Emese VARGYAS, Mainz

Mathematisches Entdecken am Beispiel der Wechselwegnahme

Motivation

Die Forderung, für Schülerinnen und Schüler erfahrbar zu machen, „dass sich die Bedeutung der Mathematik als Wissenschaft nicht auf den Anwendungsbezug reduzieren lässt“, hat Einzug auch in die rheinland-pfälzischen Lehrpläne gefunden. Gleichzeitig soll die Beschäftigung mit Mathematik als Tätigkeit erlebt werden, „die um ihrer selbst willen betrieben wird und Freude bereiten kann“ (vgl. MfBWW-RLP). Da diese Ziele in den Lehrplänen relativ allgemein formuliert sind, stellt sich die Frage nach der konkreten Umsetzung. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Möglichkeit aufzuzeigen, wie ein Mathematikunterricht in diesem Sinne zu einer gymnasialen Bildung beitragen könnte. Den Anstoß dafür hat die Veranstaltung „Didaktik der Algebra“ an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz gegeben. Die Studierenden (angehende Gymnasiallehrer) waren im Rahmen dieser Veranstaltung mit dem klassischen Beweis der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale in einem Quadrat konfrontiert.

Dieser Beweis durch Wechselwegnahme wurde in der Literatur von vielen Autoren unter verschiedenen Aspekten beschrieben. So findet man dazu zum Beispiel bei Toeplitz (1949) eine kurze historische Exkursion. Ausgehend von der Frage „In welchem Längenverhältnis ist eine Figur ähnlich zu vergrößern, damit ihre Fläche verdoppelt werde?“, weist A. I. Wittenberg in seinem Buch „Bildung und Mathematik“ auf eine mögliche Behandlung der oben genannten Inkommensurabilität im gymnasialen Mathematikunterricht hin. Spies (2012) geht in ihrer Arbeit vom ästhetischen Standpunkt an dieses Thema heran. Eine Skizze des Beweises ist noch in manchen Lehrbüchern für die neunte Klasse zu finden (z.B. Schmid & Weidig), auch wenn nur am Rande des Kapitels zur Einführung der reellen Zahlen. Abbildung 1 fasst diesen Beweis kurz zusammen:

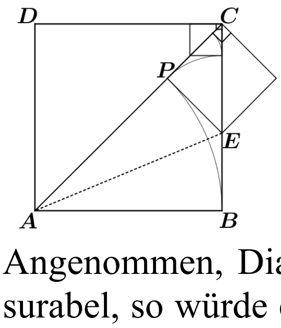

Abb. 1: Diagonale und Seite eines Quadrates sind inkommensurabel

Angenommen, Diagonale und Seite des Quadrates ABCD wären kommensurabel, so würde ein gemeinsames Maß m existieren, so dass $s_1 = |AB| = m \cdot k_1$, $d_1 = |AC| = m \cdot l_1$, wobei $k_1, l_1 \in N$. Da laut Konstruktion $s_2 = |CP| = d_1 - s_1 = m(l_1 - k_1) = m \cdot k_2$ und $d_2 = |CE| = s_1 - s_2 = 2s_1 - d_1 = m \cdot (2k_1 - l_1) = m \cdot l_2$, wobei $k_2, l_2 \in N$, folgt, dass auch im

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

zweiten Quadrat Seite und Diagonale mit demselben Maß m messbar sind. Da man diese Argumentation unendlich weiter fortsetzen kann, werden die entstehenden Quadrate beliebig klein. Dadurch kann man zu jedem gemeinsamen Maß m ein Quadrat finden, dessen Seite und Diagonale kleiner sind als dieses. Das bedeutet: m kann kein gemeinsames Maß von Seite und Diagonale im ursprünglichen Quadrat sein.

Nach einer entsprechenden Vorbereitung (Euklidischer Algorithmus, gemeinsames Maß zweier Strecken, kommensurable Strecken) hat es den meisten Studierenden keine Probleme verursacht, den Beweis nachzuvollziehen. Schwierigkeiten sind aber bei der Übertragung der Beweisidee auf andere Fälle aufgetreten. Unklar war auch, warum man gerade das Lot in P auf AC oder die Winkelhalbierende AE des Winkels $\widehat{BAC}$ einzeichnen sollte, wie es die meisten Quellen suggerieren. Abbildung 2 zeigt, wie man mittels Faltens auf die Idee des Lotes PE oder der Winkelhalbierenden AE kommen könnte. Durch Wiederholung des Schrittes „trage auf der längeren Strecke die kürzere ab“ gelangt man dann zur Abbildung 2.

