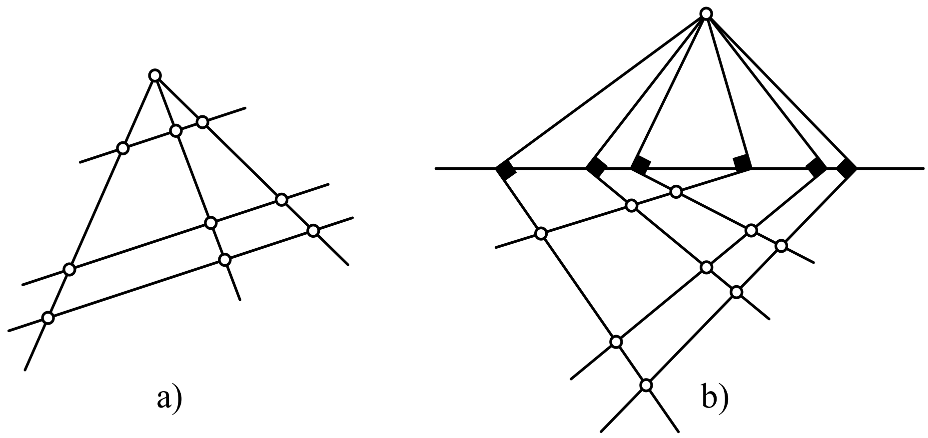
Hans WALSER, Uni Basel

Vom Strahlensatz zum Strahlensatz – Motive und Phänomene

Zusammenfassung: Ausgehend von einem didaktischen Fehler in einem Arbeitsblatt ergibt sich eine Gedankenreise, welche beim Strahlensatz beginnt und über verschiedene Stationen wie Parabel, Symmetrie, Faltgeometrie und rechte Winkel wieder zum Strahlensatz führt.

1. Der Strahlensatz

Der Strahlensatz ist ein ästhetisches Ärgernis: In der Strahlensatzfigur (Abb. 1a) haben wir einerseits eine Schar paralleler Geraden und andererseits eine Geradenschar durch einen Punkt. Das sind begrifflich asymmetrische Vorgaben. Die Satzaussage ist aber symmetrisch: In beiden Geradenscharen sind je entsprechende Teilverhältnisse gleich.



a) b)

Abb. 1: Gleiche Teilverhältnisse

Eine begrifflich symmetrische Situation ergibt sich so (Abb. 1b): Wir beginnen mit einem Punkt und einer nicht durch diesen Punkt verlaufenden Geraden. Nun passen wir zwei Sets von je drei rechten Winkeln – Winkeleisen aus Großvaters Werkstatt – ein so dass die Scheitel der rechten Winkel auf der Geraden liegen und jeweils ein Schenkel durch den Punkt verläuft. Die anderen Schenkel schneiden sich wechselseitig. Diese Schnittpunkte unterteilen die Schenkel je im gleichen Verhältnis. Im Beispiel der Abbildung 1b sind es die Verhältnisse 2:1 und 5:2. Der rechnerische Beweis führt zu interessanten Formeln. Im Vortrag hatten die Teilnehmer Gelegenheit dieselbe Situation durch einen Faltprozess herzustellen. Für Winkel ungleich 90° sind die Teilverhältnisse nicht mehr invariant, wie ein Vortragsteilnehmer gleich nachwies.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Der gewöhnliche begrifflich asymmetrische Strahlensatz erweist sich zwar nicht als Sonderfall, aber doch als Grenzfall der Figur der Abbildung 1b. Dies wird durch die Figurensequenz der Abbildung 2 illustriert. Der Punkt wird dabei gegen die Gerade heruntergedrückt. Die Winkel auf der linken Seite drehen sich um den Scheitelpunkt. Die Winkel auf der rechten Seite verschieben sich parallel nach links.

