

Fakultät für Mathematik

der Technischen Universität Dortmund

Masterarbeit

A priori Fehlerabschätzungen für die
FE-Diskretisierung klassischer
Hindernisprobleme

vorgelegt von
Constantin Christof
und betreut durch
Prof. Dr. Christian Meyer

7. April 2015

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Kontinuierliche Hindernisprobleme	2
1.1 Funktionenräume und Notationen	2
1.2 Formulierung des Problems und Existenz von Lösungen	3
1.3 Superlösungen	5
1.4 Regularität der Lösung	8
2 Diskrete Hindernisprobleme	15
2.1 Diskretisierung des Funktionenraums	15
2.2 Formulierung des Problems und Lösbarkeitsaussagen	18
3 H^1-Fehlerabschätzungen	20
3.1 Fehleranalyse nach Falk	20
3.2 Handhabbare Abschätzungen für das Hindernisproblem	22
4 Finite-Elemente-Approximation unter Nebenbedingungen	24
4.1 Restringierte Finite-Elemente-Approximation in $W^{2,p}(\Omega)$	24
4.2 $C^{1,\gamma}$ -Funktionen auf abgeschlossenen Mengen	30
4.3 Restringierte Finite-Elemente-Approximation in $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$	31
5 Nitsche-Tricks	39
5.1 Motivation: Der Nitsche-Trick für das Poisson-Problem	39
5.2 Ein Nitsche-Trick für die Fehlerkomponente $(u - u_h)^-$	40
5.3 Ein Nitsche-Trick für die Fehlerkomponente $(u - u_h)^+$	45
5.4 Ein Zwischenfazit	47
6 L^∞-Fehleranalyse	48
6.1 Zwei Gegenbeispiele	48
6.1.1 Die Fehlerkomponente $(u - u_h)^+$ im Fall $\chi \in V_h(\Omega)$	48
6.1.2 Die Fehlerkomponente $(u - u_h)^-$ im Fall $\chi = \psi$	54
6.2 Stabilität diskreter Hindernisprobleme	59
6.3 L^∞ -Fehlerabschätzungen	66
7 Experimente	69
7.1 Experimente mit schwach spitzwinkligen Triangulierungen	69
7.2 Einfluss positiver Nebendiagonalelemente	72
Fazit	75
Literaturverzeichnis	76
Symbolverzeichnis	77

Einleitung

In dieser Arbeit analysieren wir, mit welcher Genauigkeit zu rechnen ist, wenn ein Hindernisproblem der Form

$$\begin{aligned} & \min \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx - 2 \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ & \text{s.t. } v \in K := \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ f.ü.}\} \end{aligned}$$

approximativ mit linearen finiten Elementen gelöst wird. Im Fokus unserer Untersuchung stehen insbesondere a priori Fehlerabschätzungen in den L^p -Normen. Aufgebaut ist die Arbeit wie folgt:

Das erste Kapitel widmet sich der rigorosen Formulierung und den grundlegenden Eigenschaften des Hindernisproblems. Wir beweisen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, untersuchen deren Regularität und definieren, was in der von uns betrachteten Situation unter einer „Superlösung“ zu verstehen ist. Die Resultate in diesem Abschnitt sind weitestgehend Standard (siehe zum Beispiel [Ki]). Der Vollständigkeit halber behandeln wir sie dennoch im Detail.

Im zweiten Kapitel diskretisieren wir das Hindernisproblem, indem wir vom Funktionenraum $H_0^1(\Omega)$ zu einem passenden Finite-Elemente-Raum $V_h(\Omega)$ übergehen. Im Gegensatz zur sonst üblichen Herangehensweise ersetzen wir hierbei das Hindernis ψ nicht sofort durch eine Approximation $\psi_h \in V_h(\Omega)$. Dies wird uns erlauben, zu untersuchen, in welcher Weise die Diskretisierung des Funktionenraums und die Diskretisierung des Hindernisses zum Gesamtfehler beitragen.

Kapitel 3 thematisiert Fehlerabschätzungen in der H^1 -Norm. Hier stellen wir einen allgemeinen Ansatz zur Fehleranalyse vor, der auf Falk zurückgeht (siehe [Fa]), und untersuchen, welche Aussagen für die von uns betrachteten Probleme getroffen werden können.

Im anschließenden vierten Kapitel beweisen wir einige Resultate zur restringierten Finite-Elemente-Approximation von $W^{2,p}$ - und $C^{1,\gamma}$ -Funktionen, die für die H^1 -Fehleranalyse benötigt werden und auch für das weitere Vorgehen von zentraler Bedeutung sind.

In Kapitel 5 gehen wir auf die Frage ein, ob sich wie im Falle des Poisson-Problems mit Hilfe eines Nitsche-Tricks L^2 -Fehlerabschätzungen für das Hindernisproblem herleiten lassen. Vorgestellt werden zwei Ansätze, die zumindest die Kontrolle über bestimmte Fehlerkomponenten ermöglichen.

Im sechsten Kapitel wird sich zeigen, dass nicht die L^2 -Norm sondern die L^∞ -Norm die natürliche Wahl ist, wenn es darum geht, Fehlerabschätzungen für Hindernisprobleme zu beweisen. Insbesondere werden wir sehen, dass eine Verdopplung der Fehlerordnung beim Übergang von der H^1 - zur L^2 -Norm, wie sie bei der Poisson-Gleichung stattfindet, in der von uns betrachteten Situation auf Grund der Nebenbedingungen im Allgemeinen nicht zu beobachten ist. Ausgangspunkt unserer Untersuchung sind in Abschnitt 6.1 zwei Beispiele, die die grundlegende Problematik veranschaulichen. In Abschnitt 6.2 analysieren wir dann mit Hilfe der Approximationssätze aus Kapitel 4, in welcher Weise die Lösung eines diskreten Hindernisproblems von der Funktion ψ abhängt, die die zulässige Menge K definiert. Dies wird uns erlauben, einen Stabilitätssatz zu beweisen, aus dem sich in natürlicher Weise scharfe L^∞ -Fehlerabschätzungen für das Hindernisproblem ergeben.

Im siebten Kapitel überprüfen wir unsere analytischen Voraussagen anhand einiger numerischer Experimente im Zweidimensionalen. An dieser Stelle werden wir insbesondere untersuchen, wie sich die Fehlerordnung verhält, wenn wir von den Voraussetzungen der vorherigen Abschnitte abweichen.

Schlussendlich fassen wir im letzten Kapitel die Ergebnisse dieser Arbeit in einem kurzen Fazit zusammen. Hier werden wir auch auf weiterführende Fragestellungen und Probleme eingehen, die im Kontext der a priori Fehlerabschätzungen für Variationsungleichungen von Interesse sind.

1 Kontinuierliche Hindernisprobleme

Im folgenden Kapitel beschäftigen wir uns mit dem kontinuierlichen Setting. Wir definieren die Funktionenräume, in denen wir uns bewegen, klären, welche Voraussetzungen wir machen, und diskutieren grundlegende Eigenschaften des klassischen Hindernisproblems. In Abschnitt 1.1 gehen wir zunächst auf die verwendeten Notationen und einige elementare Definitionen ein. Abschnitt 1.2 widmet sich dann der Formulierung des Hindernisproblems und der Lösungstheorie. In den Abschnitten 1.3 und 1.4 untersuchen wir die Eigenschaften von Lösungen und so genannten Superlösungen. Die Resultate, die wir hier beweisen, sind auch in der gängigen Literatur zum Thema zu finden. Wir orientieren uns insbesondere an [Ki], [Ro] und [Glo].

1.1 Funktionenräume und Notationen

In dieser Arbeit bezeichnen wir mit Ω immer ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^d mit Lipschitz-Rand. Des Weiteren benutzen wir analog zu [Ad] die folgenden Bezeichnungen und Definitionen:

Definition 1.1.1 (Sobolev-Räume). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ wie oben, $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Dann setze:*

- $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}$ und $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_d|$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$
- $\|v\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$
- $W^{m,p}(\Omega) =$ die Vervollständigung von $\{v \in C^m(\Omega) : \|v\|_{W^{m,p}} < \infty\}$ unter der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$
- $W_0^{m,p}(\Omega) =$ die Vervollständigung von $\{v \in C_0^m(\Omega) : \|v\|_{W^{m,p}} < \infty\}$ unter der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$
- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$
- $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$
- $H^{-1}(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]'$.

Man beachte, dass wir den Hilbert-Raum $H_0^1(\Omega)$ nicht mit seinem Dualraum identifizieren. Stattdessen wählen wir die duale Paarung so, dass für alle $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ und alle $g \in H_0^1(\Omega)$ die folgende Gleichung gilt:

$$\langle f, g \rangle := \langle f, g \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = (f, g)_{L^2}.$$

Wir erinnern hier noch kurz daran, dass die Räume $W^{m,p}(\Omega)$ und $W_0^{1,p}(\Omega)$ auch anders charakterisiert werden können:

Theorem 1.1.2 (H=W). *Ist $1 \leq p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}_0$, so gilt*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\},$$

wobei $\partial^\alpha v$ die distributionelle Ableitung bezeichnet.

Beweis. Siehe [Ad], Theorem 3.16. □

Theorem 1.1.3. *Ist $\text{tr} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ der Spuoperator, dann gilt für $1 \leq p < \infty$ die Gleichung*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : \text{tr } v = 0\}.$$

Beweis. Siehe [Sch], Lemma 3.22. □

1.2 Formulierung des Problems und Existenz von Lösungen

Im Fokus dieser Arbeit stehen – wie schon in der Einleitung erwähnt – Minimierungsaufgaben der Form

$$\begin{aligned} \min \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx - 2 \langle f, v \rangle \\ \text{s.t. } v \in K := \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ f.ü.}\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Die Lösung u eines solchen Problems beschreibt die Gleichgewichtslage einer Membran, die durch eine Kraft f deformiert und durch ein Hindernis ψ beeinträchtigt wird (siehe Abbildung 1.1). Deshalb auch der Name „Hindernisproblem“.

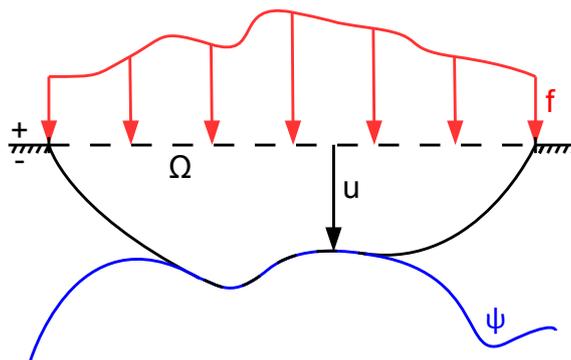


Abbildung 1.1: Das Hindernisproblem im Eindimensionalen. Man beachte die Vorzeichenkonventionen: Kräfte und Verformungen in Richtung des Hindernisses sind negativ.

Annehmen werden wir in der obigen Situation immer das Folgende:

Definition 1.2.1 (H^1 -Minimalvoraussetzungen). Als „ H^1 -Minimalvoraussetzungen“ bezeichnen wir die Annahmen:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand.
- f ist ein Element von $H^{-1}(\Omega)$.
- $\psi : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$ ist derart, dass die Menge $K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ f.ü.}\}$ nicht leer ist.

Wir halten fest:

Lemma 1.2.2. Genügen Ω , f und ψ den H^1 -Minimalvoraussetzungen, dann gilt:

- Die Menge $K \subset H_0^1(\Omega)$ ist abgeschlossen, konvex und nicht leer.
- Die Bilinearform $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

ist koerziv.

Beweis. Die Menge K ist nach Voraussetzung nicht leer und trivialerweise konvex. Des Weiteren ist K auch abgeschlossen, denn ist $(v_n) \subset K$ eine Folge, die bezüglich der H^1 -Norm gegen ein v konvergiert, dann konvergiert (v_n) auch fast überall gegen v und die Ungleichung $v_n \geq \psi$ f.ü. bleibt im Limes erhalten. Die Koerzivität von a folgt direkt aus der Ungleichung von Poincaré-Friedrichs. \square

Man beachte, dass wir alternativ zum Minimierungsproblem (1.1) auch die assoziierte Variationsungleichung

$$(P) \quad u \in K : \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(u - v) \, dx \leq \langle f, u - v \rangle \quad \forall v \in K$$

betrachten können, denn sowohl die zulässige Menge als auch die Zielfunktion sind konvex. Gehen wir von dieser Formulierung aus, dann lässt sich mit dem folgenden Satz von Lions und Stampacchia beweisen, dass das Hindernisproblem eine eindeutige Lösung besitzt.

Theorem 1.2.3 (Lions-Stampacchia). *Es sei H ein reeller Hilbert-Raum mit Produkt (\cdot, \cdot) , Norm $\|\cdot\|$ und dualer Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es sei $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine koerzive, stetige Bilinearform (nicht notwendigerweise symmetrisch), $K \subset H$ konvex, abgeschlossen und nicht leer und $f \in H'$. Dann besitzt die Variationsungleichung*

$$u \in K : \quad a(u, u - v) \leq \langle f, u - v \rangle \quad \forall v \in K \quad (1.2)$$

eine eindeutige Lösung und der Lösungsoperator

$$f \in H' \mapsto u_f \in H$$

ist (bei festgehaltenem K) Lipschitz. Das heißt, es existiert ein $C > 0$, so dass für alle $f_1, f_2 \in H'$ gilt

$$\|u_{f_1} - u_{f_2}\| \leq C \|f_1 - f_2\|_{H'}.$$

Der ursprüngliche Beweis dieses Satzes basiert auf der direkten Methode der Variationsrechnung und funktioniert a priori nur für symmetrische Bilinearformen (siehe etwa [Ki], Theorem II2.1). Die folgende, alternative Argumentation findet sich in [Ro], Kapitel 4.3:

Beweis. Wir starten mit der eindeutigen Lösbarkeit: Definieren wir die Abbildung $A : H \rightarrow H$ via

$$a(u, v) = (Au, v) \quad \forall u, v \in H$$

und identifizieren wir $f \in H'$ mit seinem Riesz-Repräsentanten in H , dann lässt sich die Variationsungleichung (1.2) schreiben als

$$0 \leq (f - Au, u - v) \quad \forall v \in K$$

oder auch als

$$0 \leq (u - u + \rho(Au - f), v - u) \quad \forall v \in K,$$

wobei wir den Parameter $\rho > 0$ beliebig wählen können. Die letzte Ungleichung bedeutet nichts anderes, als dass u die Projektion von $u - \rho(Au - f)$ auf die Menge K ist und damit ein Fixpunkt der Abbildung

$$W_\rho : H \rightarrow K \subset H, \quad v \mapsto P_K(v - \rho(Av - f)).$$

Für diese gilt

$$\begin{aligned} \|W_\rho(v_1) - W_\rho(v_2)\|^2 &= \|P_K(v_1 - \rho(Av_1 - f)) - P_K(v_2 - \rho(Av_2 - f))\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2 + \rho^2 \|A(v_1 - v_2)\|^2 - 2\rho a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \\ &\leq \left(1 - 2\rho c + \rho^2 \|A\|^2\right) \|v_1 - v_2\|^2 \quad \forall v_1, v_2 \in H, \end{aligned} \quad (1.3)$$

wobei $c > 0$ die Koerzitivitätskonstante der Bilinearform a und $\|A\|$ die Operatornorm von A bezeichnet. Wählen wir ein ρ mit $0 < \rho < \frac{2c}{\|A\|^2}$, dann ist der Vorfaktor in (1.3) kleiner als Eins und die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung u folgen aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

Nun zur Lipschitz-Eigenschaft: Sind f_1 und f_2 Elemente des Dualraums H' , dann erhalten wir durch das Testen der u_{f_1} -Variationsungleichung mit der Funktion u_{f_2}

$$a(u_{f_1}, u_{f_1} - u_{f_2}) \leq \langle f_1, u_{f_1} - u_{f_2} \rangle \quad (1.4)$$

und durch das Testen der u_{f_2} -Variationsungleichung mit u_{f_1}

$$a(u_{f_2}, u_{f_2} - u_{f_1}) \leq \langle f_2, u_{f_2} - u_{f_1} \rangle. \quad (1.5)$$

Addieren wir (1.4) und (1.5), so ergibt sich

$$a(u_{f_1} - u_{f_2}, u_{f_1} - u_{f_2}) \leq \langle f_1 - f_2, u_{f_1} - u_{f_2} \rangle \leq \|f_1 - f_2\|_{H'} \|u_{f_1} - u_{f_2}\|.$$

Die Lipschitz-Stetigkeit des Lösungsoperators folgt nun aus der Koerzivität der Bilinearform a . Dies schließt den Beweis ab. \square

Für das Hindernisproblem erhalten wir als Spezialfall:

Korollar 1.2.4. *Sind die H^1 -Minimalvoraussetzungen erfüllt, dann besitzt das Hindernisproblem*

$$(P) \quad u \in K : \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u - v) \, dx \leq \langle f, u - v \rangle \quad \forall v \in K$$

eine eindeutige Lösung und der Lösungsoperator $f \in H^{-1}(\Omega) \mapsto u_f \in H_0^1(\Omega)$ ist Lipschitz-stetig.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 1.2.2 und Satz 1.2.3. \square

1.3 Superlösungen

Nachdem wir nun wissen, dass das Hindernisproblem (P) eindeutig lösbar ist¹, stellt sich natürlich die Frage, welche Eigenschaften die Lösung u besitzt. Zur Untersuchung des Abbildungsverhaltens definieren wir analog zu [Ki]:

Definition 1.3.1 (Superlösung). *Wir nennen eine Funktion $g \in H^1(\Omega)$ Superlösung des Problems (P), falls gilt:*

- $a(g, v) \leq \langle f, v \rangle$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ mit $v \leq 0$ f.ü.
- $g \geq \psi$ f.ü.
- $\text{tr } g \geq 0$ f.ü. auf $\partial\Omega$

Mit a bezeichnen wir hier und im Folgenden immer die Bilinearform

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Man beachte, dass die eindeutig bestimmte Lösung u des Hindernisproblems immer auch eine Superlösung ist, denn u ist ein Element von K und die Funktion $w := u - v$ ist für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ mit $v \leq 0$ f.ü. in der zulässigen Menge von (P) enthalten. Wie der Name schon andeutet, handelt es sich bei Superlösungen um Funktionen, die über der Lösung u liegen. Um dies zeigen zu können, benötigen wir:

Lemma 1.3.2. *Ist g eine H^1 -Funktion mit $\text{tr } g \geq 0$ f.ü. auf $\partial\Omega$, dann ist $\min(0, g)$ in $H_0^1(\Omega)$ und es gilt*

$$\nabla(\min(0, g)) = \begin{cases} \nabla g & \text{f.ü. in } \{g < 0\} \\ 0 & \text{f.ü. in } \{g \geq 0\} \end{cases}. \quad (1.6)$$

Die Mengen $\{g < 0\}$ und $\{g \geq 0\}$ sind hierbei natürlich nur bis auf Nullmengen bestimmt.

Beweis. Da die Funktion $x \mapsto \min(0, x)$ auf \mathbb{R} Lipschitz-stetig und auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist, ist die Abbildung $v \mapsto \min(0, v)$ stetig von $H^1(\Omega)$ nach $H^1(\Omega)$ (siehe [Glo], Lemma 2.2). Damit ist klar, dass $\min(0, g)$ eine H^1 -Funktion ist.

¹ Ist nichts anderes angegeben, dann nehmen wir im Folgenden immer an, dass die H^1 -Minimalvoraussetzungen erfüllt sind.

Dass (1.6) gelten muss, erhält man mit einem recht komplexen Approximationsargument. Wir verweisen hierfür auf [Ki], Theorem IIA1ff. Zu zeigen bleibt, dass die Spur von $\min(0, g)$ verschwindet. Hierzu betrachten wir eine Folge (g_n) in $C^1(\Omega)$, die in $H^1(\Omega)$ gegen g konvergiert. Da wir auf Lipschitz-Gebieten arbeiten, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Funktionen (g_n) stetig auf den Rand $\partial\Omega$ fortgesetzt werden können (siehe zum Beispiel [Sch], Theorem 3.17). In diesem Fall gilt auf Grund der Stetigkeit des Spuroperators

$$\text{tr } g_n = g_n|_{\partial\Omega} \rightarrow \text{tr } g \text{ in } L^2(\partial\Omega)$$

und damit insbesondere

$$\text{tr}(\min(0, g_n)) = \min(0, g_n|_{\partial\Omega}) = \min(0, \text{tr } g_n) \rightarrow 0$$

fast überall auf $\partial\Omega$. Andererseits müssen die Spuren $\text{tr}(\min(0, g_n))$ aber in $L^2(\partial\Omega)$ gegen $\text{tr}(\min(0, g))$ konvergieren, denn wir wissen, dass die Abbildung $H^1(\Omega) \ni v \mapsto \min(0, v) \in H^1(\Omega)$ stetig ist. Wir erhalten also $\text{tr}(\min(0, g)) = 0$ und damit $\min(0, g) \in H_0^1(\Omega)$. \square

Wir können nun beweisen:

Theorem 1.3.3. *Ist u die Lösung von (P) und g eine Superlösung, dann gilt $u \leq g$ f.ü. in Ω .*

Beweis. Wir gehen hier analog zu [Ki], Theorem II6.4, vor. Betrachten wir die Funktion $v := \min(u, g)$, dann gilt wegen $v = u + \min(0, g - u)$, Lemma 1.3.2 und den Eigenschaften der Superlösung g sowohl $v \in H_0^1(\Omega)$ als auch $v \geq \psi$ f.ü. in Ω . Damit ist v zulässig für (P) und wir erhalten

$$a(u, u - v) \leq \langle f, u - v \rangle.$$

Andererseits ist $v - u = \min(0, g - u) \leq 0$ f.ü. in Ω und somit nach Punkt eins in Definition 1.3.1

$$a(g, v - u) \leq \langle f, v - u \rangle.$$

Addieren wir diese Ungleichungen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\geq a(g - u, v - u) \\ &= \int_{\Omega} \nabla(g - u) \cdot \nabla(v - u) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla(g - u) \cdot \nabla(\min(0, g - u)) dx \\ &= \int_{\{g-u < 0\}} \nabla(g - u) \cdot \nabla(\min(0, g - u)) dx \\ &= \int_{\{g-u < 0\}} \nabla(\min(0, g - u)) \cdot \nabla(\min(0, g - u)) dx \\ &= a(\min(0, g - u), \min(0, g - u)) \geq 0. \end{aligned}$$

Damit muss aber $\min(0, g - u) = 0$ f.ü. in Ω gelten. Dies beweist die Behauptung. \square

Eine erste, simple Anwendung von Satz 1.3.3 ist das folgende Resultat (siehe [Ki], Korollar II6.5):

Korollar 1.3.4. *Ist $f \equiv 0$ und genügt $\psi : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$ der Bedingung $\psi \leq M$ f.ü. in Ω mit einer Konstanten $M \geq 0$, dann gilt für die Lösung u des Hindernisproblems ebenfalls $u \leq M$ f.ü. in Ω .*

Beweis. Die Funktion $g \equiv M$ ist in dieser Situation eine Superlösung (siehe Definition 1.3.1). \square

Rein intuitiv ist die Aussage dieses Korollars klar. Wirkt keine Kraft, dann spannt sich die Membran in Abbildung 1.1 über das Hindernis und es ist nur natürlich, dass die Auslenkung nicht größer werden kann als das Maximum der Funktion ψ . Tatsächlich steckt jedoch mehr dahinter:

Interpretieren wir die Funktion $u_1 \equiv 0$ als Lösung des Hindernisproblems mit $f_1 \equiv \psi_1 \equiv 0$, dann besagt das obige Resultat nichts anderes, als dass die Lösung u_2 eines Hindernisproblems mit Kraft $f_2 \equiv 0$ und Hindernis $\psi_2 \in L^\infty(\Omega)$ der Bedingung

$$u_2 \leq u_1 + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^\infty}$$

genügt. Mit Hilfe von Satz 1.3.3 ist es also möglich, Lösungen verschiedener Hindernisprobleme miteinander zu vergleichen. Betrachten wir die allgemeine Situation, dann erhalten wir:

Theorem 1.3.5. *Es seien ψ_1 und ψ_2 Funktionen aus $L^\infty(\Omega)$. Dann gelten für die Lösungen u_1 und u_2 der Hindernisprobleme (P_{ψ_1}) und (P_{ψ_2}) mit Kräften $f_1, f_2 \in H^{-1}(\Omega)$ die folgenden Aussagen:*

- Ist $f_1 = f_2$, dann gilt

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty} \leq \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^\infty}.$$

- Es existiert ein $C = C(\Omega) > 0$, so dass gilt

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2} \leq C(\|f_1 - f_2\|_{H^{-1}} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^\infty}).$$

Beweis. Wir betrachten zunächst die Situation $f_1 = f_2 = f$. Definieren wir $g := u_1 + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^\infty}$, dann genügt diese Funktion trivialerweise den Bedingungen $g \in H^1(\Omega)$, $g \geq \psi_2$ und $\text{tr } g \geq 0$. Des Weiteren gilt auf Grund der u_1 -Variationsungleichung für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ mit $v \leq 0$ f.ü. in Ω

$$a(g, v) = \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla (u_1 - (u_1 - v)) \, dx \leq \langle f, v \rangle.$$

Damit ist g eine Superlösung für das Problem (P_{ψ_2}) und es folgt aus Theorem 1.3.3

$$u_2 - u_1 \leq \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^\infty}.$$

Vertauschen wir die Rollen von u_1 und u_2 , so ergibt sich die umgekehrte Ungleichung und wir erhalten

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty} \leq \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^\infty}.$$

Dies beweist die erste Behauptung. Die zweite Aussage ergibt sich aus der Lipschitz-Eigenschaft in Korollar 1.2.4 und der Dreiecksungleichung. Bezeichnen wir mit $u_{i,j}$ die Lösung des Hindernisproblems mit Hindernis ψ_i und Kraft f_j , dann gilt

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L^2} &= \|u_{1,1} - u_{2,2}\|_{L^2} \\ &\leq \|u_{1,1} - u_{1,2}\|_{L^2} + \|u_{1,2} - u_{2,2}\|_{L^2} \\ &\leq \|u_{1,1} - u_{1,2}\|_{H^1} + |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u_{1,2} - u_{2,2}\|_{L^\infty} \\ &\leq C \|f_1 - f_2\|_{H^{-1}} + |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ genau die Konstante ist, die in Satz 1.2.3 auftaucht. Dies beweist die Behauptung. \square

Die erste Aussage des obigen Satzes besagt, dass die Lösung des Hindernisproblems bei festem f stabil gegenüber L^∞ -Störungen der Funktion ψ ist, und die zweite, dass der Lösungsoperator

$$S : D \subset L^\infty(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad (\psi, f) \mapsto u$$

einer Lipschitz-Bedingung genügt². Ein Großteil von Kapitel 6 wird sich der Frage widmen, ob diese Stabilitätseigenschaften erhalten bleiben, wenn der Funktionenraum $H_0^1(\Omega)$ diskretisiert wird.

² Man beachte, dass S auf Grund der H^1 -Minimalvoraussetzungen nur auf einer Teilmenge $D \subset L^\infty(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ lebt.

1.4 Regularität der Lösung

Möchte man die Genauigkeit eines Finite-Elemente-Verfahrens untersuchen, dann ist die Regularität der exakten Lösung von zentraler Bedeutung. Das Hindernisproblem stellt hier keine Ausnahme dar. Betrachten wir den unrestringierten Fall, also $\psi \equiv -\infty$, dann geht die Variationsungleichung (P) in die schwache Form der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ über und man kann auf die Theorie der elliptischen Differentialgleichungen zurückgreifen, um Regularitätsaussagen zu erhalten. So gilt zum Beispiel:

Theorem 1.4.1. *Es sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

- $d = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ ist ein beschränktes Intervall und $2 \leq p < \infty$
- $d = 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist ein konvexes, beschränktes Polygon und $p = 2$
- $d = 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist ein beschränktes Polygon mit größtem Innenwinkel $\beta \in (0, \pi)$ und

$$2 < p < \begin{cases} \left(1 - \frac{\pi}{2\beta}\right)^{-1} & \text{falls } \beta \in \left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right) \\ \infty & \text{falls } \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right] \end{cases}$$

- $d \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist ein beschränktes Gebiet mit $C^{1,1}$ -Rand und $2 \leq p < \infty$

Des Weiteren sei $f \in L^p(\Omega)$. Dann ist die Lösung u der Poisson-Gleichung

$$u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = (f, v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

eine $W^{2,p}$ -Funktion und es existiert ein $C = C(p, \Omega) > 0$, so dass für alle $v \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\|v\|_{W^{2,p}} \leq C \|\Delta v\|_{L^p}. \quad (1.7)$$

Ist $d = 1$ und Ω ein Intervall mit Durchmesser $\text{diam } \Omega = h$, dann lässt sich die Konstante C abschätzen durch

$$C(p, \Omega) \leq \tilde{C} \left(1 + h^p + h^{2p}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.8)$$

mit einem $\tilde{C} > 0$, das nur von p abhängt.

Man beachte, dass nur wenig über die L^p -Regularität der Poisson-Gleichung auf höherdimensionalen Gebieten ohne $C^{1,1}$ -Rand bekannt ist. Lediglich für dreidimensionale Polyeder existieren noch einige griffige³ Resultate (siehe [Da]).

Beweis(skizze). Da eine detaillierte Behandlung der L^p -Regularitätstheorie für die Poisson-Gleichung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, geben wir nur Referenzen und einige grundlegende Argumente an:

- Für Gebiete Ω mit $C^{1,1}$ -Rand ist die Aussage des Satzes klassisch und zum Beispiel in [Gil], Theorem 9.15 und Lemma 9.17, zu finden.
- Ist Ω ein konvexes Polygon und $p = 2$, dann findet sich die Behauptung in [Gr1] Theorem 2.4.3 und Theorem 2.2.3.

³ Mit „griffig“ meinen wir Regularitätsaussagen, die ohne gewichtete Sobolev-Räume, Besovräume etc auskommen.

- Ist Ω ein beliebiges Polygon mit maximalem Innenwinkel $\beta \in (0, \pi)$ und p wie in Bedingung drei, dann folgt die Regularität der Lösung aus Theorem 4.4.4.13 in [Gr2] und der Eigenwertuntersuchung in [Gr2], S219f. Die Abschätzung (1.7) lässt sich in diesem Fall beweisen, indem man die Ungleichung

$$\|v\|_{W^{2,p}} \leq C_1(\Omega, p) (\|\Delta v\|_{L^p} + \|v\|_{W^{1,p}}) \quad \forall v \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

aus [Gr2], Theorem 4.3.2.4, die stetige Einbettung

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$$

aus [Ad], Theorem 5.4B, und die Ungleichung

$$\|v\|_{H^2} \leq C_2(\Omega) \|\Delta v\|_{L^2} \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

aus Theorem 2.2.3 in [Gr1] miteinander kombiniert:

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{2,p}} &\lesssim (\|\Delta v\|_{L^p} + \|v\|_{W^{1,p}}) \\ &\lesssim (\|\Delta v\|_{L^p} + \|v\|_{H^2}) \\ &\lesssim (\|\Delta v\|_{L^p} + \|\Delta v\|_{L^2}) \\ &\lesssim \|\Delta v\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Das Zeichen \lesssim steht hierbei für kleiner gleich modulo einer (sich von Schritt zu Schritt verändernden) Konstanten $C = C(\Omega, p)$.

- Ist $d = 1$, dann folgt die $W^{2,p}$ -Regularität von u direkt aus der Poisson-Gleichung. Die Normabschätzung ergibt sich in diesem Fall aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p}^p &= \int_a^b |v(x)|^p dx \\ &= \int_a^b \left| \int_a^x v'(t) dt \right|^p dx \\ &\leq \|v'\|_{L^p}^p \int_a^b (x-a)^{p-1} dx \\ &\leq \frac{1}{p} (b-a)^p \|v'\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

und

$$\left\| v' - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b v' dx \right\|_{L^p} = \|v'\|_{L^p} \leq C(p)(b-a) \|v''\|_{L^p}$$

für alle $v \in W^{2,p}(a, b) \cap H_0^1(a, b)$ (siehe [Ev], S291). Man muss lediglich einsetzen:

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{2,p}}^p &= \|v\|_{L^p}^p + \|v'\|_{L^p}^p + \|v''\|_{L^p}^p \\ &\leq \left(\frac{1}{p} (b-a)^p + 1 \right) \|v'\|_{L^p}^p + \|v''\|_{L^p}^p \\ &\leq \left(\frac{1}{p} C(p)^p (b-a)^{2p} + C(p)^p (b-a)^p + 1 \right) \|v''\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Dies beweist auch Abschätzung (1.8).

□

Man hofft nun natürlich, dass ähnliche $W^{2,p}$ -Regularitätsaussagen auch dann noch gelten, wenn das Hindernis ψ nicht vernachlässigbar ist. Dies ist im Allgemeinen aber nicht der Fall. Schließlich kann es durchaus sein, dass die Lösung u des Hindernisproblems auf Teilgebieten mit dem Hindernis übereinstimmt, und dieses ist in unserem bisherigen Setting eine vollkommen beliebige Funktion. Man betrachte hierzu zum Beispiel den Fall $\Omega = (-1, 1)$, $f = 0$ und $\psi(x) = 1 - |x|$. Um $W^{2,p}$ -Regularität erwarten zu können, müssen wir zumindest voraussetzen, dass auch ψ diese Regularität besitzt. Wir verschärfen unsere Minimalvoraussetzungen dementsprechend wie folgt:

Definition und Lemma 1.4.2 ($W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen). Als „ $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen“ bezeichnen wir die Annahmen:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $2 \leq p < \infty$ sind derart, dass Theorem 1.4.1 anwendbar ist.
- ψ ist eine $W^{2,p}$ -Funktion und $\text{tr } \psi \leq -c$ f.ü. auf $\partial\Omega$ für ein $c > 0$
- $f \in L^p(\Omega)$

Sind diese drei Punkte erfüllt, dann gelten auch die H^1 -Minimalvoraussetzungen aus Abschnitt 1.2.

Beweis. Zu zeigen ist, dass die obigen Annahmen die aus Abschnitt 1.2 implizieren. Dies ist jedoch der Fall, denn alle Gebiete in Satz 1.4.1 sind beschränkt und haben einen Lipschitz-Rand, $L^p(\Omega)$ ist eine Teilmenge von $H^{-1}(\Omega)$ und $K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ f.ü.}\}$ ist wegen $\psi^+ := \max(\psi, 0) \in H_0^1(\Omega)$ nicht leer (siehe Lemma 1.3.2). \square

Gelten die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen, dann genügt die Lösung u des Hindernisproblems formal der Gleichung

$$-\Delta u = \begin{cases} f & \text{falls } u > \psi \\ -\Delta \psi & \text{falls } u = \psi \end{cases},$$

denn Δu hängt in $\{u > \psi\}$ nur von der Kraft f ab und auf der Kontaktfläche $\{u = \psi\}$ gilt trivialerweise $-\Delta u = -\Delta \psi$ (vergleiche mit Abbildung 1.1). Bezeichnen wir mit $\mathbb{1}_{(-\infty, 0]}$ die charakteristische Funktion der Menge $(-\infty, 0]$, also

$$\mathbb{1}_{(-\infty, 0]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \leq 0 \\ 0 & \text{falls } t > 0 \end{cases},$$

dann lässt sich die obige Gleichung auch schreiben als

$$-\Delta u = f + (-\Delta \psi - f) \mathbb{1}_{(-\infty, 0]}(u - \psi). \quad (1.9)$$

Dies legt nahe, dass Regularitätsaussagen für das Hindernisproblem mit Hilfe der bekannten Resultate für die Poisson-Gleichung bewiesen werden können, wenn die Nebenbedingung $v \geq \psi$ passend in die Variationsungleichung (P) integriert wird. Wir benutzen hier im Folgenden einen Ansatz aus [Ki] und approximieren die (formale) Gleichung (1.9) durch Probleme der Form

$$u_\epsilon \in H_0^1(\Omega) : \quad -\Delta u_\epsilon = \max(-\Delta \psi - f, 0) \nu_\epsilon(u_\epsilon - \psi) + f \quad (1.10)$$

mit

$$\nu_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ 1 - \frac{t}{\epsilon} & 0 < t < \epsilon \\ 0 & t \geq \epsilon \end{cases}$$

in der Hoffnung, dass die Lösungen u_ϵ existieren, $W^{2,p}$ -Funktionen sind und für $\epsilon \rightarrow 0^+$ so gegen die Lösung des Hindernisproblems konvergieren, dass die $W^{2,p}$ -Regularität beim Übergang zum Grenzwert erhalten bleibt. Als erstes beweisen wir:

Lemma 1.4.3. *Es sei $\nu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ monoton fallend und stetig. Die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen seien erfüllt. Dann besitzt die Gleichung*

$$-\Delta y = \max(-\Delta\psi - f, 0)\nu(y - \psi) + f,$$

also die Aufgabe

$$y \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \left(\max(-\Delta\psi - f, 0)\nu(y - \psi) + f \right) v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.11)$$

eine eindeutige Lösung $y \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ und es gilt

$$\|y\|_{W^{2,p}} \leq C \left(\|f\|_{L^p} + \|\max(-\Delta\psi - f, 0)\|_{L^p} \right) \quad (1.12)$$

mit einer Konstanten C , die nur von Ω und p abhängt.

