

Technische Universität Dortmund  
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät  
Fachgebiet Operations Research und Wirtschaftsinformatik

**Dissertation**

Maximale Kreispackungen  
für verallgemeinerte Petersen Graphen

und

die Bestimmung der Kreispackungszahl  
unter Verwendung von Knotenseparatoren

**Verfasserin**

Eva-Maria Sprengel

**Betreuer**

Prof. Dr. P. Recht

Eingereicht: 2014

Veröffentlicht: 2015

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Die Problemstellung</b>	<b>6</b>
2.1	Definitionen und Beispiele . . . . .	6
2.2	Drei praxisbezogene Problemstellungen . . . . .	21
2.2.1	Genome Rearrangement und Sorting by Reversals . . . . .	22
2.2.2	Optische Netzwerke und Kreispackungen in Graphen . . . . .	28
2.2.3	Spontaneous Postman Probleme und ein Beispiel der Rundgangsplanung . . . . .	36
2.3	Theoretische Ergebnisse zur Bestimmung maximaler Kreispackungen . . .	42
<b>3</b>	<b>Die Kreispackungszahl und maximale Kreispackungen mittels Separatoren</b>	<b>49</b>
3.1	Aussagen für Graphen mit 2-Separatoren bzw. 3-Separatoren . . . . .	57
3.1.1	Aussagen für Graphen, die einen 2-Separator enthalten . . . . .	57
3.1.2	Aussagen für Graphen, die einen 3-Separator enthalten . . . . .	60
3.1.3	Eine maximale Kreispackung für Graphen, die einen 2- bzw. 3-Separator enthalten . . . . .	70
3.2	Aussagen für Graphen, die einen $k$ -Separator mit $k \geq 4$ enthalten . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Die Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen <math>P(n, k)</math></b>	<b>93</b>
4.1	Die Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen $P(n, 4)$ . . . . .	99

---

4.2	$P(n, k)$ mit $k \geq 6$ und $k \bmod 2 = 0$ . . . . .	109
4.2.1	Die Bestimmung einer maximalen Kreispackung . . . . .	140
4.3	$P(n, k)$ mit $k \geq 5$ und $k \bmod 2 = 1$ . . . . .	183
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>208</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>210</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Das Königsberger-Brücken-Problem von L. Euler <sup>1</sup> . . . . .	1
1.2	Das Königsberger-Brücken-Problem als Graph . . . . .	2
2.1	Der Goldner-Harary Graph . . . . .	8
2.2	Eine Kreispackung im Goldner-Harary Graphen . . . . .	9
2.3	Eine maximale Kreispackung vom Goldner-Harary Graphen . . . . .	10
2.4	Der Coxeter Graph . . . . .	11
2.5	Der Coxeter Graph in einer alternativen Darstellung . . . . .	12
2.6	Eine Kreispackung im Coxeter Graphen . . . . .	12
2.7	Der Contiguous USA Graph . . . . .	14
2.8	Eine Kreispackung im Contiguous USA Graphen . . . . .	14
2.9	Die Knoten ungeraden Grades im Contiguous USA Graphen . . . . .	15
2.10	Der Contiguous USA Graphen mit zwei Untergraphen $H_1$ und $H_2$ . . . . .	17
2.11	Kreise einer speziellen Kreispackung $\mathcal{P}(H_1)$ im Contiguous USA Graphen . . . . .	19
2.12	Zehn Teilgraphen des Contiguous USA Graphen . . . . .	21
2.13	Die Gensequenzen $a$ und $i$ . . . . .	23
2.14	Die Überführung der Gensequenz $a$ in die Gensequenz $i$ durch fünf Reversals . . . . .	24
2.15	Die Überführung der Gensequenz $a$ in die Gensequenz $i$ durch drei Reversals . . . . .	24
2.16	Die Breakpoints in der Gensequenz $a$ . . . . .	26
2.17	Der Breakpoint-Graph $G(a)$ zur Gensequenz $a$ . . . . .	26

2.18	Lichtwellenkanäle in einem Faserkabel . . . . .	28
2.19	Ein Datennetzwerk . . . . .	30
2.20	Vier Mengen von light paths . . . . .	31
2.21	Der Nachfrage-Graph . . . . .	33
2.22	Der neue Nachfrage-Graph $G_{neu}^D$ . . . . .	35
2.23	Eine minimale, zulässige Menge von light paths für das erweiterte Beispiel	35
2.24	Ein Beispiel für einen Trace . . . . .	37
2.25	Museumsgrundriss mit den Bereichen $A - D$ . . . . .	40
2.26	Eine maximale Kreispackung auf dem gegebenen Beispielgraphen . . . . .	41
2.27	Museumsgrundriss mit den Rundgängen in den Bereichen $A - D$ . . . . .	41
2.28	Ein Graph $G_1$ . . . . .	43
2.29	Eine Kreispackung für den Beispielgraphen $G_1$ . . . . .	44
2.30	Eine maximale Kreispackung für den Beispielgraphen $G_1$ mit vier Zusammenhangskomponenten . . . . .	45
2.31	Veranschaulichung eines Graphen mit einem Schnittknoten $x$ . . . . .	46
2.32	Veranschaulichung der Untergraphen $G_1$ und $G_2$ . . . . .	47
2.33	Veranschaulichung der Untergraphen $H_1$ und $H_2$ . . . . .	48
3.1	Veranschaulichung eines $k$ -Separators in einem gegebenen Graphen $G$ . . . . .	50
3.2	Veranschaulichung eines $k$ -Separators $S$ mit den induzierten Untergraphen $G_1, G_2$ und $G_S$ . . . . .	51
3.3	Veranschaulichung eines $k$ -Separators $S$ im Graphen $H$ . . . . .	52
3.4	Veranschaulichung der modifizierten Untergraphen $H_1$ und $H_2$ des Graphen $H$ . . . . .	53
3.5	Veranschaulichung eines Übergangskreises in den modifizierten Untergraphen $H_1$ und $H_2$ des Graphen $H$ . . . . .	54
3.6	Veranschaulichung zweier Übergangskreise in einem Graphen mit einem 2-Separator . . . . .	57

3.7	Veranschaulichung des Hinzufügens der Kante $e$ zu $H_1$ und $H_2$ . . . . .	59
3.8	Veranschaulichung des Hinzufügens der Kanten $e$ und $g$ zu $H_1$ und $H_2$ . . .	66
3.9	Ein Beispielgraph $G$ mit einem $k$ -Separator $S$ und der Teilmenge $T \subseteq S$ . .	85
3.10	Der modifizierte Graph $G(T)$ . . . . .	86
3.11	Ein Beispielgraph $H$ mit einem 4-Separator $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . . . . .	90
3.12	Ein Graph $H + 2e$ mit $e = (v_1, v_2)$ . . . . .	90
4.1	Der Petersen Graph . . . . .	93
4.2	Der verallgemeinerte Petersen Graph $P(12, 3)$ . . . . .	96
4.3	Eine beispielhafte Veranschaulichung von $SC_0$ , $SC_2$ und $SC_{k-2}$ . . . . .	99
4.4	Eine Veranschaulichung eines Kreises der Länge sieben im Graphen $P(n, 4)$ mit $n \geq 29$ . . . . .	101
4.5	Eine Veranschaulichung der Kreise $SC_i$ im $P(n, 4)$ . . . . .	109
4.6	Eine Veranschaulichung einer Kreispackung mit $\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor \cdot \frac{k}{2}$ Kreisen . . . . .	113
4.7	Eine Veranschaulichung einer Kreissubstitution . . . . .	115
4.8	Die Veranschaulichung der Kreispackung $\bar{\mathcal{P}} := \tilde{\mathcal{P}} \bigcup_{b=1}^{\beta} SC_{j \cdot 2k + 2b - 2}$ . . . . .	118
4.9	Veranschaulichung eines Kreises mit genau zwei Innenknoten . . . . .	125
4.10	Eine Veranschaulichung eines Kreises mit einer speziellen Knotenbelegung .	133
4.11	Ein Kreis der Länge acht . . . . .	140
4.12	Ein Kreis mit der Länge $k + 3$ und genau zwei Innenknoten . . . . .	140
4.13	Eine Veranschaulichung des Untergraphen $\tilde{G}$ und des Restgraphen $R$ . . .	141
4.14	Eine maximale Kreispackung im $P(32, 6)$ . . . . .	145
4.15	Eine Kreispackung im $P(32, 6)$ mit sieben Kreisen . . . . .	146
4.16	Ankerknoten $v_i$ von dem rot markierten Kreis . . . . .	150
4.17	Ein Untergraph eines Kreises $C \in \mathcal{P}$ mit dem Ankerknoten $v_i$ . . . . .	154
4.18	Ein Untergraph eines Kreises $C \in B(\mathcal{P})$ mit dem Ankerknoten $v_i$ und der ersten äußeren Zusammenhangskomponente $L_1^C$ . . . . .	156

4.19	Substitution eines Kreises $C \in B(\mathcal{P})$ an seinem Ankerknoten $v_i$ . . . . .	156
4.20	Ein Kreis $C \in B(\mathcal{P})$ mit Ankerknoten $v_i$ und zwei Kreisen $C_l$ und $C_{[l+2]}$ . . .	157
4.21	Simultane Substitution dreier Kreise I . . . . .	158
4.22	Ein Kreis $C \in B(\mathcal{P})$ (rot) mit Ankerknoten $v_i$ und zwei weiteren nicht sukzessive substituierbaren Kreisen $\tilde{C}$ (lila) und $C_h$ (gelb) . . . . .	159
4.23	Simultane Substitution dreier Kreise II . . . . .	160
4.24	Fall 1 . . . . .	162
4.25	Die Substitution im ersten Fall . . . . .	163
4.26	Fall 2 . . . . .	164
4.27	Fall 3 . . . . .	166
4.28	Fall 4 . . . . .	167
4.29	Veranschaulichung der gesetzten Indizes . . . . .	169
4.30	Die Schachtelung zweier Kreise aus $B(\mathcal{P})$ . . . . .	171
4.31	Eine Veranschaulichung der Kreise $SC_i$ im Fall $k \bmod 2 = 1$ . . . . .	188
4.32	Eine Veranschaulichung des Untergraphen $\tilde{G}$ im Fall $k \bmod 2 = 1$ . . . . .	203

# Kapitel 1

## Einleitung

Das Auffinden von maximalen Kreispackungen und die Bestimmung der zugehörigen Kreispackungszahl stellen zwei bekannte Problemstellungen aus dem Bereich der Graphentheorie dar. Die Graphentheorie hat eine lange Geschichte. In den meisten Aufzeichnungen wird der Ursprung der Graphentheorie im Jahr 1736 gesehen. In diesem Jahr stellte Leonard Euler das so genannte Königsberger-Brücken-Problem vor [33]. Euler beschäftigte sich mit der folgenden Situation (vgl. Abb. 1.1).

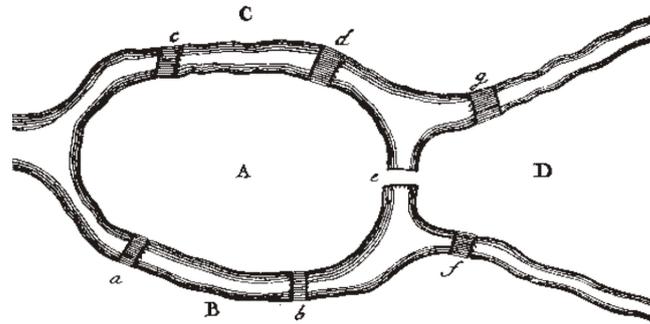


Abbildung 1.1: Das Königsberger-Brücken-Problem von L. Euler <sup>1</sup>

Durch die Stadt Königsberg führt ein Fluss, der Pregel. Er unterteilt die Stadt in vier Bereiche. Diese sind in der Abbildung mit A bis D gekennzeichnet. Man gelangt von einem Bereich der Stadt in einen anderen angrenzenden Bereich, indem man eine der sieben Brücken überquert. In der Abbildung sind diese mit den Namen a bis g benannt. Ist man im Bereich A, so gelangt man beispielsweise über die Brücke c in den Bereich C der Stadt. Euler stellte sich die Frage, ob es möglich ist, im Stadtbereich A zu starten und

<sup>1</sup>Entnommen von <http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/MathePrisma/Module/Koenigsb/index.htm> (Original in [33])

von da aus die Bereiche  $B$ ,  $C$  und  $D$  zu besuchen und abschließend zum Ausgangspunkt im Stadtbereich  $A$  zurückzukehren und dabei jede eingezeichnete Brücke  $a, \dots, g$  genau einmal zu benutzen. Führt man das Problem auf eine graphentheoretische Fragestellung zurück, so ergibt sich folgender Graph in Abbildung 1.2.

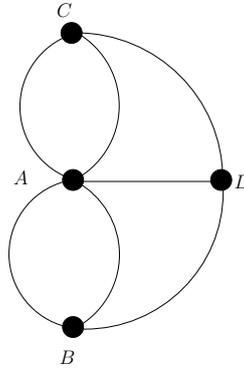


Abbildung 1.2: Das Königsberger-Brücken-Problem als Graph

Die Punkte, im Allgemeinen Knoten genannt, stellen die Bereiche  $A$  bis  $D$  dar. Jede Linie, auch Kante genannt, welche zwei Knoten verbindet, repräsentiert eine Brücke. Die Fragestellung lautet nun: Ist es möglich, eine Tour über die Kanten zu finden, so dass diese Tour im Knoten  $A$  startet und endet und jede Kante genau einmal enthält. Euler hat 1736 einen solchen Graphen zwar nicht definiert, allerdings hat er gezeigt, dass eine solche Tour nicht existiert. Der Grund liegt in der Tatsache, dass es sich bei dem Graphen um keinen Eulergraphen handelt. Eulergraphen zeichnen sich dadurch aus, dass sie eine Eulertour besitzen. Eine Eulertour ist eine Tour, die in einem bestimmten Knoten startet und endet und alle Kanten genau einmal enthält. Man kann erkennen, dass der gegebene Graph kein Eulergraph ist, da beispielsweise der Knoten  $D$  mit drei Kanten verbunden ist. Folglich wäre in einer Tour mindestens eine Kante entweder nicht enthalten oder mehrfach enthalten. Allgemein tritt dies immer dann auf, wenn ein Knoten mit einer ungeraden Anzahl Kanten verbunden ist.

Im Zusammenhang mit Eulergraphen ist das so genannte Chinese Postman Problem (CPP) ein viel beschriebenes Problem, welches auch der Ausgangspunkt der Forschung für diese Arbeit war. Das CPP wurde erstmalig 1960 von dem Chinesen Mei Ko Kwan in [61] (vgl. auch [62]) beschrieben, nach dem es auch benannt wurde. Zu Grunde liegt eine praktische Fragestellung eines Postboten: Ein Postbote startet und beendet seine Posttour an einem Postdepot. Er hat eine Menge von Straßen gegeben, in denen er die Post ausliefern muss. Für jede Straße ist dem Postboten bekannt, wie viel Zeit er zum Verteilen der Post in der Straße benötigt. Der Postbote stellt sich die Frage, in welcher Reihenfolge er die Straßen ablaufen muss, so dass er möglichst wenig Zeit benötigt, um

alle Briefe zu verteilen und anschließend wieder zum Depot zurückzukehren. Stellt man das Straßennetz als gewichteten Graphen dar, so repräsentiert jede Kante eine Straße. Die Knoten repräsentieren Straßenabzweigungen bzw. das Depot. Die Zeit, die der Postbote zum Verteilen der Briefe in einer Straße benötigt, wird als Wert der entsprechenden Kante gewählt. Liegt ein Eulergraph vor, so ist die Lösung einfach. In diesem Fall existiert eine Eulertour. In dieser Tour kommt jede Kante genau einmal vor. Überträgt man die Reihenfolge, in der die Kanten in der Tour angeordnet sind, auf die Straßen, so ergibt sich eine Reihenfolge, in der die Straßen beliefert werden sollen. Der Postbote wird auf seiner Tour keine Straße mehrfach durchlaufen und benötigt für seine Tour daher genau die Mindestzeit, welche sich durch das Verteilen der Briefe auf allen Straßen ergibt. Im Allgemeinen liegt kein Eulergraph vor. Folglich müssen einige Straßen mehrfach durchlaufen werden. Dies führt zu der Fragestellung, wie oft die einzelnen Straßen durchlaufen werden müssen, so dass sich insgesamt eine zeitminimale Postbotentour ergibt. Graphentheoretisch kann man dieses Problem lösen, indem man den Graphen, der das Straßennetz repräsentiert, zu einem Eulergraphen erweitert. Dabei werden ausgewählte Kanten vervielfacht. Jede Kopie einer Kante bekommt den gleichen Wert, wie die ursprüngliche Kante. Für jede Kante, die hinzugefügt wird, muss die zugehörige Straße in der Postbotentour einmal mehr durchlaufen werden. Folglich kann der Graph nicht beliebig erweitert werden, da in dem zu Grunde liegenden Problem eine zeitminimale Postbotentour gesucht wird. Der durch die Erweiterung entstandene Eulergraph muss ein Graph mit minimalem Gesamtwert, unter allen, durch eine Erweiterung konstruierbaren, Eulergraphen sein. Abschließend kann man aus der Eulertour im erzeugten Eulergraphen die Lösung des CPP herleiten.

Im Rahmen der Betrachtung des CPP und möglichen verwandten Problemen, ergab sich in einer Diplomarbeit (vgl. [89]) folgende Problembeschreibung: Man hat ein großes Straßennetz gegeben sowie mehrere Postboten, welche die Häuser dieser Straßen mit Post beliefern sollen. Es stellt sich die Frage, wie man das Straßennetz in einzelne Teilstraßennetze für die Postboten aufteilen soll, so dass sich für jeden Postboten in seinem Teil des Straßennetzes eine ungefähr gleich zeitintensive Postbotentour zum Verteilen der Post ergibt. Ein heuristischer Ansatz ist: Man stellt das gesamte Straßennetz als Graph dar und erweitert diesen zu einem Eulergraphen mit minimalem Gesamtwert. Der entstandene Eulergraph wird anschließend in möglichst viele kantendisjunkte Kreise zerlegt. Die Kreise werden anschließend zu zusammenhängenden Teilgraphen zusammengefasst, sodass die Eulertouren der einzelnen Teilgraphen Postbotentouren mit einer ungefähr gleichen Zeit implizieren. Ein wesentliches Problem dieses heuristischen Vorgehens ist die Zerlegung eines Eulergraphen in eine möglichst große Anzahl kantendisjunkter Kreise. Es ergibt sich die verallgemeinerte Problemstellung: Finde eine maximale Menge kantendisjunkter Kreise für einen ungerichteten Graphen.

Diese Problemstellung wurde in der Vergangenheit unter verschiedenen Aspekten untersucht. Dabei wird eine maximale Menge kantendisjunkter Kreise auch als maximale Kreispackung bezeichnet. Die Kreispackungszahl gibt die Anzahl der Kreise einer maximalen Kreispackung an. Holyer zeigte 1981 in [50] erstmalig, dass das Auffinden einer maximalen Menge kantendisjunkter Kreise der Länge drei *NP*-schwer ist. Basierend auf diesem Beweis wurde in späteren Jahren belegt, dass das Problem des Auffindens einer maximalen Kreispackung für einen beliebigen ungerichteten Graphen *NP*-schwer ist, vergleiche hierzu [15], [18], [19] und [73]. In [18] zeigten Caprara, Panconesi und Rizzi weiterhin, dass das Problem *APX*-schwer ist. In diesem Zusammenhang bedeutet *APX*-schwer, dass es eine Zahl  $\rho$  gibt, so dass kein  $\rho$ -Algorithmus existiert, welcher in polynomieller Zeit eine Lösung mit einem Wert liefert, welcher höchstens dem  $\frac{1}{\rho}$ -fachen des Optimallösungswertes entspricht. In [18] wurde zudem gezeigt, dass das Problem auch für planaren Graphen *NP*-schwer ist. Weiterhin wird in [15] auf den Beweis von Holyer verwiesen, um zu zeigen, dass dies ebenfalls für Eulergraphen gilt. Weitere Aussagen zu maximalen Kreispackungen in ungerichteten Graphen wurde unter anderem von Harant, Rautenbach, Recht, Regen und Degenhardt in [47] und [76] veröffentlicht. Die dargestellten Resultate beziehen sich auf einen Zusammenhang zwischen der Kreispackungszahl und der Cyclomatischen Zahl für einen ungerichteten Graphen. Dabei wurde unter anderem bewiesen, dass die Gleichheit beider Zahlen lediglich für sogenannte Kaktusgraphen vorliegt. Erdős und Posa veröffentlichten 1962 in [31] Ergebnisse im Bezug auf einen Zusammenhang zwischen der Knoten- bzw. Kantenanzahl eines ungerichteten Graphen  $G$  und der Existenz einer Menge mit genau  $k$  kantendisjunkten Kreisen in  $G$ . Weitere Resultate bezüglich dieses Zusammenhangs veröffentlichte Moon 1964 in [68]. Erste approximative algorithmische Resultate stammen aus dem Jahr 1990 von Bodlaender, vgl. [11]. Er entwickelte ein theoretisches Verfahren um zu prüfen, ob ein gegebener ungerichteter Graph eine Menge mit mindestens  $k$  kantendisjunkten Kreisen besitzt. Das bislang beste approximative Verfahren zur näherungsweise Bestimmung einer maximalen Kreispackung stellten Krivelevich, Nutov, Salavatipour, Verstraete und Yuster im Jahr 2007 vor (vgl. dazu [40], [41], [58], [59] und [79]). Das Verfahren ist eine Variante des modifizierten Greedy Verfahrens von Caprara, Panconesi und Rizzi aus dem Jahr 2003 (siehe [18]).

Da das Auffinden einer maximalen Kreispackung in einem ungerichteten Graphen *NP*-schwer ist und man dieses Problem daher im Allgemeinen nur approximativ lösen kann, hat man im Laufe der Zeit versucht, Graphenklassen zu finden, für die das Problem in polynomieller Zeit lösbar ist, oder gute Näherungen herzuleiten. Eine Graphenklasse, für die das Problem lösbar ist, stellt die Klasse der vollständigen Graphen  $K_n$  dar. Die bekannteste Frage zur Problemstellung für vollständige Graphen stammt von Alspach aus dem Jahr 1981 in [2]. Er nahm an, dass für  $n > 0$  die Summe  $a_1 + a_2 + \dots + a_r$  mit

$3 \leq a_i \leq n$  für  $i = 1, \dots, r$  eine Zerlegung von  $\binom{n}{2}$  (falls  $n$  ungerade) bzw. von  $\binom{n}{2} - \frac{1}{2}n$  (falls  $n$  gerade) ist. Dann stellte er die Frage, ob eine Zerlegung der Kantenmenge des vollständigen Graphen  $K_n$  (für  $n$  ungerade) bzw. des Graphen  $K_n - I$  (für  $n$  gerade und  $I$  ein 1-Faktor von  $K_n$ ) in  $r$  Kreise mit den Längen  $a_1, a_2, \dots, a_r$  existiert. Positiv beantwortet wurde Alpachs Frage erst im Jahr 2013 von Bryant, Horsley und Pettersson in [25]. Es gibt aber schon frühere Ergebnisse bezüglich maximaler Kreispackungen von vollständigen Graphen, beispielsweise von Chartrand, Geller und Hedetniemi 1971 in [21] (siehe Seite 42). Das Problem des Auffindens einer maximalen Kreispackung wurde ebenfalls für gerichtete Graphen untersucht. Auch für diese Graphen ist das Problem *NP*-schwer, siehe [28]. Einige algorithmische Resultate zu der Problemstellung in gerichteten Graphen sind unter anderem in [58] und [59] dargestellt. Ein Algorithmus für  $r$ -reguläre gerichtete Graphen ist in [1] zu finden, zudem sind einige Resultate zu gerichteten Eulergraphen in [82] beschrieben. Ein verwandtes Problem ist die Suche nach der maximalen Menge knotendisjunkter Kreise. Dieses Problem ist ebenfalls *NP*-schwer und wurde ausführlich untersucht, vergleiche [11], [22], [23], [27], [29], [30], [31], [32], [37], [43], [48], [74], [83] und [87].

In dieser Arbeit werden maximale Kreispackungen zunächst an Hand einiger graphentheoretischer Beispiele eingeführt. In diesem Rahmen werden einige formale Definitionen gegeben, so dass ein einheitliches Verständnis der Notation gewährleistet ist. Anschließend wird auf die Frage nach der praktischen Anwendbarkeit näher eingegangen. Dazu werden in Kapitel 2.1 drei praktische Problemstellungen vorgestellt, deren Lösungen sich durch das Auffinden einer maximalen Kreispackung oder die Bestimmung der Kreispackungszahl auf einem geeigneten Graphen herleiten lassen.

Im dritten Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Knotenseparatoren und maximalen Kreispackungen erläutert. Dazu werden zunächst Graphen betrachtet, welche einen Knotenseparator mit zwei bzw. drei Knoten enthalten. Es werden auf Basis der Separatorknoten Bedingungen formuliert, welche Rückschlüsse auf eine maximale Kreispackung und die Kreispackungszahl zulassen. Diese Bedingungen werden zudem algorithmisch zur Bestimmung einer maximalen Kreispackung auf einem entsprechenden Graphen umgesetzt. Abschließend wird der Fall eines Graphen mit einem Knotenseparator mit einer beliebigen Anzahl von Knoten behandelt.

In Kapitel 4 wird schließlich eine spezielle Graphenfamilie, die Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen betrachtet. Dabei werden zwei Fälle unterschieden. Unter der Annahme, dass die Knotenanzahl groß genug ist, wird für einen der beiden Fälle gezeigt, dass immer eine maximale Kreispackung existiert, welche, bis auf höchstens einen Kreis, ausschließlich aus Kreisen der Länge acht besteht.

# Kapitel 2

## Die Problemstellung

Um einen ersten Eindruck von maximalen Kreispackungen in Graphen zu erhalten, werden zunächst einige notwendige Definitionen gegeben. Im Anschluss werden beispielhaft einige ausgesuchte Graphen betrachtet und für diese eine maximale Kreispackung bestimmt.

### 2.1 Definitionen und Beispiele

Ein *Graph*  $G$  ist dabei gegeben durch ein Paar  $(V(G), E(G))$  mit den Eigenschaften, dass  $V(G) \neq \emptyset$  und  $E(G) \subseteq \{e \mid e = (v, w), v \in V(G), w \in V(G), v \neq w\}$  ist. Die Menge  $V(G)$  wird als *Knotenmenge* bezeichnet. Die Menge  $E(G)$  ist die Teilmenge einer Multimenge und wird als *Kantenmenge* bezeichnet. Betrachtet man zwei Knoten  $v, w \in V(G)$ , so nennt man diese *adjazent*, falls eine Kante  $e = (v, w) = (w, v) \in E(G)$  existiert. Für einen Knoten  $v \in V$  wird die Anzahl der zu  $v$  adjazenten Knoten durch  $\delta(v)$  angegeben. Man nennt  $\delta(v)$  den *Grad des Knotens*  $v$ . Haben alle Knoten eines Graphen den gleichen Grad  $r$ , so nennt man den Graphen  *$r$ -regulär*. Betrachtet man eine Kante  $e = (v, w)$ , werden die Knoten  $v$  und  $w$  als *Endknoten der Kante*  $e$  bezeichnet. Man sagt  $e$  ist mit  $v$  und  $w$  *inzident*. Zwei Kanten  $e_1 = (v, w)$  und  $e_2 = (v, w)$  mit den identischen Endknoten  $v, w \in V$  nennt man *parallele Kanten*. Können die Mengen  $V(G)$  und  $E(G)$  aus dem Kontext eindeutig einem Graphen  $G$  zugeordnet werden, so wird  $G$  verkürzt beschrieben durch  $V$  und  $E$ .

Ein Untergraph  $G' = (V(G'), E(G'))$  eines Graphen  $G = (V(G), E(G))$ , für den gilt  $V(G') \subseteq V(G)$  und  $E(G') = \{e = (v, w) \in E(G) \mid v, w \in V(G')\}$  heißt der *durch  $V(G')$  induzierte Untergraph* von  $G$ .

Die Vereinigung  $\tilde{G} = G \cup \bar{G}$  von zwei Graphen  $G = (V(G), E(G))$  und  $\bar{G} = (V(\bar{G}), E(\bar{G}))$  ist definiert durch  $\tilde{G} := (V(\tilde{G}), E(\tilde{G}))$  mit Knotenmenge  $V(\tilde{G}) = V(G) \cup V(\bar{G})$  und Kantenmenge  $E(\tilde{G}) = E(G) \cup E(\bar{G})$ . Der Schnitt  $G' = G \cap \bar{G}$  zweier Graphen  $G = (V(G), E(G))$  und  $\bar{G} = (V(\bar{G}), E(\bar{G}))$  ist analog definiert durch  $G' := (V(G'), E(G'))$  mit  $V(G') = V(G) \cap V(\bar{G})$  und  $E(G') = E(G) \cap E(\bar{G})$ . Die Differenz  $\hat{G} = G \setminus \bar{G}$  eines Graphen  $G = (V(G), E(G))$  und eines Untergraphen  $\bar{G} = (V(\bar{G}), E(\bar{G}))$  von  $G$  ist definiert durch  $\hat{G} := (V(\hat{G}), E(\hat{G}))$  mit  $V(\hat{G}) = V(G) \setminus V(\bar{G})$  und  $E(\hat{G}) = E(G) \setminus E(\bar{G})$ .

Für einen Graphen  $G = (V, E)$  ist ein *Kreis*  $C$  eine endliche Folge von  $r$  paarweise disjunkten Knoten und Kanten  $(v_{i_0}, e_0, v_{i_1}, e_1, \dots, v_{i_{r-1}}, e_{r-1}, v_{i_r})$  mit  $e_j = (v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$ ,  $v_{i_j} \in V$  und  $v_{i_0} = v_{i_r}$ . Verkürzt schreibt man  $C = (v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{r-1}})$ . Die *Länge eines Kreises*  $C$  ist gegeben durch  $d(C) := r$  und entspricht der Kantenanzahl (bzw. Knotenanzahl) von  $C$ . Für einen Graphen  $G$  ist *girth*( $G$ ) die *Länge des kürzesten Kreises* in  $G$ . Falls der Bezug zum Graphen eindeutig aus dem Kontext zu erkennen ist, schreibt man kurz *girth*.

Man kann einen *Kreis* alternativ als *Untergraphen*  $G' = (V(G'), E(G'))$  eines Graphen  $G = (V(G), E(G))$  auffassen, für den gilt  $V(G') \subseteq V(G)$  und  $E(G') \subseteq E(G)$ . Man schreibt auch  $G' \subseteq G$ . In diesem Fall wird ein Kreis  $C = (v_{i_1}, e_1, v_{i_2}, e_2, \dots, e_{r-1}, v_{i_r})$  beschrieben durch  $C = (V(C), E(C))$  mit  $V(C) := \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{r-1}}\}$  und  $E(C) := \{e_1, e_2, \dots, e_{r-1}\}$ . Eine *Kreispackung*  $\tilde{\mathcal{P}} = \{C_1, \dots, C_q\}$  ist eine Menge kantendisjunkter Kreise  $C_i$ , mit  $i = 1, \dots, q$ , für die gilt  $\bigcup_i C_i \subseteq G$ . Es gilt  $V(\tilde{\mathcal{P}}) := \bigcup_{i=1}^q V(C_i)$  und  $E(\tilde{\mathcal{P}}) := \bigcup_{i=1}^q E(C_i)$ .

Für einen gegebenen Graphen  $G$  ist eine *maximale Kreispackung*  $\mathcal{P}(G)$  eine Kreispackung, für die gilt, dass die Anzahl der Kreise in  $\mathcal{P}(G)$  mindestens so groß ist, wie in jeder beliebigen anderen Kreispackung von  $G$ , kurz  $|\mathcal{P}(G)| \geq |\tilde{\mathcal{P}}(G)|$  für jede Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}(G)$  von  $G$ . Die *Kreispackungszahl*  $\nu(G)$  gibt die Anzahl der Kreise in  $\mathcal{P}(G)$  an. Es gilt somit:

$$\nu(G) := |\mathcal{P}(G)|$$

Falls der Bezug zum Graphen eindeutig aus dem Kontext zu erkennen ist, schreibt man ebenfalls verkürzt  $\mathcal{P}$  für eine maximale Kreispackung. Gleiches gilt für Kreispackungen, welche nicht maximal sind.

Analog zur Definition eines Kreises ist, für einen Graphen  $G$ , ein *Weg*  $W$  (von  $v_{i_0}$  nach  $v_{i_{r-1}}$ ) eine endliche Folge von  $r$  paarweise disjunkten Knoten und  $r - 1$  paarweise disjunkten Kanten  $(v_{i_0}, e_0, v_{i_1}, e_1, \dots, e_{r-2}, v_{i_{r-1}})$  mit  $e_j = (v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$  und  $v_{i_j} \in V$ . Verkürzt schreibt man  $W = (v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{r-1}})$ . Die *Länge eines Weges*  $W$  ist gegeben durch  $d(W) := r - 1$  und entspricht der Kantenanzahl. Ein *kürzester Weg* von  $G$  ist ein Weg mit minimaler Länge.

Im folgenden werden drei Beispielgraphen betrachtet und für diese eine maximale Kreispackung bestimmt. Als erstes Beispiel ist der Goldner-Harary Graph gegeben (vgl. [75]).

**Beispiel 2.1:**

Der Goldner-Harary Graph ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

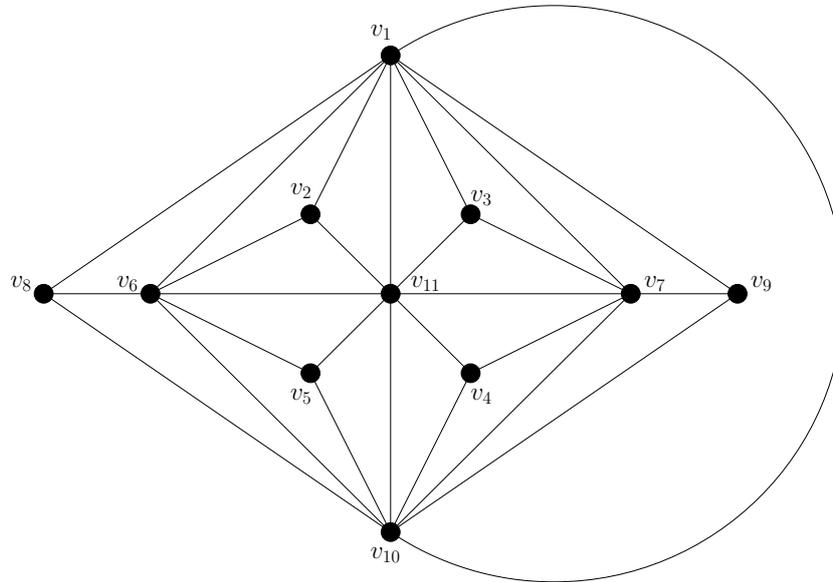


Abbildung 2.1: Der Goldner-Harary Graph

Der Graph hat elf Knoten  $V = \{v_1, \dots, v_{11}\}$  und 27 Kanten. Die Knoten  $v_1, v_{10}$  und  $v_{11}$  haben den Knotengrad acht. Bei den Knoten  $v_6$  und  $v_7$  ist der Knotengrad sechs und für alle übrigen Knoten beträgt der Knotengrad drei. Des weiteren gilt  $girth = 3$ . Ein Beispiel für einen Kreis der Länge drei ist der Kreis  $(v_1, v_2, v_{11})$ . Einen kürzeren Kreis gibt es nicht, da dies nur bei mindestens zwei parallel verlaufenden Kanten möglich ist. In Abbildung 2.2 ist eine Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}$  mit sechs Kreisen für den Goldner-Harary Graph farbig veranschaulicht.

Es stellt sich die Frage, ob diese Kreispackung maximal ist. Man sieht, dass die Kreispackung aus vier Kreise der Länge drei und zwei Kreise der Länge besteht und nicht, durch das Hinzufügen eines weiteren kantendisjunkten Kreises, erweitert werden kann. Hinsichtlich der Frage der Maximalität kann es hilfreich sein zunächst eine obere Schranke für  $\nu(\text{Goldner-Harary Graph})$  zu bestimmen.

Allgemein gilt: Eine obere Schranke für die maximale Anzahl von Kreisen in einer Kreispackung ergibt sich, indem man annimmt, dass eine maximale Kreispackung, bestehend aus

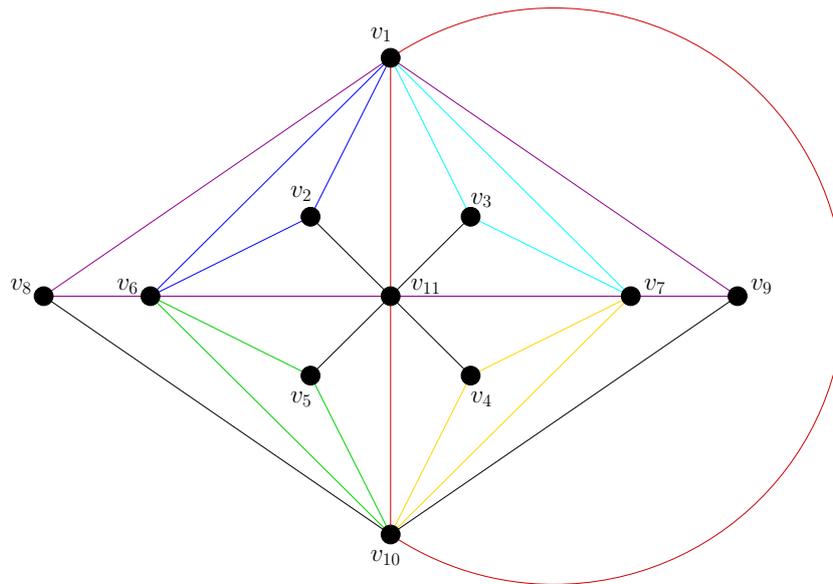


Abbildung 2.2: Eine Kreispackung im Goldner-Harary Graphen

der maximalen Anzahl von Kreisen kürzester Länge existiert. Man erhält die nachfolgende Proposition.

**Proposition 2.1:**

Sei  $G = (V(G), E(G))$  ein Graph. Es gilt

$$\nu(G) \leq \frac{|E(G)|}{\text{girth}(G)}$$

Einen Spezialfall bilden 2-reguläre und 3-reguläre Graphen, da in diesen Graphen jeder Knoten höchstens in einem Kreis einer maximalen Kreispackung enthalten sein kann. Damit ergibt sich für diese Graphen eine im Allgemeinen schärfere obere Schranke.

**Proposition 2.2:**

Sei  $G = (V(G), E(G))$  ein Graph mit  $\delta(v) = 2$  für alle  $v \in V(G)$  oder  $\delta(v) = 3$  für alle  $v \in V(G)$ . Dann gilt

$$\nu(G) \leq \frac{|V(G)|}{\text{girth}(G)}$$

Nachfolgend wird zunächst  $\nu(\text{Goldner-Harary Graph})$  unter Verwendung der oberen Schranke aus Proposition 2.1 abgeschätzt und anschließend exakt bestimmt.

**Fortsetzung Beispiel 2.1:**

Der Goldner-Harary Graph hat 27 Kanten und  $girth = 3$ . Somit kann eine maximale Kreispackung höchstens aus

$$\frac{|E(\text{Goldner-Harary Graph})|}{girth} = \frac{27}{3} = 9$$

Kreisen bestehen. Die Knoten  $v_2, v_3, v_4, v_5, v_8$  und  $v_9$  haben allerdings alle einen Knotengrad von drei. Daher können diese Knoten jeweils in höchstens einem Kreis enthalten sein. Zudem existiert keine Kante  $e = (w, z) \in E(\text{Goldner-Harary Graph})$  mit  $w, z \in \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_8, v_9\}$ . Es ergibt sich für eine beliebige Kreispackung  $\bar{\mathcal{P}}$ , dass für jeden dieser Knoten mindestens eine inzidente Kante nicht in der Kantenmenge  $E(\bar{\mathcal{P}})$  enthalten ist. Es gilt somit für jede Kreispackung  $\bar{\mathcal{P}}$ , dass  $|E(\bar{\mathcal{P}})| \leq 27 - 6 = 21$ . Folglich kann eine maximale Kreispackung höchstens sieben Kreise enthalten. Betrachtet man den Graphen genauer, so stellt man fest, dass es eine Kreispackung mit sieben Kreisen gibt und die in Abbildung 2.2 dargestellte Kreispackung nicht maximal ist. Die nachfolgende Graphik 2.3 zeigt eine maximale Kreispackung des Goldner-Harary Graphen. Es gilt  $\nu(\text{Goldner-Harary Graph}) = 7$ .

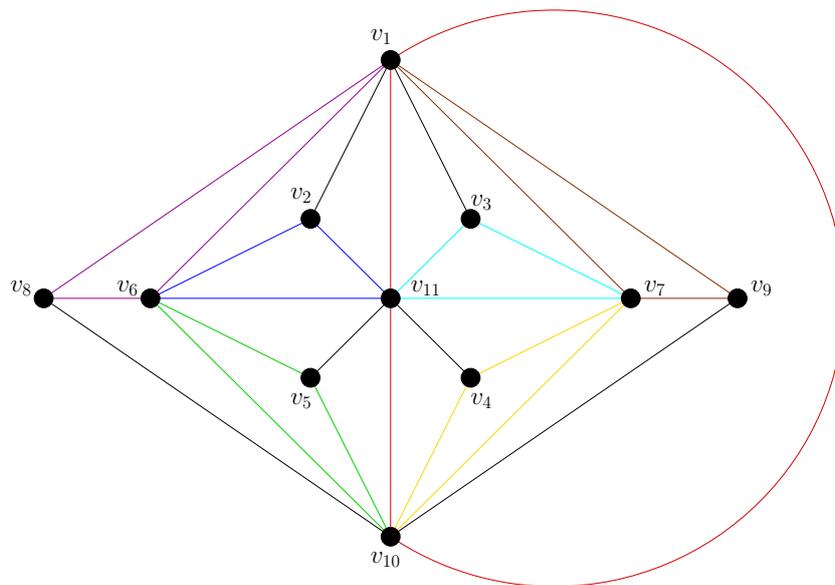


Abbildung 2.3: Eine maximale Kreispackung vom Goldner-Harary Graphen

Als zweites Beispiel wird der Coxeter Graph betrachtet (vgl. [75]). Bei der Bestimmung einer maximalen Kreispackung wird deutlich, wie wichtig oft eine „richtige“ graphische Darstellung eines Graphen ist.

**Beispiel 2.2:**

Eine graphische Darstellung des Coxeter Graphen ist in Abbildung 2.4 zu finden.

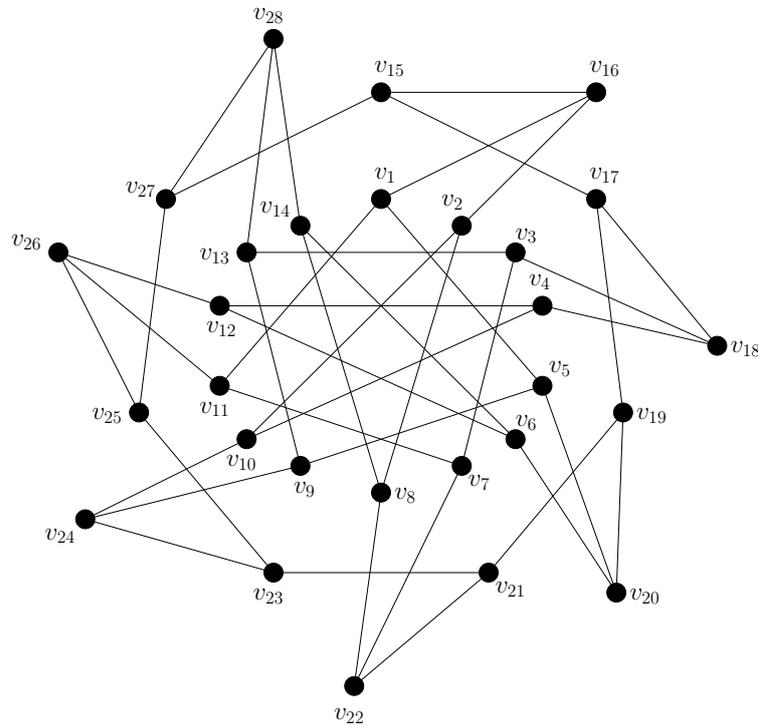


Abbildung 2.4: Der Coxeter Graph

Der Graph hat 28 Knoten und 42 Kanten. Zudem ist  $girth = 7$  bekannt. Da der Graph 3-regulär ist, kann jeder Knoten nur in maximal einem Kreis enthalten sein. Somit gilt

$$\nu(\text{Coxeter Graph}) \leq \frac{|V|}{girth} = 4.$$

Betrachtet man den Coxeter Graphen in Abbildung 2.4 genauer, so hat man auf den ersten Blick den Eindruck, dass es zwar eine klare graphische Struktur gibt, diese aber wenig Ansatzpunkte für die Konstruktion einer maximalen Kreispackung liefert. Es ist allerdings bei der Konstruktion maximaler Kreispackungen häufig wichtig, welche graphische Darstellung eines Graphen gewählt wurde. In der nachfolgenden Abbildung 2.5 ist ebenfalls der Coxeter Graph dargestellt. Die Knoten und Kanten sind jedoch anders angeordnet.

In der alternativen Darstellung in Abbildung 2.5 erkennt man intuitiv drei Kreise. Diese sind in Abbildung 2.6 farbig markiert.

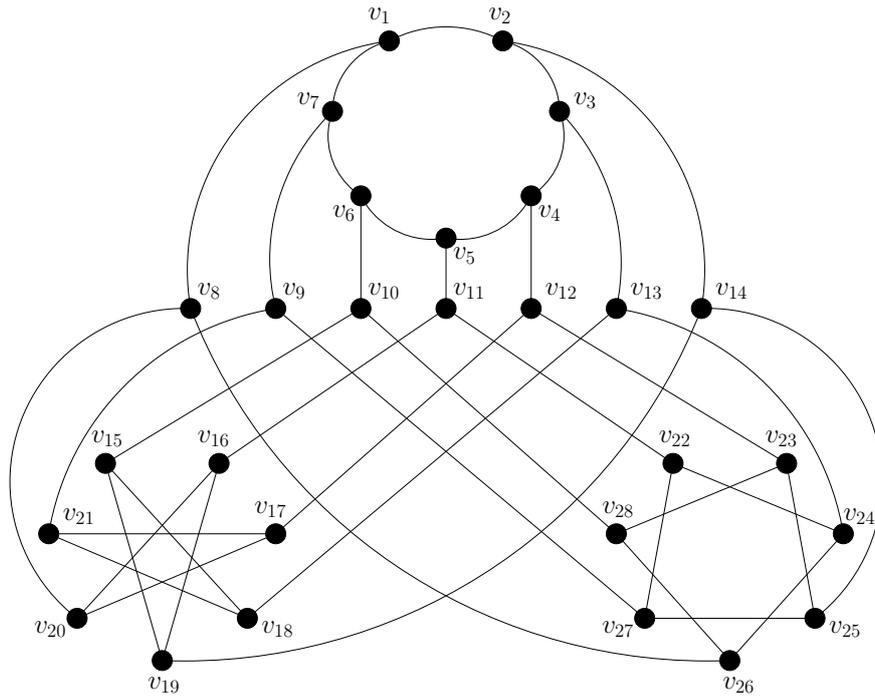


Abbildung 2.5: Der Coxeter Graph in einer alternativen Darstellung

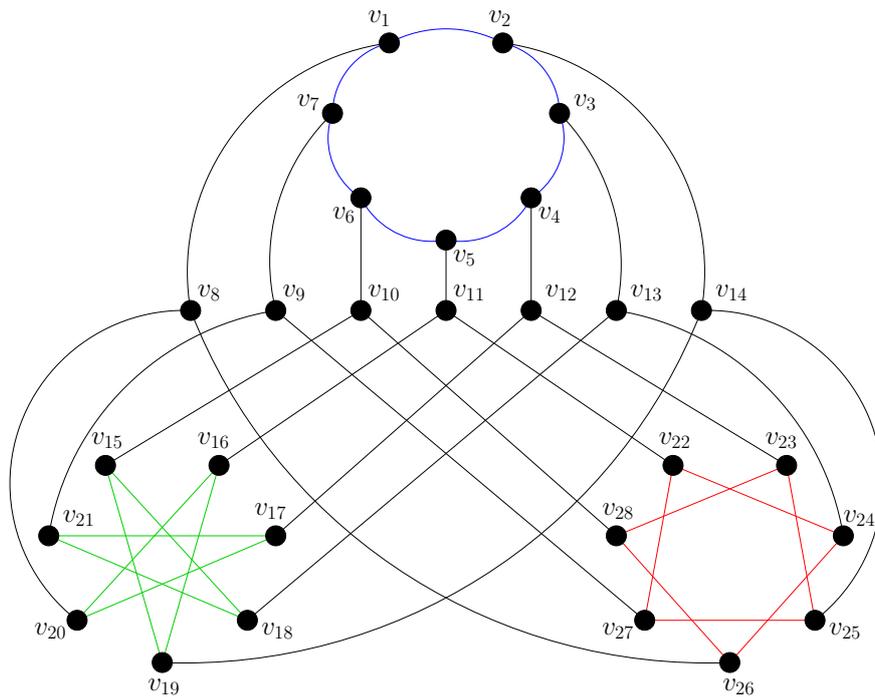


Abbildung 2.6: Eine Kreispackung im Coxeter Graphen

Bildet man eine Kreispackung mit den drei farbig markierten Kreisen, lässt sich diese durch keinen weiteren Kreis mehr vergrößern. Es stellt sich wiederum die Frage, ob diese

Kreispackung maximal ist, bzw. ob es eine Kreispackung mit vier Kreisen gibt.

Um diese Frage zu beantworten, muss man die Struktur des Graphen genauer untersuchen. Wie zuvor erwähnt, ist der Coxeter Graph 3-regulär. Folglich kann jeder Knoten höchstens in einem Kreis enthalten sein. Da des weiteren  $|V| = 28$  und  $girth = 7$  gilt, müssen in einer Kreispackung mit vier Kreisen alle Kreise eine Länge von sieben haben und jeder Knoten in genau einem Kreis enthalten sein. Man betrachte die Knoten des rot markierten Kreises  $C_1 = (v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}, v_{26}, v_{27}, v_{28})$  (vgl. Abb. 2.6). Ein Kreis der Länge sieben, welcher mindestens einen Knoten der Menge  $\{v_{22}, v_{23}, \dots, v_{28}\}$  enthält, muss entweder genau zwei Knoten der Menge enthalten oder alle sieben. Sei  $\hat{\mathcal{P}}$  eine Kreispackung mit einem Kreis  $C \in \hat{\mathcal{P}}$ , für den gilt, dass  $|V(C) \cap \{v_{22}, v_{23}, \dots, v_{28}\}| = 2$ . Dann gibt es einen Knoten  $w \in \{v_{22}, v_{23}, \dots, v_{28}\}$  mit  $w \notin V(\hat{\mathcal{P}})$  und es folgt  $|\hat{\mathcal{P}}| \leq 3$ . In einer Kreispackung mit vier Kreisen muss folglich der Kreis  $C_1$  enthalten sein. Mit der gleichen Argumentation muss auch der grün markierte Kreis  $C_2 = (v_{15}, v_{18}, v_{21}, v_{17}, v_{20}, v_{16}, v_{19})$  in einer Kreispackung mit vier Kreisen enthalten sein. Enthält eine Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}$  die Kreise  $C_1$  und  $C_2$ , folgt  $\{v_8, v_9, \dots, v_{14}\} \not\subseteq V(\tilde{\mathcal{P}})$ . Es folgt  $\nu(\text{Coxeter Graph}) \leq 3$  und damit, dass die in Abbildung 2.6 dargestellte Kreispackung maximal ist und  $\nu(\text{Coxeter Graph}) = 3$  gilt.

Abschließend wird ein Graph betrachtet, welcher die Antwort auf eine praxisbezogene Fragestellung graphisch abbildet. Das Beispiel zeigt, dass es auch bei einem Graphen mit einer eindeutig definierten Knoten- und Kantenmenge, aufwendig sein kann, eine maximale Kreispackung zu bestimmen.

### **Beispiel 2.3:**

Der nachfolgende Graph entstand in den USA bei der Analyse, welche Staaten untereinander durch eine befahrbare Schnellstraße verbunden sind. Jeder Knoten stellt dabei einen amerikanischen Staat dar. Kann man von einem Staat auf einer Schnellstraße direkt, ohne einen dritten Staat zu passieren, in einen anderen Staat gelangen, so werden die entsprechenden zwei Knoten durch eine Kante verbunden. Der resultierende Contiguous USA Graph ist in Abbildung 2.7 dargestellt (vgl. [56]).

Dieser Graph hat 49 Knoten und 107 Kanten. Er ist nicht  $r$ -regulär und es gilt  $girth = 3$ . Damit folgt, dass die Kreispackungszahl nach oben durch  $\frac{107}{3} = 35\frac{2}{3}$  beschränkt ist. Für die Konstruktion einer maximalen Kreispackung kann der Knoten  $v_{ME}$  und die zu ihm inzidente Kante bei der weiteren Betrachtung vernachlässigt werden, da ein Knoten  $v_i$  mit  $\delta(v_i) = 1$  in keinem Kreis enthalten sein kann. Konstruiert man eine Kreispackung, welche ausschließlich aus Kreisen der Länge drei besteht, so könnte sich die in Abbildung 2.8 dargestellte Kreispackung  $\bar{\mathcal{P}}$  ergeben.

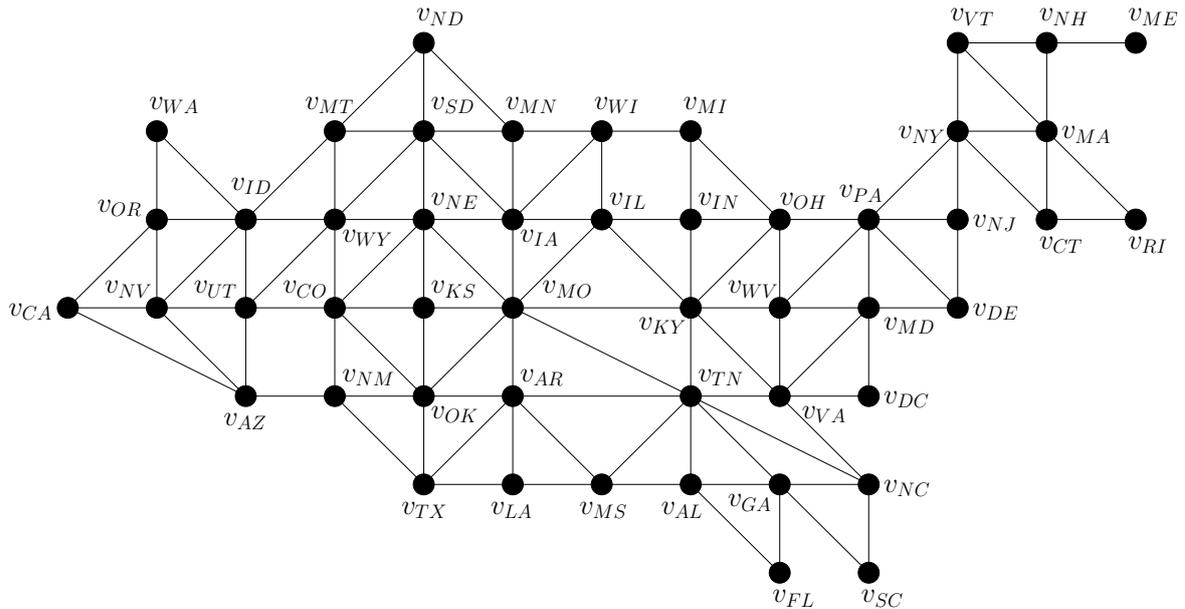


Abbildung 2.7: Der Contiguous USA Graph

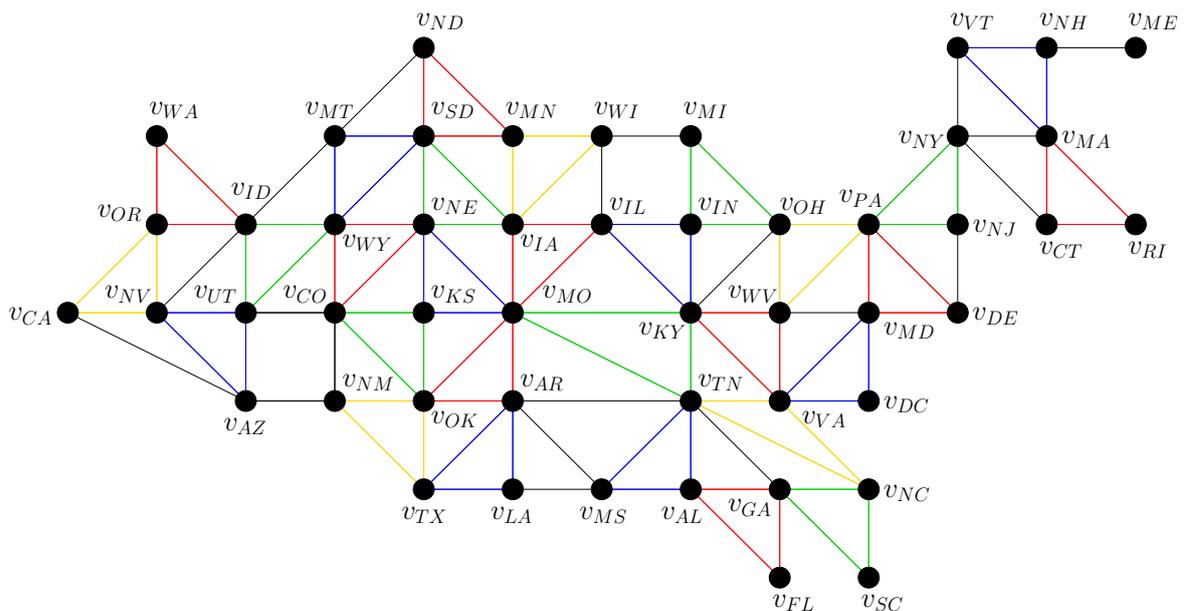


Abbildung 2.8: Eine Kreispackung im Contiguous USA Graphen

Diese Kreispackung enthält 29 Kreise. Auf Grund der großen Differenz zur oberen Schranke von 35 Kreisen, könnte man vermuten, dass diese Kreispackung nicht maximal ist. Es wird allerdings nachfolgend gezeigt, dass  $\nu(\text{Contiguous USA Graphen}) = 29$  gilt. Dies erfolgt, indem die obere Schranke für  $\nu(\text{Contiguous USA Graphen})$  sukzessive verschärft wird.

Bei genauerer Betrachtung des Graphen, stellt man fest, dass die in Abbildung 2.9 rot markierten Knoten alle einen ungeraden Knotengrad haben.

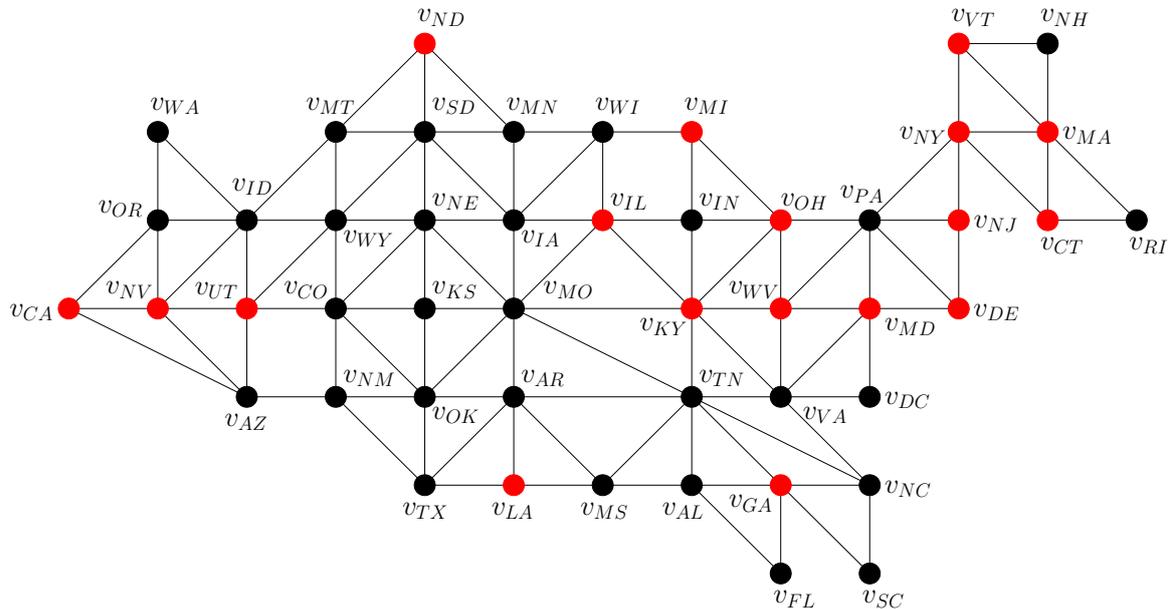


Abbildung 2.9: Die Knoten ungeraden Grades im Contiguous USA Graphen

Es sind 18 Knoten mit ungeradem Knotengrad. Bestenfalls sind immer zwei dieser Knoten adjazent. Daher sind mindestens neun Kanten nicht in der Kantenmenge einer maximalen Kreispackung enthalten. Folglich besteht eine solche Kantenmenge höchstens aus  $106 - 9 = 97$  Kanten. Daraus ergibt sich eine neue verschärfte obere Schranke für  $\nu(\text{Contiguous USA Graphen})$  von 32 Kreisen. Im Folgenden wird diese obere Schranke weiter verschärft, indem zusätzliche Kantenmengen bestimmt werden, welche in einer maximalen Kreispackung nicht enthalten sein können.

Untersucht man die Knoten mit ungeradem Knotengrad genauer, sieht man, dass beispielsweise der Knoten  $v_{ND}$  mit keinem anderen rot markierten Knoten adjazent ist. Gleiches gilt für die Knoten  $v_{GA}$  und  $v_{LA}$ . Dennoch ist, auf Grund des ungeraden Knotengrades, mindestens eine mit  $v_{ND}$  inzidente Kante nicht in der Kantenmenge einer maximalen Kreispackung enthalten. Alle mit  $v_{ND}$  adjazenten Knoten weisen aber einen geraden Knotengrad auf. Damit folgt, dass es bei der Betrachtung einer maximalen Kreispackung immer mindestens einen mit  $v_{ND}$  adjazenten Knoten  $v_i$  ( $i \in \{MT, SD, MN\}$ ) gibt, für den gilt, dass mindestens zwei mit  $v_i$  inzidente Kanten nicht in der Kantenmenge der maximalen Kreispackung enthalten sind. Durch fortführen dieser Überlegung erhält man einen Weg von  $v_{ND}$  zu einem anderen Knoten ungeraden Grades, dessen Kanten nicht in der Kantenmenge der maximalen Kreispackung enthalten sind. Analog gilt dies für die Knoten  $v_{GA}$  und  $v_{LA}$ . Um die Höchstzahl von Kanten abzuschätzen, welche in der

Kantenmenge einer maximalen Kreispackung enthalten sein können, ist es notwendig, die kürzesten Wege der drei Knoten  $v_{ND}$ ,  $v_{GA}$  und  $v_{LA}$  zu allen anderen Knoten mit ungeradem Knotengrad zu bestimmen.

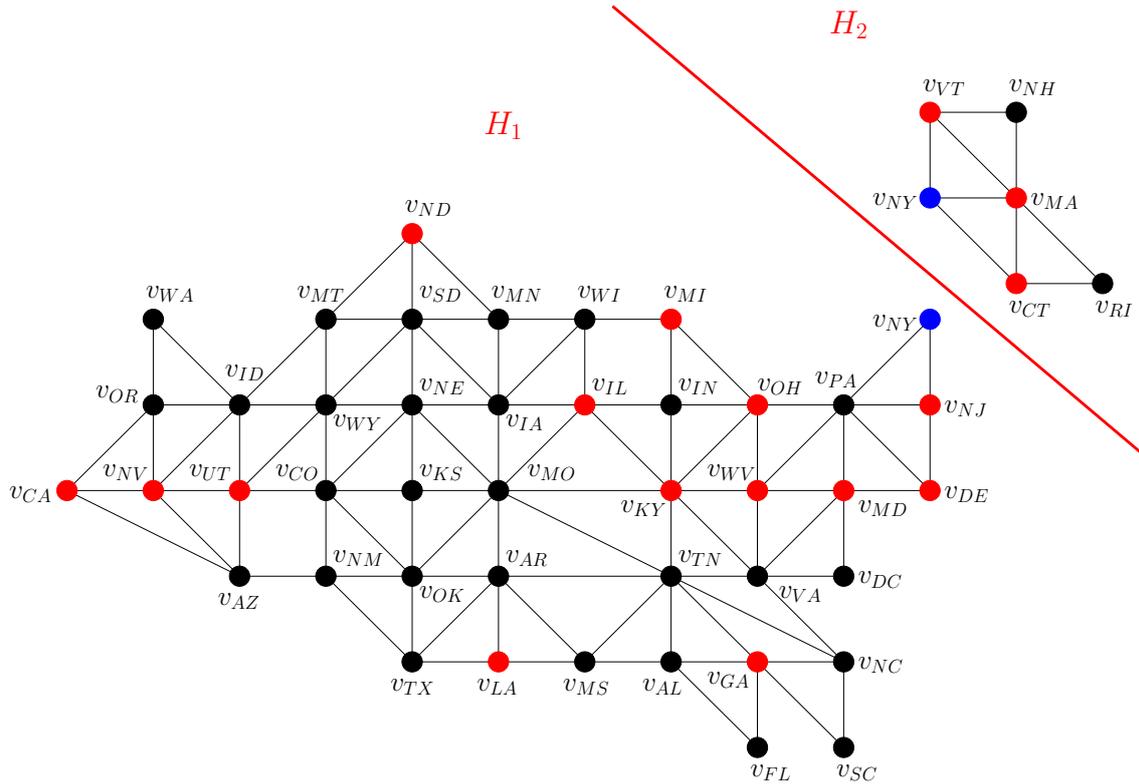
Betrachtet man den Knoten  $v_{ND}$  und alle Wege von  $v_{ND}$  zu einem beliebigen anderen Knoten mit ungeradem Knotengrad (in Abb. 2.9 rot markiert), so haben diese alle eine Mindestlänge von drei. Das bedeutet, dass die Kanten eines Weges von  $v_{ND}$  zu einem anderen Knoten ungeraden Grades mit einer Mindestlänge von drei nicht in der Kantenmenge einer maximalen Kreispackung enthalten sind. Gleiches gilt für die Kanten eines Weges von  $v_{LA}$  bzw.  $v_{GA}$  zu einem anderen Knoten ungeraden Grades. Diese Wege haben ebenfalls eine Mindestlänge von drei. Da der Weg  $W_1 = (v_{LA}, v_{MS}, v_{AL}, v_{GA})$  von  $v_{LA}$  nach  $v_{GA}$  die Länge drei hat, ist es nicht notwendig für  $v_{LA}$  und  $v_{GA}$  zwei separate Wege zu betrachten. Insgesamt muss man somit zwei Wege der Länge drei berücksichtigen. Für jeden dieser Wege wurde zuvor eine Kante von den 106 Kanten abgezogen. Folglich kann die Kantenmenge einer optimalen Kreispackung höchstens  $97 + 2 - 3 - 3 = 93$  Kanten enthalten, womit sich erneut eine schärfere obere Schranke für die Kreispackungszahl von 31 Kreisen ergibt.

Für eine weitere Analyse kann man sich auf die Betrachtung zweier kantendisjunkter Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$  des Contiguous USA Graphen beschränken (vgl. Abb. 2.10).

Die beiden dargestellten Graphen  $H_1$  und  $H_2$  haben lediglich einen gemeinsamen Knoten  $v_{NY}$  und keine gemeinsamen Kanten. Daraus folgt, dass es keinen Kreis im Contiguous USA Graphen gibt, welcher Kanten aus  $E(H_1)$  und  $E(H_2)$  enthält. Der Graph  $H_2$  ist ein kleiner Graph (wenige Knoten und Kanten) und man sieht, dass  $\nu(H_2) = 2$  gilt. Der Graph  $H_1$  hat noch 43 Knoten, wovon 14 einen ungeraden Knotengrad haben. Zudem hat  $H_1$  noch 97 Kanten. Daraus ergibt sich  $\nu(H_1) \leq \frac{97-7+2-3-3}{3} = 28\frac{2}{3}$  und somit  $\nu(\text{Contiguous USA Graph}) \leq 30$ .

Für die weitere Betrachtung des Graphen  $H_1$  sei angenommen, dass eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H_1)$  mit 28 Kreisen existiert. Dies wird nachfolgend durch eine sukzessive Verschärfung der oberen Schranke für  $\nu(H_1)$  widerlegt. Eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H_1)$  mit  $|\mathcal{P}(H_1)| = 28$  muss aus mindestens 26 Kreisen der Länge drei bestehen. Sie enthält zudem höchstens einen Kreis der Länge fünf oder zwei Kreise der Länge vier. Gilt für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}(H_1)$ , dass  $d(C) = 3$ , existieren zwei Kanten  $\tilde{e}$  und  $\hat{e}$  mit  $\tilde{e}, \hat{e} \notin E(\mathcal{P}(H_1))$ .

Man nehme zunächst an, dass die Kante  $e_1 = (v_{CA}, v_{NV})$  nicht in der Kantenmenge  $E(\mathcal{P}(H_1))$  enthalten ist. In diesem Fall sind drei Möglichkeiten zu betrachten. Es gilt entweder  $v_{CA} \notin V(\mathcal{P}(H_1))$  oder  $v_{CA} \in V(\mathcal{P}(H_1))$  und  $v_{CA}$  liegt in einem Kreis der Länge

Abbildung 2.10: Der Contiguous USA Graphen mit zwei Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$ 

vier oder fünf. Zunächst sei angenommen, dass  $v_{CA} \notin V(\mathcal{P}(H_1))$  gilt. In diesem Fall folgt  $(v_{CA}, v_{NV}), (v_{CA}, v_{OR}), (v_{CA}, v_{AZ}) \notin E(\mathcal{P}(H_1))$ . Auf Grund des ungeraden Knotengrades wurde bereits zuvor angenommen, dass eine dieser Kanten nicht in  $E(\mathcal{P}(H_1))$  liegt. Es ergibt sich  $\nu(H_1) \leq \frac{97-7+2-3-3-2}{3} = 28$  und alle Kreise in  $\mathcal{P}(H_1)$  haben eine Länge von drei. Des weiteren ist mindestens eine Kante der Menge  $\{(v_{OR}, v_{WA}), (v_{OR}, v_{ID}), (v_{OR}, v_{NV})\}$  nicht in  $E(\mathcal{P}(H_1))$  enthalten. Auf Grund der Maximalität von  $\mathcal{P}(H_1)$ , folgt  $(v_{OR}, v_{NV}) \in E(\mathcal{P}(H_1))$ . Zudem gilt  $(v_{OR}, v_{ID}) \in E(\mathcal{P}(H_1))$ , da andernfalls  $v_{WA}$  in einem Kreis mit einer Mindestlänge von vier enthalten oder  $\mathcal{P}(H_1)$  nicht maximal wäre. Es folgt  $(v_{OR}, v_{WA}), (v_{WA}, v_{ID}) \notin E(\mathcal{P}(H_1))$  und  $v_{WA} \notin V(\mathcal{P}(H_1))$ . Es ist möglich, dass in  $E(H_1) \setminus E(\mathcal{P}(H_1))$  ein Weg von  $v_{CA}$  nach  $v_{ND}$  der Länge fünf existiert, welcher den Knoten  $v_{WA}$  und die Kante  $(v_{CA}, v_{OR})$  enthält. In diesem Fall wird die maximale Anzahl in  $E(\mathcal{P}(H_1))$  enthaltener Kanten um eins verringert. Andernfalls verringert sich die Anzahl um zwei. Daher ergibt sich  $\nu(H_1) \leq \frac{97-7+2-3-3-2-1}{3} = 27\frac{2}{3}$  und somit ein Widerspruch. Es folgt  $v_{CA} \in V(\mathcal{P}(H_1))$ . Sei zunächst angenommen, dass  $v_{CA}$  in einem Kreis  $C_1$  der Länge vier enthalten ist. Dann gilt  $v_{CA} \in V(C_1)$  mit  $C_1 = (v_{CA}, v_{OR}, v_{NV}, v_{AZ})$  und  $C_1 \in \mathcal{P}(H_1)$ . Allerdings kann man in diesem Fall den Kreis  $C_1$  durch den Kreis  $\tilde{C}_1 = (v_{CA}, v_{OR}, v_{NV})$  mit  $e_1 \in E(\tilde{C}_1)$  ersetzen, ohne die Kreisanzahl in der Kreispackung zu verringern, d.h.  $\mathcal{P}_{neu}(H_1) = (\mathcal{P}(H_1) \setminus \{C_1\}) \cup \{\tilde{C}_1\}$  mit  $|\mathcal{P}_{neu}(H_1)| = |\mathcal{P}(H_1)|$ . Abschlie-

ßend sei nun angenommen, dass  $v_{CA}$  in einem Kreis  $\hat{C}_1$  der Länge fünf enthalten ist. Alle übrigen Kreise in  $\mathcal{P}(H_1)$  haben eine Länge von drei. Es gilt  $(v_{CA}, v_{OR}), (v_{CA}, v_{AZ}) \in E(\hat{C}_1)$ . Des weiteren muss  $(v_{OR}, v_{NV})$  in der Menge  $E(\hat{C}_1)$  enthalten sein, da andernfalls  $v_{WA}$  in einem Kreis mit einer Mindestlänge von vier oder nicht in  $V(\mathcal{P}(H_1))$  liegt. Damit kann der Kreis  $\hat{C}_1$  analog zum vorherigen Fall durch den Kreis  $\tilde{C}_1 = (v_{CA}, v_{OR}, v_{NV})$  mit  $e_1 \in E(\tilde{C}_1)$  ersetzt werden. Es ergibt sich, dass  $v_{CA} \in V(\mathcal{P}(H_1))$  gilt und man o. B. d. A.  $e_1 \in E(\mathcal{P}(H_1))$  annehmen kann.

Der Knoten  $v_{CA}$  hat einen ungeraden Knotengrad und  $W_2 = (v_{CA}, v_{NV})$  ist der einzige Weg der Länge eins zu einem anderen Knoten mit ungeradem Knotengrad. Somit ergibt sich, dass die Kanten eines Weges zwischen  $v_{CA}$  und einem anderen Knoten ungeraden Grades mit einer Mindestlänge von zwei nicht in der Kantenmenge  $E(\mathcal{P}(H_1))$  enthalten sind. Es folgt  $\nu(H_1) \leq \frac{97-7+2-3-3+1-2}{3} = 28\frac{1}{3}$ . Da die Anzahl der Kanten, welche in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}(H_1)$  enthalten sein können, um eine weitere Kante verringert wurde, folgt, dass  $\mathcal{P}(H_1)$  keinen Kreis der Länge fünf und höchstens einen Kreis der Länge vier hat. Hat jeder Kreis  $C \in \mathcal{P}(H_1)$  eine Länge  $d(C) = 3$ , gibt es genau eine Kante  $\tilde{e}$  mit  $\tilde{e} \notin E(\mathcal{P}(H_1))$ .

Im nächsten Schritt sei angenommen, dass der Kreis  $C_2 = (v_{UT}, v_{AZ}, v_{NM}, v_{CO})$  mit  $d(C_2) = 4$  in der Kreispackung  $\mathcal{P}(H_1)$  enthalten ist. Dies wird nachfolgend widerlegt. Gilt  $C_2 \in \mathcal{P}(H_1)$ , folgt für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}(H_1)$  mit  $C \neq C_2$ , dass  $d(C) = 3$  ist. Zudem sind lediglich die  $7 - 2 + 3 + 3 - 1 + 2 = 12$  Kanten, welche vorab, auf Grund des ungeraden Knotengerades abgezogen wurden, nicht in  $E(\mathcal{P}(H_1))$ . Alle übrigen Kanten sind mit einem Knoten mit einem geraden Knotengrad inzident und in  $E(\mathcal{P}(H_1))$  enthalten. Daraus ergibt sich, dass alle in Abbildung 2.11 farbig gekennzeichneten Kreise in  $\mathcal{P}(H_1)$  liegen müssen.

Betrachtet man die übrigen Kanten (schwarz markiert), so folgt, dass ein kürzester Weg zwischen  $v_{UT}$  und einem anderen Knoten ungeraden Grades, dessen Kanten nicht in  $E(\mathcal{P}(H_1))$  liegen, eine Mindestlänge von vier hat. Damit gilt allerdings  $|\mathcal{P}(H_1)| \leq 27$ , was ein Widerspruch zur Annahme  $|\mathcal{P}(H_1)| = 28$  ist. Es folgt, dass  $C_2 \notin \mathcal{P}(H_1)$ . Dadurch ergibt sich allerdings, dass  $e_2 = (v_{AZ}, v_{NM}) \notin E(\mathcal{P}(H_1))$ , da  $e_2$  andernfalls in einem Kreis mit einer Mindestlänge von fünf enthalten wäre.

Sei nun angenommen, dass der Kreis  $C_3 = (v_{CA}, v_{AZ}, v_{NV})$  in  $\mathcal{P}(H_1)$  liegt. Damit ist  $e_3 = (v_{UT}, v_{AZ}) \notin E(\mathcal{P}(H_1))$ . Analog zu den vorherigen Überlegungen für den Knoten  $v_{ND}$ , existiert in  $E(H_1) \setminus E(\mathcal{P}(H_1))$  ein Weg  $W$  von  $v_{UT}$  zu einem anderen Knoten ungeraden Grades, für den gilt  $e_2, e_3 \in E(W)$ . Ein solcher Weg hat mindestens eine Länge von vier, da der kürzeste Weg von  $v_{UT}$  zu einem anderen Knoten ungeraden Knotengrades, welcher die Kanten  $e_2$  und  $e_3$  enthält, von  $v_{UT}$  nach  $v_{LA}$  geht. Zudem hat dann der

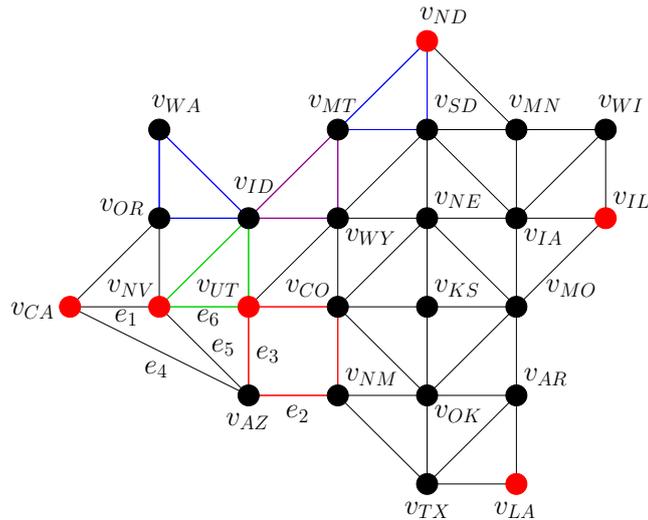


Abbildung 2.11: Kreise einer speziellen Kreispackung  $\mathcal{P}(H_1)$  im Contiguous USA Graphen

kürzeste Weg zwischen  $v_{GA}$  (vgl. Abb. 2.10) und einem anderen Knoten ungeraden Grades, dessen Kanten nicht in  $E(\mathcal{P}(H_1))$  liegen, eine Mindestlänge von zwei. Damit ergibt sich  $|\mathcal{P}(H_1)| \leq 27$ . Dies ist ein Widerspruch und es folgt  $C_3 \notin \mathcal{P}(H_1)$ . Man erhält weiterhin, dass  $\tilde{C}_1 = (v_{CA}, v_{OR}, v_{NV}) \in \mathcal{P}(H_1)$  und  $e_4 = (v_{CA}, v_{AZ}) \notin E(\mathcal{P}(H_1))$  ist. Damit ergibt sich mit  $e_5 = (v_{NV}, v_{AZ})$  auch  $e_3, e_5 \in E(\mathcal{P}(H_1))$ , da  $\nu(H_1) \leq 28\frac{1}{3}$ .

Da man weiß, dass  $e_2, e_4 \notin E(\mathcal{P}(H_1))$ , folgt, dass diese beiden Kanten auf einem Weg von  $v_{CA}$  zu einem anderen Knoten ungeraden Grades liegen, dessen Kanten nicht in  $E(\mathcal{P}(H_1))$  sind. Dieser Weg entspricht dem Weg  $W_3 = (v_{CA}, v_{AZ}, v_{NM}, v_{TX}, v_{LA})$ . Da zuvor ein Weg von  $v_{LA}$  nach  $v_{GA}$  aus der potentiellen Kantenmenge für  $\mathcal{P}(H_1)$  herausgenommen wurde, ist es nun notwendig den Knoten  $v_{GA}$  (vgl. Abb. 2.10) erneut zu betrachten. Es ergibt sich, dass der kürzeste Weg von  $v_{GA}$  zu einem anderen Knoten ungeraden Grades, dessen Kanten nicht in  $E(\mathcal{P}(H_1))$  liegen, eine Mindestlänge von zwei hat. Dies führt zu  $|\mathcal{P}(H_1)| \leq \frac{97-7+2-3-4+1-2}{3} = 28$ . Es folgt, dass  $\mathcal{P}(H_1)$  ausschließlich aus Kreisen der Länge drei besteht.

Da  $e_3, e_5 \in E(\mathcal{P}(H_1))$ , folgt  $e_6 = (v_{NV}, v_{UT}) \in E(\mathcal{P}(H_1))$ . Damit erhält man, dass der kürzeste Weg von  $v_{NV}$ , bzw.  $v_{UT}$ , zu einem anderen Knoten ungeraden Grades, dessen Kanten nicht in  $E(\mathcal{P}(H_1))$  liegen, eine Mindestlänge von zwei hat und damit  $|\mathcal{P}(H_1)| \leq 27$  gilt.

Insgesamt ergibt sich, dass keine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H_1)$  mit 28 Kreisen in  $H_1$  existiert. Es folgt  $\nu(H_1) \leq 27$ . Damit ergibt sich  $\nu(\text{Contiguous USA Graph}) \leq 29$  und die Kreispackung in Abbildung 2.8 ist eine maximale Kreispackung.

In den drei vorgestellten Beispielen sieht man, dass es für bestimmte Graphen möglich ist, eine maximale Kreispackung herzuleiten, indem man verschiedene Eigenschaften der Graphen ausnutzt. Das zweite Beispiel zeigt, wie wichtig die graphische Darstellung für das Erkennen von Kreisen sein kann. Im letzten Beispiel wird deutlich, dass die Bestimmung einer maximalen Kreispackung auch für einen konkreten Graphen sehr aufwendig sein kann. Bevor maximale Kreispackungen in der Theorie weiter betrachtet werden, soll zunächst die Frage nach dem praktischen Nutzen von maximalen Kreispackungen und der Kreispackungszahl beantwortet werden.

Ein erster praktischer Nutzen wurde im Rahmen der Aufteilung eines großen Postgebietes auf verschiedene Briefträger in der Einleitung bereits vorgestellt. Eine ähnliche Problemstellung könnte sich im Rahmen der Planung von Fernbusreisen beispielsweise in den USA ergeben. Man stelle sich ein Unternehmen vor, welches Fernbusreisen in den USA durch verschiedene Staaten anbieten möchte. Das Unternehmen hat zehn Busse zur Verfügung und diese sollen derart geplant werden, dass jeder Bus von einem noch nicht festgelegten Standort aus eine Rundreise durch verschiedene Staaten macht. Die Bustouren sollen nicht identisch sein, sondern insgesamt möglichst viele Staaten der USA abdecken. Für eine erste Grobplanung möchte sich das Unternehmen einen Plan der Staaten anschauen, auf dem verzeichnet ist, von welchem Staat man gut über eine Straße zum nächsten Nachbarstaat gelangt. Wie aus Beispiel 2.4 bekannt ist, wird ein solcher Plan graphisch z. B. durch den Contiguous USA Graphen dargestellt. Das Unternehmen möchte nun anhand dieses Planes „grob“ die zehn Touren festlegen. Eine heuristische Vorgehensweise dazu könnte sein, aus dem Graphen unter Verwendung der Kreise einer maximalen Kreispackung zehn kantendisjunkte zusammenhängende Teilgraphen zu bilden. Jeder Teilgraph repräsentiert eine Menge von Staaten und Straßen, durch welche anschließend eine Tour geplant wird. Die nachfolgende Abbildung 2.12 zeigt beispielhaft zehn Teilgraphen des Contiguous USA Graphen. Jeder Teilgraph entspricht der Vereinigung von drei (bzw. zwei) Kreisen der maximalen Kreispackung aus Abbildung 2.8.

Jeder Teilgraph könnte als Grundlage zur Konstruktion einer Tour durch die Staaten, den Knoten des Teilgraphen entsprechend, genutzt werden.