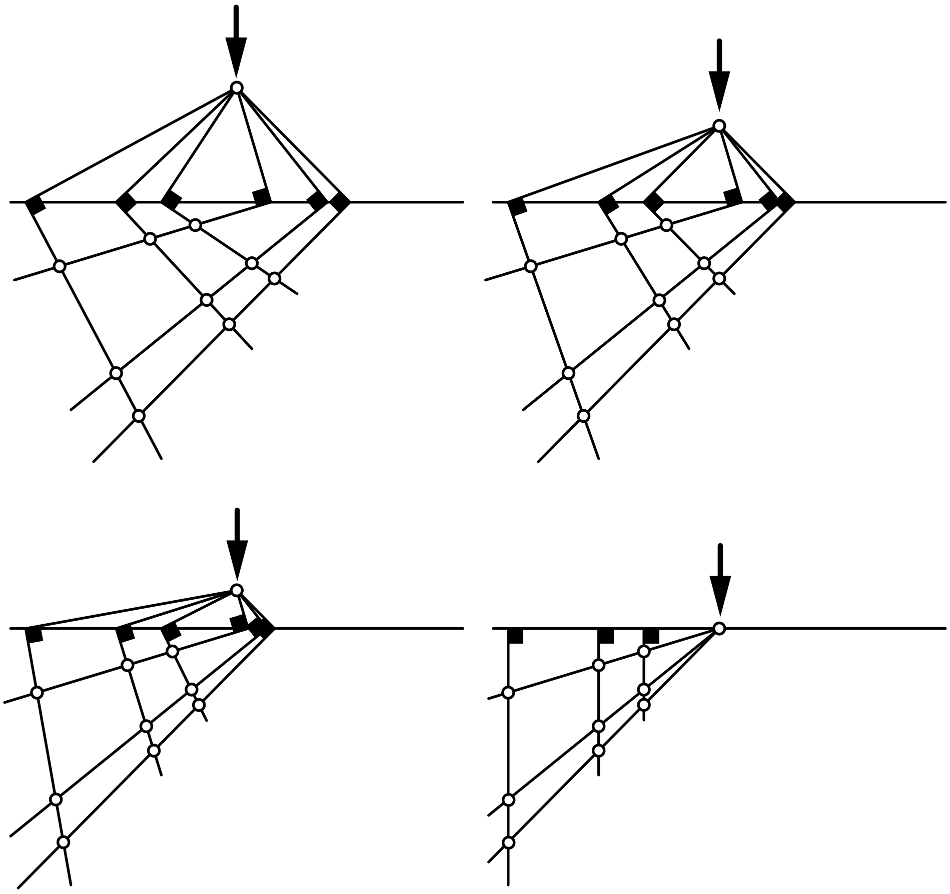


Abb. 2: Strahlensatz als Grenzfall

2. Der didaktische Fehler

In einem Arbeitsblatt (8. Schuljahr) war zu lesen:

Eigenschaften der Trapeze
• Jedes Trapez hat ein Paar gegenüberliegender paralleler Seiten.
• Beide Mittellinien halbieren sich.

Dies ist zwar sachlich richtig, didaktisch aber falsch. Die erste Zeile ist definierend für das Trapez, die zweite gilt in jedem Viereck (Abb. 3a).

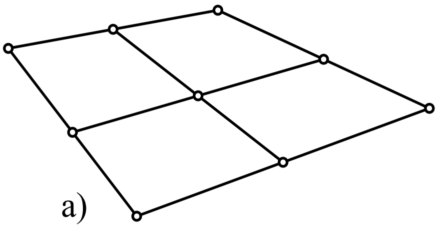


Abb. 3: Halbieren und Dritteln

Dabei stellt sich unmittelbar die Frage, ob Entsprechendes auch für Dritteln (Abb. 3b) oder weiteres Unterteilen gilt. Ein Vortragsteilnehmer gab dem Referenten einen eleganten elementargeometrischen Beweis für das Dritteln. Für den allgemeinen Fall gestaltet sich ein induktiver geometrischer Beweis recht aufwändig. Ein weiterer Vortragsteilnehmer lieferte dazu einen schönen rechnerischen Beweis.

3. Viereckraster

Wir kehren nun die Situation um und beginnen mit einem Viereck, das keine parallelen Seiten enthält. Die Viereckseiten erweitern wir mit je äquidistanten Punkten (Abb. 4a).