Beweis. Die $W^{2,p}$ -Regularität der Lösung y und die Abschätzung (1.12) ergeben sich aus Theorem 1.4.1, wenn wir wissen, dass (1.11) eine Lösung besitzt. Zum Beweis der eindeutigen Lösbarkeit greifen wir analog zu [Ki], Lemma IV2.2, auf die Theorie der monotonen Operatoren zurück: Definieren wir die Abbildung

$$L : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega), \quad v \mapsto Lv \quad (1.13)$$

durch

$$\langle Lv, w \rangle = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w - \left(\max(-\Delta\psi - f, 0)\nu(v - \psi) + f \right) w \, dx \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega),$$

dann ist L wegen $\|\nu\|_{L^\infty} \leq 1$ wohldefiniert und es gilt für alle $v, w \in H_0^1(\Omega)$ auf Grund der Monotonie von ν und wegen des Lemmas von Poincaré-Friedrichs

$$\begin{aligned} \langle Lv - Lw, v - w \rangle &= \int_{\Omega} \nabla(v - w) \cdot \nabla(v - w) - \max(-\Delta\psi - f, 0) \left(\nu(v - \psi) - \nu(w - \psi) \right) (v - w) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla(v - w) \cdot \nabla(v - w) \, dx + \text{positiver Rest} \\ &\geq C \|v - w\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Der Operator $L : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ ist also koerziv und strikt monoton. Des Weiteren ist L auch stetig, wenn wir den Raum $H^{-1}(\Omega)$ mit der schwachen Topologie versehen, denn ist v_n eine Folge, die bezüglich der H^1 -Norm gegen ein v konvergiert, dann gilt für alle $w \in H_0^1(\Omega) \cong (H^{-1}(\Omega))'$ wegen der Stetigkeit des H^1 -Skalarproduktes und dem Satz von Lebesgue

$$\langle Lv_n, w \rangle = \int_{\Omega} \nabla v_n \cdot \nabla w - \left(\max(-\Delta\psi - f, 0)\nu(v_n - \psi) + f \right) w \, dx \rightarrow \langle Lv, w \rangle.$$

Damit genügt der Operator L aber allen Voraussetzungen des Satzes von Browder und Minty (siehe zum Beispiel [Sch], Theorem 17.9) und dieser besagt gerade, dass die Gleichung $Lu = 0$, also

$$-\Delta y = \max(-\Delta\psi - f, 0)\nu(y - \psi) + f,$$

eine eindeutige Lösung in $H_0^1(\Omega)$ besitzt. Dies beweist die Behauptung. \square

Das obige Lemma garantiert uns, dass die approximierenden Probleme (1.10) für alle $\epsilon > 0$ eindeutige Lösungen $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ besitzen. Zu untersuchen bleibt, ob diese Funktionen für $\epsilon \rightarrow 0^+$ tatsächlich gegen die Lösung u des Hindernisproblems konvergieren. Hierzu benötigen wir:

Lemma 1.4.4 (Minty's Lemma). *Es sei H ein reeller Hilbert-Raum mit Produkt (\cdot, \cdot) , Norm $\|\cdot\|$ und dualer Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es sei $K \subset H$ abgeschlossen, konvex und nicht leer und es sei $L : K \rightarrow H'$ derart, dass gilt:*

- L ist monoton:

$$\langle Lv - Lw, v - w \rangle \geq 0 \quad \forall v, w \in K$$

- L ist stetig, wenn H' mit der schwachen Topologie versehen wird:

$$v_n \rightarrow v \text{ in } H \Rightarrow Lv_n \rightharpoonup Lv \text{ in } H'$$

Dann löst ein $u \in K$ die Aufgabe

$$u \in K : \quad \langle Lu, u - v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \tag{1.14}$$

genau dann, wenn gilt

$$\langle Lv, u - v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K. \tag{1.15}$$

Beweis. Löst $u \in K$ das Problem (1.14), dann gilt wegen

$$0 \leq \langle Lu - Lv, u - v \rangle = \langle Lu, u - v \rangle - \langle Lv, u - v \rangle \quad \forall v \in K$$

auch

$$\langle Lv, u - v \rangle \leq \langle Lu, u - v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K$$

und u ist eine Lösung von (1.15). Dies beweist die erste Implikation. Ist andersherum $u \in K$ eine Lösung von (1.15), dann ist die Konvexkombination $w := u + t(v - u)$ für alle $v \in K$ und alle $t \in [0, 1]$ in K und es gilt

$$0 \geq \langle Lw, u - w \rangle = \langle L(u + t(v - u)), u - u - t(v - u) \rangle = t \langle L(u + t(v - u)), u - v \rangle,$$

beziehungsweise

$$\langle L(u + t(v - u)), u - v \rangle \leq 0.$$

Geht t gegen Null, dann erhalten wir auf Grund der Stetigkeit der Abbildung L die Ungleichung (1.14). Dies beweist die Behauptung. \square

Minty's Lemma erlaubt, die in u quadratische Bedingung

$$\langle Lu, u - v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K$$

durch eine in u lineare Bedingung zu ersetzen. Dies vereinfacht die Analysis erheblich, wenn untersucht werden soll, wie sich eine Folge u_ϵ von Lösungen verschiedener Variations(un)gleichungen im Grenzwert verhält, und genau dies ist ja unser Ziel. Man beachte, dass sowohl der Operator L aus (1.13) als auch die Abbildung

$$u \in K \mapsto \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \dots \, dx - \langle f, \dots \rangle \in H^{-1}(\Omega),$$

die das Hindernisproblem definiert, den Voraussetzungen von Minty's Lemma genügen. Man vergleiche hierzu mit dem Beweis von Lemma 1.4.3. Wir können nun zeigen:

Theorem 1.4.5. *Gelten die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen, dann besitzt das Hindernisproblem (P) eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ und es existiert ein $C = C(\Omega, p)$, so dass gilt*

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C \left(\|f\|_{L^p} + \|\max(-\Delta\psi - f, 0)\|_{L^p} \right). \tag{1.16}$$

Beweis. Wir gehen hier analog zu [Ki], Theorem IV2.3, vor. Bezeichnen wir mit u_ϵ wieder die Lösung des Problems (1.10), dann wissen wir auf Grund der Ungleichung

$$\|u_\epsilon\|_{W^{2,p}} \leq C(\Omega, p) \left(\|f\|_{L^p} + \|\max(-\Delta\psi - f, 0)\|_{L^p} \right) \quad \forall \epsilon > 0,$$

dass die Familie $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ in $W^{2,p}(\Omega)$ beschränkt ist. Damit existiert eine Folge (u_{ϵ_k}) mit $\epsilon_k \rightarrow 0$, die für $k \rightarrow \infty$ schwach gegen ein $\tilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$ konvergiert. Man beachte, dass dieses \tilde{u} auf Grund der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm ebenfalls der Bedingung

$$\|\tilde{u}\|_{W^{2,p}} \leq C(\Omega, p) \left(\|f\|_{L^p} + \|\max(-\Delta\psi - f, 0)\|_{L^p} \right)$$

genügt. Unser Ziel ist nun, zu zeigen, dass \tilde{u} identisch der Lösung u des Hindernisproblems sein muss. Hierzu beweisen wir zunächst, dass der Grenzwert \tilde{u} in der zulässigen Menge K enthalten ist. Betrachten wir für ein festes $\epsilon > 0$ die Funktion $v := \min(0, u_\epsilon - \psi)$, dann ist v nach Lemma 1.3.2 eine H_0^1 -Funktion und es gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \left(\max(-\Delta\psi - f, 0) \nu_\epsilon(u_\epsilon - \psi) + f \right) v \, dx.$$

Ergänzen wir diese Gleichung mit der Greenschen Formel

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \Delta \psi v \, dx,$$

dann erhalten wir

$$\int_{\Omega} \nabla(u_\epsilon - \psi) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \left(\max(-\Delta\psi - f, 0) \nu_\epsilon(u_\epsilon - \psi) + \Delta\psi + f \right) v \, dx.$$

Nach Definition von v gilt aber

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(u_\epsilon - \psi) \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} \nabla(u_\epsilon - \psi) \cdot \nabla(\min(0, u_\epsilon - \psi)) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla(\min(0, u_\epsilon - \psi)) \cdot \nabla(\min(0, u_\epsilon - \psi)) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} \left(\max(-\Delta\psi - f, 0) \nu_\epsilon(u_\epsilon - \psi) + \Delta\psi + f \right) v \, dx \\ &= \int_{\{u_\epsilon < \psi\}} \left(\max(-\Delta\psi - f, 0) + \Delta\psi + f \right) (u_\epsilon - \psi) \, dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Funktion $v = \min(0, u_\epsilon - \psi)$ gleich Null sein muss. Die Lösungen u_ϵ der Gleichungen (1.10) sind also für alle $\epsilon > 0$ in K enthalten. Damit muss aber auch \tilde{u} ein Element dieser Menge sein, denn K ist konvex und abgeschlossen bezüglich der $W^{2,p}$ -Norm, also insbesondere schwach abgeschlossen. Es folgt, dass der Grenzwert \tilde{u} zulässig für (P) ist. Zu zeigen bleibt, dass \tilde{u} auch der Variationsungleichung des Hindernisproblems genügt. Hierzu nutzen wir Minty's Lemma. Formulieren wir zunächst das Problem (1.10) um, dann ergibt sich

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla(u_{\epsilon_k} - v) - \left(\max(-\Delta\psi - f, 0) \nu_{\epsilon_k}(v - \psi) + f \right) (u_{\epsilon_k} - v) \, dx \leq 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.17)$$

Ist nun $v \in K$ beliebig, c wie in unseren $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen und k so groß, dass $\epsilon_k < c$ gilt, dann genügt die Funktion $\tilde{v} := \max(v, \psi + \delta)$ für alle $\epsilon_k < \delta < c$ sowohl der Bedingung $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ als auch $\tilde{v} > \psi + \epsilon_k$ (siehe Lemma 1.3.2). Damit vereinfacht sich Ungleichung (1.17) für \tilde{v} zu

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla (u_{\epsilon_k} - \tilde{v}) - f(u_{\epsilon_k} - \tilde{v}) \, dx \leq 0.$$

Gehen wir hier zum Grenzwert $k \rightarrow \infty$ über, dann erhalten wir auf Grund der schwachen Konvergenz

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla (\tilde{u} - \tilde{v}) - f(\tilde{u} - \tilde{v}) \, dx \leq 0.$$

Für $\tilde{v} = \max(v, \psi + \delta) = v - \min(0, v - \psi - \delta)$ gilt auf Grund der Stetigkeit der Abbildung

$$w \in H^1(\Omega) \mapsto \min(0, w) \in H^1(\Omega)$$

aber $\tilde{v} \rightarrow v = v - \min(0, v - \psi)$ in $H^1(\Omega)$, falls δ gegen Null strebt. Durch erneute Limesbildung erhalten wir also

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla (\tilde{u} - v) - f(\tilde{u} - v) \, dx \leq 0.$$

Hieraus folgt mit dem Lemma von Minty, dass $\tilde{u} \in K$ für alle $v \in K$ der Bedingung

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla (\tilde{u} - v) - f(\tilde{u} - v) \, dx \leq 0$$

genügt. Die Funktion $\tilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$ ist also identisch der eindeutig bestimmten Lösung des Hindernisproblems (P). Dies beweist die Behauptung. \square

Man beachte, dass selbst bei glatten f , ψ und $\partial\Omega$ im Allgemeinen nicht zu erwarten ist, dass die Lösung u des Hindernisproblems mehr Ableitungen besitzt als in Theorem 1.4.5 behauptet. Betrachten wir zum Beispiel den Fall

$$\Omega = (-1, 1), \quad f(x) = 0, \quad \psi(x) = \frac{1}{2} - x^2,$$

dann ist die Lösung ein Spline und es gilt $u'' \notin W^{1,1}(\Omega) \subset C(\Omega)$ (siehe Abbildung 1.2). Damit kann u in keinem der Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Omega)$ mit $k > 2$ enthalten sein. Die volle elliptische Regularität der Poisson-Gleichung geht also verloren, wenn wir vom Poisson- zum Hindernisproblem übergehen.

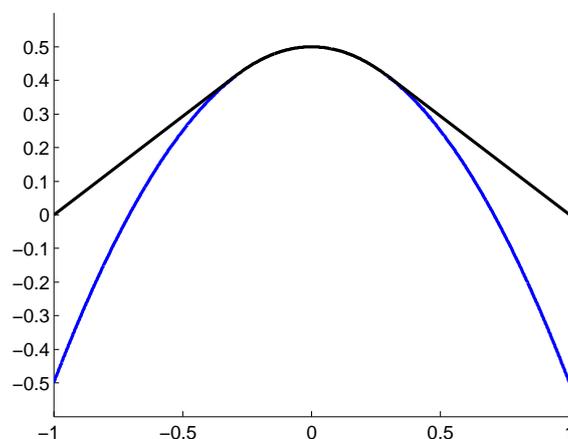


Abbildung 1.2: Das Hindernisproblem mit $\Omega = (-1, 1)$, $f = 0$ und $\psi(x) = \frac{1}{2} - x^2$.

2 Diskrete Hindernisprobleme

Nachdem wir uns nun mit dem kontinuierlichen Setting beschäftigt haben, werden wir im Folgenden auf diskrete Hindernisprobleme eingehen. Abschnitt 2.1 widmet sich zunächst der Konstruktion der Finite-Elemente-Räume, die wir in dieser Arbeit verwenden werden. Hier befassen wir uns auch kurz mit Interpolationsresultaten und inversen Abschätzungen. In Abschnitt 2.2 definieren wir dann, was wir unter einem diskreten Hindernisproblem verstehen, und untersuchen, unter welchen Voraussetzungen mit der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu rechnen ist. Bezüglich der Finite-Elemente-Theorie und der Notationen orientieren wir uns insbesondere an [Br].

2.1 Diskretisierung des Funktionenraums

Die kontinuierlichen Hindernisprobleme, die wir in Kapitel 1 betrachtet haben, lassen sich naturgemäß nicht direkt mit einem Computer lösen. Um dies zu ermöglichen, muss zunächst der zugrundeliegende Funktionenraum – in unserem Fall der $H_0^1(\Omega)$ – diskretisiert und damit die Anzahl der Freiheitsgrade auf eine endliche Zahl reduziert werden. Zur Approximation werden wir in dieser Arbeit ausschließlich lineare finite Elemente verwenden¹. Wir definieren zunächst:

Definition 2.1.1 (Triangulierungen und Polyeder). *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, dann heißt eine Menge $\mathcal{T} = \{T_i\}$ bestehend aus endlich vielen abgeschlossenen d -dimensionalen Simplexes T_i eine Triangulierung von Ω , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- $\bigcup T_i = \overline{\Omega}$

- Ist $\mathcal{C}_i = \{x_k\}$ die Menge der Eckpunkte des Simplex T_i , dann gilt für alle i, j die Gleichung

$$T_i \cap T_j = \text{conv}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j) := \left\{ \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \mid x_k \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j, m \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0 \right\}.$$

- Jedes Simplex T_i hat einen Eckpunkt x_k , der in Ω enthalten ist.

Ein triangulierbares Gebiet Ω mit Lipschitz-Rand bezeichnen wir als beschränktes Polyeder².

Aus dem zweiten Punkt der obigen Definition folgt insbesondere, dass das Gitter $\{T_i\}$ keine hängenden Knoten besitzt und dass für alle $i \neq j$ gilt $\text{int } T_i \cap \text{int } T_j = \emptyset$. Da wir in dieser Arbeit untersuchen wollen, wie sich der Diskretisierungsfehler verhält, wenn das Gebiet Ω immer feiner aufgelöst wird, werden wir zumeist Familien $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ von Triangulierungen betrachten. Um sicherzustellen, dass diese bei kleiner werdenden Gitterweiten nicht degenerieren, benötigen wir:

Definition 2.1.2. *Eine Familie $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}_{0 < h < h_0}$ von Triangulierungen heißt quasi-uniform, falls positive Konstanten ρ_1 und ρ_2 existieren, so dass für alle $0 < h < h_0$ gilt*

$$\max\{\text{diam } T : T \in \mathcal{T}_h\} \leq \rho_1 h \quad \text{und} \quad \min\{\text{diam } B_T : T \in \mathcal{T}_h\} \geq \rho_2 h.$$

Mit B_T bezeichnen wir hierbei den größten Ball, der in einem Simplex T enthalten ist.

¹ Da die Lösung des Hindernisproblems – wie wir am Ende des ersten Kapitels gesehen haben – im Allgemeinen nur zweite Ableitungen besitzt, macht es – zumindest in Hinblick auf den H^1 -Fehler – wenig Sinn, finite Elemente höherer Ordnung zu benutzen. Man vergleiche hierzu mit dem Approximationssatz 2.1.5 und der Fehlerabschätzung 3.1.1.

² Man beachte, dass wir Schlitzgebiete etc ausschließen.

Da die obere Gitterweitenschranke h_0 für unsere Analysis nicht von Bedeutung ist, werden wir im Rest dieser Arbeit anstelle von $\{\mathcal{T}_h\}_{0 < h < h_0}$ und $0 < h < h_0$ einfach $\{\mathcal{T}_h\}$ und $h > 0$ schreiben. Wir können nun die Finite-Elemente-Räume, mit denen wir arbeiten werden, wie folgt konstruieren:

Definition 2.1.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder mit einer quasi-uniformen Familie $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ von Triangulierungen. Dann sind die Räume $V_h(\Omega)$ und $V_h^0(\Omega)$ für alle $h > 0$ definiert durch*

$$V_h(\Omega) = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_T \text{ ist affin-linear } \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

und

$$V_h^0(\Omega) = V_h(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Wir halten fest:

Lemma 2.1.4. *Es seien $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ und $V_h(\Omega)$ wie in Definition 2.1.3. Des Weiteren sei $\{C_h\}$ die Familie der Mengen, die aus den Knoten der Triangulierungen \mathcal{T}_h bestehen, also*

$$C_h := \{x \in \bar{\Omega} : \exists T \in \mathcal{T}_h \text{ so dass } x \text{ eine Ecke von } T \text{ ist}\}.$$

Dann existiert für alle $h > 0$ genau eine Basis $\{\varphi_h^l\}$ von $V_h(\Omega)$, so dass für die Knoten $C_h = \{x_k\}$ gilt

$$\varphi_h^l(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } l = k \\ 0 & \text{falls } l \neq k \end{cases}.$$

Beweis. Trivial. □

Eine Basis $\{\varphi_h^l\}$ der obigen Form werden wir auch als nodale Basis bezeichnen. Man beachte, dass für $V_h^0(\Omega)$ gilt

$$V_h^0(\Omega) = \text{span}\{\varphi_h^l : x_l \notin \partial\Omega\}.$$

Entscheidend für die Fehleranalyse ist natürlich, wie gut die Sobolev-Räume $W^{m,p}(\Omega)$ durch die Finite-Elemente-Räume $V_h(\Omega)$ approximiert werden. Dies lässt sich beurteilen anhand von:

Theorem 2.1.5 (Approximation mit V_h -Funktionen). *Es sei Ω ein beschränktes Polyeder, $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ eine quasi-uniforme Familie von Triangulierungen und $V_h(\Omega)$ wie gehabt. Des Weiteren sei*

$$|v|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p}^p \right)^{1/p}.$$

Dann gilt das Folgende:

- Ist $1 < p < \infty$ und $m \in \{1, 2\}$, dann existieren Projektionen $\Pi_h : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow V_h(\Omega)$ und eine Konstante C , die nur von d, m, p und ρ_2 abhängt, so dass der Fehler $\|v - \Pi_h v\|_{W^{s,p}}$ für alle Funktionen $v \in W^{m,p}(\Omega)$, alle $0 \leq s < m$ und alle $h > 0$ abgeschätzt werden kann durch

$$\|v - \Pi_h v\|_{W^{s,p}} \leq Ch^{m-s} |v|_{W^{m,p}}. \quad (2.1)$$

Die Π_h können hierbei so gewählt werden, dass Nullrandbedingungen erhalten bleiben:

$$\Pi_h(W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \subseteq V_h^0(\Omega).$$

- Ist zusätzlich $m > d/p$, dann kann der Lagrange-Interpolationsoperator I_h als Π_h verwendet werden und es gilt neben (2.1) auch

$$\|v - I_h v\|_{L^\infty} \leq Ch^{m-d/p} |v|_{W^{m,p}}.$$

Beweis. Punkt eins wurde von Scott und Zhang bewiesen in [Sco]. Der Beweis der zweiten Aussage findet sich in [Br], Theorem 4.4.20f. Man beachte, dass für $m > d/p$ die Inklusion $W^{m,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ gilt. Lagrange-Interpolation ist unter dieser Annahme also möglich. □

Für alle H_0^1 -Funktionen v und alle $h > 0$ lässt sich also eine Approximation $\Pi_h v \in V_h^0(\Omega)$ finden, so dass gilt

$$\|v - \Pi_h v\|_{L^2} \leq Ch|v|_{H^1},$$

und ist v sogar in $W^{2,p}(\Omega)$ für ein p mit $d < 2p < \infty$, dann erhalten wir

$$\|v - I_h v\|_{L^p} \leq Ch^2|v|_{W^{2,p}}, \quad \|v - I_h v\|_{L^\infty} \leq Ch^{2-d/p}|v|_{W^{2,p}}$$

und

$$\|v - I_h v\|_{W^{1,p}} \leq Ch|v|_{W^{2,p}}.$$

Dies sind die Konvergenzordnungen, an denen wir unsere Fehlerabschätzungen messen müssen. Man beachte, dass alle der obigen $W^{m,p}$ -Normen auf den endlich dimensionalen Vektorräumen $V_h(\Omega)$ äquivalent sind. Untersucht man im Detail, welche Konstanten in den Äquivalenzabschätzungen auftauchen, dann lässt sich zum Beispiel zeigen:

Lemma 2.1.6. *Es seien Ω , $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ und $V_h(\Omega)$ wie gehabt. Dann existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, die nur von d, p, Ω und ρ_2 abhängen, so dass für alle $h > 0$ und alle $v_h \in V_h^0(\Omega)$ gilt:*

$$\|v_h\|_{L^\infty} \leq C_1 h^{-d/p} \|v_h\|_{W^{1,p}} \quad \text{und} \quad \|v_h\|_{W^{1,p}} \leq C_2 h^{-1} \|v_h\|_{L^\infty}.$$

Beweis. Ist $h > 0$ fest gewählt und $v_h \in V_h^0(\Omega)$ beliebig, dann ist ∇v_h auf jedem Simplex $T \in \mathcal{T}_h$ konstant. Definieren wir

$$\|\nabla v_h\|_{L^\infty(T)} = \max_{x \in T} \|(\nabla v_h)(x)\|$$

mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$, dann gilt insbesondere

$$\|\nabla v_h\|_{L^p(T)}^p = \int_T \|\nabla v_h\|_{L^\infty(T)}^p dx = \|\nabla v_h\|_{L^\infty(T)}^p |T|.$$

Auf Grund der Quasi-Uniformität der Familie $\{\mathcal{T}_h\}$ wissen wir aber

$$|T| \geq |B_T| \geq C(d, \rho_2) h^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Wir erhalten also

$$\|\nabla v_h\|_{L^\infty(T)}^p \leq C(d, \rho_2)^{-1} h^{-d} \|\nabla v_h\|_{L^p(T)}^p$$

und damit

$$\|\nabla v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{C}(d, p, \rho_2) h^{-d/p} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v_h\|_{L^p(T)}^p \right)^{1/p} = \tilde{C}(d, p, \rho_2) h^{-d/p} \|\nabla v_h\|_{L^p(\Omega)}.$$

Andererseits existiert wegen $V_h^0(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ ein $x_0 \in \Omega$ mit $\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} = |v_h(x_0)|$. Wählen wir zu diesem ein $x_1 \in \partial\Omega$ mit $\{tx_0 + (1-t)x_1 : t \in (0, 1)\} \subset \Omega$, dann folgt

$$\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} = |v_h(x_0)| \leq \int_0^1 \|(\nabla v_h)(x_1 + t(x_0 - x_1))\| \|x_0 - x_1\| dt \leq \|x_0 - x_1\| \|\nabla v_h\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Man beachte, dass ein solches x_1 immer gefunden werden kann und dass der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwendbar ist, denn die Abbildung $t \mapsto v_h(x_1 + t(x_0 - x_1))$ ist stetig auf $[0, 1]$ und nur in endlich vielen Punkten nicht differenzierbar. Nun ergibt sich aber

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \text{diam } \Omega \|\nabla v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \text{diam } \Omega \tilde{C}(d, p, \rho_2) h^{-d/p} \|\nabla v_h\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C_1 h^{-d/p} \|v_h\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dies beweist die erste Behauptung.

Um die zweite Abschätzung zu erhalten, gehen wir ähnlich vor. Ist $h > 0$ fest, $T \in \mathcal{T}_h$ beliebig und B_T wie in Definition 2.1.2, dann gilt für den Mittelpunkt x_0 von B_T und alle $x_1 \in B_T$ die Gleichung

$$(\nabla v_h) \cdot (x_1 - x_0) = v_h(x_1) - v_h(x_0).$$

Mit ∇v_h bezeichnen wir hierbei den auf T konstanten Gradienten von v_h . Damit ergibt sich aber

$$\frac{\rho_2}{2} h \|\nabla v_h\|_{L^\infty(T)} = \frac{\rho_2}{2} h \|\nabla v_h\| = \sup_{\|w\| \leq \rho_2 h/2} (\nabla v_h) \cdot w \leq 2 \|v_h\|_{L^\infty(T)},$$

also

$$\|\nabla v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{4}{\rho_2 h} \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Die zweite Behauptung folgt nun aus den Abschätzungen

$$\|v_h\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \text{diam } \Omega \|\nabla v_h\|_{L^\infty(\Omega)}$$

und

$$\|\nabla v_h\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|\nabla v_h\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

□

Neben der obigen Ungleichung existieren noch viele andere Abschätzungen, die die verschiedenen Sobolev-Normen auf $V_h(\Omega)$ miteinander in Beziehung setzen. Wir verweisen hierfür auf [Br], S111ff.

2.2 Formulierung des Problems und Lösbarkeitsaussagen

Betrachten wir nun eine beliebige, aber feste Gitterweite $h > 0$ und ersetzen wir im Hindernisproblem den Funktionenraum $H_0^1(\Omega)$ durch $V_h^0(\Omega)$, dann erhalten wir ein diskretes Problem der Form

$$\begin{aligned} \min \int_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla v_h \, dx - 2 \langle f, v_h \rangle \\ \text{s.t. } v_h \in K_h := \{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \chi \text{ f.ü.}\} \end{aligned}$$

mit der assoziierten Variationsungleichung

$$(P_h) \quad u_h \in K_h : \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla (u_h - v_h) \, dx \leq \langle f, u_h - v_h \rangle \quad \forall v_h \in K_h.$$

Wir lassen hierbei – im Gegensatz zur sonst üblichen Herangehensweise – auch Hindernisse χ zu, die nicht aus $V_h(\Omega)$ stammen. Fordern werden wir lediglich das Folgende:

Definition 2.2.1 (V_h -Minimalvoraussetzungen). Als „ V_h -Minimalvoraussetzungen“ bezeichnen wir die Annahmen:

- Ω ist ein beschränktes Polyeder.
- f ist ein Element von $H^{-1}(\Omega)$.
- \mathcal{T}_h ist eine Triangulierung von Ω , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört.
- $\chi : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$ ist derart, dass die Menge $K_h = \{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \chi \text{ f.ü.}\}$ nicht leer ist.

Man beachte, dass die Bedingung $\{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \chi \text{ f.ü.}\} \neq \emptyset$ echt stärker ist als die Voraussetzung $\{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \chi \text{ f.ü.}\} \neq \emptyset$ aus Definition 1.2.1. Betrachten wir zum Beispiel die Funktion $\chi(x) = (1 - x^2)^{3/4}$ auf $\Omega = (-1, 1)$, dann gilt $\chi \in H_0^1(\Omega)$, aber kein Element von $V_h^0(\Omega)$ kann über χ liegen, denn die Ableitung χ' ist in ± 1 singulär (siehe Abbildung 2.1)

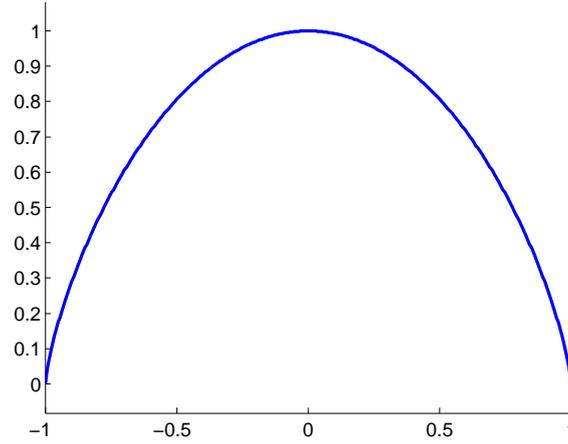


Abbildung 2.1: Die Funktion $\chi(x) = (1 - x^2)^{3/4}$ auf $\Omega = (-1, 1)$

In der Praxis werden wir in (P_h) natürlich immer $\chi = I_h\psi$ beziehungsweise $\chi = \Pi_h\psi$ wählen, denn nur dann erhalten wir ein diskretes Hindernisproblem mit endlich vielen Nebenbedingungen, das das Ursprungsproblem approximiert und numerisch lösbar ist. In Kapitel 6 wird sich zeigen, warum es sinnvoll ist, hier auch andere Hindernisse zuzulassen. Wir halten fest:

Theorem 2.2.2. *Genügen Ω , f , \mathcal{T}_h und χ den V_h -Minimalvoraussetzungen, dann besitzt das diskrete Hindernisproblem*

$$(P_h) \quad u_h \in K_h : \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla (u_h - v_h) \, dx \leq \langle f, u_h - v_h \rangle \quad \forall v_h \in K_h$$

mit

$$K_h = \{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \chi f.ü.\}$$

eine eindeutige Lösung $u_h \in V_h^0(\Omega)$ und der Lösungsoperator

$$f \in H^{-1}(\Omega) \mapsto u_{h,f} \in V_h^0(\Omega)$$

ist Lipschitz-stetig mit einer Konstanten, die nicht von der Weite h und dem Hindernis χ abhängig ist. Das heißt, es existiert ein $C > 0$, so dass für alle $f_1, f_2 \in H^{-1}(\Omega)$ gilt

$$\|u_{h,f_1} - u_{h,f_2}\|_{H^1} \leq C \|f_1 - f_2\|_{H^{-1}}.$$

Beweis. Der Beweis ist vollkommen analog zum kontinuierlichen Fall. Die zulässige Menge K_h ist auf Grund der V_h -Minimalvoraussetzungen nicht leer und trivialerweise konvex. Des Weiteren ist K_h auch abgeschlossen, denn Konvergenz im endlich dimensionalen Raum $V_h(\Omega)$ – also Konvergenz der Koordinaten bei Wahl einer beliebigen, aber festen Basis – impliziert Konvergenz fast überall. Damit ist der Satz von Lions-Stampacchia anwendbar und wir erhalten die Behauptung. Man beachte, dass die Konstante C im Beweis von Satz 1.2.3 nur von der Koerzivitätskonstante der betrachteten Bilinearform abhängt. Die Lipschitz-Konstante ist also in der Tat von h und χ unabhängig. \square

Von großer Wichtigkeit ist natürlich die Frage, wie gut das kontinuierliche Hindernisproblem (P) durch ein diskretes Problem der Form (P_h) approximiert werden kann. Optimal wäre es, wenn sich der Fehler zwischen u und u_h so verhalten würde wie der zwischen u und der Approximation $\Pi_h u$ aus dem Approximationssatz 2.1.5. Dies ist aber nur unter speziellen Voraussetzungen der Fall, wie wir in den folgenden Kapiteln sehen werden.

3 H^1 -Fehlerabschätzungen

Im Folgenden stellen wir einen allgemeinen Ansatz zur H^1 -Fehleranalyse vor, mit Hilfe dessen sich die Lösungen u und u_h der Probleme (P) und (P_h) in Beziehung setzen lassen. Abschnitt 3.1 widmet sich dem Hauptresultat dieses Kapitels – einer Variante des Lemmas von Céa, die auf Falk zurückgeht und zum Beispiel in [Fa] und [Ci1] zu finden ist. Im anschließenden Abschnitt 3.2 betrachten wir einige Spezialfälle, in denen die H^1 -Konvergenzordnung explizit angegeben werden kann.

3.1 Fehleranalyse nach Falk

Möchte man den Fehler zwischen den Lösungen u und u_h abschätzen, dann liegt es nahe, die H^1 -Norm als Fehlermaß zu verwenden. Schließlich lassen sich die Stetigkeit und die Koerzivität der Bilinearform

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

nur ausnutzen, wenn mit dieser Norm gearbeitet wird. In der Tat ist es so, dass sich Fehlerabschätzungen in der H^1 -Norm mit relativ einfachen Mitteln herleiten lassen. Kombiniert man zum Beispiel die Variationsungleichungen (P) und (P_h) geschickt miteinander, dann erhält man das folgende Resultat, das von Falk bewiesen wurde:

Theorem 3.1.1 (Céa’s Lemma für das Hindernisproblem). *Es seien Ω , f , \mathcal{T}_h , χ und ψ derart, dass sowohl die H^1 - als auch die V_h -Minimalvoraussetzungen erfüllt sind. Es gelte $f \in L^2(\Omega)$ und die Lösung u des Problems (P) sei eine H^2 -Funktion. Dann gilt*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \left(\frac{2}{c} \|\Delta u + f\|_{L^2} \left(\|u_h - v\|_{L^2} + \|u - v_h\|_{L^2} \right) + \frac{1}{c^2} \|u - v_h\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

für alle $v \in K$ und alle $v_h \in K_h$, wobei c die Koerzivitätskonstante der Bilinearform a bezeichnet.

Man beachte, dass sich Abschätzungen der obigen Form auch für beliebige koerzive und stetige Bilinearformen beweisen lassen. Symmetrie ist hierbei nicht erforderlich. Wir verweisen auf [Fa]. Der folgende Beweis orientiert sich an [Ci1], Theorem 9.1.

Beweis. Auf Grund der Koerzivität der Bilinearform a gilt

$$\begin{aligned} c\|u - u_h\|_{H^1}^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u, u) + a(u_h, u_h) - a(u, u_h) - a(u_h, u) \end{aligned}$$

und aus den Variationsungleichungen (P) und (P_h) ergibt sich

$$a(u, u) \leq a(u, v) + \langle f, u - v \rangle$$

und

$$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, v_h) + \langle f, u_h - v_h \rangle$$

für alle $v \in K$ und $v_h \in K_h$.

Kombinieren wir diese Ungleichungen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
c\|u - u_h\|_{H^1}^2 &\leq a(u, v) + \langle f, u - v \rangle + a(u_h, v_h) + \langle f, u_h - v_h \rangle - a(u, u_h) - a(u_h, u) \\
&= a(u, v - u_h) + \langle f, u - v \rangle + a(u_h, v_h - u) + \langle f, u_h - v_h \rangle \\
&= -a(u, u_h - v) + \langle f, u - v_h \rangle - a(u, u - v_h) + \langle f, u_h - v \rangle + a(u_h - u, v_h - u) \\
&= (\Delta u + f, u_h - v)_{L^2} + (\Delta u + f, u - v_h)_{L^2} + a(u_h - u, v_h - u) \\
&\leq \|\Delta u + f\|_{L^2} \left(\|u_h - v\|_{L^2} + \|u - v_h\|_{L^2} \right) + \|u - u_h\|_{H^1} \|v_h - u\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit der Young'schen Ungleichung

$$c\|u - u_h\|_{H^1}^2 \leq \|\Delta u + f\|_{L^2} \left(\|u_h - v\|_{L^2} + \|u - v_h\|_{L^2} \right) + \frac{c}{2}\|u - u_h\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2c}\|v_h - u\|_{H^1}^2$$

und damit

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \left(\frac{2}{c}\|\Delta u + f\|_{L^2} \left(\|u_h - v\|_{L^2} + \|u - v_h\|_{L^2} \right) + \frac{1}{c^2}\|v_h - u\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dies beweist die Behauptung. \square

Sind ψ und χ identisch minus unendlich, dann ergibt sich insbesondere:

Korollar 3.1.2. *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ und \mathcal{T}_h wie gehabt. Es sei u die Lösung des Problems*

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad a(u, v) = (f, v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

und u_h die Lösung von

$$u_h \in V_h^0(\Omega) : \quad a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2} \quad \forall v_h \in V_h^0(\Omega).$$

Die Funktion u sei in $H^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{1}{c} \inf \left\{ \|v_h - u\|_{H^1} : v_h \in V_h^0(\Omega) \right\} \quad (3.2)$$

mit c wie in Satz 3.1.1.

Beweis. Wegen $u \in H^2(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$ folgt aus der u -Variationsgleichung $-\Delta u = f$ in $L^2(\Omega)$. Damit wird (3.1) zu (3.2) und wir erhalten die Behauptung. \square

Im Fall $\psi \equiv \chi \equiv -\infty$ reduziert sich Satz 3.1.1 also auf das klassische Lemma von Céa und wir erhalten die Quasi-Optimalität der Approximierenden u_h für die Poisson-Gleichung. Sind ψ und χ nicht vernachlässigbar, so ist neben den Approximationseigenschaften des Finite-Elemente-Raums $V_h^0(\Omega)$ auch der Zusammenhang zwischen den zulässigen Mengen $K = \{v \geq \psi\}$ und $K_h = \{v_h \geq \chi\}$ für den Fehler von Bedeutung, denn dieser bestimmt, wie gut die exakte Lösung $u \in K$ durch Elemente von K_h und wie gut die diskrete Lösung u_h durch Elemente von K angenähert werden kann.

An dieser Stelle sei bemerkt, dass es neben dem obigen Ansatz von Falk noch andere Herangehensweisen gibt, um eine Art Quasi-Optimalität für das Hindernisproblem zu erhalten. So ist es zum Beispiel möglich, den klassischen Beweis des Lemmas von Céa zu imitieren, wenn man nur Funktionen v_h mit speziellen Eigenschaften betrachtet (siehe etwa [Mo1]). Beispielsweise lässt sich leicht nachrechnen, dass für alle $v_h \in K_h$ mit $u + u_h - v_h \in K$ gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{1}{c} \|v_h - u\|_{H^1}.$$

Nachteilig an diesem Ansatz ist natürlich, dass die Menge der zulässigen v_h von u_h und u abhängt und es nicht ohne Weiteres möglich ist, die rechte Seite der sich ergebenden Ungleichung abzuschätzen.

3.2 Handhabbare Abschätzungen für das Hindernisproblem

Um aus Satz 3.1.1 Fehlerabschätzungen ableiten zu können, mit denen sich in der Praxis arbeiten lässt, müssen wir Funktionen $v_h \in K_h$ und $v \in K$ finden, die die Lösungen u und u_h bestmöglich approximieren. Tun wir dies mit Hilfe von Satz 2.1.5, dann erhalten wir:

Theorem 3.2.1. *Es seien Ω , f , \mathcal{T}_h , χ und ψ derart, dass sowohl die H^1 - als auch die V_h -Minimalvoraussetzungen erfüllt sind. Des Weiteren sei $p \geq 2$ und es sei $\Pi_h : W^{2,p}(\Omega) \rightarrow V_h(\Omega)$ eine Abbildung wie in Satz 2.1.5. Es gelte:*

- $f \in L^2(\Omega)$
- $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$ und $\text{tr } \psi \leq 0$ f.ü. auf $\partial\Omega$
- $\Pi_h u \geq \chi$ und $u_h \geq \Pi_h \psi$ f.ü. auf Ω

Dann existiert eine Konstante $C = C(d, p, \Omega, \rho_2) > 0$, so dass gilt:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} \left(|\psi|_{W^{2,p}} + |u|_{W^{2,p}} \right) + |u|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Der Beweis, den wir hier verwenden werden, orientiert sich an [Ci1].