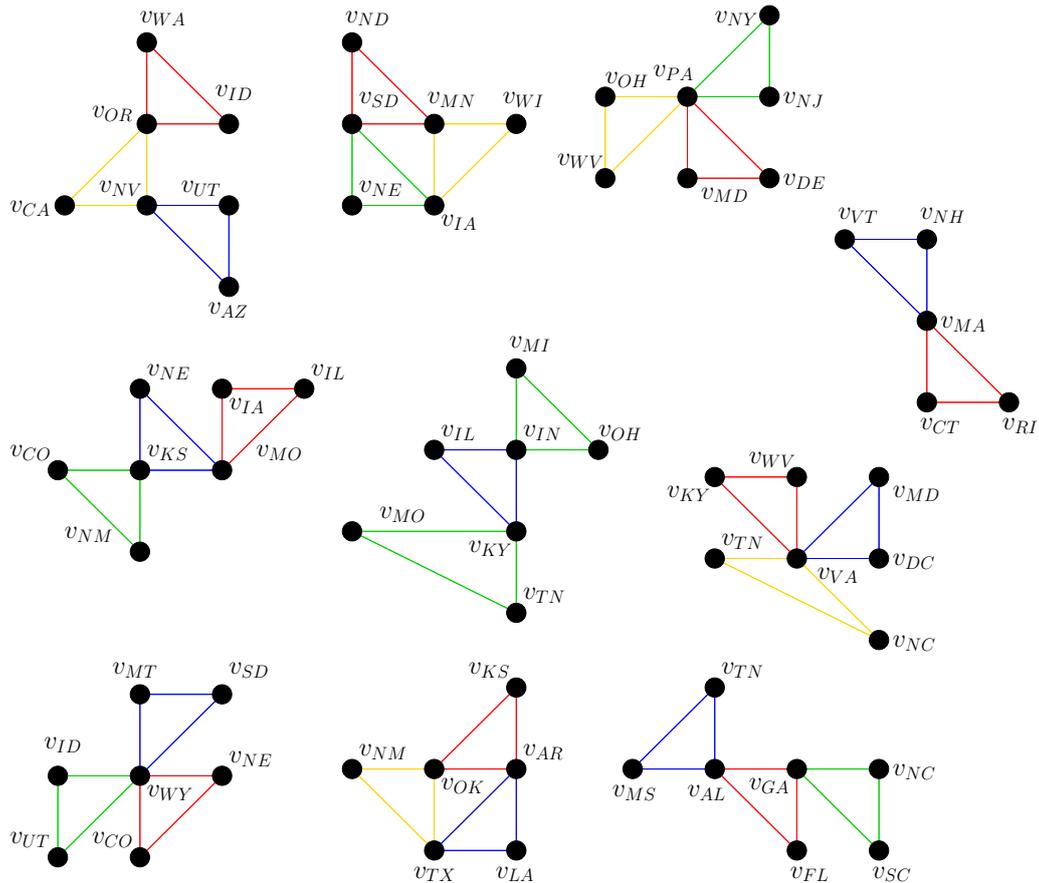


Abbildung 2.12: Zehn Teilgraphen des Contiguous USA Graphen

Im nachfolgenden Unterkapitel werden drei weitere Problemstellungen vorgestellt, für deren Lösung die Bestimmung einer maximalen Kreispackung oder der Kreispackungszahl von Nutzen ist.

## 2.2 Drei praxisbezogene Problemstellungen

In der Literatur (siehe [7] und [15]) wird häufig eine sehr bekannte Problemstellung beschrieben, für deren Lösung eine maximale Kreispackung in einem speziellen, für diese Problemstellung konstruierten, Graphen genutzt werden kann. Es handelt sich um das so genannte Sorting by Reversals, welches im Zusammenhang mit dem Genome Rearrangement Problem auftaucht. Beide Problemstellungen werden im ersten Unterkapitel erläutert. Im zweiten Unterkapitel wird eine Problemstellung im Zusammenhang mit optischen Netzwerken vorgestellt, welche besonders interessant ist, da die in Kapitel 4 beschriebenen generalisierten Petersen Graphen als Topologien für Verbindungsnetzwerke

genutzt werden. Abschließend werden im letzten Unterkapitel Problemstellungen im Rahmen von Spontaneous Postman Problemen vorgestellt.

## 2.2.1 Genome Rearrangement und Sorting by Reversals

Das Genome Rearrangement Problem ist eine Problemstellung, welche in der Molekularbiologie im Rahmen der Konstruktion evolutionärer Bäume auftaucht. Solche Bäume werden erstellt, um den genetischen Verwandtschaftsgrad verschiedener Lebewesen abzubilden. Dieser genetische Verwandtschaftsgrad wird dabei in einer „Distanz“ angegeben, welche durch den Vergleich der Gensequenzen zweier Lebewesen ermittelt wird. Motiviert wurde die Untersuchung solcher Gensequenzen 1984 durch Nedeau und Taylor in [69], welche sich mit dem Vergleich der Gensequenzen eines Menschen und einer Maus beschäftigten.

In der Genetik gibt es die Annahme, dass die DNA aller Lebewesen auf einen gemeinsamen Ursprung zurückgeführt werden kann. Betrachtet man ein einzelnes Lebewesen, so enthält jede Zelle dieses Lebewesens seine gesamten Erbinformationen, das so genannte *Genom*. Bei höher entwickelten Wesen, beispielsweise einem Menschen, ist die gesamte Erbinformation im Kern einer Zelle in der Form von *Chromosomen* zu finden. Diese bestehen aus einer DNA-Doppelhelix, also zwei umeinander gewundenen, miteinander verbundenen Strängen von so genannten Basen. Ein *Gen* ist ein Teil des DNA-Stranges. Im Zusammenhang mit der Erforschung genetischer Verwandtschaftsverhältnisse verschiedener Lebewesen wird angenommen, dass es einen speziellen DNA-Strang gibt, aus welchem die DNA-Stränge aller Lebewesen durch so genannte Mutationen hervorgegangen sind. Unter einer *Mutation* versteht man in diesem Zusammenhang eine sequenzielle Veränderung einer Genabfolge. Im Rahmen des *Genome Rearrangement* betrachtet man die Genstränge zweier verschiedener Lebewesen und überführt den Genstrang des einen Lebewesens durch verschiedene Mutationen in den Genstrang des anderen Lebewesens. Ein *Reversal* beschreibt dabei die Umkehr einer Teilabfolge der Gene eines gegebenen Genstranges. Im Allgemeinen ist es bei zwei gegebenen Gensträngen nicht möglich, den einen Genstrang in den anderen durch genau ein Reversal zu überführen. Dieser Sachverhalt wird in dem nachfolgenden Beispiel deutlich.

### ***Beispiel 2.4:***

Gegeben seien die zwei Gensequenzen  $a$  und  $i$ , welche beide aus den gleichen 10 Genen in unterschiedlicher Reihenfolge bestehen. Die beiden Gensequenzen sind in der folgenden

Abbildung 2.13 dargestellt. Dabei sind die einzelnen Gene von eins bis zehn nummeriert.

$a$	3	2	1	4	8	7	10	9	5	6
$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Abbildung 2.13: Die Gensequenzen  $a$  und  $i$

Versucht man die Gensequenz  $a$  in die Gensequenz  $i$  zu überführen, sieht man, dass dies durch die einmalige Umkehrung einer Teilabfolge der Gene, oder der ganzen Genfolge, nicht möglich ist. Es ist notwendig, mehrere Reversals hintereinander durchzuführen. Jedes Reversal entspricht dabei einer Mutation in der Fortpflanzung von einer Generation zur nächsten. Es gibt im Allgemeinen verschiedene Möglichkeiten, eine Gensequenz in eine andere zu überführen. Da die Gensequenz  $i$  der von links nach rechts aufsteigend sortierten Gensequenz der zehn Gene entspricht, kann man beispielsweise die Gensequenz  $a$  genweise sortieren und somit  $a$  in die Gensequenz  $i$  überführen. Bei diesem Vorgehen erfolgt die Überführung von  $a$  in die Gensequenz  $i$  durch fünf Reversals. Dies ist in Abbildung 2.14 veranschaulicht.

Das erste Reversal entspricht der Umkehrung der Abfolge der ersten drei Gene der Gensequenz  $a$ . In der nächsten Generation entsteht somit die Gensequenz  $a_1$ . Nach dem ersten Reversal steht das Gen Nummer eins in der Gensequenz  $a_1$  an der ersten Position. Zufällig werden die Gene Nummer 2 und 3 durch das Reversal ebenfalls an die richtigen Positionen gebracht. Das Gen Nummer 4 ist bereits in der Gensequenz  $a$  an der richtigen Position gewesen. Dies wurde durch das erste Reversal nicht verändert. Durch ein zweites Reversal muss folglich das Gen Nummer 5, welches in der Gensequenz  $a_1$  an der Position neun steht, auf die Position Nummer fünf gebracht werden. Somit entspricht das zweite Reversal der Umkehrung der Abfolge der Gene an den Positionen fünf bis neun der Gensequenz  $a_1$ . Es entsteht die Gensequenz  $a_2$  in der sich nun die Gene mit den Nummern 1 bis 5 an den richtigen Positionen befinden. Setzt man dieses Vorgehen fort, so erhält man nach dem fünften Reversal die Gensequenz  $i$ .

Wie bereits erwähnt, gibt es verschiedene Möglichkeiten eine Gensequenz in eine andere zu überführen. Dabei kann die Reihenfolge der Reversals variieren. Es können aber auch

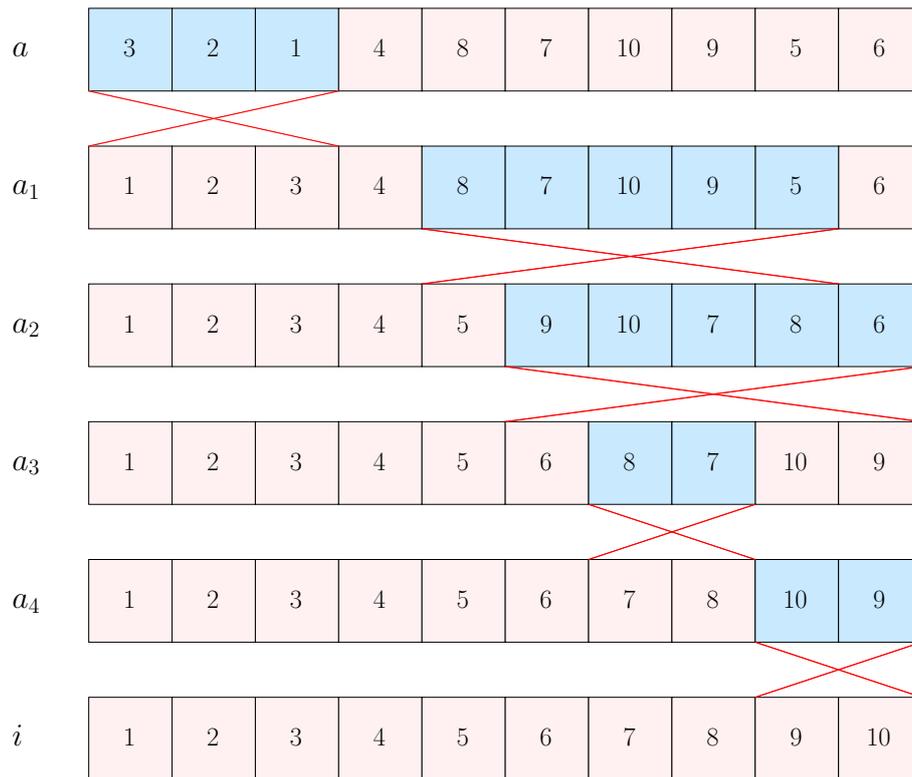


Abbildung 2.14: Die Überführung der Gensequenz  $a$  in die Gensequenz  $i$  durch fünf Reversals

andere Reversals genutzt werden. Eine alternative Möglichkeit die Gensequenz  $a$  in die Gensequenz  $i$  zu überführen ist in der nachfolgenden Abbildung 2.15 verdeutlicht.

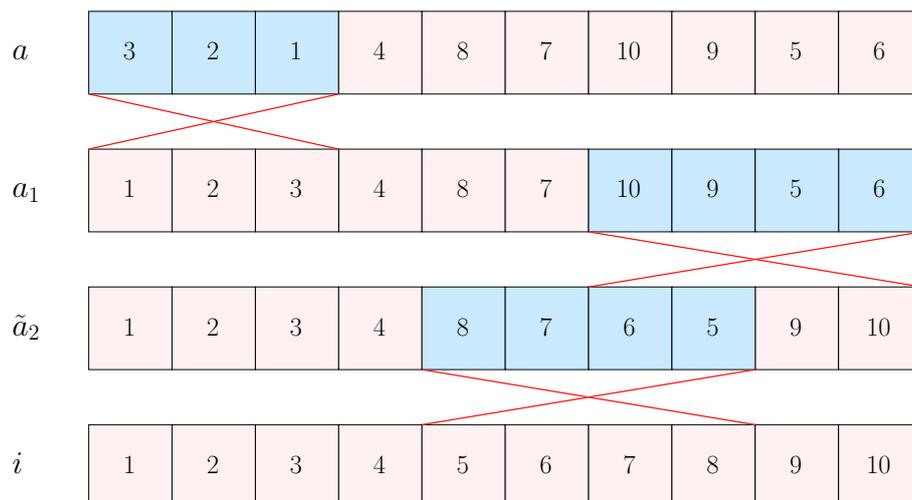


Abbildung 2.15: Die Überführung der Gensequenz  $a$  in die Gensequenz  $i$  durch drei Reversals

Das erste Reversal ist identisch zu dem in der zuvor betrachteten Möglichkeit (vgl. Abb. 2.14). Es entsteht wiederum die Gensequenz  $a_1$ . Das zweite Reversal entspricht nun der Umkehrung der Abfolge der Gene an den Positionen sieben bis zehn der Gensequenz  $a_1$ . Es entsteht die Gensequenz  $\tilde{a}_2$ , in der sich nun die Gene mit den Nummern 1 bis 4, sowie 9 und 10, an den richtigen Positionen befinden. Bei dem letzten Reversal erfolgt eine Umkehrung der Genreihenfolge der Gene der Positionen fünf bis acht in der Gensequenz  $\tilde{a}_2$ . In diesem Fall werden nur drei Reversals benötigt um die Gensequenz  $a$  in die Gensequenz  $i$  zu überführen.

Um eine Aussage über den genetischen Verwandtschaftsgrad von zwei Lebewesen mit verschiedenen Gensträngen zu treffen, betrachtet man die so genannte *Reversaldistanz*, welche die minimale Anzahl an Reversals angibt, die notwendig sind um die eine Gensequenz, im Beispiel  $a$ , in die sortierte Gensequenz  $i$  zu überführen. Die Bestimmung dieser Reversaldistanz stellt die Molekularbiologen vor eine schwere Aufgabe. In verschiedenen Papern, wird gezeigt, dass das Bestimmen der Reversaldistanz, auch *Sorting by Reversals* genannt, ein *NP*-schweres Problem ist. Vergleiche hierzu [15].

Im Allgemeinen stellt man eine *Gensequenz* von  $n$  nummerierten Genen analog zu [15] durch eine Permutation der Zahlen 1 bis  $n$  dar, das heißt  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_i, \dots, \pi_j, \dots, \pi_n)$  mit  $\pi_l \in \{1, \dots, n\}$  für alle  $l = 1, \dots, n$  und  $\pi_l \neq \pi_k$  für  $l \neq k$ . Im Beispiel 2.4 bedeutet das  $a = (3, 2, 1, 4, 8, 7, 10, 9, 5, 6)$  und  $i = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ . Ein *Reversal* wird ebenfalls durch eine Permutation  $p = (1, \dots, i-1, j, j-1, \dots, i+1, i, j+1, \dots, n)$  dargestellt. Das erste Reversal im Beispiel 2.4 entspricht der Umkehrung Abfolge der ersten drei Gene der Gensequenz  $a$  und wird dargestellt durch  $p = (3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ . Die Verknüpfung  $\pi p$  der Gensequenz  $\pi$  mit dem Reversal  $p$  erzeugt eine neue Gensequenz  $\pi p = (\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_j, \dots, \pi_i, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n)$ . Im Beispiel erzeugt  $ap$  die Gensequenz  $a_1$ . Die *Identitätspermutation* sei  $i = (1, 2, \dots, n-1, n)$ . Die *Reversaldistanz*  $d(\pi)$  wird als die minimale Anzahl an Permutationen  $\{p_1, \dots, p_{d(\pi)}\}$  definiert, so dass  $\pi p_1 \cdots p_{d(\pi)} = i$  gilt.

Das Problem, eine minimale Anzahl an Permutationen mit  $\pi p_1 \cdots p_{d(\pi)} = i$  zu finden, wurde von Carprara als MIN-SBR betitelt (vgl. [15]). Er hat gezeigt, dass MIN-SBR *NP*-schwer ist, indem er es auf das Problem der Suche nach einer maximalen Kreispackung in einem geeigneten Eulergraphen zurückgeführt hat. Die Grundlage für diese Überführung liefert eine untere Schranke für die Reversaldistanz, welche von Bafna und Pevzner in [7] hergeleitet wurde. Sie definierten für eine gegebene Permutation  $\pi$  einen so genannten Breakpoint-Graphen  $G(\pi)$ .

Ein *Breakpoint*, in einer Permutation  $\pi$ , ist gegeben, wenn für zwei aufeinanderfolgende Elemente  $\pi_i$  und  $\pi_{i+1}$  gilt, dass  $\pi_i + 1 \neq \pi_{i+1} \neq \pi_i - 1$ .

Das bedeutet, falls in einer Gensequenz an der  $i$ -ten Position das Gen Nummer  $k$  steht, liegt ein Breakpoint zwischen der  $i$ -ten und  $(i + 1)$ -ten Position vor, falls an der Position  $i + 1$  weder das Gen Nummer  $k - 1$ , noch das Gen Nummer  $k + 1$  liegt. Die Gensequenz  $a$  hat vier Breakpoints. Diese sind in der nachfolgenden Abbildung 2.16 rot gekennzeichnet.

$$a = (3, 2, 1, 4, 8, 7, 10, 9, 5, 6)$$

Abbildung 2.16: Die Breakpoints in der Gensequenz  $a$

Die Anzahl aller Breakpoints einer Permutation  $\pi$  wird mit  $b(\pi)$  bezeichnet. Der Breakpoint-Graph  $G(\pi)$  zur Gensequenz  $\pi$  (siehe [7] und [15]) ist ein Graph, dessen Kanten in zwei Farben eingefärbt sind. Der Graph besteht aus  $n + 2$  Knoten, nummeriert von 0 bis  $n + 1$ . Die Knoten 1 bis  $n$  entsprechen dabei den jeweiligen Genen mit den Nummern 1 bis  $n$ . Zwei Knoten  $k$  und  $l$  aus der Menge  $\{1, \dots, n\}$  werden durch eine schwarz gefärbte Kante verbunden, falls die Gene mit den Nummern  $k$  und  $l$  an zwei aufeinanderfolgenden Positionen  $\pi_i$  und  $\pi_{i+1}$  in  $\pi$  liegen und zwischen diesen ein Breakpoint gegeben ist. Zwei Knoten  $k$  und  $k + 1$  aus der Menge  $\{1, \dots, n\}$  werden durch eine rot gefärbte Kante verbunden, falls die entsprechenden Gene mit den Nummern  $k$  und  $k + 1$  nicht an zwei aufeinanderfolgenden Positionen in  $\pi$  liegen. Zusätzlich wird, falls  $\pi_1 \neq 1$  gilt, eine schwarz gefärbte Kante zwischen dem Knoten 0 und dem Knoten  $\pi_1$  und eine rot gefärbte Kante zwischen dem Knoten 0 und dem Knoten 1 eingeführt. Analog wird, sofern  $\pi_n \neq n$  gilt, eine schwarz gefärbte Kante zwischen dem Knoten  $n + 1$  und dem Knoten  $\pi_n$  und eine rot gefärbte Kante zwischen dem Knoten  $n + 1$  und dem Knoten  $n$  eingeführt.

Der Breakpoint-Graph zur Gensequenz  $a$  ist in Abbildung 2.17 dargestellt.

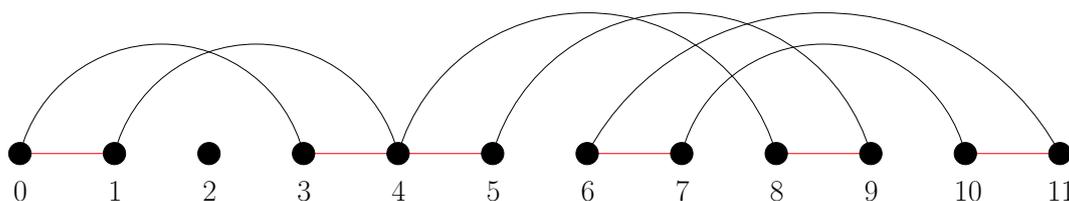


Abbildung 2.17: Der Breakpoint-Graph  $G(a)$  zur Gensequenz  $a$

Der Graph besteht aus 12 Knoten und 12 Kanten, wovon sechs Kanten rot gefärbt und sechs Kanten schwarz gefärbt sind. Ein Breakpoint-Graph enthält immer die gleiche Anzahl rot und schwarz gefärbter Kanten. Ebenso ist jeder Knoten mit der gleichen Anzahl von rot und schwarz gefärbten Kanten inzident. Wie man in der Abbildung sieht, muss

nicht jeder Knoten mit einer Kante inzident sein. In einem Breakpoint-Graphen werden nun so genannte alternierende Kreise gesucht.

Ein *alternierender Kreis* ist ein Kreis in einem Breakpoint-Graphen, so dass die Kanten des Kreises farblich alternierend, also abwechselnd rot und schwarz, gefärbt sind. Man bezeichnet mit  $c(\pi)$  die *maximale Anzahl alternierender kantendisjunkter Kreise* in dem Breakpoint-Graph  $G(\pi)$  zur Permutation  $\pi$ .

Auf Grund von [7] und der Tatsache, dass die maximale Anzahl alternierender kantendisjunkter Kreise in  $G(\pi)$  höchstens so groß ist, wie die Kreispackungszahl  $\nu(G(\pi))$  gilt die folgende Schranke

$$d(\pi) \geq b(\pi) - c(\pi) \geq b(\pi) - \nu(G(\pi))$$

Die Reversaldistanz  $d(\pi)$  der Gensequenz  $\pi$  ist also mindestens so groß, wie die Anzahl der Breakpoints  $b(\pi)$  in  $\pi$ , abzüglich der maximalen Anzahl alternierender kantendisjunkter Kreise  $c(\pi)$  in  $G(\pi)$ . Man kann eine Bedingung angeben, unter welcher diese Schranke angenommen wird. Da es viele Fälle gibt, in denen die Gleichheit gilt [14], untersuchte Caprara den Zusammenhang zwischen dem Auffinden einer maximalen alternierenden Kreispackung auf einem Breakpoint-Graphen und einer maximalen Kreispackung auf einem geeigneten Eulergraphen, siehe [15]. Er konstruierte zunächst, zu einem gegebenen Breakpoint-Graphen, einen entsprechenden Eulergraphen und zeigte anschließend, dass die beiden Probleme unter Verwendung des konstruierten Eulergraphen äquivalent sind. Somit ist es im Allgemeinen möglich, die Reversaldistanz einer Gensequenz  $\pi$  durch die Anzahl der Breakpoints  $b(\pi)$  und die Kreispackungszahl im entsprechenden Eulergraphen zu bestimmen.

In der Diplomarbeit von E. Lamberts [64] wird an Hand zweier Praxisbeispiele dargelegt, dass das Sorting by Reversals auf verschiedene Sortierprobleme, welche sich durch Permutationen darstellen lassen, anwendbar ist. Bei den Praxisbeispielen handelt es sich zum einen um das Sortieren der Waggons von Güterzügen in so genannten Rangierbahnhöfen. Dabei wird ein Güterzug mit Waggons für  $n$  Zielorte durch eine Permutation der Zahlen 1 bis  $n$  dargestellt. Die Zuordnung der Zahlen 1 bis  $n$  zu den  $n$  Zielorten ist dabei durch die Anfahrtsreihenfolge der Zielorte gegeben. Die Waggons sind so zu sortieren, dass sie in der Reihenfolge, in der die Zielorte angefahren werden, nacheinander abgekoppelt werden können. Das entspricht einer Überführung der gegebenen Permutation in die Identitätspermutation.

Zum anderen wird eine Problemstellung aus dem Bereich der Fließproduktion vorgestellt. Dabei betrachtet man das Umsortieren von Materialien in einem Fertigungsprogramm, in

dem, für die einzelnen Produktionsaggregate, eine fest vorgegebene Materialreihenfolge einzuhalten ist.

Im folgenden Unterkapitel wird eine weitere Problemstellung vorgestellt, für die es ebenfalls möglich ist, eine Lösung herzuleiten, indem man in einem geeigneten Graphen eine maximale Kreispackung bzw. die Kreispackungszahl bestimmt. Diese Problemstellung ist ein Spezialfall bei der Datenverschickung innerhalb optischer Netzwerke und im Zusammenhang mit dem so genannten Traffic Grooming (Datenbündelung) zu finden.

## 2.2.2 Optische Netzwerke und Kreispackungen in Graphen

Optische Netzwerke sind Netzwerke bei denen die Datenübertragung über Lichtwellen in einem Faserkabel im Inneren eines Datenübertragungskabels verläuft. Verschickt oder empfängt man einzelne Datensätze jeweils über ein Faserkabel, so benötigt man in einem Datenübertragungskabel mindestens zwei Faserkabel, siehe auch [26]. Eines der beiden Kabel wird zum Versenden von Daten verwendet. Über das andere Kabel erfolgt der Datenempfang. Der Aufbau eines Netzwerkes, in welchem die Datensätze jeweils einzeln über ein Faserkabel verschickt werden, ist auf Grund der großen Anzahl von benötigten Faserkabeln sehr teuer. Aus diesem Grund wird häufig das so genannte *Dichte Wellenlängen-Multiplex Verfahren (Dense Wavelength-Division Multiplexing DWDM)* verwendet. Bei diesem Verfahren werden die Datensätze in einem Faserkabel über Lichtwellenkanäle übertragen. Die Lichtwellenkanäle entstehen durch die Aufspaltung des Lichtes in Bestandteile mit unterschiedlichen Wellenlängen. Ein Datensatz, welcher über ein Faserkabel verschickt wird, wird in diesem über genau einen Lichtwellenkanal mit einem bestimmten Wellenlängenbereich übertragen. Ein Faserkabel kann dabei bis zu 1000 verschiedene Lichtwellenkanäle beinhalten und somit zur zeitgleichen Übertragung von bis zu 1000 verschiedenen Datensätzen verwendet werden (vgl. [26]). In Abbildung 2.18 ist zur Veranschaulichung ein Faserkabel mit verschiedenen Lichtwellenkanälen dargestellt.

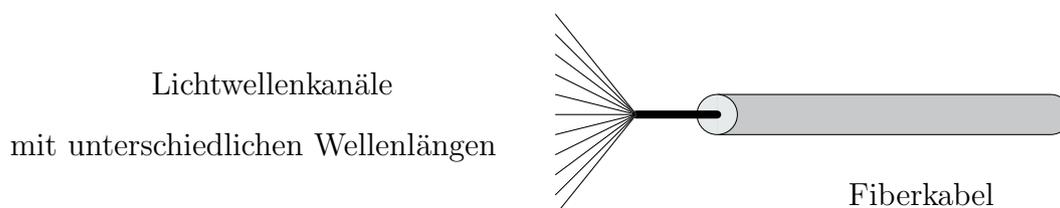


Abbildung 2.18: Lichtwellenkanäle in einem Faserkabel

Das Datenvolumen entspricht der Größe eines Datensatzes, welcher über einen einzelnen Lichtwellenkanal transportiert werden kann. Es darf die Bandbreite der Wellenlängen der Lichtwellen des Kanals nicht überschreiten. Angelehnt an [5] wird im Folgenden für alle Lichtwellenkanäle eines Fiderkabels die gleiche Bandbreite  $B$  angenommen. Bei der Übertragung einer Menge von einzelnen Datensätzen kann man jeden Datensatz über einen separaten Lichtwellenkanal verschicken. Dabei passiert es häufig, dass das Datenvolumen eines zu übertragenden Datensatzes wesentlich kleiner als  $B$  ist. Daher ist das Vorgehen, alle Datensätze einzeln über separate Lichtwellenkanäle zu verschicken, im Hinblick auf die Ausnutzung der gegebenen Bandbreite eines Lichtwellenkanals, ineffizient und man verwendet das so genannte *traffic grooming*. Dabei werden verschiedene Datensätze gebündelt und über Teilstrecken gemeinsam als Bündel über einen Lichtwellenkanal verschickt. Es ist also für eine gegebene Menge an Datensätzen, welche jeweils zwischen zwei bestimmten Orten übertragen werden müssen, zu entscheiden, welche Datensätze auf welchen Strecken gebündelt werden sollen. Das Ziel dieser Entscheidung ist die Minimierung der Kosten. Bei der Datenübertragung können verschiedene Kosten anfallen. Ein Beispiel sind Kosten für die Nutzung eines Kabels. Die hier betrachteten Kosten werden zu einem späteren Zeitpunkt konkretisiert, nachdem eine entsprechende Terminologie eingeführt wurde.

Allgemein sei folgender Sachverhalt gegeben. In einem Netzwerk sollen  $k$  Datensätze  $a_i(u_i, v_i)$  mit  $i = 1, \dots, k$  über die Lichtwellenkanäle in den Fiderkabeln übertragen werden, wobei der Datensatz Nummer  $i$  zwischen den Standorten  $u_i$  und  $v_i$  zu verschicken ist. Das Netzwerk kann durch einen Graphen  $G = (V, E)$  dargestellt werden. Die Knotenmenge  $V = \{1, \dots, n\}$  entspricht einer Menge von  $n$  Standorten in dem betrachteten Netzwerk. Diese Standorte entsprechen zum einen Orten, von welchen aus die Datensätze verschickt oder in welchen sie empfangen werden sollen. Zum anderen kann ein solcher Standort einen Ort repräsentieren, in dem Datensätze weitergeleitet werden können. Jede Kante  $e = (u, v) \in E$  entspricht einem Fiderkabel zwischen den Standorten Nummer  $u$  und  $v$ . Um den Sachverhalt zu veranschaulichen, wird das nachfolgende Beispiel betrachtet.

**Beispiel 2.5:**

Gegeben sei ein „überschaubares“ Netzwerk  $G = (V, E)$  mit sechs Standorten (siehe Abb. 2.19).

Es seien die fünf Datensätze  $a_1(1, 4)$ ,  $a_2(1, 2)$ ,  $a_3(1, 5)$ ,  $a_4(2, 4)$  und  $a_5(4, 6)$  im Netzwerk zu verschicken. Für alle Datensätze gelte, dass das Datenvolumen  $b^{a_i}$  für den Datensatz Nummer  $i$  höchstens  $B$  ist. Um zu entscheiden, welche Datensätze auf welchen Strecken gebündelt übertragen werden sollen, bestimmt man so genannte light paths.

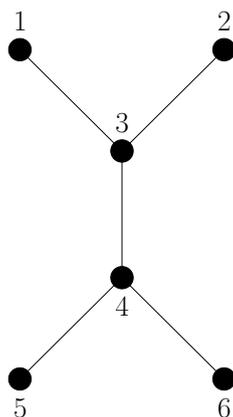


Abbildung 2.19: Ein Datennetzwerk

Ein *light path* mit den Endpunkten  $u$  und  $v$  ist eine Folge von Lichtwellenkanälen zwischen den Standorten Nummer  $u$  und  $v$ , durch welche bestimmte Datensätze nacheinander übertragen werden müssen.

Im Graphen  $G$  wird ein *light path* durch einen Weg von Knoten  $u$  nach  $v$  beschrieben. Hat man eine Menge von *light paths* gegeben, so induziert diese eine begrenzte Anzahl von Möglichkeiten, wie die Datensätze übertragen werden können. Zudem ist festgelegt, welche Datensätze auf welchen Kabeln gebündelt über einen Lichtwellenkanal übertragen werden müssen. Immer dann, wenn zwei oder mehr Datensätze über den gleichen *light path* verschickt werden sollen, werden diese gebündelt übertragen. Es ist zu beachten, dass ein Datensatz über einen *light path* immer von einem seiner Endpunkte zum anderen Endpunkt übertragen werden muss. Das bedeutet, dass es nicht möglich ist, dass ein Datensatz lediglich über einen Teil eines *light paths* verschickt wird. Es gibt verschiedene Mengen von *light paths*, allerdings sind diese nicht alle zulässig.

Eine Menge von *light paths* heißt *zulässig*, wenn für jeden Datensatz  $a_i(u_i, v_i)$  mit  $i = 1, \dots, k$  eine Folge von *light paths* existiert, so dass Datensatz Nummer  $i$  im Netzwerk  $G$  zwischen den Orten  $u_i$  und  $v_i$  verschickt werden kann.

Für das betrachtete Beispiel sind in Abbildung 2.20 vier Mengen von *light paths* an Hand von vier Graphen farblich dargestellt.

Die einzelnen Wege in  $G$ , welche die *light paths* repräsentieren sind mit unterschiedlichen Farben markiert. Im Graphen  $G_1$  sind fünf *light paths* dargestellt. Jeder *light path* entspricht einem Weg der Länge eins. Es ist leicht zu sehen, dass diese Menge von *light paths* zulässig ist, da es möglich ist alle fünf Datensätze über die *light paths* zu verschicken. Im Graphen  $G_2$  sind vier *light paths* dargestellt. Die Menge von *light paths* ist ebenfalls zulässig. Der Datensatz  $a_3(1, 5)$  würde über den blau markierten und den gelb markierten

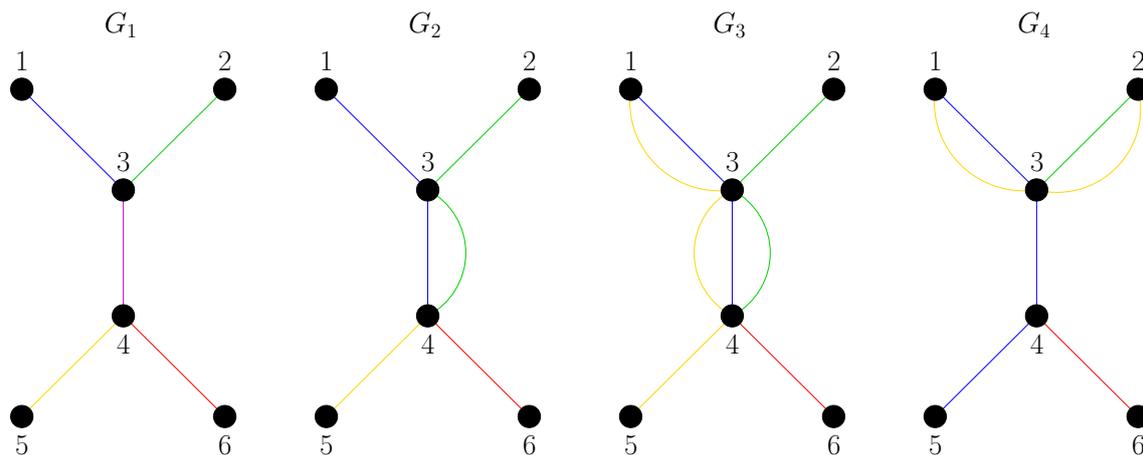


Abbildung 2.20: Vier Mengen von light paths

light path übertragen. Der Datensatz  $a_1(1, 2)$  würde zunächst über den blau markierten und anschließend über den grün markierten light path übertragen. Das bedeutet, dass der Datensatz, von Standort Nummer eins ausgehend, zunächst über den blau markierten light path über den Standort Nummer drei zum Standort Nummer vier verschickt wird. Anschließend wird er über den grün markierten light path wiederum über den Standort Nummer drei weiter zum Standort Nummer zwei geschickt. Da ein Datensatz über einen light path immer von einem Endpunkt zum anderen übertragen werden muss, kann der Datensatz  $a_1(1, 2)$  nicht über den blau markierten light path nur vom Standort Nummer eins zum Standort Nummer drei und von dort aus direkt weiter über den grün markierten light path zum Standort Nummer zwei verschickt werden. Im Graphen  $G_3$  sind ebenfalls vier light paths dargestellt. Die Menge von light paths ist wiederum zulässig. Im Graphen  $G_4$  sind auch vier light paths angegeben. Allerdings ist die dargestellte Menge von light paths nicht zulässig, da die Datensätze  $a_2(1, 4)$  und  $a_4(2, 4)$  über die light paths nicht verschickt werden können.

Wie zuvor erwähnt, ist das Ziel, die Menge der gegebenen Datensätze mit minimalen Gesamtkosten zu verschicken. Dabei ist zu beachten, dass die einzelnen light paths zusätzliche Kosten erzeugen. Diese entstehen durch das benötigte Equipment zur Datenverteilung, welches an den zwei Endpunkten eines jeden light paths installiert werden muss. Wie in [5], sollen im Weiteren ausschließlich Kosten für das Equipment eines light path anfallen. Die Kosten für die Nutzung eines Kabels werden nicht berücksichtigt. Zudem wird festgelegt, dass die Kosten pro light path identisch sind. Das führt zu der Zielsetzung, eine zulässige Menge von light paths zu finden, welche unter allen zulässigen Mengen eine minimale Kardinalität hat.

In dem gegebenen Beispiel wären die Mengen mit vier light paths im Graphen  $G_2$  und

$G_3$  unter den in Abbildung 2.20 dargestellten Mengen die besten. Allerdings muss man noch prüfen, ob diese Mengen auch einer optimalen Lösung entsprechen. Dazu ist zu untersuchen, ob die Mengen minimal sind und eine zulässige Zuordnung der Datensätze zu den light paths, unter Berücksichtigung der Bandbreite  $B$ , existiert. Das bedeutet, dass jedem Datensatz eine Menge von light paths zugeordnet wird, so dass der Datensatz über diese light paths zwischen den entsprechenden Standorten verschickt werden kann. Zudem darf das gesamte Volumen aller Datensätze, welche einem light path zugeordnet werden, die Bandbreite  $B$  eines Lichtkanals nicht überschreiten.

Das Problem, für einen gegebenen Datentransfer, eine zulässige, minimale Menge von light paths zu bestimmen, für die eine zulässige Zuordnung der Datensätze existiert und die Datensätze zuzuordnen, wird als *light path minimization* bezeichnet. Die Lösung des Problems besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil entspricht der Konstruktion der light paths, der zweite Teil der Zuordnung der Datensätze zu den light paths.

Betrachtet man das light path minimization Problem graphentheoretisch (siehe [5]), so hat man, wie zuvor beschrieben, induziert durch das gegebene Netzwerk einen Graphen  $G = (V, E)$  und eine Menge  $\mathcal{D} := \{a_1(u_1, v_1), \dots, a_k(u_k, v_k)\}$  von  $k$  zu verschickenden Datensätzen vorliegen. Zu jedem Datensatz  $a_i(u_i, v_i) \in \mathcal{D}$  gehören zwei ausgezeichnete Endpunkte  $u_i$  und  $v_i$ , zwischen denen der Datensatz übertragen werden soll, sowie ein Volumen  $b^{a_i}$ . Gesucht ist eine minimale Menge  $\mathcal{L} := \{l_1, \dots, l_h\}$  von Wegen in  $G$  mit einer zulässigen binären Relation  $\mathcal{R}$  zwischen  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{D}$ . Ein Weg  $l_j \in \mathcal{L}$  ist dabei ein Weg zwischen den Knoten  $x_j$  und  $w_j$  und repräsentiert einen light path zwischen den Standorten Nummer  $x_j$  und  $w_j$ . Für die *binäre Relation*  $\mathcal{R}$  zwischen  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{D}$  bedeutet  $(l_j, a_i(u_i, v_i)) \in \mathcal{R}$ , dass der Datensatz Nummer  $i$  über den durch  $l_j$  repräsentierten light path übertragen und somit dem entsprechenden light path zugeordnet wird. Eine solche *Relation*  $\mathcal{R}$  ist *zulässig*, falls zum einen zu jedem Datensatz  $a_i(u_i, v_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) eine Menge von Wegen in Relation steht, so dass der Datensatz Nummer  $i$  über die, durch diese Wege repräsentierten, light paths zwischen Standort Nummer  $u_i$  und  $v_i$  übertragen werden kann. Zum anderen muss für jeden Weg  $l_j$  ( $j = 1, \dots, h$ ) gelten, dass die Summe der Datenvolumen  $b^{a_i}$  aller zu  $l_j$  in Relation stehenden Datensätze höchstens  $B$  ist. Eine minimale Menge  $\mathcal{L}$  von Wegen in  $G$  mit einer zulässigen binären Relation  $\mathcal{R}$  zwischen  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{D}$  induziert schließlich eine minimale zulässige Menge von light paths, sowie eine zulässige Zuordnung der einzelnen Datensätze zu den light paths.

In [5] wird gezeigt, dass das light path minimization Problem sogar für Spezialfälle *APX*-schwer ist. Einer der betrachteten Spezialfälle des vorgestellten Problems ist das light path minimization Problem mit Halb-Wellenlängen Volumen. In diesem Fall haben alle Datensätze  $a_i(u_i, v_i) \in \mathcal{D}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) ein Datenvolumen  $b^{a_i} = \frac{B}{2}$ , welches genau der

Hälfte der Bandbreite eines Lichtwellenkanals entspricht. Um die minimale Anzahl  $OPT$  von light paths zu bestimmen, welche ausreicht, um das Problem zu lösen, kann man die Kreispackungszahl im so genannten Nachfrage-Graphen nutzen.

Es sei  $G^{\mathcal{D}} = (V(G^{\mathcal{D}}), E(G^{\mathcal{D}}))$  der durch  $\mathcal{D}$  induzierte Nachfrage-Graph mit  $V(G^{\mathcal{D}}) := V$ . Die Menge der Kanten in  $G^{\mathcal{D}}$  ist dabei, wie folgt, definiert: Für jeden zu verschickenden Datensatz mit Endknoten  $u$  und  $v$  existiert eine Kante  $(u, v) \in E(G^{\mathcal{D}})$ .

Es ist möglich, dass zwei oder mehr Datensätze zwischen zwei identischen Orten  $u$  und  $v$  verschickt werden müssen. In diesem Fall enthält der Nachfrage-Graph zwei oder mehr parallele Kanten mit identischen Endknoten  $u$  und  $v$ . Der Nachfrage-Graph für das zuvor betrachtete Beispiel ist in Abbildung 2.21 dargestellt.

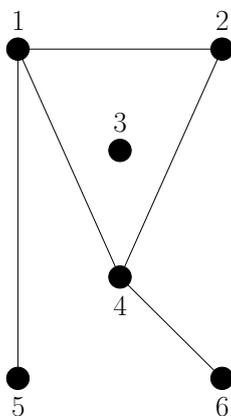


Abbildung 2.21: Der Nachfrage-Graph

Die Kante  $(1, 4)$  repräsentiert die Übertragung des Datensatzes  $a_1(1, 4)$ , die Kante  $(1, 2)$  die Übertragung des Datensatzes  $a_2(1, 2)$ , die Kante  $(1, 5)$  die Übertragung des Datensatzes  $a_3(1, 5)$ , die Kante  $(2, 4)$  die Übertragung des Datensatzes  $a_4(2, 4)$  und die Kante  $(4, 6)$  die Übertragung des Datensatzes  $a_5(4, 6)$ .

Nach [5] gilt nun folgender Zusammenhang zwischen der minimalen Anzahl  $OPT$  von light paths und der Kreispackungszahl  $\nu(G^{\mathcal{D}})$

$$OPT = |\mathcal{D}| - \nu(G^{\mathcal{D}})$$

Das bedeutet, dass die minimale Anzahl von light paths genau der Anzahl von Datensätzen abzüglich der maximalen Anzahl kantendisjunkter Kreise im Nachfrage-Graphen  $G^{\mathcal{D}}$  entspricht.

Betrachtet man das vorherige Beispiel und nimmt für alle Datensätze  $b^{a_i} = \frac{B}{2}$  für  $(i = 1, \dots, 5)$  an, so erkennt man im Nachfrage-Graphen (vgl. Abb. 2.21), dass dieser

genau einen Kreis enthält. Damit gilt  $OPT = |\mathcal{D}| - \nu(G^{\mathcal{D}}) = 5 - 1 = 4$ . Folglich ist die Menge von light paths, welche in  $G_2$  in Abbildung 2.20 dargestellt ist, minimal. Es wurde zuvor bereits gezeigt, dass die Menge auch zulässig ist.

Es stellt sich nun die Frage, ob für die Menge eine zulässige Zuordnung der Datensätze existiert. Lediglich ein light path enthält das Kabel zwischen den Standorten Nummer eins und drei. Über dieses Kabel müssen allerdings die drei Datensätze  $a_1(1, 4)$ ,  $a_2(1, 2)$  und  $a_3(1, 5)$  verschickt werden. Folglich überschreitet das Gesamtvolumen der drei Datensätze von  $3 \cdot \frac{B}{2}$  die Bandbreite  $B$  und es ist nicht möglich, alle drei Datensätze über den einen light path zu verschicken. Somit existiert für die betrachtete Menge von light paths keine zulässige Zuordnung. Im Graphen  $G_3$  ist ebenfalls eine minimale Menge von light paths dargestellt. Die Menge  $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_4\}$  mit  $l_1 = (1, 3, 4, 5)$ ,  $l_2 = (1, 3, 4)$ ,  $l_3 = (2, 3, 4)$  und  $l_4 = (4, 6)$  und die Relation  $\mathcal{R} = \{(l_1, a_3(1, 5)), (l_2, a_1(1, 4)), (l_2, a_2(1, 2)), (l_3, a_2(1, 2)), (l_3, a_4(2, 4)), (l_4, a_5(4, 6))\}$  induzieren eine optimale Lösung des light path minimization Problems für das gegebene Beispiel mit Halb-Wellenlängen Volumen. Der erste Datensatz wird durch die beiden light paths, welche durch die Wege  $l_2$  und  $l_3$  repräsentiert werden, übertragen. Der light path zur Übertragung des zweiten Datensatzes wird durch den Weg  $l_2$  repräsentiert. Zur Übertragung des dritten Datensatzes wird der light path zum Weg  $l_1$  genutzt. Der vierte Datensatz wird durch den light path, welcher durch den Weg  $l_3$  repräsentiert wird, übertragen und die Übertragung des fünften Datensatzes erfolgt über den light path zum Weg  $l_4$ . Da keinem light path mehr als zwei Datensätze zugeordnet sind, ist die Zuordnung zulässig.

Der Zusammenhang von  $OPT$  und  $\nu(G^{\mathcal{D}})$  und damit auch ein Vorgehen zur Bestimmung einer zulässigen minimalen Menge von light paths, zu der eine zulässige Zuordnung existiert, lässt sich auf einen einfachen Sachverhalt zurückführen. Betrachtet man im Nachfrage-Graphen  $G^{\mathcal{D}}$  einen Kreis  $C = (v_0, v_1, \dots, v_{r-1})$  mit den  $r$  zu verschickenden Datensätzen  $a_i(v_{i-1}, v_i)$  für alle  $i = 1, \dots, r - 1$  und  $a_r(v_{r-1}, v_0)$ , so kann man alle Datensätze verschicken und zulässig zuordnen, indem man  $r - 1$  light paths, wie folgt, konstruiert:  $l_i = (v_{i-1}, v_i)$  für alle  $i = 1, \dots, r - 1$ . Der  $i$ -te Weg repräsentiert also einen light path vom Standort Nummer  $v_{i-1}$  zum Standort Nummer  $v_i$ . Man kann für die ersten  $r - 1$  Datensätzen den Datensatz Nummer  $i$  dem light path zum Weg  $l_i$  zuordnen. Der Datensatz Nummer  $r$  wird allen  $r - 1$  light paths zugeordnet. Insgesamt benötigt man pro Kreis im Nachfrage-Graphen einen light path weniger, als die Anzahl der Datensätze, welche diesen Kreis erzeugen.

Der Kreis  $C = (1, 4, 2)$  im Nachfrage-Graphen  $G^{\mathcal{D}}$  in Abbildung 2.21 wird durch die drei Datensätze  $a_1(1, 4)$ ,  $a_4(2, 4)$  und  $a_2(1, 2)$  erzeugt. Zur Übertragung der drei Datensätze werden in der optimalen Lösung zwei light paths genutzt. Der erste Datensatz  $a_1(1, 4)$  wird

durch den light path zwischen den Standorten Nummer eins und vier (repräsentiert durch den Weg  $l_2$ ) übertragen. Der vierte Datensatz  $a_4(2, 4)$  wird durch den light path zwischen den Standorten Nummer vier und zwei (repräsentiert durch den Weg  $l_3$ ) übertragen. Der zweite Datensatz  $a_2(1, 2)$  wird beiden light paths zugeordnet.

Um den Sachverhalt noch einmal zu verdeutlichen sei das Beispiel um die Datensätze  $a_6(4, 5)$  und  $a_7(5, 6)$  mit  $b^{a_6} = b^{a_7} = \frac{B}{2}$  erweitert. Der neue Nachfrage-Graph  $G_{neu}^{\mathcal{D}}$  hat nun folgende in Abbildung 2.22 dargestellte Form.

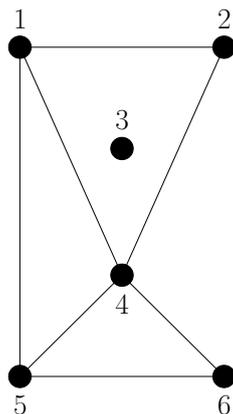


Abbildung 2.22: Der neue Nachfrage-Graph  $G_{neu}^{\mathcal{D}}$

Man sieht, dass  $\nu(G_{neu}^{\mathcal{D}}) = 2$  und somit  $OPT = |\mathcal{D}| - \nu(G_{neu}^{\mathcal{D}}) = 7 - 2 = 5$  gilt. Eine minimale zulässige Menge von light paths für das erweiterte Problem ist Abbildung 2.23 wiederum anhand eines Graphen und den farbig markierten Wegen dargestellt, welche die light paths repräsentieren.

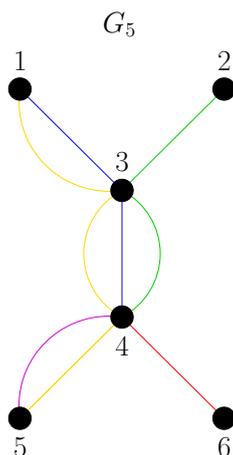


Abbildung 2.23: Eine minimale, zulässige Menge von light paths für das erweiterte Beispiel

Die Menge  $\mathcal{L}_{neu} = \mathcal{L} \cup \{l_5\}$  wurde durch die Erweiterung der Menge  $\mathcal{L}$  um den Weg

$l_5 = (4, 5)$  erzeugt. Erweitert man die Relation  $\mathcal{R}$  um die 2-Tupel  $(l_5, a_6(4, 5))$ ,  $(l_5, a_7(5, 6))$  und  $(l_4, a_7(5, 6))$  zu  $\mathcal{R}_{neu} = \mathcal{R} \cup \{(l_5, a_6(4, 5)), (l_5, a_7(5, 6)), (l_4, a_7(5, 6))\}$ , so induzieren  $\mathcal{L}_{neu}$  und  $\mathcal{R}_{neu}$  eine optimale Lösung des light paths minimization Problems im erweiterten Beispiel.

Im nachfolgenden Kapitel werden abschließend drei Spontaneous Postman Probleme, sowie das Problem der Rundgangsplanung am Beispiel eines Museums vorgestellt. Die Bestimmung einer optimalen bzw. zulässigen Lösung dieser Probleme kann wiederum auf die Bestimmung einer maximalen Kreispackung zurück geführt werden.

### 2.2.3 Spontaneous Postman Probleme und ein Beispiel der Rundgangsplanung

Dem Spontaneous Postman Problemen (SPP) liegt die folgende praktische Situation zu Grunde: Ausgehend von einem Startort verteilt ein Postbote die Post in einem gegebenen Straßennetz. Die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Straßen durchlaufen werden, ist nicht a priori festgelegt. Der Postbote beginnt am Startort mit einer beliebigen Straße. An jeder Kreuzung entscheidet er sich für die nächste Straße, indem er eine Straße auswählt, in der er noch nicht gewesen ist. Hat er an einer Kreuzung bereits alle abgehenden Straßen besucht, stoppt er und beendet seine Tour.

Im Zusammenhang mit dieser zu Grunde liegenden Situation ergeben sich verschiedene Problemstellungen, welche als SPP bezeichnet werden (vgl. [78]). Erste Problemstellung: Wie muss ein Straßennetz, mit einem vorher festgelegten Startort, aussehen, sodass der Postbote zu dem Zeitpunkt, zu dem er seine Tour beendet, alle Straßen des Straßennetzes besucht hat und wieder am Startort ist? Um eine solche Problemstellung graphentheoretisch zu betrachten, stellt man analog zur Betrachtung des CPP ein Straßennetz als Graph  $G = (V, E)$  dar. Dabei wird jede Straße durch eine Kante  $e \in E$  und jede Straßenkreuzung durch einen Knoten  $v \in V$  repräsentiert. Ein Knoten  $v$  und eine Kante  $e$  sind folglich inzident, falls die entsprechende durch  $e$  repräsentierte Straße von der durch  $v$  repräsentierten Kreuzung abgeht.

Als Lösung der gegebenen Problemstellung wird, ausgehend von einem festen Startort, ein entsprechendes Straßennetz gesucht. Dieses wird durch einen Graphen  $G = (V, E)$  mit einem ausgezeichneten Knoten  $v \in V$  repräsentiert. Bärbler und Ore zeigten in [6] und [71], dass der gesuchte Graph ein spezieller Eulergraph ist, welchen sie als Trace bezeichneten. Dieser ist, wie folgt, definiert (vgl. [78]):

Für einen Graphen  $G$  ist ein *Pfad*  $L$  (von  $v_{i_0}$  nach  $v_{i_{r-1}}$ ) eine Folge von Knoten und Kanten  $(v_{i_0}, e_0, v_{i_1}, e_1, \dots, e_{r-2}, v_{i_{r-1}})$  mit  $e_j = (v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$  und  $v_{i_j} \in V$ , wobei die Kanten paarweise disjunkt sind. Verkürzt schreibt man wiederum  $L = (v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{r-1}})$ . Die *Länge eines Pfades*  $L$  ist, analog zur Definition der Länge eines Weges, gegeben durch  $d(L) := r - 1$  und entspricht der Kantenanzahl. Für einen Eulergraphen  $H = (V(H), E(H))$  wird ein Knoten  $v \in V(H)$  als *proper* bezeichnet, falls jeder Pfad, welcher in  $v$  startet zu einer Eulertour in  $H$  erweiterbar ist. Ein *Trace*  $T = (V(T), E(T))$  ist ein Eulergraph mit mindestens einem properen Knoten.

In Abbildung 2.24 ist ein Trace beispielhaft dargestellt.

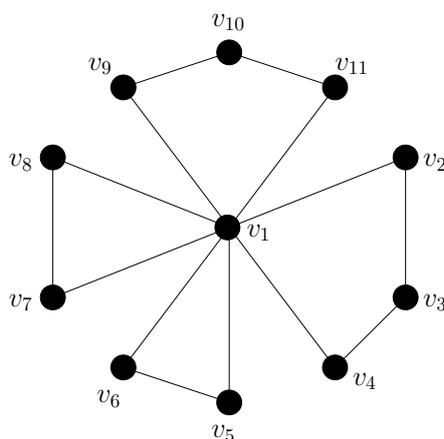


Abbildung 2.24: Ein Beispiel für einen Trace

Der Knoten  $v_1$  ist proper. Dies ist leicht zu erkennen, da in [71] bewiesen wurde, dass für einen gegebenen Eulergraphen  $H = (V(H), E(H))$  ein Knoten  $v \in V(H)$  genau dann proper ist, wenn für jeden Kreis  $C \subseteq H$  gilt, dass  $v \in V(C)$ . Das bedeutet, dass ein Trace  $T$  die Vereinigung einer Menge kantendisjunkter Kreise ist, so dass jeder Kreis in  $T$  den Knoten  $v$  enthält. In [6], [71] und [78] sind weitere Bedingungen angegeben, unter denen ein Knoten proper ist.

Zweite Problemstellung: Gegeben sei ein Straßennetz. Man bestimme für einen Postboten, ausgehend von einem Startort, ein „möglichst großes“ Teilgebiet des vorliegenden Straßennetzes, so dass der Postbote nach Beendigung seiner Tour alle Straßen dieses Teilgebietes durchlaufen hat und zum Startort zurückgekehrt ist. „Möglichst groß“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass eine Erweiterung des Teilgebietes um eine oder mehrere Straßen eine unzulässige Lösung liefert. Um dieses Problem graphentheoretisch zu betrachten, sind folgende Definitionen notwendig.

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Einen eulerschen Untergraphen  $T(v) \subseteq G$ , für den  $v$  proper ist,

bezeichnet man als *Trace in  $v$* . Gilt zudem für jeden Trace  $\tilde{T}(v)$  in  $v$  mit  $T(v) \neq \tilde{T}(v)$ , dass  $T(v) \not\subseteq \tilde{T}(v)$  ist, so nennt man  $T(v)$  einen *gesättigten Trace in  $v$* . Wie zuvor beschrieben, ist ein Trace  $T(v)$  in  $v$  die Vereinigung einer Menge kantendisjunkter Kreise, so dass jeder Kreis in  $T(v)$  den Knoten  $v$  enthält. Sei  $T(v)$  ein Trace in  $v$ , welcher der Vereinigung der kantendisjunkten Kreise  $\{C_1, \dots, C_{k^*}\}$  entspricht. Man nennt  $T(v)$  einen *maximalen Trace in  $v$* , falls für jeden Trace  $\bar{T}(v)$  in  $v$  mit  $T(v) \neq \bar{T}(v)$  gilt, dass  $\bar{T}(v)$  die Vereinigung von  $k'$  kantendisjunkten Kreisen mit  $k' \leq k^*$  ist.

Graphentheoretisch hat man in der zweiten Problemstellung einen Graphen  $G = (V, E)$  mit einem ausgezeichneten Knoten  $v$  vorliegen. Für diesen Graphen ist ein gesättigter Trace  $T(v)$  in  $v$  zu bestimmen. Dieser gesättigte Trace  $T(v)$  repräsentiert ein Teilgebiet des gegebenen Straßennetzes, welches eine Lösung der zuvor beschriebenen Problemstellung darstellt. In [78] wurde gezeigt, dass jeder maximale Trace in  $v$  ein gesättigter Trace in  $v$  ist. Folglich kann man sich darauf beschränken, einen maximalen Trace zu bestimmen. Ist der vorliegende Graph ein Eulergraph, kann man folgenden in [78] bewiesenen Zusammenhang nutzen:

Sei  $H = (V(H), E(H))$  ein Eulergraph und  $\mathcal{P} = \{C_1, \dots, C_{\nu(H)}\}$  eine maximale Kreispackung. Weiterhin sei  $v \in V(H)$  ein ausgezeichneter Knoten und  $\bar{\mathcal{P}} = \{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_{k^*}\} \subseteq \mathcal{P}$  die Menge aller Kreise in  $\mathcal{P}$ , für die gilt  $v \in V(\bar{C}_i)$  für alle  $i = 1, \dots, k^*$ . Dann entspricht die Vereinigung der Kreise  $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_{k^*}$  einem maximalen Trace  $T(v)$  in  $v$ .

Ist der Graph  $G$ , welcher das Straßennetz repräsentiert, ein Eulergraph, so kann man nach der Bestimmung einer maximalen Kreispackung einen maximalen Trace für jeden beliebigen, ausgezeichneten Knoten bestimmen und daraus eine Lösung der zweiten Problemstellung ableiten. Hat man keinen Eulergraphen vorliegen, kann man für  $G$  dennoch, unter Verwendung einer maximalen Kreispackung von  $G$ , einen Trace in  $v$  bestimmen (vgl. [78]). Dieser Trace ist nicht zwingend maximal und induziert daher eine zulässige Lösung der Problemstellung, allerdings nicht notwendiger Weise eine optimale Lösung.

Alternativ kann man  $G$  zu einem Eulergraphen  $H = (V(H), E(H))$  erweitern und unter Verwendung einer maximalen Kreispackung von  $H$  einen maximalen Trace  $T(v)$  in  $v$  bestimmen. Gilt  $E(T(v)) \subseteq E(G)$ , so kann man wiederum eine Lösung der Problemstellung ableiten. Andernfalls entspricht das durch  $T(v)$  repräsentierte Teilgebiet des Straßennetzes keiner zulässigen Lösung der Problemstellung, da es in  $T(v)$  Kanten gibt, die bei der Erweiterung des Graphen hinzugefügt wurden. Enthält  $T(v)$  keine parallelen Kanten, so kann man in  $T(v)$  alle Kanten aus  $E(T(v)) \setminus (E(T(v)) \cap E(G))$  durch eine parallele Kante aus  $E(G) \setminus E(T(v))$  ersetzen und erhält so einen maximalen Trace  $\hat{T}(v)$ . Dieser induziert eine Optimallösung der Problemstellung. Enthält  $T(v)$  parallele Kanten, welche die selbe Straße repräsentieren, kann man die entsprechenden Straßen aus dem bestimmten Teil-

gebiet entfernen. In diesem Fall ist es allerdings möglich, dass das bestimmte Teilgebiet einer zulässigen Lösung, nicht aber der Optimallösung, entspricht.

Analog kann man maximale Kreispackungen zur Lösung einer dritten Problemstellung der SPP nutzen: Man hat wiederum ein Straßennetz gegeben. In diesem sollen nun  $l$  Postboten mit  $l$  verschiedenen Startorten die Post unter Verwendung der zu Beginn erläuterten Regeln verteilen. Die Problemstellung ist in diesem Fall, für jeden Postboten ein Teilgebiet zu bestimmen, so dass jede Straße des Straßennetzes mindestens einem Postboten zugeordnet ist. Für den Fall, dass der Graph, welcher das Straßennetz repräsentiert, wiederum ein Eulergraph ist, kann man unter der Annahme, dass  $l$  groß genug gewählt wurde, analog zum Vorgehen zur Lösung der zweiten Problemstellung eine Lösung herleiten. Man bestimmt wiederum einen maximalen Trace für jeden beliebigen, ausgezeichneten Knoten. Anschließend sucht man eine Menge von  $l$  ausgezeichneten Knoten  $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_l}\} \subseteq V$ , so dass für jede Kante  $e \in E$  gilt: Es existiert ein ausgezeichnete Knoten  $v_j$  mit  $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ , für den gilt, dass die Kante  $e$  in der Kantenmenge des zuvor bestimmten maximalen Traces in  $v_j$  enthalten ist, d.h.  $e \in E(T(v_j))$ . Aus den maximalen Traces in den Knoten  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_l}$  lassen sich die Teilgebiete der  $l$  Postboten ableiten. Sollten diese maximalen Traces nicht paarweise kantendisjunkt sein, ist es notwendig abschließend die zu mehreren Teilgebieten zugeordneten Straßen eindeutig zuzuordnen.

Abschließend wird das nachfolgende Beispiel zur Rundgangsplanung in einem Museum vorgestellt, welches ebenfalls auf den Regeln der SPP basiert.

### **Beispiel 2.6:**

Ein Museum wurde für eine Ausstellung in vier Bereiche  $A - D$  unterteilt. Der in Abbildung 2.25 dargestellte Graph  $G$  repräsentiere die Wege (Gänge) und die Gabelungen (analog zu den Kreuzungen) von Wegen in dem Museum. Der Museumseingang wird dabei durch den Knoten  $v_0$  abgebildet.

In den einzelnen Bereichen  $A - D$  sollen nun Rundgänge zur Betrachtung der Ausstellungsstücke geplant werden. Für jeden Rundgang wird ein Startpunkt festgelegt. Die vier Startpunkte (pro Bereich einer) werden in Abbildung 2.25 durch die Knoten  $v_1, v_2, v_3$  und  $v_4$  repräsentiert. Nach erfolgreicher Planung sollen die einzelnen Rundgänge durch farbige Markierungen in den Museumsgängen ausgewiesen werden. Die Planung erfolgt unter folgenden Vorgaben: Durchläuft ein Besucher einen Rundgang, so entscheidet er sich an jeder Gabelung für einen markierten Gang, welchen er zuvor noch nicht besucht hat. Nachdem ein Besucher einen Rundgang durchlaufen hat, muss er alle Gänge des Rundganges genau einmal besucht haben und zum Startpunkt zurückgekehrt sein. Zudem soll

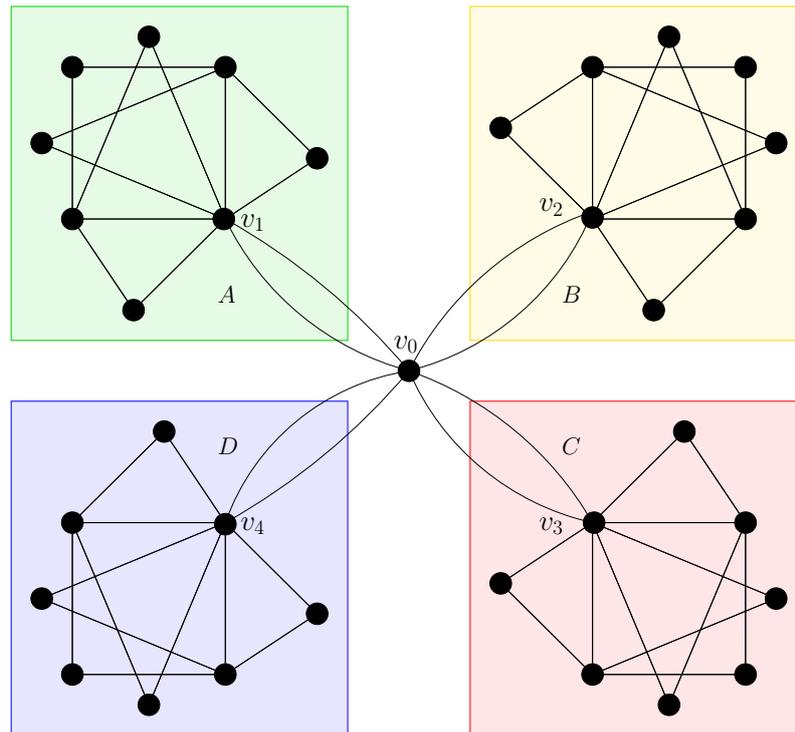


Abbildung 2.25: Museumsgrundriss mit den Bereichen A - D

ein Rundgang möglichst viele Gänge eines Bereiches enthalten. Auf Grund der Vorgaben entspricht die Rundgangsplanung einem SPP. Im Graphen  $G$  werden maximale Traces in  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  und  $v_4$  gesucht. Von diesen lassen sich die entsprechenden Rundgänge ableiten.

In Abbildung 2.26 ist für den Graphen aus Abbildung 2.25 zunächst eine maximale Kreispackung farbig dargestellt.

Die maximale Kreispackung enthält 16 Kreise, von denen jeweils vier Kreise genau einen der Knoten  $v_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) enthalten. Die Vereinigung der jeweiligen vier Kreise entspricht einem maximalen Trace in  $v_i$ . Man sieht, dass der maximale Trace in  $v_1$  alle Kanten des Bereiches A enthält. Dies gilt analog für die anderen drei Bereiche. Folglich bilden alle Wege innerhalb eines Bereiches genau einen Rundgang, mit dem die Besucher alle Ausstellungsstücke des jeweiligen Bereiches sehen können. Ein entsprechender Rundgangsplan ist an Hand des Graphen in Abbildung 2.25 farbig in der nachfolgenden Abbildung 2.27 veranschaulicht.

Die schwarzen Kanten repräsentieren die einzelnen Wege vom Eingang zu den Startpunkten der einzelnen Rundgänge. In jedem einzelnen Bereich sind alle Kanten mit der gleichen Farbe markiert, da die entsprechenden Wege einen Rundgang bilden.

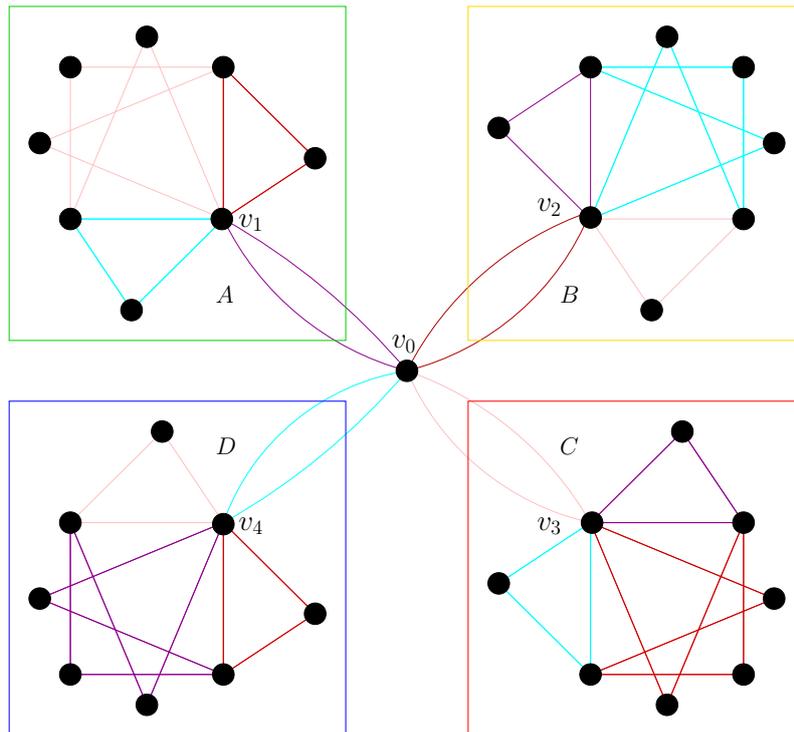


Abbildung 2.26: Eine maximale Kreispackung auf dem gegebenen Beispielgraphen

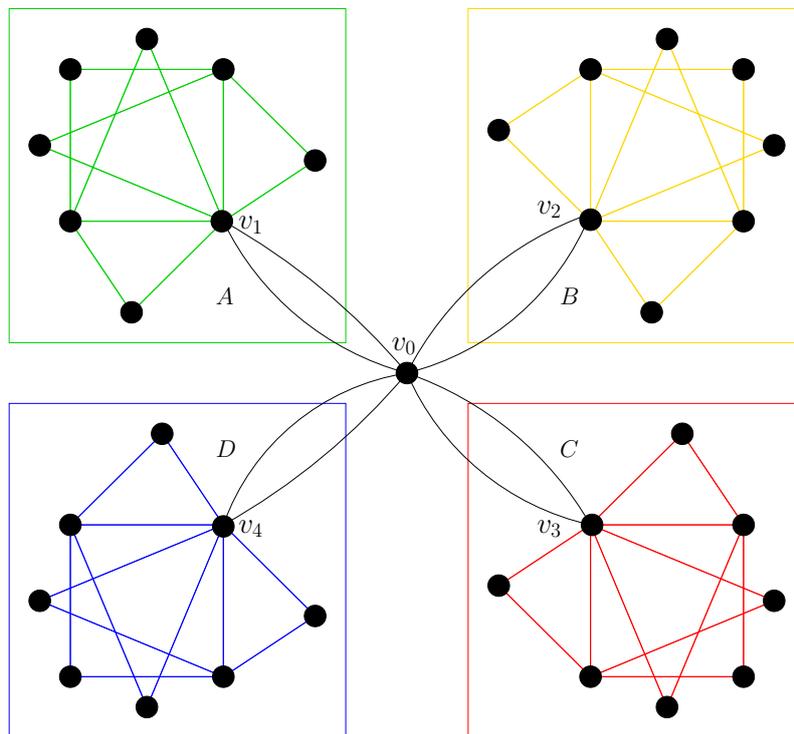


Abbildung 2.27: Museumsgrundriss mit den Rundgängen in den Bereichen A - D

In dem Beispiel wird deutlich, dass die Rundgangsplanung unter der Vorgabe zu den SPP gehört. Weiterhin wurde veranschaulicht, dass das Auffinden eines entsprechenden Rundgangsplans auf die Bestimmung einer maximalen Kreispackung zurückgeführt werden kann.

Nachdem verschiedene praktische Problemstellungen vorgestellt wurden, für deren Lösung man maximale Kreispackungen verwenden kann, wird in den folgenden Kapiteln die Bestimmung von  $\nu(G)$  und einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  unabhängig von einer praktischen Problemstellung betrachtet.

## 2.3 Theoretische Ergebnisse zur Bestimmung maximaler Kreispackungen

Sowohl das Auffinden einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$ , als auch das Bestimmen der Kreispackungszahl  $\nu(G)$  für einen Graphen  $G$  stellt ein Problem dar. Bislang wurde in den dargestellten Beispielgraphen eine maximale Kreispackung exakt bestimmt, woraus sich ebenfalls die Kreispackungszahl ergab. Es ist allerdings möglich, herzuleiten, welche Kreise eine maximale Kreispackung enthalten muss, ohne dabei eine maximale Kreispackung exakt zu bestimmen. In diesem Fall liegt keine exakte maximale Kreispackung vor und  $\nu(G)$  lässt sich nicht ableiten. Ein Beispiel dafür ist in Kapitel 4 zu finden. Ebenso kann man in einigen Fällen  $\nu(G)$  bestimmen, ohne eine maximale Kreispackung zu kennen.

Es gibt Graphenklassen, für die beide Problemstellungen gelöst wurden. Eine solche stellt die Klasse der vollständigen Graphen  $K_n$  dar.

Ein *vollständiger Graph*  $K_n = (V, E)$  ist ein Graph, für den gilt  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  und  $E := \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V \text{ und } i < j\}$ .

Im Jahr 1971 zeigten Chartrand, Geller und Hedetniemi als erste in [21], dass für einen Graphen  $K_n$  gilt:

$$\nu(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor.$$

Eine entsprechende maximale Kreispackung besteht in fast allen Fällen ausschließlich aus Kreisen der Länge drei. Lediglich im Fall  $n \bmod 6 = 5$  enthält eine maximale Kreispackung genau einen Kreis der Länge vier. Die übrigen Kreise haben ebenfalls eine Länge von drei (vgl. [21], [38], [46]).

Eine weitere Graphenklasse, für welche die Problemstellungen gelöst wurden, ist die Klasse der planaren Eulergraphen.

Ein *planarer Eulergraph* ist ein Eulergraph, welcher sich in der Ebene, ohne Überschneidung der Kanten, darstellen lässt.

Im Jahr 2001 zeigten Caprara, Panconesi und Rizzi in [16] und [17], dass man auf der Basis von [39] einen Algorithmus angeben kann, mit welchem man in polynomieller Zeit eine maximale Kreispackung für einen planaren Eulergraphen bestimmen kann.

In den nachfolgenden Kapiteln werden die beiden Problemstellungen für bestimmte Graphen weiter untersucht. Dabei gibt es zwei verschiedene Ansätze. Zum einen kann man sich, wie zuvor gesehen, spezielle Graphenklassen anschauen, und für diese Aussagen über  $\nu(G)$  und eine entsprechende maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  formulieren. Dies erfolgt in Kapitel 4 für die Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen.

Zum anderen kann man versuchen, strukturelle Eigenschaften eines Graphen zu nutzen, um für den entsprechenden Graphen  $G$  Aussagen über  $\nu(G)$  und  $\mathcal{P}(G)$  zu machen. Eine erste solche Eigenschaft liefert die Betrachtung des folgenden Beispiels.

**Beispiel 2.7:**

Gegeben sei folgender Graph  $G_1$  (Abbildung 2.28).

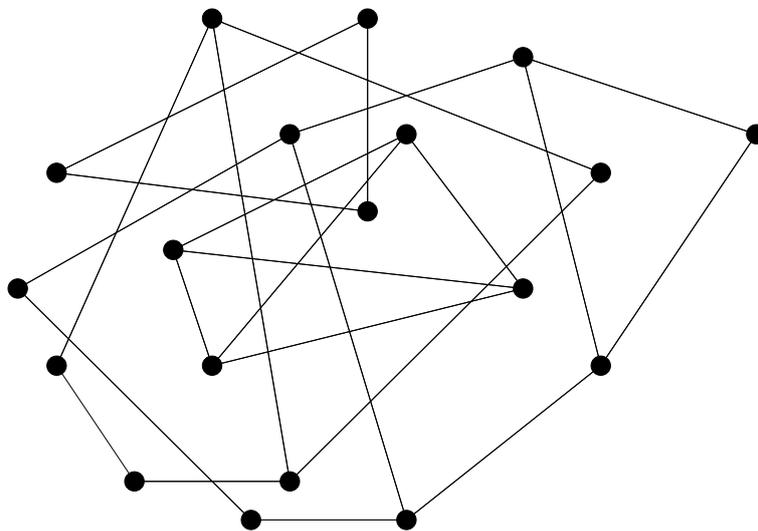
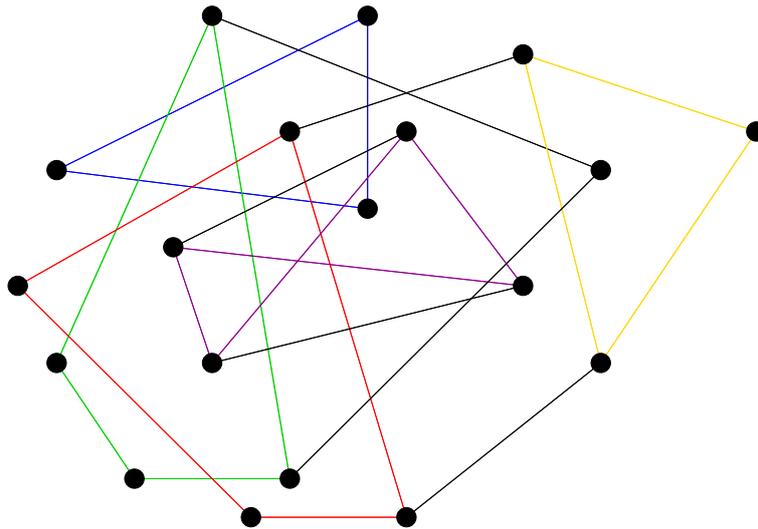


Abbildung 2.28: Ein Graph  $G_1$

Für den Graphen ist in Abbildung 2.29 eine Kreispackung farbig skizziert.

Die dort angegebene Kreispackung ist maximal. Dies erkennt man, indem man den Graphen in einer alternativen Darstellung betrachtet (vgl. Abb. 2.30). Es ist zu sehen, dass

Abbildung 2.29: Eine Kreispackung für den Beispielgraphen  $G_1$ 

der Graph aus vier Zusammenhangskomponenten besteht.

Für einen Graphen  $G = (V, E)$  ist eine *Zusammenhangskomponente*  $Z_i$  ein Untergraph  $Z_i = (V(Z_i), E(Z_i))$ , für den gilt:

- Für zwei beliebige Knoten  $v, w \in V(Z_i)$  gibt es einen Weg  $W$  von  $v$  nach  $w$  mit  $e \in E(Z_i)$  für alle  $e \in E(W)$ .
- Für jeden Knoten  $v \in V(Z_i)$  und jeden Knoten  $w \in V(G) \setminus V(Z_i)$  gibt es keinen Weg von  $v$  nach  $w$  in  $G$ .

$G$  ist die Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten. Besteht ein Graph aus genau einer Zusammenhangskomponente, so nennt man ihn *zusammenhängend*. Die *Zusammenhangszahl*  $\chi(G)$  ist definiert durch

$$\chi(G) := \min\{|V'| \mid V \setminus V' \text{ induziert einen nicht zusammenhängenden Untergraphen von } G\}.$$

Die Zusammenhangszahl  $\chi(G)$  gibt eine Mindestanzahl an Knoten von  $G$  an, welche man, zuzüglich aller mit diesen Knoten inzidenten Kanten, aus dem Graphen  $G$  entfernen muss, so dass durch die übrigen Knoten ein nicht zusammenhängender Untergraph von  $G$  induziert wird.

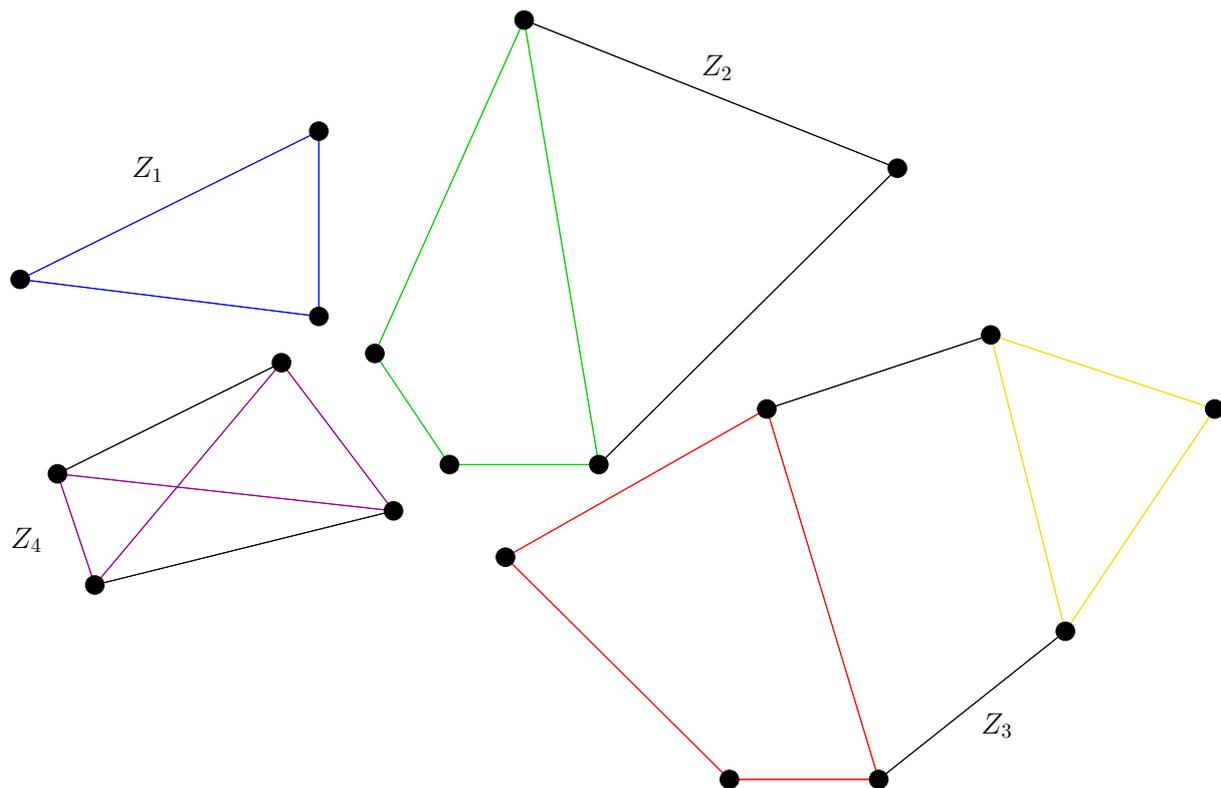


Abbildung 2.30: Eine maximale Kreispackung für den Beispielgraphen  $G_1$  mit vier Zusammenhangskomponenten

Im Beispiel ist es für jede dieser Zusammenhangskomponenten  $Z_1, \dots, Z_4$  leicht,  $\nu(Z_i)$  und eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(Z_i)$  für  $i = 1, \dots, 4$  zu bestimmen. Da nach [76]

$$\nu(G_1) = \sum_{i=1}^4 \nu(Z_i)$$

gilt, folgt  $\nu(G_1) = 5$ .

In dem Beispiel wird deutlich, dass man die einzelnen Zusammenhangskomponenten eines Graphen komponentenweise betrachten und daraus sowohl  $\nu(G_1)$  als auch eine maximale Kreispackung ableiten kann. Es gilt somit folgendes Lemma.

**Lemma 2.3:**

Für einen Graphen  $G$  seien  $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$  die Zusammenhangskomponenten von  $G$ . Zudem sei  $\mathcal{P}(Z_i)$  eine maximale Kreispackung von  $Z_i$  für  $i = 1, \dots, t$ . Dann ist

$$\mathcal{P}(G) = \bigcup_{i=1}^t \mathcal{P}(Z_i)$$

eine maximale Kreispackung von  $G$  und es gilt

$$\nu(G) = \sum_{i=1}^t \nu(Z_i).$$

**Beweis:**

Siehe [76]

□

Man kann vermuten, dass es „einfacher“ ist,  $\nu(G)$  und  $\mathcal{P}(G)$  für einen Graphen  $G$  mit wenigen Knoten und Kanten zu bestimmen. Daher stellt sich die Frage, ob es für zusammenhängende Graphen ebenfalls Möglichkeiten gibt, diese in Untergraphen zu zerlegen und nach deren Betrachtung Aussagen über  $\nu(G)$  zu machen. Ein Beispiel dafür lieferte der Contiguous USA Graph im Beispiel 2.3. Entfernt man aus dem Graphen den Knoten  $v_{NY}$ , entstehen zwei knotendisjunkte Untergraphen. Im Beispiel wurde bereits kurz erläutert, dass sich in diesem Fall aus den Untergraphen und dem entfernten Knoten zwei Graphen  $H_1$  und  $H_2$  ergeben, welche man wiederum separat betrachten kann.

In Abbildung 2.31 ist beispielhaft ein Graph  $G = (V, E)$  dargestellt, für den gilt, dass der durch  $V \setminus \{x\}$  induzierte Untergraph von  $G$  nicht zusammenhängend ist. Man nennt den Knoten  $x$  einen *Schnittknoten*.

