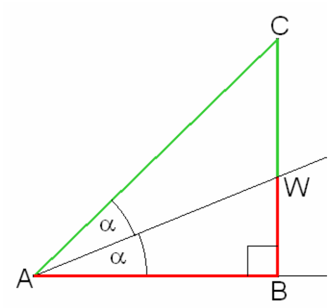


Abb. 4: Winkelhalbierende im ΔABC.

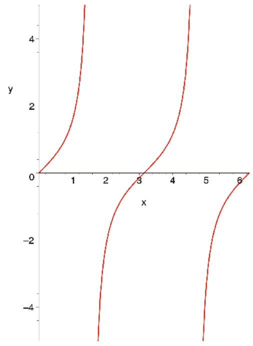


Abb. 5: Graph der Tangens-Funktion.

Krümmung – Kreis

Abb. 6: Gefährliche *Rechts*kurve.

Abb. 7: Gefährliche *Links*kurve.

Abb. 8: Einfassungen.

Abb. 9: Verschiedenförmige Zähnungen bei Briefmarken.

Die Beschäftigung mit den Abb. 6-8 kann viele Fragen und Beobachtungen zum Thema Krümmung initiieren; die Lernenden mögen insbes. ihre Erfahrungen beim Heraustrennen der Briefmarken (Abb. 9) kommentieren.

Krümmungskreise

Die Richtung/Steigung einer Kurve wird (in der Sek II) dadurch gewonnen, dass wir diese durch eine Grenzbetrachtung zu einer passenden Geraden in Beziehung setzen. Analog können wir zum Begriff der Krümmung *k* einer Kurve gelangen, indem wir diese mit einem passenden Kreis in Beziehung setzen. Eine Gerade ist durch zwei verschiedene Punkte bestimmt und hat überall die gleiche Richtung; entsprechend ist ein Kreis durch drei verschiedenene – vorerst nicht kollineare – Punkte bestimmt und überall in gleicher Weise gekrümmt, und zwar umso stärker, je kleiner sein Radius ist:

$|k| = 1/r$ für $r \neq 0$

$k = 0$ im Falle der Kollinearität von P_1, P_2 und P_3.

$k>0$ bzw. $k<0$, falls der Umlaufsinn des $\Delta P_1P_2P_3$ positiv (Abb. 10) resp. negativ (Abb. 11) ist.

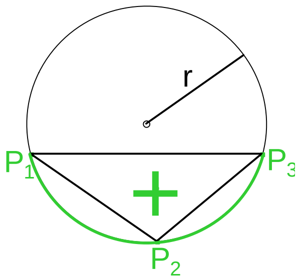


Abb. 10

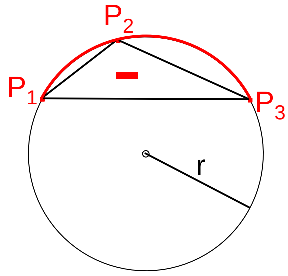


Abb. 11

Steigungs- und Krümmungsverlauf bei der Kreisbogenspirale

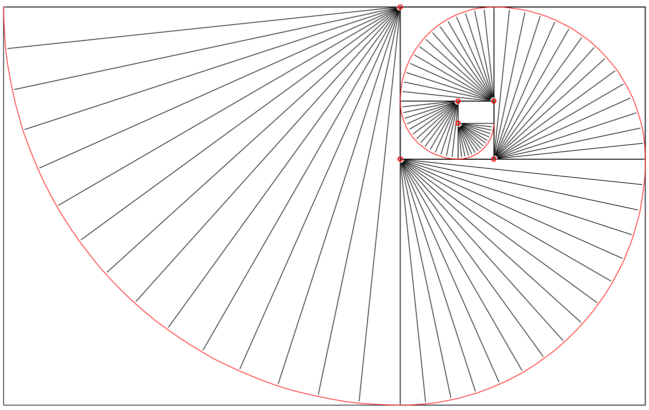


Abb. 12: Spirale aus sechs Viertelkreisen im Goldenen Rechteck.

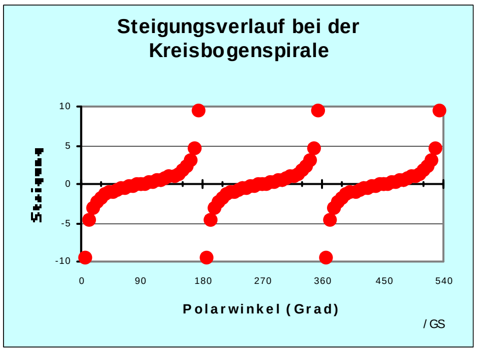


Abb. 13: Steigungsdiagramm.

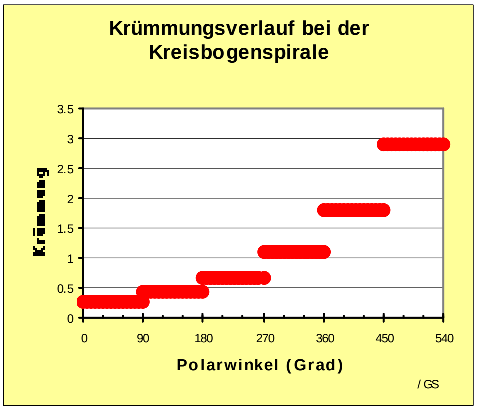


Abb. 14: Krümmungsdiagramm.

Die Abb. 12, 13 und 14 wollen einzeln und im Verbund interpretiert werden (wozu hier kein Platz ist). Nur soviel: An den Kreisbogenübergängen finden Krümmungssprünge statt! – solche sind bei Schnellstrassen nicht erlaubt. Bei deren Konzeption spielt die Klothoide (siehe unten) eine ausgezeichnete Rolle.

Krümmungskreis als Grenzgebilde

Es sei P_0 ein Punkt im Innern eines beliebigen, aber „gutartigen“ Kurvenstücks *c* gegeben, P sei ein weiterer Kurvenpunkt in hinreichender Nähe von P_0. Dann schneiden sich die Kurvennormalen durch P_0 und P in einem Punkt M, der beim Grenzübergang $P \rightarrow P_0$ zum Mittelpunkt des Krümmungskreises von *c* in P_0 wird. Sei Q ein weiterer Punkt auf *c*; dann kann der Krümmungkreis in P_0 in nahe verwandter Art als Grenzlage eines Kreises durch P_0, P und Q erhalten werden. (Im vektoriellen Zugang zur Krümmung habe ich leider keine Lehrerfahrung.)

Wir lassen eine kleine Auswahl weiterer Bilder sprechen:

Steigungs- und Krümmungsverlauf bei der Doppelklothoide

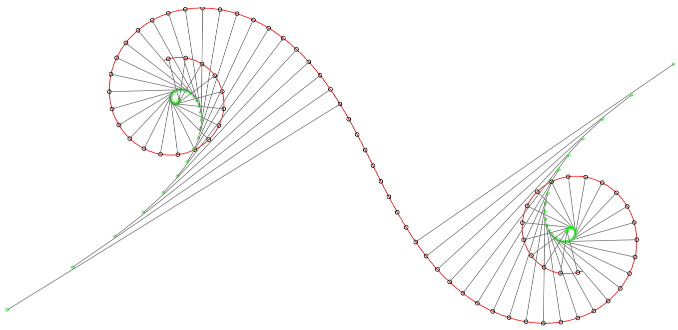


Abb. 15: Doppelklothoide mit Kurvennormalen und Evolute (=Krümmungsmittelpunktskurve).

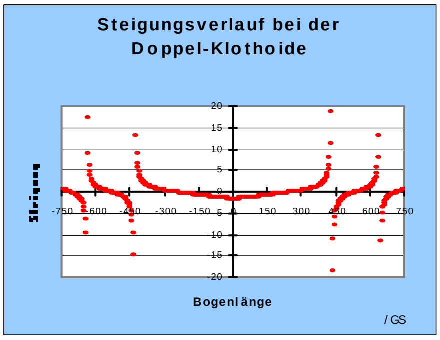


Abb. 16: Steigungsdiagramm.

Markante Eigenschaft der Klothoide: Ihre Krümmung wächst linear mit der Bogenlänge. Dank dessen werden bei Schnellstrassen zwischen Gerade und Kreisbogen oder zwischen zwei Kreisbogen zur Vermeidung von Krümmungssprüngen Klothoidenstücke als Übergangsbogen eingesetzt (vgl. altgediente Kloth.-Lineale).

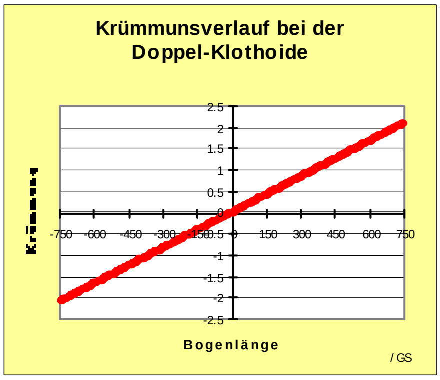


Abb. 17: Krümmungsdiagramm.

Stabilität eines Parabelrollers[1]

Beim Parabelroller (Abb. 18) kann der Schwerpunkt S durch Verschieben der Magnetknöpfe verändert werden. Die Evolute der Parabel sei mit E bezeichnet. Wir erwähnen wenigstens noch den der Schulmathematik zugänglichen Sachverhalt:

Liegt S

1. unterhalb von E, dann gibt es genau eine Ruhelage
2. auf E, dann gibt es zwei Ruhelagen
3. oberhalb von E, dann gibt es drei Gleichgewichtslagen, wobei die mittlere instabil ist.

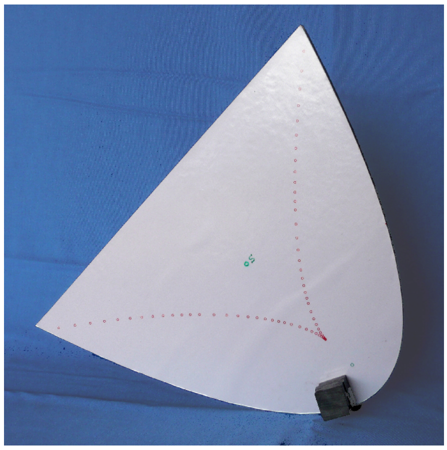


Abb. 18: Parabelroller mit variablem Schwerpunkt.

---

[1] 1. N. Sigrist: Auf der Kippe. In: Berichte über Mathematik und Unterricht. Hrsg. von Urs Kirchgraber. ETH Zürich (1995), Bericht No. 95-01.
2. Ian Stewart: Mathematische Unterhaltungen. In: Spektrum der Wissenschaft, Oktober 1992. (Seiten 10-15, insbesondere «Die Geometrie der Auftriebskurve»).

Thomas SCHILLER, Linz

GPS- Beispiele im Mathematikunterricht

Beispiele mit Realitätsbezug sind für SchülerInnen wichtig, damit sie den Sinn der Mathematik leichter erkennen können.

Ich habe mit meiner Diplomarbeit versucht, das sehr realitätsnahes Thema „Global Positioning System“ für den Unterricht so aufzubereiten, dass der Schwierigkeitsgrad der Beispiele schrittweise erhöht wird und am Ende den SchülerInnen noch ein weiterer Ausblick auf die Realität gegeben werden kann. Das Thema eignet sich gut für offenen und fächerübergreifenden Unterricht (z. B. Geographie (verschiedene Erdmodelle, Kartographie), Informatik (kleine Programme zur leichteren Berechnung von Flächen etc.), darstellende Geometrie (Kugeln schneiden), Physik (Relativitätstheorie, Bestimmung der Signallaufzeit).

Funktionsprinzip von GPS

Die Positionsbestimmung bei GPS funktioniert nach dem Prinzip der Trilateration, also der Entfernungsmessung zu drei Punkten (mit bekannten Koordinaten). Dabei wird die Entfernung nach dem Prinzip „Time of Arrival“ gemessen, also mit demselben Prinzip, wie man die Entfernung eines Gewitters bestimmt (Entfernung = Signalgeschwindigkeit * Signallaufzeit).

Misst man bei der zweidimensionalen Positionsbestimmung (also das Prinzip von GPS in der Ebene betrachtet) die Entfernung zu den „Satelliten“ mit bekannten Koordinaten, weiß man, dass man sich auf Kreislinien um diese mit der gemessenen Entfernung als Radius befindet. Nach dem Schnitt der Kreise kann man die Koordinaten der eigenen Position bestimmen. Dieses Prinzip lässt sich mit den SchülerInnen auch aktiv als Rollenspiel simulieren, bei dem SchülerInnen die Satelliten repräsentieren und weitere SchülerInnen die Satelliten an einer Schnur (mit der zuvor gemessenen Entfernung als Länge) umkreisen. Dadurch wird das Prinzip verinnerlicht und die SchülerInnen erfahren selbstständig, wie viele Satelliten zur Positionsbestimmung notwendig sind. Der Schnittpunkt der Kreise lässt sich bei angenehmen (unrealistischen) Zahlen händisch berechnen, indem die Differenzen von Kreisgleichungen betrachtet werden, wodurch man lineare Gleichungen erhält.

Die dreidimensionale Positionsbestimmung ist ein Schritt näher zur Realität. Hier werden Kugeln geschnitten. Zur Visualisierung und zum Rechnen bietet sich spätestens ab hier der Computereinsatz an, vor allem, weil man ab nun unbedingt mit realistischen Daten (z. B. echte Satellitenpositionen – siehe Link in Literaturliste) arbeiten sollte.

Fehlerquellen bei GPS

Kein System ist perfekt, auch bei GPS gibt es Störquellen und Ungenauigkeiten. Diese lassen sich im Unterricht mit Hilfe der analytischen Geometrie analysieren. Der Schritt, Fehlerquellen mit zu berücksichtigen, ist ein weitere Schritt in Richtung Realität, der natürlich auch den Schwierigkeitsgrad möglicher Beispiele erhöht. Einige Fehlerquellen wären etwa: Abweichungen der Satelliten von ihren Umlaufbahnen wegen leichter Gravitationsschwankungen (Sonne, Mond, …), Anzahl sichtbarer Satelliten (sind genügend für Positionsbestimmung verfügbar?), Mehrwegeffekt (Reflexion des GPS- Signals an einem Gebäude o. ä., bevor es zum Empfänger gelangt), atmosphärische Effekte (und dadurch Ablenkung und Abbremsung der Sattelitensignale), Satellitengeometrie (Position der Satelliten vom Empfänger aus gesehen), Uhrenfehler (Ungenauigkeit der Quarzuhr im Empfänger), Auswirkungen der Relativitätstheorie, …

Uhrenfehler

Jeder GPS- Satelliten besitzt mehrere Atomuhren. Alle Satelliten sind untereinander bestens synchronisiert. Beim GPS- Empfänger kann man aus Kosten- und Gewichtsgründen keine Atomuhren einbauen, weshalb hiergewöhnliche Quarzuhren verwendet werden. Atomuhren besitzen eine relative Genauigkeit von 10^{-12}, pro Tag gehen die Uhren also maximal 10^{-7} Sekunde falsch. Der daraus entstehende Fehler bei der Positionsbestimmung (falsch gemessene Entfernungen) kann durch die Bodenstationen, welche die Satelliten überwachen, sehr gut korrigiert werden und bleibt vernachlässigbar. Eine Quarzuhr hat eine relative Genauigkeit von 10^{-6} was pro Tag einen Fehler von ca. 10^{-1} Sekunden ergibt. Der Fehler in der Positionsbestimmung (Laufzeit wird ja mit Lichtgeschwindigkeit (=Signallaufzeit) multipliziert) würde im „worst case“ ca. 26000 km ergeben. Auf Grund der ungenauen Uhr im Empfänger werden statt der eigentlichen Entfernungen so genannte Pseudoentfernungen zu den Satelliten gemessen, die also (je nach Fehler der Uhr) etwas länger oder kürzer als tatsächlich sind. Mathematisch betrachtet erhalten wir in unserem eigentlichen Gleichungssystem mit drei Gleichungen (Kugelgleichungen, dreidimensionale Koordinaten als Unbekannte) noch eine weitere Unbekannte hinzu. Um nun die Position (und den Uhrenfehler) zu berechnen, wird somit eine vierte Entfernungsmessung (Gleichung) benötigt.

Der Uhrenfehler lässt sich im Unterricht im zweidimensionalen Fall etwa mit einer dynamischen Geometriesoftware gut veranschaulichen. Durch einen Schieberegler könnte man den Fehler der Empfängeruhr einstellen. Das Verändern des Fehlers führt zu unterschiedlichen Kreisradien. Die Uhr ist dann richtig eingestellt, wenn sich die Kreise tatsächlich in einem Punkt schneiden. Dass der Uhrenfehler (wenn ein GPS- Empfänger mit Satelliten verbunden ist) genau ausgerechnet werden kann ist auch der Grund, weshalb man die Uhr beim Empfänger nicht einstellen muss. Sie wird ja quasi mit den Atomuhren der Satelliten synchronisiert.

Mehrwegeffekt, Satellitengeometrie

Beim Mehrwegeffekt gelangt das Signal nicht direkt zum Empfänger, sondern wird zuvor etwa an einem Gebäude reflektiert (siehe Abb. 1). Dadurch wird eine längere Entfernung gemessen, als der Satellit tatsächlich entfernt wäre. Durch diesen Effekt entsteht ein Fehler von wenigen Metern. Im Unterricht soll man hier unbedingt mit realistischen Positionsdaten (sowohl Satelliten, als auch Empfänger) an dieses Beispiel gehen. Je nachdem, von welchem Satelliten man das Signal durch Reflexion an einem Gebäude (etwa rechts neben der Position) verfälscht, wird der entstandene Fehler sein unterschiedlich groß sein. Hier spielt nämlich auch die Satellitengeometrie eine wichtige Rolle.

Unter Satellitengeometrie wird die Position der Satelliten vom Empfänger aus betrachtet. Auf Grund der Ungenauigkeiten durch die verschiedensten Fehlerquellen können wir nicht davon ausgehen, dass sich der Empfänger genau auf Kreislinien befindet, sondern eher auf Kreisringen. Befinden sich nun zwei Satelliten wie in Abb. 2 vom Empfänger aus betrachtet eher hintereinander, so wird die Schnittfläche zwischen den Kreisringen sehr groß. Würde zwischen den Satelliten vom Empfänger aus gesehen ein Winkel von ca. 90° bestehen, so wäre die Schnittfläche sehr klein (und quadratähnlich). Je nachdem wie günstig der Satellit steht, dessen Signal zur Simulierung des Mehrwegeffekts verfälscht wird, desto stärker wirkt sich der Fehler auch auf die Positionsbestimmung aus.

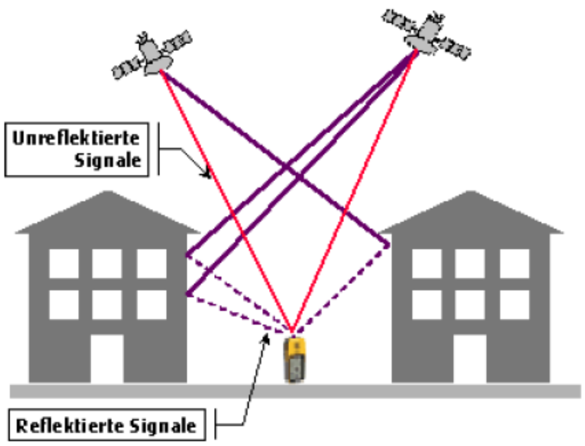


Abb. 1 (Mehrwegeffekt)

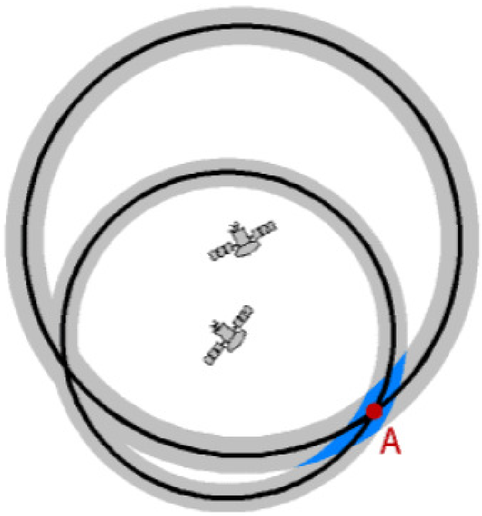


Abb. 2 (Satellitengeometrie)

Geschwindigkeitsbeispiele

Man hört oft, dass der Autotachometer relativ ungenau ist. Ich habe mich nun gefragt, wie genau denn die Geschwindigkeitsanzeige von Navigationsgeräten sei. Dies lässt sich im Unterricht mit Hilfe der analytischen Geometrie gut analysieren. Bei den Beispielen zur Geschwindigkeit habe ich angenommen, dass die Position (und die Anzeige der Daten) vom Autonavigationsgerät einmal pro Sekunde aktualisiert wird.

Genauigkeit allgemein: Wir betrachten ein Straßenstück, das mit 100 km/h innerhalb einer Sekunde befahren wird. Unter der extremen Annahme, dass bei der ersten Positionsbestimmung eine kleine Abweichung passierte und bei der zweiten derselbe Fehler, jedoch in die entgegengesetzte Richtung (also etwa ca. 6 Meter vor der eigentlichen Position, beim zweiten Mal ca. 6 Meter danach) weicht die Geschwindigkeitsanzeige mit GPS um ca. 43 km/h ab. In der Realität wird dieser Fall aber nicht auftreten, denn bei so starken Signalschwankungen wird das Navigationsgerät melden, dass der Empfang zu schwach sei. Würde man eine längere Fahrstrecke (längere Fahrzeit) betrachten, so fällt der Fehler kaum ins Gewicht.

2D vs. 3D: Unklar ist, ob das Navigationsgerät die Geschwindigkeit auf Basis der dreidimensionalen Position oder auf der zweidimensionalen Position in der (angezeigten) Karte basierend berechnet. Der Unterschied lässt sich durch getrennte Betrachtung beider Situationen berechnen. Ergebnis: Fehler vernachlässigbar (ca. 0,55%). Bei diesem Beispiel bietet es sich an, auf (geometrische) Verhältnisse näher einzugehen.

Gas geben! Analysiert man die Anzeige des Navigationsgeräts beim Beschleunigen, so erhält man einen großen Fehler. Zusammengefasst ist also die Geschwindigkeitsanzeige in einem Navigationsgerät relativ genau, solange man die Geschwindigkeit nicht zu rasch ändert.

Literatur

Abb. 1 und 2: Erreichbare Genauigkeit bei GPS Positionsbestimungen; http://www.kowoma.de/gps/Genauigkeit.htm (10.08.2006)

Weitere verwendete Quellen siehe Quellenverzeichnis in meiner Diplomarbeit „Wo bin ich? – Mathematische Mittel zur Positionsbestimmung (GPS) als Thema des Mathematikunterrichts“, angefertigt an der Johannes Kepler Universität in Linz (Österreich) im Mai 2007, betreut durch Jürgen Maaß, welche ich Ihnen gerne auf Anfrage zuschicke (Mail an ts_work@gmx.net). (Die Diplomarbeit beinhaltet auch mehr Beispiele und Informationen zu GPS sowie didaktische Gedanken.)

realistische Satellitenpositionen: z. B. http://www.movingsatellites.com

Andrea SCHINK, Dortmund

Vom Falten zum Anteil vom Anteil - Untersuchungen zu einem Zugang zur Multiplikation von Brüchen

1. Schwierigkeiten mit der Multiplikation von Brüchen

Viele empirische Studien belegen Schwierigkeiten von Lernenden mit Brüchen, insbesondere beim Multiplizieren (z.B. Wartha 2007, Padberg 2002[3], Fischbein u.a. 1985): Während viele Schüler Rechenregeln vergleichsweise erfolgreich anwenden, haben sie inhaltliche Vorstellungen zur Multiplikation oft nur unzureichend aufgebaut. So werden etwa in Anwendungssituationen (z.B. zur Modellierung einer außermathematischen Situation) ungeeignete Operationen ausgewählt, oder es gelingt zu begrenzt, einen gegebenen Term mit einer inhaltlichen Deutung zu belegen (Prediger 2008, Wartha 2007). Einige dieser Schwierigkeiten lassen sich auf die Notwendigkeit zurückführen (Prediger 2008), bei der Zahlbereichserweiterung auf Bruchzahlen die Operation neu zu deuten (z.B. als ein Anteil-vom-Anteil-Nehmen) und die für natürliche Zahlen geltenden Regeln für Brüche neu zu prüfen (z.B. die Vorstellung „Multiplizieren vergrößert").

Daher stellt sich nun die Frage, wie es gelingen kann, tragfähige Vorstellungen für die Multiplikation von Brüchen aufzubauen. Für das Design eines geeigneten Lernarrangements sollen im Sinne der Didaktischen Rekonstruktion (vgl. Kattmann / Gropengießer 1996) zunächst Lernendenperspektiven erfasst werden mit dem Ziel, Aufschlüsse über bestehende Schwierigkeiten und vorhandene Ressourcen zu erhalten. Dazu wurde eine Vorstudie durchgeführt, deren Ergebnisse hier dargestellt werden sollen.

2. Design einer Vorstudie

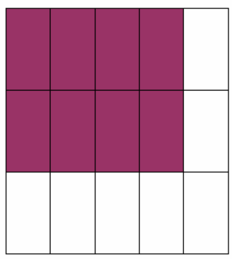


Abb. 1

Ausgangspunkt der Studie war ein aus unserer Sicht überzeugender Zugang zur Multiplikation im Zahlenbuch 6 (Affolter u.a. 2004[2], ähnlich bei Sinicrope / Mick 1992), in dem die Vorstellung des Anteil-vom-Anteilnehmens über Flächenanteile aufgebaut werden soll: Den Schülern wird eine Strategie zur Bestimmung von 1/3 von 1/4 eines Blattes präsentiert, welche sie nachvollziehen und anschließend selbst anwenden sollen. 2/3 von 4/5 wäre dann in Abb. 1 die dunkle Fläche. Den Anteil kann man ablesen: 2/3 von 4/5 sind (2·4) von (3·5) Kästchen, also 8 von 15 Kästchen, also 8/15 von der Gesamtfläche. Hier ist bereits ein wesentlicher, aber noch nicht endgültiger Schritt zur Multiplikation von Brüchen gemacht worden (im Zahlenbuch wird dazu das Meterquadrat betrachtet, wobei die Seitenlängen der Flächen als Bruchteile von 1 m gedeutet werden).

Diesen Ansatz habe ich modifiziert in vier halbstandardisierten Partnerinterviews von 30-100 min Dauer (teilweise zwei Sitzungen) in einer 6. Gymnasialklasse eingesetzt. Die Schüler hatten Vorerfahrungen in einem handlungsorientierten Zugang zu Brüchen (zum Aufbau der Vorstellung vom Teil eines Ganzen in Zerteilprozessen und Verteilsituationen) und begannen im Regelunterricht gerade mit Addition, Subtraktion, Erweitern und Kürzen.

Die Lernumgebung dieser Vorstudie zielte auf den Vorstellungsaufbau über das Falten zum Anteil vom Anteil und darüber zur Multiplikation von Brüchen. Zuerst sollten die Schüler den geforderten Anteil vom Anteil durch Falten, bzw. Zeichnen bestimmen; erst für Stammbrüche (auch mit Vorhersage des Ergebnisses), dann für Nicht-Stammbrüche (analog).

3. Forschungsfragen und erste Ergebnisse

Die Arbeitsprozesse der Kinder wurden hinsichtlich folgender Forschungsfragen untersucht:

1. Welche inhaltlichen Vorstellungen bringen die Schüler mit, welche entwickeln sie?
2. Welche (Denk-) Hürden treten auf?

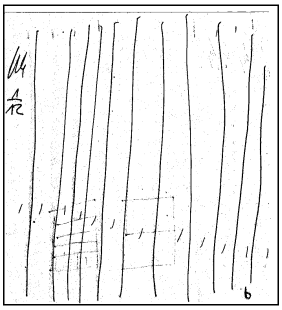


Abb. 2

Dass in den Interviews zu den Faltrichtungen (im Gegensatz zu der Lernumgebung im Zahlenbuch 6) keine Vorgaben gemacht wurden, erwies sich als *selbst produzierte Hürde*, denn nur bestimmte Faltvorgänge führen – für die Schüler gar nicht offensichtlich – zur Multiplikation. Auf der Basis ihrer Erfahrung mit verschiedenen kreativen Bruchdarstellungen wurde jedoch das in der Rückschau so wichtige „Schachbrettmuster“ (vgl. Abb. 1) nicht immer spontan gewählt. Bei der Bestimmung von Anteilen von geeigneten Nicht-Stammbrüchen kommt man auch anders zum richtigen Ergebnis (z.B. mit Streifen; vgl. Abb. 2: Bestimmung von 1/4 von 1/3). Allerdings kommt man so nicht zur Multiplikation über die Flächenformel: In den vielen Knicken geht die doppelte Anteilsbildung „verloren“; Anteile lassen sich nur mühsam (z.B. durch Abzählen) bestimmen.

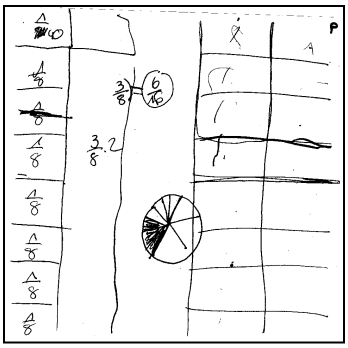


Abb. 3

Eine bisher wenig thematisierte *konzeptuelle Schwierigkeit* trat an mehreren Stellen auf, nämlich die der unklaren Bezugsgrößen: Von welchem Ganzen habe ich eigentlich einen Anteil genommen? Interessiert mich der Anteil vom *Ganzen* oder vom *Teil* des Ganzen? Der relative Anteil oder die absoluten Zahlen? Hiermit hängt auch die Frage nach der Bezeichnung der kleinsten Einheit zusammen.

Beispiel 1: Timo nahm eine erfolgreiche „Schachbrett"-Einteilung zur Bestimmung von 1/8 von 1/5 vor und schrieb der Übersicht halber 1/8 gleich in die Kästchen (vgl. Abb. 3): „Das wäre immer ein Achtel. Das wär dann ein Achtel von einem Fünftel. Das wären ja fünf und das ist ein Achtel von 5 Streifen." Kurz darauf erzeugte dies Irritation: Sein Partner bekam 1/40 raus. Timo überlegte noch mal. „Ach so, von der Gesamtfläche!" Er änderte 1/8 zu 1/40 ab.

Darf man in das Kästchen 1/8 schreiben, obwohl es nur 1/8 des betrachteten Fünftels ist? Was ist es vom Ganzen? Warum wird ein Anteil von einem Anteil gefaltet und dann nach dem Bezug zur Gesamtfläche gefragt?

Beispiel 2: Cigdem und Burhan haben durch Falten 3/4 von 2/3 bestimmt (vgl. Abb. 4; 1/3 ist bereits weggeklappt; rekonstruiert). Nun sollen sie den Anteil von der Gesamtfläche angeben:

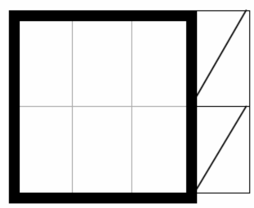


Abb. 4

C, B (gleichzeitig): 8.
I: Acht was?
B: Acht Achtel. […]
Etwas später C: Das sind dann 6, die sind ja auch weg [deutet auf die beiden weg gestrichenen Kästchen]. 6. Also das hier sind Sechstel.

Wie nehme ich den Anteil von einem Anteil? Warum kann ein Anteil nicht in"absoluten" Kästchen angegeben werden?

Da sich bislang noch nicht systematisch ausgewertete Belege für das Problem der Bezugsgrößen auch in anderen Untersuchungen zeigen (vgl. etwa Wartha 2007, S. 210 ff), lohnt es sich, diesem Phänomen im Weiteren genauer nachzugehen. So erscheinen solide Vorstellungen vom relativen Anteil (Malle 2004) als Voraussetzungen für den Aufbau einer Vorstellung vom Multiplizieren als Anteil-vom-Anteil-Nehmen.

Beide Forschungsfragen lassen sich vorläufig so beantworten: Schüler nutzen erworbene bildliche Bruchvorstellungen, welche für den Flächenansatz z.T. hinderlich sind, insofern sie nicht die Flächeninhaltsformel entdecken lassen (die Pizza-Vorstellung führt z.B. nicht weiter). Entdecken die Schüler die Rechteckdarstellung, bzw. wird diese angeregt, gelingt es ihnen i.A., an die Flächenberechnungen anknüpfend, zur Multiplikationsformel für Brüche zu kommen („Zähler•Zähler / Nenner•Nenner").

Schwierig ist die Wahl der richtigen Bezugsgröße (das Bezugsgrößen-Problem „liegt aber tiefer“) – u.a. dadurch, dass der Ansatz nicht inhaltlich angebunden wird: Man deutet Brüche als Flächenanteile, aber es ist nicht offensichtlich, warum man einen Anteil mal auf das Ganze und mal auf einen Teil bezieht – Warum „heißt“ ein Kästchen mal 1/8 und mal 1/40 (s. Abb. 3)? Anteile werden nicht inhaltlich gedeutet und der Ansatz läuft Gefahr, Kalkül (wie „Zähler•Zähler / Nenner•Nenner“) zu werden. So liegt es nahe, zunächst ein umfassendes Verständnis von der für die Multiplikation so wichtigen Anteil-vom-Anteilsbildung aufzubauen.

4. Ausblick: Erste Ideen für eine Lernumgebung

Eine Idee von Winter (1999) aufgreifend, sollen Anteile von wechselnden Bezugsgrößen betrachtet werden, wobei eine Darstellung ähnlich der Vierfeldertafel genutzt wird. Diese Aufgaben sollen die Bildung von Anteilen als wirklich wissenswert und wichtig erfahren lassen und sie in einen außermathematischen Kontext stellen, damit der Sinn der im Alltag wichtigen doppelten Anteilsbildung anhand verknüpfter Merkmale erfahrbar gemacht werden kann. Es soll erkannt werden können, dass es entscheidend ist, auf welche Größe man sich genau bezieht und dass es einen Unterschied macht, ob man den „Anteil vom Ganzen“ oder den „Anteil vom Teil eines Ganzen“ betrachtet.

Literatur

Affolter, W. / Amstad, H. / Doebeli, M. / Wieland, G. (2004[2]): Das Zahlenbuch 6. Zug: Klett und Balmer.

Fischbein, E. / Deri, M. / Nello, M. S. / Marino, M. S. (1985): The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. In: Journal of Research in Mathematics Education, 16, S.3-17.

Kattmann, U. / Gropengießer, H. (1996): Modellierung der didaktischen Rekonstruktion. In: Duit, R. / von Rhöneck, Ch. (Hrsg.): Lernen in den Naturwissenschaften, Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel, S. 180-204.

Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, S. 4-8.

Padberg, F. (2002[3]): Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg: Spektrum-Verlag.

Prediger, S. (2008): The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. In: Learning and Instruction, 18 (1), 3-17.

Sinicrope, R. / Mick, H. (1992): Multiplication of fractions through paper folding. In: Arithmetic Teacher 2, S. 116-121.

Wartha, S. (2007): Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs. Hildesheim / Berlin: Franzbecker.

Winter, H. (1999): Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung, Manuskript (http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/37/bruchrechnung.pdf; abgerufen am 28.3.2008).

Wolfgang S HL GLMANN, Linz

Die edeutungsent icklung mathematischer onze te und die Entstehung von Affekt

Vorbemerkung

Wenn man mit Erwachsenen über ihr Verhältnis zur Mathematik und ihre Erfahrungen mit dem Mathematikunterricht spricht, so hört man oft sehr emotionale Berichte, die von positiven Erzählungen über erfolgreiches Lösen von Mathematikaufgaben bis hin zu Schilderungen von noch immer auftretenden Albträumen in Zusammenhang mit Mathematikprüfungen reicht. Um Studierende für Probleme in Zusammenhang mit elementarer Algebra zu sensibilisieren, stelle ich diesen die Aufgabe einem Erwachsenen ein einfaches Problem zur Variablenverwendung vorzulegen und den Problemlöseprozess zu dokumentieren. Neben dem bekannten Rosnick- lement Effekt (Rosnick lement, 1 0) treten beim Bearbeiten der Aufgabenstellung typische, aus der Literatur bekannte, Fehler auf. Darüber hinaus finden sich in den Protokollen auch immer wieder emotionale ußerungen, wie ich konnte Mathe noch nie leiden , oh je Mathematik, ob ich das kann oder dann muss ich schauen, was x ist. O Gott mir wird schlecht .
Da Affekte, wie Einstellungen (beliefs), Haltungen (attitudes) und Emotionen, um die von McLeod (1 2) vorgeschlagenen Kategorien von Affekten zu verwenden, Konsequenzen eines evolutionären Prozesses des Lernens und Umganges mit Mathematik sind, ist es nahe liegend zu fragen, welchen Einfluss die Natur der Mathematik auf deren Entstehung hat.

S ezifika des mathematischen Lern rozesses

Wenn man mit erwachsenen Personen über deren Schwierigkeit mit Mathematik spricht, so meinen diese meist, dass sie Mathematik nicht verstanden hätten. Das bedeutet, dass sie dem Verstehensprozess beim Mathematiklernen eine besondere Bedeutung beimessen. Die mathematikdidaktische Forschung hat sich natürlich mit dieser Frage intensiv beschäftigt (Sierpinska, 1 4). Für Mogens Niss (2006) sind in diesem Zusammenhang zwei Forschungsergebnisse wichtig. Einerseits die Unterscheidung von Konzeptdefinition und Konzeptvorstellungen , wobei mit der Konzeptdefinition die formale Definition gemeint ist, während die Konzeptvorstellung alle bei einem Individuum zum Konzept vorhandenen Darstellungen und Eigenschaften umfasst, die weder kohärent noch konsistent sein müssen. Wichtig ist es anzumerken, dass vor allem die Konzeptvorstellungen das Umgehen mit dem mathematischen Konzept bestimmen. Das zweite wichtige Ergebnis betrifft den Prozess der

Verdinglichung (Reification). Bei diesem Vorgang wird ein Prozess zu einem Objekt das nun, infolge des Objektnamens oder Zeichens für das Objekt, im Rahmen eines Diskurses als Einheit verwendet werden kann (Sfard, 1 1). Dieser für die Herausbildung mathematischer Konzepte so wesentliche Vorgang geht in drei Stufen vor sich, der Interiorisation, der Kondensation und der Reifikation. Auf der ersten Stufe ist die lernende Person in der Lage die zugrunde liegenden Prozesse gut und sicher zu bewältigen. Die zweite Stufe dient dazu alle zugehörigen Operationen zu kleineren und überschaubareren Einheiten zusammenzufassen und auf der dritten Stufe findet eine ontologische Verschiebung statt und es entsteht die Fähigkeit den bisher bereits vertrauten Begriff in einem neuen Licht zu sehen (Sfard, 1 1). Sfard (1 1) sieht in diesem Vorgang auch den Übergang von einem operationalen zu einem strukturellen Konzept. Wichtig ist es dabei zu beachten, dass das durch Reifikation entstandene Objekt wieder Ausgangspunkt für einen neuen Reifikationsprozess sein kann. Nun weiß man aus zahlreichen Untersuchungen, wie auch aus Berichten von Lehrkräften, dass bei manchen Lernenden der Reifikationsprozess nicht oder nicht ausreichend erfolgt. Diese Lernenden, die nur über ein operationales Konzept, aber nicht über ein strukturelles Konzept verfügen, sind meist auch nicht mehr in der Lage den Erklärungen der Lehrkraft zu folgen, da diese ein strukturelles Konzept voraussetzen. Solche Lernende verfügen oft über ein sogenanntes pseudostrukturelles Konzept (Sfard Linchevski, 1 4). Dabei werden Zeichen zum Ding an sich, d. h. Zeichen sind auch gleichzeitig das Bezeichnete und verweisen nicht mehr auf etwas anderes. Ich möchte dies an einem Beispiel verdeutlichen. Einem Erwachsenen wurde folgende Aufgabe vorgelegt:

In einem Autobus sind unter den Fahrgästen F Frauen und M Männer. Es sind drei Frauen mehr als Männer im Bus. Drücken Sie den Zusammenhang zwischen F und M in einer Gleichung aus.
Der Erwachsene lässt sich nach einigem Zögern überreden die Aufgabe zu probieren und schreibt nach dem Lesen der Aufgabe: x = ...
Darauf fragt der Interviewer: Woher kommt das x?
Antwort: Naja, wenn ich eine Gleichung schreiben muss, dann brauch' ich doch irgendwo ein x.

Hier zeigt sich, dass diese Person nicht über ein strukturelles Konzept von Gleichung verfügt, sondern, dass das Konzept von Gleichung mit einer spezifischen Form verbunden ist in der das Zeichen x vorkommen muss.

edeutungsver nderung mathematischer onze te und die Entstehung von Affekt

Wie im vorangegangenen Abschnitt kurz angedeutet, kommt es im Verlaufe des Mathematikunterrichts bei mathematischen Konzepten zu Bedeutungsveränderungen. So werden z. B. Rechenoperationen zuerst nur als Algorithmen behandelt, später aber rücken ihre strukturellen Eigenschaften ins Blickfeld. Zahlen werden nicht mehr nur als Rechenobjekte gesehen, sondern auch im Hinblick auf Teilbarkeit untersucht. Was eine Zahl ist, erfährt durch Zahlenbereichserweiterungen eine ständige Veränderung. Wichtig ist es anzumerken, dass die alten Konzeptvorstellungen und Konzeptbilder durch diese Veränderungen nicht falsch werden, sie reichen nur nicht mehr aus die neuen Aufgabenstellungen und Fragen zu beantworten bzw. zu verstehen. In diesem Sinne können sie zu Hindernissen (epistemological obstacles (Sierpinska, 1 4)) für das Denken werden. Für die Lernenden bedeutet dies eine verwirrende Situation. Ihre Konzeptvorstellungen führen in bestimmten Situationen zu richtigen Lösungen für bearbeitete Aufgaben, während sie in anderen Situationen falsche Ergebnisse liefern, und sie haben keine Erklärung, warum dies so ist. Dies führt zu Auswirkungen wie Beliefs über Mathematik und sie selbst als Mathematiklernende (Schlöglmann, 200), zu Mathematikangst, Mathematikvermeidungsstrategien als Erwachsene, aber auch zu spezifischen Lernstrategien, bei denen nicht mehr versucht wird mathematische Inhalte zu verstehen, sondern den Blick auf die Form und den Ablauf von Verfahren zu richten. Eine Lernstrategie, die ich als Mathematiklernen ohne Verstehen bezeichnet habe (Schlöglmann, 2007a) und die auf einem pseudostrukturellen Konzept der lernenden Person beruht (Sfard Linchevski, 1 4). Es sei noch darauf hingewiesen, dass die oftmals bei Lernenden vorhandene Mathematikangst vor allem in Prüfungssituationen negative Auswirkungen hat, da durch die Beschränktheit der Kapazität des Arbeitsgedächtnisses die Fehlerhäufigkeit steigt (Schlöglmann, 2007b).

Was kann nun die Konsequenz dieser Überlegungen sein Eine Schlüsselstellung im Mathematiklernprozess nehmen die Situationen ein, in denen es zu Bedeutungserweiterungen oder Bedeutungsveränderungen mathematischer Konzepte kommt. Diese Schritte im Lernprozess bedürfen einer sorgfältigen Planung, sowie eines besonders vorsichtigen Vorgehens im Unterricht verbunden mit einem mehrmaligen Überprüfen, ob von den Lernenden die Konzeptveränderung in adäquater Weise vorgenommen wurde. An dieser Stelle ist eine Individualisierung bzw. Differenzierung im Unterricht besonders angebracht. Fördernd für die Entwicklung pseudostruktureller Konzepte erscheint hier ein zu frühes Übergehen zu Verfahren, da dies die Orientierung an Form und Abläufen von Beispielbearbeitungen nach sich ziehen kann. Es sei noch darauf hingewiesen, dass natürlich auch Lehrkräfte wissen, dass manche ihrer SchülerInnen über keine hinreichenden Konzepte verfügen, diese Lernenden verstehen Mathematik eben nicht. Um diesen Lernenden zu helfen werden dann in Prüfungssituationen Aufgaben gestellt, die es ihnen erlauben mit ihren pseudostrukturellen Konzepten Erfolg zu haben und so zu positiven Ergebnissen bei Prüfungsarbeiten zu kommen (Schlöglmann, 2007a).

Literatur

McLeod, D. B. (1 2). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. G. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-5 6). New ork: McMillan.

Niss, M. (2006).The Structure of Mathematics and its Influence on the Learning Process. In: . Maaß W. Schlöglmann (Eds.). *New Mathematics Education Research and Practice.* Rotterdam. SensePublishers. 51 – 62.

Rosnick, P. . lement, . (1 0): Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior 3/1*, 3 – 27.

Schlöglmann, W. (2007a). Mathematics Learning Without Understanding – ognitive and Affective Background and onsequences for Mathematics Education. In: . Bergsten, B. Grevholm, H. Stromskag Masoval and F. Ronning (Eds.): *Relating Practice and Research in Mathematics Education.* Proceedings of NORMA05. Trondheim. Tapir Academic Press, 441 – 453.

Schlöglmann, W. (2007b). Student Errors in Task-Solving Processes. In: D. Pitta-Pantazi and G. Philippou (Eds.): *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* University of yprus 2007, 35 – 36 .

Schlöglmann, W. (200). Beliefs oncerning Mathematics Held by Adult Students and their Teachers. Appears in: *Proceedings of MAVI 12*

Sfard, A. (1 1). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22(3),* 1 – 36.

Sfard, A. Linchevski, L. (1 4). The Gains and the Pitfalls of Reification – The ase of Algebra. *Educational Studies in Mathematics 26(3),* 1 1 – 22

Sierpinska, A. (1 4). *Understanding in mathematics*. London. The Falmer Press.

Barbara S   HMIDT, Freiburg

Modellieren in der Schul raxis –   e eggr nde und   inder-nisse aus Sicht der Lehrer

Das Thema Modellieren steht nicht nur in den bundesweiten Bildungsstandards, auch in anderen Ländern Europas wird gefordert, Realitätsbezüge und Problemlösen in den Unterricht zu integrieren. Der Alltag im Unterricht sieht vielfach noch anders aus: Er ist vielerorts noch immer von kalkülartigen Aufgaben geprägt.

Warum eigentlich   Was hindert Lehrer daran, Modellieren im Unterricht durchzuführen   Was motiviert Lehrer dazu   Um dieser Fragestellung nach zu gehen, wurde eine empirische Ergänzungsstudie im Rahmen des EU-Projektes LEMA [1] durchgeführt. Die Erhebungen wurden in Baden-Württemberg durchgeführt. Die empirische Ergänzungsstudie soll im Folgenden dargestellt werden. Abschließend sollen erste Ergebnisse präsentiert werden.

Die Intervention im   ahmen von LEMA

Im Rahmen von LEMA wurde eine Lehrerfortbildung zum Thema Modellieren und Realitätsbezüge entwickelt. Dabei sollen Lehrer mit zeitgemäßen didaktischen und methodischen Konzepten vertraut gemacht werden. Sie sollen grundlegendes Wissen über mathematisches Modellieren und Realitätsbezüge im schulischen Kontext erwerben und nach der Fortbildung wissen, warum im Mathematikunterricht modellieren gelernt werden soll und wie ihre Schülerinnen und Schüler modellieren erlernen können, d.h. welche Lerninhalte, Lernformen und Lehrmethoden zum Fördern geeignet sind, an welchen Stellen des Unterrichts Modellierungen eingesetzt werden können und wie fehlendes Ausgangsniveau gesichert werden kann. Ferner sollen praktikable Konzepte zum Stellen und Aus- und Bewerten von Aufgaben in Klassenarbeiten angeeignet werden. Ein weiteres Ziel besteht darin, das Lernpotential, das in Modellierungsaufgaben steckt, analysieren, variieren und beschreiben zu können, sowie in der Fähigkeit, Aufgaben unter Berücksichtigung der Heterogenität der Klasse zu erstellen [2]. Die Fortbildung findet an fünf über das   ahr verteilten Tagen statt (Start: 01/0 ; Ende: 11/0). Zwischen den Fortbildungstagen liegen jeweils ca. zwei Monate.

Methodologie

Design der Ergänzungsstudie: Um die Frage zu beantworten welche Aspekte Lehrer als Hindernisse gegen das Modellieren bzw. als Beweggründe für das Modellieren sehen, werden quantitative und qualitative Methoden eingesetzt. Es sollen Fragebögen zur Erfassung der Hindernisse und Beweggründe für bzw. gegen das Modellieren zu vier Zeitpunkten eingesetzt werden (Pre-, Post- und Follow-up Test sowie zur Mitte der Fortbildung). Vier Erhebungszeitpunkte wurden gewählt, um später eine mögliche Verlaufskurve bzw. Lehrertypen ausfindig zu machen. Ergänzend dazu werden zeitgleich mit einer ausgewählten Stichprobe von sechs Lehrern Einzelinterviews durchgeführt.

Momentan liegen für die hier beschriebene Studie die Ergebnisse des Pre-Test der Fragebögen sowie der ersten Interviews vor. Weitere Daten werden im Laufe des ahres erhoben.

Stichprobe: Die Stichprobe umfasst Lehrer aus zwei Fortbildungskursen 25 Teilnehmer, sowie entsprechenden Kontrollgruppen mit ebenfalls je 25 Probanden. Die Zuordnung zur Experimental- bzw. Kontrollgruppe wurde zufällig bestimmt.

Die Stichprobenauswahl für die Lehrerinterviews basiert auf den Ergebnissen des Pre-Tests. So wurden drei Lehrer ausgewählt, die viele Hindernisse im Modellieren sehen, und drei Lehrer, die viele Beweggründe für Modellieren sehen.

Messinstrumente: Der Fragebogen besteht aus 120 Items auf 15 Skalen. (Beispielitems: ‚*Diese Aufgaben sind komplex'* oder: ‚*Die Schüler sind aktiver bei solchen Aufgaben'*) Die Items basieren auf dem Stand der didaktischen Diskussion zum Modellieren [3,4] sowie auf Ergebnissen einer Vorstudie die im Oktober bis Dezember 2007 durchgeführt wurde. Die Kategorisierung der Items erfolgte theoretisch begründet basierend auf der aktuellen Literatur ums Modellieren und fußt auf dem Angebots-Nutzungs-Modell von Helmke [5]. Das hrohnbachs Alpha der Skalen liegt zwischen .525 und . 0 . Das ist hinreichend homogen und zufrieden stellend.

Das Antwortformat besteht aus fünfstufigen Ratingskalen, wobei jedes Item doppelt abgefragt wird. Im ersten Antwortformat wird das Zutreffen der Items erfragt wobei ein Wert von 0 bis 4 vergeben wird, im zweiten Antwortformat die Tendenz ob der Sachverhalt des Items eher hindert oder motiviert, Modellierungen zu unterrichten. Hierbei werden Werte zwischen -2 und 2 vergeben. Diese Daten werden in Anlehnung an das Erwartung-mal-Wert-Modell [6] multiplikativ miteinender verknüpft, sodass Werte zwischen - (starkes Hindernis) und (starker Beweggrund) entstehen.

Für die Interviews wurde ein Leitfaden erstellt, welcher auf die Hindernisse und Beweggründe der Lehrer gegenüber Modellieren im Mathematikunterricht fokussiert. Die Interviews eignen sich besonders um auftretende Hindernisse und Beweggründe, die nicht im Fragebogen enthalten sind, zu erfassen. Und auch um mehr über die Entstehung einzelner Beweggründe und Hindernisse sowie deren Überwinden zu erfahren.

Ergebnisse

Interviews: In den ersten Interviews (vor der ersten Fortbildung) stellte sich heraus, dass die befragten Lehrer bis dato noch keine Modellierungen im Unterricht durchgeführt hatten, was in erster Linie damit begründet wurde, dass sie nicht wissen was Modellieren sei und dazu auch keine Materialien kennen und haben.

Fragebögen: Mit den vorliegenden Daten können erste Antworten zu folgende Fragen gegeben werden: Welche Hindernisse und Beweggründe sehen Lehrer beim Modellieren , Gibt es signifikante Korrelationen zwischen dem Alter der Probanden und den Hindernissen bzw. Beweggründen , Gibt es signifikante Unterschiede im Bezug auf die Hindernisse und Beweggründe bei Lehrern der unterschiedlichen Schularten

Die Ergebnisse der Fragebogenstudie zeigen, dass Lehrer verschiedene Hindernisse und Beweggründe gegenüber dem Modellieren sehen. Abb.1 zeigt ein Fehlerbalkendiagramm welches die Streuung der Mittelwerte neun verschiedener Kategorien abbildet. Es ist zu erkennen, dass fünf Kategorien deutlich im positiven Bereich liegen. Diese Kategorien (Kreativität und Selbständigkeit der Schüler, der Realitätsaspekt der Aufgaben und die langfristigen fachlichen,

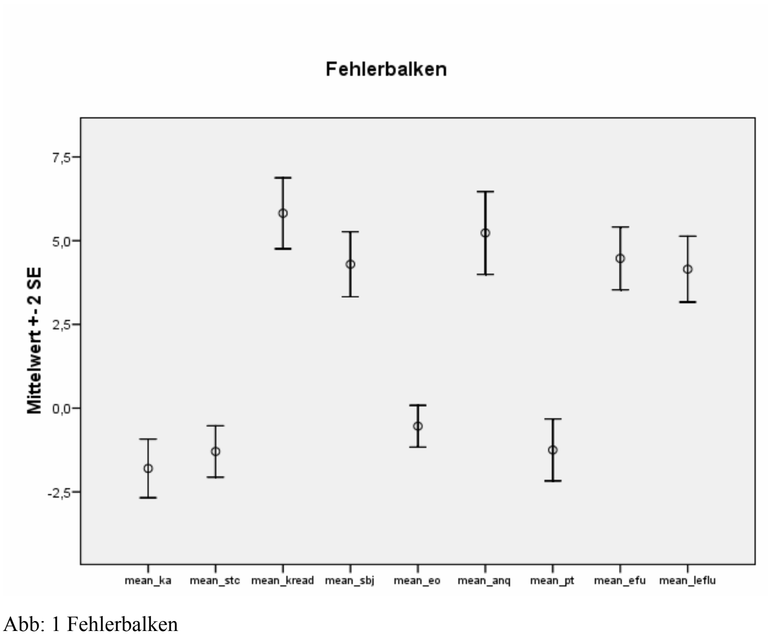


Abb: 1 Fehlerbalken

als auch überfachlichen Effekte durch die Modellierungsaufgaben) stellen Beweggründe der Lehrer für das Modellieren dar. Deutlich davon abgegrenzt und im negativen Bereich liegen die Dimensionen: Komplexität der Aufgaben, Stellenwert der Aufgaben im Unterricht, Effizienz der Unterrichts mit Modellierungen und Planbarkeit der Unterrichtsstunde mit Modellierungsaufgaben. Gegen den Einsatz von Modellierungen im Unterricht spricht demnach aus der Sicht der Lehrer, dass Modellierungsaufgaben zu komplex sind, der Unterricht durch Modellierungen uneffizient würde und außerdem die Unterrichtsstunde nicht mehr so gut zu planen sei. Darüber hinaus scheinen Lehrer dem Modellieren nur einen geringen Stellenwert beizumessen.

Werden die Hindernisse und Beweggründe mit dem Alter der Probanden korreliert, so ergeben sich bei acht Kategorien signifikante Ergebnisse. (Sachkontext der Aufgaben, Kreativität der Schüler, Leistungsunterschied der Schüler, Motivation der Schüler, Selbständigkeit der Schüler, Realitätsbezug der Aufgaben, langfristige fachliche Effekte und langfristige überfachliche Effekte) Die signifikanten Korrelationen liegen zwischen r -.26 und r -.40 . Dabei lässt sich erkennen, dass ausschließlich negative Korrelationen bestehen. D.h. ältere Lehrer sehen weniger Beweggründe gegenüber Modellieren als jüngere Lehrer.

In der Frage, ob sich Lehrer der verschiedenen Schularten in den Hindernissen und Beweggründen von einander unterscheiden, konnten keine signifikanten Unterschiede festgestellt werden.

Ausblick: Im Laufe des ahres werden weitere Daten über Fragebögen und Interviews erhoben. Diese sollen Aufschluss darüber geben, welche Veränderungen hinsichtlich der Hindernisse und Beweggründe sich im Verlauf der Fortbildung identifizieren lassen; und ob hinsichtlich des Verlaufs bestimmte Typen von Lehrern identifiziert werden können.

Literatur

[1] LEMA **L**earning and **E**ducation in and through **M**odelling and **A**pplications. Koordinatorin: Katja Maaß Pädagogische Hochschule Freiburg. Teilnehmende Länder: DE, EN, FR, ES, HU,

[2] www.lema-project.org

[3] Werner Blum: Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven - In: Trends und Perspektiven (Hrsg.: G. Kadunz u.a.), Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 23, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1 6, S. 15-3

[4] Katja Maaß: Mathematisches Modellieren im Unterricht : Ergebnisse einer empirischen Studie, Hildesheim, Franzbecker 2004

[5] Blum, W., Galbraith, P., Henn, H-W., Niss, M., (Eds): Modelling and Applications in mathematics education Springer, New ork, 2007

[5] Andreas Helmke: Unterrichtsqualität: erfassen, bewerten, verbessern. 5. Aufl., Seelze, Kallmeyer 2007

[6] Falko Rheinberg: Motivation - 6., überarb. und erw. Aufl.. – Stuttgart, Kohlhammer, 2006.

Martin SCHNEEBERGER, Pädagogische Hochschule Bern

Diskursiver Mathematikunterricht – mathematische Probleme im adaptiven Lehrer-Schüler- bzw. Schüler-Schüler-Dialog lösen

Welches Verhalten der Lehrperson führt zu einer hohen Qualität der didaktischen Kommunikation beim mathematischen Problemlösen?

Hier ist aus Platzgründen nur das Schlusskapitel des Referats wiedergegeben. Das gesamte Referat befindet sich auf der beigelegten CD.

Die Qualität der didaktischen Kommunikation beim Problemlösen ist dann hoch:

- wenn die Lehrperson mit Scaffolding, welches eine Konkretisierung des „Prinzips der minimalen Hilfe“ (Aebli, 1976, S. 222f.) darstellt, den Übergang vom angeleiteten zum selbstgesteuerten Problemlösen stützt. Der Begriff „Scaffolding“, wie er ursprünglich im Baugewerbe verwendet wurde, bezeichnet ein temporäres Gerüst, das rund um ein zu bauendes Gebäude aufgestellt wird, damit die Handwerker sicher und ohne unnötigen Kraft- und Balancieraufwand arbeiten können. In einer ähnlichen Art und Weise meint Scaffolding im Lehr-Lernkontext eine personale oder materiale Unterstützung, die die Lehrperson den Lernenden beim Aufbau von Wissensstrukturen auf dem Weg von der Fremd- zur Selbstregulation vorübergehend bietet (Wood, Bruner & Ross, 1976). Scaffolding will Autonomie in Bezug auf kognitive und motivationale Selbstregulation fördern und versucht zwischen dem Ausmass und der Art der Hilfestellungen und der sich verändernden Autonomie der Lernenden eine optimale Passung herzustellen.

Scaffolding ist dann suboptimal oder sogar schädlich, wenn es zu unterstützend, zu direktiv, aufdringlich, überfordernd (zu hohe Erwartung an die Lernenden bei ungenügender Unterstützung), unklar (zu abstrakt oder zu vage), unsensibel (Lehrperson merkt nicht, wann sie helfen muss) oder zum falschen Zeitpunkt erfolgt (Salonen, Vauras & Efklides, 2005). Solches Verhalten von Lehrpersonen fördert die Selbstregulation der Lernenden nicht, ja kann sogar hemmend auf sie wirken.

Möglichst symmetrische, egalitäre und schwach komplementäre Formen der interpersonalen Koordination sorgen am ehesten dafür, dass die Motivation der Lernenden für Selbstregulation hoch ist und somit die Verantwortung für das Lernen schrittweise von der Lehrperson auf die Lernenden übergehen kann. Im Gegensatz dazu kann zu starke Dominanz der Lehrperson (übermässig hilfreich, zu direktiv, aufdringlich, kompetitiv = konkurrierend, zu anspruchsvolle Hilfestellungen gebend) zur Zerstörung der intrinsischen Motivation und der Motivation für Selbstregulation führen, was natürlich im Widerspruch steht zu den Prinzipien des Scaffolding. Problemlösefördernde Interaktionen entstehen also dann, wenn die Lehrperson beim Scaffolding ihre Aufmerksamkeit nicht nur auf die individuell-kognitiven, die interaktiven (sozio-kognitiven) und auf die identitäts- und gemeinschaftsbildenden Aspekte richtet, sondern auch auf die sozio-emotionalen.

- wenn die Lehrperson als Fachexperte, d.h. als Repräsentant des kulturell akzeptierten Wissens und als konkretes Verhaltensmodell, Tutor, Lerngerüst, Coach und Lernhelfer agiert und die Lernenden sowohl auf der fachlichen als auch auf der Lernprozess- und Interaktionsebene adaptiv unterstützt;
- wenn die Lehrperson den Dialog mit und unter Lernenden fördert, indem sie dafür sorgt, dass weniger Erklärungen abgegeben als vielmehr Fragen gestellt, Bedeutungen ausgehandelt, Hypothesen kritisiert sowie Widersprüche und Fehler diskutiert werden;
- wenn die Lehrperson auf Schülerbeiträge eingeht, also „revoicing" betreibt (O'Connor & Michaels, 1996), d.h. die Lernenden beim Externalisieren ihrer Überlegungen, beim Vergleichen von Sichtweisen, beim Zusammenfassen und beim Artikulieren einer Position professionell unterstützt;
- wenn die Lehrperson das Gespräch zuerst öffnet und Singulärität und Subjektivität zulässt, aber dann auch begrenzt, auf den Punkt bringt und Regularität anstrebt. Denn es gilt eine Balance zu finden zwischen dem Zulassen individueller „Lösungen" und dem Erfüllen der Standards der „mathematical community" (vgl. Reusser, 2006, S. 165f.).
- wenn die Lehrperson mit Fragen, Impulsen oder Gesichtspunkten auf der inhaltlichen Ebene Fokusbildungen ermöglichen, d.h. als „focal navigator" wirkt und dafür sorgt, dass die Lernenden auf der meta-diskursiven Ebene vertieft und ganz in Anspruch genommen sind (Sfard, 2002; Sfard & Kieran, 2001). Beide Aspekte, der inhaltliche und der meta-dikursive, führen zu mehr Kohärenz, zu mehr Kohäsion und damit zu einer grösseren Qualität des Gesprächs;
- wenn die Lehrperson dafür sorgt, dass alle Gesprächsteilnehmer zu jeder Zeit wissen, worüber geredet wird, und davon überzeugt sind, dass sich die gleichen Begriffe auf die gleichen Sachverhalte beziehen. Denn kompatible Fokusse in einem Team sind der wichtigste Indikator für die Effektivität des Diskurses;
- wenn die Lehrperson als Fachexperte wirkt, der die Tücken des Problems kennt, als personales Problemlösegerüst (Scaffold), welches individuell abgestimmte instruktionale Hilfestellung zu geben vermag, als einfüh-

lender Dialogpartner und fachlich-pädagogischer Coach (Staub, 2004), der nicht nur zuhören, sondern die besten Kräfte der Lernenden herauszufordern versucht, als Anreger von Reflexion und Metainteraktion sowie als Quelle von Feedback;

- wenn die Lehrperson so wie Schoenfeld (1985a/b) vorschlägt als „intellectual coach" bzw. als „roving consultant" wirkt. Denn er weiss, dass Strategien, Heuristiken und allgemein Metakognitives nicht gelehrt, aber eingebettet in fachlichen und eben interaktiven Kontexten sehr wohl immersiv gelernt werden können. Ein guter Problemlöser wird man durch Sozialisation bzw. Enkulturation, „by becoming a member of the particular community of practice" (Schoenfeld, 1992, p. 344). Diese soziokulturalistische Perspektive ist in der Lehr-Lernforschung theoretisch und empirisch bereits recht gut gestützt; aber in der mathematikdidaktischen Literatur ist sie noch relativ neu.

Als „intellectual coach" bzw. als „roving consultant" zu wirken heisst für Schoenfeld (1985a/b, 1987), den Schülern folgende drei Fragen (Schoenfeld, 1985b, p. 373f., spricht von „generic" bzw. „executive" questions) zu stellen:

(1) What (exactly) are you doing (can you describe it precisely)?
(2) Why are you doing it (how does it fit into the solution)?
(3) How does it help you (what will you do with the outcome when you obtain it)?

Weil es für die Lernenden peinlich wäre, nicht zu wissen, was sie weshalb im Moment machen bzw. denken, beginnen sie sich vorzubereiten, indem sie u.a. über die Fragen diskutieren und sich Antworten zurechtlegen. Diese aus einer Betroffenheit abgeleitete Massnahme ist ein guter Katalysator zur Verinnerlichung dieser Fragen. Je häufiger diese Fragen laufend (im Voraus) beantwortet werden, desto mehr wird die Überwachung des Problemlösens zur Gewohnheit. Die Verinnerlichung dieser Fragen führt zu immer mehr Selbststeuerung, was zur Folge hat, dass der „roving consultant" seine Frageaktivität (Fremdsteuerung) allmählich bis auf null reduzieren kann. Denn seine indirekte, sozial mediierte Wirkung ist eingetreten: Die kooperativ problemlösenden Schüler sind „in control" (Schoenfeld, 1985b, p. 375) und tun das, was als „metakognitive Überwachung" bzw. als „Monitoring" bezeichnet wird. Schoenfeld führt also die Lernenden nicht direkt, z.B. mit der Aufforderung „Du sollst deine Gedanken überwachen!", sondern indirekt mit dem Trick der „drohenden" Fragen zu metakognitiver Bewusstheit, was ihm laut seinen Aussagen auch gelingt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Qualität der didaktischen Kommunikation beim Problemlösen dann hoch ist, wenn die Lehrperson über adaptive Lehrkompetenz verfügt.

Literatur

Aebli, H. (1976[9]). Grundformen des Lehrens: Eine Allgemeine Didaktik auf kognitionspsychologischer Grundlage. Stuttgart: Klett.

O'Connor, M.C. & Michaels, S. (1996). Shifting participant frameworks: orchestrating thinking practices in group discussion. In D. Hicks (Ed.), *Discourse, learning, and schooling* (pp. 63-103). Cambridge: Cambridge University Press.

Polya, G. (1949): *Schule des Denkens*. Bern: Francke

Reusser, K. (2006). Konstruktivismus – vom epistemologischen Leitbegriff zur Erneuerung der didaktischen Kultur. In Baer, M. et al. (Hrsg.), *Didaktik auf psychologischer Grundlage. Von Hans Aeblis kognitionspsychologischer Didaktik zur modernen Lehr-Lernforschung* (S. 151-168). Bern: hep.

Salonen, P., Vauras, M. & Efklides, A. (2005). Social interaction - What can it tell us about metacognition and co-regulation in learning? *European Psychologist, 10,* 199-208.

Schoenfeld, A.H. (1985a). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1985b). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E.A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives,* pp. 361-379. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talk through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76.

Sfard, A. (2002). The interplay of intimations and implementations. Generating new discourse with new symbolic tools. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(2&3), 319-357.

Staub, F.C. (2004). Fachspezifisch-pädagogisches Coaching. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 7* (Beiheft 3), 113-141.

Wood, D., Bruner, J.S. & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *.Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17,* 89-100.

Edith SCHNEIDER, Klagenfurt

PISA Mathematik – Leistungen von ungarischen und österreichischen Schülerinnen und Schülern

1. Das PISA-Framework

PISA geht von einem normativen Framework aus, dessen Kern eine spezifische Ausprägung von „Mathematical Literacy" bildet:

„Mathematical Literacy ist die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Beurteilungen abzugeben und Mathematik in einer Weise zu verwenden und sich darauf einzulassen, die den Erfordernissen des Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektiertem Bürger bzw. Bürgerin entspricht." (OECD 2003, S. 24, Übers. E. S.)

Ein Test wie PISA ist natürlich nicht in der Lage, die „Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt" mittels Testaufgaben zu testen. Da haben PISA-Kritiker wie etwa P. Bender (2003, S. 50f) durchaus Recht. Was mittels Testaufgaben aber durchaus getestet werden kann, sind fundierte auf mathematische Kenntnisse basierende Beurteilungen abzugeben sowie die Fähigkeit, mathematisches Wissen und Können in vielfältigen lebensweltlichen Situationen flexibel, verständig und reflektiert einsetzen zu können (eine ähnliche Forderung wie sie mit der unmittelbaren Lebensvorbereitung von H. W. Heymann 1996 erhoben wird). PISA fokussiert dabei auf Transferleistung und versucht, die selbständige Anwendung mathematischen Wissens und Könnens in nicht vertrauten Situationen anhand „authentischer" Problemstellungen zu testen. Bei PISA geht es also nicht um das Wissen und Können mathematischer Begriffe, Fakten, Konzepte und Verfahren an sich, dieses wird vielmehr vorausgesetzt und die Testaufgaben fokussieren auf eine selbständige kreative Vernetzung solcher Kenntnisse, um auch neuartige, i. S. von nicht vertraute, mathematisch noch nicht strukturierte, lebensnahe Situationen zu analysieren, zu strukturieren, zu interpretieren und zu kommunizieren. Authentizität der Problemstellungen ist dabei in dem Sinne gemeint, dass mathematische Anforderungen dieser Art in der Lebenswelt einer Person in ähnlicher Form benötigt werden können. Meiner Einschätzung nach ist PISA dieser Versuch, wenn schon nicht bei jeder Aufgabe, so doch insgesamt in kreativer und recht überzeugender Weise gelungen. So räumt selbst P. Bender ein, dass

„ … immer wieder der Versuch erkennbar [ist], eine direkte Anwendung von Faktenwissen und Fertigkeiten durch Einkleidung des mathematischen Gehalts in allerlei … außermathematische Kontexte zu verhindern und so immerhin Modellbildung zu erzwingen." (Bender 2003, S. 50)

Die damit getestete Fähigkeit umfasst zwar nicht den gesamten, von PISA bzw. ML formulierten Anspruch, wohl aber den hinsichtlich unmittelbarer Lebensvorbereitung. Und das scheint mir auch der Kern von PISA zu sein, auf den man sich aus fachdidaktischer Sicht vorrangig konzentrieren sollte und der für eine sinnvolle Weiterentwicklung des MU unmittelbar genützt werden könnte.

2. Mathematische Anforderungen der PISA-Testaufgaben

Eine Analyse aller 2003 bzw. 2006 eingesetzter Aufgaben bzgl. ihrer mathematischen Anforderungen zeigt generell (nach Peschek 2008):

- Textverständnis erforderlich (fast nur eingekleidete Aufgaben)
- wenig operative Aufgaben (nur einfachster Kalkül, keine geometrischen Konstruktionen)
- eher begriffliches als operatives Verständnis erforderlich
- „Modellbildung" beschränkt sich meist auf recht einfache Situationen (keine stärker vernetzten/kombinierten Aufgaben, kaum typische Modellierungs- oder Problemlöseaufgaben)
- viele Aufgaben, die Interpretationen im Kontext verlangen
- relativ viele Aufgaben, die Argumente oder Begründungen verlangen

3. PISA-Mathematik 2006: Einige Ergebnisse

Im Folgenden ein paar ausgewählte Daten zu den mathematischen Leistungen ungarischer und österreichischer Schülerinnen und Schüler (S&S) bei PISA Mathematik 2006:

Das Testinstrumentarium 2006 umfasste 48 Items, die hinsichtlich verschiedener Aspekte (mathematisches Stoffgebiet, übergreifende Idee, Kontext, Antwortformat, psychometrische Schwierigkeit) gestreut waren.

Die Lösungshäufigkeiten der ungarischen S&S liegen bei einem großen Teil der Aufgaben, z. T. sehr deutlich unter denen der österreichischen S&S. Dies gilt für die eher leichten Aufgaben ebenso, wie für die schwierigeren Aufgaben (vgl. Abb. 1). Im Durchschnitt wird in Österreich eine Aufgabe von ca. 4% mehr S&S gelöst als in Ungarn.

Die österreichischen Lösungshäufigkeiten stimmen mit jenen der OECD häufig recht gut überein (durchschnittliche Lösungshäufigkeit: AUT - 49,8%; OECD - 48,1%). Nur bei zwei Aufgaben schneiden die österreichischen S&S signifikant schlechter ab als die OECD-S&S, bei ca. einem Fünftel der Aufgaben schneiden die österreichischen S&S signifikant besser ab. Die durchschnittliche Lösungshäufigkeit der ungarischen S&S liegt mit 45,6% doch recht klar unter dem OECD-Durchschnitt. Bei ca. einem

Viertel der Aufgaben liegen die Lösungshäufigkeiten der ungarischen S&S signifikant niedriger als jene der OECD-S&S, umgekehrt liegt die Lösungshäufigkeiten in Ungarn nur bei einer Aufgabe signifikant höher.