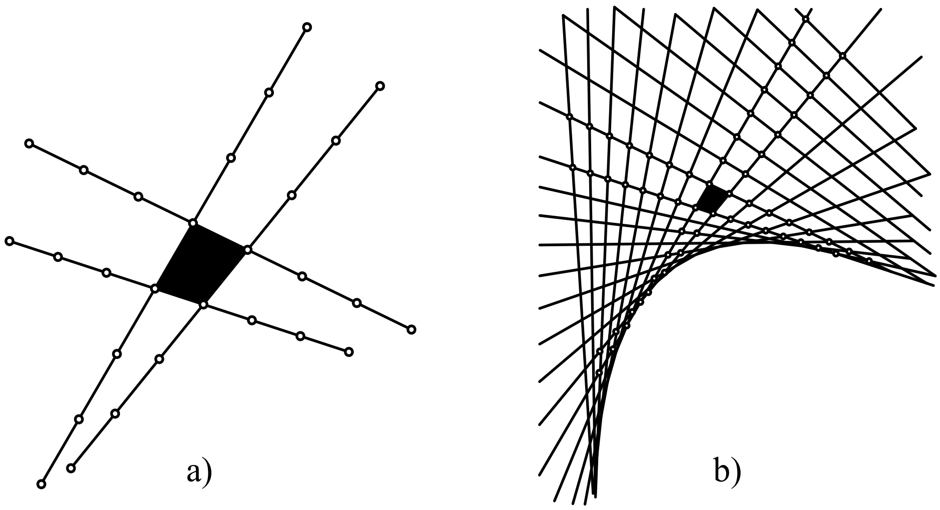


Abb. 4: Viereckraster

Durch entsprechende Punkte legen wir neue Geraden und erhalten so einen Viereckraster (Abb. 4b). Die Kontur (Enveloppe) ist eine schräge Parabel.

4. Parabeltangenten

Nun kehren wir die Sicht nochmals um und beginnen mit einer Parabel, an die wir zweimal drei Tangenten legen (Abb. 5).

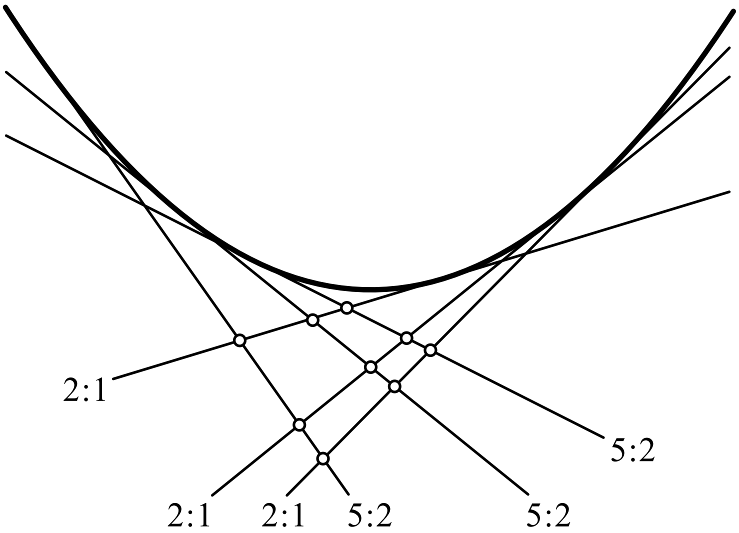


Abb. 5: Parabeltangenten

Es erscheinen wiederum gleiche Teilverhältnisse auf den Tangentenscharen. Damit kommen wir zum Eingangsbeispiel (Abb. 1b) zurück. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass sowohl die Winkeleisenkonstruktion wie auch das mit den Vortragsteilnehmern durchgeführte Faltprozedere sich mit Parabeltangenten erklären lassen.

Entsprechendes geht nicht mit Kreis, Ellipse oder Hyperbel.

Der Vortragende war sehr erfreut über die vielen Reaktionen der Vortragsteilnehmer. Er hat dabei viel gelernt und weiterführende Anregungen erhalten.

Unterlagen: www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/Vortrag89/index.html