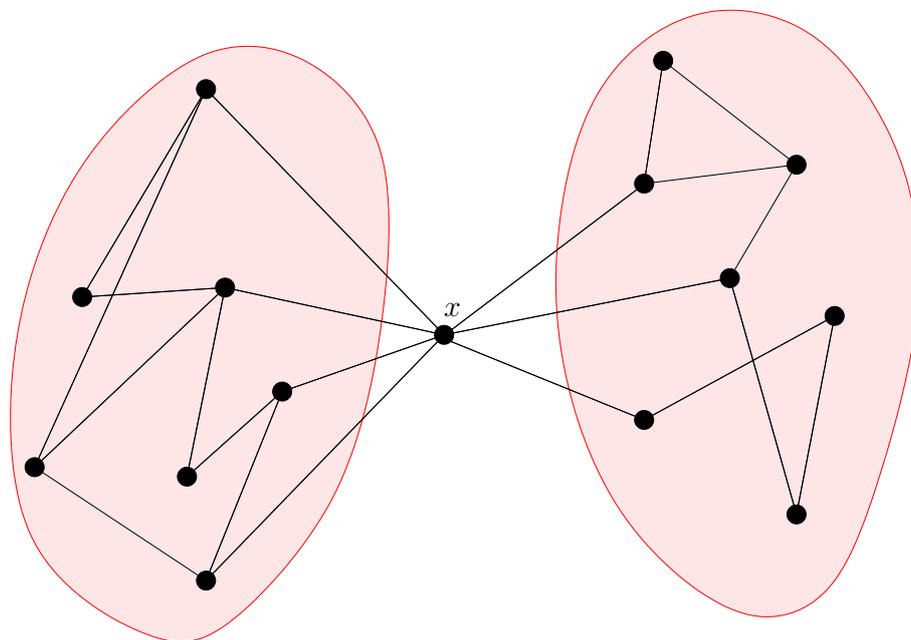


Abbildung 2.31: Veranschaulichung eines Graphen mit einem Schnittknoten  $x$

Entfernt man den Schnittknoten  $x$  und alle mit  $x$  inzidenten Kanten aus dem Graphen, so entstehen zwei Untergraphen  $G_1$  und  $G_2$ . Dies ist für den gegebenen Graphen  $G$  in

Abbildung 2.32 zu erkennen.

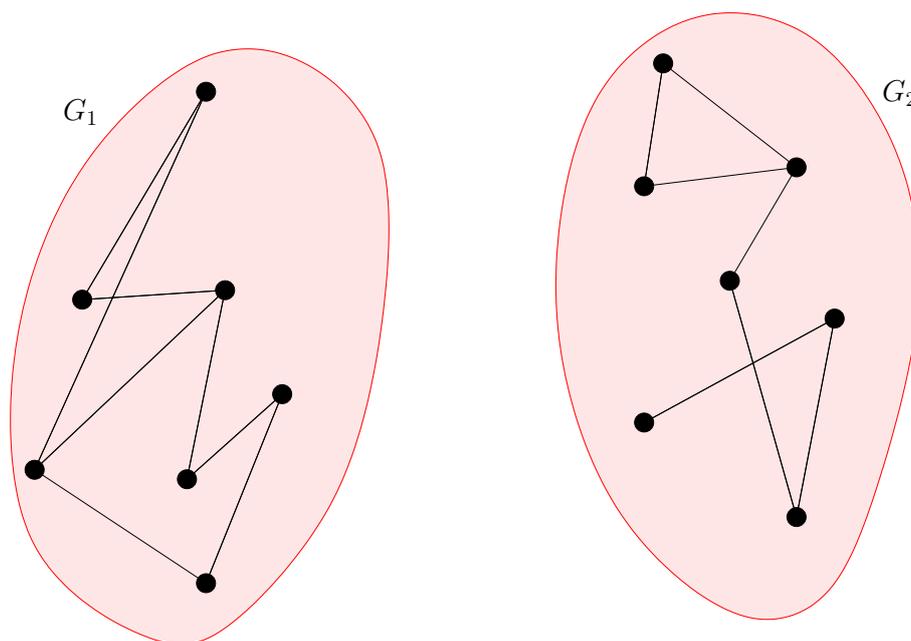


Abbildung 2.32: Veranschaulichung der Untergraphen  $G_1$  und  $G_2$

Betrachtet man einen Kreis als Knoten- und Kantenfolge, so muss jeder Kreis, welcher sowohl Kanten aus  $E(G_1)$ , als auch Kanten aus  $E(G_2)$  enthalten soll, den Knoten  $x$  mindestens zwei Mal enthalten. Dies ist ein Widerspruch zu der Definition eines Kreises. Folglich existieren solche Kreise nicht und man kann in diesem Fall die Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$ , welche sich aus den Graphen  $G_1$  bzw.  $G_2$  und dem Knoten  $x$  ergeben (vgl. Abbildung 2.33), separat betrachten.

Allgemein ergibt sich folgendes Lemma.

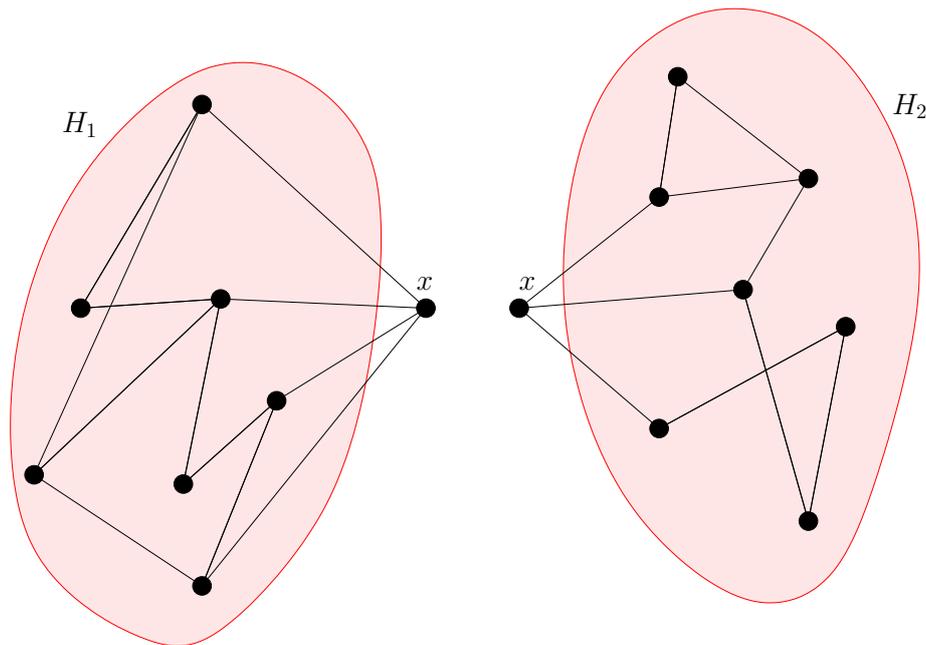
**Lemma 2.4:**

Gegeben sei ein Graph  $G = (V(G), E(G))$  mit einem Knoten  $x \in V(G)$ , für den gilt, dass der durch  $V(G) \setminus \{x\}$  induzierte Untergraph  $\tilde{G}$  nicht zusammenhängend ist. Zudem seien  $G_1, \dots, G_t$  die Zusammenhangskomponenten von  $\tilde{G}$  und

$$H_i := (V(G_i) \cup \{x\}, E(G_i) \cup \{(x, y) \in E(G) \mid y \in V(G_i)\})$$

für alle  $i = 1, \dots, t$ . Weiterhin sei  $\mathcal{P}(H_i)$  eine maximale Kreispackung für  $H_i$  mit  $i = 1, \dots, t$ . Dann ist

$$\mathcal{P}(G) = \bigcup_{i=1}^t \mathcal{P}(H_i)$$

Abbildung 2.33: Veranschaulichung der Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$ 

eine maximale Kreispackung von  $G$  und es gilt

$$\nu(G) = \sum_{i=1}^t \nu(H_i).$$

**Beweis:**

Siehe [76]

□

Im allgemeinen Fall kann man für einen zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  eine Menge von Knoten  $S \subseteq V$  bestimmen, so dass die Knotenmenge  $V \setminus S$  einen nicht zusammenhängenden Untergraphen induziert. Eine solche Menge  $S$  nennt man einen *Knotenseparator*. Enthält  $S$  mindestens zwei Knoten, ist es, analog zum zuvor beschriebenen Vorgehen, möglich Untergraphen von  $G$  zu konstruieren, nach deren Analyse man Aussagen über  $\mathcal{P}(G)$  und  $\nu(G)$  machen kann. Dies wird im nachfolgenden Kapitel detailliert erläutert.

## Kapitel 3

# Die Bestimmung der Kreispackungszahl und einer maximalen Kreispackung unter der Verwendung von Knotenseparatoren

In dem nachfolgenden Kapitel werden für bestimmte Graphen die Kreispackungszahl und eine maximale Kreispackung unter der Zuhilfenahme von Knotenseparatoren bestimmt. Dazu werden zunächst die Knotenseparatoren eingeführt. Anschließend werden zwei Spezialfälle betrachtet. Im abschließenden Unterkapitel wird der allgemeine Fall dargestellt. Erste Ergebnisse zum Zusammenhang von maximalen Kreispackungen und Knotenseparatoren gab es im Jahr 2008 von P. Recht, J. Harant, D. Rautenbach und I. Schiermeyer. Die Aussagen für die beiden Spezialfälle sind zu großen Teilen dem Arbeitspapier aus dem Jahr 2008 entnommen und wurden in Zusammenarbeit mit P. Recht beweistechnisch korrigiert und überarbeitet. Die im letzten Unterkapitel beschriebenen, wesentlichen Sätze wurden gemeinschaftlich in [48] veröffentlicht.

Die Idee, Knotenseparatoren zur Bestimmung der Kreispackungszahl und einer maximalen Kreispackung eines Graphen  $G = (V, E)$  zu nutzen, basiert auf der Vermutung, dass es in einem Graphen mit einer geringen Knoten- und Kantenanzahl im Allgemeinen „einfacher“ ist, eine maximale Kreispackung und die Kreispackungszahl zu bestimmen. Mittels eines Knotenseparators soll der Graph  $G$  in zwei Untergraphen „aufgeteilt“ werden. Diese Untergraphen werden modifiziert. In den modifizierten Untergraphen wird dann die Kreispackungszahl und eine maximale Kreispackung bestimmt, um daraus  $\nu(G)$  und eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  herzuleiten. Haben die Untergraphen wiederum eine große

Anzahl an Knoten und Kanten, kann man diese im Allgemeinen mittels eines Knotenseparators weiter unterteilen. Das beschriebene Vorgehen wird nachfolgend veranschaulicht. Sei zunächst die Definition eines  $k$ -Knotenseparators gegeben.

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $S, V_1, V_2 \subset V$  paarweise disjunkte nicht leere Teilmengen von  $V$  mit  $S \cup V_1 \cup V_2 = V$ . Die Knotenmenge  $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$  wird ein  $k$ -Knotenseparator (oder kurz  $k$ -Separator oder *Separator*) genannt, falls keine Kante  $e = (u, w) \in E$  existiert, so dass  $u \in V_1$  und  $w \in V_2$ . Die Knoten  $v_1, \dots, v_k$  bezeichnet man als *Separator-knoten*.

Die Definition wird an Hand der nachfolgenden Abbildung 3.1 veranschaulicht.

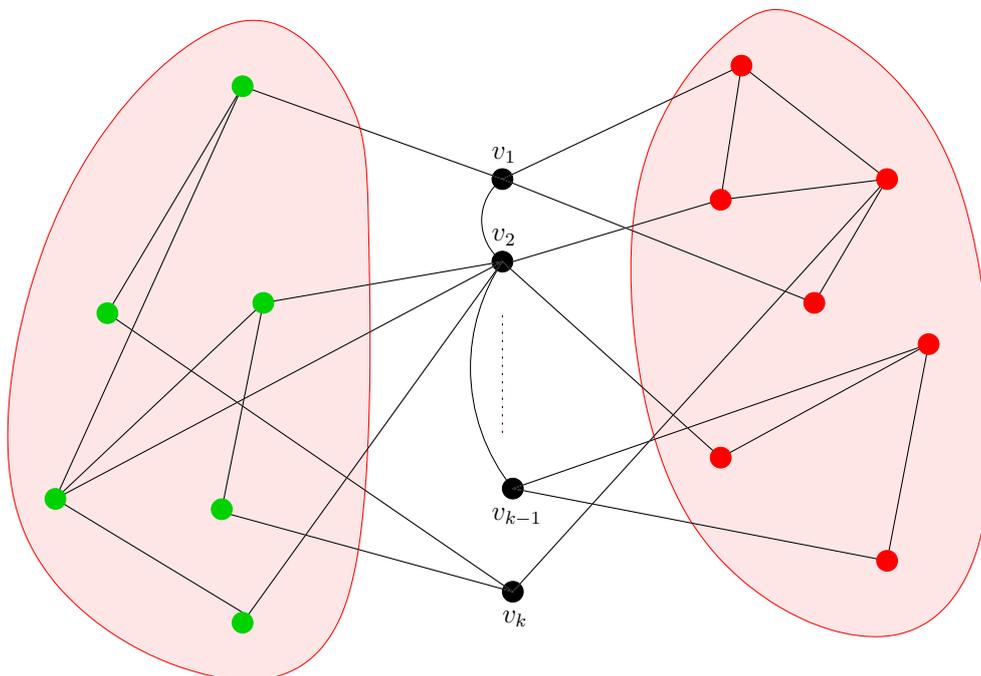


Abbildung 3.1: Veranschaulichung eines  $k$ -Separators in einem gegebenen Graphen  $G$

In Abbildung 3.1 ist ein Graph  $G$  mit einem Knotenseparator  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$  dargestellt. Die Knotenmenge  $V_1$  entspricht der Menge der grün markierten Knoten. Die Menge  $V_2$  enthält die rot markierten Knoten. Der Untergraph  $G \setminus S$ , welcher durch die Knotenmenge  $V \setminus S$  induziert wird, besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten. Es gibt somit keine zwei Knoten  $u \in V_1$  und  $w \in V_2$ , so dass eine Kante  $(u, w) \in E$  existiert. Es ist zu erkennen, dass die, durch  $V_1$  bzw.  $V_2$ , induzierten Untergraphen  $G_1$  und  $G_2$  zusammenhängend sind. Dies muss nicht gegeben sein. Für einen betrachteten Graphen gibt es im Allgemeinen mehrere Separatoren mit einer unterschiedlichen Anzahl von Separator-knoten. Es kann aber auch verschiedene Separatoren mit der gleichen Anzahl von Separator-knoten geben.

Die Bestimmung der Zusammenhangszahl eines Graphen, sowie das Auffinden eines Separators in einem gegebenen Graphen sind kein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit. Es wird angenommen, dass ein entsprechender Separator vorab bestimmt wurde. Für das Vorgehen zum Bestimmen eines Separators wird auf [10], [34] und [35] verwiesen. Diverse Verfahren, mit denen man für einen Graphen einen  $k$ -Separator mit minimaler Kardinalität bestimmen kann, sind bspw. in [51], [52], [55] und [65] beschrieben.

Es sei also im Folgenden  $G = (V, E)$  ein Graph und  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$  ein  $k$ -Separator von  $G$ . Zudem seien  $V_1$  und  $V_2$  wie zuvor definiert. Man betrachtet nun die beiden Untergraphen  $G_i$ , welche durch die Knotenmengen  $V_i$ , für  $i = 1, 2$ , induziert werden, sowie den durch  $S$  induzierten Untergraphen  $G_S$ . Die Untergraphen werden in Abbildung 3.2 an Hand des Graphen aus Abbildung 3.1 veranschaulicht.

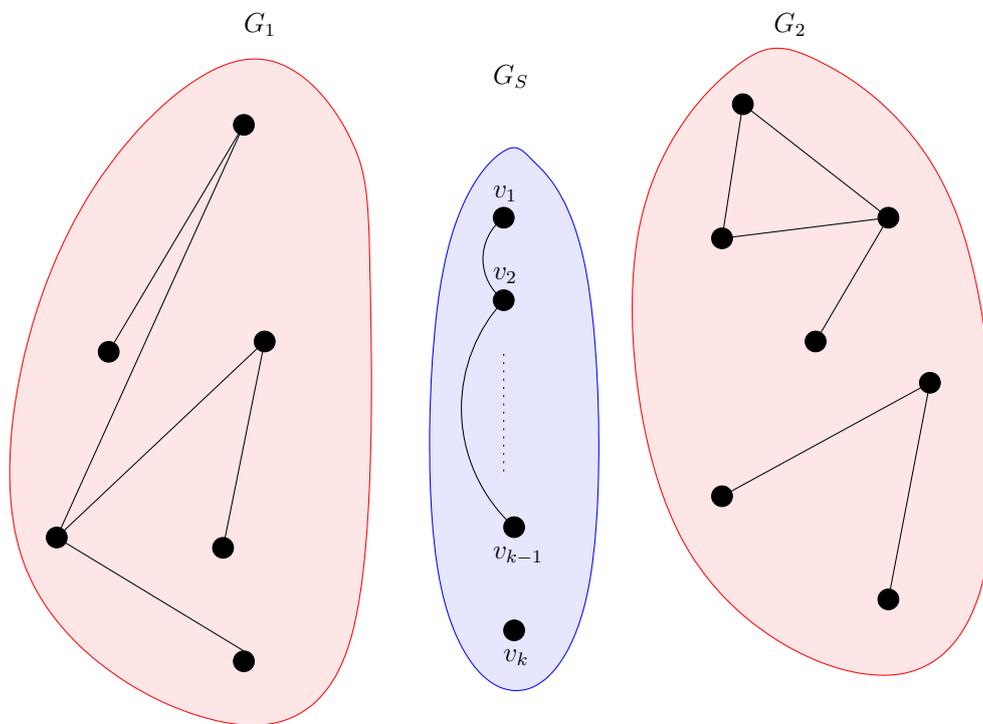


Abbildung 3.2: Veranschaulichung eines  $k$ -Separators  $S$  mit den induzierten Untergraphen  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_S$

Für den Fall, dass  $|E(G_S)| > 0$ , wird der Graph  $G$  modifiziert. Dazu werden alle Kanten aus  $E(G_S)$  unterteilt, indem man sie jeweils durch einen neuen Knoten und zwei Kanten ersetzt. Für jede Kante  $e = (v_i, v_j) \in E(G_S)$  wird ein Knoten  $u$  in  $G$  eingefügt und  $e$  durch zwei neue Kanten  $e_1 = (v_i, u)$  und  $e_2 = (u, v_j)$  ersetzt. Der Knoten  $u$  wird einer der beiden Mengen  $V_1$  oder  $V_2$  zugeordnet. Man erhält die Mengen  $V_1^*$  und  $V_2^*$ . Der modifizierte Graph wird  $H$  genannt. Es gilt  $S, V_1^*, V_2^* \subset V(H)$  mit  $V_1^* \cap S = \emptyset$ ,  $V_2^* \cap S = \emptyset$ ,  $V_1^* \cap V_2^* = \emptyset$  und  $V_1^* \cup V_2^* \cup S = V(H)$ . Zudem existiert keine Kante  $e = (u, w) \in E(H)$ , so dass  $u \in V_1^*$

und  $w \in V_2^*$  ist. Folglich gilt  $|V(G)| \leq |V(H)|$ ,  $\nu(G) = \nu(H)$  und  $S$  ist ein  $k$ -Separator für den Graphen  $H$ . Das Vorgehen ist beispielhaft in der nachfolgenden Abbildung 3.3 zu erkennen. Es wurde wiederum der Graph aus Abbildung 3.1 zu Grunde gelegt.

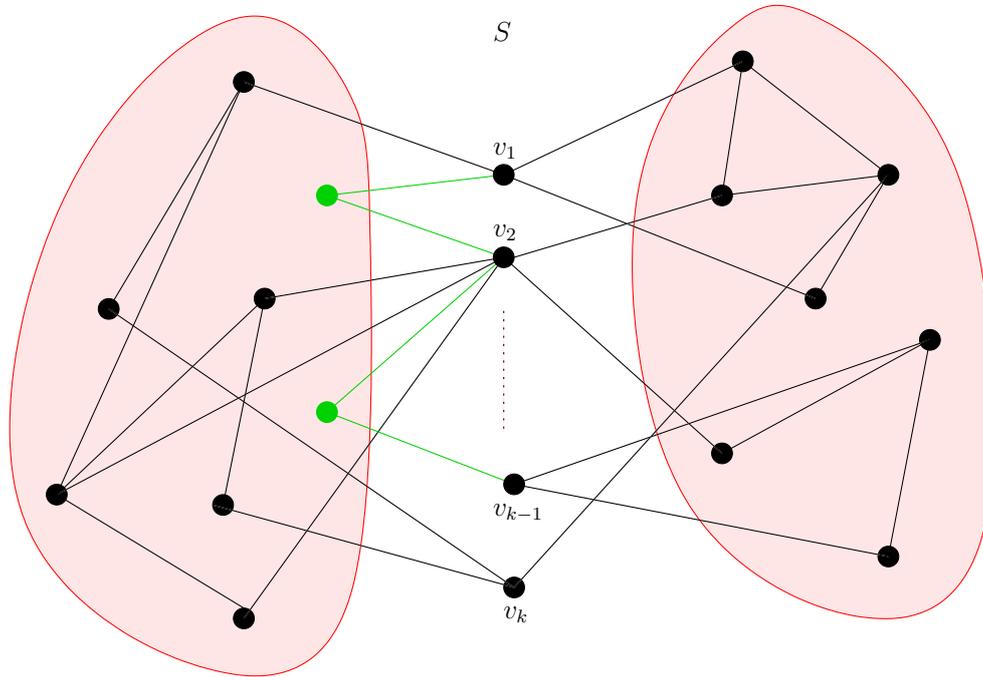


Abbildung 3.3: Veranschaulichung eines  $k$ -Separators  $S$  im Graphen  $H$

Wie man sieht, wurden die beiden Kanten  $(v_1, v_2)$  und  $(v_2, v_{k-1})$  durch je einen neuen Knoten und zwei neue Kanten ersetzt. Diese sind in Abbildung 3.3 grün markiert. Die beiden neuen Knoten wurden der Menge  $V_1$  zugeordnet.

Da  $H$  lediglich durch das Unterteilen von Kanten aus  $G$  entsteht, gilt  $\nu(G) = \nu(H)$ . Daher kann im Folgenden immer von einem Graphen  $H$  ohne adjazente Separatorknoten ausgegangen werden. Man betrachtet die zwei modifizierten Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$ . Dabei sei  $H_1 = (V(H_1), E(H_1))$  der durch  $V(H_1) := V_1^* \cup S$  induzierte modifizierte Untergraph und  $H_2 = (V(H_2), E(H_2))$  der durch  $V(H_2) := V_2^* \cup S$  induzierte modifizierte Untergraph von  $H$ . Für den Beispielgraphen  $H$  aus Abbildung 3.3 sind die modifizierten Untergraphen in Abbildung 3.4 dargestellt.

Allgemein gilt offenbar:

$$\nu(H) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2)$$

Die Gleichheit ergibt sich, falls eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H)}\}$  existiert, so dass für jeden Kreis  $C_j$  mit  $j = 1, \dots, \nu(H)$  gilt, dass es  $i \in \{1, 2\}$  gibt, so dass  $V(C_j) \cap V_i^* = \emptyset$ . Das bedeutet, dass  $\mathcal{P}(H)$  keinen Kreis erhält, der sowohl Knoten

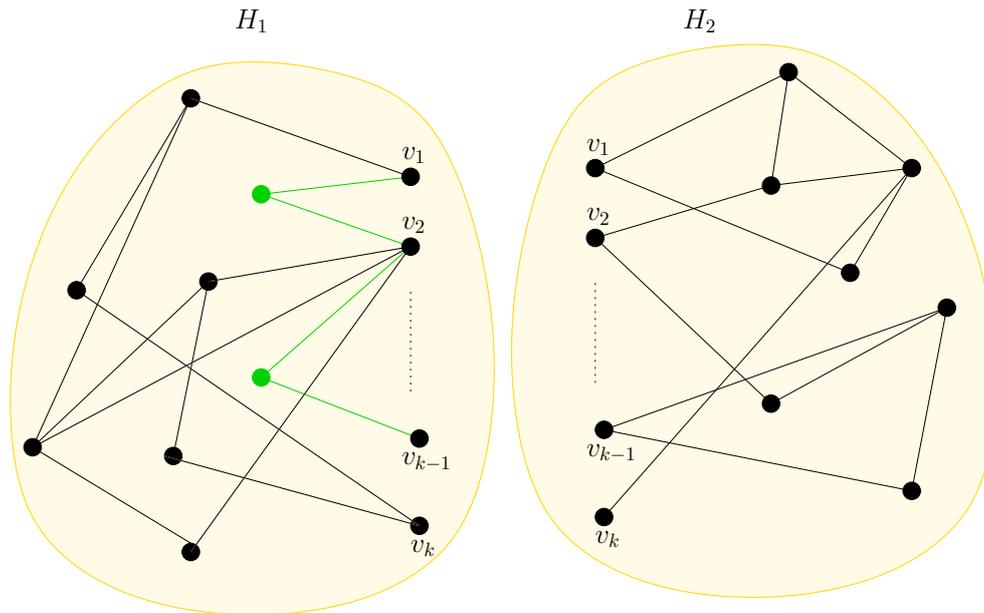


Abbildung 3.4: Veranschaulichung der modifizierten Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$  des Graphen  $H$

aus  $V_1^*$ , als auch Knoten aus  $V_2^*$  hat. Ein Kreis in  $G$ , der sowohl Knoten aus  $V_1^*$ , als auch Knoten aus  $V_2^*$  besitzt, wird als *Übergangskreis* bezeichnet.

Zur Veranschaulichung der Übergangskreise sei der Beispielgraph  $H$  aus Abbildung 3.3 erneut betrachtet (vgl. Abb. 3.5).

In der Abbildung ist zu erkennen, dass die blau markierten Kanten (sowie die grün markierten Kanten) keinen Übergangskreis bilden. Ausschließlich die rot markierten Kanten ergeben einen Kreis, welcher sowohl Knoten aus  $V_1^*$ , als auch Knoten aus  $V_2^*$ , enthält. Dieser Kreis ist demnach ein Übergangskreis. Ist es nun zwingend notwendig, dass der rot markierte Kreis in jeder maximalen Kreispackung von  $H$  enthalten ist, so folgt  $\nu(H) > \nu(H_1) + \nu(H_2)$ .

Um aus Größen  $\nu(H_1)$  und  $\nu(H_2)$  die Kreispackungszahl  $\nu(H)$  herzuleiten, ist es bei der Analyse der modifizierten Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$  notwendig, zu überprüfen, ob es maximale Kreispackungen ohne Übergangskreise gibt, bzw. wie viele Übergangskreise in jeder maximalen Kreispackung  $H$  mindestens enthalten sind. Dies erfolgt durch die Hinzunahme einzelner Kanten bei der Analyse von  $H_1$  und  $H_2$ . Dazu sei definiert:

$$H + F := (V(H), E(H) \cup F),$$

wobei  $F \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V(H), u \neq v\}$  eine Kantenmenge ist.

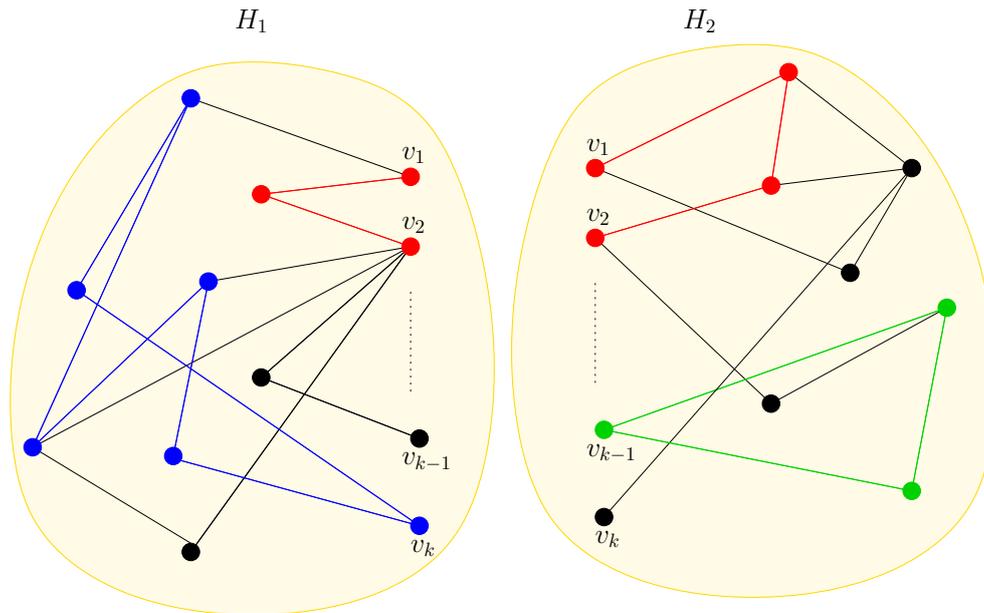


Abbildung 3.5: Veranschaulichung eines Übergangskreises in den modifizierten Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$  des Graphen  $H$

Außerdem sei für eine Kante  $e$

$$H + e := (V(H), E(H) \cup \{e\}).$$

Analog sei  $H \setminus F := (V(H), E(H) \setminus F)$ , wobei  $F \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V(H), u \neq v\}$  eine Kantenmenge ist und  $H \setminus e := (V(H), E(H) \setminus \{e\})$  für eine Kante  $e$ .

Es sei zunächst folgendes Lemma bewiesen.

**Lemma 3.1:**

Sei  $H$  ein Graph und  $\mathcal{P}(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$ . Für  $v, w \in V$  sei  $e = (v, w) \notin E(H)$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

1.) Es gilt:

$$\nu(H) \leq \nu(H + e) \leq \nu(H) + 1$$

2.) Seien  $C_i, C_j \in \mathcal{P}(H)$  mit  $C_i \neq C_j$ , so gilt:

$$|V(C_i) \cap V(C_j)| \leq 2$$

**Beweis:**

1.) Es gilt  $\nu(H) \leq \nu(H + e)$ , da eine maximale Kreispackung in  $H$  eine Kreispackung für  $H + e$  ist. Zudem kann  $e$  höchstens in einem weiteren Kreis enthalten sein. Damit

ergibt sich  $\nu(H + e) \leq \nu(H) + 1$ .

- 2.) Man nehme an, dass es in der maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}(H)$  zwei Kreise  $C_i$  und  $C_j$  gibt mit  $|V(C_i) \cap V(C_j)| =: I \geq 3$ . Der Untergraph  $\bar{H} = (\bar{V}, \bar{E})$  von  $H$  mit  $\bar{V} = V(C_i) \cup V(C_j)$  und  $\bar{E} = E(C_i) \cup E(C_j)$  enthält mindestens drei Knoten  $v$  mit  $\delta(v) = 4$ . Für jeden weiteren Knoten  $\bar{v}$  ergibt sich  $\delta(\bar{v}) = 2$ . Sei  $C \subset \bar{H}$  ein Kreis, dessen Knotenmenge mindestens einen und maximal  $I - 1$  Knoten aus  $V(C_i) \cap V(C_j)$  enthält und  $\tilde{H} = \bar{H} \setminus C$ . Ein solcher Kreis  $C$  existiert, da  $I \geq 3$ . Zur Konstruktion von  $C$  betrachte man zwei Knoten  $y, z \in \bar{V}$  und nutze die vier kantendisjunkten Wege von  $y$  nach  $z$  in  $\bar{H}$ . Sei weiterhin  $A := \{w \in V(\tilde{H}) \mid \delta(w) = 0\}$ . Dann ist  $\hat{H} = (V(\hat{H}), E(\hat{H}))$  mit  $V(\hat{H}) = V(\tilde{H}) \setminus A$  und  $E(\hat{H}) = E(\tilde{H})$  ein Graph, dessen Knoten alle einen geraden Knotengrad haben. Weiterhin hat mindestens ein Knoten den Grad vier. Damit enthält  $\hat{H}$  mindestens zwei Kreise und man kann  $C_i$  und  $C_j$  in  $\mathcal{P}(H)$  durch drei Kreise ersetzen. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $\mathcal{P}(H)$ .  $\square$

Die Aussage 1.) von Lemma 3.1 besagt, dass sich durch das Hinzufügen einer Kante  $e$  zur Kantenmenge eines Graphen dessen Kreispackungszahl nicht verringert und höchstens um eins erhöht. Dies liegt daran, dass es möglich ist, mit der neu eingefügten Kante einen zusätzlichen Kreis zu finden. Es wird maximal ein zusätzlicher Kreis gefunden, da die Kante in höchstens einem Kreis einer Kreispackung enthalten ist. Lemma 3.1 2.) besagt, dass zwei Kreise einer maximalen Kreispackung höchstens zwei gemeinsame Knoten haben.

Das genaue Vorgehen zur Analyse der modifizierten Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$  wird in den nachfolgenden zwei Unterkapiteln an Hand der Betrachtung von Graphen mit einem 2-Separator bzw. mit einem 3-Separator näher erläutert. Dazu sei folgende Definition gegeben

Für einen Graphen  $H$  sei  $\mathcal{C}(H)$  die Menge aller maximalen Kreispackungen von  $H$ . Es sei

$$\mathcal{C}_a(H) := \{\{C_1, \dots, C_{\nu(H)}\} \in \mathcal{C}(H) \mid \{C_1, \dots, C_{\nu(H)}\} \text{ hat genau } a \text{ Übergangskreise}\}$$

und

$$\mathcal{C}_{\leq a}(H) := \{\{C_1, \dots, C_{\nu(H)}\} \in \mathcal{C}(H) \mid \{C_1, \dots, C_{\nu(H)}\} \text{ hat höchstens } a \text{ Übergangskreise}\}.$$

Die Menge  $\mathcal{C}_a(H)$  enthält alle maximalen Kreispackungen von  $H$  mit genau  $a$  Übergangskreisen. Entsprechend beinhaltet die Menge  $\mathcal{C}_{\leq a}(H)$  alle maximalen Kreispackungen von

$H$  mit höchstens  $a$  Übergangskreisen. Für die definierten Mengen lässt sich für  $a = 0$  und  $\nu(H)$ , unabhängig von der Anzahl der Separatorknoten eines  $k$ -Separators von  $H$ , zeigen, dass  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2)$  gilt, falls mindestens eine maximale Kreispackung ohne Übergangskreise existiert, somit  $\mathcal{C}_0(H) \neq \emptyset$  ist.

**Lemma 3.2:**

Sei  $H$  ein Graph und  $S$  ein  $k$ -Separator von  $H$ , dann gilt

$$\mathcal{C}_0(H) \neq \emptyset \text{ genau dann, wenn } \nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2).$$

**Beweis:**

$\Rightarrow$

Sei  $\mathcal{C}_0(H) \neq \emptyset$  und  $\mathcal{P}(H) \in \mathcal{C}_0(H)$  eine maximale Kreispackung, dann lässt sich  $\mathcal{P}(H)$  darstellen als  $\mathcal{P}(H) = \mathcal{P}_1(H) \cup \mathcal{P}_2(H)$  mit  $\mathcal{P}_1(H) \cap \mathcal{P}_2(H) = \emptyset$  und  $V(\mathcal{P}_1(H)) \cap V(H_2) = \emptyset$ , sowie  $V(\mathcal{P}_2(H)) \cap V(H_1) = \emptyset$ . Es folgt, dass  $\mathcal{P}_i(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H_i$  ist, da andernfalls  $\mathcal{P}(H)$  nicht maximal ist. Damit folgt  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2)$ .

$\Leftarrow$

Sei  $\mathcal{P}_i(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H_i$  für  $i = 1, 2$ , so ist  $\mathcal{P}(H) = \mathcal{P}_1(H) \cup \mathcal{P}_2(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit  $\mathcal{P}(H) \in \mathcal{C}_0(H)$ .  $\square$

Für einen Graph  $H$ , welcher einen 1-Separator  $S = \{x\}$  besitzt, gilt immer, dass es eine maximale Kreispackung ohne Übergangskreise gibt. Dies wird in dem folgenden Lemma gezeigt.

**Lemma 3.3:**

Sei  $H$  ein Graph mit einem 1-Separator  $S = \{x\}$  von  $H$ , dann gilt

$$\mathcal{C}_0(H) \neq \emptyset.$$

**Beweis:**

Sei  $\mathcal{C}_0(H) = \emptyset$ . Sei  $i$  die kleinste Zahl, für die gilt  $\mathcal{C}_i(H) \neq \emptyset$  und  $\mathcal{P}(H) \in \mathcal{C}_i(H)$  eine maximale Kreispackung. Es folgt, dass es eine Menge  $\{C_1, \dots, C_i\} \subseteq \mathcal{P}(H)$  von Kreisen aus  $\mathcal{P}(H)$  gibt, für welche gilt  $x \in V(C_j), \forall j = 1, \dots, i$ . Sei  $i \geq 1$ . Man betrachte den Kreis  $C_1 \in \{C_1, \dots, C_i\}$  der Länge  $d(C_1)$ . Dann ist  $C_1 = (x, v_{1_2}, \dots, v_{1_{k-1}}, x, v_{1_{k+1}}, \dots, v_{1_{d(C_1)}})$  mit  $\{v_{1_2}, \dots, v_{1_{k-1}}\} \subseteq V(H_1)$  und  $\{v_{1_{k+1}}, \dots, v_{1_{d(C_1)}}\} \subseteq V(H_2)$ . Folglich hätte der Knoten  $x$  in  $C_1$  einen Knotengrad von vier, was der Definition eines Kreises widerspricht.  $\square$

### 3.1 Aussagen für Graphen mit 2-Separatoren bzw. 3-Separatoren

In den folgenden Unterkapiteln werden ausschließlich Graphen betrachtet, welche mindestens einen 2-Separator, bzw. mindestens einen 3-Separator haben. Wie zuvor beschrieben, werden diese Graphen mittels der Separatoren in Untergraphen unterteilt und in der modifizierten Form bezüglich der Übergangskreise untersucht. Im letzten Unterkapitel werden die Ergebnisse algorithmisch umgesetzt.

#### 3.1.1 Aussagen für Graphen, die einen 2-Separator enthalten

Im folgenden Unterkapitel sei  $H$  ein Graph, für den ein 2-Separator  $S = \{x, y\}$  existiert. Wie zuvor festgelegt, enthalte  $H$  keine Kanten  $(x, y)$ . Das folgende Lemma 3.4 liefert die Aussage, dass es in einem Graphen mit einem 2-Separator immer eine maximale Kreispackung mit einem oder keinem Übergangskreis gibt. Eine Vorüberlegung dazu sei zunächst in Abbildung 3.6 beispielhaft veranschaulicht.

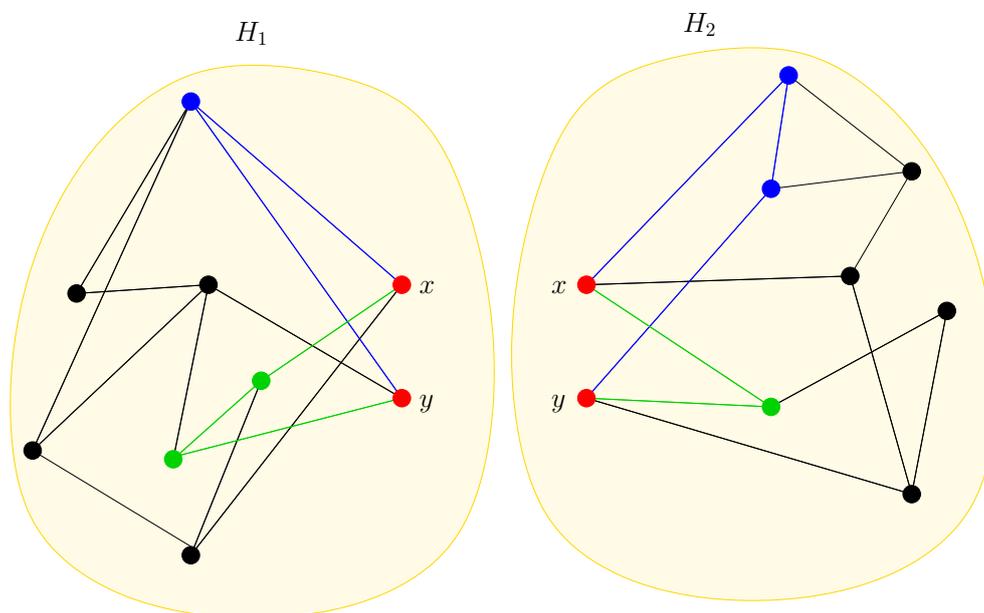


Abbildung 3.6: Veranschaulichung zweier Übergangskreise in einem Graphen mit einem 2-Separator

In der Abbildung sind zwei Übergangskreise  $C_1$  (blau markiert) und  $C_2$  (grün markiert)

zu sehen. Man kann erkennen, dass man aus den beiden Kreisen zwei neue Kreise konstruieren kann, welche keine Übergangskreise sind. Dabei ersetzt man in  $C_1$  den Teil der Knotenfolge, welcher Knoten aus  $H_1$  enthält, durch den Teil der Knotenfolge von  $C_2$ , welcher Knoten aus  $H_2$  enthält, und umgekehrt. Mit diesem Vorgehen kann man aus einer Kreispackung mit zwei oder mehr Übergangskreisen eine Kreispackung mit keinem oder höchstens einem Übergangskreis konstruieren. Somit erhält man:

**Lemma 3.4:**

Sei  $H$  ein Graph und  $S = \{x, y\}$  ein 2-Separator von  $H$ , dann gilt

$$\mathcal{C}_{\leq 1}(H) \neq \emptyset.$$

**Beweis:**

Sei angenommen, dass  $\mathcal{C}_{\leq 1}(H) = \emptyset$ , dann folgt  $\mathcal{C}_0(H) = \mathcal{C}_1(H) = \emptyset$ . Sei  $i$  die kleinste Zahl, für die gilt  $\mathcal{C}_i(H) \neq \emptyset$  und  $\mathcal{P}(H) \in \mathcal{C}_i(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$ . Damit ergibt sich, dass es eine Menge  $\{C_1, \dots, C_i\} \subseteq \mathcal{P}(H)$  von Kreisen aus  $\mathcal{P}(H)$  gibt, für welche gilt  $x, y \in V(C_j)$  für alle  $j = 1, \dots, i$ . Es gilt  $i \geq 2$ . Man betrachte die Kreise  $C_1, C_2 \in \{C_1, \dots, C_i\}$ . Der Kreis  $C_1$  bzw.  $C_2$  hat die Länge  $d(C_1)$ , bzw.  $d(C_2)$ . Dann ist  $C_1 = (x, v_{1_2}, \dots, v_{1_{k-1}}, y, v_{1_{k+1}}, \dots, v_{1_{d(C_1)}})$  und  $C_2 = (x, v_{2_2}, \dots, v_{2_{l-1}}, y, v_{2_{l+1}}, \dots, v_{2_{d(C_2)}})$ . O. B. d. A. sei angenommen, dass  $\{v_{1_2}, \dots, v_{1_{k-1}}\} \subseteq V(H_1)$  und  $\{v_{1_{k+1}}, \dots, v_{1_{d(C_1)}}\} \subseteq V(H_2)$ , sowie  $\{v_{2_2}, \dots, v_{2_{l-1}}\} \subseteq V(H_1)$  und  $\{v_{2_{l+1}}, \dots, v_{2_{d(C_2)}}\} \subseteq V(H_2)$  gilt. Es seien  $\bar{C}_1 = (x, v_{1_2}, \dots, v_{1_{k-1}}, y, v_{2_{l-1}}, \dots, v_{2_2})$  und  $\bar{C}_2 = (y, v_{2_{l+1}}, \dots, v_{2_{d(C_2)}}, x, v_{1_{d(C_1)}}, \dots, v_{1_{k+1}})$  zwei neue Kreise. Man ersetze  $C_1$  und  $C_2$  in  $\mathcal{P}(H)$  durch  $\bar{C}_1$  und  $\bar{C}_2$ . In diesem Fall erhält man wieder eine maximale Kreispackung mit  $i - 2$  Übergangskreisen. Dies ist ein Widerspruch zur Aussage, dass  $i$  die Mindestanzahl von Übergangskreisen in einer maximalen Kreispackung von  $H$  ist.  $\square$

Unter Ausnutzung von Lemma 3.2 und 3.4 kann man weiterhin das Folgende zeigen:

**Lemma 3.5:**

Sei  $H$  ein Graph und  $S = \{x, y\}$  ein 2-Separator von  $H$ , dann gilt

$$\mathcal{C}_0(H) = \emptyset \text{ und } \mathcal{C}_1(H) \neq \emptyset \text{ genau dann, wenn } \nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$$

**Beweis:**

$\Rightarrow$

Wegen Lemma 3.2 ergibt sich  $\nu(H) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ . Eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H) \in \mathcal{C}_1$  hat genau einen Übergangskreis und damit höchstens  $\nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  Kreise.

←

Wegen Lemma 3.2 folgt  $\mathcal{C}_0 = \emptyset$  und Lemma 3.4 liefert  $\mathcal{C}_1 \neq \emptyset$ . □

In den beiden Lemmata 3.4 und 3.5 werden ausschließlich Aussagen über den Zusammenhang von  $\nu(H)$  und der Anzahl von Übergangskreisen in einer maximalen Kreispackung von  $H$  gemacht. Es ist allerdings auch möglich, aus der Struktur der modifizierten Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$ , Rückschlüsse auf  $\nu(H)$  zu ziehen. Dazu betrachte man die Graphen  $H_i + e$  für  $i = 1, 2$  und  $e = (x, y)$ . Es ist zu überprüfen, ob  $i$  existiert, so dass  $\nu(H_i + e) > \nu(H_i)$ . Ist dies nicht der Fall, kann man durch die Vereinigung einer maximalen Kreispackung von  $H_1$  mit einer maximalen Kreispackung von  $H_2$  eine maximale Kreispackung von  $H$  erzeugen. Zudem kennt man  $\nu(H)$  als Summe der Kreispackungszahlen aus  $H_1$  und  $H_2$ . Umgekehrt gilt, dass eine maximale Kreispackung von  $H$  einen Übergangskreis haben muss, falls sich  $\nu(H_i + e) > \nu(H_i)$  für alle  $i = 1, 2$  ergibt. Dieser Sachverhalt wird in Abbildung 3.7 verdeutlicht.

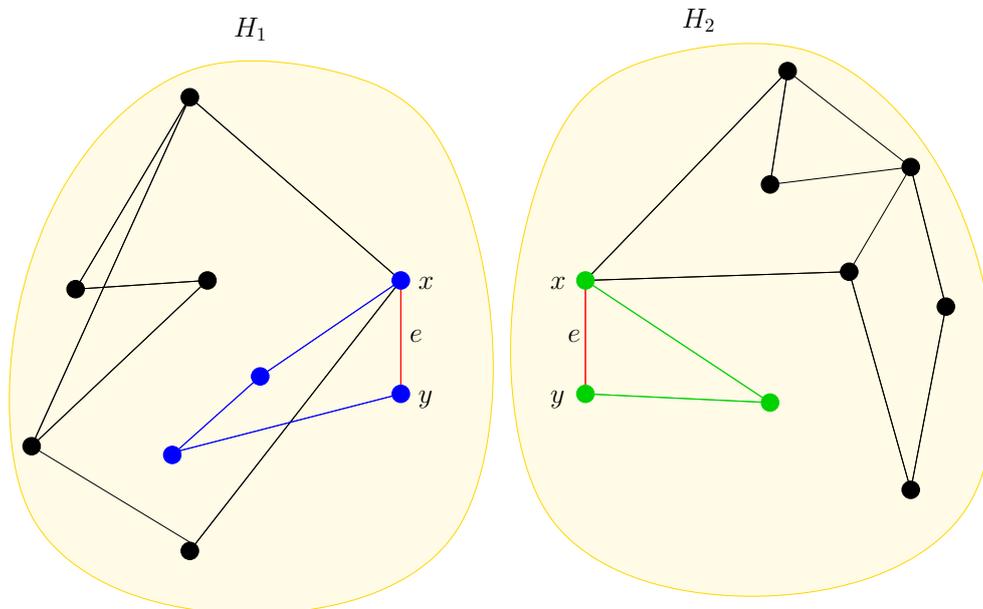


Abbildung 3.7: Veranschaulichung des Hinzufügens der Kante  $e$  zu  $H_1$  und  $H_2$

Es ist zu erkennen, dass die Kanten des Weges  $W_1$  (blau markiert) von  $x$  nach  $y$  in  $H_1$  in der Kantenmenge einer maximalen Kreispackung von  $H_1$  nicht enthalten sind. Gleiches gilt für die Kanten des Weges  $W_2$  (grün markiert) in  $H_2$ . Mit der zugefügten Kante  $e$  in  $H_1$  bzw. in  $H_2$  ergibt sowohl  $W_1$  in  $H_1$ , als auch  $W_2$  in  $H_2$  einen zusätzlichen Kreis. In diesem Fall kann man durch die Vereinigung von  $W_1$  und  $W_2$  in  $H$  einen zusätzlichen Kreis konstruieren. Es gilt also keine Gleichheit und somit  $\nu(H) > \nu(H_1) + \nu(H_2)$ . Allgemein ergibt sich folgender Satz.

**Satz 3.6:**

Sei  $H$  ein Graph und  $S = \{x, y\}$  ein 2-Separator von  $H$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

$$1.) \nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2)$$

$$2.) \exists i \in \{1, 2\} \text{ mit } \nu(H_i + e) = \nu(H_i)$$

**Beweis:**

$$1.) \Rightarrow 2.)$$

Es sei angenommen, dass gilt  $\nu(H_i + e) > \nu(H_i)$  für alle  $i = 1, 2$ . Dann gibt es für  $H_i + e$  eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H_i + e)$  mit genau einem Kreis  $C_i \in \mathcal{P}(H_i + e)$ , für den gilt  $e \in E(C_i)$ . Es sei  $\tilde{\mathcal{P}}(H) = (\mathcal{P}(H_1 + e) \cup \mathcal{P}(H_2 + e)) \setminus \{C_1, C_2\} \cup \{\tilde{C}\}$  eine neue Kreispackung mit  $\tilde{C} = (C_1 \setminus \{e\}) \cup (C_2 \setminus \{e\})$ . Diese hat  $\nu(H_1 + e) + \nu(H_2 + e) - 2 + 1$  Kreise. Da  $\nu(H_1 + e) + \nu(H_2 + e) - 2 + 1 = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2 - 2 + 1 = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ , ist dies ein Widerspruch zu 1.).

$$2.) \Rightarrow 1.)$$

Es sei angenommen, dass  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  gilt. Mit Lemma 3.5 folgt, dass  $\mathcal{C}_0 = \emptyset$  und  $\mathcal{C}_1 \neq \emptyset$ . Damit existiert eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H) \in \mathcal{C}_1$ . Diese lässt sich darstellen als  $\mathcal{P}(H) = \mathcal{P}(H_1) \cup \mathcal{P}(H_2) \cup \{C'\}$ , wobei  $\mathcal{P}(H_i)$  eine maximale Kreispackung von  $H_i$  und  $C'$  ein Übergangskreis ist. Folglich existiert in  $H_i$  für alle  $i = 1, 2$  eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H_i)$  und einem Weg  $W_i = (x, \dots, y)$ , wobei für alle Kanten  $q \in E(W_i)$  gilt  $q \notin E(\mathcal{P}(H_i))$ . Damit folgt aber, dass  $\nu(H_i + e) > \nu(H_i)$  für alle  $i = 1, 2$ , was einen Widerspruch zu 2.) darstellt.  $\square$

### 3.1.2 Aussagen für Graphen, die einen 3-Separator enthalten

Im folgenden Unterkapitel sei  $H$  ein Graph mit einem 3-Separator  $S = \{x, y, z\}$ . Dann lässt sich zeigen, dass es immer eine maximale Kreispackung mit höchstens drei Übergangskreisen gibt.

**Lemma 3.7:**

Sei  $H$  ein Graph und  $S = \{x, y, z\}$  ein 3-Separator von  $H$ , dann gilt

$$\mathcal{C}_{\leq 3}(H) \neq \emptyset.$$

**Beweis:**

Sei  $\mathcal{C}_{\leq 3}(H) = \emptyset$ , dann folgt  $\mathcal{C}_0(H) = \mathcal{C}_1(H) = \mathcal{C}_2(H) = \mathcal{C}_3(H) = \emptyset$ . Sei  $i$  die kleinste Zahl, für die gilt  $\mathcal{C}_i(H) \neq \emptyset$  und  $\mathcal{P}(H) \in \mathcal{C}_i(H)$  eine maximale Kreispackung. Es folgt, dass es eine Menge  $\{C_1, \dots, C_i\} \subseteq \mathcal{P}(H)$  von Kreisen aus  $\mathcal{P}(H)$  gibt, für welche gilt, dass zwei Knoten  $u^j, w^j \in S$  mit  $u^j, w^j \in V(C_j)$  für  $j = 1, \dots, i$  gibt. Es gilt  $i \geq 4$ . Bei mindestens vier Kreisen gibt es mindestens zwei Kreise  $C_j, C_r \in \{C_1, \dots, C_i\}$ , für die gilt  $u^j = u^r$  und  $w^j = w^r$ . O. B. d. A. seien dies die Kreise  $C_1, C_2 \in \{C_1, \dots, C_i\}$  und  $u^1 = u^2 = x$  und  $w^1 = w^2 = y$ . Der Kreis  $C_1 = (x, v_{1_2}, \dots, v_{1_{k-1}}, y, v_{1_{k+1}}, \dots, v_{1_{d(C_1)}})$  bzw.  $C_2 = (x, v_{2_2}, \dots, v_{2_{l-1}}, y, v_{2_{l+1}}, \dots, v_{2_{d(C_2)}})$  hat die Länge  $d(C_1)$  bzw.  $d(C_2)$ . O. B. d. A. gilt  $\{v_{1_2}, \dots, v_{1_{k-1}}\} \subseteq V(H_1)$  und  $\{v_{1_{k+1}}, \dots, v_{1_{d(C_1)}}\} \subseteq V(H_2)$ , sowie  $\{v_{2_2}, \dots, v_{2_{l-1}}\} \subseteq V(H_1)$  und  $\{v_{2_{l+1}}, \dots, v_{2_{d(C_2)}}\} \subseteq V(H_2)$ . Es sei  $\bar{C}_1 = (x, v_{1_2}, \dots, v_{1_{k-1}}, y, v_{2_{l-1}}, \dots, v_{2_2})$  und  $\bar{C}_2 = (y, v_{2_{l+1}}, \dots, v_{2_{d(C_2)}}, x, v_{1_{d(C_1)}}, \dots, v_{1_{k+1}})$ . Man ersetze  $C_1$  und  $C_2$  in  $\mathcal{P}(H)$  durch  $\bar{C}_1$  und  $\bar{C}_2$ . Die Kreispackung  $\mathcal{P}_{neu}(H) = \mathcal{P}(H) \setminus (C_1 \cup C_2) \cup (\bar{C}_1 \cup \bar{C}_2)$  ist maximal und hat  $i - 2$  Übergangskreise. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $i$  die Mindestanzahl von Übergangskreisen in einer maximalen Kreispackung von  $H$  ist.  $\square$

Mit Lemma 3.7 lässt sich folgendes Lemma beweisen, welches einen Zusammenhang zwischen der Mindestanzahl von Übergangskreisen einer maximalen Kreispackung von  $H$  und  $\nu(H)$  herstellt.

**Lemma 3.8:**

Sei  $H$  ein Graph und  $S = \{x, y, z\}$  ein 3-Separator von  $H$ . Dann gelten folgende Aussagen:

- 1.) Wenn  $\mathcal{C}_0(H) = \emptyset$  und  $\mathcal{C}_1(H) \neq \emptyset$ , dann folgt  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$
- 2.) Wenn  $\mathcal{C}_0(H) = \mathcal{C}_1(H) = \emptyset$  und  $\mathcal{C}_2(H) \neq \emptyset$ , dann folgt  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  oder  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$
- 3.) Wenn  $\mathcal{C}_0(H) = \mathcal{C}_1(H) = \mathcal{C}_2(H) = \emptyset$ , dann folgt  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$

**Beweis:**

- 1.) Wegen Lemma 3.2 folgt  $\nu(H) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ . Eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H) \in \mathcal{C}_1$  hat genau einen Übergangskreis und damit höchstens  $\nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  Kreise.
- 2.) Wegen Lemma 3.2 folgt  $\nu(H) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ . Eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H) \in \mathcal{C}_2$  hat genau zwei Übergangskreise und damit höchstens  $\nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$  Kreise.
- 3.) Auf Grund von Lemma 3.2 folgt  $\nu(H) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ . Aus Lemma 3.7 folgt zudem  $\mathcal{C}_3(H) \neq \emptyset$ . Sei  $\mathcal{P}(H) \in \mathcal{C}_3(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  und

$C, C', C'' \in \mathcal{P}(H)$  die drei Übergangskreise von  $\mathcal{P}(H)$  mit  $x, y \in E(C)$ ,  $x, z \in E(C')$  und  $y, z \in E(C'')$ . Dann ist  $(C \cup C' \cup C'') \cap H_i$  ein Untergraph von  $H_i$  für alle  $i = 1, 2$ , welcher mindestens einen Kreis  $C_i$  enthält. Betrachtet man die Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}(H) = \mathcal{P}(H) \setminus \{C, C', C''\} \cup \{C_1, C_2\}$ , so hat  $\tilde{\mathcal{P}}(H)$  keine Übergangskreise und damit höchstens  $\nu(H_1) + \nu(H_2)$  Kreise. Daraus folgt  $\nu(H) \leq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  und damit die Behauptung.  $\square$

In Lemma 3.8 ist vorausgesetzt, dass jede maximale Kreispackung mindestens einen Übergangskreis enthält und daher  $\nu(H) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  gilt. Es wird bewiesen, dass  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$  nur in dem Fall auftreten kann, dass jede maximale Kreispackung mindestens zwei Übergangskreise enthält und eine mit genau zwei Übergangskreisen existiert. In allen anderen Fällen gilt  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ . Aus Lemma 3.8 folgt somit, dass

$$\nu(H) \leq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2.$$

Mit Lemma 3.7 kann man zudem den folgenden Zusammenhang zwischen  $\nu(H)$  und den Kreispackungszahlen der modifizierten Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$  beweisen. Die Beweisidee ist dabei dieselbe, wie im Fall des 2-Separators. Die Idee wird im Anschluss an das Lemma noch einmal graphisch veranschaulicht.

**Lemma 3.9:**

Sei  $H$  ein Graph,  $S = \{x, y, z\}$  ein 3-Separator von  $H$  und  $F = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$ . Dann sind die folgenden Aussagen 1.) und 2.) äquivalent

1.)  $\nu(H) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$

2.) Von den folgenden Aussagen (a)-(c) ist mindestens eine erfüllt

(a)  $\exists e \in F$  mit  $\nu(H_i + e) = \nu(H_i) + 1$  für alle  $i = 1, 2$ .

(b)  $\exists e, f \in F$  mit  $\nu(H_i + \{e, f\}) \geq \nu(H_i) + 1$  für alle  $i = 1, 2$  und  
 $\exists i \in \{1, 2\}$  mit  $\nu(H_i + \{e, f\}) = \nu(H_i) + 2$

(c)  $\nu(H_i + F) = \nu(H_i) + 2$  für alle  $i = 1, 2$ .

**Beweis:**

1.)  $\Leftrightarrow$  2.)

Die Aussagen (a)-(c) werden separat betrachtet:

(a) Sei Aussage (a) erfüllt, dann gibt es für  $H_i + e$  eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H_i + e)$  mit genau einem Kreis  $C_i \in \mathcal{P}(H_i + e)$ , für den gilt  $e \in E(C_i)$ . Man bilde eine

neue Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}(H) = (\mathcal{P}(H_1 + e) \cup \mathcal{P}(H_2 + e)) \setminus \{C_1, C_2\} \cup \{\tilde{C}\}$ , für die gilt  $\tilde{C} = (C_1 \setminus \{e\}) \cup (C_2 \setminus \{e\})$ . Diese hat  $\nu(H_1 + e) + \nu(H_2 + e) - 2 + 1$  Kreise. Da  $\nu(H_1 + e) + \nu(H_2 + e) - 2 + 1 = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2 - 2 + 1 = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  folgt 1.).

(b) Sei Aussage (b) erfüllt. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- (I) Sei  $\nu(H_i + \{e, f\}) = \nu(H_i) + 2$  für alle  $i = 1, 2$ . Es gilt (a) sowohl für die Kante  $e$ , als auch für die Kante  $f$ . Damit folgt 1.).
- (II) Es sei  $\nu(H_i + \{e, f\}) = \nu(H_i) + 2$  für ein  $i \in \{1, 2\}$ . O. B. d. A. sei  $\nu(H_1 + \{e, f\}) = \nu(H_1) + 1$  und  $\nu(H_2 + \{e, f\}) = \nu(H_2) + 2$ . Damit gilt für jede maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H_2 + \{e, f\})$  in  $H_2 + \{e, f\}$ , dass folgende Form vorliegt  $\mathcal{P}(H_2 + \{e, f\}) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H_2)}\} \cup \bar{C}_2 \cup \bar{\bar{C}}_2$  mit  $e \in E(\bar{C}_2)$  und  $f \in E(\bar{\bar{C}}_2)$ . Folglich enthält die Kreispackung  $\mathcal{P}(H_2 + \{e, f\}) \setminus \{\bar{C}_2, \bar{\bar{C}}_2\}$  insgesamt  $\nu(H_2)$  kantendisjunkte Kreise. Weiterhin existieren für  $e = (x, y)$  und  $f = (y, z)$  zwei Wege  $W_2^1 = (x, \dots, y) = \bar{C}_2 \setminus \{e\}$  und  $W_2^2 = (y, \dots, z) = \bar{\bar{C}}_2 \setminus \{f\}$ , welche ebenfalls zueinander und zu den Kreisen in  $\mathcal{P}(H_2 + \{e, f\}) \setminus \{\bar{C}_2, \bar{\bar{C}}_2\}$  kantendisjunkt sind.

Für  $H_1 + \{e, f\}$  sind wiederum zwei Fälle zu unterscheiden:

- (II.1) Es existiert eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H_1 + \{e, f\})$ , für die gilt  $e \in E(\mathcal{P}(H_1 + \{e, f\}))$  und  $f \notin E(\mathcal{P}(H_1 + \{e, f\}))$ . Dann ist für die Kante  $e$  Aussage (a) erfüllt und es folgt 1.).
- (II.2) Für jede maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H_1 + \{e, f\})$  gilt  $e, f \in E(\mathcal{P}(H_1 + \{e, f\}))$ . Dann gibt es erneut zwei Unterfälle:
- (II.2.1) Es sei angenommen, dass ein Kreis  $\bar{C}_1 \in \mathcal{P}(H_1 + \{e, f\})$  mit  $e, f \in E(\bar{C}_1)$  existiert. Die Kreispackung  $\mathcal{P}(H_1 + \{e, f\}) \setminus \{\bar{C}_1\}$  enthält dann insgesamt  $\nu(H_1)$  kantendisjunkte Kreise. Weiterhin existieren in  $\bar{C}_1$  für  $e = (x, y)$  und  $f = (y, z)$  zwei Wege  $W_1^1 = (x, \dots, y)$  und  $W_1^2 = (y, \dots, z)$ , welche ebenfalls zueinander und zu den Kreisen in  $\mathcal{P}(H_1 + \{e, f\}) \setminus \{\bar{C}_1\}$  kantendisjunkt sind. Dann ist für die Kanten  $g = (z, x)$  die Aussage (a) erfüllt, da die Kante  $g$  zusammen mit  $W_1^1 \cup W_1^2$  einen Kreis bilden. Zusätzlich gibt es in  $H_2 + g$  und in  $\mathcal{P}(H_2 + \{e, f\})$ , abgesehen von den beiden Wegen, noch  $\nu(H_2)$  disjunkte Kreise. In der Kreispackung  $\mathcal{P}(H_1 + \{e, f\})$  kann man einfach die beiden Kanten  $e, f$  durch die Kante  $g$  ersetzen und die neue Kreispackung hat ebenfalls  $\nu(H_1) + 1$  Kreise.
- (II.2.2) Alle maximalen Kreispackungen  $\mathcal{P}(H_1 + \{e, f\})$  enthalten zwei Kreise

$\bar{C}_1$  und  $\bar{\bar{C}}_1$  für die gilt  $e \in E(\bar{C}_1)$  und  $f \in E(\bar{\bar{C}}_1)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}(H) &= \mathcal{P}(H_2 + \{e, f\}) \setminus \{\bar{C}_2, \bar{\bar{C}}_2\} \cup \mathcal{P}(H_1 + \{e, f\}) \setminus \{\bar{C}_1, \bar{\bar{C}}_1\} \\ &\cup \{(\bar{C}_1 \setminus \{e\}) \cup (\bar{C}_2 \setminus \{e\})\} \cup \{(\bar{C}_1 \setminus \{f\}) \cup (\bar{C}_2 \setminus \{f\})\} \end{aligned}$$

eine Kreispackung mit  $\nu(H_2) + 2 - 2 + \nu(H_1) + 1 - 2 + 1 + 1$  Kreisen.

Diese Kreispackung ist nicht zwingend maximal. Es ergibt sich 1.), da  $\nu(H_2) + 2 - 2 + \nu(H_1) + 1 - 2 + 1 + 1 = \nu(H_2) + \nu(H_1) + 1$ .

(c) Sei nun Aussage (c) erfüllt. In  $H_i + F$  existiert entweder eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H_i + F) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H_i)}\} \cup \{C'_i\} \cup \{C''_i\}$  mit  $E(C'_i) \cap F \neq \emptyset$ ,  $E(C''_i) \cap F \neq \emptyset$  und  $\{E(C_1), \dots, E(C_{\nu(H_i)})\} \cap F = \emptyset$  oder alle maximalen Kreispackungen sind von der Form  $\mathcal{P}'(H_i + F) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H_i)-1}\} \cup \{C'_i\} \cup \{C''_i\} \cup \{C'''_i\}$  mit  $e \in E(C'_i)$ ,  $f \in E(C''_i)$  und  $g \in E(C'''_i)$ .

Angenommen, es existiert  $i \in \{1, 2\}$ , so dass es in  $H_i + F$  eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H_i + F)$  gibt, für die gilt  $F \subset E(\mathcal{P}(H_i + F))$ . O. B. d. A. sei  $F \subset E(\mathcal{P}(H_1 + F))$  und  $e = (x, y) \in E(C'_1)$ , sowie  $f = (y, z), g = (z, x) \in E(C''_1)$ . Dann enthält die Kreispackung  $\mathcal{P}(H_1 + F) \setminus \{C'_1, C''_1\}$  insgesamt  $\nu(H_1)$  kantendisjunkte Kreise und es existieren zwei Wege  $W_1^1 = (x, \dots, y) = C'_1 \setminus \{e\}$  und  $W_1^2 = (y, \dots, x) = C''_1 \setminus \{f, g\}$ , welche zueinander und zu den  $\nu(H_1)$  übrigen Kreisen kantendisjunkt sind. Dann ist  $\bar{\mathcal{P}}(H_1) = \mathcal{P}(H_1 + F) \setminus \{C'_1, C''_1\} \cup (W_1^1 \cup W_1^2)$  eine Kreispackung in  $H_1$  mit  $\nu(H_1) + 1$  Kreisen, was einen Widerspruch zu  $\nu(H_1)$  darstellt. Damit gilt für eine maximale Kreispackung der Form  $\mathcal{P}(H_i + F)$ , dass  $F \cap E(\mathcal{P}(H_i + F)) \neq F$  ist. Man unterscheidet nun drei Fälle, welche nicht zwingend disjunkt sind.

(U1) Für alle  $i = 1, 2$  existiert mindestens eine maximale Kreispackung der Form  $\mathcal{P}(H_i + F)$ . Dann gibt es eine Kante  $q_i \in F$  mit  $q_i \notin E(\mathcal{P}(H_i + F))$  für alle  $i = 1, 2$ .

Man betrachte zwei Fälle

(U1.1)  $q_1 = q_2 = e$ : Damit ist für die Kante  $f$  (bzw.  $g$ ) die Aussage (a) erfüllt und es gilt 1.).

(U1.2)  $e = q_1 \neq q_2 = f$ : In diesem Fall ist Aussage (a) für die Kante  $g$  erfüllt und es gilt 1.)

(U2) Für alle  $i = 1, 2$  existiert mindestens eine maximale Kreispackung der Form  $\mathcal{P}'(H_i + F)$ . Dann ist

$$\bar{\mathcal{P}}(H) = \mathcal{P}'(H_1 + F) \setminus \{C'_1, C''_1, C'''_1\} \cup \mathcal{P}'(H_2 + F) \setminus \{C'_2, C''_2, C'''_2\}$$

$$\cup\{(C'_1 \setminus \{e\}) \cup (C' \setminus \{e\})\} \cup \{(C''_1 \setminus \{f\}) \cup (C''_2 \setminus \{f\})\} \cup \{(C'''_1 \setminus \{g\}) \cup (C'''_2 \setminus \{g\})\}$$

eine Kreispackung von  $H$  mit  $\nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  Kreisen und Aussage 1.) ist erfüllt.

(U3) O. B. d. A. sei gegeben, dass in  $H_1$  alle maximalen Kreispackungen die Form  $\mathcal{P}(H_1 + F)$  und in  $H_2$  alle maximalen Kreispackungen die Form  $\mathcal{P}'(H_2 + F)$  haben. Dann gibt es eine Kante  $e \in F$  mit  $e \notin E(\mathcal{P}(H_1 + F))$ . Folglich ist für die Kanten  $\{f, g\}$  Aussage (b) erfüllt und es gilt 1.).

1.)  $\Rightarrow$  2.)

Es gilt  $\nu(H) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  und nach Lemma 3.2 und 3.7 existiert für  $H$  eine maximale Kreispackung mit der kleinsten Anzahl  $a$  von Übergangskreisen mit  $1 \leq a \leq 3$ . Diese hat die Form  $\mathcal{P}(H) = \{C_1, \dots, C_{k_1}\} \cup \{C_{k_1+1}, \dots, C_{k_1+k_2}\} \cup \{C'_1, \dots, C'_a\}$  mit  $\{C_1, \dots, C_{k_1}\} \subseteq H_1$ ,  $\{C_{k_1+1}, \dots, C_{k_1+k_2}\} \subseteq H_2$  und  $\nu(H) = k_1 + k_2 + a$ . Es gilt  $k_1 \leq \nu(H_1)$  und  $k_2 \leq \nu(H_2)$ . Jeder Übergangskreis  $C'_i$  hat genau zwei Knoten  $u^i, v^i \in \{x, y, z\}$ . Es gilt  $\{u^i, w^i\} \neq \{u^j, w^j\}$  für alle  $i \neq j$ . Es sei  $F' = \{(u^i, w^i) \mid i = 1, \dots, a\}$ , dann sind zwei Fälle zu unterscheiden

(I) Es sei  $a = 1$  und  $|F'| = 1$ : Dann folgt wegen  $\nu(H_i) + 1 \geq \nu(H_i + F') \geq k_i + 1$  für alle  $i = 1, 2$  (vgl. Lemma 3.1 und die Darstellung von  $\mathcal{P}(H)$ ), dass gilt  $\nu(H_1) + \nu(H_2) + 2 \geq \nu(H_1 + F') + \nu(H_2 + F') \geq k_1 + k_2 + 2$ . Mit  $k_1 + k_2 + 2 = \nu(H) + 1 \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$  ergibt sich die Gleichheit und somit  $\nu(H_1 + F') = \nu(H_1) + 1$ , sowie  $\nu(H_2 + F') = \nu(H_2) + 1$ . Folglich ist Aussage (a) erfüllt.

(II) Es sei  $a > 1$  und  $|F'| = a$ : Man erhält wegen  $\nu(H_i) + 2 \geq \nu(H_i + F') \geq k_i + a$  für alle  $i = 1, 2$ , dass gilt  $\nu(H_1) + \nu(H_2) + 4 \geq \nu(H_1 + F') + \nu(H_2 + F') \geq k_1 + k_2 + 2a$ . Weiterhin gilt  $k_1 + k_2 + 2a = \nu(H) + a \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + a + 1$ . Somit ergibt sich  $\nu(H_1) + \nu(H_2) + 4 \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + a + 1$ .

Sei  $a = 2$ , so folgt  $\nu(H_1) + \nu(H_2) + 4 \geq \nu(H_1 + F') + \nu(H_2 + F') \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 3$  und Aussage (b) gilt.

Sei  $a = 3$ , so folgt  $\nu(H_1) + \nu(H_2) + 4 \geq \nu(H_1 + F') + \nu(H_2 + F') \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 4$ . Daher ist  $\nu(H_1 + F') = \nu(H_1) + 2$  und  $\nu(H_2 + F') = \nu(H_2) + 2$  und (c) ist erfüllt.  $\square$

Die Aussage von Lemma 3.9 2.) (a) wurde bereits in Abbildung 3.7 veranschaulicht. In Lemma 3.9 2.) (b) werden zwei Kanten in  $H_1$  bzw.  $H_2$  hinzugefügt. Dies ist beispielhaft in Abbildung 3.8 dargestellt. Dabei wurden die Graphen  $H_1$  und  $H_2$  jeweils um die Kanten  $e = (x, y)$  und  $g = (y, z)$  erweitert.

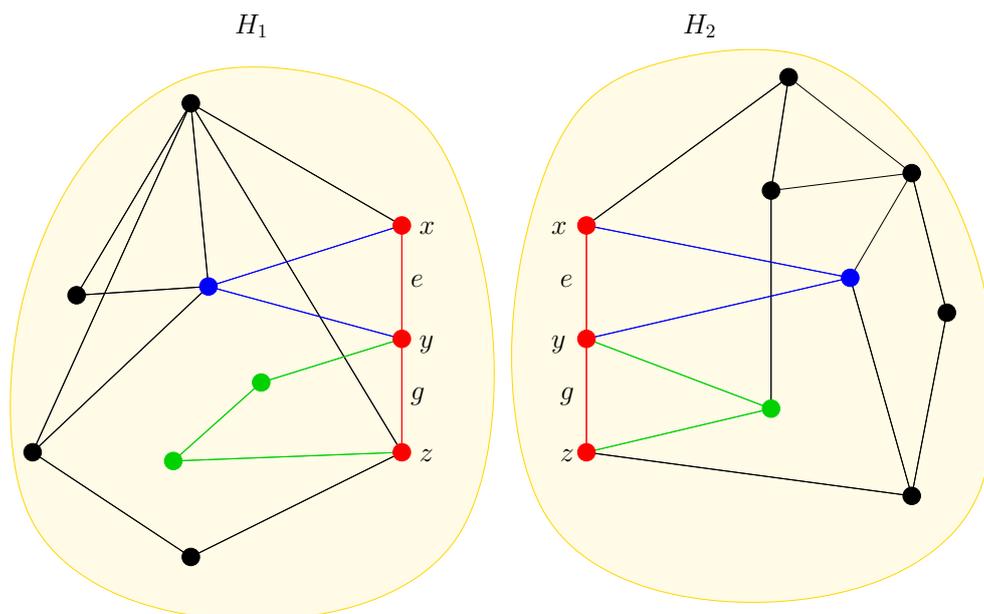


Abbildung 3.8: Veranschaulichung des Hinzufügens der Kanten  $e$  und  $g$  zu  $H_1$  und  $H_2$

Es gibt sowohl in  $H_1$ , als auch in  $H_2$ , eine maximale Kreispackung, welche die Kanten des jeweiligen Weges  $W_i^1$  (grün markiert) bzw.  $W_i^2$  (blau markiert) für alle  $i = 1, 2$  nicht enthält. Dadurch erhöht sich durch das Zufügen der Kanten  $e$  und  $g$  in beiden Untergraphen die Kreispackungszahl um zwei. In einer maximalen Kreispackung von  $H$  ergeben die Wege  $W_1^1$  und  $W_2^1$ , sowie die Wege  $W_1^2$  und  $W_2^2$ , insgesamt zwei Übergangskreise. Folglich enthält jede maximale Kreispackung von  $H$  mindestens zwei Übergangskreise und es ergibt sich  $\nu(H) > \nu(H_1) + \nu(H_2)$ . Lemma 3.9 2.) (c) kann man analog veranschaulichen. Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass die drei eingefügten Kanten  $e$ ,  $f$  und  $g$  einen Kreis bilden. Aus Lemma 3.9 folgt weiterhin sofort:

**Korollar 3.10:**

Sei  $H$  ein Graph,  $S = \{x, y, z\}$  ein 3-Separator von  $H$  und  $F = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$ , dann gilt

$\mathcal{C}_0(H) \neq \emptyset$  genau dann, wenn keine der drei Bedingungen aus Lemma 3.9 2.) erfüllt ist.

In Lemma 3.9 wurden Bedingungen hergeleitet, unter welchen  $\nu(H) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  gilt. Ebenso ist es möglich weitere Bedingungen anzugeben, mit welchen sich für die Kreispackungszahl  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$  ergibt. Man betrachte folgenden Satz:

**Satz 3.11:**

Sei  $H$  ein Graph,  $S = \{x, y, z\}$  ein 3-Separator von  $H$  und  $F = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$ . Dann sind die folgenden Aussagen 1.) und 2.) äquivalent

$$1.) \nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$$

2.) Es existieren zwei Kanten  $e, f \in F$  mit  $e \neq f$ , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind

$$(a) \nu(H_i + e) > \nu(H_i) \text{ für alle } i = 1, 2$$

$$(b) \nu(H_i + \{e, f\}) > \nu(H_i + e) \text{ für alle } i = 1, 2$$

**Beweis:**

1.)  $\Rightarrow$  2.)

Aus Lemma 3.8 kann man folgern, dass  $\mathcal{C}_0(H) = \mathcal{C}_1 = \emptyset$  und  $\mathcal{C}_2 \neq \emptyset$  gilt. Es sei  $\mathcal{P}(H) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H)}\} \in \mathcal{C}_2(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit zwei Übergangskreisen  $C, C' \in \mathcal{P}(H)$ . In diesem Fall kann man die Kreispackung  $\mathcal{P}(H)$  darstellen durch  $\mathcal{P}(H) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H_1)}\} \cup \{C_{\nu(H_1)+1}, \dots, C_{\nu(H_1)+\nu(H_2)}\} \cup \{C\} \cup \{C'\}$ , wobei für die Mengen  $\{C_1, \dots, C_{\nu(H_1)}\} = \mathcal{P}(H_1) \subseteq H_1$  und  $\{C_{\nu(H_1)+1}, \dots, C_{\nu(H_1)+\nu(H_2)}\} = \mathcal{P}(H_2) \subseteq H_2$  gilt. O. B. d. A. gelte  $x, y \in V(C)$  und  $y, z \in V(C')$ . Damit ergibt sich in  $H_i$  mit der maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}(H_i)$  mit  $\nu(H_i)$  Kreisen, dass es in  $H_i \setminus \mathcal{P}(H_i)$  zwei kantendisjunkte Wege  $W_i^1 = (x, \dots, y)$  und  $W_i^2 = (y, \dots, z)$  gibt. Wählt man nun  $e = (x, y)$  und  $f = (y, z)$ , so folgt  $\nu(H_i + e) > \nu(H_i)$  und  $\nu(H_i + \{e, f\}) > \nu(H_i + e)$  für alle  $i = 1, 2$ .

1.)  $\Leftarrow$  2.)

Mit Bedingung (a) ist die Bedingung 2.)(a) aus Lemma 3.9 erfüllt. Damit folgt  $\nu(H) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ .

Sei  $H' = (H + e) + e$  und  $H'_i = H_i + e$ . Aus Bedingung (b) folgt  $\nu(H'_i + f) > \nu(H'_i)$  für alle  $i = 1, 2$ . Somit erfüllt  $H'_i$  die Bedingung 2.)(a) aus Lemma 3.9 für die Kante  $f$  und es folgt  $\nu(H') \geq \nu(H'_1) + \nu(H'_2) + 1$ .

Auf Grund von Bedingung (a) ergibt sich  $\nu(H'_i) \geq \nu(H_i) + 1$  und man erhält  $\nu(H') \geq \nu(H'_1) + \nu(H'_2) + 1 \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 3$ . Es gilt aber  $\nu(H') = \nu(H) + 1$ . Daraus folgt  $\nu(H) + 1 \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 3$  und damit  $\nu(H) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$ . Aus Lemma 3.8 ist allerdings bekannt, dass  $\nu(H) \leq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$ . Es folgt die Behauptung 1.).  $\square$

Aus den Lemmata 3.8 - 3.9 und Satz 3.11 kann man schließen, dass  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2)$  gilt, falls keine der Bedingungen aus Lemma 3.9 2.) bzw. Satz 3.11 2.) erfüllt sind.

Nachdem nun einige Aussagen zur Herleitung von  $\nu(H)$  gemacht wurden, kann man damit die Aussagen aus Lemma 3.8 verbessern. Sei dazu zunächst Lemma 3.8 2.) betrachtet:

**Lemma 3.12:**

Sei  $H$  ein Graph und  $S = \{x, y, z\}$  ein 3-Separator von  $H$ . Dann sind die folgenden Aussagen 1.) und 2.) äquivalent

$$1.) \mathcal{C}_0(H) = \mathcal{C}_1(H) = \emptyset \text{ und } \mathcal{C}_2(H) \neq \emptyset$$

$$2.) \nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$$

**Beweis:**

1.)  $\Rightarrow$  2.)

Es sei  $\mathcal{P}(H) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H)-2}\} \cup \{C'\} \cup \{C''\} \in \mathcal{C}_2(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit den zwei Übergangskreisen  $C', C'' \in \mathcal{P}(H)$ . O. B. d. A. gelte  $x, y \in V(C')$  und  $x, z \in V(C'')$ . Mit  $e = (x, y)$  und  $f = (x, z)$  sind die Bedingungen aus Satz 3.11 2.) erfüllt und es folgt  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$ .

1.)  $\Leftarrow$  2.)

Wegen Lemma 3.8 1.) gilt  $\mathcal{C}_0(H) = \mathcal{C}_1(H) = \emptyset$  und wegen Lemma 3.8 3.) folgt  $\mathcal{C}_2(H) \neq \emptyset$ .  $\square$

Es wurde somit gezeigt, dass im Falle  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$  gilt, dass jede maximale Kreispackung von  $H$  mindestens zwei Übergangskreise besitzt und es zudem immer eine maximale Kreispackung von  $H$  mit genau zwei Übergangskreisen gibt. Bislang ist es allerdings für den Fall  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  nicht klar, ob es eine maximale Kreispackung mit genau einem Übergangskreis gibt, oder ob jede maximale Kreispackung mindestens drei Übergangskreise besitzt. In dem nachfolgenden Lemma wird eine Bedingung formuliert, unter der es eine maximale Kreispackung in  $H$  mit genau einem Übergangskreis gibt.

**Lemma 3.13:**

Sei  $H$  ein Graph,  $S = \{x, y, z\}$  ein 3-Separator von  $H$  und  $F = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$ . Zudem sei  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ . Dann sind die folgenden Aussagen 1.) und 2.) äquivalent

$$1.) \mathcal{C}_0(H) = \emptyset \text{ und } \mathcal{C}_1(H) \neq \emptyset$$

$$2.) \exists e \in F \text{ mit } \nu(H_i + e) > \nu(H_i) \text{ für alle } i = 1, 2$$

**Beweis:**

1.)  $\Rightarrow$  2.)

Es sei  $\mathcal{P}(H) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H)-1}\} \cup \{C'\} \in \mathcal{C}_1(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit genau einem Übergangskreis  $C' \in \mathcal{P}(H)$ . Man kann annehmen, dass  $x, y \in V(C')$ . Folglich kann man die Kreispackung  $\mathcal{P}(H)$  darstellen durch  $\mathcal{P}(H) = \tilde{\mathcal{P}}(H_1) \cup \tilde{\mathcal{P}}(H_2) \cup \{C'\}$  mit  $\tilde{\mathcal{P}}(H_1) := \{C_1, \dots, C_{\nu(H)-1}\} \cap H_1$  und  $\tilde{\mathcal{P}}(H_2) := \{C_1, \dots, C_{\nu(H)-1}\} \cap H_2$ , sowie

$\tilde{\mathcal{P}}(H_1) \cup \tilde{\mathcal{P}}(H_2) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H)-1}\}$ . Die Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}(H_1)$  hat höchstens  $\nu(H_1)$  und die Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}(H_2)$  höchstens  $\nu(H_2)$  Kreise. Da allerdings  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  vorausgesetzt wird, folgt mit  $\nu(H) - 1 = \nu(H_1) + \nu(H_2)$ , dass  $\tilde{\mathcal{P}}(H_1)$  genau  $\nu(H_1)$  und  $\tilde{\mathcal{P}}(H_2)$  genau  $\nu(H_2)$  Kreise enthält. Betrachtet man den Übergangskreis  $C'$  und die Kante  $e = (x, y)$ , so folgt, dass  $\tilde{\mathcal{P}}(H_1) \cup ((C' \cap H_1) \cup \{e\})$  eine maximale Kreispackung für  $H_1 + e$  und  $\tilde{\mathcal{P}}(H_2) \cup ((C' \cap H_2) \cup \{e\})$  eine maximale Kreispackung für  $H_2 + e$  ist. Damit ist die Bedingung 2.) erfüllt.

1.)  $\Leftrightarrow$  2.)

Da  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  gilt, folgt  $\mathcal{C}_0(H) = \emptyset$ .

Sei  $\mathcal{P}(H_i + e) = \{C_{i_1}, \dots, C_{\nu(H_i)}\} \cup \{C'_i\}$  eine maximale Kreispackung von  $H_i + e$ . O. B. d. A. gilt  $e \in E(C'_i)$ . Dann ist  $\tilde{\mathcal{P}}(H) = \mathcal{P}(H_1 + e) \cup \mathcal{P}(H_2 + e) \setminus \{C'_1, C'_2\} \cup ((C'_1 \setminus \{e\}) \cup (C'_2 \setminus \{e\}))$  eine Kreispackung von  $H$  mit  $\nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  Kreisen. Auf Grund der Voraussetzung ergibt sich, dass  $\tilde{\mathcal{P}}(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit genau einem Übergangskreis ist. Damit gilt  $\mathcal{C}_1(H) \neq \emptyset$ .  $\square$

Aus Lemma 3.13 lässt sich ableiten, dass im Fall  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mindestens drei Übergangskreise haben muss, falls die Bedingungen aus 2.) nicht erfüllt sind.