Beweis. Definieren wir $v := \max(u_h, \psi)$, dann gilt $v \in H_0^1(\Omega)$ nach Lemma 1.3.2 und $v \geq \psi$ f.ü. nach Konstruktion. Damit ist v ein Element von K und eine legitime Wahl in Abschätzung (3.1). Betrachten wir den L^2 -Fehler zwischen v und u_h , dann erhalten wir

$$\|u_h - v\|_{L^2} = \left(\int_{\{\psi \geq u_h\}} |u_h - \psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach Voraussetzung ist aber $u_h - \Pi_h \psi \geq 0$ auf Ω und somit

$$|u_h - \psi| = \psi - u_h \leq \psi - u_h + (u_h - \Pi_h \psi) = \psi - \Pi_h \psi$$

fast überall auf $\{\psi \geq u_h\}$. Es gilt also

$$\|u_h - v\|_{L^2} \leq \|\psi - \Pi_h \psi\|_{L^2}.$$

Wählen wir in (3.1) die Funktion $v_h := \Pi_h u$, von der wir vorausgesetzt haben, dass sie in K_h ist, und das obige v , dann folgt

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \left(\frac{2}{c} \|\Delta u + f\|_{L^2} \left(\|\psi - \Pi_h \psi\|_{L^2} + \|u - \Pi_h u\|_{L^2} \right) + \frac{1}{c^2} \|u - \Pi_h u\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus ergibt sich mit der Hölder-Ungleichung und den Approximationseigenschaften von Π_h die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \tilde{C}h \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} (|\psi|_{W^{2,p}} + |u|_{W^{2,p}}) + |u|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

mit einem $\tilde{C} = \tilde{C}(d, p, \Omega, \rho_2)$, das sich aus dem Maß von Ω , den Konstanten in Satz 2.1.5 und der Koerzitivitätskonstanten c zusammensetzt. Dies beweist die Behauptung. \square

Unter den Bedingungen von Satz 3.2.1 verhält sich der H^1 -Fehler zwischen u und u_h also genauso wie der zwischen u und der Approximation $\Pi_h u$. Für den Spezialfall der Poisson-Gleichung halten wir hier noch fest:

Korollar 3.2.2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder mit einer Triangulierung \mathcal{T}_h , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört. Es gelte $f \in L^2(\Omega)$ und es sei u die Lösung des Problems*

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad a(u, v) = (f, v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

und u_h die Lösung von

$$u_h \in V_h^0(\Omega) : \quad a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2} \quad \forall v_h \in V_h^0(\Omega).$$

Es gelte $u \in H^2(\Omega)$. Dann existiert eine Konstante $C = C(d, \rho_2) > 0$, so dass gilt:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch|u|_{H^2}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus Korollar 3.1.2, wenn wir $v_h = \Pi_h u$ wählen. □

Ein wenig problematisch sind in Satz 3.2.1 die Bedingungen $\Pi_h u \geq \chi$ und $u_h \geq \Pi_h \psi$, denn diese lassen sich nicht für jeden Approximationsoperator mit einfachen Mitteln überprüfen. Gut beherrschbar ist die Situation, wenn der Lagrange-Interpolationsoperator I_h als Π_h gewählt werden kann und wenn die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen erfüllt sind. In diesem Fall erhalten wir das folgende, griffige Resultat:

Korollar 3.2.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder mit einer Triangulierung \mathcal{T}_h , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört. Es seien Ω , $f \in L^p(\Omega)$ und $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$ derart, dass die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen erfüllt sind. Es gelte $2p > d$. Des Weiteren sei χ identisch der Lagrange-Interpolierenden $I_h \psi$ von ψ . Dann besitzen die Probleme (P) und (P_h) eindeutige Lösungen u und u_h , es gilt $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ und es existiert eine Konstante $C = C(d, p, \Omega, \rho_2) > 0$, so dass gilt:*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} \left(|\psi|_{W^{2,p}} + |u|_{W^{2,p}} \right) + |u|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3)$$

Beweis. Dass (P) eine eindeutige Lösung u besitzt, die in $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ ist, folgt aus Satz 1.4.5. Für die Interpolierende $I_h u$ dieser Lösung gilt – da $W^{2,p}(\Omega)$ für $2p > d$ eine Teilmenge von $C(\bar{\Omega})$ ist und da der Lagrange-Interpolationsoperator sowohl Ungleichungen zwischen stetigen Funktionen als auch Randbedingungen erhält – zum einen $I_h u \in V_h^0(\Omega)$ und zum anderen $I_h u \geq I_h \psi = \chi$. Damit ist die Menge K_h nicht leer, die V_h -Minimalvoraussetzungen sind erfüllt und die Existenz der Lösung u_h folgt aus Satz 2.2.2. Um die Abschätzung (3.3) zu erhalten, müssen wir nur noch überprüfen, dass die Voraussetzungen von Satz 3.2.1 erfüllt sind, wenn wir $\Pi_h = I_h$ wählen. Dies ist aber der Fall, denn u und ψ sind in $W^{2,p}(\Omega)$, f ist in $L^2(\Omega)$, $\text{tr } \psi$ ist auf Grund der $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen kleiner gleich Null fast überall auf $\partial\Omega$ und die Bedingungen $I_h u \geq \chi$ und $u_h \geq I_h \psi$ sind trivialerweise erfüllt. Dies beweist die Behauptung. □

Man beachte, dass die obige Argumentation nur funktioniert, weil der Interpolationsoperator I_h die Ungleichung $u \geq \psi$ bei beidseitiger Anwendung erhält und weil wir das Hindernis $\chi = I_h \psi$ in (P_h) gewählt haben. Die Situation wird weitaus komplizierter, wenn ein anderes χ verwendet wird und genau dies werden wir in den nächsten Kapiteln tun. Eine der Fragen, die wir uns stellen werden, ist die folgende:

Wie verhält sich die Näherungslösung u_h , wenn in (P_h) das Hindernis $\chi = \psi$ gewählt wird?

Um diese Frage mit Hilfe von Satz 3.1.1 beantworten zu können, müssen wir untersuchen, wie gut die exakte Lösung $u \in K$ durch Funktionen in $K_h = \{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \psi \text{ f.ü.}\}$ approximiert werden kann (und unter welchen Voraussetzungen diese Menge überhaupt Elemente enthält). Unser nächstes Thema ist damit die:

4 Finite-Elemente-Approximation unter Nebenbedingungen

Das folgende Kapitel widmet sich der Frage, wie gut $W^{2,p}$ - und $C^{1,\gamma}$ -Funktionen durch Elemente des Raums $V_h(\Omega)$ approximiert werden können, wenn Nebenbedingungen berücksichtigt werden müssen. Die Resultate, die wir hier beweisen, werden uns erlauben, die Approximationseigenschaften und die Stabilität der diskreten Hindernisprobleme (P_h) im Detail zu untersuchen und Abschätzungen für den L^p - und den H^1 -Fehler zwischen den Lösungen u und u_h herzuleiten. Die folgende Analysis ist aber auch im Kontext anderer Fragestellungen interessant.

In Abschnitt 4.1 beschäftigen wir uns zunächst mit der einseitigen Approximation von Sobolev-Funktionen im Eindimensionalen. Hier werden wir feststellen, dass das Konzept der $W^{2,p}$ -Regularität nicht sehr hilfreich ist, wenn man sich mit dem Thema der restringierten Finite-Elemente-Approximation auseinandersetzen will. Um diesem Problem zu begegnen, führen wir in Abschnitt 4.2 den Raum $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ der auf dem Abschluss von Ω Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen ein. Abschnitt 4.3 widmet sich dann dem Hauptthema dieses Kapitels – der einseitigen FE-Approximation nicht negativer $C^{1,\gamma}$ -Funktionen durch nicht negative Elemente des Raums $V_h(\Omega)$.

4.1 Restringierte Finite-Elemente-Approximation in $W^{2,p}(\Omega)$

Ersetzen wir bei der Diskretisierung des Problems (P) das Hindernis ψ nicht durch eine Approximation, dann erhalten wir eine Variationsungleichung der Form

$$(P_h) \quad u_h \in K_h : \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla (u_h - v_h) \, dx \leq \langle f, u_h - v_h \rangle \quad \forall v_h \in K_h$$

mit der zulässigen Menge

$$K_h = K \cap V_h(\Omega) = \{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \psi \text{ f.ü.}\}.$$

Eine interessante Frage ist, ob dieses (P_h) die ursprüngliche Aufgabe (P) besser approximiert als die diskreten Hindernisprobleme mit $\chi = \Pi_h \psi$, die wir im letzten Kapitel betrachtet haben. Rein intuitiv sollte irgendeine Verbesserung zu erwarten sein – schließlich gehen weitaus weniger Informationen über das Ursprungsproblem verloren, wenn $\chi = \psi$ gewählt wird. Greifen wir auf das Lemma von C ea zurück, um zu beurteilen, wie gut die Näherungslösung u_h in der obigen Situation ist, dann erhalten wir unter Benutzung der Inklusion $K_h \subset K$ die Ungleichung

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \left(\frac{2}{c} \|\Delta u + f\|_{L^2} \|u - v_h\|_{L^2} + \frac{1}{c^2} \|u - v_h\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v_h \in K \cap V_h(\Omega). \quad (4.1)$$

Um aus dieser eine brauchbare Fehlerabschätzung ableiten zu können, müssen wir bestimmen, wie gut die Lösung u durch Funktionen $v_h \in V_h^0(\Omega)$ mit $v_h \geq \psi$ approximiert werden kann. Man beachte, dass dies ein nichttriviales Problem ist, denn die Standard-Approximationen $I_h u$ und $\Pi_h u$ aus Satz 2.1.5 sind im Allgemeinen nicht in der zulässigen Menge $K \cap V_h(\Omega)$ enthalten. Gilt zum Beispiel $\psi \equiv u$ in einer der Gitterzellen T und ist das Hindernis ψ konkav, dann muss die Lagrange-Interpolierende $I_h u$ die Bedingung $I_h u \geq \psi$ im Inneren von T verletzen.

Die einfachste Strategie, die man in der obigen Situation zur Konstruktion einer zulässigen Näherung verfolgen kann, ist, zu untersuchen, wie gut die exakte Lösung u „von oben“ approximiert werden kann, denn in diesem Fall braucht das Hindernis ψ nicht mehr berücksichtigt werden. Wir betrachten also das folgende Problem:

Es sei $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$. Finde ein $\tilde{u}_h \in V_h^0(\Omega)$ mit $\tilde{u}_h \geq u$ f.ü., das u bestmöglich approximiert.

Haben wir eine solche einseitige Approximation gefunden, dann gilt trivialerweise $\tilde{u}_h \geq \psi$ und \tilde{u}_h kann in (4.1) verwendet werden. Man beachte, dass es hier nicht einfach möglich ist, die Lagrange-Interpolierende von u um den Fehler $\|u - I_h u\|_{L^\infty}$ anzuheben, also

$$\tilde{u}_h = I_h u + \|u - I_h u\|_{L^\infty}$$

zu definieren, denn hierbei gehen die Nullrandbedingungen verloren.

Untersucht wurden Approximationsprobleme der obigen Art zum Beispiel von Mosco und Strang in [Mo1], [Mo2] und [Str]. Wir beschränken uns im Folgenden zunächst auf den eindimensionalen Fall und nutzen eine Argumentation ähnlich zu der in [Mo1], um ein passendes \tilde{u}_h zu konstruieren. Unser Plan ist der folgende:

Sind ein Intervall Ω , eine Triangulierung \mathcal{T}_h , die aus einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} stammt und die Knoten \mathcal{C}_h hat, und eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ gegeben, dann wählen wir als \tilde{u}_h eine Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\min \sum_{x_k \in \mathcal{C}_h} v_h(x_k) \quad \text{s.t. } u \leq v_h \in V_h^0(\Omega)$$

und nutzen die notwendigen Optimalitätsbedingungen¹ dieses Problems, um zu zeigen, dass der Fehler zwischen \tilde{u}_h und der Lagrange-Interpolierenden $I_h u$ von u klein sein muss. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung, der inversen Abschätzungen aus Kapitel 2 und Satz 2.1.5 bestimmen wir dann, wie gut \tilde{u}_h die Funktion u approximiert. Als erstes beweisen wir:

Lemma 4.1.1. *Es sei Ω ein beschränktes, offenes Intervall mit einer Triangulierung \mathcal{T}_h , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört. Es sei \mathcal{C}_h die Menge der Knoten der Triangulierung \mathcal{T}_h . Des Weiteren seien Funktionen u und w_h gegeben, so dass mit einem $p > 1$ gilt*

$$u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad w_h \in V_h^0(\Omega) \quad \text{und} \quad u \leq w_h \text{ in } \Omega.$$

Dann besitzt das Problem

$$\min \sum_{x_k \in \mathcal{C}_h} v_h(x_k) \quad \text{s.t. } u \leq v_h \leq w_h \text{ in } \Omega \text{ und } v_h \in V_h(\Omega) \quad (4.2)$$

einen (nicht notwendigerweise eindeutigen) Minimierer $\tilde{u}_h \in V_h^0(\Omega)$ und für diesen gilt

$$0 \leq \tilde{u}_h(x_k) - u(x_k) \leq \left(\frac{p-1}{2p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\max_{T \in \mathcal{T}_h : x_k \in T} |T|^{2-\frac{1}{p}} |u|_{W^{2,p}(T)} \right) \quad \forall x_k \in \mathcal{C}_h. \quad (4.3)$$

¹ Man beachte, dass das obige Minimierungsproblem, wenn wir es in dem Vektor $v = (v_k)_{k=1}^N = (v_h(x_k))_{k=1}^N$ formulieren, auch geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} & \min \sum_{k=1}^N v_k \\ & \text{s.t. } v_0 = v_N = 0 \text{ und } \forall T = [x_i, x_j] \in \mathcal{T}_h, \forall \lambda \in [0, 1] : \\ & \quad u(\lambda x_i + (1-\lambda)x_j) \leq \lambda v_i + (1-\lambda)v_j. \end{aligned}$$

Wir haben es hier also mit den notwendigen Optimalitätsbedingungen einer Minimierungsaufgabe in endlich vielen Variablen mit überabzählbar vielen linearen Ungleichungsnebenbedingungen zu tun. Dass sich ein derartiges Problem handhaben lässt, ist auch über das Thema der restringierten Finite-Elemente-Approximation hinaus interessant.

Die Ungleichungen $u \leq w_h$ und $u \leq v_h \leq w_h$ können wir hierbei im klassischen Sinne verstehen. Im Eindimensionalen gilt schließlich für alle $p > 1$ die Inklusion $W^{2,p}(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$ (siehe Satz 4.2.4).

Beweis. Bezeichnen wir mit $U \subset V_h(\Omega)$ die zulässige Menge des Minimierungsproblems (4.2) und definieren wir auf $V_h(\Omega)$ (zum Beispiel) die Norm

$$\|v_h\| := \max_{x_k \in \mathcal{C}_h} |v_h(x_k)|,$$

dann ist U wegen $w_h \in U$ nicht leer und für alle $v_h \in U$ gilt

$$\|v_h\| \leq \max(\|w_h\|, \|u\|_{L^\infty}).$$

Die Menge U ist also beschränkt. Des Weiteren ist U auch abgeschlossen, denn ist $(v_{h,n})_{n=1}^\infty$ eine Folge in U mit

$$\|v_{h,n} - v_h\| = \max_{x_k \in \mathcal{C}_h} |v_{h,n}(x_k) - v_h(x_k)| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

für ein $v_h \in V_h(\Omega)$, dann gilt für alle $x = \lambda x_i + (1 - \lambda)x_j$ in einer Gitterzelle $[x_i, x_j] = T \in \mathcal{T}_h$ auf Grund der stückweisen Linearität der betrachteten Funktionen

$$u(x) \leq v_{h,n}(x) = \lambda v_{h,n}(x_i) + (1 - \lambda)v_{h,n}(x_j) \leq w_h(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und damit auch

$$u(x) \leq v_h(x) = \lambda \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_{h,n}(x_i) \right) + (1 - \lambda) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_{h,n}(x_j) \right) \leq w_h(x).$$

Also ist U kompakt und die Existenz eines Minimierers ergibt sich aus dem Satz von Weierstraß. Ist nun $\tilde{u}_h \in U \subset V_h^0(\Omega)$ eine Lösung des Minimierungsproblems (4.2) und $x_k \in \mathcal{C}_h$ ein Knoten der Triangulierung \mathcal{T}_h mit angrenzenden Gitterzellen $T_1 = [x_i, x_k]$ und $T_2 = [x_k, x_j]$ (an den Randpunkten von Ω ist (4.3) wegen der Nullrandbedingungen trivial), dann wissen wir auf Grund der Optimalität von \tilde{u}_h , dass der Funktionswert $\tilde{u}_h(x_k)$ nicht reduziert werden kann, ohne die Bedingung $u \leq \tilde{u}_h$ zu verletzen. Damit muss eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein (siehe hierzu auch Bild 4.1):

- Es ist $u(x_k) = \tilde{u}_h(x_k)$.
- Es existiert ein $\tilde{x} \in [x_i, x_j] \setminus \{x_k\}$ mit $u(\tilde{x}) = \tilde{u}_h(\tilde{x})$ und $u'(\tilde{x}) = \tilde{u}'_h(\tilde{x})$ (In x_i und x_j meinen wir hier die rechts- beziehungsweise linksseitige Ableitung. Man beachte wieder $W^{2,p}(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$).

Im ersten Fall ist nichts mehr zu zeigen. Gilt die zweite Bedingung mit einem $\tilde{x} \in T_1$, dann erhalten wir unter Benutzung der Absolutstetigkeit von eindimensionalen $W^{1,1}$ -Funktionen mit einer Rechnung analog zu dem Beweis des Satzes von Taylor:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(x_k) - u(x_k) &= \left| \int_{\tilde{x}}^{x_k} u''(t)(x_k - t) dt \right| \\ &\leq |u|_{W^{2,p}(T_1)} \left(\int_{x_i}^{x_k} (x_k - t)^{\frac{p}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\frac{p-1}{2p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} |T_1|^{2-\frac{1}{p}} |u|_{W^{2,p}(T_1)}. \end{aligned}$$

Auf demselben Wege ergibt sich im Fall $\tilde{x} \in T_2$ die Abschätzung

$$\tilde{u}_h(x_k) - u(x_k) \leq \left(\frac{p-1}{2p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} |T_2|^{2-\frac{1}{p}} |u|_{W^{2,p}(T_2)}.$$

Dies beweist die Behauptung. □

Wir können nun zeigen:

Theorem 4.1.2. Es sei Ω ein beschränktes, offenes Intervall und $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ eine quasi-uniforme Familie von Triangulierungen. Es seien ρ_1 und ρ_2 wie in Definition 2.1.2 und es sei $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ für ein $p > 1$. Des Weiteren sei eine Familie $\{w_h\}$ von Funktionen gegeben, so dass für alle $h > 0$ gilt

$$u \leq w_h \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad w_h \in V_h^0(\Omega).$$

Dann existieren Konstanten C_1, C_2 und C_3 , die nur von ρ_1, ρ_2 und p abhängen, und eine Familie $\{\tilde{u}_h\}$, so dass für alle $h > 0$ gilt

$$u \leq \tilde{u}_h \leq w_h \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \tilde{u}_h \in V_h^0(\Omega)$$

und so dass der Fehler zwischen u und \tilde{u}_h abgeschätzt werden kann durch

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^p} \leq C_1 h^2 |u|_{W^{2,p}}, \quad \|u - \tilde{u}_h\|_{W^{1,p}} \leq C_2 h |u|_{W^{2,p}}$$

und

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^\infty} \leq C_3 h^{2-1/p} |u|_{W^{2,p}}.$$

Im Eindimensionalen können wir mit einer einseitigen Approximation also dieselbe Fehlerordnung erreichen wie mit der Lagrange-Interpolierenden aus dem Approximationssatz 2.1.5.

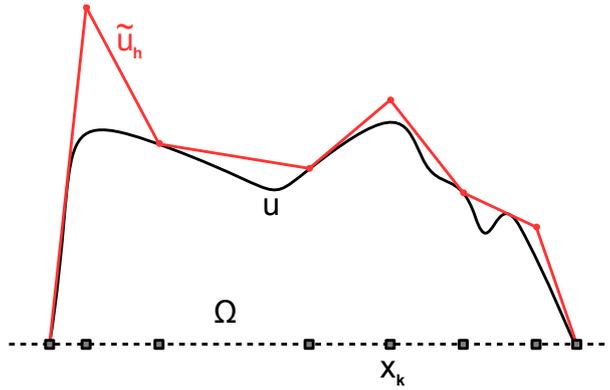


Abbildung 4.1: Einseitige Approximation unter Beibehaltung der Nullrandwerte.

Beweis. Ist $h > 0$ beliebig, aber fest, dann folgt aus Lemma 4.1.1, dass eine Funktion $\tilde{u}_h \in V_h^0(\Omega)$ existiert mit $u \leq \tilde{u}_h \leq w_h$ und

$$0 \leq \tilde{u}_h(x_k) - u(x_k) \leq \left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\max_{T \in \mathcal{T}_h : x_k \in T} |T|^{2-\frac{1}{p}} |u|_{W^{2,p}(T)}\right) \quad \forall x_k \in \mathcal{C}_h.$$

Nutzen wir aus, dass der Funktionswert $v_h(x)$ einer V_h -Funktion an einer Stelle $x \in T = [x_i, x_j] \in \mathcal{T}_h$ als Konvexkombination der Funktionswerte $v_h(x_i)$ und $v_h(x_j)$ in den benachbarten Knoten geschrieben werden kann, dann lässt sich die obige Abschätzung umformen zu

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h - I_h u\|_{L^\infty(T)} &\leq \left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\max_{\tilde{T} \in \mathcal{T}_h : T \cap \tilde{T} \neq \emptyset} |\tilde{T}|^{2-\frac{1}{p}} |u|_{W^{2,p}(\tilde{T})}\right) \\ &\leq \left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\rho_1 h|^{2-\frac{1}{p}} \left(\max_{\tilde{T} \in \mathcal{T}_h : T \cap \tilde{T} \neq \emptyset} |u|_{W^{2,p}(\tilde{T})}\right) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Man beachte, dass hier im Maximum immer nur zwei oder drei Zellen \tilde{T} zur Auswahl stehen.

Aus (4.4) folgt nun zum einen

$$\|\tilde{u}_h - I_h u\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \|\tilde{u}_h - I_h u\|_{L^\infty(T)} \leq \left(\frac{p-1}{2p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} |\rho_1 h|^{2-\frac{1}{p}} |u|_{W^{2,p}(\Omega)} \quad (4.5)$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h - I_h u\|_{L^p(T)} &\leq |T|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{2p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} |\rho_1 h|^{2-\frac{1}{p}} \left(\max_{\tilde{T} \in \mathcal{T}_h : T \cap \tilde{T} \neq \emptyset} |u|_{W^{2,p}(\tilde{T})} \right) \\ &\leq \left(\frac{p-1}{2p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} |\rho_1 h|^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \mathcal{T}_h : T \cap \tilde{T} \neq \emptyset} |u|_{W^{2,p}(\tilde{T})}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Summieren wir in (4.6) über alle $T \in \mathcal{T}_h$, dann ergibt sich global

$$\|\tilde{u}_h - I_h u\|_{L^p(\Omega)} \leq 3^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{2p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} |\rho_1 h|^2 |u|_{W^{2,p}(\Omega)}. \quad (4.7)$$

Mit den Ungleichungen (4.5) und (4.7) haben wir den L^∞ - und den L^p -Fehler zwischen der Lagrange-Interpolierenden $I_h u$ und der einseitigen Approximation \tilde{u}_h unter Kontrolle. Um eine Aussage über den $W^{1,p}$ -Fehler zu erhalten, nutzen wir die Abschätzung

$$\|v'_h\|_{L^\infty(T)} \leq \frac{4}{\rho_2 h} \|v_h\|_{L^\infty(T)} \quad \forall v_h \in V_h(\Omega) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

die wir in dem Beweis von Lemma 2.1.6 hergeleitet haben. Aus dieser folgt

$$|\tilde{u}_h - I_h u|_{W^{1,p}(T)} \leq |T|^{\frac{1}{p}} \frac{4}{\rho_2 h} \|\tilde{u}_h - I_h u\|_{L^\infty(T)} \leq \frac{4\rho_1^{\frac{1}{p}}}{\rho_2} h^{\frac{1}{p}-1} \|\tilde{u}_h - I_h u\|_{L^\infty(T)}.$$

Vollkommen analog zum L^p -Fehler lässt sich nun nachrechnen, dass mit einem $C_3 = C_3(p, \rho_1, \rho_2)$ gilt

$$\|\tilde{u}_h - I_h u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_3 h |u|_{W^{2,p}(\Omega)}.$$

Damit bietet sich das folgende Bild:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h - I_h u\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_1(p, \rho_1) h^{2-\frac{1}{p}} |u|_{W^{2,p}(\Omega)} \\ \|\tilde{u}_h - I_h u\|_{L^p(\Omega)} &\leq C_2(p, \rho_1) h^2 |u|_{W^{2,p}(\Omega)} \\ \|\tilde{u}_h - I_h u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &\leq C_3(p, \rho_1, \rho_2) h |u|_{W^{2,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus dem Approximationsatz 2.1.5 und der Dreiecksungleichung. \square

Man beachte, dass sich eine Familie $\{w_h\}$ mit den Eigenschaften aus Satz 4.1.2 immer finden lässt, denn es gilt:

Lemma 4.1.3. *Es sei Ω ein beschränktes, offenes Intervall mit einer quasi-uniformen Familie $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ von Triangulierungen. Es sei $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ für ein $p > 1$. Dann existiert für alle $h > 0$ eine Funktion $w_h \in V_h^0(\Omega)$ mit $u \leq w_h$.*

Dass wir in Satz 4.1.2 die Existenz der Schrankenfunktionen $\{w_h\}$ vorausgesetzt haben, macht unser Approximationsresultat also keineswegs schwächer. Ganz im Gegenteil: Mit den w_h ist es möglich, der Näherung \tilde{u}_h eine zusätzliche Nebenbedingung aufzuzwingen und so zum Beispiel sicherzustellen, dass die Approximation einen bestimmten Korridor nicht verlässt.

Beweis. Identifizieren wir die zu einem beliebigen, aber festen $h > 0$ gehörige Triangulierung \mathcal{T}_h mit einer Zerlegung $a = x_1 < \dots < x_N = b$ des Intervalls $\Omega = (a, b)$ und definieren wir

$$w_h(x) := \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} M & \text{falls } a \leq x \leq x_2 \\ \frac{x_N-x}{x_N-x_{N-1}} M & \text{falls } x_{N-1} \leq x \leq b \\ M & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$M := \max(\|u\|_{L^\infty}, (x_2 - x_1)\|u'\|_{L^\infty}, (x_N - x_{N-1})\|u'\|_{L^\infty}),$$

dann gilt trivialerweise $w_h \in V_h^0(\Omega)$ und $u \leq w_h$. Man beachte hierbei wieder, dass $W^{2,p}(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$ gilt und dass \mathcal{T}_h nach Definition 2.1.1 immer einen Knoten im Inneren von Ω besitzt. \square

Aus dem Lemma von Céa lässt sich nun für unser Ausgangsproblem folgern:

Korollar 4.1.4. *Es sei Ω ein beschränktes, offenes Intervall mit einer Triangulierung \mathcal{T}_h , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört. Es seien $f \in L^p(\Omega)$ und $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$ derart, dass die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen erfüllt sind. Es gelte $\chi = \psi$. Dann besitzen die Probleme (P) und (P_h) eindeutige Lösungen u und u_h , es gilt $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ und es existiert ein $C = C(p, \rho_1, \rho_2, \Omega) > 0$, so dass gilt:*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} \|u\|_{W^{2,p}} + |u|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.8)$$

Beweis. Die Lösbarkeit von (P) und die Regularität der Lösung u ergeben sich wieder aus Satz 1.4.5. Des Weiteren wissen wir auf Grund von Lemma 4.1.3, dass die zulässige Menge

$$K_h = K \cap V_h(\Omega) = \{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \psi \text{ f.ü.}\}$$

von (P_h) nicht leer ist. Damit sind die V_h -Minimalvoraussetzungen erfüllt und wir erhalten die Existenz der Näherungslösung u_h aus Satz 2.2.2. Um die Fehlerabschätzung zu beweisen, setzen wir die einseitige Approximation \tilde{u}_h von u aus Satz 4.1.2 in das erweiterte Lemma von Céa ein. Dies führt zu

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1} &\leq \left(\frac{2}{c} \|\Delta u + f\|_{L^2} \|u - \tilde{u}_h\|_{L^2} + \frac{1}{c^2} \|u - \tilde{u}_h\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(p, \rho_1, \rho_2, \Omega) h \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} \|u\|_{W^{2,p}} + |u|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und schließt den Beweis ab. \square

Man beachte, dass die rechte Seite der Ungleichung (4.8) nicht explizit von dem Hindernis ψ abhängt. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu der H^1 -Fehlerabschätzung, die wir in Korollar 3.2.3 mit Hilfe der Lagrange-Interpolierenden hergeleitet haben.

Ein grundlegendes Problem des Ansatzes, den wir in diesem Abschnitt zur Konstruktion der einseitigen Approximation verwendet haben, ist, dass er nur dann einwandfrei funktioniert, wenn über Tangentialität an dem Graphen von u gesprochen werden kann. Unsere gesamte Argumentation basierte schließlich auf der Beobachtung, dass ein Minimierer \tilde{u}_h des Problems (4.2) die Funktion u in der Nähe von Gitterpunkten so oft tangiert, dass der Fehler zwischen u und \tilde{u}_h klein wird. Entscheidend war also die Eigenschaft der punktwisen Differenzierbarkeit, die uns im Eindimensionalen auf Grund der Inklusion $W^{2,p}(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$ zur Verfügung stand. Die $W^{2,p}$ -Regularität der beteiligten Funktionen spielte an sich kaum eine Rolle. Damit ist klar, dass es keinen Sinn macht, mit Sobolev-Räumen zu arbeiten, wenn wir eine ähnliche Argumentation in höheren Dimensionen benutzen wollen. Schließlich gilt schon im Zweidimensionalen $H^2(\Omega) \not\subset C^1(\Omega)$.

4.2 $C^{1,\gamma}$ -Funktionen auf abgeschlossenen Mengen

Als Ersatz für die $W^{2,p}$ -Räume werden wir in den nächsten Kapiteln oft den Raum $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ der auf dem Abschluss des Gebietes Ω Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen verwenden. Um diesen Funktionenraum konstruieren zu können, müssen wir klären, welcher Ableitungsbegriff auf dem Rand $\partial\Omega$ zugrunde gelegt wird. Analog zu [Ad] definieren wir:

Definition 4.2.1 (Differenzierbarkeit auf abgeschlossenen Mengen). *Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Dann ist der Raum $C^m(\overline{\Omega})$ der auf dem Abschluss von Ω m -mal stetig differenzierbaren Funktionen gegeben durch*

$$C^m(\overline{\Omega}) := \{v \in C^m(\Omega) : \partial^\alpha v \text{ ist beschränkt und gleichmäßig stetig für alle } |\alpha| \leq m\}.$$

Dies ist ein Banachraum mit der Norm

$$\|v\|_{C^m} = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha v(x)|.$$

Man beachte, dass jede Ableitung $\partial^\alpha u \in C(\Omega)$ einer Funktion $u \in C^m(\overline{\Omega})$ auf Grund der Beschränktheit und gleichmäßigen Stetigkeit eindeutig zu einer stetigen Funktion auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden kann. In der obigen Situation macht es also Sinn, von einer Ableitung auf dem Abschluss $\overline{\Omega}$ zu sprechen. Im Folgenden werden wir die Funktionen $\partial^\alpha u$ immer mit den zugehörigen Fortsetzungen identifizieren. Die Räume $C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$ konstruieren wir nun wie üblich:

Definition 4.2.2. *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \gamma \leq 1$. Dann besteht der Raum $C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$ aus den Funktionen in $C^m(\overline{\Omega})$, für die es eine Konstante $C > 0$ gibt mit*

$$|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)| \leq C \|x - y\|^\gamma \quad \forall x, y \in \Omega \quad \forall 0 \leq |\alpha| \leq m.$$

Mit $\|\cdot\|$ bezeichnen wir hier wieder die euklidische Norm² auf dem \mathbb{R}^d . Auch bei dem Funktionenraum $C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$ handelt es sich um einen Banachraum. Die Norm ist gegeben durch

$$\|v\|_{C^{m,\gamma}} = \|v\|_{C^m} + \max_{0 \leq k \leq m} |v|_{C^{k,\gamma}}$$

mit

$$|v|_{C^{k,\gamma}} = \max_{|\alpha|=k} \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)|}{\|x - y\|^\gamma}.$$

Man beachte, dass es hier vollkommen unerheblich ist, ob das Supremum über der Menge Ω oder dem Abschluss $\overline{\Omega}$ genommen wird.

Die Ableitungswerte, die von Funktionen $v \in C^m(\overline{\Omega})$ auf dem Rand $\partial\Omega$ angenommen werden, verhalten sich so, wie man es vom klassischen Setting gewohnt ist. Insbesondere gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und damit auch:

Lemma 4.2.3 (Mittelwertsatz auf $\overline{\Omega}$). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, konvexes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Dann gilt für alle $x, y \in \overline{\Omega}$ und alle $v \in C^1(\overline{\Omega})$ die Gleichung*

$$v(x) - v(y) = \int_0^1 \nabla v(y + t(x - y)) \cdot (x - y) dt.$$

Im Falle einer $C^1(\overline{\Omega})$ -Funktion kann der Mittelwertsatz also auch dann verwendet werden, wenn die Verbindungsstrecke der betrachteten Punkte im Rand $\partial\Omega$ enthalten ist. Der Beweis des obigen Lemmas beruht auf einem simplen Approximationsargument:

² Die Wahl der Norm ist an dieser Stelle eigentlich unerheblich, beeinflusst aber einige Fehlerkonstanten in Abschnitt 4.3.

Beweis. Sind $x, y \in \overline{\Omega}$, dann existieren Folgen $(x_\epsilon)_{\epsilon>0}, (y_\epsilon)_{\epsilon>0} \subset \Omega$, die für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen x und y konvergieren. Für die Punkte x_ϵ und y_ϵ gilt nach dem Hauptsatz

$$v(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) = \int_0^1 \nabla v(y_\epsilon + t(x_\epsilon - y_\epsilon)) \cdot (x_\epsilon - y_\epsilon) dt,$$

denn die Funktion v ist in Ω differenzierbar. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Lebesgue, wenn wir zum Grenzwert übergehen und ausnutzen, wie wir den Raum $C^1(\overline{\Omega})$ definiert haben. \square

Interessant an den Funktionenräumen $C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$ ist, dass sie über Einbettungssätze mit den Sobolev-Räumen in Verbindung stehen. So gilt zum Beispiel:

Theorem 4.2.4 (Morrey-Einbettungen). *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und es gelte $m, k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Dann existieren die folgenden stetigen Einbettungen:*

I. Für $kp > d > (k-1)p$:

$$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad 0 < \gamma \leq k - \frac{d}{p}.$$

II. Für $d = (k-1)p$:

$$W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad 0 < \gamma < 1.$$

Beweis. Das obige Resultat findet sich samt Beweis in [Ad], Theorem 5.4 IIC'/C". \square

Für unsere Analysis wird insbesondere die erste Einbettung mit $k = m = 1$ und $p > d$ von Bedeutung sein, also

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad 0 < \gamma \leq 1 - \frac{d}{p}. \quad (4.9)$$

4.3 Restringierte Finite-Elemente-Approximation in $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$

Wir sind nun dazu bereit, uns dem Hauptthema dieses Kapitels zuzuwenden – der einseitigen Finite-Elemente-Approximation von Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen im Mehrdimensionalen. Die Strategie, die wir im Folgenden verwenden, ist genau dieselbe wie in Abschnitt 4.1: Wir charakterisieren die gesuchte Approximation durch ein passend konstruiertes Optimierungsproblem und nutzen dann die notwendigen Optimalitätsbedingungen, um eine Fehlerabschätzung zu erhalten. Unser Vorgehen wird allerdings kleinschrittiger sein als im eindimensionalen Fall. So werden wir zum Beispiel zunächst nur eine einzige Zelle T der Triangulierung betrachten und die globale Approximation erst am Ende aus Einzelteilen zusammensetzen. Der Ausgangspunkt unserer Analysis ist das folgende Problem:

Es sei $T \subset \mathbb{R}^d$ ein abgeschlossenes Simplex und es sei $0 \leq u \in C^{1,\gamma}(T)$. Finde eine affin-lineare Funktion u_T , so dass in T gilt $0 \leq u_T \leq u$ und so dass u_T die Funktion u bestmöglich approximiert.

Betrachtet wurde die obige Aufgabe für zweidimensionale H^2 -Funktionen u zum Beispiel in [Str]. Die Resultate, die wir im Folgenden zur restringierten Approximation von $C^{1,\gamma}$ -Funktionen beweisen werden, scheinen in der gängigen Literatur noch nicht zu finden zu sein. Wir definieren als erstes:

Definition 4.3.1. *Es sei $T \subset \mathbb{R}^d$ ein abgeschlossenes Simplex, es sei $0 \leq u \in C^{1,\gamma}(T)$ für ein $\gamma \in (0, 1]$ und es sei*

$$V := \{v : T \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ affin-linear mit } 0 \leq v \leq u\}.$$

Dann heißt eine Funktion $v \in V$ maximales Element von V , wenn für alle affin-linearen Funktionen w mit $w \not\equiv 0$ und $w \geq 0$ auf T gilt $v + w \notin V$.

Analog zu dem Beweis von Lemma 4.1.1 lässt sich zeigen:

Lemma 4.3.2. *Es sei $T \subset \mathbb{R}^d$ ein abgeschlossenes Simplex mit Ecken p_1, \dots, p_{d+1} und $0 \leq u \in C^{1,\gamma}(T)$ für ein $\gamma \in (0, 1]$. Dann besitzt die Menge V mindestens ein maximales Element.*

Beweis. Betrachten wir die Menge

$$U = \left\{ v \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 \leq \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i v_i \leq u \left(\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i p_i \right) \text{ für alle } \lambda_i \geq 0 \text{ mit } \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\},$$

dann ist U abgeschlossen, nicht leer und wegen $U \subset [0, u(p_1)] \times \dots \times [0, u(p_{d+1})]$ beschränkt. Die stetige Funktion $f(v) := \sum_{i=1}^{d+1} v_i$ nimmt also ihr Supremum auf U in einem $v \in U$ an. Dieses v muss auf Grund seiner Maximalität der Bedingung $v + w \notin U$ für alle $w \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $w \neq 0$ und $w \geq 0$ genügen. Damit hat aber die in den baryzentrischen Koordinaten λ_i definierte, affin-lineare Funktion

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i p_i \in T \mapsto \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i v_i$$

alle Eigenschaften eines maximalen Elementes von V . Dies beweist die Behauptung. \square

Die maximalen Elemente der Menge V spielen im Folgenden genau die Rolle, die die Minimierer \tilde{u}_h in Abschnitt 4.1 hatten. Um jetzt genauso vorgehen zu können, wie wir es im Eindimensionalen getan haben, müssen wir Bedingungen finden, die notwendig für die Maximalität eines Elementes v sind und das Ableiten einer Fehlerabschätzung ermöglichen.

Klar ist, dass ein v nur dann maximal sein kann, wenn ein Punkt $\zeta \in T$ existiert mit $u(\zeta) = v(\zeta)$. Die Kontaktmenge

$$E(v) := \{\zeta \in T : u(\zeta) = v(\zeta)\}$$

ist im Falle eines maximalen Elementes also zwangsläufig nicht leer. Klar ist auch, dass die Funktionen u und v in einem Kontaktpunkt ζ , der im Inneren von T liegt, denselben Gradienten haben müssen. Ein solches ζ ist schließlich ein globales Minimum von $u - v \geq 0$. Unübersichtlich wird die Lage, wenn die Kontaktmenge $E(v)$ im Rand des Simplex T enthalten ist. Um der Vielzahl der Fälle Herr werden zu können, die in dieser Situation möglich sind, benötigen wir:

Lemma 4.3.3. *Es sei $T \subset \mathbb{R}^d$ ein abgeschlossenes Simplex mit Ecken p_1, \dots, p_{d+1} und $0 \leq u \in C^{1,\gamma}(T)$ für ein $\gamma \in (0, 1]$. Es sei v ein maximales Element der Menge V und die Kontaktmenge $E(v)$ sei enthalten in der Simplexseite $\text{conv}(p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_{d+1})$. Dann existiert ein $\zeta \in E(v)$, so dass gilt*

$$\nabla(u - v)(\zeta) \cdot (p_k - \zeta) = 0. \quad (4.10)$$

Das heißt, die Richtungsableitung im Punkt ζ in Richtung der Simplexecke p_k ist identisch Null.