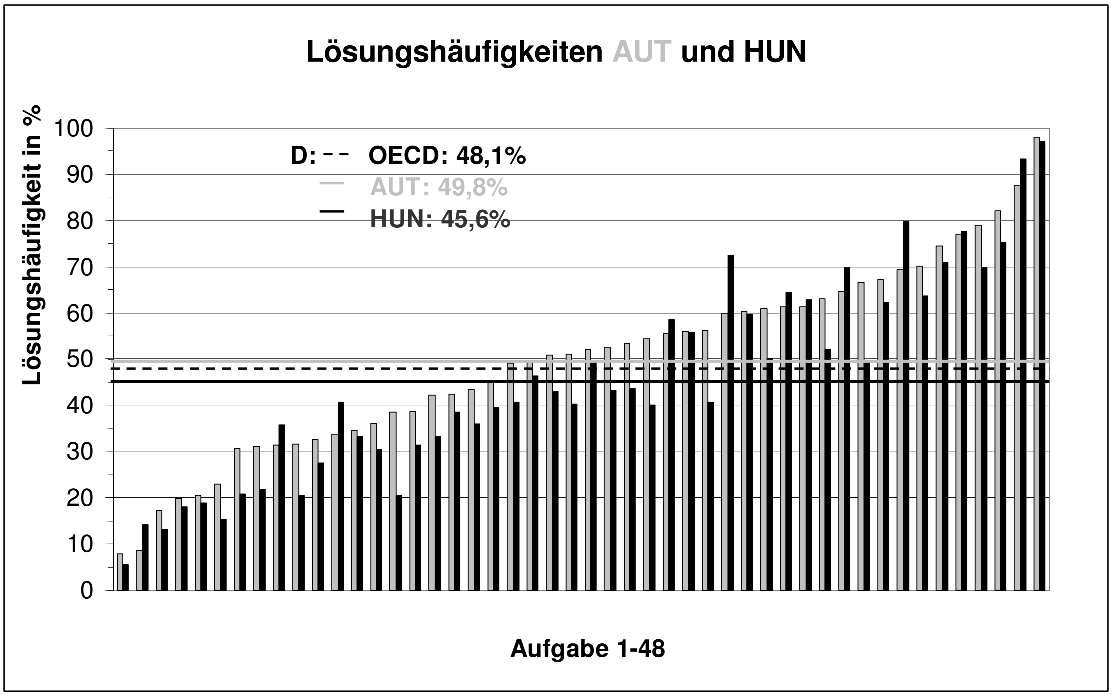


Abb. 1

Wenn man sich die Lösungshäufigkeiten nicht im Vergleich zur OECD, sondern für jedes Land extra ansieht, dann kommt man nach Analyse der Aufgaben für die beiden Länder zu folgenden Charakteristiken leichter bzw. schwieriger Aufgaben: Den ungarischen S&S fallen Aufgaben aus dem mathematischen Stoffgebiet der Geometrie mit offenem Antwortformat und einem Kontext aus dem öffentlichen Umfeld eher schwer (Lösungshäufigkeit kleiner 30%). Ein Aufgabentyp für eine typisch „leichte“ Aufgabe (Lösungshäufigkeit größer 70%) lässt sich nicht erkennen. Für österreichische S&S ist eine typisch „leichte“ Aufgabe dem mathematischen Stoffgebiet der Zahlen/Größen mit geschlossenem Aufgabenformat und einem Kontext aus dem persönlichen oder öffentlichen Umfeld zuzuordnen, eine typisch „schwierige“ Aufgabe dem Stoffgebiet der Statistik, offenes Aufgabenformat, wissenschaftliches Umfeld.

Leistungsunterschiede bzgl. mathematischer Stoffgebiete

Im Bereich der Statistik zeigen sich die die geringsten Unterschiede zwischen den Leistungen der österreichischen und ungarischen S&S. Beide Länder weisen hier deutliche Schwächen auf (was zumindest für Österreich nicht überrascht).

Auffallend und überraschend sind sie relativ guten Leistungen der österreichischen S&S im Bereich der Geometrie und umgekehrt die relativ schwachen Leistungen der ungarischen S&S in diesem Stoffgebiet.

Überraschend sind auch die deutlichen Unterschiede in den Leistungen bei vielen Aufgaben im Gebiet Zahlen/Größen, wo in Österreich im Durchschnitt eine Aufgabe von ca. 5,5% mehr S&S gelöst wird als in Ungarn.

Leistungsunterschiede zwischen Mädchen und Burschen

Ein Vergleich der Lösungshäufigkeiten der ungarischen Mädchen und Burschen zeigt, dass die Mädchen beim PISA-Test 2006 etwas geringere mathematische Leistungen erbracht haben, wobei die Unterschiede im Gesamtdurchschnitt bei ca. 2,5% liegen und sich durch die mathematischen Soffgebiete ziehen. Im Wesentlichen gleicht dies der Situation des PISA-Tests 2003.

Auch in Österreich ist beim PISA-Test 2006 ein (signifikanter) Unterschied zwischen den Mathematikleistungen der Mädchen und Burschen zu erkennen. Bei mehr als der Hälfte (!) der Aufgaben sind signifikante Abweichungen zu erkennen, die z. T. über 10 Prozentpunkte ausmachen. Diese Unterschiede ziehen sich durch alle Inhaltsbereiche und Kontexte. Lediglich bei den Antwortformaten ist erkennbar, dass die Unterschiede bei Aufgaben mit offenem Antwortformat häufig geringer sind. Diese signifikanten Unterschiede zwischen Mädchen und Burschen sind besonders überraschend, da es diese beim PISA-Test 2003 nicht gab. Hier muss man der Sache noch genauer nachgehen, tiefer in die Daten hineingehen und genauer untersuchen, ob die Ursachen tatsächlich nur mit statistischen Zufälligkeiten oder anders erklärbar sind.

Literatur

Bender, P. (2003): Die etwas andere Sicht auf die internationalen Vergleichsuntersuchungen TIMSS, PISA und IGLU. In Freese, P. (Hrsg.): Paderborner Universitätsreden. Universität Paderborn, Paderborn, 35-61.

Heymann, H.-W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Beltz, Weinheim-Basel.

OECD (Hrsg.) (2003): The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. OECD, Paris.

Peschek, W. (2006): PISA Mathematik: Das Konzept aus fachdidaktischer Sicht. In: Haider, G. & Schreiner, C. (Hrsg.): Die PISA-Studie. Böhlau, Wien, S. 62-72.

Peschek, W. (2008): PISA Mathematik aus fachdidaktischer Sicht. Vortragstyposkript, Universität Klagenfurt.

Schneider, E. & Peschek, W. (2006): PISA Mathematik: Die österreichischen Ergebnisse aus fachdidaktischer Sicht. In: Haider, G. & Schreiner, C. (Hrsg.): Die PISA-Studie. Böhlau, Wien, S. 73-84.

Christof, SCHREIBER, Universität Frankfurt/ Main

Phasen übergreifende Veranstaltung in der Lehrerbildung

Es gibt Bemühungen vieler Institutionen wie Kultusministerien, Bereiche der Organisation der Lehrerbildung, Zentren für Lehrerbildung an Universitäten und andere, die an Konzepten zur Verzahnung zumindest der ersten beiden Phasen der Lehrerbildung arbeiten. Terhart spricht von einer „Abstimmung der Ausbildungsinhalte zwischen 1. und 2. Phase“ (2000; S. 21) der Lehrerbildung. Allerdings bleibt der Bereich Lehrerfortbildung bei solchen Überlegungen oft unberücksichtigt. In seinem Artikel im Journal für Mathematik-Didaktik hat Uwe Gellert (2007; S. 31ff) die Trennung der Bereiche Lehreraus- und Lehrerfortbildung auch international umfangreich belegt. Die zweite Phase der Lehrerbildung kommt hier hinzu. Die Zuordnung zu *pre-* oder *in-service* fällt dabei nicht leicht: Tatsächlich sind die Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst noch in Ausbildung, gleichzeitig haben sie aber auch Verantwortung im Unterricht, die im Verlauf dieser Ausbildungsphase zunimmt.

In der hier vorgestellten Veranstaltung geht es um den projektorientierten Einsatz der Neuen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe. Dazu haben wir ein Konzept umgesetzt, das alle drei Phasen der Lehrerbildung kombiniert und für alle Beteiligten zu einem vertieften, Theorie und Praxis verbindenden Lernen führt. Das Gesamtkonzept in dessen Rahmen die Veranstaltungen angeboten werden, wurde mit dem eLearning Award 2006[1] der J.W. Goethe Universität Frankfurt ausgezeichnet.

Die Zielgruppen

Die Veranstaltungen werden unter der Leitung von Prof. Götz Krummheuer und mir als Schulpraktische Projekte durchgeführt, die mit 4 SWS ab dem 4. Semester besucht werden können. In der modularisierten Studienordnung ist dieser Veranstaltungstyp Teil eines Moduls zur mathematikdidaktischen Vertiefung. Für die Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst handelt es sich um ein Wahlpflichtmodul mit einem Workload von 30 Stunden. Für Lehrkräfte im hessischen Schuldienst ist die Veranstaltung vom Hessischen Institut für Qualitätsentwicklung mit 40 Punkten akkreditiert.

Es nehmen Studierende mit dem Fach Mathematik für das Lehramt an Grundschulen teil. Durch Kooperationen mit den Studienseminaren Frankfurt, Wiesbaden, Rüsselsheim und Hanau (jeweils GHRF) konnten

[1] Für Informationen zum eLearning Award siehe: http://www.megadigitale.uni-frankfurt.de/events/20061218_netzwerktag/el_award.html

Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst, deren Ausbilder und Mentoren gewonnen werden, die an der Veranstaltung teilnehmen. Die Studierenden werden in der Veranstaltung einzelnen Lehrkräften fest zugeordnet und bilden in der Veranstaltung dann eine Kleingruppe. Wegen der unterschiedlichen Kenntnisse und Fähigkeiten aber auch wegen der verschieden hohen Workloads sind auch die Aufgaben der einzelnen Teilnehmer/innen unterschiedlich. Die Vorteile, die sich aus dieser Mischung ergeben, möchte ich hier im Einzelnen darstellen:

Die Studierenden erleben hier einen engen Praxiskontakt und planen mit Hilfe der Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst und Beratung von Ausbildern ein Unterrichtsprojekt für eine spezifische Klasse. Die Motivation wird deutlich erhöht, da von Anfang an feststeht, dass das geplante Unterrichtsszenario zum Einsatz kommt. Die Möglichkeit schon vor dem Referendariat Einblick in die 2. Phase zu erhalten macht die Veranstaltung für Studierende sehr attraktiv.

Für die Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst und Lehrerinnen ergibt sich der Vorteil aus der Zusammenarbeit mit den Studierenden, die einen sehr hohen Workload in die Erstellung der Unterrichtsszenarien - hier WebQuests - einbringen und bei der Durchführung der WebQuests helfend und dokumentierend mitarbeiten. Die zeitaufwändige Erstellung der WebQuests könnte in den nur 30 Stunden Workload umfassenden Modulen der zweiten Phase nicht geleistet werden. Auch die Durchführung eines ersten WebQuests in einer Klasse kann zu zusätzlichem Bedarf an helfenden Personen führen. Die Dokumentation der Durchführung ist für die Weiterarbeit in der Veranstaltung wichtig. Um aussagekräftige Protokolle zu erhalten sind Fotos und Videoaufnahmen hilfreich. Das kann nur geleistet werden, wenn neben der für den Unterricht Verantwortlichen weitere Helfer diese Aufnahmen erstellen und Protokolle anfertigen.

Inhalte und Verlauf

Die Kleingruppen sollen PrimarWebQuests[2] erstellen und diese zur Erprobung in den Klassen der teilnehmenden Lehrkräfte durchführen. Die Durchführung soll dokumentiert und in der Veranstaltung vorgestellt werden. Möglichkeiten, Chancen und Grenzen des Einsatzes sollen so erkannt werden.

Der Verlauf als Blended Learning Veranstaltung gliedert sich in drei

[2] Die Methode des PrimarWebQuest ergab sich aus Veranstaltungen, in denen klassische WebQuests eingesetzt und Modifikationen zur Anpassung an die besonderen Möglichkeiten und Bedürfnisse der Grundschüler ermittelt wurden. Die modifizierte Form, das PrimarWebQuest, wird in Schreiber 2007a/ 2007c vorgestellt.

Präsenz- und zwei online-Phasen. Dazu verweise ich auf die Beschreibung und Übersicht in Schreiber 2007b/ 2008.

In der Veranstaltung ist der Einsatz einer begleitenden online Plattform aus organisatorischen Gründen unerlässlich. Die Besonderheiten der verschiedenen Arbeits- und Lernorte der Beteiligten (Universität, Studienseminar und Schule) sowie unterschiedliche Zeitpläne und Beiträge der einzelnen Teilnehmer/innen zur Veranstaltung, erfordern die Konzeption der Veranstaltung als Blended Learning Veranstaltung. Die konstruktive Arbeit in den Kleingruppen und die Betreuung durch den Veranstaltungsleiter ist nur durch den ständigen Austausch über die Plattform WebCt möglich. Vor allem die Möglichkeit einzelne Zwischenergebnisse von Arbeitsgruppen in WebCt auszutauschen und zur Diskussion zu stellen, wird von den Gruppen stark genutzt.

Forschungsorientierung

In kommenden Veranstaltungen soll der Fokus zunehmend von der Erstellung auf die Durchführung und Reflexion der PrimarWebQuests verlegt werden. Dazu werden ab dem Sommersemester 2008 die Veranstaltungen forschungsorientiert stattfinden. Studierende, Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst und Lehrerinnen sollen WebQuests in der für die Grundschule modifizierten Form für unterschiedliche Themen aus der Primarstufe erstellen oder bestehende verändern. Der Umgang der Schüler und Schülerinnen mit den PrimarWebQuests wird videografiert und kann so genau ausgewertet werden. Mit Methoden der Interpretativen Unterrichtsforschung (Krummheuer/ Naujok 1998) werden dann verschiedene Auswirkungen auf unterrichtliche Situationen mit Einsatz neuer Medien untersucht. Hier sollen die besonderen Lernmöglichkeiten bei der Verwendung dieser Methode für den Mathematikunterricht in der Primarstufe ermittelt werden.

Resümee

„Lehrerbildung ist in berufsbiographischer Hinsicht ... als Einheit von Aus- und Weiterbildung zu verstehen“ (Terhart 2001; S. 226). Wie Terhart in seinem Kommissionsbericht (2000; S. 113) gehe auch ich von einem erheblichen Koordinationsaufwand der drei Phasen aus. Eine Zusammenlegung scheint unrealistisch, aber die drei Phasen müssen besser aufeinander abgestimmt und miteinander verknüpft werden (ebd.; S. 59). Gerade einzelne Veranstaltungen, in denen zwei der Phasen oder wie in meinem Beispiel alle drei Phasen sich in produktiver Weise begegnen und gemeinsam arbeiten, bieten für eine Koordination der Phasen die beste Gelegenheit. Hier dürfen sich nicht „nur“ die Lernenden der beteiligten

Phasen treffen, sondern unbedingt auch Lehrende der beteiligten Phasen mit agieren. Der erhebliche Aufwand der Koordination der verschiedenen Phasen wird erleichtert, wenn Lehrende in verschiedenen Phasen der Lehrerbildung eingebunden sind und so Netzwerke geknüpft, statt Vorurteile gepflegt werden. Ein Phasen übergreifendes Portfolio, könnte einen kontinuierlichen Aufbau der Kompetenzen ermöglichen. Ein solches Portfolio kann natürlich auch in der dritten Phase weiter geführt werden und sollte dort Beachtung finden.

Literatur

Gellert, U. (2007) Gemeinschaftliches Interpretieren mit Studierenden und Lehrern. Ein kombinierter Ansatz für die Lehreraus- und Lehrerweiterbildung. In: Journal für Mathematik-Didaktik Heft 28, 31-48

Krummheuer, G./ Naujok, N (1999) Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung. Opladen: Leske und Budrich.

Langenhan, J./ Regner, C./ Schreiber, C. (2007) Zahldarstellung verschiedener Völker mit WebQuests. Bei "lehrer-online" veröffentlicht: http://www.lehrer-online.de/zahlensysteme-hochkulturen.php

Schreiber, C. (2008) eLearning in phasenübergreifenden Veranstaltungen in der Lehrerbildung für die Primarstufe. In: L-News. Johann Wolfgang Goethe - Universität: Frankfurt, Nr. 28, 16 – 21 Download: http://www.uni-frankfurt.de/studium/download/l-news28.pdf

Schreiber, C. (2007a). Prima(r)-WebQuests. WebQuests – für die Grundschule modifiziert. In: Computer+Unterricht Heft 67, 38-40

Schreiber, C. (2007b) Blended Learning in der Lehrerbildung für die Primarstufe. Bei "lehrer-online" veröffentlicht: http://www.lehrer-online.de/lehrerbildung-primarstufe.php

Schreiber, C. (2007c) WebQuests für die Grundschule: Prima(r)WebQuest. Bei "lehrer-online" veröffentlicht: http://www.lehrer-online.de/primar-webquest.php

Terhart, E. (2000, Hrsg.) Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland. Abschlussbericht der von der Kultusministerkonferenz eingesetzten Kommission. Belz: Weinheim, Basel

Terhart, E. (2001) Lehrerberuf und Lehrerbildung – Forschungsbefund, Problemanalysen und Reformkonzepte. Belz: Weinheim, Basel

WWW Adressen (Abruf am 28.03.08):

http://www.megadigitale.uni-frankfurt.de/events/20061218_netzwerktag/el_award.html

http://www.lehrer-online.de/primar-webquest.php

http://www.lehrer-online.de/lehrerbildung-primarstufe.php

http://www.lehrer-online.de/zahlensysteme-hochkulturen.php

http://www.uni-frankfurt.de/studium/download/l-news28.pdf

Marcus SCHÜTTE, Universität Frankfurt.

Die sprachliche Einführung neuer mathematischer Begriffe im Grundschulmathematikunterricht

Einleitung

Die diesem Beitrag zu Grunde liegende Studie zielt darauf ab zu beschreiben, wie Schülerinnen und Schülern im alltäglichen Grundschulmathematikunterricht in deutschen Schulen durch die sprachliche Gestaltung des Unterrichts der Lehrperson Gelegenheiten zum Lernen von Mathematik gegeben wird. Die Gesamtheit der zur Verfügung stehenden Gelegenheiten zum Lernen für die Schülerinnen und Schüler im Interaktionsraum Grundschulmathematikunterricht wird im Weiteren mit ‚Lernraum' bezeichnet. Lernende können in diesem Lernraum in Anlehnung an Markowitz [1] lernen, in dem sie zunächst rezeptiv ein *Teil* dieses Lernraums *sind* und über dieses *Teilsein* Gelegenheiten erhalten im Klassengespräch auch aktiv *teilzunehmen*, also produktiv den Lernraum mitzugestalten und Neues lernen zu können.

Theorierahmen

Die Analyse der sprachlichen Gestaltung des untersuchten Grundschulunterrichts lässt sich in drei hierarchische Ebenen unterteilen. Die erste Ebene kann u. a. anhand der Ausführungen von Maier und Schweiger [2] aufgespannt werden. Im Mathematikunterricht werden zur sprachlichen Gestaltung bei der Einführung neuer mathematischer Begriffe Fachtermini und alltagssprachliche Begrifflichkeiten benötigt. In welcher Form sich deren Gebrauch im Unterricht rekonstruieren lässt fällt hiernach in die erste Ebene der Hierarchisierung. Die zweite Ebene lässt sich u. a. durch Bezüge zu theoretischen Ansätzen von Pimm [3] beschreiben. Nach diesen Ansätzen sind mathematische Begriffe nicht als isolierte Einheiten zu betrachten, sondern immer im Zusammenhang mit Bedeutungen, Wörtern und Strukturen in einem jeweiligen sprachlichen Register, welches die Funktion der Begriffe für dieses Register festlegt. In die zweite Ebene der Hierarchisierung der sprachlichen Gestaltung des Unterrichts fällt demnach, ob und inwieweit die neu zu lernenden mathematischen Begriffe im untersuchten Unterricht in ein mathematisch fachsprachliches Register eingegliedert werden. Die dritte Ebene der Hierarchisierung lässt sich u. a. durch Bezugnahme auf die theoretischen Ausführungen von Bernstein [4] und Gogolin [5] entfalten. Nach Gogolin wird in der deutschen Schule ein normativer Anspruch an alle Schülerinnen und Schüler herangetragen, dass diese die im Unterricht gepflegten Sprachvarianten der Schule rezeptiv und produktiv beherrschen können sollen. Diese Sprache der Schule – von Gogolin mit *„Bildungssprache"* (vgl. [5] S. 82 ff.) bezeichnet – hat auf der Ebene von Strukturen mehr mit den Regeln schriftsprachlicher Kommunikation gemeinsam und entspricht somit in wesentlichen Merkmalen nicht der mündlichen Kommunikation des Alltags vieler Schülerinnen und Schüler. In die dritte Ebene der Hierarchisierung fällt infolgedessen die Frage, inwieweit die Schülerinnen und Schüler im Unterricht in eine Bildungssprache eingeführt werden, die es ihnen ermöglicht an der Unterrichtsinteraktion so *teilzunehmen* und Sprache produktiv so zu beherrschen, dass sie den Kriterien von Wohlgeformtheit oder Grammatikalität der Sprache genügen. Hierbei ist es auch von Interesse, inwieweit die Lehrperson in ihrer Vorbildfunktion selber Redeweisen verwendet, die den Ansprüchen von Wohlgeformtheit genügen und so zumindest den Schülerinnen und Schülern auf der rezeptiven Ebene im Sinne eines *Teilseins* Einblick in eine formale Sprache des Unterrichts ermöglichen.

Implizitheit als vorherrschendes Strukturmerkmal

Als Ergebnis der Analysen konnten drei Handlungsroutinen der Lehrpersonen bei der Einführung neuer mathematischer Begriffe rekonstruiert werden, die sich durch ein unterschiedliches didaktisch-methodisches Vorgehen differenzieren lassen. Innerhalb der Vielfalt von didaktisch-methodischen Zugängen zur Einführung neuer mathematischer Begriffe lässt sich rekonstruieren, dass die Verwendung von Fachtermini in Abgrenzung zu alltagssprachlichen Begrifflichkeiten unterschiedlich von den Lehrpersonen gehandhabt wird. Es lässt sich kein ausgewogenes Verhältnis der Verwendung von mathematischen Fachtermini und alltagssprachlichen Begrifflichkeiten durch die Lehrpersonen ausmachen.

Die Charakteristika der Handlungsroutinen zeigen allerdings auch auf, dass sich die sprachliche Gestaltung des untersuchten Grundschulmathematikunterrichts in einigen strukturellen Merkmalen gleicht. Als gemeinsames zugrunde liegendes Strukturmerkmal lässt sich das Phänomen einer Implizitheit von Lerninhalten und des Vorgehens auf unterschiedlichen Ebenen bei der Einführung von neuen mathematischen Begriffen rekonstruieren. Diese Implizitheit schlägt sich bei der Verwendung unterschiedlicher mathematisch fachsprachlicher und auch formalsprachlicher Register nieder. Es lässt sich in Bezug auf das mathematisch fachsprachliche Register rekonstruieren, dass die Bedeutungen der Begriffe sowie inhaltliche Bezüge zwischen den neu zu lernenden mathematischen Begriffen oder zu bereits bekannten alltagssprachlichen Begrifflichkeiten nicht oder nur implizit hergestellt werden. Sie finden so in der Interaktion des Klassengesprächs keine Berücksichtigung.

Ein ähnliches Bild zeigt sich darin, wie die Lehrpersonen auf sprachliche Besonderheiten im formalsprachlichen Register eingehen. Auch hier herrscht eine Implizitheit des Lehrens vor. Die Lehrpersonen verweisen nur implizit auf grammatische Strukturen, in die die neuen mathematischen Begriffe oder Fachtermini eingebettet werden oder darauf welche bedeutungstragenden Bestandteile diese prägen. Mit welchen sprachlichen Mitteln sich die komplexen und abstrakten mathematischen Inhalte im Sinne einer konzeptionellen Schriftlichkeit in einen zusammenhängenden Text ausdrücken lassen, wird von Lehrpersonen weder aktiv demonstriert noch thematisiert. So bleiben die wenigen inhaltlichen oder implizit endenden Erklärungsversuche jedoch unverbunden. Auf eine Wohlgeformtheit der Rede der Schülerinnen und Schüler wird demnach vor allem oberflächlich darüber eingegangen, dass zum Teil die Aussprache und Schreibweise der neuen mathematischen Begriffe oder Fachtermini von den Lehrpersonen explizit aufgegriffen werden. Eine durchgängige Einbettung der mathematischen Begriffe in eine Bildungssprache, um vom Speziellen zum Allgemeineren abstrakte Begriffe dekontextualisiert beschreiben zu können, ist nicht erkennbar.

Diese Implizitheit des Vorgehens auf unterschiedlichen Ebenen und die zum Teil daraus resultierende Verwendung von ungeformten alltagssprachlichen Redeweisen durch die Lehrperson steht im Widerspruch zu den normativen Ansprüchen des deutschen Schulsystems an alle Schülerinnen und Schüler, einer Bildungssprache mächtig zu sein.

Implizite Pädagogik

Die Handlungen der Lehrpersonen zur sprachlichen Gestaltung des Unterrichts lassen sich anhand eines theoretischen Konzeptes erklären, das ich mit *Impliziter Pädagogik* (vgl. [4]) bezeichne. Nach dieser Impliziten Pädagogik besteht die Aufgabe von Lehrpersonen vorwiegend darin, Lernenden eine Lernumgebung bereitzustellen und in dieser zu begutachten, wie sich die angeborenen individuellen Fähigkeiten und ‚Talente' jedes einzelnen Kindes entwickeln. Das Objekt des Lernens bezieht sich in solchen Ansätzen somit nicht auf kollektives Lernen im Sinne des Einzelnen im Kollektiv oder des gesamten Kollektivs, sondern auf das Individuum und die Entwicklung seiner Kompetenzen. Eine solche Implizite Pädagogik folgt demnach dem Grundgedanken, dass Schülerinnen und Schüler sich allein aufgrund ihrer mitgebrachten Fähigkeiten Bedeutungen selbständig erschließen können oder sich zugrunde liegende inhaltliche und sprachliche Zusammenhänge und Strukturen für die Kinder wie von selbst ergeben. So erlangt nicht der Unterricht, die Qualifikation der Lehrenden und ihre Anstrengungen den entscheidenden Einfluss auf einen möglichen Schulerfolg von Schülerinnen und Schülern in der Schule, sondern vor allem die mitgebrachten Fähigkeiten der Kinder. Bestehende soziale Verhältnisse werden hiernach im Schulsystem reproduziert.

Konsequenzen

Das Vorgehen nach einer Impliziten Pädagogik kann zum einen dazu führen, dass eine umfassende Bedeutungsentwicklung der neu zu lernenden Begriffe durch die Schülerinnen und Schüler beeinträchtigt wird. Zum anderen führt die Verwendung einer informellen Alltagssprache durch die Lehrpersonen dazu, dass Schülerinnen und Schülern erschwert wird rezeptiv Teil zu sein an einem formalsprachlich geprägten Bildungsdiskurs im Unterricht oder diesen aktiv also produktiv durch Teilnehmen gestalten zu können. Die Lehrpersonen stellen so kein Vorbild in der aktiven Verwendung einer formalen Bildungssprache im Grundschulmathematikunterricht dar. Die aktive Teilnahme an einem formalen Bildungsdiskurs der Schule stellt jedoch nach Gogolin ein normatives Kriterium zum Erfolg in den weiterführenden Schulen dar. Der Lernraum verstanden als die Gesamtheit der zur Verfügung stehenden Gelegenheiten zum Lernen im Interaktionsraum Grundschulmathematikunterricht scheint nach einem solchen Vorgehen der Lehrpersonen maßgeblich für alle Schülerinnen und Schüler aber vor allem für solche, die aus einem Umfeld mit geringen formalen Bildungsstatus oder z. B. solchen mit Migrationshintergrund stammen eingeschränkt.

Literatur

[1] Markowitz, J. (1986): Verhalten im System. Zum Begriff des sozialen Epigramms. Frankfurt: Suhrkamp.

[2] Maier, H./ Schweiger, F. (1999): Mathematik und Sprache: Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht. Wien: öbv und hpt.

[3] Pimm, D. (1987): Speaking mathematically. London: Routledge.

[4] Bernstein, B. (1996): Pedagogy, Symbolic Control and Identity. London: Taylor & Francis.

[5] Gogolin, I. (2006): Bilingualität und die Bildungssprache der Schule. In: Mecheril, P. und Quehl, T. (Hrsg.): Die Macht der Sprachen. Englische Perspektiven auf die mehrsprachige Schule. Münster: Waxmann, S. 79-85

Stanislaw SCHUKAJLOW, Dominik LEISS, Kassel

Textverstehen als Voraussetzung für erfolgreiches mathematisches Modellieren – Ergebnisse aus dem DISUM-Projekt

1. Lesekompetenz und mathematische Kompetenz am Beispiel der PISA-Studie

Lesekompetenz gilt als eine grundlegende Voraussetzung für den Wissenserwerb in und außerhalb der Schule. Schon in der Grundschule sind Fortschritte der Kinder in Mathematik davon abhängig, wie gut sie lesen können. Auch in anderen Schulformen wurden je nach Untersuchungskonzeption schwache, mittlere oder große Korrelationen zwischen Lesekompetenz und mathematischer Kompetenz festgestellt. Bei der internationalen PISA-Studie z.B. beträgt die latente Korrelation zwischen Lesen und Mathematik unter Kontrolle der Intelligenz der Schüler 0.60 (Leutner, Klieme, Meyer, & Wirth, 2004). Angesichts einer so engen Beziehung zwischen Lesen und Mathematik lohnt es sich genauer zu analysieren, wie Lesekompetenz bei PISA und in anderen Studien definiert und operationalisiert wird.

In der Leseforschung findet man zwei verschiedene Positionen zu der Frage, welche Fähigkeit unter „Lesekompetenz" verstanden wird. Im engeren Sinne ist Lesekompetenz die Fähigkeit, schriftliche Texte zu verstehen, die nur verbale Informationen enthalten. Hingegen umfasst Lesekompetenz im weiteren Sinne die Fähigkeit, schriftliche Texte zu verstehen, in denen sowohl verbale als auch piktorielle Informationen wie Bilder, Diagramme, Tabellen, Graphiken u.s.w. enthalten sind (Schnotz & Dutke, 2004). In der internationalen PISA-Studie wurde Lesekompetenz im weiteren Sinn als leitende Konzeption gewählt. Diese Operationalisierung der Lesekompetenz spiegelt sich auch in der Testkonstruktion wider. Der Beispielaufgabe „Tschadsee" (Baumert u.a., 2001) liegt z.B. ein Funktionsgraph zugrunde, der die Tiefe des Tschadsees in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. Um diese Aufgabe zu lösen, müssen Schüler Informationen aus dem Graphen entnehmen können. Das Ablesen von Daten aus dem Graphen ist in der Aufgabe „Tschadsee" keinesfalls trivial und setzt u.a. die Fähigkeit voraus, eine Achse feiner als in der Aufgabestellung vorgegeben zu unterteilen.

Obwohl die Fähigkeit, Informationen aus einem Graphen zu entnehmen, im Bereich „Lesen" angesiedelt ist, ist sie zugleich eine mathematische Teilkompetenz. Diese Teilkompetenz kann einer der sechs in den Bildungsstandards beschriebenen mathematischen Kompetenzen zugeordnet werden, nämlich der Kompetenz „mathematische Darstellungen verwenden" (Blum, 2006). Im Mathematik-Test der PISA-Studie findet man dementsprechend eine Aufgabe, die ähnliche Anforderungen an die Schüler stellt. Eine solche Aufgabe ist die Aufgabe „Passau“ (publiziert u.a. bei Stölting, 2008) aus dem nationalen Mathematiktest. Beim Lösen der Aufgabe „Passau“ müssen Schüler – ähnlich wie bei der Aufgabe Tschadsee – Informationen aus einem Graphen entnehmen können.

Eine vergleichende Analyse von Aufgaben aus den Lese- und Mathematik-Tests der PISA-Studie zeigt somit, dass eine überdurchschnittlich hohe Korrelation zwischen Lese- und Mathematik-Leistungen der PISA-Schüler unter anderem auf zum Teil ähnliche theoretische Konzeptualisierung der beiden Bereiche zurückzuführen ist. Wie groß ist aber dieser Zusammenhang, wenn man Lesekompetenz erstens als Verstehen der Texte (Lesekompetenz im engeren Sinn) definiert und zweitens bei der Konstruktion des mathematischen Tests zwei Dimensionen – innermathematischer Test und Modellierungstest – unterscheidet? Ferner haben wir auch die Frage untersucht, ob die Modellierungskompetenz der Schüler durch ihre Lesefähigkeit und ihre Fähigkeit, innermathematische Items zu lösen, befriedigend erklärt werden kann.

2. Methode der Untersuchung

Die genannten Fragen wurden im Rahmen des DISUM-Projektes[1] nachgegangen. 100 Realschüler der 9. Jahrgangstufe haben einen standardisierten Lesetest LGVT 6-12 (Schneider, Schlagmüller, & Ennemoser, 2007) und den Kasseler Mathematiktest (siehe dazu den Beitrag von Leiss u.a in diesem Band) bearbeitet.

Im Kasseler Mathematiktest wurden den Schülern sowohl innermathematische Items wie zum Beispiel die Aufgabe „Fehlende Länge 1“ (s.u.) als auch Modellierungsitems wie z.B. die Aufgabe „Taxi“ (siehe dazu den Beitrag von M. Müller in diesem Band) gestellt. Der Modellierungstest enthält Aufgaben, für deren Lösung Schüler einzelne Schritte des Modellierungskreislaufs (siehe Blum & Leiß, 2005) durchlaufen müssen. Beide mathematischen Tests bestehen vorwiegend aus Aufgaben zu den Themengebieten „Satz des Pythagoras“ und „Lineare Funktionen“, die auch Schwerpunkt der zugehörigen DISUM-Unterrichtseinheit waren.

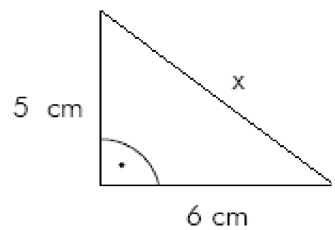
Der Lesetest wurde zusammen mit PISA-Aufgaben an einer großen Schüler-Population pilotiert und zeigte im Bereich „Verstehen“ eine Test-

[1] Das Forschungsprojekt DISUM („Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik“) wird seit 2005 von der DFG gefördert. Projektleiter sind Prof. Dr. W. Blum (Kassel), Prof. Dr. R. Messner (Kassel) und Prof. Dr. R. Pekrun (München).

Retest-Reliabilität von .87. Die Reliabilität des aus 10 Aufgaben bestehenden innermathematischen Tests ist .50. Der Modellierungstest besteht aus 19 Aufgaben und hat eine Reliabilität von .68.

Fehlende Länge1

Berechne die fehlende Seitenlänge x des rechts abgebildeten rechtwinkligen Dreiecks (Zeichnung nicht maßstabsgetreu).



3. Ergebnisse

Um die Stärke des Zusammenhanges zwischen den drei in dieser Studie eingesetzten Tests festzustellen, wurden bivariate Korrelationen berechnet. Dabei hat sich herausgestellt, dass der Lesetest und der innermathematische Test nicht miteinander korrelieren. Dieses Ergebnis zeigt also die Unabhängigkeit dieser beiden Bereiche. Die Korrelation zwischen Lesen und Modellieren ist erwartungsgemäß etwas höher und beträgt 0.15. Sie ist als schwach einzuschätzen und auf dem 5%-Niveau nicht signifikant. Beide mathematischen Tests korrelieren hingegen stark miteinander (r=0.43). Diese Korrelation ist auf dem 5%-Niveau signifikant. Zusammenfassend kann man sagen, dass bei der in dieser Studie vorgenommenen Konzeptualisierung der Lesekompetenz (als Fähigkeit, schriftliche Texte mit ausschließlich verbalen Informationen zu verstehen) die Zusammenhänge zwischen Lesen und mathematischer Kompetenz wesentlich niedriger sind als bei der PISA-Studie.

Die zweite Frage, der im Rahmen dieser Untersuchung nachgegangen wurde, ist, inwieweit die Varianz in der Modellierungskompetenz der Neuntklässler durch das Lösen von innermathematischen Items und durch die Lesekompetenz erklärt werden kann. Die Regressionsanalyse zeigt, dass durch diese beiden Faktoren nur 20% der Gesamtvarianz der Modellierungskompetenz erklärt werden kann. Das bestätigt die Hypothese, dass mathematisches Modellieren weit mehr als nur Lesen und Lösen von innermathematischen Items ist. Vor allem die erforderlichen Übersetzungen zwischen Realität und Mathematik sind Faktoren, welche die Modellierungskompetenz substanziell beeinflussen.

Eine Konsequenz aus den Ergebnissen der vorgestellten Studie ist die Notwendigkeit, Lesekompetenz bereichsspezifisch – also auch im Fach Mathematik – zu trainieren. Sehr gut geeignet hierfür erscheinen mathematische Modellierungsaufgaben. Lesestrategien und Lesetechniken, die beim Lesen von Sachtexten gut untersucht sind (wie z.B. Unterstreichungsstrategien), können auf mathematische Modellierungsaufgaben adaptiert und an diesem Aufgabentyp geübt werden. Dadurch kann sowohl die mathematikspezifische Lesekompetenz als auch die mathematische Modellierungskompetenz der Schüler verbessert werden.

Literatur

J. Baumert u.a. (2001): PISA 2000 Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Leske + Budrich, Opladen

W. Blum (2006): Die Bildungsstandards Mathematik. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Eds.), Bildungsstandards Mathematik: konkret Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor, Berlin

W. Blum, D. Leiß (2005): Modellieren im Unterricht mit der "Tanken" - Aufgabe. Mathematik Lehren (128)

D. Leutner, E. Klieme u.a. (2004): Problemlösen. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, J. Neubrand, R. Pekrun, H.-G. Rolff, J. Rost & U. Schiefele (Hrsg.), PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Waxmann, München, S. 416

W. Schneider, M. Schlagmüller, M. Ennemoser (2007): Lesegeschwindigkeits- und -verständnistest für die Klassen 6-12 LGVT 6-12. Hogrefe, Göttingen

W. Schnotz, S. Dutke (2004): Kognitionspsychologiscvhe Grundlagen der Lesekompetenz: Mehrebenenverarbeitung anhand multipler Informationsquellen. In U. Schiefele, C. Artelt, W. Schneider & P. Stanat (Hrsg.), Struktur, Entwicklung und Förderung von Lesekompetenz. VS Verlag für Sozialwissenschaften, Wiesbaden

P. Stölting (2008): Die Entwicklung Funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I – Vergleichende Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich. Dissertation Universität Regensburg

Stephanie SCHULER, Schwäbisch Gmünd

Was können Mathematikmaterialien im Kindergarten leisten? – Kriterien für eine gezielte Bewertung

In diesem Beitrag[1] soll ein Kriterienkatalog vorgestellt und diskutiert werden, der Grundlage einer gezielten Bewertung für Materialien der frühen arithmetischen Bildung sein kann.

1 Vorläuferfähigkeiten

Wenn von Vorläuferfähigkeiten die Rede ist, dann geht es um Fähigkeiten, die als eine Voraussetzung für schulisches Lernen angesehen werden und bereits im Kindergarten erworben bzw. gefördert werden sollen (vgl. z.B. Faust-Siehl 2001, 74; Krajewski 2003). Für den Erwerb des Zahlbegriffs wurden über die Zeit verschiedene Vorläuferfähigkeiten angenommen. Betonte Piaget (1964) die logischen Operationen, so wurde in der Folge von Gelman & Gallistel (1978) die Bedeutung des Zählens für den Zahlbegriffserwerb herausgestellt. Nach Resnick (1989) müssen die Teilfertigkeiten Mengenvergleich, Zählen und Subitizing zu einem numerischen Teil-Ganzes-Schema integriert werden. Diese Auffassung fand Eingang in die Mathematikdidaktik. Die Teilfertigkeiten werden aber z.T. unterschiedlich gewichtet – so unterscheiden Psychologen spezifische und unspezifische Vorläuferfertigkeiten (vgl. z.B. Krajewski 2003)[2] – bzw. um visuelle und räumliche Fähigkeiten erweitert (vgl. Lorenz 2005). Als Essenz ergeben sich für meinen Beitrag folgende Vorläuferfähigkeiten:

- Vergleichen von Mengen
- Zählen, Abzählen
- Simultanerfassung und Quasi-Simultanerfassung
- Teil-Ganzes-Beziehungen und erstes Rechnen

2 Kriterien zur Bewertung von Materialien

Vorläuferfähigkeiten bieten einen wichtigen Anhaltspunkt, um vorhandene Vorschläge zur frühen arithmetischen Bildung zu bewerten. Doch können erste Unterscheidungen bereits auf einer konzeptionellen Ebene getroffen werden:

---

[1] Eine ausführliche Fassung des Beitrags findet sich auf der beiliegenden CD.

[2] Im Unterschied zur mathematikdidaktischen Forschung wird in der Psychologie von Vorläuferfertigkeiten statt von Vorläuferfähigkeiten gesprochen. Der Begriff ‚Fertigkeiten' betont die Automatisierung, die schnelle Abrufbarkeit und die Entlastung des Gedächtnisses. Der Begriff ‚Fähigkeiten' ist assoziiert mit operativem Üben, beweglichem Denken und Verständnis.

- *Lehrgang* versus *offenes Angebot*
- Förderung von *Risikokindern* versus *breite Förderung* aller Kinder
- Förderung ausschließlich *spezifischer* versus Förderung auch *unspezifischer Vorläuferfertigkeiten*
- Mathematik als *Bestandteil des Kindergartenalltags* versus Schaffung einer eigenständigen *mathematischen Fantasiewelt*
- Förderung speziell des *Zahlbegriffs* versus breite Förderung *verschiedener Inhaltsbereiche*

Mit Hilfe dieser Unterscheidungen, die sich auf explizite und implizite Charakteristika von Materialien, Überlegungen zum Bildungsauftrag und die pädagogische Praxis in Kindergärten stützen, können Materialien in einem ersten Schritt näher beschrieben werden. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Materialien wie „Das kleine Zahlenbuch" I und II (Müller & Wittmann 2002; 2004) und „Die Käferschachtel" (Royar 2007) zielen auf eine *breite Förderung* aller Kinder. Die Materialien können als *offenes Angebot* im Freispiel oder als eher *angeleitete Tätigkeit* in einer Kleingruppe zum Einsatz kommen. Beide Materialien sind weitgehend auf den *Zahlbegriffserwerb* ausgerichtet und können die diesem Beitrag zugrunde gelegten Vorläuferfähigkeiten fördern (vgl. Abschnitt 1).

2.1 Mathematischer Gehalt des Materials

In einem nächsten Schritt können *Vorläuferfähigkeiten* zur Bestimmung des mathematischen Gehalts von Materialien herangezogen werden.

- Welche Vorläuferfähigkeiten können mit dem Material angesprochen und gefördert werden?
- Werden einzelne oder mehrere Vorläuferfähigkeiten angesprochen?

Ein weiteres Kriterium für die Bewertung ist die Art des verwendeten Materials. Betont die Verwendung von Arbeitsmitteln aus dem arithmetischen Anfangsunterricht oder Abwandlungen die *Anschlussfähigkeit zum schulischen Lernen*, gibt die Verwendung unstrukturierter Materialien der *kindlichen Eigenaktivität bei der Herstellung von Strukturen* mehr Raum.

- Erfüllt das Material didaktische Kriterien des Anfangsunterrichts?
- Lässt das Material Eigenstrukturierung zu und/oder begünstigt diese?

Diese Überlegungen sollen an einem Beispiel illustriert werden:[3]

Kriterien	Domino	Stechen
1 Mathematischer Gehalt des Materials		
Mengenvergleich (mehr/ weniger, gleichviel)	+	++
Aufsagen der Zahlwortreihe	+	+
Abzählen von Objekten (einzeln, weiter, Schritte)	+	+
Vorgänger/Nachfolger	+	
Aufbau Würfelbilder	++	+
Andere Punktbilder/Anordnungen	+	+
Teil-Ganzes-Beziehungen	+	+
Erstes Rechnen	+	
2 Materialbeschaffenheit		
Strukturiertes Material	++	+
Unstrukturiertes Material		

+: möglich, kann stattfinden ++: zutreffend, wird in hohem Maße unterstützt

2.2 Gestalt des Lernprozesses

Neben dem mathematischen Gehalt und der Materialbeschaffenheit, die sich vorab bestimmen lassen, ist für die Bewertung eines Materials die Gestalt des Lernprozesses mit diesem Material von entscheidender Bedeutung. Um Aussagen über die Gestalt des Lernprozesses treffen zu können, wurden einige Materialien im Rahmen einer Pilotstudie erprobt.[4] Leitend waren dabei unter Anderem folgende Fragen:

- Hat das Material *Anregungspotential*? Kann Anregungspotential aufgrund der Beobachtungen genauer gefasst werden?
- Lassen sich *Bedingungen* festmachen, unter denen eine *mathematisch gehaltvolle Auseinandersetzung* stattfindet?

Vorab wurde Anregungspotential als Selbstläufigkeit gefasst: Kinder greifen von selbst und mehrfach nach diesem Material, Kinder entwickeln eigene und vielfältige Spielideen mit diesem Material. Durch die Pilotstudie ergaben sich Ausdifferenzierungen. Anregungspotential konnte nun auch über Engagiertheit – ausdauernde Beschäftigung mit dem Material, Konzentration auf die Tätigkeit, Vertiefung bzw. Versunkenheit ins Geschehen, der Wunsch nach Wiederholung, Freude, Zufriedenheit und Spaß (auch am gemeinsamen Tun) – gefasst werden (vgl. Laevers 1997).

---

[3] Bei „Domino“ werden Spielsteine entsprechend der Anzahl angelegt. Bei „Stechen“ gewinnt derjenige den Stich, der die Karte mit der größeren Anzahl aufgedeckt hat.
[4] Genaueres zur Pilotstudie findet sich in der ausführlichen Fassung.

Als eine wesentliche Bedingung für eine mathematisch gehaltvolle Auseinandersetzung mit dem Material ergab sich die Rolle der Erzieherin. Folgende Verhaltensweisen und Kompetenzen erwiesen sich als förderlich:

- Eigene Spielideen und Wege zulassen, Verbindungen zwischen eigenen Wegen und dem mathematischem Gehalt sehen, um mathematisch gehaltvoller Spielideen zu initiieren und aufrechtzuerhalten;
- Erklären der Spielregeln, zeitweises Mitspielen, sukzessiver Rückzug aus dem Spielgeschehen, bloße Anwesenheit;
- Prozesshilfe beim Spielverlauf, inhaltliche Hilfe bei Nachfrage, inhaltliche Anregungen bei Material mit verschiedenen Möglichkeiten.

3 Möglichkeiten und Grenzen des Kriterienkatalogs

Der Kriterienkatalog zur Bewertung von Materialien umfasst auf der einen Seite eher ‚harte' Kriterien zum mathematischen Gehalt, welche *vor einem Einsatz* herangezogen werden können, und auf der anderen Seite eher ‚weiche' Kriterien wie Anregungspotential und die Bedingungen einer mathematisch gehaltvollen Auseinandersetzung, welche *den Einsatz* des Materials *begleiten*. Sein Potenzial bestehen darin, den Bildungsgehalt verschiedener Materialien im Hinblick auf den Zahlbegriffserwerb zu prüfen und darzustellen. Es wurde aber auch deutlich, dass zum Anregungspotential oder zu den Bedingungen einer mathematisch gehaltvollen Auseinandersetzung vorab nur Vermutungen angestellt werden können.

Literatur

Faust-Siehl, G. (2001): Konzept und Qualität im Kindergarten. In: Faust-Siehl, G. & Speck-Hamdan, A. (Hrsg.): Schulanfang ohne Umwege. Frankfurt a.M., S. 53–79.

Gelman, R., Gallistel, C. R. (1978): The Child`s Unterstanding of Number. Cambridge.

Krajewski, K. (2003): Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg.

Lorenz, Jens Holger (2005): Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen im Vorschulalter. In: Hasselhorn, M. u.a. (Hrsg.): Diagnostik von Mathematikleistungen. Göttingen, S. 29–48.

Müller, G. N. & Wittmann, E. Ch. (2002; 2004): Das kleine Zahlenbuch. Teil I und II. Seelze.

Piaget, J. (1964): Die Genese der Zahl beim Kind. In: Piaget, J. (Hrsg.): Rechenunterricht und Zahlbegriff. Braunschweig, S. 50–72.

Resnick, L. B. (1989): Developing Mathematical Knowledge. In: American Psychologist, 44 (2), S. 162–168.

Royar, Th. (2007): Die Käferschachtel. Lichtenau.

Laevers, F. (Hrsg.) (1997): Die Leuvener Engagiertheits-Skala für Kinder. LES-K. Erkelenz: Fachschule für Sozialpädagogik.

Andreas SCHULZ, Freiburg

Text- und Aufgabenanalyse: Finden Standards Eingang in Klassenarbeiten?

Welche Bildungsbreite wird im Mathematikunterricht angestrebt und inwieweit wird sie umgesetzt? Diese Frage ist in Zeiten der Steuerung von Bildungssystemen durch Standards und zentrale Prüfungen von besonderem Interesse. Um sie systematisch zu beantworten, ist ein Verfahren notwendig, das Bildungsanforderungen für Vergleiche erfassbar macht. Hierzu wurde ein Analyseraster entwickelt, das sowohl zur Auswertung der Anforderungsqualität von Lehrplänen und Bildungsstandards als auch von schriftlichen Klassenarbeiten dienen kann. Dabei kommt dem Typus der „verstehensorientierten Aufgabe" eine wesentliche Bedeutung im kompetenzorientierten Lernen und Leisten (Büchter & Leuders, 2006) zu. Die empirische Grundlage der hier vorgestellten Teilstudie sind bisher ausgewertete 4096 Aufgabenstellungen aus 310 Klassenarbeiten der 7. Jahrgangsstufe in Luxemburg.

Im Rahmen meiner Dissertation gehe ich mittels einer Triangulation, bestehend aus Interviewauswertungen, Fragebögenerhebungen (Schulz, 2007) und der hier vorgestellten Analyse von Bildungsstandards und Aufgabenstellungen aus schriftlichen Klassenarbeiten der übergeordneten Fragestellung nach, ob sich im Zuge der Einführung von Kompetenz- und Outputorientierung in Luxemburg Veränderungen im Mathematikunterricht feststellen lassen.
Am Ausgangspunkt der hier berichteten Teilstudie stand die Frage, wie sich allgemeine Bildungsziele des Mathematikunterrichts möglichst in ihrer gesamten Breite erfassen, systematisieren und übersichtlich darstellen lassen. In einem ersten Schritt wurden daher bestehende Allgemeinbildungskonzepte im Mathematikunterricht (z.B. Winter, 1996; Heymann, 1998) analysiert und zusammengeführt. Dabei wurden folgende Bereiche für Bildungsziele identifiziert: Bildungsziele können sich beziehen

1. auf die Person selbst (z.B. Selbstvertrauen, Anstrengungsbereitschaft),
2. auf Handlungen einer Person im sozialen, gesellschaftlichen oder technischen Umfeld (z.B. Kommunikation, Internetrecherche),
3. auf die Mathematik.

Eine andere Sichtweise auf Bildungsziele, die stark vom Weinertschen Kompetenzbegriff geprägt ist, findet man mehr oder weniger explizit in fachbezogenen Bildungsplänen. Diese zeigt sich am deutlichsten wohl in der Unterscheidung von Wissen, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einstellungen, wie sie beispielsweise auch in den luxemburgischen Bildungsstandards verwirklicht wurde. Wegen der Bedeutung fachbezogener Bildungsstandards für die übergeordnete Fragestellung der Gesamtstudie wurde die Weinertsche Sichtweise auch für das Kategoriensystem zur Erfassung allgemeiner Bildungsziele als Hauptunterscheidungsmerkmal übernommen. In darunter liegenden Dimensionen unterscheide ich Bildungsziele hinsichtlich personal/sozial, fachübergreifend/mathematikbezogen und prozessbezogen/inhaltsbezogen.

Um diese top-down konstruierte Systematik mit ihren Einzelkategorien zu validieren bzw. nötigenfalls weiter auszudifferenzieren, wurden in einem sechsköpfigen Team, bestehend aus einem wissenschaftlichen Mitarbeiter und fünf Lehrkräften in der Ausbildung beispielsweise Texte von Winter (1996) und Heymann (1998), verschiedene Lernpläne und Bildungsstandards sowie auch Aufgabensammlungen (Schulbücher, Lernstandserhebungen) durchgearbeitet und analysiert und dabei überprüft, ob sich die dort in Aufgabenstellungen konkretisierten, umschriebenen oder explizit genannten Bildungsziele aus dem Bereich des Mathematikunterrichts den bereits bestehenden Kategorien zuordnen ließen, oder aber ob der anfänglichen Systematik weitere Kategorien hinzugefügt werden mussten. Daraus resultierten schließlich 84 Einzelkategorien.

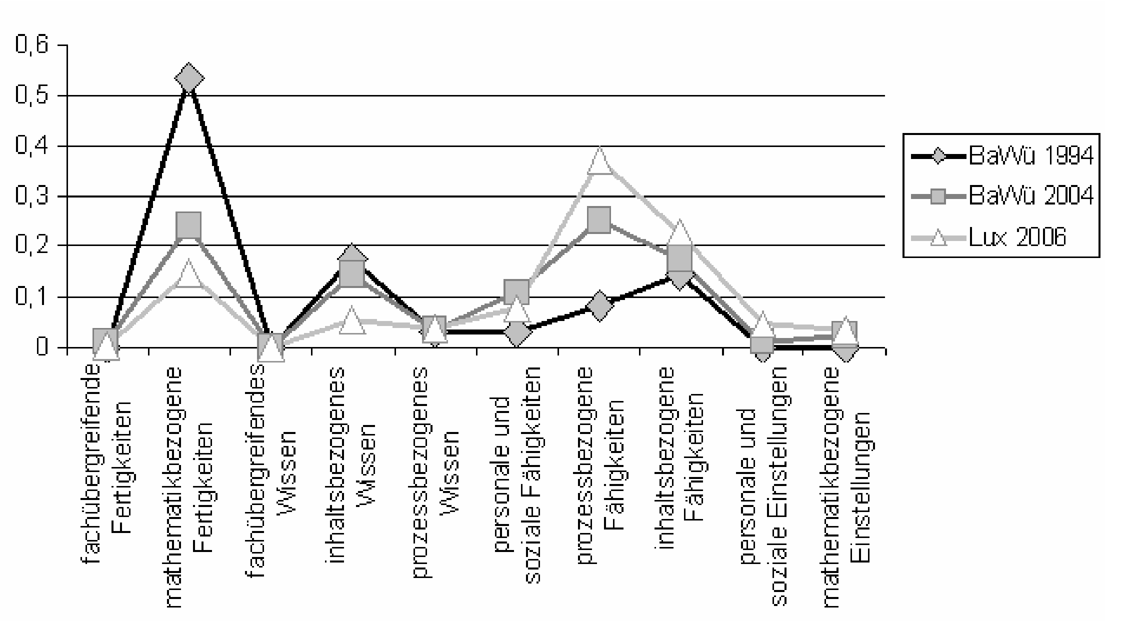


Abb. 1: Betonung und Ausdifferenzierung von Fähigkeiten als Kennzeichen von Kompetenzorientierung in Bildungsplänen

Eine Anwendung dieses Kategoriensystems auf drei Lehr- bzw. Bildungspläne (Baden-Württemberg: „Lehrplan“ 1994 und „Bildungsplan“ 2004, Luxemburg: „Kompetenzorientierte Bildungsstandards“ 2006, s. Abb.1) veranschaulicht den aktuellen Einfluss von Kompetenzorientierung bei der

Gestaltung von Bildungsplänen. Um die Lehr- und Bildungspläne vergleichbar zu machen, wurden die relativen Häufigkeiten einzelner Kategorien pro Curriculum errechnet und verwendet. Zur anschaulicheren grafischen Darstellung wurden die 84 Kategorien in dieser Grafik zu 10 charakteristischen Bereichen zusammengefasst. Im Ergebnis kann man erkennen, wie mit einer zunehmenden Betonung und Ausdifferenzierung von prozess- und inhaltsbezogenen Fähigkeiten in Bildungsstandards der oft kritisierten fertigkeitsorientierten Kalküllastigkeit des Mathematikunterrichts entgegengewirkt werden soll (siehe Abb. 1).

Daher stellt sich die Frage, ob sich die in Abbildung 1 veranschaulichte Betonung verstehensorientierter Bildungsziele auch in den Aufgabenstellungen der Mathematiklehrkräfte als Konkretisierungen der Standards für die Schüler wiederfindet. Hierzu wurden in Luxemburg aus dem ersten Trimester des Schuljahres 2006/07 im Fach Mathematik die Aufgabenstellungen aus 380 Klassenarbeiten erfasst. Ziel ist, die Ergebnisse dieser ersten Erhebung mit der noch bevorstehenden Auswertung von Klassenarbeiten in der 8. Klassenstufe aus dem ersten Trimester des Schuljahres 2007/08 zu vergleichen, um daraus auf eine mögliche zunehmende Berücksichtigung verstehensorientierter Aufgaben zu schließen.

Die Aufgabenanalyse konzentriert sich auf folgende (hier vereinfachte) Unterscheidung: Besteht die Anforderung einer Aufgabe in der Reproduktion von Fakten oder Bezeichnungen aus dem Gedächtnis? Soll eine tendenziell automatisierbare Tätigkeit schnell und sicher, auch ohne tieferes Verständnis ausgeführt werden? Dann wird eine Aufgabe dem Bereich „Wissen und Fertigkeiten“ zugeordnet. Sind jedoch Grundvorstellungen und Verständnis nötig, müssen mehrere Bedingungen gleichzeitig berücksichtigt oder verschiedene Fertigkeiten flexibel miteinander kombiniert werden, dann wird eine Aufgabe dem Bereich „Fähigkeiten“ zugeordnet. Bei dieser Unterscheidung muss die vermutliche Art ihrer Bearbeitung durch einen Schüler berücksichtigt werden, und diese ist stark von individuellen Lernständen und Vorgehensweisen der Schüler abhängig sowie vom vorangehenden Unterricht. Eine Aufgabe für sich ist demnach kaum eindeutig hinsichtlich Verstehensorientierung zu klassifizieren. Es ist daher notwendig, eine intersubjektiv tragfähige Interpretation der erwarteten Aufgabenbearbeitung zu erlangen. Dies geschah hier durch eine kriteriale Definition der Schwelle zwischen „Fertigkeit“ und „Fähigkeit“, die in einem Codiermanual mit Beschreibungen der zwei Kategorien inklusive Beispielaufgaben festgehalten wurde. Ein Kriterium für die Objektivität dieser Unterscheidung ist der Cohens-Kappa-Wert (Wirtz & Caspar, 2002, 87ff) als Maß für die zufallskorrigierte Beobachterübereinstimmung. Grundlage für eine hohe Beobachterübereinstimmung verschiedener Codierer ist die Güte des Beobachtertrainings. Die vier an dieser Phase mitarbeitenden Codierer wurden zunächst an Beispielaufgaben geschult. Alle Aufgaben wurden doppelt codiert. Bei unterschiedlichen Beurteilungen von Aufgaben wurden zwischen den Codierern wechselseitig so lange schriftlich Argumente für die eigene Sichtweise ausgetauscht wurde, bis eine Einigung erzielt werden konnte, welche dann auch in weiteren Codierdurchgängen als Orientierung diente. Für einzelne Aufgaben wurde zudem die Einschätzung luxemburgischer Mathematiklehrkräfte eingeholt. Es wurden jeweils Pakete von 10 Klassenarbeiten codiert und die zufallsbereinigte Übereinstimmung ermittelt, daran anschließend fand die paarweise Diskussion unterschiedlicher Codierungen statt.

Bisher ausgewertet wurden 310 Klassenarbeiten, bestehend aus 4096 Aufgaben. Der Median aller Cohens-Kappa-Werte als Maß bei mehreren Codierern (Wirtz & Caspar, 2002, 120) beträgt 0,677. Werte ab 0,6 werden in der Regel als gut bezeichnet (vgl. Greve & Ventura, 1997, 111). 23% der analysierten Aufgaben wurden den „Fähigkeiten“ und somit dem Bereich verstehensorientierter Aufgaben zugeordnet. Der hohe Anteil von 77% rein fertigkeitsorientierter Aufgaben spiegelt die Kalküllastigkeit auch des luxemburgischen Mathematikunterrichts wieder. Mit Blick auf die zweite Erhebung steht nunmehr ein Verfahren zur Verfügung, um einen mit kompetenzorientierten Bildungsstandards intendierten Einfluss auf Mathematikunterricht längsschnittlich erfassbar zu machen.

Literatur:

Büchter, A. & Leuders, T. (2006): Leistungen verstehensorientiert überprüfen. In: Bruder, R., Leuders, T. & Büchter, A.: Mathematikunterricht entwickeln. Berlin: Cornelsen. 155-184

Greve W. & Wentura, D. (1997): Wissenschaftliche Beobachtung. Weinheim: Beltz

Heymann, H.W. (1998): Allgemeinbildender Mathematikunterricht – was könnte das sein? In: mathematik lehren, Heft 33, 4-9

Schulz, A. (2007): Teachers' Self-efficacy and Conceptions about Mathematical Teaching Practice and its Innovation (im Druck: proceedings of MAVI 13)

Winter, H. (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung.
[Journal] Mitt. Dtsch. Math.-Ver., No. 2, 35-41

Wirtz, M. & Caspar, F. (2002): Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität. Göttingen: Hogrefe

Björn SCHWARZ, Gabriele KAISER, Universität Hamburg

Professionswissen von Lehramtsstudierenden im Bereich Argumentieren und Beweisen

Die im Folgenden vorgestellten empirischen Ergebnisse entstammen einer qualitativen Ergänzungs- und Vertiefungsstudie, die als Zusatzstudie zu MT21 (siehe Blömeke, Kaiser, Lehmann, 2008) durchgeführt wird. Im Mittelpunkt der folgenden Darstellung steht der Vergleich der fachmathematischen und mathematikdidaktischen Leistungen von Lehramtsstudierenden in Deutschland für verschiedene Schulformen beschränkt auf den Bereich Argumentieren und Beweisen.

1. Theoretischer Rahmen und Fragestellung der Untersuchung

Die theoretische Basis für die Untersuchung bilden Überlegungen zur Struktur und Zusammensetzung des professionellen Wissens von Lehrkräften. Ausgangspunkt der Konzeptualisierungen sind die grundlegenden Überlegungen von Shulman (1986), der prinzipiell zwischen general pedagogical knowledge und content knowledge unterscheidet, wobei insbesondere letzteres weiter in die Bereiche subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge und curricular knowledge unterteilt wird. In unserer Studie werden diese Bereiche, unter anderem in Anlehnung an Bromme (1995), weiter ausdifferenziert und es wird beispielsweise zwischen schulmathematischen Inhalten und Konzepten von Mathematik als Wissenschaft unterschieden.

Diese kognitiven Komponenten von Lehrerprofessionswissen werden in unserer Studie ergänzt um eine affektiv–wertorientierte Komponente, die insbesondere auch die epistemologischen Überzeugungen (*beliefs*) gegenüber Mathematik und dem Lehren und Lernen von Mathematik einbezieht. Dies berücksichtigt die Annahme, dass entsprechende Einstellungen für Lehrende sowohl eine Orientierungsfunktion als auch eine Bedeutung im Hinblick auf die Steuerung von professionellem Handeln haben. Im Einklang mit den entsprechenden Konzeptualisierungen von MT21 (vgl. Blömeke et al., 2008) beziehen wir uns auf die Unterscheidungen von Grigutsch, Raatz & Törner (1998), die zwischen dem Formalismus-Aspekt, dem Anwendungs-Aspekt, dem Prozess-Aspekt und dem Schema-Aspekt von Mathematik unterscheiden.

Die zentrale Ausgangsfrage unserer Studie ist nun, wie das Professionswissen von Studierenden gestaltet ist, die ein Lehramtsstudium im Hinblick auf eine spätere Tätigkeit als Mathematiklehrerin oder – lehrer absolvieren. Untersucht werden dabei die Strukturen und Verknüpfungen der unterschiedlichen Bereiche von Lehrerprofessionswissen. Die Studie fokussiert dabei, im Vergleich zu MT21, nur auf die universitäre Phase der Lehrerausbildung.

2. Methodisches Vorgehen

In unserer Vertiefungs- und Ergänzungsstudie wurden - im Gegensatz zu der zu großen Teilen auf Multiple-Choice-Items basierenden Befragung im Rahmen von MT21 - ergänzende Fragebögen mit offenen Aufgaben zu den Themengebieten "Modellierung und Realitätsbezüge", "Argumentieren und Beweisen" und "Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht" entwickelt. Jede der verwendeten Aufgabe ist dabei domänenübergreifend konzipiert, das heißt, sie besteht aus mehreren Items, die sich jeweils auf einen anderen Bereich des Lehrerprofessionswissens beziehen. An der Befragung haben 79 Studierende freiwillig teilgenommen, 32 davon streben einen Abschluss für Grund-, Haupt- und Realschule (im Folgenden GHR) an, 45 streben einen Abschluss für Gymnasium oder oberes Niveau Gesamtschule (im Folgenden GyGS) an, zwei Studierende konnten bezüglich des Abschlusses nicht eindeutig zugeordnet werden.

Die Auswertung erfolgte mit der Methode der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2000), wobei die Kategorien theoriegeleitet entwickelt wurden (deduktive Kategoriendefinition). Im Einklang mit der Fragestellung wurde auf die strukturierende Inhaltsanalyse zurückgegriffen, genauer auf das skalierende Strukturieren. Hierbei wurden die Items von zwei Ratern bezüglich einer Ordinalskala eingeschätzt. Eine detailliertere Darstellung des methodischen Vorgehens findet sich in Schwarz, Kaiser & Buchholtz (2008).

3. Ausgewählte Ergebnisse

Die folgenden Analysen beziehen sich auf eine Aufgabe zum Thema "Argumentieren und Beweisen“ aus dem Themengebiet der elementaren Geometrie und Algebra. Im Folgenden werden exemplarisch zwei Items aus den Bereichen "fachmathematisches Wissen" und "mathematik-didaktisches Wissen" und die zugehörigen Ergebnisse vorgestellt. Die Ergebnisse der Analysen sind exemplarisch und enthalten verallgemeinerbare Aussagen, da sie durch die Analysen auch anderer Items gestützt und weiter differenziert werden. Aus Platzgründen beschränken wir uns aber auf die Ergebnisse dieser beiden Aufgaben. Des Weiteren werden die Darstellungen im Folgenden auf den Vergleich zwischen Studierenden des Lehramts für Grund- Haupt- und Realschule (GHR) bzw. Gymnasium und oberes Niveau Gesamtschule (GyGS) begrenzt.

Die analysierte Aufgabe bezieht sich auf folgende mathematische Aussage: "Verdoppelt man die Seitenlängen eines Quadrats, so verdoppelt sich auch die Länge jeder Diagonale.". In der Aufgabe aus dem Fragebogen wurde den Studierenden zunächst ein präformaler Beweis vorgestellt, der die mathematische Aussage belegt, indem vier quadratische Plättchen mit eingezeichneten Diagonalen zu einem Quadrat mit doppelter Seitenlänge und entsprechend verdoppelten Diagonalen zusammengefügt werden. Die Studierenden wurden dann aufgefordert, die mathematische Aussage formal zu beweisen. Die Antworten wurden auf einer ganzzahligen Skala von -2 bis +2 codiert, wobei einem fachlich angemessenen Beweis ein positiver Wert (je nach Strukturiertheit der Darstellung +1 oder +2), einer nicht fehlerhaften aber unvollständigen Lösung eine 0 und einem fehlerhaften Beweis ein negativer Wert (je nach Schwere des Fehlers -2 oder -1) zugeordnet wurde.

Die Erhebung erbrachte folgendes Ergebnis (alle Angaben gerundet auf volle Prozent):

Codierung	**-2**	**-1**	**0**	**+1**	**+2**
GHR	65%	15%	3%	9%	9%
GyGS	19%	9%	13%	37%	22%

Man erkennt sofort die deutlichen Unterschiede zwischen den GHR- und den GyGS-Studierenden bezogen auf Fähigkeiten im formalen Beweisen. Während mit 59% deutlich über die Hälfte der GyGS-Studierenden einen fachlich angemessenen Beweis vorlegen kann, gelingt dieser in der Gruppe der GHR-Studierenden mit 18% nur knapp jedem fünften Studierenden. Damit einhergehend weisen 80% der Lösungsansätze der GHR-Studierenden Fehler auf. Besonders sticht dabei der Anteil von 65% der GHR-Studierenden hervor, deren Antworten mit -2 codiert wurden, die also schwerwiegende Fehler enthielten. Es darf jedoch in diesem Zusammenhang nicht übersehen werden, dass auch bei den GyGS-Studierenden 28% der Beweisversuche, also mehr als jeder vierte, fehlerhaft waren. Untersucht man die Antworten der Studierenden hinsichtlich typischer Fehler, finden sich beispielsweise häufig Zirkelschlüsse oder Umformungen der Gleichungen ohne jeden Bezug zur zugrundeliegenden geometrischen Figur durch Äquivalenzumformungen mit dem Faktor 2.

Ein weiteres, im Folgenden analysiertes Item dieser Aufgabe ist dem Bereich des fachdidaktischen Wissens zuzuordnen und thematisiert die Frage, inwieweit ein präformaler Beweis ausreichend sein kann als einzige Beweisform im Mathematikunterricht. Hier wurden die Antworten auf einer Dreipunkt-Skala codiert. Antworten, die dem Bereich des hohen Wissens (+1) zugeordnet wurden, mussten zwei Überlegungen beinhalten:

Zum Einen Aussagen bezüglich des Zusammenhanges zwischen dem kognitiven mathematischen Potential der Schülerinnen und Schüler und der im Unterricht angemessenen Beweisform und zum Anderen Reflexionen über die Notwendigkeit der Thematisierung von formalen Beweisen zur Vermittlung eines vollständigen Mathematikbildes oder zur Vermittlung von Beweiskompetenzen (u.a. Kompetenzen zum formalen Schließen oder zur Verwendung von Beweisstrategien). Eine Lösung, die nur eine dieser Überlegungen enthielt, wurde mit 0, Antworten ohne diesbezügliche Überlegungen wurden mit -1 codiert. Es ergab sich damit folgendes Ergebnis (alle Angaben gerundet auf volle Prozent):

Codierung	-1	0	+1
GHR	39%	48%	14%
GyGS	38%	53%	9%

Die Unterschiede zwischen den GHR- und den GyGS-Studierenden fallen deutlich geringer aus. Damit korrespondierend zeigt sich in den Antworten auch unabhängig vom studierten Lehramt folgendes Merkmal bezüglich der Art der fachdidaktischen Reflexion: Wird nur eine der geforderten Überlegungen in der Lösung berücksichtigt, handelt es sich häufig um Überlegungen zum kognitiven Fähigkeitsgrad der Lernenden, meist darüber hinaus bezogen auf Differenzierungen hinsichtlich der Schulform. Höhere Leistungen sind dadurch gekennzeichnet, dass sich zusätzlich auch Aussagen bezüglich der Vermittlung von beweisbezogenen Kompetenzen oder eines vollständigen Mathematikbildes in den Antworten finden.

Literatur

Blömeke, S, Müller, C., Felbrich, A. & Kaiser, G. (2008). Epistemologische Überzeugungen zur Mathematik. In: Blömeke, S., Kaiser, G., Lehmann, R. (Hrsg.) (2008). *Kompetenzmessung bei angehenden Lehrerinnen und Lehrern. Ergebnisse einer empirischen Studie zum professionellen Wissen, zu den Überzeugungen und zu den Lerngelegenheiten von Mathematik-Studierenden – und Referendaren*. Münster: Waxmann-Verlag, 19-246.

Bromme, R. (1995). What Exactly is ‘Pedagogical Content Knowledge’? – Critical Remarks Regarding a Fruitful Research Program. In Hopmann, S. & Riquarts, K. (Hrsg.), *Didaktik and/or Curriculum*. IPN-Schriftenreihe 147 Kiel: IPN. 205-216.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 19 (1) 3-45.

Mayring, P. (2000). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken.* Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Schwarz, B., Kaiser, G & Buchholtz, N. (2008). Vertiefende qualitative Analysen am Beispiel von Modellierung und Realitätsbezügen. In: Blömeke, S.; Kaiser, G.; Lehmann, R. (Hrsg.), 391-425.

Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher,* 15, 4-14.

Fritz SCHWEIGER, Universität Salzburg

Mathematik als Kulturgut

In den letzten Jahren sind einige Romane erschienen, deren Hintergrund durch mathematische Probleme bestimmt ist. Ich denke an *Onkel Petros und die Goldbachsche Vermutung* von Doxiadis und *Die Riemannsche Vermutung* von Næss oder auch an *Die Vermessung der Welt* von Kehlmann. Diese Romane sind wohl ohne Kenntnis der damit verbundenen mathematischen Probleme lesbar, aber wäre es nicht für jeden Leser, jede Leserin spannender auch etwas mehr zu wissen? Die Erinnerung an die Schulzeit, an langweilig erscheinende Übungen oder an die Furcht, beim nächsten Test zu versagen, wird keine gute Brücke sein. Der Mathematikunterricht wird und muss seine Zielsetzungen neu bedenken. Die veränderte technologische, aber arbeitsteilige Gesellschaft bedingt dies. Der Mathematikunterricht muss daher vor allem jenen Menschen, die später keine mathematischen Techniken verwenden, helfen, Mathematik als integralen Bestandteil unserer Kultur zu begreifen. Der auch von László Lovász in seinem Hauptvortrag *Trends in Mathematics, and how they Change Education* genannte Vorschlag eines "expository teaching" ist zu überlegen. Der nachstehende Beitrag soll die These, dass eine Ausrichtung an „fundamentalen Ideen" (Schweiger 2006) hilfreich sein kann, am Beispiel der Riemannschen Vermutung illustrieren.