Es soll nun noch nachfolgend eine alternative Methode aufgezeigt werden, um im Fall  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  zu bestimmen, ob  $\mathcal{C}_1(H) \neq \emptyset$  gilt. Dazu sei die folgende allgemeine Notation gegeben:

Sei  $H = (V, E)$  ein Graph mit einem  $k$ -Separator  $S$  und  $F = \{(v_i, v_j) \in E \mid v_i, v_j \in S\}$ . Zudem sei  $e = (x, y) \in F$ . Dann bezeichnet der Graph  $H + 2\dot{e}$  einen modifizierten Graphen von  $H$ . Der Graph  $H + 2\dot{e}$  entsteht durch das Hinzufügen zweier Knoten  $w_1, w_2 \notin V(H)$  und den entsprechenden Kanten  $(x, w_1), (x, w_2), (y, w_1)$  und  $(y, w_2)$ . Damit ist

$$H + 2\dot{e} = (V(H) \cup \{w_1, w_2\}, E(H) \cup \{(x, w_1), (x, w_2), (y, w_1), (y, w_2)\}).$$

Zudem seien die Kantenmengen  $\dot{e}_1 := \{(x, w_1), (y, w_1)\}$  und  $\dot{e}_2 := \{(x, w_2), (y, w_2)\}$  definiert. Die modifizierten Untergraphen vom Graphen  $H + 2\dot{e}$  haben die Form  $\dot{H}_1 = (\{V(H_1) \cup \{w_1\}\}, \{E(H_1) \cup \dot{e}_1\})$  und  $\dot{H}_2 = (\{V(H_2) \cup \{w_2\}\}, \{E(H_2) \cup \dot{e}_2\})$ .

Damit lässt sich das folgende Lemma formulieren:

**Lemma 3.14:**

Sei  $H$  ein Graph,  $S = \{x, y, z\}$  ein 3-Separator von  $H$  und  $F = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$ . Zudem sei  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ . Dann sind die folgenden Aussagen 1.) und 2.) äquivalent

1.)  $\mathcal{C}_0(H) = \emptyset$  und  $\mathcal{C}_1(H) \neq \emptyset$

2.)  $\exists e \in F$  mit  $\mathcal{C}_0(H + 2e) \neq \emptyset$

**Beweis:**

1.)  $\Rightarrow$  2.)

Es sei  $\mathcal{P}(H) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H)-1}\} \cup \{C'\} \in \mathcal{C}_1(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit genau einem Übergangskreis  $C' \in \mathcal{P}(H)$ . O. B. d. A. gelte  $x, y \in V(C')$ . Mit  $e = (x, y)$  folgt dann die Bedingung 2.).

1.)  $\Leftarrow$  2.)

Es sei  $\mathcal{P}(H + 2e) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H)+1}\} \in \mathcal{C}_0(H + 2e)$  eine maximale Kreispackung von  $H + 2e$ , welche keine Übergangskreise enthält. Dann sind drei Fälle zu unterscheiden.

- (a) In  $\mathcal{P}(H + 2e)$  gibt es einen Kreis  $\bar{C}$  mit  $\{(x, w_1), (x, w_2), (y, w_1), (y, w_2)\} \subseteq E(\bar{C})$ . Dann ist  $\mathcal{P}(H + 2e) \setminus \{\bar{C}\}$  eine maximale Kreispackung von  $H$  ohne Übergangskreise. Das stellt wiederum einen Widerspruch zu  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  dar.
- (b) In  $\mathcal{P}(H + 2e)$  gibt es genau einen Kreis  $\bar{C}$  mit  $e_1 \subseteq E(\bar{C})$  und es gilt  $(x, w_2), (y, w_2) \notin E(\bar{C})$ . Dann ist  $\mathcal{P}(H + 2e) \setminus \{\bar{C}\}$  eine maximale Kreispackung von  $H$  ohne Übergangskreise, was einen Widerspruch zu  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  darstellt.
- (c) In  $\mathcal{P}(H + 2e)$  gibt es genau einen Kreis  $\bar{C}$  mit  $e_1 \subseteq E(\bar{C})$  und einen Kreis  $\bar{\bar{C}}$  mit  $e_2 \subseteq E(\bar{\bar{C}})$ . Dann ist  $\mathcal{P}(H + 2e) \setminus \{\bar{C}, \bar{\bar{C}}\} \cup \{\hat{C}\}$  mit  $\hat{C} = ((\bar{C} \setminus e_1) \cup (\bar{\bar{C}} \setminus e_2)) \setminus \{w_1, w_2\}$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit genau einem Übergangskreis  $\hat{C}$ . Damit gilt  $\mathcal{C}_1(H) \neq \emptyset$ . □

### 3.1.3 Bestimmung einer maximalen Kreispackung für Graphen, die einen 2- bzw. 3-Separator enthalten

In dem nachfolgenden Unterkapitel werden die Aussagen aus den Kapiteln 3.1.1 und 3.1.2 algorithmisch umgesetzt. Das bedeutet, dass in den Algorithmen die Kreispackungszahl

$\nu(G)$  und eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  für einen Graphen  $G$  durch die Analyse der modifizierten Untergraphen  $H_1$  und  $H_2$  des Graphen  $H$  bestimmt werden sollen. Dabei wird der Fall eines Graphen mit einem 2-Separator getrennt vom Fall eines Graphen mit einem 3-Separator betrachtet. In beiden Fällen werden zunächst die einzelnen Schritte des Algorithmus beschrieben und anschließend der Algorithmus im Pseudocode formuliert.

## Bestimmung einer maximalen Kreispackung für Graphen, die einen 2-Separator enthalten

Nachfolgend wird ein Algorithmus zur Bestimmung einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  für einen Graphen  $G$  mit einem 2-Separator vorgestellt. Der Algorithmus liefert außerdem die Kreispackungszahl  $\nu(G)$ . Zunächst wird eine Beschreibung des Algorithmus gegeben. Dabei seien  $G$  und  $H$  sowie  $H_1$  und  $H_2$  wie zuvor. Im Allgemeinen kann man, wie bereits erwähnt, nicht davon ausgehen, dass ein Separator gegeben ist. Für den speziellen Fall des Auffindens eines 2-Separators sei daher auf [86] verwiesen.

### Gegeben

Ein Graph  $G$ , welcher mindestens einen 2-Separator enthält.

### Schritt 1

Man bestimmt zunächst einen 2-Separator  $S = \{x, y\}$  von  $G$  und setzt die Kante  $e := (x, y)$ . Anschließend werden die beiden Teilgraphen  $H_1$  und  $H_2$  erzeugt. Allerdings kann es in  $G$  Kanten  $(x, y)$  geben.

Wenn es in  $G$  Kanten  $(x, y)$  gibt, geht man zu Schritt 2.

Sonst geht man zu Schritt 3.

### Schritt 2

In diesem Schritt werden die in  $G$  vorhandenen Kanten  $(x, y)$  ersetzt. Für jede Kante  $(x, y)$  werden ein neuer Knoten und zwei neue Kanten eingefügt. Anschließend werden alle Kanten  $(x, y)$  aus dem Graphen entfernt und man geht zu Schritt 3.

### Schritt 3

Es werden die Graphen  $H_i + e$  für alle  $i = 1, 2$  gebildet, indem in  $H_1$  und  $H_2$  eine Kante  $e$  hinzugefügt wird. Dann muss für die Graphen  $H_i$  bzw.  $H_i + e$  für alle  $i = 1, 2$  die Kreispackungszahl  $\nu(H_i)$  bzw.  $\nu(H_i + e)$  und eine maximale Kreispackung bestimmt werden. Anschließend ist zu unterscheiden, ob man auf Schritt 4 oder Schritt 5 verzweigt.

Falls das Kriterium aus Satz 3.6 nicht erfüllt ist, gibt es in einer maximalen Kreispackung immer mindestens einen Übergangskreis und es gilt  $\nu(G) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ .

In diesem Fall geht man zu Schritt 4.

Sonst geht man zu Schritt 5.

#### Schritt 4

In diesem Schritt wird aus den bisher bestimmten maximalen Kreispackungen eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  mit einem Übergangskreis und die entsprechende Kreispackungszahl  $\nu(G)$  bestimmt.

Wurde der Graph in Schritt 2 modifiziert, muss dies in der erzeugten Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  rückgängig gemacht werden. Das geschieht in Schritt 6.

Ist dieser Schritt nicht notwendig, da in  $G$  keine Kante  $(x, y)$  enthalten ist, geht man direkt zu Schritt 7.

#### Schritt 5

In diesem Schritt wird aus den bisher bestimmten maximalen Kreispackungen eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  für  $G$  und die entsprechende Kreispackungszahl  $\nu(G)$  bestimmt. Die maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  enthält keinen Übergangskreis.

Analog zu Schritt 4 muss, im Falle einer Modifikation des Graphen in Schritt 2, diese in der erzeugten Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  rückgängig gemacht werden. Das geschieht in Schritt 6.

Ist dieser Schritt nicht notwendig, geht man zu Schritt 7.

#### Schritt 6

Nachdem  $\nu(G)$  und  $\mathcal{P}(G)$  bestimmt wurden, werden die, in Schritt 2 eingefügten Knoten und Kanten, in Schritt 6 wieder durch die ursprünglichen Kanten  $(x, y)$  ersetzt. Anschließend geht man zu Schritt 7.

#### Schritt 7

Abschließend wird in diesem Schritt die Kreispackung dem Graphen  $G$  zugeordnet, da im Algorithmus alles unter Verwendung eines Hilfsgraphen durchgeführt wird.

Es folgt der Algorithmus im Pseudocode.

#### Algorithmus 1

Input  $G$  mit mindestens einem 2-Separator

Schritt 1 Bestimme 2-Separator  $\{x, y\} \in G$

Setze  $e := (x, y)$  und  $\bar{G} := G$

Bilde  $H_1 = (V_1, E_1), H_2 = (V_2, E_2) \subset G = (V(G), E(G))$  mit

$$V_1 \cap V_2 = \{x, y\}$$

$$V_1 \cup V_2 = V(G) \cup \{x, y\}$$

$$E_1 \cup E_2 = E(G)$$

Falls  $e \in E(G)$

Gehe zu Schritt 2.

Sonst

Gehe zu Schritt 3.

Schritt 2 Bestimme  $F' := \{p \mid p \in E(G), p = (x, y)\}$ ,  $m := |F'|$  und  $n := |E_1 \cap F'|$

Setze  $E(\bar{G}) = E(\bar{G}) \setminus F'$  und

$$V(\bar{G}) = V(\bar{G}) \cup \{u_i \mid i = 1, \dots, m; u_i \notin V(\bar{G})\}$$

Für  $i = 1, \dots, m$

Bilde  $e_{i_1} := (x, u_i)$  und  $e_{i_2} := (u_i, y)$

Setze  $E(\bar{G}) := E(\bar{G}) \cup \{e_{i_1}, e_{i_2}\}$

Setze  $E_1 = E_1 \setminus \{E_1 \cap F'\}$  und  $E_2 = E_2 \setminus \{E_2 \cap F'\}$

Falls  $n \neq 0$

Für  $j = 1, \dots, n$

Setze  $V_1 := V_1 \cup \{u_j\}$  und

$$E_1 = E_1 \cup \{e_{j_1}, e_{j_2}\}$$

Falls  $n \neq m$

Für  $j = n + 1, \dots, m$

Setze  $V_2 := V_2 \cup \{u_j\}$  und

$$E_2 = E_2 \cup \{e_{j_1}, e_{j_2}\}$$

Sonst

Für  $j = 1, \dots, m$

Setze  $V_2 := V_2 \cup \{u_j\}$  und

$$E_2 = E_2 \cup \{e_{j_1}, e_{j_2}\}$$

Schritt 3      Bilde  $H_1 + e$  und  $H_2 + e$   
 Bestimme  $\nu(H_1)$ ,  $\nu(H_2)$ ,  $\nu(H_1 + e)$  und  $\nu(H_2 + e)$   
 mit  $\mathcal{P}(H_1)$ ,  $\mathcal{P}(H_2)$ ,  $\mathcal{P}(H_1 + e)$  und  $\mathcal{P}(H_2 + e)$ ,  
 den möglichen zugehörigen maximalen Kreispackungen.  
 Falls  $\nu(H_i + e) > \nu(H_i)$  für alle  $i = 1, 2$

Gehe zu Schritt 4.

Sonst

Gehe zu Schritt 5.

Schritt 4      Sei  $C_1 \in \mathcal{P}(H_1 + e)$  mit  $e \in C_1$   
 und  $C_2 \in \mathcal{P}(H_2 + e)$  mit  $e \in C_2$   
 Setze  $\mathcal{P}(\bar{G}) = \mathcal{P}(H_1 + e) \cup \mathcal{P}(H_2 + e) \setminus \{C_1, C_2\} \cup \{\bar{C}\}$   
 mit  $\bar{C} = (C_1 \cup C_2) \setminus (C_1 \cap C_2)$   
 und  $\nu(G) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$

Falls  $\{e\} \cap E(G) \neq \emptyset$

Gehe zu Schritt 6.

Sonst

Gehe zu Schritt 7.

Schritt 5      Setze  $\mathcal{P}(\bar{G}) = \mathcal{P}(H_1) \cup \mathcal{P}(H_2)$   
 und  $\nu(G) = \nu(H_1) + \nu(H_2)$

Falls  $e \in E(G)$

Gehe zu Schritt 6.

Sonst

Gehe zu Schritt 7.

Schritt 6 Für  $i = 1, \dots, m$

Falls es  $C \in \mathcal{P}(\bar{G})$  gibt mit  $e_{i_1} = (x, u_i), e_{i_2} = (u_i, y) \in C$

Setze  $C = C \setminus \{e_{i_1}, e_{i_2}\} + \{e\}$

und  $E(\bar{G}) := E(\bar{G}) \setminus \{e_{i_1}, e_{i_2}\} \cup \{e\}$

Schritt 7 Setze  $\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(\bar{G})$

STOP!

## Bestimmung einer maximalen Kreispackung für Graphen, die einen 3-Separator enthalten

Analog zum vorherigen Unterkapitel wird ein Algorithmus vorgestellt, welcher eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  sowie die Kreispackungszahl  $\nu(G)$  für einen gegebenen Graphen  $G$  mit einem 3-Separator liefert. Es wird zunächst wiederum eine Beschreibung des Algorithmus gegeben. Dabei seien  $G$  und  $H$  sowie  $H_1$  und  $H_2$  wie zuvor.

### Gegeben

Ein Graph  $G$  mit mindestens einem 3-Separator.

### Schritt 1

Zunächst bestimmt man einen 3-Separator  $S = \{x, y, z\}$  und setzt die Kantenmenge  $F = \{e, f, g\}$  mit  $e := (x, y)$ ,  $f := (x, z)$  und  $g := (y, z)$ . Anschließend werden die beiden Teilgraphen  $H_1$  und  $H_2$  erzeugt. Allerdings kann es in  $G$  Kanten  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  und  $(y, z)$  geben. Diese werden in Schritt 2 beliebig  $H_1$  oder  $H_2$  zugeordnet.

Wenn es in  $G$  Kanten  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  und  $(y, z)$  gibt, geht man daher zu Schritt 2.

Sonst geht man zu Schritt 3.

### Schritt 2

In diesem Schritt werden die in  $G$  vorhandenen Kanten  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  und  $(y, z)$  ersetzt. Für jede Kante  $(x, y)$  bzw.  $(x, z)$  oder  $(y, z)$  werden ein neuer Knoten und zwei neue Kanten eingefügt. Anschließend werden alle Kanten  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  und  $(y, z)$  aus dem Graphen entfernt und man geht zu Schritt 3.

### Schritt 3

Es werden die Graphen  $H_i + e, H_i + f, H_i + g, H_i + \{e, f\}, H_i + \{e, g\}, H_i + \{g, f\}$  und  $H_i + F$  für alle  $i = 1, 2$  gebildet. Anschließend muss für die Graphen  $H_i + e, H_i + f, H_i + g, H_i + \{e, f\}, H_i + \{e, g\}, H_i + \{g, f\}$  und  $H_i + F$  für alle  $i = 1, 2$  die

Kreispackungszahl  $\nu(H_i + e)$ ,  $\nu(H_i + f)$ ,  $\nu(H_i + g)$ ,  $\nu(H_i + \{e, f\})$ ,  $\nu(H_i + \{e, g\})$ ,  $\nu(H_i + \{g, f\})$  und  $\nu(H_i + F)$  sowie eine entsprechende maximale Kreispackung bestimmt werden. Anschließend ist zu unterscheiden, ob auf Schritt 4 oder Schritt 6 verzweigt wird.

Falls eine der Aussagen (a)-(c) aus Lemma 3.9 erfüllt ist, gibt es in einer maximalen Kreispackung immer mindestens einen Übergangskreis und es gilt  $\nu(G) \geq \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ . In diesem Fall geht man zu Schritt 4.

Anderenfalls geht man zu Schritt 6.

#### Schritt 4

In diesem Schritt wird überprüft, wie viele Übergangskreise eine maximale Kreispackung von  $G$  mindestens enthalten muss.

Falls Aussage 2.) aus Satz 3.11 erfüllt ist, gibt es immer eine maximale Kreispackung mit zwei Übergangskreisen und es folgt  $\nu(G) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$ . In diesem Fall geht man zu Schritt 5.

Falls Aussage 2.) aus Satz 3.11 nicht erfüllt ist, allerdings das Kriterium aus Lemma 3.13, gibt es immer eine maximale Kreispackung mit einem Übergangskreis und es ergibt sich  $\nu(G) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ . Aus den bisher bestimmten maximalen Kreispackungen wird eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  mit einem Übergangskreis erzeugt und die entsprechende Kreispackungszahl  $\nu(G)$  identifiziert. Danach geht man zu Schritt 7.

Falls das Kriterium aus Lemma 3.13 nicht erfüllt ist, gibt es immer eine maximale Kreispackung mit drei Übergangskreisen und es gilt  $\nu(G) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$ . Man konstruiert aus den bisher bestimmten maximalen Kreispackungen eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  mit drei Übergangskreisen und bestimmt die entsprechende Kreispackungszahl  $\nu(G)$ . Anschließend geht man zu Schritt 7.

#### Schritt 5

In diesem Schritt werden aus den bisher gefundenen maximalen Kreispackungen eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  mit zwei Übergangskreisen und die entsprechende Kreispackungszahl  $\nu(G)$  bestimmt. Anschließend geht man zu Schritt 7.

#### Schritt 6

In diesem Schritt werden aus den bisher bestimmten maximalen Kreispackungen eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(G)$  ohne Übergangskreise und die entsprechende Kreispackungszahl  $\nu(G)$  bestimmt. Anschließend geht man zu Schritt 7.

#### Schritt 7

Wurde der Graph in Schritt 2 modifiziert, muss dies in der erzeugten Kreispackung

$\mathcal{P}(G)$  rückgängig gemacht werden. Das geschieht in Schritt 8.

Ist dieser Schritt nicht notwendig, da in  $G$  keine Kante  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  bzw.  $(y, z)$  enthalten ist, geht man direkt zu Schritt 9.

### Schritt 8

Nachdem  $\nu(G)$  und  $\mathcal{P}(G)$  bestimmt wurden, werden die, in Schritt 2 eingefügten Knoten und Kanten, in Schritt 8 wieder durch die ursprünglichen Kanten  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  und  $(y, z)$  ersetzt. Anschließend geht man zu Schritt 9.

### Schritt 9

Abschließend wird in diesem Schritt die Kreispackung dem Graphen  $G$  zugeordnet, da im Algorithmus alles unter Verwendung eines Hilfsgraphen durchgeführt wird.

Es folgt der Algorithmus im Pseudocode.

### Algorithmus 2

Input  $G$  mit mindestens einem 3-Separator

Schritt 1 Bestimme 3-Separator  $\{x, y, z\} \in G$

Setze  $e := (x, y)$ ,  $f := (x, z)$  und  $g := (y, z)$ ,  $\tilde{F} := \{e, f, g\}$  und  $\bar{G} := G$

Bilde  $H_1 = (V_1, E_1), H_2 = (V_2, E_2) \subset G = (V(G), E(G))$  mit

$$V_1 \cap V_2 = \{x, y, z\}$$

$$V_1 \cup V_2 = V(G) \cup \{x, y, z\}$$

$$E_1 \cup E_2 = E(G)$$

Falls  $\tilde{F} \cap E(G) \neq \emptyset$

Gehe zu Schritt 2.

Sonst

Gehe zu Schritt 3.

Schritt 2 Falls  $e \in E(G)$

Bestimme  $F'_1 := \{p \mid p \in E(G), p = (x, y)\}$ ,  $m_1 := |F'_1|$

und  $n_1 := |E_1 \cap F'_1|$

Setze  $E(\bar{G}) = E(G) \setminus F'_1$  und

$$V(\bar{G}) = V(\bar{G}) \cup \{u_i \mid i = 1, \dots, m_1; u_i \notin V(\bar{G})\}$$

Für  $i = 1, \dots, m_1$

$$\text{Bilde } e_{i_1} := (x, u_i) \text{ und } e_{i_2} := (u_i, y)$$

$$\text{Setze } E(\bar{G}) := E(\bar{G}) \cup \{e_{i_1}, e_{i_2}\}$$

$$\text{Setze } E_1 = E_1 \setminus (E_1 \cap F'_1) \text{ und } E_2 = E_2 \setminus (E_2 \cap F'_1)$$

Falls  $n_1 \neq 0$

Für  $j = 1, \dots, n_1$

$$\text{Setze } V_1 := V_1 \cup \{u_j\} \text{ und}$$

$$E_1 = E_1 \cup \{e_{j_1}, e_{j_2}\}$$

Falls  $n_1 \neq m_1$

Für  $j = n_1 + 1, \dots, m_1$

$$\text{Setze } V_2 := V_2 \cup \{u_j\} \text{ und}$$

$$E_2 = E_2 \cup \{e_{j_1}, e_{j_2}\}$$

Sonst

Für  $j = 1, \dots, m_1$

$$\text{Setze } V_2 := V_2 \cup \{u_j\} \text{ und}$$

$$E_2 = E_2 \cup \{e_{j_1}, e_{j_2}\}$$

Falls  $f \in E(G)$

$$\text{Bestimme } F'_2 := \{p \mid p \in E(G), p = (x, z)\}, m_2 := |F'_2|$$

$$\text{und } n_2 := |E_1 \cap F'_2|$$

$$\text{Setze } E(\bar{G}) = E(\bar{G}) \setminus F'_2 \text{ und}$$

$$V(\bar{G}) = V(\bar{G}) \cup \{v_i \mid i = 1, \dots, m_2; v_i \notin V(\bar{G})\}$$

Für  $i = 1, \dots, m_2$

$$\text{Bilde } f_{i_1} := (x, v_i) \text{ und } f_{i_2} := (v_i, z)$$

$$\text{Setze } E(\bar{G}) := E(\bar{G}) \cup \{f_{i_1}, f_{i_2}\}$$

Setze  $E_1 = E_1 \setminus (E_1 \cap F'_2)$  und  $E_2 = E_2 \setminus (E_2 \cap F'_2)$

Falls  $n_2 \neq 0$

Für  $j = 1, \dots, n_2$

Setze  $V_1 := V_1 \cup \{v_j\}$  und

$$E_1 = E_1 \cup \{f_{j_1}, f_{j_2}\}$$

Falls  $n_2 \neq m_2$

Für  $j = n_2 + 1, \dots, m_2$

Setze  $V_2 := V_2 \cup \{v_j\}$  und

$$E_2 = E_2 \cup \{f_{j_1}, f_{j_2}\}$$

Sonst

Für  $j = 1, \dots, m_2$

Setze  $V_2 := V_2 \cup \{v_j\}$  und

$$E_2 = E_2 \cup \{f_{j_1}, f_{j_2}\}$$

Falls  $g \in E(G)$

Bestimme  $F'_3 := \{p \mid p \in E(G), p = (y, z)\}$ ,  $m_3 := |F'_3|$

und  $n_3 := |E_1 \cap F'_3|$

Setze  $E(\bar{G}) = E(\bar{G}) \setminus F'_3$  und

$$V(\bar{G}) = V(\bar{G}) \cup \{w_i \mid i = 1, \dots, m_3; w_i \notin V(\bar{G})\}$$

Für  $i = 1, \dots, m_3$

Bilde  $g_{i_1} := (y, w_i)$  und  $g_{i_2} := (w_i, z)$

Setze  $E(\bar{G}) := E(\bar{G}) \cup \{g_{i_1}, g_{i_2}\}$

Setze  $E_1 = E_1 \setminus (E_1 \cap F'_3)$  und  $E_2 = E_2 \setminus (E_2 \cap F'_3)$

Falls  $n_3 \neq 0$

Für  $j = 1, \dots, n_3$

Setze  $V_1 := V_1 \cup \{w_j\}$  und

$$E_1 = E_1 \cup \{g_{j_1}, g_{j_2}\}$$

Falls  $n_3 \neq m_3$

Für  $j = n_3 + 1, \dots, m_3$

Setze  $V_2 := V_2 \cup \{w_j\}$  und

$$E_2 = E_2 \cup \{g_{j_1}, g_{j_2}\}$$

Sonst

Für  $j = 1, \dots, m_3$

Setze  $V_2 := V_2 \cup \{w_j\}$  und

$$E_2 = E_2 \cup \{g_{j_1}, g_{j_2}\}$$

Schritt 3 Bilde

$$H_1 + e, H_1 + f, H_1 + g, H_1 + \{e, f\}, H_1 + \{e, g\}, H_1 + \{g, f\}$$

und  $H_1 + \tilde{F}$  sowie

$$H_2 + e, H_2 + f, H_2 + g, H_2 + \{e, f\}, H_2 + \{e, g\}, H_2 + \{g, f\}$$

und  $H_2 + \tilde{F}$

Bestimme  $\nu(H_i), \nu(H_i + e), \nu(H_i + f), \nu(H_i + g), \nu(H_i + \{e, f\}),$

$\nu(H_i + \{e, g\}), \nu(H_i + \{g, f\})$  und  $\nu(H_i + \tilde{F})$  für alle  $i = 1, 2$

mit  $\mathcal{P}(H_i), \mathcal{P}(H_i + e), \mathcal{P}(H_i + f), \mathcal{P}(H_i + g), \mathcal{P}(H_i + \{e, f\}),$

$\mathcal{P}(H_i + \{e, g\}), \mathcal{P}(H_i + \{g, f\})$  und  $\mathcal{P}(H_i + \tilde{F})$  für alle  $i = 1, 2$ .

Falls es  $p \in \tilde{F}$  gibt mit  $\nu(H_i + p) > \nu(H_i)$  für alle  $i = 1, 2$

Gehe zu Schritt 4.

Falls es  $p, q \in \tilde{F}, p \neq q$  gibt mit

$$\nu(H_1 + \{p, q\}) + \nu(H_2 + \{p, q\}) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 3$$

Gehe zu Schritt 4.

Falls  $\nu(H_i + \tilde{F}) = \nu(H_i) + 2$  für alle  $i = 1, 2$

Gehe zu Schritt 4.

Sonst

Gehe zu Schritt 6.

Schritt 4 Falls es  $p \in \tilde{F}$  gibt mit  $\nu(H_i + p) > \nu(H_i)$  für alle  $i = 1, 2$

Falls es  $q \in \tilde{F}$ ,  $p \neq q$  gibt

mit  $\nu(H_i + \{p, q\}) > \nu(H_i + p)$  für alle  $i = 1, 2$

Gehe zu Schritt 5.

Sonst

Sei  $C_1 \in \mathcal{P}(H_1 + p)$  mit  $p \in C_1$

und  $C_2 \in \mathcal{P}(H_2 + p)$  mit  $p \in C_2$

Setze  $\mathcal{P}(\bar{G}) = \{\mathcal{P}(H_1 + p) \cup \mathcal{P}(H_2 + p)\} \setminus \{C_1, C_2\} \cup \{\bar{C}\}$

mit  $\bar{C} = (C_1 \cup C_2) \setminus (C_1 \cap C_2)$

und  $\nu(G) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$

Gehe zu Schritt 7.

Sonst

Sei  $C_{i_1} \in \mathcal{P}(H_i + \tilde{F})$  mit  $e \in C_{i_1}$  für alle  $i = 1, 2$

und  $C_{i_2} \in \mathcal{P}(H_i + \tilde{F})$  mit  $f \in C_{i_2}$  für alle  $i = 1, 2$

und  $C_{i_3} \in \mathcal{P}(H_i + \tilde{F})$  mit  $g \in C_{i_3}$  für alle  $i = 1, 2$

Setze

$\mathcal{P}(\bar{G}) = \{\mathcal{P}(H_1 + \tilde{F}) \cup \mathcal{P}(H_2 + \tilde{F})\} \setminus \{C_{1_1}, C_{2_1}, C_{1_2}, C_{2_2}, C_{1_3}, C_{2_3}\}$

$\cup \{C_1\} \cup \{C_2\} \cup \{C_3\}$

mit  $C_1 = (C_{1_1} \cup C_{2_1}) \setminus (C_{1_1} \cap C_{2_1})$

und  $C_2 = (C_{1_2} \cup C_{2_2}) \setminus (C_{1_2} \cap C_{2_2})$

und  $C_3 = (C_{1_3} \cup C_{2_3}) \setminus (C_{1_3} \cap C_{2_3})$

und  $\nu(G) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$

Gehe zu Schritt 7.

Schritt 5 Sei  $C_{i_1} \in \mathcal{P}(H_i + \{p, q\})$  mit  $p \in C_{i_1}$  für alle  $i = 1, 2$

und  $C_{i_2} \in \mathcal{P}(H_i + \{p, q\})$  mit  $q \in C_{i_2}$  für alle  $i = 1, 2$

Setze

$$\mathcal{P}(\bar{G}) = \{\mathcal{P}(H_1 + \{p, q\}) \cup \mathcal{P}(H_2 + \{p, q\})\} \setminus \{C_{1_1}, C_{2_1}, C_{1_2}, C_{2_2}\} \cup \{C_1\} \cup \{C_2\}$$

$$\text{mit } C_1 = (C_{1_1} \cup C_{2_1}) \setminus (C_{1_1} \cap C_{2_1})$$

$$\text{und } C_2 = (C_{1_2} \cup C_{2_2}) \setminus (C_{1_2} \cap C_{2_2})$$

$$\text{und } \nu(G) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 2$$

Gehe zu Schritt 7.

Schritt 6 Setze  $\mathcal{P}(\bar{G}) = \mathcal{P}(H_1) \cup \mathcal{P}(H_2)$

$$\text{und } \nu(G) = \nu(H_1) + \nu(H_2)$$

Gehe zu Schritt 7.

Schritt 7 Falls  $\tilde{F} \cap E(G) \neq \emptyset$

Gehe zu Schritt 8.

Sonst

Gehe zu Schritt 9.

Schritt 8 Falls  $e \in E(G)$

Für  $i = 1, \dots, m_1$

$$\text{Falls es } C \in \mathcal{P}(\bar{G}) \text{ gibt mit } e_{i_1} := (x, u_i), e_{i_2} := (u_i, y) \in C$$

$$\text{Setze } C = C \setminus \{e_{i_1}, e_{i_2}\} + \{e\}$$

$$\text{und } E(\bar{G}) := E(\bar{G}) \setminus \{e_{i_1}, e_{i_2}\} \cup \{e\}$$

Falls  $f \in E(G)$

Für  $i = 1, \dots, m_2$

$$\text{Falls es } C \in \mathcal{P}(\bar{G}) \text{ gibt mit } f_{i_1} := (x, u_i), f_{i_2} := (u_i, z) \in C$$

$$\text{Setze } C = C \setminus \{f_{i_1}, f_{i_2}\} + \{f\}$$

$$\text{und } E(\bar{G}) := E(\bar{G}) \setminus \{f_{i_1}, f_{i_2}\} \cup \{f\}$$

Falls  $g \in E(G)$

Für  $i = 1, \dots, m_3$

Falls es  $C \in \mathcal{P}(\bar{G})$  gibt mit  $g_{i_1} := (y, u_i), g_{i_2} := (u_i, z) \in C$

Setze  $C = C \setminus \{g_{i_1}, g_{i_2}\} + \{g\}$

und  $E(\bar{G}) := E(\bar{G}) \setminus \{g_{i_1}, g_{i_2}\} \cup \{g\}$

Schritt 9 Setze  $\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(\bar{G})$

STOP!

Das vorgestellte algorithmische Konzept erlaubt eine rekursive Anwendung in Graphen, in denen die Untergraphen  $H_i$ , bzw. die modifizierten Untergraphen mit zugefügten Kanten, wiederum mindestens einen 2- oder 3-Separator besitzen. Bestenfalls wäre es möglich, die Graphen so zu „verkleinern“ (Verringerung der Knoten und Kantenanzahl), dass man Graphen erhält, für die es „einfach“ ist, eine maximale Kreispackung zu bestimmen. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn eine maximale Kreispackung für den Graphen bereits bekannt ist. In diesem Fall könnte man durch eine Rückwärtsrechnung ebenfalls eine maximale Kreispackung für  $G$  erzeugen. Das bedeutet, setzt man die Kenntnis der maximalen Kreispackungen von  $H_1, H_2$  und den, um die entsprechenden Kanten erweiterten, modifizierten Untergraphen voraus, so kann man unter Verwendung der Aussagen aus Kapitel 3.1 aus diesen maximalen Kreispackungen eine maximale Kreispackung von  $G$  herleiten. Des weiteren ist es möglich Bedingungen für einen Graphen zu formulieren, welche garantieren, dass eine sukzessive Verkleinerung des Graphen durch bestimmte  $k$ -Separatoren möglich ist. Betrachtet man beispielsweise einen Graphen  $G = (V, E)$ , welcher einen  $k$ -Separator mit  $k \leq 3$  enthält, so liefert die Bedingung  $\delta(v) \leq 3$  für alle  $v \in V$ , dass  $G$  iterativ durch  $k$ -Separatoren mit  $k \leq 3$  zerlegbar ist (vgl. hierzu [8]).

## 3.2 Aussagen für Graphen, die einen $k$ -Separator mit $k \geq 4$ enthalten

In den Kapiteln 3.1.1 und 3.1.2 kann man erkennen, dass es formale Ähnlichkeiten in den Bedingungen im Fall eines vorliegenden 2-Separators und im Fall eines vorliegenden 3-Separators gibt. Die Bedingungen aus Satz 3.6 finden sich beispielsweise bei der Betrachtung eines Graphen mit einem 3-Separator in Lemma 3.13 wieder. Sie müssen allerdings

um zusätzliche Bedingungen erweitert werden, damit  $\nu(H) = \nu(H_1) + \nu(H_2) + 1$  auch im Falle des 3-Separators gewährleistet werden kann. In einigen Fällen ist es allerdings möglich, dass die Betrachtung von zwei der drei Separatorknoten  $x, y$  und  $z$  ausreichen würde, um erste Aussagen über  $\nu(G)$  und  $\mathcal{P}(G)$  zu tätigen. Dies wäre zum Beispiel der Fall, wenn  $\nu(H_i + e) = \nu(H_i) + 1$  für  $e = (x, y)$  und alle  $i = 1, 2$ . In diesem Fall kann man sofort  $\nu(H) > \nu(H_1) + \nu(H_2)$  schließen. Es stellt sich die Frage, ob man Bedingungen für eine Teilmenge der Separatorknoten angeben kann, welche ebenfalls eine Bestimmung von  $\nu(G)$  und  $\mathcal{P}(G)$  ermöglichen. Allgemeine Aussagen zu den Zusammenhängen von  $\nu(G)$  mit bestimmten Bedingungen an eine Teilmenge von Separatorknoten wurden in [48] veröffentlicht. Die dort dargestellten Ergebnisse werden nachfolgend kurz wiedergegeben und erläutert. Da sie aber keinen wesentlichen Anteil dieser Arbeit darstellen, wird für die Beweise auf [48] verwiesen.

Es sei  $G$  ein Graph und  $S$  ein  $k$ -Separator von  $G$  mit  $1 \leq k \leq |V(G)| - 2$ . Die Knotenmengen  $V_1$  und  $V_2$  seien, wie zuvor, definiert. Der gegebene Graph  $G$  wird zunächst zu einem Graphen  $G(T)$  modifiziert, wobei  $T$  eine Teilmenge der Separatorknoten ist. Für die Modifikation sind einige Definitionen notwendig.

Sei  $x \in S$  ein Separatorknoten, dann beschreibt die Kantenmenge

$$E_G(x, W) := \{q \in E(G) \mid q = (x, u), u \in W \subseteq V(G)\}$$

die Menge aller Kanten aus  $E(G)$  mit Endknoten  $x$  und einem Endknoten  $u$  aus  $W \subseteq V(G)$ . Für  $W = S$  ist  $E_G(x, S)$  die Menge aller Kanten aus  $E(G)$  mit Endknoten  $x$  und einem weiteren Separatorknoten. Die Multimengen  $E_1$  und  $E_2$  seien zwei disjunkte Teilmengen von  $E_G(x, S)$  mit  $E_1 \cup E_2 = E_G(x, S)$ .

Für eine Teilmenge  $T$  der Separatorknoten mit  $T \subseteq S \setminus \{x\}$  entsteht  $G(T)$  folgendermaßen

- Man löscht zunächst  $x$ .
- Anschließend fügt man zwei neue Knoten  $x_1$  und  $x_2$  ein, also

$$V(G(T)) = V(G) \setminus x \cup \{x_1, x_2\}$$

mit  $x_1 \in V_1$  und  $x_2 \in V_2$ .

- Nun wird jede Kante  $(x, y) \in \{E_1 \cup E_G(x, V_1)\}$  durch eine Kante  $(x_1, y)$  ersetzt und jede Kante  $(x, y) \in \{E_2 \cup E_G(x, V_2)\}$  durch eine Kante  $(x_2, y)$  ersetzt.

- Abschließend fügt man für alle  $y \in T$  zwei zusätzliche Kanten  $e_{1,y} = (x_1, y)$  und  $e_{2,y} = (x_2, y)$  ein. Es folgt

$$E(G(T)) = E(G) \setminus ((E_1 \cup E_G(x, V_1)) \cup (E_2 \cup E_G(x, V_2))) \\ \cup \{(x_1, y) \mid (x, y) \in (E_1 \cup E_G(x, V_1))\} \cup \{(x_2, y) \mid (x, y) \in (E_2 \cup E_G(x, V_2))\} \\ \cup \{(x_1, y) \mid y \in T\} \cup \{(x_2, y) \mid y \in T\}$$

Die Modifikation bedeutet, dass man in  $G(T)$  die Anzahl der Separatorknoten gegenüber  $G$  um einen Knoten reduziert hat. Zur Veranschaulichung sei der in Abbildung 3.9 dargestellte Graph  $G$  mit einem  $k$ -Separator  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$  betrachtet.

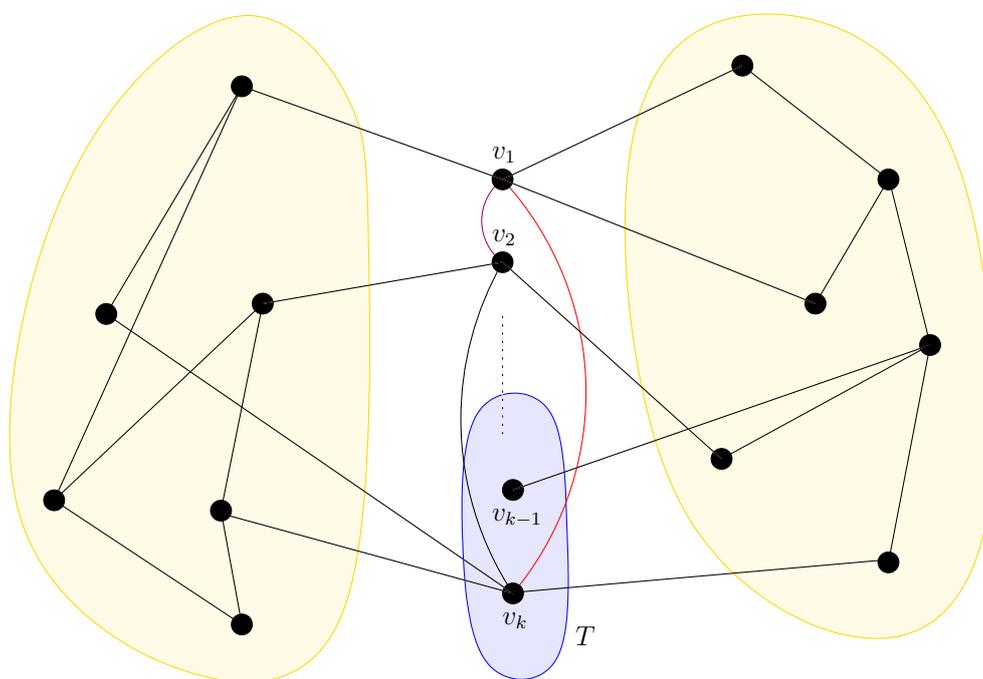
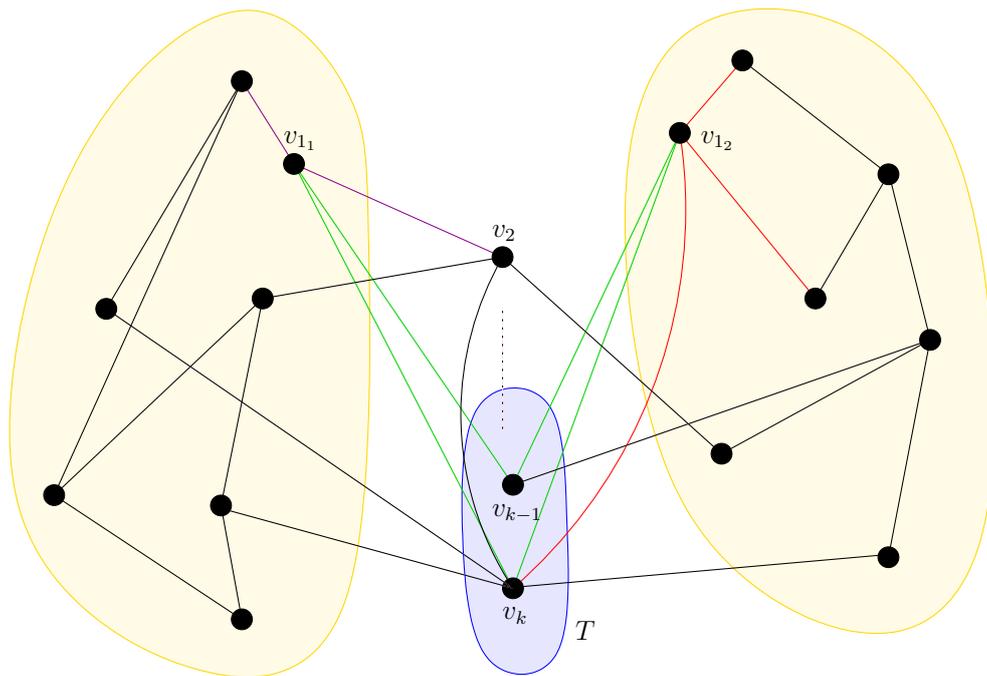


Abbildung 3.9: Ein Beispielgraph  $G$  mit einem  $k$ -Separator  $S$  und der Teilmenge  $T \subseteq S$

Die Separatorknoten, welche im blau markierten Bereich liegen, gehören in diesem Beispiel zur Menge  $T$ . Zudem seien  $(v_1, v_2)$  und  $(v_2, v_k)$  (lila markiert) Kanten der Menge  $E_1$  und  $(v_1, v_k)$  (rot markiert) eine Kante der Menge  $E_2$ . Des weiteren sei  $x = v_1$  festgelegt. Der modifizierte Graph  $G(T)$  ist in Abbildung 3.10 abgebildet.

Bei der Modifikation von  $G$  wird zunächst der festgelegte Knoten  $v_1$  durch einen Knoten  $v_{1_1}$  in der Menge  $V_1$  und einen Knoten  $v_{1_2}$  in der Menge  $V_2$  ersetzt. Alle mit  $v_1$  inzidenten Kanten aus  $V_1$  bzw. alle  $E_1$  zugeordneten Kanten mit Endknoten  $v_1$  werden durch inzidente Kanten mit  $v_{1_1}$  ersetzt (lila markiert). Analog werden alle mit  $v_1$  inzidenten Kanten

Abbildung 3.10: Der modifizierte Graph  $G(T)$ 

aus  $V_2$  bzw. alle  $E_2$  zugeordneten Kanten mit Endknoten  $v_1$  durch inzidente Kanten mit  $v_{1_2}$  ersetzt (rot markiert). Abschließend fügt man für jeden Separatorknoten  $y \in T$  je eine neue Kante mit Endknoten  $y$  und  $v_{1_1}$  bzw.  $y$  und  $v_{1_2}$  ein (grün markiert). Dies erfolgt auch, falls diese Kante durch den vorherigen Schritt bereits besteht.

Mit dem modifizierten Graphen  $G(T)$  ist in [48] folgender Satz formuliert.

**Satz 3.15:**

Falls  $G$ ,  $S$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $x$ ,  $E_1$ , und  $E_2$ , wie zuvor definiert, gegeben sind, gilt

$$\nu(G) = \max \{ \nu(G(T)) - |T| \mid T \subseteq S \setminus \{x\} \}.$$

Die Aussage aus Satz 3.15 besagt, dass man  $\nu(G)$  bestimmen kann, indem man einen Separatorknoten  $x$  festlegt und für alle Teilmengen  $T$  der restlichen Separatorknoten die Kreispackungszahl  $\nu(G(T))$  bestimmt. Die maximale Differenz zwischen  $\nu(G(T))$  und der Anzahl von Knoten in  $T$  ergibt dann  $\nu(G)$ . Der Satz folgt aus den beiden nachfolgenden Lemmata. In Lemma 3.16 wird dabei zunächst ausgesagt, dass die Differenz aus  $\nu(G(T))$  und der Anzahl von Knoten in  $T$  für alle Teilmengen  $T$  eine untere Schranke von  $\nu(G)$  darstellt.

**Lemma 3.16:**

Falls  $G, S, V_1, V_2, x, E_1$ , und  $E_2$ , wie zuvor definiert, gegeben sind, dann gilt

$$\nu(G) \geq \nu(G(T)) - |T| \text{ für alle } T \subseteq S \setminus \{x\}.$$

Die Existenz einer Menge  $T$ , sodass die Ungleichung in Lemma 3.16 mit Gleichheit erfüllt ist, wird durch Lemma 3.17 gezeigt.

**Lemma 3.17:**

Falls  $G, S, V_1, V_2, x, E_1$ , und  $E_2$  gegeben sind, wie zuvor definiert, dann existiert eine Menge  $T \subseteq S \setminus \{x\}$  so dass gilt

$$\nu(G) = \nu(G(T)) - |T|.$$

Abschließend wird nun eine allgemeine Aussage über den Zusammenhang der Mindestanzahl von Übergangskreisen in einer maximalen Kreispackung von  $H$  und einer maximalen Kreispackung von  $H + 2\dot{e}$  bewiesen werden. Dabei seien die Graphen  $H$  und  $H + 2\dot{e}$  wie zuvor definiert.

**Satz 3.18:**

Es sei  $H$  ein Graph,  $S$  ein  $k$ -Separator von  $H$  und  $F = \{(x, y) \mid x, y \in S, x \neq y\}$  mit  $(x, y) = (y, x)$ , für alle  $x, y \in S$ . Zudem sei  $a \in \mathbb{N}$  mit  $2 \leq a \leq \nu(H)$  und  $\mathcal{C}_0(H) = \emptyset, \dots, \mathcal{C}_{a-1}(H) = \emptyset$ . Dann folgt aus Bedingung 1.) die Bedingung 2.)

$$1.) \mathcal{C}_a(H) \neq \emptyset$$

2.)  $\forall e \in F$  gilt  $\mathcal{C}_0(H + 2\dot{e}) = \dots = \mathcal{C}_{a-2}(H + 2\dot{e}) = \emptyset$  und eine der folgenden zwei Bedingungen ist erfüllt

$$(a) \exists e \in F, \text{ so dass } \mathcal{C}_{a-1}(H + 2\dot{e}) \neq \emptyset$$

$$(b) \forall e \in F \text{ gilt } \mathcal{C}_{a-1}(H + 2\dot{e}) = \emptyset \text{ und es existiert } a' \in \mathbb{N} \text{ mit } \mathcal{C}_{a'}(H + 2\dot{e}) \neq \emptyset \text{ und } a \leq a' \leq a + 1$$

**Beweis:**

Angenommen, es existiere  $b \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq b < a - 1$  und  $e \in F$  derart, dass

$$\mathcal{C}_0(H + 2\dot{e}) = \dots = \mathcal{C}_{b-1}(H + 2\dot{e}) = \emptyset \text{ und } \mathcal{C}_b(H + 2\dot{e}) \neq \emptyset.$$

Dann sind drei Fälle zu unterscheiden:

- 1.) Es gibt eine maximale Kreispackung  $\bar{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e}) \in \mathcal{C}_b(H + 2\dot{e})$  mit einem Übergangskreis  $C_1 = (\dot{e}_1 \cup \dot{e}_2) \in \bar{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e})$ . Dann ist  $\bar{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e}) \setminus \{C_1\}$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit  $b - 1 < a - 2$  Übergangskreisen. Dies ist ein Widerspruch zu  $\mathcal{C}_0(H) = \dots = \mathcal{C}_{a-1}(H) = \emptyset$ .
- 2.) Es gibt eine maximale Kreispackung  $\bar{\bar{\mathcal{P}}}(H + 2\dot{e}) \in \mathcal{C}_b(H + 2\dot{e})$ , für die gilt  $\dot{e}_1 \subseteq E(C_1) \subseteq E(\bar{\bar{\mathcal{P}}}(H + 2\dot{e}))$  und  $\dot{e}_2 \cap E(\bar{\bar{\mathcal{P}}}(H + 2\dot{e})) = \emptyset$ . Dann ist  $\bar{\bar{\mathcal{P}}}(H + 2\dot{e}) \setminus \{C_1\}$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit höchstens  $b < a - 1$  Übergangskreisen. Dies ist ein Widerspruch zu  $\mathcal{C}_0(H) = \dots = \mathcal{C}_{a-1}(H) = \emptyset$ .
- 3.) In jeder maximalen Kreispackung vom Graphen  $H + 2\dot{e}$  gibt es zwei Kreise  $C_1, C_2 \in \mathcal{P}(H + 2\dot{e}) \in \mathcal{C}_b(H + 2\dot{e})$ , für die gilt  $\dot{e}_1 \subset E(C_1)$  und  $\dot{e}_2 \subset E(C_2)$ . In diesem Fall ist  $\tilde{\mathcal{P}}(H) = \mathcal{P}(H + 2\dot{e}) \setminus \{C_1, C_2\} \cup ((C_1 \cup C_2) \setminus (\dot{e}_1 \cup \dot{e}_2))$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit höchstens  $b + 1 < a$  Übergangskreisen. Dies ist ein Widerspruch zu  $\mathcal{C}_0(H) = \dots = \mathcal{C}_{a-1}(H) = \emptyset$ .

In allen drei Fällen hat man einen Widerspruch erzeugt. Somit gilt für jede Kante  $e \in F$ , dass  $\mathcal{C}_0(H + 2\dot{e}) = \dots = \mathcal{C}_{a-2}(H + 2\dot{e}) = \emptyset$ . Es bleibt zu zeigen, dass eine der Bedingungen 2.) (a) und (b) erfüllt ist.

Sei nun  $\mathcal{P}(H) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H)-a}\} \cup \{C'_1\} \cup \dots \cup \{C'_a\} \in \mathcal{C}_a(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit  $a$  Übergangskreisen  $C'_1, \dots, C'_a$ . Zudem sei definiert

$$Q_{\mathcal{P}(H)} = \{s \in S \mid \exists \text{ ein Übergangskreis } C \in \mathcal{P}(H) \text{ mit } s \in V(C)\}$$

Man unterscheidet zwei Fälle

- 1.) Es existiert eine maximale Kreispackung  $\bar{\mathcal{P}}(H) \in \mathcal{C}_a(H)$  mit einem Übergangskreis  $\bar{C} \in \bar{\mathcal{P}}(H)$  für den gilt  $|V(\bar{C}) \cap S| = 2$ . Es sei  $\{x, y\} \subseteq S$  mit  $\bar{C} \cap Q_{\bar{\mathcal{P}}(H)} = \{x, y\}$ . Wähle  $e = (x, y)$ , dann ist  $\bar{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e}) = \bar{\mathcal{P}}(H) \setminus \{\bar{C}\} \cup (\bar{C} \cap H_1 \cup \dot{e}_1) \cup (\bar{C} \cap H_2 \cup \dot{e}_2)$  eine maximale Kreispackung von  $H + 2\dot{e}$  mit  $\nu(H) + 1$  Kreisen und  $a - 1$  Übergangskreisen. Damit ist Bedingung 2.)(a) erfüllt.
- 2.) Für alle maximalen Kreispackungen von  $H$  mit  $\mathcal{P}(H) \in \mathcal{C}_a(H)$  gilt, dass es in der Knotenmenge eines jeden Übergangskreises  $C \in \mathcal{P}(H)$  mindestens vier Separatorknoten gibt, also  $|V(C) \cap Q_{\mathcal{P}(H)}| \geq 4$ .

Es sei angenommen, dass  $\mathcal{C}_{a-1}(H + 2\dot{e}) \neq \emptyset$ . Dann sind analog zum Beweis von  $\mathcal{C}_0(H + 2\dot{e}) = \emptyset, \dots, \mathcal{C}_{a-2}(H + 2\dot{e}) = \emptyset$  wiederum drei Fälle zu unterscheiden:

- (a) Es gibt eine maximale Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e}) \in \mathcal{C}_{a-1}(H + 2\dot{e})$  mit einem Übergangskreis  $\hat{C}_1 \in \tilde{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e})$  mit  $E(\hat{C}_1) = \{\dot{e}, \dot{e}\}$ : In diesem Fall ist

- $\tilde{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e}) \setminus \{\hat{C}_1\}$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit  $a - 2$  Übergangskreisen. Dies ist ein Widerspruch zu  $\mathcal{C}_0(H) = \dots = \mathcal{C}_{a-1}(H) = \emptyset$ .
- (b) Es gibt eine maximale Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e}) \in \mathcal{C}_b(H + 2\dot{e})$ , für die gilt  $\dot{e}_1 \subseteq E(\hat{C}_1) \subseteq E(\hat{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e}))$  und  $\dot{e}_2 \cap E(\hat{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e})) = \emptyset$ : Dann ist  $\hat{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e}) \setminus \{\hat{C}_1\}$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit höchstens  $a - 1$  Übergangskreisen. Dies ist wieder ein Widerspruch zu  $\mathcal{C}_0(H) = \dots = \mathcal{C}_{a-1}(H) = \emptyset$ .
- (c) In allen maximalen Kreispackungen von  $H + 2\dot{e}$  gibt es zwei Kreise  $\hat{C}_1, \hat{C}_2 \in \mathcal{P}(H + 2\dot{e}) \in \mathcal{C}_{a-1}(H + 2\dot{e})$  mit  $\dot{e}_1 \subset E(\hat{C}_1)$  und  $\dot{e}_2 \subset E(\hat{C}_2)$ : Dann ist  $\check{\mathcal{P}}(H) = \mathcal{P}(H + 2\dot{e}) \setminus \{\hat{C}_1, \hat{C}_2\} \cup \{\hat{C}_3\}$  mit  $\hat{C}_3 = (\hat{C}_1 \cup \hat{C}_2) \setminus (\dot{e}_1 \cup \dot{e}_2)$  eine maximale Kreispackung von  $H$ . In dem betrachteten Fall enthält jeder Übergangskreis einer maximalen Kreispackung von  $H$  mindestens vier Separatorknoten. Falls  $\hat{C}_3$  ein Übergangskreis ist, ergibt sich, dass mindestens einer der beiden Kreise  $\hat{C}_1$  und  $\hat{C}_2$  ebenfalls ein Übergangskreis ist. Damit hat  $\check{\mathcal{P}}(H)$  höchstens  $a - 1$  Übergangskreise. Dies ist ein Widerspruch zu  $\mathcal{C}_0(H) = \dots = \mathcal{C}_{a-1}(H) = \emptyset$ .

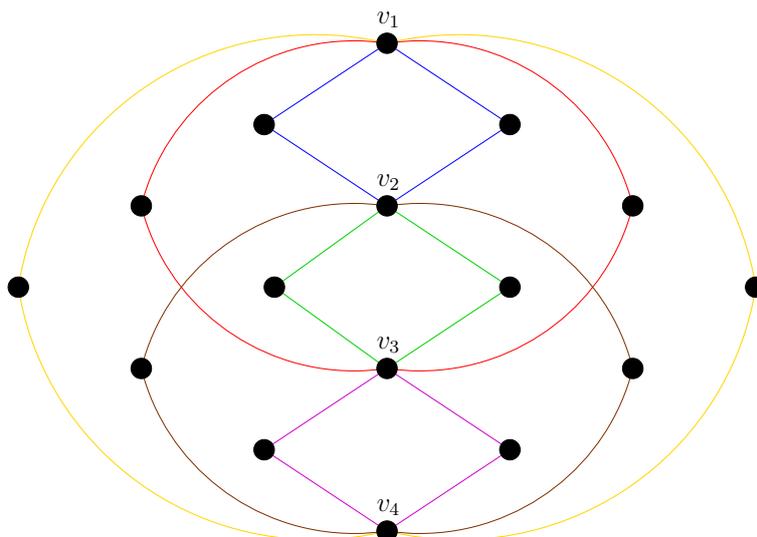
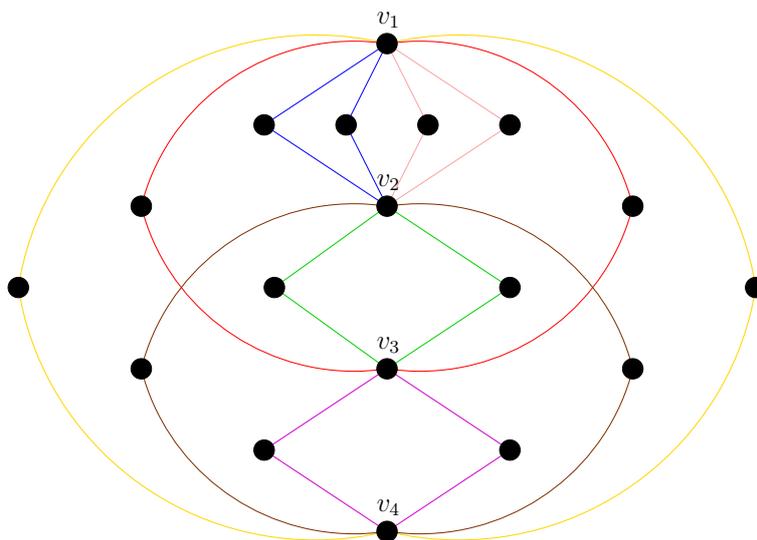
In allen drei Fällen ergibt sich erneut ein Widerspruch. Daher war die Annahme falsch und man erhält  $\mathcal{C}_{a-1}(H + 2\dot{e}) = \emptyset$ .

Sei nun  $e = (x, y)$  mit  $x, y \in Q_{\mathcal{P}(H)}$  so, dass ein Kreis  $\bar{C} \in \bar{\mathcal{P}}(H)$  existiert, für den gilt  $\{x, y\} \subset V(\bar{C})$ . Dann ist mindestens einer der Kreise  $\tilde{C}_1 = (\bar{C} \cap H_1) \cup \dot{e}_1$  und  $\tilde{C}_2 = (\bar{C} \cap H_2) \cup \dot{e}_2$  ein Übergangskreis und  $\bar{\mathcal{P}}(H + 2\dot{e}) = \bar{\mathcal{P}}(H) \setminus \{\bar{C}\} \cup \{\tilde{C}_1\} \cup \{\tilde{C}_2\}$  ist eine maximale Kreispackung von  $H + 2\dot{e}$  mit  $a$  oder  $a + 1$  Übergangskreisen. Folglich existiert  $a' \in \mathbb{N}$  mit  $\mathcal{C}_{a'}(H + 2\dot{e})$  und  $a \leq a' \leq a + 1$  und es folgt Bedingung 2.)(b).  $\square$

Es zeigt sich, dass die Aussagen 1.) und 2.) keine äquivalenten Aussagen sind. Man betrachte dazu folgenden Beispielgraphen  $H$  in Abbildung 3.11.

Für den Graphen  $H$  ist  $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  ein 4-Separator. Außerdem gilt  $\nu(H) = 6$  und eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(H)$  ist eindeutig. Sie besteht aus den sechs farblich markierten Kreisen  $C_1$  (rot),  $C_2$  (grün),  $C_3$  (blau),  $C_4$  (lila),  $C_5$  (gelb) und  $C_6$  (braun). Es sei  $a = 5$  gesetzt. Offensichtlich gilt  $\mathcal{C}_0(H) = \mathcal{C}_1(H) = \mathcal{C}_2(H) = \mathcal{C}_3(H) = \mathcal{C}_4(H) = \emptyset$ . Zudem ist Bedingung 2.)(b) erfüllt. Um dies zu verdeutlichen, sei O. B. d. A.  $e = (v_1, v_2)$ . In diesem Fall hat der Graph  $H + 2\dot{e}$  die in Abbildung 3.12 dargestellte Form

Es gilt  $\nu(H + 2\dot{e}) = 7$  und eine maximale Kreispackung ist nicht eindeutig. Allerdings enthält jede maximale Kreispackung die Kreise  $C_1, C_2, C_4, C_5$  und  $C_6$ . Folglich ergibt sich  $\mathcal{C}_0(H + 2\dot{e}) = \mathcal{C}_1(H + 2\dot{e}) = \mathcal{C}_2(H + 2\dot{e}) = \mathcal{C}_3(H + 2\dot{e}) = \mathcal{C}_4(H + 2\dot{e}) = \emptyset$ . Bezeichnet man den in Abbildung 3.12 blau markierten Kreis mit  $\tilde{C}_3$  und den rosa markierten Kreis mit  $\tilde{C}_7$ , so

Abbildung 3.11: Ein Beispielgraph  $H$  mit einem 4-Separator  $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ Abbildung 3.12: Ein Graph  $H + 2e$  mit  $e = (v_1, v_2)$ 

ist  $\mathcal{P}(H + 2e) = \{C_1, C_2, \tilde{C}_3, C_4, C_5, C_6, \tilde{C}_7\}$  eine maximale Kreispackung und man erhält  $\mathcal{C}_5(H + 2e) \neq \emptyset$ . Folglich ist für die Kante  $e = (v_1, v_2)$  Aussage 2.)(b) gegeben. Analog ergibt sich dies für jede weitere Kante  $f \in F$  mit  $f \neq e$ . Damit sind alle Bedingungen aus Aussage 2.)(b) erfüllt. Allerdings ist  $\mathcal{C}_5(H) = \emptyset$  und Aussage 1.) gilt nicht.

Man kann aber zeigen, dass aus Aussage 2.)(a) Aussage 1.) folgt.

**Lemma 3.19:**

Es sei  $H$  ein Graph,  $S$  ein  $k$ -Separator von  $H$  und  $F = \{(x, y) \mid x, y \in S, x \neq y\}$  mit  $(x, y) = (y, x)$ , für alle  $x, y \in S$ . Zudem sei  $a \in \mathbb{N}$  mit  $2 \leq a \leq \nu(H)$  und  $\mathcal{C}_0(H) = \dots = \mathcal{C}_{a-1}(H) = \emptyset$ . Dann gilt: 2.)  $\Rightarrow$  1.) für die Bedingungen

$$1.) \mathcal{C}_a(H) \neq \emptyset$$

$$2.) \forall e \in F \text{ gilt } \mathcal{C}_0(H + 2\dot{e}) = \dots = \mathcal{C}_{a-2}(H + 2\dot{e}) = \emptyset \text{ und es existiert } e \in F, \text{ so dass } \mathcal{C}_{a-1}(H + 2\dot{e}) \neq \emptyset$$

**Beweis:**

Sei  $\mathcal{P}(H + 2\dot{e}) = \{C_1, \dots, C_{\nu(H)+1-(a-1)}\} \cup \{C'_1\} \cup \dots \cup \{C'_{a-1}\} \in \mathcal{C}_{a-1}(H + 2\dot{e})$  eine maximale Kreispackung von  $H + 2\dot{e}$  mit  $a - 1$  Übergangskreisen  $C'_1, \dots, C'_{a-1}$ . Es gilt  $\mathcal{C}_{a-2}(H + 2\dot{e}) = \emptyset$ . Man unterscheidet drei Fälle

- (i) In  $\mathcal{P}(H + 2\dot{e})$  gibt es einen Kreis  $\bar{C}$  mit  $\{\dot{e}_1 \cup \dot{e}_2\} \subseteq E(\bar{C})$ : Dann ist  $\bar{C}$  ein Übergangskreis. Damit ist  $\{C_1, \dots, C_{\nu(H)+1-(a-1)}\} \cup \{C'_1\} \cup \dots \cup \{C'_{a-1}\} \setminus \{\bar{C}\} \in \mathcal{C}_{a-2}(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit  $a - 2$  Übergangskreisen. Dies ist einen Widerspruch zu  $\mathcal{C}_{a-2}(H) = \emptyset$ .
- (ii) In  $\mathcal{P}(H + 2\dot{e})$  existiert ein Kreis  $\bar{\bar{C}}$  mit  $\dot{e}_1 \subseteq E(\bar{\bar{C}})$  und  $\dot{e}_2 \not\subseteq E(\bar{\bar{C}})$ : Man betrachte zwei Fälle
  - $\alpha)$   $\bar{\bar{C}} \in \{C'_1, \dots, C'_{a-1}\}$ : Dann ist  $\{C_1, \dots, C_{\nu(H)+1-(a-1)}\} \cup \{C'_1\} \cup \dots \cup \{C'_{a-1}\} \setminus \{\bar{\bar{C}}\} \in \mathcal{C}_{a-2}(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit  $a - 2$  Übergangskreisen. Dies ist ebenfalls ein Widerspruch zu  $\mathcal{C}_{a-2}(H) = \emptyset$ .
  - $\beta)$   $\bar{\bar{C}} \in \{C_1, \dots, C_{\nu(H)+1-(a-1)}\}$ : In diesem Fall ist  $\{C_1, \dots, C_{\nu(H)+1-(a-1)}\} \cup \{C'_1\} \cup \dots \cup \{C'_{a-1}\} \setminus \{\bar{\bar{C}}\} \in \mathcal{C}_{a-1}(H)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit  $a - 1$  Übergangskreisen. Das ist ein Widerspruch zu  $\mathcal{C}_{a-1}(H) = \emptyset$ .
- (iii) In  $\mathcal{P}(H + 2\dot{e})$  existieren zwei Kreise  $\bar{C}$  mit  $\dot{e}_1 \subseteq E(\bar{C})$  und  $\bar{\bar{C}}$  mit  $\dot{e}_2 \subseteq E(\bar{\bar{C}})$ : Man betrachte erneut zwei Fälle
  - $\alpha)$  O. B. d. A. sei  $\bar{C} \in \{C'_1, \dots, C'_{a-1}\}$  und  $\bar{\bar{C}} \in \{C_1, \dots, C_{\nu(H)+1-(a-1)}\}$ : Dann ist  $\mathcal{P}(H + 2\dot{e}) \setminus \{\bar{C}, \bar{\bar{C}}\} \cup \{\hat{C}\}$  mit  $E(\hat{C}) = (E(\bar{C}) \cup E(\bar{\bar{C}})) \setminus (\dot{e}_1 \cup \dot{e}_2)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit  $a - 2$  bzw.  $a - 1$  Übergangskreisen, was einen Widerspruch zu  $\mathcal{C}_{a-2}(H) = \emptyset$  bzw.  $\mathcal{C}_{a-1}(H) = \emptyset$  darstellt.
  - $\beta)$   $\bar{C}, \bar{\bar{C}} \in \{C_1, \dots, C_{\nu(H)+1-(a-1)}\}$ : O. B. d. A. kann man annehmen, dass  $\bar{C} \in H_1 + \dot{e}$  und  $\bar{\bar{C}} \in H_2 + \dot{e}$ . Dann ist  $\mathcal{P}(H + 2\dot{e}) \setminus \{\bar{C}, \bar{\bar{C}}\} \cup \{\hat{C}\}$  mit  $\hat{C} = (\bar{C} \cup \bar{\bar{C}}) \setminus (\dot{e}_1 \cup \dot{e}_2)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit  $a$  Übergangskreisen  $C'_1, \dots, C'_{a-1}$  and  $\hat{C}$ . Es gilt  $\mathcal{C}_a(H) \neq \emptyset$ .

$\gamma)$   $\bar{C}, \bar{\bar{C}} \in \{C'_1, \dots, C'_{a-1}\}$ : In diesem Fall ist  $\mathcal{P}(H + 2\dot{e}) \setminus \{\bar{C}, \bar{\bar{C}}\} \cup \{\hat{C}\}$  mit  $E(\hat{C}) = (E(\bar{C}) \cup E(\bar{\bar{C}})) \setminus (\dot{e}_1 \cup \dot{e}_2)$  eine maximale Kreispackung von  $H$  mit  $a - 2$  Übergangskreisen, was einen Widerspruch zu  $\mathcal{C}_{a-2}(H) = \emptyset$  darstellt.  $\square$

In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass es möglich ist, die Kreispackungszahl  $\nu(G)$  unter Ausnutzung bestimmter Eigenschaften eines Graphen zu bestimmen. In diesem Fall wurden Knotenseparatoren betrachtet, um einen Graphen sukzessive in kantendisjunkte Untergraphen zu zerlegen. Dabei lag die Idee zugrunde, dass es in einem „kleineren“ Graphen „einfacher“ ist,  $\nu(G)$  zu bestimmen. Hat man die Kreispackungszahlen für die Untergraphen von  $G$  vorliegen, kann man, nach entsprechender Betrachtung einiger modifizierter Untergraphen,  $\nu(G)$  herleiten.

Im nachfolgenden Kapitel wird nun eine Familie von Graphen näher betrachtet und für diese bewiesen, dass es immer eine maximale Kreispackung, bestehend aus einer speziellen Art von Kreisen, gibt.

## Kapitel 4

# Die Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen $P(n, k)$

In diesem Kapitel wird die Bestimmung der maximalen Anzahl kantendisjunkter Kreise und einer zugehörigen maximalen Kreispackung für die verallgemeinerten Petersen Graphen behandelt. Der bekannteste Graph dieser Familie ist „Der Petersen Graph“, welcher in Abbildung 4.1 dargestellt ist.

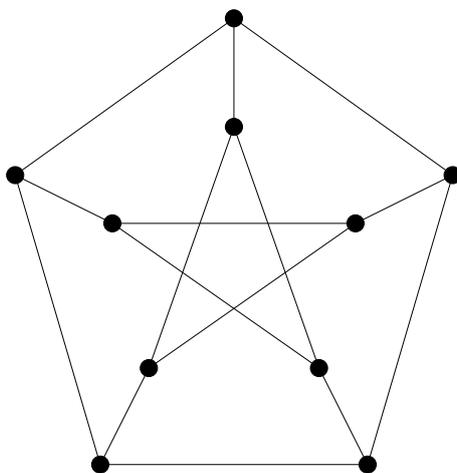


Abbildung 4.1: Der Petersen Graph

Der Graph wurde erstmalig von A. Kempe 1886 in [53] veröffentlicht. Benannt wurde er allerdings nach dem Mathematiker Julius Petersen, nachdem dieser „den Petersen Graphen“ in einem Artikel 1898 graphisch darstellte (siehe [72]). Seitdem wird „dem Petersen Graphen“ in der Graphentheorie eine große Bedeutung beigemessen. Auf Grund seiner geringen Anzahl von Knoten und Kanten, sind für den Graphen viele Eigenschaften bekannt. Man weiß beispielsweise, dass der kürzeste Kreis im Graphen eine Länge von fünf hat.

Außerdem ist er zusammenhängend, 3-regulär und symmetrisch, allerdings nicht planar, hamiltonsch oder eulersch. Seine Bedeutung erlangt „der Petersen Graph“ aber dadurch, dass er für viele graphentheoretische Aussagen als Beispiel oder Gegenbeispiel dient. So ist „der Petersen Graph“ einer der wenigen bekannten Graphen, welcher Knoten-transitiv, zusammenhängend und nicht hamiltonsch ist. Eine Zusammenfassung weiterer graphentheoretischer Zusammenhänge für „den Petersen Graphen“ findet man in „The Petersen Graph“ von D. Holton und J. Sheehan (siehe [49]).

Die Graphenfamilie der verallgemeinerten Petersen Graphen wurde erstmals 1950 von H. S. M. Coxeter beschrieben (siehe [24]). Namentlich betitelt und graphentheoretisch interessant wurden die Graphen allerdings erst 1969 von M. E. Watkins in [88], als er die These aufstellte, dass man für alle verallgemeinerten Petersen Graphen, außer „dem Petersen Graphen“, ein Tait Coloring angeben kann. Watkins zeigte für einige, bestimmte verallgemeinerte Petersen Graphen, dass man alle Kanten eines solchen Graphen mit drei Farben einfärben kann, sodass für jeden Knoten die drei mit dem Knoten inzidenten Kanten unterschiedliche Farben haben. Allgemein wurde Watkins' These schließlich von G. P. F. Castagna und G. Prins im Jahr 1972 bewiesen (siehe [20]). Seitdem wurden die Eigenschaften der Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen vielfach untersucht. Die spezielle Struktur in der Darstellung dieser Graphen ist dabei insbesondere für Beweise in der Betrachtung aller Graphen der Familie sehr hilfreich. Im Jahr 1995 beantworteten R. Nedela und M. Skoviera die Frage, welche verallgemeinerten Petersen Graphen auch Cayley Graphen sind (siehe [70]). R. Frucht, J. E. Graver und M. E. Watkins zeigten 1971, unter welchen Bedingungen ein verallgemeinerter Petersen Graph Knoten-symmetrisch (und damit auch Knoten-transitiv) ist. Das bedeutet, wann ein Automorphismus auf der Knotenmenge des Graphen existiert, mit welchem ein Knoten  $x$  auf einen beliebigen anderen Knoten  $y$  des Graphen abgebildet werden kann (vgl. [42]). B. Alsbach beschäftigte sich mit einigen Kollegen mit der Frage, unter welchen Annahmen ein verallgemeinerter Petersen Graph hamiltonsch ist (siehe [3], [4], [9] und [12]). Weitere Eigenschaften, wie z.B. das Spektrum und Isomorphieeigenschaften, sind in [36], [44], [60], [67] und [84] zu finden. Dabei stellte sich eine wesentliche Bedeutung der verallgemeinerten Petersen Graphen im Zusammenhang mit Verbindungsnetzwerken oder parallel geschalteten Netzwerken heraus. Dies ist unter anderem auf die Tatsache zurückzuführen, dass es in einem verallgemeinerten Petersen Graphen zwischen zwei beliebigen Knoten eine Vielzahl von Wegen gibt, deren Kantenmengen sich paarweise in mindestens einer Kante unterscheiden. Da sich daraus beispielsweise eine Robustheit im Bezug auf Streckenausfälle ergibt, sind verallgemeinerte Petersen Graphen als Grundgerüst für die Konstruktion von Netzwerken geeignet. Neuere Veröffentlichungen dazu sind unter anderem in [13], [45], [54], [57], [63], [66], [80], [90] und [91] zu finden.

In diesem Kapitel wird für die Graphen einer speziellen Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen bewiesen, dass es bei einer gegebenen Mindestanzahl von Knoten immer eine maximale Kreispackung gibt, deren Kreise, mit Ausnahme von höchstens einem Kreis, alle die Länge acht haben. Um diese Graphen näher zu beschreiben, ist es notwendig, zunächst einen verallgemeinerten Petersen Graphen zu definieren.

Ein verallgemeinerter Petersen Graph wird mit  $P(n, k)$  bezeichnet, wobei über die Parameter  $n$  und  $k$  die Struktur des Graphen festgelegt ist. Der Graph  $P(n, k)$  hat  $2n$  Knoten, bestehend aus zwei disjunkte Knotenmengen  $V_{out}$  und  $V_{in}$ . Der Parameter  $k$  ist grundlegend, um für die Knoten der Menge  $V_{in}$  anzugeben, welche Knoten adjazent sind. Formal ist der  $P(n, k)$  wie folgt definiert:

Es seien  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq \frac{n}{2}$ . Ein *verallgemeinerter Petersen Graph*  $P(n, k)$  ist ein Graph mit folgenden Eigenschaften

$$(i) V(P(n, k)) = V_{out} \cup V_{in} \text{ mit}$$

$$V_{out} := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}, \quad V_{in} := \{u_0, \dots, u_{n-1}\}, \quad \text{und} \quad V_{out} \cap V_{in} = \emptyset.$$

$$(ii) E(P(n, k)) = E_{out} \cup E_{in} \cup E_{cross} \text{ mit}$$

$$E_{out} := \{(v_i, v_{(i+1) \bmod n}) \mid i = 0, \dots, n-1\},$$

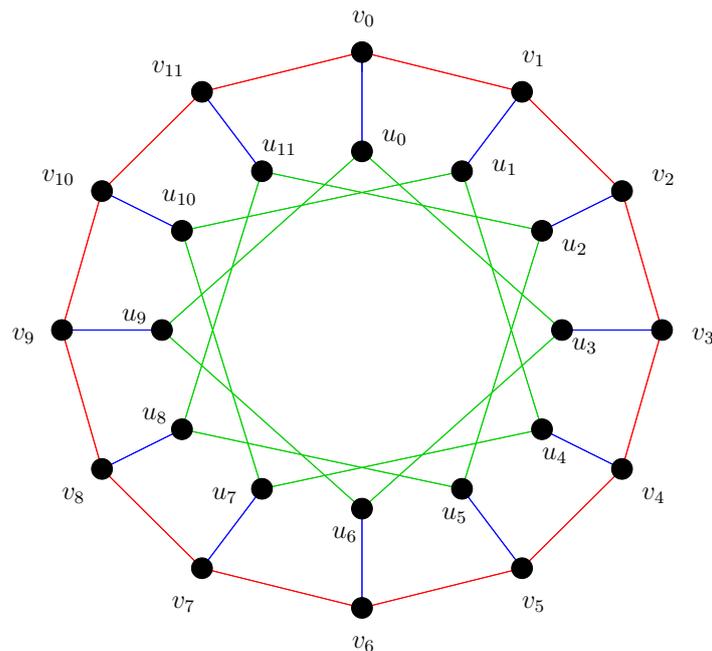
$$E_{in} := \{(u_i, u_{(i+k) \bmod n}) \mid i = 0, \dots, n-1\} \quad \text{und}$$

$$E_{cross} := \{(v_i, u_i) \mid i = 0 \dots, n-1\}$$

Die Knoten der Menge  $V_{out}$  heißen *Außenknoten*, die Knoten der Menge  $V_{in}$  *Innenknoten*. Analog nennt man die Kanten der Menge  $E_{out}$  *Außenkanten* und die Kanten der Menge  $E_{in}$  *Innenkanten*. Die Kanten der Menge  $E_{cross}$  heißen *Übergangskanten*. Zudem sei  $G_{out} := (V_{out}, E_{out})$  und  $G_{in} := (V_{in}, E_{in})$  definiert. Sollte aus dem Kontext der Bezug zum entsprechenden Graphen nicht eindeutig hervor gehen, beschreibt man für einen betrachteten Graphen  $P(n, k)$  die Menge der Außenknoten durch  $V_{out}^{P(n, k)}$ . Diese Schreibweise wird analog für  $V_{in}$ ,  $E_{out}$ ,  $E_{in}$ ,  $E_{cross}$  sowie  $G_{out}$  und  $G_{in}$  verwendet.

Beispielhaft ist in der nachfolgenden Abbildung 4.3 der Graph  $P(12, 3)$  dargestellt.

Im  $P(12, 3)$  ist laut Definition  $V_{out} := \{v_0, \dots, v_{11}\}$  und  $V_{in} := \{u_0, \dots, u_{11}\}$ . Die Außenkanten entsprechen der rot markierten Kantenmenge, die Innenkanten der grün markierten Kantenmenge und die Übergangskanten der blau markierten Kantenmenge. Der Parameter  $k$  wird für Definition der Innenkanten benötigt. Eine Innenkante verbindet immer den

Abbildung 4.2: Der verallgemeinerte Petersen Graph  $P(12, 3)$ 

Knoten Nummer  $i$  mit dem Knoten Nummer  $(i + k) \bmod n$ . Im Beispiel ist  $k = 3$ . Folglich wird der Knoten Nummer  $i$  mit dem Knoten Nummer  $(i + 3) \bmod 12$  verbunden.

Wie man sieht, ist ein verallgemeinerter Petersen Graph ein 3-regulärer Graph mit  $2n$  Knoten und  $3n$  Kanten. Der Untergraph  $G_{out}$  besteht aus den  $n$  Außenknoten und den  $n$  Außenkanten und ist ein Kreis. Der Untergraph  $G_{in}$  ist eine Vereinigung von  $\tau := ggT(n, k)$  Kreisen der Länge  $n/\tau$ . Im Beispiel des Graphen  $P(12, 3)$  besteht  $G_{in}$  aus der Vereinigung der drei Kreise  $C_1 = (u_0, u_3, u_6, u_9)$ ,  $C_2 = (u_1, u_4, u_7, u_{10})$  und  $C_3 = (u_2, u_5, u_8, u_{11})$  der Länge vier.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird ein Kreis  $C$  im Graphen  $P(n, k)$  beschrieben durch  $C = (V(C), E(C))$  mit

$$V(C) = V_{out}^C \cup V_{in}^C, V_{out}^C \subseteq V_{out} \text{ mit } V_{in}^C \subseteq V_{in}$$

und

$$E(C) = E_{out}^C \cup E_{in}^C \cup E_{cross}^C \text{ mit } E_{out}^C \subseteq E_{out}, E_{in}^C \subseteq E_{in}, E_{cross}^C \subseteq E_{cross}.$$

Im Beispiel des Graphen  $P(12, 3)$  sei der Kreis  $C = (u_0, u_3, v_3, v_2, v_1, v_0)$  betrachtet. Dieser wird nun beschrieben durch  $C = (V(C), E(C))$  mit  $V(C) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, u_0, u_3\}$  und  $E(C) = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_0, u_0), (v_3, u_3), (u_0, u_3)\}$ . Die Menge der Außenknoten von  $C$  ist  $V_{out}^C = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ . Die Menge der Innenknoten ist  $V_{in}^C = \{u_0, u_3\}$ . Der Kreis  $C$

hat drei Außenkanten  $E_{out}^C = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$ , eine Innenkante  $E_{in}^C = \{(u_0, u_3)\}$  und zwei Übergangskanten  $E_{cross}^C = \{(v_0, u_0), (v_3, u_3)\}$ . Um Aussagen über einzelne Knoten im Zusammenhang mit einer gegebenen Kreispackung einfacher zu formulieren, wird die folgende Definition gegeben.

Für eine gegebene Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}(P(n, k))$  von  $P(n, k)$  heißt eine Kante  $e \in E(P(n, k))$  belegt, falls es einen Kreis  $C \in \tilde{\mathcal{P}}(P(n, k))$  gibt mit  $e \in E(C)$ . Eine Kante  $e \in E(P(n, k))$  heißt blockiert, falls  $e$  nicht belegt ist und für jede Kreispackung  $\mathcal{P}'(P(n, k))$  mit  $\tilde{\mathcal{P}}(P(n, k)) \subset \mathcal{P}'(P(n, k))$  gilt  $e \notin E(\mathcal{P}'(P(n, k)))$ . Ist eine Kante  $e \in E(P(n, k))$  nicht belegt und nicht blockiert, nennt man  $e$  frei. Die Begriffe gelten analog für Knoten.

Um die Darstellung etwas kompakter und übersichtlicher zu halten, wird der Ausdruck  $i \bmod n$  vereinfacht durch  $[i]$  dargestellt. Zudem beschreibe  $\mathcal{P}$  immer eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}(P(n, k))$ .

In den nachfolgenden Unterkapiteln wird die Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen  $P(n, k)$  differenziert nach  $k$  betrachtet. Die Fälle  $k \in \{1, 2, 3\}$  wurden bereits im Jahre 2008 behandelt (siehe [81] und [77]) und waren die Motivation für die weitere Arbeit. Für diese drei Familien wurde die Kreispackungszahl  $\nu(P(n, k))$  bestimmt.