Mit $\text{conv}(\dots)$ bezeichnen wir hierbei wieder die konvexe Hülle:

$$\text{conv}(q_1, \dots, q_n) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Für den Nachweis von (4.10), werden wir einen Widerspruchsbeweis verwenden.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (Rotation, Translation, Umbenennung der Eckpunkte) können wir davon ausgehen, dass $k = d + 1$, $\text{conv}(p_1, \dots, p_d) \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ und $p_{d+1} \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty)$ gilt. Da alle $\zeta \in E(v)$ lokale Minima der Funktion $u - v \geq 0$ sind, muss gelten

$$D(\zeta) := \nabla(u - v)(\zeta) \cdot (p_{d+1} - \zeta) \geq 0 \quad \forall \zeta \in E(v).$$

Die Menge $E(v)$ ist hierbei abgeschlossen und beschränkt – also kompakt – und D ist stetig auf T . Damit existiert ein $\tilde{\zeta} \in E(v)$ mit

$$D(\tilde{\zeta}) = \min_{\zeta \in E(v)} D(\zeta) =: m \geq 0. \quad (4.11)$$

Ist das Minimum m in (4.11) gleich Null, dann sind wir fertig. Gilt $m > 0$, so existiert für alle $\zeta \in E(v)$ eine offene Kugel $B(\zeta)$ mit Mittelpunkt ζ , so dass für alle $x \in T \cap B(\zeta)$ die Ungleichung $D(x) > \frac{1}{2}m$ gilt. Definieren wir nun

$$\tilde{B}(\zeta) = T \cap B(\zeta) \cap \left\{ \lambda x + (1 - \lambda)p_{d+1} : x \in B(\zeta) \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}) \text{ und } \lambda \in (0, 1] \right\},$$

dann ist $\tilde{B}(\zeta)$ relativ offen in T und $\zeta \in \tilde{B}(\zeta)$. Man beachte hierbei, dass $E(v)$ nach Voraussetzung in der Hyperebene $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ enthalten ist (siehe Abbildung 4.2). Vereinigen wir die Mengen $\tilde{B}(\zeta)$, so erhalten wir ein relativ offenes $\tilde{E}(v) \subset T$ mit $E(v) \subset \tilde{E}(v)$ und

$$\nabla(u - v)(x) \cdot (p_{d+1} - x) > \frac{1}{2}m \quad \forall x \in \tilde{E}(v).$$

Betrachten wir nun ein beliebiges $c > 0$ mit $c < \tilde{c} := \frac{m}{4x_d(p_{d+1})}$, wobei $x_d(p_{d+1}) > 0$ die d -te Koordinate des Eckpunkts p_{d+1} bezeichne, dann ergibt sich für die affin-lineare Funktion $v_c(x) = v(x) + cx_d$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \nabla(u - v_c)(x) \cdot (p_{d+1} - x) &= \nabla(u - v)(x) \cdot (p_{d+1} - x) - ce_d \cdot (p_{d+1} - x) \\ &\geq \frac{1}{2}m - cx_d(p_{d+1}) \\ &\geq \frac{1}{4}m \quad \forall x \in \tilde{E}(v). \end{aligned}$$

Aus $u - v_c = u - v \geq 0$ auf $T \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})$, dem Mittelwertsatz und der Tatsache, dass für alle $x \in \tilde{E}(v)$ die Strecke zwischen x und dem eindeutig bestimmten Punkt $\tilde{x} = \tilde{x}(x) \in T \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})$ mit $x \in \text{conv}(\tilde{x}, p_{d+1})$ in der Menge $\tilde{E}(v)$ enthalten ist, folgt nun

$$\begin{aligned} (u - v_c)(x) &\geq (u - v_c)(x) - (u - v_c)(\tilde{x}) \\ &= \int_0^1 \nabla(u - v_c)(\tilde{x} + t(x - \tilde{x})) \cdot (x - \tilde{x}) dt \\ &= \int_0^1 \nabla(u - v_c)(\tilde{x} + t(x - \tilde{x})) \cdot (p_{d+1} - (\tilde{x} + t(x - \tilde{x}))) \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|p_{d+1} - (\tilde{x} + t(x - \tilde{x}))\|} dt \\ &\geq \frac{1}{4}m \int_0^1 \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|p_{d+1} - (\tilde{x} + t(x - \tilde{x}))\|} dt \\ &\geq 0 \quad \forall x \in \tilde{E}(v). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Es gilt also

$$(u - v_c)(x) \geq 0 \quad \forall x \in \tilde{E}(v) \quad \forall 0 < c < \tilde{c}.$$

Damit es jetzt nicht zu einem Widerspruch mit der Maximalität von v kommt, muss für alle $0 < c < \tilde{c}$ mindestens ein $x_c \in T \setminus \tilde{E}(v)$ existieren mit $(u - v_c)(x_c) < 0$. Die Menge $T \setminus \tilde{E}(v)$ ist aber kompakt. Das heißt, wir können eine Teilfolge $c_n \rightarrow 0$ finden, so dass x_{c_n} für $n \rightarrow \infty$ gegen ein $x_0 \in T \setminus \tilde{E}(v)$ konvergiert. Für diesen Limes ergibt sich aus unserer Konstruktion:

$$0 \geq \lim_{c \rightarrow 0} (u - v_c)(x_c) = \lim_{c \rightarrow 0} (u - v)(x_c) = (u - v)(x_0) \geq 0.$$

Dies bedeutet aber $x_0 \in E(v)$, was wegen $E(v) \subset \tilde{E}(v)$ nicht möglich ist. Das Minimum m in (4.11) kann also nicht größer Null gewesen sein. Dies beweist die Behauptung. \square

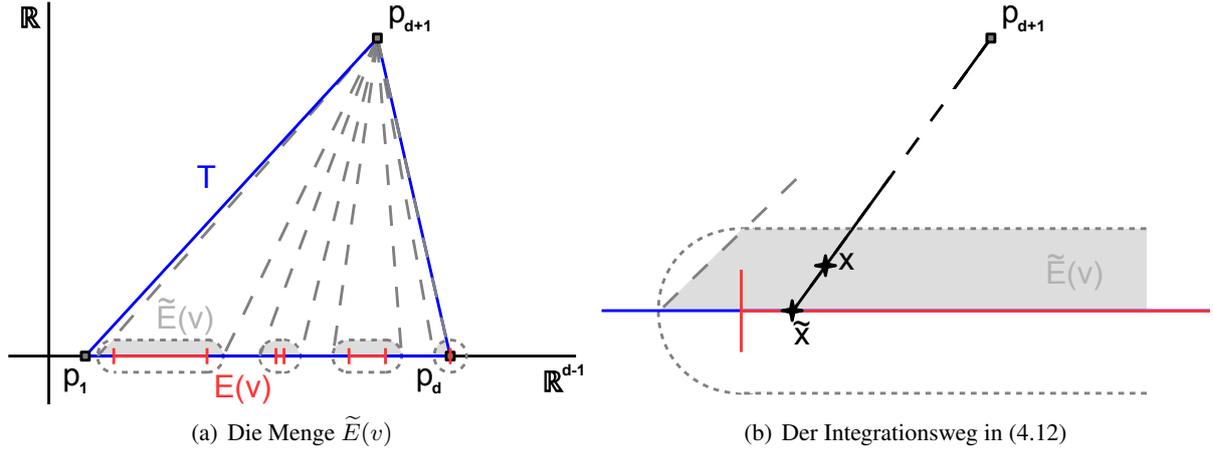


Abbildung 4.2: Die Konstruktion aus dem Beweis des Lemmas 4.3.3.

Wir können nun zeigen:

Theorem 4.3.4. *Es sei T ein abgeschlossenes Simplex mit Ecken p_1, \dots, p_{d+1} und $0 \leq u \in C^{1,\gamma}(T)$ für ein $\gamma \in (0, 1]$. Dann existiert eine affin-lineare Funktion u_T auf T mit $0 \leq u_T \leq u$, so dass gilt*

$$u(p_k) - u_T(p_k) \leq \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma} \text{diam}(T)^{1+\gamma} |u|_{C^{1,\gamma}(T)} \quad \forall k = 1, \dots, d + 1. \quad (4.13)$$

Beweis. Wählen wir als Kandidaten für u_T ein beliebiges maximales Element v der Menge V , dann wissen wir, dass die Menge $E(v) := \{\zeta \in T : (u - v)(\zeta) = 0\}$ nicht leer sein kann. Wir unterscheiden nun zwischen drei Fällen. Gilt für eine Ecke des Simplex $p_k \in E(v)$, dann ist (4.13) an diesem p_k klar. Hier ist nichts mehr zu zeigen. Ist p_k andererseits ein Eckpunkt mit

$$\exists \zeta \in E(v) \text{ und } \epsilon > 0, \text{ so dass } \zeta \pm \epsilon(p_k - \zeta) \in T, \quad (4.14)$$

dann genügt dieses ζ , da es ein lokales Minimum von $u - v$ ist,

$$\pm \epsilon \nabla(u - v)(\zeta) \cdot (p_k - \zeta) \geq 0,$$

also $\nabla(u - v)(\zeta) \cdot (p_k - \zeta) = 0$. Hieraus folgt mit dem Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} (u - v)(p_k) &= (u - v)(p_k) - (u - v)(\zeta) \\ &= \int_0^1 \left[\nabla(u - v)(\zeta + t(p_k - \zeta)) - \nabla(u - v)(\zeta) \right] \cdot (p_k - \zeta) dt \\ &= \int_0^1 \left[\nabla u(\zeta + t(p_k - \zeta)) - \nabla u(\zeta) \right] \cdot (p_k - \zeta) dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{\|\nabla u(\zeta + t(p_k - \zeta)) - \nabla u(\zeta)\|}{\|t(p_k - \zeta)\|^\gamma} \|p_k - \zeta\|^{\gamma+1} t^\gamma dt \\ &\leq |u|_{C^{1,\gamma}(T)} \sqrt{d} \int_0^1 \|p_k - \zeta\|^{\gamma+1} t^\gamma dt \\ &\leq \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma} \text{diam}(T)^{1+\gamma} |u|_{C^{1,\gamma}(T)}. \end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung für Ecken mit (4.14). Ist p_k nun ein Eckpunkt, an dem weder $p_k \in E(v)$ noch (4.14) gilt, dann muss $E(v)$ eine Teilmenge von $\text{conv}(p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_{d+1})$ sein. In diesem Fall folgt aus Lemma 4.3.3, dass ein $\zeta \in E(v)$ existiert mit

$$\nabla(u - v)(\zeta) \cdot (p_k - \zeta) = 0.$$

Nun können wir aber dieselbe Rechnung wie oben durchführen, um zu erhalten

$$0 \leq (u - v)(p_k) \leq \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma} \text{diam}(T)^{1+\gamma} |u|_{C^{1,\gamma}(T)}.$$

Dies schließt den Beweis ab. \square

Das Problem, das wir uns am Anfang dieses Abschnitts gestellt haben, ist damit in dem Sinne gelöst, dass wir eine Approximation u_T mit $0 \leq u_T \leq u$ gefunden haben, bei der wir den an den Eckpunkten auftretenden Fehler kontrollieren können. Betrachten wir Funktionen auf d -dimensionalen Polyedern, dann lässt sich aus der elementweisen Abschätzung (4.13) ableiten:

Korollar 4.3.5. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder mit einer quasi-uniformen Familie $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ von Triangulierungen. Es sei ρ_1 wie in Definition 2.1.2 und es sei $u \in C(\Omega)$ derart, dass ein $0 < \gamma \leq 1$ existiert mit*

$$u|_T \in C^{1,\gamma}(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad \forall h > 0.$$

Des Weiteren sei eine Familie $\{w_h\}$ von Funktionen gegeben mit

$$u \leq w_h \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad w_h \in V_h(\Omega) \quad \forall h > 0.$$

Dann existiert eine Familie $\{\tilde{u}_h\}$, so dass für alle $h > 0$ gilt

$$u \leq \tilde{u}_h \leq w_h \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \tilde{u}_h \in V_h(\Omega)$$

und so dass der Fehler zwischen u und \tilde{u}_h in den Gitterknoten abgeschätzt werden kann durch

$$\tilde{u}_h(x_i) - u(x_i) \leq \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma} \rho_1^{1+\gamma} h^{1+\gamma} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |u|_{C^{1,\gamma}(T)} \quad \forall x_i \in \mathcal{C}_h.$$

Beweis. Fixieren wir ein $h > 0$, dann folgt aus Satz 4.3.4, dass wir auf jedem Simplex $T \in \mathcal{T}_h$ eine affin-lineare Funktion v_T finden können mit $0 \leq v_T \leq w_h - u$ und

$$(w_h - u)(x_i) - v_T(x_i) \leq \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma} \text{diam}(T)^{1+\gamma} |w_h - u|_{C^{1,\gamma}(T)} = \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma} \text{diam}(T)^{1+\gamma} |u|_{C^{1,\gamma}(T)}$$

für alle $x_i \in \mathcal{C}_h$ mit $x_i \in T$. Betrachten wir nun die eindeutig bestimmte Funktion $v_h \in V_h(\Omega)$ mit

$$v_h(x_i) = \min_{T: x_i \in T} v_T(x_i) \quad \forall x_i \in \mathcal{C}_h,$$

dann gilt auf jeder Gitterzelle die Ungleichung $0 \leq v_h \leq v_T \leq w_h - u$ und an jedem Gitterpunkt die Abschätzung

$$\begin{aligned} (w_h - u)(x_i) - v_h(x_i) &\leq \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma} \max_{T: x_i \in T} \text{diam}(T)^{1+\gamma} |u|_{C^{1,\gamma}(T)} \\ &\leq \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma} \rho_1^{1+\gamma} h^{1+\gamma} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |u|_{C^{1,\gamma}(T)}. \end{aligned}$$

Damit hat $\tilde{u}_h := w_h - v_h$ die gewünschten Eigenschaften. \square

Auch in der Situation von Korollar 4.3.5 gilt, dass immer Funktionen $\{w_h\}$ existieren, die als obere Schranken verwendet werden können. Betrachten wir Funktionen mit Nullrandwerten, dann lässt sich zum Beispiel zeigen:

Lemma 4.3.6. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder mit einer quasi-uniformen Familie $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ von Triangulierungen. Es sei $u \in C(\bar{\Omega})$ derart, dass ein $0 < \gamma \leq 1$ existiert mit*

$$u|_T \in C^{1,\gamma}(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad \forall h > 0,$$

und es gelte $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Dann existiert für alle $h > 0$ ein $w_h \in V_h^0(\Omega)$ mit $u \leq w_h$.

Beweis. Fixieren wir ein $h > 0$ und wählen wir als w_h das eindeutig bestimmte Element in $V_h^0(\Omega)$ mit

$$w_h(x_i) = \|u\|_{L^\infty} + \max_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\text{diam } T \max_{x \in T} \|\nabla u(x)\| \right) =: c(u, h) \quad \forall x_i \in \mathcal{C}_h \text{ mit } x_i \notin \partial\Omega,$$

dann kann die Bedingung $u \leq w_h$ höchstens in einer Gitterzelle verletzt werden, die an den Rand $\partial\Omega$ angrenzt. Ist nun T eine solche Randzelle, dann lässt sich jedes $x \in T$ als Konvexkombination der Eckpunkte x_i von T schreiben:

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i \text{ mit } \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \in [0, 1].$$

Sortieren wir danach, ob die Eckpunkte in $\partial\Omega$ liegen oder nicht, dann erhalten wir

$$x = \sum_{x_i \in \partial\Omega} \lambda_i x_i + \sum_{x_i \notin \partial\Omega} \lambda_i x_i = \mu x' + (1 - \mu) x''$$

mit einem $\mu \in [0, 1]$, einem $x' \in \partial\Omega \cap T$ mit $w_h(x') = u(x') = 0$ und einem x'' mit $w_h(x'') = c(u, h)$. Man beachte hierbei, dass jede Randzelle nach Definition 2.1.1 an einen Knoten grenzen muss, der nicht in $\partial\Omega$ enthalten ist. Nun folgt aber

$$\begin{aligned} (u - w_h)(x) &= (u - w_h)(x) - u(x') \\ &= \int_0^1 \nabla u(x' + t(x - x')) \cdot (x - x') dt - w_h(x) \\ &\leq \left(\max_{x \in T} \|\nabla u(x)\| \right) \|\mu x' + (1 - \mu) x'' - x'\| - w_h(\mu x' + (1 - \mu) x'') \\ &= (1 - \mu) \left[\left(\max_{x \in T} \|\nabla u(x)\| \right) \|x'' - x'\| - w_h(x'') \right] \\ &\leq (1 - \mu) \left[\left(\max_{x \in T} \|\nabla u(x)\| \right) \text{diam } T - c(u, h) \right] \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung. □

Mit Hilfe der Einbettung

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \gamma \leq 1 - \frac{d}{p}$$

erhalten wir aus Korollar 4.3.5 für die Sobolev-Räume:

Korollar 4.3.7. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder mit einer quasi-uniformen Familie $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ von Triangulierungen. Es seien ρ_1 und ρ_2 wie in Definition 2.1.2 und es sei $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ für ein $p > d$. Des Weiteren sei eine Familie $\{w_h\}$ von Funktionen gegeben, so dass für alle $h > 0$ gilt*

$$u \leq w_h \text{ f.ü. in } \Omega \quad \text{und} \quad w_h \in V_h^0(\Omega).$$

Dann existieren Konstanten C_1 und C_2 , die nur von d , ρ_1 , ρ_2 , p und Ω abhängen, und eine Familie $\{\tilde{u}_h\}$, so dass für alle $h > 0$ gilt

$$u \leq \tilde{u}_h \leq w_h \text{ f.ü. in } \Omega \quad \text{und} \quad \tilde{u}_h \in V_h^0(\Omega)$$

und so dass der Fehler zwischen u und \tilde{u}_h abgeschätzt werden kann durch

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^\infty} \leq C_1 h^{2-d/p} \|u\|_{W^{2,p}}$$

und

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{W^{1,p}} \leq C_2 h^{1-d/p} \|u\|_{W^{2,p}}.$$

Beweis. Aus dem Einbettungssatz von Morrey folgt, dass wir die Funktion $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ eindeutig mit einem Element des Raums $C^{1,1-d/p}(\bar{\Omega})$ identifizieren können und dass ein $C' = C'(\Omega, p)$ existiert mit

$$|u|_{C^{1,1-d/p}(\bar{\Omega})} \leq C' \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}.$$

Damit ist Korollar 4.3.5 anwendbar und wir erhalten, dass es zu jedem $h > 0$ ein \tilde{u}_h gibt mit

$$u \leq \tilde{u}_h \leq w_h \text{ f.ü. in } \Omega, \quad \tilde{u}_h \in V_h(\Omega)$$

und

$$\tilde{u}_h(x_i) - u(x_i) \leq \frac{\sqrt{d}}{2-d/p} \rho_1^{2-d/p} h^{2-d/p} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |u|_{C^{1,1-d/p}(T)} \quad \forall x_i \in \mathcal{C}_h. \quad (4.15)$$

Man beachte, dass dieses \tilde{u}_h wegen der Nullrandwerte von u und w_h ein Element von $V_h^0(\Omega)$ sein muss. Nutzen wir in (4.15) wieder aus, dass die Funktionswerte von V_h -Funktionen als Konvexkombinationen der Funktionswerte an den Gitterpunkten dargestellt werden können, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h - I_h u\|_{L^\infty} &\leq \frac{\sqrt{d}}{2-d/p} \rho_1^{2-d/p} h^{2-d/p} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |u|_{C^{1,1-d/p}(T)} \\ &\leq \frac{\sqrt{d}}{2-d/p} \rho_1^{2-d/p} h^{2-d/p} |u|_{C^{1,1-d/p}(\bar{\Omega})} \\ &\leq C' \frac{\sqrt{d}}{2-d/p} \rho_1^{2-d/p} h^{2-d/p} \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich mit der inversen Abschätzung

$$\|v_h\|_{W^{1,p}} \leq C''(d, p, \rho_2, \Omega) h^{-1} \|v_h\|_{L^\infty} \quad \forall v_h \in V_h^0(\Omega)$$

aus Lemma 2.1.6 unmittelbar

$$\|\tilde{u}_h - I_h u\|_{W^{1,p}} \leq C' C'' \frac{\sqrt{d}}{2-d/p} \rho_1^{2-d/p} h^{1-d/p} \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \quad (4.17)$$

Mit (4.16) und (4.17) haben wir den L^∞ - und den $W^{1,p}$ -Fehler zwischen der Approximation \tilde{u}_h und der Lagrange-Interpolierenden $I_h u$ unter Kontrolle. Die Behauptung ergibt sich nun analog zum eindimensionalen Fall aus Satz 2.1.5 und der Dreiecksungleichung. \square

Wie wir sehen können, haben wir es im obigen Beweis nicht geschafft, nachzuweisen, dass sich der Fehler zwischen der gegebenen Funktion u und der einseitigen Approximation \tilde{u}_h genauso verhält wie der zwischen u und der Lagrange-Interpolierenden $I_h u$. Zwar haben wir die richtige L^∞ -Fehlerordnung erreicht, nämlich $\mathcal{O}(h^{2-d/p})$, bei der $W^{1,p}$ -Fehlerordnung liegen wir aber um den Faktor $h^{-d/p}$ daneben. Man beachte, dass dieser Defekt nicht dadurch verursacht worden ist, dass wir als erstes den L^∞ -Fehler betrachtet haben und erst danach auf den $W^{1,p}$ -Fehler eingegangen sind. Im Eindimensionalen haben wir schließlich dasselbe Vorgehen benutzt (siehe (4.5) und (4.6)) und dort haben wir am Ende die volle Konvergenzordnung $\mathcal{O}(h)$ erhalten. Der Grund dafür, dass wir beim $W^{1,p}$ -Fehler nur ein suboptimales Ergebnis erzielt haben, ist vielmehr in der elementweisen Fehlerabschätzung aus Satz 4.3.4 zu suchen. Dort hatten wir gezeigt, dass zu jeder gegebenen Funktion $0 \leq u \in C^{1,\gamma}(T)$ auf einem Simplex T mit Ecken p_1, \dots, p_{d+1} eine affin-lineare Funktion u_T mit $0 \leq u_T \leq u$ gefunden werden kann, so dass gilt

$$u(p_k) - u_T(p_k) \leq \frac{\sqrt{d}}{1+\gamma} \text{diam}(T)^{1+\gamma} |u|_{C^{1,\gamma}(T)} \quad \forall k = 1, \dots, d+1. \quad (4.18)$$

Problematisch an Abschätzung (4.18) ist, dass auf der rechten Seite die Halbnorm $|\cdot|_{C^{1,\gamma}(T)}$ auftaucht, denn diese verhält sich grundlegend anders als die Sobolev-Normen, mit denen wir im Eindimensionalen arbeiten konnten. So ist es zum Beispiel nicht möglich, die globale $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ -Halbnorm zu berechnen, indem man die $C^{1,\gamma}(T)$ -Halbnormen auf den Zellen $T \in \mathcal{T}_h$ addiert. Genau diese Eigenschaft benötigt man aber, wenn man in (4.18) ohne Verlust von h -Potenzen über das Gitter summieren und aus der elementweisen L^∞ -Fehlerabschätzung eine globale $W^{1,p}$ -Fehlerabschätzung der Ordnung $\mathcal{O}(h)$ ableiten will. Man vergleiche hierzu mit unserer Argumentation im Beweis von Satz 4.1.2.

Um in Korollar 4.3.7 die Fehlerordnung der Lagrange-Interpolierenden erreichen zu können, müsste man das Folgende beweisen:

Ist T ein abgeschlossenes Simplex mit Ecken p_1, \dots, p_{d+1} , dann existiert für alle $0 \leq u \in W^{2,p}(\text{int } T)$ eine affin-lineare Funktion u_T mit $0 \leq u_T \leq u$ f.ü., so dass mit einer Konstanten $C = C(p, T)$, die nur von der Form des Simplex T , nicht aber von dessen Größe abhängt, gilt

$$u(p_k) - u_T(p_k) \leq C \text{diam}(T)^{2-d/p} \|u\|_{W^{2,p}(\text{int } T)} \quad \forall k = 1, \dots, d+1. \quad (4.19)$$

Ob – und wenn ja für welche p – eine solche Abschätzung hergeleitet werden kann, ist dem Autor nicht bekannt³. Man beachte, dass es im Fall $p > d$ nicht reicht, in Ungleichung (4.18) den Satz von Morrey anzuwenden, um (4.19) zu erhalten, denn die Einbettungskonstante, die in diesem auftritt, ist vom Gebietsdurchmesser abhängig. Des Weiteren ist es auch nicht unmittelbar möglich, den von uns verwendeten Ansatz so zu manipulieren, dass auf der rechten Seite von (4.18) die $W^{2,p}$ -Norm entsteht, denn unser Verfahren basierte darauf, Ableitungen entlang von Verbindungsstrecken zu integrieren, und die hierbei entstehenden Kurvenintegrale lassen sich nicht ohne Probleme durch Sobolev-Normen kontrollieren⁴.

Bei der Konstruktion der einseitigen Approximation mit dem Raum $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ zu arbeiten erweist sich also als zweischneidiges Schwert. Einerseits erlaubt dieser Funktionenraum, mit relativ wenig Aufwand Fehlerabschätzungen für das einseitige Approximationsproblem herzuleiten, andererseits erhält man aber nur für den L^∞ -Fehler die gewünschte Approximationsordnung. Im Kontext der L^∞ -Fehleranalyse, der wir uns in Kapitel 6 widmen werden, wird es keine Rolle spielen, dass wir hier den $W^{1,p}$ -Fehler nicht wie erwartet abschätzen konnten. Betrachten wir allerdings das Ausgangsproblem dieses Kapitels – die Untersuchung des H^1 -Fehlers im Fall $\chi = \psi$ – dann kommen die Defizite unseres Verfahrens voll zur Geltung. So erhalten wir zum Beispiel aus dem Lemma von Céa mit Hilfe von Korollar 4.3.7 nur:

Korollar 4.3.8. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder mit einer Triangulierung \mathcal{T}_h , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört. Es seien $\Omega, f \in L^p(\Omega)$ und $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$ derart, dass die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen erfüllt sind. Es gelte $p > d$ und $\chi = \psi$. Dann besitzen die Probleme (P) und (P_h) eindeutige Lösungen u und u_h , es gilt $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ und es existiert eine positive Konstante $C = C(p, d, \rho_1, \rho_2, \Omega)$, so dass gilt:*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch^{1-d/p} \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} h^{d/p} \|u\|_{W^{2,p}} + \|u\|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Der Beweis ist vollkommen analog zu dem von Korollar 4.1.4. Die Lösbarkeit von (P) und (P_h) und die Regularität der Lösung u folgen aus Satz 1.4.5., Lemma 4.3.6 und Satz 2.2.2. Für den H^1 -Fehler erhalten wir mit der einseitigen Approximation \tilde{u}_h aus Korollar 4.3.7 und dem Lemma von Céa:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1} &\leq \left(\frac{2}{c} \|\Delta u + f\|_{L^2} \|u - \tilde{u}_h\|_{L^2} + \frac{1}{c^2} \|u - \tilde{u}_h\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(p, d, \rho_1, \rho_2, \Omega) h^{1-d/p} \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} h^{d/p} \|u\|_{W^{2,p}} + \|u\|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dies schließt den Beweis ab. □

Auch hier ist die Fehlerordnung also gegenüber dem eindimensionalen Fall reduziert.

³ Dass wir hier mindestens $2p > d$ voraussetzen müssen, ist klar. Ansonsten sind die Werte $u(p_k)$ nicht sinnvoll definierbar.

⁴ An diesem Punkt könnten tiefere Resultate über die Spuren von $W^{2,p}$ -Funktionen hilfreich sein.

5 Nitsche-Tricks

Nachdem wir uns nun ausgiebig mit dem H^1 -Fehler zwischen u und u_h beschäftigt haben, werden wir im folgenden Kapitel auf a priori Fehlerabschätzungen in der L^2 -Norm eingehen. Untersuchen werden wir insbesondere, ob sich der klassische Nitsche-Trick so verallgemeinern lässt, dass er in der Situation des Hindernisproblems verwendet werden kann. In Abschnitt 5.1 rekapitulieren wir zunächst, wie der Nitsche-Trick im Falle eines unrestringierten Problems funktioniert und worauf bei der Herleitung von L^2 -Fehlerabschätzungen mit dualen Problemen zu achten ist. Hier werden wir auch kurz darauf eingehen, welche Schwierigkeiten sich ergeben, wenn man bei der Untersuchung von Variationsungleichungen mit Dualitätsargumenten arbeiten will. In den anschließenden Abschnitten 5.2 und 5.3 stellen wir zwei mögliche Verallgemeinerungen des Nitsche-Tricks vor, mit denen die Fehlerkomponenten $(u - u_h)^-$ und $(u - u_h)^+$ abgeschätzt werden können. Schlussendlich ziehen wir noch ein kurzes Fazit.

5.1 Motivation: Der Nitsche-Trick für das Poisson-Problem

Hat man für das Poisson-Problem

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad a(u, v) = (f, v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (5.1)$$

und seine Approximation

$$u_h \in V_h^0(\Omega) : \quad a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2} \quad \forall v_h \in V_h^0(\Omega)$$

eine H^1 -Fehlerabschätzung etabliert, dann ist der (Aubin-)Nitsche-Trick das Mittel der Wahl, wenn es darum geht, Fehlerabschätzungen in der L^2 -Norm herzuleiten. Der Trick funktioniert wie folgt: Man betrachtet das zu (5.1) duale Problem

$$z \in H_0^1(\Omega) : \quad a(z, v) = (u - u_h, v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (5.2)$$

mit der Approximation

$$z_h \in V_h^0(\Omega) : \quad a(z_h, v_h) = (u - u_h, v_h)_{L^2} \quad \forall v_h \in V_h^0(\Omega)$$

und testet in diesem mit der Funktion $v = u - u_h \in H_0^1(\Omega)$. Hieraus ergibt sich unter Benutzung der Galerkin-Orthogonalität des Residuums $u - u_h$ die Ungleichung

$$\|u - u_h\|_{L^2}^2 = a(z, u - u_h) = a(z - z_h, u - u_h) \leq \|u - u_h\|_{H^1} \|z - z_h\|_{H^1}. \quad (5.3)$$

Ist Ω nun zum Beispiel ein konvexes Polygon, dann ist Satz 1.4.1 mit $p = 2$ anwendbar und es folgt aus Korollar 3.2.2, dass Konstanten $C_1 = C_1(d, \rho_2)$ und $C_2 = C_2(d, \rho_2, \Omega)$ existieren mit

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C_1 h \|u\|_{H^2} \leq C_2 h \|f\|_{L^2} \quad (5.4)$$

und

$$\|z - z_h\|_{H^1} \leq C_1 h \|z\|_{H^2} \leq C_2 h \|u - u_h\|_{L^2}. \quad (5.5)$$

Kombinieren wir (5.3), (5.4) und (5.5), dann erhalten wir

$$\|u - u_h\|_{L^2}^2 \leq \|u - u_h\|_{H^1} \|z - z_h\|_{H^1} \leq C_2^2 h^2 \|f\|_{L^2} \|u - u_h\|_{L^2}.$$

Dies liefert schon die gesuchte L^2 -Fehlerabschätzung:

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C_2^2 h^2 \|f\|_{L^2}.$$

Man beachte, dass in der obigen Argumentation auch $I_h z$ anstelle von z_h verwendet werden kann.

Wie wir sehen können, ist es mit Hilfe des dualen Problems (5.2) gelungen, aus der ursprünglichen H^1 -Fehlerabschätzung der Ordnung $\mathcal{O}(h)$ eine L^2 -Fehlerabschätzung der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ abzuleiten. Eine solche Verdopplung der Konvergenzgeschwindigkeit beim Übergang von der H^1 - zur L^2 -Norm hätte man natürlich auch gerne beim Hindernisproblem, für das ja ebenfalls eine H^1 -Fehlerabschätzung der Ordnung $\mathcal{O}(h)$ zur Verfügung steht (siehe Korollar 3.2.3). Leider ist es nicht ohne Weiteres möglich, den Nitsche-Trick so zu manipulieren, dass er zur Untersuchung von Variationsungleichungen verwendet werden kann. Als problematisch erweist sich insbesondere, ein duales Problem zu finden, das erlaubt, den obigen Rechenweg zu imitieren. So hat man zum Beispiel mit den folgenden Punkten zu kämpfen:

- Die duale Lösung muss so regulär sein, dass der Fehler $\|z - z_h\|_{H^1}$ abgeschätzt werden kann.
- Im dualen Problem muss beim Testen der L^2 -Fehler $\|u - u_h\|_{L^2}$ erzeugt werden können.
- Im Falle einer Variationsungleichung steht keine Galerkin-Orthogonalität zur Verfügung. Man muss also anders argumentieren um in (5.3) die Funktion z_h einschieben zu können.

Einzeln sind diese Forderungen kaum der Rede wert. Sie alle simultan zu berücksichtigen, erweist sich jedoch als außerordentlich schwierig – wenn nicht gar unmöglich. Dementsprechend gibt es auch nicht „den“ Nitsche-Trick für das Hindernisproblem. Es existieren in der Literatur lediglich zahlreiche Ansätze zur Verallgemeinerung des oben benutzten Dualitätsarguments, die allesamt den ein oder anderen Nachteil haben. Erwähnenswert sind hier zum Beispiel [Na], [Su] und [Mo2]. Im Folgenden werden wir zwei Nitsche-Tricks vorstellen, mit denen zumindest die L^2 -Norm der Fehlerkomponenten $(u - u_h)^-$ und $(u - u_h)^+$ abgeschätzt werden kann.

5.2 Ein Nitsche-Trick für die Fehlerkomponente $(u - u_h)^-$

Die Variante des Nitsche-Tricks, mit der wir uns in diesem Abschnitt befassen werden, geht auf Mosco zurück (siehe [Mo2]) und erlaubt, im Eindimensionalen eine L^2 -Abschätzung für den negativen Anteil

$$e^- := (u - u_h)^- = \min(0, u - u_h)$$

des Approximationsfehlers zu erhalten. Betrachten werden wir die folgende Situation:

- Ω ist ein beschränktes, offenes Intervall (a, b) .
- \mathcal{T}_h ist eine Triangulierung von Ω , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört.
- Es gilt $f \in L^2(\Omega)$.
- Das Hindernis ψ in (P) ist derart, dass die Menge $\{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ f.ü.}\}$ nicht leer ist.
- Das Hindernis χ in (P_h) ist derart, dass die Menge $\{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \chi \text{ f.ü.}\}$ nicht leer ist.
- Es gilt $\chi \in V_h(\Omega)$ und $\chi \leq \psi$ (fast überall) in Ω .

Man beachte, dass sowohl die H^1 -Minimalvoraussetzungen als auch die V_h -Minimalvoraussetzungen unter den obigen Annahmen erfüllt sind. Hieraus folgt mit Korollar 1.2.4 und Theorem 2.2.2, dass die Probleme (P) und (P_h) eindeutige Lösungen u und u_h besitzen. Die grundlegende Beobachtung ist nun die folgende:

Proposition 5.2.1. Sind die oben genannten Voraussetzungen erfüllt und ist u_h die Lösung des diskreten Hindernisproblems

$$(P_h) \quad u_h \in K_h : \quad a(u_h, u_h - v_h) \leq (f, u_h - v_h)_{L^2} \quad \forall v_h \in K_h,$$

dann gilt:

- Es existieren (möglicherweise leere) Teilmengen $\mathcal{I}_h \subset \mathcal{T}_h$ und $\mathcal{J}_h \subset \mathcal{C}_h$, so dass sich die Kontaktmenge $E_h := \{x \in \bar{\Omega} : u_h(x) = \chi(x)\}$ darstellen lässt als:

$$E_h = \bigcup_{T \in \mathcal{I}_h} T \cup \bigcup_{x_k \in \mathcal{J}_h} \{x_k\}.$$

Die Menge E_h setzt sich also aus Gitterzellen und Gitterknoten zusammen.

- Für alle $v_h \in V_h^0(\Omega)$ mit $v_h \equiv 0$ auf E_h gilt die Gleichung

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2}.$$

Beweis. Betrachten wir eine beliebige, aber feste Gitterzelle $[x_i, x_j] = T \in \mathcal{T}_h$, dann gilt auf Grund der stückweisen Linearität der Funktionen χ und u_h für alle $x = \lambda x_i + (1 - \lambda)x_j \in T$ die Gleichung

$$(u_h - \chi)(x) = \lambda(u_h - \chi)(x_i) + (1 - \lambda)(u_h - \chi)(x_j),$$

wobei wir wegen $u_h - \chi \geq 0$ wissen

$$(u_h - \chi)(x_i) \geq 0 \quad \text{und} \quad (u_h - \chi)(x_j) \geq 0.$$

Für T sind damit nur die Fälle $E_h \cap T = \emptyset$, $E_h \cap T = T$, $E_h \cap T = \{x_i\}$ und $E_h \cap T = \{x_j\}$ möglich. Dies beweist die erste Behauptung. Ist nun v_h ein Element von $V_h^0(\Omega)$ mit $v_h \equiv 0$ auf E_h , dann können wir v_h und die Differenz $u_h - \chi \geq 0$ darstellen als

$$v_h = \sum_{x_l \notin E_h} v_h(x_l) \varphi_h^l \quad \text{und} \quad (u_h - \chi) = \sum_{x_l \notin E_h} (u_h - \chi)(x_l) \varphi_h^l.$$

Mit φ_h^l bezeichnen wir hierbei die zu \mathcal{T}_h beziehungsweise $\mathcal{C}_h = \{x_k\}$ gehörige, nodale Basis. Nach Definition muss nun aber gelten $(u_h - \chi)(x_l) > 0$ für alle $x_l \notin E_h$. Das heißt insbesondere, es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$(u_h - \chi) \pm \varepsilon v_h = \sum_{x_l \notin E_h} (u_h - \chi \pm \varepsilon v_h)(x_l) \varphi_h^l \geq 0 \quad \text{auf } \Omega,$$

und dies bedeutet nichts anderes als $u_h \pm \varepsilon v_h \geq \chi$, beziehungsweise $u_h \pm \varepsilon v_h \in K_h$. Aus (P_h) erhalten wir nun

$$\pm a(u_h, v_h) \leq \pm (f, v_h)_{L^2}.$$

Dies beweist die zweite Aussage und komplettiert den Beweis. \square

Die Variationsungleichung (P_h) geht also in eine Gleichung über, wenn wir mit Funktionen aus dem Unterraum $\{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \equiv 0 \text{ auf } E_h\}$ arbeiten. Dies erweist sich als außerordentlich praktisch, denn betrachten wir nun ein $v_h \in V_h^0(\Omega)$ mit $v_h \equiv 0$ auf E_h und $v_h \leq 0$ auf Ω , dann folgt aus

$$a(u, v_h) = a(u, u - (u - v_h)) \leq (f, u - (u - v_h))_{L^2} = (f, v_h)_{L^2}$$

und

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2} \tag{5.6}$$

die Abschätzung

$$a(v_h, u - u_h) \leq 0. \tag{5.7}$$

Dies ist genau der Ungleichungstyp, den man im Nitsche-Trick benötigt, um die Approximation z_h der dualen Lösung verlustfrei einschieben zu können (siehe (5.3)).

Man beachte, dass die Gleichheit in (5.6) zwingend benötigt wird, um (5.7) herzuleiten. Setzt man zum Beispiel nur $v_h \leq 0$ voraus, dann gilt lediglich $a(u, v_h) \leq (f, v_h)_{L^2}$ und $a(u_h, v_h) \leq (f, v_h)_{L^2}$ und man hat auf Grund der gleichartigen Ungleichungszeichen keine Chance, durch Subtraktion eine Abschätzung der Form (5.7) zu erhalten.

Die Quintessenz der obigen Überlegung ist, dass das Problem der fehlenden Galerkin-Orthogonalität beseitigt werden kann, wenn es möglich ist, sicherzustellen, dass die Approximation der dualen Lösung nirgendwo positiv ist und auf der Kontaktmenge E_h verschwindet. Dies motiviert, das duale Problem wie folgt zu definieren:

$$(D1) \quad z \in K^- : \quad a(z, z - y) \leq (e^-, z - y)_{L^2} \quad \forall y \in K^-$$

mit

$$K^- := \{y \in H_0^1(\Omega) : y \geq \Psi^- \text{ punktweise auf } \Omega\}$$

und

$$\Psi^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in E_h \\ -\infty & \text{falls } x \in \Omega \setminus E_h \end{cases}.$$

Zu beachten ist hierbei, dass wir in K^- nicht nur $y \geq \Psi^-$ fast überall, sondern punktweise Ungleichheit fordern. Dies dürfen wir, da im Eindimensionalen die Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$ zur Verfügung steht (siehe Satz 4.2.4). Wir halten fest:

Proposition 5.2.2. *In der obigen Situation gilt:*

- Das Problem (D1) hat eine eindeutige Lösung $z \in H_0^1(\Omega)$.
- Die Lösung z genügt $z \leq 0$ auf Ω und $z \equiv 0$ auf E_h .
- Es existiert ein $C = C(\Omega)$, so dass gilt $\|z\|_{H^2(\Omega \setminus E_h)} \leq C \|e^-\|_{L^2(\Omega)}$.