Eine fundamentale Idee wird mit *Erkennen von Mustern* beschrieben. Dies führt auf verschiedenen Wegen zu Primzahlen. Ein Weg ist das Legen von Zahlen als Rechteckmuster. Die Zahl 6 kann als „echtes" Rechteck gelegt werden, etwa $6 = 2 \times 3$, aber die Zahl 7 ergibt kein „echtes" Rechteck. Ein anderer Weg wird durch das Sieb des Eratosthenes beschrieben. Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis N in ihrer natürlichen Reihenfolge auf $1, 2, 3, 4, ..., N$. Sodann streiche man die 1 und die echten Vielfachen von 2, im nächsten Schritt die echten Vielfachen von 3 usw. Die Zahlen, die übrigbleiben, sind die Primzahlen $\leq N$. Dabei braucht man das Verfahren nur etwa bis $\sqrt{N}$ durchzuführen. Was auffällt, ist das *unregelmäßige Muster* der Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...$, dessen Geheimnisse bei weitem nicht alle entschlüsselt sind. Da die Primzahlen aber doch seltener zu werden scheinen, ist die Frage berechtigt, ob es deren unendlich viele gibt. Für den Zweck der heuristischen Erschließung der ζ-Funktion ist es nützlich, einen anderen Beweis als den Beweis nach Euklid zu verwenden. Dieser beruht auf der Tatsache, dass jede natürliche Zahl in 1-deutiger Weise als Produkt von Primzahlen geschrieben werden kann. Daher ist für $s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha s}} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

(soweit man Sätze über absolut konvergente Reihen vertrauensvoll anwendet).
Wäre die Anzahl der Primzahlen <u>endlich</u>, so sollte dieser Zusammenhang auch für $s = 1$ richtig sein, was aber nicht stimmen kann, da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist.

Der nächste Schritt war für das 19. Jahrhundert sehr logisch. Man betrachtete nun

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s = \sigma + it.$$

Diese Reihe ist für $\sigma > 1$ ebenfalls konvergent, d. h. $\zeta(s)$ ist in der Halbebene $\sigma > 1$ wohldefiniert. Dies ist analog zur Festsetzung

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z = x + iy.$$

(fundamentale Idee *erkenntnisleitender Muster*).

Hier ist die Idee des *Erweiternden Umdefinierens* hilfreich. Die zunächst nur für $|z| < 1$ definierte Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist dank der Summenformel für die geometrische Reihe gleich $\frac{1}{1-z}$ und dies ist eine Funktion, die für alle $z \neq 1$ definiert ist. Die Funktion $\hat{f}(z) = \frac{1}{1-z}$, ist also eine *Fortsetzung* von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$.
Fortsetzungen von Funktionen sind nicht eindeutig. Die Funktion $f(x) = x$ für $x > 0$ gestattet viele Fortsetzungen. Es könnte ein Stück von $\hat{f}(x) = x, x \in \mathbb{R}$ sein, aber auch $\hat{f}(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ würde passen. Die Funktion $\hat{f}(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\hat{f}(x) = x^3 + x$ für $x \leq 0$ ist auch differenzierbar! Unter allen Fortsetzungen von $\zeta(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ gibt es aber eine einzige privilegierte Fortsetzung, nämlich eine Fortsetzung $\hat{\zeta}(s)$, die auf der Halbebene $\sigma > 0$ mit Ausnahme des Punktes $s = 1$, *analytisch* ist.

Die Darstellung

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + s \int_1^{\infty} \frac{[t] - t}{t^{s+1}} dt$$

ist für $\sigma > 1$ richtig, aber das Integral rechts ist auch für $\sigma > 0$ wohldefiniert. Daher hat man eine Fortsetzung der ζ-Funktion auf einen größeren Bereich gefunden.

Die Riemannsche Vermutung besagt nun: Ist $\zeta(s) = 0$, $0 < \sigma < 1$, so ist $s = \frac{1}{2} + it$. Im Originaltext von Riemann heißt es: „Man findet in der That etwa soviel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hievon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.“ (Riemann 1990:148). Dazu muss man wissen, dass Riemann die Nullstellen im Streifen $0 < \sigma < 1$ in der Form $s = \frac{1}{2} + it$ angeschrieben hat, wobei t noch eine weitere komplexe Zahl und Nullstelle einer Hilfsfunktion ist. Die Vermutung, dass diese Nullstellen t alle reell seien, bedeutet daher genau, dass die Nullstellen der ζ-Funktion im Streifen $0 < \sigma < 1$ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen.

Die Bedeutung dieser Vermutung ist allerdings schwieriger zu vermitteln! Denn sei

$$\pi(x) = \#\{p : p \leq x\},$$

so vermuteten Gauss und Legendre, dass

$$\pi(x) \sim \frac{x}{logx}$$

gilt. Später hat man gesehen, dass die Funktion $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ noch bessere Abschätzungen liefert. Bewiesen wurde dieser Satz (der „Primzahlsatz“) erst von Hadamard und de la Valleé-Poussin.
Der Zusammenhang mit der Lage der Nullstellen kann an Hand des nachfolgenden Satzes deutlich gemacht werden. Dazu sind noch einige Definitionen nötig. Man setze $\Lambda(n) = \log p$, wenn $n = p^k$ und $\Lambda(n) = 0$ sonst und weiters $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$. Aber woher kommt plötzlich diese neue Funktion? Der Schlüssel ist die Beziehung

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Weiters ist die Abkürzung $f(x) = g(x) + o(x^\alpha)$ für den Sachverhalt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - g(x)}{x^\alpha} = 0$$

nützlich.

Ist $\rho = \sigma + it$ eine Nullstelle mit $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, dann ist die Abschätzung $\psi(x) = x + o(x^\sigma)$ falsch. Für den Unterschied $\pi(x) - \frac{x}{logx}$ gibt es sehr wohl Abschätzungen, aber mit Hilfe der Riemannschen Vermutung ließe sich der Unterschied auf etwa $\sqrt{x}logx$ verkleinern. Aber da fragt der Outsider wohl zu recht: Ja, ist denn die Verkleinerung des Unterschiedes so wichtig?

Auch das *Abschätzen von Fehlern* ist eine mathematische Grundtätigkeit. Ist ein Resultat x auf $\pm x$ genau, so liegt $x = 100$ zwischen 0 und 200. Ist die Genauigkeit aber $\pm\sqrt{x}$, dann liegt $x = 100$ zwischen 90 und 110.

Tatsächlich hat die ζ-Funktion jede Menge Nullstellen. Die zur x-Achse nächste in der oberen Halbebene ist $\rho_1 = \frac{1}{2} + i14,13472....$

Informationen zu diesem Thema gibt es reichlich. Ein mathematisch anspruchsvoller Klassiker ist Edwards 1974. Ein Text anderer Art, der an Hand der Erforschung der Primzahlen einen unterhaltsamen (gelegentlich etwas phantasievoll anmutenden) Einblick in die Geschichte der Mathematik bieten will, ist Du Sautoy 2007.

Das Verständnis der Riemannschen Vermutung ist anspruchsvoll. Das Goldbachsche Problem ist viel einfacher zu erklären: Jede gerade ganze Zahl $n \geq 4$ ist Summe von zwei Primzahlen. Man überzeugt sich mühelos von der Richtigkeit dieser Behauptung, etwa $30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17$. Es ist eher schwer zu glauben, dass diese Behauptung noch immer unbewiesen ist. Es gibt ja viele ähnlich klingende Behauptungen, wie etwa, dass jeder Kubus Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ist: $1^3 = 1, 2^3 = 3 + 5, 3^3 = 7 + 9 + 11, 4^3 = 13 + 15 + 17 + 19, ...$ Diese Formeln sind so suggestiv, so dass vielleicht begabte Schüler den Beweis entdecken könnten. Viel schwieriger ist es aber zu zeigen, dass jede natürliche Zahl Summe von höchstens 9 Kuben ist und auch die Zahl 9 nicht verbessert werden kann, denn es ist $23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$ (siehe etwa Reid 2006).

Literatur

Doxiadis, Apostolos 2001: *Onkel Petros und die Goldbachsche Vermutung*. Lübbe

Du Sautoy, Marcus 2007: *Die Musik der Primzahlen : Auf den Spuren des größten Rätsels der Mathematik*. 3. Aufl. München : Dt. Taschenbuch-Verl.

Edwards, Harold M. 1974: *Riemann's Zeta Function* New York, NY [u.a.] : Academic Press

Kehlmann, Daniel 2005: *Die Vermessung der Welt*. Rowohlt

Næss, Atle 2007. *Die Riemannsche Vermutung*. Piper

Reid, Constance 2006: *From Zero to Infinity. What Makes Numbers Interesting.* Wellesley: A. K. Peters

Riemann, Bernhard 1990: *Gesammelte Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*. Nach der Ausgabe von Heinrich Weber und Richard Dedekind neu hrsg. von Raghavan Narasimhan. Berlin: Springer und Leipzig: Teubner.

Schweiger, Fritz 2006: Fundamental Ideas: A Bridge between Mathematics and Mathematical Education. In J. Maasz & W. Schlöglmann eds: *New Mathematics Education Research and Practice*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers 2006 p. 63-73

Hans-Dieter SILL, Lutz HELLMIG, Rostock

Konzept einer Lehrerfortbildung zu polyvalenten Aufgaben

Im Beitrag werden der Begriff der polyvalenten Aufgabe definiert und die Ziele einer schuljahresbegleitenden Lehrerfortbildung im Design des Blended Learning genannt, die in das Projekt „Mathematik anders machen". eingeordnet ist, das Rösken im vorherigen Artikel vorgestellt hat. Im anschließenden Beitrag werden erste Ergebnisse der Evaluation beschrieben.

1. Zum Inhalt der Lehrerfortbildung

Hauptinhalt der konzipierten Fortbildung ist die Auseinandersetzung mit offenen Aufgaben. Eine Aufgabe nennen wir **offen für einen Schüler**[1], wenn für ihn die Ausgangsbedingungen nicht vollständig sind, für ihn mehrere Lösungswege möglich sind und/oder er zu mehreren Ergebnissen kommen kann. Die Mehrzahl der Aufgaben, die im gegenwärtigen Unterricht verwendet werden, sind in diesem Sinne offen, insbesondere alle Sachaufgaben. Leider wird diese Offenheit selten Schülern und auch Lehrern bewusst, da die unterschiedlichen Möglichkeiten zum Bearbeiten der Aufgaben oft nicht thematisiert werden.

Um uns von den „normalen" offenen Aufgaben abzugrenzen, haben wir für eine spezielle Gruppe offener Aufgabe eine neue Bezeichnung eingeführt. Eine Aufgabe heißt **polyvalent für eine Gruppe von Schülern**, wenn sie folgende zwei Merkmale besitzt:

1. Jeder der Schüler findet mit hoher Wahrscheinlichkeit eine zutreffende Antwort.
2. Die Aufgabe ermöglicht zahlreiche zutreffende Schülerantworten unterschiedlicher Qualität.

Mit dieser Begriffsbildung soll das Konzept der „open-ended problems" von Becker; Shimada, 1997 erfasst werden. Die Autoren haben ihren Aufgabentyp selbst als Probleme mit „multiple correct answers" (S. 4) bezeichnet, womit nicht alle Aspekte erfasst werden, die in den anschließenden Ausführungen zu den Aufgaben dann expliziert werden. Neubrand bezeichnet diese Aufgaben als Aufgaben mit multiplen Lösungswegen. Veranlasst wurden wir zur Bildung des neuen Terminus durch Schwierigkeiten in der Kommunikation bei Verwendung des sehr umfassenden Begriffs der

[1] Gemeint sind stets beide Geschlechter.

offenen Aufgabe und des nicht klar definierten Begriffs der Aufgaben mit multiplen Lösungswegen.

Polyvalente Aufgaben sind in besonderem Maße für binnendifferenziertes Arbeiten geeignet. Ihr Einsatz im Unterricht erfordert allerdings zwei Arbeitsphasen, deren konkrete Gestaltung im deutschen Mathematikunterricht ein bisher theoretisch und praktisch noch wenig untersuchtes Problem ist.

1. Selbstständige Beschäftigung der Schüler mit der Aufgabe in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit
2. Vorstellen und Diskutieren verschiedener Lösungen durch die Schüler

Insbesondere in der zweiten Phase, in der die besonderen Potenzen einer polyvalenten Aufgabe zum Tragen kommen sollen, ist eine besondere Gestaltung des Unterrichts erforderlich, die nicht zum gegenwärtigen Repertoire vieler Lehrer gehört und einer längeren Phase der eigenen Erprobung bedarf. Eine nachhaltige Fortbildung zu polyvalenten Aufgaben erfordert deshalb zwingend eine mehrstufige Veranstaltung.

Wir haben eine einjährige Fortbildung zu polyvalenten Aufgaben im Design des Blended Learning geplant und im Schuljahr 2006/07 pilotiert. In diesem Schuljahr führen wir den Hauptversuch mit 5 Kursen durch.

2. Ziele der Lehrerfortbildung

Einstellungen zur Fortbildung

Wir fassen eine unterrichtsbezogene Lehrerfortbildung nicht als einen einseitigen Lernprozess der Teilnehmer auf, der in der Aneignung fertiger und abgesicherter Lerninhalte besteht, sondern als ein gemeinsames Projekt von Kursleitern und Kursteilnehmern, in dem beide voneinander lernen. Dieses Gefühl, als forschender Lehrer ein gleichberechtigter Teilnehmer zu sein, wollen wir unseren Kursteilnehmern vermitteln. Ein wesentliches Ergebnis der Kurse sind deshalb auch die gemeinsam erstellten Erfahrungsberichte zur Erprobung der Aufgaben, die im Netz veröffentlicht werden.

Entwicklung kommunikativer Fähigkeiten und Einstellungen

Die Teilnehmer sollen zum einen mit der Lernplattform Moodle vertraut gemacht werden und eine positive Haltung zum Umgang mit diesem System entwickeln. Sie sollen sich an die Einhaltung bestimmter Normen der Kommunikation in einem Forum gewöhnt haben.

Wir wollen weiterhin erreichen, dass die Teilnehmer häufiger als bisher mit Kollegen ihrer Schule sowie mit Kollegen aus anderen Schulen zu Problemen der Gestaltung des Mathematikunterrichts kommunizieren und dabei erkennen, dass sie durch diese Kommunikation wichtige Anregungen für ihre eigene Arbeit erhalten und zum Nachdenken angeregt werden.

Kompetenzen im Umgang mit polyvalenten Aufgaben im Unterricht

Zentrales Anliegen ist die Beschäftigung mit polyvalenten Aufgaben. Die Teilnehmer sollen den Begriff „polyvalente Aufgabe“ kennen und erkannt haben, dass man mit polyvalenten Aufgaben den Mathematikunterricht „anders“ machen kann. Insbesondere sollen sie Freude am Einsatz dieses Aufgabentyps finden und erkennen, dass polyvalente Aufgaben zur Differenzierung im frontalen Unterricht geeignet sind, da sie vielen Schülern neue Möglichkeiten zur Beteiligung am Unterricht eröffnen. Die Teilnehmer sollen weiterhin Routinen für die Unterrichtsgestaltung entwickeln, um die Phasen der Aufgabenbearbeitung und -auswertung strukturiert und effizient zu gestalten.

Den Teilnehmern soll bewusst werden, dass der Einsatz polyvalenter Aufgaben kein Selbstzweck ist. Der damit stets verbundene erhebliche zeitliche Aufwand ist nur gerechtfertigt, wenn neben den motivationalen und aktivierenden Potenzen dieser Aufgaben diese auch einen wesentlichen Beitrag zur Aneignung mathematischen Wissens und Könnens leisten.

Kenntnisse zu ausgewählten fachdidaktischen Problemen

Um theoretisch fundierte Entscheidungen zum Einsatz der Aufgaben im genannten Sinne zu diskutieren, sollen die Kenntnisse der Teilnehmer zu ausgewählten Prozessen der Entwicklung mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten gefestigt und vertieft werden. Es entspricht unseren Erfahrungen aus vielen Fortbildungsveranstaltungen, dass Lehrern viele in der fachdidaktischen Ausbildung vermittelte Kenntnisse nicht mehr bewusst sind. Dies ist eine normale Erscheinung im Rahmen des Wechselverhältnisses von theoretischem Wissen und praktischem Können eines Lehrers und belegt lediglich die Notwendigkeit einer fachdidaktischen Fortbildung für alle Lehrer, mit der eine neue Qualität ihrer Kenntnisse und bei entsprechender Gestaltung der Fortbildung auch ihres Könnens erreicht werden kann.

Ausgehend von den spezifischen Einsatzmöglichkeiten polyvalenter Aufgaben wollen wir die Kenntnisse der Teilnehmer zur Entwicklung von Fertigkeiten und insbesondere zu dem wesentlichen Typ der Umkehraufgaben festigen bzw. erweitern.

Weiterhin sollen ihre Kenntnisse zu psychologischen Grundlagen der Aneignung von Begriffen, insbesondere zur Theorie der semantischen Netze sowie der Grundhandlungen Identifizieren und Realisieren von Begriffen gefestigt bzw. erweitert werden. Die Erfahrungen mit open-ended problems im japanischen Mathematikunterricht zeigen, dass dieser Aufgabentyp insbesondere zur Ausbildung und Festigung semantischer Netze geeignet ist. In den entsprechenden Aufgaben sollen Gemeinsamkeiten und Unterschiede von mehreren Objekten gefunden werden. Dazu müssen die Schüler Metabetrachtungen zu den Eigenschaften der Objekte anstellen, zu denen ein Vergleich erfolgen kann.

Die Festigung und Erweiterung der Kenntnisse zur Entwicklung des Könnens im Lösen von Sachaufgaben sollte nach unseren Erfahrungen ein immanentes Ziel vieler Fortbildungen sein, da es hier erhebliche Reserven in der bewussten Anwendung fachdidaktischer Erkenntnisse gibt. Sachaufgaben sind zwar offene, aber in der Regel keine polyvalenten Aufgaben. Es ist aber möglich, Teilhandlungen in der Phase der Erfassung und Analyse des Sachverhaltes als polyvalente Teilaufgaben zu behandeln.

Wirkung auf Schüler

Durch die Anlage der Fortbildung ist es möglich, auch Ziele ins Auge zu fassen, die die Schüler in den Klassen der Lehrer betreffen. Die Schüler sollen Freude am Einsatz polyvalenter Aufgaben finden, sich an den Einsatz dieser Aufgaben gewöhnen und erkennen, dass es in der Mathematik auch Aufgaben mit mehreren gleichwertigen Lösungen gibt. Schüler mit einem geringen mathematischen Leistungsvermögen sollen einen höheren Grad der Beteilung am Unterricht beim Einsatz der Aufgaben zeigen, Schüler mit einem höheren mathematischen Leistungsvermögen sollen durch die Aufgaben zu kreativen Ideen angeregt werden. Alle Schüler sollen ihre Fähigkeiten in der Kommunikation über mathematische Sachverhalte entwickeln. Durch die geistigen Aktivitäten, die dadurch bei den Schülern ausgelöst werden, sollen letztlich in der insgesamt gleichen für das Thema aufgewendeten Zeit eine höhere Qualität ihres mathematischen Wissens und Könnens erreicht werden.

Literatur

[1] Becker, J.; Shimada, S. (Hrsg.) (1997): The open-ended approach : a new proposal for teaching mathematics. – Reston : The National Council of Teachers of Mathematics, 1997

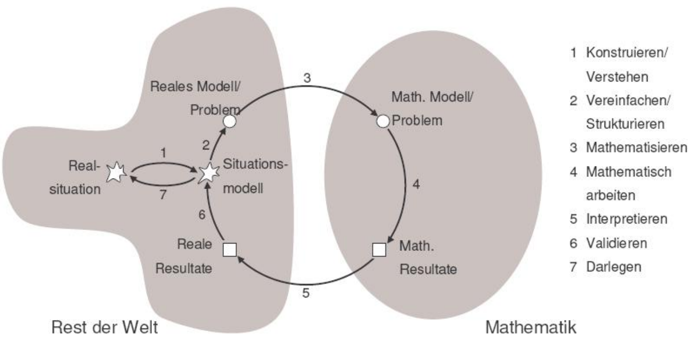
[2] Neubrand, M.: Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. – In: Blum, W. u.a. (Hrsg.)/Bildungsstandards Mathematik: konkret. – Berlin : Cornelsen. – S. 162-177

Hans-Stefan Siller, Karl osef Fuchs, Universität Salzburg, Eva V s rhelyi, Universität Budapest

unktionales Modellieren kurz M mit einem and- eld

arum soll man mit einem and- eld echner unktional Modellieren

Durch den Einsatz des Taschenrechners im Unterricht haben sich die Einstellungen von Lehrer/Innen und Wissenschaftler/Innen grundlegend geändert. Durch die Möglichkeiten, die sich aus der Weiterentwicklung der Geräte ergeben, haben sich neue Unterrichtskonzepte- und Ideen entwickelt. Gerade durch den Siegeszug der programmierbaren, grafikfähigen Rechner im letzten ahrzehnt ist es möglich geworden, dass man ohne speziellen Raum oder kostenintensive Ausstattung, Mathematikunterricht auf einem höheren und abstrakteren Level zu betreiben, indem man anwendungsorientiertere Aufgaben im Unterricht behandelt hat. Durch die Forderung, dass sich der Mathematikunterricht mehr der Lebenswelt der Schüler/Innen annähern sollte, ist die zentrale Idee der Modellbildung immer mehr in den Mittelpunkt des Unterrichtsgeschehens gerückt. Das Modellieren von lebensnahen Aufgabenstellungen ist eine in der Regel sehr zeitintensive Auseinandersetzung mit Beispielen aus dem alltäglichen Leben. So ist es z.B. möglich den Fallschirmsprung mit Reibung so zu betrachten, dass man ausgehend vom freien Fall ein adäquates Modell entwickelt, dass den tatsächlichen Vorgang schon sehr gut annähert. Solche Vorgänge zu modellieren heißt im Wesentlichen jedoch auch sehr viel Rechenarbeit zu investieren und ein erstelltes bzw. vorhandenes Modell eventuell auch wieder zu verwerfen bzw. zu überdenken. Im Sinne des Blumschen Modellbildungsprozesses sind solche Vorgänge sogar wünschenswert und notwendig. Den iterativen harakter erkennt man an der kreisförmigen Darstellung des Prozesses[1]:



Abbildung

Aber nicht nur anwendungsorientierte Aufgaben können durch dieses Schema behandelt werden, auch so genannte innermathematische Modelle, z.B.

[1] Blum, W.; Leiß, D.: Modellieren im Unterricht mit der Tanken -Aufgabe, in: Mathematik lehren, H. 12 , S. 1 -21, 2005

jene zur Logik oder Stetig-keit[2], kann man in dieser Weise gewinnen. Durch den höheren Aufwand, den man durch die Behandlung von Modellierungsaufgaben hat, ist es vorteilhaft sich einen Rechenknecht zu Hilfe zu nehmen.

Allerdings ist es bei einer Klassenschülerzahl von mehr als 15 Schülern schon sehr schwierig einen produktiven Unterricht im omputerraum zu betreiben. Hand-Held Rechner sind da ein ausgezeichnetes und ausreichendes Hilfsmittel. Ein besonderer Vorteil dieses Rechnertyps ist seine **Portabilit t**. Alle Schüler/Innen können Hausaufgaben, begabte und interessierte Schüler/Innen weiterführende Probleme im Sinne einer inneren Differenzierung[3] problemlos auch zu Hause bearbeiten. Durch die Weiterentwicklung dieser Hand-Held Rechner in den letzten ahren kann man sie als **ortables** AS (omputer Algebra System) bezeichnen. Vom Funktionsumfang stehen sie den AS, die in der Schule eingesetzt werden – sieht man von der grafischen Repräsentation ab -, eigentlich um nichts mehr nach. Die Bedienung der Hand-Held Rechner ist, da sie mit der Syntax der ‚großen AS athe ati a, a le oder D IV übereinstimmt, leicht zu erlernen. Der Einsatz kann dabei durchaus bei entsprechender Berücksichtigung des Alters der Schüler bereits in der Sekundarstufe I erfolgen. Damit sind in höheren ahrgängen ideale Voraussetzungen für die Behandlung komplexerer Modellierungsaufgaben mit Einsatz von Hand-Held Rechnern geschaffen. Zur Sicherung eines nachhaltigen Unterrichtserfolgs bei Einsatz dieser Werkzeuge sind jedoch formale Rahmenbedingungen (wie die Aufnahme in die Lehrpläne und Bereitstellung geeigneter Unterrichtsmaterialien) zu schaffen.

Betreibt man FM mit einem Hand-Held Rechner, so ist es auch naheliegend, den Rechner im Informatikunterricht einzusetzen. FM wäre somit eine ideale Klammer für einen fächerübergreifenden Unterricht Mathematik / Informatik und eine Leitidee, an der beide Fächer partizipieren und die methodisch – didaktische Diskussion in den beiden Unterrichtsfächern wesentlich profitieren würde.

Einsatz des and- eld echners im f cher bergreifenden Unterricht zum Thema M

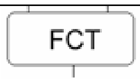
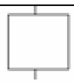
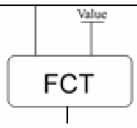
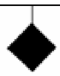
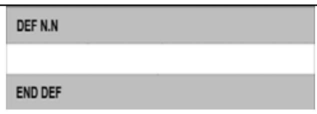
Das Paradigma der Funktionalen Programmierung beruht auf der Implementierung von Funktionen, die entweder vom System bereits bereitgestellt sind (vor definierte Funktionen) oder durch den Programmierer

---

[2] Siller, H.-St.: *Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik*. Dissertation aus Didaktik der Mathematik an der Universität Salzburg, Salzburg, 2006.

[3] Herber, H.- .: *Innere Differenzierung*. In: Unser Weg, 4 , 121-131, 1 4.

selbst erstellt werden (selbst definierte Funktionen). Dazu wird ein vorliegendes Problem in Teilprobleme zerlegt und jedes dieser Module[4] als eigene Funktion behandelt. Auf diese Art und Weise werden Algorithmen für schulspezifische Aufgabenstellungen entwickelt, implementiert und ausgeführt. Durch grafische Darstellungen werden die Kommunikationsstrukturen der einzelnen Module aufgezeigt. Eine geeignete grafische Darstellung sind Datenflussdiagramme[5]. Allerdings wird es schwierig, mit diesen Darstellungen Rekursionen grafisch zu repräsentieren. Wir haben uns daher für so genannte PROGRAPH-Diagramme[6] entschieden. Mit den Symbolen ist die Darstellung von Rekursionen sehr intuitiv als ‚Bild – in – Bild – Struktur möglich. Ein weiterer Vorteil liegt in der überschau-baren Anzahl von Elementen:

	Vor definierte oder selbst definierte Funktion
	Output-Wert
	Verzweigung
	Fortsetzungssymbol
	Bedingung
	Block Anwendung

Zusätzlich meinen wir, dass diese Darstellung auch dem Input-Output harakter einer Funktion ((mehrere) Inputs –GENAU EIN Output) ganz besonders gerecht wird.

Inhalte der Schulmathematik/Informatik bieten für die FM genügend Möglichkeiten. Bereits behandelte Themen und Beispiele finden sich in Basics in Functional Modeling [7]. Im vorliegenden Unterrichtsmaterial

---

[4] Schwill, A.: *Fundamentale Ideen der Informatik*. In: ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik), 25, Nr. 1, S. 20–31, 1   3.

[5] Hubwieser, P.; Spohrer, M.; Steinert, M.: *Informatik 2, Klasse 9*. Klett Verlag, 2007.

[6] Matwin, S.; Pietrzykowski, T.: *The Programming Language PROGRAPH: A Preliminary Report*. In: omputer Languages, 10:2, S.   1 - 125, 1   5

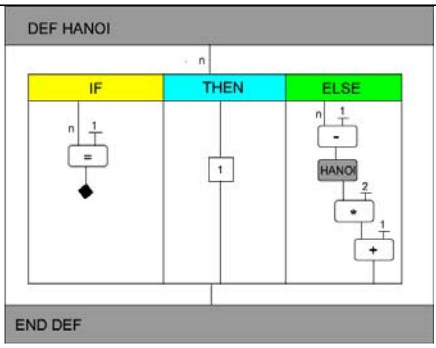
[7] Fuchs, K. .; Siller, H.-St.; V s rhelyi, E.: *Basics in Functional Modeling*.   ASIO Europe GmbH, Budapest, 200

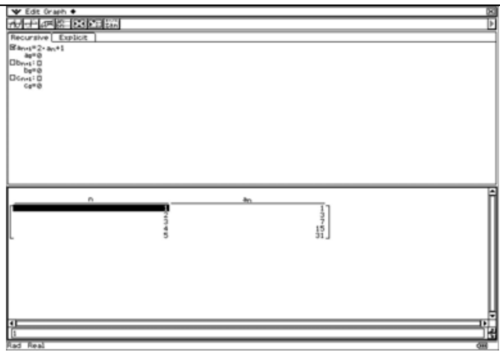
wurde bei der FM sämtlicher Aufgaben konsequent folgender Ablauf eingehalten:

- Problembeschreibung und Mathematisierung,
- Erstellung eine grafischen Repräsentation,
- Umsetzung auf dem Hand-Held Rechner (Ausführung, Test, Modifikation).

eis iel zur f cher bergreifenden M Die T rme von anoi

Ziel des Spiels ist es, *n* Scheiben mit der geringsten Anzahl von Zügen von einem Stab zum anderen zu bewegen, wobei im Sinne einer informatischen Sortierung ein dritter Ablageplatz notwendigerweise erlaubt ist. Die rekursive Folge ug n 2 ug n-1 1 beschreibt die Anzahl der Züge. Das PROGRAPH-Diagramm und den ode für den ASIO lasspad 300 sieht man in der folgenden Tabelle:





Die Funktionsweise kann man aus dem PROGRAPH-Diagramm ablesen:

n 1	1
n 2	HANOI(1) 2 1 1 2 2 3
n 3	HANOI(2) 2 1 3 2 2 7

Literatur

Blum, W.; Leiß, D.: Modellieren im Unterricht mit der Tanken -Aufgabe, in: Mathematik lehren, H. 12 , S. 1 -21, 2005.

Fuchs, K. .; Siller, H.-St.; V s rhelyi, E.: *Basics in Functional Modeling*. ASIO Europe GmbH, Budapest, 200 .

Herber, H.- .: *Innere Differenzierung*. In: Unser Weg, 4 , 121-131, 1 4.

Hubwieser, P.; Spohrer, M.; Steinert, M.: *Informatik 2, Klasse 9*. Klett Verlag, 2007.

Matwin, S.; Pietrzykowski, T.: *The Programming Language PROGRAPH: A Preliminary Report*. In: omputer Languages, 10:2, pp. 1 - 125, 1 5.

Schwill, A.: *Fundamentale Ideen der Informatik*. In: ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik), 25, Nr. 1, S. 20–31, 1 3.

Siller, H.-St.: *Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik*. Dissertation aus Didaktik der Mathematik an der Universität Salzburg, Salzburg, 2006.

Hans-Stefan Siller, Universität Salzburg

ber die edeutung der grafischen e r sentation beim unktionalen Modellieren

Modellieren von und mit unktionen – ein not endiges onze t eines modernen Mathematikunterrichts

Der Begriff Funktion ist ein sehr häufig gebrauchter Begriff, auch außerhalb der Mathematik, wie man an häufig anzufindenden Formulierungen – z.B. Das Gerät funktioniert wieder – feststellen kann. Was man tatsächlich unter einer Funktion versteht hängt jedoch im Einzelnen von der (mathematischen) Bildung einer Person ab. So ist es auch nicht verwunderlich, dass man in der Literatur unterschiedlichste Schreib- und Sprechweisen zum Funktionsbegriff findet. Für Schüler/Innen sind diese Notationsweisen oft sehr verwirrend, da sie sich im Laufe ihrer Schulzeit an eine einzige Notation gewöhnt haben. Übliche Formen zur Darstellung einer Funktion lauten wie folgt:

- die Funktion f: U $\to$ V, um den Abbildungscharakter darzustellen,
- y f(x), um den Wirkungscharakter darzustellen,
- x # f(x), um den Abhängigkeitscharakter darzustellen.

Aber auch die Folgenden Darstellungen einer Funktion sind üblich:

- Eine Parabel in 2. Hauptlage als quadratische Funktion, y 2px ,
- die Geschwindigkeit ist eine Funktion der Zeit, v v(t).

Natürlich könnte man, durch eine mathematisch exakte Definition, viele der gebräuchlichen Notationsformen als unzulässig erklären, jedoch würde das zu unnötigen Diskussionen führen, da es immer auf die Sichtweise des Betrachters ankommt. Hischer[1] schreibt dazu: Ich könnte nun diese Verwirrung sofort aus der Welt schaffen, indem ich eine mir sympathische Definition wähle, etwa eine Funktion als rechtseindeutige Relation definiere, und damit einige der o.g. Sprechweisen als unzulässig erkläre. Im Sinne der Informatik würde eine Funktion etwa auch als Objekt aufgefasst werden

Durch entsprechende Recherche in der gegenwärtigen Fachliteratur wird man feststellen, dass es keine einheitliche Definition der Funktion gibt. Aber gerade dadurch zeigt sich die enorme Spannweite dieses Begriffes sowohl in der Fachwissenschaft als auch in der Fachdidaktik.

Betrachtet man den Funktionsbegriff aus didaktischer Sicht, ist es wichtig

---

[1] Hischer, H.: Zur Geschichte des Funktionsbegriffs, Preprint No. 54, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2002

Aspekte zu finden, die den Funktionsbegriff ausreichend charakterisieren. Vollrath hat dies in seinem Artikel Funktionales Denken [2] vorgenommen. Die wesentlichen Punkte sind:

- Methodologischer Aspekt
  - Abhängigkeit einer Größe
  - Idee der systemisch-dynamischen Variation
- Phänomenologischer Aspekt
- Quantitativer Aspekt
- Input-Output Aspekt

Ein weiterer, leider oft übersehener Aspekt bei der didaktischen Betrachtung von Funktionen, ist der Algorithmische Aspekt[3]. Außerdem muss man bei der didaktischen Betrachtung den Aspekt der Modellierung/Modellbildung berücksichtigen, denn Modellbilden ist unweigerlich mit dem Auffinden von Funktionen und funktionalen Abhängigkeiten verbunden[4,5]. Mit Hilfe der zentralen Idee der Funktionalen Modellierung ist es möglich, Funktionen genauer zu beschreiben. Ausführlich ist dies in Basics in Functional Modeling [6] dargestellt. Dabei beschreitet man einen zweigeteilten Weg:

- Black-Box-Beschreibung
  Zunächst wird das Problem in Teilprobleme aufgegliedert und jedes dieser Teilprobleme für sich behandelt. Danach wird die Kommunikation unter diesen Teilmoduln beschrieben. Durch diese Behandlung erhält man die Teilprobleme als Funktionen.

- White-Box-Beschreibung
  In dieser Phase wird die innere Struktur der Komponenten dargestellt und untersucht. Man sieht die inneren Abläufe und erkennt bzw. versteht die zugrundeliegenden mathematischen Strukturen.

---

[2] Vollrath, H. .: Funktionales Denken. In: ournal für Mathematikdidaktik, S. 3 – 37, 1

[3] Fuchs, K. .: Projektion – EDV-Nutzung – Zwei fundamentale Ideen und deren Bedeutung für den Geometrisch-Zeichnen Unterricht, Dissertation, Universität Salzburg, Salzburg, 1

[4] Siller, H.-St.: Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik, Dissertation, Universität Salzburg, Salzburg 2006

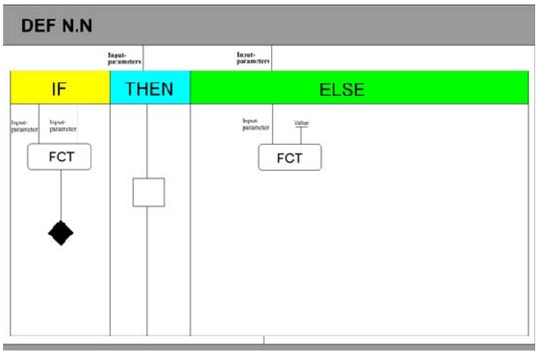
[5] Siller, H.-St.: Auf Mathematica basierende Lerneinheiten zur fundamentalen Idee der Modellbildung, illustriert an Extremwertbeispielen und Beispielen der Integralrechnung mit M thDesktop, Diplomarbeit, Universität Graz, Graz, 2002

[6] Fuchs, K. .; Siller, H.-St.; V s rhelyi, E.: Basics in Functional Modeling, ASIO Europe GmbH, Budapest, 200

Mit Hilfe eines AS oder Hand-Held-Rechners ist es möglich die funktionalen Modelle leicht und einfach zu übertragen und auch Berechnungen durchzuführen. Durch eine entsprechend gewählte grafische Darstellung des modellierten Sachverhalts kann ein tiefgehendes Verständnis der funktionalen Modellierung erreicht werden. So kann der oben beschriebene 2-Phasen-Weg der Funktionalen Modellierung auch von Schüler/Innen erreicht werden, so dass die fundamentale Idee der Funktion entsprechend der mathematischen Grundbildung vermittelt wird.

Grafische Darstellungen von unktionen

Um funktionale Abhängigkeiten grafisch darzustellen, existieren vielfältige Möglichkeiten. Die gebräuchlichste Darstellungsweise ist die Darstellung mittels Pfeildiagrammen. Mit Hilfe dieser Darstellung ist es möglich die prinzipielle Wirkungsweise von Funktionen zu zeigen, jedoch kann man die Wirkungsweise einer Funktion, manchmal auch den Abhängigkeitscharakter, nicht allzu deutlich erkennen. Darum wähle ich die Darstellung von Funktionen mittels PROGRAPH[7]-Diagrammen. Mit Hilfe dieser Darstellung ist es möglich Schüler/Innen die Wirkungsweise von Funktionen intuitiv zu erklären. V.a., wenn es sich um Schüler/Innen handelt, die im Umgang mit Funktionen bereits vertraut sind, ist dies eine sehr effektive Weise funktionale Abhängigkeiten grafisch darzustellen, ähnlich wie bei imperativischen Überlegungen mit Nassi-Shneiderman-Diagrammen .



Abbildung

Der Aufbau eines solchen PROGRAPH-Diagramms (Abb. 1) ist strukturiert und einfach. Mittels einiger weniger Symbole kann ein funktionales Modell einfach und übersichtlich dargestellt werden. Eine weitere Stärke dieses Diagramm-Typs liegt in der Darstellung von rekursiven Funktionen als Bild in Bild-Struktur .

eis iel

Betrachten wir folgendes Beispiel:

---

[7] Matwin, S.; Pietrzykowski, T.: The Programming Language PROGRAPH: A Preliminary Report. In: omputer Languages, 10:2, pp. 1 - 125., 1 5

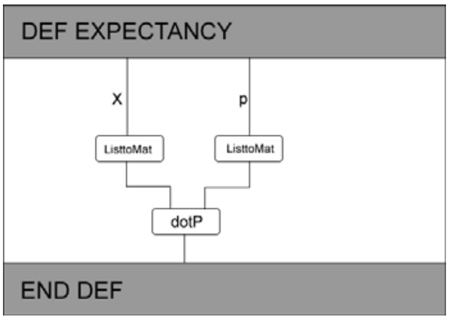
I. Nassi and B. Shneidermann, Flowchart techniques for structured programming , A M SIGPLAN Notices, vol. , pp. 12-26, Aug. 1 73

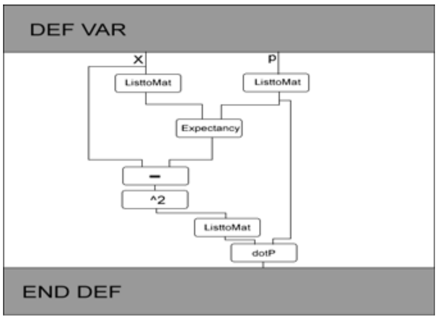
Gegeben sei eine Verteilung für eine Zufallsvariable mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_i P($_i$):

	1	2	3	4	5	6
p P($_i$)	0.12	0.23	0.01	0.42	0.34	0.2

a. Erstellen Sie eine grafische funktionale Darstellung für den Erwartungswert und die Varianz.
b. Berechnen Sie mittels einer am Rechner definierten Funktion die beiden Werte.

Die grafische Umsetzung sieht für die Aufgabenstellung a) wie folgt aus:





Die Funktion die man auf dem Rechner (in unserem Fall ASIO lasspad 300) dafür definieren kann, sieht folgendermaßen aus:
Define Exp(,p) dotP(ListtoMat( ),ListtoMat(p))
Define Var(,p) dotP(ListtoMat((- dotP(ListtoMat( ),ListtoMat(p))) ,
ListtoMat(p))

Literatur

Fuchs, K. .; Siller, H.-St.; V s rhelyi, E.: Basics in Functional Modeling, ASIO Europe GmbH, Budapest, 200

Fuchs, K. .: Projektion – EDV-Nutzung – Zwei fundamentale Ideen und deren Bedeutung für den Geometrisch-Zeichnen Unterricht, Dissertation, Universität Salzburg, Salzburg, 1

Hischer, H.: Zur Geschichte des Funktionsbegriffs, Preprint No. 54, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2002

Nassi, I;Shneidermann, B.: Flowchart techniques for structured programming , A M SIGPLAN Notices, vol. , S. 12-26, Aug., 1 73

Siller, H.-St.: Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik, Dissertation, Universität Salzburg, Salzburg 2006

Siller, H.-St.: Auf Mathematica basierende Lerneinheiten zur fundamentalen Idee der Modellbildung, illustriert an Extremwertbeispielen und Beispielen der Integralrechnung mit M thDesktop, Diplomarbeit, Universität Graz, Graz, 2002

Matwin, S.; Pietrzykowski, T.: The Programming Language PROGRAPH: A Preliminary Report. In: omputer Languages, 10:2, pp. 1 - 125., 1 5

Vollrath, H. .: Funktionales Denken. In: ournal für Mathematikdidaktik, S. 3 – 37, 1

Johann SJUTS, Osnabrück/Leer

Adaptivität und Diagnostik: Was die Bearbeitung passender Aufgabenstellungen aufdecken kann

Eine Fülle verschiedenartiger Programme und Projekte kennzeichnet seit einiger Zeit die aus den Ergebnissen empirischer Untersuchungen hierzulande erforderlich gewordenen Bemühungen um eine Verbesserung mathematischer Bildung. In besonderer Weise engagiert sich die *Deutsche Telekom Stiftung*. Die folgenden Ausführungen illustrieren einen kleinen Teil des Stiftungsprojekts *Mathematik Gut Unterrichten*.

Neben der videobasierten Analyse von Unterrichtsprozessen mit der auf Diskursivität und Metakognition zielenden Interaktion (Kaune 2006) widmet sich das Projekt der Analyse von Lernprozessen, -äußerungen und -produkten der Schülerinnen und Schüler unter besonderer Berücksichtigung der Individualität von Vorstellungen und Fehlvorstellungen.

Der Individualität gerecht zu werden, ist ein Ziel, das der Begriff *Adaptivität* zum Ausdruck bringen soll. Adaptivität, mit einem anderen Wort *Passung*, ist nach Helmke (2006) Schlüsselmerkmal für Unterrichtsqualität. Passung „stellt die Grundlage für Konzepte der Differenzierung und Individualisierung dar. Man kann Passung auch als Metaprinzip bezeichnen, denn es handelt sich um ein Gütekriterium, das in erweitertem Sinne für alle Lehr-Lern-Prozesse gültig ist." (Helmke 2006, S. 45) Eine hohe adaptive Lehrkompetenz der Lehrperson ermöglicht Schülerinnen und Schülern einen feststellbaren Lernzuwachs (Rogalla & Vogt 2008).

Der Anspruch von Adaptivität lässt sich mit geeigneten Aufgaben erfüllen. Diese sollen indes diagnostischen und lernförderlichen Wert zugleich haben. Adaptivität verlangt, „dass eine wohlüberlegte Aufgabenstellung bereits selbst stimulierend und lernfördernd wirkt, dass sie demjenigen, der sie bearbeitet, schon die eigenen Stärken und Schwächen ins Bewusstsein bringt und somit eigene Kompetenzen konsolidiert und stabilisiert oder aber ihn veranlasst, für Abhilfe zu sorgen." (Sjuts 2006a, S. 97)

Wie die Gestaltung von Aufgaben, nicht selten die Umgestaltung durchaus gängiger Aufgaben, erfolgen kann, soll am folgenden Beispiel dargelegt werden. Die Aufgabe „Klebebilder" lautet in einfacher Form so:

Klebebilder

David sammelt Klebebilder. Am Wochenende hat er 15 Klebebilder bekommen. Jetzt hat er 89 Klebebilder. Wie viele Klebebilder hatte er vorher?

Denkbar sind mehrere Zugänge. So könnte jemand seine Vorstellung durch 74 + 15 = 89 (nach dem Gleichungsansatz □ + 15 = 89) ausdrücken. Zum ursprünglichen Bestand an Klebebildern kommen 15 dazu. Dann sind es 89. Also waren es zu Beginn 74. Jemand anders rechnet 89 – 15 = 74 (nach dem Gleichungsansatz 89 – 15 = □), weil vom neuen Bestand an Klebebildern die hinzubekommenen wieder abgezogen werden, um den vorherigen Bestand zu erhalten.

Wichtig ist indes nicht nur, jedem einen individuellen Zugang zu ermöglichen, sondern auch, jeweils andere Zugänge zu lernen und zu verstehen.

In der abgewandelten Form sieht die Aufgabe „Klebebilder" so aus:

Klebebilder

David sammelt Klebebilder. Am Wochenende hat er 15 Klebebilder bekommen. Jetzt hat er 89 Klebebilder. Wie viele Klebebilder hatte er vorher?

Kreuze jeweils an und begründe, ob man mit der Gleichung das Ergebnis ermitteln kann.

(A)	89 = 15 + □	□ Ja, weil ...
		□ Nein, weil ...
(B)	□ – 15 = 89	□ Ja, weil ...
		□ Nein, weil ...
(C)	89 – 15 = □	□ Ja, weil ...
		□ Nein, weil ...
(D)	15 = 89 – □	□ Ja, weil ...
		□ Nein, weil ...
(E)	□ – 89 = 15	□ Ja, weil ...
		□ Nein, weil ...

Die von einem Schüler gegebene Erläuterung sei hier nun genannt und kommentiert (Sjuts 2007).

Der Schüler kreuzt alles in zutreffender Weise an und erläutert auch sein Denken. Er bevorzugt offensichtlich die Variante (C). Er schreibt zu (C): *„Ja, weil es der Weg ist, der mir als erstes durch den Kopf geht."* Und unter Verwendung dieser Gleichung als Umkehrrechnung schreibt er zur Variante (A) *„Ja, weil es eine Gleichung von 89 – 15 ist."* und zu (B) *„Nein, weil eine Gleichung mit 89 – 15 = nicht vorliegt."* sowie zu (E) *„Nein, weil es keine Gleichung von 89 – 15 = ist."*

Hier zeigt sich zweierlei: Zum einen bestätigt der Schüler fast wortgetreu, was die kognitionstheoretische Mathematikdidaktik mehrfach erforscht hat. Eine Person hat eine durch ihre kognitive Struktur bestimmte Vorliebe, sich etwas im Kopf zurechtzulegen, hat eine individuelle gedankliche Vorstellung von etwas (Schwank 2003). Es ist zumeist nicht so, dass sich Lösungsvariationen im Kopf einer Person ergeben; im einzelnen Kopf gibt es in der Regel nicht mehrere Lösungswege, sondern nur einen.

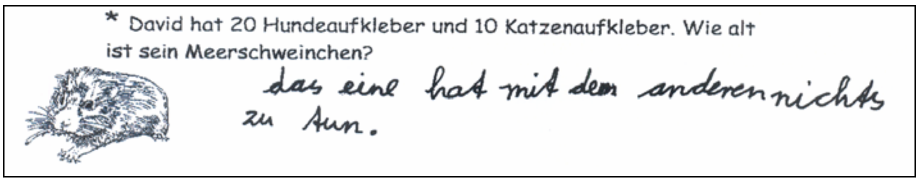
Zum anderen muss jede Person lernen, mit anderen gedanklichen Vorstellungen zurechtzukommen. Sie muss andere Vorstellungen gewissermaßen transformieren. Dem Schüler gelingt das hier durch Umkehrrechnungen. Die Aufgabenstellung verlangt und fördert das dadurch, dass mehrere Zugriffe (selbstverständlich auch falsche) zur Begutachtung vorgelegt werden und die jeweilige Bewertung zu begründen ist.

Eine andere vielfach in der Mathematikdidaktik angesprochene Möglichkeit der Transformation ist die Variation der Darstellung (von Text, Rechnung und Zeichnung etwa). Die Darstellungsvariation ist ein gängiges Verfahren, dem Adaptivitätsanspruch zu genügen. Lehrkräfte müssen das nicht nur ausdrücklich zulassen, sondern nachdrücklich dazu ermuntern.

Zwei Ergänzungen seien noch angefügt. Erstens: In einer Mini-Forschung, von Lehramtsanwärterinnen und -anwärtern im Rahmen ihrer Ausbildung zum Thema „Metakognition beim mathematischen Denken“ durchgeführt (Sjuts 2007), ergab sich, dass die Varianten (A) und (C) so gut wie keine Probleme bereiteten, deutlich mehr dagegen die Varianten (B), (D) und (E). Es scheint nicht zum festen Repertoire zu gehören, sich explizit mit Darstellungen in der Mathematik zu beschäftigen, sich mit ihnen im Unterricht auseinanderzusetzen.

Die Sicht von Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation (Cohors-Fresenborg 2001), die Bedeutung von Mathematik als Sprache hat sich offenbar noch nicht etabliert. Schon im Primarbereich sollte jedoch eine solche didaktische Akzentuierung erfolgen.

Zweitens: Eine Lehramtsanwärterin hatte eine Teilaufgabe ergänzt: „David hat 20 Hundeaufkleber und 10 Katzenaufkleber. Wie alt ist sein Meerschweinchen?“ Ein Drittel der Schülerinnen und Schüler gab 10 oder 30 als Ergebnis an. (Offenbar wurde 20 + 10 = 30 und 20 – 10 = 10 gerechnet.) Allerdings ließ sich nicht jeder irritieren:



Sehr häufig werden immer noch die im Text vorhandenen Zahlen in einer geradezu willkürlichen Rechnung kombiniert, ohne dass eine metakognitive Kontrolle stattfindet. In dem bei der Bearbeitung von Textaufgaben üblichen Schema „Frage – Rechnung – Antwort“ ist die „Überprüfung“ nicht ausdrücklich vorgesehen.

Neben Adaptivität ist Metakognition also eine weitere zentrale Idee bei der Gestaltung von Aufgaben. Insgesamt geht es darum, das individuelle Denken und Verstehen genauer zu analysieren, gezielter anzuregen und bewusster zu überwachen. Das lernende Individuum zu stützen, zu stabilisieren, zu stärken, ist die Leitvorstellung von Diagnostik, Adaptivität und Metakognition (Sjuts 2006b). Empirische Untersuchungen bestätigen den sich ergebenden Zuwachs im Lernerfolg.

Literatur:

Cohors-Fresenborg, Elmar (2001): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 47, Heft 1, 2001, S. 5-13

Helmke, Andreas (2006): Was wissen wir über guten Unterricht? Über die Notwendigkeit einer Rückbesinnung auf den Unterricht als dem „Kerngeschäft“ der Schule. In: Pädagogik, 58. Jahrgang, Heft 2, 2006 S. 42-45

Kaune, Christa (2006):Reflection and Metacognition in Mathematics Teaching – Tools for the Improvement of Teaching Quality. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Volume 38 (4), 2006, pp. 350-360

Rogalla, Marion & Vogt, Franziska (2008): Förderung adaptiver Lehrkompetenz: eine Interventionsstudie. In: Unterrichtswissenschaft. Zeitschrift für Lernforschung, 36. Jahrgang, Heft 1, 2008, S. 17-36

Schwank, Inge (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 35, Heft 3, 2003, S. 70-78

Sjuts, Johann (2006a): Unterrichtliche Gestaltung und Nutzung kompetenzorientierter Aufgaben in diagnostischer Hinsicht. In: Blum, Werner & Drüke-Noe, Christina & Hartung, Ralph & Köller, Olaf (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin 2006, S. 96-112

Sjuts, Johann (2006b): Mathematikdidaktik im Wandel. Diagnostik, Adaptivität und Metakognition als Schlüsselbegriffe zur Steigerung von Lernqualität. In: SEMINAR – Lehrerbildung und Schule. Heft 3, 2006, S. 122-130. Ebenso in: Kretzer, Hartmut (Hrsg.): Lehrerausbildung in der Wissensgesellschaft angesichts aktueller Aufgaben. Oldenburg 2006, S. 13-22

Sjuts, Johann (2007): Mini-Forschung im Berufsfeld Schule. Steigerung von Unterrichtsqualität und Verbesserung von Lehrerausbildung, dargestellt am Beispiel des Grundschulprojekts „Metakognition beim mathematischen Denken“. Leer 2007

Elke S BBEKE, Universität Duisburg-Essen

„Sehen und Verstehen“ im Mathematikunterricht - Zur besonderen unktion von Anschauungsmitteln f r das Mathematiklernen

I olle der Anschauungsmittel f r das Mathematiklernen

In den letzten zwanzig ahren ist im Mathematikunterricht der Grundschule ein grundlegender Paradigmenwechsel erfolgt, der ausgelöst wurde durch eine neue Sicht auf Lernprozesse aber auch durch ein neues Verständnis der (Schul-) Mathematik. In diesem Zusammenhang wurde die Überwindung eines eher traditionellen Rechenunterrichts angestrebt, der vor allem dem Aufbau von rezeptbasierten Rechenfertigkeiten diente, und eine Hinwendung zu einem aktiv gestalteten Unterricht, in dem Kinder Mathematik entdecken, beschreiben und begründen. Mit diesem Paradigmenwechsel einhergehend hat sich auch ein bedeutsamer Perspektivwechsel hinsichtlich der Rolle, Nutzung und Funktion von Materialien und Anschauungsmitteln im Mathematikunterricht vollzogen. Ihr Status hat sich gewandelt von Werkzeugen des *Lehrens* zu Werkzeugen des *Lernens* (Krauthausen Scherer 2001). Dieser Wandel soll im Folgenden in einigen Kernpunkten aufgezeigt werden, da er grundlegend für das vorliegende Forschungsinteresse ist.

Anschauungsmittel als Lehrmittel

In einem Unterricht, der durch ein eher traditionelles Verständnis von Lernen und Mathematik geprägt ist, ist der Einsatz von Anschauungsmitteln mit der Hoffung und Intention verbunden, dass der tätige Umgang mit entsprechenden Materialien in einer weitgehend direkten und einfachen Weise das mathematisch relevante Wissen an das Kind vermitteln kann. Mathematik wird in einem solchen Kontext als eine Ansammlung fertiger Regeln, Verfahren und Sätze verstanden, die von der Lehrperson mit Hilfe geeigneter Materialien an die Schüler Stück für Stück übergeben werden könnte.

Eine solche Auffassung, dieses ist hinlänglich bekannt, entspricht nicht mehr den heutigen Kenntnissen über Lernprozesse, die als aktive und individuelle Konstruktionen verstanden werden. Insofern weiß man heute auch, dass ein mathematischer Begriff nicht in direkter Weise vom Anschauungsmittel in den Kopf des Kindes transportiert werden kann, sondern, dass hierzu ein aktiver und individueller Deutungs- und Konstruktionsprozess notwendig ist.

Mathematik als Lernmittel

Mathematik heute wird zunehmend als eine Wissenschaft der Muster, Beziehungen und Strukturen gesehen (vgl. Wittmann 2003). Demzufolge handelt es sich bei den Inhalten der Mathematik nicht um konkrete Objekte, die mit Hilfe verschiedenster Instrumente untersucht werden können (wie dieses etwa in anderen Naturwissenschaften der Fall ist); vielmehr sind die Inhalte der Mathematik von abstrakter Natur. Diese Besonderheit des mathematischen Wissens macht ein *vermittelndes Medium* notwendig, um mit Kindern überhaupt über die abstrakten Inhalte und Begriffe sprechen oder nachdenken zu können. Durch einen handelnden und mentalen Umgang mit solch vermittelnden Medien - den Anschauungsmitteln - soll das Kind unterstützt werden, adäquate mentale Vorstellungsbilder eben dieser abstrakten mathematischen Inhalte aufzubauen.

Anschauungsmittel sind vor diesem Hintergrund nicht mehr nur Hilfsmittel zum Rechnen, vielmehr erweitert sich ihre Funktion *substanziell* durch diese neue Sicht auf Mathematik: Wird Mathematiklernen verstanden als ein Prozess der zunehmend differenzierter werdenden Verstehens- und Deutungsweise der Kinder von abstrakten Mustern und Strukturen (vgl. Steinbring 2005), dann haben Anschauungsmittel keinen rein *didaktischen* oder *methodischen* Status mehr, sondern einen *epistemologischen*.

Anschauungsmittel als methodische Hilfsmittel oder als epistemologische Werkzeuge

In diesem *ersten* Beispiel dient das Anschauungsmittel in erster Linie dazu, die Lösung der gestellten Additionsaufgabe zu finden. Zunächst soll in dem Anschauungsmittel der zweite Summand durch Einzeichnen ergänzt werden, dann kann mit Hilfe des Materials die Summe und hiermit die Lösung der Rechenaufgabe bestimmt werden. Im Ganzen stehen bei dieser Funktion die konkreten Eigenschaften des Materials (wie zum Beispiel die Anzahl der Punkte) im Vordergrund, die in blau und rot gefärbt und anschließend abgezählt werden können.

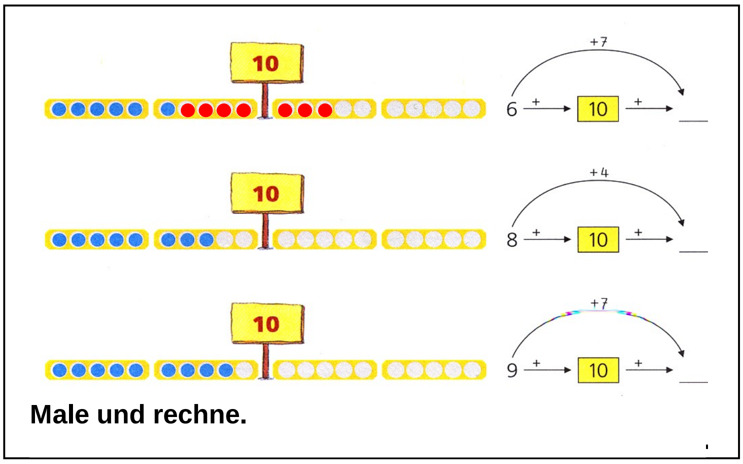


Abb Anschauungsmittel als methodisches ilfsmittel

In dem nachfolgenden *zweiten* Beispiel wird wieder ein Punktefeld als Anschauungsmittel genutzt; auch hier finden sich Punkte in roter und blauer Färbung. edoch sollen hier nicht die konkreten Eigenschaften des Materials im Mittelpunkt der Betrachtung stehen, sondern das Abstrakte, die *Beziehungen und Strukturen im Material*: In der Abbildung sind somit nicht die Farben an sich das Bedeutende, auch die Anordnung der Punkte ist nicht aus ästhetischen Gründen das Entscheidende für eine mathematische Einsicht; es ist vielmehr die *Funktion*, die die konkrete Eigenschaft des Materials *für* etwas übernimmt. Welche Funktion ist dieses in dem Beispiel Die Anordnung der Plättchen in den Zahldarstellungen ermöglicht die Deutung einer *übergeordneten Beziehung*: die Addition zweier ungerader Zahlen ergibt eine gerade Zahl und dieses muss - und das eröffnet *nur* die *abstrakte Struktur* der Darstellung - *immer* so sein. Das heißt, die Struktur der Darstellung ermöglicht eine Einsicht in eine mathematische Gesetzmäßigkeit; aber sie ist nicht direkt ablesbar oder konkret sinnlich erfahrbar; sie muss aktiv in die Darstellung hineingedeutet werden.

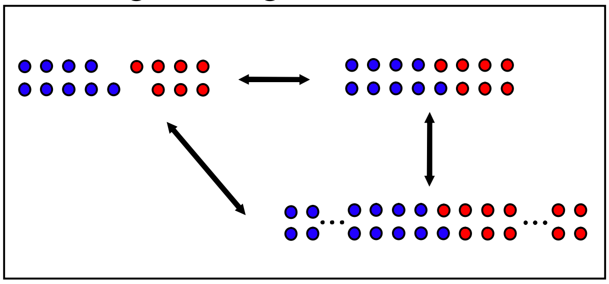


Abb   Anschauungsmittel als Denkmittel

Eine solches Erkunden und Deuten von Beziehungen und Strukturen und eine damit verbundene relationale Sicht auf Zahlen und Operationen ist aus mathematischer Sicht unerlässlich, um in den nachfolgenden Schuljahren für die elementaren arithmetischen Operationen überhaupt wirkungsvolle Rechenstrategien entwickeln zu können. Kinder sollten folglich bereits in der Grundschule lernen, ein *konkretes Material* zunehmend in seiner Funktion als *Repräsentation mathematischer Strukturen* zu sehen. Hierzu muss das lernende Kind auf der Grundlage seines alten Wissens die repräsentierte mathematische Struktur *aktiv* in das Anschauungsmittel hineindeuten, sie kann nicht einfach und direkt abgelesen werden. Ein Verständnis solch abstrakter Beziehungen und Strukturen entwickelt sich nicht automatisch oder spontan im Unterricht, indem Kinder mit Anschauungsmitteln arbeiten, sie muss explizit erarbeitet werden. Diese Fähigkeit stellt eine anspruchsvolle, aber fundamentale Basiskompetenz des mathematischen Denkens insgesamt dar. Genau hier, in dieser für Kinder anspruchsvollen Fähigkeit liegt das Forschungsinteresse der vorliegenden Studie.

II Strukturen deuten erkunden und beschreiben
– die visuelle Strukturierungsfähigkeit –

Der Schwerpunkt des abgeschlossenen Forschungsprojektes lag in einer *epistemologisch orientierten Analyse* der Wirkungsweise von Anschauungsmitteln für das mathematische Denken von Grundschulkindern. In diesem Kontext wurde untersucht, wie Anschauungsmittel als Erkenntnismittel wirken und zwar speziell bezogen auf den besonderen *theoretischen* harakter des mathematischen Wissens. Vor diesem Hintergrund wurde das theoretische Konstrukt *visuelle Strukturier*ungsfähigkeit entwickelt. Es reflektiert die oben dargestellten theoretischen Überlegungen und charakterisiert die kindliche Fähigkeit, aktiv Strukturen in ein Anschauungsmittel hineinzudeuten und zwar in einer Spanne von einer eher *empirischen Sicht* auf das konkrete Objekt, bis hin zu einer *abstrakten Sicht* auf Beziehungen und Strukturen.

Design der Studie

In einer Voruntersuchung wurden zunächst 60 Kinder des 2. Schuljahres mit Hilfe eines Paper-Pencil-Tests[1] untersucht. Im Anschluss hieran folgte die Hauptstudie, in der klinische Interviews mit 15 Kindern des 1. bis 4. Schuljahres durchgeführt wurden (vgl. hierzu ausführlich Söbbeke 2005).

Analyseverfahren

Für die Analyse der Interviews waren zwei Perspektiven zentral:

1.) Ein Anschauungsmittel kann grundsätzlich zwei verschiedene Rollen für das Kind einnehmen: es kann einen *vertrauten Kontext* darstellen, den das Kind nutzt, um sich neue mathematische Begriffe zu erschließen; es kann desgleichen ein für das Kind neues Zeichen/Symbol darstellen, das es mit ihm vertrauteren (beispielsweise arithmetischen) Kenntnissen zu deuten versucht. Im ersten Teil der Interviewanalyse erfolgte aus diesem Grund eine *epistemologisch orientierte* Analyse, in der jeweils herausgearbeitet wurde, ob das Anschauungsmittel die Rolle des vertrauten Referenzkontextes oder die des zu deutenden Zeichen/Symbols einnimmt. Hierzu wurde das von Steinbring entwickelte *epistemologische Dreieck* (vgl. Steinbring 2005, Abb.

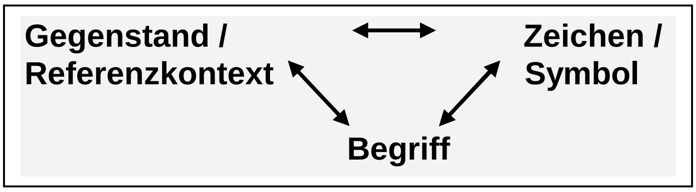


Abb Steinbring

[1] Der Paper-Pencil-Test wurde von H. Steinbring im Rahmen eines omenius-Projektes entwickelt und in einer Praxiskooperation mit drei Lehrerinnen in Form eines informellen Fragebogens eingesetzt. Das Material des Tests wurde für eine erste qualitative Analyse, Theoriebildung und Begriffspräzisierung genutzt.

3) als Analyseinstrument herangezogen (vgl. hierzu ausführlich Söbbeke 2005)

2.) Im Prozess der aktiven Auseinandersetzung von Kindern mit einem Anschauungsmittel zeigen sich Elemente *empirischer* und *strukturorientierter Deutungen* in vielfältigen Mischungen. Diese Herangehens- und Deutungsweisen zu beschreiben, war das zweite Anliegen der Interviewanalyse und erfolgte mit Hilfe eines Kategorienmodells.

Kategorienmodell der visuellen Strukturierungsfähigkeit

Visuelle Strukturierung	
Deutungselemente	**Nutzung der Deutungselemente**
Deutung n **Einzelelementen**	ut ung der le ente als **konkrete Objekte**
Deutung n **individuellen Strukturen Struktureinheiten**	ut ung it **stark zerlegender Gliederung** tru turierung der Darstellung
Deutung n **intendierten Strukturen Struktureinheiten**	ut ung n **Teilaspekten Teilen** der Darstellung
Deutung n **Substrukturen**	ut ung n **strukturellen Beziehungen** is hen le enten
	tru turelle **Koordination** der le ente
	tru turelle **Umdeutungen**

Abb ategorienmodell

Die Analysekategorien wurden rekonstruktiv aus dem erhobenen Datenmaterial entwickelt und dienten als Indizien für ein empirisches oder strukturorientiertes Herangehen der Kinder. Sie stellten das leitende Fundament der Interpretation dar.

III Ergebnisse

Durch detaillierte Analysen war schließlich eine *Typenbildung* der unterschiedlichen Deutungs- und Erkundungsweisen der Kinder möglich, und es konnten vier verschiedene *Ebenen* der *visuellen Strukturierungsfähigkeit* beschrieben und gegeneinander abgegrenzt werden. Im Folgenden sollen diese vier Ebenen (stark verkürzt) anhand exemplarischer Schülerdokumente erläutert werden.

Ebene I: Ebene konkret empirischer Deutungen

In Phasen, die der *Ebene konkret empirischer Deutungen* zugeordnet werden, fehlt eine strukturelle Gesamtsicht auf das Medium. Es werden keine Strukturen in das Anschauungsmittel hineingedeutet, vielmehr dominiert eine Sicht auf *Einzelelemente* und *konkrete Objekte*, die verbunden ist mit einer starken Zergliederung der Darstellung. Die Einzelelemente stehen weitgehend isoliert nebeneinander, ohne dass sie strukturell miteinander koordiniert oder in Beziehungen zueinander gesetzt würden. Zudem finden keine echten strukturbezogenen Umdeutungen statt. Das Kind beschreibt das empirisch Fassbare eines Anschauungsmittels, wie etwa die Anzahl der abgebildeten Elemente, und konstruiert hiervon ausgehend eine Rechenaufgabe.

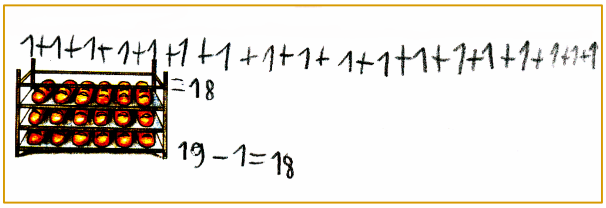
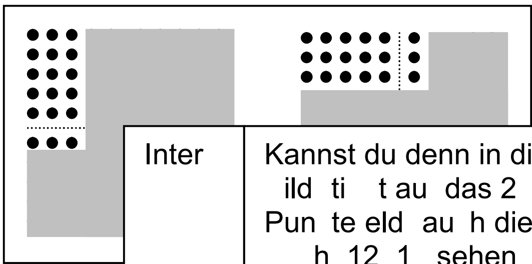


Abb Miras Aufgabe zur Darstellung

Ebene II: Ebene des Zusammenspiels von partiell empirischen Deutungen mit ersten strukturorientierten Deutungen

In Deutungsphasen dieser Ebene löst das Kind seine Interpretationen partiell von den konkreten Aspekten der Darstellung und richtet seine Aufmerksamkeit vermehrt auf abstrakte Beziehungen und Strukturen. Neben Beschreibungen, die sich auf konkrete Eigenschaften des Materials beziehen (hier z.B. die Anzahl der Punkte in den waagerechten Reihen) werden erste *Strukturen* in die Darstellung hineingedeutet, die zum Teil weitgehend isoliert nebeneinander stehen (im 1. Punktefeld nur 3er-, im 2. Feld nur 5er-Reihen). In Ansätzen werden erste Beziehungen zwischen Struktureinheiten gesehen oder diese miteinander koordiniert. Es werden keine strukturellen Umdeutungen expliziert (Paul kann nicht die 3,6, ,12,15 im 2. Feld sehen).

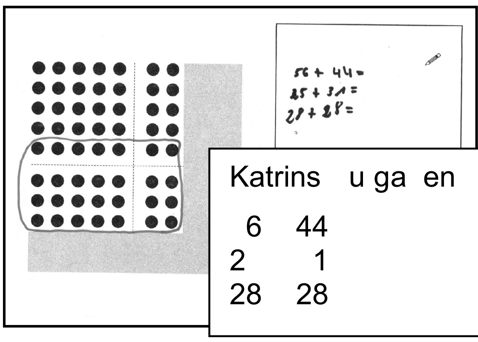


Inter	Kannst du denn in diese ild ti t au das 2 Pun te eld au h die 6 h 12 1 sehen
Paul	h da ann an nur und 10 und die 1 sehen

Abb Paul vergleicht Punktefelder

Ebene III: Ebene strukturorientierter Deutungen mit zunehmender, flexibler Nutzung von Beziehungen und Umdeutungen

In Phasen dieser Ebene deuten Kinder aktiv Strukturen in ein Anschauungsmittel hinein, erkunden und beschreiben diese. Hierbei werden verschiedene Aspekte des Datenmaterials in die Überlegungen einbezogen.



Katrins u ga en

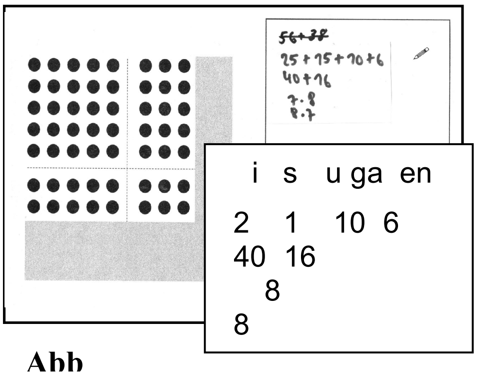
6 44
2 1
28 28

Abb

Im Vergleich zu der zweiten Ebene werden die Strukturen insgesamt vielfältiger konstruiert und flexibler umgedeutet. Die Struktureinheiten stehen nicht isoliert nebeneinander, sondern werden als Teile des Ganzen gesehen, strukturbezogen zerlegt, zusammengefügt und miteinander koordiniert. Auf dieser Ebene zeigt sich - im Vergleich zur vierten Ebene - keine *umfassende* Sicht auf *vielfältigste* Dimensionen der Darstellung, da z.B. ausschließlich additive Strukturen in die Darstellung hineingedeutet werden.

Ebene IV: Ebene strukturorientierter, relationaler Deutungen, mit umfassender Nutzung von Beziehungen und flexiblen Umdeutungen

Das Kind zeigt eine umfassende Sicht auf vielfältige Dimensionen der Darstellung und konstruiert aktiv verschiedenste *Beziehungen* und *Strukturen* in die Darstellung hinein. Es werden *komplexe, umfassende Umdeutungen vorgenommen und begründet*. Die Kinder verweisen in ihren Beschreibungen auf Strukturen sowie Muster und benennen vielfältige alternative Deutungen. In dem Beispiel finden sich etwa additive aber auch multiplikative Strukturierungen der Darstellung wieder, die weitere Einblicke in mathematische Gesetzmäßigkeiten eröffnen könnten.



Abb

Grundverständnis der Nutzung dieses Modells ist, dass die vier Ebenen der visuellen Strukturierungsfähigkeit *nicht* als festgelegte Entwicklungsstufen zu verstehen sind, die in einer vorgegebenen Reihenfolge durchlaufen werden müssten. Die Zuordnung einer kindlichen Deutung zu einer bestimmten Ebene gibt nicht in generalisierender Weise *die* Komplexität der visuellen Strukturierungsfähigkeit dieses Kindes wieder, vielmehr eröffnet sie ein differenziertes Bild, das die *Bandbreite* der Herangehensweisen eines Kindes – ausschließlich bezogen auf den spezifischen Aufgabenkontext und die jeweilige Deutungsphase – beschreibt.