**Lemma 4.1:**

Sei  $k = 1$  und  $n \geq 4$  oder  $k \in \{2, 3\}$  und  $n \geq k^3 + 1$ , dann folgt

$$\nu(P(n, k)) = \frac{n}{k+1}$$

□

Durch die Aussage in Lemma 4.1 ergab sich damals die Vermutung, dass allgemein gilt

$$\nu(P(n, k)) = \frac{n}{k+1} \text{ für ausreichend großes } n.$$

Diese Vermutung wird sich im Laufe des ersten Unterkapitels als falsch erweisen. In Kapitel 4.1 wird gezeigt, dass für  $k = 4$  gilt

$$\nu(P(n, 4)) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \quad \text{für } 4 \not\equiv n \pmod{8} \text{ und } n \geq 76$$

und

$$\nu(P(n, 4)) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 1 \quad \text{für } 4 \equiv n \pmod{8} \text{ und } n \geq 81.$$

Bei der Betrachtung der Graphen  $P(n, k)$  mit  $k \geq 5$  werden die Fälle  $k$  gerade und  $k$  ungerade in den Kapiteln 4.2 und 4.3 separat behandelt. Dabei liegt der Fokus auf der Familie

der verallgemeinerten Petersen Graphen  $P(n, k)$  mit geradem  $k$ . Für diese Graphenfamilie werden in Kapitel 4.2 untere Schranken für die Kreispackungszahl  $\nu(P(n, k))$  bestimmt. Außerdem werden verschiedene Eigenschaften der Kreise einer maximalen Kreispackung, wie beispielsweise eine maximale Kreislänge, bewiesen. Im letzten zentralen Unterkapitel 4.2.2 wird schließlich unter Ausnutzung der Schranken und weiteren Eigenschaften eine maximale Kreispackung hergeleitet. Es wird gezeigt, dass es, falls  $n$  groß genug ist, für jeden Graphen  $P(n, k)$  mit geradem  $k \geq 6$  eine maximale Kreispackung gibt, welche aus höchstens einem Kreis der Länge  $k+1$  und außerdem ausschließlich aus Kreisen der Länge acht besteht.

Für den Fall, dass  $k$  ungerade ist, kann man viele Ergebnisse aus dem Fall, dass  $k$  gerade ist, übertragen. Dies erfolgt im Kapitel 4.3. Allerdings ist, im Falle  $k$  ungerade, die Differenz zwischen der bisher besten gefundenen unteren und oberen Schranke für die Kreispackungszahl so groß, dass sich die Aussagen aus dem Unterkapitel 4.2.2 nicht übertragen lassen. Ein Grund für die große Differenz ist die Tatsache, dass die untere Schranke durch die Konstruktion einer bestimmten Kreispackung induziert wird. Diese Kreispackung besteht, bis auf einen möglichen anderen Kreis, aus Kreisen der Länge acht mit einer speziellen Struktur. Diese werden nachfolgend definiert.

Sei  $P(n, k)$  ein verallgemeinerter Petersen Graph. Ein Kreis  $SC_i$  mit  $i = 0, \dots, n-1$  ist definiert durch

$$(i) \ V(SC_i) = \{v_i, v_{[i+1]}, v_{[i+k]}, v_{[i+k+1]}, u_i, u_{[i+1]}, u_{[i+k]}, u_{[i+k+1]}\}$$

$$(ii) \ E(SC_i) = \{(v_i, v_{[i+1]}), (v_{[i+k]}, v_{[i+k+1]}), (u_i, u_{[i+k]}), (u_{[i+1]}, u_{[i+k+1]}), (v_i, u_i), (v_{[i+1]}, u_{[i+1]}), (v_{[i+k]}, u_{[i+k]}), (v_{[i+k+1]}, u_{[i+k+1]})\}.$$

In Abbildung 4.3 sind zur Veranschaulichung die Kreise  $SC_0$ ,  $SC_2$  und  $SC_{k-2}$  dargestellt.

Sowohl in Abbildung 4.3, wie auch in den meisten anderen Abbildungen dieses Kapitels, wird nur ein, für die Veranschaulichung relevanter, Untergraph eines verallgemeinerten Petersen Graphen dargestellt. Einige Kanten sind gestrichelt dargestellt. Diese repräsentieren eine Fortsetzung der Graphenstruktur zwischen den beiden Endknoten der gestrichelt dargestellten Kanten. Da  $k$  und  $n$  nicht genau determiniert sind, kann man die Graphen mit steigendem  $k$  und  $n$ , auf Grund der großen Anzahl an Knoten und Kanten, nicht vollständig darstellen.

In Abbildung 4.3 repräsentieren die gestrichelt dargestellten Kanten, die Knoten  $v_4, v_5, \dots, v_{k-4}, v_{k-3}, u_4, u_5, \dots, u_{k-4}, u_{k-3}$  sowie die Knoten  $v_{k+4}, v_{k+5}, \dots, v_{2k-4}, v_{2k-3}, u_{k+4}, u_{k+5}, \dots, u_{2k-4}, u_{2k-3}$  und die entsprechenden zugehörigen Kanten. Für  $k = 8$  beispielsweise würden die gestrichelt dargestellten Kanten in Abbildung 4.3 die Knoten

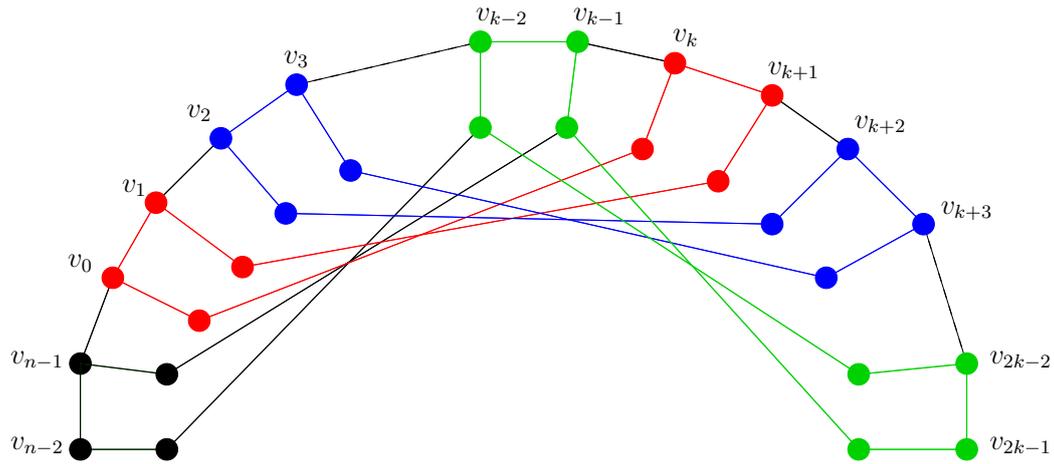


Abbildung 4.3: Eine beispielhafte Veranschaulichung von  $SC_0$ ,  $SC_2$  und  $SC_{k-2}$

$v_4, v_5, u_4, u_5, v_{12}, v_{13}, u_{12}$  und  $u_{13}$  und die entsprechenden Kanten  $(v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_{11}, v_{12}), (v_{12}, v_{13}), (v_{13}, v_{14})$  sowie  $(v_4, u_4), (v_5, u_5), (v_{12}, u_{12}), (v_{13}, u_{13})$  und  $(u_4, u_{12}), (u_5, u_{13})$  repräsentieren.

Im folgenden Unterkapitel wird nun die Kreispackungszahl und eine zugehörige maximale Kreispackung für die Graphen der Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen  $P(n, 4)$  mit entsprechend großem  $n$  bestimmt. Diese Graphenfamilie ist gesondert zu betrachten, da  $girth(P(n, 4)) = 7$  für  $n \geq 28$  gilt. Im Kapitel 4.2 wird für  $k \geq 6$  und  $k$  gerade  $girth(P(n, k)) = 8$  für  $n > 8k$  bewiesen.

## 4.1 Die Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen $P(n, 4)$

Für die Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen  $P(n, 4)$  ist  $girth(P(n, 4)) = 7$  für  $n \geq 28$  bekannt. Da alle  $P(n, k)$  3-regulär sind, ergibt sich

$$\nu(P(n, 4)) \leq \left\lfloor \frac{2n}{7} \right\rfloor.$$

In diesem Unterkapitel wird gezeigt, dass

$$\nu(P(n, 4)) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \quad \text{für } 4 \not\equiv n \pmod{8} \text{ und } n \geq 76$$

und

$$\nu(P(n, 4)) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 1 \quad \text{für } 4 \equiv n \pmod{8} \text{ und } n \geq 81$$

gilt. Außerdem werden entsprechende maximale Kreispackungen bestimmt, indem zunächst die obere Schranke  $\left\lfloor \frac{2n}{7} \right\rfloor$  verschärft wird. Dazu ist eine vorangehende, nähere Betrachtung der Kreise  $C \subset P(n, 4)$  mit  $d(C) = 7$  notwendig. Anschließend werden zwei untere Schranken, differenziert nach  $4 \not\equiv n \pmod{8}$  und  $4 \equiv n \pmod{8}$ , bestimmt. Im Falle  $4 \not\equiv n \pmod{8}$  folgt mit der unteren und der verschärften oberen Schranke sofort  $\nu(P(n, 4)) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ . Im anderen Fall ist eine weitere Verschärfung der oberen Schranke notwendig um  $\nu(P(n, 4)) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 1$  nachzuweisen.

Für einen Kreis der Länge sieben gilt folgendes:

**Lemma 4.2:**

Sei  $n \geq 29$  und  $C \subset P(n, 4)$  ein Kreis mit  $d(C) = 7$ , dann gilt

$$|V_{out}^C| = 5 \text{ und } |V_{in}^C| = 2.$$

**Beweis:**

Sei  $C \subset P(n, 4)$  ein Kreis mit  $d(C) = 7$ . Man betrachte folgende Fälle:

1.) Fall  $|V_{out}^C| = 0$ : Der Kreis  $C$  enthält ausschließlich Innenknoten und Innenkanten. Ein solcher Kreis hat eine Länge von  $\frac{n}{\tau}$ . Wegen  $k = 4$ , gilt  $\tau = ggT(n, 4) \in \{1, 2, 4\}$  und damit  $\frac{n}{\tau} = 7$ , falls  $n = 7$ ,  $n = 14$  oder  $n = 28$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $n \geq 29$ .

2.) Fall  $|V_{out}^C| = 2$ :  $C$  enthält zwei Außen- und fünf Innenknoten und somit eine Außenkante, zwei Übergangskanten und vier Innenkanten. Da  $|E_{out}^C| = 1$  ist der Untergraph  $G = (V_{in}^C, E_{in}^C)$  zusammenhängend. Sei o. B. d. A.  $V_{out}^C = \{v_i, v_{[i+1]}\}$ , dann gilt entweder

$$V_{in}^C = \{u_i, u_{[i+4]}, u_{[i+8]}, u_{[i+12]}, u_{[i+1]}\} \text{ und } n \leq 15$$

oder

$$V_{in}^C = \{u_{[i+1]}, u_{[i+5]}, u_{[i+9]}, u_{[i+13]}, u_i\} \text{ und } n \leq 17.$$

Dies ist ebenfalls ein Widerspruch zu  $n \geq 29$ .

3.) Fall  $|V_{out}^C| = 3$ : Nun enthält  $C$  drei Außen- und vier Innenknoten und somit zwei Außenkanten, zwei Übergangskanten und drei Innenkanten. Der Untergraph  $G = (V_{in}^C, E_{in}^C)$  ist zusammenhängend. Sei o. B. d. A.  $V_{out}^C = \{v_i, v_{[i+1]}, v_{[i+2]}\}$ , dann gilt entweder

$$V_{in}^C = \{u_i, u_{[i+4]}, u_{[i+8]}, u_{[i+2]}\} \text{ und } n \leq 10$$

oder

$$V_{in}^C = \{u_{[i+2]}, u_{[i+6]}, u_{[i+10]}, u_i\} \text{ und } n \leq 14.$$

Dies ist wiederum ein Widerspruch zu  $n \geq 29$ .

- 4.) Fall  $|V_{out}^C| = 4$ : Wegen  $|V_{in}^C| = 3$ , ist der Untergraph  $G = (V_{in}^C, E_{in}^C)$  und auch der Untergraph  $\tilde{G} = (V_{out}^C, E_{out}^C)$  zusammenhängend. Es sei o. B. d. A.  $V_{out}^C = \{v_i, v_{[i+1]}, v_{[i+2]}, v_{[i+3]}\}$ , dann gilt entweder

$$V_{in}^C = \{u_i, u_{[i+4]}, u_{[i+3]}\} \text{ und } n \leq 5$$

oder

$$V_{in}^C = \{u_{[i+3]}, u_{[i+7]}, u_i\} \text{ und } n \leq 11.$$

Dies ist ebenfalls ein Widerspruch zu  $n \geq 29$ .

Die Fälle  $|V_{out}^C| = 1$  und  $|V_{out}^C| = 6$  müssen nicht betrachtet werden, da jeder Kreis keinen oder mindestens zwei Außen- bzw. Innenknoten enthält.

Da der Fall  $|V_{out}^C| = 7$  ausschließlich für  $n = 7$  vorkommen kann, folgt für  $n \geq 29$  die Behauptung mit  $V(C) = \{v_i, v_{[i+1]}, v_{[i+2]}, v_{[i+3]}, v_{[i+4]}, u_{[i+4]}, u_i\}$ .  $\square$

Für  $n \geq 29$  ist ein Kreis  $C \subset P(n, k)$  mit  $d(C) = 7$  in der nachfolgenden Abbildung 4.4 dargestellt.

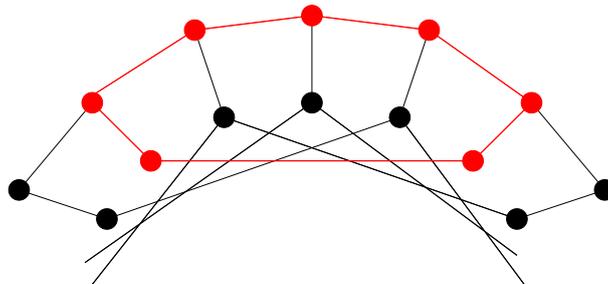


Abbildung 4.4: Eine Veranschaulichung eines Kreises der Länge sieben im Graphen  $P(n, 4)$  mit  $n \geq 29$

Die obere Schranke  $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$  lässt sich für den Fall  $n \geq 76$  verschärfen. Um dies zu zeigen, sind vorab drei Lemmata notwendig. Es wird angenommen, dass eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  mit mindestens  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$  Kreisen existiert und bewiesen, dass diesem Fall jeder Kreis in  $\mathcal{P}$  mindestens vier Außenknoten enthält.

**Lemma 4.3:**

Sei  $n \geq 29$ ,  $C \subset P(n, 4)$  ein Kreis mit  $|V_{out}^C| = 0$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung mit  $|\mathcal{P}| \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ , dann gilt

$$C \notin \mathcal{P}$$

**Beweis:**

Angenommen, es gebe einen Kreis  $C \in P(n, 4)$  mit  $|V_{out}^C| = 0$  und  $C \in \mathcal{P}$ , dann sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1)  $ggT(n, 4) = 1$ : In diesem Fall muss  $d(C) = n$  gelten, womit  $\nu(P(n, 4)) = 2$  folgt.

Dies ist ein Widerspruch zu  $|\mathcal{P}| \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ .

Fall 2)  $ggT(n, 4) = 2$ : Im zweiten Fall ist  $d(C) = \frac{n}{2}$ . Da  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, 4)$  ist, gilt

$$(2n - \frac{n}{2})/7 + 1 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, 4)) \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$$

$\Leftrightarrow$

$$(2n - \frac{n}{2})/7 + 1 \geq \frac{n-2}{4} + 1$$

$\Leftrightarrow$

$$2n - \frac{n}{2} \geq 7 \cdot \frac{n-2}{4}$$

$\Leftrightarrow$

$$8n - 2n \geq 7n - 14$$

$\Leftrightarrow$

$$n \leq 14$$

Man erhält einen Widerspruch zu  $n \geq 29$ .

Fall 3)  $ggT(n, 4) = 4$ : In diesem Fall gilt  $d(C) = \frac{n}{4}$ . Es sei  $C' \in \mathcal{P}$  mit  $C' \neq C$  und  $d(C') = 8$ . Da  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, 4)$  ist, folgt

$$(2n - \frac{n}{4} - 8)/7 + 2 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, 4)) \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$$

$\Leftrightarrow$

$$(2n - \frac{n}{2} - 8)/7 + 1 \geq \frac{n}{4}$$

$\Leftrightarrow$

$$2n - \frac{n}{2} - 8 + 7 \geq 7 \cdot \frac{n}{4}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$8n - 2n - 4 \geq 7n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$6n - 4 \geq 7n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n \leq -4$$

Dies ist ein Widerspruch zu  $n \geq 29$ , somit gilt für jeden Kreis  $\bar{C} \in \mathcal{P}$  mit  $\bar{C} \neq C$ , dass  $d(\bar{C}) = 7$  und damit  $|V_{out}^{\bar{C}}| = 5$  (Lemma 4.2). Da  $|V_{out}^{P(n,4)}| = n$ , folgt

$$\nu(P(n, 4)) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1 < \frac{n}{4} + 1, \text{ für } n \geq 29.$$

Da  $n \geq 29$  gilt, wurde in allen drei Fällen ein Widerspruch konstruiert und damit die Annahme widerlegt.  $\square$

Mit Lemma 4.3 folgt für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$ , dass  $|V_{out}^C| \geq 2$ .

**Lemma 4.4:**

Sei  $n \geq 76$ ,  $C \subset P(n, 4)$  ein Kreis mit  $|V_{out}^C| = 2$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung mit  $|\mathcal{P}| \geq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$ , dann gilt

$$C \notin \mathcal{P}$$

**Beweis:**

Wiederum wird die Annahme  $C \in \mathcal{P}$  zum Widerspruch geführt.

Zu betrachten bleibt nur der Fall, dass gilt  $ggT(n, 4) = 1$ , da sonst ein Kreis  $C$  mit  $|V_{out}^C| = 2$  als Untergraph des  $P(n, 4)$  nicht existiert. Es gilt  $d(C) \geq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3$ . Es werden zwei Fälle unterschieden:

Fall 1) Sei  $1 \equiv n \pmod{4}$ : Da  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, 4)$  ist, gilt

$$(2n - (\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3))/7 + 1 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, 4)) \geq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(2n - (\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3))/7 \geq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 3 \geq 7 \cdot \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2n - 3 \geq 8 \cdot \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2n - 3 \geq 8 \cdot \frac{n-1}{4}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$8n - 12 \geq 8n - 8$$

Dies ist ein Widerspruch.

Fall 2) Sei  $3 \equiv n \pmod{4}$ : Gegeben seien vier Kreise  $C_1, C_2, C_3$  und  $C_4$  mit  $C_i \in \mathcal{P}$  und  $d(C_i) \geq 8$  für alle  $i = 1, \dots, 4$ . Da  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung ist, folgt

$$(2n - (\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3) - 4 \cdot 8)/7 + 5 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, 4)) \geq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(2n - (\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3) - 32)/7 + 4 \geq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 3 - 32 + 28 \geq 7 \cdot \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2n - 7 \geq 8 \cdot \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2n - 7 \geq 8 \cdot \frac{n-3}{4}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$8n - 28 \geq 8n - 24$$

Dies ist ebenfalls ein Widerspruch.

Folglich gibt es maximal drei Kreise  $\{C_1, C_2, C_3\} \in \mathcal{P}$  mit  $C_i \neq C$  und  $d(C_i) \geq 8$  für alle  $i = 1, 2, 3$ . Für jeden Kreis  $\bar{C} \in \mathcal{P}$  mit  $\bar{C} \notin \{C, C_1, C_2, C_3\}$  gilt  $d(\bar{C}) = 7$  und damit  $|V_{out}^{\bar{C}}| = 5$ . Da  $|V_{out}^{P(n,4)}| = n$ , folgt

$$\nu(P(n, 4)) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 4 < \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1, \text{ für } n \geq 76.$$

Im ersten Fall führt die Annahme  $C \in \mathcal{P}$  unabhängig von  $n$  zum Widerspruch. Im zweiten Fall folgt der Widerspruch, da  $n \geq 76$ .  $\square$

Mit den Lemmata 4.3 und 4.4 folgt nun für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$ , dass  $|V_{out}^C| \geq 3$ .

**Lemma 4.5:**

Sei  $n \geq 29$ ,  $C \subset P(n, 4)$  ein Kreis mit  $|V_{out}^C| = 3$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung mit  $|\mathcal{P}| \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ , dann folgt

$$C \notin \mathcal{P}$$

**Beweis:**

Es wird wiederum  $C \in \mathcal{P}$  angenommen.

Im Falle  $ggT(n, 4) \neq 2$ , folgt mit  $|V_{out}^C| = 3$ , dass  $ggT(n, 4) = 1$  und  $d(C) \geq \frac{2n}{4}$  gilt. Da  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$  ist, erhält man

$$\begin{aligned} (2n - \frac{2n}{4})/7 + 1 &\geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, 4)) \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 \\ &\Leftrightarrow \\ (2n - \frac{2n}{4})/7 &\geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \\ &\Leftrightarrow \\ 2n - \frac{2n}{4} &\geq 7 \cdot \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{6n}{4} &\geq 7 \cdot \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch für  $n \geq 29$ .

Es muss also  $ggT(n, 4) = 2$  gelten. Damit folgt  $d(C) \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 4$ . Sei  $C' \in \mathcal{P}$  mit  $C' \neq C$  und  $d(C') = 8$ . Da  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$  ist, gilt

$$\begin{aligned} (2n - (\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 4) - 8)/7 + 2 &\geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, 4)) \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 \\ &\Leftrightarrow \\ (2n - (\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 4) - 8)/7 + 1 &\geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \\ &\Leftrightarrow \\ 2n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 4 - 8 + 7 &\geq 7 \cdot \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2n - 5 &\geq 8 \cdot \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \\
&\Leftrightarrow \\
2n - 5 &\geq 8 \cdot \frac{n - 2}{4} \\
&\Leftrightarrow \\
8n - 20 &\geq 8n - 16
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Daher gilt wiederum für jeden Kreis  $\bar{C} \in \mathcal{P}$  mit  $\bar{C} \neq C$ , dass  $d(\bar{C}) = 7$  und damit  $|V_{out}^{\bar{C}}| = 5$  ist. Es folgt

$$\nu(P(n, 4)) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1 < \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1, \text{ für } n \geq 29.$$

Damit ist die Annahme widerlegt und die Behauptung bewiesen.  $\square$

Mit den Lemmata 4.3, 4.4 und 4.5 folgt  $|V_{out}^C| \geq 4$  für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$ . Es lässt sich nun die folgende Verschärfung der oberen Schranke für  $\nu(P(n, 4))$  beweisen.

**Lemma 4.6:**

Sei  $n \geq 76$ , dann gilt

$$\nu(P(n, 4)) \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

**Beweis:**

Sei  $\nu(P(n, 4)) \geq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung. Auf Grund der erbrachten Beweise zu den Lemmata 4.3 - 4.5 folgt, dass jeder Kreis  $C$  in  $\mathcal{P}$  mindestens vier Außenknoten hat, also  $|V_{out}^C| \geq 4$ . Da jeder Knoten lediglich in einem Kreis von  $\mathcal{P}$  enthalten sein kann und es insgesamt  $n$  Außenknoten gibt, folgt  $\nu(P(n, 4)) < \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$ , ein Widerspruch zur Annahme.

Es gilt also

$$\nu(P(n, 4)) \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

Nachdem die obere Schranke nun verschärft wurde, stellt sich die Frage nach einer geeigneten unteren Schranke. Eine solche erhält man unter Verwendung der speziellen Kreise  $SC_i \subset P(n, 4)$  mit  $i = 0, \dots, n - 1$ .

**Lemma 4.7:**Für  $n \geq 9$  gilt

1.)  $\frac{n}{4} - 1 \leq \nu(P(n, 4))$ , falls  $4 \equiv n \pmod{8}$

2.)  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq \nu(P(n, 4))$  sonst

**Beweis:**1.) Im Fall  $4 \equiv n \pmod{8}$ , lässt sich eine Kreispackung mit  $\frac{n}{4} - 1$  Kreisen angeben durch

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{SC_0, SC_2, \dots, SC_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor - 1) \cdot 8}, SC_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor - 1) \cdot 8 + 2}\}$$

2.) Zum Beweis werden die übrigen sieben Fälle  $i \equiv n \pmod{8}$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$  eingehend betrachtet(a) Falls  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , dann liefert  $\tilde{\mathcal{P}}$  eine Kreispackung mit  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  Kreisen.(b) Im Falle  $i \in \{6, 7\}$  liefert

$$\tilde{\tilde{\mathcal{P}}} = \{SC_0, SC_2, \dots, SC_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor - 1) \cdot 8}, SC_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor - 1) \cdot 8 + 2}, SC_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) \cdot 8}\}$$

eine Kreispackung mit  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  Kreisen.(c) Falls  $i = 5$ , ist eine Kreispackung mit  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  Kreisen gegeben durch

$$\bar{\mathcal{P}} = \{SC_0, SC_2, \dots, SC_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor - 1) \cdot 8}, SC_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor - 1) \cdot 8 + 2}, C\}$$

mit

$$V(C) = \{v_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) \cdot 8}, v_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) \cdot 8 + 1}, v_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) \cdot 8 + 2}, v_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) \cdot 8 + 3}, v_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) \cdot 8 + 4}, u_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) \cdot 8 + 4}, u_{(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) \cdot 8}\}$$

□

Mit der unteren Schranke und der verschärften oberen Schranke  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  folgt für  $4 \not\equiv n \pmod{8}$  sofort folgende Aussage.**Lemma 4.8:**Sei  $4 \not\equiv n \pmod{8}$  und  $n \geq 76$ , dann gilt

$$\nu(P(n, 4)) = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor.$$

□

Im Fall von  $4 \equiv n \pmod{8}$  und  $n \geq 76$  wurde in Lemma 4.6 und 4.7 bewiesen, dass

$$\frac{n}{4} - 1 \leq \nu(P(n, 4)) \leq \frac{n}{4}.$$

Es lässt sich aber Folgendes zeigen:

**Lemma 4.9:**

Sei  $4 \equiv n \pmod{8}$  und  $n \geq 76$ , dann gilt

$$\nu(P(n, 4)) = \frac{n}{4} - 1.$$

**Beweis:**

Es wird  $\nu(P(n, 4)) = \frac{n}{4}$  angenommen. Da  $4 \equiv n \pmod{8}$ , folgt  $ggT(n, 4) = 4$ . Folglich ist  $G_{in}$  die Vereinigung von vier Kreisen der Länge  $\frac{n}{4}$ .

Sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung. Analog zu den Aussagen in Lemma 4.3 - 4.5 folgt für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$ , dass  $|V_{out}^C| \geq 4$ . Auf Grund der Annahme  $\nu(P(n, 4)) = \frac{n}{4}$  gilt, dass jeder Kreis  $C \in \mathcal{P}$  genau vier Außenknoten belegt, also  $|V_{out}^C| = 4$ .

Jeder Kreis  $C \subset P(n, 4)$  mit genau vier Außenknoten hat allerdings mindestens vier Innenknoten. Da es in einem Graphen  $P(n, 4)$  nur  $n$  Innenknoten gibt und  $\nu(P(n, 4)) = \frac{n}{4}$  angenommen wurde, besteht  $\mathcal{P}$  ausschließlich aus Kreisen mit genau vier Innenknoten. Damit folgt für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$ , dass  $|V_{out}^C| = |V_{in}^C| = 4$ .

Es sei nun  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  ein Kreis und der Untergraph  $\tilde{G} = (V_{out}^{\tilde{C}}, E_{out}^{\tilde{C}})$  zusammenhängend. O. B. d. A. sei  $V_{out}^{\tilde{C}} = \{v_i, v_{[i+1]}, v_{[i+2]}, v_{[i+3]}\}$ , dann gilt entweder

$$V_{in}^{\tilde{C}} = \{u_i, u_{[i+4]}, u_{[i+8]}, u_{[i+3]}\} \text{ und } n = 8$$

oder

$$V_{in}^{\tilde{C}} = \{u_{[i+3]}, u_{[i+7]}, u_{[i+11]}, u_i\} \text{ und } n = 14.$$

Da dies ein Widerspruch zu  $n \geq 76$  ist, folgt für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$ , dass der Untergraph  $G = (V_{out}^C, E_{out}^C)$  nicht zusammenhängend ist und somit  $|E_{out}^C| = 2$ . Da außerdem  $|V_{in}^C| = 4$  gilt, erhält man  $|E_{in}^C| = 2$ . Für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$  folgt, dass  $C \in \{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$ . Auf Grund der Struktur der Kreise  $SC_i$  (siehe Abbildung 4.5) ergibt sich  $|\mathcal{P}| = \frac{n}{4} - 1$ .

Folglich ist die Annahme  $\nu(P(n, 4)) = \frac{n}{4}$  falsch. Es gilt  $\nu(P(n, 4)) \leq \frac{n}{4} - 1$ . Auf Grund der unteren Schranke  $\frac{n}{4} - 1$  erhält man die Gleichheit und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

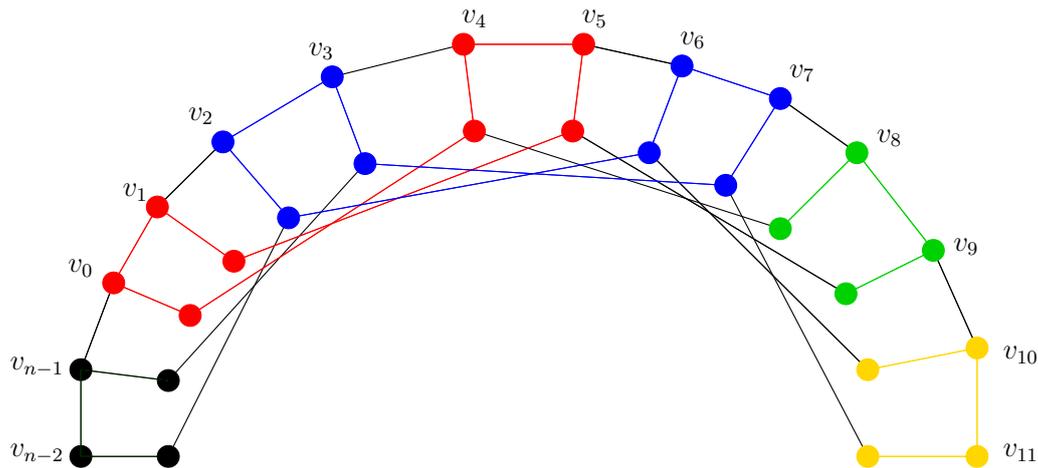


Abbildung 4.5: Eine Veranschaulichung der Kreise  $SC_i$  im  $P(n, 4)$

Es wurde für die Familie der Graphen  $P(n, 4)$  somit gezeigt

$$\nu(P(n, 4)) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \quad \text{für } 4 \not\equiv n \pmod{8} \text{ und } n \geq 76$$

und

$$\nu(P(n, 4)) = \frac{n}{4} - 1 \quad \text{für } 4 \equiv n \pmod{8} \text{ und } n \geq 81.$$

Entsprechende maximale Kreispackungen sind im Beweis von Lemma 4.7 zu finden.

## 4.2 Die Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen $P(n, k)$ mit $k \geq 6$ und $k \bmod 2 = 0$

Im folgenden Unterkapitel werden verallgemeinerte Petersen Graphen  $P(n, k)$  mit  $k \geq 6$  und  $k \bmod 2 = 0$  betrachtet. Zunächst werden verschiedene Eigenschaften von Kreisen einer maximalen Kreispackung im  $P(n, k)$  hergeleitet und bewiesen. Für alle Aussagen gelten dabei generell die Voraussetzungen  $k \geq 6$  und  $k \bmod 2 = 0$ . Diese werden daher nicht mehr explizit angegeben. Bei der Betrachtung der verallgemeinerten Petersen Graphen  $P(n, k)$  liegt die Idee zu Grunde, dass die spezielle Struktur von verallgemeinerten Petersen Graphen es ermöglicht, allgemein eine maximale Kreispackung anzugeben, die im wesentlichen aus speziellen Kreisen des Typs  $SC_i$  besteht. Nachfolgend werden zunächst untere bzw. obere Schranken für  $\nu(P(n, k))$  hergeleitet. Wie bereits zuvor erwähnt, kann eine obere Schranke für  $\nu(P(n, k))$  unter Ausnutzung der Länge der kürzesten Kreise eines Graphen angegeben werden. Um  $girth(P(n, k))$  zu bestimmen, ist vorab der Beweis der

folgenden Aussagen notwendig.

**Lemma 4.10:**

Sei  $n > 8k$ . Dann gilt

$$1.) \{C \subset P(n, k) \mid |V_{out}^C| = \varrho \text{ und } d(C) \leq 8\} = \emptyset \text{ f\"ur alle } \varrho \in \{0, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

$$2.) \{C \subset P(n, k) \mid |V_{out}^C| = 1 \text{ oder } |V_{in}^C| = 1\} = \emptyset$$

$$3.) \{C \subset P(n, k) \mid |V_{out}^C| = 4 \text{ und } d(C) \leq 8\} = \{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$$

**Beweis:**

1.) Die Fälle werden nun separat bewiesen

(a)  $\varrho = 0$ : In diesem Fall ist  $G_{in} = \bigcup_{i=1}^{\tau} C_i$  die disjunkte Vereinigung der  $\tau$  Kreise im Graphen  $P(n, k)$ , für die gilt  $|V_{out}^{C_i}| = 0$ . Für jeden dieser Kreise gilt außerdem

$$d(C_i) = \frac{n}{\tau} \geq \frac{n}{k} > \frac{8k}{k} = 8, \forall i = 1, \dots, \tau.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(b)  $\varrho = 2$ : Sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit  $|V_{out}^C| = 2$ , dann gilt  $|V_{in}^C| \geq 2$  und damit  $d(C) \geq 4$ . Zudem sei  $d(C) \leq 8$ . Es folgt  $|V_{in}^C| \leq 6$ , sowie  $|E_{in}^C| \leq 5$ . Folglich ist  $n \leq 5k + 1$ , ein Widerspruch zu  $n > 8k$ .

(c)  $\varrho = 3$ : Sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit  $|V_{out}^C| = 3$ , dann gilt  $|V_{in}^C| \geq 2$  und somit  $d(C) \geq 5$ . Außerdem sei  $d(C) \leq 8$ . Es folgt  $|V_{in}^C| \leq 5$ ,  $|E_{in}^C| \leq 4$ . Man erhält  $n \leq 4k + 2$ , ein Widerspruch zu  $n > 8k$ .

(d)  $\varrho = 5$ : Es sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit  $|V_{out}^C| = 5$ , dann gilt wieder  $|V_{in}^C| \geq 2$  und folglich  $d(C) \geq 7$ . Sei wiederum  $d(C) \leq 8$ , dann folgt  $|V_{in}^C| \leq 3$  und  $|E_{in}^C| \leq 2$ . Man betrachte zwei Fälle

i. Es sei  $V_{out}^C = \{v_i, v_{[i+1]}, v_{[i+2]}, v_{[i+3]}, v_{[i+4]}\}$ . Wegen  $|E_{in}^C| \leq 2$ , ergibt sich  $n \leq 2k + 4$ , ein Widerspruch zu  $n > 8k$ .

ii. O. B. d. A. sei  $V_{out}^C = \{v_i, v_{[i+1]}, v_j, v_{[j+1]}, v_{[j+2]}\}$  mit  $j > i$  und  $v_j \notin \{v_{[i-3]}, v_{[i+2]}\}$ . Dann gilt  $|V_{in}^C| \geq 4$  und  $d(C) \geq 9$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $d(C) \leq 8$ .

(e)  $\varrho = 6$ : Sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit  $|V_{out}^C| = 6$  und  $d(C) \leq 8$ . In diesem Fall erhält man  $|V_{in}^C| = 2$  und  $d(C) = 8$ , sowie  $|E_{in}^C| = 1$ . Weiterhin gilt  $V_{out}^C = \{v_i, v_{[i+1]}, v_{[i+2]}, v_{[i+3]}, v_{[i+4]}, v_{[i+5]}\}$  und damit  $n = k + 5$ , ein Widerspruch zu  $n > 8k$ .

(f)  $\varrho = 7$ : Es sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit  $|V_{out}^C| = 7$  und  $d(C) \leq 8$ . Wegen 2.) folgt  $n = 7$ , ein Widerspruch zu  $n > 8k$ .

(g)  $\varrho = 8$ : Sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit  $|V_{out}^C| = 8$  und  $d(C) \leq 8$ . Es gilt  $d(C) = 8$  und  $n = 8$ . Das ist ebenfalls ein Widerspruch zu  $n > 8k$ .

2.) Da in einem Graphen  $P(n, k)$  jeder Außenknoten mit zwei Außen- und einem Innenknoten adjazent ist, hat jeder Kreis keinen oder mindestens zwei Außenknoten. Dies gilt analog für die Innenknoten.

3.) Sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit  $|V_{out}^C| = 4$ , dann gilt  $|V_{in}^C| \geq 2$  und  $d(C) \geq 6$ . Zudem sei  $d(C) \leq 8$ . In diesem Fall folgt  $|V_{in}^C| \leq 4$ ,  $|E_{in}^C| \leq 3$ . Man betrachte zwei Fälle

(a) Es sei  $V_{out}^C = \{v_i, v_{[i+1]}, v_{[i+2]}, v_{[i+3]}\}$ . Wegen  $|E_{in}^C| \leq 3$ , gilt  $n \leq 3k + 3$ , ein Widerspruch zu  $n > 8k$ .

(b) O. B. d. A. sei  $V_{out}^C = \{v_i, v_{[i+1]}, v_j, v_{[j+1]}\}$  mit  $j > i$  und  $v_j \notin \{v_{[i-2]}, v_{[i+2]}\}$ . Dann gilt  $|V_{in}^C| = 4$ ,  $|E_{in}^C| = 2$  und  $d(C) = 8$ . Es sei angenommen, dass  $C \notin \{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$ . Dann folgt  $E_{in}^C = \{(u_{[i+1]}, u_j), (u_{[j+1]}, u_i)\}$  und  $n = 2k + 1$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $n > 8k$ . Folglich ergibt sich  $C \in \{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$ .

Sei nun  $\tilde{C} \subset P(n, k)$  ein Kreis mit  $\tilde{C} \in \{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$ . Laut Definition ist  $|V_{out}^{\tilde{C}}| = 4$  und  $d(\tilde{C}) = 8$ . Folglich ergibt sich für den Kreis  $\tilde{C}$ , dass  $\tilde{C} \in \{\bar{C} \subset P(n, k) \mid |V_{out}^{\bar{C}}| = 4 \text{ und } d(\bar{C}) \leq 8\}$  ist.

□

Mit Lemma 4.10 ergibt sich sofort folgendes:

**Korollar 4.11:**

Sei  $n > 8k$  und  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis, dann gilt

1.)  $d(C) \geq 8$

2.)  $d(C) = 8 \Leftrightarrow C \in \{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$

**Beweis:**

Beide Aussagen folgen aus Lemma 4.10.

□

Mit Lemma 4.10 und Korollar 4.11 erhält man, dass jeder Kreis eine Mindestlänge von acht hat. Zudem folgt, dass es in jedem Graphen  $P(n, k)$  mit  $n > 8k$  Kreise der Länge

acht gibt und ein Kreis der Länge acht eindeutig der Menge  $\{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$  zuzuordnen ist. Damit ergibt sich die nachfolgende Aussage.

**Proposition 4.12:**

Sei  $n > 8k$ . Es gilt

$$\text{girth}(P(n, k)) = 8.$$

**Beweis:**

Nach Korollar 4.11 folgt für jeden Kreis  $C \subset P(n, k)$ , dass  $d(C) \geq 8$ . Weiterhin gilt für jeden Kreis  $C \in \{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$ , dass  $d(C) = 8$  und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

Mit Hilfe von Proposition 4.12 kann man nun eine erste untere und obere Schranke für  $\nu(P(n, k))$  angeben.

**Lemma 4.13:**

Sei  $n > 8k$ . Es gilt

$$(i) \quad \nu(P(n, k)) \geq \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor \cdot \frac{k}{2}$$

$$(ii) \quad \nu(P(n, k)) \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$$

**Beweis:**

(i) Es ist

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}} = \{ & SC_0, SC_2, \dots, SC_{k-2}, SC_{2k}, SC_{2k+2}, \dots, SC_{3k-2}, SC_{4k}, SC_{4k+2}, \dots, \\ & SC_{(\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor - 1) \cdot 2k}, SC_{(\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor - 1) \cdot 2k + 2}, \dots, SC_{\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor \cdot 2k - k - 2} \} \end{aligned}$$

eine Kreispackung mit  $\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor \cdot \frac{k}{2}$  Kreisen.

(ii) Die Behauptung folgt unmittelbar aus  $\text{girth}(P(n, k)) = 8$ . Da ein Graph  $P(n, k)$  3-regulär ist, gilt

$$\nu(P(n, k)) \leq \frac{|V(P(n, k))|}{\text{girth}(P(n, k))} = \frac{2n}{8} = \frac{n}{4}.$$

$\square$

Die im Beweis von Lemma 4.13 (i) konstruierte Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}$  wird in Abbildung 4.6 veranschaulicht.

Im Folgenden wird die untere Schranke aus Lemma 4.13 verschärft und anschließend genutzt, um besondere Eigenschaften der Kreise einer maximalen Kreispackung im  $P(n, k)$

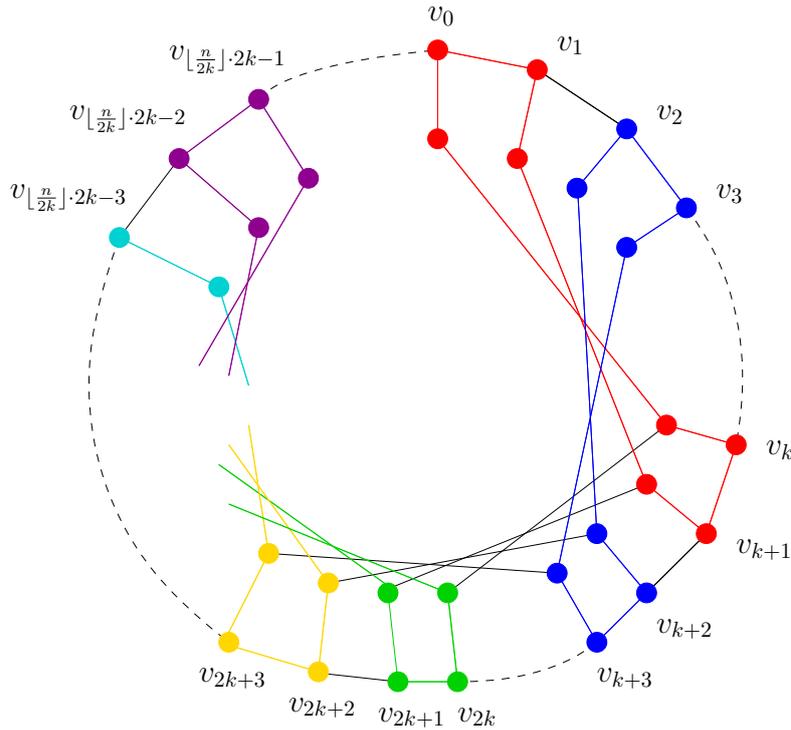


Abbildung 4.6: Eine Veranschaulichung einer Kreispackung mit  $\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor \cdot \frac{k}{2}$  Kreisen

herzuleiten. Betrachtet man einen Graphen  $P(n, k)$  genauer, so lassen sich, zunächst unabhängig von der unteren Schranke, die nachfolgenden zwei Aussagen machen.

**Lemma 4.14:**

Es sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung im  $P(n, k)$ . Weiterhin sei  $v_i \in V_{out}$  ein Außenknoten. Dann gilt mindestens einer der folgenden drei Fälle:

- 1.)  $\{v_i\} \cap V(\mathcal{P}) = \emptyset$
- 2.) Es existiert ein Kreis  $C \in \mathcal{P}$  mit  $\{v_i, u_i\} \subset V(C)$
- 3.) Es existiert ein Kreis  $C \in \mathcal{P}$  mit  $\{v_i, v_{[i-1]}, v_{[i+1]}\} \subset V(C)$

**Beweis:**

Zu betrachten sind zwei Situationen:

- (i)  $u_i \notin V(\mathcal{P})$

Dann gilt für  $v_i$  einer der folgenden zwei Fälle:

- a)  $\{v_i\} \cap V(\mathcal{P}) = \emptyset$
- b) Es existiert ein Kreis  $C \in \mathcal{P}$  mit  $\{v_i, v_{[i-1]}, v_{[i+1]}\} \subset V(C)$

(ii)  $u_i \in V(\mathcal{P})$

In diesem Fall existiert ein Kreis  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  mit  $u_i \in V(\tilde{C})$  und es gilt für  $v_i$  einer der folgenden drei Fälle:

- a)  $\{v_i\} \cap V(\mathcal{P}) = \emptyset$
- b)  $v_i \in V(\tilde{C})$
- c) Es existiert ein Kreis  $C \in \mathcal{P}$  mit  $C \neq \tilde{C}$  und  $\{v_i, v_{[i-1]}, v_{[i+1]}\} \subset V(C)$ .

Es folgt die Behauptung. □

Bei der näheren Betrachtung fällt auf, dass die beiden Fälle 2.) und 3.) gleichzeitig auftreten können. In diesem Falle existiert in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  von  $P(n, k)$  ein Kreis  $C \in \mathcal{P}$  mit  $\{u_i, v_i, v_{[i-1]}, v_{[i+1]}\} \subset V(C)$  und es gilt folgende Aussage:

**Lemma 4.15:**

Sei  $n > 8k$  und  $C \in P(n, k)$  ein Kreis der Länge  $d(C)$ . Es existiere ein Index  $i$  mit  $0 \leq i \leq n - 1$ ,  $v_i, u_i \in V(C)$  und  $e = (v_i, u_i) \notin E(C)$ . Dann gibt es einen Kreis  $\tilde{C} = (V(\tilde{C}), E(\tilde{C}))$  mit

- $V(\tilde{C}) \subset V(C)$ ,
- $e \in E(\tilde{C})$  und  $E(\tilde{C}) \subset (E(C) \cup \{e\})$  und somit
- $d(\tilde{C}) < d(C)$

**Beweis:**

Es seien  $W_1 = (V(W_1), E(W_1))$  und  $W_2 = (V(W_2), E(W_2))$  zwei Wege von  $v_i$  nach  $u_i$  und

- $V(W_1) \cup V(W_2) = V(C)$ ,
- $V(W_1) \cap V(W_2) = \{v_i, u_i\}$ ,
- $E(W_1) \cup E(W_2) = E(C)$  und
- $E(W_1) \cap E(W_2) = \emptyset$ .

Es folgt  $C = W_1 \cup W_2$  und  $1 < d(W_j) < d(C) - 1$  mit  $j = 1, 2$ . Setze  $\tilde{C} = (V(\tilde{C}), E(\tilde{C}))$  mit  $V(\tilde{C}) = V(W_1)$  und  $E(\tilde{C}) = E(W_1) \cup \{(v_i, u_i)\}$ . Dann gilt  $d(\tilde{C}) = d(W_1) + 1 < d(C)$  und die Behauptung ist bewiesen. □

Der in Lemma 4.15 beschriebene Zusammenhang zwischen den Kreisen  $C, \tilde{C} \subset P(n, k)$  führt zu der so genannten „Substitutionseigenschaft von Kreisen“.

Für einen Graphen  $P(n, k)$  sei  $\tilde{\mathcal{P}}$  eine beliebige Kreispackung und  $C, \tilde{C} \subset P(n, k)$  zwei Kreise mit  $C \in \tilde{\mathcal{P}}$  und  $\tilde{C} \notin \tilde{\mathcal{P}}$ . Zudem sei  $\tilde{\mathcal{P}}' := \tilde{\mathcal{P}} \setminus \{C\} \cup \{\tilde{C}\}$ . Man sagt in  $\tilde{\mathcal{P}}'$  wurde  $C$  durch  $\tilde{C}$  substituiert. Man bezeichnet die Substitution als zulässig, falls  $\tilde{\mathcal{P}}'$  eine Kreispackung von  $P(n, k)$  ist, d.h.  $|\tilde{\mathcal{P}}'| = |\tilde{\mathcal{P}}|$ .

Hat man für eine beliebige Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}$  die Voraussetzungen aus Lemma 4.15 gegeben, kann man den Kreis  $C$  durch den Kreis  $\tilde{C}$  zulässig substituieren, da sich die Kreisanzahl bei der Konstruktion der neuen Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}' := \tilde{\mathcal{P}} \setminus \{C\} \cup \{\tilde{C}\}$  nicht verringert. Eine zulässige Kreissubstitution, unter den Voraussetzungen von Lemma 4.15, wird in Abbildung 4.7 noch einmal veranschaulicht.

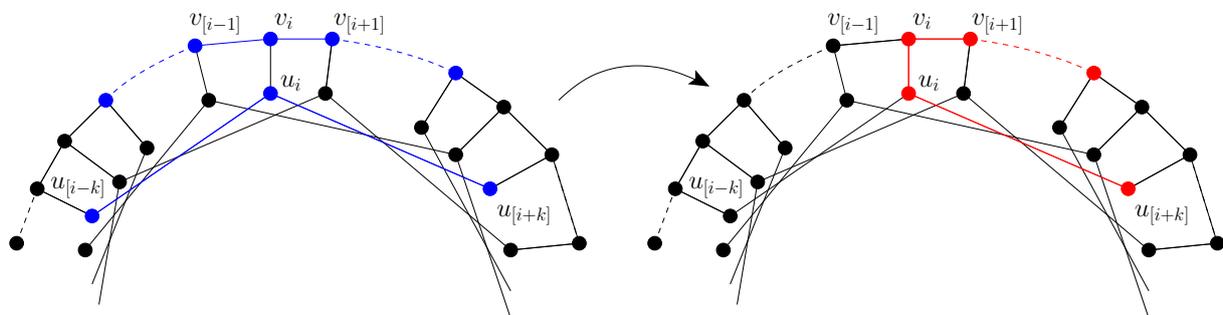


Abbildung 4.7: Eine Veranschaulichung einer Kreissubstitution

In Abbildung 4.7 ist auf der linken Seite der für die Kreissubstitution relevante Teil des Kreises  $C$  beispielhaft blau markiert. Es gilt  $v_i, u_i \in V(C)$  und  $(v_i, u_i) \notin E(C)$ . Die Kante  $(u_i, v_i)$  ist durch den Kreis  $C$  blockiert und kann in keinem anderen Kreis der Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}$  enthalten sein. Es gilt also  $(v_i, u_i) \notin E(\tilde{\mathcal{P}})$ . Dadurch ist es möglich, mit den Kanten von  $C$  und der Kante  $(v_i, u_i)$ , den kürzeren Kreis  $\tilde{C}$  zu konstruieren. Der für die Kreissubstitution relevante Teil des neu konstruierten Kreises  $\tilde{C}$  ist beispielhaft in der rechten Graphik rot markiert.

Betrachtet man eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  von  $P(n, k)$ , so ergibt sich mit Aussage 4.15 folgendes: Es seien  $C, \tilde{C} \in \mathcal{P}$  zwei Kreise, welche die Voraussetzungen aus Aussage 4.15 erfüllen, dann ist  $\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus \{C\}) \cup \{\tilde{C}\}$  ebenfalls eine maximale Kreispackung.

Durch die Voraussetzungen in Lemma 4.15 wird eine spezielle Situation beschrieben, in der eine Kreissubstitution möglich ist. Im Verlauf dieses Kapitels werden weitere solche Situationen dargestellt. Zudem wird die „Kreissubstitutionseigenschaft“ von wesentlicher Bedeutung für die spätere Konstruktion einer maximalen Kreispackung sein.

Bei genauer Betrachtung lässt sich die untere Schranke aus Lemma 4.13 verschärfen. Dazu wird die folgende eindeutige Schreibweise von  $n$  verwendet.

**Lemma 4.16:**

Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  gibt es eindeutig bestimmte Zahlen

$$j \in \mathbb{N}_0, \alpha, \gamma \in \{0, 1\} \text{ und } \beta \in \{0, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$$

mit der Eigenschaft

$$n = 2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma$$

**Beweis:**

Sei  $n$  beliebig, so lässt sich  $n$  eindeutig beschreiben durch

$$n = j \cdot (2k) + r \text{ mit } j \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 0 \leq r \leq 2k - 1.$$

Der Rest  $r$  wird eindeutig beschrieben durch

$$r = \alpha \cdot k + r' \text{ mit } \alpha \in \{0, 1\} \text{ und } 0 \leq r' \leq k - 1.$$

Der Rest  $r'$  wird im Fall  $r' \bmod 2 = 0$  eindeutig beschrieben durch

$$r' = 2\beta + \gamma \text{ mit } \beta \in \{0, \dots, \frac{k}{2} - 1\} \text{ und } \gamma = 0$$

und im Fall  $r' \bmod 2 = 1$  durch

$$r' = 2\beta + \gamma \text{ mit } \beta \in \{0, \dots, \frac{k}{2} - 1\} \text{ und } \gamma = 1.$$

□

Nachfolgend wird durchgehend  $n = 2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma$  mit  $j \in \mathbb{N}_0, \alpha, \gamma \in \{0, 1\}$  und  $\beta \in \{0, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$  vorausgesetzt. Zudem sei der Rest  $r$  definiert als  $r := \alpha k + 2\beta + \gamma$ . Wie im Beweis gesehen, gilt  $0 \leq r \leq 2k - 1$ . Damit kann die untere Schranke wie folgt verschärft werden.

**Lemma 4.17:**

Sei  $n > 8k$ , dann gilt

$$\nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil)$$

**Beweis:**

Wie in Lemma 4.13, ist

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{SC_0, SC_2, \dots, SC_{k-2}, SC_{2k}, SC_{2k+2}, \dots, SC_{3k-2}, SC_{4k}, SC_{4k+2}, \dots, \\ SC_{(\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor - 1) \cdot 2k}, SC_{(\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor - 1) \cdot 2k + 2}, \dots, SC_{\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor \cdot 2k - k - 2}\}$$

eine Kreispackung im  $P(n, k)$  mit  $\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor \cdot \frac{k}{2} = j \cdot \frac{k}{2}$  Kreisen.

Gilt  $r \leq k$ , folgt  $\alpha = 0$  oder  $\alpha = 1$  und  $\beta = \gamma = 0$  und damit  $\alpha(\beta + \gamma - \gamma \lfloor \frac{\beta}{\beta+1} \rfloor) = 0$ . Es ist zu zeigen, dass  $\nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2}$  gilt. Dies folgt sofort, da  $\tilde{\mathcal{P}}$  genau  $\frac{jk}{2}$  Kreise hat.

Betrachte  $r = k + 1$ . Es gilt  $\alpha = \gamma = 1$  und  $\beta = 0$ . Damit ist zu beweisen, dass

$$\nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + 1 \cdot (0 + 1 - 1 \cdot \lfloor \frac{0}{0+1} \rfloor) = \frac{jk}{2} + 1.$$

Sei  $C_{j \cdot 2k} = (V(C_{j \cdot 2k}), E(C_{j \cdot 2k}))$  der durch die Knotenmenge

$$V(C_{j \cdot 2k}) := \{v_{j \cdot 2k}, v_{j \cdot 2k + 1}, \dots, v_{j \cdot 2k + k - 1}, v_{j \cdot 2k + k}, u_{j \cdot 2k}, u_{j \cdot 2k + k}\}$$

induzierte Kreis. Dieser hat genau  $k + 1$  Außen- und zwei Innenknoten. Die Kreispackung  $\bar{\mathcal{P}} := \tilde{\mathcal{P}} \cup C_{j \cdot 2k}$  ist dann eine Kreispackung vom  $P(n, k)$  mit  $\frac{jk}{2} + 1$  Kreisen und die Behauptung ist bewiesen.

Sei  $r \geq k + 2$ , dann gilt  $\alpha = 1$  und  $\beta \geq 1$  und  $\alpha(\beta + \gamma - \gamma \lfloor \frac{\beta}{\beta+1} \rfloor) = \beta$ . Es ist zu zeigen, dass  $\nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + \beta$ . Die Kreispackung  $\bar{\mathcal{P}} := \tilde{\mathcal{P}} \cup_{b=1}^{\beta} SC_{j \cdot 2k + 2b - 2}$  hat  $\frac{jk}{2} + \beta$  Kreise und ist in Abbildung 4.8 veranschaulicht.

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Unter Berücksichtigung der in Lemma 4.17 bewiesenen unteren Schranke, werden nun nachfolgend einige Aussagen zu den Kreisen in einer maximalen Kreispackung vom  $P(n, k)$  gemacht.

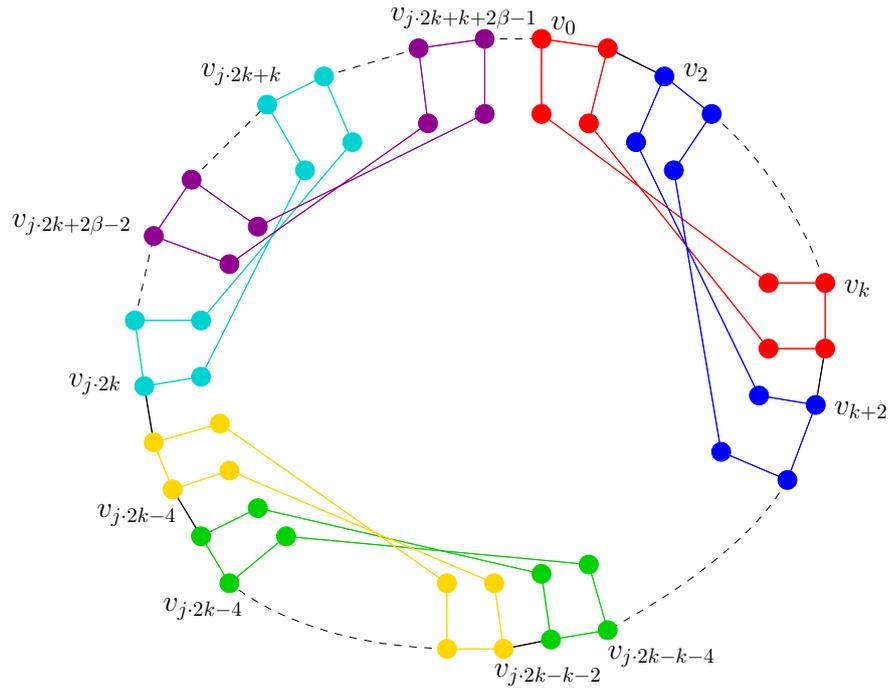


Abbildung 4.8: Die Veranschaulichung der Kreispackung  $\bar{\mathcal{P}} := \tilde{\mathcal{P}} \cup_{b=1}^{\beta} SC_{j \cdot 2k + 2b - 2}$

**Lemma 4.18:**

Sei  $n > 8k$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Zudem sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis und  $\tau := ggT(n, k)$ , wie zuvor. Es gilt:

- 1.) Falls  $V_{in}^C = \emptyset$ , folgt  $C \notin \mathcal{P}$ .
- 2.) Sei  $\lambda_1 := |\{\tilde{C} \in \mathcal{P} \mid |V_{in}^{\tilde{C}}| = 2\}|$ , dann ergibt sich  $\lambda_1 \leq 14$ .
- 3.) Falls  $|V_{in}^C| = 3$ , dann gilt einer der beiden folgenden Fälle
  - (a)  $C \notin \mathcal{P}$ .
  - (b)  $C \in \mathcal{P}$  und es existiert ein Kreis  $\bar{C} \subset P(n, k)$  mit  $|V_{in}^{\bar{C}}| = 2$ , so dass  $\bar{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} \setminus \{C\}) \cup \{\bar{C}\}$  eine maximale Kreispackung ist.

**Beweis:**

- 1.) Es sei angenommen, dass  $C \in \mathcal{P}$  gilt. Der Kreis  $C$  belegt alle Außenknoten. Somit gilt für jeden weiteren Kreis  $C' \in \mathcal{P}$  mit  $C' \neq C$ , dass  $V_{out}^{C'} = \emptyset$  und

$$\nu(G) = \tau + 1 \leq k + 1.$$

Aus Lemma 4.13 ist  $\nu(G) \geq \frac{jk}{2}$  bekannt. Daher muss  $\frac{jk}{2} \leq k + 1$  gelten und damit  $j \leq 2$ . Es folgt  $n < 6k$ . Das ist ein Widerspruch zu  $n > 8k$  und es gilt in diesem Fall  $C \notin \mathcal{P}$ .

2.) Für jeden Kreis  $\tilde{C} \subset P(n, k)$  mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$  ergibt sich  $d(\tilde{C}) \geq k + 3$ . Da  $\mathcal{P}$  maximal ist, folgt mit der unteren Schranke aus Lemma 4.17 und  $\text{girth}(P(n, k)) = 8$

$$(|V| - \lambda_1(k + 3))/8 + \lambda_1 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil)$$

Wegen  $|V| = 2n$  und  $n = 2kj + \alpha k + 2\beta + \gamma$  gilt

$$(2(2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma) - \lambda_1(k + 3))/8 + \lambda_1 \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil)$$

$\Leftrightarrow$

$$(4jk + 2\alpha k + 4\beta + 2\gamma - \lambda_1 k - 3\lambda_1)/8 + \lambda_1 \geq \frac{jk}{2} + \alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil$$

$\Leftrightarrow$

$$4jk + 2\alpha k + 4\beta + 2\gamma - \lambda_1 k - 3\lambda_1 + 8\lambda_1 \geq 4jk + 8\alpha\beta + 8\alpha\gamma - 8\alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil$$

Folglich erhält man

$$2\alpha k + 4\beta + 2\gamma - \lambda_1 k + 5\lambda_1 \geq 8\alpha\beta + 8\alpha\gamma - 8\alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil$$

und somit

$$\lambda_1(k - 5) \leq 2\alpha k + 4\beta + 2\gamma - 8\alpha\beta - 8\alpha\gamma + 8\alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil$$

Da  $\left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil \in \{0, 1\}$ , gilt

$$\lambda_1(k - 5) \leq 2\alpha k + 4\beta + 2\gamma - 8\alpha\beta - 8\alpha\gamma + 8\alpha\gamma$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda_1(k - 5) \leq 2\alpha k + 4\beta + 2\gamma - 8\alpha\beta$$

Auf Grund von  $\gamma \in \{0, 1\}$  folgt analog

$$\lambda_1(k - 5) \leq 2\alpha k + 4\beta + 2 - 8\alpha\beta$$

Man unterscheidet nun zwei Fälle:

(a)  $\alpha = 0$ : Dann gilt

$$\lambda_1(k - 5) \leq 4\beta + 2 \leq 2k - 4 + 2$$

da  $\beta \leq \frac{k}{2} - 1$ . Weiterhin ergibt sich

$$\lambda_1 \leq \frac{2k - 2}{k - 5}$$

(b)  $\alpha = 1$ : Man erhält

$$\lambda_1(k - 5) \leq 2k + 4\beta + 2 - 8\beta = 2k - 4\beta + 2 \leq 2k + 2$$

da  $\beta \geq 0$  und daher

$$\lambda_1 \leq \frac{2k + 2}{k - 5}$$

Es folgt  $\lambda_1 \leq 2 \cdot \frac{k-1}{k-5}$ , falls  $\alpha = 0$  und  $\lambda_1 \leq 2 \cdot \frac{k+1}{k-5}$ , falls  $\alpha = 1$ . Da für  $k \geq 6$

$$\frac{k - 1}{k - 5} < \frac{k + 1}{k - 5}$$

gilt, sei nun die Funktion

$$f_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f_1(t) = \frac{t+1}{t-5}$  betrachtet. Offenbar ist  $f_1(t)$  streng monoton fallend für  $t \geq 6$  (Es gilt  $f_1'(t) = -\frac{6}{t^2-10t+25} < 0$  für  $t \geq 6$ ) und  $f_1(6) = 7$ .

Dies bedeutet für den Quotienten  $\frac{k+1}{k-5}$ , dass

$$\frac{k + 1}{k - 5} \leq 7 \quad \text{für } k \geq 6$$

Damit ergibt sich allgemeinen

$$\lambda_1 \leq 2 \cdot \frac{k + 1}{k - 5} \leq 14.$$

3.) Sei o. B. d. A.  $V_{in}^C = \{u_0, u_k, u_{2k}\}$ . Die Menge der Außenknoten  $V_{out}^C$  induziert einen Weg. Es wird angenommen, dass  $C \in \mathcal{P}$  gilt, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(i)  $v_1 \in V_{out}^C$ : In diesem Fall gilt  $V_{out}^C = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{2k-1}, v_{2k}\}$  und  $C$  kann durch den Kreis  $\tilde{C}$  mit  $V_{out}^{\tilde{C}} = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_k\}$  und somit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$  substituiert werden. Es folgt (b).

(ii)  $v_1 \notin V_{out}^C$ : Im zweiten Fall gilt  $V_{out}^C = \{v_{2k}, v_{2k+1}, v_{2k+2}, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_0\}$  und  $|V_{out}^C| = n - (2k - 1)$ . Jeder weitere Kreis  $C' \in \mathcal{P}$  mit  $C' \neq C$  hat entweder keine oder mindestens zwei Außenknoten. Da  $C \in \mathcal{P}$ , erhält man

$$|\{C' \in \mathcal{P} \mid V_{out}^{C'} = \emptyset\}| \leq \tau - 1 \leq k - 1$$

und

$$|\{C'' \in \mathcal{P} \mid |V_{out}^{C''}| \geq 2\}| \leq \frac{|V_{out}| - |V_{out}^C|}{2} = \frac{2k - 1}{2} = k - \frac{1}{2}.$$

Es folgt

$$|\mathcal{P}| \leq k - 1 + k - \frac{1}{2} + 1$$

Auf Grund der unteren Schranke in Lemma 4.13 muss allerdings gelten

$$\frac{jk}{2} \leq \nu(P(n, k)) = |\mathcal{P}| \leq 2k - \frac{1}{2}$$

Folglich ergibt sich

$$jk \leq 4k - 1 \quad \Leftrightarrow \quad j \leq 4 - \frac{1}{k}$$

und somit

$$n < 8k$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme  $n > 8k$ . Die Annahme  $C \in \mathcal{P}$  ist in diesem Fall falsch.  $\square$

Aus Lemma 4.18 kann man zum einen folgern, dass für jeden Kreis  $C$  in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  gilt  $|V_{in}^C| \geq 2$ . Zum anderen kann man für eine betrachtete maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  annehmen, dass  $\{\hat{C} \in \mathcal{P} \mid |V_{in}^{\hat{C}}| = 3\} = \emptyset$ . Außerdem gibt es höchstens 14 Kreise  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$ , womit sich für jeden weiteren Kreis  $\bar{C} \in \mathcal{P}$  mit  $|V_{in}^{\bar{C}}| \neq 2$  ergibt, dass  $|V_{in}^{\bar{C}}| \geq 4$ .

Nachfolgend wird bewiesen, dass ein Kreis  $C$  im Graphen  $P(n, k)$ , welcher keine Außenknoten enthält, nicht in einer maximalen Kreispackung von  $P(n, k)$  enthalten ist. Ebenso gilt dies für einen Kreis  $C$ , dessen Menge der Außenknoten  $V_{out}^C$  einen Weg  $W$  der Länge  $d(W) \leq k - 1$  induziert.

**Lemma 4.19:**

Es sei  $n \geq k^2 + 34k$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Zudem sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit einer der folgenden beiden Eigenschaften:

- 1.)  $E_{out}^C = \{(v_j, v_{[j+1]}), \dots, (v_{[j+i-1]}, v_{[j+i]})\}$  und  $1 \leq i \leq k - 1$
- 2.)  $V_{out}^C = \emptyset$

Dann gilt

$$C \notin \mathcal{P}.$$

**Beweis:**

Aus Lemma 4.18 ist bekannt, dass es in  $\mathcal{P}$  höchstens 14 Kreise  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$  gibt und jeder weitere Kreis  $\hat{C} \in \mathcal{P}$  die Eigenschaft hat, dass  $|V_{in}^{\hat{C}}| \geq 4$  gilt.

Nun sei angenommen, dass  $C \in \mathcal{P}$ . Da vorausgesetzt wurde, dass entweder  $E_{out}^C = \{(v_j, v_{[j+1]}), \dots, (v_{[j+i-1]}, v_{[j+i]})\}$  und  $1 \leq i \leq k - 1$  oder  $V_{out}^C = \emptyset$  gilt, folgt  $|V_{in}^C| \geq \lfloor \frac{n}{\tau} \rfloor \geq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  und es ergibt sich wegen der unteren Schranke in Lemma 4.17

$$(|V_{in}| - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 2 \cdot 14)/4 + 1 + 14 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil)$$

Wegen  $|V_{in}| = n = 2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma$  folgt

$$(2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma - \lfloor \frac{2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma}{k} \rfloor - 28)/4 + 1 + 14 \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil)$$

Da  $2\beta + \gamma \leq k - 1$ , gilt  $\lfloor \frac{2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma}{k} \rfloor = 2j + \alpha$  und somit

$$(2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma - 2j - \alpha - 28)/4 + 15 \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil)$$

$\Leftrightarrow$

$$2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma - 2j - \alpha - 28 + 60 \geq 2jk + 4\alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil)$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\alpha k + 2\beta + \gamma - 2j - \alpha + 32 \geq 4\alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil)$$

und man erhält

$$2j \leq \alpha k + 2\beta + \gamma - \alpha + 32 - 4\alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil)$$

Man unterscheide wiederum zwei Fälle:

1.)  $\alpha = 0$ : Dann gilt

$$2j \leq 2\beta + \gamma + 32$$

$\Leftrightarrow$

$$j \leq \beta + \frac{\gamma}{2} + 16 < \frac{k}{2} - 1 + 17 = \frac{k}{2} + 16$$

da  $\beta \leq \frac{k}{2} - 1$  und  $\gamma \in \{0, 1\}$ .

Dies wiederum heißt

$$\begin{aligned}
 n &< 2\left(\frac{k}{2} + 16\right)k + 2\beta + \gamma \\
 &= k^2 + 32k + 2\beta + \gamma \\
 &\leq k^2 + 32k + k - 2 + \gamma \\
 &\leq k^2 + 33k - 2 + 1 \\
 &= k^2 + 33k - 1.
 \end{aligned}$$

2.)  $\alpha = 1$ : Man erhält mit der gleichen Argumentation

$$\begin{aligned}
 2j &\leq k + 2\beta + \gamma - 1 + 32 - 4\beta - 4\gamma + 4\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil \\
 &\Leftrightarrow \\
 2j &\leq k - 2\beta + \gamma + 31 - 4\gamma + 4\gamma \\
 &\Leftrightarrow \\
 j &\leq \frac{k}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2} + 15,5 \leq \frac{k}{2} - \beta + 16 \leq \frac{k}{2} + 16
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 n &\leq 2\left(\frac{k}{2} + 16\right)k + k + 2\beta + \gamma \\
 &= k^2 + 33k + 2\beta + \gamma \\
 &\leq k^2 + 33k + k - 2 + \gamma \\
 &\leq k^2 + 34k - 2 + 1 \\
 &= k^2 + 34k - 1.
 \end{aligned}$$

In beiden Fällen entsteht also ein Widerspruch, da  $n \geq k^2 + 34k$  vorausgesetzt war. Somit ist die Annahme  $C \in \mathcal{P}$  falsch.  $\square$

Mit Lemma 4.18 erhält man eine untere Schranke für die Anzahl der Innenknoten eines Kreises  $C$  einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$ . Lemma 4.20 ergibt, dass  $C$  außerdem mindestens vier Außenknoten belegen muss.

**Lemma 4.20:**

Sei  $n \geq k^2 + 34k$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Weiterhin sei  $C \in \mathcal{P}$  ein Kreis, dann gilt

$$|V_{out}^C| \geq 4.$$

**Beweis:**

Nach Lemma 4.19 gilt  $V_{out}^C \neq \emptyset$ . Angenommen  $V_{out}^C$  induziert einen zusammenhängenden Untergraphen, dann gilt nach Lemma 4.19, dass  $|V_{out}^C| \geq k + 1$ . Andernfalls induziert  $V_{out}^C$  einen Untergraphen mit mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. In diesem Fall gilt  $|V_{out}^C| \geq 4$  und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

Weiter lassen sich mit Lemma 4.19 die Kreise  $\tilde{C} \subset P(n, k)$  einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$  (vgl. Lemma 4.18 2.) genauer beschreiben.

**Lemma 4.21:**

Für  $n \geq k^2 + 34k$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$  und  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  ein Kreis mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$ . Dann folgt

$$|V_{out}^{\tilde{C}}| = k + 1$$

**Beweis:**

Da  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  folgt aus Lemma 4.19, dass  $V_{out}^{\tilde{C}} \geq k + 1$ .

Es sei angenommen, dass  $V_{out}^{\tilde{C}} > k + 1$  ist. O. B. d. A. sei  $V_{in}^{\tilde{C}} = \{u_0, u_k\}$ . Wegen  $V_{out}^{\tilde{C}} > k + 1$ , ergibt sich  $V_{out}^{\tilde{C}} = \{v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_0\}$  und  $|V_{out}^{\tilde{C}}| = n - (k - 1)$ . Analog zur Beweisführung in Lemma 4.18 3.) hat jeder weitere Kreis  $C' \in \mathcal{P}$  mit  $C' \neq \tilde{C}$  entweder keine oder mindestens zwei Außenknoten. Wegen  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  muss gelten

$$|\{C' \in \mathcal{P} \mid V_{out}^{C'} = \emptyset\}| \leq \tau - 1 \leq k - 1$$

und

$$|\{C'' \in \mathcal{P} \mid |V_{out}^{C''}| \geq 2\}| \leq \frac{|V_{out}| - |V_{out}^{\tilde{C}}|}{2} = \frac{k - 1}{2} = \frac{k}{2} - \frac{1}{2}.$$

Es folgt

$$|\mathcal{P}| \leq k - 1 + \frac{k}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

Mit der unteren Schranke in Lemma 4.13 erhält man

$$\frac{jk}{2} \leq \nu(P(n, k)) = |\mathcal{P}| \leq \frac{3k}{2} - \frac{1}{2}$$

Folglich ergibt sich

$$jk \leq 3k - 1 \quad \Leftrightarrow \quad j \leq 3 - \frac{1}{k}$$

und somit

$$n < 6k$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme  $n \geq k^2 + 34k$ . Damit ist die Annahme  $V_{out}^{\tilde{C}} > k + 1$  falsch und die Behauptung bewiesen.  $\square$

Im folgenden Lemma werden nun Kreise  $C$  betrachtet, deren Menge der Außenknoten  $V_{out}^C$  einen Weg  $W$  der Länge  $d(W) \geq k$  induziert. Unter der zusätzlichen Annahme  $|V_{in}^C| = 2$ , erhält man die in Lemma 4.21 betrachteten speziellen Kreise der Länge  $k + 3$ , die zu einem späteren Zeitpunkt für die Konstruktion einer maximalen Kreispackung von wesentlicher Bedeutung sein werden. Beispielhaft ist ein solcher Kreis in Abbildung 4.9 rot markiert dargestellt.

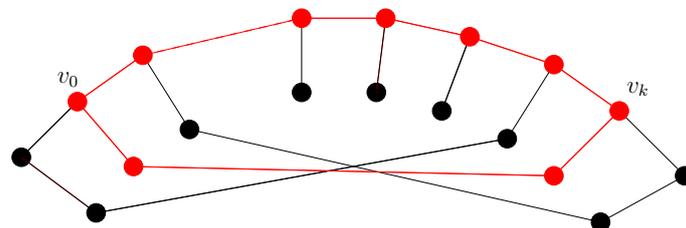


Abbildung 4.9: Veranschaulichung eines Kreises mit genau zwei Innenknoten

Aus Lemma 4.18 2.) ist bereits bekannt, dass es in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  von  $P(n, k)$  höchstens 14 solcher Kreise gibt.

**Lemma 4.22:**

Für  $n \geq k^2 + 34k$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Zudem sei  $\lambda_2 := |\{C \in \mathcal{P} \mid |V_{out}^C| \geq k + 1\}|$  gegeben.

Dann gilt:

- 1.) Falls  $\alpha = 0$  und  $2\beta + \gamma \geq k - 3 \Rightarrow \lambda_2 \leq 1$
- 2.) Falls  $k = 6$ ,  $\alpha = 1$  und  $2\beta + \gamma = 0 \Rightarrow \lambda_2 \leq 2$
- 3.) Falls  $k \geq 8$ ,  $\alpha = 1$  und  $2\beta + \gamma = 0 \Rightarrow \lambda_2 \leq 1$
- 4.) Falls  $\alpha = 1$  und  $1 \leq 2\beta + \gamma \leq 3$  oder  $2\beta + \gamma = 5 \Rightarrow \lambda_2 \leq 1$
- 5.) In allen übrigen Fällen ist  $\lambda_2 = 0$

**Beweis:**

Da  $\mathcal{P}$  maximal ist und jeder Kreis in  $\mathcal{P}$  mindestens vier Außenknoten belegt (vgl. Lemma 4.20), gilt

$$(|V_{out}| - \lambda_2(k+1))/4 + \lambda_2 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil)$$

Aus  $|V_{out}| = n = 2kj + \alpha k + 2\beta + \gamma$  ergibt sich auf diese Weise

$$(2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma - \lambda_2(k+1))/4 + \lambda_2 \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil)$$

Das heißt,

$$2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma - \lambda_2(k+1) + 4\lambda_2 \geq 2jk + 4\alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil)$$

oder äquivalent

$$\alpha k + 2\beta + \gamma - \lambda_2(k-3) \geq 4\alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil)$$

Es ergibt sich allgemein die Ungleichung

$$\lambda_2(k-3) \leq \alpha k + 2\beta + \gamma - 4\alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil)$$

Nun werden zwei Fälle unterschieden:

1.)  $\alpha = 0$ : In diesem Fall gilt

$$\lambda_2(k-3) \leq 2\beta + \gamma$$

Es ist  $\beta \in \mathbb{N}_0$  und  $\beta \leq \frac{k-2}{2}$ . Betrachte folgende Unterfälle:

(a)  $2\beta + \gamma \geq k - 2$ : Es gilt

$$\lambda_2(k-3) \leq 2\beta + 1 \leq k - 2 + 1 = k - 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda_2 \leq \frac{k-1}{k-3}.$$

Die Argumentation erfolgt nun analog zum Beweis von Lemma 4.19. Betrachte die Funktion

$$f_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f_2(t) = \frac{t-1}{t-3}$ . Die Funktion  $f_2(t)$  ist ebenfalls streng monoton fallend für  $t \geq 6$  (Es gilt  $f_2'(t) = -\frac{2}{t^2-6t+9} < 0$  für  $t \geq 6$ ) und  $f_2(6) = \frac{5}{3}$ . Damit lässt sich folgende Abschätzung machen

$$\lambda_2 \leq \frac{k-1}{k-3} \leq \frac{5}{3}$$

Da  $\lambda_2 \in \mathbb{N}_0$  folgt

$$\lambda_2 \leq 1.$$

(b)  $2\beta + \gamma = k - 3$ : In diesem Unterfall erhält man

$$\lambda_2(k-3) \leq 2\beta + 1 \leq k - 4 + 1 = k - 3$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lambda_2 \leq 1$$

(c)  $2\beta + \gamma \leq k - 4$ : Folglich ist

$$\lambda_2(k-3) \leq 2\beta + \gamma = r \leq k - 4$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lambda_2 \leq \frac{k-4}{k-3}$$

Man betrachte nun die Funktion

$$f_3: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f_3(t) = \frac{t-4}{t-3}$ . In diesem Fall ist  $f_3(t)$  streng monoton steigend für  $t \geq 6$  (Es gilt  $f_3'(t) = \frac{1}{t^2-6t+9} > 0$  für  $t \geq 6$ ) und  $f_3(6) = \frac{2}{3}$ . Damit lässt sich folgern

$$\lambda_2 \leq \frac{k-4}{k-3} < 1$$

und somit

$$\lambda_2 = 0.$$

2.)  $\alpha = 1$ : In diesem Fall wird die allgemeine Ungleichung zu

$$\begin{aligned}\lambda_2(k-3) &\leq k + 2\beta + \gamma - 4\beta - 4\gamma + 4\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil \\ &= k - 2\beta - 3\gamma + 4\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil \\ &= k - 2\beta + \gamma(4 \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil - 3)\end{aligned}$$

Man betrachte wiederum einige Unterfälle:

(a)  $2\beta + \gamma = 0$ : Es folgt

$$\begin{aligned}\lambda_2(k-3) &\leq k \\ &\Leftrightarrow \\ \lambda_2 &\leq \frac{k}{k-3}.\end{aligned}$$

Somit ist die Funktion

$$f_4: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f_4(t) = \frac{t}{t-3}$  zu betrachten. Offenbar ist  $f_4(t)$  wiederum streng monoton fallend für  $t \geq 6$  (Es ist  $f_4'(t) = -\frac{3}{t^2-6t+9} < 0$  für  $t \geq 6$ ) und  $f_4(6) = 2$ . Außerdem ist  $f_4(8) = 1\frac{3}{5}$ . Damit lässt sich folgende Abschätzung machen:

$$\lambda_2 \leq \frac{k}{(k-3)} = 2 \text{ für } k = 6$$

und

$$\lambda_2 \leq \frac{k}{(k-3)} \leq 1\frac{3}{5} \text{ für } k \geq 8.$$

Auf Grund der Ganzzahigkeit ergibt sich

$$\lambda_2 \leq 1 \text{ für } k \geq 8.$$

(b)  $1 \leq 2\beta + \gamma \leq 3$ : In diesem Unterfall ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda_2(k-3) &\leq k-1 \\ &\Leftrightarrow \\ \lambda_2 &\leq \frac{k-1}{k-3}.\end{aligned}$$

Wie zuvor bereits gezeigt, folgt

$$\lambda_2 \leq 1.$$

(c)  $2\beta + \gamma = 4$ : Es gilt

$$\lambda_2(k-3) \leq k-4$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda_2 \leq \frac{k-4}{k-3}.$$

Wie zuvor, gilt dann

$$\lambda_2 = 0.$$

(d)  $2\beta + \gamma = 5$ : In diesem Unterfall erhält man

$$\lambda_2(k-3) \leq k-3$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda_2 \leq 1.$$

(e)  $2\beta + \gamma \geq 6$ : Es ergibt sich

$$\lambda_2(k-3) \leq k-5$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda_2 \leq \frac{k-5}{k-3}.$$

Man betrachte die Funktion

$$f_5: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f_5(t) = \frac{t-5}{t-3}$ . Die Funktion  $f_5(t)$  ist streng monoton steigend für  $t \geq 6$  (Es gilt  $f_5'(t) = \frac{2}{t^2-6t+9} > 0$  für  $t \geq 6$ ) und  $f_5(6) = \frac{1}{3}$ . Damit kann man wiederum wegen

$$\frac{k-5}{k-3} < 1$$

folgern, dass

$$\lambda_2 = 0.$$

□

Die Schranken in Lemma 4.22 gelten insbesondere auch für die Anzahl der Kreise  $C \subset P(n, k)$  einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  von  $P(n, k)$  mit  $|V_{in}^C| = 2$  und  $|V_{out}^C| = k + 1$  (vgl. Abbildung 4.9). Wie zuvor erwähnt, sind diese Kreise im Zusammenhang mit der Konstruktion einer maximalen Kreispackung von besonderer Bedeutung. Mit Lemma 4.22 folgt für solche Kreise, dass lediglich im Fall  $k = 6$  und  $n = 12j + 6$  zwei dieser Kreise in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  von  $P(n, k)$  enthalten sein können. In allen anderen Fällen kann eine maximale Kreispackung höchstens einen solchen Kreis beinhalten. Dies ist wesentlich, da im Verlauf dieses Kapitels gezeigt wird, dass immer eine maximale Kreispackung existiert, welche ausschließlich aus Kreisen der Länge acht und höchstens einem Kreis  $C \subset P(n, k)$  mit  $|V_{out}^C| = k + 1$  und  $|V_{in}^C| = 2$  besteht.

Bei der Betrachtung einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  ergibt sich mit den Aussagen aus den Lemmata 4.18 - 4.20 zusammenfassend, dass für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$  gilt:

$$|V_{out}^C| \geq 4 \text{ und } |V_{in}^C| \geq 2.$$

In Satz 4.23 werden nun obere Schranken für die Anzahl der Außen- bzw. Innenknoten eines Kreises einer maximalen Kreispackung von  $P(n, k)$  hergeleitet. Dazu wird folgende Vorüberlegung gemacht:

Man betrachte einen Kreis  $C \subset P(n, k)$  mit  $\{v_j, v_{[j+1]}, \dots, v_{[j+k+1]}\} \subseteq V_{out}^C$ ,  $\{(v_j, v_{[j+1]}), (v_{[j+1]}, v_{[j+2]}), \dots, (v_{[j+k]}, v_{[j+k+1]})\} \subseteq E_{out}^C$  und  $(v_j, u_j) \in E_{cross}^C$ . Dann ist es möglich, den Kreis  $C$  durch einen kürzeren Kreis  $\tilde{C} \subset P(n, k)$  zu substituieren, welcher durch  $V(\tilde{C}) := \{v_j, v_{[j+1]}, \dots, v_{[j+k]}, u_j, u_{[j+k]}\}$  induziert wird. Man kann folglich o. B. d. A. annehmen, dass

$$C \notin \mathcal{P}.$$

Damit lassen sich obere Schranken für die Anzahl von Außen- bzw. Innenknoten von Kreisen einer maximalen Kreispackung formulieren.

**Satz 4.23:**

Es sei  $n \geq k^2 + 34k$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Zudem sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit  $C \in \mathcal{P}$ , dann gilt:

1.) Falls  $\alpha = 0$ , folgt

$$|V_{in}^C| \leq k + 7 \quad \text{und} \quad |V_{out}^C| \leq k + 3$$

2.) Falls  $\alpha = 1$ , folgt

$$|V_{in}^C| \leq k + 9 \quad \text{und} \quad |V_{out}^C| \leq k + 5$$

**Beweis:**

Es wird zunächst die Gültigkeit der beiden oberen Schranken für die Anzahl der Innenknoten von  $C$  bewiesen. Anschließend wird auf die Gültigkeit der Schranken für die Anzahl der Außenknoten eingegangen.