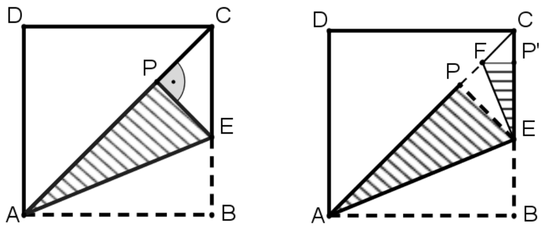

Abb. 2: Falten eines Quadrates

Irrationalität von $\sqrt{3}$

Nachdem dieser Beweis hinreichend durchleuchtet wurde, stellte sich die Frage, inwiefern die Methode auch auf andere Fälle übertragbar ist.

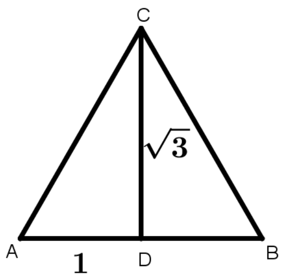

Abb. 3: Wurzel 3

Möchte man die Frage für $\sqrt{3}$ beantworten, so bietet sich als mögliche Ausgangsfigur das gleichseitige Dreieck ABC mit Seitenlänge 2 (cm) an. Wie aus Abbildung 3 ersichtlich, ist die Irrationalität von $\sqrt{3}$ äquivalent zur Inkommensurabilität der Strecken AD und CD.

Wenn man das Dreieck gemäß Abbildung 4 faltet und versucht, zu der ursprünglichen Figur (d.h. dem gleichseitigen Dreieck) ähnliche Figuren zu erstellen, gelangt man zu folgenden Beweisideen (Abbildung 5):

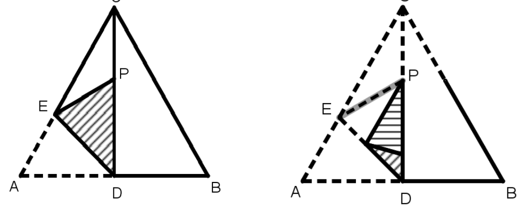

Abb. 4: Falten eines Dreiecks

Schlägt man einen Kreis um Punkt D mit Radius $|AD|$, so schneidet dieser die Höhe CD im Punkt E. Die Differenz $|CD| - |AD|$ lässt sich entweder auf der Strecke ED (links: Kreis um E mit Radius $|EC| = |EF| = \sqrt{3} - 1$) oder auf AD (rechts: Parallele zu BC durch F) abtragen. Mittels der übrig gebliebenen Strecke A_1D bildet man das gleichseitige Dreieck $A_1B_1C_1$. Sei $|AD| = b = 1$ und $|CD| = a = \sqrt{3}$. Dann folgt aus der Konstruktion, dass $|A_1D| = 2b - a$ und $|C_1D| = 2a - 3b$. Angenommen, im ursprünglichen Dreieck ABC wären die Strecken a und b mit einem gemeinsamen Maß m messbar, so wären auch im neuen Dreieck $A_1B_1C_1$ Höhe und Hälfte der Seitenlänge mit demselben Maß m messbar. Da man die Konstruktion unendlich weiter fortsetzen kann, führt die Annahme eines gemeinsamen Maßes, ähnlich wie beim Quadrat, zum Widerspruch.

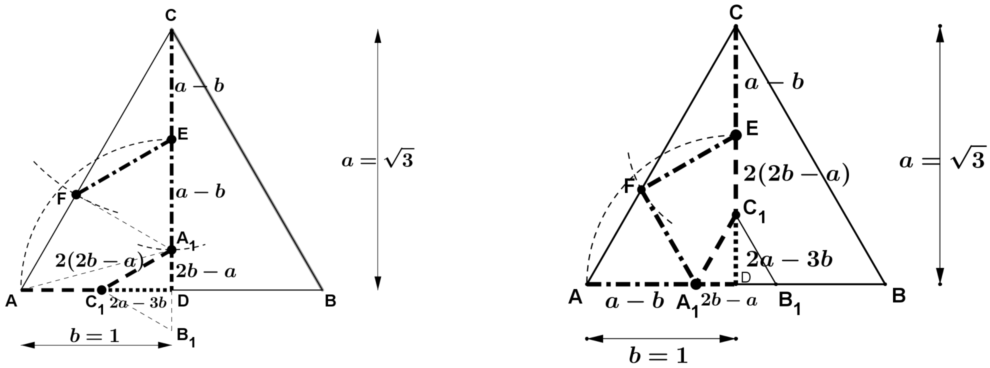

Abb. 5: Wechselwegnahme beim gleichseitigen Dreieck

Von der Geometrie zur Algebra

Was kann man aus der Abb. über $\sqrt{3}$ ablesen? Auf dem rechten Bild erkennt man, dass