IV es mee Ausblick

1.) Die detaillierten Analysen zeigen eindrucksvoll, dass die verwendeten Anschauungsmittel für die Kinder noch weitgehend unerschlossene Medien darstellten, die erst im Verlauf der Interaktion aktiv einer *neuen* Sinngenerierung unterzogen wurden. Anschauungsmittel werden nicht in einem *traditionellen* Sinne gelernt, indem ihre Bedeutung von der Lehrerin übermittelt und von den Kindern auswendig gelernt wird, vielmehr verändert sich die Deutung von Anschauungsmitteln immer im Kontext ihrer jeweiligen Gebrauchsweise und Deutungskultur.

2.) In den Fallstudien - das heißt in der *Kommunikationssituation* des klinischen *Interviews* - zeigten sich keine Deutungen, die ausschließlich Ebene I zugeordnet werden konnten. In der *Gesprächssituation* wurden durch die Kinder immer erste Ideen einer Strukturierung der Darstellung geäußert. Das unter Ebene I vorgestellte Beispiel entstammt dem Paper-Pencil-Test der Voruntersuchung, bei dem das Kind alleine arbeitete, ohne mit anderen Kindern oder der Lehrperson in einem kommunikativen Kontext andere Deutungsmöglichkeiten zu erfahren. Es ist aufgrund dessen zu vermuten, dass die unterschiedlichen Kontexte einen Einfluss auf die Deutungen der Kinder haben. Die impliziten Erwartungen der Kinder, was eine richtige und falsche Deutung oder Bearbeitungen der Aufgabenstellung ist, muss folglich erweitert werden, indem sie durch eine neue Unterrichtskultur erfahren, dass verschiedene Deutungsmöglichkeiten möglich und hilfreich sind, um daran neue mathematische Aspekte zu verstehen.

An diesem Handlungsfeld setzt auch eine neue Interventionsstudie an, in der Aufgabenformate entwickelt, erprobt und evaluiert werden, die Anschauungsmittel selbst zu einem Thema des Unterrichtes machen und die es ermöglichen sollen, gemeinsam mit und über Anschauungsmittel ins Gespräch zu kommen. Durch einen solchen Umgang mit Anschauungsmitteln sollen Kinder nach und nach lernen, dass diese mehr sind als Bilder, die ihnen das Rechnen erleichtern. Durch kindgerechte Gespräche über Strukturen und Beziehungen in einem Anschauungsmittel, kann auch bei Grundschulkindern ein erstes Verstehen der *epistemologischen Idee* von symbolischen Repräsentationen angelegt werden.

Literatur

Krauthausen, G. Scherer, P. (2001): Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Söbbeke, E. (2005): Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Steinbring, H. (2005): The onstruction of New Mathematical Knowledge in lassroom Interaction – an Epistemological Perspective, Mathematics Education Library (MELI), No. 3 . Berlin, New ork: Springer.

Wittmann, E. h. (2003): Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht der Grundschule. In: M. Baum H. Wielpütz (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule - Ein Arbeitsbuch. Seelze: Kallmeyer, 1 -46.

Jasmin SPRENGER, Schwäbisch Gmünd

Operationsverständnis und Grundvorstellungen in Klasse 3 – Literaturanalyse und Interviewstudie

1 Einleitung

In diesem Beitrag werden zunächst die historischen Entwicklungslinien der beiden Konstrukte „Operationsverständnis" sowie „Grundvorstellungen" herausgearbeitet und zueinander in Beziehung gesetzt. Anschließend werden in einer empirischen Untersuchung die Ausprägungen dieser Konstrukte bei Drittklässlern erfasst.

2 Entwicklungslinien und Definitionen

Operationsverständnis und Grundvorstellungen sind gängige Schlagworte in der Mathematikdidaktik. Doch worauf gehen sie zurück und wie werden sie heute definiert?

2.1 Operationsverständnis

Der Begriff Operationsverständnis ist relativ jung, jedoch beziehen sich die meisten Autoren auf Grundlagen, die bereits in der Mitte des letzten Jahrhunderts von Bedeutung waren, unter anderem Piaget (1967), Aebli (1961), Bruner (1971) und Bauersfeld (1972). Neben Aebli, dessen Ansatz als didaktisches Modell zur Umsetzung im Unterricht gilt, kommt vor allem Bruner eine wichtige Rolle zu, prägte er doch die Begriffe enaktiv – ikonisch – symbolisch als Repräsentationsformen, die auch in der heutigen Mathematikdidaktik noch von Bedeutung sind. Eine weitere wichtige Grundlage bildet Bauersfeld, der mit seinem intermodalen Transfer auf die Wechselwirkungen der Repräsentationsformen hinweist. Aus diesen Grundlagen entwickelten sich in den letzen Jahren zwei Definitionsansätze.

Gerster und Schultz (2004, S. 351 ff.) beziehen sich in ihrer Definition des Operationsverständnisses auf Huinker (1993) und Van de Walle (1994). Operationsverständnis ist demnach die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Darstellungsformen (konkrete Sachsituation, modell- oder bildhafte Darstellung, symbolische Darstellung) hin und her wechseln zu können. Wenn die Übersetzungen zwischen allen Repräsentationsformen in beiden Richtungen funktionieren, spricht man von einem vollständig ausgebildeten Operationsverständnis. Die enaktive Darstellung, die Bruner (1971) aufführt, tritt bei Gerster und Schultz (2004) nicht explizit auf, aufgrund der möglichen Aufgabenstellungen wird aber deutlich, dass sie der Repräsentationsform „Modell/Bild" zugeordnet werden kann. Zusätzlich zu den Repräsentationsformen Bruners taucht bei Gerster und Schultz der Sachkontext auf, woran deutlich wird, dass ein ausgebildetes Operationsverständnis nicht nur rein innermathematische Aspekte erfasst, sondern auch die außermathematische Lebenswelt berücksichtigt.

Die Definition von Bönig (1995, S. 60 ff.) bezieht sich ganz deutlich auf Bruner (1971). Es treten prinzipiell dieselben Repräsentationsmodi auf, mit dem Unterschied, dass die symbolische Darstellung in Symbol und Sprache unterteilt ist. Anders als bei Gerster und Schultz (2004) ist ein Sachkontext nicht auf den ersten Blick ersichtlich, er zeigt sich jedoch in den Beispielaufgaben.

2.2 Grundvorstellungen

Das Grundvorstellungskonzept besitzt in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition, teilweise auch unter anderen Bezeichnungen und mit abweichenden Bedeutungen (vgl. vom Hofe, 1995, S. 15 ff.). Erste Ansätze dazu finden sich schon bei Pestalozzi, über Kühnel, Oehl und Griesel fand dann eine kontinuierliche Weiterentwicklung statt. Grundvorstellungen haben sich demnach im Lauf der Jahrhunderte im Zuge einer Auseinandersetzung zwischen Theorie und Praxis herausgebildet und können heute wie folgt gefasst werden: „Grundvorstellungen beschreiben Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung.“ (Vom Hofe, 1996, S. 6). Sie gelten als Mittler zwischen Mathematik, Individuum und Welt. Besonders bedeutsam sind dabei die Aspekte Sinnkonstituierung, Aufbau psychologischer Repräsentationen und Anwendung. Grundvorstellungen bilden demnach die Basis für inhaltliches Lernen, ohne ihre vermittelnde Funktion stehen sich Zahlenwelt und Realität beziehungslos gegenüber. Vor allem die beiden Aspekte Sinnkonstituierung und Aufbau psychologischer Repräsentanten scheinen für ein gut ausgebildetes Operationsverständnis von Bedeutung zu sein, da sie auf die Begriffsbildung und Verinnerlichung zielen, Fähigkeiten, die beim Übersetzen zwischen verschiedenen Repräsentationsformen benötigt werden.

Ein enger gefasster Teil des Grundvorstellungskonzepts findet sich bei Gerster und Schultz (2004, S. 354 ff.), Radatz (1996) oder auch Padberg (2005). Sie verstehen unter Grundvorstellungen verschiedene Handlungsmöglichkeiten einer Rechenoperation, die durch unterschiedliche Sachsituationen charakterisiert werden können. Grundvorstellungen der Addition sind demnach z.B. das Verändern einer Menge oder das Zusammenfügen zweier verschiedener Mengen. Während der Definitionsansatz von Vom Hofe weitaus umfassender ist, geben die enger gefassten Definitionsansätze Anregungen für das unterrichtliche Handeln. Darüber hinaus finden sich auch hier Anknüpfungspunkte zum Operationsverständnis, da die Übersetzungsprozesse auch hinsichtlich der vom Schüler gezeigten Grundvorstellung betrachtet werden können. So ergeben sich hier mögliche Fragen nach der Art der gezeigten Grundvorstellungen.

3 Empirische Befunde

Im Bereich des Operationsverständnisses gibt es zahlreiche Untersuchungen, die Teilaspekte betrachten, aber nur wenige, die möglichst vielfältige Übersetzungsprozesse berücksichtigen. Bönig (1995) untersucht in Klasse 4 sieben mögliche Übersetzungen bezüglich der Multiplikation und Division. Sie kommt zu dem Ergebnis, dass die Hauptschwierigkeiten bei Aufgaben liegen, die Übersetzungen von der Symbolform weg in eine andere Darstellungsform verlangen. Auch fällt es vielen Schülern schwer, Handlungen zu mathematisieren. Sie weist jedoch auch darauf hin, dass es zwischen den Schülern deutliche Unterschiede gibt. Schäfer (2005) bezieht sich auf rechenschwache Hauptschüler und betrachtet nur zwei mögliche Übersetzungen, diese jedoch bezüglich aller vier Grundrechenarten. Sie kommt zum Ergebnis, dass das Operationsverständnis bezüglich Addition und Subtraktion bei den untersuchten Schülern deutlich besser ausgebildet ist, als das Operationsverständnis bezüglich Multiplikation und Division.

4 Eigene Voruntersuchung und erste Ergebnisse

Im Zuge einer eigenen Voruntersuchung wurden im zweiten Schulhalbjahr in einer dritten Klasse alle 22 Schüler einzeln interviewt. Alle Interviews beinhalteten 5 verschiedene Übersetzungen und alle vier Grundrechenarten. Die auf Video aufgezeichneten Interviews wurden anschließend unter Berücksichtigung zweier verschiedener Fragestellungen ausgewertet.

4.1 Operationsverständnis bei Grundschülern

In einer ersten Frage ging es darum, herauszufinden, wie das Operationsverständnis bei Grundschülern ausgeprägt ist. Diese Frage zielt auf das Gelingen der Übersetzungsprozesse. Die Ergebnisse sind hierbei sehr vielfältig. Neben Schülern, die scheinbar jede Übersetzung mühelos bewältigen, finden sich auch Schüler, denen die Aufgabenstellungen sichtlich Schwierigkeiten bereiten. Trotz der sehr unterschiedlichen Übersetzungsleistungen zeigen sich aber einige wesentliche Problemfelder: Die größten Schwierigkeiten zeigten sich bei Aufgaben, die eine inhaltliche Deutung mathematischer Ausdrücke verlangten (vom Symbol weg, hin zu Bild oder Handlung). Auffällig hierbei ist, dass diese Übersetzungen jeweils nur in eine Richtung sehr gut funktionieren, die Rückübersetzung aber nicht gelingt.

Auch stellte sich heraus, dass die Aufgaben mit multiplikativer Struktur den Schülern die größten Schwierigkeiten bereiteten. Die Befunde von Bönig (1994) und Schäfer (2005) wurden bestätigt.

4.2 Grundvorstellungen hinter den Schülerlösungen

Die Auswertung dieser zweiten Frage orientierte sich an den Grundvorstellungen im Sinne von Gerster und Schultz (2004, S. 355). Sie geht über die Frage nach dem Gelingen der Übersetzungsprozesse hinaus und zielt auf die dahinter stehenden Grundvorstellungen. Auffällig war hierbei, dass sich nur ein Teil der Schülerlösungen bestimmten Grundvorstellungen zuordnen ließ. Daneben gab es Schülerlösungen, bei denen die Grundvorstellung nicht eindeutig erkennbar war. Sehr viele Lösungen zeigten anstelle von Grundvorstellungen Rechenstrategien, Verbalisierungen sowie ikonische oder enaktive Darstellungen der vorgegebenen Aufgaben. Daraus zu schließen, die Schüler verfügen nicht über inhaltliche Grundvorstellungen, wäre jedoch falsch, vielmehr muss nun verstärkt danach gefragt werden, wie es gelingt, die hinter den Übersetzungen stehenden Grundvorstellungen sichtbar zu machen, d.h. wie entsprechende Aufgaben gestaltet werden müssen, um dies zu erfassen.

Literatur

Aebli, Hans (1961): Grundformen des Lehrens. Stuttgart: Klett

Aebli, Hans (1987[3]): Zwölf Grundformen des Lehrens. Stuttgart: Klett

Bönig, Dagmar (1995): Multiplikation und Division: Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschülern. Münster: Waxmann

Bruner, Gerome S. (1971): Studien zur kognitiven Entwicklung. Stuttgart: Klett

Gerster, Hans-Dieter und Schultz, Rita (2004): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Freiburg im Breisgau

Padberg, Friedhelm (2005[3]): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Spektrum

Radatz, Hendrik und Schipper, Wilhelm (1996): Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr. Hannover: Schrödel

Schäfer, Jutta (2005): Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Hamburg: Verlag Dr. Kovac

Vom Hofe, Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum

Vom Hofe, Rudolf (1996): Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. In: Mathematik lehren (78), S. 4-8

Grozio STANILOV Dobrich, Galina PANAYOTOVA Burgas,
Slavka SLAVOVA Dobrich

MULTIPLIKATION VON KURVEN ZWEITER ORDNUNG

In der vorliegenden Arbeit definieren wir die Operation „Multiplikation“von Kurven zweiter Ordnung.Die Kurven sind beim einem festen Koordinatensystem gegeben und das Produkt auch beim demselben. Dazu verwenden wir die Computer Algebra MAPLE.Damit wollen wir die grossen Moeglichkeiten von Maple zeigen.

I. Produkt von zwei Kurven. Ist $A = (a_{ij})$ eine Matrix der Ordnung 3,die entsprechende Kurve zweiter Ordnung hat Gleichung

$$a := a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})x + (a_{23} + a_{32})y = 0 .$$

Genau so ist $B = (b_{ij})$ eine solche Matrix, die entsprechende Kurve zweiter Ordnung hat Gleichung

$$b := b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33} + (b_{12} + b_{21})xy + (b_{13} + b_{31})x + (b_{23} + b_{32})y = 0$$

Bezeichne $F = A.B$ mit Elementen $F = (f_{ij})$.Die Kurve mit der Gleichung

$$f := f_{11}x^2 + f_{22}y^2 + f_{33} + (f_{12} + f_{21})xy + (f_{13} + f_{31})x + (f_{23} + f_{32})y = 0 ,$$

nennen wir Produkt der beiden Kurven und bezeichnen wir $f = a.b$.

Satz 1.Das Produkt von zwei Kurven mit symmetrischen Matrizen ist kommutativ:

$$a.b = b.a .$$

Beweis . Wir benutzen die Computer Algebra MAPLE. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

beliebige Matrizen der Ordnung 3. Die Elemente der Matrix $F = A.B$ sind:

$$f_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, f_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}, f_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$$
$$f_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}, f_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}, f_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$$
$$f_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}, f_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}, f_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$$

In analogischer Weise,die Elemente der Matriz $K = B.A$ sind:

$$k_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31}, k_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32}, k_{13} = b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33}$$
$$k_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31}, k_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32}, k_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33}$$
$$k_{31} = b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31}, k_{32} = b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32}, k_{33} = b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33}$$

Die Kurve, die durch die Matrizx $F = A.B$ bistimmt ist, hat Gleichung:

$$f := f_{11}x^2 + f_{22}y^2 + f_{33} + (f_{12} + f_{21})xy + (f_{13} + f_{31})x + (f_{23} + f_{32})y = 0$$

Die Kurve, die durch die Matrix $K = B.A$ bistimmt ist, hat Gleichung

$$k := k_{11}x^2 + k_{22}y^2 + k_{33} + (k_{12} + k_{21})xy + (k_{13} + k_{31})x + (k_{23} + k_{32})y = 0$$

Im Falle $a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23}, b_{21} = b_{12}, b_{31} = b_{13}, b_{32} = b_{23}$ bekommen wir $f - k = 0$. Damit ist der Satz1 bewiesen.

Satz 2.Das Produkt von Kurven ist assoziativ:

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

wo

$$c = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33} + (c_{12} + c_{21})xy + (c_{13} + c_{31})x + (c_{23} + c_{32})y = 0$$

ist.

Der Beweis geht in analogischer Weise.Wir berechnen die Elemente der Matrizen $H = F.C, G = B.C, J = A.G$ - h_{ij}, g_{ij}, j_{ij} .Die Kurve $h = (a.b).c$ hat Gleichung

$$h := h_{11}x^2 + h_{22}y^2 + h_{33} + (h_{12} + h_{21})xy + (h_{13} + h_{31})x + (h_{23} + h_{32})y = 0$$

und entsprechend - die Kurve $j = a.(b.c)$ hat Gleichung

$$j := j_{11}x^2 + j_{22}y^2 + j_{33} + (j_{12} + j_{21})xy + (j_{13} + j_{31})x + (j_{23} + j_{32})y = 0$$

Im Falle $a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23}, b_{21} = b_{12}, b_{31} = b_{13}, b_{32} = b_{23}, c_{21} = c_{12}, c_{31} = c_{13}, c_{32} = c_{23}$, bekommen wir $h - j = 0$.

Damit ist der Satz 2 bewiesen.
Bemerkung. Die Rechnungen sind ziemlich umfangreich, aber mit Maple alles geht auf einmal sehr schnell und macht Vergnuegen und Spass.

Satz 3. Das Quadrat jeder nicht entarteten Kurve ist immer eine imaginere Ellipse.
Beweis.Ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

eine beliebige symmetrische Matrix,die entsprechende Kurve ist

$$a = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0.$$

Die Elemente der Matriz $C = A^2$ sind:

$$c_{11} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2, c_{12} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23}, c_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33}$$

$$c_{21} = c_{12}, c_{22} = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2, c_{23} = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33}$$

$$c_{31} = c_{13}, c_{32} = c_{23}, c_{33} = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2.$$

Offenbar

(1) $$c_{11} + c_{22} > 0$$

Wir berechnen

$$.C_{33} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})^2 + (a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2.$$

Daraus folgt

(2) $$C_{33} > 0$$

wenn $\det(A) \neq 0$.
Da $\det(C) = \det(A)^2$,es folgt

(3) $$\det(C) > 0.$$

Aus (10), (2),(3) folgt Satz 3 [1].

Satz 4. Der imaginere Einheitskreis spielt Rolle einer Einheit.
Beweis.Die Matrix der Kurve

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

ist die Einheitsmatrix E .Da

$$A.E = E.A = A$$

folgt der Satz 4.

II. **Umkehrung von Kurve**. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

eine beliebige symmetrische regulaere Matrix.Die entsprechende Kurve zweiter Ordnung ist

$$a = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0 .$$

Es sei $A^{-1} = (A_{ij})$ die inverse Matrie von A.Da die inverse Matrix auch eine symmertrische Matrie ist, wir definieren: die Kurve

$$J(a) = A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33} + 2A_{12}xy + 2A_{13}x + 2A_{23}y = 0$$

nennen wir die **Inverse Kurve** von is a. Evidently we have

Satz 5. Das Produkt von jede nichtentartete Kurve und ihre inverse Kurve ist der Einheitsimaginerekreis.

Als eine Folgerung von den obigen Satzen haben ist zu formulieren:

Satz 6. Die Menge von allen nichtentarteten Kurven zweiter Ordnung ist eine kommutative und associative Gruppe.

Satz 7. Die Operation “Multiplikation von Kurven” kommutiert mit der Rotation des Koordinaten Systems.
Der Beweis ist in der CD Darstellung zu finden .
Ohne Beweis teilen wir mit, dass der Satz 7 ist falsch wenn man an der Stelle von Rotation beliebige Translation nimmt.

Literatur

1. G.Stanilov: *Analytische Geometrie*,SOFTEH,Sofia,1993.

Sabine STAUB, Landau

Analyse und Evaluation von Mathematikunterricht in der Grundschule beim Umgang mit Text- und Sachaufgaben – eine Videostudie

Bei diesem Projekt stehen Qualitätsanalysen zum Mathematikunterricht in der Grundschule im Zentrum.

Projektverbund und Design

Die Untersuchung ist im Teilprojekt ‚VERA – Mathematik' bei Prof. Dr. Renate Rasch im Rahmen der interdisziplinären Studie ‚VERA – Guter Unterricht' unter der Leitung von Prof. Dr. Andreas Helmke an der Universität Koblenz-Landau angesiedelt. Es handelt sich um eine ausführliche Videostudie, die auf die Ergebnisse der Leistungsuntersuchung VERA [1] 2005 aufbaut und mit über 150 Videos von insgesamt 71 Lehrkräften, sowie vielfältigen zusätzlichen Leistungs-, Fragebogen- und Interviewdaten arbeitet.

Zielsetzung

Im Fokus meiner Untersuchungen steht die Arbeit mit Text- und Sachaufgaben. Mein Ziel ist es, Komponenten des Lösungsprozesses und deren gegenseitige Beeinflussung zu ermitteln. Dazu untersuche ich, gestützt auf das Angebot-Nutzungs-Modell nach Helmke [2],

- das von der Lehrkraft ausgewählte und präsentierte Unterrichtsangebot, d.h. die eingesetzten Text- und Sachaufgaben, Qualitätskriterien des Unterrichts usw.,
- die Nutzung des Unterrichtsangebots in Form von Unterrichtsepisoden, die die gerade vorherrschende didaktische Funktion ausdrücken,
- die Wirkung von Unterricht durch die Erfassung von Lernzuwachs mit Vergleichsarbeiten, angelehnt an die Bildungsstandards.

Grundlage meiner Analyse sind 42 Unterrichtsaufnahmen, die jeweils eine Unterrichtsstunde einer rheinland-pfälzischen 4. Klasse zum Thema Text- und Sachaufgaben beinhalten.

Methoden und Instrumente

Die eingesetzten Aufgaben werden Analysen nach feststehenden Kategorien zu äußeren Merkmalen, ihrer Qualität, sowie Funktion und Wirkung unterzogen. Dabei führe ich zwei separate Analyseschritte durch:

- die Episodierung des Unterrichts in 3 Phasen,
- das fachdidaktische Rating der videografierten Unterrichtstunden.

Die Episoden beschreiben die aktuelle Nutzung der Unterrichtszeit und müssen mindestens eine Länge von 10 Sekunden aufweisen, um als eigene Phase aufgenommen zu werden.

Ich unterscheide folgende Phasen:

Die Einführungs- und Rezeptionsphase, bei der u.a. die Einstimmung und Hinführung zur Thematik der Aufgabe bzw. dem Aufgabentyp im Vordergrund steht. Diese Phase beinhaltet die Präsentation und Rezeption der Aufgabenstellung, evtl. Klärung von Verständnisproblemen bis hin zur Aktivierung von Vorwissen.

Die Planungs- und Bearbeitungsphase. Hierbei kommt es darauf an, das weitere Vorgehen zu planen und über Lösungsschritte zu sprechen. Außerdem interessiert die Sozialform, in der die selbstständige Lösungstätigkeit organisiert wird.

Die Präsentations- und Evaluationsphase widmet sich der Präsentation von Lösungswegen sowie deren Teil- und Endergebnissen. Hierunter fallen auch die Wertung und Einordnung verschiedener Lösungsstrategien und diverser Lösungswege sowie deren Ergebnisse.

Zudem existiert eine Restkategorie, die alle bisher noch nicht kodierte Unterrichtszeit aufnimmt. Diese kann sowohl negative als auch positive Inhalte betreffen, z.B. die Besprechung von Hausaufgaben, das Kopfrechentraining, Entspannungsübungen oder Organisatorisches.

Grundsätzlich steht die Lehrer-Schüler-Interaktion im Vordergrund, jedoch nicht die Handlungen einzelner Schüler. Gibt die Lehrkraft das Zeichen zur selbstständigen Aufgabenbearbeitung und wendet sich anschließend einem einzelnen Schüler zu, um mit diesem noch einmal gemeinsam die Aufgabenstellung durchzulesen, so wird dennoch ‚Planungs- und Bearbeitungsphase' kodiert, da dies die vom Lehrer intendierte Funktion dieses Zeitraums darstellt. Somit sollten keine Überschneidungen der einzelnen Phasen vorkommen.

Diese Phasen können immer wieder in einer Unterrichtsstunde auftreten und müssen nicht in der oben genannten Reihenfolge vorliegen. In dem im Folgenden dargestellten Stundenprofil nimmt die Einführungs- und Rezeptionsphase (hellgrau) nur 17% der Unterrichtsstunde ein. Im zweiten Teil der Unterrichtsstunde wechseln sich Planungs- und Bearbeitungsphase (dunkelgrau) und Präsentations- und Evaluationsphase (schwarz) ab.

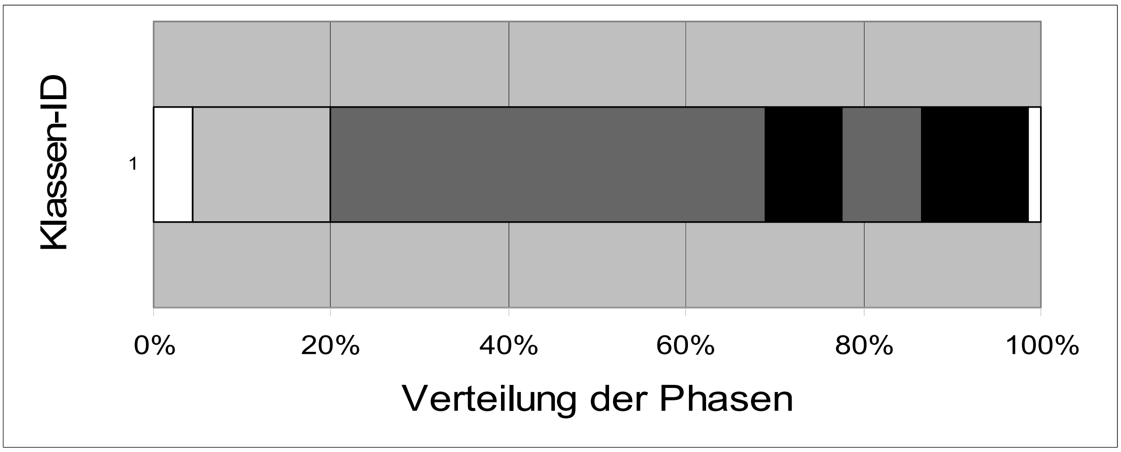


Abb. 1 Unterrichtsprofil zur Verteilung der didaktischen Phasen

Bei dieser Stunde wählte der Lehrer eine allgemeine thematische Einführung, an deren Ende die Aufgabenstellung den Schülern ausgeteilt und zur eigenständigen Bearbeitung in der Gruppe überlassen wurde. Nachdem die erste Gruppe ihre Arbeit erfolgreich abgeschlossen hatte, wurden die Ergebnisse aller verglichen und schließlich noch einmal Zeit für eine Überarbeitung bzw. Beschäftigung mit einer Knobelaufgabe gegeben, bevor diese von einer Gruppe (der einzigen, die zu einer Lösung gekommen war) kurz vorgestellt wurde.

Solch ein Unterrichtsprofil wird für jede Unterrichtsstunde erstellt und als Grundlage für die Erfassung der Prozessqualität des Unterrichts mit einem hochinferenten Rating nach fachdidaktischen Qualitätskriterien genutzt.

Das Rating ist in 6 Dimensionen gegliedert, die jeweils mit mehreren Unterpunkten und einigen Unterrichtsbeispielen ausgestaltet sind. Als Analyseeinheit wurden die 3 beschriebenen Unterrichtsepisoden gewählt – ohne die ‚sonstige'-Kategorie, die nach momentaner Anlage nicht weiter ausgewertet wird. Für eine Unterrichtsstunde liegt zu jeder Phase jeweils eine Einschätzung in jeder Dimension vor. Die Besonderheit dieses Ratinginstruments, die es von anderen unterscheidet, ist die separate Beurteilung der Häufigkeiten eines bestimmten Merkmals und anderseits dessen Qualitätseinschätzung. Ich glaube, dass diese Verknüpfung von Quantität und Qualität eine der Stärken dieser Videostudie darstellt.

Literatur

[1] Helmke, Andreas; Hosenfeld, Ingmar (2003): Vergleichsarbeiten (VERA): eine Standortbestimmung zur Sicherung schulischer Kompetenzen. In: SchulVerwaltung Hessen, Rheinland-Pfalz, Saarland; 1/2003, S. 10-13 und 2/2003, S. 41-43.

[2] Helmke, Andreas (2003): Unterrichtsqualität. Seelze: Kallmeyer.

Eleon ra STETTNER, Kaposv r

Using Microsoft Excel to solve and illustrate mathematical   roblems

Abstract

At the University of Kaposv r in BSc and BA education we introduced a new course for the first year students. This course has two objectives.

The first year students have significant differences in mathematics. My colleague Klingn   Tak cs Anna writes about this problem in his articel. We use Microsoft Excel to solve and illustrate mathematical problems in   alculus and Excel Solver in Optimization. I will write about why we use Excel and I would like to demonstrate how we harmonise the traditional education of the mathematics and the opportunities provided by the Excel.

hange in numbers of mathematics classes

Let's have a look how the number of periods have changed compared to the one before the introduction of the Bologna process. Now there is Finance and Agricultural rural development to offer for the students at Kaposv r University at the Faculty of Economic Science. I compare the number of mahs classes to the number of maths classes at 5 year long university courses with similar content. Before 2006 undergraduate students studied for 5 year at Business and management course and Agribusiness course. Subjects and number of subjects per week taught by Mathematics Departement it can be seen in the first two lines of my table. Since the beginning of Bologna process Finance and Agricultural rural development courses are run. The latter two can be seen in lines 3 and 4.

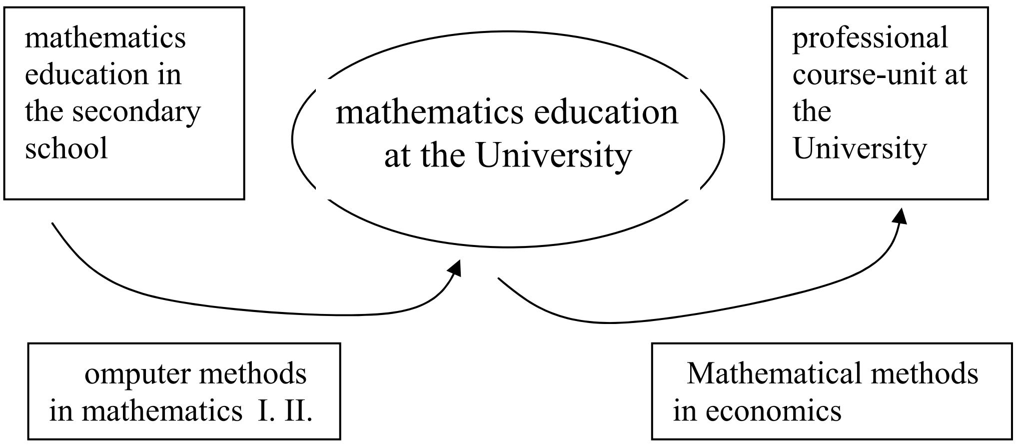
	1. semester	2. semester	3. semester	4. semester	Sum of numbers of lessons
Business and management 5 years university level programme	alculus (Analysis) Number of lessons: 3 4 Lecture practise	Probability and statistics Number of lessons: 3 3	Linear algebra Number of lessons: 3 2	Optimization Number of lessons: 2 2	22
Agribusiness 5 years university level programme	Mathematics Number of lessons: 2 2	Economic mathematics Number of lessons: 3 2	Introduction to the optimization Number of lessons: 2 2		13
Finance BA	alculus I. (Analysis) Number of lessons: 2 2	alculus II. (Probability) Number of lessons: 2 2	Optimization Number of lessons: 2 2		12
Agricultural rural development BSc	alculus Number of lessons: 2 2				4

Significant decline can be seen.

The ne o tional course-units
Along with the decline of numbers we can sense the following problems too.

- There is a big difference in the knowledge of incoming students.
- They can't use their acquired knowledge later while studying professional-unit.
- Their ability to use a computer appropriately is not enough (with some exceptions).

To overcome this difficulty we are beginning to develop some optional course-units that can be fitted in the direction of university to solve this temporary problem.
We offer omputer methods in Mathematics to fill in the gap existing between the secondary school and the university education.
We also offer Mathematical methods in economics to have a closer link between mathematics education at university and professional course-unit at the university.



Let's have a closer look at the aim of the above mentioned subjects.

omputer methods in mathematics I.
The aim of this training is to revise some units of the secundary education curriculum to ensure sufficient practise in it, to use Microsoft Excel, where it's possible in order to solve and illustrate maths problems.
The problems, in which we use the Excel:
alculation and draw of elements of the sequnces, draw functions graphs, geometrical illustration of Newton quotient, derivative

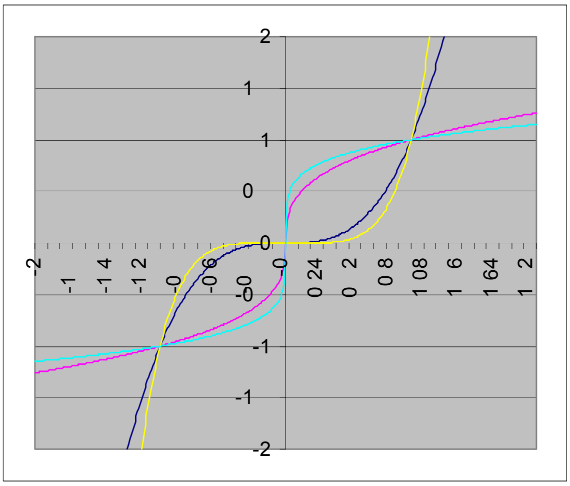
omputer methods in mathematics II.
The aim of teaching the subject to present computer methods wich help acquire alculus, Analysis, Optimization. It includes solving tasks by

Excel or LINV (home made program) during the course. It also includes comparing and analysing traditional mathematics and computer methods.
The problems, in which we use the Excel:
Linear approximation and approximation by Taylor series of the functions.
alculation of faktorial and binomial coefficient. Permutations with and without repetitions, combinations with and without repetitions
Modeling the random effects, frequency, relativ frequency. Probability distribution (discrete and continuous)
Matrix operations: multiplication, inverse. Determinant, solution to a system of linear equtions with computation inverse matrix and with ramer s rule
System of linear equtions, linear and nonlinear programming (LP, NLP) problems, transport optimization, sensitivity analysis

Mathematical methods in economics
The aim of teaching this subject is to apply previously learnt mathematical methods via economics tasks and to enlighten the close relation between mathematics and the professional course-units.
We find out how mathematics is related to the material covered in maths classes and when maths is used in professional course-units.
We realized that we have already covered the same thing under a difference name.

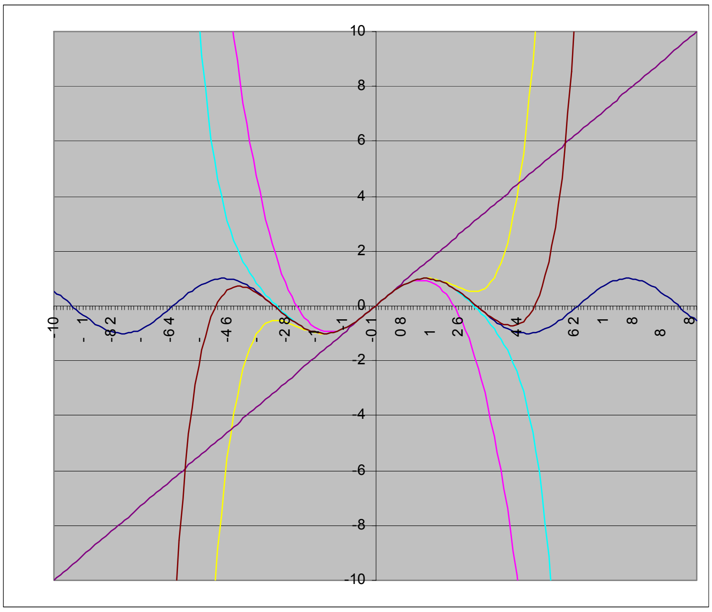
The system of the examining in the education in the mathematics
reshmen s cam re-test
The reasons are as follows: Most problems come from the fact that the students cannot apply their knowledge gaimed in secondary school in tasks not from the fact that the haven’t covered enough material on the first course. They acquired the necessary material in the secondary school, met the requirements however they are not able to apply the theory in new tasks. That’s why we make our students sit for a test based on secondary school material before the end of the first semester an especially pointed one on the pasts which university built mathematics on. In case one cannot get over 0% they are offered omputer methods in maths where they have the opportunity to re-learn material needed. The model of the examination and education structure run during the preparatory camp for freshmen. Having passed pre-test they can do their university course test. In case they failed the pre-test they are offered omputer methods in mathematics and do the pre-test again in order to get ready for the university course test.

Same exam les of the gra h re resentation of the function in Excel
The other aim of omputer methods in mathematics is to solve tasks in Excel and to illustrate certain phenomena.
Why do we use Excel
It is available for everybody. Even though a lot of excellent mathematical sofware exist students cannot access them having finished their studies at university. Theachers of professional units (finances ,economics) also use Excel.



Root and power functions. an be seen that these functions are inverse functions.

Power functions



Sin(x) and Taylor approximations, polynomials of degree 1, 3, 5, 7.

Rudolf STRÄSSER, Gießen

Das Mathematikbuch als Instrument des Lehrens

1 Definition und Bedeutung

Schulbücher für Mathematik kann man verstehen als “Bücher für den Mathematikunterricht …, die für die Hand des Schülers bestimmt und zur Darstellung und Einübung der vom Schüler zu erlernenden Inhalte und Fertigkeiten geschrieben sind” (Sträßer 1979, S. 265). Für die meisten Bundesländer gilt dabei, dass diese Bücher in der Regel (mindestens) für die Sekundarstufe I von den jeweilig zuständigen (Kultus- oder Schul-) Ministerien zugelassen werden. Diese veröffentlichen eine Liste der für den Unterricht zugelassenen Schulbücher – so sind etwa für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I in Hessen zugelassen: 2 Schulbuch-Serien für die Hauptschule, 5 Serien für Realschule, 5 Serien für das Gymnasium und 3 Serien für Integrierte Gesamtschule (IGS).

Zur Bedeutung der Schulbücher sei auf die immer noch gültige Feststellung von Howson (1995, S. 21) verwiesen, der in einem Schulbuchvergleich festhält: “But despite the obvious powers of the new technology it must be accepted that its role in the vast majority of the world’s classrooms pales into insignificance when compared with that of textbooks and other written materials”. Noch im Jahre 2002 erklärte ein Vertreter eines namhaften deutschen Schulbuch-Verlages auf einer Tagung zu Neuen Technologien für den Mathematikunterricht: „Das Schulbuch ist (weiterhin) das Leitmedium“. Mit der Betrachtung des Schulbuches wird also das zentrale Hilfsmittel für den Mathematik-Unterricht untersucht – neben der Mathematik.

Dieses Hilfsmittel wird nun wesentlich von zwei verschiedenen Personengruppen genutzt: den Schülern und den Lehrerinnen. In diesem Text geht es vor allem um das Schulbuch in der Hand der Lehrerin. Die Schulbuch-Nutzung durch die Schüler wird im Beitrag von Rezat (in diesem Band / dieser Tagung) untersucht.

2 Das Schulbuch „an sich“

Für das Folgende sei auf die Publikation von Rezat (2008) verwiesen, in der Details der Aussagen nachzulesen sind. Zunächst werden die verschiedenen Ebenen des Schulbuches unterschieden.

2.1 Makro- und Meso-Ebene

Auf einer „Makro“-Ebene lassen sich Jahrgangsbände (geschrieben für den Unterricht in einer Klassenstufe) oder Themenbände (geschrieben für ein bestimmtes Unterrichtsthema) unterscheiden. Heute finden sich unter den Büchern der Sekundarstufe I (fast) nur noch Jahrgangsbände. Die „Meso“-Ebene von Schulbüchern gliedert in der Regel die Bücher in Kapitel zu einzelnen Unterrichtsthemen. Außerdem finden sich nicht in allen Büchern Einführungsseiten, Zusammenfassungen, „vermischte Aufgaben“, Testklausuren, Begriffslisten und oft ein Sachverzeichnis.

2.2 Mikro-Ebene

Die „Mikro“-Ebene beschreibt den Aufbau einzelner Themen-Abschnitte, die oft nach Lerneinheiten (oder Unterrichtsstunden) gegliedert sind. Schaut man in ein nahezu beliebiges Sekundarstufe-I-Schulbuch für den Mathematikunterricht in Deutschland, so findet man in der Regel drei typische Inhaltsarten in den Schulbüchern:

- Einführungen (oft in der Form von Aufgaben),
- Darstellungen des Lerninhaltes
- Aufgaben.

Die Publikationen von Howson (1995) und Valverde (2002) zeigen, dass diese Textsorten auch international verbreitet sind. Insoweit unterscheiden sich deutsche Mathematikbücher nicht wesentlich von den Büchern in vielen anderen Ländern.

2.3 Inhaltsanalyse der Schulbücher

Alte Untersuchungen von in (West)Deutschland verbreiteten Schulbüchern (vgl. Sträßer 1979, S.268) geben Verteilung für beide Sekundarstufen an, dass etwa 40% der Buchseiten den Aufgaben gewidmet sind. Die Autoren verwenden viel Platz, viele Seiten für Aufgaben. Historische Studien zeigen im Übrigen, dass Schulbücher früher manchmal nur aus Aufgaben bestanden, jedenfalls sind auch heute noch Schulbücher auch, wenn nicht wesentlich Aufgabensammlungen. In einer Vergleichsstudie von Schulbüchern aus England, Frankreich und Deutschland wurde diese Beobachtung für Deutschland im Übrigen bestätigt (vgl. Pepin u.a.2001, S. 167f). Auch in anderen Ländern, mindestens aber in den England und Frankreich lassen sich auf diese Weise Schulbücher charakterisieren.

Bei der Durchsicht der Bücher gewinnt man außerdem den Eindruck, dass neuere Bücher die Darstellung der Inhalte verstärken. Der Textteil, in dem die Unterrichtsinhalte dargestellt werden, scheint an relativem Umfang (bezogen auf die gesamte Seitenzahl) zuzunehmen. Wenn auch keine empirisch-statistisch gesicherten Daten hierzu vorliegen, so schein doch die Schulbuchautoren mit der Verstärkung dieser Textsorte zu versuchen, Einfluss auf die Unterrichtsgestaltung zu nehmen. Die Schulbuch-Autoren versuchen wohl, ”Lehrer-sichere” Bücher zu schreiben, in denen die

Unterrichtsvorstellungen der Autoren deutlich werden, wenn sie nicht schon den Unterricht der Lehrerin vollständig bestimmen.

3 Lehrer-Nutzung des Schulbuches

Bisher gibt es nur wenige generelle empirisch gesicherte Aussagen darüber, wie Lehrerinnen das Schulbuch im Mathematikunterricht benutzen. Für die Sekundarstufe I könnte man allenfalls auf Selbstauskünfte in Hopf 1980 verweisen. In internationalen Untersuchungen (vgl. zum Beispiel für Schweden Johansson 2006/2007, dort weitere Belege vor allem aus dem amerikanischen Schulwesen) wird festgehalten, dass Lehrerinnen (auch in Schweden) die Bücher wesentlich für drei Zwecke verwenden:
- als Aufgabensammlung (hierzu dient die Textsorte Aufgaben)
- als Plan und Anregung für die Einzelstunden (hierzu werden die Einstiegsaufgaben, die Beispiel- und Musteraufgaben sowie die Zusammenfassungen der Schulbücher genutzt)
- als implizite oder explizite Curriculum-Definition (, weil die Lehrerin den Unterricht entlang der Inhaltsstruktur des Schulbuches plant).

Allerdings behaupten Pepin u.a. (2001, S. 164 ff) in ihrem Vergleich zwischen England, Frankreich und Deutschland, dass (nur) etwa die Hälfte der Lehrerinnen nach dem Buch unterrichtet. Nur wenige Lehrer folgen "Seite für Seite" dem Buch. Außerdem variiert die Art der Schulbuch-Nutzung deutlich nach Ländern. So vermeiden etwa die französischen Mathematik-Lehrerinnen geradezu, die in den Schulbüchern angebotenen Einführungen eines neuen Begriffes oder Verfahrens nach Art des eingeführten Schulbuches zu gestalten, sondern unterrichten diese Einführungsstunden mit anderen Inhalten.

Leider fehlen neuere, präzise und empirisch gesicherte Aussagen speziell für Deutschland. Für Schweden zeigt Johansson 2006/2007:
- Lehrer nutzen intensiv das Aufgabenmaterial.
- Lehrer folgen in der Regel den begrifflichen Vorgaben des Schulbuches (Definitionen, fachliche Struktur, Beispielmaterial, Aufgabenmaterial, …).
- Lehrer stellen sich eher selten explizit gegen die Autorität des Schulbuches.
- Das Schulbuch ist im Unterricht unterschiedlich einsetzbar und wird von Lehrern unterschiedlich genutzt.
- Das Schulbuch ist (mindestens in Schweden) von dem eingeführten Lehrplan verschieden, was wahrscheinlich darin begründet ist, dass Schweden kein Zulassungsverfahren für Schulbüchern hat.

Es wäre ein lohnendes Unternehmen, die Nutzungsweisen von Schulbüchern durch deutsche Mathematiklehrerinnen zu studieren und etwa

Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen schwedischen und deutschen Lehrerinnen zu belegen. So würde der Kenntnisstand zum Unterricht in deutschen Schulen erweitert. Auswirkungen auf die Gestaltung der ersten und zweiten Phase der Mathematik-Lehrerausbildung liegen nahe. Insbesondere könnte ein bewusster Umgang mit dem Schulbuch die Abhängigkeit von Lehrerinnen von den Schulbuch-Verlagen (wie auch den Lehrplan-Vorgaben) fördern.

Literatur

Hopf, D. (1980). *Mathematikunterricht: Eine empirische Untersuchung zur Didaktik und Unterrichtsmethode in der 7. Klasse des Gymnasiums*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Howson, G. (1995). *Mathematics Textbooks: A Comparative study of grade 8 texts*. Vancouver: Pacific Educational Press.

Johansson, M. (2006). *Teaching Mathematics with Textbooks. A Classroom and Curricular Perspective* (Dissertation). Luleå: Luleå University of Technology, Dept. of Mathematics.

Johansson, M. (2007). Mathematical meaning making and textbook task. *for the learning of mathematics, 27*(1), 45-45.

Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33*(5), 158 - 175.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et la technologie. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, Armand Colin.

Rezat, S. (2008). Zur Struktur von Mathematikschulbüchern. Erscheint in Heft 1/2008, *Journal für Mathematikdidaktik (JMD)*.

Sträßer, R. (1979). Schülerbücher. In D. Volk (Hrsg.), *Kritische Stichwörter Mathematikunterricht* (pp. 265-274). München: Fink.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the Book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht - Boston - London: Kluwer Academic.

Ibolya SZILÁGYINÉ SZINGER, EJF Baja

Die Entwicklung geometrischer Begriffe im Mathematikunterricht der Grundstufe - Das Quadrat und das Rechteck

Theoretische Erläuterungen

Zahlreiche Studien befassen sich mit dem Prozess des geometrischen Erkenntnisses, aber im Bezug auf das untersuchte Material folgen wir den Ansichten von P-H. van Hiele.

P-H. van Hiele hat den Prozess des geometrischen Erkennens in 5 Stufen gegliedert.

1. Stufe: Auf dieser Niveaustufe des globalen Erkennens der Formen betrachtet das Kind die geometrischen Objekte als Einheiten. Sie erkennen die Gestalten leicht an ihrer Form, lernen die Namen der Gestalten, aber sie fassen die Beziehung zwischen dem Objekt und seinen Anteilen nicht auf. Im Würfel erkennen sie den Quader nicht, im Quadrat können sie das Rechteck nicht entdecken, weil diese für sie ganz verschiedene Sachen sind.
2. Stufe: Auf der zweiten Niveaustufe der Gestaltsanalyse zerlegt das Kind die Gestalten in ihre Bestandteile und stellt sie wieder zusammen. Es erkennt die Flächen, die Kanten und die Ecken der geometrischen Körper. An den Seitenflächen der Körper erkennt es ebene Figuren, die von Kurven, Strecken und Punkten gegrenzt sind. Auf dieser Stufe spielt die Beobachtung, das Messen, Falten, Kleben, Zeichnen, Modellieren, Parkettlegen und die Verwendung des Spiegels eine wichtige Rolle. Durch diese konkreten Aktivitäten kann der Schüler die Eigenschaften von Objekten feststellen bzw. aufzählen (z.B. Parallelität und Rechtwinkeligkeit der Seiten, bzw. der Flächen, Symmetrie, etwas hat rechten Winkel usw.), aber er definiert nichts, kann die logische Verbindung zwischen den Eigenschaften nicht erkennen. Obwohl das Kind die gemeinsamen Merkmale des Quadrats und des Rechteckes erkennt, dürfen wir von ihm nicht erwarten, dass es auf die Schlussfolgerung kommt, dass das Quadrat ein Rechteck ist.
3. Auf der Niveaustufe 3 finden die Schüler Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften eines gegebenen Objekts und verschiedener Objekten .Die Möglichkeit des schlussfolgernden Denkens taucht auf, während sie aus einer Eigenschaft der Gestalt auf das andere folgern. Sie verstehen die Rolle der Definition. Der logische Folgerungsprozess wird aber von dem Lehrbuch bzw. dem Lehrer gesteuert. Ein Anspruch nach Beweisung wird herausentwickelt, aber es gilt nur für die Gestalten. Auf dieser Stufe wird das Quadrat schon als Rechteck betrachtet.

4. Die vierte Niveaustufe, d.h. die Bestrebung nach einem vollkommenen logischen Aufbau, bzw. Stufe 5, d.h. der Aufbau von Axiomensystemen werden schon in der Sekundarstufe und in der Hochschulbildung erzielt.

Jede Stufe des Van Hiele Modells erweitert und fördert die Denkungsweise, die in der früheren Stufe herausentwickelt wurde. Während des stufenweisen und kontinuierlichen Übergangs werden die entsprechenden mathematischen Begriffe gelernt. Dieser Prozess wird von dem Unterricht, von Unterrichtsmaterial und Unterrichtsmethoden eigenartig beeinflusst.

Die Forschungsfrage

Unsere Forschungsfrage ist, wie das Verhältnis unseres Geometrieunterrichts insbesondere die Darstellung der Begriffe vom Quadrat und Rechteck in der Grundschule zu den geometrischen Stufen des van Hiele Modells ist, weiterhin wie wirkungsvoll die konkreten handlungsorientierten Einsätze zur Bildung der Begriffe Quadrat und Rechteck beitragen.

Die Hypothese

In der Primarstufe (Klasse 1-4) sind im Geometrieunterricht die Niveaustufen 1 und 2 von van Hiele zu erreichen. Bis Ende der Primarstufe ist die dritte Stufe nicht zu erreichen. Es sind zwar Begriffsklassen vorhanden (z.B. Quadrat, Rechteck), aber es gibt keinen Zusammenhang zwischen ihnen. Die Schüler verstehen die Teilmengenrelation noch nicht.

Hintergrund der Forschung

Wir haben ein Unterrichtsexperiment in Mai und Juni 2006. durchgeführt. Das Lehrmaterial und die Bearbeitungsmethodik wurden von der Autorin geplant, und sie hat sich in den Unterricht aktiv eingeschaltet. Der Unterricht fand in der Klasse 4.c einer Grundschule in Baja statt, geleitet von einer Fachlehrerin. Während des Unterrichts haben wir die Veränderung von mehreren geometrischen Begriffen (Quadrat, Rechteck, Parallelität, Rechtwinkeligkeit, Symmetrie) untersucht, aber hier werden wir nur die Bildung der Begriffe von Quadrat und Rechteck darstellen.

Das Schulexperiment hat 16 Lehrstunden gedauert und hat den Unterricht anhand des van Hiele Modells verwirklicht. In der ersten Stunde ließen wir die 26 Schüler der 4. Klasse einen Pretest schreiben. Dadurch haben wir festgestellt, dass ein Übergang von der ersten Stufe auf die zweite Stufe, bzw. die Weiterbildung des geometrischen Denkens möglich sind.

Das Unterrichtsexperiment

Als wir das Lehrmaterial zusammengestellt haben, haben wir vor Augen gehalten, dass die Kinder die geometrischen Begriffe zuerst durch sinnliche Wahrnehmung, durch Spieltätigkeit und Manipulation mit Objekten, dann durch visuelle Wahrnehmung (Zeichnen) und zum Schluss auf abstrakte Weise, mit Hilfe der Muttersprache entdecken sollen.

Aufgaben zur Handlung mit Objekten:

a) Wie kann man am einfachsten aus einem Rechteck ein Quadrat ausschneiden?
b) Schneiden wir das Rechteck und das Quadrat entlang ihrer Diagonalen in zwei Dreiecken, und schaffen wir neue ebene Figuren daraus!
c) Schneiden wir mit je einem Schnitt verschiedene ebene Figuren aus einem Papierstreifen und benennen wir die Objekte!
d) Schneiden wir aus dem Papierstreifen Rechtecke mit gegebener Höhe und unterschiedlichen Längen!

Usw.

Aufgaben zur visuellen Tätigkeit:

a) Zeichnen von Quadraten und Rechtecken auf dem quadratischen Punktgitter.

b) Zeichnen von verschiedenen Vierecken auf dem quadratischen Punktgitter.

c) Zeichnen von verschiedenen Dreiecken auf dem quadratischen Punktgitter.

d) Zeichnen von parallelen und senkrechten Geradenpaaren auf dem quadratischen Punktgitter.

e) Bemalen der parallelen Seitenpaare von verschiedenen ebenen Figuren, die Markierung der rechten Winkel.

f) Zeichnen von Vierecken mit gegebenen Eigenschaften.

Usw.

Nachdem man in den ersten beiden (empirischen) Ebenen Erfahrungen gemacht hatte, fand die Zusammenfassung der Eigenschaften von geometrischen Objekten schon *auf der abstrakten Ebene der Muttersprache* statt. Ein beliebter Spiel der Kinder ist das Barkochba, das u.a. für die Übung und Einprägung von Eigenschaften ebener Figuren geeignet ist.

Die Aufgaben des Posttests und ihre Auswertung

Wir haben unser Experiment mit einem Test abgeschlossen. Der Testbogen wurde von 25 Schülern der Klasse 4.c ausgefüllt. In der Klasse 4.a haben noch 23 Schüler, und in der Klasse 4.b weitere 24 Schüler die Aufgaben gelöst.

In der Aufgabe bezüglich der Erkennung der Begriffe von Viereck, Rechteck und Quadrat sollte man von 15 ebenen Figuren

a) die Vierecke,
b) die Rechtecke,
c) die Quadrate aussortieren.

Die Erkennung von Vierecken war in der Experimentalklasse fehlerlos. 52% der Schüler hat zwar die Quadrate nicht zu den Rechtecken eingeordnet, aber sie hatten keine anderen Fehler gemacht. Im Vergleich zu den 20% des Pretests ist die Entwicklung erheblich. 90% der Kinder betrachtet das Quadrat immer noch nicht als Rechteck. Diese Proportionen finden wir auch in den Kontrollgruppen. Diese Daten unterstützen unsere Hypothese, dass man bis Ende der Primarstufe auf die dritte Niveaustufe vom van Hiele Modell nicht übertreten kann, nur die zwei ersten Stufen sind real erreichbar.

Schlussfolgerung

Wir denken, dass der von der Autorin gesteuerte Unterricht zur Vertiefung der Begriffe Rechteck und Quadrat wirkungsvoll beigetragen hat. Es wurde auch vom Vergleich der Ergebnisse des Pretests und des Posttests unterstützt. Die Wirksamkeit wurde auch dadurch bewiesen, dass im Vergleich zu den zwei Parallelklassen die Ergebnisse in der Experimentalklasse gelegentlich wesentlich besser waren. Unsere Behauptungen galten nur für die beobachteten - nicht repräsentativen - Stichproben, deshalb haben wir sie statistisch nicht geprüft.

Auf die Frage, ob das Quadrat für die Schüler der 4. Klasse zugleich ein Rechteck ist, können wir aufgrund des Experiments folgendes antworten: für die meisten Schüler ist das Quadrat kein Rechteck, denn sie können höchstens die Niveaustufe 2 von van Hiele erreichen.

Überschrift Literatur

Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába. Budapest, 1995, ELTE Eötvös Kiadó.

Falus Iván (szerk.): Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe. Budapest, 2000, Műszaki Könyvkiadó.

Peller József: A matematikai ismeretszerzési folyamatról. Budapest, 2003, ELTE Eötvös Kiadó.

Peller József: A matematikai ismeretszerzés gyökerei. Budapest, 2003, ELTE Eötvös Kiadó.

Piskalo, A. M.: Geometria az 1-4. osztályban. Budapest, 1977, Tankönyvkiadó.

Pólya György: A gondolkodás iskolája How to solve it, Budapest, 2000, Akkord Kiadó.

Skemp, Richard R.: A matematikatanulás pszichológiája The Psychology of Learning Mathematics. Budapest, 1975, Gondolat Kiadó.

Teppo, Anne: Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited. Mathematics teacher, March 1991.

Kinga SZŰCS, Budapest

Vergleichende Analyse der kognitiven Leistung von mutter- bzw. fremdsprachig unterrichteten Kursgruppen im Bereich der Analysis

1. Problemstellung, Zielsetzung

In einer früheren Arbeit[1] ist es schon darauf hingewiesen worden, dass es eine allgemeine Didaktik hinsichtlich des bilingualen Fachunterrichts sowie die Grundlagen einer fremdsprachlichen/ zweisprachigen Mathematikdidaktik fehlen, obwohl die Erweiterung der Europäischen Union, das wirtschaftliche, kulturelle und wissenschaftliche Zusammenwachsen Europas immer stärker die Verbreitung der bilingualen Bildungsformen fördert**.** Weiterhin fehlen Untersuchungen des fremdsprachlichen Mathematikunterrichts hinsichtlich seiner Effektivität, und der fremdsprachlichen, fachlichen, sozialen bzw. kognitiven Zugewinne/ Defizite im Vergleich mit dem herkömmlichen, d.h. in der Mutterspache durchgeführten Unterricht, unter spezieller Berücksichtigung weiterer Aspekte, wie Altersspezifika, verschiedene methodische Konzepte, individuelle und sprachbezogene Unterschiede. Um einen von den genannten Bereichen empirisch zu überprüfen, wurde u.a. eine Fallstudie an der Budapester Wirtschaftshochschule im Jahre 2004 durchgeführt, in deren Mittelpunkt die Frage steht, ob es deutliche Unterschiede in der kognitiven Leistung zwischen Kursgruppen gibt, denen Mathematikunterricht in der Fremdsprache bzw. in der Muttersprache erteilt wurde.

2. Modellbildung

a.) Theoretisches Modell

Bei der Untersuchung wurden kognitionspsychologische und fachliche Aspekte der kognitiven Leistung integriert behandelt. Anhand der Lernzieltaxonomien von Bloom, Wilson, Winter und Gagné[2], die den kognitiven Aspekt der mathematischen Leistung in mehr oder weniger differenzierten fachlichen Kategorien erfassen und diese hierarchisch ordnen, ist ein Modell mit zwei allgemeinen, aber über- bzw. untergeordneten Ebenen erstellt worden, welches sich für die weitere Arbeit als besonders geeignet erwiesen hat. Das Modell ist Folgendes:

Ebene der kognitiven Strategien	Ebene der Kenntnisse und der intellektuellen Fähigkeiten
argumentieren	Kenntnisse

[1] Szűcs, 2006
[2] Vgl. Wittmann, 1976

sich kreativ verhalten mathematisieren	Erfassen Anwendung Analyse Synthese Bewertung

Diese Dimension wurde durch eine kognitionspsychologische, nämlich durch die Theorie des konzeptualen/begrifflichen vs. prozeduralen Wissens ergänzt, die im Weiteren kurz dargestellt wird. Mit den Worten von Haapasalo (Haapasalo, 2003) können diese beiden Kategorien wie folgt charakterisiert werden:

„Prozedurales Wissen (P) bedeutet Wissen über dynamische und erfolgreiche Anwendung gewisser Regeln, Algorithmen oder Prozeduren mit Hilfe einer oder mehreren Repräsentationen."
„Begriffliches Wissen (C) bedeutet Wissen über Elemente eines Netzwerkes sowie dessen Zusammenhänge und ein entsprechendes Verständnis hierüber, sowie Wissen über dynamisches Wechseln zwischen verschiedenen Repräsentationen dieser Objekte."

Es soll hinzugefügt werden, dass hinter dem prozeduralen Wissen oft unbewusste, automatische Handlungen stehen, während das konzeptuale Wissen bewusste Handlungen voraussetzt und stark mit Metakognition verbunden ist. In Anbetracht dieser Ergebnisse und einiger intuitiven Eindrücke im Unterricht lässt sich die Hypothese formulieren, dass Studenten in der deutsch (d.h.fremd-) sprachigen Ausbildung geringere konzeptuale Leistung aufweisen, als Studenten in der ungarisch- (d.h.mutter-) sprachigen Ausbildung.

b.) Praktisches Modell

Die Aufgaben der Untersuchung hingen stark mit dem vorangehenden Unterricht zusammen: Nach der ausführlichen Behandlung der Folgen, insbesondere ihrer Monotonie- und Grenzwerteigenschaften, bzw. ihrer Beschränktheit wurden den Studenten drei Aufgaben gestellt. Die erste Aufgabe stellt eine routinierte Berechnungsaufgabe, also eine typische prozedurale Aufgabe dar, während die beiden weiteren in unterschiedlicher Form nach Zusammenhängen zwischen den genannten Eigenschaften fragen und dementsprechend zur Messung der konzeptualen Leistung dienten.[3]

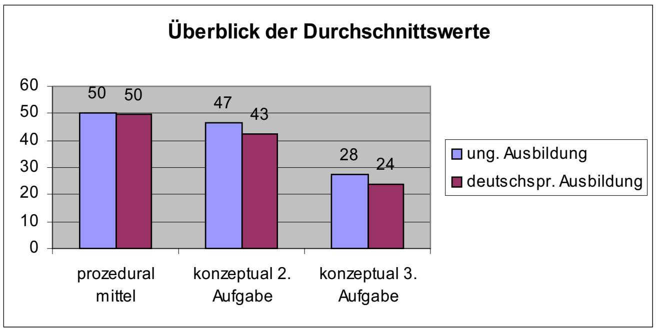
---

[3] 1. Untersuchen Sie die Folge $a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$ auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz! Geben Sie die Schwellenzahl n_0 zum Fehler $\varepsilon = 10^{-3}$ an, und interpretieren Sie das Ergebnis!
2. Geben Sie je ein Beispiel für Folgen mit folgenden Eigenschaften an: (Auswahl) konvergiert gegen 3, konvergiert gegen e, die Folge ist nicht monoton und konvergiert gegen 0, die Folge ist nicht monoton und divergent

Die Teilnehmer der Fallstudie sind 56 ungarische Studenten der deutschsprachiger Ausbildung der Budapester Wirtschaftshochschule gewesen, die Mathematik bis zum Abitur in ihrer Muttersprache gelernt haben, und zur Zulassung zum deutschsprachigen Studium ihre Deutschkenntnisse nachgewiesen haben. Die Kontrollgruppe bestand aus 68 ungarischen Studenten der gleichen Hochschule (gleicher Jahrgang, gleiche Fakultät und Studienfächer), die das Studium in ihrer Muttersprache führten.

3. Ergebnisse

Bei der Auswertung wurden die anhand des Unterrichts in Frage kommenden Lösungen mit Hilfe des oben skizzierten Taxonomie-Modells in einzelne kognitive Schritte zerlegt worden. Bei jedem Student ist das einwandfreie bzw. fehlerhafte Vorhandensein dieser Schritte überprüft und die Ergebnisse je nach Aufgabe in Tabellen zusammengefasst worden. Abhängig davon, aus wie vielen Schritten die vom Einzelnen gewählte Lösung zu Ende zu führen war, sind jedem Teilnehmer bei jeder Aufgabe prozentuale Werte zugeordnet worden. Die Mittelwerte zeigt folgende Abbildung:



Diese Mittelwerte deuten zwar auf eventuelle Defizite in der konzeptualen Leistung der fremdsprachig unterrichteten Gruppe hin, der Unterschied zwischen den beiden Gruppen ist jedoch nicht markant. Eine detailierte Analyse der Ergebnisse zeigte dahingegen, dass in der fremdsprachlichen Gruppe im konzeptualen Bereich die niedrigen Punktezahlen dominierten, während in der muttersprachig unterrichteten Gruppe eine Tendenz zur höheren konzeptualen Leistung nachweisbar war. Die Hypothese ist nicht widerlegt worden.

4. Schlußfolgerungen

Mit diesem Beitrag wurde beabsichtigt, die Aufmerksamkeit auf fehlende vergleichende Analysen hinsichtlich des bilingualen Mathematikunterrichts insbesondere im kognitiven Bereich zu lenken. Eine erste Auswertung der

3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Widerlegen Sie die falschen Aussagen jeweils durch ein Gegenbeispiel. (Auswahl): Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt. Jede nicht beschränkte Folge ist divergent. Jede divergente Folge ist nicht beschränkt. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

durchgeführten Fallstudie lässt auf einige Defizite im konzeptualen Wissen der fremdsprachig unterrichteten Studenten hindeuten. Weiterhin, das ermittelte theoretische Modell trägt hohes Potenzial in sich: Mit seiner Hilfe wird ermöglicht, fachliche und psychologische Aspekte der kognitiven Leistung gleichzeitig zu erfassen, sowohl bei Einzelnen als auch in der gesamten Gruppe. Das Modell bietet die Möglichkeit, Tendenzen, bevorzugte Lösungsstrategien und Problemstellen nicht nur auf einer konkreten fachlichen, sondern parallel dazu auf einer kognitiven Ebene zu erkennen. Durch eine weitere zweidimensionale Auswertung können Zusammenhänge zwischen der konzeptualen und der prozeduralen Leistung festgestellt werden, was sich einerseits für die Gestaltung des bilingualen Mathematikunterichts andererseits für die kognitionspsychologischen Diskussionen als relevant erweisen könnte.

Literatur

1. **Haapasalo, Lenni** (2003): Von der Katastrophe zum Erfolg mit den Brüchen – Ein möglicher Weg zur Lösung von Problemen der Bruchrechnung. In: Der Mathematikunterricht (49), 58-69
2. **Haapasalo, Lenni&Kadijevich, Djordje** (2000): Two Types of Mathematical Knowledge and their Relation. In: JMD (21), 139-157
3. **Herber, Hans, Jörg&Vásárhelyi, Éva** (2005): Empirikus kutatás a társadalomtudományokban és annak „hiteles" dokumentációja. Példa: a pozitív és negatív érzelmek hatása. In: Sammelband der III. hochländischen mathematikdidaktischen PhD-Konferenz. Révkomárom
4. **Szűcs, Kinga** (2006): Untersuchung der Reichweite der allgemeinen fremdsprachlichen Lesekompetenz in mathematischer Lernumgebung – Eine Fallstudie an der Budapester Wirtschaftshochschule. In: Beträge zum Mathematikunterricht. Osnabrück. 517-520
5. **Wittmann, Erich** (1976): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg, Braunschweig

Oliver THIEL, Berlin

Was denken Erzieherinnen über Mathematik?

Für die vorschulische Bildung gibt es verschiedene institutionelle Rahmen mit unterschiedlichen pädagogischen Ansätzen. Wichtigste Einrichtungen sind der Kindergarten (in der Regel in einer Kindertagesstätte) und die Vorklasse oder der Schulkindergarten (in der Regel an einer Grundschule).

In der Vorklasse hat neben dem Spiel die Vorbereitung auf das schulische Lernen einen hohen Stellenwert. Es wird mit den Kindern lehrgangsmäßig u.a. an der Entwicklung mathematischer Vorläuferfähigkeiten gearbeitet (z. B. Relationsbegriffe, Ziffernschreiben, Zählen, Mengenerfassung). Die Kinder arbeiten in einer altershomogenen Gruppe gemeinsam an denselben Themen. Geleitet wird die Vorklasse teils von Grundschullehrkräften, teils von speziell fortgebildeten Erzieherinnen.

Im Kindergarten herrscht meist situationsorientiertes Lernen vor. Die Initiative geht vom Kind aus. Es gibt einen hohen Anteil von Freispiel und wenig direkte Instruktionen. Die Kinder sind in altersheterogenen Gruppen zusammengefasst (z. B. Drei- bis Sechsjährige). Kindergartengruppen werden von Erzieherinnen und Erziehern geleitet, die in der Regel eine Fachschulausbildung haben, in der Mathematik so gut wie gar nicht vorkommt.

Welcher Ansatz der bessere ist, ist bislang noch umstritten. Möchte man den Einfluss der vorschulischen Bildung auf die individuelle Entwicklung der Kinder beschreiben, steht ein allgemeines Modell aus der Qualitätsforschung zur Verfügung (Roßbach 1993). Das Modell unterscheidet drei Ebenen: (1) Auf der Inputebene werden die Strukturqualität und die Orientierungsqualität betrachtet. Zur Strukturqualität gehören z.B. die formale Qualifikation der Erzieherinnen, die Größe der Einrichtung und der Gruppen, die Raumgröße und Ausstattung, die Öffnungszeiten und die Altersmischung in den Gruppen. Diese veränderbaren Rahmenbedingungen sind zum Teil politisch geplant, zum Teil von der Einrichtung gesetzt. Zur Orientierungsqualität gehören die Haltungen und Schemata der Erzieherinnen. (2) Auf der Aneignungsebene wird die Qualität der Interaktionen der Kinder mit Gleichaltrigen und Erzieherinnen analysiert. Dazu gehören die tagtäglichen Situationen im Kindergarten, wie z. B. die angebotenen Aktivitäten und die Erfahrungen der Kinder, der tatsächliche Tagesverlauf, das angewandte Curriculum und das Eingehen auf die individuell unterschiedlichen Bedürfnisse von Kindern. (3) Auf der Outputebene wird die Ergebnisqualität (in unserem Fall also die Veränderungen beim mathematischen Entwicklungsstand der Kinder) erfasst.

Eine zentrale Untersuchungsfrage des Forschungsprojekts *MaBiK* (Mathematische Bildung im Kindergarten) lautet: Welche strukturellen, einstellungsbezogenen und prozessualen Rahmenbedingungen der mathematischen Bildung im Kindergarten wirken sich besonders positiv auf die Entwicklung des mathematischen Denkens der Kinder aus? Dazu werden z. Z. ca. 350 Kinder aus Berlin, die einen Kindergarten im letzten Jahr vor ihrer Einschulung besuchen (Geburtsjahrgang 2002), längsschnittlich begleitet. Messzeitpunkte für den Entwicklungsstand der Kinder sind Juli 2007, November 2007 und Mai 2008. Eingesetzt wurde ein von Ricken und Fritz (2007) entwickeltes Interview. Parallel wurden im November 2007 ca. 60 Erzieherinnen schriftlich zur Struktur- und Orientierungsqualität befragt. Z. Z. finden Beobachtungen der Prozessqualität der Bildungsarbeit im Kindergarten statt.

Da dieses Forschungsprojekt noch nicht abgeschlossen ist, können zum jetzigen Zeitpunkt nur erste Aussagen gemacht werden. Ich beschränke mich auf die Frage: Welche Einstellungen haben Erzieherinnen zur Mathematik?

Ergebnisse

Berichtet werden Ergebnisse einer Stichprobe von 53 Erzieherinnen und einem männlichem Erzieher[1] aus 29 Kindertagesstätten. Über die Hälfte (56 %) der Erzieherinnen ist um die 40 Jahre alt. 17 % sind älter als 45 und 27 % sind jünger als 36.

Bei einer Frage ging es um die grundsätzliche Haltung der Erzieherinnen gegenüber der Mathematik. Fünf positive und fünf negative Aussagen, die verschiedene Personen über die Mathematik gemacht haben, sollten auf einer vierstufigen Skala[2] bewertet werden. Die Erzieherinnen stimmten signifikant häufiger den positiven Aussagen zu. Betrachtet man die einzelnen Aussagen, erhält man jedoch ein differenzierteres Bild: Auf der einen Seite, erhielt die Aussage „Eine mathematische Aufgabe kann manchmal genauso unterhaltsam sein wie ein Kreuzworträtsel" (George Polya) die höchste Zustimmung. 84 % stimmten dieser Aussage voll und ganz oder zum Teil zu. Einer ähnlichen Aussage[3] stimmten aber 69 % eher nicht oder gar nicht zu. Die zweithöchste Zustimmung erhielt mit 63 % die positive Aussage „Es ist unmöglich, die Schönheiten der Natur angemessen zu vermitteln, wenn jemand die Mathematik nicht versteht." (Richard Feynman). 52 % der Erzieherinnen meinen aber auch, dass die Furcht vor der Mathematik der Angst erheblich näher steht als der Ehrfurcht (Felix Auerbach).

1 Ich spreche im Folgenden von Erzieherinnen, meine aber den einen Mann mit.

2 Dieser Aussage stimme ich voll und ganz (3), zum Teil (2), eher nicht (1) oder gar nicht (0) zu.

3 „Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis" (Jean-Baptist le Rond d'Alembert)

Außerdem wurden den Erzieherinnen 20 Aussagen[4] zu ihrem Bild von Mathematik vorgelegt, die vier Aspekte umfassen: den Anwendungs-Aspekt (Welchen Nutzen oder Anwendungsbezug hat die Mathematik?), den Formalismus-Aspekt (Welcher Grad an Exaktheit besteht in der Mathematik?), den Schema-Aspekt (Welche Rolle spielen Regeln und Schemata in der Mathematik?) und den Prozess-Aspekt (In welchem Ausmaß müssen Prozesse des Verstehens und Entwickelns in die Mathematik eingebracht werden?). Hier betonen alle Erzieherinnen die Nützlichkeit der Mathematik für die Gesellschaft, den Beruf und das tägliche Leben. Die Mittelwerte der drei anderen Skalen unterscheiden sich nicht signifikant.