Beweis. Die zulässige Menge K^- des Problems (D1) ist konvex und wegen $0 \in K^-$ nicht leer. Des Weiteren ist K^- auch abgeschlossen, denn konvergiert eine Folge $(y_n) \subset K^-$ bezüglich der H^1 -Norm gegen ein $y \in H_0^1(\Omega)$, dann konvergieren die stetigen Repräsentanten der Funktionen y_n auf Grund der Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$ gleichmäßig gegen den stetigen Repräsentanten von y und die punktweise Ungleichung $y_n \geq \Psi^-$ bleibt im Limes erhalten. Die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung z ergeben sich nun analog zum ersten Kapitel aus dem Satz von Lions-Stampacchia. Da die Analysis aus Abschnitt 1.3 vollkommen unabhängig davon ist, ob in der zulässigen Menge punktweise Ungleichheit oder Ungleichheit fast überall gefordert wird, sind unsere Resultate über Superlösungen auch im Falle des Problems (D1) anwendbar. Damit genügt es, zu zeigen, dass die Nullfunktion eine Superlösung ist, um die Ungleichung $z \leq 0$ (im Sinne fast überall oder punktweise überall – je nach Sichtweise) zu erhalten. Dies ist aber klar, denn für $g \equiv 0$ gilt trivialerweise $g \geq \Psi^-$ und $\text{tr } g \geq 0$ und die Bedingung

$$0 = a(g, v) \leq (e^-, v)_{L^2} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega) \text{ mit } v \leq 0 \text{ f.ü.}$$

ergibt sich direkt aus $e^- \leq 0$. Dass z auf E_h verschwinden muss, folgt nun natürlich aus $\Psi^- \leq z \leq 0$ und $\Psi^- \equiv 0$ auf E_h . Zu zeigen bleibt die Abschätzung $\|z\|_{H^2(\Omega \setminus E_h)} \leq C(\Omega) \|e^-\|_{L^2(\Omega)}$. Dass diese gilt, lässt sich wie folgt einsehen: Betrachten wir eine Komponente I der Menge $\Omega \setminus E_h$, dann ist I offen und wir erhalten aus der Variationsungleichung (D1) die Identität

$$\int_I \nabla z \cdot \nabla y \, dx = \int_I e^- y \, dx \quad \forall y \in H_0^1(I).$$

Des Weiteren wissen wir wegen $z \equiv 0$ auf E_h , dass $z|_I$ eine $H_0^1(I)$ -Funktion sein muss.

Damit ist $z|_I$ aber die eindeutig bestimmte Lösung des Poisson-Problems mit rechter Seite $e^-|_I$ auf dem Intervall I und es folgt aus Satz 1.4.1, dass eine von I unabhängige Konstante \tilde{C} existiert mit

$$\|z\|_{H^2(I)}^2 \leq \tilde{C} \left(1 + (\text{diam } I)^2 + (\text{diam } I)^4\right) \|e^-\|_{L^2(I)}^2. \quad (5.8)$$

Summieren wir in (5.8) über alle Komponenten von $\Omega \setminus E_h$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \|z\|_{H^2(\Omega \setminus E_h)}^2 &\leq \sum_{\substack{I \subset \Omega: \\ I \text{ Komponente von } \Omega \setminus E_h}} \tilde{C} \left(1 + (\text{diam } I)^2 + (\text{diam } I)^4\right) \|e^-\|_{L^2(I)}^2 \\ &\leq \tilde{C} \left(1 + (\text{diam } \Omega)^2 + (\text{diam } \Omega)^4\right) \|e^-\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dies beweist die letzte Behauptung und schließt den Beweis ab. \square

Ist nun $I_h z$ die Lagrange-Interpolierende von z , dann gilt – da die Menge E_h durch das Gitter \mathcal{T}_h exakt aufgelöst wird, da z auf E_h verschwindet und da z nirgendwo positiv ist – sowohl $I_h z \equiv 0$ auf E_h als auch $I_h z \leq 0$ in Ω (siehe Abbildung 5.1). Die Approximation $I_h z$ hat also genau die Eigenschaften, die zur Herleitung der Ungleichung (5.7) benötigt wurden, und wir erhalten

$$a(I_h z, u - u_h) \leq 0. \quad (5.10)$$

Des Weiteren ergibt sich aus den Eigenschaften von z , $I_h z$ und E_h mit Satz 2.1.5 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|z - I_h z\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \sum_{\substack{I \subset \Omega: \\ I \text{ Komponente von } \Omega \setminus E_h}} \|z|_I - I_h(z|_I)\|_{H^1(I)}^2 \\ &\leq \sum_{\substack{I \subset \Omega: \\ I \text{ Komponente von } \Omega \setminus E_h}} C(\rho_2) h^2 \|z\|_{H^2(I)}^2 \\ &= C(\rho_2) h^2 \|z\|_{H^2(\Omega \setminus E_h)}^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Man beachte, dass diese Rechnung nur funktioniert, weil der Rand ∂E_h aus Gitterknoten besteht.

Mit (5.9), (5.10) und (5.11) haben wir zwei der drei in Abschnitt 5.1 genannten Probleme beseitigt. Zu zeigen bleibt, dass in (D1) durch geschicktes Testen die L^2 -Norm der Fehlerkomponente e^- erzeugt werden kann. Hierzu lässt sich zum Beispiel die Funktion $y := z + u - u_h \in K^-$ verwenden. Dass diese tatsächlich in der zulässigen Menge K^- liegt, folgt aus unserer Voraussetzung $\chi \leq \psi$, denn diese impliziert

$$y(x) = (z + u - u_h)(x) = (u - \chi)(x) \geq (\psi - \chi)(x) \geq 0 \quad \forall x \in E_h$$

und damit $y \geq \Psi^-$. Die L^2 -Fehlerabschätzung können wir nun vollkommen analog zum unrestringierten Fall herleiten: Testen wir in

$$a(z, z - y) \leq (e^-, z - y)_{L^2}$$

mit dem obigen y , dann folgt

$$-a(z, u - u_h) \leq (e^-, -(u - u_h))_{L^2} = -\|e^-\|_{L^2}^2.$$

Hieraus ergibt sich mit (5.10) die Ungleichung

$$\|e^-\|_{L^2}^2 \leq a(z, u - u_h) \leq a(z - I_h z, u - u_h) \leq \|z - I_h z\|_{H^1} \|u - u_h\|_{H^1}.$$

Nutzen wir schlussendlich (5.9) und (5.11), dann erhalten wir mit passenden Konstanten

$$\|e^-\|_{L^2}^2 \leq C_1(\rho_2) h \|u - u_h\|_{H^1} \|z\|_{H^2(\Omega \setminus E_h)} \leq C_2(\rho_2, \Omega) h \|u - u_h\|_{H^1} \|e^-\|_{L^2}. \quad (5.12)$$

Dies ist genau die Abschätzung, die wir haben wollten.

Wir können nun zum Beispiel festhalten:

Theorem 5.2.3. *Es sei Ω ein beschränktes, offenes Intervall mit einer Triangulierung \mathcal{T}_h , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört. Es seien $f \in L^p(\Omega)$ und $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$ derart, dass die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen erfüllt sind. Für das Hindernis χ in (P_h) gelte $\chi \in V_h(\Omega)$ und $\chi \leq \psi$ in Ω . Dann gilt:*

- Die Probleme (P) und (P_h) sind eindeutig lösbar und die Lösung u ist eine $W^{2,p}$ -Funktion.
- Genügt u_h der Ungleichung $u_h \geq I_h\psi$, dann existiert eine Konstante $C = C(p, \Omega, \rho_2)$, so dass sich die L^2 -Norm der Fehlerkomponente $(u - u_h)^-$ abschätzen lässt durch

$$\|(u - u_h)^-\|_{L^2} \leq Ch^2 \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} (|\psi|_{W^{2,p}} + |u|_{W^{2,p}}) + |u|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Dass (P) eindeutig lösbar ist und dass $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ gilt, ergibt sich aus Satz 1.4.5. Des Weiteren lässt sich zum Beispiel aus Korollar 4.1.3 folgern, dass die Menge K_h in der obigen Situation nicht leer sein kann. Die Existenz von u_h erhalten wir damit aus Satz 2.2.2. Nehmen wir nun an, dass die diskrete Lösung u_h der Bedingung $u_h \geq I_h\psi$ genügt, dann lässt sich vollkommen analog zu dem Beweis von Satz 3.2.1 zeigen, dass die Funktion $v := \max(u_h, \psi)$ ein Element von K ist und dass gilt:

$$\|u_h - v\|_{L^2} \leq \|\psi - I_h\psi\|_{L^2}.$$

Darüber hinaus ergibt sich aus $\chi \in V_h(\Omega)$ und $\chi \leq \psi$, dass die Lagrange-Interpolierende $v_h := I_h u$ der Lösung u im obigen Setting in K_h enthalten sein muss. Setzen wir diese beiden Funktionen in das erweiterte Lemma von Céa ein, dann folgt, dass eine Konstante $C_1 = C_1(p, \Omega, \rho_2)$ existiert mit:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C_1 h \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} (|\psi|_{W^{2,p}} + |u|_{W^{2,p}}) + |u|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Kombinieren wir diese Ungleichung mit (5.12), dann erhalten wir mit passenden Konstanten

$$\begin{aligned} \|e^-\|_{L^2} &\leq C_2(\rho_2, \Omega) h \|u - u_h\|_{H^1} \\ &\leq C_3(p, \Omega, \rho_2) h^2 \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} (|\psi|_{W^{2,p}} + |u|_{W^{2,p}}) + |u|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung. □

Anwendbar ist das obige Resultat zum Beispiel, wenn ψ konkav ist und $\chi = I_h\psi$ in (P_h) gewählt wird, denn in diesem Fall sind die Voraussetzungen $\chi \leq \psi$ und $u_h \geq I_h\psi$ trivialerweise erfüllt.

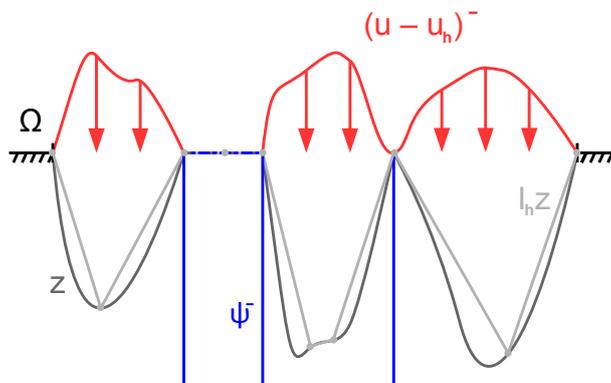


Abbildung 5.1: Das duale Problem $(D1)$

5.3 Ein Nitsche-Trick für die Fehlerkomponente $(u - u_h)^+$

Die L^2 -Norm der Fehlerkomponente $e^+ = (u - u_h)^+ = \max(0, u - u_h)$ lässt sich vollkommen analog zum letzten Abschnitt abschätzen, wenn man die Rollen von u und u_h vertauscht und einige Besonderheiten berücksichtigt. Wir orientieren uns im Folgenden wieder an [Mo2] und fordern:

- Ω ist ein beschränktes, offenes Intervall (a, b) .
- \mathcal{T}_h ist eine Triangulierung von Ω , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört.
- Es gilt $f \in L^2(\Omega)$.
- Das Hindernis ψ genügt $\psi \in C(\bar{\Omega})$ und die Menge $\{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ f.ü.}\}$ ist nicht leer.
- Das Hindernis χ in (P_h) ist derart, dass die Menge $\{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \chi \text{ f.ü.}\}$ nicht leer ist.
- Es gilt $\psi \leq \chi$ fast überall in Ω (wir benötigen hier nicht, dass χ aus $V_h(\Omega)$ stammt).
- Die betrachtete Triangulierung \mathcal{T}_h ist derart, dass der Rand der Kontaktmenge

$$E = \left\{ x \in \bar{\Omega} : u(x) = \psi(x) \right\}$$

aus Gitterpunkten besteht¹. Man vergleiche hierzu mit Abbildung 5.2.

Man beachte, dass die Lösung u in der obigen Situation wegen $H^1(\Omega) \subset C^{0,1/2}(\bar{\Omega})$ einen auf dem Abschluss von Ω stetigen Repräsentanten besitzt. Die Definition von E ist also sinnvoll. Als duales Problem wählen wir nun

$$(D2) \quad z \in K^+ : \quad a(z, z - y) \leq (-e^+, z - y)_{L^2} \quad \forall y \in K^+$$

mit

$$K^+ := \{y \in H_0^1(\Omega) : y \geq \Psi^+ \text{ punktweise auf } \Omega\}$$

und

$$\Psi^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in E \\ -\infty & \text{falls } x \in \Omega \setminus E \end{cases}.$$

Wir halten fest:

Proposition 5.3.1. *Unter den oben genannten Voraussetzungen gilt:*

- Das Problem (D2) hat eine eindeutige Lösung $z \in H_0^1(\Omega)$.
- Die Lösung z genügt $z \leq 0$ auf Ω und $z \equiv 0$ auf E .
- Es existiert ein $C = C(\Omega)$, so dass gilt $\|z\|_{H^2(\Omega \setminus E)} \leq C \|e^+\|_{L^2(\Omega)}$.

Beweis. Der Beweis folgt Wort für Wort dem von Proposition 5.2.2. □

Dass es sinnvoll ist, (D2) als duales Problem zu verwenden, ergibt sich aus:

Proposition 5.3.2. *In der oben betrachteten Situation gilt für alle $v_h \in V_h^0(\Omega)$ mit $v_h \equiv 0$ auf E die Gleichung:*

$$a(u, v_h) = (f, v_h)_{L^2}. \tag{5.13}$$

¹ Diese Annahme wird in der Arbeit von Mosco nicht gemacht, lässt sich aber nicht vermeiden, wenn man die Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ erreichen will. Man betrachte hierzu unser Gegenbeispiel in Abschnitt 6.1.2.

Beweis. Betrachten wir einen Gitterknoten $x_l \in \mathcal{C}_h$, der nicht in E enthalten ist, dann folgt aus unseren Annahmen, dass der Finite-Elemente-Patch

$$P_h^l = \text{int} \left(\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h : x_l \in T} T \right)$$

eine Teilmenge der Freifläche $\Omega \setminus E$ ist. Hieraus ergibt sich mit der Stetigkeit der Funktion $u - \psi \geq 0$, dass die Größe

$$\varepsilon := \frac{\min \{(u - \psi)(x) : x \in \text{supp } \varrho\}}{\|\varrho\|_{L^\infty}}$$

für alle Testfunktionen $0 \neq \varrho \in C_c^\infty(P_h^l)$ echt positiv sein muss. Mit $\text{supp } \varrho$ bezeichnen wir hierbei den kompakten Träger von ϱ . Damit erhalten wir aber

$$u \pm \varepsilon \varrho \geq \psi \text{ in } P_h^l,$$

was wiederum impliziert

$$\pm \varepsilon a(u, \varrho) = a(u, u - (u - \mp \varepsilon \varrho)) \leq (f, u - (u - \mp \varepsilon \varrho))_{L^2} = \pm \varepsilon (f, \varrho)_{L^2}.$$

Für alle $\varrho \in C_c^\infty(P_h^l)$ gilt also die Gleichung $a(u, \varrho) = (f, \varrho)_{L^2}$. Ist nun φ_h^l das zu x_l gehörige Element der nodalen Basis $\{\varphi_h^k\}$, dann gilt nach Definition $\varphi_h^l \in H_0^1(P_h^l)$. Damit liegt φ_h^l im $\|\cdot\|_{H^1}$ -Abschluss von $C_c^\infty(P_h^l)$ und wir erhalten $a(u, \varphi_h^l) = (f, \varphi_h^l)_{L^2}$. Dies beweist die Behauptung für Basisfunktionen. Der allgemeine Fall ergibt sich jetzt aus der Linearität der Gleichung (5.13). \square

Aus dem kontinuierlichen Problem (P) lässt sich also ebenfalls eine Gleichung gewinnen, wenn man mit Funktionen arbeitet, die auf der Kontaktmenge E verschwinden. Genau diese Eigenschaft hat aber die Lagrange-Interpolierende der dualen Lösung z , denn aus Proposition 5.3.1 folgt, dass auf Ω die Ungleichung $I_h z \leq 0$ und auf E die Identität $I_h z \equiv 0$ gilt. Damit erhalten wir vollkommen analog zum letzten Abschnitt:

$$a(I_h z, u_h - u) = a(I_h z, u_h) - a(I_h z, u) \leq (f, I_h z)_{L^2} - (f, I_h z)_{L^2} = 0. \quad (5.14)$$

Aus der Definition von $(D2)$ ergibt sich weiter, dass für alle $x \in E$ gilt

$$(z + u_h - u)(x) = (u_h - \psi)(x) \geq (\chi - \psi)(x) \geq 0.$$

Die Funktion $y := z + u_h - u$ ist also in K^+ enthalten und wir können aus $(D2)$ folgern

$$a(z, u - u_h) \leq (-e^+, u - u_h)_{L^2} = -\|e^+\|_{L^2}^2.$$

Hieraus ergibt sich mit (5.14) die Abschätzung

$$\|e^+\|_{L^2}^2 \leq a(z, u_h - u) \leq a(z - I_h z, u_h - u) \leq \|z - I_h z\|_{H^1} \|u - u_h\|_{H^1}.$$

Berücksichtigen wir nun wieder, dass das Gitter \mathcal{T}_h die Kontaktmenge E nach Voraussetzung exakt auflöst, dass z und $I_h z$ auf E verschwinden und dass z auf $\Omega \setminus E$ eine H^2 -Funktion ist, dann erhalten wir, dass eine Konstante $C = C(\rho_2, \Omega)$ existiert mit

$$\|e^+\|_{L^2} \leq C(\rho_2, \Omega) h \|u - u_h\|_{H^1}. \quad (5.15)$$

Damit ist es erneut gelungen, eine h -Potenz zu gewinnen. Wir können nun zum Beispiel festhalten:

Theorem 5.3.3. *Es sei Ω ein beschränktes, offenes Intervall mit einer Triangulierung \mathcal{T}_h , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört. Es seien $f \in L^p(\Omega)$ und $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$ derart, dass die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen erfüllt sind. Es gelte $\chi = \psi$ und die Menge E werde durch das Gitter \mathcal{T}_h exakt aufgelöst. Dann besitzen (P) und (P_h) eindeutige Lösungen u und u_h , es gilt $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ und es existiert eine Konstante $C = C(p, \rho_1, \rho_2, \Omega) > 0$, so dass gilt:*

$$\|(u - u_h)^+\|_{L^2} \leq Ch^2 \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} \|u\|_{W^{2,p}} + \|u\|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Dass (P) und (P_h) eindeutig lösbar sind, dass $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ gilt und dass eine Konstante $C = C(p, \rho_1, \rho_2, \Omega) > 0$ existiert mit

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \left(\|\Delta u + f\|_{L^2} \|u\|_{W^{2,p}} + |u|_{W^{2,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.16)$$

folgt direkt aus Korollar 4.1.4. Des Weiteren sind unter den obigen Annahmen alle Voraussetzungen, die wir am Anfang dieses Abschnitts gemacht haben, erfüllt. Wir können also (5.16) in (5.15) einsetzen, um die gewünschte L^2 -Fehlerabschätzung zu erhalten. \square

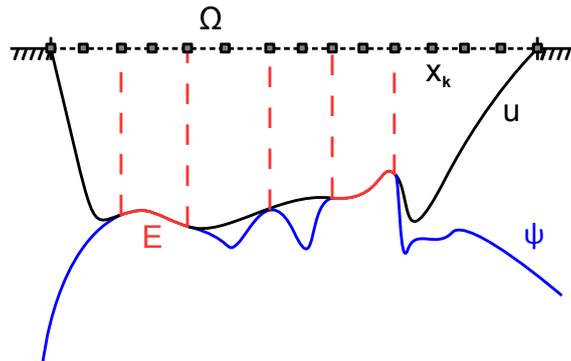


Abbildung 5.2: Die Menge E muss exakt durch \mathcal{T}_h aufgelöst werden.

5.4 Ein Zwischenfazit

Der Ansatz, den wir in den letzten beiden Abschnitten verwendet haben, hat einen wesentlichen Nachteil: Er funktioniert nur im Eindimensionalen. Die Gründe hierfür sind vielfältig. Problematisch ist zum Beispiel, dass es schon im Fall $d = 2$ wegen $H^1(\Omega) \not\subseteq C(\Omega)$ nicht mehr möglich ist, in den dualen Problemen $(D1)$ und $(D2)$ punktweise Ungleichheit zu fordern. Diese wird aber zwingend benötigt, um die Kontaktmengen E und E_h – die ja durchaus diskret sein können – voll zu erfassen. Darüber hinaus lässt sich im Höherdimensionalen nicht gewährleisten, dass die Komponenten von $\Omega \setminus E_h$ und $\Omega \setminus E$ Lipschitz-Ränder besitzen. Das heißt, selbst wenn es gelänge, die Probleme $(D1)$ und $(D2)$ im Fall $d > 1$ sinnvoll zu definieren, unsere Argumentation würde spätestens an der Regularität der dualen Lösung oder an der Abschätzung (5.8) scheitern.

Unvorteilhaft ist des Weiteren, dass wir zur Herleitung der e^- -Fehlerabschätzungen $\psi \geq \chi \in V_h(\Omega)$ und für die e^+ -Abschätzung $\chi \geq \psi$ voraussetzen mussten. Der einzige Fall, in dem diese Annahmen miteinander vereinbar sind und zudem die $W^{2,p}$ -Regularität von u garantiert werden kann, ist der eines linearen Hindernisses. Eine Abschätzung für den vollen L^2 -Fehler erhalten wir damit so gut wie nie. Darüber hinaus hat unsere Argumentation für die Komponente e^+ nur unter der Prämisse funktioniert, dass die Kontaktmenge E exakt durch die Triangulierung \mathcal{T}_h aufgelöst wird. Dies a priori sicherzustellen erweist sich als schwierig – die Lösung u ist schließlich unbekannt.

Die Ergebnisse, die wir in diesem Kapitel mit Dualitätsargumenten hergeleitet haben, sind damit eher unbefriedigend. Zwar haben wir einige Einblicke gewonnen – unsere Resultate verdeutlichen zum Beispiel, dass sich die Fehlerkomponenten e^- und e^+ grundlegend verschieden verhalten – eine in der Praxis verwendbare a priori Fehlerabschätzung konnten wir jedoch nicht beweisen. Wie wir sehen werden liegt dies daran, dass die L^2 -Norm nicht die richtige Wahl ist, wenn es darum geht, zu untersuchen, wie gut ein Problem des Typs (P_h) das Hindernisproblem (P) approximiert. Das richtige Fehlermaß ist in dieser Situation die L^∞ -Norm. Dementsprechend ist unser nächstes Thema die:

6 L^∞ -Fehleranalyse

In diesem Kapitel beweisen wir einige grundlegende Aussagen über die Stabilität diskreter Hindernisprobleme, aus denen scharfe a priori Abschätzungen für den L^∞ -Fehler zwischen u und u_h abgeleitet werden können. Abschnitt 6.1 widmet sich zunächst zwei (Gegen-)Beispielen, die demonstrieren, dass die Fehlerordnung $\mathcal{O}(h^2)$ im Allgemeinen nicht erreicht werden kann, wenn man $W^{2,p}$ -Hindernisse betrachtet und den Fehler in einer der L^p -Normen misst. Hier wird auch deutlich werden, warum der L^∞ -Fehler die maßgebliche Größe ist, wenn man bestimmen will, wie sich die Probleme (P) und (P_h) zueinander verhalten. In Abschnitt 6.2 verallgemeinern wir dann das Konzept der Superlösung auf das diskrete Setting. Dies wird uns erlauben, die Eigenschaften des Lösungsoperators $(\chi, f) \mapsto u_h$ im Detail zu untersuchen und zum Beispiel zu analysieren, wie ein Problem der Form (P_h) auf Störungen des Hindernisses χ reagiert. In Abschnitt 6.3 kombinieren wir schlussendlich unsere Ergebnisse, um eine Abschätzung für den Fehler $\|u - u_h\|_{L^\infty}$ zu erhalten.

6.1 Zwei Gegenbeispiele

Wie wir in Kapitel 5 gesehen haben, hat man mit zahlreichen Schwierigkeiten zu kämpfen, wenn man beweisen will, dass sich die Fehlerordnung beim Übergang von der H^1 -Norm zur L^2 -Norm verdoppelt. Probleme bereitet insbesondere, dass die Kontaktmenge E a priori unbekannt ist und dass man widersprüchliche Annahmen treffen muss, um die Fehlerkomponenten $(u - u_h)^-$ und $(u - u_h)^+$ wie gewünscht abschätzen zu können. Dies nährt natürlich Zweifel daran, dass der L^2 -Fehler unter normalen Umständen tatsächlich mit der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ gegen Null geht. Dass diese Zweifel berechtigt sind und dass die oben genannten Schwierigkeiten nicht nur mit unserer Beweistechnik zusammenhängen, sondern auch in der Realität von Bedeutung sind, werden wir im Folgenden anhand zweier Beispiele demonstrieren.

6.1.1 Die Fehlerkomponente $(u - u_h)^+$ im Fall $\chi \in V_h(\Omega)$

Zur Konstruktion des Hindernisses, das wir in unseren Beispielen verwenden werden, betrachten wir für ein beliebiges, aber festes $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ die Funktion

$$h_\alpha(x) = \frac{3}{2} - |x|^{2-\alpha}.$$

Diese genügt offensichtlich $h_\alpha''(x) = -(2 - \alpha)(1 - \alpha)|x|^{-\alpha}$ und damit $h_\alpha \in W^{2,p}(-1, 1)$ für alle p mit $2 \leq p < \frac{1}{\alpha}$. Wählen wir nun eine Cut-Off-Funktion $\phi \in C_c^\infty(-1, 1)$ mit

$$0 \leq \phi(x) \leq 1, \quad \phi \equiv 1 \text{ auf } (-0.3, 0.3) \quad \text{und} \quad \text{supp } \phi \subset [-0.4, 0.4],$$

zum Beispiel

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |x| \geq 0.4 \\ 1 & \text{falls } |x| \leq 0.3, \\ \exp\left(-\exp\left(\frac{0.1}{0.3-|x|} + \frac{0.1}{0.4-|x|}\right)\right) & \text{sonst} \end{cases}, \quad (6.1)$$

dann ist die Funktion $g_\alpha(x) := \phi(x)h_\alpha(x) - \frac{1}{2}$ glatt auf $(-1, 0) \cup (0, 1)$, identisch $-\frac{1}{2}$ außerhalb des Intervalls $(-0.4, 0.4)$ und gleich $1 - |x|^{2-\alpha}$ auf $(-0.3, 0.3)$. Hieraus ergibt sich insbesondere

$$g_\alpha \in W^{2,p}(-1, 1) \quad \forall 2 \leq p < \frac{1}{\alpha}.$$

Das Hindernis, das wir betrachten werden, ist nun das folgende

$$\psi_\alpha(x) := \begin{cases} g_\alpha(x + 0.5) & \text{falls } x \in (-1, 0] \\ g_\alpha(x - 0.5) & \text{falls } x \in (0, 1). \end{cases} \quad (6.2)$$

Als Kraft f werden wir zunächst die Nullfunktion verwenden. Unser Modellproblem ist also

$$(P_\alpha) \quad u \in K : \quad a(u, u - v) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

mit

$$K := \{v \in H_0^1(-1, 1) : v \geq \psi_\alpha \text{ f.ü.}\}.$$

Grob gesprochen charakterisiert (P_α) die Gleichgewichtslage einer Membran, die über ein Hindernis mit zwei Maxima gespannt wird und ansonsten keiner Belastung ausgesetzt ist. Man vergleiche hierzu mit Abbildung 6.1. Dass in der obigen Situation eine eindeutige Lösung existiert, ergibt sich aus unseren Ergebnissen in Kapitel 1. Eine detaillierte Untersuchung zeigt das Folgende:

Proposition 6.1.1. *Das Hindernisproblem (P_α) besitzt eine eindeutige Lösung u und für diese gilt*

$$u \in W^{2,p}(-1, 1) \quad \forall 2 \leq p < \frac{1}{\alpha} \quad \text{und} \quad u \equiv 1 \text{ f.ü. auf } [-0.5, 0.5].$$

Beweis. Die Existenz und die Regularität der Lösung u ergeben sich direkt aus Satz 1.4.5, denn die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen sind in der obigen Situation für alle $2 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ erfüllt. Des Weiteren folgt aus $\psi_\alpha \leq 1$ mit Korollar 1.3.4, dass u fast überall kleiner gleich eins sein muss. Dies impliziert insbesondere, dass $u(\pm 0.5) = 1$ gilt, wenn wir den stetigen Repräsentanten von u betrachten, und dass die Funktion

$$\tilde{u} := \begin{cases} 1 & \text{in } [-0.5, 0.5] \\ u & \text{sonst} \end{cases}$$

in der zulässigen Menge K enthalten ist. Die Identität $u \equiv 1$ auf $[-0.5, 0.5]$ ergibt sich nun aus der Tatsache, dass die Lösung des Problems (P_α) genau die Funktion in K ist, die das Funktional $a(v, v)$ über K minimiert. Hieraus folgt nämlich

$$0 \geq a(u, u) - a(\tilde{u}, \tilde{u}) = \int_{-0.5}^{0.5} \nabla u \cdot \nabla u \, dx$$

und damit $u \equiv \text{const}$ f.ü. auf $[-0.5, 0.5]$. Dass die hier auftretende Konstante genau Eins sein muss, ist wegen der Eigenschaften des stetigen Repräsentanten klar. Dies beweist die Behauptung. \square

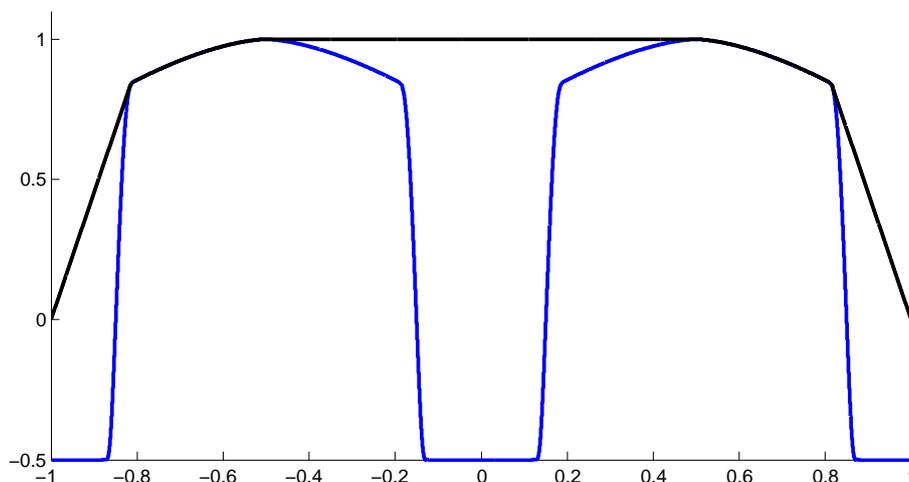


Abbildung 6.1: Das Hindernis ψ_α und die Lösung u im Fall $\alpha = 0.4$ mit ϕ wie in (6.1)

Zur Approximation von (P_α) werden wir diskrete Hindernisprobleme mit $\chi = I_h\psi_\alpha$ verwenden. Das heißt, wir betrachten Variationsungleichungen der Form

$$(P_{\alpha,h}) \quad u_h \in K_h : \quad a(u_h, u_h - v_h) \leq 0 \quad \forall v_h \in K_h$$

mit

$$K_h = \{v_h \in V_h^0(-1, 1) : v_h \geq I_h\psi_\alpha\}.$$

Die zugrunde liegenden Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h\} = \{\mathcal{T}_h\}_{0 < h \leq 1}$ wählen wir hierbei wie folgt:

$$\mathcal{T}_h = \begin{cases} \mathcal{T}_{\lfloor 1/h \rfloor^{-1}} & \text{falls } 1/h \notin \mathbb{N} \\ \left\{ [-1 + lh, -1 + (l+1)h] : l = 0, \dots, 2N-1 \right\} & \text{falls } 1/h = N \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (6.3)$$

Dies bedeutet nichts anderes, als dass wir äquidistante Zerlegungen des Intervalls $\Omega = (-1, 1)$ zur Diskretisierung nutzen. Die Fallunterscheidung benötigen wir lediglich, um h kontinuierlich variieren zu können und um in dem Setting zu bleiben, in dem wir uns in Kapitel 2 bewegt haben. Dass die obige Familie quasi-uniform ist, ist klar. Wir halten fest:

Proposition 6.1.2. *In der obigen Situation hat das Problem $(P_{\alpha,h})$ für alle $0 < h \leq 1$ eine eindeutige Lösung u_h und es existiert eine von h unabhängige Konstante $C > 0$, so dass für den Fehler zwischen u und u_h gilt*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch(\|\psi''\|_{L^2} + \|u''\|_{L^2}).$$

Beweis. Die Behauptung erhält man direkt aus Korollar 3.2.3. □

Der Fehler $\|u - u_h\|_{H^1}$ geht in unserem Beispiel also mit derselben Ordnung gegen Null wie bei der Approximation des Poisson-Problems. Der wesentliche Punkt ist nun der folgende:

Proposition 6.1.3. *Betrachten wir in der obigen Situation eine Schrittweite der Form $h_k = \frac{1}{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, dann gilt für die Näherungslösung u_{h_k} des Problems (P_{α,h_k}) die Identität*

$$u_{h_k} \equiv 1 - \left(\frac{h_k}{2}\right)^{2-\alpha} \quad \text{auf } [-0.5, 0.5].$$

Beweis. Da im Intervall $(0, 1)$ bei einer äquidistanten Zerlegung mit der Schrittweite $h_k = \frac{1}{2k+1}$ eine ungerade Anzahl von Gitterzellen entsteht, muss der Punkt 0.5 mittig in einer der Zellen $T \in \mathcal{T}_{h_k}$ liegen. Analoges gilt für den Punkt -0.5 . Hieraus folgt, dass die Maxima des Hindernisses ψ_α bei der Lagrange-Interpolation verloren gehen und dass auf $(-1, 1)$ gilt:

$$I_{h_k}\psi_\alpha \leq g_\alpha\left(\frac{h_k}{2}\right) = 1 - \left(\frac{h_k}{2}\right)^{2-\alpha} =: C.$$

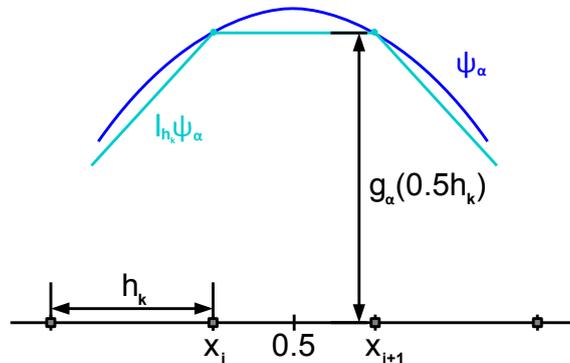


Abbildung 6.2: Die Lagrange-Interpolierende erfasst die Maxima nicht.

Wir beweisen nun als erstes, dass u_{h_k} überall kleiner gleich C sein muss: Betrachten wir das eindeutig bestimmte Element v_{h_k} in $V_{h_k}^0(-1, 1)$ mit

$$v_{h_k}(x_i) = \min(u_{h_k}(x_i), C) \quad \forall x_i \in \mathcal{C}_{h_k},$$

dann gilt in jedem Gitterpunkt $v_{h_k}(x_i) \geq (I_{h_k}\psi)(x_i)$. Hieraus ergibt sich mit der stückweisen Linearität der V_{h_k} -Funktionen, dass v_{h_k} ein Element der zulässigen Menge K_{h_k} ist und dass gilt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{-1}^1 (\nabla u_{h_k}) \nabla (u_{h_k} - v_{h_k}) dt \\ &= \sum_{i=0}^{4k+1} \int_{[x_i, x_{i+1}]} \left(\frac{u_{h_k}(x_{i+1}) - u_{h_k}(x_i)}{h_k} \right) \left(\frac{u_{h_k}(x_{i+1}) - v_{h_k}(x_{i+1}) - u_{h_k}(x_i) + v_{h_k}(x_i)}{h_k} \right) dt \\ &= \frac{1}{h_k} \sum_{i=0}^{4k+1} \left(u_{h_k}(x_{i+1}) - C - u_{h_k}(x_i) + C \right) \left(u_{h_k}(x_{i+1}) - v_{h_k}(x_{i+1}) - u_{h_k}(x_i) + v_{h_k}(x_i) \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Um die Summe auf der rechten Seite der letzten Gleichung abzuschätzen, gehen wir die Fälle, die auf den einzelnen Gitterzellen $[x_i, x_{i+1}]$ möglich sind, der Reihe nach durch:

- Gilt $v_{h_k}(x_{i+1}) = u_{h_k}(x_{i+1})$ und $v_{h_k}(x_i) = u_{h_k}(x_i)$, dann ist der Beitrag der Zelle $[x_i, x_{i+1}]$ zur Summe in (6.4) offensichtlich gleich Null.
- Ist $v_{h_k}(x_{i+1}) = C$ und $v_{h_k}(x_i) = C$, dann wird der zu $[x_i, x_{i+1}]$ gehörige Summand zu

$$\left(u_{h_k}(x_{i+1}) - u_{h_k}(x_i) \right)^2 \geq 0. \quad (6.5)$$

- Im Fall $v_{h_k}(x_{i+1}) = u_{h_k}(x_{i+1})$ und $v_{h_k}(x_i) = C$ gilt $u_{h_k}(x_{i+1}) \leq C$ und $u_{h_k}(x_i) \geq C$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned} &\left(u_{h_k}(x_{i+1}) - C - u_{h_k}(x_i) + C \right) \left(u_{h_k}(x_{i+1}) - v_{h_k}(x_{i+1}) - u_{h_k}(x_i) + v_{h_k}(x_i) \right) \\ &= \left(u_{h_k}(x_{i+1}) - C \right) \left(-u_{h_k}(x_i) + C \right) + \left(u_{h_k}(x_i) - C \right)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

- Ist umgekehrt $v_{h_k}(x_{i+1}) = C$ und $v_{h_k}(x_i) = u_{h_k}(x_i)$, so gilt $u_{h_k}(x_{i+1}) \geq C$ und $u_{h_k}(x_i) \leq C$ und es folgt:

$$\begin{aligned} &\left(u_{h_k}(x_{i+1}) - C - u_{h_k}(x_i) + C \right) \left(u_{h_k}(x_{i+1}) - v_{h_k}(x_{i+1}) - u_{h_k}(x_i) + v_{h_k}(x_i) \right) \\ &= \left(u_{h_k}(x_{i+1}) - C \right)^2 + \left(-u_{h_k}(x_i) + C \right) \left(u_{h_k}(x_{i+1}) - C \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

In allen möglichen Fällen, sind die Summanden in Gleichung (6.4) also nicht negativ. Andererseits ist die gesamte Summe aber nicht positiv. Damit müssen alle Summanden identisch null sein. Letzteres ist nach (6.5), (6.6) und (6.7) nur möglich, wenn für alle Knoten x_i mit $u_{h_k}(x_i) > C$, also $v_{h_k}(x_i) = C$, die Gleichung $u_{h_k}(x_{i-1}) = u_{h_k}(x_i) = u_{h_k}(x_{i+1})$ gilt. Damit ist aber klar, dass der Fall $u_{h_k}(x_i) > C$ nicht eintreten kann, denn dies würde $u_{h_k} \geq C > 0$ auf $(-1, 1)$ implizieren, was wegen der Nullrandwerte der Lösung u_{h_k} unmöglich ist. Wir erhalten also $u_{h_k} \leq C$. Die Identität $u_{h_k} \equiv C$ auf $[-0.5, 0.5]$ lässt sich nun vollkommen analog zum kontinuierlichen Fall beweisen: Aus $I_h\psi_\alpha \leq u_{h_k} \leq C$ ergibt sich, dass u_{h_k} in den Gitterpunkten, die links und rechts von ± 0.5 liegen, den Wert C annimmt und dass die Funktion \tilde{u}_{h_k} mit

$$\tilde{u}_{h_k} := \begin{cases} C & \text{in } [-0.5, 0.5] \\ u_{h_k} & \text{sonst} \end{cases},$$

in K_{h_k} enthalten ist. Man vergleiche hierzu mit Abbildung 6.2.