(i) Aus Lemma 4.18 1.) ist für jeden Kreis  $\bar{C} \in \mathcal{P}$  bekannt, dass  $|V_{in}^{\bar{C}}| \geq 2$ . Zudem weiß man aus Lemma 4.21 und Lemma 4.22, dass die Anzahl  $|\{\bar{C} \in \mathcal{P} \mid |V_{in}^{\bar{C}}| = 2\}| \leq 2$  ist und sich für jeden weiteren Kreis  $\hat{C} \in \mathcal{P}$  mit  $|V_{in}^{\hat{C}}| \neq 2$  ergibt, dass  $|V_{in}^{\hat{C}}| \geq 4$ . Da  $\mathcal{P}$  maximal ist, erhält man

$$(|V_{in}| - |V_{in}^C| - 2 \cdot 2)/4 + 1 + 2 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil)$$

Durch  $|V_{in}| = n$  ergibt sich

$$n - |V_{in}^C| - 2 \cdot 2 + 4 + 8 \geq 2jk + 4\alpha\beta + 4\alpha\gamma - 4\alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil$$

Da  $n = 2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma$ , erhält man

$$2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma - |V_{in}^C| + 8 \geq 2jk + 4\alpha\beta + 4\alpha\gamma - 4\alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha k + 2\beta + \gamma - |V_{in}^C| + 8 \geq 4\alpha\beta + 4\alpha\gamma - 4\alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil$$

Äquivalent erhält man

$$\begin{aligned} |V_{in}^C| &\leq \alpha k + 2\beta + \gamma + 8 - 4\alpha\beta - 4\alpha\gamma + 4\alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil \\ &\leq \alpha k + 2\beta + \gamma + 8 - 4\alpha\beta - 4\alpha\gamma + 4\alpha\gamma \\ &= \alpha k + 2\beta + \gamma + 8 - 4\alpha\beta \\ &\leq \alpha k + 2\beta + 9 - 4\alpha\beta \end{aligned}$$

Man unterscheidet zwei Fälle:

a)  $\alpha = 0$ : In diesem Fall gilt

$$|V_{in}^C| \leq 2\beta + 9 \leq k - 2 + 9 = k + 7.$$

b)  $\alpha = 1$ : Im zweiten Fall ergibt sich

$$|V_{in}^C| \leq k + 2\beta - 4\beta + 9 = k - 2\beta + 9 \leq k + 9$$

(ii) Aus Lemma 4.20 ist für jeden Kreis  $\bar{C} \in \mathcal{P}$  bekannt, dass  $|V_{out}^{\bar{C}}| \geq 4$ . Da  $\mathcal{P}$  maximal ist, gilt

$$(|V_{out}| - |V_{out}^C|)/4 + 1 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil)$$

Da  $|V_{out}| = n$ , folgt

$$n - |V_{out}^C| + 4 \geq 2jk + 4\alpha\beta + 4\alpha\gamma - 4\alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil$$

Mit  $n = 2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma$  erhält man

$$2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma - |V_{out}^C| + 4 \geq 2jk + 4\alpha\beta + 4\alpha\gamma - 4\alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha k + 2\beta + \gamma - |V_{out}^C| + 4 \geq 4\alpha\beta + 4\alpha\gamma - 4\alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil$$

Äquivalent gilt

$$\begin{aligned} |V_{out}^C| &\leq \alpha k + 2\beta + \gamma + 4 - 4\alpha\beta - 4\alpha\gamma + 4\alpha\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil \\ &\leq \alpha k + 2\beta + \gamma + 4 - 4\alpha\beta - 4\alpha\gamma + 4\alpha\gamma \\ &= \alpha k + 2\beta + \gamma + 4 - 4\alpha\beta \\ &\leq \alpha k + 2\beta + 5 - 4\alpha\beta \end{aligned}$$

Es werden wiederum zwei Fälle unterschieden:

a)  $\alpha = 0$ : Im ersten Fall erhält man

$$|V_{out}^C| \leq 2\beta + 5 \leq k - 2 + 5 = k + 3.$$

b)  $\alpha = 1$ : Analog folgt im zweiten Fall

$$|V_{out}^C| \leq k + 2\beta - 4\beta + 5 = k - 2\beta + 5 \leq k + 5$$

□

Fasst man Lemma 4.20 und Satz 4.23 zusammen, so ergibt bei der Betrachtung einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  für einen Kreis  $C \in \mathcal{P}$ :

$$4 \leq V_{out}^C \leq k + 5$$

Auf Grund der Beweisführung kann man für 2 Kreise  $C, \tilde{C} \in \mathcal{P}$  schließen, dass

$$8 \leq |V_{out}^C \cup V_{out}^{\tilde{C}}| \leq k + 5 + 4$$

Führt man diesen Ansatz fort, so bedeutet das für  $u$  Kreise einer maximalen Kreispackung  $C_1, \dots, C_u \in \mathcal{P}$ :

$$4u \leq \left| \bigcup_{i=1}^u V_{out}^{C_i} \right| \leq k + 5 + 4(u - 1)$$

Mit der nachfolgenden Abbildung 4.10 soll eine weitere Aussage über die Kreise einer maximalen Kreispackung veranschaulicht werden.

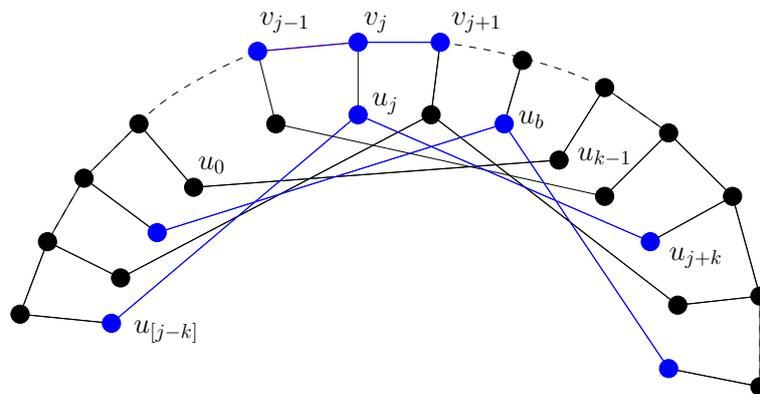


Abbildung 4.10: Eine Veranschaulichung eines Kreises mit einer speziellen Knotenbelegung

Wie zuvor gezeigt, hat jeder Kreis einer maximalen Kreispackung eine beschränkte Anzahl von Außen- und Innenknoten und damit eine beschränkte Gesamtlänge. In der Abbildung ist blau markiert ein Ausschnitt von einem Kreis skizziert, für den die Knoten  $u_j$  und  $v_j$  in der Knotenmenge enthalten sind. Die Kante  $(u_j, v_j)$  ist allerdings kein Element der

Kantenmenge. Betrachtet man den Index  $j$  als Element einer Menge von  $k - 2$  aufeinanderfolgenden Indizes (hier o. B. d. A.  $\{1, \dots, k - 2\}$ ), so wird nachfolgend gezeigt, dass es einen zweiten Index  $b$  in der  $k$  elementigen Indexmenge  $\{0, \dots, k - 1\}$  gibt, so dass der Knoten  $u_b$  ebenfalls ein Element des Kreises ist. Anderenfalls wäre der Kreis zu lang und in keiner maximalen Kreispackung enthalten. Der beschriebene Zusammenhang ergibt sich analog in dem Falle, dass  $v_j$  nicht in der Knotenmenge des Kreises enthalten ist. Man erhält folgendes Resultat.

**Lemma 4.24:**

Sei  $n \geq 2k^2 + 14k$ ,  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$  und  $C \in \mathcal{P}$  ein Kreis. Zudem sei o. B. d. A.  $u_j \in V_{in}^C$  und  $(u_j, v_j) \notin E(C)$  mit  $j \in \{1, \dots, k - 2\}$ . Dann gilt

$$\exists b \in \{0, \dots, k - 1\} \text{ mit } b \neq j \text{ mit } u_b \in V_{in}^C$$

**Beweis:**

Da  $u_j \in V_{in}^C$  und  $(u_j, v_j) \notin E(C)$ , ergibt sich  $u_{j+k}, u_{[j-k]} \in V_{in}^C$ . Außerdem ist für jeden Kreis  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  bekannt, dass  $V_{out}^{\tilde{C}} \leq k + 5$ .

Nun sei angenommen, dass kein Index  $b \in \{0, \dots, k - 1\}$  mit  $b \neq j$  und  $u_b \in V_{in}^C$  existiert. In diesem Fall gibt es einen Weg  $W = (u_{j+k}, \dots, u_{[j-k]})$  mit der Eigenschaft  $u_i \notin V(W)$  für alle  $i \in \{0, \dots, k - 1\}$  und  $W \cup \{(u_{[j-k]}, u_j), (u_j, u_{j+k})\} = C$ . Insbesondere bedeutet dies  $u_j \notin V(W)$  und  $V_{out}^W = V_{out}^C$ .

1.)  $v_j \in V_{out}^C$ : In diesem Fall ergibt sich durch  $\{u_0, \dots, u_{k-1}\} \cap V(W) = \emptyset$ , dass

$$\{v_0, \dots, v_{k-1}\} \cup \{v_k\} \cup \{v_{n-1}\} \subset V_{out}^W$$

Da  $|\{v_{n-1}, v_0, \dots, v_{k-1}, v_k\}| = k + 2$  und  $|V_{out}^W| = |V_{out}^C| \leq k + 5$ , induziert die Menge  $V_{out}^W$  einen Graphen mit höchstens zwei Zusammenhangskomponenten. Man unterscheide wiederum zwei Fälle:

- (a)  $V_{out}^W$  induziert einen Graphen mit genau einer Zusammenhangskomponente: In diesem Fall ist  $V_{out}^W = \{v_{[j-k]}, \dots, v_{n-1}, v_0, \dots, v_{k-1}, v_k, \dots, v_{j+k}\}$  und folglich  $|V_{out}^W| = 2k + 1$ . Das ist ein Widerspruch und die Annahme ist in diesem Fall widerlegt.
- (b)  $V_{out}^W$  induziert einen Graphen mit genau zwei Zusammenhangskomponenten: Demzufolge liegt einer der folgenden beiden Fälle vor:
  - i.  $\{v_{k+1}, \dots, v_{j+k}\} \subset V_{out}^W$ : Dann gilt  $\{v_{k+1}, \dots, v_{j+k}\} = \{v_{k+1}\}$  und damit  $j = 1$ . Demzufolge ist  $u_1 \in V(C)$  sowie  $u_{n-k+1}, u_{k+1} \in V(C)$ . Da

$\{v_{n-1}, v_0, \dots, v_{k-1}, v_k\} \subset V_{out}^W$ , folgt  $u_{n-1}, u_{n-k-1} \in V(C)$ . Somit ergibt sich auf Grund von  $u_{n-k-1}, u_{n-k+1} \in V(C)$ , dass die zweite Zusammenhangskomponente von  $W \cap G_{out}$  mindestens drei Außenknoten hat. Es folgt  $|V_{out}^W| \geq k + 6$ , ein Widerspruch.

- ii.  $\{v_{[j-k]}, \dots, v_{n-2}\} \subset V_{out}^W$ : In dem Fall folgt  $\{v_{[j-k]}, \dots, v_{n-2}\} = \{v_{n-2}\}$  und damit  $j = k - 2$ . Das bedeutet  $u_{k-2}, u_k \in V(C)$ , sowie  $u_{2k-2}, u_{2k} \in V(C)$  und die zweite Zusammenhangskomponente von  $W \cap G_{out}$  enthält wiederum mindestens drei Außenknoten. Es ergibt sich der Widerspruch durch  $|V_{out}^W| \geq k + 6$ .

2.)  $v_j \notin V_{out}^C$ : Damit erhält man

$$\{v_0, \dots, v_{k-1}\} \cap V(W) = \emptyset$$

und

$$\{(u_\delta, u_{\delta+k}) \mid \delta \in \{0, \dots, k-1\}\} \cap E(W) = \emptyset$$

Daraus ergibt sich, dass

$$|E(W)| \geq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

Da  $|V_{out}^W| = |V_{out}^C| \leq k + 5$  und  $|V_{in}^W| = |V_{in}^C| - 1 \leq k + 9 - 1$  erhält man

$$|E(W)| = |V(W)| - 1 \leq k + 5 + k + 9 - 1 - 1 = 2k + 12$$

Folglich muss gelten

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq 2k + 12$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{2jk + \alpha k}{k} \leq 2k + 12$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2j + \alpha \leq 2k + 12$$

$$\Leftrightarrow$$

$$j \leq k + 6 - \frac{\alpha}{2} \leq k + 6$$

Das bedeutet

$$n \leq 2k^2 + 12k + \alpha k + 2\beta + \gamma < 2k^2 + 14k$$

Dies ist ein Widerspruch und die Annahme ist falsch. □

Nachdem in den vorangegangenen Lemmata verschiedene Aussagen über die Anzahl der Kreise in einer maximalen Kreispackung mit einer bestimmten Anzahl von Innen- bzw. Außenknoten gemacht wurden, wird nachfolgend auf die Kreise einer maximalen Kreispackung mit einer Mindestanzahl von Übergangskanten eingegangen. Es wird gezeigt, dass in einer maximalen Kreispackung die Anzahl der Kreise mit mindestens sechs Übergangskanten für  $n \geq k^2 + 34k$  nach oben durch beschränkt  $\frac{k+4}{2}$  ist.

**Lemma 4.25:**

Für  $n \geq k^2 + 34k$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Zudem sei  $\lambda_3 := |\{C \in \mathcal{P} \mid |E_{cross}^C| \geq 6\}|$ , dann gilt

$$\lambda_3 \leq \frac{k+4}{2}.$$

**Beweis:**

Wie zuvor, ist  $\lambda_1 = |\{C \in \mathcal{P} \mid |V_{in}^C| = 2\}| = |\{C \in \mathcal{P} \mid |E_{cross}^C| = 2\}|$  für  $\mathcal{P}$  gegeben. Zudem wird  $\lambda_4 := |\{C \in \mathcal{P} \mid |E_{cross}^C| = 4\}|$  definiert. Mit Lemma 4.22 weiß man bereits, dass  $\lambda_1 \leq 2$  gilt. Man betrachte nun zwei Fälle:

1.)  $\lambda_4 \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \lceil \frac{\beta}{\beta+1} \rceil)$ : In diesem Fall erhält man die Abschätzung:

$$\begin{aligned} 4\lambda_4 &\geq 2jk + 4\alpha(\beta + \gamma - \gamma \lceil \frac{\beta}{\beta+1} \rceil) \\ &= n - (\alpha k + 2\beta + \gamma) + 4\alpha(\beta + \gamma - \gamma \lceil \frac{\beta}{\beta+1} \rceil) \end{aligned}$$

Man betrachte wiederum die zwei möglichen Ausprägungen von  $\alpha$  separat:

(a)  $\alpha = 0$ : Man erhält

$$4\lambda_4 \geq n - 2\beta - \gamma$$

Da  $2\lambda_1 + 4\lambda_4 + 6\lambda_3 \leq |E_{cross}| = n$ , ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 6\lambda_3 &\leq n - (n - 2\beta - \gamma) \\ &= 2\beta + \gamma \\ &\leq 2\beta + 1 \\ &\leq k - 2 + 1 \\ &= k - 1 \end{aligned}$$

Folglich ist

$$6\lambda_3 \leq k - 1 - 2\lambda_1 \leq k - 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda_3 \leq \frac{k - 1}{6}$$

(b)  $\alpha = 1$ : In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} 4\lambda_4 &\geq n - k - 2\beta - \gamma + 4(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil) \\ &\geq n - k - 2\beta - \gamma + 4(\beta + \gamma - \gamma) \\ &= n - k + 2\beta - \gamma \end{aligned}$$

Wie zuvor erhält man mit  $2\lambda_1 + 4\lambda_4 + 6\lambda_3 \leq |E_{cross}| = n$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 6\lambda_3 &\leq n - (n - k + 2\beta - \gamma) \\ &= k - 2\beta + \gamma \\ &\leq k - 2\beta + 1 \\ &\leq k + 1 \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$6\lambda_3 \leq k + 1 - 2\lambda_1 \leq k + 1$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_3 \leq \frac{k + 1}{6}$$

2.)  $\lambda_4 < \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil)$ : Es ist bekannt, dass  $\mathcal{P}$  keinen Kreis  $\hat{C} \subset P(n, k)$  mit  $|E_{cross}^{\hat{C}}| = 0$  enthält, da für einen solchen Kreis entweder  $V_{out}^{\hat{C}} = \emptyset$  oder  $V_{in}^{\hat{C}} = \emptyset$  gilt. Das bedeutet, dass

$$\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_3 = |\mathcal{P}| = \nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil) \quad (4.1)$$

Wie bereits erwähnt, muss außerdem

$$2\lambda_1 + 4\lambda_4 + 6\lambda_3 \leq |E_{cross}| = n = 2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma$$

erfüllt sein. Daher folgt:

$$\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_4 + \frac{3}{2}\lambda_3 \leq \frac{jk}{2} + \frac{\alpha k}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} \quad (4.2)$$

Man betrachte wiederum die zwei Ausprägungen von  $\alpha$  getrennt

(a)  $\alpha = 0$ : In diesem Fall gelten folgende drei Ungleichungen

$$\lambda_4 < \frac{jk}{2} \quad (4.3)$$

$$\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_3 \geq \frac{jk}{2} \quad (4.4)$$

$$\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_4 + \frac{3}{2}\lambda_3 \leq \frac{jk}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} \quad (4.5)$$

Die Ungleichung (4.3) folgt aus  $\lambda_4 < \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \lceil \frac{\beta}{\beta+1} \rceil)$ . Ungleichung (4.4) ergibt sich aus Ungleichung (4.1) und Ungleichung (4.3) folgt aus Ungleichung (4.2).

Mit Ungleichung (4.3) ergibt sich

$$\lambda_4 < \frac{jk}{2} \leq \frac{jk}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4}.$$

Zudem kann man  $\frac{1}{2}\lambda_3$ , wie folgt, darstellen

$$\frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_4 + \frac{3}{2}\lambda_3 - \left(\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_4 + \lambda_3\right) \quad (4.6)$$

Daher erhält man unter Verwendung der Ungleichungen (4.4) und (4.5) die Abschätzung

$$\frac{1}{2}\lambda_3 \leq \frac{jk}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} - \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_4 + \lambda_3\right)}_{\geq \frac{jk}{2} - \frac{\lambda_1}{2}}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{1}{2}\lambda_3 \leq \frac{jk}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} - \frac{jk}{2} + \frac{\lambda_1}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} + \frac{\lambda_1}{2}$$

Und somit

$$\lambda_3 \leq \beta + \frac{\gamma}{2} + \lambda_1 \leq \beta + \frac{1}{2} + \lambda_1 \leq \frac{k}{2} - 1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{k+3}{2}$$

(b)  $\alpha = 1$ : Auch in diesem Fall ergeben sich drei Ungleichungen

$$\lambda_4 < \frac{jk}{2} + \beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil \quad (4.7)$$

$$\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_3 \geq \frac{jk}{2} + \beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil \quad (4.8)$$

$$\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_4 + \frac{3}{2}\lambda_3 \leq \frac{jk}{2} + \frac{k}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} \quad (4.9)$$

Mit Ungleichung (4.7) erhält man analog zum Fall (a)

$$\lambda_4 < \frac{jk}{2} + \beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil \leq \frac{jk}{2} + \beta + \gamma$$

Verwendet man wiederum die Darstellung von  $\frac{1}{2}\lambda_3$  (Ungleichung (4.6)), sowie die Ungleichungen (4.8) und (4.9), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda_3 &= \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_4 + \frac{3}{2}\lambda_3 - (\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_4 + \lambda_3) \\ &\leq \frac{jk}{2} + \frac{k}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} - \underbrace{(\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_4 + \lambda_3)}_{\geq \frac{jk}{2} + \beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil - \frac{\lambda_1}{2}} \\ &\leq \frac{jk}{2} + \frac{k}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} - \frac{jk}{2} - \beta - \gamma + \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil + \frac{\lambda_1}{2} \\ &= \frac{k}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} - \underbrace{(\gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil)}_{\geq 0} + \frac{\lambda_1}{2} \\ &\leq \frac{k}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} + \frac{\lambda_1}{2} \\ &\leq \frac{k}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{2} \\ &\leq \frac{k}{4} + 1,25 \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\lambda_3 \leq \frac{k}{2} + 2,5$$

Insgesamt folgt:

$$\lambda_3 \leq \max \left\{ \frac{k-1}{6}, \frac{k+1}{6}, \frac{k+3}{2}, \frac{k+5}{2} \right\} = \frac{k+5}{2}.$$

Da  $\lambda_3 \in \mathbb{N}_0$  erhält man die Behauptung. □

## 4.2.1 Die Bestimmung einer maximalen Kreispackung

Zuvor wurde bereits erwähnt, dass sich aus der Konstruktion einer Kreispackung für den Beweis einer unteren Schranke der Kreispackungszahl eine Vermutung aufstellen lässt, wie man eine maximale Kreispackung für einen beliebigen Graphen  $P(n, k)$  ermitteln kann.

### Vermutung 1:

Es gibt in einem Graphen  $P(n, k)$  mit  $n \geq \max\{k^2 + 34k, 4k^2 - 14k + 12\}$  immer eine maximale Kreispackung, welche ausschließlich aus Kreisen der Länge acht und höchstens einem Kreis der Länge  $k + 3$  mit genau zwei Innenknoten besteht.

Die beiden in Vermutung 1 beschriebenen Kreistypen sind beispielhaft noch einmal in den nachfolgenden Abbildungen 4.11 und 4.12 dargestellt.

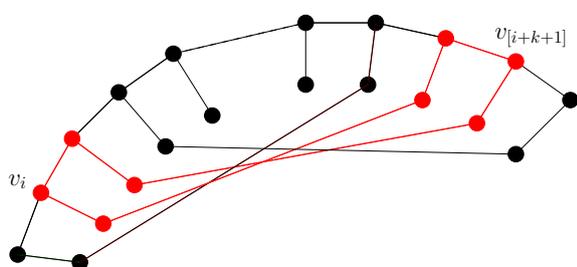


Abbildung 4.11: Ein Kreis der Länge acht

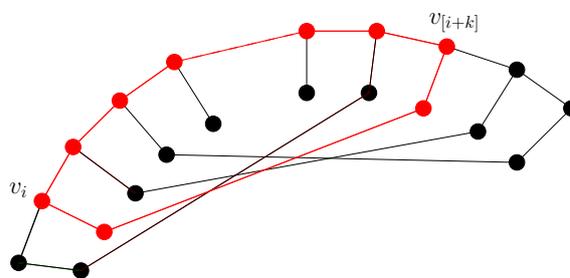


Abbildung 4.12: Ein Kreis mit der Länge  $k + 3$  und genau zwei Innenknoten

Vermutung 1 erweist sich unter bestimmten Bedingungen als richtig. Dies wird nachfolgend gezeigt. Wie zuvor, wird  $n$  beschrieben durch

$$n = 2jk + \underbrace{\alpha k + 2\beta + \gamma}_{=r}$$

mit  $j \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha, \gamma \in \{0, 1\}$  und  $\beta \in \{0, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$ . Zunächst wird  $n > 8k$  vorausgesetzt. Daher sind die Kreise  $SC_i$  mit  $i = 0, \dots, n-1$  die einzigen Kreise der Länge acht im Graphen  $P(n, k)$ . Außerdem beschreibt  $\mathcal{P}$  weiterhin eine maximale Kreispackung im  $P(n, k)$ .

Es sei  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  der Untergraph von  $P(n, k)$ , welcher durch die Knotenmenge  $\tilde{V} = \{v_0, \dots, v_{2jk-1}, u_0, \dots, u_{2jk-1}\}$  induziert wird. Zudem sei  $R$  der so genannte Restgraph von  $P(n, k)$ , welcher durch die Knotenmenge  $V \setminus \tilde{V}$  induziert wird, sofern diese nicht leer ist. Der Untergraph  $\tilde{G}$  und der Restgraph  $R$  sind in der Abbildung 4.13 veranschaulicht.

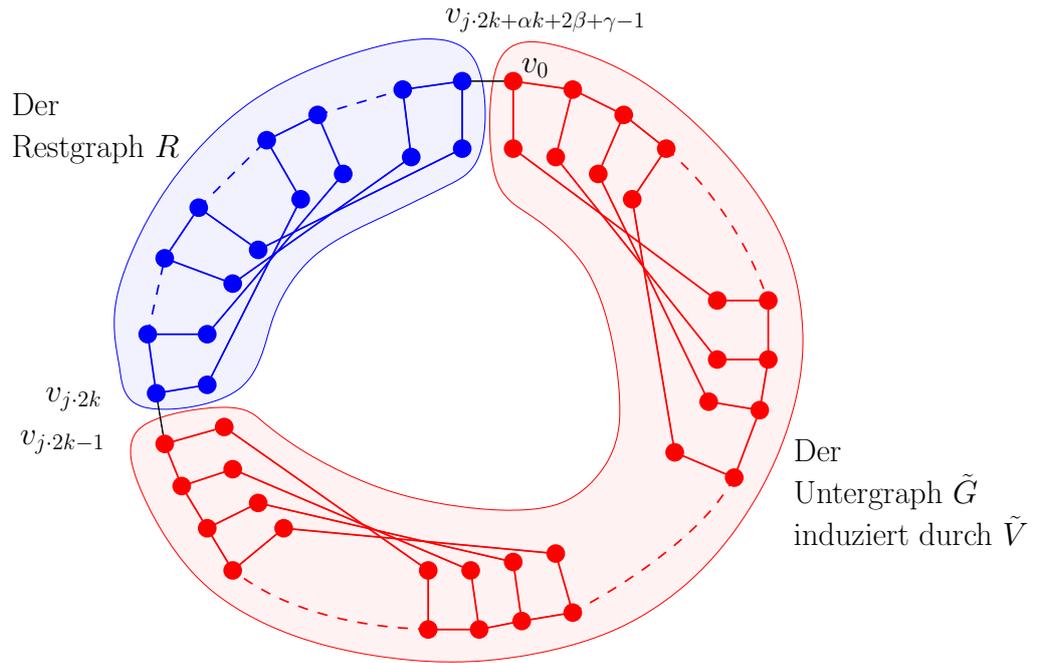


Abbildung 4.13: Eine Veranschaulichung des Untergraphen  $\tilde{G}$  und des Restgraphen  $R$

Für eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  sei

$$\mathcal{C}(\mathcal{P}) := \{C \in \mathcal{P} \mid V_{out}^C \cap \{v_0, \dots, v_{2jk-1}\} \neq \emptyset\}$$

die Menge aller Kreise aus  $\mathcal{P}$ , deren Knotenmenge mindestens einen Außenknoten des Untergraphen  $\tilde{G}$  enthält. Aus dem Beweis von Lemma 4.13 (i) (Seite 112), der ersten unteren Schranke für  $\nu(P(n, k))$ , ist eine Kreispackung für  $\tilde{G}$  bekannt. Die dort konstruierte Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}$  besteht aus  $\frac{jk}{2}$  Kreisen der Länge acht und ist für  $\tilde{G}$  maximal. Um diese Tatsache für die weitere Beweisführung zu nutzen, unterscheidet man zwei Fälle:

Fall I: Es existiert eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  für die gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| \leq \frac{jk}{2}$

Fall II: Für alle maximalen Kreispackungen  $\mathcal{P}$  gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$

Für die beiden Fälle wird nachfolgend separat gezeigt, dass Vermutung 1 für bestimmte Werte der Parameter  $n$  und  $k$  richtig ist. Der Übersichtlichkeit halber sei

$$\mu_8(\mathcal{P}) := |\{C \in \mathcal{P} \mid d(C) = 8\}|$$

die Anzahl von Kreisen der Länge acht in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  und

$$\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}) := |\{C \in \mathcal{P} \mid d(C) = k + 3, |V_{in}^C| = 2\}|,$$

die Anzahl von Kreisen der Länge  $k + 3$  und genau zwei Innenknoten in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$ .

### Fall I: Es existiert eine maximale Kreispackung $\mathcal{P}$ im Graphen

$$P(n, k) \text{ für die gilt } |\mathcal{C}(\mathcal{P})| \leq \frac{jk}{2}$$

Der nachfolgende Satz sagt aus, dass im Fall I Vermutung 1 bereits für  $n \geq k^2 + 34k$  korrekt ist. Im Beweis wird eine neue maximale Kreispackung  $\mathcal{P}_{neu}$  konstruiert. Dies geschieht auf Basis einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$ , für die gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| \leq \frac{jk}{2}$ , und unter Ausnutzung der Kenntnis der maximalen Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}$  von  $\tilde{G}$ . Für  $\mathcal{P}_{neu}$  wird für den Fall  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) \geq 1$  gezeigt, dass  $\mu_8(\mathcal{P}_{neu}) + \mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) = \nu(P(n, k))$  und  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) \leq 1$  gilt. Im Fall  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) = 0$  wird durch die Substitution einiger geeigneter Kreise durch Kreise der Länge acht eine weitere maximale Kreispackung  $\bar{\mathcal{P}}_{neu}$  erzeugt, für welche  $\mu_8(\bar{\mathcal{P}}_{neu}) = \nu(P(n, k))$  und  $\mu_{(k+3)}(\bar{\mathcal{P}}_{neu}) = 0$  gilt. Damit wäre Vermutung 1 für diese Situation bewiesen.

#### Satz 4.26:

Sei  $n \geq k^2 + 34k$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$  mit  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| \leq \frac{jk}{2}$ . Dann gibt es eine maximale Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$  von  $P(n, k)$  für die gilt

$$\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) + \mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k)) \text{ und } \mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) \leq 1.$$

#### Beweis:

Man konstruiere zunächst eine neue maximale Kreispackung  $\mathcal{P}_{neu}$ , indem alle Kreise aus  $\mathcal{C}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$  durch die  $\frac{jk}{2}$  Kreise in  $\tilde{\mathcal{P}}$  ersetzt werden. Das heißt

$$\mathcal{P}_{neu} := \underbrace{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{C}(\mathcal{P}))}_{=: \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})} \cup \tilde{\mathcal{P}}.$$

Betrachte nun die Kreispackung  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \setminus \mathcal{C}(\mathcal{P})$ . Für alle Kreise  $C \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  gilt

$$V_{out}^C \cap \{v_0, \dots, v_{2jk-1}\} = \emptyset.$$

Falls  $r \leq k$  gilt, so folgt  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) = \emptyset$ , da jeder Kreis in  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  mindestens eine Innenkante von  $R$  enthalten muss. Folglich hat  $R$  mindestens  $k + 1$  Innenknoten. Wenn  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) = \emptyset$ , kann man schließen, dass  $\nu(P(n, k)) = \frac{jk}{2}$ . Dann ist  $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{neu}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$  mit  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$  ist. Damit gilt in diesem Fall die Behauptung.

Falls  $r \geq k + 1$ , so gilt  $\alpha = 1$  und  $\gamma + \beta \geq 1$ . Unterscheide zwei Fälle:

Fall 1: Man nehme an, dass  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) \geq 1$ . Dies bedeutet, es gibt einen Kreis  $\bar{C} \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  mit  $d(\bar{C}) = k + 3$  und  $|V_{in}^{\bar{C}}| = 2$ . Wegen Lemma 4.22 (Seite 125) gilt in diesem Fall  $r \leq k + 3$  oder  $r = k + 5$ .

- a) Sei  $r \leq k + 3$ , so gilt  $|V_{out} \setminus (V_{out}^{\bar{C}} \cup V_{out}^{\hat{\mathcal{P}}})| \leq 2$  und damit  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) = \{\bar{C}\}$  und  $\nu(P(n, k)) = \frac{jk}{2} + 1$ . Somit ist  $\mathcal{P}_{neu}$  eine maximale Kreispackung mit  $\mu_8(\mathcal{P}_{neu}) = \nu(P(n, k)) - 1$  und  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) = 1$ .
- b) Sei  $r = k + 5$ , so gilt  $|V_{out} \setminus (V_{out}^{\bar{C}} \cup V_{out}^{\hat{\mathcal{P}}})| = 4$ . Es ergibt sich  $|\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})| \leq 2$ . Man nehme an, dass es  $\tilde{C} \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  gibt mit  $\tilde{C} \neq \bar{C}$ . Für den Kreis  $\tilde{C}$  gilt, auf Grund der  $k + 1$  Außenknoten von  $\bar{C}$ , dass  $|E_{in}^{\tilde{C}}| \geq 2$ . Sei  $j$  der kleinste Index der Menge der Innenknoten  $V_{in}^{\tilde{C}}$  von  $\tilde{C}$ , dann enthält  $E_{in}^{\tilde{C}}$ , wegen der Außenknoten von  $\bar{C}$ , die Kanten  $(u_j, u_{j+k})$  und  $(u_{j+k}, u_{j+2k})$ . Da  $E_{in}^{\tilde{C}} \subseteq E_{in}^{\bar{C}(\mathcal{P})}$ , ist dies ein Widerspruch zu  $r = k + 5$ . Somit gilt  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) = \{\bar{C}\}$  und  $\nu(P(n, k)) = \frac{jk}{2} + 1$ . Es folgt, dass  $\mathcal{P}_{neu}$  eine maximale Kreispackung mit  $\mu_8(\mathcal{P}_{neu}) = \nu(P(n, k)) - 1$  und  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) = 1$  ist.

Es ergibt sich somit für den Fall 1, dass  $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{neu}$  eine maximale Kreispackung mit  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k)) - 1$  und  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = 1$  ist. Damit ist für diesen Fall die Behauptung bewiesen.

Fall 2: Man nehme an, dass  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) = 0$ . Daraus folgt, dass die Menge von Außenknoten  $V_{out}^{\hat{C}}$  eines beliebigen Kreises  $\hat{C} \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  mindestens zwei knotendisjunkte Zusammenhangskomponenten induziert. Zudem gilt für  $\hat{C}$ : Falls  $v_i \in V_{out}^{\hat{C}}$  und  $u_i \notin V_{in}^{\hat{C}}$ , folgt

$$u_i \notin V_{in}^{\bar{C}(\mathcal{P})},$$

da andernfalls  $(u_{[i-k]}, u_i), (u_i, u_{[i+k]}) \in E_{in}^{\hat{C}} \subseteq E_{in}^{\bar{C}(\mathcal{P})}$  wären und folglich  $r \geq 2k + 1$  gelten müsste. Dies wäre ein Widerspruch zu  $r \leq 2k - 1$ . Als Konsequenz ergibt sich

$$u_i \notin V_{in}^{\mathcal{P}_{neu}},$$

weil für einen Kreis  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  mit  $u_i \in V_{in}^{\tilde{C}}$  gilt, dass  $\tilde{C} \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$ . Dieser Kreis wurde in  $\mathcal{P}_{neu}$  substituiert.

Sei  $q$  der kleinste Index von  $V(\hat{C})$ . Dann gilt  $v_q, v_{[q+1]}, u_q, u_{[q+k]} \in V(\hat{C})$ . Zudem muss  $v_{[q+k]} \in V(\hat{C})$  gelten, da  $\hat{C} \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ . Es werden wieder zwei Fälle unterschieden:

- (a)  $u_{[q+1]} \in V(\hat{C})$ : Es folgt, dass  $u_{[q+k+1]}, v_{[q+k+1]} \in V(\hat{C})$ . Der Kreis  $\hat{C}$  ist entweder ein Kreis der Länge acht oder kann durch den Kreis  $SC_q$  substituiert werden.

(b)  $u_{[q+1]} \notin V(\hat{C})$ : Wie zuvor, gilt dann  $u_{[q+1]} \notin V_{in}^{\mathcal{P}_{neu}}$ . Man unterscheide:

- Falls  $v_{[q+k+1]} \in V(\hat{C})$ , gilt ebenso  $u_{[q+k+1]} \notin V_{in}^{\mathcal{P}_{neu}}$  und der Kreis  $\hat{C}$  kann durch den Kreis  $SC_q$  substituiert werden.
- Im Fall  $v_{[q+k+1]} \notin V(\hat{C})$ , gilt  $v_{[q+k+1]} \notin V(\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}))$  und  $u_{[q+k+1]} \notin V(\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}))$ . Dann kann der Kreis  $\hat{C}$  ebenfalls durch den Kreis  $SC_q$  substituiert werden.

Zusammenfassend ergibt sich im Fall 2, dass alle Kreise  $C \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  durch Kreise der Länge acht substituierbar sind. Damit gilt  $|\{C \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})\}| = \beta$  und  $\nu(P(n, k)) = \frac{jk}{2} + \beta$ . Man konstruiere  $\hat{\mathcal{P}}$  indem in  $\mathcal{P}_{neu}$  alle Kreise aus  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  durch Kreise der Länge acht substituiert werden. Damit ergibt sich, dass  $\hat{\mathcal{P}}$  eine maximale Kreispackung mit  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$  und  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = 0$  ist.

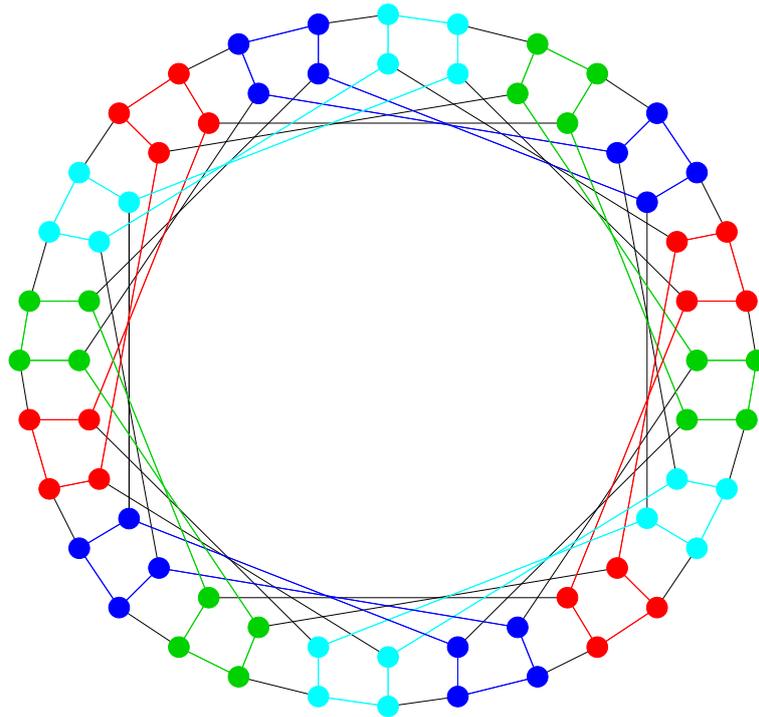
Im Fall 1 hat die Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{neu}$  die Eigenschaften  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k)) - 1$  und  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = 1$ . Im Fall 2 wird durch die Substitution aller Kreise in  $\mathcal{P}_{neu}$  durch Kreise der Länge acht eine Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$  mit  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$  und  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = 0$  erzeugt. In beiden Fällen gilt  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) + \mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$  und  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) \leq 1$ . Damit gibt es in beiden Fällen eine Kreispackung mit den geforderten Eigenschaften und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

Für den Fall I ist nachgewiesen, dass Vermutung 1 richtig ist. In diesem Fall gibt es für  $P(n, k)$  mit  $n \geq k^2 + 34k$  immer eine maximale Kreispackung, welche ausschließlich aus Kreisen  $SC_i$  der Länge acht und höchstens einem Kreis der Länge  $k + 3$  mit genau zwei Innenknoten besteht. Nachfolgend wird der Fall II betrachtet.

**Fall II: Für alle maximalen Kreispackungen  $\mathcal{P}$  im Graphen  $P(n, k)$  gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$**

Für den Fall II wird vorausgesetzt, dass für alle maximalen Kreispackungen  $\mathcal{P}$  in  $P(n, k)$  gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$ . Zunächst soll an einem kleinen Beispiel (für den  $P(32, 6)$ ) eine solche Situation veranschaulicht werden. In Abbildung 4.14 ist der  $P(32, 6)$  mit einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  mit vier Kreisen farbig dargestellt.

Man kann zeigen, dass eine maximale Kreispackung im  $P(32, 6)$  (bis auf Isomorphie) eindeutig ist. Dazu beweist man zunächst folgende Aussagen.

Abbildung 4.14: Eine maximale Kreispackung im  $P(32, 6)$ **Lemma 4.27:**

1.) Es gilt

$$(a) \{C \subset P(32, 6) \mid |V_{out}^C| = \varrho \text{ und } d(C) \leq 8\} = \emptyset \text{ f\"ur alle } \varrho \in \{0, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

$$(b) \{C \subset P(32, 6) \mid |V_{out}^C| = 1 \text{ oder } |V_{in}^C| = 1\} = \emptyset$$

$$(c) \{C \subset P(32, 6) \mid |V_{out}^C| = 4 \text{ und } d(C) \leq 8\} = \{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$$

2.) Sei  $C \subset P(32, 6)$  ein Kreis, dann gilt

$$(a) d(C) \geq 8$$

$$(b) d(C) = 8 \Leftrightarrow C \in \{SC_i \mid i = 0, \dots, 31\}$$

3.)  $\text{girth}(P(32, 6)) = 8$ .**Beweis:**

Der Beweis der Aussagen 1.) (a)-(c) erfolgt analog zu den Beweisen von Lemma 4.10. Die Aussagen 2.) (a) und (b) werden analog zu den Beweisen von Korollar 4.11 gezeigt. Der Beweis zu Aussage 3.) lässt sich analog zum Beweis von Proposition 4.12 führen.  $\square$

Mit Lemma 4.27 erhält man, dass jeder Kreis im Graphen  $P(32, 6)$  eine Mindestlänge von acht hat. Zudem folgt, dass im  $P(32, 6)$  Kreise der Länge acht existieren und ein Kreis der

Länge acht eindeutig der Menge  $\{SC_i \mid i = 0, \dots, 31\}$  zuzuordnen ist. Da die in Abbildung 4.14 dargestellte maximale Kreispackung ausschließlich aus Kreisen  $SC_i$  der Länge acht besteht, folgt, dass jede maximale Kreispackung vom  $P(32, 6)$  genau acht Kreise der Länge acht enthält. Da die Kreise der Länge acht eindeutig der Menge  $\{SC_i \mid i = 0, \dots, 31\}$  zugeordnet werden können, ist eine maximale Kreispackung vom  $P(32, 6)$  eine Teilmenge von  $\{SC_i \mid i = 0, \dots, 31\}$  der Mächtigkeit acht.

Konstruiert man eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  vom  $P(32, 6)$ , so kann man o. B. d. A. annehmen, dass  $SC_0 \in \mathcal{P}$  gilt. Damit folgt  $v_0, v_1 \in V(SC_0)$ . Für die Knoten  $v_2$  und  $v_3$  gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder gilt  $v_2, v_3 \in V(SC_{28})$  mit  $SC_{28} \in \mathcal{P}$  oder  $v_2, v_3 \in V(SC_2)$  mit  $SC_2 \in \mathcal{P}$ . Des Weiteren erhält man für die Knoten  $v_4$  und  $v_5$  entweder  $v_4, v_5 \in V(SC_4)$  mit  $SC_4 \in \mathcal{P}$  oder  $v_4, v_5 \in V(SC_{30})$  mit  $SC_{30} \in \mathcal{P}$ . Daraus ergeben sich zwei Konstruktionsmöglichkeiten für eine Kreispackung. Unter der Annahme  $SC_{28}, SC_0, SC_4 \in \mathcal{P}$  erhält man die maximale Kreispackung  $\mathcal{P} = \{SC_i \mid i \in \{0, \dots, 31\}; i \bmod 4 = 0\}$  (vgl. Abbildung 4.14). Die Annahme  $SC_0, SC_2, SC_4 \in \mathcal{P}$  impliziert ein Vorgehen, wie im Fall I, und ergibt einen Widerspruch. Man erhält die Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}} = \{SC_0, SC_2, SC_4, SC_{12}, SC_{14}, SC_{16}, SC_{24}\}$  mit sieben Kreisen (vgl. Abbildung 4.15). Da  $\nu(P(32, 6)) = 8$  gilt, ist diese Kreispackung nicht maximal.

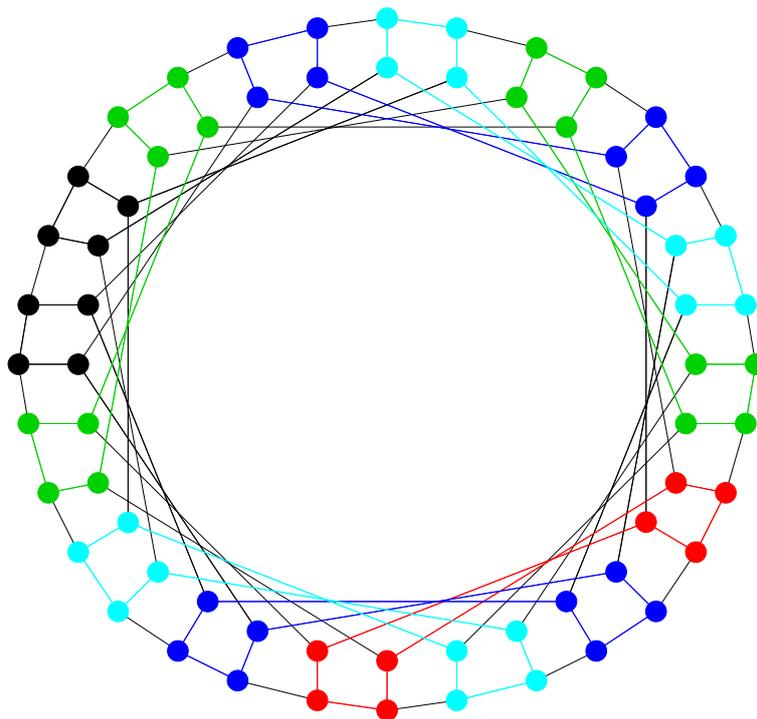


Abbildung 4.15: Eine Kreispackung im  $P(32, 6)$  mit sieben Kreisen

Folglich ist eine maximale Kreispackung vom  $P(32, 6)$  eindeutig (bis auf Isomorphie). Es gilt für jede maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$ , dass  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| = 7 = \frac{2 \cdot 6}{2} + 1 = \frac{jk}{2} + 1$  ist. Man

kann erkennen, dass die im Fall I verwendete Konstruktionsweise im  $P(32, 6)$  zu keiner maximalen Kreispackung führt. Betrachtet man aber erneut die maximale Kreispackung aus Abbildung 4.14, so sieht man, dass diese ausschließlich aus Kreisen der Länge acht besteht, was Vermutung 1 zumindest in dem kleinen Beispiel dennoch bestätigt. Im Beispiel gilt  $32 = n < 8k + 1 = 47$ . Fall II liegt allerdings auch bei  $n > 8k$  vor. Dies ist zum Beispiel für  $k = 6$  und  $n \bmod 4 = 0$  mit  $n > 48$  gegeben. Somit muss Vermutung 1 für den Fall II ebenfalls bewiesen werden.

Um die Gültigkeit von Vermutung 1 auch im Fall II nachzuweisen wird zunächst gezeigt, dass es in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  keinen Kreis der Länge  $k + 3$  mit genau zwei Innenknoten gibt und somit für alle maximalen Kreispackungen  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}) = 0$  gilt. Anschließend wird bewiesen, dass im Fall II außerdem immer eine maximale Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$  von  $P(n, k)$  existiert, welche ausschließlich aus Kreisen der Länge acht besteht. Für  $\hat{\mathcal{P}}$  gilt also  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$  und somit  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = 0$ . Damit folgt Vermutung 1 auch für den Fall II.

Im Fall II kann man die bisher beste angegebene untere Schranke  $\nu(P(n, k))$  (vgl. Lemma 4.17 Seite 116) weiter verschärfen. Es gilt in dieser speziellen Situation

$$\nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil) + 1.$$

Andernfalls wäre mit der im Beweis von Lemma 4.17 konstruierten Kreispackung zur bisher besten unteren Schranke von  $\nu(P(n, k))$  eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  gefunden. Für diese würde  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| = \frac{jk}{2}$  gelten und der Fall I läge vor.

Zunächst wird nun gezeigt, dass es in einer maximalen Kreispackung keinen Kreis der Länge  $k + 3$  mit genau zwei Innenknoten gibt. Dazu wird ein Widerspruchsbeweis geführt.

**Satz 4.28:**

Für  $n \geq k^2 + 34k$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung mit  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$ . Dann gilt

$$\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}) = 0$$

**Beweis:**

Es sei angenommen, dass  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}) \geq 1$ . Zudem sei  $C \in \mathcal{P}$  mit  $d(C) = k + 3$  und  $|V_{in}^C| = 2$ .

Betrachte  $\mathcal{P} \setminus C$ . Da jeder Kreis in  $\mathcal{P}$  mindestens vier Außenknoten hat, gilt

$$|\mathcal{P} \setminus C| \leq \left\lfloor \frac{n - (k + 1)}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2jk + r - (k + 1)}{4} \right\rfloor = \frac{jk}{2} + \left\lfloor \frac{r - (k + 1)}{4} \right\rfloor$$

und somit

$$|\mathcal{P}| \leq \frac{jk}{2} + \left\lfloor \frac{r - (k+1)}{4} \right\rfloor + 1$$

Wegen  $\nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lfloor \frac{\beta}{\beta+1} \right\rfloor) + 1$  und damit  $|P| \geq \frac{jk}{2} + 1$ , folgt weiterhin  $r \geq k + 1$ . Mit Lemma 4.22 resultiert dann entweder  $k + 1 \leq r \leq k + 3$  oder  $r = k + 5$ . Dies führt zur nachfolgenden Unterscheidung:

Fall 1: Es sei  $k + 1 \leq r \leq k + 3$ . In diesem Fall gilt  $\nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + 2$ , da entweder  $\alpha = \gamma = 1$  und  $\beta = 0$  oder  $\alpha = \beta = 1$  und  $\gamma \in \{0, 1\}$  gegeben ist. Daraus ergibt sich

$$|\mathcal{P}| \geq \frac{jk}{2} + 2$$

und wegen  $\left\lfloor \frac{r-(k+1)}{4} \right\rfloor = 0$  muss

$$\frac{jk}{2} + 1 \geq \frac{jk}{2} + 2$$

erfüllt sein. Dies ist ein Widerspruch. Das bedeutet, dass im Fall 1  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}) \leq 0$  ist.

Fall 2: Es sei  $r = k + 5$ , dann gilt  $\alpha = \gamma = 1$  und  $\beta = 2$  und somit

$$\nu(P(n, k)) \geq \frac{jk}{2} + \beta + 1 = \frac{jk}{2} + 3.$$

Folglich erhält man

$$|\mathcal{P}| \geq \frac{jk}{2} + 3.$$

In diesem Fall ist  $\left\lfloor \frac{r-(k+1)}{4} \right\rfloor = 1$  und es folgt

$$\frac{jk}{2} + 1 + 1 \geq |\mathcal{P}| \geq \frac{jk}{2} + 3.$$

Dies ist ebenfalls ein Widerspruch und es folgt, wie im Fall 1,  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}) \leq 0$ .

□

Es wurde gezeigt, dass für alle maximalen Kreispackungen  $\mathcal{P}$  im Fall II  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}) = 0$  gilt. Daher muss man, um Vermutung 1 zu beweisen, nun noch nachweisen, dass es in dieser Situation immer mindestens eine maximale Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$  im  $P(n, k)$  mit  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$  gibt.

Im Fall I wurde Vermutung 1 bewiesen, indem durch geeignete Substitutionen einiger Kreise eine entsprechende maximale Kreispackung angegeben wurde. Diese Idee, in einer gegebenen maximalen Kreispackung einzelne Kreise durch Kreise der Länge acht zu substituieren, soll nun auch im Fall II weiter verwendet werden. Die zentrale Frage in diesem Zusammenhang ist, unter welchen Bedingungen man einen Kreis durch einen geeigneten Kreis der Länge acht substituieren kann. Betrachtet man die Kreise  $SC_i$  der Länge acht einmal genauer, so stellt man fest, dass die Menge der Innenknoten  $V_{in}^{SC_i}$ , wie folgt, aussieht

$$V_{in}^{SC_i} = \{u_i, u_{[i+1]}, u_{[i+k]}, u_{[i+k+1]}\}$$

Durch die vier Innenknoten der Menge  $V_{in}^{SC_i}$  werden die beiden Innenkanten  $(u_i, u_{[i+k]})$ ,  $(u_{[i+1]}, u_{[i+k+1]}) \in E(SC_i)$  induziert.

Sei nun  $C$  ein Kreis in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  mit  $u_i, u_{[i+1]}, u_{[i+k]}, u_{[i+k+1]} \in V_{in}^C$ , so kann man  $C$  durch den Kreis  $SC_i$  substituieren, sofern

$$\{v_i, v_{[i+1]}, v_{[i+k]}, v_{[i+k+1]}\} \not\subset V(\mathcal{P}) \setminus V(C).$$

Das bedeutet, dass die zu den betrachteten Innenknoten adjazenten Außenknoten nicht durch andere Kreise der Kreispackung  $\mathcal{P}$  belegt sein dürfen. Es gilt folgender Sachverhalt.

**Lemma 4.29:**

Für  $n \geq 8k + 1$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung, für die gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$ . Für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$  existiere ein Index  $i$ , so dass  $u_i, u_{[i+1]}, u_{[i+k]}, u_{[i+k+1]} \in V_{in}^C$ . Dann gibt es eine maximale Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$  mit

$$\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k)).$$

**Beweis:**

Sei  $C \in \mathcal{P}$  ein Kreis mit  $u_i, u_{[i+1]}, u_{[i+k]}, u_{[i+k+1]} \in V_{in}^C$ . Dann kann  $C$  durch den Kreis  $SC_i$  substituiert werden. Da dies für jeden Kreis  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  gilt, folgt sofort die Behauptung.  $\square$

Im Allgemeinen kann nicht davon ausgegangen werden, dass es im Fall II stets  $\mathcal{P}$  gibt, für welche die Voraussetzung aus Lemma 4.29 erfüllt ist. Allerdings führt Lemma 4.29 zu der Frage, ob es möglich ist, für jeden Kreis einer maximalen Kreispackung eine Menge von vier speziellen geeigneten Innenknoten  $\{u_i, u_{[i+1]}, u_{[i+k]}, u_{[i+k+1]}\}$  zu bestimmen, so dass diese kantendisjunkte Kreise der Länge acht induzieren. Diese Frage wird im Rest des Kapitels positiv beantwortet und führt so auf den Nachweis der Gültigkeit von Vermutung 1 im Fall II. Dazu wird zunächst ein Spezialfall von Lemma 4.29 betrachtet, in dem eine zusätzliche Anforderung an den Index  $i$  gestellt wird. Anschließend wird für eine

gegebene maximale Kreispackung diejenige maximale Anzahl von Kreisen bestimmt, für die es möglich sein kann, dass sie die Voraussetzung aus Lemma 4.29 nicht erfüllen. Diese maximale Anzahl ergibt sich zum einen durch eine Mindestlänge, die diese Kreise haben müssen und zum anderen durch die im Fall II verschärfte untere Schranke für  $\nu(P(n, k))$ . Bevor die zentrale Frage beantwortet wird, wird vorab die Beweisidee an Hand von einigen Beispielen erläutert.

Um die besondere Situation aus Lemma 4.29 im Allgemeinen zu beschreiben, ist zunächst die Definition eines Ankerknotens notwendig.

Sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis für den gilt, dass ein Index  $i$  existiert, so dass  $v_i, u_i \in V(C)$  und  $u_j \notin V(C)$  für alle  $j \in \{[i - k], [i - k + 1], \dots, [i - 1]\}$ . Dann ist  $v_i$  der *Ankerknoten* von  $C$ .

Die Definition eines Ankerknotens wird in der folgenden Abbildung 4.16 veranschaulicht.

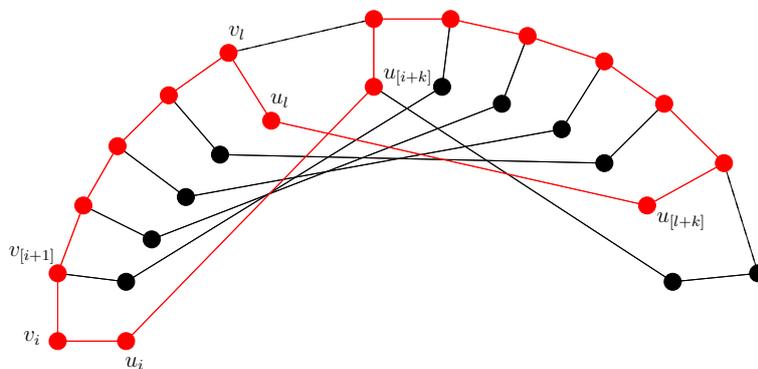


Abbildung 4.16: Ankerknoten  $v_i$  von dem rot markierten Kreis

In der Abbildung ist ein rot markierter Kreis zu sehen. Der Ankerknoten ist der Knoten  $v_i$ . Dieser ist in dem betrachteten Kreis der Außenknoten, welcher gegen den Uhrzeigersinn „am weitesten links“ liegt. Allgemein hat nicht jeder Kreis in  $P(n, k)$  einen Ankerknoten. Ein Beispiel dafür ist  $G_{out}$ .

Auf Grund der oberen Schranken für die Anzahl von Außen- bzw. Innenknoten eines Kreises einer maximalen Kreispackung (siehe Satz 4.23, S. 130) ergibt sich für  $n \geq 2k^2 + 16k$  folgendes Resultat.

**Lemma 4.30:**

Für  $n \geq \max\{k^2 + 34k, 2k^2 + 16k\}$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung, für die gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{nk}{2}$ . Dann hat jeder Kreis  $C \in \mathcal{P}$  einen Ankerknoten.

**Beweis:**

Sei  $C \in \mathcal{P}$  ein Kreis der maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  ohne Ankerknoten und  $\tau = ggT(n, k)$ ,

wie zuvor. Wegen Satz 4.23 gilt  $|V(C)| \leq 2k + 14$ . Ein Kreis ohne Ankerknoten hat aber mindestens  $\frac{n}{r} \geq \frac{n}{k}$  Knoten. Wegen  $n \geq 2k^2 + 16k$  folgt dann allerdings  $|V(C)| \geq \frac{n}{k} \geq \frac{2k^2+16k}{k} = 2k + 16$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

Mit Lemma 4.29 und Lemma 4.30 ergibt sich sofort folgendes Ergebnis.

**Proposition 4.31:**

Für  $n \geq \max\{k^2 + 34k, 2k^2 + 16k\}$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung, für die gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{nk}{2}$ . Für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$  existiere ein Index  $i$ , so dass  $v_i$  der Ankerknoten von  $C$  ist und  $u_i, u_{[i+1]}, u_{[i+k]}, u_{[i+k+1]} \in V_{in}^C$ . Dann gibt es eine maximale Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$  mit

$$\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k)).$$

**Beweis:**

Der Beweis erfolgt analog zu Lemma 4.29.  $\square$

In Proposition 4.31 wird ein Kreis  $C$  mit dem Ankerknoten  $v_i$  durch den Kreis  $SC_i$  substituiert. Man sagt, der Kreis  $C$  wird an seinem Ankerknoten durch einen Kreis der Länge acht substituiert. Wenn nachfolgend bei einer Kreissubstitution ein Kreis an seinem Ankerknoten durch einen Kreis der Länge acht substituiert wird, schreibt man verkürzt:  $C$  wird an seinem Ankerknoten substituiert.

Existiert keine maximale Kreispackung im  $P(n, k)$ , so dass die Voraussetzungen in Proposition 4.31 erfüllt sind, bedeutet dies, dass in jeder maximalen Kreispackung mindestens ein Kreis  $C$  existiert, für den gilt:

Wenn  $v_i$  der Ankerknoten von  $C$  ist, dann folgt  $v_{[i+1]} \in V(C)$  und  $u_{[i+1]} \notin V(C)$ .

Das Ziel ist, auch derartige Kreise durch jeweils einen Kreis der Länge acht zu substituieren. Gelingt dies, würde man eine maximale Kreispackung erhalten, welche ausschließlich aus Kreisen der Länge acht besteht. Ein einfacher Fall, indem es möglich ist, einen solchen Kreis  $C$  ebenfalls an seinem Ankerknoten  $v_i$  zu substituieren ist:

$$u_{[i+1]}, u_{[i+1+k]}, v_{[i+1+k]} \notin V(\mathcal{P}).$$

Das bedeutet, dass die Knoten  $v_i, v_{[i+1]}, u_i$  und  $u_{[i+k]}$  durch den Kreis  $C$  belegt sind, die Knoten  $u_{[i+1]}, u_{[i+1+k]}$  und  $v_{[i+1+k]}$  frei sind und der Knoten  $v_{[i+k]}$  frei oder durch  $C$  belegt ist. In diesem Fall kann  $C$  ebenfalls an seinem Ankerknoten substituiert werden.

Da man in einer beliebigen maximalen Kreispackung im Allgemeinen nicht weiß, welche Knoten zu welchem Kreis gehören, bzw. welche Knoten frei sind, ist eine

solche Substitution nicht „einfach“ möglich. Man kann allerdings an der Stelle einzelner Kreise eine Menge von Kreisen in einem Schritt durch eine Menge von Kreisen  $\{SC_i \mid i \in I \subset \{0, \dots, n-1\}\}$  zulässig substituieren. Dies wird im Folgenden erläutert und bewiesen, dass ein solches Vorgehen möglich ist. Zunächst soll dazu eine Aussage über die maximale Anzahl von Kreisen  $\{C \in \mathcal{P} \mid v_i \text{ ist Ankerknoten von } C, u_{[i+1]} \notin V(C)\}$  in  $\mathcal{P}$  gemacht werden. Für derartige Kreise ist  $d(C) \geq 9$  bekannt, da sie nicht in der Menge  $\{SC_i \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\}$  enthalten sind. Im Fall  $k = 6$  hat ein Kreis mit  $k+1 = 7$  Außen- und genau 2 Innenknoten die Länge neun. Andere Kreise der Länge neun gibt es im  $P(n, 6)$  mit  $n > 8 \cdot 6$  nicht. Im Fall  $k \geq 8$  mit  $n > 8k$  gibt es keine Kreise der Länge neun. Somit hat man für  $k = 6$  und  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}) = 0$  oder  $k \geq 8$  sogar  $d(C) \geq 10$  gegeben. Sei nun für eine beliebige maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  die Menge  $M(\mathcal{P})$  definiert:

$$M(\mathcal{P}) := \{C \in \mathcal{P} \mid d(C) \geq 9\}.$$

Die Menge  $M(\mathcal{P})$  enthält alle Kreise von  $\mathcal{P}$  mit einer Mindestlänge von neun. Die Anzahl der Kreise in  $M(\mathcal{P})$  sei

$$\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) := |M(\mathcal{P})|.$$

Dann gilt folgendes Lemma:

**Lemma 4.32:**

Für  $n \geq 9k + 1$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung, für die gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$ . Dann folgt mit  $r = \alpha k + 2\beta + \gamma$

$$\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) \leq r - 4.$$

**Beweis:**

Da  $\mathcal{P}$  maximal ist, folgt wegen Lemma 4.28, dass  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}) = 0$ . Damit gilt  $d(C) \geq 10$  für alle  $C \in M(\mathcal{P})$ . Somit muss gelten

$$\begin{aligned} (2n - 10\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}))/8 + \mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) &\geq |\mathcal{P}| \geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil) + 1 \\ &\Leftrightarrow \\ (2(2jk + \alpha k + 2\beta + \gamma) - 10\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}))/8 + \mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) &\geq \frac{jk}{2} + \alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil) + 1 \\ &\Leftrightarrow \\ 4jk + 2\alpha k + 4\beta + 2\gamma - 10\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) + 8\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) &\geq 4jk + 8\alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil) + 8 \\ &\Leftrightarrow \\ 2\alpha k + 4\beta + 2\gamma - 2\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) &\geq 8\alpha(\beta + \gamma - \gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta+1} \right\rceil) + 8 \end{aligned}$$

Man unterschiebe nach  $\alpha$ :

1.) Sei  $\alpha = 0$ , so gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{4\beta + 2\gamma - 8}_{=2r} &\geq 2\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) \\ &\Leftrightarrow \\ r - 4 &\geq \mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

2.) Sei  $\alpha = 1$ , so gilt

$$\begin{aligned} 2k + 4\beta + 2\gamma - 2\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) &\geq 8\beta + 8\gamma - 8\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil + 8 \\ &\Leftrightarrow \\ 2k + 4\beta + 2\gamma - 8\beta - 8\gamma + 8\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil - 8 &\geq 2\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) \\ &\Leftrightarrow \\ 2k - 4\beta - 6\gamma + 8\gamma \left\lceil \frac{\beta}{\beta + 1} \right\rceil - 8 &\geq 2\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

Es werden für  $\beta$  zwei Fälle unterschieden:

(a) Sei  $\beta = 0$ , so muss folgen

$$\begin{aligned} \underbrace{2k - 6\gamma - 8}_{=2r - 8\gamma} &\geq 2\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) \\ &\Leftrightarrow \\ r - 4\gamma - 4 &\geq \mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

(b) Sei  $\beta \geq 1$ , so folgt

$$\begin{aligned} 2k - 4\beta - 6\gamma + 8\gamma - 8 &\geq 2\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) \\ &\Leftrightarrow \\ \underbrace{2k - 4\beta + 2\gamma - 8}_{=2r - 8\beta} &\geq 2\mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) \\ &\Leftrightarrow \\ r - 4\beta - 4 &\geq \mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

□

Man kann also höchstens  $r - 4$  Kreise nicht, im Sinne von Proposition 4.31, an ihrem Ankerknoten substituieren. Möchte man dennoch eine derartige Substitution durchführen, muss man für jeden dieser Kreise eine geeignete Menge von vier Knoten bestimmen, mit denen man anschließend den entsprechenden Kreis durch einen Kreis der Länge acht substituieren kann. Sei  $C$  ein Kreis, den man nicht, im Sinne von Proposition 4.31, substituieren kann. Dann gilt für  $C$ , dass es einen Index  $i$  gibt, so dass  $v_i$  der Ankerknoten von  $C$  ist und  $u_{[i+1]} \notin V(C)$  ist. Außerdem gilt  $u_i, u_{[i+k]}, v_{[i+1]} \in V(C)$ . Dies ist in Abbildung 4.17 noch einmal graphisch veranschaulicht. Der Kreis  $C$  ist dabei rot markiert.

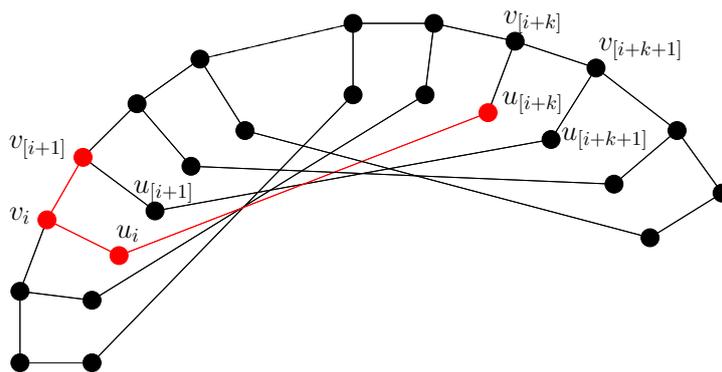


Abbildung 4.17: Ein Untergraph eines Kreises  $C \in \mathcal{P}$  mit dem Ankerknoten  $v_i$

Die Menge  $M(\mathcal{P})$  enthält alle Kreise aus  $\mathcal{P}$ , welche eine Länge von mindestens zehn haben. Das bedeutet, dass  $M(\mathcal{P})$  im Allgemeinen auch Kreise enthalten kann, die, im Sinne von Proposition 4.31, an ihrem Ankerknoten substituiert werden können. Für eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  sei daher  $B(\mathcal{P}) \subseteq M(\mathcal{P})$  die Menge der Kreise, welche sich nicht, im Sinne von Proposition 4.31, an ihrem Ankerknoten substituieren lassen. Die Menge  $B(\mathcal{P})$  ist definiert durch

$$B(\mathcal{P}) := \{C \in \mathcal{P} \mid \exists i \text{ mit } v_i, u_i \in V(C) \text{ und}$$

$$v_i \text{ ist der Ankerknoten von } C, v_{[i+1]} \in V(C), u_{[i+1]} \notin V(C)\}.$$

Ist es nicht möglich, jeden Kreis in  $\mathcal{P}$  an seinem Ankerknoten zu substituieren und gilt  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}) = 0$  ( wie für den Fall II bereits bewiesen), so ergibt sich aus dem Vorherigen:

$$1 \leq |B(\mathcal{P})| \leq \mu_{(\geq 9)}(\mathcal{P}) \leq r - 4.$$

Im nächsten Schritt soll nun für Kreise aus der Menge  $B(\mathcal{P})$  eine Möglichkeit dargestellt werden, diese ebenfalls zu substituieren. Gelingt diese Substitution, so ist Vermutung 1 richtig. Somit lässt sich im Fall II jeder Kreis einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  durch

einen Kreis der Länge acht ersetzen. Der Beweis dazu ist sehr technisch. Um die Beweisidee zu veranschaulichen, wird daher das Vorgehen zunächst an Hand einiger überschaubarer Beispiele veranschaulicht.

Die Grundidee für den Beweis ist weiterhin, dass für alle Kreise in  $\mathcal{P}$  eine Menge von vier geeigneten Innenknoten der Form  $\{u_i, u_{[i+1]}, u_{[i+k]}, u_{[i+k+1]}\}$  bestimmt werden soll, so dass alle Kreise durch Kreise der Länge acht substituiert werden können. Dabei muss für die Substitution des entsprechenden Kreises  $C \in \mathcal{P}$  nicht zwingend gegeben sein, dass  $v_i$  der Ankerknoten des Kreises ist.

## Illustration der Substitution von Kreisen in $B(\mathcal{P})$

Es sind insgesamt sechs Fallunterscheidungen notwendig, um Vermutung 1 zu zeigen. Jeder dieser Fälle wird nachfolgend an Hand eines Beispiels illustriert. Im Fall II wurden bisher alle Kreise an ihrem Ankerknoten substituiert. Dies ist für die einzelnen Kreise aus  $B(\mathcal{P})$  nicht möglich. Wie zuvor erwähnt, kann man aber ebenfalls eine Menge von Kreisen in einem Schritt durch eine Menge von Kreisen der Länge acht substituieren. Um dies durchzuführen, ist es notwendig, zunächst die so genannte äußere Zusammenhangskomponente eines Kreises  $C \in \mathcal{P}$ , in welcher der Ankerknoten von  $C$  liegt, genauer zu beschreiben.

Für einen gegebenen Graphen  $P(n, k)$  sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit Ankerknoten  $v_i$ . Zudem sei  $C'$  der durch die Menge  $V_{out}^C \cap V_{out}$  induzierte Untergraph von  $C$  und  $Z_l$  eine Zusammenhangskomponente von  $C'$ . Dann bezeichnet man  $Z_l$  als *äußere Zusammenhangskomponente von  $C$* .

Wie zuvor bewiesen, existiert für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$  ein Index  $i$ , so dass  $v_i$  der Ankerknoten von  $C$  ist. Die äußere Zusammenhangskomponente von  $C$ , welche den Ankerknoten  $v_i$  von  $C$  enthält, entspricht einem Weg von  $v_i$  zu einem Knoten  $v_q \in V_{out}$ . Sie wird die *erste äußere Zusammenhangskomponente von  $C$*  genannt und mit  $L_1^C$  bezeichnet. Der relevante Untergraph von  $C \in B(\mathcal{P})$ , sowie die erste äußere Zusammenhangskomponente  $L_1^C$  sind in der folgenden Abbildung 4.18 für einen Beispielkreis  $C \in B(\mathcal{P})$  dargestellt.

Es ist nur ein Ausschnitt des Kreises  $C$  zu sehen. Welche weiteren Knoten oder Kanten der Kreis  $C$  belegt, ist nicht bekannt. Wie zuvor bereits erwähnt, wäre allerdings  $u_{[i+1]}, u_{[i+1+k]}, v_{[i+1+k]} \notin V(\mathcal{P})$  eine Möglichkeit, unter der man den Kreis  $C$  an seinem Ankerknoten durch den Kreis  $SC_i$  substituieren kann. In diesem Fall ist eine Substitution des Kreises  $C$  durch den in der nachfolgenden Abbildung 4.19 violett markierten Kreis  $SC_i$  möglich und liefert eine neue maximale Kreispackung  $\mathcal{P}'$ .

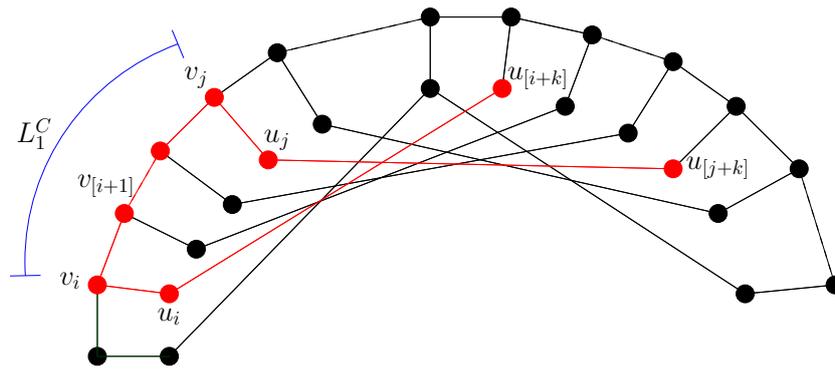


Abbildung 4.18: Ein Untergraph eines Kreises  $C \in B(\mathcal{P})$  mit dem Ankerknoten  $v_i$  und der ersten äußeren Zusammenhangskomponente  $L_1^C$

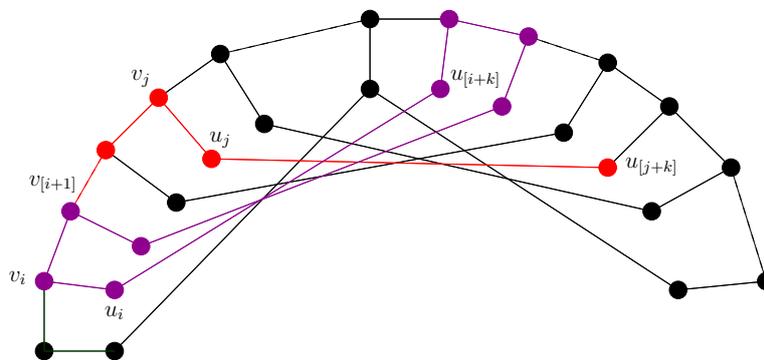


Abbildung 4.19: Substitution eines Kreises  $C \in B(\mathcal{P})$  an seinem Ankerknoten  $v_i$

Die neue Kreispackung ist maximal, da bei der Substitution für den violett markierten Kreis ausschließlich Knoten und Kanten genutzt wurden, welche entweder vorher durch den Kreis  $C$  belegt oder frei waren. Die übrigen in der Abbildung 4.19 rot markierten ursprünglichen Kanten von  $C$  sind nach der Substitution in der neuen Kreispackung nicht mehr belegt. Von einer solchen Situation kann generell aber nicht ausgegangen werden. Man betrachte daher das erste Beispiel:

**Beispiel 4.1:**

Es sei angenommen, dass der Innenknoten  $u_{[i+1]}$  nicht frei ist. Wegen  $u_{[i+1]} \notin V(C)$  gibt es  $\hat{C} \in \mathcal{P}$  mit  $u_{[i+1]} \in V(\hat{C}) \subseteq V(\mathcal{P})$  und der Knoten gehört zur Knotenmenge eines anderen Kreises  $\hat{C}$  der maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$ . Falls  $v_{[i+1-k]}$  der Ankerknoten von  $\hat{C}$  ist, kann man die Kreise  $C$  und  $\hat{C}$  nicht an ihren Ankerknoten durch die Kreise  $SC_i$  und  $SC_{[i+1-k]}$  substituieren. In dem Fall würden die Knoten  $v_{[i+1]}$  und  $u_{[i+1]}$  zur Substitution des Kreises  $\hat{C}$  benötigt. Dieses Problem lässt sich lösen, indem die beiden Kreise  $C$  und  $\hat{C}$  in einem Schritt durch zwei Kreise der Länge acht mit geeigneten Ankerknoten substituiert werden. Dabei erfolgt die Substitution nicht zwingend für beide Kreise an ihrem jeweiligen

Ankerknoten  $v_i$  bzw.  $v_{[i+1-k]}$ . Um das Vorgehen zu motivieren, sei angenommen, dass  $u_{[i+1]}, \dots, u_{[j-1]} \in V(\mathcal{P}) \setminus V(B(\mathcal{P}))$ . Das bedeutet, dass die betrachteten Innenknoten alle von Kreisen der maximalen Kreispackung belegt sind. Für jeden dieser Kreise  $C_l$  gilt, dass sein zugehöriger Ankerknoten  $v_l$ , sowie die Knoten  $u_l, v_{[l+1]}$  und  $u_{[l+1]}$  alle zu seiner Knotenmenge  $V(C_l)$  gehören. Die Situation ist in der nachfolgenden Abbildung 4.20 dargestellt. Für den rot markierten Kreis  $C$  gilt  $u_j = u_{[i+5]}$ . Zusätzlich sei vorausgesetzt, dass die Knoten  $v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}$  frei sind, bzw. zu dem rot, blau oder gelb markierten Kreis gehören.

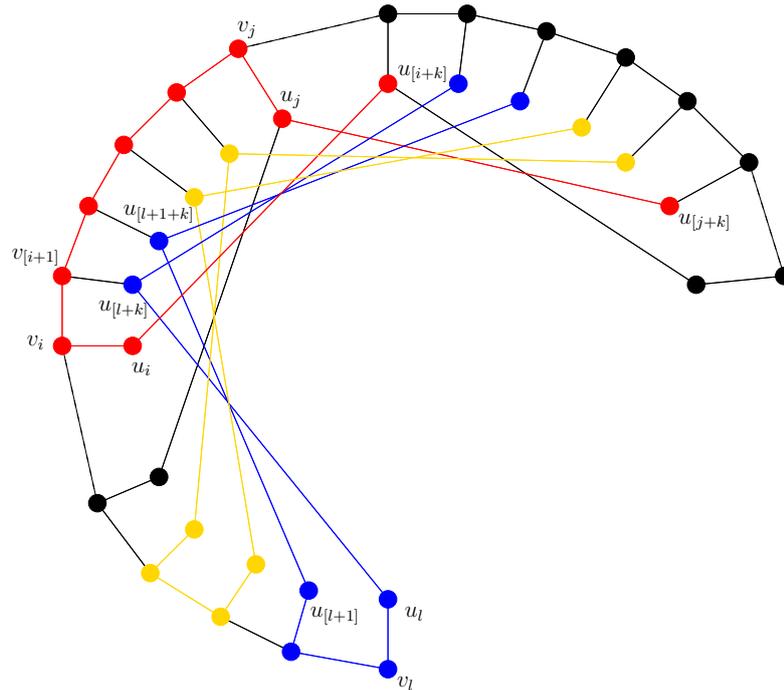


Abbildung 4.20: Ein Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  mit Ankerknoten  $v_i$  und zwei Kreisen  $C_l$  und  $C_{[l+2]}$

Wie man sieht, würde eine Substitution des rot markierten Kreises  $C$  an seinem Ankerknoten  $v_i$  sowohl Knoten als auch Kanten des blau markierten Kreises benötigen. Andererseits würde man durch die Substitution des gelb, bzw. blau markierten Kreises an seinem jeweiligen Ankerknoten  $v_l$  bzw.  $v_{[l+2]}$  Knoten des roten Kreises benötigen. In beiden Fällen würde eine neue Kreispackung erzeugt, welche nicht maximal ist. Daher sind diese Substitutionen nicht zulässig. Eine zulässige Substitution kann durchgeführt werden, wenn alle drei Kreise simultan und nicht sukzessive substituiert werden. In der folgenden Abbildung 4.21 ist dargestellt, wie die drei Kreise  $C$ ,  $C_l$  und  $C_{[l+2]}$  simultan durch die drei neuen Kreise  $SC_i$ ,  $SC_{[i+2]}$  und  $SC_{[i+4]}$  substituiert werden können.

Bei dieser simultanen Substitution wird der rot markierte Kreis  $C$  an seinem Ankerknoten  $v_i$  durch den violett markierten Kreis  $SC_i$  substituiert. Der blau markierte Kreis  $C_l$  wird

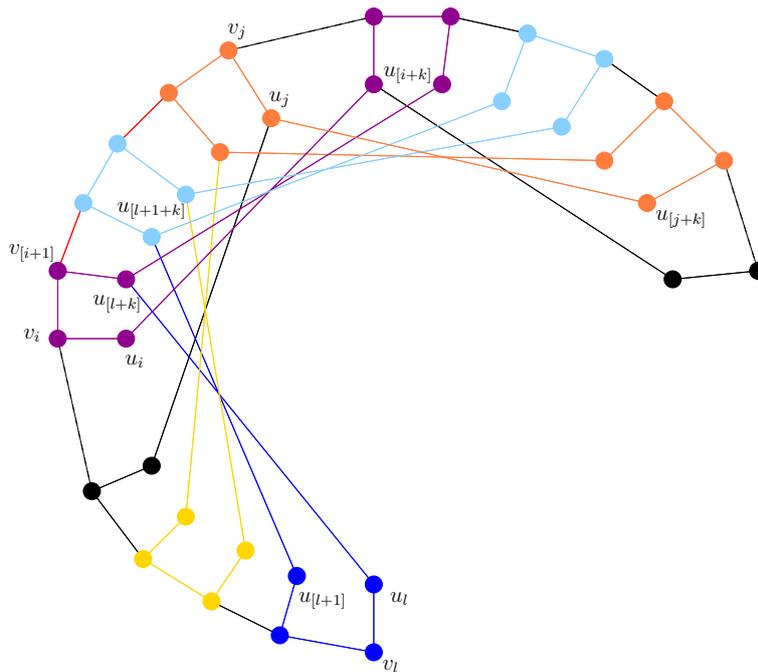


Abbildung 4.21: Simultane Substitution dreier Kreise I

durch den hellblau markierten Kreis  $SC_{[i+2]}$  und der gelb markierte Kreis  $C_{[l+2]}$  durch den orange farbig markierten Kreis  $SC_{[i+4]}$  substituiert. Es entsteht eine neue Kreispackung, welche maximal ist, da bei der Substitution wiederum ausschließlich Knoten und Kanten genutzt wurden, welche entweder vorher durch einen der Kreise  $C$ ,  $C_l$  und  $C_{[l+2]}$  belegt oder frei waren. Die übrigen in Abbildung 4.21 rot, blau oder gelb markierten ursprünglichen Kanten von  $C$ ,  $C_l$  und  $C_{[l+2]}$  sind nach der Substitution in der neuen Kreispackung wiederum nicht mehr belegt.

Für die in diesem Beispiel durchgeführte simultane Substitution der drei Kreise ist allerdings vorausgesetzt, dass die Knoten  $v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}$  ursprünglich in  $\mathcal{P}$  frei oder durch einen der drei Kreise  $C$ ,  $C_l$  und  $C_{[l+2]}$  belegt waren. Diese Situation wird generell nicht immer vorliegen.

Allgemeiner formuliert, gibt es die Möglichkeit, dass ein Kreis  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  existiert, so dass es gemeinsame Knoten in der Knotenmenge der ersten äußeren Zusammenhangskomponente  $L_1^{\tilde{C}}$  von  $V_{out}^{\tilde{C}}$  definiert durch den Ankerknoten von  $\tilde{C}$  und der Menge  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\}$  gibt, das bedeutet  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\} \cap V(L_1^{\tilde{C}}) \neq \emptyset$ . In diesem Fall liegt eine so genannte *Schachtelung des Kreises  $C$  mit dem Kreis  $\tilde{C}$*  vor. Es ist zu beachten, dass dies keiner Schachtelung des Kreises  $\tilde{C}$  mit dem Kreis  $C$  entspricht. Im Falle einer Schachtelung des Kreises  $C$  mit einem anderen Kreis aus  $\mathcal{P}$  sind zwei Fälle zu unterscheiden. Der erste Fall ist, dass mindestens einer der Knoten  $v_{[i+k+1]}, \dots, v_{[j+k-1]}$  ein Ankerknoten eines anderen Kreises

$\tilde{C} \in \mathcal{P} \setminus B(\mathcal{P})$  ist. Im zweiten Fall ist mindestens einer der Knoten  $v_{[i+k+1]}, \dots, v_{[j+k-1]}$  ein Knoten eines anderen Kreises  $\tilde{C} \in B(\mathcal{P})$ . Es wird sich herausstellen, dass im ersten Fall die Kreise direkt durch entsprechende Kreise  $SC_i$  zulässig substituiert werden können. Im zweiten Fall müssen, vor der Substitution, geeignete Knotenmengen identifiziert werden, die den Ankerknoten für eine zulässige Substitution enthalten. Da diese relevanten Knoten durch die Indizes bestimmt sind, geht es also darum, diese zu ermitteln. Die beiden Fälle  $\tilde{C} \in \mathcal{P} \setminus B(\mathcal{P})$  und  $\tilde{C} \in B(\mathcal{P})$  werden in den nachfolgenden Beispielen zur besseren Veranschaulichung getrennt behandelt, da sie ein unterschiedliches Vorgehen bei der Substitution der Kreise erfordern. Sie können aber im Allgemeinen zeitgleich auftreten. Im folgenden Beispiel wird der erste Fall betrachtet.

**Beispiel 4.2:**

Im ersten Fall  $\tilde{C} \in \mathcal{P} \setminus B(\mathcal{P})$  könnte beispielhaft folgende Situation vorliegen (vgl. Abb. 4.22).