Interessant ist, dass sich zwei etwa gleich starke Gruppen von Erzieherinnen unterscheiden lassen: 28 Erzieherinnen betonen den Anwendungs-Aspekt stark (MW = 2,36[5]), den Schema- (1,73) und Formalismus-Aspekt (1,69) hingegen nur wenig. Die anderen 26 Erzieherinnen betonen den Anwendungs- (2,68), Schema- (2,64) und Formalismus-Aspekt (2,49) etwa gleich. Beim Prozess-Aspekt (2,01) unterscheiden sich die Gruppen nicht.

Bei einer weiteren Frage ging es um die mathematischen Inhaltsbereiche, die nach Meinung der Erzieherinnen im Kindergartenalltag von Bedeutung sind. 48 Handlungen[6] von Kindern sollten von den Erzieherinnen auf einer fünfstufigen Skala[7] eingeschätzt werden. *Typisch* mathematische Tätigkeiten stammen aus den Erfahrungsbereichen *Zahl und Struktur* (Bsp.: „Das Kind sagt, wie viel es hat, wenn du noch 2 bekommt.“), *Zahl und Zählen* („Das Kind zählt Gegenstände ab.“) und *Form* („Das Kind erkennt Formen (z.B. Viereck, Kreis, Dreieck).“). *Sehr viel* mit Mathematik zu tun haben Tätigkeiten aus den Erfahrungsbereichen *Größen (Länge und Masse)* („Das Kind ordnet Dinge nach dem Gewicht.“), *Raum* („Das Kind modelliert Körperformen (z.B. Würfel, Kugel, Pyramide) aus Knete.“), *Geld* („Das Kind erkennt einige Münzen und Geldscheine.“) und *Daten und Zufall* („Das Kind sagt: ‚Du hast gewonnen, weil du bessere Zahlen gewürfelt hast.‘“). *Etwas* mit Mathematik zu tun haben Tätigkeiten aus den verbleibenden Bereichen *Zeit* („Das Kind nennt die Wochentage in ihrer Reihenfolge.“) sowie mathematisches *Handeln* („Das Kind spielt mit Wasser und Sand.“) und *Denken* („Das Kind verabredet mit anderen gemeinsame Spielregeln.“). Zu dem letzten Bereich gehören die Tätigkeiten: „Das Kind begründet seine Meinung.“ und „Das Kind diskutiert mit anderen über Sach-

4 Die Skalen stammen aus einem Fragebogen von Grigutsch, Raatz und Törner (1998).

5 Auf einer vierstufigen Skala: Die Aussage trifft voll und ganz (3), eher (2), eher nicht (1) oder überhaupt nicht (0) zu.

6 In Anlehnung an Steinweg (2006).

7 Die beschriebene Tätigkeit ist eine typisch mathematische Tätigkeit (4), hat sehr viel (3), hat etwas (2), hat wenig (1) oder hat gar nichts (0) mit Mathematik zu tun.

verhalte.“ Ein Drittel der Erzieherinnen meint, dass diese gar nichts mit Mathematik zu tun haben.

Erfahrungsbereich	alle (N = 54)	Gr. 1 (N = 30)	Gr. 2 (N = 24)
Zahl und Struktur	3,66	3,80	3,49
Zahl und Zählen	3,60	3,81	3,34
Form	3,53	3,80	3,20
Größen (Länge und Masse)	3,21	3,48	2,87
Raum	3,20	3,51	2,81
Geld	2,81	3,26	2,25
Daten und Zufall	2,59	3,08	1,99
Zeit	2,19	2,75	1,49
mathematisches Handeln	1,80	2,36	1,11
mathematisches Denken	1,76	2,43	0,94

Die Mittelwerte[8] für die einzelnen Bereiche finden Sie in der Tabelle. Es lassen sich wieder zwei Gruppen von Erzieherinnen trennen. 30 Erzieherinnen haben in allen Bereichen höhere Werte. Die anderen 24 Erzieherinnen haben sehr viel größere Unterschiede zwischen den Bereichen (s. Tabelle).

Ausblick

Bei den Erzieherinnen ließen sich unterschiedliche Haltungen identifizieren – sowohl im Bezug auf das Bild, das Erzieherinnen von der Mathematik haben als auch bezüglich mathematischer Inhalte. Das Forschungsprojekt *MaBiK* soll u.a. zeigen, ob diese Unterschiede für die Entwicklung des mathematischen Denkens von Kindern im Vorschulalter von Bedeutung sind.

Literatur

[1] Grigutsch, S. / Raatz, U. / Törner, G. (1998): Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. Journal für Mathematik-Didaktik, 19 (1), S. 3-45.

[2] Ricken, G. / Fritz, A. (2007): Ein entwicklungspsychologisches Modell für die Diagnostik und Förderung mathematischer Kompetenzen im Vorschul- und frühen Grundschulalter. Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim, Berlin, S. 441-444.

[3] Roßbach, H. G. (1993): Analyse von Meßinstrumenten zur Erfassung von Qualitätsmerkmalen frühkindlicher Betreuungs- und Erziehungsumwelten. Institut für sozialwissenschaftliche Forschung, Münster.

[4] Steinweg, A. S. (2006): Lerndokumentation Mathematik. Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung, Berlin.

8 Durchgezogene Linien kennzeichnen signifikante Mittelwertunterschiede ($p < 0,01$).

Marie TICHÁ, Praha

Wir lernen die Missverständnisse und Fehlvorstellungen der Studenten zu beheben

Einleitende Anmerkungen

Mathematik wird zum Bestandteil vieler Lebensbereiche. Deswegen wächst der Wert der Erreichung der mathematischen Kultur. Dies stellt hohe Ansprüche an die Lehrer. Deshalb versuchen wir die Wege, wie die professionelle Kompetenzen der Lehrer zu kultivieren. In der bisherigen Forschung haben wir gezeigt, dass eine bedeutende Rolle der fachdidaktischen Kompetenz, also der Kenntnis des Inhaltes und des didaktischen Zugriffes zum Inhalt und der Geltendmachung dieser Kenntnisse in der Schulpraxis zugemessen wird (Tichá, Hošpesová, 2006).

Über eine Episode aus dem Unterricht

Die Notwendigkeit der hochrangigen fachdidaktischen Kompetenz manifestierte sich deutlich in Experimenten die innerhalb des Milieus der Brüche durchgeführt waren. Zum Beispiel die Lehrerin schlug ein Experiment vor: „Ich verteile an jeden Schüler einen Papierstreifen, der in vier gleich grosse Teile geteilt wird. Dann frage ich, was die Schüler sehen. Ich werde feststellen, ob beim allmählichen Papierfalten die Schüler über Brüche sprechen anfangen. Und auch ob die Schüler denselben Teil bezeichnen, z. B. eine Hälfte und zwei Viertel, vier Achtel“ (näher in Hošpesová, Tichá, 2005). Die Lehrerin stellte den Schülern Fragen, die man auf verschiedene Weise beantworten konnte, sie aber selbst akzeptierte nur einige und lehnte Antworten, die Möglichkeiten weiterer Überlegungen und einer tieferer Einsicht in die Situation boten, ab. Sie war nicht fähig an die Antworten der Schüler zu reagieren, die Vorschläge die darin beinhaltet waren auszunützen und die Schüler zum Fazit, zu Begründung/Argumentation zu leiten. Das Thema des Experiments selbst ist sehr stimulierend, deswegen wird mit diesem Thema in Seminaren gearbeitet. Die Studenten der Fachrichtung Grundschullehrer erfahren, dass wenn die Kenntnisse des Lehrers nicht ausreichend gründlich sind, kann man das Potential der Vorlage nicht auslasten.

„Die Kraft“ der Aufgabenbildung

Die Notwendigkeit der Entwicklung der Fähigkeit die Aufgaben zu bilden heben viele Didaktiker hervor, z.B. als Attribut „der konstruktivischen Sicht“, einige andere sprechen über die nötigen Routinefähigkeit (z. B. English, 1997; Silver, Cai, 1996). Oft wird dabei die Charakteristik des Prozesses „der Aufgabenbildung (problem posing)“ von Silver als (a) Bildung der neuen Fragen und Aufgaben (welche aus bestimmten „mathematischen“ oder „nichtmathematischen“ Situation entstehen; auch Koman, Tichá, 1998) oder als (b) Umformulierung einer gewissen Aufgabe, zum Beispiel durch Frage „Und wenn (nicht)?“, durch die „Freisetzung der Parameter“ usw. zitiert.

Die Bildung der Aufgaben wird als eine wichtige Tätigkeit aller vorgestellt. Das Lernen durch Bildung der Aufgaben ist sehr bereichernd. Das Ergebnis dieses Verfahrens ist eine Verbesserung der Fähigkeit die Aufgaben lösen zu können, Entfaltung des schöpferischen und flexiblen Denkens, Verbesserung der Beziehung zur Mathematik und auch das größere Vertrauen in eigene Fähigkeiten. Die Bildung der Aufgaben ist einerseits als Ziel aufgefasst, andrerseits als ein Mittel der mathematischen Bildung. Ähnlich kann man sagen, dass die Fähigkeit, die Fragen zu formulieren und die Aufgaben zu bilden, ein wichtiger Bestandteil der fachdidaktischen Kompetenz des Lehrers ist. Gleichzeitig ist es auch möglich, die Bildung der Aufgaben als ein Weg der Steigerung der professionellen Kompetenz des Lehrers aufzufassen.

Es wird sichtbar, dass die Bildung der Aufgaben ein sehr gutes diagnostisches und reedukatives Mittel darstellt. Die Analyse der gebildeten Aufgaben ist ein Weg zur der Feststellung des Niveaus des Verständnisses diesen Aufgaben und gleichzeitig auch eine Weise der Entdeckung der eventuellen Misskonzeptionen und falschen Erwägungen bei jedem Respondent (Silver, Cai, 1996; Tichá, 2003; Prediger 2006).

Studenten bilden und bewerten die Aufgaben

Mehrere Jahre nacheinander haben wir den Schülern (die Altersgruppe 9-14 Jahre) folgende Aufgabe gegeben*: Bilde eine Sachaufgabe so, dass zu deren Lösung man nur 1/4 + 2/3 (oder 3/4•20, oder 1/4•2/3 usw.) errechnen muss*. Diese Aufgabe haben wir später den Studenten der Mittelschulen und Universitäten gegeben. Selbe Misskonzeptionen, die wir bei den Schülern der fünften Klasse gefunden haben, auch in den Arbeiten der älteren Schüler und Studenten auftauchen, sogar auch bei den Studenten der Universitäten.

Eine Enttäuschung stellten für uns die Aufgaben zum Errechnen *3/4•20* da. Vor allem überraschten und verwarnten uns Probleme, die Studenten (und manchmal auch Grundschullehrer) mit dieser Aufgabe hatten und ihre Verlegenheit und Ratlosigkeit. Wir haben gedacht, dass sie sich leicht mit dieser Aufgabe abfinden. Es war ein Irrtum.

Noch schwierigere war die Bildung der Aufgabe zur Multiplikation zweier Brüche. Zur Errechnung *1/4•2/3* hatte eine Studentin drei Aufgaben gebildet:

1. *Auf dem Tisch lagen 2/3 Kuchen. Dušan hat 1/4 von den 2/3 des Kuchens gegessen. Wieviel Kuchen blieb es übrig?*
2. *Auf dem Tisch lagen 2/3 kg Mandarinen. Veronika hat 1/4 kg gegessen. Wieviel Mandarinen (kg) blieben übrig?*
3. *Das Glas war von 2/3 voll. Gabriel hat 1/4 getrunken. Von wieviel war das Glas voll?*

Gespräch der Forscherin (F) mit Studentin (S) folgt:

S: Hier rechne ich keinen Teil von etwas, hier nehme ich ab *(sie zeigt Aufgaben 2 und 3),* gebe weg. Ich weiß eigentlich nicht, wie ich es gedacht habe.

F: Wie hätten Sie das gemeint?

S: Etwa so (*sie zeichnet ein Bild*) – das teile ich auf die Viertel und ein Viertel gebe ich weg. Aber eigentlich, jemand könnte es so verstehen, dass er ein Viertel des ganzen Glases getrunken hat. Ich habe eigentlich nur eins gut gemacht. Ich sollte mich überzeugen.

F: Wie können Sie sich überzeugen?

S: Na ja, ich sollte es vielleicht irgendwie ausrechnen. Oder ich sollte es jemanden, der das besser kennt geben.

Die gebildeten Aufgaben 1. und 2. haben wir zur Beurteilung den Studenten gegeben. Meistens haben sie zwar aufgeführt, dass die Aufgabe 2. nicht der Aufgabenstellung entspricht. Die Begründung des Urteiles hat aber gezeigt, dass sie selbst mit dem Begreifen Probleme haben. Führen wir einige Beispiele auf, wie die Studenten die Aufgabe 2. bewertet haben:

- *Die Aufgabe 2 ist nicht richtig.*
  2/3 kg Mandarinen lagen auf dem Tisch = 2/3 von Einem (von 3/3).
  Veronika hatte 1/4 kg gegessen – aber von was? aus 2/3? aus 1/3?
  Die Frage: Wieviel kg Mandarinen blieben? – ist nicht richtig. Es sollte heissen: Wieviel kg Mandarinen hatte sie gegessen?

- *Die Aufgabe ist nicht richtig.*
  Insgesamt 2/3 kg Mandarinen, sie hatte 1/4 kg gegessen.
  Sie hatte 1/4 gegessen, aber es ist nicht aufgeführt von was.

- *Die zweite Aufgabe ist nicht richtig, sie ist nicht geeignet.*
  Ich wollte nicht die Zahl der Mandarinen, aber das Gewicht. Die Mandarinen müssten dann in kleine Stücke geschnitten werden.

Zum Abschluss

Aus den Formulierungen der Sachaufgaben kann man viele interessante und wertvolle Informationen entnehmen. Das Untersuchen, die wir durchgeführt haben, hatte bestätigt, dass die Studenten Probleme mit der Interpretation der Brüche haben (besonders sie nahmen nicht wahr, dass sie abwechselnd den Bruch als Operator und Größe benutzten). Wir haben festgestellt, dass viele Studenten nicht die Vorstellung haben, was sich eigentlich hinter einer einfachen Errechnung „versteckt". Sie sind nicht fähig die Errechnung im gewissen Kontext zu praktizieren.

Es zeigt sich, dass zur Feststellung der Qualität des Verständnisses die Aufgabe zu bilden nicht genügend ist. Es ist notwendig, die Aufgaben auch zu lösen und die Möglichkeit darüber zu diskutieren zu haben. Es bestätigt sich hier die Notwendigkeit der Durchführung der gemeinsamen Reflexion (Tichá, Hošpesová, 2006). Wenn die Autoren die Möglichkeit haben, gegenseitig die Aufgaben zu bewerten, wird das der Einblick in die Situation vertieft und die Fähigkeit die Situation zu begreifen, aufzufassen, verbessert. Die Bildung der Aufgaben, die um eine Reflexion (individuelle und vor allem kollektive) erweitert ist, stellt also den Weg zur Entfaltung und Steigerung der Qualität der professionellen Kompetenz da.

Literatur

English, L.D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 183-217.

Hošpesová, A., Tichá, M. (2005) Developing mathematics teachers' competence. In M. *Bosch* (ed.) *CERME 4.* Sant Feliu de Guíxols, , Spain. 1483 – 1493, CD ROM

Koman, M., Tichá, M. (2001). Von der spielerischen Untersung der Situation zum Rechnen. In: *Mathematik lernen und gesunder Menschenverstand (Festschrift für G. N. Müller*), ed. Ch. Selter, G. Walther. Ernst Klett, Düsseldorf, Leipzig, , p. 100-111.

Prediger, S. (2006). Continuities and discontinuities for fractions: a proposal for analysing in different levels. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30th PME Conference,* vol.4, 377-384. Prague: PME

Silver, E. A., Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27, 5, 521-539.

Tichá, M. (2003). Following the path of discovering fractions. In J. Novotná (ed.) *Proceedings of SEMT '03*. Praha: UK PedF, 17-27.

Tichá, M., Hošpesová, A. (2006). Qualified Pedagogical Reflection as a Way to Improve Mathematics Education. *Journal for Mathematics Teachers Education. Special Issue: Inter-Relating Theory and Practice in Mathematics Teacher Education.* Springer Netherlands, 9, 2, 129-156.

Anmerkung: Diese Untersuchung wurde durch das Förderungsprojekt GACR 406/08/0710 und durch AdW CR Institutional Research Plan No. AV0Z10190503 unterstützt.

Stefan UFER, München

Entwicklung geometrischer Beweiskompetenz in der Sekundarstufe I

Einleitung

Die Inhaltsbereiche der elementaren Geometrie stellen traditionell den Kontext für die Behandlung des Beweisens als mathematische Arbeitsweise im Unterricht der Sekundarstufe I dar. Nicht zuletzt die Aufnahme des Kompetenzbereichs „mathematisches Argumentieren“ in die Bildungsstandards für den mittleren Bildungsabschluss (KMK, 2004) unterstreicht die unveränderte Rolle dieses Bereichs für die mathematische Kompetenzentwicklung. Von besonderem Interesse, auch als Grundlage für eine breitere Betrachtung argumentativer Arbeitsweisen in der Mathematik, ist hier neben der Struktur der beschriebenen Kompetenz auch die Möglichkeit zur Beschreibung ihrer Entwicklung. Dieser Beitrag berichtet über eine explorative Studie, die dazu erste Ergebnisse liefert, zeigt aber auch Probleme in der Fassung des Konstrukts auf.

Geometrische Beweiskompetenz

In Anlehnung an den Kompetenzbegriff von Klieme und Leutner (2006) wird *geometrische Beweiskompetenz* verstanden als individuelle kontextspezifische Leistungsdisposition, die sich auf die Anforderungen von Beweisproblemen in der elementaren Geometrie bezieht. Explorative Arbeitsweisen, wie die Untersuchung von Vermutungen, sind hier nur insofern enthalten, wie sie für die Konstruktion eines Beweises von Bedeutung sind. Weiterhin werden – im Gegensatz zum Kompetenzbegriff bei Weinert (2001) – nicht-kognitive Aspekte ausgeblendet. Exemplarisch wird das Konstrukt an Inhalten der elementaren Geometrie der Jahrgangsstufen 7 und 8 des Gymnasiums untersucht. Die Übertragbarkeit auf andere nichtgeometrische Inhaltsbereiche kann nicht ohne weiteres angenommen werden. Algebraische Methoden sind allerdings vereinzelt auch zur Lösung geometrischer Beweisprobleme nötig (beispielsweise elementare Termumformungen).

Zur Beschreibung der Struktur geometrischer Beweiskompetenz schlagen Heinze, Reiss und Rudolph (2005) ein Modell vor, das drei Anforderungsniveaus von Aufgaben unterscheidet. Niveau I beinhaltet einfache Basisaufgaben, wie beispielsweise die Berechnung von Winkeln in einfachen geometrischen Figuren. Die Niveaus II und III beziehen sich explizit auf Beweisprobleme, wobei Aufgaben des Niveaus II lediglich einschrittige

Argumentation verlangen, Aufgaben des Niveaus III darüber hinaus die Kombination mehrerer Beweisschritte voraussetzen. Da diese simultan konstruiert werden müssen und nicht – wie bei vielen Berechnungsaufgaben – Schritt für Schritt bearbeitet werden können, ist hier ein qualitativer Unterschied im Anforderungsniveau zu Aufgaben des Niveaus II zu erwarten, der auch in mehreren Untersuchungen in den Jahrgangsstufen 7 und 8 gezeigt werden konnte.

Was ist ein Beweisschritt?

Um die Items den Anforderungsniveaus zuzuordnen, muss die Anzahl der nötigen Beweisschritte bestimmt werden. Ein Beweisschritt ist dabei ein deduktiver Argumentationsschritt, der die Anwendung eines dem Schüler bzw. der Schülerin bekannten mathematischen Satzes verlangt. Eine solche Einteilung kann auf einer stark mathematischen Betrachtung der möglichen Beweise basieren. Es ist jedoch zu erwarten, dass weitere Aspekte die Anforderungen eines Items beeinflussen können. Einerseits können die einzelnen Beweisschritte erheblich in der Komplexität der zu kombinierenden Informationen variieren (siehe auch Duval, 2002). So sind für die Anwendung eines Kongruenzsatzes mindestens drei Voraussetzungen zu prüfen, die Anwendung des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck ist vergleichsweise weniger komplex. Dies kann bedeuten, dass selbst einschrittige Beweisitems sehr viel schwieriger erscheinen als erwartet. Andererseits können bestimmte, vor allem einfache, häufig auftretende, Sätze (und deren typische Anwendungen) im Sinne eines *concept image* (Vinner & Dreyfus, 1989) bereits stark einer graphischen Repräsentation der Beweissituation verknüpft sein, dass die Anwendung des Satzes weitgehend automatisiert erfolgt und nicht mehr den Anforderungen eines eigenen kognitiver Schritts entspricht (beispielsweise im Sinne eines *chunkings*, siehe Anderson & Schunn, 2000). Dies kann dazu führen, dass eigentlich mehrschrittige Beweisprobleme in späteren Jahrgangsstufen vom Anforderungsniveau her vergleichbar werden mit einschrittigen Problemen. Ein konkretes Beispiel wird im Rahmen des Vortrags diskutiert.

Entsprechend ist zu erwarten, dass geometrische Beweiskompetenz nicht unabhängig vom Basiswissen der untersuchten Schülerinnen und Schüler konzeptuell gefasst werden kann.

Design der Studie und Forschungsfragen

In Fortführung einer Studie zu geometrischer Beweiskompetenz (Reiss et al. 2006) wurden Schüler der Jahrgangsstufen 7, 8 und 9 in Bezug auf geometrische Beweiskompetenz getestet (N_7=1113, N_8=891, N_9=341, im

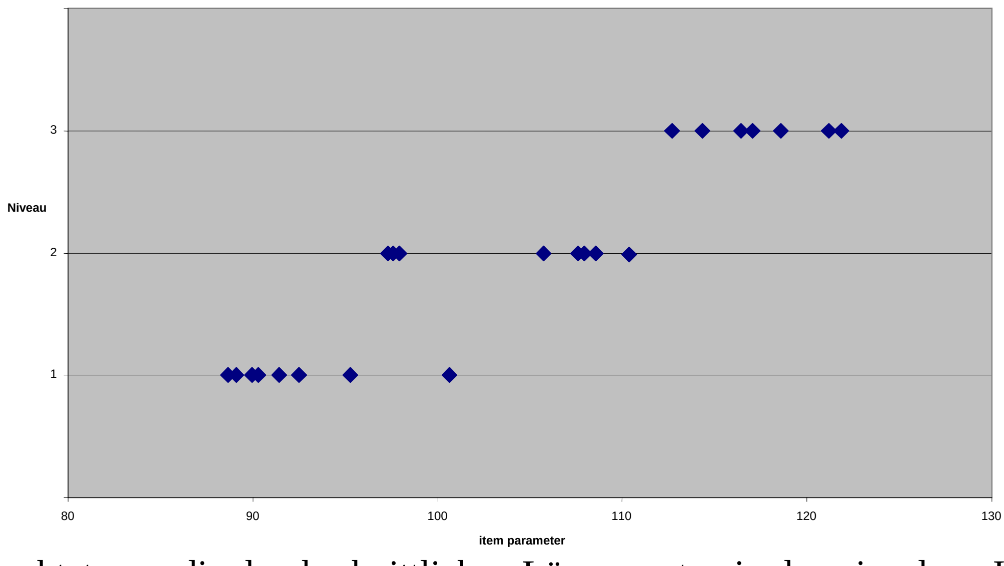
Längsschnitt: N_L=196). Die drei Tests enthielten Aufgaben zu jedem der drei Anforderungsniveaus und waren durch Ankeritems paarweise miteinander verbunden. Die Beweisprobleme waren jeweils in graphischer Form angegeben, verbunden mit einem kurzen Text.

Im Rahmen der Studie sollten unter anderem folgende Fragen in explorativer Vorgehensweise angegangen werden:

- Eignet sich das angenommene Modell zur Beschreibung geometrischer Beweiskompetenz in den Jahrgangsstufen 7 bis 9?
- Kann auf der Basis des Modells die Entwicklung geometrischer Beweiskompetenz in diesem Zeitraum beschrieben werden?
- Wie entwickelt sich geometrische Beweiskompetenz im Laufe der Sekundarstufe I?

Ergebnisse

Die Ergebnisse der drei Tests wurden für die Kernstichprobe mit einem dichotomen Raschmodell skaliert. Ordnet man die verwendeten Items aufgrund rein mathematischer Kriterien den Anforderungsniveaus zu und betrachtet man die zugehörigen Itemparameter, so zeigt sich prinzipiell der erwartete Zusammenhang, dass komplexere Items schwieriger sind, allerdings gibt es auch starke Abweichungen. Werden – unter normativen Annahmen über den Grad der Automatisierung einzelner Beweisschritte – auch die oben beschriebenen kognitiven Aspekte der Itemkomplexität mit in Betracht gezogen, so zeigt sich ein deutlicher Zusammenhang von Anforderungsniveau und Itemschwierigkeit (mit einer Abweichung, siehe Grafik).



Betrachtet man die durchschnittlichen Lösungsraten in den einzelnen Klassenstufen aufgeschlüsselt nach Leistungsdritteln, so stellt man durchgehend fest, dass lediglich Schülerinnen und Schüler des oberen Leistungsdrittels in der Lage sind, auch mehrschrittige Beweisaufgaben zu lösen. Schülerinnen und Schüler des unteren Leistungsdrittels haben bereits mit einschrittigen Aufgaben große Probleme (siehe auch Heinze, Reiss & Rudolph, 2005). Dies legt nahe, dass im Verlauf der Sekundarstufe I keine nennenswerte qualitative Entwicklung der Beweisleistung in dem Sinne erfolgt, dass beispielsweise die zusätzlichen Anforderungen wirklich mehrschrittiger Beweisprobleme besser bewältigt werden.

Ein quantitativer Zuwachs lässt sich dennoch bei Betrachtung der Personenparameter aus der Raschskalierung beobachten. Hier zeigen sich Effektstärke vergleichbar den in den großen Längsschnittstudien der vergangenen Jahre gefundenen (PISA, TIMSS). Dieser Zuwachs deutet darauf hin, dass zwar schwierigere Beweisprobleme gelöst werden können, dies aber mehr auf eine Entwicklung des geometrischen Basiswissens zurückzuführen ist als auf eine prinzipiell bessere Fähigkeit, mehrschrittige Beweise erfolgreich zu bearbeiten. Insbesondere kann vermutet werden, dass mehrschrittige Aufgaben von vielen Schülerinnen und Schülern nur dann besser gelöst werden, wenn genügend sicheres Basiswissen die Komplexität der Aufgabe faktisch reduziert.

Literatur

Anderson, J.R. & Schunn, C.D. (2000). Implications of the ACT-R Learning Theory: No Magic Bullets. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology (Vol. 5)*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Duval R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), S. 233–263.

Heinze, A., Reiss, K., & Rudoph, F. (2005). Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 37(3), S. 212–220.

Klieme, E. & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. Antrag an die Deutsche Forschungsgemeinschaft auf Einrichtung eines Schwerpunktprogramms.

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. München: Luchterhand.

Moore, R.C. (1994). Making the Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics,* 27(3), S. 249–266.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG Schwerpunktprogramms (S. 194-208). Münster: Waxmann.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989): Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20(4), S. 356-366.

Ringo Ullrich, Universität Leipzig

Mathe klingt gut - Ein Projekt zur Ent icklung mathematischer higkeiten im Grundschulalter anhand des Zusammenhangs von Mathematik und Musik

Fast alle Menschen, die in irgendeiner Form mit Kindern arbeiten, machen folgende Erfahrung: Kinder musizieren gern, das heißt singen, tanzen und spielen ungehemmt und hingebungsvoll. Es scheint auch erst einmal sekundär zu sein, wie es - für ein geschultes musikalisches Ohr - klingt . Musizieren macht ihnen einfach Spaß. Daher musizieren sie.[1]
Die Idee zum Projekt Mathe klingt gut entwickelte sich aus meiner Arbeit als Grundschullehrer. Die persönliche Erfahrung jener kindlichen Freude am Musizieren und dessen spürbarem Potential für Lernen und Entwicklung war entscheidend dafür. Den Anstoß gab ein Lied für Tauschaufgaben, das entstanden war, um nicht nur merksatzartig die Gesetzmäßigkeit der Kommutativität auswendig zu lernen. Sondern das Rechnen von Tauschaufgaben sollte in das Lied selbst verlegt werden. Gleichzeitig wurde das Kommutativprinzip auch in der musikalischen Struktur verankert.
Nach sichtbarem Erfolg und einiger Zeit des Probierens kristallisierten sich weitere musikalische Ausdrucksformen als vorteilhaft heraus. Es konnte nun vermutet werden, dass eine Verbindung von Mathematik und Musik im Mathematikunterricht neben allgemeinen musikalischen, sehr spezifisch auch mathematische Lernprozesse anzuregen vermag.
Nimmt man entsprechend an, es gäbe einen lernprozessrelevanten Zusammenhang zwischen Mathematik und Musik, dann muss geprüft werden:

a) Mit welchen mathematischen Entitäten ist das Musizieren verbunden?

b) Welche mathematischen Lernprozesse kann man durch welches musikalische Handeln anregen?

zu a) Musik lässt sich als rein *physikalischer Vorgang,* als *musikalisches Werk* und als *musiziertes Werk* mathematisch untersuchen.

Musik als *physikalischer Vorgang* ist in scheinbar jedem wahrnehmbaren

[1] Es gibt gewichtige neuere Untersuchungen und praktische Ansätze zur Bedeutung von Musik für die Entwicklung des Kindes. Die Wirkung von Musik auf verschiedene Entwicklungsbereiche wie Sozialkompetenz, Intelligenz, Motorik etc. spielt dabei eine wesentliche Rolle. Hans Günther Bastian, Maria Spychiger, Stefan Koelsch, Doroth e Kreusch- akob oder Sabine Hirler sollen hier nur als einige wenige der auf diesem Gebiet Arbeitenden genannt werden.

Parameter mathematisch beschreibbar. Art und Weise der Schwingungen definieren Tonhöhe, Klangfarbe, Lautstärke, Naturtöne/Obertöne, Ton-Geräusch, Schwebungen, Differenztöne, Konsonanz, Dissonanz, Rhythmik etc. Schall und Hall bestimmen die zeitlich-räumliche Fortbewegung der Schwingung und haben wesentlichen Einfluss auf die Schwingung selbst.[2]
Im *musikalischen Werk,* das heißt im komponierten und damit bezüglich musikalischer Parameter definierten Werk sind ebenfalls mathematische Strukturen erkennbar. Mehr noch: Unsere abendländischen Tonsysteme haben sich sogar gänzlich auf mathematisch-physikalischer Grundlage entwickelt. Daraus gehen entsprechend musikalische Parameter hervor wie Tonhöhe, Intervall, Tonalität, Tongeschlecht, Harmonik, Rhythmik, Tempo, Metrum, Dynamik, Kompositionstechnik, Form etc.[3]
Mit diesem Hintergrund kann auch das *musizierte Werk* und das Musizieren selbst als mathematisches Tun verstanden werden. So wie ein Kind zum Beispiel beim Decken des Tisches die Elemente einer Gesamtmenge und deren Teilmengen erkennen (Personenanzahl, Anzahl der Geschirrteile, des Bestecks) und - bewusst oder unbewusst - diese Mathematik realisieren muss, um den Tisch zu decken, so muss auch die Mathematik in der Musik - bewusst oder unbewusst - angewendet werden, wenn die Musik erklingen soll. Eine Melodie beispielsweise, die sich über die große Terz, Quarte, Quinte, Sexte und Quinte wieder zum Grundton bewegt, lässt sich in der Folge ihrer Töne so beschreiben:
Grundton + 4 Halbtöne + 1 Ht + 2 Ht + 2 Ht - 2 Ht - 7 Ht = Grundton, also *0+4+1+2+2-2-7=0.*
Die Musik als Ganzes klingend wahrzunehmen ist zweifelsohne ein erhebenderes Erlebnis als allein den zahlenmäßigen Verlauf der Rechnung zu verfolgen Das ändert aber nichts daran, dass beim Musizieren die Intervalle als Tonfolge in der Anzahl der Halbtöne eingehalten werden müssen, um genau diese Melodie als Ganzes erklingen zu lassen.
Zum Musizieren gehören auch - und wohl vor allem - die *sinnliche Verarbeitung.* Zur Beantwortung der Frage, in welch hohem Maße hier Mathematik bedeutsam ist, reicht ein Blick in Wissenschaftsbereiche wie die Biochemie, Biophysik, Neurologie oder Neurophysiologie.
Daraus lässt sich schließen: Mit dem Musizieren erbringen die Kinder gleichzeitig bestimmte mathematische Leistungen. Aber wenn dem so sein sollte, muss man sich doch fragen: Ist Musik spezifisch einsetzbar, um mathematische Lernprozesse anzuregen

---

[2] Roederer, üan G.: Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik. 2000.
[3] Grabner, Hermann: Allgemeine Musiklehre. 1 1.

zu b) Zunächst muss geklärt werden, welche Voraussetzungen das Lernen im Grundschulalter erfordert, welche Formen musikalischen Handelns es gibt und ob und wie sie im Mathematikunterricht realisiert werden können.

Die umfassende Aktivierung der Sinne des Kindes stellt die Basis des Lernens im Grundschulalter dar, also konkret-operatorisches Handeln.

Ein solch Sinne-umfassendes Lernen dient der Verinnerlichung der Welt in möglichst vielen ihrer wahrnehmbaren Erscheinungen als Basis dafür, mit genügend Informationen diese Welt bald zu abstrahieren und auf grundlegende Mechanismen zurückzuführen. In außerordentlicher Weise gestattet Musik hierbei eine Aktivierung mehrerer Sinne gleichzeitig. Außerdem stehen Musik und Motivation in engem Zusammenhang.[4]

Allerdings heißt das nicht zwingend, dass eine mögliche Wirkung von Musik auf andere Bereiche, z.B. andere Unterrichtsfächer, etwa von allein geschieht. In diesem speziellen Fall bedeutet das, nur weil ein Kind viel musiziert, muss es noch längst kein guter Mathematiker sein. Heiner Gembris formuliert es in folgender Weise: Um Übertragungseffekte wirksam auszulösen, sollten (musikalische) Aktivitäten gezielt in Hinblick auf den gewünschten Transfer gestaltet werden. Dabei spielt die inhaltliche und strukturelle hnlichkeit der Lernaufgaben eine wichtige Rolle. Bislang fehlt es hier auch noch an entsprechenden musikpädagogischen Konzepten. [5]

Die Forschungsarbeiten zeigen: *Die Art und Weise der methodisch-didaktischen Umsetzung des Zusammenhangs von Mathematik und Musik* ist absolut entscheidend für die Wirkungsweise von Musik in Bezug auf die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten.

Singen, Tanzen, Spielen und Hören kann man als grundlegende menschliche musikalische Ausdrucksformen bezeichnen. In Reflexion des wissenschaftlichen Forschungsstandes sind diese musikalischen Ausdrucksformen und im gleichen Maße die mathematischen Lehrplaninhalte nun dahingehend zu untersuchen, ob und wie sie sich methodisch so verbinden lassen, dass sich ein größerer Lernerfolg ergibt.

Ein Beispiel: Die Vermittlung des Klemen Einspluseins von ersten Zahl- und Mengenerfahrungen bis hin zur Automatisierung erfolgt anfangs auf aktionaler Ebene. Voraussetzung sind vielfältige Zahlerfahrungen (besonders die der Zahlzerlegungen), um Mengen als solche wahrnehmen, differenzieren und miteinander in Beziehung setzen zu können[6]. Die musikalische Ausdrucksform des Tanzes, d.h. der Rhythmik bietet diesbezüglich

---

[4] Spitzer, Manfred: Lernen. 2007.
[5] Gembris, Heiner: In: Gembris u.a., 2001, S.145.
[6] Padberg, Friedhelm: Didaktik der Arithmetik. 2005. S.   4 ff.

die Möglichkeit, Zahl- und Mengenerfahrungen körperlich-rhythmisch zu realisieren. Es werden dadurch Zahlen und Mengen körperlich wahrgenommen und ausgedrückt, und somit bewusst und abrufbar verinnerlicht.

Nach Verinnerlichung auf aktionaler Ebene ist ein nächster und außerordentlich wichtiger Schritt notwendig. Denn Mathematik hat viele Gesichter, und die gesellschaftlichen Anforderungen an mathematische Fähigkeiten betreffen vor allem solche, abstrahieren zu können, mathematische Strukturen quasi überall wahrnehmen und nutzbar machen zu können. Unterricht kann demnach nicht nur musizierende Mathematik fordern.

Die umfassende Ausbildung der aktionalen Ebene muss das solide, belastbare Fundament für die Abstrahierung sein. Aber dem schließen sich - im Sinne . Bruner s - in fließender Verbindung die ikonische Ebene (bildhafte Mathematik) und symbolische Ebene (formale Mathematik) an.

Der Rhythmik kommt dabei grundlegend eine Schlüsselrolle zu, die hier leider nicht eingehender beschrieben werden kann. In Bezug aber auf die Bedeutung von Rhythmen in unserem Leben scheint die Vermutung gerechtfertigt, ob die Wahrnehmung von Rhythmen (in sich selbst und außerhalb) nicht auch Grundlage für arithmetisch-geometrische Operationen und daher sogar Grundlage für die Entwicklung mathematischer Kompetenz im Allgemeinen ist.

Die Bezeichnung des Projektes Mathe klingt gut , und damit soll dieser kurze Beitrag enden, geht auf die ußerung eines ungen zurück. Nachdem wir im Mathematikunterricht gesungen, getanzt und bestimmte Klangaufgaben gehört hatten, kam er in der Pause zu mir und meinte, er hätte das Gefühl, Mathematik würde klingen, und würde sogar gut klingen.

Literatur

Gembris, Heiner/Kraemer, Rudolf-Dieter/Maas, Georg (Hrsg.): Macht Musik wirklich klüger Musikalisches Lernen und Transfereffekte.; Sonderdruck der Aufsätze aus den Musikpädagogischen Forschungsberichten, Band ; Augsburg: Wißner-Verlag, 2001.

Grabner, Hermann: Allgemeine Musiklehre. Bärenreiter-Verlag Karl Vötterle GmbH o. KG: Kassel, 1 . Aufl. 1 1.

Padberg, Friedhelm: Didaktik der Arithmetik. Eisevier GmbH: München, 2005.

Roederer, üan G.: Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New ork, 3. Aufl. 2000.

Spitzer, Manfred: Lernen. Eisevier GmbH: München, l. Aufl. 2007.

Maike VOLLSTEDT, Hamburg

Alles sinnlos! Oder doch nicht? – Sinnkonstruktionen von Hongkonger Schülerinnen und Schülern im Kontext des Mathematiklernens

1 Sinnsuche beim schulischen Lernen

Bereits Anfang der 1980er Jahre stellt Hurrelmann in einer deutschen Studie fest, dass die „Frage nach dem 'Sinn' der schulischen Anforderungen" (1983: 44) für Schülerinnen und Schüler immer stärker werde. Sie seien auf der Suche nach der für sie persönlichen Relevanz schulischer Lernprozesse bzw. -inhalte in Gegenwart und Zukunft. Dies scheint kein rein deutsches Phänomen zu sein. Die Auswertung leitfadengestützter Interviews mit Hongkonger Schülerinnen und Schülern legt nahe, dass auch diese auf der Suche nach dem Sinn beim Lernen von Mathematik im schulischen Kontext sind. Diese Interviews sind Teil einer qualitativen Zweiländerstudie mit 15- und 16-jährigen Schülerinnen und Schülern aus Deutschland und Hongkong. Die Studie nimmt die Perspektive der Lernenden auf das Lernen von und die Auseinandersetzung mit Mathematik in den Blick und rekonstruiert die Sinnkonstruktionen der Schülerinnen und Schüler. Datengrundlage sind leitfadengestützte Interviews mit einer Sequenz nachträglichen lauten Denkens zur jeweils letzten Mathematikstunde. Die Daten wurden mit der *Grounded Theory* (vgl. Strauß/Corbin 1996) ausgewertet. Für weitere Informationen zur Studie vgl. Vollstedt (2007a, 2007b).

2 Sinnkonstruktion im Kontext schulischen Mathematiklernens

Wie bereits an anderer Stelle dargelegt (vgl. Vollstedt 2007a, 2007b; sowie Vollstedt/Vorhölter im Druck), wird *Sinn* im Rahmen der hier beschriebenen Studie als die *persönliche Relevanz*, die einem (Lern-) Gegenstand oder einer Handlung beigemessen wird, verstanden. Sinn wird von einem Individuum in einer Situation (z.B. bei der Auseinandersetzung mit fachlichen Inhalten im schulischen Unterricht) konstruiert und hängt von persönlichen Merkmalen (Überzeugungen, Ziele, Denkstil u.a.) sowie Hintergrundmerkmalen der Person (Migrationshintergrund, Unterstützung durch die Familie, Privatunterricht u.a.) ab (vgl. Vollstedt 2007b, Vorhölter 2007). Durch den Einfluss dieser Voraussetzungen auf die Sinnkonstruktionen, die die Schülerinnen und Schüler im Kontext schulischen Mathematiklernens vornehmen, ist Sinnkonstruktion individuell in dem Sinne, dass verschiedene Schülerinnen und Schüler in derselben Situation im Klassenzimmer unterschiedliche Arten von Sinn konstruieren können.

Analysiert man die Interviewäußerungen der Schülerinnen und Schüler genauer, wird klar, dass die Perspektiven auf das Lernen von Mathematik im schulischen Kontext vielfältig sind. Je nach interviewter Person ist eine andere Facette besonders wichtig und im Fokus der Äußerungen. Die Sinnkonstruktionen lassen sich demnach systematisieren in den Sinn von *Mathematik* (SK-M), von *Mathematikunterricht* (SK-MU), vom *Lernen von Mathematik* (SK-LM), vom *Betreiben von Mathematik* (SK-BM) u.a. (vgl. Vollstedt/Vorhölter im Druck). Diese verschiedenen Facetten von Sinn im Kontext von schulischem Mathematiklernen spielen in Hongkong eine zentrale Rolle. Sie werden im folgenden Kapitel mit zwei Fallbeispielen illustriert.

3 Sinnkonstruktionen von zwei Schülern aus Hongkong

Die wichtigsten Sinnkonstruktionen von zwei sehr unterschiedlichen Schülern aus Hongkong sollen aufzeigen, wie verschieden sie im Kontext schulischen Mathematiklernens ausfallen können.

3.1 Marcus

Marcus ist ein eher leistungssschwacher Schüler, der kein besonderes Interesse an Mathematik hat. Er hat bezogen auf Mathematik ein niedriges Fähigkeitsselbstkonzept. Daher versucht er auch nicht, eigene Lösungswege für Aufgaben zu finden, sondern folgt den Vorgaben seines Lehrers.

Marcus lernt Mathematik aus Zwang (SK-LM), da es als Fach im Stundenplan steht. Er ist jedoch froh, dass er zum Lernen von Mathematik gezwungen wird, da er der Überzeugung ist, dass jeder Mensch Grundkenntnisse in Mathematik haben sollte (SK-LM), um ein mündiger Mensch zu werden. Er würde sich ohne diesen Zwang nicht mit Mathematik auseinandersetzen. Obwohl Marcus Mathematik also nicht gerne mag, lernt er es doch auch für sich selbst (SK-LM), wie er auch selbst etwas zögerlich formuliert. Er scheint diese Antwort also als eher unangemessen zu empfinden.

Wie bereits angedeutet, hat Mathematik für Marcus keine besondere persönliche Relevanz (SK-M). Allein im Nutzen bzw. in der Anwendung von Mathematik im Leben (SK-M) sieht er einen Zweck. Dabei geht es ihm nicht primär um die selbstständige Verwendung von Mathematik, sondern darum zu wissen, wo Mathematik sinnvoll gebraucht wird. Daher begrüßt er es auch, wenn dieser Aspekt im Unterricht thematisiert wird (SK-MU). Ohne diese Thematisierung ist ihm die Relevanz der Mathematik nicht klar, und er rechnet rein wie eine Maschine. Mit einer Anwendung hingegen fällt ihm das Verstehen wesentlich leichter und der Gegenstand des Unterrichts wird persönlich bedeutsam.

Der Mathematikunterricht bietet Marcus darüber hinaus eine Möglichkeit, Kompetenz (nach dem richtigen Lösen von Aufgaben, SK-MU) und soziale Eingebundenheit unter seinen Sitznachbarn (durch reden mit ihnen und gegenseitiges Erklären bei Nichtverstehen, SK-MU) zu erleben. Marcus' wichtigste Sinnkonstruktion mit Bezug zum Mathematikunterricht ist jedoch, dass er im Unterricht möglichst nicht über das notwendige Maß hinaus gefordert werden möchte (SK-MU). Er vertritt daher die Einstellung, dass diejenigen, die inhaltlich stärker gefordert werden möchten, *additional mathematics*[1] wählen oder sich in ihrer Freizeit mit Mathematik beschäftigen sollten. So entwickelt Marcus auch keinen Ehrgeiz, wenn herausfordernde Aufgaben nicht lösbar scheinen. Für ihn bietet also der Mathematikunterricht den Weg des geringsten mathematischen Widerstandes (SK-MU). Der Wettbewerb jedoch, der unter den Schülerinnen und Schülern stattfindet, spornt ihn an, möglichst gute Leistungen zu erbringen (SK-MU, SK-BM), um das positive Gefühl des Erfolges zu erleben.

3.2 Vincent

Vincent ist im Gegensatz zu Marcus ein sehr leistungsstarker Schüler, der Mathematik sehr gerne mag. Er ist der festen Überzeugung, dass Mathematikleistung und Intelligenz in einem kausalen Zusammenhang stehen, da Mathematik das logische Denken fördert. Diese Einstellung geht einher mit einem hohen Fähigkeitsselbstkonzept bezogen auf Mathematik.

Wettbewerb hat für Vincent im Mathematikunterricht selbst wie auch außerhalb der Schule eine zentrale Position. Durch Teilnahme an Mathematikolympiaden ebenso wie gute Mathematikleistungen im Unterricht erhofft er sich, eine gute Außenwirkung auf andere (SK-LM) sowie Vorteile für seine Zukunft (z.B. leichteren Zugang zum *College*, SK-LM) zu erzielen. Er möchte als möglichst intelligent erscheinen (SK-LM), was für ihn durch den Zusammenhang zwischen Intelligenz und Mathematikleistung an den Zensuren ablesbar ist. Zensuren spielen also für Vincent eine sehr wichtige Rolle.

Für Vincent ist das Erleben der eigenen Kompetenz im Mathematikunterricht besonders wichtig (SK-MU, SK-BM). Beim Bearbeiten von schwierigen und herausfordernden Mathematikaufgaben nimmt er nichts anderes um sich herum wahr und ist total absorbiert von der Mathematik (SK-BM). Die Bearbeitung von leichten Aufgaben hingegen empfindet er als langweilig; er würde dann wie eine Kopiermaschine handeln. Vincent erlebt außerdem Kompetenz, wenn er bessere Lösungen als die seiner Lehrerin erarbeitet. Er engagiert sich in einem heimlichen Wettbewerb mit ihr (SK-MU), wer den effizienteren Lösungsweg für einen Aufgabentypus findet.

---

1 In Hongkong wird zwischen den Fächern *mathematics* und *additional mathematics* unterschieden. Letzteres ist ein Wahlfach und wird oftmals von den interviewten Schülerinnen und Schülern als herausfordernder als *mathematics* beschrieben.

Schließlich bietet der Mathematikunterricht für Vincent die Möglichkeit, soziale Eingebundenheit mit seinen Freunden zu erleben (SK-MU). Dies ist besonders dann möglich, wenn herausfordernde Aufgaben in Gruppenarbeit bearbeitet werden sollen. Vincent mag diese Arbeitsform besonders gern, da Gruppenarbeit in seinen Augen die Freundschaft stärkt (SK-BM).

4 Zusammenfassung

Anhand der kurzen Falldarstellungen von Marcus und Vincent wird deutlich, dass Sinnkonstruktionen im Kontext des schulischen Mathematiklernens sehr unterschiedlich ausfallen können. Für Marcus steht die weitestgehende Vermeidung von Mathematik im Fokus seiner Tätigkeiten, wohingegen Vincent sich mit großer Hingabe möglichst schwierigen Herausforderungen stellt. Auch die Rolle von Anwendungsbezügen von Mathematik im Leben wird unterschiedlich bewertet. Ist sie zentral für Marcus, um einen Sinn in Mathematik zu sehen, spielt sie jedoch keine nennenswerte Rolle für Vincent. Darüber hinaus wird die wichtige Rolle von intentionalen und funktionalen Sinnkonstruktionen (vgl. dazu Vollstedt/Vorhölter im Druck) vor allem für einen leistungsschwachen Schüler wie Marcus offenbar .

Literatur

Hurrelmann, Klaus. 1983. Schule als alltägliche Lebenswelt im Jugendalter. In: Schweitzer, Friedrich und Hans Thiersch (Hrsg.). *Jugendzeit – Schulzeit: Von den Schwierigkeiten, die Jugendliche und Schule mit einander haben*. Weinheim: Beltz. 30-56.

Strauß, Anselm und Juliet Corbin. 1996. *Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Beltz PVU.

Vollstedt, Maike 2007a. Sinnkonstruktionen von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht in Deutschland und Hongkong. In: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*. Hildesheim: Franzbecker. 961-964.

Vollstedt, Maike. 2007b. The Construction of Personal Meaning – A Comparative Case Study in Hong Kong and Germany. In: Pitta-Pantazi, Demetra und George Philippou (Hrsg.). *European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Larnaca: Department of Education, University of Cyprus. 2473-2482.

Vollstedt, Maike und Katrin Vorhölter. im Druck. Zum Konzept der Sinnkonstruktion am Beispiel von Mathematiklernen. In: Koller, Hans-Christoph (Hrsg.). *Sinnkonstruktion und Bildungsgang*. Opladen: Barbara Budrich.

Vorhölter, Katrin. 2007. Personal Meaning in Relation to Modelling Problems. In: Pitta-Pantazi, Demetra und George Philippou (Hrsg.). *European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Larnaca: Department of Education, University of Cyprus. 2190-2199.

Rudolf VOM HOFE, Bielefeld

Zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen in der Sekundarstufe I – Ergebnisse der Längsschnittstudie PALMA

In diesem Beitrag wird über Anlage, Ziele und Ergebnisse der Längsschnittstudie PALMA (*P*rojekt zur *A*nalyse der *L*eistungsentwicklung in *Ma*thematik) berichtet. Zu weiteren Einzelheiten wird auf Literatur verwiesen.

1. Zielsetzung und Design

Ziel von PALMA ist es, in einer Längsschnittstudie Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen bei Schülern der 5. - 10. Klassenstufe zu untersuchen. Hierzu wurden im jährlichen Rhythmus an einer für Bayern repräsentativen Schülerkohorte (N=2100) in Gymnasien, Realschulen und Hauptschulen Erhebungen durchgeführt, die inhaltlich und methodisch so angelegt sind, dass eine Verschränkung mit den Erhebungen von PISA 2006 möglich ist.

Die PALMA-Studie wird als interdisziplinäres Projekt von Arbeitsgruppen der Universitäten München (Pädagogische Psychologie, Ltg. Prof. R. Pekrun), Bielefeld (Didaktik der Mathematik, Ltg. Prof. R. vom Hofe) und Kassel (Didaktik der Mathematik, Ltg. Prof. W. Blum) durchgeführt. Zur empirischen Analyse wurden folgende Testinstrumente entwickelt:

(1) Regensburger Mathematikleistungstest zur Erfassung mathematischer Kompetenzen (Schülerfragebogen).

(2) Münchener Skalen zu Mathematikemotionen, Schülervoraussetzungen und Kontexten (Schüler- und Elternfragebogen).

Ergänzend zu diesen schriftlichen Befragungen finden qualitative Erhebungen in Form von halbstandardisierten Interviews statt.

2. Ergebnisse zur mathematischen Kompetenzentwicklung

Die Datenerhebung der Hauptstudie wurde im Sommer letzten Jahres abgeschlossen. Die Detailauswertung der Daten und die damit verbundenen didaktischen und psychologischen Analysen laufen zurzeit. Wir geben hier einen Einblick in einige globale Ergebnisse zur mathematischen Kompetenzentwicklung.

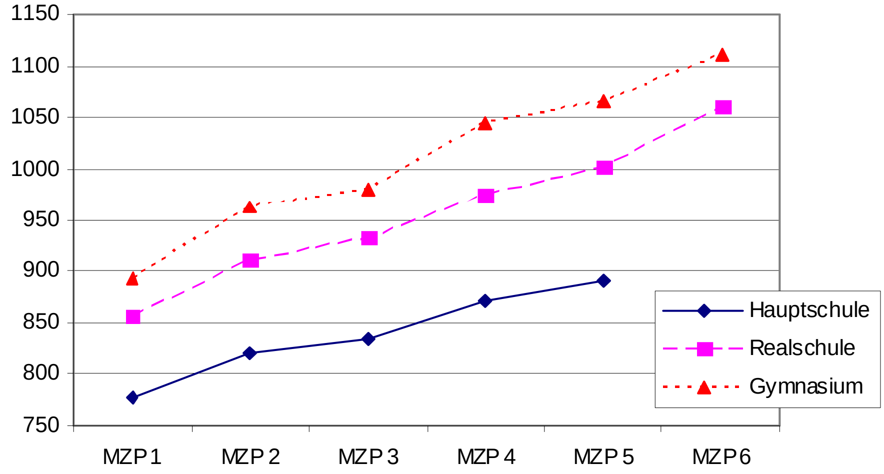


Abbildung 1: Gesamtskala

Abbildung 1 zeigt die Entwicklung der Mathematikleistungen vom ersten bis zum sechsten Messzeitpunkt. Abbildungen 2 und 3 beschreiben die Entwicklung in den Teilkompetenzen *Modellierung* (basierend auf Items, die mentale Modellierungsprozesse erfordern) und *Kalkül* (basierend auf technischen Items, die kalkülhaftes Rechnen erfassen). Die Erhebungen fanden jeweils am Ende eines Schuljahres statt, so dass damit die Entwicklung von Ende der Klasse 5 bis zum Ende der Klasse 10 beschrieben wird, mit Ausnahme der Hauptschule, die für die meisten Schüler bereits mit der Klasse 9 endet. Es zeigen sich folgende Tendenzen:

(1) Für die Gesamtskala zeigt sich eine weitgehend parallele Entwicklung von Gymnasium, Realschule und Hauptschule. Der Abstand zwischen Hauptschule und Realschule ist dabei deutlich größer als der zwischen Realschule und Gymnasium.

(2) Die Leistungsentwicklung fällt sowohl in den unterschiedlichen Jahrgangsstufen als auch in Bezug auf die unterschiedlichen Schulformen uneinheitlich aus; in beiden Fällen differiert die Effektstärke erheblich. Beobachtungen anderer Studien, die von einer kontinuierlichen Effektstärke (z. B. 1/3 Standardabweichung) ausgehen, konnten durch PALMA nicht bestätigt werden.

(3) In einzelnen Bereichen und Jahrgängen ist kaum eine Leistungsentwicklung zu erkennen; dies gilt insbesondere in der Hauptschule für die Teilkompetenzen *Kalkül* in der Klasse 6 und *Modellierung* in der Klasse 9.

(4) Der moderate Anstieg der Leistungswerte aller Schularten in der Klasse 6 lässt sich vor allem curricular erklären; hier dominieren in allen Schularten die geometrischen Inhalte, der Test erfasst jedoch eher den arithmetisch-algebraischen Bereich.

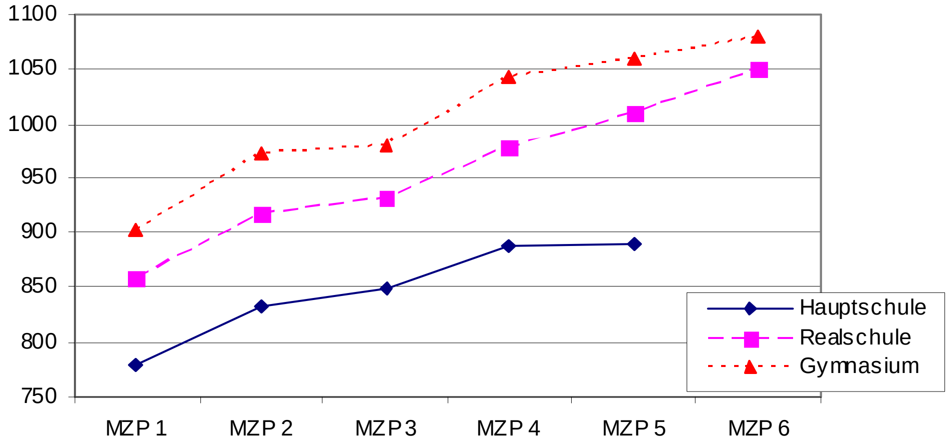


Abbildung 2: Modellierung

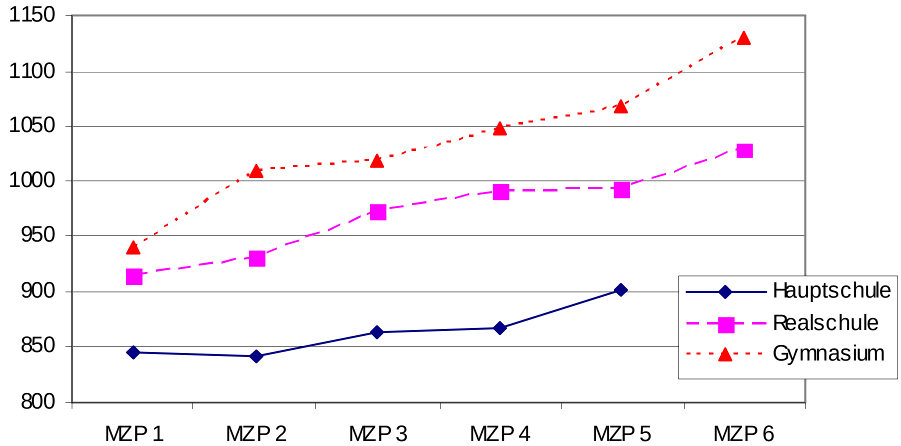


Abbildung 3: Kalkül

Die Abbildungen 4 und 5 geben mit der Darstellung der Varianz der Leistungswerte nach Schultyp zum MZP 1 und MZP 5 einen Einblick in die Entwicklung von Ende der Klasse 5 bis zum Ende der Klasse 9. Man erkennt am Ende der Klasse 5 eine starke Überschneidung der Bereiche für Hauptschule, Realschule und Gymnasium. In den folgenden Jahren zeigen sich trotz einer Auseinanderentwicklung der Mittelwerte immer noch starke Überlappungen. So liegen selbst in der Klasse 9 noch zahlreiche gute Hauptschüler in einem ähnlichen Leistungsbereich wie weniger gute Gymnasiasten. Für die Klasse 10 ergibt sich für Realschule und Gymnasium ein ganz ähnliches Bild.

Diese Befunde lassen daran zweifeln, ob die frühe Einteilung der Schülerinnen und Schüler in drei, weitgehend undurchlässige Schulformen eine optimale Förderung gewährleistet. Detailstudien zeigen, dass erhebliche Gruppen der Haupt- bzw. Realschüler von ihren Mathematikleistungen auch in der jeweils höheren Schulform erfolgreich mitarbeiten könnten. Weiterhin lassen diese Untersuchungen darauf schließen, dass diese Gruppen in der jeweiligen Schulform z. T. nicht optimal gefördert werden, so z. B. die leistungsstarken Hauptschüler in der Klasse 9; in dieser Klasse ist insgesamt eine Stagnation der Modellierungskompetenz zu verzeichnen. Dies unterstreicht die Forderung nach einem Schulsystem, das eine hohe Durchlässigkeit zwischen Zweigen bzw. Schulformen ermöglicht, um zum einen individuelle Bildungsgerechtigkeit zu gewährleisten und zum anderen das vorhandene Bildungspotential angemessen auszuschöpfen.

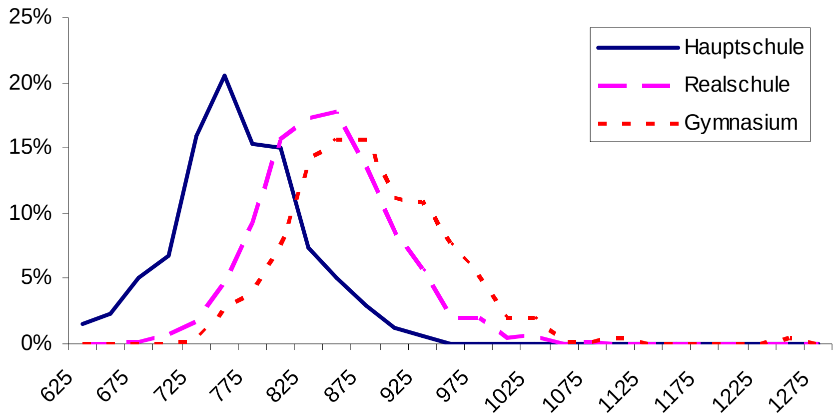


Abbildung 4: Varianz MZP 1

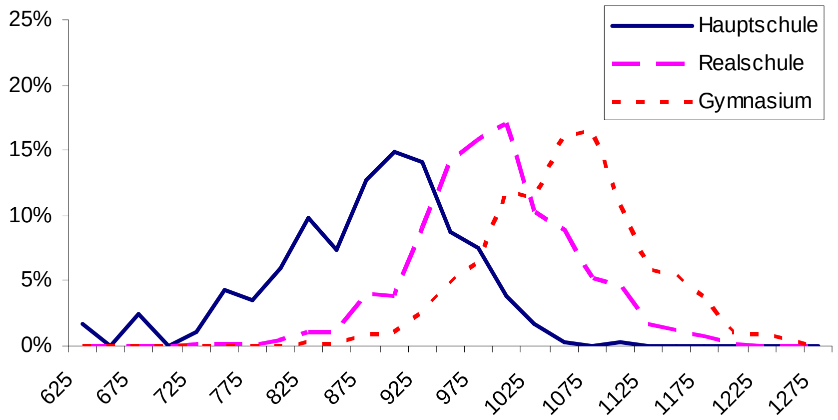


Abbildung 5: Varianz MZP 5

Literatur

[1] Pekrun, R., vom Hofe, R., Blum, W., Goetz, T., Wartha, S., Frenzel, A., & Jullien, S. (2006). Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA): Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen in der Sekundarstufe I. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms*. Münster: Waxmann.

Katrin VORHÖLTER, Hamburg

Modellierungsaufgaben als Sinnangebote für Schülerinnen und Schüler

In der Diskussion zum Modellieren in der Schule wird häufig die These vertreten, dass Modellierungsaufgaben Schülerinnen und Schülern den Sinn von Mathematik aufzeigen (vgl. u.a. Blum 1996, S. 22; Kaiser-Meßmer 1986, S. vii) und sie so bei der Sinnkonstruktion unterstützen können. Bisher wurde jedoch keine Konkretisierung vorgenommen, was unter dem *Sinn von Mathematik* verstanden wird und inwiefern Modellierungsaufgaben diesen Sinn aufzeigen können.

Im Folgenden werden erste Ergebnisse einer rekonstruktiven Studie vorgestellt, die sich mit dem Einfluss von Modellierungsaufgaben auf die Sinnkonstruktion von Schülerinnen und Schülern befasst. Die Studie wurde in fünf zehnten Klassen zweier Gymnasien durchgeführt. In allen Klassen wurde jeweils eine herkömmliche Mathematikstunde videographiert sowie eine Stunde, in der die Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen nach Interesse eine von vier Modellierungsaufgaben bearbeiten sollten; diese Aufgaben wurden eigens für die Studie konzipiert. Im Anschluss an jede dieser Stunden wurde mit insgesamt 17 Schülerinnen und Schülern ein nachträgliches lautes Denken und ein Leitfadeninterview geführt.

Sinn und Sinnkonstruktion

Dem Sinn werden in der Pädagogik unterschiedliche Rollen zugewiesen. Je nach theoretischer Position wird Sinn beispielsweise als Grundrecht einer jeden Schülerin und eines jeden Schülers gesehen (vgl. BLK 1997, S. 11), oder aber Sinn wird als Voraussetzung dafür gesehen, dass neu erworbenes Wissen nicht zu trägem Wissen wird (vgl. Gebhard 2003, S. 210). Doch gleichgültig, welche Rolle dem Sinn zugeteilt wird, nimmt er eine zentrale Stellung in der Pädagogik ein.

Da der Sinnbegriff in vielen verschiedenen Kontexten und unterschiedlich gebraucht wird, wird er oft unterschiedlich theoretisch konzeptualisiert. Dies macht eine Präzisierung des Begriffs nötig[1]. Im Folgenden wird mit dem *Sinn* eines Gegenstandes oder einer Handlung die persönliche Rele-

[1] Eine ausführlichere Darstellung sowohl zum Sinnbegriff als auch zur Sinnkonstruktion inklusive einer Systematisierung verschiedener Sinnarten im Rahmen von Mathematikunterricht findet sich in Vollstedt/Vorhölter (im Druck).

vanz verstanden, die dieser Gegenstand oder diese Handlung für ein Individuum hat.

Nicht nur der Sinnbegriff wird in der Literatur unterschiedlich verwendet. Auch der Prozess, in dem Sinn entsteht, wird unterschiedlich aufgefasst. Dem hier verwendeten Begriff der Sinnkonstruktion liegt eine konstruktivistische Auffassung vom Sinnerwerbsprozess zugrunde. Sinn ist demnach etwas, was nicht einfach von Mensch zu Mensch übergeben oder gestiftet werden kann, sondern selbst konstruiert werden muss. Damit ein Ereignis oder ein Objekt für einen Menschen sinnvoll ist, muss es sich in die Erfahrungen des Menschen integrieren lassen und mit seinen Wünschen und Zielen in Verbindung gebracht werden können. Daher beeinflussen sowohl die persönlichen Hintergrundmerkmale wie der sozioökonomische Status der Eltern und die kulturelle Prägung, als auch die persönlichen Merkmale wie die Einstellung zur Mathematik und zum Mathematikunterricht und die persönlichen Ziele die Sinnkonstruktionen der Schülerinnen und Schüler.

Obwohl der Mensch selbst Sinn konstruieren muss, kann er auf verschiedene Weise bei der Sinnkonstruktion unterstützt werden. So kann der Lehrende diesen Prozess beeinflussen, indem er den Schülerinnen und Schülern Sinnangebote macht. Es liegt dann an den Schülerinnen und Schülern, diese Sinnangebote anzunehmen, abzulehnen oder zu verändern.

Sinnangebote der Modellierungsaufgaben „Laute Schnarcher“

Bei der Aufgabe „Laute Schnarcher“ wurde den Schülerinnen und Schülern eine Zeitungsnotiz gegeben, in der die Dezibel-Werte verschiedener Geräuschquellen aufgelistet waren. Unter anderem wurde dargestellt, dass Schnarchen bis zu 90dB hat, was über dem Wert liegt, bei dem in Betrieben ein Gehörschutz Pflicht ist. Als zusätzliche Informationen zum Dezibel waren außerdem eine Faustformel zur Berechnung des Dezibel-Wertes zweier gleichlauter Schallquellen sowie die Berechnungsvorschrift für das Dezibel gegeben. Die Aufgabe der Schülerinnen und Schüler bestand darin herauszufinden, wie viele Menschen gleichzeitig reden können, um genau so laut zu sein wie ein Schnarcher.

Die Aufgabe wurde in der Studie verwendet, da sie geeignet erschien, Schülerinnen und Schüler erste Erfahrungen mit der Maßeinheit des Dezibels zu ermöglichen bzw. sich mit den Kontexten Akustik und Lärm auseinanderzusetzen. Dies erschien nicht nur für Physikinteressierte ansprechend, sondern auch für Jugendliche, die sich aufgrund von Diskothekbesuchen oder mp3-Playern für die Auswirkungen von Lautstärke interessieren. Durch die Aufgabe können sie erkennen, dass mithilfe der Mathematik Sachverhalte aus Natur und Technik erklärt werden können. Damit wird mit dieser Aufgabe ein Sinnangebot gemacht, das sich auf den Nutzen von Mathematik für den Alltag bezieht.

Der Einfluss dieser Aufgabe auf die in der Studie rekonstruierten Sinnkonstruktionsprozesse von Schülerinnen und Schülern war unterschiedlich groß und von unterschiedlicher Art. So führte die Aufgabe bei dem Schüler Thomas zu einer Bestätigung seiner Sinnkonstruktion. Denn für Thomas, einem sehr leistungsstarken Schüler, lag der Sinn vom Mathematikunterricht darin zu lernen, „logisch zu denken, Sachen zu verknüpfen und daraus Folgen zu ziehen". Diese Sinnkonstruktion resultierte aus seiner fortwährenden Suche nach geistigen Herausforderungen und dem Wunsch, Formeln nicht einfach nur anzuwenden. Darüber hinaus hatte er ein ausgeprägtes Interesse an Forschung und Technik und bezeichnete die Anwendung von Mathematik im Alltag als „Nebenprodukt". Dennoch fand er es interessant, während der Mathematikstunden auch Informationen über außermathematische Themen zu bekommen. Eine gute Aufgabe war für ihn eine solche, die schwierig zu lösen ist und einen Alltagsbezug aufweist. Seine Sinnkonstruktion wurde durch die Bearbeitung dieser Aufgabe insofern bestätigt, als dass sie die beiden Kriterien vereinte, die er an eine gute Aufgabe stellte: Sie war nicht durch ein reines Anwenden bekannter Vorgehensweisen zu lösen und er bekam zusätzlich weitere Informationen über einen Sachverhalt, der ihn interessierte. Sie bot ihm also einerseits die Möglichkeit, sich geistig anzustrengen und zeigte ihm andererseits Einsatzmöglichkeiten von Mathematik auf.

Deutlich anders zeigte sich der Einfluss auf die Sinnkonstruktion bei Larissa. Bei ihr handelte es sich um eine leistungsschwache Schülerin, die sich auf der Suche nach dem Sinn des Mathematikunterrichts befand. Diesen vermutete sie in dem Nutzen der Mathematik für den Alltag. Allerdings war es ihr aktuell nicht möglich, diesen Sinn zu konstruieren. Aufgrund fehlender Erfolgserlebnisse im Unterricht verfügte sie nur über ein sehr geringes Selbstvertrauen in ihre mathematische Leistungsfähigkeit und war ständig bemüht, nicht aufzufallen aus Angst vor verletzenden Bemerkungen des Lehrers. Diese Faktoren wurden durch die Bearbeitung der oben vorgestellten Aufgabe verändert. Insbesondere durch die Offenheit der Aufgabe, aber auch durch deren Komplexität und die Art der Bearbeitung der Aufgabe in Gruppenarbeit fühlte sie sich integriert und konnte zum ersten Mal seit langem wieder erleben, dass auch sie fähig ist, eine Aufgabe zu lösen. Dies versetzte sie in die Lage, den Inhalt des Mathematikunterrichts wieder wahrzunehmen und sie konstruierte den Sinn, Berichte mithilfe der Mathematik verifizieren bzw. falsifizieren zu können. Denn bisher konnte sie die negativen Auswirkungen auf das Hörvermögen, die durch zu laute

Musik eines mp3-Players entstehen, nicht nachvollziehen. Die eigenständige Beschäftigung mit dieser Thematik, insbesondere der Vergleich weiterer im Text gegebener Dezibelwerte, führten bei ihr zu einem differenzierten Nachdenken über das Thema Lautstärke.

Resümee

Die kurzen Darstellungen der beiden Lernenden zeigen, dass dieselbe Aufgabe in verschiedener Weise und durch verschiedene Merkmale Einfluss auf die Sinnkonstruktionen der Lernenden haben kann. So erfuhr Thomas durch die Bearbeitung der Aufgabe eine Bestätigung seiner Sinnkonstruktion. Bei Larissa dagegen führte die Bearbeitung der Aufgabe dazu, dass sie endlich einen Sinn in der Mathematik finden konnte. Die Modellierungsaufgabe wirkte dabei auf zweifache Weise. Zum einen hatte die Aufgabe selbst und die Bearbeitung der Aufgabe Einfluss auf ihre persönlichen Einschätzungen über sich selbst und somit auf die Voraussetzungen für ihre Sinnkonstruktion. Diese Veränderung wiederum führte dazu, dass Larissas Sinnkonstruktion auch direkt unterstützt werden konnte.

Modellierungsaufgaben können demnach Sinnkonstruktionen von Schülerinnen und Schülern bestätigen und ermöglichen. Das intendierte Sinnangebot muss von den Schülerinnen und Schülern aber nicht angenommen werden.

Literatur

[1] Blum, Werner (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht. Trends und Perspektiven. In: Kadunz, G. (Hg.): Trends und Perspektiven. Hölder-Pichler-Tempsky , Wien. S. 15–38.

[2] Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (1997): Gutachten zur Vorbereitung des Programms "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". BLK Geschäftsstelle , Bonn.