Hieraus können wir wieder folgern

$$0 \geq a(u_{h_k}, u_{h_k}) - a(\tilde{u}_{h_k}, \tilde{u}_{h_k}) = \int_{-0.5}^{0.5} \nabla u_{h_k} \cdot \nabla u_{h_k} \, dx \geq 0.$$

Die Lösung u_{h_k} ist also auf $[-0.5, 0.5]$ konstant. Dies beweist die Behauptung. \square

Wir wissen nun, dass die exakte Lösung u auf $[-0.5, 0.5]$ identisch eins und die Approximation u_{h_k} auf $[-0.5, 0.5]$ identisch $1 - (\frac{1}{2}h_k)^{2-\alpha}$ ist. Damit gilt für alle $1 \leq q \leq \infty$ die Abschätzung

$$\|u - u_{h_k}\|_{L^q(-1,1)} \geq \|u - u_{h_k}\|_{L^q(-0.5,0.5)} = \left(\frac{h_k}{2}\right)^{2-\alpha}. \quad (6.8)$$

Die L^q -Fehlerordnung ist also für jedes q schlechter als $\mathcal{O}(h^{2-\alpha})$ – und das, obwohl unser Hindernis ψ_α nach Konstruktion für alle $2 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ in $W^{2,p}(-1, 1)$ enthalten ist. Wir halten fest:

Beobachtung 6.1.4. *Im Falle des eindimensionalen Hindernisproblems kann bei Verwendung der obigen Diskretisierungstechnik (lineare Ansatzfunktionen und $\chi = I_h\psi$) eine allgemeine Aussage der Form:*

$$\text{Ist das Hindernis eine } W^{2,p}\text{-Funktion, dann gilt } \|u - u_h\|_{L^q} \leq Ch^\beta$$

nur richtig sein, falls der Exponent β kleiner gleich $2 - \frac{1}{p}$ ist.

Man beachte, dass es genau die Fehlerkomponente $(u - u_h)^+$ ist, die uns im obigen Beispiel Probleme bereitet. Für den Anteil $(u - u_h)^-$ erhalten wir wie gewünscht die L^2 -Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$. Dies lässt sich wie folgt einsehen: Ist h klein genug, dann verletzt die Lagrange-Interpolierende $I_h\psi_\alpha$ die Bedingung $I_h\psi_\alpha \leq \psi_\alpha$ nur in der Nähe der Punkte ± 0.1 und ± 0.9 , denn nur dort ist die Funktion ψ_α konvex (Siehe Abbildung 6.1). Genau in diesen Gebieten ist die Nebenbedingung $u_h \geq I_h\psi_\alpha$ in $(P_{\alpha,h})$ bei kleinem h aber inaktiv. Das bedeutet, dass sich die Lösung u_h nicht verändert, wenn wir die Interpolierende $I_h\psi_\alpha$ in $(P_{\alpha,h})$ in der Umgebung der Punkte ± 0.1 und ± 0.9 durch das Absenken der Knotenwerte so modifizieren, dass wir ein neues Hindernis $\psi_{h,\alpha}$ mit $\psi_{h,\alpha} \in V_h(\Omega)$ und $\psi_{h,\alpha} \leq \psi_\alpha$ erhalten. Die diskreten Hindernisprobleme mit $\psi_{h,\alpha}$ genügen nun aber allen Voraussetzungen von Theorem 5.2.3 und dieses besagt im Fall $f \equiv 0$ gerade, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\|(u - u_h)^-\|_{L^2} \leq Ch^2(\|\psi''\|_{L^2} + \|u''\|_{L^2}).$$

Unsere experimentellen Ergebnisse legen nahe, dass die Fehlerkomponente $(u - u_h)^-$ in der obigen Situation sogar identisch Null ist. Zumindest ist sie so klein, dass sie im numerischen Rauschen untergeht. Man vergleiche hierzu mit Abbildung 6.3 b). Dass tatsächlich $\|(u - u_h)^+\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{2-\alpha})$ gilt, ist in Abbildung 6.4 gut zu sehen.

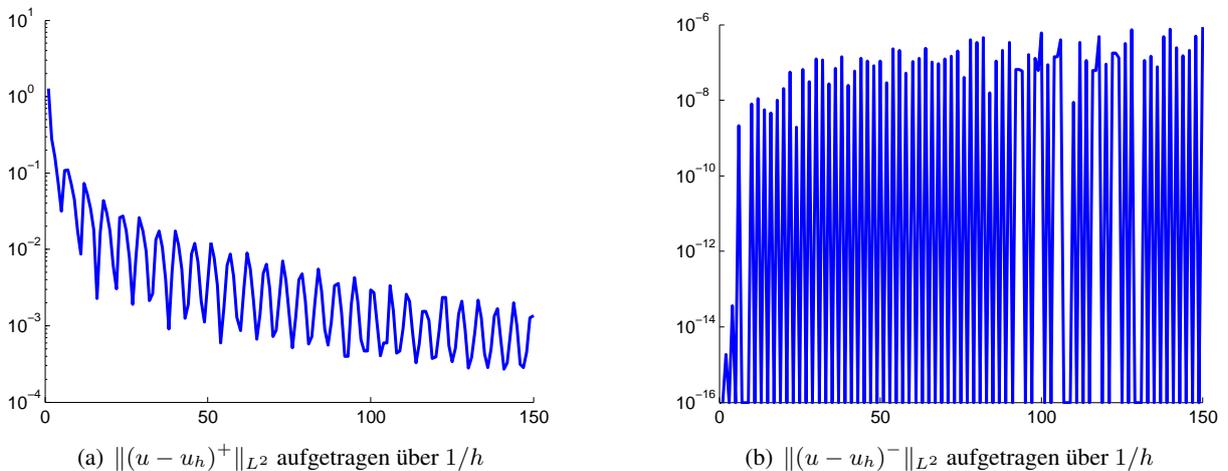


Abbildung 6.3: Verhalten der Fehlerkomponenten $(u - u_h)^+$ und $(u - u_h)^-$ im Fall $\alpha = 0.4$.

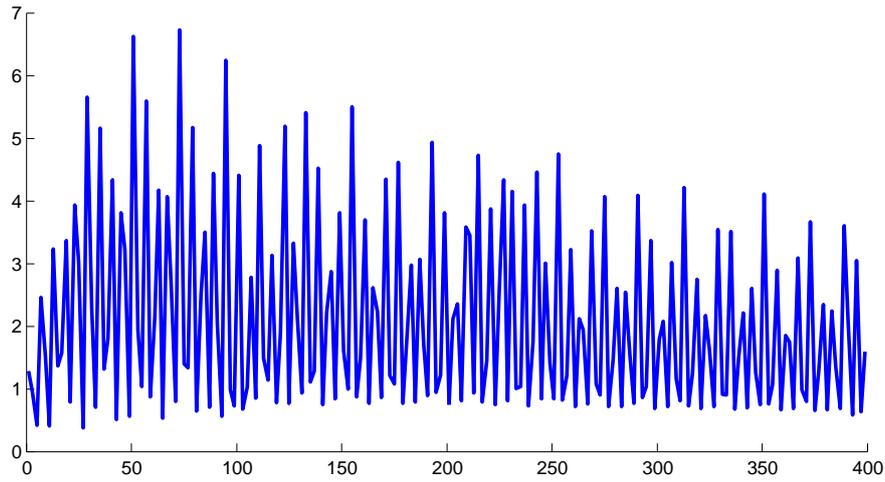


Abbildung 6.4: Die Größe $h_k^{-1.6} \|(u - u_{h_k})^+\|_{L^2}$ im Fall $\alpha = 0.4$ aufgetragen über $1/h_k$. Die Ordnung passt genau zu unserer Fehlerabschätzung (6.8) (und auch zu Theorem 6.3.4).

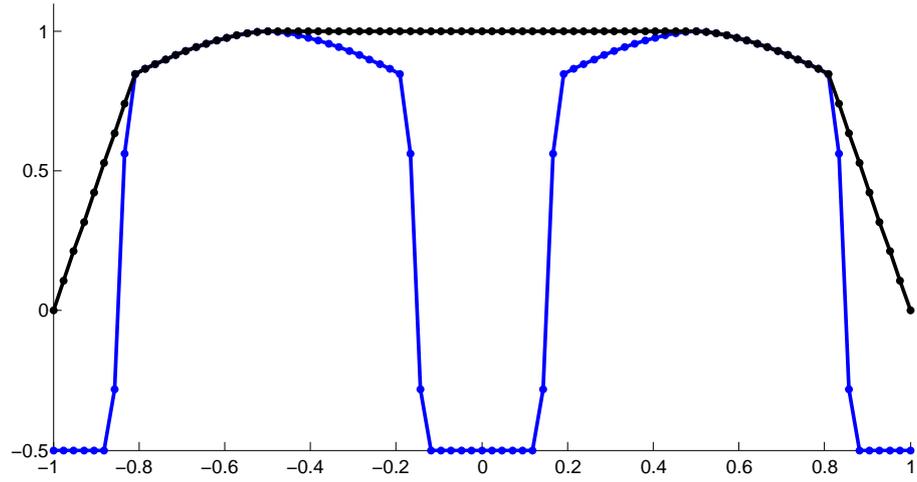
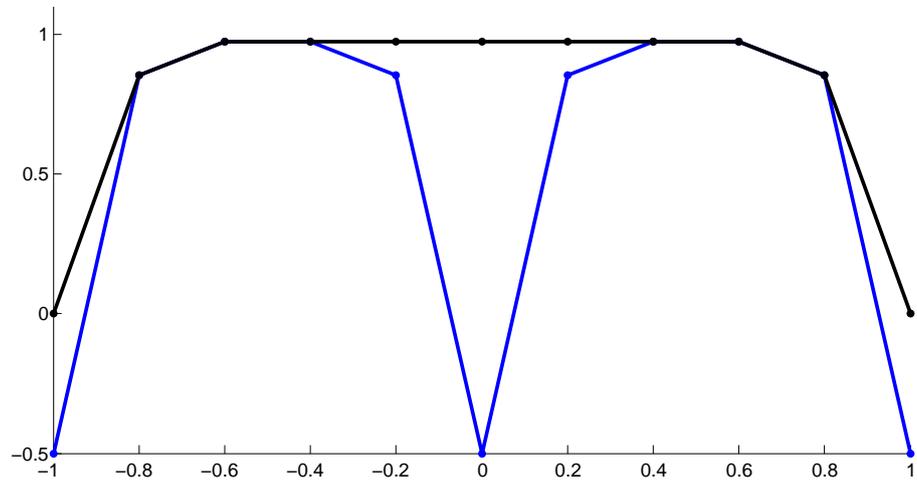


Abbildung 6.5: Ergebnisse im Fall $\alpha = 0.4$ zu den Schrittweiten $h = 1/5$ (oben) und $h = 1/42$ (unten).

Erzielt wurden die obigen Ergebnisse mit Hilfe des in der Matlab Optimization Toolbox implementierten Active-Set-Algorithmus. Das Hindernis war in allen Fällen dasselbe wie in Abbildung 6.1.

Der Effekt, der dafür verantwortlich ist, dass der L^2 -Fehler zwischen u und u_h in unserem Beispiel nicht mit der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ gegen Null geht, ist intuitiv klar: Die Maxima des Hindernisses ψ_α werden durch die Lagrange-Interpolierenden $I_{h_k}\psi_\alpha$ nicht gut genug wiedergegeben und deshalb erreichen die Näherungslösungen u_{h_k} nicht die Höhe, die nötig wäre, um die exakte Lösung u mit der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ zu approximieren. Der lokal an den Punkten ± 0.5 auftretende Fehler

$$|(\psi_\alpha - I_{h_k}\psi_\alpha)(\pm 0.5)| = \mathcal{O}(h_k^{2-\alpha}) = \mathcal{O}(\|\psi_\alpha - I_{h_k}\psi_\alpha\|_{L^\infty})$$

zwischen den Hindernissen in (P) und (P_{h_k}) hat sich in der obigen Situation global ausgewirkt. Hieraus lässt sich folgern:

Beobachtung 6.1.5. *Approximieren wir ein Problem der Form*

$$(P) \quad u \in K : \quad a(u, u - v) \leq \langle f, u - v \rangle \quad \forall v \in K$$

mit

$$K := \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ f.ü.}\}$$

durch ein diskretes Hindernisproblem der Form

$$(P_h) \quad u_h \in K_h : \quad a(u_h, u_h - v_h) \leq \langle f, u_h - v_h \rangle \quad \forall v_h \in K_h$$

mit

$$K_h := \{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \chi \text{ f.ü.}\},$$

dann ist der L^∞ -Fehler zwischen ψ und χ für den L^q -Fehler zwischen u und u_h entscheidend.

Es liegt nun natürlich sehr nahe, zu vermuten, dass sich die L^2 -Fehlerordnung dadurch retten lässt, dass man in den diskreten Problemen (P_h) eine bessere Approximation des Hindernisses ψ verwendet. Dies erweist sich jedoch als Trugschluss: Erstaunlicherweise bringt es überhaupt nichts, den L^∞ -Fehler zwischen ψ und χ zu reduzieren. Selbst wenn wir Näherungsprobleme mit $\chi = \psi$ betrachten, in denen keinerlei Informationen über Maxima et cetera verloren gehen, können wir normalerweise nicht erwarten, dass die Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ erreicht wird. Verdeutlicht wird dies durch unser zweites Beispiel:

6.1.2 Die Fehlerkomponente $(u - u_h)^-$ im Fall $\chi = \psi$

Zur Konstruktion des Modellproblems, das wir im Folgenden untersuchen werden, nutzen wir die exakte Lösung $u = u_\alpha$ des Problems (P_α) aus dem letzten Abschnitt. Diese lässt sich schreiben als

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} \psi_\alpha(-\tilde{x} - 0.5) \frac{x+1}{0.5-\tilde{x}} & \text{falls } -1 < x < -\tilde{x} - 0.5 \\ \psi_\alpha(x) & \text{falls } -\tilde{x} - 0.5 \leq x < -0.5 \\ 1 & \text{falls } -0.5 \leq x < 0.5 \\ \psi_\alpha(x) & \text{falls } 0.5 \leq x < 0.5 + \tilde{x} \\ \psi_\alpha(\tilde{x} + 0.5) \frac{x-1}{\tilde{x}-0.5} & \text{falls } 0.5 + \tilde{x} \leq x < 0.5, \end{cases} \quad (6.9)$$

wobei $\tilde{x} = \tilde{x}(\alpha)$ bestimmt ist durch die Gleichung

$$\psi_\alpha(-\tilde{x} - 0.5) = (0.5 - \tilde{x})\psi'_\alpha(-\tilde{x} - 0.5), \quad \tilde{x} \in (0, 0.4).$$

Man beachte, dass dieses \tilde{x} genau so definiert ist, dass u_α für alle $2 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ in $W^{2,p}(-1, 1)$ enthalten ist. Betrachten werden wir nun das Problem

$$(Q_\alpha) \quad u \in K : \quad a(u, u - v) \leq (f_\alpha, u - v)_{L^2} \quad \forall v \in K$$

mit $f_\alpha = -u''_\alpha$ und

$$K := \{v \in H_0^1(-1, 1) : v \geq \psi_\alpha \text{ f.ü.}\}.$$

Wir halten fest:

Proposition 6.1.6. *Die Variationsungleichung (Q_α) besitzt eine eindeutige Lösung u und dieses u ist genau die Lösung des Problems (P_α) aus dem letzten Abschnitt. Insbesondere gilt:*

$$u \in W^{2,p}(-1,1) \quad \forall 2 \leq p < \frac{1}{\alpha} \quad \text{und} \quad u \equiv 1 \text{ f.ü. auf } [-0.5, 0.5]. \quad (6.10)$$

Beweis. Für die Lösung $u = u_\alpha$ von (P_α) gilt trivialerweise $u \geq \psi_\alpha$ und $-u'' = f_\alpha$. Hieraus folgt

$$a(u, u - v) = \int_{-1}^1 u'(u - v)' dx = \int_{-1}^1 (-u'')(u - v) dx = (f_\alpha, u - v)_{L^2} \quad \forall v \in K.$$

Damit ist u gleich der eindeutig bestimmten Lösung des Problems (Q_α) . Die Eigenschaften in (6.10) ergeben sich nun aus Proposition 6.1.1. \square

Approximieren werden wir (Q_α) durch diskrete Hindernisprobleme der Form

$$(Q_{\alpha,h}) \quad u_h \in K_h : \quad a(u_h, u_h - v_h) \leq (f_\alpha, u_h - v_h)_{L^2} \quad \forall v_h \in K_h$$

mit

$$K_h = \{v_h \in V_h^0(-1,1) : v_h \geq \psi_\alpha\},$$

wobei wir wieder die äquidistanten Zerlegungen $\{\mathcal{T}_h\} = \{\mathcal{T}_h\}_{0 < h \leq 1}$ aus (6.3) zur Triangulierung nutzen. Das Hindernis ψ_α diskretisieren wir beim Übergang zum Finite-Elemente-Raum $V_h(-1,1)$ also nicht. Aus unserer Analysis in Kapitel 4 folgt:

Proposition 6.1.7. *In der obigen Situation hat das Problem $(Q_{\alpha,h})$ für alle $0 < h \leq 1$ eine eindeutige Lösung u_h und es existiert eine von h unabhängige Konstante $C > 0$, so dass für den Fehler zwischen u und u_h gilt*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \|u''\|_{L^2}.$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich direkt aus Korollar 4.1.4. \square

Genauso wie in unserem ersten Beispiel erhalten wir also die H^1 -Fehlerordnung $\mathcal{O}(h)$. Hier hören die Gemeinsamkeiten aber auf, wie das folgende Ergebnis zeigt:

Proposition 6.1.8. *Betrachten wir in der obigen Situation eine Schrittweite der Form $h_k = \frac{1}{2^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$, mit $h_k/2 < \tilde{x}$, dann gilt für die Näherungslösung u_{h_k} des Problems (Q_{α,h_k}) die Ungleichung*

$$u_{h_k} \geq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_k}{18} \right)^{2-\alpha} \quad \text{auf} \quad \left[-0.5 + \frac{h_k}{2}, 0.5 - \frac{h_k}{2} \right]. \quad (6.11)$$

Beweis. Da wir eine Schrittweite des Typs $h_k = \frac{1}{2^{k+1}}$ betrachten, existieren Gitterzellen $T_1 = [x_{i-1}, x_i]$ und $T_2 = [x_j, x_{j+1}]$ in \mathcal{T}_{h_k} mit

$$x_i = -0.5 + \frac{h_k}{2} \quad \text{und} \quad x_j = 0.5 - \frac{h_k}{2}.$$

Die Punkte 0.5 und -0.5 liegen also wieder mittig in einer Zelle. Da die Probleme (Q_α) und (Q_{α,h_k}) achsensymmetrisch zu $\{x = 0\}$ sind, erhalten wir, dass $u_{h_k}(x_i) = u_{h_k}(x_j)$ gelten muss. Die Funktion

$$\tilde{u}_{h_k} := \begin{cases} u_{h_k}(x_i) & \text{in } [x_i, x_j] \\ u_{h_k} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist damit ein Element der zulässigen Menge K_{h_k} und wir können analog zum letzten Abschnitt aus den Optimalitätseigenschaften der Lösung u_{h_k} folgern:

$$0 \geq a(u_{h_k}, u_{h_k}) - 2(f_\alpha, u_{h_k}) - a(\tilde{u}_{h_k}, \tilde{u}_{h_k}) + 2(f_\alpha, \tilde{u}_{h_k}) = \int_{x_i}^{x_j} \nabla u_{h_k} \cdot \nabla u_{h_k} dx. \quad (6.12)$$

Man beachte, dass auf $(-0.5, 0.5)$ die Identität $f \equiv 0$ gilt. Der Kraftterm fällt hier also tatsächlich weg.

Abschätzung (6.12) zeigt, dass u_{h_k} auf dem Intervall $[x_i, x_j]$ konstant sein muss. In der Umgebung des Gitterpunktes x_i bietet sich damit das folgende Bild:

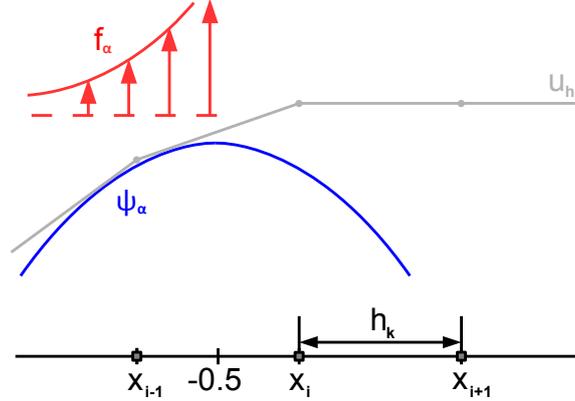


Abbildung 6.6: Die Umgebung des Gitterpunktes x_i . Analoges gilt spiegelverkehrt in x_j .

Testen wir nun in der Variationsungleichung (Q_{α, h_k}) mit der Funktion $v_{h_k} = u_{h_k} + \varphi_{h_k}^i$, wobei $\varphi_{h_k}^i$ wieder das zu x_i gehörige Element der nodalen Basis von $V_{h_k}(-1, 1)$ bezeichne, dann erhalten wir:

$$a(u_{h_k}, -\varphi_{h_k}^i) = - \int_{-1}^1 \nabla u_{h_k} \cdot \nabla \varphi_{h_k}^i dx \leq - \int_{-1}^1 f_{\alpha} \varphi_{h_k}^i dx = (f_{\alpha}, -\varphi_{h_k}^i)_{L^2}.$$

Hieraus ergibt sich mit $\text{supp } \varphi_{h_k}^i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ und der Tatsache, dass u_{h_k} auf $[x_i, x_j]$ konstant ist, die Abschätzung

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \nabla u_{h_k} \cdot \nabla \varphi_{h_k}^i dx \geq \int_{x_{i-1}}^{-0.5} f_{\alpha} \varphi_{h_k}^i dx,$$

die sich wegen $h_k/2 < \min(\tilde{x}, 0.3)$, $f_{\alpha} = -u''_{\alpha}$ und der Definitionen (6.1), (6.2) und (6.9) auch schreiben lässt als

$$\frac{u_{h_k}(x_i) - u_{h_k}(x_{i-1})}{h_k} \geq \int_{-0.5 - \frac{h_k}{2}}^{-0.5} (2 - \alpha)(1 - \alpha)(-x - 0.5)^{-\alpha} \frac{(x + 0.5 + \frac{h_k}{2})}{h_k} dx.$$

Für das Integral auf der rechten Seite dieser Ungleichung gilt

$$\int_{-0.5 - \frac{h_k}{2}}^{-0.5} (2 - \alpha)(1 - \alpha)(-x - 0.5)^{-\alpha} \frac{(x + 0.5 + \frac{h_k}{2})}{h_k} dx = \frac{1}{h_k} \left(\frac{h_k}{2} \right)^{2-\alpha}.$$

Damit erhalten wir

$$u_{h_k}(x_i) \geq u_{h_k}(x_{i-1}) + \left(\frac{h_k}{2} \right)^{2-\alpha}.$$

Der Funktionswert $u_{h_k}(x_i)$ im Knoten rechts von -0.5 ist also zwangsläufig größer als der Wert $u_{h_k}(x_{i-1})$ im Knoten links von -0.5 . Wir unterscheiden nun zwischen zwei Fällen:

- Gilt $u_{h_k}(x_{i-1}) \geq 1 - (h_k/2)^{2-\alpha}/2$, dann ergibt sich

$$u_{h_k} \equiv u_{h_k}(x_i) \geq u_{h_k}(x_{i-1}) + \left(\frac{h_k}{2} \right)^{2-\alpha} \geq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_k}{2} \right)^{2-\alpha} \quad \text{auf } [x_i, x_j].$$

In diesem Fall ist die Behauptung klar.

- Gilt $\psi_\alpha(x_{i-1}) \leq u_{h_k}(x_{i-1}) \leq 1 - (h_k/2)^{2-\alpha} / 2$, dann gilt auch $u_{h_k}(x_{i-1}) \leq T_\alpha(x_{i-1})$, wenn wir die Tangente

$$T_\alpha(x) = 1 - (\delta_\alpha h_k)^{2-\alpha} + (2 - \alpha)(\delta_\alpha h_k)^{1-\alpha}(x + 0.5 + \delta_\alpha h_k)$$

an ψ_α im Punkt $-0.5 - \delta_\alpha h$ mit

$$\delta_\alpha := \left(\frac{1}{2^{2-\alpha}(2-\alpha)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (6.13)$$

betrachten. Für diese erhalten wir nämlich

$$\begin{aligned} T_\alpha(x_{i-1}) &= T_\alpha\left(-0.5 - \frac{1}{2}h_k\right) \\ &= 1 - (\delta_\alpha h_k)^{2-\alpha} + (2 - \alpha)(\delta_\alpha h_k)^{1-\alpha} \left(\delta_\alpha h_k - \frac{1}{2}h_k \right) \\ &= 1 - h_k^{2-\alpha} \left(\frac{(2-\alpha)}{2} \delta_\alpha^{1-\alpha} - (1-\alpha)\delta_\alpha^{2-\alpha} \right) \\ &\geq 1 - h_k^{2-\alpha} \left(\frac{(2-\alpha)}{2} \delta_\alpha^{1-\alpha} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h_k}{2} \right)^{2-\alpha}. \end{aligned}$$

Man beachte hierbei, dass der Punkt $-0.5 - \delta_\alpha h$ für alle betrachteten α im Intervall $(x_{i-1}, -0.5)$ liegt, denn (6.13) impliziert

$$\frac{1}{18} < \delta_\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4-2\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \frac{1}{8} \quad \forall \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Die Situation ist damit wie folgt:

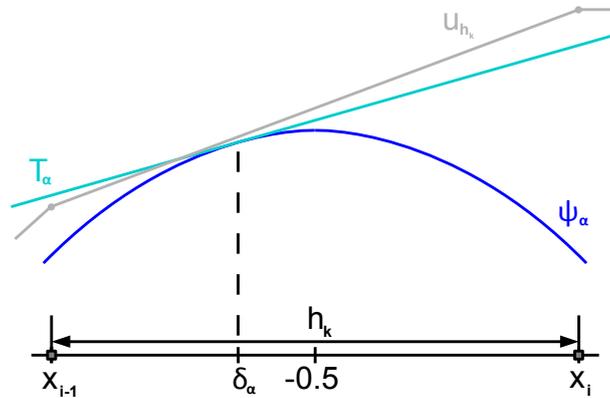


Abbildung 6.7: Die Tangente T_α

Da u_{h_k} auf $(x_{i-1}, -0.5)$ der Bedingung $\psi_\alpha \leq u_{h_k}$ genügen muss, ergibt sich nun aber für $u_{h_k}(x_i)$ die Ungleichung

$$u_{h_k}(x_i) \geq T_\alpha(x_i) = 1 + h_k^{2-\alpha} \delta_\alpha^{2-\alpha} \left(\frac{(2-\alpha)}{2\delta_\alpha} + (1-\alpha) \right) \geq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_k}{18} \right)^{2-\alpha}.$$

Dies liefert die Behauptung im zweiten Fall und schließt den Beweis ab. □

Aus Abschätzung (6.11) folgt, dass die Näherungslösungen u_{h_k} in der obigen Situation zwischen den Maxima der Funktion ψ_α so groß sind, dass für alle $1 \leq q \leq \infty$ und alle hinreichend kleinen h_k gilt

$$\|u - u_{h_k}\|_{L^q(-1,1)} \geq \|u - u_{h_k}\|_{L^q(-0.2,0.2)} = \|1 - u_{h_k}\|_{L^q(-0.2,0.2)} \geq \frac{1}{5} \left(\frac{h_k}{18}\right)^{2-\alpha}.$$

Diesmal ist es also der Fehleranteil $(u - u_h)^-$, der verhindert, dass wir die L^2 -Fehlerordnung $\mathcal{O}(h^2)$ erreichen. Der Effekt, der hierfür verantwortlich ist, ist offensichtlich: Dadurch, dass die Zellen $[x_{i-1}, x_i]$ und $[x_j, x_{j+1}]$ jeweils zur Hälfte in dem durch f_α belasteten Bereich liegen, „wippen“ die affin-linearen Segmente auf diesen Intervallen über die Maxima des Hindernisses ψ_α . Hierdurch verschieben sich die Funktionswerte in den Knoten x_i und x_j nach oben, obwohl die Kraft f_α auf diese Punkte überhaupt keinen Einfluss haben sollte. Entstehen konnte dieser Wippeffekt natürlich nur, weil wir in $(Q_{\alpha,h})$ ein Hindernis verwendet haben, dass zwischen den Knoten des Gitters gekrümmt ist. Wir halten fest:

Beobachtung 6.1.9. *Im Falle des eindimensionalen Hindernisproblems kann bei Verwendung der obigen Diskretisierungstechnik (lineare Ansatzfunktionen und $\chi = \psi$) eine allgemeine Aussage der Form:*

$$\text{Ist das Hindernis eine } W^{2,p}\text{-Funktion, dann gilt } \|u - u_h\|_{L^q} \leq Ch^\beta$$

nur richtig sein, falls der Exponent β kleiner gleich $2 - \frac{1}{p}$ ist. Verantwortlich hierfür ist die Krümmung des Hindernisses χ in den Gitterzellen $T \in \mathcal{T}_h$.

Das obige Resultat zeigt in Verbindung mit Beobachtung 6.1.5, dass man vor einem Dilemma steht, wenn man ein Problem der Form (P) durch Probleme der Form (P_h) annähern will: Um eine hohe Approximationsordnung erreichen zu können, muss man zum einen den Fehler $\|\psi - \chi\|_{L^\infty}$ minimieren, zum anderen muss man aber auch vermeiden, dass die Funktion χ auf den Gitterzellen stark gekrümmt ist, denn ansonsten treten die Wippeffekte auf, die wir im zweiten Beispiel beobachten konnten. Diese Forderungen widersprechen sich natürlich völlig, es sei denn ψ ist (abschnittsweise) affin-linear¹.

Des Weiteren machen unsere beiden Modellprobleme deutlich, dass die Schwierigkeiten, mit denen wir in Kapitel 5 bei der Verallgemeinerung des Nitsche-Tricks zu kämpfen hatten, zu recht aufgetreten sind und in der Natur des Hindernisproblems liegen. Stellen wir durch die Wahl des Hindernisses χ sicher, dass eine der Fehlerkomponenten $\|(u - u_h)^-\|_{L^2}$ und $\|(u - u_h)^+\|_{L^2}$ mit der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ gegen Null geht, dann wird die jeweils andere diese Ordnung im Allgemeinen nicht erreichen. Die Voraussetzungen in den Abschnitten 5.2 und 5.3 mussten sich also widersprechen.

Darüber hinaus haben wir in der obigen Situation wieder gesehen, wie sich lokale Effekte im Falle des Hindernisproblems global bemerkbar machen können. Wie schon in unserem ersten Beispiel ging die L^2 -Fehlerordnung $\mathcal{O}(h^2)$ nur deshalb verloren, weil das Hindernis χ an zwei Gitterpunkten suboptimal gewählt worden ist und weil sich der an diesen Punkten entstehende Fehler unvorteilhaft fortgepflanzt hat. Dies und die Tatsache, dass wir in beiden Beispielen genau die Ordnung $\mathcal{O}(h^{2-1/p})$ des L^∞ -Fehlers aus unserem Approximationssatz 2.1.5 erhalten haben, machen deutlich, dass man die L^∞ -Norm als Fehlermaß verwenden sollte, wenn man sich mit den Problemen (P) und (P_h) auseinandersetzen will. Die anderen L^q -Normen sind schließlich nicht dazu geeignet, punktweise Eigenschaften von Funktionen voll zu erfassen.

Man sollte sich im Übrigen davor hüten, anzunehmen, dass die Effekte, die wir in diesem Abschnitt betrachtet haben, nur an den Maxima des Hindernisses auftreten können. Dass die Punkte -0.5 und 0.5 Extremstellen waren, hat uns lediglich geholfen, unsere Beispiele zu konstruieren – eine tiefere Bedeutung hatten die Extremaleigenschaften nicht. Entscheidend war vielmehr, dass die Punkte ± 0.5 genau auf dem Rand der Kontaktmenge $E = \{\psi = u\}$ lagen und dass E nicht genau durch das Gitter aufgelöst wurde. Man vergleiche hierzu auch mit unserer Analysis in Abschnitt 5.3.

¹ Interessant ist hier natürlich die Frage, welche Wahl man für χ treffen muss, um den besten Kompromiss zu erhalten, und wie sich der Fehler im Falle eines solchen optimalen Hindernisses verhält.

6.2 Stabilität diskreter Hindernisprobleme

Der Schlüssel zur Herleitung scharfer a priori Fehlerabschätzungen für das Hindernisproblem liegt – wie wir im Folgenden sehen werden – in der Untersuchung der Stabilität der diskreten Probleme (P_h) . Eine solche Stabilitätsanalyse haben wir im kontinuierlichen Setting schon in Abschnitt 1.3 durchgeführt. Dort war es uns mit Hilfe des Konzepts der Superlösung möglich, herauszufinden, wie die Lösung u des Problems (P) auf Störungen der Funktionen f und ψ reagiert und wie sich der Lösungsoperator $(\psi, f) \mapsto u$ im Detail verhält. Man vergleiche hierzu mit Theorem 1.3.5. Um im Diskreten ähnlich vorgehen zu können, definieren wir vollkommen analog zum ersten Kapitel:

Definition 6.2.1. Sind Ω , f , \mathcal{T}_h und χ derart, dass die V_h -Minimalvoraussetzungen erfüllt sind, dann bezeichnen wir eine Funktion $g_h \in V_h(\Omega)$ als (diskrete) Superlösung des Problems

$$(P_h) \quad u_h \in K_h : \quad a(u_h, u_h - v_h) \leq \langle f, u_h - v_h \rangle \quad \forall v_h \in K_h$$

mit

$$K_h = \{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \chi f.ü.\},$$

falls gilt:

- $a(g_h, v_h) \leq \langle f, v_h \rangle$ für alle $v_h \in V_h^0(\Omega)$ mit $v_h \leq 0$
- $g_h \geq \chi f.ü.$
- $g_h \geq 0$ auf $\partial\Omega$

Unser Ziel wird es nun sein, eine diskrete Version von Satz 1.3.3 zu beweisen – also zu zeigen, dass für eine Superlösung g_h zwangsläufig $g_h \geq u_h$ gelten muss. Aus dieser Eigenschaft haben wir im Falle des kontinuierlichen Hindernisproblems schließlich unsere Stabilitätsresultate ableiten können. Man beachte, dass die Argumentation, die wir in Kapitel 1 zur Herleitung der Ungleichung $g \geq u$ eingesetzt haben, aus den folgenden Schritten bestand:

- Setze $v := \min(u, g)$ und zeige $v \in K$.
- Nutze die erste Superlösungs-Eigenschaft und die Variationsungleichung (P) , um zu erhalten

$$\begin{aligned} a(u, u - v) &\leq \langle f, u - v \rangle \\ a(g, v - u) &\leq \langle f, v - u \rangle. \end{aligned}$$

- Addiere die obigen Ungleichungen und folgere aus

$$0 \geq a(g - u, v - u)$$

unter Benutzung der Eigenschaften der Funktionen v und g , dass v identisch u sein muss.

Möchten wir den obigen Gedankengang im Diskreten eins zu eins imitieren, dann haben wir mit dem Problem zu kämpfen, dass die Funktion $\min(u_h, g_h)$ im Allgemeinen nicht im Raum $V_h^0(\Omega)$ enthalten ist. Sehr naheliegend ist hier natürlich, die Funktion $v_h \in V_h^0(\Omega)$ mit

$$v_h(x_i) = \min(u_h(x_i), g_h(x_i)) \quad \forall x_i \in \mathcal{C}_h$$

als Ersatz für $\min(u_h, g_h)$ zu verwenden. Doch auch dies ist nicht ohne Weiteres möglich, denn:

- Ist das Hindernis χ gekrümmt, dann kann das obige v_h die Bedingung $v_h \geq \chi$ verletzen.
- Im Falle der obigen Definition können wir nicht analog zum kontinuierlichen Setting aus

$$0 \geq a(g_h - u_h, v_h - u_h)$$

folgern, dass $v_h = u_h$ gelten muss, denn die Ableitungen von v_h haben im Allgemeinen nichts mit den Ableitungen von g_h und u_h zu tun.

Das erste dieser Probleme lässt sich – wie wir noch sehen werden – mit Hilfe unserer Resultate zur einseitigen Approximation aus Kapitel 4 beseitigen. Der zweite Punkt ist etwas diffiziler. Um hier sauber argumentieren zu können, müssen wir uns auf Triangulierungen eines bestimmten Typs – so genannte nicht positive Triangulierungen – einschränken.

Definition 6.2.2 (Nicht Positive Triangulierung). *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder, dann bezeichnen wir eine Triangulierung \mathcal{T}_h als nicht positiv, falls für die zu den Knoten $\mathcal{C}_h = \{x_i\}$ gehörige Basis $\{\varphi_h^i\}$ von $V_h(\Omega)$ gilt*

$$a(\varphi_h^i, \varphi_h^j) \leq 0 \quad \forall i \neq j \text{ mit } x_j \notin \partial\Omega. \quad (6.14)$$

Eine Triangulierung \mathcal{T}_h ist demnach genau dann nicht positiv, wenn die zugehörige Systemmatrix eine Z -Matrix ist. Man beachte, dass in der obigen Definition auch die Gitterpunkte, die auf dem Rand des Polyeders Ω liegen, relevant sind. Wir halten fest:

Lemma 6.2.3.

- Ist $d = 1$, dann ist jede Triangulierung nicht positiv.
- Ist $d = 2$, dann ist eine Triangulierung $\mathcal{T}_h = \{T\}$ genau dann nicht positiv, wenn für jede Gitterzellenkante E mit $E \not\subseteq \partial\Omega$ gilt

$$\theta_E^{T_1} + \theta_E^{T_2} \leq \pi. \quad (6.15)$$

Mit $\theta_E^{T_1}, \theta_E^{T_2} \in (0, \pi)$ bezeichnen wir hierbei die Dreieckswinkel, die der Kante E in den beiden an E angrenzenden Gitterzellen T_1 und T_2 gegenüberliegen (Siehe Abbildung 6.8 a)).