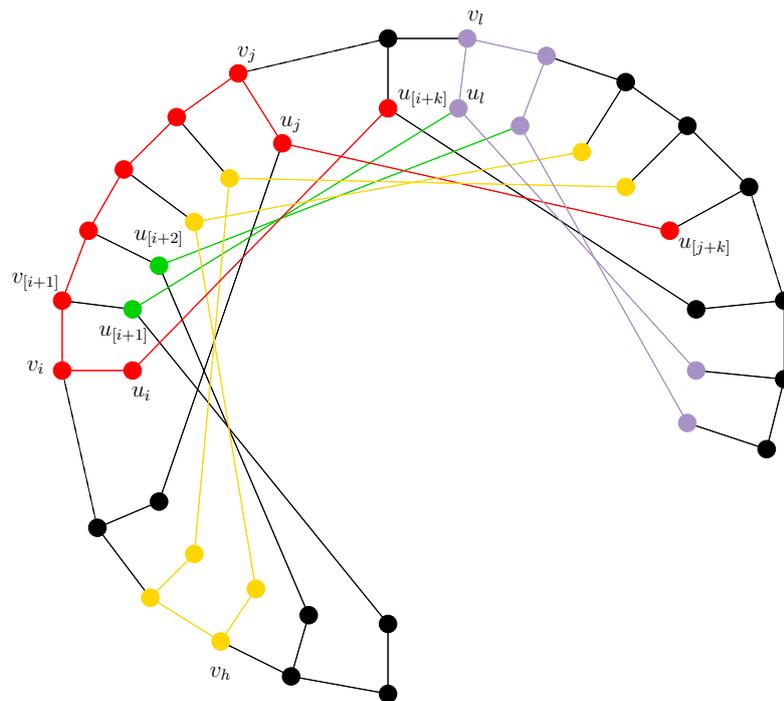


Abbildung 4.22: Ein Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  (rot) mit Ankerknoten  $v_i$  und zwei weiteren nicht sukzessive substituierbaren Kreisen  $\tilde{C}$  (lila) und  $C_h$  (gelb)

Man erkennt sofort, dass der Ankerknoten  $v_l$  des lila markierten Kreises  $\tilde{C}$  dem Knoten  $v_{[i+k+1]}$  entspricht. Es gilt also  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\} \cap V(L_1^{\tilde{C}}) = \{v_{[i+k+1]}, v_{[i+k+2]}\} \neq \emptyset$  und es liegt eine Schachtelung des rot markierten Kreises  $C$  mit dem Kreis  $\tilde{C}$  vor. Zudem ist festzustellen, dass die grün markierten Knoten  $u_{[i+1]}$  und  $u_{[i+2]}$  nicht in der Knotenmenge von  $\mathcal{P}$  enthalten sind, d.h.  $u_{[i+1]}, u_{[i+2]} \notin V(\mathcal{P})$ . Ebenso sind die grün markierten Kanten keine Kanten aus  $\mathcal{P}$ , d.h.  $(u_{[i+1]}, u_{[i+k+1]}), (u_{[i+2]}, u_{[i+k+2]}) \notin E(\mathcal{P})$ . In dieser Situation würde eine Substitution des Kreises  $C$  an seinem Ankerknoten sowohl Knoten als auch Kanten des Kreises  $\tilde{C}$  benötigen. Dies ist nicht zulässig. Die Substitution des gelb markierten Kreises  $C_h$  an seinem Ankerknoten führt ebenfalls zu einer nicht zulässigen Substitution. Substituiert man allerdings wiederum diese drei Kreise simultan, wie in Abbildung 4.23 dargestellt, so wird der Kreis  $C$  an seinem Ankerknoten durch den violett markierten Kreis  $SC_i$ , der Kreis  $\tilde{C}$  durch den rosa markierten Kreis  $SC_{[i+2]}$  und der Kreis  $C_h$  durch den orange markierten Kreis  $SC_{[i+4]}$  substituiert.

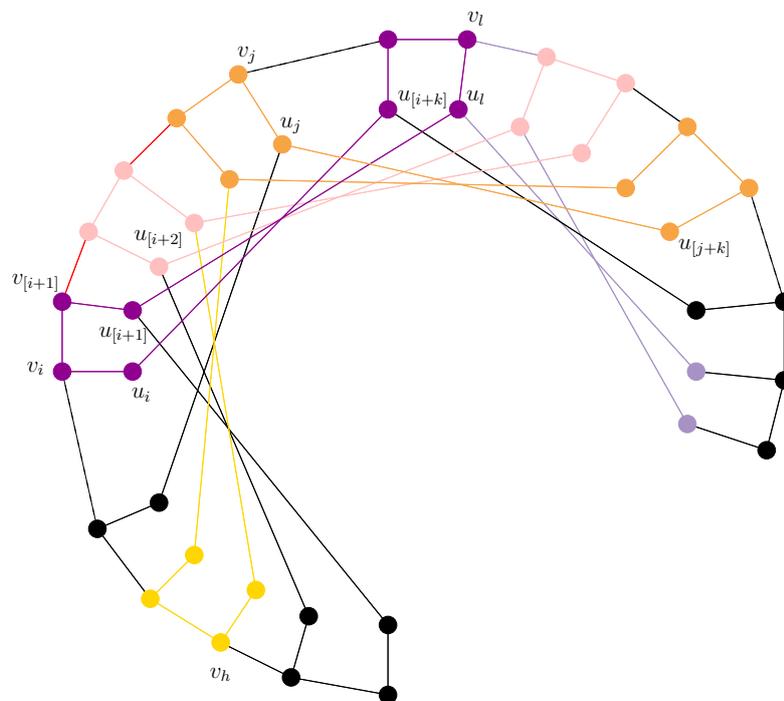


Abbildung 4.23: Simultane Substitution dreier Kreise II

Es entsteht eine neue Kreispackung. Diese ist maximal. Damit ist die Substitution zulässig, da dabei wiederum ausschließlich Knoten und Kanten genutzt wurden, welche entweder vorher durch einen der Kreise  $C$ ,  $\tilde{C}$  und  $C_h$  belegt oder frei waren. Die übrigen in der Abbildung 4.23 rot, lila oder gelb markierten ursprünglichen Kanten von  $C$ ,  $\tilde{C}$  und  $C_h$  sind nach der Substitution in der neuen Kreispackung wiederum nicht mehr belegt.

Sei nun der zweite Fall betrachtet, d.h.  $\tilde{C} \in B(\mathcal{P})$ . Es bezeichne  $v_l$  den Ankerknoten von  $\tilde{C}$  und  $\{v_l, \dots, v_h\} = V(L^{\tilde{C}_1})$  die Knotenmenge der ersten äußeren Zusammenhangskomponente von  $V_{out}^{\tilde{C}}$ . Der Kreis  $C$  ist mit dem Kreis  $\tilde{C}$  geschachtelt. Damit gilt  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\} \cap \{v_l, \dots, v_h\} \neq \emptyset$ . Es ergeben sich vier zu betrachtende Unterfälle.

Unterfall 1: Die Menge  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_h\}$  ist eine Teilmenge der Menge  $\{v_l, \dots, v_h\}$ .

Unterfall 2: Die Menge  $\{v_l, \dots, v_{[j+k]}\}$  ist eine Teilmenge der Menge  $\{v_l, \dots, v_h\}$ .

Unterfall 3: Die Menge  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\}$  ist eine Teilmenge von  $\{v_l, \dots, v_h\}$ .

Unterfall 4: Die Menge  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\}$  ist eine Teilmenge von  $\{v_l, \dots, v_h\}$ .

Diese vier Unterfälle, sowie zulässige Substitutionsmöglichkeiten, werden nun nachfolgend einzeln an Hand zweier geschachtelter Kreise beispielhaft dargestellt. In den folgenden vier Beispielen wird der Übersichtlichkeit halber angenommen, dass keine weitere Schachtelung der beiden betrachteten Kreise  $C$  und  $\tilde{C}$  mit anderen Kreisen aus  $B(\mathcal{P})$  vorliegt. Das bedeutet unter anderem auch, dass die vier Fälle separat betrachtet werden. Im Allgemeinen können der erste, der zweite und der vierte Fall zeitgleich in Kombination auftreten. Die graphische Veranschaulichung der betrachteten Beispielsituation erfolgt für jeden Unterfall an Hand einer Abbildung. In dieser ist untereinander zwei Mal der gleiche für die Situation relevante Untergraph des  $P(n, k)$  zu sehen. Im oberen Untergraphen ist die Ausgangssituation des Beispiels für den jeweiligen Fall abgebildet. Das bedeutet, dass jeweils in rot markiert der relevante Teil des Kreises  $C$  und in blau markiert der relevante Teil des Kreis  $\tilde{C}$  dargestellt ist. Zudem sind für beide Kreise die relevanten Knotenmengen von Außenknoten markiert. Für den Kreis  $C$  sind die beiden Knotenmengen gelb markiert, für den Kreis  $\tilde{C}$  hellblau. In dem zweiten unteren Graphen sind die neu identifizierten Knotenmengen von Außenknoten für beide Kreise, wiederum in den gleichen Farben, wie im ersten Graphen, farbig markiert. Dabei ist zu erkennen, dass die Anzahl der markierten Knoten im zweiten Graphen geringer ist, als im ersten Graphen. Im ersten Fall wird in einer dritten separaten Abbildung auf der Grundlage der neu identifizierten Knotenmengen eine mögliche zulässige Substitution dargestellt. In den Abbildungen bedeuten gestrichelte Kanten, wie zuvor, ein Fortsetzen des Graphen zwischen den entsprechenden Endknoten. Man betrachte zunächst den Unterfall 1.

### **Beispiel 4.3:**

Es gilt  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_h\} \subset \{v_l, \dots, v_h\}$ . In Abbildung 4.24 ist der Unterfall 1 beispielhaft an Hand der Kreise  $C$  (rot) und  $\tilde{C}$  (blau) dargestellt.

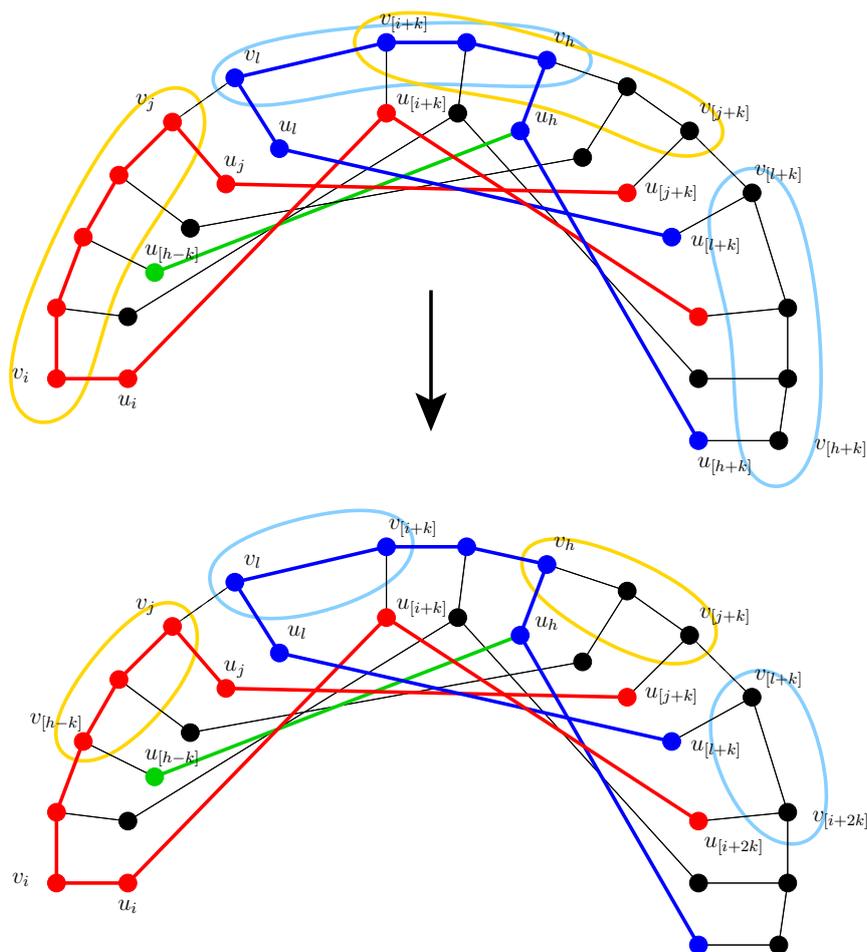


Abbildung 4.24: Fall 1

Die grün markierte Kante und der grün markierte Knoten sind beide durch die Kreise  $C$  und  $\tilde{C}$  blockiert und damit nicht in der Kantenmenge bzw. Knotenmenge von  $\mathcal{P}$  enthalten, d.h.  $(u_{[h-k]}, u_h) \notin E(\mathcal{P})$  und  $u_{[h-k]} \notin V(\mathcal{P})$ . Es ist zu erkennen, dass in beiden Graphen vier Knotenmengen farbig markiert sind. Im oberen Graphen werden die beiden gelb markierten Knotenmengen  $V(L_1^C) = \{v_i, \dots, v_j\}$  und  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\}$  zum Kreis  $C$ , die beiden hellblau markierten Knotenmengen  $V(L_1^{\tilde{C}}) = \{v_l, \dots, v_h\}$  und  $\{v_{[l+k]}, \dots, v_{[h+k]}\}$  zum Kreis  $\tilde{C}$  zugeordnet. Man sieht im oberen Graphen, dass offenbar eine Schachtelung von  $C$  mit  $\tilde{C}$  vorliegt, da die Schnittmenge  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\} \cap \{v_l, \dots, v_h\} = \{v_{[i+k]}, \dots, v_h\}$  ist. Die Idee ist nun, für beide Kreise neue Knotenmengen zu identifizieren, so dass keinerlei Überschneidung der Knotenmengen mehr vorliegt. In diesem Fall sind alle vier Knotenmengen disjunkt. Dazu werden für die Knoten mit dem kleinsten bzw. größten Index der neuen Mengen ausschließlich Knoten verwendet, bei denen die zugehörigen Innenknoten mit dem identischen Index durch  $V(C)$  oder  $V(\tilde{C})$  belegt oder blockiert, oder frei sind. Im unteren Graphen sind die neu identifizierten Knotenmengen wiederum farbig mar-

kiert. Die zwei neuen, zum Kreis  $C$  gehörenden, Knotenmengen sind  $\{v_{[h-k]}, \dots, v_j\}$  und  $\{v_{[h]}, \dots, v_{[j+k]}\}$ . Die zwei neuen, zum Kreis  $\tilde{C}$  gehörenden, Knotenmengen sind  $\{v_l, v_{[i+k]}\}$  und  $\{v_{[l+k]}, v_{[i+2k]}\}$ . Die vier Knotenmengen sind nun disjunkt. Man sagt: Die *Schachtelung* ist *aufgelöst*. In dem hier gegebenen Beispiel liegen keine weiteren Schachtelungen vor. Somit kann die Substitution, wie zuvor gezeigt, erfolgen. Dies ist in der nachfolgenden Abbildung 4.25 zu erkennen.

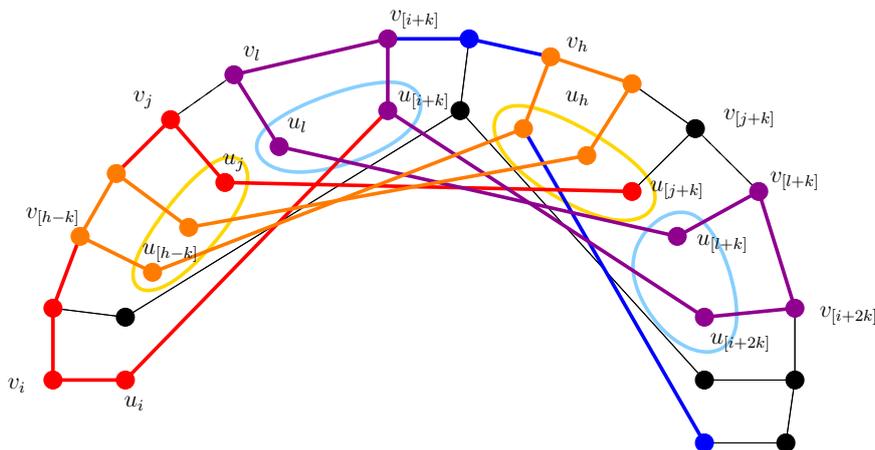


Abbildung 4.25: Die Substitution im ersten Fall

In diesem Beispiel wird der rot markierte Kreis  $C$  durch den orange markierten Kreis  $SC_{[h-k]}$  und der blau markierte Kreis  $\tilde{C}$  durch den violett markierten Kreis  $SC_l$  substituiert. Man sieht, dass der Kreis  $SC_{[h-k]}$  den Ankerknoten  $v_{[h-k]}$  hat, orientiert an der neu identifizierten Knotenmenge für  $C$ . Es entsteht, wie zuvor, eine neue Kreispackung. Diese ist maximal und die Substitution zulässig, da bei der Substitution wiederum ausschließlich Knoten und Kanten genutzt wurden, welche entweder vorher durch einen der Kreise  $C$  und  $\tilde{C}$  belegt oder frei waren. Die übrigen in der Abbildung 4.25 rot oder blau markierten ursprünglichen Kanten von  $C$  und  $\tilde{C}$  sind nach der Substitution in der neuen Kreispackung nicht mehr belegt. Im nachfolgenden Beispiel wird nun der Unterfall 2 betrachtet.

**Beispiel 4.4:**

Es gilt  $\{v_l, \dots, v_{[j+k]}\} \subset \{v_l, \dots, v_h\}$ . In Abbildung 4.26 ist der Unterfall 2 wiederum beispielhaft an Hand der Kreise  $C$  (rot) und  $\tilde{C}$  (blau) dargestellt.

Die grün markierte Kante und der grün markierte Knoten sind beide durch die Kreise  $C$  und  $\tilde{C}$  blockiert und damit nicht in der Kantenmenge bzw. Knotenmenge von  $\mathcal{P}$  enthalten, d.h.  $(u_{[l-k]}, u_l) \notin E(\mathcal{P})$  und  $u_{[l-k]} \notin V(\mathcal{P})$ . Im oberen Graphen werden, analog zum ersten Unterfall, die beiden gelb markierten Knotenmengen  $V(L_1^C) = \{v_i, \dots, v_j\}$  und

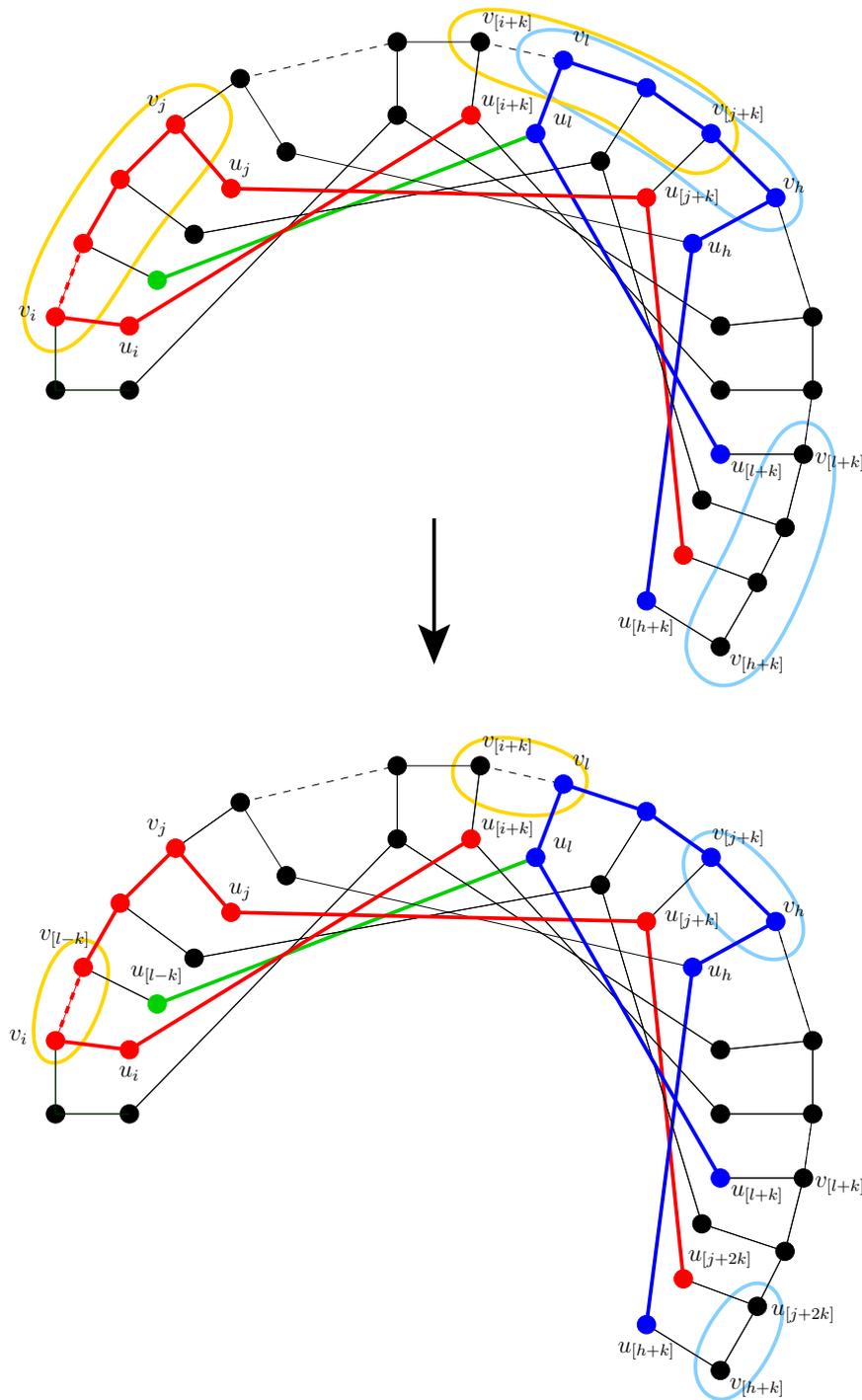


Abbildung 4.26: Fall 2

$\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\}$  zum Kreis  $C$ , die beiden hellblau markierten Knotenmengen  $V(L_1^{\tilde{C}}) = \{v_l, \dots, v_h\}$  und  $\{v_{[l+k]}, \dots, v_{[h+k]}\}$  zum Kreis  $\tilde{C}$  zugeordnet. Man sieht im oberen Graphen, dass eine Schachtelung von  $C$  mit  $\tilde{C}$  vorliegt, da die Schnittmenge der zwei Knotenmengen  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\} \cap \{v_l, \dots, v_h\} = \{v_l, \dots, v_{[j+k]}\}$  ist. Zur neuen Identifi-

zierung von Knotenmengen für die beiden Kreise  $C$  und  $\tilde{C}$  werden für die Knoten mit dem kleinsten bzw. größten Index der neuen Mengen wiederum ausschließlich Knoten verwendet, für welche die zugehörigen Innenknoten mit dem gleichen Index durch  $V(C)$  oder  $V(\tilde{C})$  belegt oder frei sind. Im unteren Graphen sind die neu identifizierten Knotenmengen, wie zuvor, farbig markiert. Die zwei neuen zum Kreis  $C$  gehörenden Knotenmengen sind  $\{v_i, \dots, v_{[l-k]}\}$  und  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_l\}$ . Die zwei neuen zum Kreis  $\tilde{C}$  gehörenden Knotenmengen sind  $\{v_{[j+k]}, v_h\}$  und  $\{v_{[j+2k]}, v_{[h+k]}\}$ . Die vier neuen Knotenmengen sind disjunkt und die Schachtelung ist aufgelöst. In dem hier gegebenen Beispiel liegen keine weiteren Schachtelungen vor. Die Substitution kann, analog zum Unterfall 1, erfolgen. Man betrachte nun den Unterfall 3.

**Beispiel 4.5:**

Es gilt  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\} \subset \{v_l, \dots, v_h\}$ . In Abbildung 4.27 ist der Unterfall 3 wiederum beispielhaft dargestellt.

Im oberen Graphen werden, analog zu den ersten beiden Unterfällen, die beiden gelb markierten Knotenmengen  $V(L_1^C) = \{v_i, \dots, v_j\}$  und  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\}$  zum Kreis  $C$ , die beiden hellblau markierten Knotenmengen  $V(L_1^{\tilde{C}}) = \{v_l, \dots, v_h\}$  und  $\{v_{[l+k]}, \dots, v_{[h+k]}\}$  zum Kreis  $\tilde{C}$  zugeordnet. Man sieht im oberen Graphen, dass eine Schachtelung von  $C$  mit  $\tilde{C}$  vorliegt, da die Schnittmenge der zwei Knotenmengen  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\} \cap \{v_l, \dots, v_h\} = \{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\}$  ist. Im unteren Graphen sind die neu identifizierten Knotenmengen, wie zuvor, farbig markiert. Die zwei neuen, zum Kreis  $C$  gehörenden, Knotenmengen sind  $\{v_l, \dots, v_{[i+k]}\}$  und  $\{v_{[l+k]}, \dots, v_{[i+2k]}\}$ . Die zwei neuen, zum Kreis  $\tilde{C}$  gehörenden, Knotenmengen sind  $\{v_{[j+k]}, \dots, v_h\}$  und  $\{v_{[j+2k]}, \dots, v_{[h+k]}\}$ . Die vier neuen Knotenmengen sind disjunkt und die Schachtelung ist aufgelöst. In dem Beispiel liegen, wie zuvor, keine weiteren Schachtelungen vor und die Substitution der Kreise kann durchgeführt werden. Abschließend betrachte man nun Unterfall 4.

**Beispiel 4.6:**

Es gilt  $\{v_l, \dots, v_h\} \subset \{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\}$ . In Abbildung 4.28 ist der Unterfall 4 am Beispiel dargestellt.

Die grün markierten Kanten und Knoten sind beide durch die Kreise  $C$  und  $\tilde{C}$  blockiert und damit nicht in der Kantenmenge bzw. Knotenmenge von  $\mathcal{P}$  enthalten, d.h.  $(u_{[l-k]}, u_l), (u_{[h-k]}, u_h) \notin E(\mathcal{P})$  und  $u_{[l-k]}, u_{[h-k]} \notin V(\mathcal{P})$ . Im oberen Graphen werden die beiden gelb markierten Knotenmengen  $V(L_1^C) = \{v_i, \dots, v_j\}$  und  $\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\}$  zum Kreis  $C$ , die beiden hellblau markierten Knotenmengen  $V(L_1^{\tilde{C}}) = \{v_l, \dots, v_h\}$  und  $\{v_{[l+k]}, \dots, v_{[h+k]}\}$  zum Kreis  $\tilde{C}$  zugeordnet. Man sieht im oberen Graphen, dass eine Schachtelung von  $C$  mit  $\tilde{C}$  vorliegt, da die Schnittmenge der zwei Knotenmengen

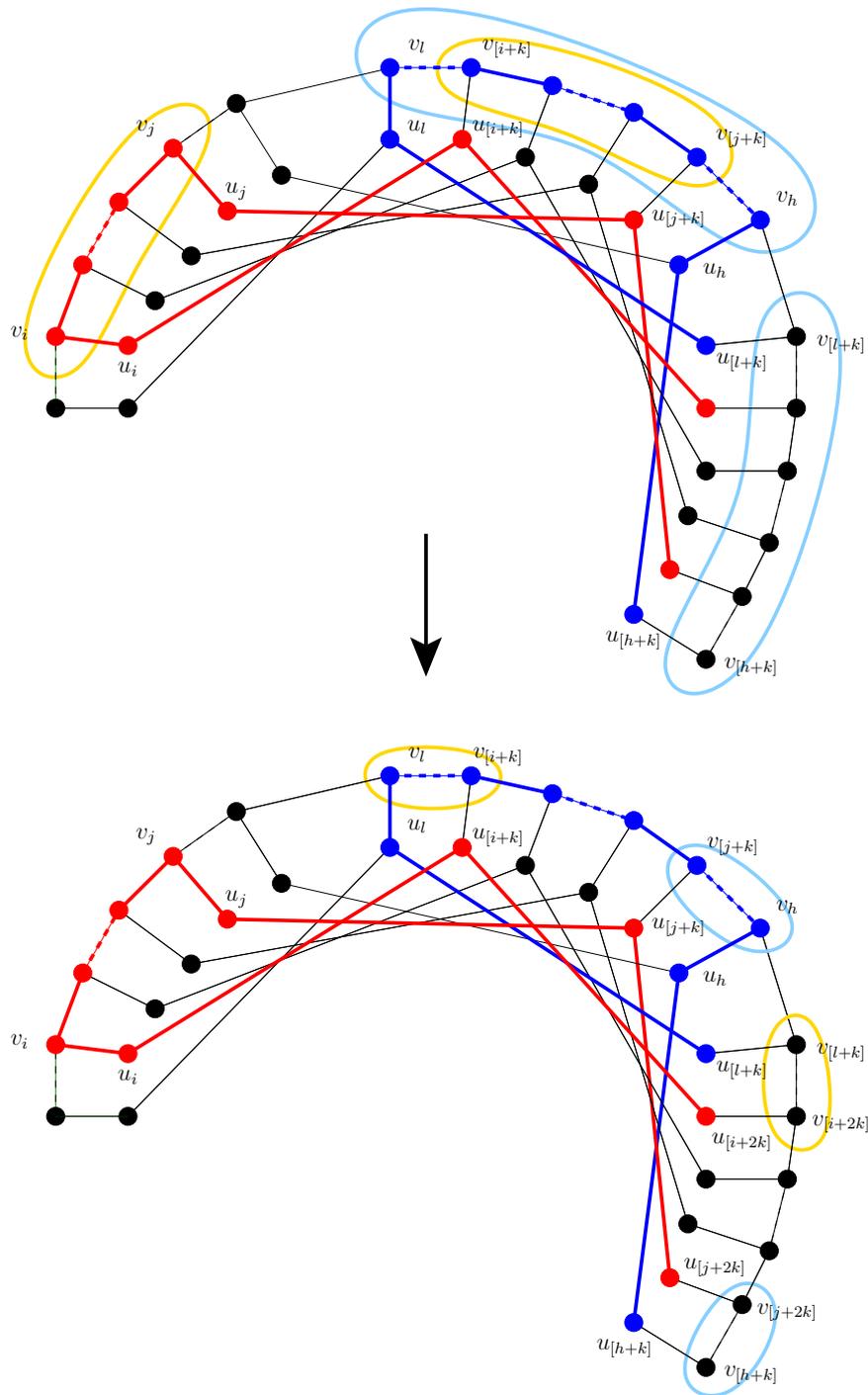


Abbildung 4.27: Fall 3

$\{v_{[i+k]}, \dots, v_{[j+k]}\} \cap \{v_l, \dots, v_h\} = \{v_l, \dots, v_h\}$  ist. Im unteren Graphen sind die neu identifizierten Knotenmengen, wie zuvor, farbig markiert. Die zwei neuen zum Kreis  $C$  gehörenden Knotenmengen sind  $\{v_i, v_{[l-k]}\}$  und  $\{v_{[i+k]}, v_l\}$ . Die zwei neuen zum Kreis  $\tilde{C}$  gehörenden Knotenmengen sind  $\{v_{[h-k]}, \dots, v_j\}$  und  $\{v_h, \dots, v_{[j+k]}\}$ . Die vier neuen

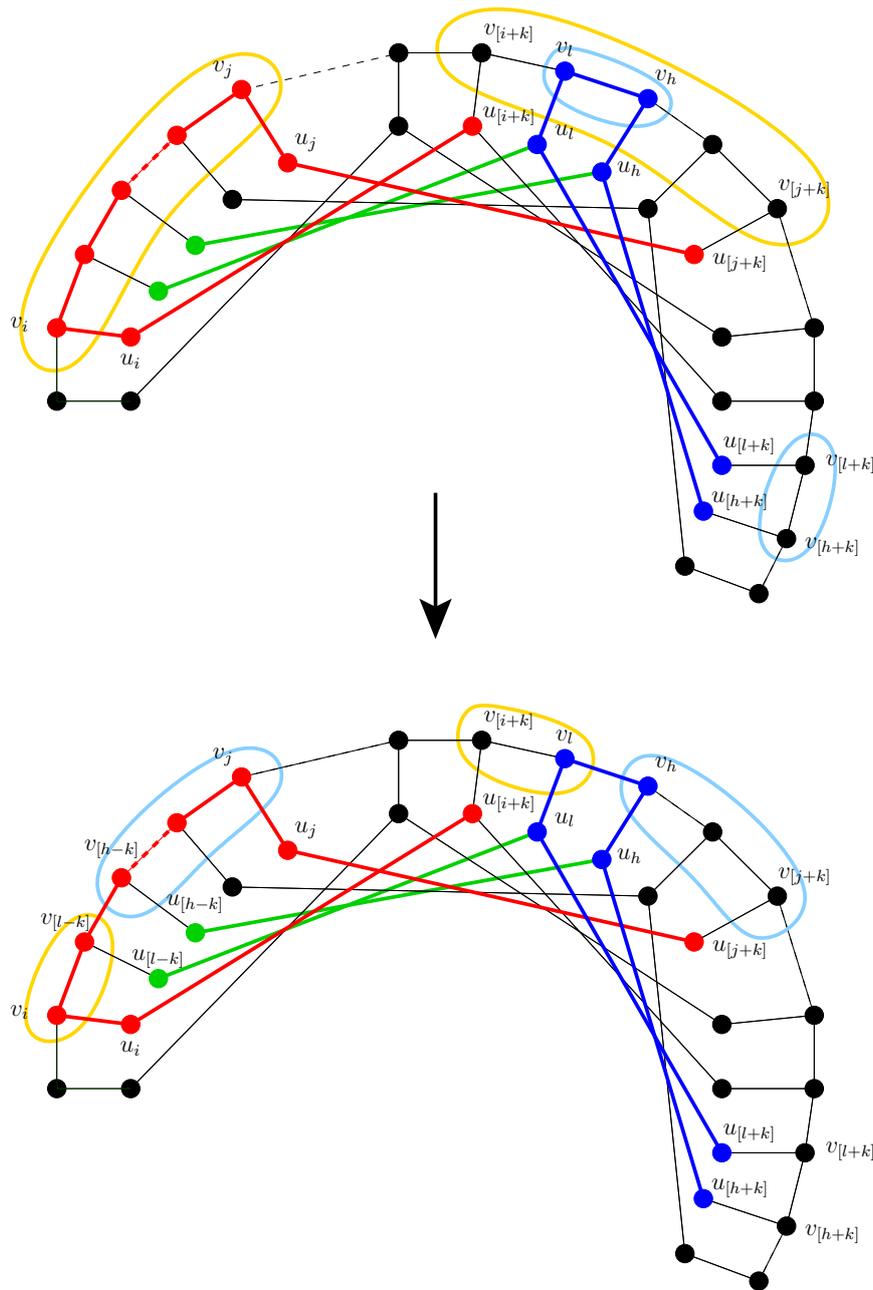


Abbildung 4.28: Fall 4

Knotenmengen sind disjunkt und die Schachtelung ist aufgelöst. Im Beispiel liegen keine weiteren Schachtelungen vor und die Substitution der Kreise kann durchgeführt werden.

Es wurde für die Schachtelung eines Kreises  $C \in B(\mathcal{P})$  mit einem Kreis  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  an Hand der zwei Fälle  $\tilde{C} \in \mathcal{P} \setminus B(\mathcal{P})$  und  $\tilde{C} \in B(\mathcal{P})$  beispielhaft dargestellt, wie man diese Schachtelungen von Kreisen einer gegebenen maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  zunächst aufzulösen und die geschachtelten Kreise durch Kreise der Länge acht zulässig substituieren kann.

Dabei wurde gezeigt, dass das Vorgehen bei einer Schachtelung eines Kreises  $C \in B(\mathcal{P})$  mit einem Kreis  $\tilde{C} \in \mathcal{P} \setminus B(\mathcal{P})$  darin besteht, mehrere Kreise simultan zu substituieren. Im zweiten Fall  $C, \tilde{C} \in B(\mathcal{P})$  wird die Schachtelung zunächst aufgelöst, indem für jeden der beiden Kreise zwei neue Knotenmengen identifiziert werden, welche anschließend für eine zulässige Substitution der Kreise durch Kreise der Länge acht genutzt werden. Dabei sind vier Unterfälle zu unterscheiden, für welche das Vorgehen allerdings identisch ist. Bei genauerer Betrachtung erkennt man, dass die Unterfälle drei und vier bei geeigneter Umnummerierung der Knoten identisch sind. Allerdings ist es für die Verallgemeinerung der Fälle notwendig, eine einheitliche Nummerierung beizubehalten, weshalb die Fälle unterschieden werden müssen. Wie zuvor bereits erwähnt, werden die Knotenmengen durch die Indizes der Knoten bestimmt. Im Folgenden wird bewiesen, dass das in den Beispielen gezeigte Vorgehen auf den allgemeinen Fall übertragen werden kann. Im allgemeinen Fall werden sukzessive alle Schachtelungen zweier Kreise aus  $B(\mathcal{P})$  einer gegebenen maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  aufgelöst, indem für jeden geschachtelten Kreis zwei geeignete neue Indextmengen identifiziert werden, die die entsprechenden Knotenmengen beschreiben. Dabei werden beide Fälle nicht nur separat, sondern auch in Kombination betrachtet. Zudem werden alle Kombinationen berücksichtigt, in denen die vier Unterfälle des zweiten Falles auftreten können. Sind alle Schachtelungen der Kreise  $C \in B(\mathcal{P})$  mit je einem oder mehreren anderen Kreisen aus  $B(\mathcal{P})$  aufgelöst, so kann man die Schachtelungen der Kreise  $C \in B(\mathcal{P})$  mit einem oder mehreren Kreisen aus  $\mathcal{P} \setminus B(\mathcal{P})$  und die Schachtelungen der Kreise  $C' \in \mathcal{P} \setminus B(\mathcal{P})$  mit einem Kreis  $\tilde{C} \in B(\mathcal{P})$  durch die simultane Substitution mehrerer Kreise auflösen. Substituiert man abschließend noch alle übrigen Kreise an Hand der Indextmengen, so erhält man eine neue maximale Kreispackung, welche ausschließlich aus Kreisen der Länge acht besteht.

## Eine Verallgemeinerung der Auflösung von Schachtelungen

Im Folgenden wird das zuvor beispielhaft dargestellte Vorgehen zur Auflösung von Schachtelungen generalisiert und Vermutung 1 bewiesen. In den Beispielen wurden geeignete Knotenmengen identifiziert, welche für eine zulässige Substitution der Kreise verwendet werden konnten. Im allgemeinen Fall werden keine Knotenmengen, sondern die zu den Knotenmengen gehörenden Indextmengen, betrachtet. Es werden somit für die geschachtelten Kreise jeweils zwei geeignete Indextmengen identifiziert, welche für eine zulässige Substitution der Kreise verwendet werden können. Um die zwei Indextmengen für einen beliebigen Kreis  $C \in \mathcal{P}$  zu beschreiben, werden vier Indizes  $b_1^C, b_2^C, b_3^C$  und  $b_4^C$  benötigt, die sich im Laufe der Konstruktion verändern können. Die vier Indizes beschreiben für  $C$  die Indextmengen  $\{b_1^C, \dots, b_2^C\}$  und  $\{b_3^C, \dots, b_4^C\}$ . An Hand dieser Indextmengen werden nachfolgend alle vorliegenden Schachtelungen bestimmt und aufgelöst. Für einen beliebigen

Kreis  $C \in \mathcal{P}$  mit Ankerknoten  $v_i$  und  $V(L_1^C) = \{v_i, v_{[i+1]}, \dots, v_j\}$  werden die beiden relevanten Indexmengen, wie folgt, initialisiert:  $b_1^C := i$ ,  $b_2^C := j$ ,  $b_3^C := [i+k]$  und  $b_4^C := [j+k]$ . In Abbildung 4.29 ist die erste äußere Zusammenhangskomponente  $L_1^C$  mit den entsprechenden Knoten eines Kreises  $C$  mit Ankerknoten  $v_i$  noch einmal veranschaulicht.

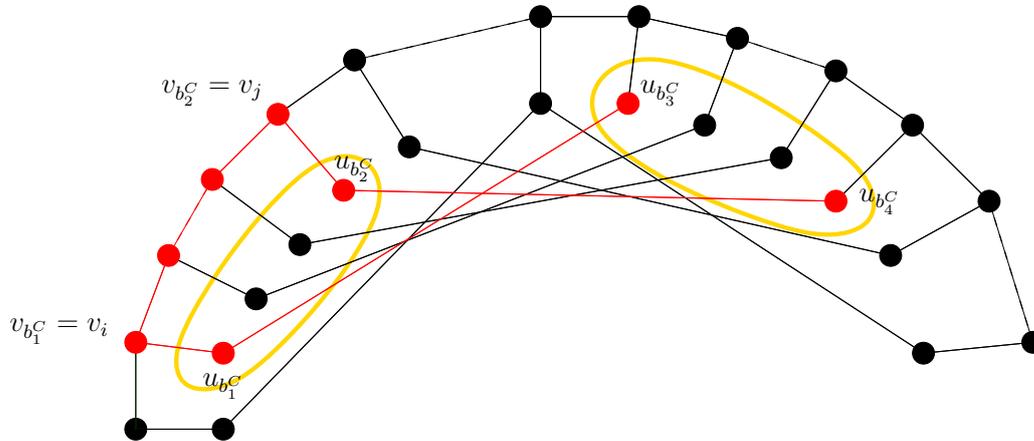


Abbildung 4.29: Veranschaulichung der gesetzten Indizes

Für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$  liegen die beiden relevanten Indexmengen vor. An Hand dieser Indexmengen werden die Schachtelungen nun zunächst identifiziert.

Seien dazu  $C \in B(\mathcal{P})$  und  $C' \in \mathcal{P}$  zwei Kreise einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$ , dann gilt

$$C \text{ ist mit } C' \text{ geschachtelt} \Leftrightarrow \{b_3^C, \dots, b_4^C\} \cap \{b_1^{C'}, \dots, b_2^{C'}\} \neq \emptyset$$

In den betrachteten Beispielen war bei einer Schachtelung der Schnitt der betrachteten Knotenmengen nicht leer. Analog wird nun eine Schachtelung eines Kreises  $C$  mit einem anderen Kreis  $C'$  an Hand der nicht leeren Schnittmenge der relevanten Indexmengen  $\{b_3^C, \dots, b_4^C\}$  und  $\{b_1^{C'}, \dots, b_2^{C'}\}$  identifiziert. Es ist aber zu beachten, dass die Tatsache, dass  $C$  mit  $C'$  geschachtelt ist nicht äquivalent dazu ist, dass  $C'$  mit  $C$  geschachtelt ist. Für entsprechend großes  $n$  gilt auf Grund der nach oben beschränkten Knotenanzahl der Kreise einer maximalen Kreispackung (vgl. Satz 4.23, S.130) sogar

$$C \text{ ist mit } C' \text{ geschachtelt} \Rightarrow C' \text{ ist **nicht** mit } C \text{ geschachtelt}$$

Unter der Annahme  $|B(\mathcal{P})| \geq 1$ , ergibt sich für den Fall, dass kein Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  mit einem anderen Kreis  $C' \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist, folgendes Lemma. Es drückt allgemein die Situation aus, welche in den Beispielen 4.1 und 4.2 illustriert wurde.

**Lemma 4.33:**

Für  $n \geq \max\{k^2 + 34k, 2k^2 + 16k\}$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung, für die gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$ ,  $|B(\mathcal{P})| \geq 1$  und  $\{b_3^C, \dots, b_4^C\} \cap \{b_1^{C'}, \dots, b_2^{C'}\} = \emptyset$  für alle Kreise  $C, C' \in B(\mathcal{P})$ . Dann existiert eine maximale Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}$  mit

$$\mu_8(\tilde{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$$

**Beweis:**

Sei  $C \in B(\mathcal{P})$  ein Kreis mit Ankerknoten  $v_i$  und  $S(C) := \{C' \in \mathcal{P} \mid C \text{ ist geschachtelt mit } C' \text{ oder } C' \text{ ist geschachtelt mit } C\}$ . Dann gilt für alle  $C' \in S(C)$ , dass  $C' \in \mathcal{P} \setminus B(\mathcal{P})$  und  $|S(C)| \leq \left\lfloor \frac{|\{b_1^C, \dots, b_2^C\}| - 2}{2} \right\rfloor$ , da jeder Kreis  $C' \in S(C)$  zwei Innenknoten  $u_j$  und  $u_{[j+1]}$  der Knotenmenge  $\{u_{[b_1^C+1]}, \dots, u_{[b_2^C-1]}\}$  belegt oder blockiert. Man substituiere  $C$  und alle Kreise aus  $S(C)$  simultan durch die  $\left\lfloor \frac{|\{b_1^C, \dots, b_2^C\}|}{2} \right\rfloor$  Kreise

$$\{SC_{b_1^C}, SC_{[b_1^C+2]}, \dots, SC_{[b_2^C-2]}\} \text{ falls } |\{b_1^C, \dots, b_2^C\}| \bmod 2 = 1 \text{ oder}$$

$$\{SC_{b_1^C}, SC_{[b_1^C+2]}, \dots, SC_{[b_2^C-1]}\} \text{ falls } |\{b_1^C, \dots, b_2^C\}| \bmod 2 = 0$$

und erhält eine neue maximale Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$ . Man führe die simultane Substitution analog sukzessive für alle Kreise  $\hat{C} \in B(\hat{\mathcal{P}})$  durch. So erhält man eine maximale Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$ , für die gilt  $B(\hat{\mathcal{P}}) = \emptyset$ . Anschließend substituiere man alle Kreise  $\tilde{C} \in \hat{\mathcal{P}}$  mit  $d(\tilde{C}) \geq 9$  an ihrem Ankerknoten. Es entsteht eine maximale Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}$ , für die gilt  $\mu_8(\tilde{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$ .  $\square$

Für das Auflösen von Schachtelungen reicht es im Weiteren also aus, den Fall einer Schachtelung von  $C$  mit  $C'$  mit  $C, C' \in B(\mathcal{P})$  zu betrachten. Dieser Fall ist allerdings nur relevant, falls derartige Kreise in einer maximalen Packung existieren. Daher wird für die weitere Betrachtung vorausgesetzt, dass mindestens eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  eines Graphen  $P(n, k)$  existiert, für die gilt  $|B(\mathcal{P})| \geq 1$ . Der Fall  $C, C' \in B(\mathcal{P})$  besteht, wie in den Beispielen motiviert, auch im Allgemeinen aus vier Unterfällen. Der erste Unterfall ist noch einmal als Beispiel mit den definierten Indizes in Abbildung 4.30 zu sehen.

Um das nachfolgende Theorem zu beweisen, werden einige technische Vorbereitungen benötigt, die zu einer Sortierung der Kreise in  $B(\mathcal{P})$  führen. Dabei wird folgende wichtige Eigenschaft genutzt:

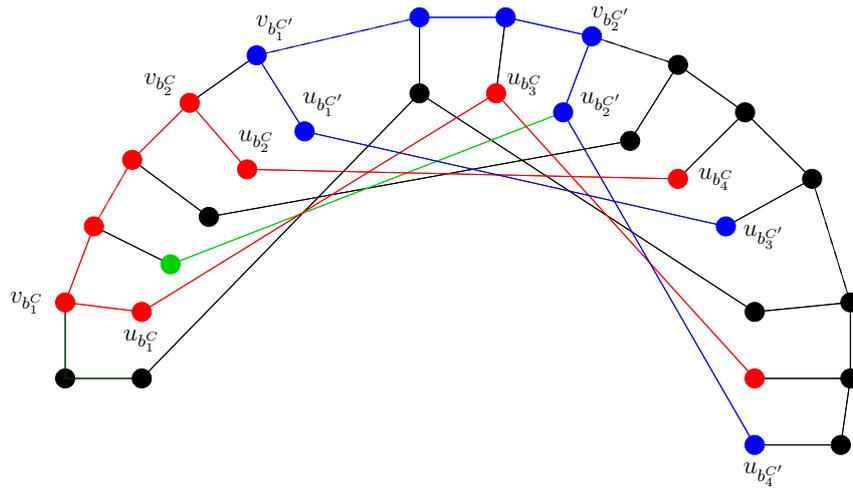


Abbildung 4.30: Die Schachtelung zweier Kreise aus  $B(\mathcal{P})$

**Lemma 4.34:**

Für  $n \geq \max\{k^2 + 34k, 4k^2 - 14k + 12\}$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung, für die gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$ . Sei  $|B(\mathcal{P})| \geq 1$ , dann existiert  $C \in B(\mathcal{P})$  mit der folgenden Eigenschaft

$$\{b_1^C, \dots, b_2^C\} \cap \{b_3^{C'}, \dots, b_4^{C'}\} = \emptyset, \forall C' \in B(\mathcal{P}).$$

**Beweis:**

Es wird ein Widerspruchsbeweis geführt. Dazu sei angenommen:

Für jeden Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  existiert ein Kreis  $C' \in B(\mathcal{P})$  mit  $C \neq C'$ , so dass

$$\{b_1^C, \dots, b_2^C\} \cap \{b_3^{C'}, \dots, b_4^{C'}\} \neq \emptyset.$$

Sei  $B(\mathcal{P}) = \{C_1, \dots, C_{|B(\mathcal{P})|}\}$  und o. B. d. A.  $v_{b_1^{C_1}} := v_0$ . Sortiere  $B(\mathcal{P})$  derart, dass gilt

$$b_1^{C_i} < b_1^{C_j} \Leftrightarrow i < j.$$

Wegen Lemma 4.32 gilt  $|B(\mathcal{P})| \leq r - 4$ . Zudem kann man nach Lemma 4.15 annehmen, dass für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$  die Ungleichung  $|\{b_1^C, \dots, b_2^C, b_3^C, \dots, b_4^C\}| \leq 2k$  erfüllt ist. Andernfalls wird der Kreis  $C$  entsprechend Lemma 4.15 substituiert. Des weiteren gilt:

Sei der Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  mit  $C' \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt, dann enthält die Schnittmenge der beiden Indextmengen  $\{b_3^C, \dots, b_4^C\}$  und  $\{b_1^{C'}, \dots, b_2^{C'}\}$  mindestens zwei Indizes, also  $|\{b_3^C, \dots, b_4^C\} \cap \{b_1^{C'}, \dots, b_2^{C'}\}| \geq 2$ .

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
& |\{b_1^{C_1}, \dots, b_2^{C_1}, b_3^{C_1}, \dots, b_4^{C_1}, b_1^{C_2}, \dots, b_4^{C_2}, \dots, b_1^{C_{|B(\mathcal{P})|}}, \dots, b_2^{C_{|B(\mathcal{P})|}}, b_3^{C_{|B(\mathcal{P})|}}, \dots, b_4^{C_{|B(\mathcal{P})|}}\}| \\
& \leq 2k + (|B(\mathcal{P})| - 1) \cdot (2k - 2) \leq 2k + (r - 4 - 1) \cdot (2k - 2) \\
& \leq 2k + (2k - 1 - 5) \cdot (2k - 2) = 2k + (4k^2 - 16k + 12) \\
& = 4k^2 - 14k + 12.
\end{aligned}$$

Wegen  $b_1^{C_1} = 0$ , folgt  $b_4^{C_{|B(\mathcal{P})|}} \leq 4k^2 - 14k + 12 - 1$ . Da die Menge  $B(\mathcal{P})$  sortiert ist und  $n \geq 4k^2 - 14k + 12$  gilt, ergibt sich für  $C_1$ , dass  $\{b_1^{C_1}, \dots, b_2^{C_1}\} \cap \{b_3^{C'}, \dots, b_4^{C'}\} = \emptyset$  für alle  $C' \in B(\mathcal{P})$  gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Somit existiert  $C \in B(\mathcal{P})$  mit der Eigenschaft  $\{b_1^C, \dots, b_2^C\} \cap \{b_3^{C'}, \dots, b_4^{C'}\} = \emptyset$  für alle  $C' \in B(\mathcal{P})$ .  $\square$

Lemma 4.34 sagt aus, dass es immer mindestens einen Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  gibt, derart, dass kein Kreis  $C' \in B(\mathcal{P})$  mit  $C$  geschachtelt ist. Der Kreis  $C$  kann allerdings mit anderen Kreisen aus  $B(\mathcal{P})$  geschachtelt sein. Mit den gleichen Argumenten, wie im Beweis zu Lemma 4.34, folgt außerdem

**Korollar 4.35:**

Für  $n \geq \max\{k^2 + 34k, 4k^2 - 14k + 12\}$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung, für die gilt  $|C(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$ . Sei  $|B(\mathcal{P})| \geq 1$  und  $A(\mathcal{P}) \subseteq B(\mathcal{P})$  die Menge aller Kreise, für welche die Eigenschaft aus Lemma 4.34 erfüllt ist. Dann existiert  $C \in A(\mathcal{P})$  mit der folgenden Eigenschaft

$$\{b_2^C, \dots, b_3^C\} \cap \{b_3^{C'}, \dots, b_4^{C'}\} = \emptyset, \forall C' \in B(\mathcal{P}).$$

Sind für  $C$  die Eigenschaften aus Lemma 4.34 und Korollar 4.35 erfüllt und ist  $C$  außerdem mit mindestens einem anderen Kreis aus  $B(\mathcal{P})$  geschachtelt, so kann man eine größtmögliche Menge geschachtelter Kreise in  $B(\mathcal{P})$  bestimmen, welche  $C$  enthält und außerdem keinen weiteren Kreis  $\tilde{C}$  mit  $C \neq \tilde{C}$ , für welchen die Eigenschaften aus Lemma 4.34 und Korollar 4.35 erfüllt sind. Betrachtet man die Kreise in dieser Menge im Graphen  $P(n, k)$  „gegen den Uhrzeigersinn“, so ist der Kreis  $C$  der Kreis, dessen Ankerknoten „möglichst weit links“ liegt. Des weiteren existiert für jeden Kreis  $C'$  der Menge ein Kreis  $C''$  in der Menge, so dass entweder  $C'$  mit  $C''$  oder  $C''$  mit  $C'$  geschachtelt ist. Im Allgemeinen kann es mehrere Kreise in  $B(\mathcal{P})$  geben, für welche die beiden Eigenschaften aus Lemma 4.34 und Korollar 4.35 erfüllt sind.

Um die Kreise in  $B(\mathcal{P})$  zu sortieren, wähle man zunächst einen Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$ , für den Korollar 4.35 erfüllt ist. Der Kreis  $C$  habe den Ankerknoten  $v_q$ . Nummeriere nun die

Knoten des  $P(n, k)$  neu mit  $v_q := v_0$ . Nun sortiere man die Kreise in  $B(\mathcal{P})$  aufsteigend nach dem Index ihres jeweiligen Ankerknoten, d.h. für  $C_i, C_j \in B(\mathcal{P})$  gilt

$$i < j \quad \Leftrightarrow \quad b_1^{C_i} < b_1^{C_j}.$$

Also gilt  $C_1 = C$ . Für die sortierte Menge  $B(\mathcal{P})$  lässt sich nun folgende Aussage machen:

**Theorem 4.1:**

Es sei  $n \geq \max\{k^2 + 34k, 4k^2 - 14k + 12\}$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung mit  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$  und  $|B(\mathcal{P})| \geq 1$ . Dann existieren für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$  Indextmengen  $\{b_1^C, \dots, b_2^C\}$  und  $\{b_3^C, \dots, b_4^C\}$ , so dass für je zwei beliebige Kreise  $C_i, C_j \in B(\mathcal{P})$  gilt:

$$\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} = \emptyset$$

**Beweis:**

O.B.d.A. sei  $B(\mathcal{P})$  sortiert. Aus Lemma 4.28 ist  $\mu_{k+3}(\mathcal{P}) = 0$  bekannt. Liegt keine Schachtelung zweier Kreise aus  $B(\mathcal{P})$  vor, ist die Aussage richtig (Lemma 4.33). Es sei daher angenommen, dass es mindestens zwei Kreise  $C_i, C_j \in B(\mathcal{P})$  gibt, so dass  $C_i$  mit  $C_j$  geschachtelt ist und somit

$$\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} \neq \emptyset.$$

Dann liegt immer einer der folgenden vier Fälle vor:

**Fall 1:**  $\{v_{b_3^{C_i}}, \dots, v_{b_4^{C_i}}\} \subset \{v_{b_1^{C_j}}, \dots, v_{b_2^{C_j}}\}$  und  $b_2^{C_j} < b_4^{C_i}$ .

**Fall 2:**  $\{v_{b_1^{C_j}}, \dots, v_{b_2^{C_j}}\} \subset \{v_{b_3^{C_i}}, \dots, v_{b_4^{C_i}}\}$  und  $b_3^{C_i} < b_1^{C_j}$ .

**Fall 3:**  $\{v_{b_3^{C_i}}, \dots, v_{b_4^{C_i}}\} \subset \{v_{b_1^{C_j}}, \dots, v_{b_2^{C_j}}\}$ .

**Fall 4:**  $\{v_{b_1^{C_j}}, \dots, v_{b_2^{C_j}}\} \subset \{v_{b_3^{C_i}}, \dots, v_{b_4^{C_i}}\}$ .

Auf Grund der Sortierung der Kreise in  $B(\mathcal{P})$  gilt dann  $i < j$ . Sei  $i$  der kleinste Index, so dass  $C_i$  mit einem anderen Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Falls  $i > 1$ , ist keiner der Kreise  $C_1, \dots, C_{i-1}$  mit einem Kreis aus  $B(\mathcal{P})$  geschachtelt. Zu betrachten sind für  $C_i$  und  $C_j$  die vier Fälle. Es ist zu beachten, dass der Kreis  $C_i$  mit mehreren Kreisen aus  $B(\mathcal{P})$  geschachtelt sein kann. Sei  $j \in \{i + 1, \dots, |B(\mathcal{P})|\}$  der kleinste Index, so dass  $C_i$  mit  $C_j \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist.

**Fall 1:** Es sei angenommen  $\{v_{b_3^{C_i}}, \dots, v_{b_2^{C_j}}\} \subset \{v_{b_1^{C_j}}, \dots, v_{b_2^{C_j}}\}$  und  $b_2^{C_j} < b_4^{C_i}$ :

Offenbar hat man in diesem Fall:

- (i)  $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} \neq \emptyset$
- (ii)  $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}), (u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}), (u_{b_3^{C_i}}, u_{[b_3^{C_i}+k]}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- (iii)  $(u_{b_1^{C_j}}, u_{b_3^{C_j}}), (u_{b_2^{C_j}}, u_{b_4^{C_j}}) \in E(C_j)$
- (iv)  $(u_{[b_2^{C_j}-k]}, u_{b_2^{C_j}}) \notin E(\mathcal{P})$

Setzt man

$$b_1^{C_i} = [b_2^{C_j} - k], b_2^{C_i} = b_3^{C_i}, b_4^{C_i} = [b_3^{C_i} + k], b_3^{C_i} = [b_1^{C_i} + k]$$

dann gilt nach der Neuindizierung offenbar:

- (i)  $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} = \emptyset$
- (ii)  $(u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}), (u_{b_2^{C_j}}, u_{b_4^{C_j}}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- (iii)  $(u_{b_1^{C_j}}, u_{b_3^{C_j}}) \in E(C_j)$
- (iv)  $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}) \notin E(\mathcal{P})$

Damit ist die Schachtelung von  $C_i$  mit  $C_j$  aufgelöst. Der Kreis  $C_j$  kann mit einem anderen Kreis  $C_a \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt sein. Da der Index  $b_1^{C_j}$  bei der Neuindizierung nicht verändert wurde, gilt  $j < a$ . Es gilt für  $C_j$  und  $C_a$  wieder einer der vier Fälle.

Angenommen es liegt eine weitere Schachtelung von  $C_i$  mit einem anderen Kreis  $C_z \in B(\mathcal{P})$  vor, dann gilt  $z > j$  und somit  $b_1^{C_z} > b_3^{C_i}$ . Damit liegt für  $C_i$  und  $C_z$  der erste und dritte Fall nicht vor und somit kommen nur Fall 2 und Fall 4 in Frage. Sei  $z \in \{j+1, \dots, |B(\mathcal{P})|\}$  der kleinste Index, so dass  $C_i$  mit  $C_z \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist.

**Fall 1.2:** Es gelte  $\{v_{b_1^{C_z}}, \dots, v_{b_4^{C_i}}\} \subset \{v_{b_1^{C_z}}, \dots, v_{b_2^{C_z}}\}$  und  $b_3^{C_i} < b_1^{C_z}$ :

Dann gilt:

- (i)  $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_z}, \dots, b_2^{C_z}\} \neq \emptyset$
- (ii)  $(u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}), (u_{b_4^{C_i}}, u_{[b_4^{C_i}+k]}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- (iii)  $(u_{b_1^{C_z}}, u_{b_3^{C_z}}), (u_{b_2^{C_z}}, u_{b_4^{C_z}}) \in E(C_z)$
- (iv)  $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}), (u_{[b_1^{C_z}-k]}, u_{b_1^{C_z}}) \notin E(\mathcal{P})$

Setzt man

$$b_2^{C_i} = [b_1^{C_z} - k], b_1^{C_i} = b_4^{C_i}, b_3^{C_i} = [b_4^{C_i} + k], b_4^{C_i} = [b_2^{C_i} + k]$$

dann hat man nach der Neuindizierung:

- (i)  $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_z}, \dots, b_2^{C_z}\} = \emptyset$
- (ii)  $(u_{b_1^{C_z}}, u_{b_3^{C_z}}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- (iii)  $(u_{b_2^{C_z}}, u_{b_4^{C_z}}) \in E(C_z)$
- (iv)  $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}), (u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}) \notin E(\mathcal{P})$

Damit ist die Schachtelung von  $C_i$  mit  $C_z$  aufgelöst. Der Kreis  $C_z$  kann mit einem anderen Kreis  $C_h \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt sein. Da auch nach der Neuindizierung  $v_{b_1^{C_z}} \in V(L_1^{C_z})$ , gilt  $z < h$ . Es folgt für  $C_z$  und  $C_h$  wiederum einer der vier Fälle.

Der Kreis  $C_i$  ist nun mit keinem Kreis mehr aus  $B(\mathcal{P})$  geschachtelt. Sei  $w$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit einem anderen Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Sei  $t \in \{w+1, \dots, |B(\mathcal{P})|\}$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit  $C_t \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Dann gilt wieder einer der vier Fälle.

**Fall 1.4:** Es gelte  $\{v_{b_1^{C_z}}, \dots, v_{b_2^{C_z}}\} \subset \{v_{b_3^{C_i}}, \dots, v_{b_4^{C_i}}\}$ :

In diesem Fall hat man:

- (i)  $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_z}, \dots, b_2^{C_z}\} \neq \emptyset$
- (ii)  $(u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- (iii)  $(u_{b_1^{C_z}}, u_{b_3^{C_z}}), (u_{b_2^{C_z}}, u_{b_4^{C_z}}) \in E(C_z)$
- (iv)  $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}), (u_{[b_1^{C_z}-k]}, u_{b_1^{C_z}}), (u_{[b_2^{C_z}-k]}, u_{b_2^{C_z}}) \notin E(\mathcal{P})$

Setzt man

$$b_2^{C_i} = [b_1^{C_z} - k], b_1^{C_z} = [b_2^{C_z} - k], b_2^{C_z} = [b_4^{C_i} - k],$$

$$b_4^{C_i} = [b_2^{C_i} + k], b_3^{C_z} = [b_1^{C_z} + k], b_4^{C_z} = [b_2^{C_z} + k]$$

dann gilt nach der Neuindizierung:

- (i)  $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_z}, \dots, b_2^{C_z}\} = \emptyset$
- (ii)  $(u_{b_2^{C_z}}, u_{b_4^{C_z}}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- (iii)  $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}), (u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}), (u_{b_1^{C_z}}, u_{b_3^{C_z}}) \notin E(\mathcal{P})$

Damit ist die Schachtelung von  $C_i$  mit  $C_z$  aufgelöst. Der Kreis  $C_i$  ist nun mit keinem Kreis mehr aus  $B(\mathcal{P})$  geschachtelt, da  $z$  der kleinste Index war.

Der Kreis  $C_z$  kann mit einem anderen Kreis  $C_h \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt sein. Da nach der Neuindizierung  $v_{b_1^{C_z}} \in V(L_1^{C_i})$ , gilt  $z < h$ . Sei

$l \in \{z + 1, \dots, |B(\mathcal{P})|\}$  der kleinste Index, so dass  $C_z$  mit  $C_l \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Dann liegt für  $C_z$  und  $C_l$  wiederum eine Situation, wie im Fall 1.2 oder im Fall 1.4, vor und kann analog aufgelöst werden. Ist der Kreis  $C_z$  mit keinem anderen Kreis aus  $B(\mathcal{P})$  geschachtelt, sortiere die Kreise  $C \in B(\mathcal{P})$  aufsteigend nach dem Index  $b_1^C$ . Sei  $w$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit einem anderen Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Sei  $t \in \{w + 1, \dots, |B(\mathcal{P})|\}$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit  $C_t \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Dann gilt wiederum einer der vier Fälle.

Ist der Kreis  $C_i$  mit keinem anderen Kreis aus  $B(\mathcal{P})$  mehr geschachtelt, sei  $w$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit einem anderen Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Sei  $t \in \{w + 1, \dots, |B(\mathcal{P})|\}$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit  $C_t \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Dann gilt wiederum einer der vier Fälle.

**Fall 2: Es sei angenommen**  $\{v_{b_1^{C_j}}, \dots, v_{b_4^{C_i}}\} \subset \{v_{b_1^{C_j}}, \dots, v_{b_2^{C_j}}\}$  **und**  $b_4^{C_j} < b_2^{C_i}$ :

Offenbar hat man in diesem Fall:

- (i)  $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} \neq \emptyset$
- (ii)  $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}), (u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}), (u_{b_4^{C_i}}, u_{[b_4^{C_i}+k]}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- (iii)  $(u_{b_1^{C_j}}, u_{b_3^{C_j}}), (u_{b_2^{C_j}}, u_{b_4^{C_j}}) \in E(C_j)$
- (iv)  $(u_{[b_1^{C_j}-k]}, u_{b_1^{C_j}}) \notin E(\mathcal{P})$

Setzt man

$$b_2^{C_i} = [b_1^{C_j} - k], b_1^{C_j} = b_4^{C_i}, b_3^{C_j} = [b_4^{C_i} + k], b_4^{C_i} = [b_2^{C_i} + k]$$

dann gilt nach der Neuindizierung:

- (i)  $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} = \emptyset$
- (ii)  $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}), (u_{b_1^{C_j}}, u_{b_3^{C_j}}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- (iii)  $(u_{b_2^{C_j}}, u_{b_4^{C_j}}) \in E(C_j)$
- (iv)  $(u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}) \notin E(\mathcal{P})$

Damit ist die Schachtelung von  $C_i$  mit  $C_j$  aufgelöst. Der Kreis  $C_i$  ist nun mit keinem Kreis mehr aus  $C \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt, da  $j$  der kleinste Index war.

Der Kreis  $C_j$  kann mit einem anderen Kreis  $C_a \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt sein. Da der Index  $b_1^{C_j}$  bei der Neuindizierung nicht verändert wurde, gilt  $j < a$ . Es gilt für  $C_j$  und  $C_a$  wieder einer der vier Fälle.

Sei  $w$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit einem anderen Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Sei  $t \in \{w+1, \dots, |B(\mathcal{P})|\}$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit  $C_t \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Dann gilt wiederum einer der vier Fälle.

**Fall 3: Es sei angenommen**  $\{v_{b_3^{C_i}}, \dots, v_{b_4^{C_i}}\} \subset \{v_{b_1^{C_j}}, \dots, v_{b_2^{C_j}}\}$ :

Man hat in diesem Fall:

- (i)  $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} \neq \emptyset$
- (ii)  $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}), (u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}), (u_{b_3^{C_i}}, u_{[b_3^{C_i}+k]}), (u_{b_4^{C_i}}, u_{[b_4^{C_i}+k]}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- (iii)  $(u_{b_1^{C_j}}, u_{b_3^{C_j}}), (u_{b_2^{C_j}}, u_{b_4^{C_j}}) \in E(C_j)$

Setzt man

$$b_1^{C_i} = b_1^{C_j}, b_1^{C_j} = b_4^{C_i}, b_2^{C_i} = b_3^{C_i},$$

$$b_3^{C_i} = b_3^{C_j}, b_3^{C_j} = [b_4^{C_i} + k], b_4^{C_i} = [b_2^{C_i} + k]$$

dann folgt nach der Neuindizierung offenbar:

- (i)  $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} = \emptyset$
- (ii)  $(u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}), (u_{b_1^{C_j}}, u_{b_3^{C_j}}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- (iii)  $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}), (u_{b_2^{C_j}}, u_{b_4^{C_j}}) \in E(C_j)$

Damit ist die Schachtelung von  $C_i$  mit  $C_j$  aufgelöst. Die Kreise  $C_i$  und  $C_j$  können aber jeweils mit einem anderen Kreis  $C_z \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt sein. Da nach der Neuindizierung  $v_{b_1^{C_i}}, v_{b_1^{C_j}} \in V(L_1^{C_j})$ , gilt  $i < j < z$ . Für weitere Schachtelungen gilt, wie zuvor, einer der vier Fälle.

Sortiere die Kreise  $C \in B(\mathcal{P})$  aufsteigend nach dem Index  $b_1^C$ . Sei  $w$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit einem anderen Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Sei  $t \in \{w+1, \dots, |B(\mathcal{P})|\}$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit  $C_t \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Dann gilt wiederum einer der vier Fälle.

**Fall 4: Es sei angenommen**  $\{v_{b_1^{C_j}}, \dots, v_{b_2^{C_j}}\} \subset \{v_{b_3^{C_i}}, \dots, v_{b_4^{C_i}}\}$ :

Offenbar gilt in diesem Fall:

- $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} \neq \emptyset$
- $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}), (u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- $(u_{b_1^{C_j}}, u_{b_3^{C_j}}), (u_{b_2^{C_j}}, u_{b_4^{C_j}}) \in E(C_j)$
- $(u_{[b_1^{C_j}-k]}, u_{b_1^{C_j}}), (u_{[b_2^{C_j}-k]}, u_{b_2^{C_j}}) \notin E(\mathcal{P})$

Setzt man

$$\begin{aligned} b_2^{C_i} &= [b_1^{C_j} - k], b_1^{C_j} = [b_2^{C_j} - k], b_2^{C_j} = [b_4^{C_i} - k], \\ b_4^{C_i} &= [b_2^{C_i} + k], b_3^{C_j} = [b_1^{C_j} + k], b_4^{C_j} = [b_2^{C_j} + k] \end{aligned}$$

dann hat man nach der Neuindizierung:

- (i)  $\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} = \emptyset$
- (ii)  $(u_{b_1^{C_i}}, u_{b_3^{C_i}}), (u_{b_2^{C_j}}, u_{b_4^{C_j}}) \in \bigcup_{q=1}^i E(C_q)$
- (iii)  $(u_{b_2^{C_i}}, u_{b_4^{C_i}}), (u_{b_1^{C_j}}, u_{b_3^{C_j}}) \notin E(\mathcal{P})$

Damit ist die Schachtelung von  $C_i$  mit  $C_j$  aufgelöst. Der Kreis  $C_i$  ist nun mit keinem Kreis mehr aus  $B(\mathcal{P})$  geschachtelt, da  $j$  der kleinste Index war.

Der Kreis  $C_j$  kann mit einem anderen Kreis  $C_z \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt sein. Da nach der Neuindizierung  $v_{b_1^{C_j}} \in V(L_1^{C_i})$  ist, gilt  $j < z$ . Sei  $l \in \{j+1, \dots, |B(\mathcal{P})|\}$  der kleinste Index, so dass  $C_j$  mit  $C_l \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Dann liegt für  $C_j$  und  $C_l$  eine Situation wie im Fall 1.2 oder im Fall 1.4 vor und kann analog aufgelöst werden.

Ist der Kreis  $C_j$  mit keinem anderen Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt, sortiere  $B(\mathcal{P})$  aufsteigend nach dem Index  $b_1^C$ . Sei  $w$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit einem anderen Kreis  $C \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Sei  $t \in \{w+1, \dots, |B(\mathcal{P})|\}$  der kleinste Index, so dass  $C_w$  mit  $C_t \in B(\mathcal{P})$  geschachtelt ist. Dann gilt wiederum einer der vier Fälle.

Bei jeder Neuindizierung verkleinern sich sowohl die Indexmengen, als auch die Gesamtanzahl von Schachtelungen von Kreisen aus  $B(\mathcal{P})$ , um mindestens eins. Zudem ist jede Indexmenge, wie auch die Anzahl von Schachtelungen, endlich. Daher folgt, dass nach endlich vielen Schritten für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$  zwei Indexmengen  $\{b_1^C, \dots, b_2^C\}$  und  $\{b_3^C, \dots, b_4^C\}$  identifiziert worden sind, so dass für je zwei beliebige Kreise  $C_i, C_j \in B(\mathcal{P})$  gilt:

$$\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} = \emptyset$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Mit Theorem 4.1 und Lemma 4.33 folgt

**Korollar 4.36:**

Für  $n \geq 4k^2 - 14k + 12$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung im  $P(n, k)$ , so dass  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$  und  $|B(\mathcal{P})| \geq 1$ . Dann existiert eine maximale Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$  mit

$$\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k)).$$

Das Vorgehen zum Beweis von Theorem 4.1 wird nachfolgend algorithmisch zusammengefasst und liefert eine maximale Kreispackung, deren Kreise ausschließlich die Länge acht haben.

**Algorithmus 4.1:**

**Gegeben:** maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  mit  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{jk}{2}$ ,  $B(\mathcal{P})$ ,  $h := |B(\mathcal{P})|$ ,  $D := \emptyset$ ,  $F := \emptyset$ ,  
 $x := -1$

**Schritt 1:**

Sortiere  $B(\mathcal{P})$ .

Prüfe, ob es zwei Kreise  $C_i, C_j \in B(\mathcal{P})$  gibt mit:

$$\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} \neq \emptyset$$

Falls ja, gehe zu Schritt 2

Sonst STOP.

**Schritt 2:**

Suche den kleinsten Index  $i \in \{1, \dots, h\}$  mit  $C_i \in B(\mathcal{P})$  so, dass ein Kreis  $C_j \in B(\mathcal{P})$  existiert mit:

$$\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} \neq \emptyset$$

Setze  $C = C_i$  und gehe zu Schritt 3.

**Schritt 3:**

Suche den kleinsten Index  $j \in \{i + 1, \dots, h\}$  mit  $C_j \in B(\mathcal{P})$  so, dass:

$$\{b_3^{C_i}, \dots, b_4^{C_i}\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} \neq \emptyset$$

Setze  $D = C_j$ .

Gehe zu Schritt 4.

**Schritt 4:** Prüfe, ob  $\{v_{b_3^C}, \dots, v_{b_2^D}\} \subset \{v_{b_1^D}, \dots, v_{b_2^D}\}$  und  $b_2^D < b_4^C$

Falls nein, gehe zu Schritt 6.

Sonst, setze

$$b_1^C = [b_2^D - k], x = b_2^D, b_2^D = b_3^C, b_4^D = [b_3^C + k], b_3^C = x$$

Gehe zu Schritt 5.

**Schritt 5:** Prüfe, ob es einen Kreis  $C_z \in B(\mathcal{P})$  gibt mit:

$$\{b_3^C, \dots, b_4^C\} \cap \{b_1^{C_z}, \dots, b_2^{C_z}\} \neq \emptyset$$

Falls nein, gehe zu Schritt 1.

Falls ja, suche den kleinsten Index  $z \in \{i+1, \dots, h\}$  mit  $C_z \in B(\mathcal{P})$  mit:

$$\{b_3^C, \dots, b_4^C\} \cap \{b_1^{C_z}, \dots, b_2^{C_z}\} \neq \emptyset$$

Setze  $F = C_z$ , gehe zu Schritt 5.1

**Schritt 5.1:** Prüfe, ob  $\{v_{b_1^F}, \dots, v_{b_4^C}\} \subset \{v_{b_1^F}, \dots, v_{b_2^F}\}$  und  $b_3^C < b_1^F$

Falls nein, gehe zu Schritt 5.2

Sonst, setze

$$b_2^C = [b_1^F - k], x = b_1^F, b_1^F = b_4^C, b_3^F = [b_4^C + k], b_4^C = x$$

Gehe zu Schritt 1.

**Schritt 5.2:** Prüfe, ob  $\{v_{b_1^F}, \dots, v_{b_2^F}\} \subset \{v_{b_3^C}, \dots, v_{b_4^C}\}$

Falls nein, gehe zu Schritt 1.

Sonst, setze

$$x = b_2^C, b_2^C = [b_1^F - k], b_1^F = [b_2^F - k], b_2^F = x, b_4^C = [b_2^C + k], b_3^F = [b_1^F + k], b_4^F = [b_2^F + k]$$

Setze  $C = F$ , gehe zu Schritt 5.

**Schritt 6:** Prüfe, ob  $\{v_{b_1^D}, \dots, v_{b_4^C}\} \subset \{v_{b_1^D}, \dots, v_{b_2^D}\}$  und  $b_3^C < b_1^D$

Falls nein, gehe zu Schritt 7.

Sonst, setze

$$b_2^C = [b_1^D - k], x = b_1^D, b_1^D = b_4^C, b_3^D = [b_4^C + k], b_4^C = x$$

Gehe zu Schritt 1.

**Schritt 7:** Prüfe, ob  $\{v_{b_3^C}, \dots, v_{b_4^C}\} \subset \{v_{b_1^D}, \dots, v_{b_2^D}\}$

Falls nein, gehe zu Schritt 8.

Sonst, setze

$$b_1^C = b_1^D, b_1^D = b_4^C, b_2^C = b_3^C, \\ x = b_3^C, b_3^C = b_3^D, b_3^D = [b_4^C + k], b_4^C = [x + k]$$

Gehe zu Schritt 1.

**Schritt 8:** Prüfe, ob  $\{v_{b_1^D}, \dots, v_{b_2^D}\} \subset \{v_{b_3^C}, \dots, v_{b_4^C}\}$

Falls nein, gehe zu Schritt 1.

Sonst, setze

$$x = b_2^C, b_2^C = [b_1^D - k], b_1^D = [b_2^D - k], b_2^D = x, b_4^C = [b_2^C + k], b_3^D = [b_1^D + k], b_4^D = [b_2^D + k]$$

Setze  $C = D$  und gehe zu Schritt 5.

Mit dem gegebenen Algorithmus werden die Indexmengen der Kreise  $C \in B(\mathcal{P})$  so lange neuindiziert, bis alle paarweise disjunkt sind. Mit dem nachfolgenden Algorithmus 4.2 werden nun alle Kreise substituiert.

### Algorithmus 4.2:

#### Gegeben:

maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$ ,  $B(\mathcal{P})$  mit disjunkten Indexmengen für alle Kreise,  
 $\mathcal{P}_{\text{neu}} = \emptyset$ ,  $N = \emptyset$

#### Schritt 1:

Setze  $\mathcal{P}_{\text{neu}} = \mathcal{P}$ .

Bestimme für jeden Kreis  $C_i \in B(\mathcal{P})$  den Wert  $k_i := b_2^{C_i} - b_1^{C_i}$ .

Setze  $j = 1$  und gehe zu Schritt 2.

#### Schritt 2:

Prüfe, ob  $C \in \mathcal{P} \setminus (N \cup B(\mathcal{P}))$  existiert mit

$$\{b_3^{C_j}, \dots, b_4^{C_j}\} \cap \{b_1^C, b_2^C\} \neq \emptyset$$

Falls ja, setze  $N = N \cup \{C\}$  und gehe zu Schritt 2.

Sonst gehe zu Schritt 3.

### Schritt 3:

Prüfe, ob  $C \in \mathcal{P} \setminus (N \cup B(\mathcal{P}))$  existiert mit

$$\{b_3^C, b_4^C\} \cap \{b_1^{C_j}, \dots, b_2^{C_j}\} \neq \emptyset$$

Falls ja, setze  $N = N \cup \{C\}$  und gehe zu Schritt 3.

Sonst gehe zu Schritt 4.

### Schritt 4:

Setze  $\mathcal{P}_{neu} = \mathcal{P}_{neu} \setminus (N \cup \{C_j\})$  Falls  $k_j \bmod 2 = 1$ , gehe zu Schritt 4.1.

Sonst gehe zu Schritt 4.2.

#### Schritt 4.1:

Setze

$$\mathcal{P}_{neu} = \mathcal{P}_{neu} \cup \{SC_{b_1^{C_j}}, \dots, SC_{b_2^{C_j-1}}\}$$

Falls  $j \neq |B(\mathcal{P})|$ , setze  $j = j + 1$  und gehe zu Schritt 2.

Sonst gehe zu Schritt 5.

#### Schritt 4.2:

Setze

$$\mathcal{P}_{neu} = \mathcal{P}_{neu} \cup \{SC_{b_1^{C_i}}, \dots, SC_{b_2^{C_i-2}}\}$$

Falls  $j \neq |B(\mathcal{P})|$ , setze  $j = j + 1$  und gehe zu Schritt 2.

Sonst gehe zu Schritt 5.

### Schritt 5:

Substituiere alle Kreise  $C \in \mathcal{P}_{neu}$  mit  $d(C) \geq 9$  an ihrem Ankerknoten  $v_i$  durch den Kreis  $SC_i$ .

STOP

In Algorithmus 4.2 wird eine neue Kreispackung  $\mathcal{P}_{neu}$  erzeugt, indem nicht nur die Kreise  $C_j \in B(\mathcal{P})$  substituiert werden, sondern zeitgleich auch alle Kreise  $C \notin B(\mathcal{P})$ , welche mit  $C_j$  geschachtelt sind oder mit welchen ein solcher Kreis  $C_j$  geschachtelt ist. Abschließend substituiert man in Schritt 6 alle übrigen Kreise  $C_l \in \mathcal{P}_{neu}$  mit  $d(C_l) \geq 9$  an ihrem jeweiligen Ankerknoten  $v_l$  durch den entsprechenden Kreis  $SC_l$ . So entsteht eine neue maximale Kreispackung, welche ausschließlich aus Kreisen der Länge acht besteht.

### 4.3 Die Familie der verallgemeinerten Petersen Graphen $P(n, k)$ mit $k \geq 5$ und $k \bmod 2 = 1$

Im nachfolgenden Kapitel sollen nun einige Aussagen, welche für den Fall  $k \bmod 2 = 0$  hergeleitet wurden, auf den Fall  $k \bmod 2 = 1$  übertragen werden. Dabei ist zu erkennen, dass die Verschärfung der unteren Schranke nicht so gut ist, wie im Fall  $k \bmod 2 = 0$ . Es wird analog zu Kapitel 4.2 für alle Aussagen  $k \bmod 2 = 1$  vorausgesetzt. Diese Grundannahme wird daher im Weiteren wiederum nicht mehr explizit angegeben. Im Fall  $k \bmod 2 = 1$  ist es bei einigen Aussagen notwendig für  $k$  die Ausprägungen  $k \in \{5, 7, 9\}$  gesondert zu betrachten. Für  $k \geq 11$  sind die Aussagen und Beweise vollkommen analog zu denen im Fall  $k \bmod 2 = 0$ . Dennoch werden die Beweise der Vollständigkeit halber noch einmal dargestellt. Wie im Fall  $k \bmod 2 = 0$  soll im ungeraden Fall zunächst eine erste untere Schranke für  $\nu(P(n, k))$  bestimmt werden. Es ergibt sich die nachfolgende Proposition:

**Lemma 4.37:**

Sei  $k \geq 5$  und  $n > 8k$ . Dann gilt

- 1.)  $\{C \subset P(n, k) \mid |V_{out}^C| = \varrho \text{ und } d(C) \leq 8\} = \emptyset$  für alle  $\varrho \in \{0, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$  und  $k \geq 7$
- 2.)  $\{C \subset P(n, k) \mid |V_{out}^C| = \varrho \text{ und } d(C) \leq 8\} = \emptyset$  für alle  $\varrho \in \{0, 2, 3, 5, 7, 8\}$  und  $k = 5$
- 3.)  $\{C \subset P(n, k) \mid |V_{out}^C| = 6 \text{ und } d(C) \leq 8\} = \{\bar{C} \subset P(n, k) \mid |V_{out}^{\bar{C}}| = 6 \text{ und } |V_{in}^{\bar{C}}| = 2\}$  für  $k = 5$
- 4.)  $\{C \subset P(n, k) \mid |V_{out}^C| = 1 \text{ oder } |V_{in}^C| = 1\} = \emptyset$
- 5.)  $\{C \subset P(n, k) \mid |V_{out}^C| = 4 \text{ und } d(C) \leq 8\} = \{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$

**Beweis:**

Die Behauptungen 1.)-3.) werden zusammen bewiesen. Die Ausprägungen von  $\varrho$  werden dabei analog zum Beweis von Lemma 4.10 1.) separat betrachtet. Die Beweise verlaufen identisch. Lediglich der Fall  $\varrho = 6$  ist anzupassen. Ebenso werden die Behauptungen 4.) und 5.) analog zu den Behauptungen 2.) und 3.) aus Lemma 4.10 bewiesen.

- 1.) (e)  $\varrho = 6$ : Sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit  $|V_{out}^C| = 6$  und  $d(C) \leq 8$ . In diesem Fall erhält man  $|V_{in}^C| = 2$  und  $d(C) = 8$ , sowie  $|E_{in}^C| = 1$ . Weiterhin gilt  $V_{out}^C = \{v_i, v_{[i+1]}, v_{[i+2]}, v_{[i+3]}, v_{[i+4]}, v_{[i+5]}\}$  und damit einer der folgenden beiden Fälle:

- (i)  $k = 5$ : Es gilt  $E_{in}^C = \{(u_i, u_{[i+5]})\} \subset E_{in}^{P(n,5)}$ . Damit ergibt sich Behauptung 3.).