[3] Gebhard, Ulrich (2003): Die Sinndimension im schulischen Lernen: Die Lesbarkeit der Welt. In: Moschner, B. u.a. (Hg.): PISA 2000 als Herausforderung. Perspektiven für Lehren und Lernen. Schneider Verlag, Hohengehren. S. 205–223.

[4] Kaiser-Meßmer, Gabriele (1986): Anwendungen im Mathematikunterricht; Bd 2. Empirische Untersuchungen. Franzbecker, Bad Salzdetfurth.

[5] Vollstedt, Maike; Vorhölter, Katrin (im Druck): Zum Konzept der Sinnkonstruktion am Beispiel von Mathematiklernen. In: Koller, H.-C. (Hrsg.). Sinnkonstruktion und Bildungsgang. Barbara Budrich , Opladen.

Beat WÄLTI, Thun

HarmoS, Bildungsstandards für drei Sprachregionen Jahrgangsstufen 8 und 11 (Klassen 6 und 9)

Die vorliegende Zusammenfassung basiert auf den Ausführungen von Helmut Linneweber-Lammerskitten zu «Das Kompetenzmodell HarmoS Mathematik».

Welche Veränderungen hinsichtlich Leistungsmessung und Leistungsbeurteilung auf die Mathematiklehrkräfte in der Schweiz nach Abschluss des HarmoS-Projekts Ende 2007 tatsächlich zukommen werden, ist schwer abzuschätzen. Im Extrem sind zwei Szenarien – ein wünschbares und ein zu vermeidendes – denkbar. Die Konstruktion von Kompetenzmodellen und die Einführung von nationalen Mindeststandards können zum einen zu einer wünschenswerten Harmonisierung der Lehrpläne und Lehrmittel, zu einer stärkeren Berücksichtigung bestimmter Kompetenzaspekte («Argumentieren und Begründen», «Explorieren und Erforschen») und zu mehr Chancengerechtigkeit führen. Beides kann jedoch auch – paradoxerweise gerade dann, wenn die Vernehmlassung und die Einführung der nun vorgeschlagenen Mindeststandards erfolgreich verläuft – zu einer Testeuphorie führen, die den Wert von Outputinstrumenten als Mittel zur Qualitätsentwicklung des Unterrichts überschätzt und in der Wahl von Testinstrumenten eher unkritisch verfährt. Gesichert ist zur Zeit der politische Wille, das vorliegende Kompetenzmodell bei der Entwicklung des Lehrplans für die gesamte deutsche Schweiz (bis 2012) als Grundlage zu nutzen.

1. Ergebnisse aus dem Validierungstest

Ziel des Valdierungstests war, für die Klassen 6 und 9 empiriegestützte Mindeststandards zu formulieren und diese mit genügend Aufgaben zu illustrieren. Da das Vorgehen als auch die Resultate für die Klassen 6 und 9 vergleichbar sind, beschränke ich mich auf einige Aussagen zu Klasse 9. In beiden Klassen haben jeweils knapp 7'000 Lernende die Aufgaben getestet, wobei die Lernenden in der Regel jeweils etwa 10% der Aufgaben bzw. 3 Testhefte mit jeweils etwa 10 Aufgaben bearbeiten.

Der Validierungstest wurde so angelegt, dass möglichst zu allen 6 getesteten Kompetenzaspekten (wie «Interpretieren und Reflektieren der Resultate») sowie den vier getesteten Kompetenzbereichen (wie «Raum und Form») sowie allen vier Kompetenzniveaus nach Möglichkeit jeweils mindestens zwei Items validiert werden sollten. Als validiert gelten diejenigen Items, die den Kriterien des Rasch-Modells (MNSQ bzw. Diskrimination) genügen sowie in den drei Sprachregionen jeweils vergleichbar gut gelöst wurden. Der Validierungstest hat gezeigt, dass auch eher lernschwache

Schülerinnen und Schüler in allen Kompetenzaspekten gefordert werden können und auch in Testsituationen entsprechende Aufgaben bewältigen. Für die Mindeststandards muss daher nicht zwischen anspruchsvollen Tätigkeiten (wie z.B. «Explorieren und erforschen») und einfachen Tätigkeiten (wie z.B. «Wissen, erkennen und beschreiben») unterschieden werden.

Gerade sie sollten im Unterricht nicht auf eher reproduzierende Tätigkeiten wie «Operieren und berechnen» bzw. «Wissen, erkennen und beschreiben» reduziert werden (siehe Abb.1).

Klasse 11	Raum & Form	Zahl & Variable	Funkt. Zus.hänge	Daten & Zufall	AN	Item	tot
Wissen, Erkennen und Beschreiben	2	6	5	8	I	21	
	3	4	2	2	II	11	
	6	2	2	2	III	12	
	0	0	3	0	IV	3	**47**
Operieren und berechnen	1	4	5	2	I	12	
	3	3	4	2	II	12	
	1	2	2	1	III	6	
	1	2	3	0	IV	6	**36**
Modellieren und mathematisieren	1	6	1	7	I	15	
	5	3	3	3	II	14	
	3	6	2	3	III	14	
	2	5	7	2	IV	16	**59**
Argumentieren und begründen	2	2	3	1	I	8	
	2	1	6	1	II	10	
	2	2	0	4	III	8	
	2	4	2	2	IV	10	**36**
Intrepretieren und reflektieren der Resultate	1	1	2	5	I	9	
	4	7	6	3	II	20	
	3	5	3	5	III	16	
	0	0	0	0	IV	0	**45**
Explorieren und erforschen	2	2	2	1	I	7	
	3	5	2	1	II	11	
	7	5	0	1	III	13	
	5	3	0	2	IV	10	**41**
I_{11}	9	21	18	24		72	
II_{11}	20	23	23	12		78	
III_{11}	22	22	9	16		69	
IV_{11}	10	14	15	6		45	
Total	**61**	**80**	**65**	**58**		264	

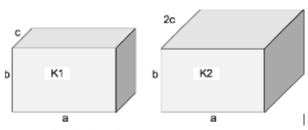
Abb. 1: Liste der validierten Items, Klasse 9 (bei HarmoS: Klasse 11)

Die Korrelationen zwischen den Kompetenzaspekten (in Abb.1 horizontal) und Kompetenzbereichen (vertikal) sind vergleichbar, Die einzelnen Werte schwanken zwischen 0.73 und 0.87. Diese sind damit wie erwartet hoch genug, um die durch die Items illustrierten Anforderungen als Teil einer gesamten mathematischen Kompetenz zu interpretieren, jedoch auch tief genug, um die einzelnen Kompetenzaspekte als gegeneinander abgrenzbare Tätigkeiten nachweisen zu können.

Da die nun zur Publikation frei gegebenen Items vor allem auch den Unterricht positiv beeinflussen sollen, ist deren Auswahl bzw. Entwicklung mit grosser Sorgfalt erfolgt. Trotz des erheblichen Mehraufwandes bei der Korrektur wurde daher die Mehrzahl der Items offen (kurz oder ausführlich) konstruiert, wie die folgende Übersicht zeigt.

17 Muliple-choice Aufgaben
Korrektur mit Scanner möglich
kaum Ratertraining nötig.

Die Aufgabe in Abb.2 wurde zu 45% richtig gelöst. Zuordnung: Raum und Form, Explorieren und Erforschen, Kompetenzniveau II zugeordnet.



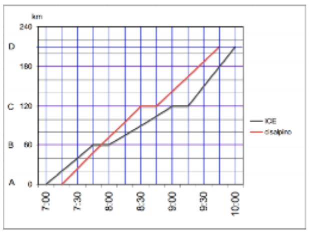
Kreuze die richtige Aussage an.

A ☐ Die Gesamtkantenlänge [cm] von K2 ist doppelt so gross wie diejenige von K1.
B ☐ Die Oberfläche [cm²] von K2 ist doppelt so gross wie diejenige von K1.
C ☐ Das Volumen [cm³] von K2 ist doppelt so gross wie dasjenige von K1.
D ☐ Gesamtkantenlänge, Oberfläche und Volumen von K2 sind doppelt so gross wie die entsprechenden Masse von K1.

Abb. 2

19 richtig - falsch Aufgaben
Korrektur mit Scanner möglich
kaum Ratertraining nötig.

Die Aufgabe in Abb.3 wurde zu 41% richtig gelöst. Zuordnung: Funktionale Zusammenhänge, Wissen, Erkennen und Beschreiben Kompetenzniveau II.



A Welcher Zug hat die grössere Durchschnittsgeschwindigkeit?
☐ ICE ☐ cisalpino

B Welcher Zug hat die grössere Höchstgeschwindigkeit?
☐ ICE ☐ cisalpino

C Welcher Zug fährt früher von A ab?
☐ ICE ☐ cisalpino

Abb. 3

92 Offen - kurz Aufgaben
Relativ einfach korrigierbar

Die Aufgabe in Abb.4 wurde zu 75% richtig gelöst. Zuordnung: Zahl und Variable, Operieren und Berechnen, Kompetenzniveau I.

Wie gross wird der Term T, wenn du die folgenden Werte einsetzt?
x = 3, y = 4, p = 5, q = 6

T = (6 • x : y) + (p • (q – 1))

Abb. 4

97 Offen - ausführlich Aufgaben
Aufwändige Korrektur,
Interratertraining

Die Aufgabe in Abb.5 wurde zu 65% richtig gelöst. Zuordnung: Zahl und Variable, Operieren und Berechnen, Kompetenzniveau I.

Rechne anstatt mit Variablen im Term T mit von dir frei gewählten Zahlen, sodass der Wert des Terms 100 ist.

T = (6 • x : y) + (p • (q – 1))

Abb. 5

2. Sprachregionale Unterschiede

Da die Testitems die nationalen Bildungsstandards illustrieren, wurden nach Möglichkeit Items verwendet, die in allen drei Sprachregionen vergleichbar gut gelöst wurden. Eine vertiefte Analyse der Unterschiede nach Sprachregionen steht noch aus, auch wenn erste Schlussfolgerungen gezogen werden können. So haben etwa die Lernenden aus der Romandie bei Aufgaben zu Argumentieren und begründen in der Regel besser abgeschnitten als die Lernenden der deutschen Schweiz, die ihrerseits Aufgaben zu Explorieren und Erforschen relativ gut bearbeiteten.

n + (n + 1) + (n + 2) ist immer durch drei teilbar.

A Wähle für n eine Zahl und prüfe, ob die Aussage für diese Zahl stimmt.

B Zeige, dass die Behauptung für alle Zahlen stimmt.

Abb. 6

Die Aufgabe in Abbildung 6 zeigt, wie unterschiedlich die Kulturen in den einzelnen Sprachregionen ausgeprägt sein können. In Abbildung 7 ist ein Ausschnitt aus dem Codiermanual abgebildet sowie die dazugehörigen Lösungen in den drei Sprachgruppen (absolute Zahlen).

		dt	frz	ital
Code 21	Es wird algebraisch gezeigt, dass der dritte Teil der Summe (n + 1) ist.	2	**13**	2
Code 22	1 + 2 = 3 AND n + n + n = 3n, sowohl 3n als auch 3 sind durch 3 teilbar.	20	**27**	8
Code 23	Induktiv: Wenn n um 1 vergrössert wird, vergrössert sich die Summe um 3.	2	2	1
Code 24	Wenn für n die Zahlen 1, 2, 3, ... eingesetzt werden, ergibt sich die Zahlenfolge 6, 9, 12, 15, 18, ...	1	2	0
Code 11	Ein Beispiel wird berechnet, ohne ausreichende Begründung.	126	98	97
Code 01	Andere Lösungen	28	32	14
		179	174	122

Abb. 7

3. Vorschlag Mindeststandards Jahrgangsstufe 11 (Klasse 9)

Die Mindeststandards selbst zielen sowohl auf eine minimale Testperformanz als auch auf die (empirisch noch nicht erhobene) Bereitschaft zum konstruktiven Umgang mit subjektiv als schwierig wahrgenommenen Aufgaben.

Die Vorschläge zu Bildungsstandards Mathematik legen zum einen fest, was alle Schülerinnen und Schüler in unterschiedlichen Themen- und Handlungsbereichen der Schulmathematik können sollen, zum anderen wie gut sie dies können sollen.

Am Ende des 11. Schuljahres (bisher: 9. Klasse) haben alle Schülerinnen und Schüler mit Bezug auf alle Kompetenzbereiche und Kompetenzaspekte mindestens das Kompetenzniveau I_{11} erreicht. Bezogen auf den Validierungstest 2007 entspricht dies einem Grenzwert von 400.

Sie sind fähig und bereit, in einem Team zur Lösung von Aufgaben des Kompetenzniveaus II_{11} und in einigen Fällen des Kompetenzniveaus III_{11} mit Fragen, Ideen oder Skizzen etwas beizutragen und Aufgaben, die sie selbst noch nicht befriedigend lösen konnten, im Dialog mit anderen zu analysieren und einer Lösung zuzuführen.

Da wir für alle Kompetenzaspekte Kompetenzniveau I fordern, werden die Mindeststandards durch die jeweiligen Anforderungen zu Kompetenzniveau I ergänzt bzw. erläutert. Untenstehend stellvertretend die Anforderungen zu «Explorieren und Erforschen».

Kompetenzniveau I_{11}, Erforschen und Explorieren: Sie können zu einer Aussage oder einem Sachverhalt ausgehend von einem Beispiel weitere Beispiele finden und Systeme mit wenigen Elementen und einfacher Struktur durch Variieren einzelner Elemente untersuchen.

Zahl und Variable	Form und Raum	Grössen und Masse	Funktionale Zusammenhänge	Daten und Zufall
Die S. können numerische, arithmetische und algebraische Zusammenhänge erkunden und erforschen, durch systematisches Variieren von Zahlen, Ziffern oder Operationen Lösungen und Hypothesen finden und durch selbst gewählte Zahlenbeispiele Verallgemeinerungen auf die Probe stellen.	Die S. sind fähig, ihnen noch unbekannte geometrische Gebiete und Sachverhalte zu explorieren, Vermutungen zu formulieren und durch systematische Tests zu bestätigen oder zu widerlegen.	Die S. sind fähig, Situationen durch explorative Messversuche zu erkunden und Eigenschaften, Relationen, Muster und Strukturen durch geeignete Grössenangaben und Grössenvergleiche zu erfassen.	Die S. können Vermutungen über funktionale Zusammenhänge in der Realität und in der Mathematik anstellen und testen. Sie können Erkenntnisse im Zusammenhang mit Funktionen und ihren graphischen Darstellungen durch eigene Untersuchungen und Überlegungen gewinnen.	Die S. sind fähig, statistische, probabilistische und kombinatorische Zusammenhänge zu erkunden und zu erforschen, durch Gedankenexperimente und Zufallsexperimente Lösungen und Hypothesen zu finden und zu erproben.

Ralf WAGNER, Engelbert NIEHAUS, Koblenz-Landau

Neuronale Netze und Förderung von mathematisch begabten Schüler(-inne)n in universitären Lehrveranstaltungen

Förderung von hochbegabten Schülern verbindet das Denken in komplexen mathematischen Zusammenhängen mit fächerübergreifenden Aspekten. In dem Vortrag wird deutlich, dass mathematische Inhalte der Sekundarstufe II in die Behandlung der neuronalen Netze integriert werden können. Betrachtet wird die Förderung auf drei verschiedenen Ebenen: der Lehrerausbildung, der Förderung der Schülerinnen und Schüler und der konkreten unterrichtlichen Umsetzung. Komplexe mathematische und offene fächerübergreifende Problemstellungen wurden in die Lehrerbildung integriert, um den angehenden Lehrern die Leistungsdifferenzierung und das Potenzial der Schülerinnen und Schüler bei einer gemeinsamen mathematischen Problemlösung zu veranschaulichen. Die gemeinsame Problemlösung soll auf die notwendigen Differenzierungsmaßnahmen im späteren Unterrichtsalltag vorbereiten.

1. Mathematikdidaktische Konzeption der Lehrveranstaltung.

Das im Rahmen von "WissenSchaf(f)t Zukunft" (Land RLP) und von der Deutschen Telekom Stiftung geförderte Projekt zielt auf die Einführung eines Förderprogrammes für Schülerinnen und Schüler mit besonderen Begabungen (siehe [3]) an der Universität Koblenz-Landau (Campus Landau) als Frühstudierende. Neben der originären Förderung von Schülerinnen und Schülern mit besonderen mathematischen Begabungen soll die Hochbegabtenförderung selbst zu einem integrativen Bestandteil der Lehrerausbildung entwickelt werden. Bevor didaktische Themen zu den individuellen Begabungen (z.B. Diagnostik und Förderung) mit Studierenden behandelt werden, ist es aus Gründen der Praxisorientierung sinnvoll, eine Vorstellung davon zu gewinnen, zu welchen außerordentlichen Leistungen Schülerinnen und Schüler in der Lage sind (siehe [6]). Durch eine Integration in die reguläre Lehramtsausbildung und das gemeinsame Problemlösen in Lehrveranstaltungen bleiben diese besonderen Begabungen kein abstrakter didaktischer Studieninhalt, sondern der tägliche Umgang mit Lernenden aus der Schule lässt die Bandbreite individueller Schülerleistungen sowie die Notwendigkeit der Diagnostik und Förderung deutlich werden (siehe [4]). Umgekehrt profitieren auch die teilnehmenden kleinen Schülergruppen davon, denn sie werden durch die angehenden Lehrerinnen und Lehrer bei den Problemlöseaufgaben im Kontext der Lehrveranstaltungen betreut.

2. Lehrplanbezug der Neuronalen Netze

Das Thema Neuronale Netze ist sowohl dazu geeignet, Inhalte des Lehrplanes Mathematik des Sekundarstufe I als auch II im Unterricht zu behandeln, als auch das Lernen selbst zum fächerübergreifenden Gegenstand des Unterrichts zu machen. Bezüglich der Sekundarstufe I stellt der Funktionsbegriff einen wichtigen Inhalt und eine Leitidee des Mathematikunterrichts dar (siehe [1] S. 5ff). Bestimmte Arten von Neuronalen Netzen können als Funktionen interpretiert werden, wobei Elemente des Definitionsbereiches als Eingaben verwendet werden und durch das jeweilige Netz eine dazugehörige Ausgabe im Wertebereich berechnet wird. Neuronale Netze sind in dieser Hinsicht besonders dazu geeignet, die Verkettung von Funktionen zu verdeutlichen. Ferner kann das zelluläre Aktivierungsverhalten durch eine so genannte Aktivierungsfunktion beschrieben werden (siehe [5] S. 33ff). In diesem Zusammenhang geht es um die Interpretation von Graphen (siehe [1] S. 99ff) einer Funktion von IR nach IR in einem fächerübergreifenden biologischen Kontext.

Durch die algebraische Auseinandersetzung und die Verwendung von Zellreferenzen in der Tabellenkalkulation können insgesamt unterschiedliche Berechnungen an künstlichen Neuronalen Netzen durchgeführt und über den funktionalen Zusammenhang die Verbindungsstruktur zwischen den einzelnen modellierten Zellen veranschaulicht werden. Dies leistet einen Beitrag zur Verdeutlichung der Leitidee "Funktion" in einem fächerübergreifenden biologischen Kontext. Ferner werden mit den Schülerinnen und Schülern die Vorteile und Grenzen dieser Programme bei entsprechenden komplexen Anwendungssituationen thematisiert.

In der Sekundarstufe II ist in der Analysis der Differenzierbarkeitsbegriff Gegenstand der Unterrichts (siehe [2], S.13ff). Bestimmte Neuronale Netze benötigen als Strukturelemente differenzierbare Funktionen, um verschiedene Optimierungsverfahren, wie beispielsweise das Gradientenabstiegsverfahren, anwenden zu können. Künstliche Neuronale Netze machen Fehler und der modellierte Lernprozess soll diesen Fehler schrittweise immer weiter verringern. Dieser wird durch nicht-negative Fehlerfunktionen beschrieben. An dieser Stelle besteht die Möglichkeit, eine Anwendung des Ableitungsbegriffes eindimensionaler Funktionen im Unterricht im Zusammenhang mit einer Fehlerminimierung von Soll- und Istausgaben eines einfachen Neuronalen Netzes zu behandeln. Dabei bietet es sich an, die jeweiligen Iterationsschritte des Optimierungsalgorithmus mit Hilfe einer Tabellenkalkulation berechnen zu lassen.

Die Netzwerkstruktur kann durch Matrizen aus der Linearen Algebra repäsentiert werden. Die Tabellenkalkulation verbindet die modellierte Netzwerkstruktur und die mathematische Darstellung als Matrix durch den interaktiven Umgang mit den Daten. Durch die Behandlung Neuronaler Netze wird die Problemlösefähigkeit (siehe [1], S. 3ff.) der Schülerinnen und Schüler gefördert, die in diesem Fall Lernziele im Bereich Modellierung mit Mathematik verfolgt (siehe [2], S. 17ff.) .

3 Fachliche Grundlagen und Behandlung des Themas in Lehrveranstaltungen

In der Lehrveranstaltung sind u. a. Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 10, die bisher keine Inhalte aus der Mathematik der Oberstufe im Unterricht behandelt hatten. Das Thema der Neuronalen Netze schafft die Möglichkeit den Bezug zur Schulmathematik und zu einem mehrdimensionalen Differenzierbarkeitsbegriff herzustellen. Die Grenzen der Schulmathematik werden in natürlicher Weise überschritten, da Zellbezüge in der Tabellenkalkulation in der Regel zu mehreren Zellen hergestellt werden und damit zwangsläufig mehrdimensionale Funktionen von IR^n nach IR betrachtet werden. Die Lehramtsstudierenden werden in den Problemlöseprozess integriert, indem die Studierenden die Schülerinnen und Schüler bei der verbalen Beschreibung von fächerübergreifenden Aspekten unterstützen und Hilfestellung bei der formalen mathematischen Beschreibung und der Umsetzung in die Tabellenkalkulation leisten. Die Schwierigkeiten in den Arbeitsgruppen mit den Schülerinnen und Schülern liegen in einem Bereich, der von den Studierenden verlangt, Tabellenkalkulation als mathematisches Modellierungswerkzeug zu begreifen. Da das Seminar zur Hypothesenbildung für eine empirische Studie verwendet wurde, ergibt sich aus der Auseinandersetzung mit diesem Thema die Frage, in welchem Maße die Studierenden in der Tabellenkalkulation die algebraischen Begriffe wie Variable, Term, Funktion erkennen und nutzen können. Diese fachlichen und didaktischen Kenntnisse benötigen die Studierenden u. a. auch dann, wenn sie die Tabellenkalkulation im Mathematikunterricht einsetzen, denn es geht im Mathematikunterricht nicht um eine Anwenderschulung in der Syntax der Tabellenkalkulation, sondern um die Auseinandersetzung mit fundamentalen Ideen aus der Mathematik (z.B. Funktionsbegriff). In diesem Punkt greifen die Lehrerausbildung und die konkrete Ausbildung im Kontext der Veranstaltung zur Schüleruniversität ineinander.

4 Fazit

Bei der Durchführung der Lehrveranstaltungen im Zusammenhang mit der Schüleruniversität wird sowohl aus fachlicher Hinsicht für die Schülerinnen und Schüler als auch aus didaktischer Sicht für die Studierenden (Lehramt) deutlich, dass dieses Konzept beiden Seiten einen Nutzen bringen kann, aber auch, dass bei der Konzeption auf einige Dinge geachtet werden sollte.

Als empirische Forschungsfrage ergibt sich bei der Behandlung des Themas „Neuronale Netze“, inwieweit durch die Problemlöseaufgaben das approximative Denken als wichtige mathematische Kompetenz gefördert werden kann. Dieser Bereich ist bereits in der Sekundarstufe I bei der Behandlung der reellen Zahlen und der Intervallschachtelung bei irrationalen Zahlen, aber auch in der Sekundarstufe II beim Konvergenzbegriff von Folgen und den daraus abgeleiteten Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit von großer Bedeutung. Die während der Lehrveranstaltung behandelten Themen gehen natürlich über die in der Schule betrachteten Zusammenhänge hinaus. Dabei stellt sich die Frage, wie sich die dort erworbenen fachdidaktischen Grundkompetenzen der Lehramtsstudierenden im späteren Berufsleben in geeigneten Differenzierungsmaßnahmen für Schülerinnen und Schüler niederschlagen.

5 Literatur

[1] Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5 – 9/ 10), (2007), Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz

[2] Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach, (1998), Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung Rheinland-Pfalz

[3] Lernen macht intelligent. Warum Begabung gefördert werden muss, (2007), A. Neubauer, E. Stern, Dva München

[4] Mathematisch besonders begabte Kinder als schulische Herausforderung, (2002), A. Peter-Koop, P. Sorger, Mildenberger Offenburg

[5] Theorie der neuronalen Netze, (1996), R. Rojas, Springer-Verlag, Berlin

[6] Erfahrungsbericht, (2000), Schülerin an der Universität Köln, http://mi.uni-koeln.de/MathNet/mn_categories/pages/ hb_unijournal.html(URL geprüft am 01.03.2008)

Sebastian WARTHA, Bielefeld

M glichkeiten und Grenzen soft aregest tzter Diagnose von echenst rungen

1 Individuelle Diagnose Ans ruch und irklichkeit

Ein Schwerpunkt sowohl in öffentlichen und politischen als auch in pädagogischen und fachdidaktischen Debatten ist die Forderung nach (besserer) *individueller* Diagnose und Förderung. Es herrscht ein breiter Konsens in Bildungspolitik und Wissenschaft, dass Diagnostik und Förderung als schulische Aufgaben gesehen werden. Dafür ist eine qualitativ hochwertige Diagnostik notwendig, die wiederum hohe Kompetenzen der Lehrkräfte voraussetzt.

Über diese auf Förderung und Diagnostik zielende allgemeine bildungspolitische Entwicklung hinaus ist ein klarer Trend erkennbar, das Thema Rechenschwäche bzw. Rechenstörung als eine Aufgabe von Schule endlich anzugehen. Die KMK hat den Ländern auferlegt, Grundsätze zur Förderung von Schülerinnen und Schülern mit besonderen Schwierigkeiten in der Mathematik zu entwickeln. Inzwischen liegen (z.B. in Niedersachsen und Hessen) erste solche Erlasse vor, andere Länder (z.B. Berlin und Sachsen) arbeiten daran. Offen bleibt jedoch, wie der in diesen Verordnungen festgeschriebene diagnostische Auftrag im Fach Mathematik von Lehrerinnen und Lehrern erfüllt werden kann.

Die derzeitig verfügbaren Testinstrumente (z.B. ZAREKI, OTZ, Hamburger Rechentest, ERT) können allenfalls deskriptiv genutzt werden, um Einzelleistungen des Schülers an einer normierten Stichprobe zu vergleichen oder auf Risikokinder im Allgemeinen aufmerksam zu werden. Eine Entwicklung individueller Förderkonzepte ist auf der Grundlage ihrer Resultate nicht möglich, da zur Auswertung nur die *Ergebnisse* der Schülerantworten herangezogen, die aufschlussreicheren *Bearbeitungs-prozesse* jedoch unberücksichtigt bleiben. Die Ableitung von Förderplänen ist nur möglich, wenn die Bearbeitungs- und Denkprozesse von Kindern in die Diagnose einfließen können. Prozessorientierte Diagnoseverfahren sind beispielsweise bei Schipper (2007) ausführlich beschrieben. Hierbei werden sowohl Materialhandlungen durch direkte Beobachtung als auch mentale Prozesse über die Methode des Lauten Denkens analysiert. Entscheidend für Aussagen über die Art der Schwierigkeiten beim Lernen von Mathematik sind vor allem die eingesetzten Strategien von Kindern beim Bearbeiten von theoriegeleiteten Aufgabenstellungen. Im Gegensatz zu produktorientierten Tests können auf der Basis der entsprechenden

Analysen individuelle Förderkonzepte für die Kinder entwickelt werden.

Allerdings stellt diese Art der Diagnostik sehr hohe Anforderungen an den Testleiter bzw, die Lehrkraft. Fundierte didaktische Kompetenzen in den zu untersuchenden Inhaltsbereichen sind ebenso Voraussetzung für Durchführung und Auswertung der Diagnose wie methodisches und praktisches Wissen über qualitative Verfahren. In der Regel kann nicht davon ausgegangen werden, dass gegenwärtig praktizierende Lehrerinnen und Lehrer über dieses Wissen verfügen.

onze t des Tests

Um dem offenkundigen Mangel an konstruktiv nutzbaren Testverfahren für die Problematik der Rechenschwäche in der Grundschule entgegenzuwirken, wird derzeit der Bielefelder Rechentest als computergestütztes Diagnoseverfahren entwickelt. Die Zielgruppe sind Schülerinnen und Schüler in der zweiten Hälfte des zweiten Schuljahres. Diese bearbeiten Aufgaben, die nach derzeitigem Stand der Forschung Hinweise auf Rechenstörungen liefern können (Swanson erma, 2006). Im Mittelpunkt der Beobachtung stehen folgende Bereiche:

(1) Verfestigtes zählendes Rechnen: Spätestens wenn der Zahlenraum über 20 hinaus erweitert wird, müssen Strategien zur Addition und Subtraktion entwickelt werden, die über zählende Verfahren hinausreichen. Erwünschte Strategien wie das schrittweise Rechnen, das Nutzen von Tausch-, Verdopplungs- oder Hilfsaufgaben erfordern spezifische Voraussetzungen. Hierzu gehören beispielsweise die Einsicht in Strukturen von Arbeitsmitteln (Hundertertafel) und das Auswendigwissen der Zahlzerlegungen sowie der Verdopplungen aller Zahlen bis einschließlich 10.

(2) Probleme bei der räumlichen Wahrnehmung: Häufig sind Schüler noch nicht sicher in der Unterscheidung bzw. Zuordnung von rechts und links. Die sichere Unterscheidung ist Voraussetzung für erfolgreiches Mathematiklernen, da so gut wie alle mathematischen Arbeitsmittel und Veranschaulichungen mit der Richtung operieren. Darüber hinaus wird räumliches Vorstellungsvermögen als Grundlage für den Aufbau mathematischer Kompetenzen gesehen.

(3) Intermodalitätsprobleme: Hier steht das Ausbilden von Grundvorstellungen als notwendige Voraussetzung für Übersetzungen zwischen Darstellungsformen im Vordergrund.

Übersetzungsprozesse zwischen Material (Schieben von drei und dann vier Perlen am Rechenrahmen), bildlichen Veranschaulichungen

(3 und 4 Punkte), Rechengeschichten (A hat 4 Puppen, B hat 3, wie viele haben sie zusammen) und der mathematischen Symbolschreibweise (3 4) sind nur möglich, wenn Grundvorstellungen zu den Zahlen und den Rechenoperationen aktiviert werden können.

Die vom Programm vorzunehmende Analyse wertet Fehler und Bearbeitungszeiten aus. Es können Untersuchungen zu einzelnen Schülern oder aggregierten Schülergruppen durchgeführt werden, aus denen hervorgehen soll, in welchen mathematischen Teilbereichen individuelle Stärken und Schwächen vorliegen und wie diese interpretiert werden können. Die Analysen und Interpretationen sind so angelegt, dass den Lehrkräften einerseits Anregungen für ergänzende prozessorientierte Diagnostiken gegeben, andererseits Vorschläge für individuelle Förderpläne unterbreitet werden.

eis ielmodul Zahlenh user

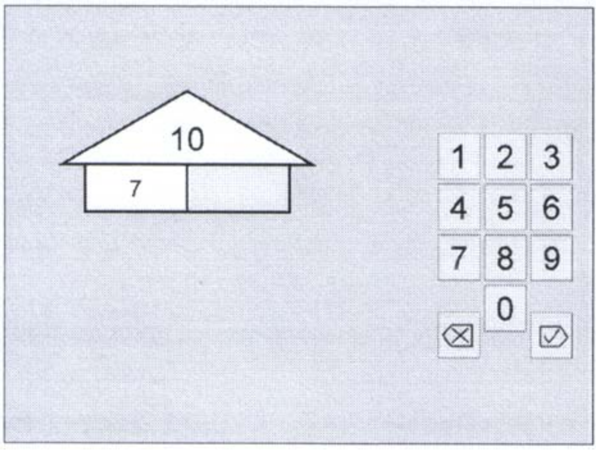


Abb. l: Bildschirm Zahlenhäuser

Das Auswendigwissen der Zahlzerlegungen aller Zahlen bis einschließlich 10 ist eine notwendige Voraussetzung für den Erwerb von Rechenstrategien, insbesondere des schrittweisen Rechnens. Können die Zahlzerlegungen nicht in einer angemessen kurzen Zeit wiedergegeben werden, so ist das ein Erklärungshinweis für besondere Schwierigkeiten beim Rechnen und zugleich ein Ansatzpunkt für Fördermaßnahmen. Operationalisiert ist die Überprüfung der Zahlzerlegungen über das Format Zahlenhäuser (Abb. l).

Im Beispiel soll zur 7 die fehlende 3 eingegeben werden. Das Ergebnis kann über das Nummerfeld mit Maus oder über die Tastatur des P s eingegeben werden. Mit Klicken auf den Pfeil nach rechts wird die nächste Aufgabe präsentiert. Zu jedem Zahlenhaus werden maximal sieben Items präsentiert. Nach Ablauf von 60 Sekunden wird kein neues Item sondern ein neues der insgesamt vier Zahlenhäuser gestartet.

Für die Auswertung werden Lösungshäufigkeiten, die gemittelten

Bearbeitungszeiten pro Item und Fehleranalysen (wie beispielsweise Zählfehler oder Zahlendreher) herangezogen. Rückschlüsse auf zählende Verfahren liefern darüber hinaus Analysen, die die Bearbeitungszeiten mit der Größe der gesuchten Zahl vergleichen: Wenn bei der Ergänzungsaufgabe 2 bis 10 deutlich mehr Zeit benötigt wird als bei der Aufgabe 7 bis 1 O , dann liegt die Vermutung nahe, dass das Ergebnis zählend ermittelt wurde.

M glichkeiten und Grenzen

Obgleich davon ausgegangen wird, dass über Fehler- und Zeitanalysen Defizite bei Bearbeitungsprozessen aufgedeckt werden können, ersetzt ein softwaregestütztes Diagnoseverfahren eine prozessorientierte Diagnostik nicht. Der Lehrkraft sollen vielmehr gezielte Hinweise aufweiterführende Fragen an das betreffende Kind gegeben werden. Dem omputer kann die Untersuchung von Ausmaß und Art der Defizite demnach nicht völlig überlassen werden. Sein Zweck wird hier einerseits in der Arbeits- und Zeitökonomisierung gesehen, andererseits soll er ein Stück weit die Funktion einer gezielten Lehrerfortbildung in Bezug auf Diagnose übernehmen.

In der didaktischen Forschung ist die Frage der Validität von computergestützten Testverfahren in dieser Altersgruppe noch weitgehend ungeklärt. Hier versprechen wir uns über umfangreich angelegte Studien zur Vergleichbarkeit von Interview- und rechnergestützten Untersuchungen neue Erkenntnisse über die Auswirkungen des Aufforderungscharakters (Threlfall, et al., 2007) der Testdarbietung auf die Validität derartiger Diagnoseverfahren.

Literatur

Schipper, W, (2007). Prozessorientierte Diagnostik von Rechenstörungen. In . H. Lorenz, W. Schipper (Hrsg) *Hendrik Radatz - Impulse für den Mathematikunterricht* (S. 105 - 116). Braunschweig: Schroedel.

Swanson, H.L., erman, 0. (2006). Math Disabilities: A selective meta-analysis of the literature. *Review ofEducational Research, 76 (2),* 24 274.

Threlfall, ., Pool, P., Homer, M., Swinnerton, B. (2007). Implicit aspects of paper and pencii mathematics assessment that come to light through the use ofthe omputer. *Educ Stud Math, 66,* 335-34 .

Christoph WASSNER, Nürnberg & Stefan KRAUSS, Kassel

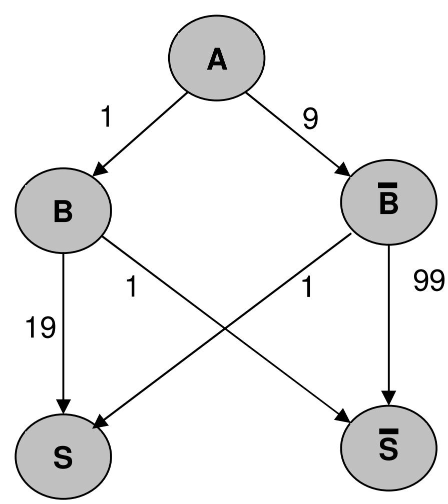
Natürliche Häufigkeiten – Rückschau und Ausblicke zu einem gewinnbringenden didaktischen Konzept

1. Häufigkeitsmodellierung mit dem „Wahrscheinlichkeitsabakus“

Ein Pionier auf dem Gebiet der Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, ARTHUR ENGEL, schrieb bereits 1973 im Vorwort seines bekannten Werkes: „Wahrscheinlichkeit und Statistik sind heute ein unentbehrliches Rüstzeug für alle Natur- und Geisteswissenschaften geworden. […] Die Integration der Wahrscheinlichkeit und Statistik in den Unterricht **aller** Stufen wird den Mathematikstoff entscheidend bereichern, d.h. interessanter und nützlicher machen.“ (Engel, 1973, S.5). Mit dieser Vision sollte Herr Engel Recht behalten. Jedoch dauerte es leider nochmal ca. 30 Jahre, bis die Integration in dieser Weise in allen Ländern verbindlich umgesetzt wurde (im Rahmen der KMK-Bildungsstandards).
Eine Idee, die er aber leider nicht explizit für die Didaktik ausbaute, ist der Wahrscheinlichkeitsabakus (Engel, 1975). Mit diesem Algorithmus ist es möglich, jeden diskreten stochastischen Prozess als einen „random walk on a graph“ zu beschreiben. Das ist didaktisch umso bedeutsamer, da es sich auf dem Niveau der Sekundarstufe I praktisch ausschließlich um diskrete stochastische Prozesse handelt. Wir übertragen diese Idee auf eine typische Anwendungssituation bei mehrstufigen Zufallsversuchen:

> Rauchsensoren eines bestimmten Typs bieten einen einigermaßen zuverlässigen Schutz, indem sie bei Ausbrechen eines Brandes Alarm melden. In durchschnittlich 5 % aller Brandfälle zeigt die Anlage keinen Alarm. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms beträgt 1% pro Tag. In der Fabrikationshalle liegt das tägliche Brandrisiko bei 10%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in der Halle brennt, wenn die Sirene heult.

Dieser Graph veranschaulicht die Situation im Engelschen Sinne. Die Knoten heißen hier „Zustände“. Vom Anfangszustand A kann man die zwei Zustände B (für „Brand“) und $\overline{B}$ erreichen. Von diesen aus führen jeweils wieder Pfade zu den Zuständen S (für „Sirene heult“) und $\overline{S}$. Von A aus werden nun Spielchips in beliebiger Zahl durch den Graphen „gepumpt“. In jeder Verzweigung gibt es ein „Verhältnis“, das die mögliche Bewegung der Spielchips durch den Graphen bestimmt. Ist etwa in der ersten Verzweigung das

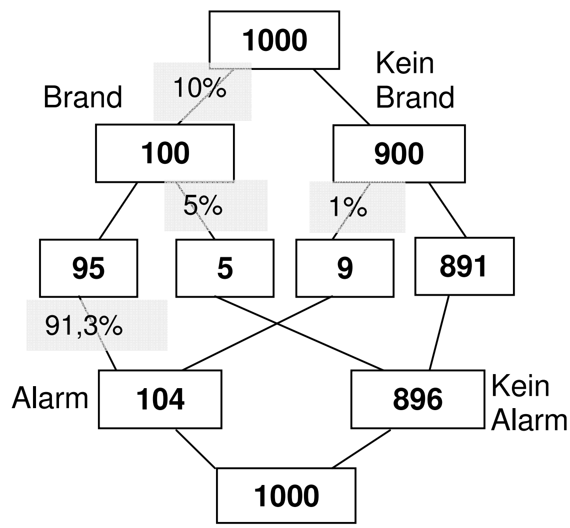


Verhältnis 1 : 9, dann können nur jeweils 10 Chips gleichzeitig von A nach B (1) bzw. $\overline{B}$(9) wandern. Befinden sich in A nicht Vielfache von 10 Chips, so müssen sie in A bleiben.

Das Ende dieses „Spiels“ wird erst dann erreicht, wenn sich alle Chips in den „Endzuständen“ S oder $\overline{S}$ befinden. Für den Übergang in diese „zweite Stufe“ benötigt man gemäß dem Verhältnis von B aus Vielfache von 20 (19+1) Chips, von $\overline{B}$ aus Vielfache von 100 (1+99) Chips. Da von A nach $\overline{B}$ immer je 9 Chips gleichzeitig wandern, müssen sich also erst 900 Chips in $\overline{B}$ ansammeln, ehe sie sich gemäß dem Verhältnis 1 : 99 auf die Endzustände S (9) bzw. $\overline{S}$ (891) verteilen können. In B haben sich dann aber bereits 100 Chips angesammelt, die sich gemäß dem Verhältnis 19:1 auf S (95) bzw. $\overline{S}$ (5) verteilen.

2. Vom „Abakus“ zum Häufigkeitsbaum

Wenn wir uns nun vorstellen, dass in jedem Zustand ein Zähler angebracht wäre, der die durchlaufenden Chips gezählt hat, ergeben sich genau die Häufigkeiten, die wir in unseren bisherigen Arbeiten als *natürliche Häufigkeiten* bezeichnet haben. In einem Baumdiagramm, das auch die umgekehrte Richtung beinhaltet, kann man den „Endzustand“ nach 1000 Chips so darstellen.



Ergebnisse dieses „idealisierten“ Experiments (oder einer entsprechenden Simulation) sind Erwartungswerte, d.h. die Werte, die sich in einem entsprechenden realen Zufallsexperiment am wahrscheinlichsten ergeben würden. Der Einwand ist berechtigt, dass wir bei (statistisch) relativ kleinen Zahlen von z.B. 1000 bei einem realen Experiment auch deutliche Abweichungen von den „Idealwerten“ zu erwarten hätten. Aber – und das ist ja gerade der besondere Wert des Abakus bzw. der natürlichen Häufigkeiten als *Heuristik* – man tut so, als ob das Ergebnis des „idealisierten“ Experiments das Ergebnis eines realen Experiments wäre und erhält somit die bestmögliche Prognose für den Ausgang (vgl. Wassner, Biehler & Martignon, 2007). Man kann mit diesem „Trick“ in der Lehr-Lernsituation viel erreichen:

1. Wahrscheinlichkeiten (also die bestmöglichen Prognosen) können ohne vorherige Herleitung wahrscheinlichkeitstheoretischer Regeln einfach mittels Proportionen ermittelt werden.

2. Selbst ohne irgendeinen Begriff von Wahrscheinlichkeit (z.B. in der Primarstufe bzw. frühen Sekundarstufe) kann eine derartige Prognose-situation bereits verständig modelliert werden.

3. Auch wenn man derlei Situationen auf höherem Niveau behandeln will (d.h. mit den formalen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung), schafft eine entsprechende Veranschaulichung die nötige Klarheit und ermöglicht eine Überprüfbarkeit der Regeln.

4. Schließlich kann das Wesen des Zufalls, also das Abweichen der realen Daten von den „Modellwerten“, nur über Häufigkeitsbetrachtungen wirklich untersucht und erkannt werden.

3. Vom „idealisierten“ Experiment zum „realistischen“ Experiment

Weitgehend unveröffentlicht, machte Arthur Engel auch konkrete Vorschläge zur Verwendung seines Abakus (oder besser Graphenspiels) im Stochastikunterricht. Neben der Bestimmung von Erwartungswerten könnten demnach Spielchips durchlaufende Graphen auch für Real-experimente eingesetzet werden, wenn man in jeder Verzweigung sozusagen ein entsprechendes Zufallsgerät „einbaut“. Zu Zeiten von Herrn Engel gab es keine Computer oder Taschenrechner, die Zufallszahlen erzeugen konnten. Heutzutage gibt es Simulationsmöglichkeiten mit entsprechender Computersoftware.[1] Das Resultat eines entsprechenden Realexperiments oder einer Simulation wird mehr oder weniger genau die erwarteten Werte liefern. Eine wesentliche Erfahrung, die in der Schule relativ früh vermittelt werden soll, ist, dass man bessere Prognosen bei größeren Anzahlen machen kann. Diese zentrale Idee wird aber viel zu schnell wieder fallen gelassen, weil nach Einführung des Wahrscheinlich-keitsbegriffes Situationen meist nur noch idealisiert modelliert werden. Das idealisierte und realistische „Simulieren“ mit Häufigkeitsbäumen wäre eine gewinnbringende Möglichkeit, mehr Verständnis für den Zusammenhang von Modell und Zufall zu schaffen. Eigene erste Unterrichtserfahrungen bestätigen diese Idee.

[1] Umsetzung z.B. in der Trainingssoftware zu Sedlmeier & Köhlers (2001); Weitere Umsetzungen in gängiger Software sind von den Autoren dieses Artikels bei Anfrage erhältlich.

4. „Natürliche Häufigkeiten“ in der Literatur

Über viele Jahre hinweg wurde Engels Idee des idealisierten Experiments mit Graphen, die natürliche Häufigkeiten „erzeugen“, in der didaktischen Literatur nicht mehr beachtet. Die Ehre gebührt − und das sollte an dieser Stelle auch nochmal ins Gedächtnis gerufen werden − Psychologen wie Gerd Gigerenzer, die aus kognitiver Sicht v.a. an der Frage der Verkomplizierung von Urteilen unter Unsicherheit durch Repräsentationen mit normierten Wahrscheinlichkeitswerten arbeiteten. Die durchschlagenden Erfolge ihrer Testpersonen, wenn mit natürlichen Häufigkeiten modelliert wurde, wiesen auf das Potential als didaktische Idee hin (Gigerenzer & Hoffrage, 1995). In der Didaktik wurde sie dann in einem Projekt (am MPI Berlin und Universität Kassel)[2] für den Unterricht aufbereitet und getestet. Lerngewinne wurden in vielfältiger Weise empirisch belegt. Weiterhin wurde deutlich, dass durch die hierarchische Struktur der Baumdiagramme das Prozesshafte von Zufallssituationen am leichtesten gedanklich nachzuvollziehen ist (Wassner, Krauss & Martignon, 2002; Wassner, 2004).

In neuerer Zeit wird das Konzept „natürliche Häufigkeiten“ und entsprechende Veranschaulichungen in der oben beschriebenen Form in didaktischen Veröffentlichungen aufgegriffen. Hier einige Beispiele: Kernlehrplan Mathematik NRW (2004), Lehrbuch Büchter & Henn (2007, S. 223f.), in Fachzeitschriften (z.B. Pinkernell, 2006) und in didaktischer Software (VU-Statistik, 2005). Bisher kaum zu finden ist die Verwendung in Schulbüchern. Im Rahmen unserer Unterrichtsstudien erstelltes Material könnte als Anregung hierfür dienen. (Wassner et al., 2004)

[2] DFG-gefördert von 2001-2003, Projektleiter: L.Martignon, R.Biehler, P.Sedlmeier

Literatur

Büchter, A. & Henn, H.W. (2007). Elementare Stochastik, 2.Aufl. Heidelberg: Springer.

Engel, A. (1973). Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Stuttgart: Klett Verlag.

Engel, A. (1975). The Probabilistic Abacus. Educational Studies in Mathematics Vol.6/1, 1-22.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. Psychological Review 102, 684-704.

NRW (2004). Mathematik Kernlehrplan Gymnasium Sek. I. Frechen: Ritterbach.

Pinkernell, G. (2006). Test positiv – Diagnose negativ. Mathematik lehren 138, S.50-55

VU-Statistik (2005). S II, Mathematik interaktiv, auf CD-ROM. Braunschweig: Schroedel

Wassner, C., Krauss, S. & Martignon, L. (2002). Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein? Praxis der Mathematik 44 (1), 12-16.

Wassner, C. (2004). Förderung Bayesianischen Denkens – kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen. Hildesheim: Franzbecker.

Wassner, C., Biehler, R., Schweynoch, S. & Martignon, L. (2004). Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit – Arbeitsmaterialien für den Stochastikunterricht. Online: https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/ > Suchbegriff: Kadisto

Wassner, C., Biehler, R. & Martignon, L. (2007). Das Konzept der natürlichen Häufigkeiten im Stochastikunterricht. Der Mathematikunterricht, 53 (3). S.33-44.

Christof WEBER, Zürich

Die etwas andere mündliche Matura – für eine neue Kultur mündlichen Prüfens

Üblicherweise wird Gymnasiastinnen und Gymnasiasten in ihrer mündlichen Matura eine mathematische Aufgabe vorgelegt. Sie sehen sie zum ersten Mal und müssen sie vorlösen. Anschließend sind mathematische Sätze oder Begriffe zu erläutern und Fragen zu beantworten. Eine solche mündliche Prüfung wird von uns Prüfenden gerne als „Gespräch über Mathematik" bezeichnet, eine tendenziell euphemistische Formulierung.[1]

Trotz einer sich wandelnden *Unterrichts*kultur hat sich an diesem *Prüfungs*modus kaum etwas verändert. In der Lehrerausbildung lernt man nicht, wie mündliche Prüfungen entsprechend zu gestalten wären, und die vagen gesetzlichen Vorgaben zu mündlichen Abschlussprüfungen reproduzieren den Prüfungsmodus auch nur. Folglich greift man als prüfende Lehrkraft zur Minimalvariante und legt mathematische Aufgaben vor. Wie könnte eine Prüfungsform aussehen, die die Maturandinnen und Maturanden gezielter zur *freien Rede* und zur *Reflexion über Mathematik* anregt?

1. Stärken und Schwächen

Der skizzierte Prüfungsmodus erlaubt, auf Prozesse und Begründungen zu fokussieren und die Prüfung adaptiv zu gestalten, zwei unbestrittene Stärken. Er hat aber auch einige Schwächen: Zum einen sind noch einmal mathematische Aufgaben Prüfungsinhalt, wie schon in der schriftlichen Prüfung. Zum anderen weist die Unterrichtsforschung darauf hin, dass Lehrkräfte in der Praxis dazu neigen, ihren Schülerinnen und Schülern viel zu viele Fragen zu stellen, allerdings ohne sich dessen bewusst zu sein. Zudem zielen sie meistens auf Fakten- und Verfahrenswissen (TIMSS-Video 2003, Frey 2004, Begehr 2005, Klieme et al. 2006). Entsprechend fallen sie den Schülerinnen und Schülern auch in ihrer Rolle als Prüfende allzu schnell nachfragend, korrigierend oder gar belehrend ins Wort und unterdrücken mit ihrem Frageverhalten die Redeanteile ihres Gegenübers. In der Folge sind viele Prüflinge – durch den Unterricht bereits entsprechend konditioniert – auch in ihrer Prüfung darum bemüht, aus den Voten der prüfenden Lehrkraft herauszuhören, was diese wohl hören möchte, statt sich selbstbewusst auf die Präsentation ihrer eigenen Gedanken zu konzentrieren.

[1] In der Schweiz werden – im Gegensatz zu Deutschland – *alle* Maturandinnen und Maturanden nicht nur schriftlich, sondern auch mündlich geprüft, und zwar während fünfzehn Minuten. Die erzielte Note geht zu einem Viertel in die Mathematik-Endnote ins Maturazeugnis ein, genau gleich wie die Note der vierstündigen schriftlichen Prüfung.

2. Ansätze für eine neue Kultur mündlichen Prüfens

Alle mir bekannten prüfungsdidaktischen Vorschläge zur Überwindung des kritisierten Frageverhaltens von Lehrkräften gehen in zwei Richtungen:

- Prüfungsfragen sind nicht nur kognitiv anspruchsvoll zu gestalten, sie sollen auch den Herausforderungsgehalt sowie die Eigeninitiative und Selbständigkeit aufgreifen, die moderne Lernarrangements den Schülerinnen und Schülern bereits zumuten. (Girmes 2003).
- Nach jeder Frage und nach jeder Antwort sind 3 Sekunden Sprechpause einzuhalten („3-Sekunden-Regel“: Budd-Rowe 1986, nach Frey 2004).

In der Umsetzung dieser beiden Punkte wird dafür plädiert, Maturandinnen und Maturanden in ihrer mündlichen Prüfung vermehrt *offene* mathematische Aufgaben zu stellen und sie die Lösungen ihrer Aufgaben in der Form eines *Kurzvortrags* präsentieren zu lassen (Buck/Dürr). Vereinzelt wird den Studierenden im Voraus eine Liste anspruchsvoller Standardfragen abgeben (Frey 2004) oder es wird vorgeschlagen, sie auf der Basis von Videos auf ihre mündliche Prüfung hin zu trainieren (Althoff/Koller 1992).

3. Die etwas andere mündliche Matura

Meine Klasse erhielt drei Monate vor der Maturaprüfung schriftlich alle Prüfungsfragen zur Vorbereitung. Nachstehend zwei (von zwölf) Fragen:

„In der Mathematik geht es um den Satz von Pythagoras*“:*

· *Nennen Sie drei Situationen aus möglichst unterschiedlichen Bereichen Ihres Mathematikunterrichts, in denen der Satz von Pythagoras eine entscheidende Rolle spielt.*

· *Erläutern und vergleichen Sie diese Situationen miteinander.“*

„Zahlbereichserweiterung *– ein zentrales mathematisches Prinzip“:*

· *Nennen Sie drei möglichst folgenreiche Zahlbereichserweiterungen aus Ihrem Mathematikunterricht.*

· *Erläutern Sie die Zahlbereichserweiterungen insbesondere im Hinblick auf die Frage, welche (alten) Eigenschaften der Zahlen bei der jeweiligen Erweiterung verloren gehen und welche (neuen) Eigenschaften dadurch gewonnen werden.*

Jede Prüfungsfrage ist nach dem gleichen Schema konstruiert:

- Sie beginnt mit einer Behauptung zur Schulmathematik, die auf einen Inhalt zielt, der auch aus Schülerperspektive zentral sein dürfte. So ist es leicht vorstellbar, dass jemand am Ende seiner Schulzeit den Einsatz des pythagoreischen Satzes oder Zahlbereichserweiterungen als wiederkehrendes, typisch mathematisches Thema erkennt. Damit wird jede Prüfungsfrage unter eine Idee gestellt, die auf den ersten Blick besehen banal zu sein scheint, die sich aber längsschnittartig durch den gymnasialen Mathematikunterricht zieht. Mit anderen Worten beginnt jede Prüfungsfrage mit einer *Kernidee der Schulmathematik*.

- Anschließend folgen zwei Aufforderungen: Erstens sollen drei entsprechende Situationen genannt werden, die aus möglichst unterschiedlichen Bereichen der Schulmathematik (Arithmetik, Algebra, Geometrie/Vektorgeometrie, Analysis, Stochastik) stammen. Zweitens sollen die genannten Situationen erläutert werden (Beispiele, Erklärungen, Probleme) und miteinander verglichen werden. Im Falle des Pythagoras etwa sind Ausführungen zu a) dem Satz (Anwendung, Umkehrung, Beweis), b) Abstandsberechnungen (in der Eben/im Raum, Polarkoordinaten), c) Verallgemeinerungen (Kosinussatz, Vierecke bzw. Vierflächner, Satz von Fermat), d) Kreis- und Ellipsengleichung, e) Länge krummliniger Kurven und Mantelfläche von Rotationskörpern u.s.w. u.s.f. denkbar.

Solche Prüfungsfragen sind reichhaltig und anspruchsvoll. Sie zielen nicht primär auf Fakten- und Verfahrenswissen, sondern darauf, mathematische Sachverhalte überblicken und einordnen zu können. Mit Bauer (1990) handelt es sich bei einer solchen Reflexion über Strukturmerkmale und Entwicklungslinien der Mathematik um eine *Gegenstandsreflexion*.

Zur *Prüfungsvorbereitung* erarbeiteten meine Schülerinnen und Schüler in Zweiergruppen die Antwort auf eine der Fragen und trugen sie vor der ganzen Klasse vor. Insbesondere mussten sie ihren Mitschülerinnen und Mitschülern – und nicht mir, dem Lehrer – Rede und Antwort auf Unklarheiten und Nachfragen stehen. Dadurch erhielten auch die Mitschülerinnen und Mitschüler eine erste Grundlage für ihre eigene Erarbeitung einer Antwort.

In der eigentlichen *mündlichen Prüfung* erhielten die Maturandinnen und Maturanden dann eine der (elf anderen) Fragen zugelost und mussten ihre individuell erarbeiteten Antworten ohne Unterlagen und ohne weitere Vorbereitung vortragen. Während dieser ersten Prüfungshälfte hörten die Prüfenden den Ausführungen zu, ohne zu intervenieren oder nachzufragen. Erst in der zweiten Prüfungshälfte stellte ich vorbereitete Fragen. Sie zielten teilweise auf die Vertiefung des bis dahin Gehörten, teilweise auf dessen Ausbau. So bewegten sich meine Fragen im Falle des pythagoreischen Satzes im oben umrissenen Themenfeld a) bis e).

4. Erfahrungen

Der ungewohnte Prüfungsmodus gab bei Bekanntgabe Anlass zu Diskussionen. Zwar wirkte die Bekanntgabe der Prüfungsfragen ausnahmslos motivierend aufgrund der damit einhergehenden Gewissheit, in der Prüfung nicht überrumpelt werden zu können. Die Fragen jedoch irritierten wegen ihrer Offenheit und scheinbaren Banalität vor allem leistungsstarke Schülerinnen und Schüler. Im Laufe der Vorbereitung des eigenen Vortrags jedoch erkannten gerade sie den Vorzug, bei der Wahl der unterschiedlichen Situationen und Beispiele nach eigenen Stärken Akzente setzen zu können.

Mir als Lehrer fiel positiv auf, dass in den Vorträgen vor der Klasse das Wesentliche, von mir Erwartete meistens auch beantwortet wurde. Dank der Vorträge erhielt ich (als zukünftiger Prüfer der Klasse) zudem einen ersten Eindruck von möglichen Schülerantworten auf die doch recht offenen Fragen. Ebenfalls konnte ich einen Einblick in echte Schülerfragen zum vorgestellten Themenkomplex gewinnen. Allerdings fiel auch auf, dass die Klasse den vorgetragenen Inhalt zumeist unhinterfragt für bare Münze nahm, besonders wenn „gute“ Kolleginnen und Kollegen vortrugen. Dies spielte dann auch in einige Vorträge der mündlichen Prüfungen hinein.

In den mündlichen Prüfungen fassten die Prüflinge – obwohl zu Beginn nicht minder nervös als wenn sie traditionell geprüft worden wären – sehr viel rascher Tritt und nutzten die ihnen zur Verfügung gestellte Prüfungszeit, um ihre Überlegungen konzentriert und sicher vorzutragen. Auch auf meine anschließenden Fragen gaben die meisten von ihnen kompetent und souverän Antwort. Negativ zu vermerken ist, dass öfter als beim traditionellen Prüfen falsche Begriffe verwendet wurden. Vermutlich hängt das damit zusammen, dass die Prüflinge ohne fortwährende Lehrerintervention – und damit eigenständiger – sprechen konnten und sich infolgedessen nicht immer wieder an die Fachsprache des Prüfers anglichen.

Literatur

Althoff, H. / Koller, D. (1992). *Mündliches Abitur – Anregungen und Hilfen für Schüler und Lehrer.* Stuttgart: Klett.

Bauer, L. (1990). Mathematikunterricht und Reflexion. *mathematik lehren*, 38, 6–9.

Begehr, A. (2004). *Teilnahme und Teilhabe am Mathematikunterricht – Eine Analyse von Schülerpartizipation.* Dissertation Berlin. [erhältlich auf WWW]

Buck, H. / Dürr, R. (o.J.). *Vorbereitung und Durchführung der mündlichen Abiturprüfung im Fach Mathematik.* Landesbildungsserver Baden-Württemberg. [erhältlich auf WWW]

Frey, K. / Frey-Eiling, A. (2004[17]). *Allgemeine Didaktik – Arbeitsunterlagen zur Vorlesung*. Zürich: Institut für Verhaltenswissenschaft. Unveröffentlichtes Skript, Kap. 13.1,13.2, 26.

Girmes, R. (2003). Die Welt als Aufgabe?! – Wie Aufgaben Schüler erreichen. In: Ball, H. et al. (Hrsg.): *Lernen fördern – Selbstständigkeit entwickeln*. Friedrich Jahresheft, Seelze: Friedrich Verlag, 6–11.

Klieme, E. et al. (2006). *Unterricht und Kompetenzerwerb in Deutsch und Englisch – Zentrale Befunde der Studie Deutsch Englisch Schülerleistungen International (DESI).* Frankfurt a.M.: Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung DIPF, 47–51. [erhältlich auf WWW]

Rowe, M.B. (1986). Wait Time—Slowing down may be a Way of Speeding up! *Journal of teacher education*, 37, 43–58.

U.S. Department of Education (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries – Results from the TIMSS 1999 Video Study*. Washington, DC, 107–113. [erhältlich auf WWW]

Sehr geehrter Herr Rektor, sehr geehrter Herr stellvertretender Dekan, sehr geehrter Herr Vorsitzender der Wissenschaftlichen Akademie Ungarns, sehr geehrter Herr stellvertretender Vorsitzender, liebe Frau Vasarhelyi,

Ich freue mich sehr, dass ich die 42. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik im Namen der GDM hier in Budapest eröffnen darf. Nachdem seit vielen Jahren zahlreiche Kolleginnen und Kollegen aus dem Ausland, vor allem aus Osteuropa an unserer Jahrestagung teilnehmen, freut es mich ganz besonders, dass diese Tagung *erstmals* in einem *nicht deutschsprachigen* Land stattfindet. Es erfüllt mich Freude, dass wir die Erweiterung der Europäischen Union nun auch seitens der Didaktik der Mathematik dadurch unterstreichen, dass wir unsere Tagung in einem osteuropäischen Land durchführen.

Das zentrale Thema der diesjährigen Tagung, das sich insbesondere in den Titeln der Hauptvorträge widerspiegelt, ist „*Denkstrategien*". Das Erforschen, das Erkennen, das Klassifizieren von Denken, von Denkstrategien beim Betreiben von Mathematik, bei der Beschäftigung mit mathematischen Frage- und Problemstellungen, beim Lehren und Lernen von Mathematik ist eine zentrale Aufgabe der Didaktik der Mathematik. Das Wissen um die Möglichkeiten, Grenzen und Fähigkeiten des Denkens im Zusammenhang mit mathematischen Fragestellungen ist *eine* – vielleicht *die* – Voraussetzung für die Entwicklung von Unterrichtsplänen, für das Aufbereiten von Lernumgebungen, für die Konstruktion von Curricula.

Von daher möchte ich den Organisatoren meinen Respekt und meine Anerkennung dafür aussprechen, dass Sie dieses – sicherlich nicht einfache – Thema in den Mittelpunkt der Tagung gestellt haben.

Unsere Jahrestagung ist natürlich auch stets der Ort, an dem neben mathematikdidaktischen Entwicklungen auch die bildungspolitische Diskussion der letzten Zeit, des vergangenen Jahres reflektiert und in Beziehung zur Mathematikdidaktik gesehen werden muss.

Was waren die für uns zentralen bildungspolitischen Aspekte des letzten Jahres? Ich möchte kurz auf vier Punkte eingehen: die Lehrerbildung, die Schuldiskussion, die fortschreitende Internationalisierung, das Jahr der Mathematik.

1. Lehrerbildung

Wir sind gegenwärtig mitten im Prozess der Modularisierung, der Einrichtung und Erprobung der Bachelor-Master-Struktur in der Lehrerbildung. Dies gilt derzeit für viele europäische Staaten, auch für Ungarn (das ebenfalls die Bologna-Erklärung unterschrieben hat). Die gegenwärtige Situation lässt befürchten, dass sich das Ausbildungssystem entgegen dem ursprünglich angestrebten Ziel einer europäischen Vereinheitlichung bereits innerhalb eines Landes oder gar innerhalb eines Bundeslandes in eine Vielfalt unterschiedlicher, nicht miteinander kompatibler Modelle entwickelt.

Die Organisationsstruktur der zukünftigen Lehrerbildung ist eine Seite. Die andere - und für uns zentrale und wichtige - Seite ist die *inhaltliche Ausgestaltung* der Lehrerbildung: Die angebotenen Inhalte, das Wissen und Können der Studierenden am Ende der Ausbildung und der Grad der Vernetzung der drei Phasen der Lehrerbildung. Hierfür bedarf es Konzepte und es bedarf Personen, die diese umsetzen.

Wir – die GDM – sind der Meinung, dass die Mathematik als Kernfach der Lehrerausbildung in den auseinander driftenden Ausbildungskonzepten des Bologna-Prozesses wieder ein Fundament für das Lehramtsstudium werden kann. Die GDM versucht deshalb – zusammen mit der DMV und der MNU - die Richtung, in die sich die Lehrerbildung entwickelt, mit zu prägen. Es ist Wachsamkeit gefragt. Gegenwärtig werden von der KMK in Deutschland – und in anderen

Ländern gibt es ähnliche Überlegungen - Standards für die Lehrerbildung vorbereitet. So politisch werbewirksam das Darstellen von Standards auf zwei DIN-A-4-Seiten sein mag, das Entscheidende wird es sein, Standards in der täglichen Lehrerausbildung zu setzen bzw. kritisch umzusetzen.

2. Schulreformen

Schulreformen sind wichtig und notwendig. Gegenwärtig sind wir in einer Zeit heftiger Umgestaltung: Die Einführung des 8-jährigen Gymnasiums, die Diskussion um die Ganztagsschule, die Zusammenlegung von Haupt- und Realschule, die Förderung von Hochbegabten, das Verstärken der frühkindlichen Bildung. Wie in der Lehrerbildung so gilt auch bei all diesen Punkten, dass alleine organisatorische Veränderungen – etwa Fusion von Schulformen – die zentralen Probleme nicht lösen wird. Alleine durch die Abschaffung der Hauptschule wird die Absonderung von sozial benachteiligten, lernschwachen oder schwierigen Schülern nicht reduziert.

Gefragt sind heute Konzepte, die in den Unterricht hineinwirken, die angemessen auf die neue Unterrichtsrealität reagieren. Bildungsreform ist – auch oder vielleicht vor allem - Unterrichtsreform.

Wir – die GDM - sind aufgefordert, uns aktiv an der Diskussion zu beteiligen. So wird für mich etwa in dem Wort „Turbo-Abitur" der mangelnde internationale Blick deutlich, als sei die 12-jährige Schule eine Erfindung Deutschlands und all diejenigen, die so trefflich vom „Entschlacken" oder „Entrümpeln" der Lehrpläne sprechen, können häufig über Allgemeinplätze hinaus nicht *einen* Inhalt angeben, der damit gemeint sein könnte. Also nochmals: Es bedarf durchdachter und erprobter fachdidaktischer – mathematikdidaktischer – Konzepte, um die Chance von Neuentwicklungen nicht verstreichen zu lassen.

3. Internationalität

Wissenschaft ist international. Mathematikdidaktik ist international. Letzte Woche wurde in Rom der 100. Geburtstag der ICMI. International Commission on Mathematical Instruction begangen, deren erster Präsident im Jahr 1908 immerhin Felix Klein war. Die GDM – oder die Mitglieder der GDM – waren und sind in internationale Projekte, Arbeitsgruppen, Konferenzen eingebunden. Dennoch: Die gegenwärtige internationale Bedeutung der GDM ist ausbaufähig und es muss unser Ziel sein, im Zeitalter der Globalisierung verstärkt international sichtbar zu sein.

Doch Internationalität muss erarbeitet werden, es ist nicht mit dem Besuch einer internationalen Konferenz getan. Internationalität beginnt bei der weitsichtigen Nachwuchsförderung – die GDM unterstützt daher dieses Jahr auch finanziell die Teilnahme von Nachwuchswissenschaftlern an dieser Tagung. Zur Internationalität gehört eine fundierte wissenschaftliche Diskussion im eigenen – hier deutschsprachigen Land – (hier sehe ich die wichtige Funktion des JMD). Schließlich bedarf es natürlich eines Engagements auf internationaler Ebene.

Mittel- und Osteuropa können und sollten dabei ein Gegengewicht bilden am Hebelarm der Mathematikdidaktik, ein Gegengewicht zu den weit nach Westen reichenden, insbesondere in den angelsächsischen Ländern befestigten erheblichen mathematikdidaktischen Gewichten auf der anderen Seite des Hebelarmes. Das ist für mich eine zentrale Botschaft, die von dieser Tagung ausgehen könnte.

4. Das Jahr der Mathematik

In Deutschland ist 2008 das Jahr der Mathematik. Mitglieder der GDM beteiligen sich in vielfältiger Weise an zahlreichen Initiativen hierzu. Seit dieser Woche hat die GDM von der Telekom die Unterstützung erhalten, sich mit einem eigenen Projekt an dem Jahr der Mathematik zu beteiligen. Das Projekt „*Mathemagische Momente*“ möchte Momente ergiebigen, freudvollen, fruchtbaren Mathematiklernens in den Mittelpunkt stellen. Wir – die GDM – wollen anhand exemplarischer Lehr- und Lernsituation Beispiele für gelungenes Mathematiklernen zeigen. Etwa das Entdecken neuer Zahlen, das Erkennen von Eigenschaften von Begriffen, der Moment des Lösens eines Problems, der kreative Umgang mit Fehlern.

Diese „*fruchtbaren Momente im Bildungsprozess*" werden in Form von Unterrichtsmoduln nach einer vorgeschlagenen Struktur aufgearbeitet und als Fortbildungsmaterialien – in Form einer Buch-Veröffentlichung - Lehrerinnen und Lehrer – auch einer Großveranstaltung – zur Verfügung stellen.

Wir streben also eine Zusammenstellung von Beispielen guten Mathematikunterrichts an, - wenn Sie so wollen – „Best-of-"Beispiele, die einen zentralen Aspekt des Lernens, des Verstehens von Mathematik betonen.

Dazu sind wir auf Ihre Hilfe angewiesen! Ich bitte alle Teilnehmer der Jahrestagung, alle Mitglieder der GDM darum, bei der Entwicklung von Vorschlägen für solche Mathemagischen Momente zu helfen.

Ich komme damit zum Schluss. Lassen Sie mich allen Helferinnen und Helfern vor Ort für die Vorbereitung und die Durchführung dieser Tagung danken. Insbesondere danke ich Frau Eva Vasarhelyi, die vor 6 Jahren spontan in der Mitgliederversammlung der GDM aufgestanden ist und gesagte hatte: „Wir können die Jahrestagung im Jahre 2008 in Budapest ausrichten". Sie hat mit unermüdlichem Einsatz die Tagung vorbereitet und ließ sich auch durch technische Schwierigkeiten, finanzielle Unwägbarkeiten und Diebstähle nicht abschrecken. Eva, ganz herzlichen Dank. Bedanken möchte ich mich bei der Familie von Frau Vasarhelyi für das fortwährende Verständnis bei der Vorbereitung. Ich bedanke mich bei dem gesamten Organisationskomitee, das sich aus Mitarbeitern des neu gegründeten Mathematikdidaktischen Zentrums zusammensetzt. Vor allem bedanke ich mich bei den Studentinnen und Studenten, die bei der Vorbereitung der Tagung tätig waren und ohne die Durchführung dieser Tagung nicht möglich wäre. Ihnen allen gilt der Dank aller Teilnehmer dieser Tagung.

Ich wünsche Ihnen, dass Sie auf dieser Tagung interessante Vorträge hören, an belebenden Arbeitsgruppen teilnehmen, neue Anregungen bei vielen Gesprächen bekommen, ich freue mich – natürlich wie Sie – auf die Ausflüge nach Budapest und in die Umgebung von Budapest. Dafür muss Zeit sein, wird Zeit sein. Die Tagung ist eröffnet.

Hans-Georg Weigand

(1. Vorsitzender)

Annika M. WILLE, Universität Bremen

Einführung von Variablen in Klasse 7 mit erdachten Dialogen von Schülern und mit Holzrobotern

Abstrakt

Empirische Grundlage dieser Untersuchung waren von Schülerinnen und Schüler selbst erdachte Dialoge zwischen zwei fiktiven Lernenden. Die Dialoge wurden von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangstufe 7 innerhalb von Unterrichtsreihen zur Einführung von Variablen geschrieben. Hinter der Untersuchung stand die Frage, welche Aspekte des Variablenkonzeptes bei den Schülerinnen und Schülern vorkamen. In den Unterrichtseinheiten wurde ein algorithmischer Zugang zu Variablen durch eine einfache Programmiersprache gewählt, die ohne Computer mit Holzrobotern und Streichholzschachteln ausgeführt wurde.

Das Variablenkonzept

Das Variablenkonzept hat verschiedene Aspekte und ist für Schülerinnen und Schüler schwer zu begreifen (vgl. Schoenfeld & Arcavi, 1988). G. Malle (1993) unterscheidet den *Gegenstands-*, *Einsetzungs-* und *Kalkülaspekt*, bei denen eine Variable als Unbekannte, Platzhalter bzw. unbedeutendes Zeichen angesehen wird. Außerdem unterscheidet er den *Bereichs-* und den *Einzelaspekt* einer Variable. Beim Bereichsaspekt repräsentiert eine Variable einen Wertebereich, dabei spricht Malle vom *Simultanaspekt*, wenn sie gleichzeitig mehrere Elemente repräsentiert und vom *Veränderlichenaspekt*, wenn wie bei Funktionen der Wert der Variable wechselt. Beim Einzelaspekt repräsentiert eine Variable genau einen festen Wert.

Die Einführung von Variablen mit Hilfe von Programmiersprachen wurde auf vielfältige Weise erforscht. An der Universität Osnabrück entwickelten und untersuchten zum Beispiel E. Cohors-Fresenborg, I. Schwank und C. Kaune Registerkisten, Dynamische Labyrinthe und Registermaschinen (vgl. Cohors-Fresenborg 1992, Schwank 1993). Auch andere Programmiersprachen wurden im Rahmen von Variableneinführung verwendet. Zu nennen seien hierbei die Programmiersprachen LOGO (vgl. Papert 1980) und BASIC (vgl. Tall & Thomas 1991).

Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht

Die beiden Schweizer U. Ruf und P. Gallin ließen Schülerinnen und Schüler mit Hilfe von Kernideen und Reisetagebüchern mit dem

Lehrenden in einen Dialog treten (vgl. Gallin & Ruf 1998). Clarke, Waywood & Stephens (1993) unterschieden in Lerntagebüchern von Schülerinnen und Schülern der Klassen 7 bis 12 drei verschiedene Modi: *Recount,* eine Nacherzählung des Unterrichts, *Summary,* eine Zusammenfassung des mathematischen Unterrichtinhalts und *Dialogue,* ein interner Dialog, den der Schreibende mit sich selbst führt.

Lernumgebung

Die Lernumgebung beruht auf einer einfachen Programmiersprache, mit der sich ein Roboter auf den Schnittpunkten eines Koordinatengitters bewegen kann. Die Programmiersprache ähnelt der Programmiersprache LOGO, unterscheidet sich jedoch unter anderem darin, dass Variablen in jedem Befehl vorkommen, mit dem sich der Roboter vorwärts bewegt.

Streichholzschachteln dienen hier als Variablenmodell. Die Schachteln sind mit einem Buchstaben beschriftet, und die Anzahl der Hölzer in der Schachtel gibt den Wert der Variable an. Die Programmierung und Ausführung eines Programms geschehen ohne digitale Medien. Stattdessen wird ein Holzroboter mit der Hand bewegt.

Es gibt genau sieben Befehle. Mit dem Befehl n ← 3 wird sichergestellt, dass sich in der Schachtel mit der Aufschrift „n" drei Hölzer befinden. Mit dem Befehl vorwärts(n) geht der Roboter dann so viele Felder vorwärts, wie in der Schachtel „n" liegen. Weitere Befehle lassen den Roboter 90° nach rechts oder nach links drehen, es gibt eine für-Schleife, Aufpunkt- und Richtungsvektoren. So kann der Roboter zum Beispiel Graphen von Funktionen auf den natürlichen Zahlen abfahren. Die Schülerinnen und Schüler mussten neben der Programmierung auch zwischen verschiedenen Darstellungen wechseln, zum Beispiel zwischen Tabellen, Gleichungen und Programmen.

Methode

In zwei Bremer Gymnasien, in einer sechsten und in zwei siebten Klassen, wurden im Jahr 2007 je dreiwöchige Unterrichtseinheiten zur Einführung von Variablen durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler schrieben selbst erdachte Dialoge als Hausaufgaben und als Stillarbeit. Ein typischer Aufgabentext war dieser: *„Zwei Schülerinnen oder Schüler lösen gemeinsam die Aufgabe der letzten Stunde. Einer oder einem von beiden fällt es leichter als dem/der anderen. Schreibe einen Dialog von mindestens einer Seite, in dem sich die beiden unterhalten."*

Im Gegensatz zum „Dialogue mode" von Clarke, Waywood & Stephens (1993) handelte es sich hier um einen expliziten Dialog zwischen zwei erdachten Protagonisten statt um einen internen Dialog des Schreibenden.

Ergebnisse

Alle Aspekte des Variablenkonzeptes nach Malle kamen in den erdachten Dialogen vor. Im Folgenden werden zu jedem Aspekt kurze Ausschnitte aus den erdachten Dialogen genannt:

- Gegenstandsaspekt: *„Also ist k die Hälfte von n."*
- Kalkülaspekt: *„Du weißt n = 3 · k. Das heißt n : 3 = k."*
- Einsetzungsaspekt: *„Ein Beispiel: Wenn das Schachteldiagramm*

  $\boxed{k}+\boxed{k}+\boxed{k}=\boxed{n}$

  ist, dann setzt man für die Ks jeweils eine 1 ein und für n eine drei, so wie das in der Tabelle steht. Das würde dann so aussehen:"

  $\boxed{1}+\boxed{1}+\boxed{1}=\boxed{3}.$

- Einzelaspekt: *„Zuerst müssen wir die Schachtel a füllen z.B. mit 7 Millionen Streichhölzern. Ok?"*
- Bereichsaspekt, Simultanaspekt: *„Probiere es mal mit anderen Zahlen aus, so kannst du auch wirklich überprüfen, ob das nicht nur für diese Zahlen funktioniert."*
- Bereichsaspekt, Veränderlichenaspekt: *„a war 1. Jetzt ist a 2."*

Ein weiterer Aspekt wurde in den erdachten Dialogen als Verfeinerung der Variablenaspekte sichtbar. Er sei im Folgenden *Hüllenaspekt* genannt. Der Unterschied zum Platzhalter ist dabei, dass eine Hülle nach dem Einsetzen nicht verschwindet. Eine Schülerin schreibt z.B. in einem ihrer erdachten Dialoge zu der Gleichung k + k = n: *„Dann müsste ja in k halb so viel wie in n sein."* Eine andere Schülerin denkt sich eine eigene Schreibweise für eingesetzte Gleichungen aus, in der sowohl der Wert als auch die Variable sichtbar bleiben:

$\boxed{2} \cdot n(1) = k(2)$

Als weitere Beobachtung sei noch genannt, dass die Schülerinnen und Schüler Lernschwierigkeiten in ihren erdachten Dialogen thematisierten und in die Rolle von Schülern mit Lernschwierigkeiten schlüpften. Im folgenden Dialogausschnitt thematisiert ein Schüler die Schwierigkeit, von

Werten einer Tabelle auf eine Gleichung zu schließen:

„Schüler 1: (…) Und wie heißt dann der Term?

Schüler 2: k = 2 x n.

Schüler 1: Nein!

Schüler 2: Warum nicht? Bei n steht doch 2 und bei k 1?!

Schüler 1: Ja, aber er geht ja nicht 2 x n vorwärts, sondern nur 1x, dafür ist n aber größer als k, k geht er ja 2x."

Fazit

Die erdachten Dialoge haben sich bei der hier untersuchten Lernumgebung als hilfreiche Methode herausgestellt, um etwas darüber zu erfahren, wie sich Lernende eine Variable vorstellen. Die Lernumgebung erwies sich in der Weise als reichhaltig, dass alle Aspekte des Variablenkonzeptes von G. Malle bei den Dialogen zum Vorschein kamen. Schließlich wurde der Hüllenaspekt als zusätzliche Verfeinerung der Variablenaspekte sichtbar.

Literatur

Clarke, D. J., Waywood, A., & Stephens, M. (1993). Probing the structure of mathematical writing. *Educational Studies in Mathematics, 25*(3), 235-250.

Cohors-Fresenborg, E. (1992). Registermachine as a mental model for understanding computer programming. *Osnabrücker Schriften zur Mathematik*, Heft 150.

Gallin, P., & Ruf, U. (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz*. Seelze: Kallmeyer.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas.* New York: Basic Books.

Schwank, I. (1993). Verschiedene Repräsentationen algorithmischer Begriffe und der Aufbau mentaler Modelle. *Osnabrücker Schriften zur Mathematik*, Heft 155.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher, 81*(6), 420-427.

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 135-147.

Gergely WINTS HE, Budapest

A rational roblem from elementary number theory

Abstract

We solve a bit more then the half of the V.th. proposition of Leonardo Pisano who was also named as Fibonacci. We do it using only elementary tools of number theory. Our problem is explicitly what square number and the sum of a p prime of the form $4k$ 1 give a square number again.

The problem arises according to a really old book. After solving the problem we thought that it is possible to work on it with talented school children or with first grade university students as well. The best place is in number theory more precisely after the lecture on Pythagorean triple.

Leonardo of Pisa (Leonardo Pisano) known as Fibonacci also dedicated his Book of Square Numbers (1225, Liber quadratorum) to Emperor Frederick II. His PROPOSITION V. was To find a square number which, being increased or diminished by 5, gives a square number. [1], [2] He solved the problem in a very elegant way. Our simply task is only to find two numbers when the difference of their squares is five or more generally their difference is a p prime of the form of $4k$ 1.

The first question is what do you mean on numbers. There are no problem if the numbers are real. On the other hand it is easy to see that there is only one solution if the numbers are the natural numbers $3^2 - 2^2 = 5$.

The problem is a bit harder if I mean the numbers as rational numbers ( ). In this situation we get

$$\frac{z^2}{y^2} - \frac{x^2}{u^2} = 5 \tag{1}$$

where x, y, z and u are positive natural numbers ($y \neq 0$ and $u \neq 0$) the solution is not trivial.

The problem is quite the same as the Pythagorean-triples which was solved in a lot of different ways [3]. We will get three infinite classes of solutions, and the proof is completely the same for all prime p where $p = 4k + 1$ for some k positive integer so we discuss this situation.

Theorem The $\dfrac{z^2}{y^2} - \dfrac{x^2}{u^2} = p$ equation where p prime is $p = 4k + 1$ for k is a positive integer is solvable in the natural numbers if $y = u$ and

$$x = pr_1^2 - s_1^2\ , \quad y = 2r_1 s_1, \quad z = pr_1^2 + s_1^2$$

where r_1 and s_1 are natural numbers and $5r_1$ and s_1 are coprime and exatly one of them is even or

$$x = \left| \frac{pr_2^2 - s_2^2}{2} \right|, \quad y = r_2 s_2, \quad z = \frac{pr_2^2 + s_2^2}{2}$$

where r_2 and s_2 are natural numbers and $5r_2$ and s_2 are coprime and both of them is odd.

Proof Let us denote (a,b) the greatest common divisor of a and b. We can suppose that $(y,z) = 1$ and $(x,u) = 1$. If we multiply the equation (1) by $u^2 y^2$ then we get

$$z^2u^2 - x^2y^2 = py^2u^2\,. \tag{2}$$

Here $u^2 \ \ py^2u^2 \Rightarrow u^2 \ \ x^2y^2$ but $(x,u) = 1 \Rightarrow u^2 \ \ y^2$.

ompletely same way $y^2 \ \ py^2u^2 \Rightarrow y^2 \ \ z^2u^2$ but $(y,z) = 1 \Rightarrow y^2 \ \ u^2$. Thus we get $y = u$ and we can write

$$\frac{z^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2} = p \tag{3}$$

where $(y,z) = 1$ and $(x,y) = 1$. Multiplying by y^2 we can get the

$$x^2 + py^2 = z^2\,. \tag{4}$$

Let us denote $d = (x,z)$ then $d \ \ py^2$. If $d = p$ then $p^2 \ \ z^2 - x^2 = py^2$ and we get that $p \ \ y$ what is contradiction. If $d \ \ y$ then $d \ \ (x,y) = 1$ so we get then x, y and z are pairwise coprime.

Exactly one of x and y is even. If both of them are odd then
$z^2 = x^2 + py^2 \equiv 2 \mod (4)$ what is impossible.

There are two cases

a x is odd and y is even;

b x is even and y is odd.

The case a

First let us suppose that y is even and x is odd. Then we can write $y = 2y_1$ and

$$py_1^2 = \frac{z+x}{2} \cdot \frac{z-x}{2} \tag{5}$$

Let $d = \left(\frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2}\right)$ then $d \ \ (x,z) \Rightarrow d = 1$. We can conclude that $py^2 = pr_1^2 \cdot s_1^2$ where $(pr_1, s_1) = 1$. Here we have two possibilities again.

$$\left.\begin{matrix} z = pr_1^2 + s_1^2 \\ x = pr_1^2 - s_1^2 \end{matrix}\right\} \quad \text{or} \quad \left.\begin{matrix} z = pr_1^2 + s_1^2 \\ x = s_1^2 - pr_1^2 \end{matrix}\right\} \quad \text{and} \quad y = 2r_1s_1 \quad \text{in both cases} \tag{6}$$

We now that x and z are odd numbers which implies that r_1 and s_1 are different parities. We can write the solutions in a common form

$$\left.\begin{matrix} x = pr_1^2 - s_1^2 \\ y = 2r_1s_1 \\ z = pr_1^2 + s_1^2 \end{matrix}\right\} \quad \text{where} \quad (pr_1, s_1) = 1 \quad \text{and} \quad 2 \ \ r_1s_1. \tag{7}$$

For example, if $p = 5$, $r_1 = 1$ and $s_1 = 2$ then the x, y, z triple is $1, 4,$.

If $r_1 = 2$ and $s_1 = 1$ then $x, y, z = 1 \ ,4,21$, and $1^{\ 2} + 5 \cdot 4^2 = 21^2$.

If $r_1 = 2$ and $s_1 = 3$ then $x, y, z = 11,12,2$, and $11^2 + 5 \cdot 12^2 = 2 \ ^2$.

The case b

Let us suppose that x is even and y and z are odd numbers.

$$py_1^2 = (z+x) \cdot (z-x) \tag*{( )}$$

Let $d = (z+x, z-x)$ where d is odd number. We get that $d \ \ 2z \Rightarrow d \ \ z$.
Moreover $d \ \ 2x \Rightarrow d \ \ x$ which implies $d \ (x,z) \Rightarrow d = 1$.

Similar argument then in case a) shows that $py^2 = pr_2^2 \cdot s_2^2$ where $(pr_2, s_2) = 1$ and both of them are odd.

$$\left.\begin{matrix} x = \dfrac{pr_2^2 - s_2^2}{2} \\ y = 2r_2s_2 \\ z = \dfrac{pr_1^2 + s_1^2}{2} \end{matrix}\right\} \quad \text{where} \quad (pr_2, s_2) = 1 \quad \text{and} \quad 2 / r_2s_2. \tag*{( )}$$

For example, if $p=5$, $r_2=1$ and $s_2=2$ then the x, y, z triple is $2,1,3$.

If $r_2=3$ and $s_2=1$ then the x, y, z = $22,3,23$, when $22^2+5\cdot 3^2=23^2$.

If $r_2=1$ and $s_2=3$ then the x, y, z = $2,3,7$, when $2^2+5\cdot 3^2=7^2$.

eferences

[1] *The American Mathematical Monthly*, Vol. 26, No. 1. (an., 1 1), pp. 1- .

[2] Sigler, L. E. *The book of squares* an annotated translation into modern English (original Fibonacci, Leonardo *Liber quadratorum*). Boston: Academic Press, 1 7

[3] Niven, I. – Zuckerman, H. S. *An Introduction to the Theory of Numbers.* New ork: ohn Wiley Sons, Inc. 1 66.

Ingo WITZKE

Eine Analyse des Leibnizschen Calculus mit moderner Mathematik

Nähert man sich der für Mathematikdidaktiker entscheidenden Frage „wie entwickelt sich mathematisches Wissen?“, so ist dies auf verschiedenen Ebenen möglich. Unsere Arbeitsgruppe des Seminars für Mathematik und ihre Didaktik der Universität zu Köln untersucht, auf der Suche nach belastbaren Antworten zu dieser Frage, systematisch den Umgang von historischen Experten mit Mathematik.[1]

Ein Schwerpunkt bei dieser Analyse bildet der Problemkreis der theoretischen Begriffe, also solcher Begriffe zu denen es keine Referenzobjekte gibt und die erst innerhalb einer empirischen Theorie eine Bedeutung erlangen.

Als geeignetes Untersuchungsobjekt haben wir u.a. den *Calculus Differentialis*, wie ihn Gottfried Wilhelm Leibniz im ausgehenden 17 Jhdt. entwickelt hat, ausgemacht. Hier finden wir einen außerordentlich wichtigen Schritt in der Mathematik auf dem Weg zur modernen Analysis vor. So war der von Leibniz zusammengetragenen *Calculus* auf dem Kontinent Grundlage für sämtliche Entwicklungen im Bereich der Differential- und Integralrechnung im 18. Jhdt.. Exponierte Vertreter, Anwender und Entwickler des *Calculus* waren Johann und Jakob Bernoulli, sowie Mitte des 18. Jhdt. Leonhard Euler, der Leibniz attestiert „he put it [the calculus] into the form of a discipline, collected its rules into a system, and gave a crystal-clear explanation.”[2]

Und noch heute werden Vorgehensweisen des *Calculus* wegen ihrer einfachen, anschaulichen und eleganten Art auf eine Vielzahl von mathematischen Problemen in den Ingenieurwissenschaften und der Physik angewendet --- in der modernen Mathematik ist dagegen außer der Symbolik nicht viel übrig geblieben. Schuld daran sind nach dem Stand der modernen Forschung die Differentiale, die eine zweifelhafte Rolle zu haben scheinen. Zum einen tragen sie den *Calculus* und vereinen Anwendungsbereiche, die vorher separat voneinander betrachtet wurden (Tangentensteigung, Krümmungsverhalten von Kurven, von Kurven eingeschlossene Flächen…), zum

---

[1] Die Arbeitsgruppe „Entwicklung mathematischen Wissens“ wurde von H.J. Burscheid und H. Struve am Seminar für Mathematik und ihre Didaktik der Universität zu Köln eingerichtet.

[2] Euler [1755] in der Übersetzung von J. Blanton, S. X.

anderen scheinen sie so vage, dass Henk Bos feststellt, „[…] it is striking, how on such insecure foundations the calculus could develop in so profilic a manner as it did from Leibniz's to Cauchy's time […]".[3]

Da nun sowohl Leibniz Interpretationen von Differentialen schwanken, von realen bis zu fiktiven Größen, als auch in modernen Untersuchungen eine Vielzahl von „Übersetzungen" keine eindeutige semantische Interpretation des Begriffes Differential ermöglichen, haben wir uns für den Weg der Rekonstruktion des *Calculus* in einem der modernen analytischen Geometrie entnommenen Modell entschieden. Ziel ist es, das Konzept der Differentiale in der Anwendung zu verstehen, also ihre Bedeutung innerhalb der theoretischen Struktur des Leibnizschen *Calculus* zu ergründen.

Ausgangspunkt für diese Analyse des *Calculus* in „praxi" sind dabei die „*Lectiones de calculo differentialium* (1691/92) von Johann Bernoulli, der ersten systematischen Lehrbuchdarstellung des leibnizschen *Calculus*.

Den Ursprung aller Ausführungen innerhalb des *Calculus* bilden, im Gegensatz zur modernen Mathematik Kurven, die Relationen zwischen geometrischen Größen, die den Punkten zugeordnet sind, definieren.[4]

Nun werden Differentiale bei Bernoulli wie folgt gebildet.

Man erhält das Differential eines aus Größen *x,y,…* bestehenden Polynoms indem man die Differenz von *P(x+dx, y+dy,…)* und *P(x,y,…)* bildet und in diesem neuen Polynom Produkte von Differentialen streicht, so z. B. für $z = y^2 - x$

$$\Rightarrow d(z) \to (y+dy)^2 - (x+dx) - [y^2 - x] = y^2 + 2ydy + dy^2 - x - dx - y^2 + x$$

$$= 2ydy + dy^2 - dx \Rightarrow d(z) = 2ydy - dx$$

Laut Bernoulli kann dann folgende Regel angewendet werden, $d(x^p + y^q) = px^{p-1}dx + qy^{q-1}dy$,

Sein Vorgehen fassen wir wie folgt zusammen:

Es gibt eine Abbildung d, die jeder Größenfunktion γ eine Größenfunktion dγ zuordnet (das Differential der Funktion γ). Man erhält dγ mit Hilfe der Summen-, Produkt-, und Konstantregel (sowie daraus ableitbarer Regeln, wie der Quotientenregel).

Analog haben wir Bernoullis Vorgehen zur Bestimmung von Tangenten, Extremstellen und Wendepunkten in Anwendungsregeln formuliert.

---

[3] Bos, H.[1974], S. 12

[4] Die Abbildungen, die den Punkten einer Kurve C z.B. die Längen ihrer Abszissen und ihrer Ordinaten zuordnen, bezeichnen wir als Größenfunktionen.

Nachdem also sämtliche Vorgehensweisen von Bernoulli dokumentiert und zusammengefasst sind, erfolgt die Modulation in einem analytischen Modell, welches der modernen Mathematik entnommen ist.

Der Calculus (empirische Theorie)	*Analytisches Modell*
Zeichenblattebene	$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
Kurve C, gezeichnet $\varphi: C \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} : c \mapsto (x, y)$	Kurve C, in Parameterdarstellung $\phi: I \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} : t \mapsto (x(t), y(t))$
Punkt c, auf der Kurve C	Punkt (x(t),y(t)) auf einer Kurve in Parameterform
Größenfunktion $\gamma: C \to \mathbb{R}$	Koordinatenfunktion $\gamma(t): I \to \mathbb{R}$
Differential $d\gamma$ entspricht einer Abbildung der Größe γ mit $d\gamma: C \to \mathbb{R}$	Ableitung von $\gamma(t)$ nach t $D_t\gamma(t): I \to \mathbb{R}$
Progression der Variable x,y,… $dx = kons., dy = kons., ...$	Wahl einer bestimmten Parameterdarstellung der Kurve, so dass $D_t x(t) = kons., D_t y(t) = kons., ...$

Durch die Identifikation von $d\gamma$ mit $D_t\gamma(t)$ ist eine systematische Schritt-für-Schritt-Analyse des *Calculus* möglich.

Die vorher zusammengefassten Vorgehensweisen werden zu beweisbaren Sätzen in der modernen Mathematik und lassen den *Calculus* im Modell als logisch konsistente Theorie, ohne Unklarheiten erscheinen.

Wir haben also in dem analytischen Modell einen Maßstab mit dem wir vor allem Weiterentwicklungen des *Calculus*, wie sie z.B. Euler vornimmt, einordnen können; so lässt sich entscheiden ob der *Calculus* von mathematischen Experten konsistent erweitert wird.

Zusätzlich kann die Bedeutung der Differentiale für die Theorie(-entwicklung) mit bisher unerreichter Präzision analysiert werden. Differentiale stellen sich als theoretische Begriffe in einer konsistenten empirischen Theorie dar, deren Variabilität Leibniz meisterhaft und intuitiv richtig zu nutzen wusste um Lösungswege möglichst einfach zu gestalten.

Euler schränkt den Anwendungsbereich des *Calculus* im Bereich der Differentiale (höherer Ordnung) aus Präzisionsabsichten maßgeblich ein, da er die für uns im analytischen Modell erkennbaren (und von Leibniz genutzten) Möglichkeiten im Bereich der Progression nicht deuten konnte. Dagegen erweitert Euler den *Calculus* u. a. indem er bekannte Vorgehensweisen systematisch auf eine Vielzahl von Funktionen, sowie unendliche Potenzreihen überträgt.

Literatur

Balzer, W., Moulines, C.U., Sneed, J.D., An Architectonic for Science, The Strucuturalist Program, Dodrecht 1982.

Bernoulli, J.: Die Differentialrechnung (1691/92), ed. Schafheitlin, P., Leipzig 1924.

Bernoulli, J.: Die erste Integralrechnung (1691/92), ed. Kowalewski, G., Leipzig und Berlin 1914.

Bos, H., Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus, *Archive for History of Exact Sciences* 14 (1974), S. 1-90.

Burscheid, H.J. & H. Struve, Die Differentialrechnung nach Leibniz – eine Rekonstruktion, *Studia Leibnitiana,* Band XXXIII/2 (2001), S. 163-193.

Burscheid, H.J. & H. Struve, Die Integralrechnung von Leibniz – eine Rekonstruktion. *Studia Leibnitiana,* Band XXXIV/2 (2002), S. 127-160.

Euler, Foundations of Differential Calculus (1755), chapter 1-9, ed. Blanton, J.D., New York, 2000.

Leibniz, G.W., Mathematische Schriften, Hg. Gerhardt C.J., 7. Bände, Berlin und Halle (1849-1863), Nachdruck Hildesheim, 1971.

an W RLER, Würzburg

Mathematik und Konkrete Kunst: Verbindungen zwischen scheinbar fremden Welten

Die Konkrete Kunst hat sich im frühen 20. h. aus den Gattungen Suprematismus und Kubismus entwickelt. Diese Vorreiter gingen von realen Situationen, wie etwa Landschaften aus, abstrahierten sie aber so weit, dass oft nur wenige geometrische Formen oder symbolische Inhalte übrig blieben. Die Konkreten Künstler gingen einen Schritt weiter, indem sie jeglichen Bezug zur Natur aufgaben und stattdessen die Wirkung von Farben und Formen ins Zentrum ihres Schaffens stellten. Konkrete Kunst ist also nicht abstrakt ; sie will nichts anderes darstellen, als die Mittel aus denen sie gemacht ist, als Farbe, Form und ihr Zusammenspiel.

Ein strenges Manifest legt dabei fest, was erlaubt ist und was nicht: Die Werke müssen klar, nachprüfbar und universell sein. Dafür ist es notwendig, sie vorzukonstruieren, d. h. einen festen Bauplan zu entwickeln.

Nahezu zwingend führen die Postulate auf die Sprache der Mathematik, aus der sich, etwa nach den Regeln der Kombinatorik, des Zufalls oder spezieller Zahlenfolgen, die Konstruktionsschemata ergeben. Mathematik ist also das zentrale Hilfsmittel beim Entwickeln Konkreter Kunst.

Andererseits ergibt sich aus der Forderung der Nachprüfbarkeit für den Betrachter, dass er die mathematischen Konstruktionsprinzipien in den Werken nachvollziehen und nacherleben kann – ein Aspekt, der die Konkrete Kunst für den Mathematikunterricht besonders interessant macht.

Ulamspirale und Primzahlenbild

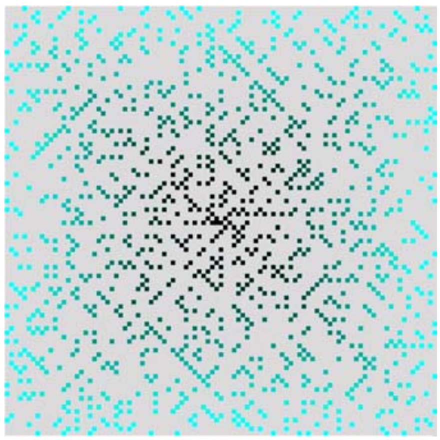


Abb. 1: ‚Primzahlenbild 1-9216'

Am Primzahlenbild 1- 216 (1 6) der Schweizer Künstlerin Suzanne Daetwyler kann man den Bauplan zunächst nur mit einiger Mühe erkennen; scheinbar zufällig sind die farbigen Kästchen auf einem grauen Hintergrund verteilt (Abb. 1). Wie der Titel verrät, sind aber Primzahlen die bildbestimmenden Elemente. Da die Zahlen 2 und 3 die einzigen primen sind, die direkt aufeinander folgen, wird der Blick ins Zentrum des Bildes gelenkt: nur dort stoßen mehrere Kästchen lückenlos aneinander. Das Kästchen in

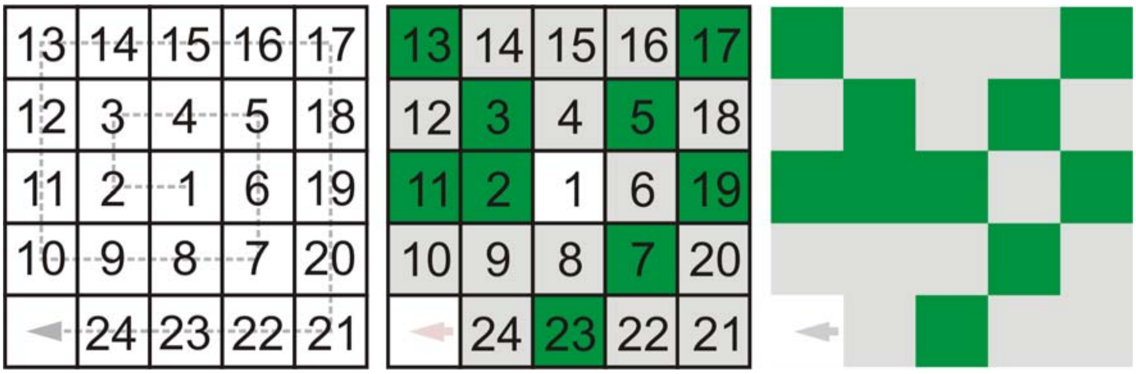


Abb. 2: Die natürlichen Zahlen werden spiralförmig angeordnet (li.), dann werden die Primzahlen markiert (mi.); die Zahl 1 wird von der Künstlerin als Primzahl behandelt.. So entsteht das Zentrum des Primzahlbildes (re.).

der Mitte des Bildes wird mit der Zahl 1 identifiziert. Von dort aus werden spiralförmig rechtsdrehend alle Kästchen durchnummeriert und die, die eine prime Nummer tragen, farblich hervorgehoben (Abb. 2).

In der Mathematik ist diese Konstruktion schon ahre vorher aufgetaucht: der polnische Mathematiker Stansislaw M. Ulam hatte sie 1 63 zufällig entdeckt und daran zusammen mit M. L. Stein und M. B. Wells die Verteilung von Primzahlen untersucht. Ihr Interesse galt der Tatsache, dass die Primzahlkästchen bei einer solchen Anordnung mehr oder weniger lange Diagonalen ergeben können. Solche Diagonalen lassen sich durch quadratische Funktionen ausdrücken und man hatte gehofft, Formeln zu finden, die ausschließlich Primzahlen erzeugen. Die Suche blieb aber erfolglos.

Das Experimentieren mit diesen sog. Ulamspiralen wird interessant, wenn man im Zentrum des Bildes nicht mit der Zahl 1, sondern einem beliebigen $n \in \mathbb{N}$ beginnt. So ergibt sich etwa für die Startzahl 41 eine besonders primzahlreiche Diagonale; sie wird durch den Ausdruck

$$x^2 - x + 41$$

beschrieben, der für $x = 1, 2, \ldots, 40$ stets verschiedene Primzahlen liefert.

Was zu Ulams Zeiten nur auf den leistungsfähigsten Rechnern möglich war, kann heute auf jedem P nachvollzogen werden und ist damit insbesondere für den Unterricht verfügbar. Mit einem entsprechenden Aplett, das Primzahlspiralen dynamisch erzeugt, können Primzahlmuster erforscht und ein Eindruck davon gewonnen werden, wie dicht die Primzahlen in $\mathbb{N}$ liegen.[1]

---

[1] Applets zur Erzeugung von Ulamspiralen und weitere Informationen zum Thema Mathematik und Konkrete Kunst unter *http://www.dmuw.de/projekt/kunst*

Apollonische Netze, Kreispackungen und Fraktale

Schreibt man in ein Bogendreieck einen Kreis von maximalem Radius ein, so entstehen drei neue Bogendreiecke (vgl. Abb. 4, li.), an denen das Vorgehen wiederholt werden kann. So ergeben sich iterativ Kreispackungen, die zusammen mit den Häufungspunkten als apollonische Netze bezeichnet werden. Solche Netze sind, wie Beno t Mandelbrot gezeigt hat, selbstinverse Fraktale.

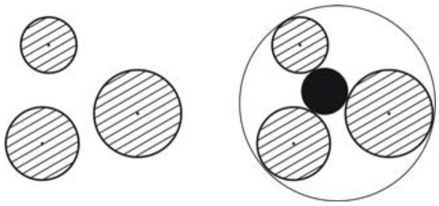


Abb. 3: Zu drei gegebenen Kreisen (li.) lässt sich ein vierter finden, der die Gegebenen von außen berührt. Ein fünfter tut dies von Außen (re.)

Dabei ist das Grundproblem, zu drei gegebenen Kreisen einen vierten zu finden, der die drei Gegebenen berührt (Abb. 3), schon alt: bereits Apollonius von Perge untersuchte im 3. h. v. hr. diese Frage. Ren Descartes fand 1643 zumindest einen Zusammenhang, der durch das Lösen quadratischer Gleichungen auf die Radien der gesuchten Kreise führt; Sir Frederik Soddy konnte 1 36 ein Analogon im 3-dimensionalen, also für Kugeln, beweisen. Erst seit 1 ist es möglich, nach einem Satz von . . Lagarias, . L. Mallows und A. R. Wilks mit Hilfe komplexer Zahlen auch die Lage der Mittelpunkte der Kreise zu berechnen.

In Einzelfällen, wie etwa bei Karl Gerstners Farbfraktal aus der Serie: Hommage an B. Mandelbrot (Abb. 5, li.), können die ersten Schritte der Kreispackung auch aufgrund geometrischer Überlegungen erfolgen; man nutzt dabei Symmetrien aus. Erst ab der zweiten bis dritten Stufe wird die geometrische Konstruktion so aufwändig, dass ihr das Lösen der entsprechenden algebraischen Gleichungen vorzuziehen ist.

Der Packungsprozess lässt sich als Algorithmus aber auch auf den Rechner übertragen. Geometrischer und algebraischer Lösungsweg erzeugen dann apollonische Packungen von hoher Genauigkeit (Abb. 4 und Abb. 5, re.).

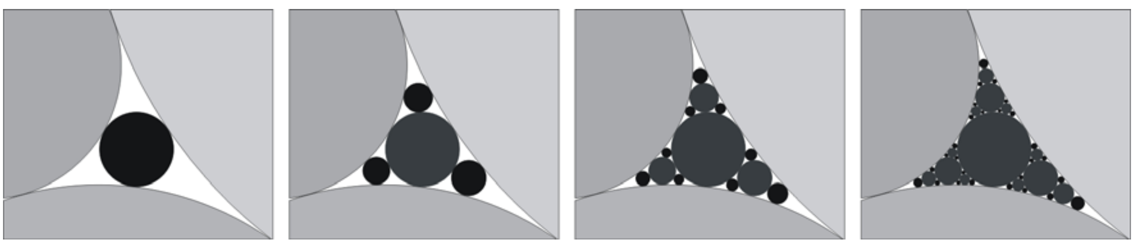


Abb. 4 (v. l. n. r.): Die ersten Schritte einer apollonischen Packung füllen ein Bogendreieck immer weiter aus

Der Künstler Karl Gerstner (1 30) zeigt sich selber von fraktalen Strukturen und ihrer Selbstähnlichkeit begeistert. Mandelbrots bekanntes Buch Die fraktale Geometrie der Natur war der Auslöser für ihn, Fraktale in einer ganzen Reihe Konkreter Kunstwerke zu thematisieren. Dabei scheut der Künstler auch nicht vor dem omputereinsatz zurück und erschafft so Werke, die in ihrer technischen Perfektion einerseits, in ihrer mathematischen Komplexität andererseits begeistern.

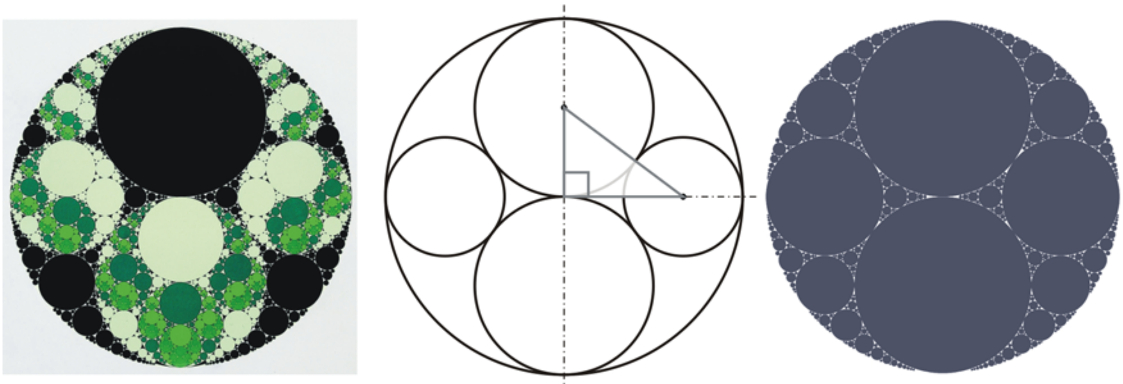


Abb. 5: Gerstners „Farbfraktal […]“ (li.) lässt sich anfangs geometrisch konstruieren (Pythagoras; mi.), aber nur über apollonische Netze vollständig beschreiben (re.).

Konkrete Kunst im MU – ein Ausblick

Bei näherer Betrachtung steckt Konkrete Kunst voller mathematischer Geschichte(n) und Problemfelder. Im Unterricht können mit ihrer Hilfe daher sehr verschiedene Themen (Symmetrien, Primzahlen, Folgen, quadratische Gleichungen, Kreisgeometrie, Algorithmen, Packungsprozesse, Zufall, Fraktale,) in – im Wortsinn – ‚anschaulicher' Weise beleuchtet werden. Häufig ist der Einstieg in die Werke einfach, und erst die weitere Analyse wirft tiefere mathematische Fragen auf. Konkrete Kunst bietet sich daher insbesondere für offene Aufgabenstellungen mit starker Binnendifferenzierung an.

Die Kunst kann aber auch zu einer umfassenderen Sichtweise dessen verhelfen, was Mathematik – unabhängig vom üblichen Anwendungsbezug – ausmacht: ihre sthetik. Mathematik und Kunst können schön sein, erstaunen, verwundern, begeistern.

Literatur

GUDERIAN, D.: *Mathematik in der Kunst der letzten 30 Jahre.* Ebringen i. Br. : Bannstein Verlag, 1 0.

LAUTER, M. (Hrsg.) ; WEIGAND, H.-G. (Hrsg.): *Ausgerechnet … Mathematik und Konkrete Kunst.* Baunach : Spurbuchverlag, 2007

Bert LANDER, Meißen

Verst ndnisintensives Lernen im Mathematikunterricht

Mathematik verstehen ist ein hoher Anspruch an den Mathematikunterricht. Dabei werfen sich gleich mehrere Fragen auf: Was heißt *Verstehen* Ist Verstehen dasselbe wie *Vorstellen* Wie lässt sich *Verstehen* in einem Lernprozess initiieren Die Fragen sind natürlich nicht neu und doch werden immer wieder neue Sichtweisen auf den Verstehensprozess, auf das Bewusstmachen von Wissen erschlossen. Eine dieser Sichtweisen wird mit dem Konzept des verständnisintensiven Lernens von PETER FAUSER begründet. Am Beispiel der unterrichtspraktischen Realisierung bei der Behandlung des Logarithmusbegriffes und der Logarithmusfunktionen wird nachfolgend dieses Konzept dargestellt.

Das onze t des verst ndnisintensiven Lernens

Ein zentraler Punkt im Lernkonzept von FAUSER ist das Bilden von *Vorstellungen* (Imagination). Vorstellungen werden als eine besondere Form des Denkens charakterisiert, welches über das begriffliche und abstrakte Denken hinausgeht und auch solche Denkformen wie etwa Träume oder Fantasie umschließt. Vorstellungen sind hierbei aber nicht nur als innere Repräsentationen von Erfahrungen und Wahrnehmungen anzusehen. Gerade das Vermögen, sich mit Hilfe von Vorstellungen über die erfahrene und wahrgenommene Erlebniswelt hinaus zu entfalten, auf der Basis von Vorstellungen neue Erkenntnisse und neues Wissen zu entwickeln, kennzeichnet die andere Qualität der Vorstellungen und hebt sie über die individuelle Erfahrung und subjektive Wahrnehmung heraus.

FAUSER gelangt über die Untersuchung der Imagination zum Begriff des *imaginativen Lernens* und charakterisiert als eine notwendige Voraussetzung das *praktische Lernen* durch Erfahrungen. Die Verbindung dieser zwei Aspekte mit dem Aspekt des *begrifflich-logischen Denkens* (Lernen durch Begreifen) und mit dem Aspekt einer bewussten Begleitung des individuellen Lernens durch Beobachtung und Rückschau (*Metakognition*) führt schließlich zum Konzept des verständnisintensiven Lernens. [1], [2]

Aus allgemeinpädagogischer Sicht steht das verständnisintensive Lernen in der Tradition etwa von GEORG MI HEAL KERS HENSTEINER und spiegelt eine kognitionspsychologische Lernauffassung, auch wenn die Begrifflichkeiten (Wahrnehmung, Anschauung, Vorstellung) sehr differenziert erscheinen. In der Mathematikdidaktik sind ähnliche Ansätze bereits von HEINRI H WINTER (entdeckendes Lernen) oder HARTMUT K HLER (lebendiger Mathematikunterricht) vertraut (siehe auch [4]).

Verst ndnisintensives Lernen des Logarithmus und seiner   unktionen

Die Mathematik der Logarithmen und Logarithmusfunktionen stellt für viele Schülerinnen und Schüler eine große Hürde im Verstehensprozess dar. Dabei erweist sich gerade der Begriff des Logarithmus fast als ein Synonym für die Kompliziertheit und Unverständlichkeit der Mathematik und leider auch des Mathematikunterrichtes (Befragungen und Erklärungsansätze hierzu finden sich in z. B. in [4]). Mit dem Ansinnen, einer solchen Einstellung *verständnisintensiv* zu begegnen, wurde eine Unterrichtsreihe konzipiert, die in der Planung und Realisierung bewusst diesem Lernkonzept Folge leistet.

Exemplarisches Lernen als Unterrichtsprinzip

Die Konzeption der inhaltlichen Organisation des Unterrichts wurde an dem Prinzip des exemplarischen Lernens von MARTIN WAGENS HEIN [3] ausgerichtet. FAUSER beschreibt ein lernpsychologisch orientiertes Lernen, das die verschiedenen Denkformen (Wahrnehmung, Imagination, begriffliches Denken) einbezieht. Diese Herangehensweise verlangt aber geradezu nach einem Verlassen der konventionellen Methodik und nach dem Aufbrechen der herkömmlichen inhaltlichen Stoffstrukturen. Dies leistet das exemplarische Lernkonzept von WAGENS HEIN. In ihm findet sich eine probate Anleitung, konkrete Unterrichtsinhalte so zu strukturieren, dass der Blick der Schülerinnen und Schüler auf exemplarisch Wesentliches fokussiert wird und sie ihre Erfahrungen und Vorstellungen im Sinne von FAUSER ganzheitlich ausbilden und zu einem Begreifen führen können. Hinzu kommt die von WAGENS HEIN propagierte stete Vorwärtsschau und Rückschau vom Einstieg zu den entwickelten Kenntnissen und Fähigkeiten, analog zur Metakognition von FAUSER.

Erfahrungen und Vorstellungen

Das Zusammenwirken der vier Aspekte Erfahrung, Vorstellung, Begreifen und Metakognition kann in ihrer Abfolge, in ihrer Bewusstheit oder ihrer Akzentuierung bei der Ausgestaltung eines verständnisintensiven Unterrichts stark variieren. Insbesondere ist eine Trennung der Aspekte voneinander, etwa von Erfahrung und Vorstellung, nicht immer möglich.

Der Logarithmusbegriff wurde in der Unterrichtsreihe an das Falten von Papier gebunden. Das Falten (z. B. durch jeweiliges Verdoppeln der Lagen) stellt sich dar als exponentieller Wachstumsprozess, der von den Lernenden in verschiedenen Formen wahrgenommen und erfahren werden kann. Varianten in der Falttechnik (Verdreifachen der Lagen), die Suche nach der notwendigen Anzahl von Faltvorgängen (wie viele Faltungen von Alufolie sind notwendig, um für einen Klassenraum eine tragende Säule zu falten), die Suche nach möglichen Anzahlen von Faltungen (wie oft lässt sich ein Blatt falten, dass den Boden des Klassenraumes vollständig bedeckt) sind nur einige Möglichkeiten, den Lernenden *Erfahrungen* anzutragen.

Andererseits geht mit der praktischen Erfahrung zugleich auch das Bilden der *Vorstellungen* einher. Die Frage nach der Anzahl der Faltungen eröffnet den Begriff des Logarithmus und verknüpft ihn mit einer gut vorstellbaren, individuell erfassbaren manuellen Tätigkeit. Der Logarithmus ist somit *erlebbar* für die Schülerinnen und Schüler.

In ähnlicher Weise erwächst eine Vorstellung von den Logarithmusfunktionen aus der Bewältigung einer aktiven, manuellen Tätigkeit, mithin aus der eigenen Erfahrung. Das Konstruieren von Funktionsgraphen in Koordinatensystemen, deren Längeneinheit 10 cm beträgt, unterscheidet sich deutlich von dem Zeichnen in Koordinatensystemen in gewohnter A4-Heftgröße. Die Lernenden müssen für sie ungewohnte Hilfsmittel (Tafellineal, Tafelkurvenschablone usw.) verwenden, die Koordinatensysteme liegen auf dem Boden und sie knien auf Zeichenplakaten, sie erfassen beim Zeichnen aufgrund der Größe der Zeichenfläche immer nur einen Teil des gesamten Funktionsgraphen und müssen sich den restlichen Teil merken und *vorstellen* – all das sind begleitende Tätigkeitsmerkmale, die das Zeichnen der Funktionen als etwas Besonderes charakterisieren und den Verlauf der Graphen – und mithin die damit verbundenen Eigenschaften der Funktionen – in den *Vorstellungen* (im FAUSER'schen Sinne) der Schülerinnen und Schüler verankern helfen.

Begreifen

Begreifen im Sinne des verständnisintensiven Lernkonzepts ist das Ausbilden des begrifflich logischen Denkens. Dieses Ausbilden wird initiiert durch den Rückgriff auf die praktischen *Erfahrungen*, durch das Aufgreifen der vorhandenen *Vorstellungen* und eine fortgesetzte wechselseitige, gegenständliche und mathematische Interpretation der untersuchten Begriffe und Zusammenhänge. Begreifen heißt damit *Systematisieren*, *Vernetzen* mit vorhandenen Wissensstrukturen und *Einbetten* in die gesamte mathematische Begriffswelt der Lernenden.

Im Systematisierungsprozess erscheinen der Logarithmus und das Logarithmieren als eine Umkehrung des Potenzierens und werden dem Radizieren gegenübergestellt. Die Logarithmusfunktionen werden als Funktionenklasse und als Umkehrfunktionen diskutiert und begrifflich erschlossen.

Metakognition

Das bewusste Begleiten (Metakognition) des Lernprozesses ist zweigestaltig. Zum einen müssen die Schülerinnen und Schüler dazu befähigt werden, ihr eigenes Lernen selbst zu begleiten, bewusst zu reflektieren und kritisch zu verarbeiten. Hinzu tritt die Begleitung durch die Lehrperson, die den Lernprozess reflektiert, Impulse setzt, das Lernen bewusst macht und kritisch einschätzt.

Eine übergreifende Metakognition findet statt durch das schrittweise Nachvollziehen der Stufung des Lernprozesses, durch das immer wiederkehrendes Aufgreifen und Auswerten der Erkenntnisse. Eine weitere Möglichkeit für die übergreifende metakognitive Rückschau liegt in einer schriftlichen Rückbesinnung begründet, bei der die Schülerinnen und Schüler wesentliche Inhalte und Zusammenhänge der vergangenen Mathematikunterrichts aus ihrer Sicht schriftlich zusammenfassen und darlegen sollen.

Zusammenfassung

In Anknüpfung an den Ausgangspunkt der Betrachtungen muss rückschauend gefragt werden: Finden die Lernenden einen verständlichen Zugang zum Logarithmus und seinen Funktionen Werden die Lernenden die mathematischen Inhalte *verstehen* Mit der Sichtweise des verständnisintensiven Lernkonzeptes lässt sich feststellen, dass die Schülerinnen und Schüler zweifellos ihnen eigene Vorstellungen entwickeln werden. Ein daraus resultierendes Verstehen setzt aber voraus, dass neben den Vorstellungen auch ein mathematisches Begriffs- und Regelgefüge vernetzt vorliegt, in das die Vorstellungen eingebettet werden können, und dass ein mathematisches Denkvermögen entfaltet ist. In der Entwicklung solcher Fähigkeiten zeigt sich erneut ein hoher Anspruch an den mathematischen Unterricht.

Literatur

[1] FAUSER, P.: Lernen als innere Wirklichkeit. Über Imagination, Lernen und Verstehen. In: RENTS HLER, I.; MADELUNG, E.; FAUSER, P. (Hrsg.): Bilder im Kopf. Texte zum Imaginativen Lernen. Seelze-Velber: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, 2003, S. 242–2 6.

[2] FAUSER, P.; IRMERT-MÜLLER, G.: Vorstellungen bilden. Zum Verhältnis von Imagination und Lernen. In: FAUSER, P.; MADELUNG, E.; (Hrsg.): Vorstellungen bilden. Beiträge zum imaginativen Lernen. Velber: Friedrich-Verlag, 1 6, S. 211–243.

[3] WAGENS HEIN, M.: Verstehen lehren. Weinheim: Beltz Verlag 1 7.

[4] LANDER, B.: Die Entwicklung von Vorstellungen im Mathematikunterricht. Umsetzung eines Konzeptes zum verständnisintensiven Lernen am Beispiel der Behandlung der Exponential- und Logarithmusfunktionen im Mathematikunterricht der Klassenstufe 10. Gera, ena: Staatliches Studienseminar für Lehrerausbildung Gera, 2007.

Sandra ZABAROVSKA, Riga, Latvia

The eturn of omothety in Mathematical ontests

Situation in Schools and Advanced ontests

The school curricula have a tendency to emphasize the practical application. Geometry is a training ground for deductive thinking but geometrical facts themselves are not obviously practical. Separate subjects “geometry” and “algebra” are merged into one subject “mathematics” in many countries. The standards for geometry teaching are being lowered.

Standards are not being lowered in mathematical contests and olympiads. Teachers use this to get students to learn something more than the curricula require. That way the importance of such activities increases.

T o A roaches to ards Geometry act Introducing

One approach is to split a problem into small parts and to analyze each part separately, after that combining them back together. E.g., many shapes can be reduced to triangles, and many problems can be solved using a chain of triangles’ congruences.

Another approach is to consider object under interest as a part of a general system and to deduce its properties from those of the system. This is how geometrical transformations mostly work.

In schools the first approach dominates, because it is generally easier for average students.

In mathematical olympiads geometrical transformations were sometimes very popular, especially in connection with construction tasks. Then during some period of time they appeared less and less often, but now they become popular again.

Main A lications of omothety

There are two main classes of problems to which homothety can be successfully applied:

a) incidence problems,

b) geometrical construction problems.

The properties of homothety can be naturally divided into two classes:

a) properties that are common for all isometries and transformations of similitude:

a1) each shape transforms into a similar shape, a2) elements with any geometrical meaning transform into elements with the same meaning;

b) properties specific for homothety:

b1) any line transforms into line parallel to it,

b2) all circles transform through homothety into one another,

b3) all triangles with sides pairwise parallel transform into one another, except equally positioned equal triangles,

b4) if three figures are pairwise homothetical then the centers of homotheties are collinear.

The applications of homothety usually follow a general schema: at first the existence of homothety is established from the properties of **some** elements of the configuration, and after that new properties of **other** elements are deduced from the general properties of homothety.

omment The informal formulation of the property a2 above appears to be especially useful for achieving better understanding by students, because it is intuitively clear and does not require long explanations.

haracteristic Exam les

The following example is a nice proof of collinearity.

Exam le I Sharygin Three equal circumferences pass through the point S. Common tangents are drawn as shown in Fig. 1. Prove that O, the circumcenter of triangle ABC, I, the incenter of triangle ABC, and S are collinear.

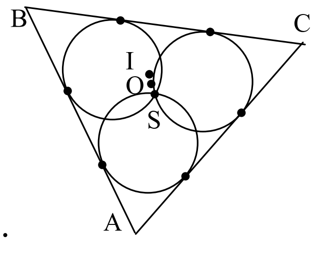


Fig. 1.

To solve this we connect the centers of the equal circumferences and acquire a triangle homothetical to ABC. The point I is the center of homothety between the triangles, while point S is the circumcenter of the new triangle. Therefore O and S transform into each other. The conclusion follows, because each two mutually corresponding points are collinear with the center of homothety.

The next example shows a proof that some points are concyclic.

Exam le L Euler Let's consider a triangle and it's altitudes. Prove that the feet of the altitudes and the midpoints of segments connecting the orthocenter with vertices are concyclic.

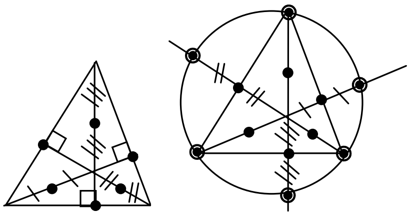


Fig. 2.

To prove it draw a circumcircle of the triangle (see Fig. 2.). Consider a homothety centered at the orthocenter with a coefficient 1/2.

Now we show how the homothety can be used to prove that some lines are concurrent.

Exam le Polish com etition A point is given inside an acute triangle. Perpendiculars are dropped from this point to the sides. Through the bases of these perpendiculars a circumference is drawn. It intersects each side a second time. Through these new intersection points perpendiculars are drawn to the corresponding sides. Prove that these perpendiculars intersect at the same point.

The problem exploits central symmetry or homothety with coefficient k=-1 and center coinciding with the center of the given circle.

The next example shows how homothety is used to prove the parallelity of two lines.

Exam le V Prasolov A circumference is touched on the inside by two smaller equal circumferences. For each point M on the outer circumference prove that AB is parallel to A_1B_1 (see Fig. 3.).

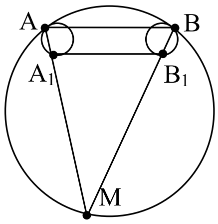


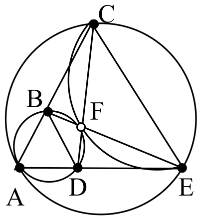
Fig. 3.

In the solution two homotheties with centers A and B and coefficients equal to the ratio of radiuses are used.

As the last example of incidence problems we consider a proof that two circumferences are touching each other.

Exam le ussian com etition Two circumferences touch each other in an inside manner at the point A (see Fig. 4.). Lines passing through A intersect the circuferences at points B, C and D, E correspondingly.

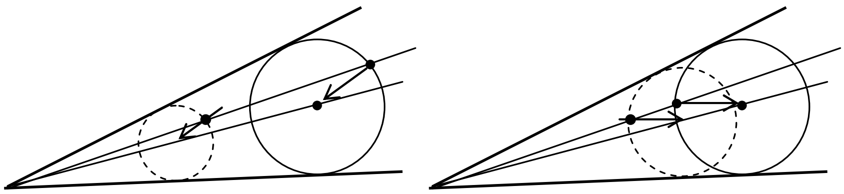
The segments BE and CD intersect at F; it is given that F is on the inner circumference. Prove that the circumcircle of CEF touches the inner circumference.

Fig. 4. 

In the solution, two homotheties with centers A and F are considered.

At the end we give an example of geometrical construction.

Exam le   Latvian com etition An angle and an inner point of it are given. Construct a circumference that touches the sides of the angle and passes through the given point.

Fig. 5. 

First we draw any circumference that touches the sides of the angle. Using this circumference's center we find centers of the homothetical circumferences. Notice that there are two solutions (see Fig. 5.).

There are also many problems combining homothety with some classical geometrical fact, with other transformations etc.

hy the   eturn

The extended use of geometrical transformations fits good with the general „functional approach" to mathematics: they are functions whose arguments and values are points. The idea to consider separate elements as parts of greater system is characteristic for today's mathematics. The class of problems solvable by students becomes broader and more advanced.

Literature

1. A.Andžāns. How to Teach Serious Geometry Before the Regular Course has Started. – Proc. Int. Conf. Matematika ir matemikos destymas, Kaunas, KTU, 2007. – pp. 5 – 8.

2. I.M.Yaglom. Geometrical Transformations, parts 1 and 2. Moscow, GITTL, 1954, 1956 (in Russian).

3. IMO shortlists, 1986 – 2007.

4. R.Johnson. Modern Elementary Geometry. Dover, 1963 et al.

Harald ZAUNER, Anke LINDMEIER, Kristina REISS, München

"Habe ich alles bedacht?" – Ein Modell zur Strukturierung heuristischer Lösungsbeispiele aus dem Bereich der Leitidee "Daten und Zufall"[1]

Mit Einführung der Bildungsstandards (KMK, 2003) begann die Konkretisierung der vorgestellten Kompetenzrahmenmodelle in einzelnen Teilbereichen. Als Teil des Projekts Kompendium Mathematik (KOMMA) zur Entwicklung und Evaluation einer selbstständigkeitsorientierten Lernumgebung sollen Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern im Teilbereich *Daten* der Leitidee *Daten und Zufall* (L5) untersucht werden. Diese erfordern neben dem *mathematischen Modellieren* (K3) insbesondere auch die allgemeine Kompetenz *mathematische Darstellungen verwenden* (K4), weswegen der Fokus auf diese beiden Kompetenzbereiche gelegt wurde. Sie bilden die Grundlage für ein Kompetenzstufenmodell der Teilkompetenz *Nutzen von Darstellungen und Modellen im statistischen Kontexten*[2], mit dessen Hilfe Leistungen von Schülerinnen und Schülern erfasst werden können. Im Folgenden wird als Erweiterung ein Modell begründet, das den Bearbeitungsprozess von Aufgaben in statistischen Kontexten abbildet und seine Implementierung in eine Lernumgebung vorgestellt.

Einflussfaktoren Inquiry Cycle und Metakognition

Aufgaben mit Bezug zur Leitidee Daten und Zufall in der Sekundarstufe I verlangen typischerweise, dass in Tabellen oder Grafiken, aber auch in Texten dargestellte Informationen aus einer oder mehreren Untersuchungen – seien es Umfragen, Messungen o. ä. – entnommen, verarbeitet und unter Ausnutzung von Beziehungen zwischen den Darstellungen kombiniert werden, um Aussagen über den betrachteten Sachverhalt treffen zu können. Zum Einsatz kommen hier Darstellungsarten wie z. B. Linien- und Kreisdiagramme oder Vierfeldertafeln ebenso wie verschiedene Mittelwerte als komprimierte Darstellungen von Verteilungen. Gemeinsam ist diesen Fragestellungen, dass sie oft einen Bearbeitungsprozess verlangen, der an die naturwissenschaftliche Arbeitsweise erinnert. Ein bei White und Frederiksen (1998) als *Inquiry Cycle* bezeichnetes Modell des naturwissenschaftli-

---

[1] Dieses Forschungsvorhaben wird vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert (Bew.-Nr. PLI3032).

[2] Ein Überblick sowie eine Kurzbeschreibung der entwickelten Kompetenzstufen und Ergebnisse der empirischen Überprüfung finden sich in Kuntze, Lindmeier, Reiss (im Druck) und Lindmeier, Kuntze & Reiss (2007).

chen Denkens enthält fünf Phasen, beginnend mit der Formulierung der Fragestellung (1) und dem Aufstellen entsprechender Vermutungen oder Vorhersagen (2). Es folgt die Planung und Durchführung geeigneter Experimente (3), deren Ergebnis analysiert und in entsprechenden (naturwissenschaftlichen) Gesetzen und Modellen zusammengefasst werden (4). Die Evaluation durch Anwendung (5) schließt den Kreislauf des naturwissenschaftlichen Denkens ab oder stößt unter Umständen eine Revision der vorherigen Arbeiten an. Dieses stark experimentell orientierte Modell lässt sich für die Bearbeitung statistischer Fragestelllungen modifizieren. An Stelle des Experiments tritt hier beispielsweise die Datenerhebung, deren Resultat in Aufgaben für Lernende meist vorgegeben wird. Die Analyse der Daten führt auf Grund des untersuchten Sachverhalts typischerweise nicht zu allgemeingültigen Gesetzen und Modellen, wohl aber zu Aussagen, deren Qualität von Design und Durchführung der Datenerhebung abhängt. Eine Überprüfung der erhaltenen Aussagen sollte die Bearbeitung statistischer Fragestellungen ebenfalls enthalten.

Als eine notwendige Voraussetzung für erfolgreiches, selbstständiges Lösen von Modellierungsaufgaben gilt die Verfügbarkeit *metakognitiver Strategien*. Darunter fallen Strategien zur Planung, Überwachung und Bewertung des eigenen Lösungsprozesses (vgl. z.B. Schiefele & Pekrun, 1996), wobei die Planung vor Beginn des eigentlichen Lösungsprozesses stattfindet, die Überwachung diesen begleitet und die metakognitiven Kontrollstrategien abschließend zur Bewertung des eigenen Lösungswegs zum Einsatz kommen.

Synthese des Prozessmodells

Das als Synthese entstandene schülergerechte 4-schrittige Prozessmodell ist ein anwendbares und trotzdem gut erinnerbares Gerüst eines möglichen Lösungsprozesses (vgl. Tab. 2), in dem die oben dargestellten Einflussfaktoren des Kreislaufs naturwissenschaftlichen Denkens und die metakognitiven Faktoren der Planung, Überwachung und Kontrolle noch deutlich erkennbar sind. In der Explorationsphase *Was will ich wissen?* (1) zu Beginn werden die Lernenden zur Formulierung der Fragestellung und dem Aufstellen von Vermutungen aufgefordert. In der planenden Phase *Was brauche ich dazu?* (2) sollen Sachverhalt und gegebene Informationen analysiert und eine Lösungsidee generiert werden. Sie bildet die Grundlage für die Phase *Welches Ergebnis erhalte ich?* (3), zu dessen Ende eine mögliche Lösung vorliegt, die aber erst durch Kontrolle des eigenen Lösungswegs – angestoßen in der abschließenden Phase *Habe ich alles bedacht?* (4) – als Lösung legitimiert wird.

Tab. 2: 4-Phasen-Struktur zum Lösungsprozess für Aufgaben, welche Modellierungskompetenzen und hypothesengeleitetes Denken erfordern.

Schritt 1 Was will ich wissen?	• Mach' Dich mit dem Sachverhalt vertraut! • Formuliere Deine Frage klar! • Stell' eine Vermutung auf, falls Du eine hast!
Schritt 2 Was brauche ich dazu?	• Schau' Dir den Sachverhalt genauer an! • Welche Informationen hast Du? • Welche Informationen brauchst Du und welche nicht, um Deine Frage zu beantworten? • Überlege Dir, was Du aus der Mathematik brauchen kannst!
Welches Ergebnis erhalte ich?	• Lies ab, rechne, zeichne, kombiniere, begründe! • Nimm Deine Ideen aus dem letzten Schritt und erarbeite Dein Ergebnis!
Schritt 4 Habe ich alles bedacht?	• Überprüfe, ob Dein Ergebnis Sinn macht! • Vielleicht entdeckst Du einen Fehler? • Vergleiche Dein Ergebnis mit Deiner Vermutung! • Schreib auf, ob Deine Vermutung gestimmt hat oder nicht!

Ein idealer Lösungsprozess wäre auf Basis dieses Modells zur Bearbeitung von Aufgaben, welche Modellierungskompetenzen und hypothesengeleitetes Denken in statistischen Kontexten erfordern, durch ein zyklisches (ein- oder mehrmaliges) Durchlaufen der Modellphasen gekennzeichnet. Reale Lösungsprozesse sind jedoch von *Heurismen*[3] geprägt und deswegen können die einzelne Schritte schwer in dem Modell zu verorten sein, auch wenn die einzelnen, in den Schritten angeführten Überlegungen für ein erfolgreiches Lösen der betrachteten Aufgaben notwendig sind.

Implementation in heuristischen Lösungsbeispielen

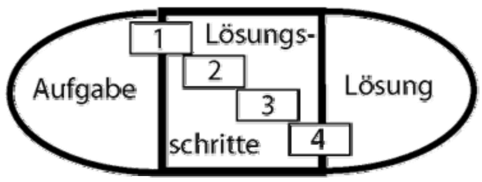


Abb. 1: Schematische Darstellung eines Lösungsbeispiels

Die in der Intervention verwendeten Materialen sind als *heuristische Lösungsbeispiele* realisiert. Dabei handelt es sich um gelöste Beispielaufgaben, die den Lösungsweg beinhalten (vgl. Renkl et al., 2003). Lösungsbeispiele zeigten sich in anderen Lernumgebungen als lernförderlich (vgl. z.B. Reiss & Renkl, 2002). Das oben entwickelte Prozessmodell zur Bearbeitung der beschriebenen statistischen Aufgabenstellungen wurde in KOMMA für die Lernenden transparent implementiert, indem die angebotenen Lösungswege mit Hilfe der vier Phasen strukturiert wurden (vgl. Abb. 1). Falls der Lernende nicht selbst über geeignete Lösungsstrategien

[3] Der Begriff Heurismen wird hier für Strategien verwendet, die nicht zu algorithmischen Routineverfahren zählen, vgl. Schoenfeld, 1982.

verfügt, dann soll die Explikation des Prozessmodells helfen, metakognitive Prozesse zu unterstützen und einen möglichen nächsten Schritt ausgehend von der momentanen Selbsteinschätzung des Schülers oder der Schülerin anzustoßen[4]. In den Lösungsbeispielen wird den oben angesprochenen möglichen Rekursionen oder Sprüngen im Laufe einer realen Bearbeitung Rechnung getragen, indem heuristisches Lösungsverhalten in den Lösungsbeispielen simuliert wird.

Die in KOMMA verwendeten heuristischen Lösungsbeispiele vollziehen dabei die Lösung der beiden fiktiven Schüler Anna und Lukas nach, die während des Lösungsprozesses die Phasen des 4-schrittigen Modells durchlaufen und gegebenenfalls auch flexibel in frühere Phasen zurückwechseln.

Literatur

KMK (Kultusministerkonferenz). (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. München: Wolters Kluwer.

Kuntze, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (im Druck). „Daten und Zufall“ als Leitidee für ein Kompetenzstufenmodell zum „Nutzen von Darstellungen und Modellen“ als Teilkomponente von Statistical Literacy. Tagungsband 2006/2007 des Arbeitskreises Stochastik.

Lindmeier, A., Kuntze, S. & Reiss, K. (2007). Representations of data and manipulations through reduction – competencies of German secondary students. In B. Philips & L. Weldon (Eds.), Proceedings of the IASE/ISI Satellite Conference on Statistical Education, Guimarães, Portugal, 19-21 August 2007. Voorburg, NL: International Statistical Institute.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34 (1), 29-35.

Renkl, A., Gruber, H., Weber, S., Lerche, T. & Schweizer, K. (2003). Cognitive Load beim Lernen aus Lösungsbeispielen. Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 17(2), 3-101.

Schiefele, U., Pekrun, R. (1996). Psychologische Modelle des fremdgesteuerten und selbstgesteuerten Lernens. In: Weinert, F.E. (Hrsg.), Enzyklopädie der Psychologie, Band 2, Göttingen 1996, 249 – 278.

Schoenfeld, A. H. (1982). Measures of Problem-Solving Performance and of Problem-Solving Instruction Journal for Research in Mathematics Education. National Council of Teachers of Mathematics, 1982, 13(1) , 31-49.

White, B. Y. & Frederiksen, J. R. (1998). Inquiry, Modeling, and Metacognition: Making Science Accessible to All Students. Cognition & Instruction, 16(1) , 3-118.

Wallman, K. (1993). Enhancing Statistical Literacy: Enriching our Society. Journal of the American Statistical Association, 88(421), 1-8.

Watson, J., & Callingham, R. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. Statistics Education Research Journal, 2(2), 3-46.

[4] Eine ähnliche Betonung des Lösungsprozesses verwendet Schoenfeld (1982) in der Metapher der *managerial strategies.*

Simon ZELL, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd

Erkunden des Variablenbegriffs durch hysikalische Ex erimente

l intergrund und Ziele

Das vorzustellende Projekt ist ein Teilprojekt des europäischen Kooperationsprojekts ScienceMath mit Partnern aus Deutschland, Slowenien, Dänemark und Finnland. Grundidee ist, mathematisches Lernen in naturwissenschaftlichen Kontexten und durch aktive Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler anzuregen. Ein Schwerpunkt liegt auf der Förderung des mathematischen Begriffserwerbs, indem die Aspekte eines Begriffs wie Funktions-, Variablenbegriff usw. an konkreten Objekten oder in naturwissenschaftlichen Experimenten erfahren werden.

Zentrale Fragen zu der hier vorzustellenden Untersuchung zur Förderung des Variablenbegriffserwerbs sind:

- Welche Aspekte des Variablenbegriffs können durch Experimente erfahren werden
- Welche Faktoren wirken sich dabei positiv bzw. negativ auf die Begriffsbildung aus

As ekte des Variablenbegriffs

Malle (1 6) unterscheidet drei Aspekte des Variablenbegriffs. Unter dem *Gegenstandsaspekt* versteht er eine Variable als unbekannten oder nicht näher bekannten Gegenstand. Unter dem *Einsetzaspekt* versteht er eine Variable als Leerstelle, in die man Zahlenwerte einsetzen darf. Der dritte Aspekt ist der *Kalkülaspekt.* Die Variable stellt hier ein bedeutungsloses Zeichen dar, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf. Er unterteilt diese Aspekte zusätzlich in eine statische und dynamische Komponente. Wiegand und ordan (2005) ordnen den genannten Aspekten verschiedene Arbeitsweisen zu. Der Kalkülaspekt ist eher technischer, der Einsetzaspekt eher rechnerischer und der Gegenstandsaspekt eher begrifflicher Natur. Die kognitive Komplexität ist beim Kalkülaspekt am niedrigsten und beim Gegenstandsaspekt am höchsten. Nach der Forderung von Malle sind alle Aspekte des Variablenbegriffs zu beachten, wobei jedoch am Anfang der Gegenstandsaspekt zu betonen sei.

Ursini et al. haben die unterschiedlichen Betrachtungs- und Arbeitsweisen von Variablen in einem 3x3-Schema zusammengefasst (Abbildung l). Sie unterscheiden zum einen Variablen als verallgemeinerte Zahl, die eine Zahl aus einem Wertebereich repräsentiert und zum anderen als situations-spezifische Konstante, also eine Variable, die in derselben Situation bzw. Umgebung konstant ist, deren Wert sich in einer anderen Situation ändern kann. Man kann situationsspezifische Konstanten auch als Repräsentanten einer diskreten Wertemenge sehen. Die dritte Betrachtungsweise sind Variablen im funktionalen Zusammenhang. Diese Betrachtungsweisen kann man auf drei Ebenen sehen: auf konzeptioneller, interpretativer und manipulativer Ebene.

As ekte des Variablenbegriffs

	Konzeptionierung und Symbolisierung	**Interpretation**	**Manipulation**
verallgemeinerte Zahl	K n e ti nierung eines allge einen e ts das in allge einen eth den der egeln r t und aus nu eris hen der und ge etris hen ustern a geleitet ird und seine lisierung	Inter retati n eines ls als allge eines e t in alge rais hen usdru en der allge einen eth den	er u r ungen an enden u alge rais he usdr e u u r en
situationsspezifische Konstante	K n e ti nierung einer n e annten in einer esti ten ituati n und der in einer lei hung und ihrer lisierung	Inter retati n eines ls als este ahl in lei hungen die d rt ein der ehrere ale r en ann und deren eit si h in einer anderen ituati n ndern ann	ine lei hung s u u r en da it die Varia le egenstand der lei hung ird
Variable im funktionalen Zusammenhang	K n e ti nierung und lisierung n un ti nalen usa enh ngen die ans einer a elle der eines ra hen der eines e tes ents ringen nnen	Inter retati n der nal gien und e einsa eiten in anal tis hen usdru en a ellen und ra hen	r ung alge rais her usdru e und n enden der u stituti n u den De initi ns- und erte-erei h a i ale und ini ale erte und das gl ale Verhalten der un - ti nalen e iehung u esti en

Abbildung l (nach Ursini et al. (1 6) ins Deutsche übersetzt SZ)

Physikalische Ex erimente zum Variablenbegriffser erb

Physikalische Experimente bieten sich für die Förderung des Variablen-begriffs an, da die Messgrößen verallgemeinerte Zahlen (mit Einheiten) darstellen, die in einem funktionalen Zusammenhang stehen. Dadurch dass dabei der Variablenbegriff mit konkreten Gegenständen verknüpft wird, gewinnt die Variable an Sinnhaltigkeit. Es wird, wie von Malle gefordert, der Gegenstandsaspekt von Variablen betont. Weiterhin können die Schülerinnen und Schüler das Kovariationsprinzip selbstständig im Experiment erfassen. Anhand von Messtabellen sind sie aufgefordert einen

Zusammenhang zwischen den Messgrößen herauszufinden und diesen verbal und durch eine Formel auszudrücken. Nachdem eine Formel gefunden worden ist, kann diese interpretiert werden. Durch weiterführende Gedankenexperimente, die nahe am realen Experiment sind, können sich die Schülerinnen und Schüler über die Struktur einer Formel Gedanken machen.

Das Projekt

In dem an der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd entwickelten Teilprojekt von ScienceMath zum Variablenbegriff interessieren die konzeptionelle und die interpretative Ebene. Untersucht wird, ob Schülerinnen und Schüler sich durch physikalische Experimente die ersten zwei Spalten der Aspekte des Variablenbegriffs nach Ursini et al. erarbeiten können. Es fragt sich, ob sie Formeln aufstellen, den Inhalt der Formeln verstehen und interpretieren können.

Die entwickelte Unterrichtssequenz ist so ausgelegt, dass die Schülerinnen und Schüler ausreichend Gelegenheit haben, sich mit Variablen und den Zusammenhängen zwischen diesen Variablen auseinander zu setzen. Deshalb erfolgt vor den Versuchen bewusst keine mathematische Formulierung von Variabeln und deren Eigenschaften. Erst nach der Experimentierphase werden die Begriffe Variable und Term eingeführt.

Die unterrichtliche Erprobung fand im Schuljahr 2007/0 in drei siebten württembergischen Klassen, zwei Gymnasialklassen und einer Realschulklasse, statt. Die Schülerinnen und Schüler führten insgesamt drei Versuche durch und bearbeiteten dazu ein Arbeitsblatt. Danach folgte die formale Einführung des Variablenbegriffs. Die Gymnasialklassen hatten bereits Vorerfahrungen durch die Einheit Funktionen ; die Realschulklassen hatten keinerlei Vorerfahrungen auf diesem Gebiet.

Grundlage der Auswertung sind die Schülerarbeitsblätter, die Dialoge zwischen Lehrern und Schülern sowie untereinander, die von Projektmitarbeitern erstellten Beobachtungsbögen und ein Abschlusstest.