- Ist $d > 2$, dann ist eine Triangulierung $\mathcal{T}_h = \{T\}$ genau dann nicht positiv, wenn für jede Gitterzellenkante E mit $E \not\subseteq \partial\Omega$ gilt

$$\sum_{T \supset E} |\kappa_E^T| \cot \theta_E^T \geq 0.$$

Die Größen κ_E^T und θ_E^T definieren wir hierbei für jedes Simplex $T = \text{conv}(p_1, \dots, p_{d+1}) \in \mathcal{T}_h$ und jede Kante $E = \text{conv}(p_i, p_j) \subset T$ durch

$$\kappa_E^T := S_i \cap S_j \quad \text{und} \quad \theta_E^T := \angle(S_i, S_j),$$

wobei wir mit S_i und S_j die $(d - 1)$ -dimensionalen Simplexflächen

$$S_i := \text{conv}(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_{d+1})$$

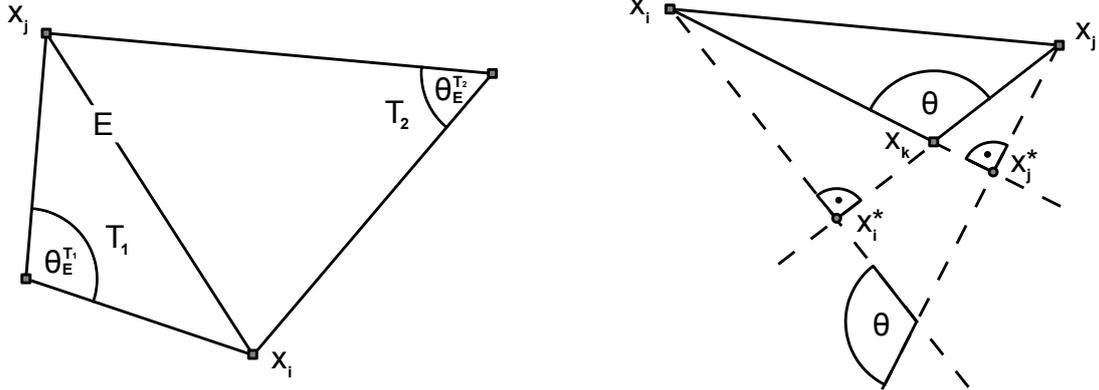
und

$$S_j := \text{conv}(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_{d+1})$$

bezeichnen und mit $\angle(S_i, S_j) \in (0, \pi)$ den Winkel, der durch die Normalenvektoren ν_i und ν_j der Flächen S_i und S_j aufgespannt wird. Man vergleiche hierzu auch mit Abbildung 6.9.

Aus dem obigen Lemma folgt insbesondere, dass im Zweidimensionalen alle schwach spitzwinkligen Triangulierungen nicht positiv sind. Der Beweis, den wir im Folgenden führen werden, basiert auf [Xu].

Beweis. Im Fall $d = 1$ ist die Behauptung trivial: Betrachten wir zwei unterschiedliche Basiselemente φ_h^i und φ_h^j , dann ist der Schnitt der Träger $\text{supp } \varphi_h^i$ und $\text{supp } \varphi_h^j$ entweder leer oder gleich einem der Intervalle $T \in \mathcal{T}_h$. Im ersten Fall gilt (6.14) mit Gleichheit, im zweiten haben die Ableitungen von φ_h^i und φ_h^j zwangsläufig verschiedene Vorzeichen und wir erhalten in (6.14) die strikte Ungleichung. Hier ist also nichts mehr zu zeigen.



(a) Die Dreiecke T_1 und T_2

(b) Die Projektionen x_i^* und x_j^*

Abbildung 6.8: Nicht-Positivität im Zweidimensionalen

Betrachten wir im Fall $d = 2$ zwei Knoten $x_i, x_j \in \mathcal{C}_h$ mit $\text{supp } \varphi_h^i \cap \text{supp } \varphi_h^j \neq \emptyset$ und $x_j \notin \partial\Omega$, dann existiert eine Kante $E = E(x_i, x_j) \not\subseteq \partial\Omega$, die x_i und x_j verbindet, und es gilt

$$a(\varphi_h^i, \varphi_h^j) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \varphi_h^i \cdot \nabla \varphi_h^j dx = \sum_{T \supset E(x_i, x_j)} \int_T \nabla \varphi_h^i \cdot \nabla \varphi_h^j dx.$$

Ist T eines der hier auftauchenden Dreiecke, dann lässt sich T mit einem passenden $x_k \in \mathcal{C}_h$ schreiben als $T = \text{conv}(x_i, x_j, x_k)$ und es existieren eindeutig bestimmte Punkte

$$x_i^* \in V_i := x_j + \mathbb{R}(x_k - x_j) \quad \text{und} \quad x_j^* \in V_j := x_i + \mathbb{R}(x_k - x_i)$$

mit

$$(x_i^* - x_i) \cdot (x - x_i^*) = 0 \quad \forall x \in V_i$$

und

$$(x_j^* - x_j) \cdot (x - x_j^*) = 0 \quad \forall x \in V_j.$$

Mit Hilfe dieser Projektionen lassen sich die Basiselemente φ_h^i und φ_h^j auf T schreiben als

$$\varphi_h^l(x) = \frac{(x - x_l^*) \cdot (x_l - x_l^*)}{\|x_l - x_l^*\|^2}, \quad l = i, j.$$

Nutzen wir dies aus, dann erhalten wir mit der Formel $|T| = \frac{1}{2} \|x_k - x_i\| \|x_j - x_j^*\|$ die Gleichung

$$\int_T \nabla \varphi_h^i \cdot \nabla \varphi_h^j dx = |T| \frac{(x_i - x_i^*)}{\|x_i - x_i^*\|^2} \cdot \frac{(x_j - x_j^*)}{\|x_j - x_j^*\|^2} = \frac{1}{2} \frac{\|x_k - x_i\|}{\|x_i - x_i^*\|} \frac{(x_i - x_i^*) \cdot (x_j - x_j^*)}{\|x_i - x_i^*\| \|x_j - x_j^*\|}. \quad (6.16)$$

Nach Konstruktion gilt aber

$$\sin \theta = \frac{\|x_i - x_i^*\|}{\|x_i - x_k\|} = \frac{\|x_j - x_j^*\|}{\|x_j - x_k\|} \quad \text{und} \quad \cos \theta = -\frac{(x_i - x_i^*) \cdot (x_j - x_j^*)}{\|x_i - x_i^*\| \|x_j - x_j^*\|},$$

wobei $\theta \in (0, \pi)$ den Winkel zwischen den Vektoren $(x_i - x_k)$ und $(x_j - x_k)$ bezeichnet – also genau den Winkel, der in (6.15) vorkommt. Setzen wir dies in (6.16) ein, dann folgt

$$\int_T \nabla \varphi_h^i \cdot \nabla \varphi_h^j dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{1}{2} \cot \theta$$

und damit

$$a(\varphi_h^i, \varphi_h^j) = -\frac{1}{2} \sum_{T \supset E} \cot \theta_E^T = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\theta_E^{T_1} + \theta_E^{T_2})}{\sin \theta_E^{T_1} \sin \theta_E^{T_2}}.$$

Dies beweist die Behauptung im Fall $d = 2$.

Im Fall $d > 2$ können wir analog zum Zweidimensionalen vorgehen: Auch hier gilt

$$a(\varphi_h^i, \varphi_h^j) = \sum_{T \supset E(x_i, x_j)} \int_T \nabla \varphi_h^i \cdot \nabla \varphi_h^j dx.$$

Ist $T = \text{conv}(p_1, \dots, p_{d+1})$ eines der in dieser Summe vorkommenden Simplexes T , dann lässt sich die Kante E darstellen² als $E = \text{conv}(p_i, p_j)$ und es existieren eindeutig bestimmte $p_i^* \in V_i$ und $p_j^* \in V_j$ mit

$$(p_i^* - p_i) \cdot (x - p_i^*) = 0 \quad \forall x \in V_i$$

und

$$(p_j^* - p_j) \cdot (x - p_j^*) = 0 \quad \forall x \in V_j.$$

Mit V_i und V_j bezeichnen wir hierbei die Hyperebenen, in denen die Flächen S_i und S_j liegen. Mit Hilfe der Punkte p_i^* und p_j^* können wir auf T wieder schreiben

$$\varphi_h^i(x) = \frac{(x - p_i^*) \cdot (p_i - p_i^*)}{\|p_i - p_i^*\|^2} \quad \text{und} \quad \varphi_h^j(x) = \frac{(x - p_j^*) \cdot (p_j - p_j^*)}{\|p_j - p_j^*\|^2}.$$

Hieraus folgt insbesondere

$$\int_T \nabla \varphi_h^i \cdot \nabla \varphi_h^j dx = |T| \frac{(p_i - p_i^*)}{\|p_i - p_i^*\|^2} \cdot \frac{(p_j - p_j^*)}{\|p_j - p_j^*\|^2}. \quad (6.17)$$

Betrachten wir nun die Projektion p_i^{**} der Ecke p_i auf die Menge $V_i \cap V_j$, also den Punkt $p_i^{**} \in V_i \cap V_j$ mit

$$(p_i^{**} - p_i) \cdot (x - p_i^{**}) = 0 \quad \forall x \in V_i \cap V_j,$$

dann stellt sich die Situation in dem affinen Unterraum $p_i^{**} + \mathbb{R}(p_i - p_i^{**}) + \mathbb{R}(p_i^* - p_i^{**})$ genauso wie im Zweidimensionalen dar und wir erhalten

$$\sin \theta_E^T = \frac{\|p_i - p_i^*\|}{\|p_i - p_i^{**}\|} \quad \text{und} \quad \cos \theta_E^T = -\frac{(p_i - p_i^*) \cdot (p_j - p_j^*)}{\|p_i - p_i^*\| \|p_j - p_j^*\|}. \quad (6.18)$$

Des Weiteren ergibt sich aus unserer Konstruktion mit der Volumenformel für Simplexes

$$|T| = \frac{1}{d} |S_j| \|p_j - p_j^*\| = \frac{1}{d(d-1)} |S_i \cap S_j| \|p_j - p_j^*\| \|p_i - p_i^{**}\|. \quad (6.19)$$

Kombinieren wir (6.17), (6.18) und (6.19), dann folgt

$$\begin{aligned} \int_T \nabla \varphi_h^i \cdot \nabla \varphi_h^j dx &= |T| \frac{-\cos \theta_E^T}{\|p_i - p_i^*\| \|p_j - p_j^*\|} \\ &= \frac{-\cos \theta_E^T}{d(d-1)} \frac{\|p_i - p_i^{**}\|}{\|p_i - p_i^*\|} |S_i \cap S_j| \\ &= \frac{-1}{d(d-1)} |\kappa_E^T| \cot \theta_E^T. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung im Mehrdimensionalen. □

Man beachte, dass wir im obigen Beweis explizite Formeln für die Terme $a(\varphi_h^i, \varphi_h^j)$ hergeleitet haben. Diese können natürlich benutzt werden, um die Systemmatrix effizient zu assemblieren.

² An dieser Stelle muss man streng genommen neue Indices k und l einführen und $E = E(x_i, x_j) = \text{conv}(p_k, p_l)$ schreiben. Um der besseren Lesbarkeit willen und da die an die Kante E angrenzenden Eckpunkte des Simplex T den Gitterpunkten x_i und x_j entsprechen, nutzen wir hier weiter i und j .

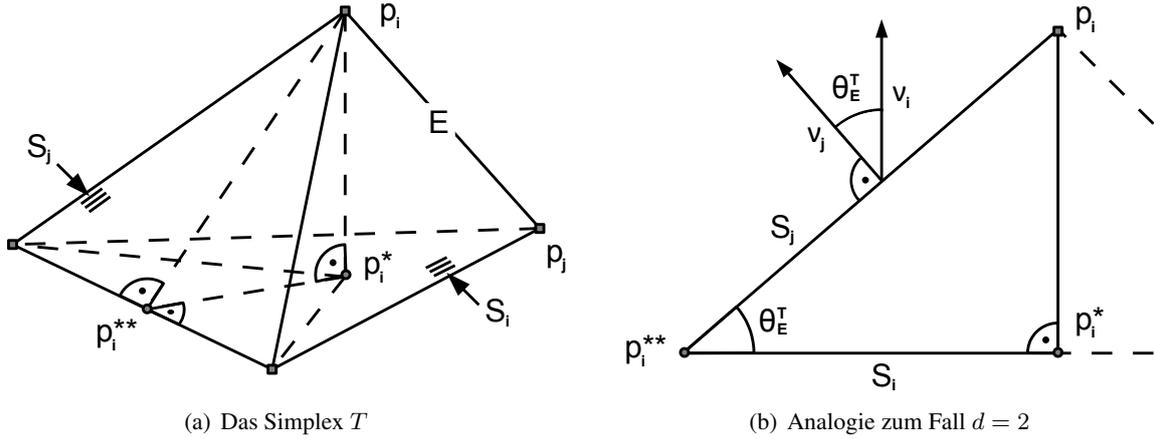


Abbildung 6.9: Die Konstruktion im Mehrdimensionalen (analog zu [Xu]).

Wir sind nun in der Position, das Folgende zu beweisen:

Theorem 6.2.4. *Es seien Ω , f , \mathcal{T}_h und χ derart, dass die V_h -Minimalvoraussetzungen erfüllt sind. Des Weiteren sei \mathcal{T}_h nicht positiv und es existiere eine Zahl $\gamma \in (0, 1]$, so dass für das Hindernis χ in (P_h) gilt*

$$\chi \in C(\bar{\Omega}) \quad \text{und} \quad \chi|_T \in C^{1,\gamma}(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Dann genügt jede Superlösung g_h des Problems (P_h) der Ungleichung

$$u_h \leq g_h + \frac{\sqrt{d}}{1+\gamma} \rho_1^{1+\gamma} h^{1+\gamma} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi|_{C^{1,\gamma}(T)}.$$

Im diskreten Setting gilt also im Allgemeinen nicht $u_h \leq g_h$. Diese Ungleichung erhalten wir nur näherungsweise mit einem Fehler, der von der Krümmung des Hindernisses χ abhängig ist und mit der Ordnung $\mathcal{O}(h^{1+\gamma})$ gegen Null geht.

Beweis. Um den Beweis aus Kapitel 1 imitieren zu können, arbeiten wir im Folgenden nicht mit dem ursprünglichen g_h sondern mit der Funktion $\tilde{g}_h := g_h + C$, wobei wir die Konstante C definieren durch

$$C := \frac{\sqrt{d}}{1+\gamma} \rho_1^{1+\gamma} h^{1+\gamma} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi|_{C^{1,\gamma}(T)}.$$

Man beachte, dass auch dieses \tilde{g}_h eine Superlösung ist, denn es gilt $\tilde{g}_h \in V_h(\Omega)$, $\tilde{g}_h \geq \chi$ in Ω , $\tilde{g}_h \geq 0$ auf $\partial\Omega$ und

$$a(\tilde{g}_h, v_h) = a(g_h + C, v_h) = a(g_h, v_h) \leq \langle f, v_h \rangle$$

für alle $v_h \in V_h^0(\Omega)$ mit $v_h \leq 0$. Betrachten wir nun die eindeutig bestimmte Funktion v_h in $V_h(\Omega)$ mit

$$v_h(x_i) = \min(u_h(x_i), \tilde{g}_h(x_i)) \quad \forall x_i \in \mathcal{C}_h,$$

dann genügt v_h trivialerweise $v_h \in V_h^0(\Omega)$ und $v_h \leq u_h$. Des Weiteren gilt für v_h im Falle der obigen Definition $v_h \geq \chi$. Dies sieht man wie folgt ein: Ist $T \in \mathcal{T}_h$ eine Gitterzelle mit Eckpunkten p_1, \dots, p_{d+1} , dann existiert nach Satz 4.3.4 eine affin-lineare Funktion χ_T auf T mit $\chi \leq \chi_T \leq u_h$ auf T und

$$0 \leq \chi_T(p_k) - \chi(p_k) \leq \frac{\sqrt{d}}{1+\gamma} \rho_1^{1+\gamma} h^{1+\gamma} |\chi|_{C^{1,\gamma}(T)} \quad \forall k = 1, \dots, d+1.$$

Hieraus folgt

$$v_h(p_k) = \min(u_h(p_k), g_h(p_k) + C) \geq \min(\chi_T(p_k), \chi(p_k) + C) \geq \chi_T(p_k) \quad \forall k = 1, \dots, d+1,$$

was auf Grund der affinen Linearität von v_h und χ_T impliziert, dass auf T die Ungleichung $v_h \geq \chi_T \geq \chi$ gilt. Damit erhalten wir $v_h \geq \chi$ auf allen Zellen T , also $v_h \geq \chi$ in Ω .

Aus der dritten Superlösungs-Eigenschaft und der Variationsungleichung (P_h) können wir nun folgern

$$a(\tilde{g}_h, v_h - u_h) \leq \langle f, v_h - u_h \rangle \quad \text{und} \quad a(u_h, u_h - v_h) \leq \langle f, u_h - v_h \rangle.$$

Addieren wir diese Ungleichungen und definieren wir $y_i := u_h(x_i) - \tilde{g}_h(x_i)$ für alle $x_i \in \mathcal{C}_h$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\geq a(u_h - \tilde{g}_h, u_h - v_h) \\ &= \sum_{x_i \in \mathcal{C}_h} y_i \max(0, y_i) a(\varphi_h^i, \varphi_h^i) + \sum_{x_i \neq x_j \in \mathcal{C}_h} y_i \max(0, y_j) a(\varphi_h^i, \varphi_h^j) \\ &= \sum_{x_i \in \mathcal{C}_h} \max(0, y_i)^2 a(\varphi_h^i, \varphi_h^i) + \sum_{x_i \neq x_j \in \mathcal{C}_h \text{ und } x_j \notin \partial\Omega} y_i \max(0, y_j) a(\varphi_h^i, \varphi_h^j). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Andererseits gilt auf Grund der Nicht-Positivität der Triangulierung \mathcal{T}_h für alle $x_i \neq x_j$ mit $x_j \notin \partial\Omega$ die Abschätzung

$$y_i \max(0, y_j) a(\varphi_h^i, \varphi_h^j) \geq \begin{cases} \max(0, y_i) \max(0, y_j) a(\varphi_h^i, \varphi_h^j) & \text{falls } y_i \geq 0 \\ \max(0, y_i) \max(0, y_j) a(\varphi_h^i, \varphi_h^j) = 0 & \text{falls } y_i < 0 \end{cases}.$$

Aus (6.20) lässt sich also folgern

$$0 \geq \sum_{x_i \in \mathcal{C}_h} \sum_{x_j \in \mathcal{C}_h} \max(0, y_i) \max(0, y_j) a(\varphi_h^i, \varphi_h^j) = a(u_h - v_h, u_h - v_h) \geq 0.$$

Damit muss $u_h - v_h$ identisch Null sein und wir erhalten

$$u_h(x_i) - v_h(x_i) = \max(0, u_h(x_i) - \tilde{g}_h(x_i)) = 0 \quad \forall x_i \in \mathcal{C}_h.$$

Nutzen wir nun wieder die abschnittsweise Linearität der V_h -Funktionen aus, dann ergibt sich

$$u_h \leq \tilde{g}_h = g_h + C = g_h + \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma} \rho_1^{1+\gamma} h^{1+\gamma} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi|_{C^{1,\gamma}(T)} \quad \text{in } \Omega.$$

Dies ist genau die Behauptung. \square

Die Stabilität des Problems (P_h) können wir jetzt vollkommen analog zum kontinuierlichen Fall untersuchen. Als diskretes Pendant zu Satz 1.3.5 erhalten wir zum Beispiel:

Theorem 6.2.5. *Es seien Ω , f_1 , f_2 , \mathcal{T}_h , χ_1 und χ_2 derart, dass die V_h -Minimalvoraussetzungen für die diskreten Hindernisprobleme*

$$(P_h^i) \quad u_h^i \in K_h^i : \quad a(u_h^i, u_h^i - v_h) \leq \langle f_i, u_h^i - v_h \rangle \quad \forall v_h \in K_h^i, \quad i = 1, 2$$

mit

$$K_h^i = \{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \chi_i \text{ f.ü.}\}, \quad i = 1, 2$$

erfüllt sind. Es gelte $\chi_1, \chi_2 \in C(\bar{\Omega})$ und die Triangulierung \mathcal{T}_h sei nicht positiv. Dann gilt:

- Gibt es ein γ_1 mit $\chi_1|_T \in C^{1,\gamma_1}(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$, dann existiert ein $C = C(d, \Omega, \rho_2)$ mit

$$\begin{aligned} &\|(u_h^1 - u_h^2)^+\|_{L^\infty} \\ &\leq \|(\chi_1 - \chi_2)^+\|_{L^\infty} + Ch^{-d/2} \|f_1 - f_2\|_{H^{-1}} + \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma_1} (\rho_1 h)^{1+\gamma_1} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi_1|_{C^{1,\gamma_1}(T)}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

- Gibt es ein γ_2 mit $\chi_2|_T \in C^{1,\gamma_2}(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$, dann existiert ein $C = C(d, \Omega, \rho_2)$ mit

$$\begin{aligned} &\|(u_h^1 - u_h^2)^-\|_{L^\infty} \\ &\leq \|(\chi_1 - \chi_2)^-\|_{L^\infty} + Ch^{-d/2} \|f_1 - f_2\|_{H^{-1}} + \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma_2} (\rho_1 h)^{1+\gamma_2} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi_2|_{C^{1,\gamma_2}(T)}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $f_1 = f_2 = f$. Definieren wir $g_h^1 := u_h^2 + \|(\chi_1 - \chi_2)^+\|_{L^\infty}$, dann gilt $g_h^1 \in V_h(\Omega)$, $g_h^1 \geq 0$ auf $\partial\Omega$ und

$$g_h^1 \geq u_h^2 + \chi_1 - \chi_2 \geq \chi_1$$

in Ω . Des Weiteren erhalten wir aus (P_h^2) , dass g_h^1 für alle $0 \geq v_h \in V_h^0(\Omega)$ der Bedingung

$$a(g_h^1, v_h) = a(u_h^2, v_h) = a(u_h^2, u_h^2 - (u_h^2 - v_h)) \leq \langle f, v_h \rangle$$

genügt. Damit ist g_h^1 eine Superlösung für das Problem (P_h^1) und es folgt aus unserem letzten Satz

$$u_h^1 \leq g_h^1 + \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma_1} \rho_1^{1+\gamma_1} h^{1+\gamma_1} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi_1|_{C^{1,\gamma_1}(T)},$$

was sich umschreiben lässt zu

$$\|(u_h^1 - u_h^2)^+\|_{L^\infty} \leq \|(\chi_1 - \chi_2)^+\|_{L^\infty} + \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma_1} \rho_1^{1+\gamma_1} h^{1+\gamma_1} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi_1|_{C^{1,\gamma_1}(T)}.$$

Dies liefert (6.21) im Fall $f_1 = f_2$. Die Abschätzung (6.22) erhalten wir vollkommen analog, wenn wir die Rollen der Lösungen u_h^1 und u_h^2 vertauschen. Nehmen wir nun an, dass $f_1 \neq f_2$ gilt, und bezeichnen wir mit $u_h^{i,j}$ die Lösung des diskreten Hindernisproblems mit dem Hindernis χ_i und der Kraft f_j , dann können wir wie im kontinuierlichen Fall aus der Lipschitz-Eigenschaft in Satz 2.2.2 und den inversen Abschätzungen in Lemma 2.1.6 folgern:

$$\begin{aligned} & \|(u_h^1 - u_h^2)^+\|_{L^\infty} \\ &= \|(u_h^{1,1} - u_h^{2,1})^+\|_{L^\infty} + \|u_h^{2,1} - u_h^{2,2}\|_{L^\infty} \\ &\leq \|(u_h^{1,1} - u_h^{2,1})^+\|_{L^\infty} + C_1 h^{-d/2} \|u_h^{2,1} - u_h^{2,2}\|_{H^1} \\ &\leq \|(\chi_1 - \chi_2)^+\|_{L^\infty} + C_2 h^{-d/2} \|f_1 - f_2\|_{H^{-1}} + \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma_1} \rho_1^{1+\gamma_1} h^{1+\gamma_1} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi_1|_{C^{1,\gamma_1}(T)}. \end{aligned}$$

Analoges gilt wieder für die Komponente $(u_h^1 - u_h^2)^-$. Dies beweist die Behauptung. \square

Wie wir in (6.21) und (6.22) sehen können, ist der Lösungsoperator

$$S_h : D_h \subset L^\infty(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow V_h^0(\Omega), \quad (\chi, f) \mapsto u_h$$

im diskreten Setting nicht Lipschitz, wenn wir gekrümmte Hindernisse zulassen. Man erhält lediglich Lipschitz-artige Abschätzungen mit Fehlertermen, die von der Gitterweite und den betrachteten Hindernissen abhängig sind. Verantwortlich hierfür sind die Wippeffekte, die wir in unserem zweiten Gegenbeispiel in Abschnitt 6.1.2 beobachten konnten. Schließen wir diese aus, indem wir uns auf Hindernisse aus $V_h(\Omega)$ einschränken, dann erhalten wir die Ungleichung

$$\|u_h^1 - u_h^2\|_{L^\infty} \leq \|\chi_1 - \chi_2\|_{L^\infty} + Ch^{-d/2} \|f_1 - f_2\|_{H^{-1}},$$

die unseren Ergebnissen im kontinuierlichen Setting eins zu eins entspricht. Man beachte, dass der hier auftauchende Faktor $h^{-d/2}$ beseitigt werden kann, wenn man auf der linken Seite die L^2 -Norm anstelle der L^∞ -Norm verwendet. Von hohem praktischen Nutzen sind die Ungleichungen (6.21) und (6.22), weil sich aus ihnen mit sehr einfachen Mittel und unter recht schwachen Voraussetzungen an das Gitter scharfe L^∞ -Fehlerabschätzungen für das Hindernisproblem ableiten lassen. Wie dies funktioniert, sehen wir im nächsten Abschnitt.

6.3 L^∞ -Fehlerabschätzungen

Der grundlegende Trick besteht im Folgenden darin, das zur Approximation des Problems (P) eingesetzte diskrete Hindernisproblem (P_h) mit einem passend gewählten Hilfsproblem (Q_h) zu vergleichen. Wie man letzteres wählen muss sehen wir in:

Lemma 6.3.1. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder mit einer Triangulierung \mathcal{T}_h , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört. Es seien f und ψ derart, dass die H^1 -Minimalvoraussetzungen für das Problem*

$$(P) \quad u \in K : \quad a(u, u - v) \leq \langle f, u - v \rangle \quad \forall v \in K$$

mit

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ f.ü.}\}$$

erfüllt sind. Des Weiteren sei $R_h u \in V_h^0(\Omega)$ die Ritz-Projektion von u , also das eindeutig bestimmte Element in $V_h^0(\Omega)$ mit

$$a(R_h u, v_h) = a(u, v_h) \quad \forall v_h \in V_h^0(\Omega).$$

Dann ist $R_h u$ auch die Lösung des diskreten Hindernisproblems

$$(Q_h) \quad u_h \in K_h : \quad a(u_h, u_h - v_h) \leq \langle f, u_h - v_h \rangle \quad \forall v_h \in K_h$$

mit

$$K_h = \{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq \psi + R_h u - u \text{ f.ü.}\}.$$

Beweis. Die Ritz-Projektion $R_h u$ genügt trivialerweise $R_h u \geq \psi + R_h u - u$, also $R_h u \in K_h$. Des Weiteren gilt für jedes $v_h \in K_h$ nach Konstruktion $u - R_h u + v_h \in K$ und damit

$$a(R_h u, R_h u - v_h) = a(u, R_h u - v_h) = a(u, u - (u - R_h u + v_h)) \leq \langle f, R_h u - v_h \rangle.$$

Dies beweist die Behauptung. □

Mit Hilfe unseres Stabilitätssatzes können wir nun die Funktionen $R_h u$ und u_h in Beziehung setzen und folgern:

Theorem 6.3.2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder mit einer Triangulierung \mathcal{T}_h , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört. Es seien f , ψ und χ derart, dass die H^1 -Minimalvoraussetzungen für das Problem (P) und die V_h -Minimalvoraussetzungen für (P_h) erfüllt sind. Die Funktionen u , ψ und χ seien stetig auf dem Abschluss von Ω und die Triangulierung \mathcal{T}_h sei nicht positiv. Dann gilt:*

- Existiert ein $\gamma_1 \in (0, 1]$ mit $\chi|_T \in C^{1,\gamma_1}(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$, dann lässt sich der Fehler $(u - u_h)^-$ abschätzen durch

$$\begin{aligned} & \| (u - u_h)^- \|_{L^\infty} \\ & \leq \| (u - R_h u)^- \|_{L^\infty} + \| (\chi - \psi + u - R_h u)^+ \|_{L^\infty} + \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma_1} (\rho_1 h)^{1+\gamma_1} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi|_{C^{1,\gamma_1}(T)}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

- Existiert ein $\gamma_2 \in (0, 1]$ mit $u, \psi \in C^{1,\gamma_2}(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$, dann lässt sich der Fehler $(u - u_h)^+$ abschätzen durch

$$\begin{aligned} & \| (u - u_h)^+ \|_{L^\infty} \\ & \leq \| (u - R_h u)^+ \|_{L^\infty} + \| (\chi - \psi + u - R_h u)^- \|_{L^\infty} + \frac{\sqrt{d}}{1 + \gamma_2} (\rho_1 h)^{1+\gamma_2} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\psi - u|_{C^{1,\gamma_2}(T)}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Beweis. Wir wenden Satz 6.2.5 auf (Q_h) und (P_h) an und benutzen die Dreiecksungleichung. □

Man beachte, dass wir in dem obigen Resultat sehr viele der Effekte wiederfinden können, denen wir in den Abschnitten 5.2, 5.3 und 6.1 begegnet sind. Erkennbar ist zum Beispiel das Folgende:

- In (6.23) sehen wir, dass die Abschätzung für die Fehlerkomponente $(u - u_h)^-$ (und nur diese!) negativ beeinflusst wird, wenn in dem Problem (P_h) ein gekrümmtes Hindernis χ verwendet wird. Dieses Verhalten passt genau zu dem, das wir in dem zweiten Gegenbeispiel beobachten konnten.
- Aus (6.23) folgt, dass die Fehlerkomponente $(u - u_h)^-$ verschwindet, wenn $\chi \in V_h(\Omega)$, $R_h u \leq u$ und $\chi + u - R_h u \leq \psi$ gilt. In diesem Fall waren wir (allem Anschein nach) in unseren numerischen Experimenten aus Abschnitt 6.1.1. Man vergleiche mit Abbildung 6.3.
- Die Abschätzung (6.24) für $(u - u_h)^+$ wird schlechter, wenn die Größe $\|(\chi - \psi)^-\|_{L^\infty}$ zunimmt. Hier spiegelt sich genau das Verhalten wider, das in Abschnitt 6.1.1 dazu geführt hat, dass wir die Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ nicht erreichen konnten.
- Das Hindernis χ so zu wählen, dass die rechten Seiten der Abschätzungen (6.23) und (6.24) nur von dem Fehler $u - R_h u$ abhängen, ist nur möglich, wenn ψ aus dem Raum $V_h(\Omega)$ stammt. Ist Letzteres nicht der Fall, dann erhalten wir unabhängig von dem verwendeten χ in mindestens einer der beiden Ungleichungen einen Störterm, der sich negativ auswirkt. Dieses Dilemma ist uns schon in Abschnitt 6.1 begegnet.
- Relevant ist in (6.23) und (6.24) nur die $C^{1,\gamma}$ -Regularität der Funktionen u , ψ und χ auf den einzelnen Gitterzellen $T \in \mathcal{T}_h$. Was entlang der Gitterkanten passiert, ist vollkommen unwichtig. Dies zeigt, dass wir den Einfluss etwaiger Irregularitäten aus unseren Abschätzungen entfernen können, indem wir das Gitter passend wählen. Erwähnenswert ist dieses Verhalten, weil es genau zu unseren Ergebnissen aus Abschnitt 5.3 passt. Dort mussten wir voraussetzen, dass der Rand der Kontaktmenge $E = \{u = \psi\}$ – der natürlich prädestiniert für Irregularitäten ist – aus Gitterpunkten besteht, um die Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ für den L^2 -Fehler $\|(u - u_h)^+\|_{L^2}$ erreichen zu können.

Um aus Satz 6.3.2 eine in der Praxis handhabbare Fehlerabschätzung ableiten zu können, müssen wir nur noch den L^∞ -Fehler zwischen u und $R_h u$ abschätzen. Dies ist – entsprechende Regularität der Funktion u vorausgesetzt – mit Standard-Resultaten über die Approximationseigenschaften der Ritz-Projektion möglich. Wir benutzen im Folgenden:

Lemma 6.3.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder mit einer quasi-uniformen Familie $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ von Triangulierungen. Es sei $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ für ein $p > d$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nicht von u und h abhängig ist, so dass für alle $h > 0$ gilt*

$$\|u - R_h u\|_{L^\infty} \leq C |\log h|^\alpha h^{2-d/p} |u|_{W^{2,p}}. \quad (6.25)$$

Der Exponent $\alpha = \alpha(d)$ genügt hierbei $\alpha = 0$ im Fall $d = 1$ und $\alpha = 1$ im Fall $d > 1$

Beweis. Wir verweisen auf [Sz1] und die dort genannten Referenzen (insbesondere [Sz2]). \square

In Kombination mit unseren Regularitätsresultaten erhalten wir nun:

Theorem 6.3.4. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Polyeder mit einer Triangulierung \mathcal{T}_h , die einer quasi-uniformen Familie \mathcal{F} angehört. Es seien Ω , f , ψ und χ derart, dass die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen für das Problem (P) mit einem $p > d$ und die V_h -Minimalvoraussetzungen für (P_h) erfüllt sind. Die Triangulierung \mathcal{T}_h sei nicht positiv, es gelte $\chi \in C(\bar{\Omega})$ und es gebe ein $\gamma \in (0, 1]$, so dass $\chi|_T \in C^{1,\gamma}(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$ gilt. Dann existiert ein $C > 0$, das nicht von u und h abhängig ist, so dass gilt*

$$\|(u - u_h)^+\|_{L^\infty} \leq \|(\psi - \chi)^+\|_{L^\infty} + C |\log h|^\alpha h^{2-d/p} (\|f\|_{L^p} + \|\psi\|_{W^{2,p}})$$

und

$$\|(u - u_h)^-\|_{L^\infty} \leq \|(\psi - \chi)^-\|_{L^\infty} + C \left(|\log h|^\alpha h^{2-d/p} (\|f\|_{L^p} + \|\psi\|_{W^{2,p}}) + h^{1+\gamma} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi|_{C^{1,\gamma}(T)} \right).$$

Beweis. Bezeichnen wir mit C eine (sich von Schritt zu Schritt verändernde) Konstante, die nicht von u und h abhängt, dann erhalten wir aus Satz 6.3.2 mit (1.16), (6.25) und der Einbettung (4.9)

$$\begin{aligned} \|(u - u_h)^+\|_{L^\infty} &\leq \|(\chi - \psi)^-\|_{L^\infty} + C\left(|\log h|^\alpha h^{2-d/p} \|u\|_{W^{2,p}} + h^{2-d/p} \|\psi - u\|_{W^{2,p}}\right) \\ &\leq \|(\psi - \chi)^+\|_{L^\infty} + C\left(|\log h|^\alpha h^{2-d/p} (\|f\|_{L^p} + \|\psi\|_{W^{2,p}}) + h^{2-d/p} \|\psi\|_{W^{2,p}}\right) \\ &\leq \|(\psi - \chi)^+\|_{L^\infty} + C|\log h|^\alpha h^{2-d/p} (\|f\|_{L^p} + \|\psi\|_{W^{2,p}}) \end{aligned} \quad (6.26)$$

und

$$\begin{aligned} \|(u - u_h)^-\|_{L^\infty} &\leq \|(\chi - \psi)^+\|_{L^\infty} + C\left(|\log h|^\alpha h^{2-d/p} \|u\|_{W^{2,p}} + h^{1+\gamma} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi|_{C^{1,\gamma}(T)}\right) \\ &\leq \|(\psi - \chi)^-\|_{L^\infty} + C\left(|\log h|^\alpha h^{2-d/p} (\|f\|_{L^p} + \|\psi\|_{W^{2,p}}) + h^{1+\gamma} \max_{T \in \mathcal{T}_h} |\chi|_{C^{1,\gamma}(T)}\right). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Dies beweist die Behauptung. \square

Man beachte, dass die Abschätzungen (6.26) und (6.27) in dem Sinne optimal sind, dass wir – zum Beispiel bei Verwendung des Hindernisses $\chi = I_h \psi$ – genau die L^∞ -Fehlerordnung erreichen, die wir auch im Falle des Poisson-Problems erhalten würden. Darüber hinaus ergibt sich aus Satz 6.3.4, dass der L^∞ -Fehler zwischen u und u_h im Eindimensionalen mit der Ordnung $\mathcal{O}(h^{2-1/p})$ gegen Null geht, wenn wir ein Hindernis χ mit $\|\psi - \chi\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(h^{2-1/p})$ und $\gamma \geq 1 - 1/p$ verwenden. Dies ist nach unseren Überlegungen in Abschnitt 6.1 genau die Ordnung, die wir im Fall $d = 1$ mit einer a priori Fehlerabschätzung der Form $\|u - u_h\|_{L^q} \leq Ch^\beta$ maximal erreichen können. Unsere Ergebnisse sind also genau so gut, wie sie im Kontext unserer Gegenbeispiele und der allgemeinen Theorie sein dürfen, und dabei nicht schlechter, als sie sein müssen.

Bewiesen wurden Fehlerabschätzungen der obigen Form zum Beispiel schon in [Ni], [Mey] und [Ba]. Dort wurde in erster Linie mit dem diskreten Maximumprinzip von Ciarlet und Raviart gearbeitet, um den L^∞ -Fehler zwischen u und u_h zu kontrollieren (siehe etwa [Ci2]). De facto haben wir dieses Prinzip auch in unserem Ansatz benutzt (und im Beweis von Satz 6.2.4 quasi „on the fly“ bewiesen) – die von uns verwendete Herangehensweise scheint jedoch einige neue Blickwinkel auf das Thema der a priori Fehlerabschätzungen für das Hindernisproblem zu eröffnen: Dadurch, dass wir in (P_h) auch gekrümmte Hindernisse χ zugelassen haben, sehen wir zum Beispiel, dass es sich bei dem Problem der L^∞ -Fehlerkontrolle im Fall des Hindernisproblems eigentlich um ein Stabilitätsproblem handelt. Der zentrale Schritt in unserer Argumentation war schließlich, zu untersuchen, in welcher Weise die Lösung u_h auf Veränderungen des Hindernisses χ reagiert. Außerdem ergibt sich aus unserer Analysis, dass interessante Zusammenhänge zwischen dem Hindernisproblem und den restringierten Approximationsaufgaben aus Kapitel 4 bestehen. Betrachten wir zum Beispiel für ein gegebenes $v \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ mit $p > d$ das Hindernisproblem (P) mit $\psi = v$ und $f = -\Delta v$ und dessen Approximation (P_h) mit $\chi = v$, dann gilt $u = v$ und wir erhalten als Lösung von (P_h) genau eine einseitige Approximation $v_h = u_h \geq v$, wie wir sie in Abschnitt 4.3 gesucht haben. Aus Satz 6.3.2 ergibt sich in diesem Fall analog zu dem Beweis von Theorem 6.3.4 mit dem Resultat über die Ritz-Projektion

$$\|v - v_h\|_{L^\infty} \leq Ch^{2-d/p} |\log h|^\alpha \|v\|_{W^{2,p}}.$$

Dies ist – modulo dem logarithmischen Faktor – genau die Fehlerabschätzung, die wir in Korollar 4.3.7 für das einseitige Approximationsproblem hergeleitet haben. Andererseits haben unsere Resultate zur restringierten Approximation eine zentrale Rolle in der Argumentation gespielt, die wir zur Herleitung von Satz 6.2.5 genutzt haben. Wir kommen also von den L^∞ -Fehlerabschätzungen für das Hindernisproblem zu den Approximationsresultaten aus Kapitel 4 und vice versa. Dies macht deutlich, wie eng der Zusammenhang zwischen der Problematik der restringierten Finite-Elemente-Approximation und dem Thema der a priori Fehleranalyse für das Hindernisproblem ist.