$$\sqrt{3} = |CD| = |AD| + |CE| = 1 + |CE| \qquad (1)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke A_1DC_1 und ADC folgt, dass $\frac{|A_1D|}{|AD|} = \frac{|C_1D|}{|CD|}$, d.h. $\frac{1-|CE|}{1} = \frac{\sqrt{3}-|CE|-2(1-|CE|)}{\sqrt{3}}$. Daraus ergibt sich, dass $|CE| = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (1) ein, so folgt die bekannte Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 1 + \frac{2}{2+\frac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2+\cdots}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\cdots}}} = [1; \overline{1,2}]$$

Hat man sich hier Erkenntnisse aus der Geometrie im Kontext der Algebra zu Nutze gemacht, stellt sich die Frage, ob das auch umgekehrt möglich ist.

Von der Algebra zur Geometrie

Für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ gibt es verschiedene algebraische Beweise (vgl. Harris), für die vorliegende Arbeit betrachtet man Fermats Beweis mit der Methode des unendlichen Abstiegs (vgl. Harris). Aus der Annahme, dass $\sqrt{3} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}$, folgt nach Umformung, dass $\frac{a}{b} = \frac{3b-a}{a-b}$, wobei $3b - a, a - b \in \mathbb{N}$ und $3b - a < a, a - b < b$. Nun stellt sich die Frage, ob man im vorherigen gleichseitigen Dreieck das Verhältnis $\frac{3b-a}{a-b}$ finden kann. Dafür verlängert man die Seite BC über B hinaus um die Länge b und schlägt um C einen Kreis mit Radius a.

Das entstandene Dreieck $A_1D_1C_1$ bildet die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Seitenverhältnis $\frac{|C_1D_1|}{|A_1D_1|} = \frac{3b-a}{a-b}$. Diese Konstruktion kann man unendlich weiter fortführen. Dadurch entsteht eine unendliche Kette gleichseitiger Dreiecke mit Seitenverhältnissen, bei denen sowohl Zähler als auch Nenner immer kleiner werdende natürliche Zahlen sind, was schließlich zum Widerspruch führt.

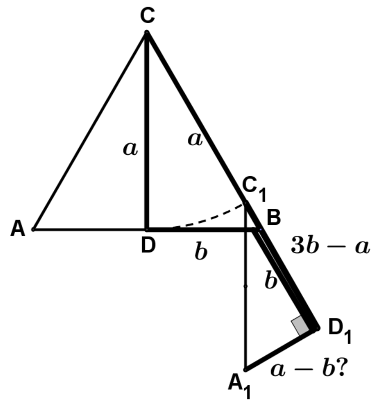

Abb. 6: Unendliche Dreieckskette

Der/die interessierte Leser/in ist eingeladen, weitere Möglichkeiten für die Erstellung des Verhältnisses $\frac{3b-a}{a-b}$ im Dreieck ABC zu finden.

Literatur

Harris, V. C. (1971). On Proofs of the Irrationality of $\sqrt{\mathbf{2}}$. *The Mathematics Teacher*, 64(1), 19-21.

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung Rheinland-Pfalz (1998). *Lehrplan Mathematik: Gymnasiale Oberstufe*.

Schmid, A. & Weidig, I. (Hrsg.) (2001). *Lambacher Schweizer 9, Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium*. Stuttgart: Ernst Klett.

Spies, S. (2012). Schön irrational! – Irrational schön? Ein klassischer Unterrichtsgegenstand aus mathematikästhetischer Perspektive. *mathematica didactica*, 35, 5-24.

Toeplitz, O. (1949). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*. Berlin: Springer.

Wittenberg, A. I. (1963). *Bildung und Mathematik*: *Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach.* Stuttgart: Ernst Klett