(ii)  $k \geq 7$ : Dann ist  $(u_i, u_{[i+5]}) \notin E_{in}^{P(n,k)}$  und somit  $n = k + 5$ . Es folgt ein Widerspruch zu  $n > 8k$ .  $\square$

Mit Lemma 4.37 erhält man sofort:

**Korollar 4.38:**

Sei  $k \geq 5$ ,  $n > 8k$  und  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis, dann gilt

1.)  $d(C) \geq 8$

2.) für  $k = 5$ :

$$d(C) = 8 \Leftrightarrow C \in \{\{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\} \cup \{\bar{C} \subset P(n, k) \mid |V_{out}^{\bar{C}}| = 6 \text{ und } |V_{in}^{\bar{C}}| = 2\}\}$$

3.) für  $k \geq 7$ :

$$d(C) = 8 \Leftrightarrow C \in \{SC_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$$

**Beweis:**

Die Behauptungen folgen aus Lemma 4.37.  $\square$

Mit den Aussagen aus Lemma 4.37 und Korollar 4.38 folgt, wie im Fall  $k \bmod 2 = 0$ :

**Proposition 4.39:**

Sei  $k \geq 5$  und  $n > 8k$ . Es gilt

$$girth(P(n, k)) = 8.$$

**Beweis:**

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Proposition 4.12.  $\square$

Mit Hilfe von Proposition 4.39 kann man analog, zum Fall  $k \bmod 2 = 0$ , erste Schranken für  $\nu(P(n, k))$  angeben.

**Lemma 4.40:**

Für  $k \geq 5$  und  $n > 8k$  gilt

$$(i) \quad \nu(P(n, k)) \geq \lfloor \frac{n}{2k-1} \rfloor \cdot \frac{k-1}{2}$$

$$(ii) \quad \nu(P(n, k)) \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$$

**Beweis:**

(i) Es ist

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{SC_0, SC_2, \dots, SC_{k-3}, SC_{2k-1}, SC_{2k+1}, \dots, SC_{3k-4}, SC_{4k-2}, SC_{4k}, \dots, \\ SC_{5k-5}, \dots, SC_{(\lfloor \frac{n}{2k-1} \rfloor - 1) \cdot (2k-1)}, SC_{(\lfloor \frac{n}{2k-1} \rfloor - 1) \cdot (2k-1) + 2}, \dots, SC_{\lfloor \frac{n}{2k-1} \rfloor \cdot (2k-1) - k - 2}\}$$

eine Kreispackung mit  $\lfloor \frac{n}{2k-1} \rfloor \cdot \frac{k-1}{2}$  Kreisen.

(ii) Die Behauptung folgt unmittelbar aus  $girth(P(n, k)) = 8$ . Da ein Graph  $P(n, k)$  3-regulär ist, gilt

$$\nu(P(n, k)) \leq \frac{|V(P(n, k))|}{girth(P(n, k))} = \frac{2n}{8} = \frac{n}{4}. \quad \square$$

Analog zum Fall  $k \bmod 2 = 0$ , lässt sich die untere Schranke auch im Fall  $k \bmod 2 = 1$  noch verschärfen. Dazu wird die folgende eindeutige Schreibweise von  $n$  verwendet.

**Lemma 4.41:**

Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  gibt es eindeutig bestimmte Zahlen

$$j \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 0 \leq r \leq 2k - 2 \text{ mit } r \in \mathbb{N}_0.$$

mit der Eigenschaft

$$n = j \cdot (2k - 1) + r$$

**Beweis:**

Man erhält  $j = \lfloor \frac{n}{2k-1} \rfloor$ . Die Zahl  $r$  gibt den Rest bei der Division von  $n$  durch  $2k - 1$  an.  $\square$

Im weiteren Verlauf dieses Unterkapitels wird durchgehend  $n = j \cdot (2k - 1) + r$  mit  $j, r \in \mathbb{N}_0$  und  $0 \leq r \leq 2k - 2$  vorausgesetzt. Damit kann die untere Schranke aus Lemma 4.40 verschärft werden.

**Lemma 4.42:**

Sei  $k \geq 5$  und  $n > 8k$ , dann gilt

$$\nu(P(n, k)) \geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor = 2j + \left\lfloor \frac{r}{6} \right\rfloor \quad \text{für } k = 5$$

und

$$\nu(P(n, k)) \geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r - (k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \quad \text{für } k \geq 7$$

**Beweis:**

Es ist

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{SC_0, SC_2, \dots, SC_{k-3}, SC_{2k-1}, SC_{2k}, \dots, SC_{3k-4}, SC_{4k-2}, SC_{4k-1}, \dots, SC_{j(2k-1)-2k+1}, SC_{j(2k-1)-2k+2}, \dots, SC_{j(2k-1)-k-2}\}$$

eine Kreispackung mit  $\frac{j(k-1)}{2}$  Kreisen. Unterscheide die nachfolgenden Fälle:

1.)  $k = 5$ :

(a) Sei  $0 \leq r \leq 5$ : Dann gilt

$$\left\lfloor \frac{r}{6} \right\rfloor = 0$$

und  $\tilde{\mathcal{P}}$  ist eine entsprechende Kreispackung mit  $\frac{j(k-1)}{2}$  Kreisen.

(b)  $r = 6$ : In diesem Fall erhält man

$$\left\lfloor \frac{r}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{6} \right\rfloor = 1$$

Es gilt  $2k - 1 = 9$ . Sei  $C_{9j} = (V(C_{9j}), E(C_{9j}))$  der durch die Knotenmenge

$$V(C_{9j}) := \{v_{9j}, v_{9j+1}, \dots, v_{9j+5-1}, v_{9j+5}\} \cup \{u_{9j}, u_{9j+5}\}$$

induzierte Kreis. Dieser hat genau 6 Außen- und zwei Innenknoten, dann ist

$$\mathcal{P}_{neu}^1 = \tilde{\mathcal{P}} \cup \{C_{9j}\}$$

eine Kreispackung mit  $\frac{j(k-1)}{2} + 1 = 2j + 1$  Kreisen.

(c)  $7 \leq r \leq 8$ : Das bedeutet wiederum

$$\left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{6} \right\rfloor = 1.$$

$\mathcal{P}_{neu}^1$  ist, wie zuvor, eine entsprechende Kreispackung mit  $\frac{j(k-1)}{2} + 1 = 2j + 1$  Kreisen.

2.)  $k \geq 7$ :

(a) Sei  $0 \leq r \leq k$ : Es gilt

$$\left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{r - (k+3)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor = 0 \cdot \left\lfloor \frac{r - (k+3)}{2} \right\rfloor + 0 = 0$$

und  $\tilde{\mathcal{P}}$  ist eine entsprechende Kreispackung mit  $\frac{j(k-1)}{2}$  Kreisen.

(b)  $r = k + 1$ : In diesem Fall erhält man

$$\left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor = 0 \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + 1 = 1$$

Sei  $C_{j \cdot (2k-1)} = (V(C_{j \cdot (2k-1)}), E(C_{j \cdot (2k-1)}))$  der durch die Knotenmenge

$$V(C_{j \cdot (2k-1)}) := \{v_{j \cdot (2k-1)}, v_{j \cdot (2k-1)+1}, \dots, v_{j \cdot (2k-1)+k-1}, v_{j \cdot (2k-1)+k}\} \\ \cup \{u_{j \cdot (2k-1)}, u_{j \cdot (2k-1)+k}\}$$

induzierte Kreis. Dieser hat genau  $k + 1$  Außen- und zwei Innenknoten, dann ist

$$\mathcal{P}_{neu}^1 = \tilde{\mathcal{P}} \cup \{C_{j \cdot (2k-1)}\}$$

eine Kreispackung mit  $\frac{j(k-1)}{2} + 1$  Kreisen.

(c)  $k + 2 \leq r \leq k + 3$ : Das bedeutet wiederum

$$\left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor = 0 \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + 1 = 1.$$

$\mathcal{P}_{neu}^1$  ist, wie zuvor, eine entsprechende Kreispackung mit  $\frac{j(k-1)}{2} + 1$  Kreisen.

(d)  $r = k + 4$ : Es folgt

$$\left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor = 1 \cdot 1 + 1 = 2.$$

Eine Kreispackung mit  $\frac{j(k-1)}{2} + 2$  Kreisen ist gegeben durch

$$\mathcal{P}_{neu}^2 = \tilde{\mathcal{P}} \cup \{SC_{j \cdot (2k-1)}, SC_{j \cdot (2k+1)+2}\}$$

(e)  $k + 5 \leq r \leq 2k - 2$ : In diesen Fällen gilt

$$\left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor = 1 \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + 1.$$

Unterscheide zwei Fälle:

i.  $r \bmod 2 = 0$ : Die Kreispackung

$$\mathcal{P}_{neu}^3 = \tilde{\mathcal{P}} \cup \{SC_{j(2k-1)}, SC_{j(2k-1)+2} \dots, SC_{j(2k-1)+r-(k+3)}\}$$

ist eine entsprechende Kreispackung mit  $\frac{j(k-1)}{2} + \frac{r-(k+3)}{2} + 1$  Kreisen.

ii.  $r \bmod 2 = 1$ : In diesem Fall ist

$$\mathcal{P}_{neu}^4 = \tilde{\mathcal{P}} \cup \{SC_{j(2k-1)}, SC_{j(2k-1)+2}, \dots, SC_{j(2k-1)+r-(k+3)+1}\}.$$

eine Kreispackung mit  $\frac{j(k-1)}{2} + \frac{r-(k+3)+1}{2} + 1$  Kreisen. □

Das Vorgehen, nach dem die einzelnen Kreispackungen im Beweis von Lemma 4.42 konstruiert wurden, ist analog zum Fall  $k \bmod 2 = 0$ . Trotzdem ist die resultierende verschärfte untere Schranke schlechter, als im Fall mit  $k \bmod 2 = 0$ . Den Grund erkennt man in der nachfolgenden Abbildung 4.31.

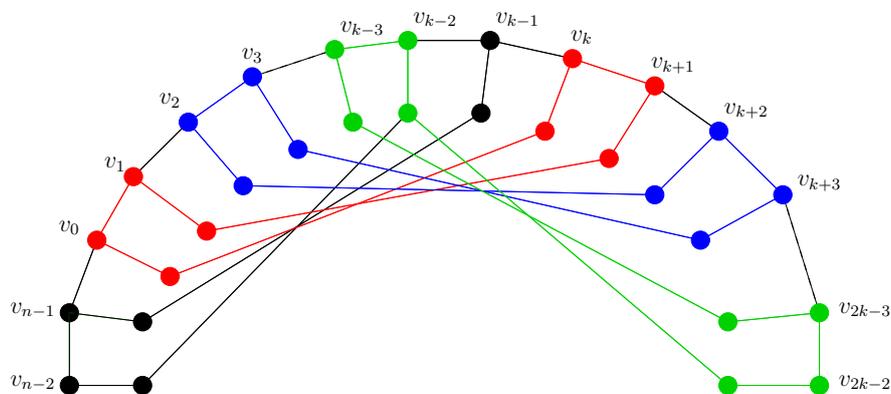


Abbildung 4.31: Eine Veranschaulichung der Kreise  $SC_i$  im Fall  $k \bmod 2 = 1$

Wie man sieht, sind die Knoten  $v_{k-1}$  und  $u_{k-1}$  in keinem Kreis enthalten. Dies setzt sich in der Konstruktion fort, so dass schon in der Kreispackung

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{SC_0, SC_2, \dots, SC_{k-3}, SC_{2k-1}, SC_{2k}, \dots, SC_{3k-4}, SC_{4k-2}, SC_{4k-1}, \dots, SC_{j(2k-1)-2k+1}, SC_{j(2k-1)-2k+2}, \dots, SC_{j(2k-1)-k-2}\}$$

insgesamt  $2j$  Außen- bzw. Innenknoten der Knoten  $v_0, \dots, v_{j(2k-1)-1}, u_0, \dots, u_{j(2k-1)-1}$  frei bleiben. Dadurch ist die verschärfte untere Schranke mit steigendem  $n$  und damit auch steigendem  $j$  wesentlich schlechter, als im Fall  $k \bmod 2 = 0$ . Es ist dennoch möglich, unter Verwendung der unteren Schranke aus Lemma 4.42, einige Aussagen über die Kreise einer maximalen Kreispackung zu machen.

**Lemma 4.43:**

Sei  $k \geq 5$ ,  $n \geq 16k - 7$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Zudem sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis. Es gilt:

1.) Falls  $V_{in}^C = \emptyset$ , folgt  $C \notin \mathcal{P}$ .

2.) Sei  $\tilde{\lambda}_1 := |\{\tilde{C} \in \mathcal{P} \mid |V_{in}^{\tilde{C}}| = 2\}|$ , dann ergibt sich

$$(a) \tilde{\lambda}_1 \leq \frac{5j}{4} + 4 \text{ falls } k = 5$$

$$(b) \tilde{\lambda}_1 \leq \frac{2j+4k}{k-5} \text{ falls } k \geq 7$$

3.) Falls  $|V_{in}^C| = 3$ , dann gilt einer der beiden folgenden Fälle

(a)  $C \notin \mathcal{P}$ .

(b)  $C \in \mathcal{P}$  und es existiert ein Kreis  $\hat{C} \subset P(n, k)$  mit  $|V_{in}^{\hat{C}}| = 2$ , so dass  $\hat{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} \setminus \{C\}) \cup \{\hat{C}\}$  eine maximale Kreispackung ist.

**Beweis:**

Es sei  $\tau := ggT(n, k)$ , wie zuvor.

1.) Es sei angenommen, dass  $C \in \mathcal{P}$  gilt. Der Kreis  $C$  belegt alle Außenknoten. Somit gilt für jeden weiteren Kreis  $C' \in \mathcal{P}$  mit  $C' \neq C$ , dass  $V_{out}^{C'} = \emptyset$  und

$$\nu(P(n, k)) = \tau + 1 \leq k + 1$$

Aus Lemma 4.40 ist allerdings  $\nu(P(n, k)) \geq \frac{j(k-1)}{2}$  bekannt. Daher muss  $\frac{j(k-1)}{2} \leq k+1$  gelten. Es ergibt sich  $j \leq 3$  und damit  $n \leq 8(2k - 1)$ . Das ist ein Widerspruch zu  $n \geq 16k - 7$  und es gilt in diesem Fall  $C \notin \mathcal{P}$ .

2.) Man betrachte die folgenden beiden Fälle separat:

(a)  $k = 5$ : Sei  $\tilde{C} \subset P(n, k)$  ein Kreis mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$ . Dann gilt  $|V_{out}^{\tilde{C}}| = 6$  oder  $|V_{out}^{\tilde{C}}| = n - 4$ .

Angenommen, es gilt  $|V_{out}^{\tilde{C}}| = n - 4$  und  $C \in \mathcal{P}$ , dann enthält  $\mathcal{P}$  höchstens zwei Kreise mit genau zwei Außenknoten. Für jeden weiteren Kreis in  $\mathcal{P}$  ist die Menge der Außenknoten leer. Es folgt

$$\nu(P(n, 5)) \leq \tau + 1 + 2 \leq k + 3 = 8.$$

Nach Lemma 4.40 gilt aber  $\nu(P(n, 5)) \geq 2j \geq 18$ . Somit erhält man einen Widerspruch.

Folglich gilt für jeden Kreis  $\bar{C} \in \mathcal{P}$  mit  $|V_{in}^{\bar{C}}| = 2$ , dass  $|V_{out}^{\bar{C}}| = 6$  ist. Nimmt man  $\tilde{\lambda}_1 \geq 1$  an, so enthält  $\mathcal{P}$  höchstens vier Kreise  $C'$  mit  $V_{out}^{C'} = \emptyset$ . Folglich belegt jeder weitere Kreis in  $\mathcal{P}$  mindestens zwei Außenknoten. Damit ergibt sich

$$(|V_{out}| - 6\tilde{\lambda}_1)/2 + \tilde{\lambda}_1 + 4 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, k))$$

und somit

$$\begin{aligned} (n - 6\tilde{\lambda}_1)/2 + \tilde{\lambda}_1 + 4 &\geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor = 2j + \left\lfloor \frac{r}{6} \right\rfloor \\ &\Leftrightarrow \\ (9j + r - 6\tilde{\lambda}_1)/2 + \tilde{\lambda}_1 + 4 &\geq 2j + \left\lfloor \frac{r}{6} \right\rfloor \\ &\Leftrightarrow \\ 9j + r - 6\tilde{\lambda}_1 + 2\tilde{\lambda}_1 + 8 &\geq 4j + 2 \cdot \left\lfloor \frac{r}{6} \right\rfloor \\ &\Leftrightarrow \\ 5j + r - 4\tilde{\lambda}_1 + 8 &\geq 2 \cdot \left\lfloor \frac{r}{6} \right\rfloor \\ &\Leftrightarrow \\ 5j + r + 8 - 2 \cdot \left\lfloor \frac{r}{6} \right\rfloor &\geq 4\tilde{\lambda}_1 \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{5j + r + 8 - 2 \cdot \left\lfloor \frac{r}{6} \right\rfloor}{4} &\geq \tilde{\lambda}_1 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \frac{5j + 8 + 8 - 2 \cdot 0}{4} = \frac{5j}{4} + 4$$

- (b)  $k \geq 7$ : Für jeden Kreis  $\tilde{C} \in P(n, k)$  mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$  ergibt sich  $d(\tilde{C}) \geq k + 3$ . Da  $\mathcal{P}$  maximal ist, folgt mit der unteren Schranke aus Lemma 4.42 und  $girth(P(n, k)) = 8$

$$(|V| - \tilde{\lambda}_1(k+3))/8 + \tilde{\lambda}_1 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, k))$$

und damit

$$(|V| - \tilde{\lambda}_1(k+3))/8 + \tilde{\lambda}_1 \geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r - (k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor$$

Wegen  $|V| = 2n$  und  $n = j(2k - 1) + r$  gilt

$$\begin{aligned} (2(j(2k-1)+r)-\tilde{\lambda}_1(k+3))/8+\tilde{\lambda}_1 &\geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \\ &\Leftrightarrow \\ (4jk-2j+2r-\tilde{\lambda}_1(k+3))/8+\tilde{\lambda}_1 &\geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \\ &\Leftrightarrow \\ 4jk-2j+2r-\tilde{\lambda}_1k-3\tilde{\lambda}_1+8\tilde{\lambda}_1 &\geq 4jk-4j+8 \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + 8 \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \end{aligned}$$

Folglich erhält man

$$2j + 2r - \tilde{\lambda}_1k + 5\tilde{\lambda}_1 \geq 8 \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + 8 \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor$$

und somit

$$\tilde{\lambda}_1(k-5) \leq 2j + 2r - 8 \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil - 8 \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor$$

Man unterscheidet nun drei Fälle:

i.  $r \leq k$ : Dann gilt

$$\tilde{\lambda}_1(k-5) \leq 2j + 2r \leq 2j + 2k$$

und somit

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \frac{2j + 2k}{k - 5}$$

ii.  $k + 1 \leq r \leq k + 3$ : Man erhält

$$\tilde{\lambda}_1(k-5) \leq 2j + 2r - 8 \leq 2j + 2k - 2$$

und daher

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \frac{2j + 2k - 2}{k - 5}$$

iii.  $r \geq k + 4$ : Das bedeutet

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1(k-5) &\leq 2j + 2r - 8 \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil - 8 \\ &\leq 2j + 2(2k-2) - 8 \left\lceil \frac{k+4-(k+3)}{2} \right\rceil - 8 \\ &= 2j + 4k - 4 - 8 - 8 \\ &= 2j + 4k - 20. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \frac{2j + 4k - 20}{k - 5}$$

Es folgt

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \max \left\{ \frac{2j + 2k}{k - 5}, \frac{2j + 2k - 2}{k - 5}, \frac{2j + 4k - 20}{k - 5} \right\} \leq \frac{2j + 4k}{k - 5}.$$

3.) Sei o. B. d. A.  $V_{in}^C = \{u_0, u_k, u_{2k}\}$ . Die Menge der Außenknoten  $V_{out}^C$  induziert einen Weg. Es wird angenommen, dass  $C \in \mathcal{P}$  gilt, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- (i)  $v_1 \in V_{out}^C$ : In diesem Fall gilt  $V_{out}^C = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{2k-1}, v_{2k}\}$  und  $C$  kann durch den Kreis  $\hat{C}$  mit  $V_{out}^{\hat{C}} = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_k\}$  und somit  $|V_{in}^{\hat{C}}| = 2$  substituiert werden. Es folgt (b).
- (ii)  $v_1 \notin V_{out}^C$ : Im zweiten Fall gilt  $V_{out}^C = \{v_{2k}, v_{2k+1}, v_{2k+2}, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_0\}$  und  $|V_{out}^C| = n - (2k - 1)$ . Jeder weitere Kreis  $C' \in \mathcal{P}$  mit  $C' \neq C$  hat entweder keine oder mindestens zwei Außenknoten. Da  $C \in \mathcal{P}$ , erhält man

$$|\{C' \in \mathcal{P} \mid V_{out}^{C'} = \emptyset\}| \leq \tau - 1 \leq k - 1$$

und

$$|\{C'' \in \mathcal{P} \mid |V_{out}^{C''}| \geq 2\}| \leq \frac{|V_{out}| - |V_{out}^C|}{2} = \frac{2k - 1}{2} = k - \frac{1}{2}.$$

Es folgt

$$|\mathcal{P}| \leq k - 1 + k - \frac{1}{2} + 1$$

Auf Grund der unteren Schranke in Lemma 4.40 muss allerdings gelten

$$\frac{j(k - 1)}{2} \leq \nu(P(n, k)) = |\mathcal{P}| \leq 2k - \frac{1}{2}$$

Folglich ergibt sich

$$j(k - 1) \leq 4k - 1 \quad \Leftrightarrow \quad j \leq 4 + \frac{3}{k - 1} < 5$$

und somit

$$n < 5(2k - 1)$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme  $n \geq 16k - 7$ . Die Annahme  $C \in \mathcal{P}$  ist in diesem Fall falsch.  $\square$

Aus Lemma 4.43 kann man wiederum folgern, dass für jeden Kreis  $C$  in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  gilt  $|V_{in}^C| \geq 2$ . Des weiteren wurde gezeigt, dass  $\mathcal{P}$  für  $k \geq 7$  höchstens  $\frac{2j+4k}{k-5}$  Kreise  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$  enthält. Der Fall  $k = 5$  ist separat zu betrachten, da in diesem Fall  $k + 3 = 8$  gilt. Es ergibt sich, dass  $\mathcal{P}$  in diesem Fall höchstens  $\frac{5j}{4} + 4$  Kreise  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$  enthält. Außerdem kann man für eine betrachtete maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  annehmen, dass  $\{\hat{C} \in \mathcal{P} \mid |V_{in}^{\hat{C}}| = 3\} = \emptyset$ . Damit ergibt sich für jeden weiteren Kreis  $\bar{C} \in \mathcal{P}$  mit  $|V_{in}^{\bar{C}}| \neq 2$ , dass  $|V_{in}^{\bar{C}}| \geq 4$ .

Im Folgenden wird unter der Verwendung von Lemma 4.43 bewiesen, dass ein Kreis  $C$  im Graphen  $P(n, k)$  (mit ausreichend großem  $n$ ), welcher keine Außenknoten hat oder dessen Menge der Außenknoten  $V_{out}^C$  einen Weg  $W$  der Länge  $d(W) \leq k - 1$  induzieren, nicht in einer maximalen Kreispackung vom  $P(n, k)$  mit  $k \geq 11$  enthalten ist.

**Lemma 4.44:**

Es sei  $k \geq 11$ ,  $n \geq 32k^2 + 120k$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Zudem sei  $C \subset P(n, k)$  ein Kreis mit einer der folgenden beiden Eigenschaften:

- 1.)  $E_{out}^C = \{(v_j, v_{[j+1]}), \dots, (v_{[j+i-1]}, v_{[j+i]})\}$  und  $1 \leq i \leq k - 1$
- 2.)  $V_{out}^C = \emptyset$

Dann gilt

$$C \notin \mathcal{P}.$$

**Beweis:**

Aus Lemma 4.43 ist bekannt, dass es in  $\mathcal{P}$  höchstens  $\frac{2j+4k}{k-5}$  Kreise  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$  gibt und dass jeder weitere Kreis  $\hat{C} \in \mathcal{P}$  die Eigenschaft  $|V_{in}^{\hat{C}}| \geq 4$  hat.

Nun sei angenommen, dass  $C \in \mathcal{P}$ . Da vorausgesetzt wurde, dass entweder  $E_{out}^C = \{(v_j, v_{[j+1]}), \dots, (v_{[j+i-1]}, v_{[j+i]})\}$  und  $1 \leq i \leq k - 1$  oder  $V_{out}^C = \emptyset$  gilt, folgt  $|V_{in}^C| \geq \lfloor \frac{n}{7} \rfloor \geq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  und es ergibt sich auf Grund der unteren Schranke in Lemma 4.42

$$\begin{aligned} \left( |V_{in}| - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 2 \cdot \frac{2j+4k}{k-5} \right) / 4 + 1 + \frac{2j+4k}{k-5} &\geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, k)) \\ &\geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \end{aligned}$$

Wegen  $|V_{in}| = n = j(2k - 1) + r$  folgt

$$\begin{aligned}
 & \left( j(2k-1) + r - \left\lfloor \frac{j(2k-1) + r}{k} \right\rfloor - 2 \cdot \frac{2j+4k}{k-5} \right) / 4 + 1 + \frac{2j+4k}{k-5} \\
 & \geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \left( 2jk - j + r - 2j - \left\lfloor \frac{-j+r}{k} \right\rfloor - 2 \cdot \frac{2j+4k}{k-5} \right) / 4 + 1 + \frac{2j+4k}{k-5} \\
 & \geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \\
 & \Leftrightarrow \\
 & 2jk + r - 3j - \left\lfloor \frac{-j+r}{k} \right\rfloor - 2 \cdot \frac{2j+4k}{k-5} + 4 + 4 \cdot \frac{2j+4k}{k-5} \\
 & \geq 2j(k-1) + 4 \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + 4 \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \\
 & \Leftrightarrow \\
 & r - \left\lfloor \frac{-j+r}{k} \right\rfloor + 2 \cdot \frac{2j+4k}{k-5} + 4 \geq j + 4 \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + 4 \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor
 \end{aligned}$$

Da  $n \geq 32k^2 + 120k$ , gilt  $j > r$  und somit

$$\begin{aligned}
 & r + \left\lfloor \frac{j-r}{k} \right\rfloor + 2 \cdot \frac{2j+4k}{k-5} + 4 \geq j + 4 \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + 4 \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \\
 & \Rightarrow \\
 & r + \frac{j-r}{k} + 1 + 2 \cdot \frac{2j+4k}{k-5} + 4 \geq j + 4 \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + 4 \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \\
 & \Leftrightarrow \\
 & k(k-5)r + (k-5)(j-r) + 2k(2j+4k) + 5k(k-5) \\
 & \geq k(k-5)j + 4k(k-5) \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + 4k(k-5) \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \\
 & \Leftrightarrow \\
 & k(k-5)j - (k-5)j - 4kj \\
 & \leq k(k-5)r + 8k^2 + 5k(k-5) - r(k-5) - 4k(k-5) \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil - 4k(k-5) \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \\
 & \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (k^2 - 10k + 5)j \\
 \leq & k^2r - 5kr + 8k^2 + 5k^2 - 25k - rk + 5r - (4k^2 - 20k) \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r - (k+3)}{2} \right\rceil \\
 & - (4k^2 - 20k) \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor \\
 \Leftrightarrow & \\
 & (k^2 - 10k + 5)j \\
 \leq & k^2r - 6kr + 13k^2 - 25k + 5r - (4k^2 - 20k) \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r - (k+3)}{2} \right\rceil - (4k^2 - 20k) \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor
 \end{aligned}$$

Man unterscheide wiederum drei Fälle:

1.)  $r \leq k$ : Dann gilt

$$(k^2 - 10k + 5)j \leq k^2r - 6kr + 13k^2 - 25k + 5r$$

und damit

$$\begin{aligned}
 j & \leq \frac{k^2r - 6kr + 13k^2 - 25k + 5r}{k^2 - 10k + 5} \\
 & \leq \frac{k^3 + 13k^2 - 25k + 5k}{k^2 - 10k + 5} \\
 & = \frac{k^3 + 13k^2 - 20k}{k^2 - 10k + 5} \\
 & = k \cdot \frac{k^2 + 13k - 20}{k^2 - 10k + 5} \\
 & = k \cdot \left( 1 + \underbrace{\frac{23k - 25}{k^2 - 10k + 5}}_{<15} \right) \\
 & < 16k
 \end{aligned}$$

Dies wiederum heißt

$$n = j(2k - 1) + r < 16k(2k - 1) + r = 32k^2 - 16k + r \leq 32k^2 - 16k$$

2.)  $k + 1 \leq r \leq k + 3$ : Dann ergibt sich

$$(k^2 - 10k + 5)j \leq k^2r - 6kr + 13k^2 - 25k + 5r - (4k^2 - 20k)$$

und man erhält

$$\begin{aligned}
 j &\leq \frac{k^2 r - 6kr + 9k^2 - 5k + 5r}{k^2 - 10k + 5} \\
 &\leq \frac{k^3 + 3k^2 - 6k^2 - 6k + 9k^2 - 5k + 5k + 15}{k^2 - 10k + 5} \\
 &= \frac{k^3 + 6k^2 - 6k + 15}{k^2 - 10k + 5} \\
 &= k \cdot \left( \frac{k^2 + 6k - 6 + \frac{15}{k}}{k^2 - 10k + 5} \right) \\
 &= k \cdot \left( 1 + \underbrace{\frac{16k - 11 + \frac{15}{k}}{k^2 - 10k + 5}}_{<11} \right) \\
 &< 12k
 \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$n < 12k(2k - 1) + r = 24k^2 - 12k + r \leq 24k^2 - 12k$$

3.)  $r \geq k + 4$ : Dann gilt

$$\begin{aligned}
 (k^2 - 10k + 5)j &\leq k^2 r - 6kr + 13k^2 - 25k + 5r - (4k^2 - 20k) \left\lceil \frac{r - (k + 3)}{2} \right\rceil - (4k^2 - 20k) \\
 &\Leftrightarrow \\
 (k^2 - 10k + 5)j &\leq k^2 r - 6kr + 9k^2 - 5k + 5r - 4k^2 \left\lceil \frac{r - (k + 3)}{2} \right\rceil + 20k \left\lceil \frac{r - (k + 3)}{2} \right\rceil \\
 &\Leftrightarrow \\
 &(k^2 - 10k + 5)j \\
 &\leq k^2(2k - 2) - 6k(k + 4) + 9k^2 - 5k + 5(2k - 2) - 4k^2 + 20k \left\lceil \frac{2k - 2 - (k + 3)}{2} \right\rceil \\
 &\Leftrightarrow \\
 (k^2 - 10k + 5)j &\leq 2k^3 - 2k^2 - 6k^2 - 24k + 5k^2 - 5k + 10k - 10 + 20k \frac{k - 5}{2} \\
 &\Leftrightarrow \\
 (k^2 - 10k + 5)j &\leq 2k^3 - 3k^2 - 19k - 10 + 10k^2 - 50k = 2k^3 + 7k^2 - 69k - 10
 \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
 j &\leq \frac{2k^3 + 7k^2 - 69k - 10}{k^2 - 10k + 5} \\
 &= k \cdot \left( \frac{2k^2 + 7k - 69 - \frac{10}{k}}{k^2 - 10k + 5} \right) \\
 &= k \cdot \left( 2 + \underbrace{\frac{27k - 79 - \frac{10}{k}}{k^2 - 10k + 5}}_{<14} \right) \\
 &< 16k
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich analog zu 1.)

$$n < 32k^2 - 16k$$

In allen drei Fällen entsteht ein Widerspruch zu  $n \geq 32k^2 + 120k$ . Somit ist die Annahme falsch und es gilt  $C \notin \mathcal{P}$ . □

Die Aussage aus Lemma 4.44 gilt nicht für  $k \in \{5, 7, 9\}$ . Für diese drei Fälle ist es nicht möglich auszuschließen, dass eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  von  $P(n, k)$  einen Kreis  $C$  mit  $E_{out}^C = \{(v_j, v_{[j+1]}), \dots, (v_{[j+i-1]}, v_{[j+i]})\}$  und  $1 \leq i \leq k - 1$  oder  $V_{out}^C = \emptyset$  enthält. Man kann allerdings beweisen, dass  $\mathcal{P}$  höchstens einen solchen Kreis enthalten kann.

**Lemma 4.45:**

Es sei  $k \in \{5, 7, 9\}$ ,  $n \geq 56k - 28$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Zudem sei  $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}$  eine Kreispackung, für die gilt: Jeder Kreis  $C \in \mathcal{P}_1$  erfüllt eine der folgenden beiden Eigenschaften:

- 1.)  $E_{out}^C = \{(v_j, v_{[j+1]}), \dots, (v_{[j+i-1]}, v_{[j+i]})\}$  und  $1 \leq i \leq k - 1$
- 2.)  $V_{out}^C = \emptyset$

Des weiteren sei  $\tilde{\lambda}_4 := |\mathcal{P}_1|$ . Dann gilt

$$\tilde{\lambda}_4 \leq 1.$$

**Beweis:**

Man nehme an, dass  $\mathcal{P}_1 \neq \emptyset$  ist. Da vorausgesetzt wurde, dass für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}_1$  entweder  $E_{out}^C = \{(v_j, v_{[j+1]}), \dots, (v_{[j+i-1]}, v_{[j+i]})\}$  und  $1 \leq i \leq k - 1$  oder  $V_{out}^C = \emptyset$  gilt, folgt  $|V_{in}^C| \geq \lfloor \frac{n}{\tau} \rfloor \geq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  für alle  $C \in \mathcal{P}_1$ . Auf Grund der unteren Schranke in Lemma 4.42

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \left( |V| - \tilde{\lambda}_4 \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right) / 8 + \tilde{\lambda}_4 \geq \frac{j(k-1)}{2} \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \left( 2n - \tilde{\lambda}_4 \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right) / 8 + \tilde{\lambda}_4 \geq \frac{j(k-1)}{2} \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \left( 2(j(2k-1) + r) - \tilde{\lambda}_4 \left\lfloor \frac{j(2k-1) + r}{k} \right\rfloor \right) / 8 + \tilde{\lambda}_4 \geq \frac{j(k-1)}{2} \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \left( 2j(2k-1) + 2r - \tilde{\lambda}_4 \left\lfloor 2j + \frac{-j+r}{k} \right\rfloor \right) / 8 + \tilde{\lambda}_4 \geq \frac{j(k-1)}{2} \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \left( 4jk - 2j + 2r - \tilde{\lambda}_4 \cdot 2j - \tilde{\lambda}_4 \left\lfloor \frac{-j+r}{k} \right\rfloor \right) / 8 + \tilde{\lambda}_4 \geq \frac{j(k-1)}{2} \\
 & \Leftrightarrow \\
 & 4jk - 2j + 2r - \tilde{\lambda}_4 \cdot 2j - \tilde{\lambda}_4 \left\lfloor \frac{-j+r}{k} \right\rfloor + 8\tilde{\lambda}_4 \geq 4jk - 4j \\
 & \Leftrightarrow \\
 & 2j + 2r - \tilde{\lambda}_4 \cdot 2j - \tilde{\lambda}_4 \left\lfloor \frac{-j+r}{k} \right\rfloor + 8\tilde{\lambda}_4 \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \\
 & 2j + 2r - \tilde{\lambda}_4 \cdot 2j + \tilde{\lambda}_4 \left\lfloor \frac{j-r}{k} \right\rfloor + 8\tilde{\lambda}_4 \geq 0 \\
 & \Rightarrow \\
 & 2j + 2r - \tilde{\lambda}_4 \cdot 2j + \tilde{\lambda}_4 \cdot \frac{j-r}{k} + \tilde{\lambda}_4 + 8\tilde{\lambda}_4 \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \\
 & 2jk + 2rk - \tilde{\lambda}_4 \cdot 2jk + \tilde{\lambda}_4 \cdot (j-r) + 9\tilde{\lambda}_4 k \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \\
 & 2jk + 2rk \geq \tilde{\lambda}_4 \cdot 2jk - \tilde{\lambda}_4 \cdot (j-r) - 9\tilde{\lambda}_4 k \\
 & \Leftrightarrow \\
 & 2jk + 2rk \geq (2jk - (j-r) - 9k)\tilde{\lambda}_4 \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \frac{2jk + 2rk}{2jk - (j-r) - 9k} \geq \tilde{\lambda}_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \\ &\frac{2jk - j + j + r - r - 9k + 9k + 2rk}{2jk - (j - r) - 9k} \geq \tilde{\lambda}_4 \\ &\Leftrightarrow \\ &1 + \frac{j - r + 9k + 2rk}{2jk - (j - r) - 9k} \geq \tilde{\lambda}_4 \end{aligned}$$

Auf Grund von  $n \geq 56k - 28$ , folgt

$$\tilde{\lambda}_4 \leq 1 + \frac{j - r + 9k + 2rk}{2jk - (j - r) - 9k} < 2$$

und damit

$$\tilde{\lambda}_4 \leq 1$$

Aus Lemma 4.44 ergibt sich für  $k \geq 11$  analog zum Fall  $k \bmod 2 = 0$  sofort, dass ein Kreis  $C$  einer maximalen Kreispackung mindestens vier Außenknoten enthält.

**Lemma 4.46:**

Sei  $k \geq 11$ ,  $n \geq 32k^2 + 120k$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Weiterhin sei  $C \in \mathcal{P}$  ein Kreis, dann gilt

$$|V_{out}^C| \geq 4.$$

**Beweis:**

Nach Lemma 4.44 gilt  $V_{out}^C \neq \emptyset$ . Angenommen  $V_{out}^C$  induziert einen zusammenhängenden Untergraphen, dann gilt nach Lemma 4.44, dass  $|V_{out}^C| \geq k + 1$ . Andernfalls induziert  $V_{out}^C$  einen Untergraphen mit mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. In diesem Fall gilt  $|V_{out}^C| \geq 4$  und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

Für die Fälle  $k \in \{5, 7, 9\}$  lässt sich unter Verwendung von Lemma 4.45 sofort ableiten, dass eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  von  $P(n, k)$  höchstens einen Kreis mit maximal drei Außenknoten besitzt. Jeder weitere Kreis in  $\mathcal{P}$  enthält mindestens vier Außenknoten.

**Lemma 4.47:**

Sei  $k \in \{5, 7, 9\}$ ,  $n \geq 56k + 28$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Weiterhin sei  $\mathcal{P}_2 := \{C \in \mathcal{P} \mid |V_{out}^C| \leq 3\}$ , dann gelten folgende zwei Bedingungen

- 1.)  $|\mathcal{P}_2| \leq 1$
- 2.)  $|V_{out}^{\bar{C}}| \geq 4$  für alle  $\bar{C} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_2$

**Beweis:**

Nach Lemma 4.45 gilt  $\tilde{\lambda}_4 = |\mathcal{P}_1| = |\{C \in \mathcal{P} \mid E_{out}^C = \{(v_j, v_{[j+1]}), \dots, (v_{[j+i-1]}, v_{[j+i]})\} \text{ mit } 1 \leq i \leq k-1 \text{ oder } V_{out}^C = \emptyset\}| \leq 1$ . Zudem ist  $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}_1$  und damit folgt Bedingung 1.).

Für jeden Kreis  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  mit  $\tilde{C} \notin \mathcal{P}_2$  gilt per Definition  $|V_{out}^{\tilde{C}}| \geq 4$  und damit Bedingung 2.).  $\square$

Mit den Lemmata 4.44 und 4.45 kann man über die Kreise  $\tilde{C} \in P(n, k)$  einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$  (vgl. Lemma 4.43 2.)) wiederum folgende Aussagen machen.

**Lemma 4.48:**

Für  $k \geq 5$  und  $n \geq 32k^2 + 120k$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$  und  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  ein Kreis mit  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$ . Dann folgt

$$|V_{out}^{\tilde{C}}| = k + 1$$

**Beweis:**

Da  $|V_{in}^{\tilde{C}}| = 2$  folgt, dass entweder  $V_{out}^{\tilde{C}} = k + 1$  oder  $V_{out}^{\tilde{C}} > k + 1$  gilt.

Es sei angenommen, dass  $V_{out}^{\tilde{C}} > k + 1$  ist. O. B. d. A. sei  $V_{in}^{\tilde{C}} = \{u_0, u_k\}$ . Wegen  $V_{out}^{\tilde{C}} > k + 1$ , ergibt sich  $V_{out}^{\tilde{C}} = \{v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_0\}$  und  $|V_{out}^{\tilde{C}}| = n - (k - 1)$ . Analog zur Beweisführung in Lemma 4.43 3.) hat jeder weitere Kreis  $C' \in \mathcal{P}$  mit  $C' \neq \tilde{C}$  entweder keine oder mindestens zwei Außenknoten. Wegen  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  und den Lemmata 4.44 und 4.45 muss gelten

$$|\{C' \in \mathcal{P} \mid V_{out}^{C'} = \emptyset\}| \leq 1$$

und

$$|\{C'' \in \mathcal{P} \mid |V_{out}^{C''}| \geq 2\}| \leq \frac{|V_{out}| - |V_{out}^{\tilde{C}}|}{2} = \frac{k - 1}{2} = \frac{k}{2} - \frac{1}{2}.$$

Es folgt

$$|\mathcal{P}| \leq 1 + \frac{k}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

Mit der unteren Schranke in Lemma 4.40 erhält man

$$\frac{j(k-1)}{2} \leq \nu(P(n, k)) = |\mathcal{P}| \leq 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$$

Folglich ergibt sich

$$j(k-1) \leq k+3 \quad \Leftrightarrow \quad j \leq 3 + \frac{k}{k-1} = 4 + \frac{1}{k-1}$$

und somit ist

$$n < 5(2k - 1)$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme  $n \geq 32k^2 + 120k$ . Somit ist die Annahme  $V_{out}^{\tilde{C}} > k+1$  falsch und die Behauptung bewiesen.  $\square$

Nachfolgend werden wiederholt die Kreise  $C \in \mathcal{P}$  betrachtet, deren Menge der Außenknoten  $V_{out}^C$  jeweils einen Weg  $W$  der Länge  $d(W) \geq k$  induziert. Dies ist unter anderem für die Kreise der Länge  $k+3$  mit genau zwei Innenknoten der Fall.

**Lemma 4.49:**

Für  $k \geq 5$  und  $n \geq 32k^2 + 120k$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$ . Weiterhin sei  $\tilde{\lambda}_2 := |\{C \in \mathcal{P} \mid |V_{out}^C| \geq k+1\}|$ . Dann gilt:

$$\tilde{\lambda}_2 \leq \frac{j}{k-3} + 2$$

**Beweis:**

Da  $\mathcal{P}$  maximal ist, gibt es höchstens einen Kreis mit weniger als vier Aussenknoten (vgl. Lemma 4.47). Jeder weitere Kreis in  $\mathcal{P}$  mindestens vier Außenknoten belegt (vgl. Lemma 4.46), gilt

$$(|V_{out}| - \tilde{\lambda}_2(k+1))/4 + \tilde{\lambda}_2 + 1 \geq |\mathcal{P}| = \nu(P(n, k))$$

und somit, unter der Verwendung von Lemma 4.42,

$$(|V_{out}| - \tilde{\lambda}_2(k+1))/4 + \tilde{\lambda}_2 + 1 \geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor$$

Aus  $|V_{out}| = n = j(2k-1) + r$  ergibt sich auf diese Weise

$$(j(2k-1) + r - \tilde{\lambda}_2(k+1))/4 + \tilde{\lambda}_2 + 1 \geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor$$

Das heißt,

$$j(2k-1) + r - \tilde{\lambda}_2(k+1) + 4\tilde{\lambda}_2 + 4 \geq 2j(k-1) + 4 \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor$$

oder äquivalent

$$j + r - \tilde{\lambda}_2 k + 3\tilde{\lambda}_2 + 4 \geq 4 \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor$$

Es ergibt sich also allgemein die Ungleichung

$$\tilde{\lambda}_2(k-3) + 4 \leq j + r - 4 \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor$$

Nun werden drei Fälle unterschieden:

1.)  $r \leq k$ : In diesem Fall gilt

$$\tilde{\lambda}_2(k-3) \leq j+r-4 \leq j+k-4$$

Daraus folgt

$$\tilde{\lambda}_2 \leq \frac{j+k-4}{k-3} \leq \frac{j}{k-3} + 1.$$

2.)  $k+1 \leq r \leq k+3$ : In diesem Fall wird die allgemeine Ungleichung zu

$$\tilde{\lambda}_2(k-3) \leq j+r-8 \leq j+k+3-8 = j+k-5$$

Damit erhält man

$$\tilde{\lambda}_2 \leq \frac{j+k-5}{k-3} \leq \frac{j}{k-3} + 1.$$

3.)  $k+4 \leq r \leq 2k-2$ : Es ergibt sich

$$\tilde{\lambda}_2(k-3) \leq j+r-8 \leq j+2k-2-8 = j+2k-10$$

Es folgt

$$\tilde{\lambda}_2 \leq \frac{j+2k-10}{k-3} \leq \frac{j}{k-3} + 2.$$

□

Wie man in Lemma 4.49 sieht, ergibt sich für die Anzahl der Kreise der Länge  $k+3$  mit  $|V_{in}^C| = 2$  eine obere Schranke, welche von  $j$  abhängt. Dies ergibt sich, da die im Beweis verwendete untere Schranke für  $\nu(P(n, k))$  (vgl. Lemma 4.42) nicht so scharf ist, wie im Fall  $k \bmod 2 = 0$ . Da die obere Schranke aus Lemma 4.49 nicht so beschränkend ist, wie die obere Schranke im Fall  $k \bmod 2 = 0$ , stellt sich die Frage, ob Vermutung 1 auch im Fall  $k$  ungerade für hinreichend großes  $n$  gilt.

Obwohl die hergeleiteten Schranken weniger restriktiv sind, als im Fall  $k \bmod 2 = 0$ , lassen sich einige Bedingungen übertragen, unter denen Vermutung 1 auch im Fall  $k \bmod 2 = 1$  für entsprechendes  $n$  bewiesen werden kann. Dies wird nachfolgend gezeigt.

Es sei  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  der Untergraph von  $P(n, k)$ , welcher durch die Knotenmenge  $\tilde{V} = \{v_0, \dots, v_{2jk-1}, u_0, \dots, u_{j(2k-1)-1}\}$  induziert wird. Zudem sei  $R$ , wie schon im Fall  $k \bmod 2 = 0$ , der Restgraph von  $P(n, k)$ , welcher durch die Knotenmenge  $V \setminus \tilde{V}$  induziert wird, sofern diese nicht leer ist. Der Untergraph  $\tilde{G}$  und der Restgraph  $R$  sind in der Abbildung 4.32 veranschaulicht.

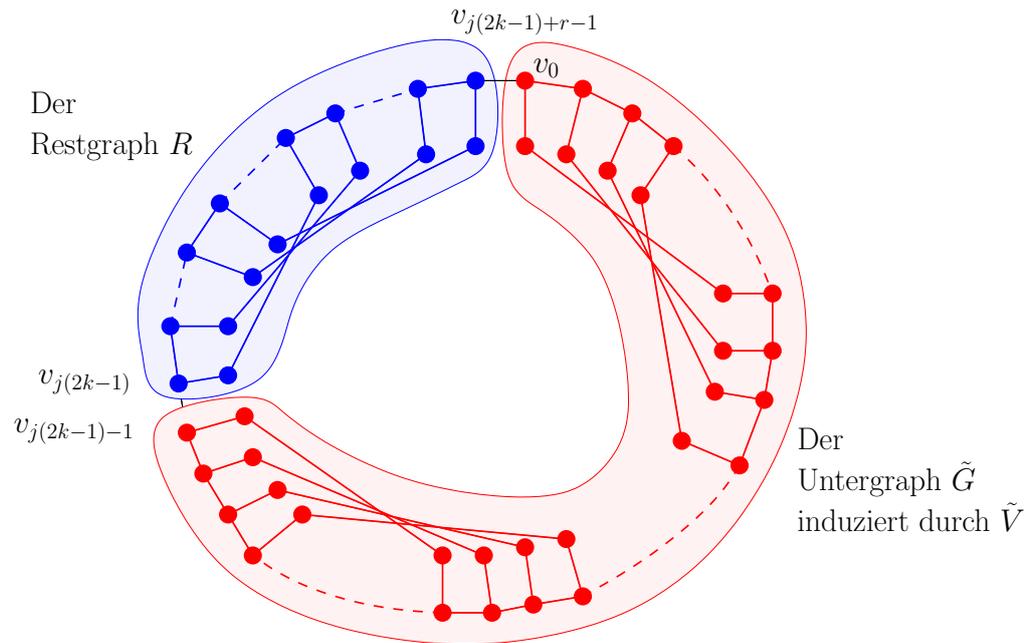


Abbildung 4.32: Eine Veranschaulichung des Untergraphen  $\tilde{G}$  im Fall  $k \bmod 2 = 1$

Für eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  sei

$$\mathcal{C}(\mathcal{P}) := \{C \in \mathcal{P} \mid V_{out}^C \cap \{v_0, \dots, v_{j(2k-1)-1}\} \neq \emptyset\}$$

die Menge aller Kreise aus  $\mathcal{P}$ , deren Knotenmenge mindestens einen Außenknoten des Untergraphen  $\tilde{G}$  enthält. Aus dem Beweis der ersten unteren Schranke für  $\nu(P(n, k))$  (Lemma 4.40 (i)), ist eine Kreispackung für  $\tilde{G}$  bekannt. Die dort konstruierte Kreispackung  $\tilde{\mathcal{P}}$  enthält  $\frac{j(k-1)}{2}$  Kreise der Länge acht und ist für  $\tilde{G}$  maximal. Um diese Tatsache für die weitere Beweisführung zu nutzen, unterscheidet man, analog zum Fall  $n \bmod 2 = 0$ , zwei Fälle:

Fall I: Es existiert eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  für die gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| \leq \frac{j(k-1)}{2}$

Fall II: Für alle maximalen Kreispackungen  $\mathcal{P}$  gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{j(k-1)}{2}$

Für den ersten Fall wird analog zu  $k \bmod 2 = 0$  gezeigt, dass die Vermutung für bestimmte Werte der Parameter  $n$  und  $k$  richtig ist. Im zweiten Fall lassen sich ebenfalls Bedingungen finden, unter denen die Vermutung stimmt, allerdings kann man die Aussagen aus Kapitel 4.2 an dieser Stelle nicht vollständig übertragen. Der Übersichtlichkeit halber sei wieder

$$\mu_8(\mathcal{P}) := |\{C \in \mathcal{P} \mid d(C) = 8\}|$$

die Anzahl von Kreisen in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  mit der Länge acht und

$$\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}) := |\{C \in \mathcal{P} \mid d(C) = k + 3, |V_{in}^C| = 2\}|,$$

die Anzahl von Kreisen in einer maximalen Kreispackung  $\mathcal{P}$  mit der Länge  $k + 3$  und genau zwei Innenknoten.

**Fall I: Es existiert eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  im Graphen**

$$P(n, k) \text{ für die gilt } |\mathcal{C}(\mathcal{P})| \leq \frac{j(k-1)}{2}$$

Mit dem folgenden Satz erhält man, dass im Fall I Vermutung 1 für  $k \geq 11$  für  $n \geq 32k^2 + 120k$  korrekt ist. Der Beweis verläuft erneut analog zum Fall  $k \bmod 2 = 0$ . Für die Beweisführung ist Lemma 4.44 von wesentlicher Bedeutung. Daher lässt sich die Aussage nicht analog auf die Fälle  $k \in \{5, 7, 9\}$  übertragen.

**Satz 4.50:**

Sei  $k \geq 11$ ,  $n \geq 32k^2 + 120k$  und  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung von  $P(n, k)$  mit  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| \leq \frac{j(k-1)}{2}$ . Dann gibt es eine maximale Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$  von  $P(n, k)$  für die gilt

$$\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) + \mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k)) \text{ und } \mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) \leq 1.$$

**Beweis:**

Man konstruiere zunächst eine neue maximale Kreispackung  $\mathcal{P}_{neu}$ , indem alle Kreise aus  $\mathcal{C}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$  durch die  $\frac{j(k-1)}{2}$  Kreise in  $\tilde{\mathcal{P}}$  ersetzt werden. Das heißt

$$\mathcal{P}_{neu} := \underbrace{(\mathcal{P} \setminus \mathcal{C}(\mathcal{P}))}_{=: \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})} \cup \tilde{\mathcal{P}}.$$

Betrachte nun die Kreispackung  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \setminus \mathcal{C}(\mathcal{P})$ . Für alle Kreise  $C \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  gilt

$$V_{out}^C \cap \{v_0, \dots, v_{j(2k-1)-1}\} = \emptyset.$$

Falls  $r \leq k$  gilt, so folgt  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) = \emptyset$ , da jeder Kreis in  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  mindestens eine Innenkante von  $R$  enthalten sein muss (vgl. Lemma 4.44). Damit ergibt sich, dass  $R$  mindestens  $k + 1$  Innenknoten hat. Wenn  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) = \emptyset$ , kann man schließen, dass  $\nu(P(n, k)) = \frac{j(k-1)}{2}$  und  $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{neu}$  eine maximale Kreispackung mit  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$  ist. Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.

Falls  $r \geq k + 1$ , unterscheide man zwei Fälle:

Fall 1: Man nehme an, dass  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) \geq 1$ . Das bedeutet, es gibt einen Kreis  $\bar{C} \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  mit  $d(\bar{C}) = k + 3$  und  $|V_{in}^{\bar{C}}| = 2$ . Wegen  $|V_{out}^{\bar{C}}| = k + 1$  gilt in diesem Fall  $r \geq k + 1$ . Man unterscheide zwei Fälle:

- a) Sei  $r \leq k + 3$ , so gilt  $|V_{out} \setminus (V_{out}^{\bar{C}} \cup V_{out}^{\hat{\mathcal{P}}})| \leq 2$  und damit  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) = \{\bar{C}\}$  und  $\nu(P(n, k)) = \frac{j(k-1)}{2} + 1$ . Somit ist  $\mathcal{P}_{neu}$  eine maximale Kreispackung mit  $\mu_8(\mathcal{P}_{neu}) = \nu(P(n, k)) - 1$  und  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) = 1$ .
- b) Sei  $k + 4 \leq r \leq 2k - 2$ , so gilt  $|V_{out} \setminus (V_{out}^{\bar{C}} \cup V_{out}^{\hat{\mathcal{P}}})| \geq 3$ . Man nehme an, dass es  $\tilde{C} \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  gibt mit  $\tilde{C} \neq \bar{C}$ . Für den Kreis  $\tilde{C}$  gilt  $|E_{in}^{\tilde{C}}| \geq 2$ , wegen der  $k + 1$  Außenknoten von  $\bar{C}$ . Sei  $j$  der kleinste Index der Menge der Innenknoten  $V_{in}^{\tilde{C}}$  von  $\tilde{C}$ , dann enthält  $E_{in}^{\tilde{C}}$ , auf Grund der Außenknoten von  $\bar{C}$ , die Kanten  $(u_j, u_{j+k})$  und  $(u_{j+k}, u_{j+2k})$ . Da  $E_{in}^{\tilde{C}} \subseteq E_{in}^{\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})}$ , ist dies ein Widerspruch zu  $r \leq 2k - 2$ . Man erhält  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) = \{\bar{C}\}$  und  $\nu(P(n, k)) = \frac{j(k-1)}{2} + 1$ . Es folgt, dass  $\mathcal{P}_{neu}$  ist eine maximale Kreispackung mit  $\mu_8(\mathcal{P}_{neu}) = \nu(P(n, k)) - 1$  und  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) = 1$ .

Es ergibt sich somit für den Fall 1, dass  $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{neu}$  eine maximale Kreispackung mit  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k)) - 1$  und  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = 1$  ist. Folglich ist für diesen Fall die Behauptung bewiesen.

Fall 2: Man nehme an, dass  $\mu_{(k+3)}(\mathcal{P}_{neu}) = 0$ . Daraus folgt, dass die Menge von Außenknoten  $V_{out}^{\hat{C}}$  eines beliebigen Kreises  $\hat{C} \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  mindestens zwei knotendisjunkte äußere Zusammenhangskomponenten von  $\hat{C}$  induziert. Zudem gilt für  $\hat{C}$ : Falls  $v_i \in V_{out}^{\hat{C}}$  und  $u_i \notin V_{in}^{\hat{C}}$ , folgt

$$u_i \notin V_{in}^{\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})},$$

da andernfalls  $(u_{[i-k]}, u_i), (u_i, u_{[i+k]}) \in E_{in}^{\hat{C}} \subseteq E_{in}^{\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})}$  wären und folglich  $r \geq 2k + 1$  gelten müsste. Dies wäre ein Widerspruch zu  $r \leq 2k - 2$ . Als Konsequenz ergibt sich

$$u_i \notin V_{in}^{\mathcal{P}_{neu}},$$

weil für einen Kreis  $\tilde{C} \in \mathcal{P}$  mit  $u_i \in V_{in}^{\tilde{C}}$  gilt, dass  $\tilde{C} \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$ . Dieser Kreis wurde in  $\mathcal{P}_{neu}$  substituiert.

Sei  $q$  der kleinste Index von  $V(\hat{C})$ . Dann gilt  $v_q, v_{[q+1]}, u_q, u_{[q+k]} \in V(\hat{C})$ . Zudem muss  $v_{[q+k]} \in V(\hat{C})$  gelten, da  $\hat{C} \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ . Es werden wieder zwei Fälle unterschieden:

- (a)  $u_{[q+1]} \in V(\hat{C})$ : Es folgt, dass  $u_{[q+k+1]}, v_{[q+k+1]} \in V(\hat{C})$ . Der Kreis  $\hat{C}$  ist entweder ein Kreis der Länge acht oder kann durch den Kreis  $SC_q$  substituiert werden.
- (b)  $u_{[q+1]} \notin V(\hat{C})$ : Wie zuvor, gilt dann  $u_{[q+1]} \notin V_{in}^{\mathcal{P}_{neu}}$ . Man unterscheide:
- Falls  $v_{[q+k+1]} \in V(\hat{C})$ , gilt ebenso  $u_{[q+k+1]} \notin V_{in}^{\mathcal{P}_{neu}}$  und der Kreis  $\hat{C}$  kann durch den Kreis  $SC_q$  substituiert werden.
  - Im Fall  $v_{[q+k+1]} \notin V(\hat{C})$ , gilt  $v_{[q+k+1]} \notin V(\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}))$  und  $u_{[q+k+1]} \notin V(\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P}))$ . Folglich kann der Kreis  $\hat{C}$  ebenfalls durch den Kreis  $SC_q$  substituiert werden.

Zusammenfassend ergibt sich im Fall 2, dass alle Kreise  $C \in \bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  durch Kreise der Länge acht substituierbar sind. Man konstruiere  $\hat{\mathcal{P}}$ , indem in  $\mathcal{P}_{neu}$  alle Kreise aus  $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  durch Kreise der Länge acht substituiert werden. Es ergibt sich, dass  $\hat{\mathcal{P}}$  eine maximale Kreispackung mit  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$  und  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = 0$  ist.

Im Fall 1 hat die Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{neu}$  die Eigenschaften  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k)) - 1$  und  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = 1$  und es gilt  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) + \mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$  und  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) \leq 1$ . Im Fall 2 wird durch die Substitution aller Kreise in  $\mathcal{P}_{neu}$  durch Kreise der Länge acht die Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$  mit  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$  und  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = 0$  erzeugt, für welche ebenfalls  $\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) + \mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k))$  und  $\mu_{(k+3)}(\hat{\mathcal{P}}) \leq 1$  gilt. Damit gibt es in beiden Fällen eine Kreispackung mit den geforderten Eigenschaften und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

Für den Fall I ist nachgewiesen, dass die Vermutung richtig ist. In diesem Fall gibt es für  $P(n, k)$  mit  $k \geq 11$  und  $n \geq 32k^2 + 120k$  immer eine maximale Kreispackung, welche ausschließlich aus Kreisen der Länge acht und höchstens einem Kreis der Länge  $k + 3$  mit genau zwei Innenknoten besteht. Man betrachte nun den Fall II.

**Fall II: Für alle maximalen Kreispackungen  $\mathcal{P}$  im Graphen  $P(n, k)$  gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{j(k-1)}{2}$**

Für den Fall II wird wiederum vorausgesetzt, dass für alle maximalen Kreispackungen  $\mathcal{P}$  in  $P(n, k)$  gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{j(k-1)}{2}$ . Man kann erneut die bisher beste angegebene untere Schranke für  $\nu(P(n, k))$  (vgl. Lemma 4.42) weiter verschärfen. Es gilt also im Fall II

$$\nu(P(n, k)) \geq \frac{j(k-1)}{2} + \left\lfloor \frac{r}{k+4} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{r-(k+3)}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor + 1.$$

Andernfalls wäre mit der, im Beweis von Lemma 4.42 konstruierten, Kreispackung zur verschärften unteren Schranke von  $\nu(P(n, k))$  eine maximale Kreispackung  $\mathcal{P}$  gefunden. Für diese würde gelten  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| = \frac{j(k-1)}{2}$  und der Fall I läge vor.

Für den zweiten Fall lässt sich, wie auch schon im Fall  $k \bmod 2 = 0$  analog folgendes zeigen.

**Lemma 4.51:**

Für  $k \geq 5$  und  $n \geq 8k + 1$  sei  $\mathcal{P}$  eine maximale Kreispackung, für die gilt  $|\mathcal{C}(\mathcal{P})| > \frac{j(k-1)}{2}$ . Für jeden Kreis  $C \in \mathcal{P}$  existiere ein Index  $i$ , so dass  $u_i, u_{[i+1]}, u_{[i+k]}, u_{[i+k+1]} \in V_{in}^C$ . Dann gibt es eine maximale Kreispackung  $\hat{\mathcal{P}}$  mit

$$\mu_8(\hat{\mathcal{P}}) = \nu(P(n, k)).$$

**Beweis:**

Sei  $C \in \mathcal{P}$  ein Kreis mit  $u_i, u_{[i+1]}, u_{[i+k]}, u_{[i+k+1]} \in V_{in}^C$ . Dann kann  $C$  durch den Kreis  $SC_i$  substituiert werden. Da dies für alle Kreise gilt, folgt sofort die Behauptung.  $\square$

Für den Beweis der wesentlichen Aussage im Fall II für  $k \bmod 2 = 0$  (Theorem 4.1) wird unter anderem ausgenutzt, dass es im Fall II in einer maximalen Kreispackung keinen Kreis  $C$  der Länge  $k + 3$  mit  $|V_{in}^C| = 2$  gibt (Lemma 4.28). Man kann diese Aussage auf Grund der schlechten unteren Schranke für  $\nu(P(n, k))$  im Falle  $k \bmod 2 = 1$  nicht übertragen. Folglich lässt sich auch Theorem 4.1 und damit auch das daraus resultierende Korollar 4.36 nicht beweisen. Vermutung 1 bleibt im Fall II für  $k \bmod 2 = 1$  und hinreichend großes  $n$  bestehen. Bislang konnte sie allerdings nicht bewiesen werden.

# Kapitel 5

## Fazit

Es ist bekannt, dass das Auffinden einer maximalen Kreispackung in einem beliebigen Graphen  $NP$ -schwer ist. In der vorliegenden Arbeit wurden drei praktische Problemstellungen vorgestellt. Für diese kann man eine Lösung, unter der Verwendung von maximalen Kreispackungen oder der Kreispackungszahl, von einem geeigneten Graphen, herleiten. Dabei werfen besonders die mit der Rundgangsplanung verknüpften Spontaneous Postman Probleme viele weitere interessante graphentheoretische Fragen auf. Weiterhin wurde die Bestimmung von maximalen Kreispackungen und der Kreispackungszahl mittels Knotenseparatoren, sowie für eine konkrete Graphenfamilie behandelt.

Es wurden einige Zusammenhänge zwischen Separatoren und Kreispackungen, sowie der Kreispackungszahl dargestellt. Dabei lag die Idee zugrunde, dass es in Graphen mit einer geringen Knoten- und Kantenzahl im Allgemeinen „einfacher“ ist, eine maximale Kreispackung und die Kreispackungszahl zu bestimmen. Daher wurden Knotenseparatoren verwendet, um für einen gegebenen Graphen  $G$  zwei „kleinere“ modifizierte Graphen zu konstruieren. Bestimmt man für diese modifizierten Untergraphen eine maximale Kreispackung, sowie die Kreispackungszahl, kann man diese verwenden, um eine maximale Kreispackung von  $G$  und  $\nu(G)$  zu bestimmen. Zunächst wurde die Verwendung der Knotenseparatoren an Hand von Graphen mit einem gegebenen 2- oder 3-Separator verdeutlicht. Dabei resultierten zwei Algorithmen zur Bestimmung einer maximalen Kreispackung in den entsprechenden Graphen. Die Kreispackungszahl lässt sich unter Verwendung der Ergebnisse dieser Algorithmen ebenfalls herleiten. In den Algorithmen wird ein gegebener Graph in zwei „kleinere“ modifizierte Graphen unterteilt und über deren Kreispackungen und die Kreispackungszahl eine Kreispackung des Ausgangsgraphen hergeleitet. Beinhaltend die „kleineren“ modifizierten Graphen wiederum einen 2- oder 3-Separator, so lassen sich die Algorithmen rekursiv anwenden. Die Ähnlichkeit der Ergebnisse für den Fall ei-

nes gegebenen 2-Separators und eines gegebenen 3-Separators führten abschließend zu einem globalen Satz. Dieser sagt aus, wie man die Kreispackungszahl eines beliebigen Graphen mit einem  $k$ -Separator bestimmen kann. An dieser Stelle ist deutlich zu erkennen, dass die Bestimmung der Kreispackungszahl und die Bestimmung einer maximalen Kreispackung im Allgemeinen zwei unterschiedliche Problemstellungen darstellen können. Ist die Kreispackungszahl bekannt, kennt man nicht zwingend eine maximale Kreispackung. Ebenso kann man beweisen, wie eine maximale Kreispackung zu konstruieren ist, ohne die Kreispackungszahl zu kennen.

Letzteres tritt im Kapitel über die Graphenfamilie der verallgemeinerten Petersen Graphen  $P(n, k)$  auf. Für  $k \geq 6$  werden die Fälle, dass  $k$  eine gerade oder ungerade Zahl ist, getrennt betrachtet. Es wird sich dabei auf den Fall, dass  $k$  gerade ist, fokussiert. Für diesen Fall wird gezeigt, dass es, sofern  $n$  groß genug ist, immer eine maximale Kreispackung gibt, welche aus höchstens einem Kreis der Länge  $k + 3$  mit genau zwei Innenknoten und ansonsten ausschließlich aus Kreisen der Länge acht besteht. Dabei haben die Kreise der Länge acht eine eindeutige Struktur. Diese kann man bei der Kreispackungskonstruktion ausnutzen. Bisher ist es noch nicht gelungen, eine allgemeine Formel für  $\nu(P(n, k))$ , mit  $k$  gerade, herzuleiten. Man kann allerdings vermuten, dass  $\nu(P(n, k))$  in Abhängigkeit vom Rest bei der Division von  $n$  durch  $k$  darstellbar ist. Diese Vermutung basiert darauf, dass die in dieser Arbeit hergeleitete Kreispackung fast ausschließlich aus Kreisen der Länge acht besteht und diese Kreise, auf Grund ihrer eindeutigen Struktur, nicht beliebig im Graphen angeordnet werden können. Für den Fall, dass  $k$  eine ungerade Zahl ist, lassen sich viele Ergebnisse aus dem Fall, dass  $k$  gerade ist, übertragen. Allerdings wurde bisher keine allgemein gültige Kreispackungsstruktur hergeleitet, da die Schranken für  $\nu(P(n, k))$  im Fall, dass  $k$  ungerade ist, nicht restriktiv genug sind. Damit ergibt sich, dass man die Kreise der Länge  $k + 3$  mit genau zwei Innenknoten sowohl in Fall I, als auch in Fall II berücksichtigen muss. Dies ist im Fall, dass  $k$  gerade ist, nicht notwendig. Es wäre daher zu untersuchen, ob es möglich ist, die Beweise im Fall II für  $k$  gerade dahingehend zu modifizieren.

Abschließend kann man sagen, dass es im Bereich der praktischen Problemstellungen bisher nur wenige Ergebnisse gibt. Dort besteht noch Potential für zukünftige Forschungen. Außerdem wäre es für die Graphenfamilie der verallgemeinerten Petersen Graphen interessant, zu prüfen, ob  $\nu(P(n, k))$  in Abhängigkeit vom Rest bei der Division von  $n$  durch  $k$ , für  $k$  gerade, darstellbar ist. Zudem kann man auf Grund der Isomorphieeigenschaften der verallgemeinerten Petersen Graphen (vgl. [85]) vermuten, dass sich die hergeleitete Struktur einer maximalen Kreispackung, im Fall  $k$  gerade, zumindest zu großen Teilen auf den ungeraden Fall übertragen lässt.

# Literaturverzeichnis

- [1] ALON, NOGA, COLIN MCDIARMID und MICHAEL MOLLOY: *Edge-disjoint cycles in regular directed graphs*. Journal of Graph Theory, 22(3):231–237, 1996.
- [2] ALSPACH, BRIAN: *Research Problems, Problem 3*. Discrete Mathematics, 36:333–334, 1981.
- [3] ALSPACH, BRIAN: *The classification of hamiltonian generalized Petersen graphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 34(3):293–312, 1983.
- [4] ALSPACH, BRIAN und JIPING LIU: *On the Hamilton connectivity of generalized Petersen graphs*. Discrete Mathematics, 309(17):5461–5473, 2009.
- [5] ANTONAKOPOULOS, SPYRIDON und LISA ZHANG: *Approximation algorithms for grooming in optical network design*. Theoretical Computer Science, 412(29):3738–3751, 2011.
- [6] BÄBLER, F: *Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen*. Commentarii Mathematici Helvetici, 27(1):81–100, 1953.
- [7] BAFNA, VINEET und PAVEL A PEVZNER: *Genome rearrangements and sorting by reversals*. SIAM Journal on Computing, 25(2):272–289, 1996.
- [8] BAMMEL, SANDRA: *Verfahren zur Zerlegung von Graphen mittels 3-Separatoren*. Diplomarbeit, Technische Universität Dortmund, 2011.
- [9] BANNAI, KOZO: *Hamiltonian cycles in generalized Petersen graphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 24(2):181–188, 1978.
- [10] BECKER, MICHAEL, W DEGENHARDT, JÜRGEN DOENHARDT, STEFAN HERTEL, G KANINKE, W KEBER, KURT MEHLHORN, STEFAN NÄHER, HANS ROHNERT und THOMAS WINTER: *A probabilistic algorithm for vertex connectivity of graphs*. Information Processing Letters, 15(3):135–136, 1982.

- [11] BODLAENDER, HANS L: *On disjoint cycles*. In: *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, Seiten 230–238. Springer, 1992.
- [12] BONDY, JOHN ADRIAN: *Variations on the hamiltonian theme*. *Canad. Math. Bull.*, 15(1):57–62, 1972.
- [13] CAO, J., M. SHI und B. WU: *Research On the Total Bondage Number of a Spectial Network*. 2010 Third International Joint Conference on Computational Science and Optimization, Conference publication, Seiten 456–458, 2010.
- [14] CAPRARA, ALBERTO: *On the tightness of the alternating-cycle lower bound for sorting by reversals*. *Journal of Combinatorial Optimization*, 3(2-3):149–182, 1999.
- [15] CAPRARA, ALBERTO: *Sorting permutations by reversals and Eulerian cycle decompositions*. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 12(1):91–110, 1999.
- [16] CAPRARA, ALBERTO, ALESSANDRO PANCONESI und ROMEO RIZZI: *Packing cuts in undirected graphs*. <http://www.or.deis.unibo.it/alberto/online.htm>, University of Bologna, 2001.
- [17] CAPRARA, ALBERTO, ALESSANDRO PANCONESI und ROMEO RIZZI: *Packing cycles and cuts in undirected graphs*. Seiten 512–523. Springer, 2001.
- [18] CAPRARA, ALBERTO, ALESSANDRO PANCONESI und ROMEO RIZZI: *Packing cycles in undirected graphs*. *Journal of Algorithms*, 48(1):239–256, 2003.
- [19] CAPRARA, ALBERTO und ROMEO RIZZI: *Packing triangles in bounded degree graphs*. *Information Processing Letters*, 84(4):175–180, 2002.
- [20] CASTAGNA, FRANK und GEERT CALEB ERNST PRINS: *Every Generalized Petersen Graph has a tait coloring*. *Pacific J. of Mathem.*, 40(1):53–58, 1972.
- [21] CHARTRAND, GARY, DENNIS GELLER und STEPHEN HEDETNIEMI: *Graphs with forbidden subgraphs*. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 10(1):12–41, 1971.
- [22] CHIBA, SHUYA und SHINYA FUJITA: *Covering vertices by a specified number of disjoint cycles, edges and isolated vertices*. *Discrete Mathematics*, 313(3):269 – 277, 2013.
- [23] CORRADI, KERESZTÉLY und ANDRÁS HAJNAL: *On the maximal number of independent circuits in a graph*. *Acta Mathematica Hungarica*, 14(3):423–439, 1963.
- [24] COXETER, HAROLD SCOTT MACDONALD: *Self-Dual Configurations and Regular Graphs*. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56:413–455, 1950.

- [25] DARRYN BRYANT, DANIEL HORSLEY, WILLIAM PETERSSON: *Cycle decompositions V: Complete graphs into cycles of arbitrary lengths*. <http://arxiv.org/abs/1204.3709>, 2013 (last revised).
- [26] DE CUSATIS, CASIMER: *Fiber optic data communication: Technological trends and advances*. Access Online via Elsevier, 2002.
- [27] DIRAC, G und PAUL ERDOS: *On the maximal number of independent circuits in a graph*. Acta Mathematica Hungarica, 14(1):79–94, 1963.
- [28] DOR, DORIT und MICHAEL TARSI: *Graph decomposition is NP-complete: A complete proof of Holyer's conjecture*. SIAM Journal on Computing, 26(4):1166–1187, 1997.
- [29] EGAWA, YOSHIMI, MARIKO HAGITA, KEN-ICHI KAWARABAYASHI und HONG WANG: *Covering vertices of a graph by  $k$  disjoint cycles*. Discrete mathematics, 270(1):115–125, 2003.
- [30] ENOMOTO, HIKOE: *On the existence of disjoint cycles in a graph*. Combinatorica, 18(4):487–492, 1998.
- [31] ERDŐS, PAUL und LAJOS PÓSA: *On the maximal number of disjoint circuits of a graph*. Publ. Math. Debrecen, 9:3–12, 1962.
- [32] ERDŐS, PAUL und LAJOS PÓSA: *On independent circuits contained in a graph*. Canad. Journ. Math, 17:347–352, 1965.
- [33] EULER, LEONHARD: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 8:128–140, erschienen 1741 (geschrieben 1736).
- [34] EVEN, SHIMON: *An algorithm for determining whether the connectivity of a graph is at least  $k$* . SIAM Journal on Computing, 4(3):393–396, 1975.
- [35] EVEN, SHIMON und R ENDRE TARJAN: *Network flow and testing graph connectivity*. SIAM journal on computing, 4(4):507–518, 1975.
- [36] EXOO, GEOFFREY, FRANK HARARY und JERALD KABELL: *The crossing numbers of some generalized Petersen graphs*. Mathematica Scandinavica, 48:184–188, 1981.
- [37] FOMIN, FEDOR V, DANIEL LOKSHTANOV, NEELDHARA MISRA, GEEVARGHESE PHILIP und SAKET SAURABH: *Quadratic Upper Bounds on the Erdős-Pósa Property for a Generalization of Packing and Covering Cycles*. Journal of Graph Theory, 2013.

- [38] FORT JR, MK und GA HEDLUND: *Minimal coverings of pairs by triples*. Pacific J. Math, 8:709–719, 1958.
- [39] FRANK, ANDRÁS: *Conservative weightings and ear-decompositions of graphs*. Combinatorica, 13(1):65–81, 1993.
- [40] FRIGGSTAD, ZACHARY und MOHAMMAD R SALAVATIPOUR: *Approximability of packing disjoint cycles*. In: *Algorithms and Computation*, Seiten 304–315. Springer, 2007.
- [41] FRIGGSTAD, ZACHARY und MOHAMMAD R SALAVATIPOUR: *Approximability of packing disjoint cycles*. Algorithmica, 60(2):395–400, 2011.
- [42] FRUCHT, ROBERTO, JACK E GRAVER und MARK E WATKINS: *The groups of the generalized Petersen graphs*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 70(02):211–218, 1971.
- [43] FUJITA, SHINYA: *Degree conditions for the partition of a graph into cycles, edges and isolated vertices*. Discrete Mathematics, 309(11):3534–3540, 2009.
- [44] GERA, R. und P. STANICA: *The spectrum of generalized Petersen graphs*. Australasian Journal of Combinatorics, 49:39–45, 2011.
- [45] GHOSH, SAMIK, PRADIP DE, KALYAN BASU und SAJAL K DAS: *PeterNet : An Emergent Technology Based Radio Access Network Architecture for Next Generation Cellular Wireless Systems*. In: *Proceedings of the First International Conference on Broadband Networks*, 2004.
- [46] GUY, RICHARD K: *A problem of Zarankiewicz*. University of Calgary, Department of Mathematics, 1967.
- [47] HARANT, JOCHEN, DIETER RAUTENBACH, PETER RECHT und FRIEDRICH REGEN: *Packing edge-disjoint cycles in graphs and the cyclomatic number*. Discrete Mathematics, 310(9):1456–1462, 2010.
- [48] HARANT, JOCHEN, DIETER RAUTENBACH, PETER RECHT, INGO SCHIERMEYER und EVA-MARIA SPRENGEL: *Packing disjoint cycles over vertex cuts*. Discrete Mathematics, 310(13):1974–1978, 2010.
- [49] HOLTON, DA und J SHEEHAN: *The Petersen Graph*. Australian Mathematical Society Lecture Series 7, 1993.

- [50] HOLYER, IAN: *The NP-completeness of some edge-partition problems*. SIAM Journal on Computing, 10(4):713–717, 1981.
- [51] KANEVSKY, ARKADY: *On the number of minimum size separating vertex sets in a graph and how to find all of them*. In: *Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, Seiten 411–421. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990.
- [52] KANEVSKY, ARKADY: *Finding all minimum-size separating vertex sets in a graph*. Networks, 23(6):533–541, 1993.
- [53] KEMPE, AB: *A Memoir on the Theory of Mathematical Form*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 177:1–70, 1886.
- [54] KILIC, ELGIN und PINAR DUNDAR: *Vulnerability of generalized Petersen graphs via invariants*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 37(4):513–521, 2007.
- [55] KLOKS, TON und DIETER KRATSCHE: *Listing all minimal separators of a graph*. SIAM Journal on Computing, 27(3):605–613, 1998.
- [56] KNUTH, DONALD E.: *The Art of Computer Programming, Volume 4A: Combinatorial Algorithms, Part 1*. Addison-Wesley Professional, 2011.
- [57] KRISHNAMOORTHY, M. S. und B. KRISHNAMURTHY: *Fault diameter of interconnection networks*. Comput. Math. Applic., 13(5/6):577–582, 1987.
- [58] KRIVELEVICH, MICHAEL, ZEEV NUTOV, MOHAMMAD R SALAVATIPOUR, JACQUES VERSTRAETE und RAPHAEL YUSTER: *Approximation algorithms and hardness results for cycle packing problems*. ACM Transactions on Algorithms (TALG), 3(4):48, 2007.
- [59] KRIVELEVICH, MICHAEL, ZEEV NUTOV und RAPHAEL YUSTER: *Approximation algorithms for cycle packing problems*. In: *Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, Seiten 556–561. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [60] KUHL, JAROMY SCOTT: *The Tutte polynomial and the generalized Petersen graph*. Australasian Journal of Combinatorics, 40:87, 2008.
- [61] KWAN, MEI-KO: *Programming method using odd or even points*. Acta Mathematica, 10:263–266, 1960.

- [62] KWAN, MEI-KO: *Graphic programming using odd or even points*. Chinese Mathematics, 1(273-277):110, 1962.
- [63] LAI, YUNG-LING, PEI-KUNG CHIEN, SHENG-CHIEH CHOU und YI-KAI KAO: *On Power Domination of Generalized Petersen Graphs*. In: *The 29th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory*, 2012.
- [64] LAMBERTS, ELIANE: *Zyklenpackungen im Genome Rearrangement - Sortierung von Permutationen durch Reversals und Transpositionen*. Diplomarbeit, Technische Universität Dortmund, 2011.
- [65] LIU, JOSEPH WH: *A graph partitioning algorithm by node separators*. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 15(3):198–219, 1989.
- [66] LIU, YOUYAO, JUNGANG HAN und HUIMIN DU: *A New On-Chip Interconnection Network for System-on-Chip*. The 2008 International Conference on Embedded Software and Systems, Conference publication, 2008.
- [67] MAI, TA-CHENG, JENG-JUNG WANG und LIH-HSING HSU: *Hyper-hamiltonian generalized petersen graphs*. Computers & Mathematics with Applications, 55(9):2076–2085, 2008.
- [68] MOON, JI-WON: *On edge-disjoint cycles in a graph*. Canadian Mathematical Bulletin, 7:519–523, 1964.
- [69] NADEAU, JOSEPH H und BENJAMIN A TAYLOR: *Lengths of chromosomal segments conserved since divergence of man and mouse*. Proc. Natl. Acad. Sci., 81:814–818, 1984.
- [70] NEDELA, ROMAN und MARTIN ŠKOVIERA: *Which generalized Petersen graphs are Cayley graphs?* Journal of Graph Theory, 19(1):1–11, 1995.
- [71] ORE, OYSTEIN: *A problem regarding the tracing of graphs*. Elemente der Mathematik, 6:49–53, 1951.
- [72] PETERSEN, J.: *Sur le théorème de Tait*. Interméd. Math., 5:225–227, 1898.
- [73] RAUTENBACH, DIETER und FRIEDRICH REGEN: *On packing shortest cycles in graphs*. Information Processing Letters, 109(14):816–821, 2009.
- [74] RAUTENBACH, DIETER und FRIEDRICH REGEN: *Graphs with many vertex-disjoint cycles*. Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, 14(2):75–82, 2012.

- [75] READ, RONALD C. und ROBIN J. WILSON: *An Atlas of Graphs (Mathematics)*. Oxford University Press, new edition, 2005.
- [76] RECHT, PETER und JAN DEGENHARDT: *On a relation between the cycle packing number and the cyclomatic number of a graph*. Diskussionsbeiträge des Fachgebiets OR und WI der Technischen Universität Dortmund, 2007.
- [77] RECHT, PETER und EVA-MARIA SCHULTE-LOH: *Maximum cycle packing in three families of Petersen graphs*. Diskussionsbeiträge des Fachgebiets OR und WI der Technischen Universität Dortmund, 2008.
- [78] RECHT, PETER und EVA-MARIA SPRENGEL: *Packing Euler graphs with traces*. In: *Operations Research Proceedings 2011*, Seiten 53–58. Springer, 2012.
- [79] SALAVATIPOUR, MOHAMMAD R und JACQUES VERSTRAETE: *Disjoint cycles: Integrality gap, hardness, and approximation*. In: *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, Seiten 51–65. Springer, 2005.
- [80] SALAZAR, GELASIO: *On the crossing numbers of loop networks and generalized Petersen graphs*. *Discrete Mathematics*, 302:243–253, 2005.
- [81] SCHULTE-LOH, EVA-MARIA: *Exakte Lösungen des maximum cycle packing problem für spezielle Graphen und Graphenklassen*. Diplomarbeit, Technische Universität Dortmund, 2007.
- [82] SEYMOUR, PAUL D: *Packing Circuits in Eulerian Digraphs*. *Combinatorica*, 16(2):223 – 231, 1996.
- [83] SIMONOVITS, MIKLOS: *A new proof and generalizations of a theorem of Erdős and Pósa on graphs without  $k+1$  independent circuits*. *Acta Mathematica Hungarica*, 18(1):191–206, 1967.
- [84] STEIMLE, ALICE und WILLIAM STATON: *The isomorphism classes of the generalized Petersen graphs*. *Discrete Mathematics*, 309:231–237, 2009.
- [85] STEIMLE, ALICE und WILLIAM STATON: *The isomorphism classes of the generalized Petersen graphs*. *Discrete Mathematics*, 309(1):231 – 237, 2009.
- [86] TARJAN, ROBERT E und UZI VISHKIN: *An efficient parallel biconnectivity algorithm*. *SIAM Journal on Computing*, 14(4):862–874, 1985.
- [87] WANG, HONG: *On the Maximum Number of Independent Cycles in a Graph*. *Discrete Mathematics*, 205:183 – 190, 1999.

- [88] WATKINS, MARK E: *A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs*. J. Combinatorial Theory, Seiten 152–164, 1969.
- [89] WEDIG, DORIS: *Bestimmung optimaler Eulerscher Subtouren in Graphen*. Diplomarbeit, Technische Universität Dortmund, 1998.
- [90] YANG, NEO, GENE EU JAN, SHAO-WEI LEU und IN-JEN LIN: *A Study of Generalized Petersen Graph and a Novel Graph Y*. ICS 2002 Program of Workshop on Algorithms and Computational Molecular Biology, 1:898–909, 2002.
- [91] ZHANG, JUN, XI RONG XU und JUN WANG: *Wide Diameter of Generalized Petersen Graphs*. Journal of Mathematical Research and Exposition, 30(3):562–566, 2010.