7 Experimente

Im folgenden Kapitel schließen wir unsere Untersuchung mit einigen numerischen Experimenten im Zweidimensionalen ab. Abschnitt 7.1 widmet sich zunächst einem Testfall, in dem Satz 6.3.4 anwendbar ist. Hier werden wir sehen, dass sich der Approximationsfehler $\|u - u_h\|_{L^\infty}$ in der Praxis genauso verhält, wie es durch die Theorie vorhergesagt wird. In Abschnitt 7.2 gehen wir dann auf die Frage ein, was passiert, wenn die verwendeten Triangulierungen die Vorzeichenbedingung (6.14) verletzen und positive Nebendiagonaleinträge in den Systemmatrizen auftreten.

7.1 Experimente mit schwach spitzwinkligen Triangulierungen

Das Modellproblem, das wir in den nächsten beiden Abschnitten betrachten werden, ist gegeben durch

$$(P_\alpha) \quad u \in K : \quad a(u, u - v) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

mit

$$K := \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi_\alpha \text{ f.ü.}\}, \quad \Omega = (-1, 1)^2$$

und

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x) = & \left(\frac{3}{2} - 4 \|x - (-0.5, -0.5)\|^{2-\alpha} \right) \phi\left(\|x - (-0.5, -0.5)\|\right) \\ & + \left(\frac{3}{2} - 4 \|x - (0.5, 0.5)\|^{2-\alpha} \right) \phi\left(\|x - (0.5, 0.5)\|\right) \\ & + \left(\frac{3}{2} - 4 \|x - (0.5, -0.5)\|^{2-\alpha} \right) \phi\left(\|x - (0.5, -0.5)\|\right) \\ & + \left(\frac{3}{2} - 4 \|x - (-0.5, 0.5)\|^{2-\alpha} \right) \phi\left(\|x - (-0.5, 0.5)\|\right) \\ & + \left(\frac{3}{2} - 4 \|x\|^{2-\alpha} \right) \phi(\|x\|) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mit ϕ bezeichnen wir hierbei wieder die Cut-Off-Funktion, die wir in (6.1) definiert haben. Man beachte, dass die $W^{2,p}$ -Minimalvoraussetzungen in der obigen Situation für alle $2 \leq p < 2/\alpha$ erfüllt sind, denn für ψ_α gilt nach Konstruktion $\psi_\alpha|_{\partial\Omega} \equiv -1/2$ und

$$\psi_\alpha \in W^{2,p}(\Omega) \quad \forall 2 \leq p < \frac{2}{\alpha}.$$

Letzteres folgt aus der Tatsache, dass die Funktion $\|x\|^{2-\alpha}$ im Zweidimensionalen für alle $2 \leq p < 2/\alpha$ in $W^{2,p}(B_1(0))$ enthalten ist. Approximieren werden wir (P_α) durch diskrete Hindernisprobleme der Form

$$(P_{\alpha,h}) \quad u_h \in K_h : \quad a(u_h, u_h - v_h) \leq 0 \quad \forall v_h \in K_h$$

mit

$$K_h = \{v_h \in V_h^0(\Omega) : v_h \geq I_h \psi_\alpha\}.$$

Als Triangulierungen verwenden wir im Folgenden genau die \mathcal{T}_h , die sich aus einer Zerlegung des Gebietes $\Omega = (-1, 1)^2$ in quadratische Zellen der Breite h ergeben, wenn man in den Quadratmittelpunkten neue Knoten einführt und die Gitterzellen anschließend in Dreiecke unterteilt. Man betrachte hierzu Abbildung 7.1.

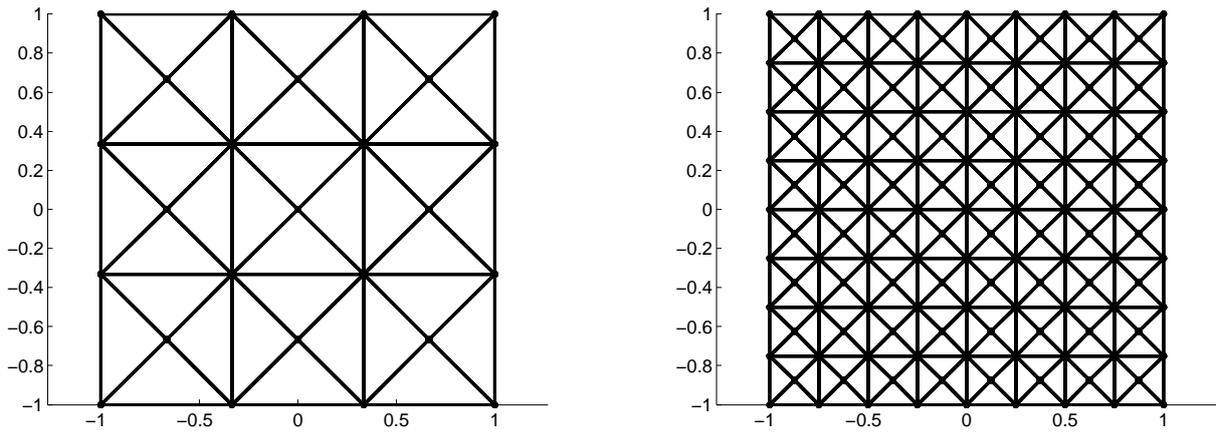


Abbildung 7.1: Das verwendete Gitter im Fall $h = 2/3$ (links) und $h = 1/4$ (rechts)

Wir halten fest:

- Eine Triangulierung \mathcal{T}_h der oben beschriebenen Bauart existiert für alle $h > 0$ mit $2/h \in \mathbb{N}$. Ergänzen wir diese Triangulierungen analog zu (6.3) zu einer Familie $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}_{0 < h \leq 2}$ mit einem kontinuierlich variierbaren h , dann ist die Familie \mathcal{F} quasi-uniform.
- Ist \mathcal{F} die Familie aus Punkt eins und $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$, dann sind alle $T \in \mathcal{T}_h$ schwach spitzwinklig. Dies bedeutet insbesondere, dass (6.15) gilt und dass \mathcal{F} aus nicht positiven Triangulierungen besteht.

Die Triangulierungen \mathcal{T}_h erfüllen damit alle Voraussetzungen von Satz 6.3.4. Wenden wir diesen auf die Probleme (P_α) und $(P_{\alpha,h})$ an, dann erhalten wir, dass der Fehler zwischen den Lösungen u und u_h für alle $2 < p < 2/\alpha$ einer Abschätzung der Form

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq C |\log h| h^{2-2/p} \|\psi_\alpha\|_{W^{2,p}} \quad (7.1)$$

genügen sollte. Dass (7.1) tatsächlich gilt, ist in den Abbildungen 7.3 und 7.4 im Fall $\alpha = 0.9$ zu sehen. Dort zeigen unsere numerischen Ergebnisse deutlich, dass der L^∞ -Fehler zwischen den Lösungen $u_{h_{k+1}}$ und u_{h_k} zu den Gitterweiten $h_{k+1} = 2/(k+1)$ und $h_k = 2/k$, $k \in \mathbb{N}$, etwa mit der Ordnung $2 - \alpha$ gegen Null geht. Dies passt genau zu dem durch (7.1) vorhergesagten Verhalten

$$\|u_{h_{k+1}} - u_{h_k}\|_{L^\infty} \leq \|u - u_{h_{k+1}}\|_{L^\infty} + \|u - u_{h_k}\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(|\log h_k| h_k^{2-2/p}) \quad \forall p < \frac{2}{\alpha}.$$

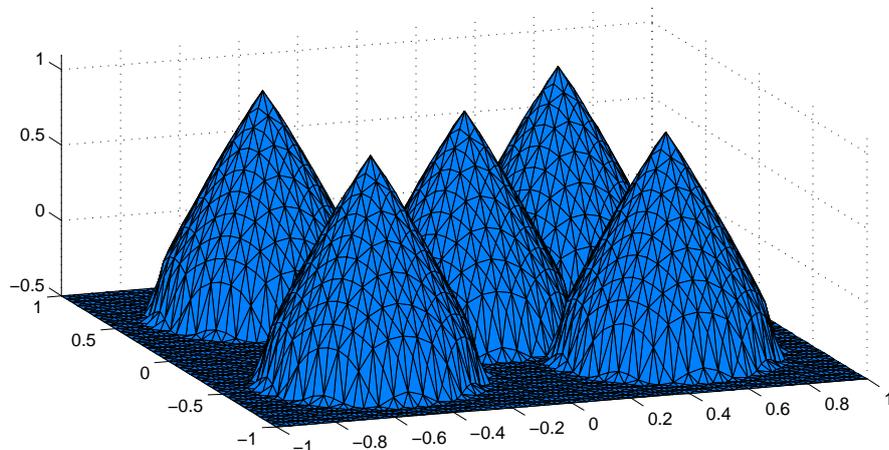


Abbildung 7.2: Das Hindernis ψ_α im Fall $\alpha = 0.9$

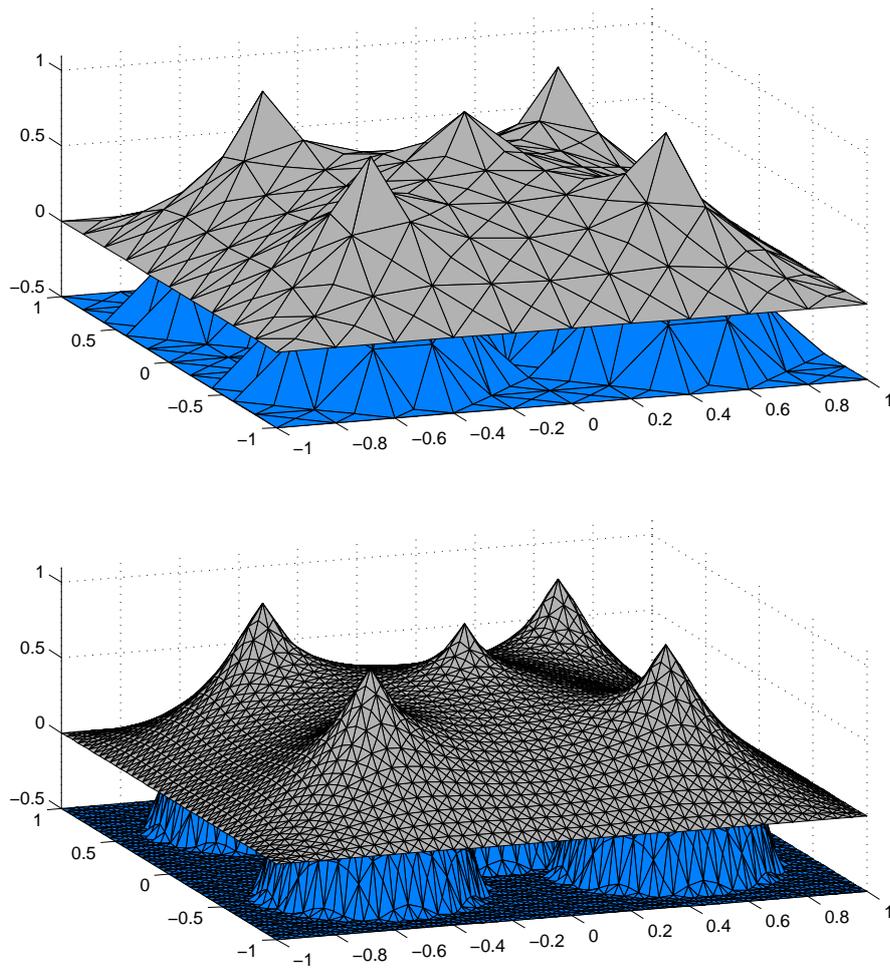
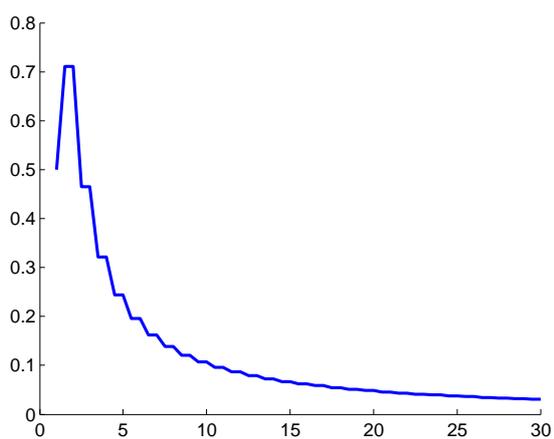
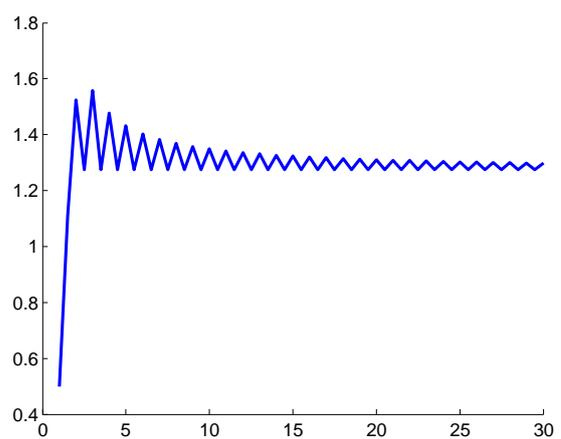


Abbildung 7.3: Ergebnisse im Fall $\alpha = 0.9$ zu den Schrittweiten $h = 1/5$ (oben) und $h = 1/20$ (unten).



(a) $\|u_{h_{k+1}} - u_{h_k}\|_{L^\infty}$ aufgetragen über $1/h$



(b) $h_k^{-1.1} \|u_{h_{k+1}} - u_{h_k}\|_{L^\infty}$ aufgetragen über $1/h$

Abbildung 7.4: Verhalten des L^∞ -Fehlers zwischen den Lösungen $u_{h_{k+1}}$ und u_{h_k} im Fall $\alpha = 0.9$.

Benutzt wurde hier wieder der in der Matlab Optimization Toolbox implementierte Active-Set-Algorithmus.

Die Vorhersagen, die sich aus unseren theoretischen Überlegungen ergeben haben, lassen sich also auch durch numerische Experimente bestätigen. Sehr interessant ist nun natürlich die Frage, was passiert, wenn wir von den Voraussetzungen abweichen, die wir zur Herleitung unserer Fehlerabschätzungen benötigt haben. Beschäftigen werden wir uns im Folgenden insbesondere mit der Nicht-Positivitäts-Bedingung (6.14). Diese nimmt eine Sonderrolle unter den Annahmen ein, mit denen wir in den letzten Kapiteln gearbeitet haben, denn sie ist nur dann erforderlich, wenn das Hindernis nicht vernachlässigbar ist. Im Falle des Poisson-Problems ist die Quasi-Uniformität der Gitterfamilie $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ schließlich ausreichend, um Abschätzungen für den L^∞ -Fehler zu erhalten (siehe Lemma 6.3.3).

7.2 Einfluss positiver Nebendiagonalelemente

Um zu untersuchen, welche Relevanz die Voraussetzung (6.14) hat, betrachten wir im Folgenden wieder die Probleme (P_α) und $(P_{\alpha,h})$. Diesmal wählen wir die zugrunde liegenden Triangulierungen \mathcal{T}_h aber genau so, dass die Bedingung $\theta_E^{T_1} + \theta_E^{T_2} \leq \pi$ aus Lemma 6.2.3 verletzt wird. Konstruieren lassen sich solche „schlechten“ \mathcal{T}_h vollkommen analog zum letzten Abschnitt, wenn man nicht von einem Gitter mit quadratischen Zellen ausgeht, sondern von einem Rechtecksgitter, dessen Zellen die Breite h_x und die Höhe h_y haben. Einige Beispiele hierzu sind in den Abbildungen 7.5, 7.6, 7.7, 7.8 und 7.9 zu sehen. Bezeichnen werden wir eine Triangulierung, die sich aus einem Rechtecksgitter mit den Gitterweiten h_x und h_y ergibt, mit \mathcal{T}_{h_x, h_y} . Des Weiteren definieren wir:

$$\mathcal{F}_\delta = \left\{ \mathcal{T}_{h_x, h_y} : \frac{h_y}{h_x} = \delta \right\}.$$

Man beachte, dass für die Mengen \mathcal{F}_δ das Folgende gilt:

- \mathcal{F}_δ ist nicht leer für alle $0 < \delta \in \mathbb{Q}$ (denn für alle $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{T}_{2/k_1, 2/k_2}$ wohldefiniert).
- Ist \mathcal{T}_{h_x, h_y} in \mathcal{F}_δ , dann gilt

$$\max\{\text{diam } T : T \in \mathcal{T}_{h_x, h_y}\} \leq \begin{cases} h_x & \text{falls } 0 < \delta \leq 1 \\ h_y & \text{falls } \delta > 1 \end{cases}.$$

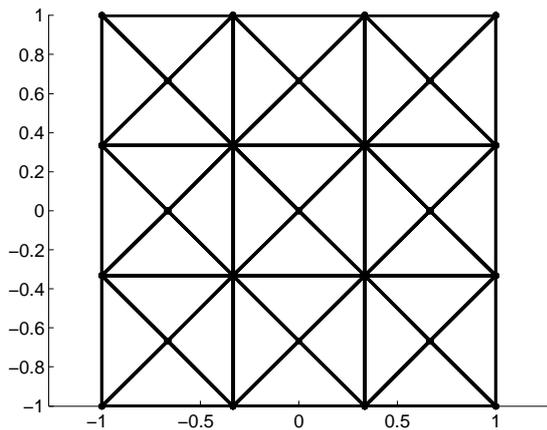
Die rechte Seite dieser Ungleichung werden wir im Folgenden immer mit dem Laufindex h der Familie \mathcal{F}_δ identifizieren.

- Jedes \mathcal{F}_δ ist quasi-uniform, wenn es analog zu (6.3) zu einer Gitterfamilie mit einem kontinuierlich variierbaren h ergänzt wird (denn die vorkommenden Dreiecke sind ähnlich).
- Ist $\delta \neq 1$, dann verletzt jedes $\mathcal{T}_{h_x, h_y} \in \mathcal{F}_\delta$ die Bedingung (6.14) (denn in diesem Fall existieren immer Gitterkanten, an denen zwei stumpfwinklige Dreiecke liegen).

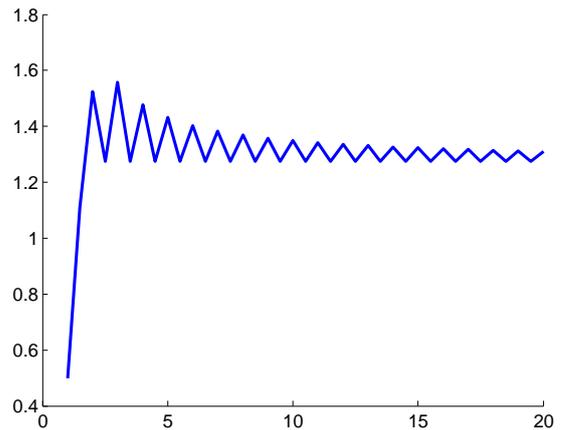
Ist $\delta = 1$, dann erhalten wir natürlich genau denselben Testfall wie im letzten Abschnitt. Man beachte, dass wir uns auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Hindernisses ψ_α im Folgenden ohne Verlust auf die Fälle mit $\delta \leq 1$ und $h = h_x$ einschränken können. Die numerischen Ergebnisse, die wir in der obigen Situation für die Werte $\delta = 1, \delta = 1/2, \delta = 1/3, \delta = 1/4$ und $\delta = 1/5$ erzielt haben, sind in den Abbildungen 7.5 bis 7.9 zu sehen. Gemessen wurde dort wieder der L^∞ -Fehler zwischen den Lösungen $u_{h_{k+1}}$ und u_{h_k} zu den Schrittweiten

$$h_{k+1} = h_{x, k+1} = \frac{2}{k+1} \quad \text{und} \quad h_k = h_{x, k} = \frac{2}{k}.$$

Als α haben wir erneut den Wert 0.9 verwendet.

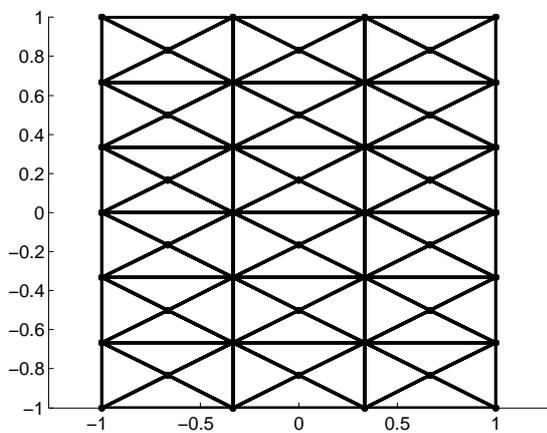


(a) Das Gitter mit $h = h_x = 2/3$

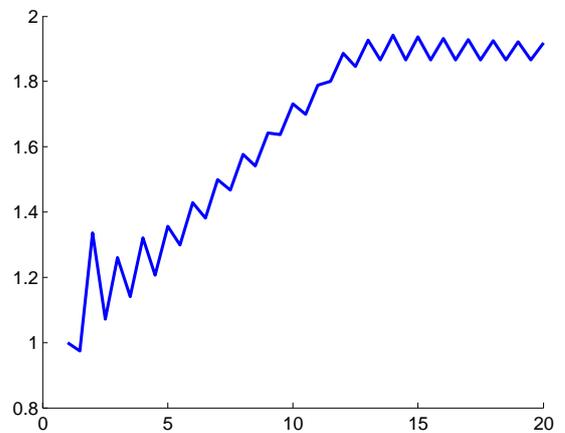


(b) $h_k^{-1.1} \|u_{h_{k+1}} - u_{h_k}\|_{L^\infty}$ aufgetragen über $1/h$

Abbildung 7.5: Der Fall $\delta = 1$

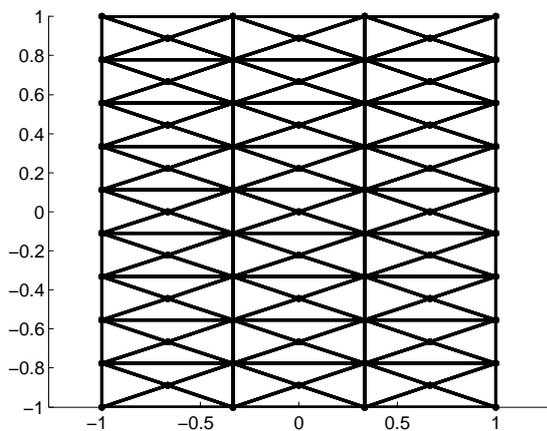


(a) Das Gitter mit $h = h_x = 2/3$

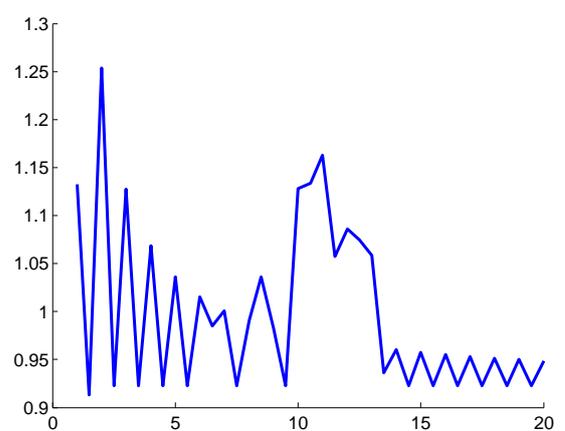


(b) $h_k^{-1.1} \|u_{h_{k+1}} - u_{h_k}\|_{L^\infty}$ aufgetragen über $1/h$

Abbildung 7.6: Der Fall $\delta = 1/2$



(a) Das Gitter mit $h = h_x = 2/3$



(b) $h_k^{-1.1} \|u_{h_{k+1}} - u_{h_k}\|_{L^\infty}$ aufgetragen über $1/h$

Abbildung 7.7: Der Fall $\delta = 1/3$

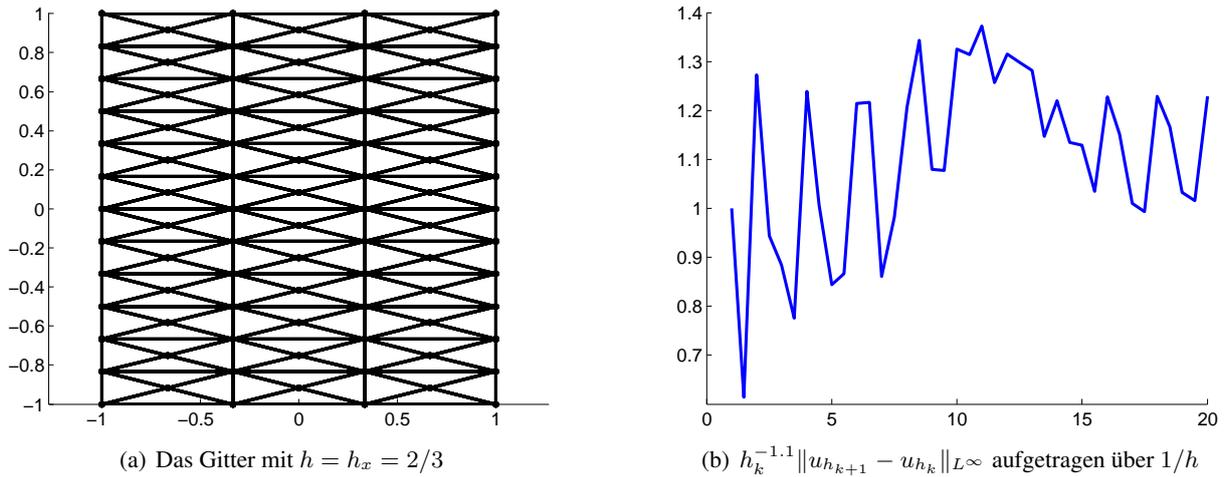


Abbildung 7.8: Der Fall $\delta = 1/4$

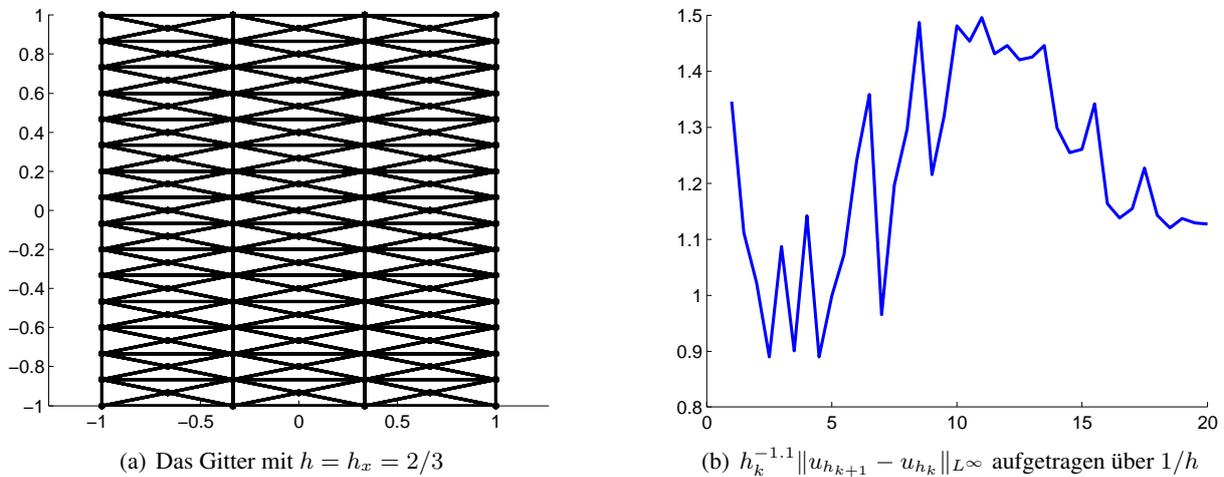


Abbildung 7.9: Der Fall $\delta = 1/5$

Wie wir in den Abbildungen 7.6, 7.7, 7.8 und 7.9 sehen können, scheint der L^∞ -Fehler auch in den Fällen, in denen die Vorzeichen-Bedingung (6.14) nicht erfüllt ist, mit der Ordnung $1.1 = 2 - \alpha$ gegen Null zu gehen. Das Konvergenzverhalten ist hier allerdings weitaus unregelmäßiger als bei der Verwendung der schwach-spitzwinkligen Triangulierungen, die wir in Abschnitt 7.1 benutzt haben. Die entscheidende Frage ist an dieser Stelle, ob die in den Fällen $\delta = 1/2$, $\delta = 1/3$, $\delta = 1/4$ und $\delta = 1/5$ auftretenden Effekte darauf zurückzuführen sind, dass die diskreten Hindernisprobleme $(P_{\alpha,h})$ auf Grund der in den Systemmatrizen auftretenden positiven Nebendiagonalelemente instabil werden, oder ob sich der Fehler nur deshalb irregulär verhält, weil sich die Approximationseigenschaften der Finite-Elemente-Räume $V_h(\Omega)$ verschlechtern, wenn der Parameter δ gegen Null geht. Ersteres würde bedeuten, dass die Forderung (6.14) nicht ohne Probleme fallen gelassen werden kann, wenn man die Fehlerabschätzungen aus Satz 6.3.4 erhalten will. Im zweiten Fall wäre es naheliegend, dass man die Nicht-Positivität der Triangulierungen eigentlich nicht voraussetzen muss. Welche dieser beiden Erklärungen die richtige ist, können wir in dieser Arbeit leider nicht klären. Es sei hier aber bemerkt, dass die Ergebnisse, die in [Dr] von Draganescu et alii erzielt wurden, darauf hindeuten, dass die Voraussetzung (6.14) abgeschwächt werden kann. Die dort angestellten Überlegungen weisen darauf hin, dass es genügt, die Bedingungen aus Lemma 6.2.3 in den Gitterzellen zu erfüllen, die in der Nähe der Mengen $E = \{u = \psi\}$ und $\partial\Omega$ liegen, um das diskrete Maximumprinzip von Ciarlet und Raviart anwenden und die L^∞ -Fehlerabschätzung aus Satz 6.3.4 herleiten zu können. Belastbare Ergebnisse scheint es hierzu jedoch noch nicht zu geben.

Fazit

Wie wir in dieser Arbeit gesehen haben, verändern sich die Approximationseigenschaften der Näherungslösungen $u_h \in V_h^0(\Omega)$, die man mit der Methode der finiten Elemente erhält, erheblich, wenn man vom Poisson- zum Hindernisproblem übergeht. Zwar erreicht man in beiden Fällen die H^1 -Ordnung $\mathcal{O}(h)$ (siehe Satz 3.2.1 und Korollar 3.2.2), sobald eine der L^p -Normen als Fehlermaß verwendet wird, tritt aber deutlich zu Tage, dass die in den Problemen (P) und (P_h) vorkommenden Nebenbedingungen den Fehler zwischen der exakten Lösung u und den Näherungen u_h negativ beeinflussen. Wie diese Verschlechterung des Konvergenzverhaltens zustande kommt, haben wir in Abschnitt 6.1 beobachten können: Das grundlegende Problem ist einfach, dass sich lokal auftretende Effekte im Falle eines kontinuierlichen oder diskreten Hindernisproblems global auswirken können, wenn die Lösungen u und u_h passend mit den Hindernissen ψ und χ interagieren. Dies verhindert, dass der L^2 -Fehler analog zum Poisson-Problem mit der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ gegen Null geht, und führt dazu, dass man mit einer a priori Fehlerabschätzung der Form $\|u - u_h\|_{L^q} \leq Ch^\beta$ im Allgemeinen nicht über die Ordnung $\mathcal{O}(h^{2-d/p})$ des L^∞ -Fehlers aus dem Approximationssatz 2.1.5 hinauskommen kann.

Dass die Gegenbeispiele, die wir in Abschnitt 6.1 betrachtet haben, dem Worst-Case entsprechen, haben wir in Kapitel 6 gesehen. Dort war es uns mit Hilfe des Konzeptes der diskreten Superlösung und unter Benutzung unserer Resultate zur einseitigen Finite-Elemente-Approximation möglich, zu zeigen, dass die Ordnung $\mathcal{O}(h^{2-d/p})$ in der L^∞ -Norm – zumindest bis auf einen logarithmischen Faktor – immer erreicht wird, wenn die Lösung u in $W^{2,p}(\Omega)$ ist und die verwendeten Triangulierungen der Bedingung (6.14) genügen. Hier ist auch deutlich geworden, dass man eigentlich ein Stabilitätsproblem löst, wenn man sich mit a priori Fehlerabschätzungen für das Problem (P) beschäftigt.

Alle Fragen, die sich im Kontext der Fehleranalyse für das Hindernisproblem ergeben, konnten wir in dieser Arbeit natürlich nicht beantworten. Offen sind zum Beispiel noch die folgenden Punkte:

- Wie weit kann die Nicht-Positivitäts-Bedingung (6.14) abgeschwächt werden, ohne dass Satz 6.2.4 seine Gültigkeit verliert? Hier müsste man auch noch einige Beispiele konstruieren, aus denen hervorgeht, wie positive Nebendiagonalelemente in den Systemmatrizen die Stabilität der diskreten Hindernisprobleme (P_h) beeinflussen.
- Ist es im Höherdimensionalen eventuell doch möglich, in einer der L^q -Normen eine bessere Fehlerordnung als $2 - d/p$ zu erreichen, oder lassen sich auch im Fall $d > 1$ Gegenbeispiele konstruieren, in denen sich der L^∞ -Fehler zwischen den Hindernissen ψ und χ in den L^q -Fehler zwischen u und u_h fortpflanzt. Dies ist ein sehr interessantes Thema, denn möchte man im Mehrdimensionalen genauso vorgehen, wie wir es in Abschnitt 6.1 getan haben, dann muss man sich zum Beispiel mit der Frage beschäftigen, welche Hausdorff-Dimension die Menge haben muss, auf der das Maximum des Hindernisses ψ bei der Diskretisierung verloren geht, damit der Fehler $(u - u_h)^+$ in den L^q -Normen spürbar beeinflusst wird.
- Gilt Ungleichung (4.19)?

Darüber hinaus ist natürlich sehr interessant, welche Ergebnisse erzielt werden können, wenn andere Variationsungleichungen – zum Beispiel das biharmonische Hindernisproblem – betrachtet werden, und wie sich der Approximationsfehler $\|u - u_h\|_{L^q}$ verhält, wenn man zur Diskretisierung finite Elemente einer höheren Ordnung nutzt. Konkrete Resultate zu diesen Fragen scheint es in der gängigen Literatur noch nicht zu geben. Hier ist noch einiges zu tun.

Literaturverzeichnis

- [Ad] Adams, R.A.: *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975
- [Ba] Baiocchi, C.: *Estimation d'erreur dans L^∞ pour les inéquations à obstacle*, Mathematical Aspects of Finite Element Methods, Lecture Notes in Mathematics, 606, 27-34, 1977
- [Br] Brenner, S.C., und L.R. Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 3. Auflage, Springer-Verlag, New York, 2008
- [Ci1] Ciarlet, P.G.: *Lectures on the Finite Element Method*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1975
- [Ci2] Ciarlet, P.G.: *Discrete Maximum Principle for Finite-Difference Operators*, Aequationes Mathematicae, 4, 338-352, 1970
- [Da] Dauge, M.: *Neumann and Mixed Problems on Curvilinear Polyhedra*, Integral Equations and Operator Theory, 15, 227-261, 1992
- [Dr] Drăganescu, A., T.F. Dupont und L.R. Scott: *Failure of the Discrete Maximum Principle for an Elliptic Finite Element Problem*, Mathematics of Computation, 74, 1-23, 2005
- [Ev] Evans, L.C.: *Partial Differential Equations*, 2. Auflage, AMS, Providence, RI, 2010
- [Fa] Falk, R.S.: *Error Estimates for the Approximation of a Class of Variational Inequalities*, Mathematics of Computation, 28, 963-971, 1974
- [Gil] Gilbart, D., und N.S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Nachdruck der Edition von 1998, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2001
- [Glo] Glowinski, R.: *Lectures on Numerical Methods for Non-Linear Variational Problems*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1980
- [Gr1] Grisvard, P.: *Singularities in Boundary Value Problems*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1992
- [Gr2] Grisvard, P.: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, London, 1985
- [Ki] Kinderlehrer, D., und G. Stampacchia: *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, SIAM, Philadelphia, 2000
- [Mey] Meyer, C., und O. Thoma: *A Priori Finite Element Error Analysis for Optimal Control of the Obstacle Problem*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 51, 605-628, 2013
- [Mo1] Mosco, U., und G. Strang: *One-Sided Approximation and Variational Inequalities*, Bulletin of the American Mathematical Society, 80, 308-312, 1974
- [Mo2] Mosco, U.: *Error Estimates for some Variational Inequalities*, Mathematical Aspects of Finite Element Methods, Lecture Notes in Mathematics, 606, 224-236, 1977
- [Na] Natterer, F.: *Optimale L^2 -Konvergenz Finiter Elemente bei Variationsungleichungen*, Bonner Mathematische Schriften, 89, 1-12, 1976

- [Ni] Nitsche, J.: *L[∞]-Convergence of Finite Element Approximations*, Mathematical Aspects of Finite Element Methods, Lecture Notes in Mathematics, 606, 261-274, 1977
- [Ro] Rodrigues, J.F.: *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, North-Holland, Amsterdam, 1987
- [Sch] Schweizer, B.: *Partielle Differentialgleichungen - Eine Anwendungsorientierte Einführung*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2013
- [Sco] Scott, L.R., und S. Zhang: *Finite Element Interpolation of Non-Smooth Functions Satisfying Boundary Conditions*, Mathematics of Computation, 54, 483-493, 1990
- [Str] Strang, G.: *One-Sided Approximation and Plate Bending*, Computing Methods in Applied Sciences and Engineering Part 1, Lecture Notes in Computer Science, 10, 140-155, 1974
- [Sz1] Schatz, A.H.: *Pointwise Error Estimates and Asymptotic Error Expansion Inequalities for the Finite Element Method on Irregular Grids*, Mathematics of Computation, 67, 877-899, 1998
- [Sz2] Schatz, A.H., und L.B. Wahlbin: *On the Quasi-Optimality in L[∞] of the H₀¹-Projection into Finite Element Spaces*, Mathematics of Computation, 38, 1-22, 1982
- [Su] Suttmeier, F.T.: *Numerical Solution of Variational Inequalities by Adaptive Finite Elements*, Vieweg und Teubner, Wiesbaden, 2008
- [Xu] Xu, J., und L. Zikatanov: *A Monotone Finite Element Scheme for Convection Diffusion Equations*, Mathematics of Computation, 68, 1429-1446, 1999

Symbolverzeichnis

$W^{2,p}(\Omega)$	Siehe Abschnitt 1.1
$H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$	Siehe Abschnitt 1.1
$H^{-1}(\Omega)$	Siehe Abschnitt 1.1
$C^m(\bar{\Omega})$	Siehe Abschnitt 4.2
$C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$	Siehe Abschnitt 4.2
tr	Spuroperator
f	Kraftterm
ψ	Hindernis im kontinuierlichen Hindernisproblem (P)
u	Lösung des kontinuierlichen Hindernisproblems (P)
K	Zulässige Menge des kontinuierlichen Hindernisproblems (P)
g	Superlösung für das kontinuierliche Hindernisproblem (P)
$\mathcal{T}, \mathcal{T}_h$	Triangulierung (siehe Definition 2.1.1)
$\mathcal{C}, \mathcal{C}_h$	Menge der Knoten einer Triangulierung
\mathcal{F}	(Quasi-uniforme) Familie von Triangulierungen
$V_h(\Omega), V_h^0(\Omega)$	Siehe Definition 2.1.3
I_h	Lagrange-Interpolationsoperator
Π_h	Approximationsoperator aus Satz 2.1.5
χ	Hindernis im diskreten Hindernisproblem (P_h)
u_h	Lösung des diskreten Hindernisproblems (P_h)
K_h	Zulässige Menge des diskreten Hindernisproblems (P_h)
g_h	Diskrete Superlösung für das diskrete Hindernisproblem (P_h)