Ergebnisse

elche As ekte erden vermittelt

So gut wie alle Schülerinnen und Schüler erkennen das Kovariationsprinzip und können dieses interpretieren.

Bei der Konzeption der Formel durch Variablen beschreiben Gymnasiasten die Variablen meist durch y, x und f(x). Die Realschülerinnen und Realschüler nutzen eher Worte oder wählen die Einheiten der physikalischen Größen als Variablen. Viele Schülerinnen und Schüler sehen ein, dass sich eine Formel in einer anderen Umgebung ändern kann. Allerdings können nur wenige dies auf die Formel übersetzen.

elche aktoren irken ositiv negativ auf die egriffsbildung

Die Beobachtungen sprechen dafür, dass die Verknüpfung der Variablen mit konkreten Objekten sich positiv auf die Interpretation von Variablen und deren funktionalen Zusammenhang auswirkt. Durch die Experimente erfahren die Schülerinnen und Schüler anschaulich den dynamischen Aspekt einer Variablen. Schließlich kann das gemeinsame Experimentieren und Diskutieren zu einem tieferen Verständnis über den Begriff führen.

Allerdings zeigen die Erfahrungen, dass die Versuche nicht zu technisch konzipiert sein dürfen. Sie müssen so ausgerichtet sein, dass sie nicht zum Mittelpunkt der Unterrichtssequenz werden, sondern dass die mathematischen Aspekte eines Phänomens vordergründig sind.

Beim Experimentieren müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein Messfehler zu erkennen und diese in den Rechnungen interpretieren zu können. Sind die Abstände zwischen den Messwerten derselben Messgröße regelmäßig führt dies zu Schwierigkeiten beim Finden der Formel. In solchen Fällen formulierten die Schülerinnen und Schüler folgende Ansätze nderung der Messgröße x um l, bewirkt eine nderung der Messgröße y um ... . Der Schritt von dieser Aussage zu einem proportionalen Zusammenhang fiel vielen Realschülerinnen und Realschülern schwer. Bei unregelmäßigen Abständen hingegen, waren die Schülerinnen und Schüler viel eher geneigt den Quotienten bzw. das Produkt der Wertepaare zu betrachten und auszurechnen.

Literatur

[l] Beckmann A. (2007): ScienceMath - ein fächerübergreifendes europäisches Projekt; in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007, Hildesheim, Berlin (Franzbecker)

[2] Malle G. (1 6): Variable; Mathematik Lehren 15, April 6, S.2-

[3] Barzel B., Herget. W. (2006): Zahlen, Symbole, Variablen - abstrakt und konkret; Mathematik Lehren 136, S.4-

[4] Wiegand B., ordan A. (2005): Grundvorstellungen zum Variablenbegriff – eine Interventionsstudie; in: Henn/Kaiser: Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evaluation und Evolution, Franzbecker 2005, S.212-221

[5] Trigueros M., Ursini S., Reyes A. (1 6): ollege students conceptions of variable; in Proceedings of the 20[1] PME onference Vol.4, S.315-322

Bernd ZIMMERMANN, Jena

György Pólya, 1887 – 1985. Zur Biographie, zum Lebenswerk und zu seiner Wirkung auf die Mathematikdidaktik

1 Einleitung

Neben Hans Freudenthal gehört György Pólya zweifellos zu den Persönlichkeiten, die seit dem letzten Jahrhundert bis heute mit den stärksten Einfluss auf die Mathematikdidaktik ausüben. Die erste GDM-Tagung in Ungarn ist ein guter Anlass, über seine Bedeutung näher zu reflektieren. Der Autor dankt dem ungarischem Organisationskomitee dieser Tagung sowie dem Vorstand der GDM für die große Ehre, einige Bemerkungen zu dieser bedeutenden Persönlichkeit machen zu dürfen. Die folgenden Informationen wurden oft der lesenswerten Biographie von Alexanderson 2000 entnommen. Auf diese Quelle wird in der Form (A, x - x) Bezug genommen.

2 Kindheit und Familie

Györge Pólya wurde am 13.12.1887 in Budapest geboren. Unter den zwei Brüder und zwei Schwestern war der elf Jahre ältere Bruder Jenő ebenfalls sehr an Mathematik interessiert. Er wurde aber später dann ein berühmter Chirurg. Die Familie war jüdischer Herkunft und trug ursprünglich den Namen Pollák. Weil er sich hierdurch besserer Aufstiegschancen versprach, ließ der Vater Jakab diesen Namen 1882 in Pólya ändern. Noch vor der Geburt von Györge trat die Familie aus ähnlichen Gründen zum Katholizismus über. Die Mutter Anna, geb. Deutsch, war von gehobener Herkunft und eine starke Persönlichkeit. Der Vater war zunächst Jurist und arbeitete später bei einer Versicherung, beides mit mäßigem Erfolg. Nachts schrieb er oft an Büchern - insgesamt erstellte er zehn - in der Hoffnung, so eher eine Stelle an der Universität zu erhalten. Schließlich erreichte er auch dort die Position eines Lektors, starb aber leider kurz danach, erst 53 Jahre alt (A, 9 - 13).

3 Ausbildung

Pólya verbrachte seine gesamte Schul- und Studienzeit in Budapest. Schon an der Grundschule wurden ihm Fleiß und ordentliches Benehmen bestätigt. Am nach deutschem Vorbild geprägten Dániel Berzsenyi Gymnasium war er mehr an Geisteswissenschaften (Noten: ausgezeichnet) interessiert als an Mathematik; dort hatte er nicht so gute Noten (Geometrie: überwiegend befriedigend!). Das hing vermutlich auch mit nicht so guten Mathematiklehrern zusammen. Am berühmten Eötvös-(Mathematik)Wettbewerb (später Kürschák-Wettbewerb) nahm er zwar teil, traute sich aber nicht, den Test abzugeben. So war während seiner Schulzeit noch nicht die Karriere eines bedeutenden Mathematikers zu erkennen. Auch mit Studienbeginn änderte sich daran zunächst nichts. Gemäß dem Wunsche seiner Mutter studierte Pólya zunächst Jura. Das hat er aber nur ein Semester lang ausgehalten, da ihn dieses Studium entsetzlich langweilte. Hieran schloss er zwei Jahre lang ein Latein- und Ungarisch-Studium an, das er mit einem Lehrerabschlussexamen beendete, worauf er sehr stolz war. In diesem Zusammenhang bekam er auch seine erste Ehrung, nämlich für eine Übersetzung eines Werkes von Heinrich Heine ins Ungarische. Schließlich gelangte er über Philosophiestudien beim bekannten ungarischen Naturphilosophen Alexander zur Physik - hier hörte er vor allem Eötvös - und so schließlich zur Mathematik. Er beantwortete einmal die Frage, warum er sich dann für die Mathematik entschieden hätte, so:

"I thought I am not good enough for physics and I am too good for philosophy. Mathematics is in between." (Albers/Alexanderson 1985, 248)

Einmal bei der Mathematik, wurde er sofort sehr beeindruckt und dauerhaft beeinflusst von dem bekannten Mathematiker Lipót Fejér, der mit am Anfang stand einer ganzen Reihe hervorragender ungarischer Mathematiker am Ende des neunzehnten und am Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts. Unter dessen Betreuung schloss Pólya im Jahre 1913 seine Dissertation mit dem Titel „Über einige Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und gewisse damit zusammenhängende bestimmte Integrale" ab (A, 15 - 24).

4 Laufbahn

Nach seiner Promotion ging Pólya für zwei Jahre nach Göttingen, das zu jener Zeit ein weltweit führendes Zentrum der Mathematik war. Hier traf er u. a. F. Klein, D. Hilbert, E. Landau, O. Toeplitz, H. Weyl, C. Carathéodory, E. Hecke, C. Runge, L. Prandtl, die seine weitere Arbeit beeinflussten. Im Jahre 1914 schloss sich ein kurzer Aufenthalt in Paris an, das kaum hinter Göttingen zurückstand, wovon Namen wie H. Poincaré, J. Hadamard, É. Picard, É. Borel, É. Cartan, M. Frécher, H. Lebesgues zeugen. Durch Hadamard ließ er sich dort am meisten anregen.

1914 ging Pólya als Privatdozent an die ETH Zürich und blieb dort bis 1940. Hier hatte er eine erste lange produktive Zeit. Er arbeitete dort u. a. mit A. Hurwitz zusammen und traf auch H. Weyl wieder. Spätestens seit 1919 machte Pólya auch schon Lehrerfortbildungen. Ein erneuter Versuch, 1921 nach Deutschland zurückzukommen, blieb (in Anbetracht der späteren bekannten Ereignisse in Deutschland) glücklicherweise erfolglos. Im Jahre 1924 erschienen z. B. die immer noch insbesondere für Doktoranden hervorragend geeigneten „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis" zusammen mit Szegő (Pólya/Szegő 1970/1971). Ein Aufenthalt in Oxford und Cambridge von 1924 bis 1925 hatte u. a. das Standardwerk „Inequalities“ zum Ergebnis (Hardy/Littlewood/Pólya 1985). Nach einem ersten kurzen Aufenthalt in den USA 1933 folgte er 1940 einer Einladung von Szegő, die ihn zunächst nach Princeton und 1942 endgültig bis zu seinem Tode 1985 nach Stanford brachte (A, 25 ff).

5 Pólya als Mathematiker

Von Pólya sind insgesamt ca. 250 Veröffentlichungen bekannt. Davon können über 200 zur Mathematik oder zu Anwendungen hiervon gerechnet werden. Zu seinen sehr weit gefächerten Arbeitsgebieten gehörten: Analysis, Funktionentheorie (dort insbesondere die Untersuchung von Potenzreihen und Nullstellen), Zahlentheorie, Geometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kombinatorik und Mathematische Physik. In der Funktionentheorie/Zahlentheorie faszinierte ihn die Riemannsche Hypothese. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat er neben vielen Konzepten auch das der „Irrfahrten“ erfunden und Folgendes nachgewiesen: Startet man in einem ganzzahligen Gitter (des $\mathbb{Z}^n$) von einem beliebigen Punkt P aus und bewegt sich zu einem Nachbarpunkt immer mit der Wahrscheinlichkeit 1/2n, so kommt man (wenn man „genügend“ Zeit hat!) im Falle von n=1 und n=2 mit der Wahrscheinlichkeit 1 nach P zurück! Das ist für $n \geq 3$ nicht der Fall (A, 195). Rehlich (2007) hat ein sehr instruktives Simulationsprogramm entwickelt, das u. a. erlaubt, bei n=1 und n=2 und für eine Ebene bei n=3 durch Variationen der „Maschenweite“ und der Anzahl von Irrfahrten sich an entsprechende Vermutungen heranzuarbeiten. Im Bereich der Kombinatorik ist wohl das nach Pólya benannte Abzähltheorem am bekanntesten. - Das folgende Zitat von H. Weyl verdeutlicht, wie dieser Pólya schätzte, obwohl seine Interessen und Arbeitsweisen völlig verschieden waren:

“His way of doing mathematics is really completely foreign to me. He is to a lesser degree concerned with knowledge rather with the joy of hunt. However, I admire his brilliance extraordinarily …. He is full of problems, and an exceptionally stimulating person in mathematical circles. …he cares about his students in a way that is best described as a ‘sincere fellowship’. As far as applied mathematics is concerned, he is especially strong in probability theory…. he is very knowledgeable in applications (physics, statistics, etc.). Overall, he is a very versatile guy…; he is straightforward and doesn’t wear blinders.… He is not particularly close to me; however, he is really one of those people whom I respect the most.” (A, 38 - 41)

6 Pólya als Didaktiker

Seine erste bekannte didaktische Veröffentlichung stammt aus dem Jahre

1919. Danach legte er immer wieder auch didaktische Arbeiten vor. Am bekanntesten sind seine Bücher Pólya 1963 - 1969. Pólyas fundamentales Interesse am Entdecken und an Entdeckungen zeigt sich insbesondere auch hierin. Entsprechende Äußerungen findet man schon in einem Vortrag, den er 1931 vor schweizerischen Mathematiklehrern hielt:

„Der Mathematikunterricht kann zur allgemeinen Bildung der Schüler nichts Wertvolleres beitragen, als eine Ausbildung in selbständiger Lösung von Aufgaben.“ (Pólya 1932).

Anlässlich dieser Gelegenheit legte Pólya den Lehrern ein Arbeitsblatt vor, das man als eine Vorbereitung zu seinem bekannten in Pólya (1967a) vorgestellten vierstufigen Vorgehen beim Lösen von Problemen ansehen kann. Bekannt geworden ist Pólya - insbesondere dank der genannten Bücher - nicht nur durch Präsentation substanzieller Beispiele zum Problemlösen und Entdecken sondern natürlich auch durch die damit in Verbindung stehenden „heuristischen Strategien“ wie z. B. sukzessive Approximation, Zerlegen in Teilprobleme, Rückwärtsarbeiten, Vorwärtsarbeiten, Verallgemeinern, Spezialisieren, Analogisieren, Wechseln der Repräsentation usw.. Hierbei orientierte er sich auch immer wieder an Beispielen aus der Geschichte und fasste seine Erfahrungen und Überlegungen auch in „Zehn Gebote für den Lehrer“ zusammen. Sein Einfluss auf die Analyse von Denkprozessen wie auch die Gestaltung von Curricula zum Mathematikunterricht war und ist weltweit erheblich.

7 Pólyas Wirkung - Rückschau

Dank der Überlegungen Pólyas hat es bedeutende Fortschritte bei der Analyse und dem Verstehen mathematischer Problemlöseprozesse gegeben. Diese dokumentieren z. B. die Arbeiten von Kilpatrick 1967, Kantowski 1974, Bell 1976, Burton 1979, Mason/Burton/Stacey 1985, Schoenfeld 1985, Silver 1985, Kießwetter 1983, Winter 1991, Stein 1996 und viele weitere.

Nicht geringer war Pólyas Einfluss auf die Entwicklung von Leitlinien für den Mathematikunterricht. So führt ein recht deutlicher Weg von der „Agenda for Action“ des NCTM aus dem Jahre 1980 über dessen Standards von 1989 und 2000 bis zu den in Deutschland entwickelten „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss“ von 2003, wobei letztere durch die bekannten Ergebnisse internationaler Vergleichsstudien wie TIMSS und PISA in ihrer Entwicklung forciert wurden.

Auch im Bereich der Schulbuchentwicklung ist der Einfluss von Pólya nicht zu übersehen. So wurde z. B. schon vor über 30 Jahren mit „PLUS“ von Schupp/Schönbeck 1976ff eine Schulbuchserie herausgegeben, die sich in vielfacher Hinsicht auch an den Leitideen Pólyas orientierte. In den letzten 10 Jahren hat es auch in diesem Bereich eine Intensivierung der Entwicklung gegeben, was durch mehrere ähnlich orientierte Schulbuchserien dokumentiert wird (siehe z. B. Cukrowicz/Zimmermann 2000ff, Lergenmüller/Schmidt 2003ff).

Von Kilpatrick 1987 und auch von Schoenfeld 1987, 1987a werden Kritiker angeführt, die die Pólyaschen Vorschläge zur Lehr- und Lernbarkeit von Problemlösen und von heuristischen Strategien in Zweifel ziehen. Insbesondere nach Schoenfeld 1987 hat es aber erhebliche Fortschritte in dreifacher Hinsicht gegeben (nach A, 235):

- Heuristische Strategien werden heute erheblich differenzierter und vielschichtiger gesehen.

- Insbesondere das verstärkte Nachdenken (Metakognition und Kontrolle) über ihren sinnvollen Einsatz kann ihren Nutzen verbessern.

- Ein besseres bereichsspezifisches Verständnis kann auch Auswahl und Wirksamkeit geeigneter Strategien verbessern.

Grundsätzliche Schwierigkeiten beim Lehren und Lernen von Strategien (insbesondere in Verbindung mit dem Lehren metakognitiven Verhaltens) werden z. B. von Bauersfeld 1993, 79, gesehen:

„Every learning … is specific to the actual situation… Every direct attempt at organizing meta-learning…is doomed to failure. … There is no direct meta-learning through teaching. (A problem which, by the way, all too many people face when trying to ‘apply’ Pólya’s famous strategies.)”

So bleiben insbesondere in Zusammenhang mit der Metakognition noch einige Fragen offen.

8 Pólyas Wirkung - einige Desiderata

- Weitere Untersuchungen zur Rolle der Metakognition:

Es scheint klar, dass metakognitive Fähigkeiten altersabhängig sind. Jüngere Kinder haben in der Regel mehr Schwierigkeiten über ihr Vorgehen explizit nachzudenken und dieses zu steuern. In diesem Sinne kann man z. B. auch einige Ergebnisse einer Untersuchung von Kretschmer 1983 interpretieren. Überdies scheint es individuelle Unterschiede in der Bereitschaft und Fähigkeit zur Metakognition zu geben (vgl. Zimmermann 1993).

- Wann und inwieweit können (welche?) heuristische Strategien eher implizit oder explizit unterrichtet werden?

Diese Problematik steht in Verbindung mit der vorangegangenen Ausführung und wurde auch am Ende von Abschnitt 7 schon angesprochen. In der Geschichte der Mathematik wurden heuristische Strategien lange vor ihrer expliziten Formulierung immer zunächst implizit genutzt. Leibniz vergleicht das Erlernen des Problemlösens mit dem Erlernen einer Sprache (vgl. Gerhardt 1890, 523): Auch in der Mathematik sollte man zuerst das „Mathematik-Betreiben“ lernen, später dann darüber reflektieren und sich mit Heuristik befassen, wodurch man dann die Problemlösekompetenz vielleicht weiter verbessern kann. Auch eine Sprache lernt man zunächst durch Sprechen, erst später reflektiert man über sie und befasst sich mit ihrer Grammatik. Auch Grammatik *kann* man in der Regel früher als dass man sie *kennt* (vgl. auch Aussagen der modernen Hirnforschung, z. B. Spitzer 2002). An gleicher Stelle bemerkt Leibniz: „…wie will der die gedancken ordnen, der noch wenig bedacht?”

- Welchen Nutzen kann eine Geschichte mathematischer Heuristik und mathematischen Problemlösens für das Lernen und Lehren des Problemlösens haben?

Zuvor wurde schon implizit auf einen möglichen Nutzen verwiesen: Die Form des Auftauchens, der Verwendung und des Gebrauchs heuristischer Strategien kann eine zusätzliche Hilfe für heutigen Unterricht sein - ohne dass man deswegen ein Anhänger historisch-genetischen Unterrichtens sein muss. Überdies kann das Kennen historischer Denkprozesse eine zusätzliche Hilfe beim Erfassen und Interpretieren aktueller Prozesse von Schülern sein (vgl. z. B. die „Wiederentdeckung“ einer Version des „Falschen Ansatzes“ durch Sechstklässler, in Zimmermann 2004, Scholz et al. 2005). - Historische Untersuchungen zeigen ferner, dass zur Heuristik nicht nur Archimedes (insbesondere mit seiner Methodenschrift, siehe die Ankündigung einer Neubearbeitung in Netz/Noel 2008), Pappos, Viète, Descartes und Leibniz Wesentliches beigetragen haben, sondern z. B. auch schon vor ca. 1000 Jahren im arabischen Sprachraum al Haytham, ibn Sinan und al Sijzi. Näheres dazu z. B. in Zimmermann 1991.

- Problemlöseprozesse junger Kinder analysieren und verstehen

Bis heute dominiert die Untersuchung von Problemlöseprozessen bei Schülern der Sekundarstufe I oder II. Jüngere Schüler wurde lange Zeit - auch wegen größerer Schwierigkeiten bei der Datenbeschaffung - kaum untersucht. Dieses hat sich seit geraumer Zeit geändert (siehe z. B. die Untersuchungen in der Arbeitsgruppe um Stein 1996) und sollte weiter intensiviert werden. Die Methoden und die Qualität der Datenbeschaffung bei entsprechenden Prozessen können u. a. in Zusammenhang mit der auch noch am Anfang stehenden Sprachkompetenz der Schüler stehen.

- Untersuchungen zum anspruchsvollen Problemlösen

Es mangelt nicht an Untersuchungen älterer Schüler und (Selbst-) Beobachtungen professioneller Mathematiker. Zusätzlich könnte es interessant sein, z. B. die heuristischen Gestaltungsprinzipien der Organisation der Probleme in Pólya/Szegő 1970/1971 freizulegen, um so noch mehr über Prozesse und Methoden anspruchsvollen mathematischen Problemlösen zu erfahren und um dieses noch besser zu verstehen.

- Beziehungen zwischen Verstehen von Mathematik und mathematischem Problemlösen genauer untersuchen

Von Pólya wurde immer wieder die enge Verbindung zwischen Problemlösen und mathematischem Verständnis betont (vgl. Pólya/Szegő 1970, VI). Diese Beziehung sollte in verschiedenen Alters- und auf verschiedenen Niveaustufen noch näher untersucht werden (vgl. z. B. Sierpinska 1994).

- Entwicklung von Mess- und Bewertungsverfahren für Problemlöseprozesse

Die Auswertung von Tests (TIMSS, PISA) hat - wenn es sich nicht um die einer Prozessanalyse wenig dienliche Multiple-Choice-Form handelt - oft mit Textfragmenten zu tun, bei denen der Auswerter keine Möglichkeit hat, durch Rückfragen mögliche (Miss-)Verständnisse zu klären. So sind die Möglichkeiten einer genauen Prozessanalyse auch bei offeneren Testformen sehr begrenzt. Rehlich 2003 versucht diesen Mangel durch die Simulation von Aspekten einer mündlichen Prüfung (z. B. gezieltes Nachfragen) mit Hilfe eines Computers, dem der Proband seine Antworten zu geben hat, zu reduzieren. So kann man sich mehr Informationen zum Problemlöseprozess und zum mathematischen Verständnis der Probanden erhoffen.

- Unterrichten von Problemlösen als komplexes Problemlösen

Dietrich Dörner hat sich mit dem Lösen komplexer Probleme befasst (vgl. z. B. Dörner 1989). Das Unterrichten von Mathematik - insbesondere von Problemlösen - kann selber als ein komplexes Problem aufgefasst werden (siehe z. B. Kießwetter 1994). Erfahrungen z. B. aus den USA zeigen (vgl. Kilpatrick 1987), dass manche Lehrer geneigt sind - ähnlich wie manche Schüler die Lösung von Problemen - den Unterricht eher mittels bewährter Verfahren und Schrittfolgen (die vier Stufen Pólyas quasi „schematisierend“) durchzuführen, was mit einer zwar verständlichen, aber nicht immer qualitätssteigernden Reduktion von Komplexität verbunden sein kann. Eine Sensibilität bzw. Sensibilisierung für die Komplexität von Unterricht kann als eine wichtige Voraussetzung für einen erfolgreichen, anspruchsvollen und effektiven Unterricht im mathematischen Problemlösen angesehen werden. Eine erste interessante Untersuchung dazu gibt es von Fritzlar 2004. Durch derartige Untersuchungen könnte die Lehrerausbildung weiter verbessert werden. Dieses sollte auch möglich sein durch sorgfältige Analyse von „Meisterstunden“ wie etwa die von Pólya 1966a, wie sie kürzlich von Truxaw/DeFranco 2007 durchgeführt wurde.

- Steigerung der Qualität von Problemen/Aufgaben

Die didaktischen Bücher Pólyas geben Orientierungshilfen für Qualitätsstandards bei der Wahl von Problemen und Aufgaben für den Unterricht, die noch intensiver genutzt werden sollten.

- Problemlösen für alle

Dieses ist ein weiteres fundamentales Anliegen. Hierfür hat sich u. A. sehr stark András Ambrus (siehe z. B. Ambrus 2004) engagiert. Derartige Bestrebungen sind weiter zu verfolgen.

- Beziehungen zwischen Problemlösen und Computern

Auch derartige Beziehungen werden seit geraumer Zeit weltweit verfolgt. In Ungarn hat sich hier insbesondere sehr erfolgreich Éva Vásárhelyi engagiert. In Kooperation mit der Informatikdidaktik sind erst vor kurzem sehr interessante Beiträge veröffentlicht worden (Fuchs/Vásárhelyi 2007, Fuchs/Siller/Vásárhelyi 2008).

- Moderne Theorien mathematischen Problemlösens

Derartige Theorien sollten durch Verknüpfung von bisherigen Theorien zum Problemlösen mit modernen kognitiven, affektiven und sozialen Theorien sowie moderner Hirnforschung entwickelt werden. Folgendes Zitat von Schoenfeld 1987 (A, 236) lässt sich in diesem Zusammenhang sehen: “… research will provide the tools to implement Pólya’s intuitions about problem solving, which will serve as a true science of thought.”

Literatur

Albers, D. J.; Alexanderson, G. L. (eds.) 1985: *Mathematical People. Profiles and Interviews*. Birkhäuser: Boston, Basel, Stuttgart.

Alexanderson, G. L. 2000. *The Random Walks of George Pólya.* The Mathematical Association of America: Washington, D.C..

Ambrus, A. 2004. Schüler durch Verallgemeinern zu neuen Erkenntnissen führen - Ein Beispiel aus der Arithmetik. In: Heinze/Kuntze 2004.

Weitere Literatur siehe CD-Version.

Luzia ZÖTTL & Kristina REISS, LMU München

Modellierungskompetenz fördern mit heuristischen Lösungsbeispielen

Im Rahmen des Projekts KOMMA[1] stellt ein Ziel die Gestaltung und Evaluation einer Lernumgebung dar, die für die Sekundarstufe I Lerngelegenheiten zum Erwerb *allgemeiner mathematischer Kompetenzen* im Sinne der Bildungsstandards (KMK 2003) bietet. Für die Evaluation dieser computerbasierten Lernumgebung im Bereich Geometrie der 8. Jahrgangsstufe wurde der Kompetenzbereich *Mathematisches Modellieren* (K3) näher betrachtet in Verknüpfung mit der Leitidee *Messen* (L2), für die exemplarisch die Kreisflächenmessung herangezogen wurde.

Modellieren

Das den Lernmaterialien zu Grunde gelegte Verständnis von *Modellieren* orientiert sich an dem von Blum und Leiß (2005) in Form eines Kreislaufmodells dargelegten idealisierten Modellierungsprozess. Der abgebildete Kreislauf stellt hierbei ein aus sieben Schritten bestehendes Phasenmodell dar[2], wobei individuelle Verläufe bei der Bearbeitung einer Problemstellung vom idealisierten Verlauf deutlich abweichen können.

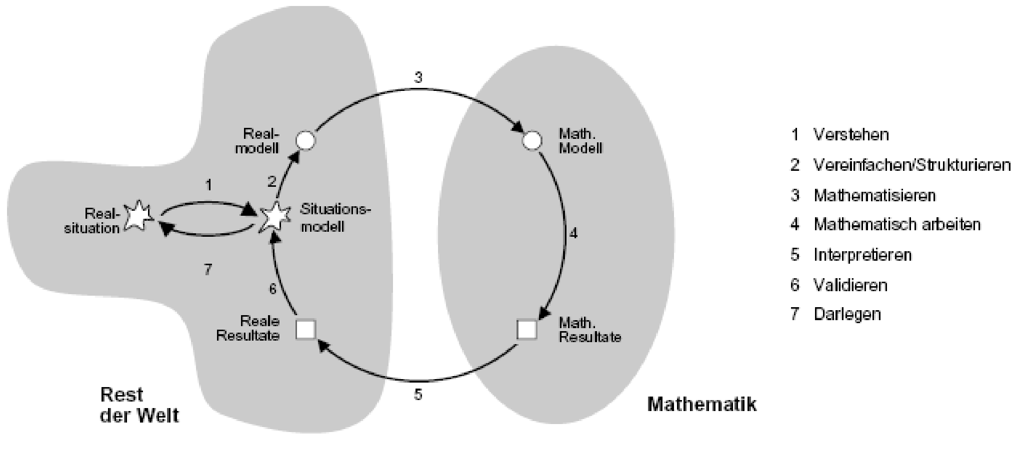


Abbildung 1: Modellierungskreislauf nach Blum & Leiß (2005)

Ein solcher Modellierungsprozess ist durch die erforderliche Vereinfachung der gegebenen Situation und das notwendige Auffinden bzw. Kon-

---

[1] Das Projekt wird vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert (Bew.-Nr. PLI3032).

[2] Bei Borromeo Ferri (2006) findet man eine detaillierte Beschreibung der ersten sechs Schritte.

struieren eines geeigneten mathematischen Modells stark von *heuristischem Vorgehen* geprägt. Unter heuristischem Vorgehen kann man nach Holton (1988) das Generieren einer Idee verstehen, die aufgrund von begrenztem Wissen zwar unvollständig, aber dennoch nützlich ist. Solche heuristischen Lösungsmethoden beim Problemlösen lassen sich im Gegensatz zu den algorithmischen Lösungsmethoden nicht präzise definieren (Groner & Groner 1990). Sie zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass der Lösungserfolg bei einem solchen Vorgehen im Vorfeld nicht gesichert ist und dass der Suchraum für die Problemlösung in der Regel stark eingeschränkt wird, was auch zum Übergehen einer optimalen Lösung führen kann. Oftmals basiert heuristisches Vorgehen auf der Nutzung von eigenen Erfahrungen oder allgemeinen Faustregeln.[3]

Als essentiell bei Übungen zum Modellieren wird die Integration metakognitiver Aspekte in den Lernprozess angesehen. Das bedeutet, dass den Lernenden Wissen über Modellierungsaktivität als Prozess vermittelt werden soll (vgl. Blum 1996, S. 24). Hilfreich sind hierbei eine deutliche Trennung von Realität und Modell sowie eine Explizierung wesentlicher Prozessschritte. Dabei ist es sinnvoll, ein schülergerechtes Prozessmodell als Anhaltspunkt für das Vorgehen bei Modellierungsaufgaben heranzuziehen. Der Übersichtlichkeit wegen wurde das an obigem Modellierungskreis orientierte Prozessmodell in KOMMA für den Bereich Geometrie auf drei Phasen reduziert. Diese sind (1) *Aufgabe verstehen*, (2) *Rechnen*, (3) *Ergebnis erklären*. Bei der Beschreibung der einzelnen Phasen (siehe Abb. 2) sind jedoch auch die übrigen Schritte des Kreislaufs implizit enthalten.

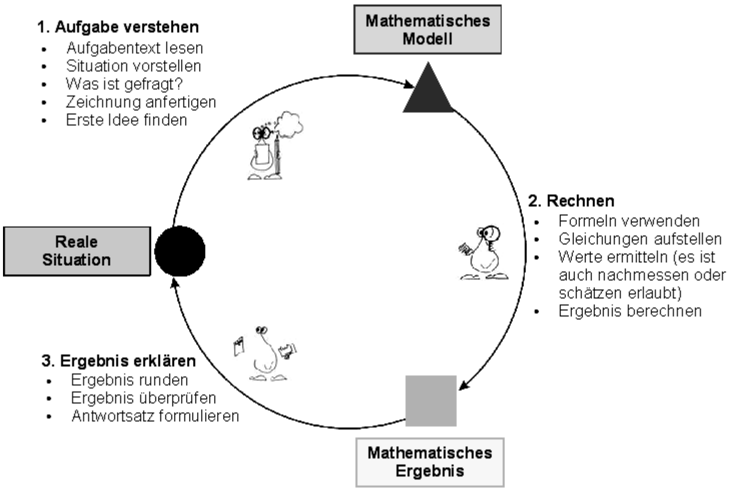


Abbildung 2: Schülergerechtes Prozessmodell in KOMMA im Bereich Geometrie

[3] Es gibt auch so genannte heuristische Strategien. Einen Überblick über diese Strategien findet man beispielsweise bei Strohschneider & Tisdale (1987).

Lösungsbeispiele

Bei *Lösungsbeispielen* handelt es sich um fertig gelöste Beispielprobleme, die aus einer Problemstellung und der Angabe von Lösungsschritten bestehen. Die Effektivität des Lernens aus Lösungsbeispielen in wohl strukturierten Domänen ist inzwischen gut belegt (vgl. Renkl 2001). Vorteile beim Einsatz von Lösungsbeispielen sind im Vergleich zum Problemlösen in einer veränderten Zielrichtung zu sehen. Das Auffinden einer Lösung tritt dabei Hintergrund, so dass der Fokus auf den eigentlichen Lösungsprozess rücken kann. Zusätzlich ist eine ökonomischere Nutzung von kognitiven Ressourcen der Schüler(innen) möglich, die es gestattet mehr Kapazität auf metakognitive Überlegungen bezüglich des Lösungsprozesses zu verwenden (ähnlich zu finden bei Reiss & Renkl, 2002). Möglichkeiten den Einsatz von Lösungsbeispielen zu optimieren sind insbesondere individuelle Selbsterklärungsaktivitäten während der Bearbeitung (vgl. Renkl 1997) sowie ein sukzessives Ausblenden von Lösungsschritten (Renkl & Atkinson 2003).

Heuristische Lösungsbeispiele stellen eine Erweiterung des Prinzips der Lösungsbeispiele für nicht-algorithmische Problemstellungen dar. Sie präsentieren nicht nur die Problemstellung und Lösungsschritte, sondern auch den heuristischen Problemlöseprozess in der Regel basierend auf einem Prozessmodell und machen diesen damit explizit. Im Bereich des Mathematischen Begründens und Beweisens konnten positive Effekte beim Einsatz solcher Lösungsbeispiele gezeigt werden (Reiss & Renkl 2002). Damit lässt sich diese Form der Lösungsbeispiele, die aus dem mathematikdidaktischen Bereich stammt, mit dem in der Problemlöseforschung entwickelten Prinzip der *prozessorientierten Lösungsbeispiele*[4] vergleichen.

Lernumgebung KOMMA

Basierend auf den oben genannten Erkenntnissen wurden im Rahmen des Projekts KOMMA Lernmaterialien erstellt, bei denen heuristische Lösungsbeispiele in Form von so genannten Beispielaufgaben und Übungsaufgaben im Mittelpunkt stehen. Bei ersteren handelt es sich um heuristische Lösungsbeispiele, mit deren Hilfe alltagsnahe Modellierungsprobleme vorgestellt werden sowie Möglichkeiten diese zu lösen. Dabei werden ba-

---

[4] Bei der Verwendung von prozessorientierten Lösungsbeispielen für das Training nicht algorithmischer Problemlöseprozesse ist die Angabe von Begründungen für den Einsatz verwendeter Problemlöseoperatoren vorgesehen sowie die Angabe von Informationen zum strategischen Wissen, das von Experten bei der Problemlösung angewandt würde (vgl. van Gog, Paas & van Merriënboer 2004).

sierend auf dem obigen Prozessmodell in Form eines Zwiegesprächs zweier fiktiver Personen Schwierigkeiten und unterschiedliche Modelle diskutiert und entstandene Ergebnisse interpretiert, validiert und dargelegt. Zusätzlich zu einer optischen Trennung der drei Phasen des Prozessmodells werden im Rahmen der dargelegten Diskussion auch die wesentlichen Prozessschritte expliziert und damit eine metakognitive Ebene angesprochen. Bei den Übungsaufgaben handelt es sich ebenfalls um heuristische Lösungsbeispiele, bei denen die Lösungsschritte zunächst ausgeblendet sind. Ein gestuftes Hilfesystem ermöglicht es jedoch, diese Lösungsschritte bei Bedarf einzusehen. Zusätzlich steht in der Lernumgebung eine kurze Einführung in den betreffenden mathematischen Inhalt zur Verfügung sowie kurze Aufgaben, mit denen die Schüler(innen) ihren Wissensstand selbständig überprüfen können. Die Items sollen auch Feedback zu Teilschritten des verwendeten Prozessmodells geben. So können die Lernenden gezielt herausfinden, welche Schritte sie bereits gut beherrschen und wobei sie noch Schwierigkeiten haben.

Literatur

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In: G. Kadunz et al. (Eds.) *Trends und Perspektiven: Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik* (pp. 15-38). Wien: Tempsky

Blum, W., & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128, 18-21.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für die Didaktik der Mathematik, 38 (2)*, 86-93.

Groner, R. & Groner, T. (1990). Heuristische versus algorithmische Orientierung als Dimension des individuellen kognitiven Stils. In: K. Grawe et al. (Eds.). *Über die richtige Art, Psychologie zu betreiben* (pp. 315-329). Göttingen: Hogrefe

Holton, G. (1988). *Thematic origins of scientific thought (2nd ed.)*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Bildungsabschluss*. Bonn: KMK.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für die Didaktik der Mathematik, 34 (1)*, 29-35.

Renkl, A. & Atkinson, R. K. (2003). Structuring the transition from example study to problem solving in cognitive skills acquisition: A cognitive load perspective. *Educational Psychologist, 38*, 15-22.

Renkl, A. (1997). Learning from worked-out examples: A study on individual differences. *Cognitive Science, 21*, 1-29.

Renkl, A.. (2001). Lernen aus Lösungsbeispielen. *Unterrichtswissenschaft, 29*, 1-95.

Strohschneider, S. & Tisdale, T. (1987): *Handlungspsychologie. Kurseinheit 3. Handlungsregulation in Unbestimmtheit und Komplexität*. Hagen: Fernuniversität Hagen.

van Gog, T., Paas, F. & van Merriënboer, J.G. (2004) Process-oriented Worked Examples: Improving Transfer Performance Through Enhanced Understanding. *In: Instructional Scinece, 32*, 83-98.

Beiträge zum Mathematikunterricht 2008 Online

V rtr ge au der 42 agung r Dida ti der athe ati
ahrestagung der esells ha t r Dida ti der athe ati

1 is 18 200 in uda est

Verzeichnis aller verfügbaren Beiträge:
Die ar ierung eist au die isten n usat aterialien hin

ans- e rg I D r nung der 42 ahrestagung der esells ha t r Dida ti der athe ati d

Hauptvorträge

ans- rg Das nterri hts dell Innere Di eren ierung d

ernd I _ rg P I a 188 - 1 8 ur i gra hie u e ens er und u seiner ir ung au die athe ati dida ti d

GDM-Förderpreisträgerinnen:

arei Intera ti n a er - ine s hul ra tis he ragestellung und ihre issens ha tli hen lgen d

I e K ehen und Verstehen i athe ati unterri ht - ur es nderen un ti n n ns hauungs itteln r das athe ati lernen d

Selbstmoderierte Sektionen

Astrid BECKMANN, Damjan KOBAL und Claus MICHELSEN: Mathematical literacy and cross curricular competencies through interdisciplinarity, mathematising and modelling science - Examples of the European ScienceMath Project d

- hil in hrung des un ti ns egri s in der e undarstu e I d
- Da an K n ient athe ati al ideas and their a li a ilit in te hn l g and tea hing d

Rolf BIEHLER: E-learning in der Lehrerbildung

- Pas al l l e - nline in - earning-V r urs ur indi idualisierten eseitigung athe atis her De i ite d
- etlana P Kl ulia l D und egina D nline- ehrer rt ildungen an der e hnis hen ni ersit t Dar stadt d

Rita BORROMEO FERRI und Katja MAASS: Mathematisches Modellieren im Unterricht

- ita l und rn l ru en erl u e ei athe atis hen dellieren d
- Kat a hrist h l und Dag ar K tratu - dellieren in der au ts hule d
- D ini l erner ud l ar el tanisla K und einhard P K dellieren lehren und lernen in der eals hule d
- Katrin V dellierungsau ga en als innange te r h lerinnen und h ler d

Gilbert GREEFRATH: Problemlöse- und Modellbildungsprozesse bei Schülerinnen und Schülern

- hristina und egina D ang eitstudie u einer ehrer rt ildung u Pr le l sen in Ver indung it el stregulati n d
- il ert ntersu hung n dell ildungs- und Pr le l se r essen d
- tanisla K und D ini l e t erstehen als V raussetung r er lgrei hes athe atis hes dellieren - rge nisse aus de DI -Pr e t d
- ar el nal sen ur ear eitungs ualit t n h lerl sungen ei dellierungsau ga en d

Lisa HEFENDEHL-HEBEKER und Reinhard OLDENBURG: Wege in die Algebra d

- Dag ar Die lle ers hiedener e r sentati ns r en in eine ersten ugang u linearen lei hungen d
- strid l Darstellen athe atis her tru turen it il e n ei hneris hen Diagra en - eis iele aus Klasse d
- andra D lge ra in der runds hule - V n n reten r en erglei hen u a stra ten lei hungen d

Hans-Wolfgang HENN: Mathematikunterricht in Europa - A European Network (DQME II)

- line l D De el ing ualit in athe ati s du ati n II d
- ans- l gang ealit tsnaher athe ati unterri ht in eur is he K nte t d
- il e und hrist athe ati unterri ht in ur a - an eur ean net r D II d

Hans HUMENBERGER: Neues ins Spiel bringen - Spieltheorie für die Schule

- hrist h l l ielthe retis he ituati nen d na is h etra htet d
- Petra - PP Das ash- lei hge i ht - ein entrales sungs n e t der ielthe rie d
- ans ash- lei hge i ht und ini a -K n e t - eine egen erstellung d

Rainer KAENDERS: Niederländische Mathematikwettbewerbe in NRW - eine etwas andere Begegnung mit Mathematik

- l und atthias IPP ie athe ati entsteht Der niederl ndis he athe ati ett e er -l iade d
- ainer K D und l eugierig au athe ati is unde -dag d

Gabriele KAISER und Stefan KRAUSS: Professionswissen zukünftiger und praktizierender Mathematiklehrpersonen d

-

erner te an K und i hael D usa enh nge des Pr essi ns issens it ehrer er alen nterri hts ualit t und eistungs u hsen der h ler d

- te an K und artin Pr essi nelles eagieren au h lerant rten in ea ti ns eittest r athe ati lehr r te d
- hannes K l igrid K erlin nters hiede i dag gis hen issen n ehra tstudierenden it und hne athe ati d
- rn und a riele K l a urg Pr essi ns issen n ehra tsstudierenden i erei h rgu entieren und e eisen d

Christa KAUNE und Johann SJUTS: Das Telekom-Modellprojekt "Mathematik Gut Unterrichten"

- hrista K sna r ehrer a hing ur Ver esserung der nterri hts ualit t - das ele - dell r e t athe ati ut nterri hten d
- hann da ti it t und Diagn sti as die ear eitung assender u ga enstellungen au de en ann d

Sebastian KUNTZE und Kristina REISS: Modellieren lernen - Ansätze des Projekts KOMMA zu Kompetenzmodellen und zur Förderung mit heuristischen prozessbezogenen Lösungsbeispielen d

- Kristina l e astian K einhard P K und te an Die K eten dellieren in Ver indung it unters hiedli hen eitideen - n ielen der ildungsstandards u ragen der K n e ti n n K eten dellen d
- u ia und Kristina l dellierungs eten rdern it heuristis hen sungs eis ielen d
- arald n e I D I und Kristina I a e i h alles eda ht - in dell ur tru turierung heuristis her sungs eis iele aus de erei h der eitidee Daten und u all d

Silke LADEL: Zum Computereinsatz im Mathematikunterricht der Grundschule

- il e D ur Darstellung n rith eti ei der estaltung n t are r den n angsunterri ht d
- i le nal se n erns t are und sinn llen insat gli h eiten - en it de uter i rith eti unterri ht d

nter K ie eiter it de uter i athe ati unterri ht der runds hule d

Marianne NOLTE: Zur Situation von Menschen mit niedrigen mathematischen Qualifikationen

- ettina Das ern rtal i h ill lernen d
- arianne ur ituati n n ens hen it niedrigen athe atis hen uali i ati nen - i htre hner d

Sebastian REZAT und Rudolf STRÄSSER: Mathematikbücher ? Instrumente des Lehrens und Lernens

- e astian athe ati her als Instru ente des ernens d
- ud I Das athe ati u h als Instru ent des ehrens d

Jürgen ROTH: Kunst - Mathematik - Musik: Visualisieren und Interpretieren d

- te anie usi alis he ra hen nnen den athe ati unterri ht ele en d
- an athe ati und K n rete Kunst Ver indungen is hen s hein ar re den elten d
- rgen K n rete Kunst anal sieren und gestalten - athe ati her er indend unterri hten d

Hans-Dieter SILL: Konzeption und Evaluation von Lehrerfortbildungen

- ettina K u inn ati en s e ten n ehrer rt ildung d
- ans-Dieter I und ut I K n e t einer ehrer rt ildung u I alenten u ga en d
- ut I und ans-Dieter I Dur h hrung und aluati n n ehrer rt ildungen u I alenten u ga en d

SILLER, Hans-Stefan: Funktionales Modellieren - neue Wege für einen modernen Mathematik und Informatikunterricht ans- te an I er die edeutung der gra is hen e r sentati n ei un ti nalen dellieren d

- Karl se Die un ti n - asisele ent der In r ati d
- ans- te an I Karl se und a V I un ti nales dellieren ur it eine and- eld d

Anna Susanne STEINWEG: Mathematische Begegnungen im Elementarbereich

- nna usanne I rundlagen athe atis hen ernens r der hule d
- hristine ahlen sind ni hts hli es - V rstellungen n r ieherinnen er athe ati i Kindergarten d
- ndrea I I ahl egri sent i lung i r hen Kindesalter d
- ed ig I ernanregungen und -d u entati n i lltag der Kindertagesst tte - ein eten rientierter rderansat d

Christoph WASSNER und Andreas EICHLER: Stochastik im Mathematikunterricht

- ndreas I llt gli her t hasti unterri ht an deuts hen nasien d
- hrist h und te an K at rli he u ig eiten - s hau und us li e u eine ge inn ringenden dida tis hen K n e t d
- an red V IK _ eset e des u alls d

Sektionsvorträge

- hrist h I I und te an K n urren gren en ann an sie erstehen d
- gnis D Ā ding and athe ati al etiti ns d
- Kristina PP rgen und ans- e rg I D eri entieren athe atisieren i ulieren - K n e ti n eines IK- a rs d
- er ann I ur K ati ilit t n athe ati -dida tis hen und Instru ti nal Design- ns t en u le en ernen d
-

strid K her ergrei ender nterri ht is hen athe ati und Kunst d

- al K es nderheiten athe atis h ega ter d hen i runds hulalter d
- hristine und hristian P ti ierendes athe ati - ernen u tudien eginn d
- ngeli a IK - ie nstruieren ernende athe atis hes issen d
- hristina I K K _ etrie und Kunst i e etrieunterri ht d
- h rsten und ngel ert I rderung n h ler -inne n it es nderer athe atis her ega ung a eis iel der t hastis hen et e d
- ans- a hi _ ur V r ereitung au und u den Inhalten n regi nalen rt ildungs eranstaltungen d
- ernhard K utereinsat i athe ati unterri ht - in li au die n nge d
- el K 2 ahre P tsda er - - - dell d
- artin und te an K es hle htsunters hiede in athe ati ine rage des ess dells d
- i hael K undert ahre au eit - rundideen der elati it tsthe rie als athe ati dida tis he eraus rderung d
- r in D K _ in neuer - dida tis h undierter - egri der Verh ltnisglei hheit n tre en aaren d
- nita D V Du li at u riginal - Das dida tis he P ten ial n intergrund ildern d
- ar la hrei en i athe ati unterri ht der au ts hule d
- I ra ID edan en ur estaltung n u ga en r entrale itur r ungen d
- Petr I eale eri ente i athe ati unterri ht d
- ndreas u s annende u e i ahrgangsstu en ergrei enden Pr e tunterri ht d
- ndreas I dellierung als nt ur n Pr essen ie ssen die u ge ahren da it das ha s au h rt d
-

ud l l und ilan K h er un t ur en d

- rsten l und ran l l D elre r sentati n und athe atis he ega ung - he retis he s e te und ra tis he r ahrungen d
- i hael ID IK ut atisierung arith etis her asis a ten ur t endig eit eines strategie- entrierten rstunterri hts d
- ris l ehrer rstellungen ur llge ein ildung i e etrieunterri ht der e undarstu en u e ti e und a hdida tis he nsi hten i K ntrast d
- nter _ aru ist ei reiner usi is ≠ s in Pr le eld ur u larung er die reine ti ung ittels ru hre hnung d
- a riele l P Die i Verlau der a ade is hen athe ati - ehreraus ildung er r enen K eten en i gang it u ga en - e laris h au ge eigt an der hig eit r ess rientiert u erstellen und u eurteilen d
- ana l rnelis D eas ning indi at rs - a ase stud d
- nne arie - K K nstru ti er gang it h ler ehlern indernisse und han en d
- n te an K IK he n ti n regulated un ti n in the al ulus tea hing Pr ess r lg r Klu ne d
- D rte D athe ni us - athe ati r alle d
- hrist h nregungen r einen s h lera ti ierenden athe ati unterri ht d
- ut ried in V rs hlag ur Ver indung n igni i an und e t-st r e u einer neuen statistis hen Kenngr e d
- ut ried und ainer K athe ati hne egeln und r eln d
- athias Der ug dus in dreidi ensi nalen d na is hen e etries ste en d
- einh ld Pr le l sen ernen it intera ti en ernu ge ungen - ine e iris he tudie ur rderung heuristis her trategien dur h den insat D na is her e etrie- t are D d
- artin K in li hinter die Kulissen ie h lerinnen und h ler re hnen d
- er ert l auter s h ne K r er - ntde ungen ei Plat nis hen K r ern d

a _ nal sen u den u ga en der rientierungsar eit in essen 200 d

- ndrea K P _ ie ann an it d na is her e etrie t are un ti nales Den en rdern d
- te han und nn indi idualisieren di eren ieren und ernet en d
- aria I und egina D - insat in der e undarstu e I d
- h as K _ Die e iris he ns helrute und ihre lgen d
- le ander D und te an K u ga en i IV-Pr e t eugnisse des gniti en ti ierungs tentials i deuts hen athe ati unterri ht d
- d ta K I K he students strategies in the urse tas s l ing ith using the gra hi al ulat r d
- ert K D he a und e rau h d
- a riele K I und Inga athe ati lernen ei einer s ra hli h und ulturell heter genen h lers ha t d
- nde K K erati e nterri hts eth den r den athe ati unterri ht in ngarn d
- riedhel K P I K Das Internet r e t u ga e des nats - ine is hen ilan na h sie en hriger r eit d
- Dag ar K dellieren it leistungss h a hen au ts h lern d
- n s K l ing 2 and -di ensi nal r le s ith hel d na i al ge etr s t are d
- er ann K I _ ins - I unisierungsstrategien i nal sisunterri ht d
- Katharina K Kl e inar urs Kr t gra ie - ahlenthe rie d
- nna K I K _ he di i ulties the tea hing anal sis in the transiti n the iddle and higher edu ati n at Ka s r ni ersit d
- la K PP ein aluati n intera ti e n-s reen ide s r ge etri al nstru ti ns in irtual s a e d
- Vlasta K K -V D i athe ati unterri ht der Pri arstu e d
-

Iri h K K P und es K I Interge - Inter era le Intera ti e e etr r ur e d

- es K I il ert und hristian egati e ahlen in der runds hule d
- an red K egri s ildung und egri s rstellung d
- e astian K und u ia u u ga en e gene er eugungen und ergrei ende elie s n ehra tsstudierenden d
- unta Ā V n den h lern ge hlten trategien r die sung der Pr le au ga en in der K inat ri d
- Ing ar _ Das al atti-Pr le - in he a in der ega ten rderung d
- rigitte K ener athe ati unterri ht dur h u ga en ariati n d
- ea P und iit P elie s der athe ati lehrer er die nt i lung der gniti en K eten en anhand der u ga en d
- i la V ri htigen gang it lltagser ahrung ei realit ts e genen u ga en d
- n e I D I und is I erlegungen u s e ten r essi neller K eten n athe ati lehr r ten und ihrer rhe ung d
- el ut I - KI Das K eten dell ar athe ati d
- atthias D I und in an athe ati au der nanas - ine hinesis h-deuts he tudie u den dellierungs eten en d
- rigitte - P athe ati authentis h lehren d
- h as u li he hig eiten n Kindern i V rs hulalter - ntersu hungsdesign und erste rge nisse d
- rgen PI und P liti - neue eraus rderungen r die athe ati dida ti d
- art ig I e hn I g related rith eti d
- ar und ngel ert I rderung n h ler -inne n it es nderer athe atis her ega ung a eis iel der u - he rie d
- I ra V K nstru t der e hens h he u K nstru t der ni ht ear eiteten st li hen rden d

lisa eth PI e hens h he er assen - reening r die hul ahre 4-8 d

- enate ere htig eit als her ergrei endes he a - athe atis he dellierung der Verga e n ender rganen d
- Katalin K Presentati ns ade r learning athe ati s in ultigrade s h ls d
- rit _ n er ungen u he a e-testing d
- d ta I K K g a - K gniti ns rientiertes athe ati - ehren in der eals hule d
- ndreas I as assiert i ehirn ei K re hnen ine neur h si l gis he ntersu hung der irna ti it ten ei sen eistelliger dditi nsau ga en d
- riedhel P D nser tellen erts ste - eines egs lei ht und r le I s d
- erner P K he a ildungs - tandards tandards r die athe atis hen hig eiten sterrei his her h lerinnen und h ler a nde der 8 hulstu e d
- Kat a P egr ndungssituati nen i athe ati unterri ht der runds hule d
- a- aria P K V r issen u ge etris hen egri en au s ren - eine e l rati e tudie in der runds hule d
- enate r hes erati es Den en ei r eiten it e tau ga en - ut en ers hiedener e r sentati nse enen d
- lisa eth - I und Dieter K D ahldarstellung und ahlau assung anhand n ahl ildern i ehner eld d
- harl tte I ahlen li s hulung als gli h eit ur rderung le i ler e hen eten en ei s h a hen Kindern d
- hristian I D i i- asierte ernu ge ung u erati en ernen it euen edien i athe ati unterri ht der Pri ar-stu e - i d
- hristina K e hsel ir ung n P ulati nen in eine egren ten e ensrau dellierung i ulati n und athe atis he nal se i nterri ht d
- Katrin K ei leineren ahlen ann alles en - V rstellungen n h lerinnen und h lern u eset der gr en ahlen d
- ran is a D P - n hen und is I athe atis he K eten ent i lung und ra h hig eit ei h lerinnen und h lern it

igrati nshintergrund in der runds hule d

- hristian D as r K n e te und issens est nde a ti ieren erten und i en ei ru hter en und ru hter glei hungen d
- il e I V rstellungen er null und ull d
- sa a V I _ Intera ti e il eleistung und uter Ige ra ste e d
- Ing I e nstru ti n des andlungs ten ials s h a her h lerinnen und h ler der e undars hule d
- e rg I I- haan Die Kr ung e hrtin der teigung a er tie ind des d
- h as I P - eis iele i athe ati unterri ht d
- ndrea I K V alten u nteil nteil - ntersu hungen u eine ugang ur ulti li ati n n r hen d
- I gang Die edeutungsent i lung athe atis her K n e te und die ntstehung n e t d
- ar ara ID dellieren in der hul ra is - e eggr nde und indernisse aus i ht der ehrer d
- artin _ Dis ursi er athe ati unterri ht - athe atis he Pr le e i ada ti en ehrer- h ler- h ler- h ler-Dial g I sen d
- dith ID PI athe ati - eistungen n ungaris hen und sterrei his hen h lerinnen und h lern d
- hrist I Phasen ergrei ende Veranstaltung in der ehrer ildung d
- te hanie _ as nnen athe ati aterialien i Kindergarten leisten - Kriterien r eine ge ielte e ertung d
- ndreas e t- und u ga enanal se inden tandards ingang in Klassenar eiten d
- ar us Die s ra hli he in hrung neuer athe atis her egri e i runds hul athe ati unterri ht d
- rit I athe ati als Kulturgut d
- as in P erati ns erst ndnis und rund rstellungen in Klasse -

iteraturanal se und Inter ie studie d

- r i I V alina P V und la a V V _ ulti li ati n n Kur en eiter rdnung d
- a ine nal se und aluati n n athe ati unterri ht in der runds hule ei gang it e t- und a hau ga en - eine Vide studie d
- le n ra _ sing i r s t el t s I e and illustrate athe ati al r le s d
- I I a I I I _ Die nt i lung ge etris her egri e i athe ati unterri ht der rundstu e - Das uadrat und das e hte d
- Kinga Verglei hende nal se der gniti en eistung n utter- re ds ra hig unterri hteten Kursgru en i erei h der nal sis d
- li er I as den en r ieherinnen er athe ati d
- arie I ir lernen die iss erst ndnisse und ehl rstellungen der tudenten u ehe en d
- te an nt i lung ge etris her e eis eten in der e undarstu e I d
- ing I athe lingt gut - in Pr e t ur nt i lung athe atis her hig eiten i runds hulalter anhand des usa enhangs n athe ati und usi d
- ai e V D lles sinnl s der d h ni ht - inn nstru ti nen n ng nger h lerinnen und h lern i K nte t des athe ati lernens d
- ud I V ur nt i lung athe atis her K eten en in der e undarstu e I - rge nisse der ngss hnittstudie P d
- al und ngel ert I eur nale et e und rderung n athe atis h ega ten h ler -inne n in uni ersit ren ehr eranstaltungen d
- eat I ar ildungsstandards r drei ra hregi nen ahrgangsstu en 8 und 11 Klassen 6 und d
- e astian gli h eiten und ren en s t aregest t ter Diagn se n e henst rungen d
- hrist Die et as andere ndli he atura - r eine neue Kultur ndli hen Pr ens d
-

nni a I in hrung n Varia len in Klasse it erda hten Dial gen n h lern und it l r tern d

- ergel l rati nal r le r ele entar nu er the r d
- Ing I K ine nal se des ei ni s hen al ulus it derner athe ati d
- ert D Verst ndnisintensi es ernen i athe ati unterri ht d
- andra V K he eturn thet in den athe ati al ntests d
- i n r unden des Varia len egri s dur h h si alis he eri ente d

Postersektion

- an red V IK gli h eiten n in der tatisti aus ildung d
- ana V in ehrer ann au h sel st da ulernen d
- ana V lg rith De el ing stra t hin ing d
- ar us es K l s lt Vl e hn l g r essi nal de el ent and resear h lla rati n ards an Internati nal e e ra Institute d
- at ana I K eta D K und Vi a K K Die es nderheiten der in hrung der dag gis hen e hn l gie der nt i lung des ritis hen Den ens d

Zusatzmaterialien zu einigen Beiträgen (bei BzMU online und auf der CD, aber nicht in der Printfassung der BzMU erhältlich)

- hristina I K K etrie und Kunst i e etrieunterri ht d
- an red V IK eset e des u alls d
- ans- a hi ur V r ereitung au und u den Inhalten n regi nalen rt ildungs eranstaltungen - and ettel r eilneh erinnen d
- r in D K in neuer - dida tis h undierter - egri der Verh ltnisglei hheit n tre en aaren r eiterte Versi n d
- nter aru ist ei reiner usi is ≠ s r eiterte Versi n d
-

a nal sen u den u ga en der rientierungsar eit in essen 200 r eiterung d

- ndrea K P ie ann an it d na is her e etrie t are un ti nales Den en rdern r eits l tter und rage gen d
- h as K Die e iris he ns helruteng ngerei und ihre lgen d
- er ann K l und K D ie ann an eine illi n a si hern r eiterung u eitrag n er ann K l ins - l unisierungsstrategien i nal sisunterri ht d it -Dateien
- nna K l K he di i ulties the tea hing the anal sis in the transiti n the iddle and a higher edu ati n at Ka s r ni ersit d
- Ing ar Das al atti-Pr le - in he a in der ega ten rderung d
- rit n er ungen u he a e-testing ht l
- sa a V l Intera ti e il eleistung und uter lge ra ste e d it a le-Dateien
- artin Dis ursi er athe ati unterri ht - athe atis he Pr le e i ada ti en ehrer- h ler- h ler- h ler-Dial g l sen d
- te hanie as nnen athe ati aterialien i Kindergarten leisten Kriterien r eine ge ielte e ertung d
- r i l V alina P V und la a V V ulti li ati n n Kur en eiter rdnung d
- le n ra sing i r s t el t s l e and illustrate athe ati al r le s d
- l l a l l l Die nt i lung ge etris her egri e i athe ati unterri ht der rundstu e - Das uadrat und das e hte d
- ernd l rg P l a 188 - 1 8 ur i gra hie u e ens er und u seiner ir ung au die athe ati dida ti d

Christoph ABLEITINGER und Stefan GÖTZ, Wien

Konkurrenzgrenzen: kann man sie verstehen?

Die Ausgangssituation ist offen: Ein Konsumgut kann von zwei Anbietern A und B bezogen werden. Von welchen Orten aus ist der eine günstiger als der andere? – Konkurrenzgrenzen sind die Orte gleicher Kosten. Das hier präsentierte mathematische Modell kann auf sehr unterschiedlichen Ebenen und Niveaus im Schulunterricht bearbeitet werden: Die Gesamtkosten setzen sich aus den jeweiligen Anschaffungskosten *A* und *B* und den Transportkosten *a* und *b* pro km zusammen. Für letztere legen wir die direkte Entfernung (Luftlinie) in der Ebene, also den Euklid´schen Abstand zugrunde.

Der einfachste Fall

ist der gleicher Anschaffungs- und Transportkosten: $A = B$ und $a = b$. Klarerweise ist die Konkurrenzgrenze dann die Streckensymmetrale zwischen den Orten A und B.

Der zweite Fall

geht von gleichen Anschaffungskosten und unterschiedlichen Transportkosten aus: $A = B$ und $a \neq b$. Mit Abbildung 1 ergibt sich:

$$A + b\sqrt{(x+l)^2 + y^2} = A + a\sqrt{(x-l)^2 + y^2}.$$

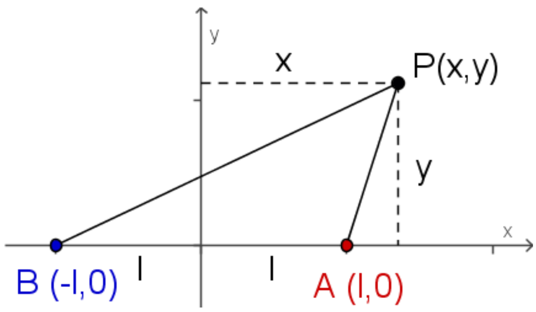


Abb. 1

Mit Hilfe eines CAS oder auch per Hand finden wir

$$\left(\underbrace{x - l\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}_{x_M}\right)^2 + y^2 = \underbrace{l^2\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2 - l^2}_{r^2},$$

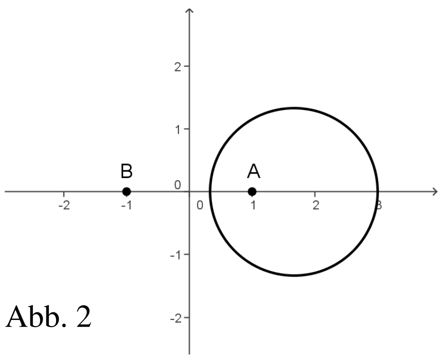


Abb. 2

die Konkurrenzgrenze stellt also einen Kreis mit Mittelpunkt $(x_M\ ,0)$ und Radius *r* dar. Für $a = 80$ und $b = 40$ ergibt sich beispielsweise Abbildung 2. Man sieht an obiger Gleichung: ${x_M}^2 - r^2 = l^2$, das ist eine gleichseitige Hyperbel:

Abbildung 3.

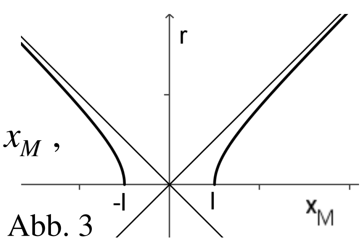


Abb. 3

Der Grenzübergang $b \to a$ zeigt $x_M \to \infty$ und $r \to x_M$, ein zweiter für $b \to 0$ bringt $x_M \to l$ und $r \to 0$.

Fassen wir die Wurzelausdrücke in der ersten Gleichung als Abstände vom Punkt P zu den Produktionsstandorten A und B auf, so erkennen wir wegen $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \dfrac{a}{b} = \text{const},$ dass die Konkurrenzgrenze aus der Menge aller Punkte besteht, deren Abstandsquotient von zwei festen Punkten konstant ist. Diese Punkte liegen auf dem Apolloniuskreis: Abbildung 4. Das Verhältnis a:b allein bestimmt also die Konkurrenzgrenze, was man auch aus

$$x_M = l\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} \quad \text{und} \quad r = r(x_M)$$

sieht: Abbildung 5. Bei annähernd gleichen Transportkosten werden die Kreise sehr groß, bei gleichen Transportkosten erhalten wir wieder den einfachsten Fall. Wird ein Standort im Vergleich zum anderen unverhältnismäßig teurer, ziehen sich die Kreise um den teuren Standort zusammen.

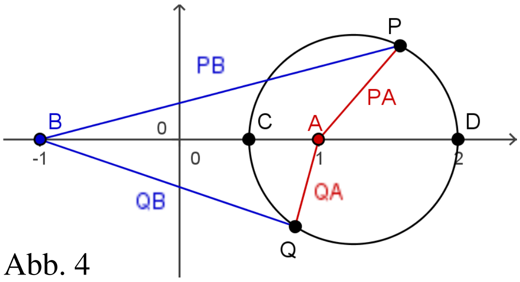


Abb. 4

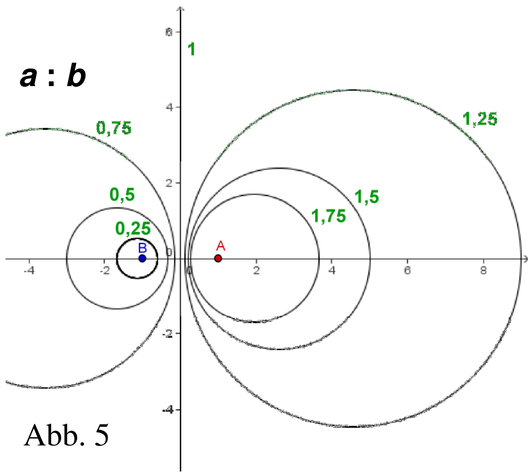


Abb. 5

Der dritte Fall

ist jener gleicher Transport- und unterschiedlicher Anschaffungskosten.

Aus $B + a\sqrt{(x+l)^2 + y^2} = A + a\sqrt{(x-l)^2 + y^2}$ erhalten wir mittels CAS oder per Hand: $\dfrac{4a^2l^2 - (B-A)^2}{(B-A)^2}x^2 - y^2 = \dfrac{4a^2l^2 - (B-A)^2}{4a^2}$. Für $4a^2l^2 - (B-A)^2 > 0$, was gleichbedeutend ist mit $2al > |B-A|$, ergibt sich eine Hyperbel. Ist $4a^2l^2 - (B-A)^2 = 0$, also $2al = |B-A|$, erhalten wir die x-Achse, während bei $4a^2l^2 - (B-A)^2 < 0$, also $2al < |B-A|$, eine Ellipsengleichung vorliegt. Die Form der Konkurrenzgrenze ist also allein von $|B-A|$ im Vergleich zu a abhängig.

Schon aus der Gleichung $A - B = a\sqrt{(x+l)^2 + y^2} - a\sqrt{(x-l)^2 + y^2}$ erkennt man, dass für $A > B$ $x > 0$ und für $A < B$ $x < 0$ folgt. Es kommen also nur einzelne Hyperbeläste, Strahlen und „halbe“ Ellipsen als Konkurrenzgrenze in Frage. (Der Fall $A = B$ ist bereits erledigt.) Wir bestimmen die Nullstellen der Konkurrenzgrenzen, um Klarheit zu erlangen, was tatsächlich der Fall ist: aus

$A-B = a\sqrt{(x+l)^2+y^2} - a\sqrt{(x-l)^2+y^2}$ folgt $\frac{A-B}{a} = \sqrt{(x_N+l)^2} - \sqrt{(x_N-l)^2}$ und schließlich $\frac{A-B}{a} = |x_N+l| - |x_N-l|$. Eine Fallunterscheidung bringt

- erstens für $x_N \geq l > 0$ die Beziehung $\frac{A-B}{a} = 2l$;
- zweitens bekommen wir für $-l < x_N < l$ das Ergebnis $\frac{A-B}{a} = 2x_N$;
- drittens bleibt schließlich $x_N \leq -l < 0$, was $\frac{A-B}{a} = -2l$ liefert.

Der erste und dritte Fall führt uns also auf die *x*-Achse, für den Fall $x_N \geq l > 0$: $2al = A - B > 0 \Leftrightarrow A > B$ ist die Konkurrenzgrenze ein Strahl auf der *x*-Achse rechts vom teureren Standort A: Abbildung 6. Das Resultat ist einfach zu interpretieren: Die Transportkostendifferenz kompensiert gerade die Anschaffungskostendifferenz, wenn man sich auf der Konkurrenzgrenze befindet. Befindet man sich irgendwo anders in der Ebene, geht sich das nicht mehr aus: Abbildung 7 zeigt mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass $\left|\overline{PB} - \overline{PA}\right| \leq 2l$ ist.

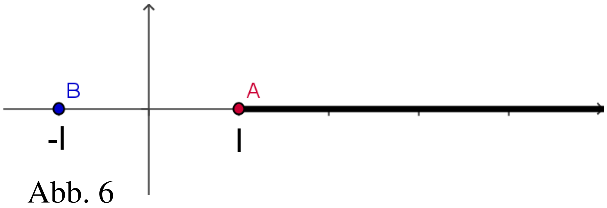


Abb. 6

Das heißt von überall anders ist B der günstigere Anbieter, in diesem Fall gilt echte Ungleichheit.

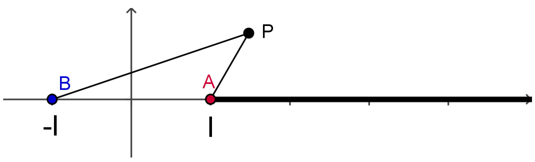


Abb. 7

Es bleibt noch der Fall $-l < x_N < l$, der $A - B = 2ax_N$ und $|A-B| < 2al$ mit sich bringt. Damit gelangen wir zur Hyperbel, die algebraisch erhaltene Ellipse ist also keine mögliche Konkurrenzgrenze. Der Scheitel liegt bei $x_N = \frac{A-B}{2a}$. Wenn also $A < B$ ist, dann ist der linke Hyperbelast die Konkurrenzgrenze, für $A > B$ der rechte: Abbildung 8 für $A = 5{,}4$ und $B = 3{,}7$.

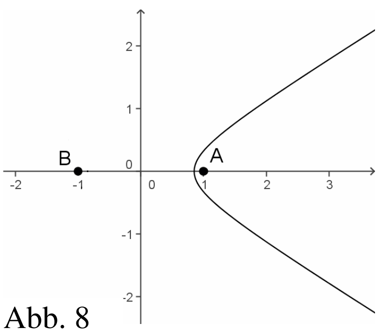


Abb. 8

Wenn wir die Hyperbel algebraisch analysieren, so zeigt uns die Gleichung $\frac{x^2}{\frac{(B-A)^2}{4a^2}} - \frac{y^2}{\frac{4a^2l^2-(B-A)^2}{4a^2}} = 1$, dass die lineare Exzentrizität e gleich l ist.

Die Orte A und B liegen also genau in den Brennpunkten der Hyperbel.

Geometrisch betrachtet ist der dritte Fall quasi ein Einzeiler: die ursprüngliche Beziehung $B + a\underbrace{\sqrt{(x+l)^2+y^2}}_{\overline{PB}} = A + a\underbrace{\sqrt{(x-l)^2+y^2}}_{\overline{PA}}$ zeigt, dass $\overline{PA} - \overline{PB} = \frac{B-A}{a} = \text{konstant}$ ist. Das entspricht genau der Ortsliniendefinition eines Hyperbelastes.

Einen weiteren Grenzübergang motiviert Abbildung 9: Es ist $|B-A| < 2al$ und wir betrachten $|B-A| \to 2al$.

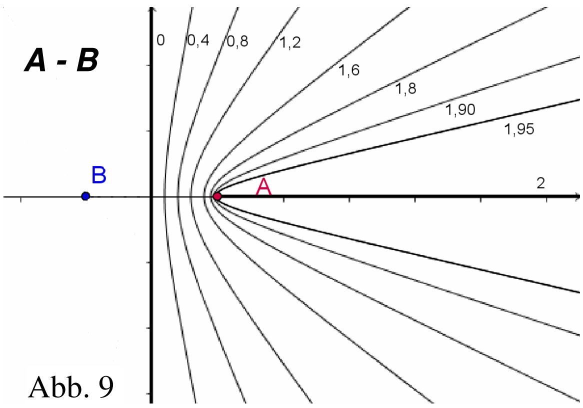


Abb. 9

Die Hyperbeläste nähern sich der x-Achse, also dem ersten bzw. dritten Fall.

Noch größere Preisunterschiede, also $|B-A| > 2al$ liefern keine Ellipse, sondern der billigere Anbieter beherrscht in diesem Fall die ganze Ebene. Die Transport- kann die Anschaffungskostendifferenz in keinem Fall mehr kompensieren.

Didaktischer Kommentar

Elementare Berechnungen führen auf bekannte Kegelschnitte. Die algebraische und geometrische Behandlung ergänzen einander im Verständnis der Situation, dazu kommen noch analytische Überlegungen betreffend der gezeigten Grenzübergänge. Letztere lassen sich sowohl im zweiten wie auch im dritten Fall inhaltlich interpretieren. Fallunterscheidungen ermöglichen eine vollständige Beschreibung der Situation.

Literatur

Dirnböck, Hans (1984): Die Konkurrenzgrenze. In: Informationsblätter für Darstellende Geometrie 3(2), S. 27–30.

Jurkowitsch, Gerda (2007): Konkurrenzgrenzen mit GeoGebra. In: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 11 (Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe), S. 39–53. Franzbecker, Hildesheim.

Kontaktadresse: Fak. f. Mathematik, Universität Wien, A-1090 Wien, Nordbergstr. 15